



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GEOMETRÍA A PARTIR DE
ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO EN LA
CORRESPONDENCIA ADS/CFT

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:
ALBERTO LEOBARDO LANDETTA
SALAZAR



TUTOR
DR. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Landetta

Salazar

Alberto Leobardo

5560668000

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

309569428

2. Datos del tutor

Dr.

Alberto

Güijosa

Hidalgo

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Rodolfo Patricio

Martínez

y Romero

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Saúl Noé

Ramos

Sánchez

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Mariano

Chernicoff

Minsberg

6. Datos del sinodal 4

Dr.

José Antonio Rafael

García

Zenteno

7. Datos del trabajo escrito

Geometría a partir de Entrelazamiento Cuántico en la Correspondencia AdS/CFT.

53 p.

2017

Índice general

INTRODUCCIÓN	2
1. MARCO TEÓRICO	5
1.1. Entrelazamiento cuántico	5
1.2. Entropía de Von Neumann	6
1.3. Teoría cuántica de campos	7
1.4. Teorías de campo conformes	10
1.5. Entropía de entrelazamiento en QFT	11
1.6. Entropía de entrelazamiento en agujeros negros	13
2. CORRESPONDENCIA HOLOGRÁFICA	15
2.1. Teoría de cuerdas y D-branas	15
2.2. p-branas negras	19
2.3. Deducción de la correspondencia holográfica	19
2.4. Espacio Anti de Sitter	21
3. ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO HOLOGRÁFICA	25
3.1. Fórmula de Ryu-Takayanagi	25
3.2. Cálculos de la entropía de entrelazamiento en holografía	27
3.2.1. Entropía de entrelazamiento para un intervalo en una CFT_2	27
3.2.2. Entropía de entrelazamiento para un disco en una CFT_3	28
3.3. Entropía diferencial	30
3.3.1. Curvas en el bulto	31
3.4. Puntos y distancias	32
3.4.1. Distancia entre dos puntos	33
3.5. Curvas cerradas y puntos en Poincaré	34
3.5.1. Círculo centrado en el origen de las coordenadas globales	34
3.5.2. Círculos fuera del origen de las coordenadas globales	37
4. ENTROPÍA DIFERENCIAL EN POINCARÉ	41
4.1. Entropía diferencial a tiempo constante	42
4.1.1. Longitud de una curva	42
4.1.2. Puntos en el bulto	43
4.1.3. Distancia entre dos puntos	44
4.2. Caso covariante	44
4.2.1. Longitud de una curva para $t \neq 0$	45
4.2.2. Curvas abiertas con tiempo variable	46
5. CONCLUSIONES	48

RESUMEN

La correspondencia holográfica o *AdS/CFT* es un sorprendente enunciado de equivalencia entre ciertas teorías con y sin gravedad. Una de sus principales utilidades es que nos da la posibilidad de entender de mejor manera algunas teorías cuánticas de campos. Cantidades en estas teorías que son muy complicadas de obtener con los métodos tradicionales se vuelven accesibles al utilizar la correspondencia. En específico, una cantidad de interés para este trabajo es la entropía de entrelazamiento. Dado un sistema cuántico dividido en dos subsistemas, esta cantidad nos informa qué tan correlacionados están los grados de libertad de un subsistema con su complemento. Para calcular dicha cantidad en la correspondencia *AdS/CFT*, uno de los caminos es recurrir a la fórmula de Ryu y Takayanagi, la cual nos dice que la entropía de entrelazamiento para una región espacial en una teoría de campos es proporcional al área de una cierta superficie mínima en la teoría gravitacional. Esta fórmula hace evidente la existencia de una relación entre la geometría y el entrelazamiento. Esta relación fue explotada para definir una nueva cantidad en la correspondencia *AdS/CFT* llamada entropía diferencial, la cual combina entropías de entrelazamiento de familias de regiones para construir superficies no mínimas. En este trabajo se estudia la forma en que esta cantidad es usada para construir dichas superficies, las propiedades que posee, y cómo a través de ella podemos definir puntos y calcular la distancia entre ellos. La entropía diferencial en un inicio se definió en coordenadas globales a tiempo constante, por lo que en este trabajo se plantea extender esta cantidad y la forma de construir curvas cerradas y abiertas en coordenadas de Poincaré. Se determina un término de superficie que contrarresta divergencias que surgen en el cálculo de la entropía diferencial en curvas abiertas, y una forma de calcular distancia entre puntos y por último, se generalizan estos resultados al caso de curvas en tiempo variable.

INTRODUCCIÓN

A través del tiempo, se han construido/desarrollado distintas teorías físicas para poder comprender el comportamiento de la naturaleza. Cada una de ellas tiene complicaciones, y muchas veces, es necesario hacer aproximaciones para facilitar los cálculos y hacer más sencilla la extracción de predicciones a partir de dicha teoría. El lenguaje de la teoría cuántica de campos ha demostrado ser una de las herramientas más completas para la descripción del comportamiento de las partículas elementales y cómo interactúan unas con otras. Usando esto se construyó el modelo Estándar, que resume exitosamente todo lo que entendemos sobre la composición básica del universo. Sin embargo, el modelo Estándar no abarca toda la descripción de la física fundamental, y en particular, no explica el origen microscópico de la gravedad. Adicionalmente, incluso para los aspectos que sí son correctamente descritos por el modelo Estándar, cuando las partículas interactúan a través de fuerzas muy intensas, nuestros métodos tradicionales para hacer cálculos no funcionan. Se deben buscar entonces otras opciones que nos permitan avanzar hacia la solución de estos problemas.

Un paso muy interesante en esta dirección se dio con el descubrimiento en 1997 de la llamada correspondencia *AdS/CFT* [1], que relaciona los conceptos de una teoría de campos y una teoría gravitacional. Ella nos ha servido ya como herramienta para describir situaciones con fuerzas muy intensas, y parece además darnos pistas muy útiles para visualizar el origen de la gravedad, problema que en última instancia equivale a preguntarnos de qué están hechos el espacio y el tiempo. Conviene aclarar que la correspondencia aún no puede describir directamente situaciones cien por ciento del mundo real, sino que nos da acceso a modelos simplificados de dichas situaciones. Como mencionamos desde un principio, el uso de modelos de este tipo, conocidos como "modelos de juguete", es habitual y necesario en muchas ramas de la física. Aún con esta limitación, la correspondencia *AdS/CFT* se ha establecido ya como una herramienta extremadamente útil. Su descubrimiento ha revolucionado la forma en que entendemos la física, ya que nos dice que una teoría sin gravedad puede ser completamente equivalente a teoría con gravedad. Es decir, que existe un diccionario que traduce entre estas teorías, y más aún, hay cantidades cuya obtención se facilita enormemente después de traducirlas con el diccionario de la correspondencia.

Una de estas cantidades es la entropía de entrelazamiento o entropía de *Von Neumann*. El entrelazamiento o enredamiento es la propiedad más peculiar de los sistemas cuánticos, que permite que tengan un comportamiento correlacionado incluso si están separados por una distancia arbitrariamente grande. La entropía de entrelazamiento cuantifica qué tan enredada o entrelazada está una parte de un sistema cuántica con el resto del sistema. También esta cantidad es idónea para problemas donde un observador solo tiene acceso a un subconjunto de los observables del conjunto completo asociadas a un sistema cuántico. Otras medidas del entrelazamiento existen, sin embargo la entropía posee propiedades de gran utilidad como la adición, convexidad, entre otras. En la correspondencia *AdS/CFT*, esta entropía se puede calcular con un simple problema geométrico, como lo demostraron Ryu y Takayanagi [2]. Czech y sus colaboradores [3] utilizaron las propiedades que dicha entropía posee, para a partir de esta definir una nueva cantidad conocida como entropía diferencial, con la cual se puede construir curvas en el bulto, definir puntos y distancias en el espacio en el cual vive la teoría gravitacional involucrada en la correspondencia *AdS/CFT*.

Esta tesis es un estudio de estas cantidades, en específico, como usar la entropía diferencial en coordenadas de Poincaré para reconstruir curvas en el bulto, ya que como se dijo desde un inicio, la entropía diferencial se construyó en coordenadas globales las cuales parametrizan todo el espacio anti-de Sitter a diferencia de las coordenadas de Poincaré que solo abarcan una porción del espacio-tiempo, es por esto que como trabajo original, se presenta una generalización de la entropía diferencial a las llamadas coordenadas de Poincaré, incluyendo el caso con curvas y puntos en tiempo variable.

La forma en que se desglosa el trabajo es la siguiente:

- Capítulo 1. Se dan los conceptos más básicos para el entendimiento de la entropía de entrelazamiento, la definición de esta en la mecánica cuántica, y sus implicaciones. Después se presenta un breve resumen de los conceptos fundamentales de teoría cuántica de campos, y en específico un tipo particular de teorías, llamadas teorías de campo conforme, donde de igual forma se dará una definición de la entropía de entrelazamiento. Finalmente se menciona la posible conexión entre la entropía de entrelazamiento y la entropía de agujeros negros.
- Capítulo 2. Esta parte tiene como finalidad dar las bases de la teoría de cuerdas, para formular la deducción de la correspondencia holográfica. Después se analiza cómo se define el espacio anti-de Sitter, y las diferentes coordenadas en que este espacio se puede visualizar.
- Capítulo 3. Se da una definición de entropía de entrelazamiento en la correspondencia *AdS/CFT*, y se dan algunos ejemplos de cómo calcular la entropía de entrelazamiento para los casos más sencillos. Después se da la definición de la entropía diferencial, y sus propiedades en coordenadas globales, y se hace una traducción de esta a coordenadas de Poincaré.
- Capítulo 4. Finalmente, se generaliza el concepto de entropía diferencial a coordenadas de Poincaré, y se muestra cómo es posible obtener las mismas propiedades que se encuentran en coordenadas globales. Se determina un término de superficie necesario para calcular la longitud de curvas abiertas, así como una forma de obtener la distancia entre puntos en este tipo de coordenadas. Por último, se hace un análisis de la entropía diferencial en coordenadas de Poincaré a tiempo variable.
- Conclusiones. Se presenta un breve resumen de los resultados de esta tesis.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

1.1. Entrelazamiento cuántico

En mecánica cuántica uno trata con observables y con estados. Los observables se describen matemáticamente por operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert, y los estados se pueden caracterizar de manera general por el llamado operador o matriz de densidad. El estado de un sistema cuántico se conoce completamente si puede representarse mediante un cierto estado $|\psi\rangle$, conocido como estado puro, en el espacio de Hilbert. Si la información que se posee del sistema es incompleta, entonces se debe representar por una mezcla de estados $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$, o estado mixto, que tiene probabilidades p_1, \dots, p_n de que se encuentre en alguno de ellos. Se puede escribir la mezcla estadística entre estados $|\psi_n\rangle$ mediante el operador de densidad

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad . \quad (1.1)$$

Un operador A puede darnos una representación matemática de la medición de una cierta cantidad física en nuestro sistema. En particular, el valor esperado para esa cantidad viene dado por

$$\langle A \rangle = \sum_n p_n \langle \psi_n | A | \psi_n \rangle \quad , \quad (1.2)$$

donde los $|\psi_n\rangle$ son una base y se está suponiendo que cada $|\psi_n\rangle$ está normalizado. Dado esto, el valor esperado se puede expresar en términos del operador de densidad,

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A) \quad . \quad (1.3)$$

Supongamos que se tiene un sistema descrito por vectores que viven en un espacio de Hilbert, denotado por H . Podemos dividir el sistema total en dos subsistemas A y B (notando que físicamente no estamos alterando al sistema) como se puede ver en un ejemplo en la figura 1.1. El espacio total de Hilbert H se puede separar entonces como el producto directo de estos dos subespacios, $H = H_A \otimes H_B$, que corresponden a los subsistemas A y B respectivamente.

De igual forma, podemos definir el operador de densidad ρ asociado al estado del sistema completo. Decimos que el operador ρ es separable si es posible factorizarlo en la forma

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \quad . \quad (1.4)$$

Aquellos estados que no pueden ser escritos en esta forma se llaman *entrelazados* o *enredados*. Este trabajo tratará precisamente con estados entrelazados y se considerarán situaciones en las que solo se tiene acceso a una parte del sistema total. Definimos la matriz de densidad reducida ρ_A

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho) \quad , \quad (1.5)$$

donde la traza es tomada solo sobre el espacio de Hilbert H_B . Se puede observar que, si los grados de libertad de A y B están entrelazados, entonces la matriz de densidad reducida corresponde a un estado mixto en la región A . Tiene una cierta probabilidad p_i de que el sistema se encuentre en cada uno de los estados $|\psi_1\rangle \dots |\psi_n\rangle$ y, cada uno de estos pesos estadísticos ahora dependen de los grados de libertad de B . Es por eso que si se hace una medición en la región B , esta afectará directamente a la región A . Al hacer una medición y separar al sistema se pierde la información del sistema total, sin embargo esta información se encuentra codificada en el entrelazamiento entre las dos regiones.

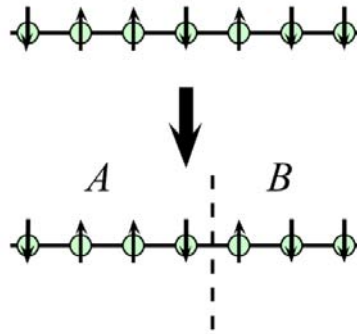


Figura 1.1: Representación de la división de un sistema cuántico total en dos regiones, A y B . (Imagen tomada de [4]).

1.2. Entropía de Von Neumann

Para tener una medida escalar del entrelazamiento entre dos regiones, la entropía de entrelazamiento se define como la entropía de Von Neumann de la matriz de densidad reducida del sistema A como

$$S_A = -\text{Tr}_A \rho_A \log \rho_A \quad . \quad (1.6)$$

Esta cantidad nos dice qué tan no puro es el estado ρ_A , y por lo tanto, qué tan entrelazada está la región A con la región B . Hay que tener presente que la entropía no es una observable (en el sentido de un operador) sino que es una función del estado.

Recordemos que en estadística la entropía S de un sistema se define como $S = k_B \ln(\Omega)$ y mide la cantidad de desorden del sistema. Este grado de desorden está asociado a la cantidad de microestados que de alguna manera pueden generar un estado macroscópico con las mismas características. El número de microestados no es otra cosa que el número de estados puros en los que se puede encontrar al sistema. Es posible definir la entropía de entrelazamiento $S_A(\beta)$ a una temperatura finita $T = \beta^{-1}$. Esto se puede hacer simplemente sustituyendo en la ecuación (1.1) la matriz de densidad térmica $\rho_{\text{térmico}} = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$, donde H es el Hamiltoniano del sistema y Z es la función de partición.

Existen muchas propiedades útiles que cumple de manera general la entropía, sin embargo aquí solo se resumirán algunas de las más importantes:

- Para toda matriz de densidad ρ , la entropía de Von Neumann $S(\rho)$ siempre es positiva,

$$S(\rho) \geq 0 \quad . \quad (1.7)$$

- Si la matriz de densidad total definida en la ecuación (1.1) es un estado puro y se tiene que el sistema total está dividido en dos subsistemas A y B , entonces se encuentra que

$$S_A = S_B \quad . \quad (1.8)$$

De aquí se sigue inmediatamente que la entropía de entrelazamiento no es una cantidad extensiva, es decir, no es proporcional al tamaño de los subsistemas. Esta propiedad no se cumple cuando se tiene un sistema a temperatura finita, que corresponde como ya dijimos a un estado mezcla.

- Cuando se tienen tres subsistemas A , B y C que no se intersectan entre ellos, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$S_{A+B+C} + S_B \leq S_{A+B} + S_{B+C} \quad , \quad (1.9)$$

$$S_A + S_C \leq S_{A+B} + S_{B+C} \quad . \quad (1.10)$$

Estas desigualdades en conjunto se conocen como condición de subaditividad fuerte y son las más útiles de las propiedades de la entropía de entrelazamiento que aquí se presentan.

- Si tomamos B como vacío y sustituimos eso en la ecuación (1.9), encontramos la relación de subaditividad

$$S_{A+B} \leq S_A + S_B \quad . \quad (1.11)$$

Esta última desigualdad nos arroja una cantidad interesante llamada información mutua $I(A, B)$, dada por

$$I(A, B) = S_A + S_B - S_{A+B} \geq 0 \quad . \quad (1.12)$$

La información mutua nos da una medida entre las correlaciones de los subsistemas A y B .

Hasta ahora, solo se ha hablado del entrelazamiento en mecánica cuántica, donde el espacio de Hilbert está asociado a un número finito de grados de libertad. Ahora se discutirá la entropía de entrelazamiento para una subdivisión espacial de los infinitos grados de libertad en una teoría de campos. Aunque este no sea el tema central de este trabajo, buscaremos de manera general dar una idea conceptual de qué es la entropía en una teoría de campos y la forma en que se puede calcularla, es por ello que se debe dar una breve explicación de qué es una teoría de campos.

1.3. Teoría cuántica de campos

La teoría cuántica de campos *QFT*, por sus siglas en inglés, es la aplicación de la mecánica cuántica a un sistema dinámico de campos. Explícitamente, se busca la manera de formular un campo a través de una acción, y al cuantizar una mínima perturbación de dicho campo nos arroja un tipo de partículas, de acuerdo al tipo de campo que se esté describiendo. Para cuantizar la teoría podemos, de igual forma que en mecánica cuántica no relativista, promover ϕ , el operador de campo, y π , la densidad de momento canónico, a operadores, los cuales satisfacen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \\ [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] &= [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.13)$$

En una *QFT* local el Lagrangiano se puede escribir como la integral espacial de la densidad Lagrangiana, \mathfrak{L} , que es una función de uno o más campos $\phi(x)$ y sus derivadas $\partial_\mu \phi$,

$$S = \int \mathfrak{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x \quad , \quad (1.14)$$

y usando el principio de mínima acción se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange para campos,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi} = 0 \quad . \quad (1.15)$$

El ejemplo más sencillo que se puede estudiar es el campo escalar libre, el cual queda descrito por el Lagrangiano

$$S = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad . \quad (1.16)$$

Usando la ecuación (1.15) nos queda que la ecuación de movimiento, conocida como la ecuación de *Klein-Gordon*, está dada por

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \quad . \quad (1.17)$$

La solución a esta ecuación se puede describir usando la transformada de Fourier en el espacio de momentos. Esto se puede hacer ya que la ecuación es lineal por lo que es válido el principio de superposición. Dicha solución está en términos de los operadores de creación y aniquilación, $a_{\mathbf{p}}$ y $a_{\mathbf{p}}^\dagger$, los cuales satisfacen las relaciones de conmutación ya conocidas para un oscilador armónico,

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] &= 1 \quad , \\ [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}] &= [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.18)$$

La función Hamiltoniana queda determinada por la fórmula clásica $H = \int d^3x (\pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L})$, con lo cual, si introducimos la expansión de los operadores $\phi(t, \mathbf{x})$ y $\pi(t, \mathbf{x})$ se obtiene

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad , \quad (1.19)$$

donde se define $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{P}|^2 + m^2}$ como la frecuencia del oscilador. Esto nos indica que el espectro de energía del sistema es la suma del número de partículas del sistema que tienen una energía relativista $\omega_{\mathbf{p}}$. El operador de creación $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ crea una partícula con momento \mathbf{p} y energía $\omega_{\mathbf{p}}$, con lo cual si consideramos un sistema con dos partículas, $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle$ en el cual las partículas son intercambiables porque este sistema es idéntico a $a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$. De esto se concluye que las partículas que se obtienen al estudiar el campo de Klein-Gordon son bosones. Para una descripción en este lenguaje tanto de bosones como de fermiones es necesario escribir una acción que involucre a este tipo de partículas. El Lagrangiano correspondiente más sencillo se conoce como la acción de *Dirac*

$$S_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad , \quad (1.20)$$

donde γ^μ son matrices que satisfacen el álgebra de Clifford y se define como el adjunto de Dirac a $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Esta acción al cuantizarla describe partículas y anti-partículas de masa $|m|$ y espín 1/2. Usando de nueva cuenta la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos

$$(i\partial - m) \psi = 0 \quad , \quad (1.21)$$

donde se define como $\partial \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$. Al igual que en el campo escalar, la solución se puede describir usando la transformada de Fourier en el espacio de momentos, sin embargo como este campo describe fermiones tendremos que dicha solución estará dada en términos de $b_{\mathbf{p}}^s$ y $c_{\mathbf{q}}^r$ partícula y anti-partícula respectivamente, que satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\begin{aligned} \{b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{\dagger s}\} &= (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad , \\ \{c_{\mathbf{p}}^r, c_{\mathbf{q}}^{\dagger s}\} &= (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad , \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde cualquier otra combinación de anti-conmutadores es igual a cero. Los índices r y s indican el tipo de espinor empleado, haciendo referencia a una base de soluciones a la ecuación de Dirac.

A pesar de que los campos previamente descritos nos dan una descripción de partículas bosónicas y fermiónicas, son dos teorías de campo libres. Para tener una mejor descripción del mundo

real debemos considerar términos extras en el Lagrangiano, de orden más alto que cuadrático, para obtener una teoría interactuante. Por ejemplo

$$S = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4 \quad , \quad (1.23)$$

donde g es la constante de acoplamiento y controla la intensidad de las interacciones. El objetivo principal de la teoría de campos es calcular las llamadas funciones de correlación

$$G_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0|T\{\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\}|0\rangle \quad . \quad (1.24)$$

Básicamente representan la amplitud de probabilidad de empezar con un número de partículas, situados en algún punto en el espacio-tiempo y terminar con otro número en un sitio distinto. Si la teoría se encuentra débilmente acoplada, es decir las constantes de acoplamiento son pequeñas, entonces las funciones de correlación se pueden calcular haciendo una expansión perturbativa con g . Sin embargo cuando $g \gg 1$ la expansión perturbativa se vuelve completamente inútil. Aun cuando la teoría se encuentra débilmente acoplada la serie perturbativa no converge por lo que este método no nos da una completa información de lo que sucede. Un ejemplo de una teoría de campos donde los efectos del acoplamiento fuerte son importantes es la cromodinámica cuántica *QCD*, por sus siglas en inglés, que describe la interacción fuerte. En *QCD* las partículas con carga fuerte son llamadas quarks, que son descritos por campos de Dirac $\Psi_{\alpha c}^{(s)}(x)$, con $\alpha = 1, 2, 3, 4$ un índice espinorial, $s = 1, \dots, N_s$ el índice de sabor, $c = 1, 2, 3$ los colores, rojo verde y azul, que son distintos tipos de carga fuerte. Estos colores se mezclan entre sí bajo el grupo de norma $SU(3)$. La partícula mensajera de la interacción fuerte es el gluón, que queda descrita por un campo vectorial $A_\mu(x)$, conocido como campo gluónico. Este es un campo de norma, lo cual nos permite definir la derivada covariante $D_\mu \equiv \partial_\mu + ig_f A_\mu(x)$. A partir de A_μ se define también lo que es la intensidad de campo

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{ig_f} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_f [A_\mu, A_\nu] \quad . \quad (1.25)$$

Si se considera solo al campo gluónico, la teoría más sencilla que se puede escribir queda descrita por la acción de *Yang-Mills* (*YM*), es decir una teoría sin quarks ($N_s = 0$),

$$S_{YM} = -\frac{1}{2}\text{Tr} [F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)] \quad . \quad (1.26)$$

Es importante resaltar que la acción S_{YM} contiene términos cúbicos y cuárticos, por lo tanto no es una teoría libre. g_f es la magnitud de la carga fuerte, que controla la intensidad con que los quarks se acoplan a los gluones y también la intensidad con que los gluones se acoplan entre sí. Por lo que para la acción de *YM* la denotaremos como g_{YM} . Debido a que aun está lejos un completo entendimiento para teorías fuertemente acopladas, se busca construir teorías de juguete con las cuales se pueda obtener alguna información cuando menos cualitativa aplicable a estas teorías. Una opción es tomar *YM* (con o sin quarks) con grupo de norma $SU(N_c > 3)$, es decir, con un número mayor de colores [5]. En particular, resulta útil tomar el límite

$$N_c \rightarrow \infty \quad \text{con} \quad \lambda \equiv g_{YM}^2 N_c \quad \text{fijo} \quad . \quad (1.27)$$

Si bien esto implica que $g_{YM}^2 \rightarrow 0$, la teoría no se vuelve libre. La amplitud para que un gluón de color dado interactúe tiende a cero, pero hay gluones $O(N_c^2)$ de colores distintos y la amplitud de interacción con alguno de ellos es finita y proporcional a λ . A este parámetro se le conoce como constante de *'t Hooft* y juega un papel muy importante en el análisis perturbativo en la teoría *YM* con un grupo de norma $SU(N_c)$. Esta teoría es de suma importancia para este trabajo ya que, como se verá en el siguiente capítulo, figura en la dualidad holográfica entre una teoría de gravedad y una teoría de campo con un simetría conforme.

1.4. Teorías de campo conformes

Se define una transformación de *Weyl* como un reescalamiento local de la métrica,

$$g_{\alpha\beta}(x) \longrightarrow g'_{\alpha\beta}(x) = \Omega^2(x)g_{\alpha\beta}(x) \quad . \quad (1.28)$$

Se debe recordar que bajo una reparametrización la métrica cambia de acuerdo con

$$g_{\alpha\beta}(x) \longrightarrow g'_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho}(x) \quad . \quad (1.29)$$

Definimos una reparametrización conforme como aquella bajo la cual

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g'(x')_{\mu\nu} = \omega^2(x)g_{\mu\nu}(x) \quad . \quad (1.30)$$

En este caso, podemos cancelar el cambio de métrica usando una transformación de Weyl con $\Omega(x) = \omega^{-1}(x)$, y el efecto neto de esto se conoce como una transformación conforme. Estas transformaciones se llaman conformes porque a pesar de que sí cambian las distancias propias, lo hacen solo por un reescalamiento local, de modo que no se modifican los ángulos entre los vectores. Una teoría conforme (*CFT*) es una teoría de campo que es invariante bajo estas transformaciones. Esto significa en particular que la física de la teoría es la misma a diferentes escalas de longitud.

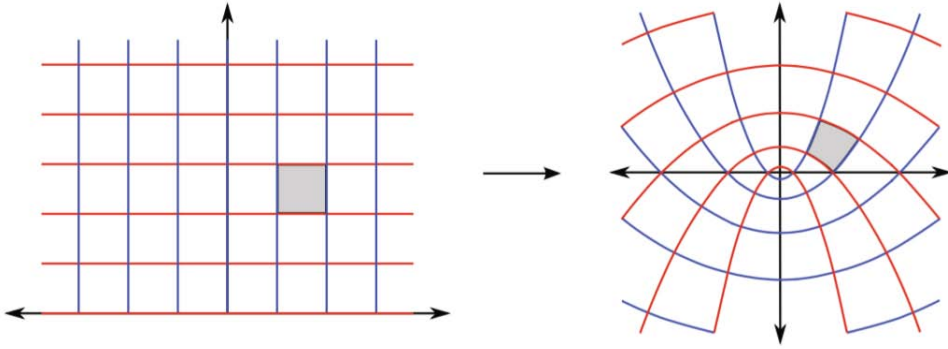


Figura 1.2: Transformación conforme en dos dimensiones (Imagen tomada de [6]).

El caso de mayor interés para este trabajo son las teorías de campo en espacios planos, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. A nivel infinitesimal, $x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$, el cambio de la métrica está dado por

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon g_{\mu\nu}(x) &= \nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu = \omega^2(x)g_{\mu\nu}(x) \\ &= \frac{2}{d} \nabla_\rho \epsilon^\rho g_{\mu\nu} \quad . \end{aligned} \quad (1.31)$$

A la última ecuación se le conoce como la *ecuación de Killing conforme*. En el fondo plano las transformaciones infinitesimales están parametrizadas por $\epsilon^\mu(x)$ que satisfacen

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \epsilon^\rho \quad . \quad (1.32)$$

Tomando $d = 2$ existen infinitas soluciones, sin embargo cuando $d > 2$ son a los más cuadráticas en x :

$$\begin{aligned} e^\mu &= a^\mu \quad \text{Traslaciones} \quad , \\ e^\mu &= \omega^\mu_\nu x^\nu \quad \text{Lorentz} \quad , \\ e^\mu &= \delta s x^\mu \quad \text{Dilataciones} \quad , \\ e^\mu &= b^\mu x^2 - 2b \cdot x x^\mu \quad \text{Especiales} \quad . \end{aligned} \quad (1.33)$$

Estas son todas las transformaciones conformes conectadas con la identidad, sin embargo la inversión

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2} \quad , \quad (1.34)$$

que es una transformación discreta, también es conforme. Se puede ver que la inversión mapea algunos puntos al infinito, por lo que en sentido estricto la acción del grupo conforme está bien definida sobre Minkowski más puntos en el infinito. Las teorías conformes son fundamentales, ya que gobiernan el comportamiento a ultra-altas energías de las teorías de campo y en algunos casos también a ultra-bajas energías.

Si consideramos YM con grupo de norma $SU(N_c)$, incluyendo por tanto al campo gluónico, y añadimos seis campos escalares sin masa $\Phi^e(x)$ y cuatro espinores de Weyl izquierdos sin masa $\Psi(x)^f$, acoplados con términos cúbicos y cuárticos específicos, se obtiene una teoría conforme conocida como *Yang-Mills máximamente supersimétrica (MSYM)*, o *Super-Yang-Mills (SYM)* con supersimetría $\mathcal{N} = 4$. El término “súper” en el nombre de la teoría se debe a que posee supersimetría, es decir, es invariante bajo transformaciones que mezclan entre sí a los campos bosónicos y fermiónicos. Su acción está dada por

$$S_{MSYM} = \text{Tr} \left\{ -\frac{1}{2g_{YM}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta_{YM}}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \sum_e D_\mu \Phi^e D^\mu \Phi^e - \sum_f i \bar{\Psi}^f \bar{\sigma}^\mu D_\mu \Psi^f + \dots \right\} \quad , \quad (1.35)$$

donde θ_{YM} es el ángulo zeta que es relevante en configuraciones topológicamente no triviales. Esta teoría puede obtenerse como reducción dimensional de SYM con supersimetría $\mathcal{N} = 1$ en $9+1$ -dimensiones. Una vez descrita la acción de la CFT que nos interesa en este trabajo, podemos regresar al tema del entrelazamiento.

1.5. Entropía de entrelazamiento en QFT

Hasta ahora, solo se ha hablado del entrelazamiento en mecánica cuántica, donde el espacio de Hilbert de un subsistema tiene dimensión finita. Ahora se discutirá la entropía de entrelazamiento para una subdivisión espacial de los infinitos grados de libertad en una teoría de campos. Aunque este no sea el tema central de este trabajo, buscaremos de manera general dar una idea conceptual de qué es la entropía en una teoría de campos y la forma en que se puede calcularla.

Consideremos una teoría de campos en una variedad $\mathbb{R} \times N$ ($d+1$)-dimensional, donde \mathbb{R} denota la dirección del tiempo y N el espacio d -dimensional. Podemos definir de manera general un subsistema d -dimensional $A \subset N$ a un tiempo fijo t_0 , donde su complemento lo llamaremos B . La frontera de A la podemos denotar como ∂A , lo cual divide a nuestra variedad N en dos partes, A y B , como se muestra en la figura 1.3. Ahora podemos definir la entropía S_A , tal y como se hizo en la sección 1.2. usando la ecuación (1.6).

Sin embargo, debemos tomar en cuenta un punto muy importante. En estas teorías de campo continuas existen las divergencias UV, que se deben a la contribuciones de excitaciones a muy altas energías o, equivalentemente, a escalas muy pequeñas. En particular, infinitos grados de libertad de A y B son vecinos a lo largo de la frontera ∂A , lo cual da lugar a una divergencia en la entropía de entrelazamiento. Para lidiar con este problema, debemos tomar un corte UV, el cual denotaremos como ϵ . Con este corte en distancias finitas, el espacio de Hilbert a su vez se vuelve de una dimensión finita. Los términos divergentes dependen de la teoría y de la forma de la región A . El comportamiento dominante de la entropía de entrelazamiento en d dimensiones espaciales es

$$S_A = \gamma \frac{\text{Área } \partial A}{\epsilon^{d-1}} + \dots \quad , \quad (1.36)$$

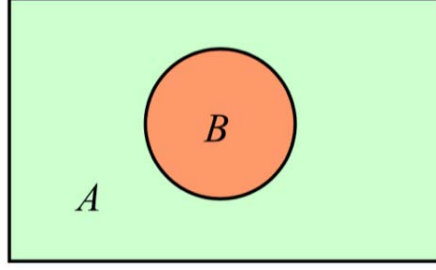


Figura 1.3: Representación de la división de un sistema en dos partes, A y B , en una teoría de campos d -dimensional, a un tiempo fijo, $t = t_0$. (Imagen tomada de [7]).

donde γ es una constante que depende del sistema. Esto se puede entender de una manera muy intuitiva debido a que el entrelazamiento entre dos regiones, ocurre en la frontera ∂A de una manera más fuerte, es decir, la región A está más entrelazada con B en dicha frontera.

Para calcular la entropía de entrelazamiento de manera general en una QFT , es común hacer uso del llamado *truco de réplica*. La demostración de este resultado puede encontrarse en [8]. Este método se puede dividir básicamente en tres pasos: tomar n copias de la matriz de densidad reducida y evaluar $\text{Tr}_A \rho_A^n$ en un espacio de réplicas, diferenciarlo con respecto a n y finalmente tomar el límite cuando $n \rightarrow 1$

$$S_A = - \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial n} (\text{Tr}_A \rho_A^n) \quad .$$

A este método se le denomina con este nombre debido a que lo que se está haciendo es evaluar $\text{Tr}_A \rho_A^n$, en un espacio de réplicas. Usando el formalismo de la integral de trayectoria se puede poner de la siguiente manera.

Por simplicidad, asumiremos que nuestra teoría es una QFT de dimensión dos. Aunque este resultado se puede generalizar para más dimensiones, no es de gran interés ni esencial para el trabajo desarrollado aquí; simplemente se busca dar un esbozo de cómo calcular la entropía usando este método. Supongamos que tenemos un intervalo A , $x \in [u, v]$ a $t_E = 0$ en un espacio plano euclidiano con coordenadas $(t_E, x) \in \mathbb{R}^2$. La funcional de onda Ψ del estado base, que corresponde al vacío, se puede encontrar integrando funcionalmente desde $t_E = -\infty$ a $t_E = 0$,

$$\Psi(\phi_0(x)) = \int_{t_E = -\infty}^{\phi(t_E=0, x) = \phi_0(x)} D\phi e^{-S(\phi)} \quad , \quad (1.37)$$

donde $\phi(t_E, x)$ denota el campo que define la QFT . Los valores del campo en la frontera ϕ_0 dependen de la coordenada espacial x . Ahora, por nuestra definición de la matriz de densidad total, que se analizó al inicio de este capítulo, tenemos que $\rho_{total} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ está dada en este caso por dos copias de la función de onda, $[\rho]_{\phi_0\phi'_0} = \Psi(\phi_0)\bar{\Psi}(\phi'_0)$. Para obtener la matriz de densidad reducida ρ_A , vemos que según la ecuación (1.5), debemos integrar ϕ_0 en B con la condición $\phi_0(x) = \phi'_0$ cuando $x \in B$.

$$[\rho]_{\phi_+\phi_-} = (Z_1^{-1}) \int_{t_E = -\infty}^{t_E = \infty} D\phi e^{-S(\phi)} \prod_{x \in A} \delta(\phi(+0, x) - \phi_+(x)) \cdot \delta(\phi(-0, x) - \phi_-(x)) \quad , \quad (1.38)$$

donde Z_1 es la función de partición en el vacío de \mathbb{R}^2 y se multiplicó la integral por su inversa para de este modo normalizar la matriz de densidad reducida ρ_A de modo que $\text{Tr}_A \rho_A = 1$. Este procedimiento se esquematiza en la figura 1.4(a). El punto de este procedimiento es evaluar $\text{Tr}_A \rho_A^n$, por lo que dada nuestra última ecuación hay que tomar n copias de esta misma, es decir

$$[\rho_A]_{\phi_{1+}\phi_{1-}} [\rho_A]_{\phi_{2+}\phi_{2-}} \cdots [\rho_A]_{\phi_{n+}\phi_{n-}} \quad . \quad (1.39)$$

En el lenguaje de la integral de trayectoria, esto se traduce pegando $\phi_{i\pm}(x)$ como $\phi_{i-}(x) = \phi_{(i+1)+}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) e integrando $\phi_{i+}(x)$. En este sentido $\text{Tr}_A \rho_A^n$ está dado en términos de la integral en una superficie de Riemann R_n (ver figura 1.4 (b)).

$$\text{Tr}_A \rho_A^n = (Z_1)^{-n} \int_{(t_E, x) \in R_n} D\phi e^{-S(\phi)} \equiv \frac{Z_n}{(Z_1)^n} \quad . \quad (1.40)$$

Se denota Z_n como la función de partición sobre una variedad que se obtiene de pegar las n copias del espacio original en la frontera ∂A . Aunque anteriormente ya se mencionó que este procedimiento se puede aplicar de forma general para d dimensiones, cálculos analíticos para obtener S_A se vuelven muy complicados. En esta dirección ha habido una gran cantidad de científicos que han trabajado para obtener resultados en ciertos sistemas [9][10].

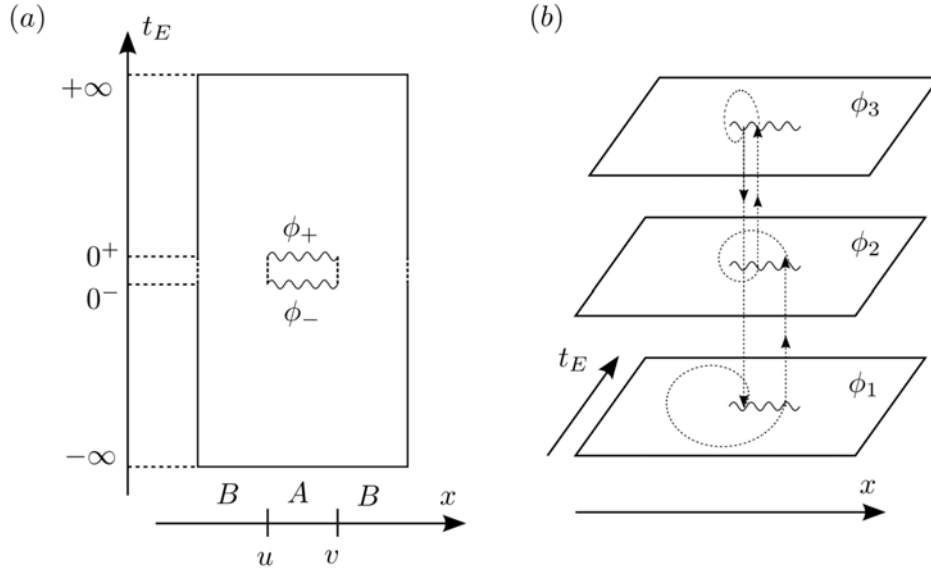


Figura 1.4: (a) Representa la integral funcional que calcula la matriz de densidad $[\rho_A]_{\phi_+, \phi_-}$ reducida. (b) Aquí se esquematiza la superficie de Riemann R_n , para $n = 3$. (Imagen tomada de [7]).

El cálculo de la entropía de entrelazamiento también se ha realizado en teorías cuánticas de campo libres en un fondo curvo. Es de particular interés el cálculo en agujeros negros ya que podría dar una explicación microscópica de las propiedades de dichos objetos.

1.6. Entropía de entrelazamiento en agujeros negros

En los 60's y 70's se encontró que el área del horizonte de eventos en un agujero negro, A_h y la *gravedad superficial*¹ k_s satisfacen las siguientes leyes de la mecánica de los agujeros negros [11]:

- *Ley cero*: La gravedad superficial k_s es constante sobre el horizonte de eventos.
- *Primera ley*: Para dos agujeros negros estacionarios que difieren solo por una pequeña variación en los parámetros M , J y Q se encuentra que

$$\delta M = \frac{k_s}{8\pi G} \delta A_h + \Omega_h \delta J + \Phi_h \delta Q \quad , \quad (1.41)$$

donde Ω_h es la velocidad angular en el horizonte y Φ_h el potencial electrostático.

¹Se define para agujeros negros estacionarios y representa la fuerza que debe ejercerse en infinito para mantener a una masa de una unidad en reposo junto al horizonte de eventos del agujero negro.

- *Segunda ley:* El área del horizonte de eventos nunca decrece, es decir

$$\delta A_h \geq 0 \quad . \quad (1.42)$$

- *Tercera ley:* Es imposible mediante cualquier procedimiento reducir la gravedad superficial k_s a cero en un número finito de pasos.

El llamar ley a cada punto del listado anterior, fue con la finalidad de mostrar que hay un emparejamiento con las leyes que ya conocemos de la termodinámica:

- *Ley cero:* La temperatura T es constante en todos los puntos de un cuerpo en equilibrio térmico.

- *Primera ley:* Conservación de la energía

$$\delta E = \delta C - \delta W \quad , \quad (1.43)$$

donde C es el calor y W es el trabajo del sistema.

- *Segunda ley:* La entropía nunca decrece en procesos dinámicos

$$\delta S \geq 0 \quad . \quad (1.44)$$

- *Tercera ley:* Es imposible alcanzar una temperatura $T = 0$ es un proceso físico.

Si comparamos cada una de las leyes de la termodinámica con las leyes de los agujeros negros, se encuentra que hay una transcripción de la energía E , con la masa M , lo cual tiene un perfecto sentido físico, y además podemos identificar a $S = \frac{\alpha}{8\pi} A_h$ y $T = \frac{1}{\alpha} k_s$ como la entropía y la temperatura de un agujero negro con α una constante de proporcionalidad. La identificación de $S \propto A_h$ fue argumentada por Bekenstein quien propuso que la segunda ley de la termodinámica debía generalizarse en presencia de un agujero negro a una segunda ley generalizada de la termodinámica,

$$\Delta S_{total} \equiv \Delta S_{BH} + \Delta S \geq 0 \quad , \quad (1.45)$$

donde ΔS_{BH} es la entropía del agujero negro. Sin embargo, desde una perspectiva clásica los agujeros negros no son capaces de emitir radiación, de modo que no se les puede asignar una temperatura física. Hawking mostró que a nivel cuántico eso sí sucedía, el agujero negro podía emitir radiación térmica de tal modo que pudo asignarle una temperatura, dada por

$$T_H = \frac{k_s \hbar}{2\pi K_B c^3} \quad . \quad (1.46)$$

Con esto, inmediatamente se fija el coeficiente de proporcionalidad en la entropía, llamada *entropía de Bekenstein-Hawking*,

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{\hbar} \cdot \frac{A_h}{4G_N} \quad . \quad (1.47)$$

Si vemos la ecuación (1.36) notaremos que hay una gran similitud con la entropía de agujeros negros de Bekenstein-Hawking, la cual es proporcional al área del horizonte de eventos. Podemos interpretar esta fórmula usando el mismo esquema utilizado en la figura 1.3. Supongamos que el espacio está dividido en dos regiones, B donde se encuentra nuestro agujero negro, A el resto del espacio y ∂B como el horizonte de eventos que, delimita al agujero negro con su interior y con el espacio donde se encuentra. Un observador que está en el subsistema A , no puede recibir ninguna señal de la región B por lo que natural para él tomar la traza sobre B y así asignarle a su estado una entropía. Esta similitud fue la motivación para buscar la estructura cuántica de los agujeros negros y encontrar una relación entre la entropía de entrelazamiento y el área de dicho sistema. En la descripción holográfica (tema que se abarcará en el siguiente capítulo), identificaremos la entropía de entrelazamiento para una QFT $(d+1)$ -dimensional, que corresponde a una cantidad geométrica en una teoría con gravedad $(d+2)$ -dimensional, relación que se puede tomar como una generalización de la entropía para agujeros negros.

Capítulo 2

CORRESPONDENCIA HOLOGRÁFICA

2.1. Teoría de cuerdas y D-branas

Una de las teorías más prometedoras para cuantizar la gravedad es la teoría de cuerdas. Esta toma como postulado principal que las excitaciones básicas no son partículas sino cuerdas, objetos unidimensionales con una longitud característica l_c . Dicho objeto puede oscilar de maneras distintas y cada uno de estos modos de oscilación resulta tener propiedades básicas de un tipo distinto de partícula. Cuando estudiamos la dinámica de una partícula puntual relativista, la acción que describe dicha dinámica es proporcional a la longitud propia de su línea de mundo. De manera análoga, cuando una cuerda se mueve a través del tiempo, la superficie que barre el objeto es una hoja de mundo y la acción que describe su dinámica será proporcional al área propia de su hoja. Consideramos una cuerda que se mueve en un espacio-tiempo de $d + 1$ dimensiones con métrica $G_{\alpha\beta}$. Las ecuaciones de movimiento que describen dicha dinámica, serán tales que el área de la superficie que forma en el espacio-tiempo sea mínima. Explícitamente, la acción está dada por:

$$S_{\text{NG}} = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{-\gamma} \quad , \quad (2.1)$$

donde γ es el determinante de la métrica inducida en la hoja de mundo, definida como

$$\gamma_{\alpha\beta} = G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \quad . \quad (2.2)$$

T es la tensión de la cuerda que está dada en términos de la pendiente de Regge¹ α' como $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$. La escala de cuerdas m y la correspondiente longitud de las cuerdas l_c se define a través de

$$\alpha' = l_c^2 = \frac{1}{m^2} \quad . \quad (2.3)$$

A la acción (2.1) se le conoce como acción de *Nambu-Goto*. Cuando la métrica es la de Minkowski, $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ esta acción presenta dos tipos de simetrías: *a*) invariancia de Poincaré en el espacio-tiempo, *b*) Invariancia bajo reparametrización en la hoja de mundo, $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\alpha(\sigma)$.

La raíz en la acción de Nambu-Goto hace difícil cuantizarla usando la técnica de integral de trayectoria; sin embargo existe otra forma de escribir la acción de una manera equivalente a nivel clásico, conocida como la *acción de Polyakov*[12]:

$$S_{\text{P}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad , \quad (2.4)$$

¹Se encontró experimentalmente que para las ciertas familias de hadrones más ligeros, el cuadrado de su masa m estaba relacionado con su espín J de forma lineal $m^2 = \alpha' J$. A ésta relación se le conoce como trayectoria de Regge y la constante α' se le llama pendiente de Regge. En la teoría de cuerdas moderna, “pendiente de Regge” es solo un nombre, sin conexión presupuesta con el espectro de los hadrones.

donde $g \equiv \det g$. A esta $g_{\alpha\beta}$ se le conoce como la métrica intrínseca de la hoja de mundo, y es un campo auxiliar cuya ecuación de movimiento estipula que debe ser proporcional a la métrica inducida $\gamma_{\alpha\beta}$, con lo cual se recupera la acción de Nambu-Goto. Además de las simetrías que porta la acción Nambu-Goto, existe una nueva simetría en la acción de Polyakov que se conoce como la *invariancia de Weyl* (definida en el capítulo anterior), que reescala localmente la métrica intrínseca.

Las ecuaciones que se obtienen al resolver la acción corresponden a la ecuación de onda, más una serie de constricciones, por lo que de manera general podemos construir la solución $X^\mu(\tau, \sigma)$ como una superposición de modos de Fourier. En general se pueden obtener dos tipos distintos de cuerdas, abiertas o cerradas, en específico, para una cuerda cerrada se encuentra que hay dos modos distintos en que la cuerda puede oscilar, modos que van hacia la derecha $X_D^\mu(\tau, \sigma)$ y modos que van hacia la izquierda $X_I^\mu(\tau, \sigma)$, que de manera matemática se expresan como

$$X_D^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha'p^\mu(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} \quad , \quad (2.5)$$

$$X_I^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}\alpha'p^\mu(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)} \quad , \quad (2.6)$$

donde x^μ y p^μ es el centro de masa y el momento de la cuerda respectivamente. Una de las distintas formas de cuantizar esta teoría es imponer las relaciones de conmutación canónicas promoviendo a X^μ y su momento conjugado $\Pi^\mu = (1/2\pi\alpha')\dot{X}^\mu$ a operadores, los cuales satisfacen

$$[X^\mu(\tau, \sigma), \Pi^\nu(\tau, \sigma')] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') \quad , \quad (2.7)$$

$$[X^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] = [\Pi^\mu(\tau, \sigma), \Pi^\nu(\tau, \sigma')] = 0 \quad .$$

Al hacer esto nos encontramos con un problema, dado que los α_n^μ y $\tilde{\alpha}_n^\mu$ corresponde a los modos de Fourier que se interpretan como los operadores de creación para $n < 0$ y aniquilación para $n > 0$ derechos e izquierdos de la cuerda cerrada correspondientemente, existen dadas las reglas de conmutación, estados de norma negativa llamados *fantasmas* que no tienen interpretación física, es por esto que debemos imponer una simetría del sistema, el cual elimine estos estados no físicos. Esta relación de simetría que deben satisfacer los modos de la cuerda se llama el *álgebra de Virasoro*. A esta cuerda se le conoce como cuerda libre bosónica debido a que cuando se le aplican las transformaciones de Lorentz se encuentran que satisfacen las relaciones de los bosones. En esta teoría de cuerdas cerradas sobre un fondo plano se obtiene un torre infinita de estados con masas progresivamente más grandes,

$$m^2 = 8(N - a) = 8(\tilde{N} - a) \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad , \quad (2.8)$$

donde $N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n$ y $\tilde{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n$ se les conoce como nivel de emparejamiento, es decir, para una cuerda cerrada las vibraciones que se estén produciendo en un lado de la cuerda deben ser los mismos que se producen en el otro lado, y a es una constante que se puede deducir usando el álgebra de Virasoro que se fija para descartar los estados no físicos [12]. El espectro resultante se puede dividir en dos tipos, espectro masivo (que en algunas teorías puede incluir estados taquiónicos) y espectro no masivo. Este último típicamente incluye al menos tres tipos de campos: $G_{\mu\nu}$ que corresponde al gravitón, $B_{\mu\nu}$ que es un tensor antisimétrico usualmente conocido como el campo *Kalb-Ramond*, y un campo escalar Φ conocido como dilatón. Hasta este punto, los estado físicos obtenidos son campos tensoriales con espín entero. Una manera de incluir fermiones en la teoría de cuerdas es incorporar a la acción de cuerda libre un campo libre fermiónico $\psi_A^\mu(\tau, \sigma)$

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu) \quad . \quad (2.9)$$

Aquí ρ^α corresponden a las matrices de Dirac en dos dimensiones, las cuales satisfacen

$$\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = -2\eta^{\alpha\beta} \quad , \quad (2.10)$$

y $\psi^\mu(\tau, \sigma)$ son dos componentes espinoriales:

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_-^\mu \\ \psi_+^\mu \end{pmatrix} \quad . \quad (2.11)$$

La manera de cuantizar la cuerda fermiónica es similar al caso bosónico, con la diferencia que aquí se imponen las relaciones de anticonmutación para la cuantización

$$\{\psi_A^\mu(\sigma), \psi_B^\nu(\sigma')\} = \pi\eta^{\mu\nu} \delta_{AB} \delta(\sigma - \sigma') \quad . \quad (2.12)$$

Al igual que en el caso bosónico encontramos que existen estados con norma negativa, sin embargo el álgebra de Virasoro no nos ayuda para eliminar dichos fantasmas por lo que se debe implementar una nueva simetría y nuevas constricciones que cumplan los fermiones y quiten los estados no físicos. Esta nueva simetría es la supersimetría [13].

La principal diferencia entre la cuerda bosónica y la fermiónica es la adición de la supersimetría, además de que uno puede encontrar los siguientes resultados:

- La dimensión crítica de la supercuerda² es $D = 10$.
- No hay modos taquiónicos.
- Los campos bosónicos no masivos, $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ y Φ también son parte del espectro de la súper-cuerda.

Mientras que la cuerda bosónica es esencialmente única, hay un número discreto de opciones que podemos tomar cuando uno considera fermiones. Esto nos da una gama de diferentes teorías perturbativas de súper-cuerdas. La disyuntiva más importante es si consideramos que los modos de las cuerdas fermiónicas presentan movimientos izquierda y derecha o si solo se mueven en un solo sentido. La teoría que nos interesa en esta tesis es la teoría tipo *IIB*, donde $m^2 = \frac{4N}{l_c^2}$ y $D = 9 + 1$. Los estados no masivos ($N = 0$) son idénticos a estados de partículas que corresponden a ciertos campos que resultan estar emparentados entre sí a través de supersimetría $\mathcal{N} = 2$ en $9 + 1$ -dimensiones, es por esto el nombre de tipo *II*. Para bajas energías, $E \ll \frac{1}{l_c}$, tiene sentido hablar de una acción efectiva en esta teoría, $S_{\text{IIB,ef}}$, la cual solo involucra a los campos no masivos. La acción efectiva de la teoría tipo *IIB* bajo esta suposición resulta coincidir con la acción de una cierta teoría conocida como supergravedad *IIB*, es por esto que se puede escribir $S_{\text{IIB,ef}}$ como

$$S_{\text{IIB,ef}} = S_{\text{SUGRA}} + S_{\alpha'} \quad , \quad (2.13)$$

donde el término S_{SUGRA} , el cual es dominante a bajas energías, contiene solo términos con máximo 2 derivadas, y define la teoría de campos conocida como supergravedad (SUGRA) tipo *IIB* en $D = 9 + 1$ dimensiones y la acción que denotamos $S_{\alpha'}$ contienen una serie infinita de correcciones con cada vez mas derivadas de los campos de SUGRA [14].

Cada solución a las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva, representa un fondo en el cual se pueden propagar las cuerdas, o dicho de otra manera, asigna los valores esperados para cada uno de los campos de la teoría. El estudio de esta acción reveló que los componentes fundamentales de la teoría no son solamente cuerdas, sino que aparecen una serie de objetos extendidos con dinámica propia. A estos objetos se les conoce como p -branas, donde p asigna

²Se le llama dimensión crítica a la implementación de campos para que la contribución de cargas centrales en la teoría eliminen a los estados que no tienen sentido físico.

la dimensión espacial. Desde esta perspectiva, la teoría de cuerdas se puede generalizar para incluir a las p -branas, donde la cuerda es un caso particular con $p = 1$. Una clase de estos objetos aparecen como hipersuperficies cuyas excitaciones son descritas por cuerdas abiertas y satisfacen condiciones de frontera de Dirichlet. A estos objetos se les conoce como Dp -branas, donde se usa la letra D para hacer referencia a las condiciones de frontera que satisfacen los extremos. Hay que notar que en presencia de una Dp -brana en un espacio $d + 1$ las coordenadas de la cuerda, X^μ , se pueden separar en dos tipos distintos:

- Coordenadas tangenciales $X^\alpha(\tau, \sigma)$ ($\alpha = 0, \dots, p$): Dichas coordenadas son las que coinciden con las $p + 1$ direcciones en la cuales se extiende la Dp -brana, por lo que los extremos de la cuerda obedecen condiciones de Neumann, indicando que son libres de moverse a lo largo de ellas.
- Coordenadas transversales $X^i(\tau, \sigma)$ ($i = 1, \dots, d - p$): Estas coordenadas representan las direcciones en las cuales la Dp -brana puede moverse, por lo que los extremos de una cuerda abierta satisfacen las condiciones de frontera de Dirichlet, indicando que deben ubicarse sobre la D -brana.

Para analizar el espectro de una Dp -brana hay que considerar que esta contiene dos tipos de excitaciones distintas, asociadas a la subdivisión recién mencionada. Las primeras son excitaciones de tipo tangencial a la brana, las cuales quedan descritas por un campo de norma abeliano A_μ con $\mu = 0, \dots, p$ con grupo de norma $U(1)$. Las segundas corresponden a las fluctuaciones en las direcciones transversales, que están descritas por un conjunto de $d - p$ campos escalares no masivos ϕ^i con $i = d - p, \dots, d$. (En ambos casos, hay además modos fermiónicos). La acción de un Dp -brana, a bajas energías, $E \ll \frac{1}{l_c}$, es posible resumirla en una acción efectiva, $S_{Dp,ef}$, que involucra solo a los campos no masivos y tiene la forma

$$S_{Dp,ef} = S_{DBI} + S_{Dp,\alpha'} \quad , \quad (2.14)$$

donde el primer término es la acción de *Dirac-Born-Infeld* y $S_{Dp,\alpha'}$ son correcciones con derivadas más altas a los campos de la acción S_{DBI} .

Otra propiedad importante de las D -branas es que cuando más de una se encuentra presente, las excitaciones del sistema presentan cuerdas abiertas que se conectan entre las distintas D -branas. En el caso particular cuando se tienen N Dp -branas paralelas y estas se encuentran en el mismo sitio tendremos N^2 tipos de cuerda abierta, y la longitud mínima de todas es igual a cero, por lo que todas dan lugar a modos no masivos. La teoría que describe la dinámica de una pila de N Dp -branas es una teoría de norma con grupo $U(N)$. A bajas energías podemos tener, de igual forma que en los casos anteriores, una acción efectiva que involucra solo los campos no masivos, que denotaremos S_{DBINA} , la cual si consideramos que podemos hacer una expansión en dicha acción, es decir, considerar que sus campos son pequeños obtenemos que

$$S_{DBINA} \simeq NT_{Dp}V_p + \frac{1}{2g_{YM}^2} \int d^{p+1} \text{Tr} \{ F^2 + (D\Phi)^2 + [\Phi, \Phi]^2 + \dots \} \quad , \quad (2.15)$$

donde N es el número de Dp -branas, T_{Dp} es la tensión de las branas, V_p corresponde al volumen de dicha pila y el término restante corresponde a la acción de *súper-Yang-Mills* con $\mathcal{N} = 2^{\frac{7-p}{2}}$ en $p + 1$ dimensiones con g_{YM} la constante de acoplamiento. Esto hace ver que la acción efectiva a bajas energías de una pila de Dp -branas, resulta ser una acción de teoría de campos, *SYM*, que se menciono en el capítulo anterior.

2.2. p-branas negras

Como ya se mencionó, cada solución a las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva de una teoría de cuerdas, representan un fondo sobre el cual la cuerda puede propagarse. En particular para $S_{IIB,ef}$, si se tiene que la escala de distancia/tiempo a la cual varían los campos de fondo es mucho mayor a l_c , los fondos pueden obtenerse a partir de las soluciones de a las ecuaciones de movimiento de S_{SUGRA} , ya que $S_{\alpha'}$ se vuelve despreciable. Una clase de soluciones que se conocen a estas ecuaciones, fue descubierta por Horowitz y Strominger [15], y se les conoce como *p-branas negras*:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{MN} dx^M dx^N \quad , \\ &= H(r)^{-1/2} \left(-f(r) dt^2 + dx_1^2 + \dots + dx_p^2 \right) + H(r)^{1/2} \left(\frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{8-p}^2 \right) \quad , \\ e^\varphi &= g_c H(r)^{\frac{3-p}{4}} \quad , \\ C_{0,1,\dots,p} &= \zeta^{-1} g_c^{-1} [1 - H(r)^{-1}] \quad , \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde g_c es la constante de acoplamiento de la cuerda, $C_{0,1,\dots,p}$ es un campo de norma Ramond-Ramond en *IIB*, $d\Omega_{8-p}^2$ es la métrica en la esfera $(8-p)$ -dimensional y se define $H(r)$ y $f(r)$ como

$$\begin{aligned} H(r) &= 1 + \zeta \left(\frac{L}{r} \right)^{7-p} \quad , \\ f(r) &= r_h^{7-p} \frac{\zeta}{1 - \zeta^2} \quad , \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde ζ el parámetro de no extremalidad, L es el radio de carga de la solución y r_h el radio del horizonte. Para $r \gg L$, r_h se reduce a Minkowski^{9,1} dimensional. Esta solución es un fondo que describe a un objeto solitónico de la teoría de cuerdas, que es un agujero negro cargado, extendido en p -dimensiones espaciales y asintóticamente plano en la direcciones restantes. Se conoce como *p-brana extremal* a la solución que tiene una masa mínima para la carga dada, y se obtiene en el límite cuando $r_h \rightarrow 0$, $\zeta \rightarrow 1$ con $L^{7-p} \equiv r_h \frac{\zeta}{1-\zeta^2}$ fijo,

$$\begin{aligned} ds^2 &= H(r)^{-1/2} \left(-dt^2 + dx_1^2 + \dots + dx_p^2 \right) + H(r)^{1/2} \left(dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2 \right) \quad , \\ e^\varphi &= H(r)^{\frac{3-p}{4}} \quad , \\ C_{0,1,\dots,p} &= g_c^{-1} (1 - H(r)^{-1}) \quad , \\ y \quad H(r) &= 1 + \left(\frac{L}{r} \right)^{7-p} \quad , \quad L^{7-p} = c_p N g_c l_c^{7-p} \quad . \end{aligned} \quad (2.18)$$

con $c_p \equiv (2\pi)^{5-p} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right)$. En este caso, se puede encontrar que la p -brana negra extremal tiene una carga $Q = N$ bajo el campo de norma Ramond-Ramond y una masa dada por:

$$M = \frac{NV_p}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}} \quad . \quad (2.19)$$

La brana negra genérica se llama no extremal, y es análoga al agujero negro de *Reissner-Nordström*, o en el caso sin carga, al agujero negro de *Schwarzschild*.

2.3. Deducción de la correspondencia holográfica

En la última parte de la sección 2.1, se habló de la acción efectiva para $N Dp$ -branas a bajas energías. Una pila de estas branas sin excitar [16], tiene la misma carga y masa que una p -brana

negra extremal, lo cual nos indica que la brana negra son los campos de supergravedad macroscópicos generados por las D -branas. Por lo tanto, la conclusión es que la p -brana negra extremal y las $N Dp$ -branas son dos descripciones alternativas del mismo sistema físico. La dualidad entre p -branas negras y Dp -branas fue tomada por Maldacena como punto de partida para la deducción de la correspondencia holográfica. Usando el caso para el cual $p = 3$, podemos observar que en la ecuación (2.18) el dilatón es constante, por lo que la solución de *SUGRA* queda como

$$\begin{aligned} ds^2 &= H(r)^{-1/2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + H(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \quad , \\ C_{0123} &= g_c^{-1} (1 - H(r)^{-1}) \quad , \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde $d\Omega_5^2$ es la métrica de la 5-esfera,

$$\begin{aligned} H(r) &= 1 + \frac{L^4}{r^4} \quad , \\ L^4 &= 4\pi N g_c l_c^4 \quad . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Notando que el radio de curvatura, L , está descrito en términos de $g_c N$ y sabiendo que una brana negra es el resultado macroscópico generado por una pila de $N Dp$ -branas, entonces la solución de *SUGRA* será confiable cuando:

$$\begin{aligned} g_c N &\gg 1 \quad \text{curvatura pequeña} \quad , \\ g_c &\ll 1 \quad \text{cuerdas débilmente acopladas} \quad . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ahora podemos tomar el límite de este sistema a bajas energías, $E \ll \frac{1}{l_c}$, $\frac{1}{L}$. Aquí hay que notar que suceden dos hechos importantes:

I) En ambas descripciones, en la brana negra y las $D3$ -brana, se obtienen dos sistemas desacoplados. Se puede pensar que la brana negra absorbe cualquier cosa que a ésta se le arroje, sin embargo su tamaño característico es L , por ende si se tienen modos con longitud de onda $1/E \gg L$ éstos nunca verán a la garganta. Los modos de *SUGRA* en el exterior de la garganta ($r > L$) se propagan en un fondo plano, y los que se encuentran dentro de ella no poseen la energía suficiente para salir de ésta, lo cual indica que estas dos regiones no se comunican entre sí. En la descripción de la $D3$ -brana se encuentra que las cuerdas cerradas en el fondo plano no pueden convertirse en abiertas ni viceversa.

II) En ambos sistemas, la descripción se simplifica drásticamente. En el lado de las $D3$ -branas, las cuerdas cerradas *IIB* en un fondo plano se reducen a los modos de *SUGRA* libres, y las cuerdas abiertas sobre las D -branas se reducen a los modos no masivos descritos por *súper-Yang-Mills* $U(N)$ en $3 + 1$ dimensiones. Por el lado de la brana negra, hay que tomar en cuenta que hay un efecto de corrimiento al rojo. Un objeto con energía propia E_{prop} en un punto r tiene energía

$$E_\infty = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/4} E_{\text{prop}} \quad , \quad (2.23)$$

medida por un observador en infinito. En cualquier punto $r \geq L$, se pide que $E_{\text{prop}} \ll \frac{1}{l_c}$, $\frac{1}{L}$ y se reduce a *SUGRA* libre. En la región cercana al horizonte, $r \ll L$, se puede tener E_{prop} arbitrariamente grande y aún así satisfacer $E_\infty \simeq \frac{r}{L} E_{\text{prop}} \ll \frac{1}{l_c}$, $\frac{1}{L}$. En esta región $H(r) = 1 + \frac{L^4}{r^4} \simeq \frac{L^4}{r^4}$ por lo que el fondo se simplifica a

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \\ &= \left(\frac{r^2}{l^2} dx_\mu dx^\mu + \frac{L^2}{r^2} dr^2 \right) + L^2 d\Omega_5^2 \quad , \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde el término entre paréntesis de la última ecuación resulta ser el espacio-tiempo *Anti de Sitter* $(4 + 1)$ -dimensional con radio L y $L^2 d\Omega_5^2$ es la 5-esfera con radio L (AdS_5). Dado que desde el

principio se tenía una equivalencia, se concluye que estos dos sistemas son también equivalentes [1]:

$$\boxed{\text{Teoría de cuerdas IIB en } AdS_5 \times S^5 = MSYM \text{ con grupo } U(N) \text{ en Minkowski } 3+1 \quad .}$$

Para llegar a esta deducción se ha tomado el régimen a bajas energías, $E \ll \frac{1}{l_c}, \frac{1}{L}$, sin embargo este resultado se vuelve exacto cuando se toma el límite $El_c, EL \rightarrow 0$. La forma más adecuada de formular esta idea es trabajar en unidades donde $l_c \rightarrow 0$ mientras se mantiene fijo $g_c N$. A esto se le conoce como el límite de Maldacena. En estas unidades, después del límite podemos tomar energías arbitrariamente grandes, lo cual es muy útil ya que tiene sentido considerar a las cuerdas en IIB en $AdS_5 \times S^5$ y a MSYM con altas energías. La afirmación de Maldacena es que la correspondencia entre ellas es válida para cualquier valor de E, g_c y N . Debido a que esta deducción no está basada en una prueba rigurosa, es considerada como una conjetura; sin embargo existe mucha evidencia a su favor, e incluso a favor de una equivalencia más general. Se cree que cualquier cantidad de una gran clase de teorías conformes CFT's puede obtenerse a través de cálculos en términos de una teoría gravitatoria dual,

$$\boxed{\text{Teoría conforme en } d+1 \text{ dim} = \text{Teoría gravitacional en } AdS_{d+2} \quad .}$$

Se conocen también extensiones a teorías no conformes. Debido a que ésta es una dualidad, cualquier cantidad en la CFT tendrá su contraparte en la teoría de gravedad dual, por lo que se tiene un tipo de diccionario entre estas teorías. En esta tesis solo nos enfocaremos en la entropía de entrelazamiento, así como el uso de la correspondencia para una CFT_{d+1} general, por lo que nos centraremos solo a trabajar en un espacio AdS_{d+2} .

2.4. Espacio Anti de Sitter

Los espacio-tiempos con curvatura constante, tal como los espacios sin tiempo, se pueden clasificar en tres tipos, según el signo de su curvatura: curvatura cero (Minkowski), curvatura positiva (de Sitter) y curvatura negativa (Anti de Sitter). Entonces de manera general, Anti de Sitter (AdS) es el espacio-tiempo máximamente simétrico con curvatura negativa, que puede definirse como (la cubierta universal de) un hiperboloide encajado en un espacio plano 6-dimensional con signatura (4,2)

$$-X_1^2 - X_2^2 + \sum_{i=3}^{n+1} X_i^2 = -L^2 \quad . \quad (2.25)$$

Existen diversas formas de parametrizar este espacio-tiempo, sin embargo aquí solo se verán dos de ellas, que son esenciales para este trabajo. Una manera de parametrizarlo es con las llamadas **coordenadas globales**, usando los parámetros $(\tau, \rho, \theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-3})$ definidos como

$$\begin{aligned} X_1 &= L \cosh \rho \cos \tau \quad , \\ X_2 &= L \cosh \rho \sin \tau \quad , \\ X_i &= L \sinh \hat{x}_i \quad , \quad \sum_i \hat{x}_i^2 = 1 \quad , \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde las \hat{x}_i parametrizan la esfera S^{n-2} , es decir, se tiene que $\hat{x}_1 = \sin \theta \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-3}$, $\hat{x}_2 = \sin \theta \sin \varphi_1 \dots \cos \varphi_{n-3}$, etc. Con estas coordenadas, la métrica AdS_n (es decir la métrica inducida sobre el hiperboloide a partir de la métrica plana) es

$$ds^2 = L^2 (-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{n-2}^2) \quad , \quad (2.27)$$

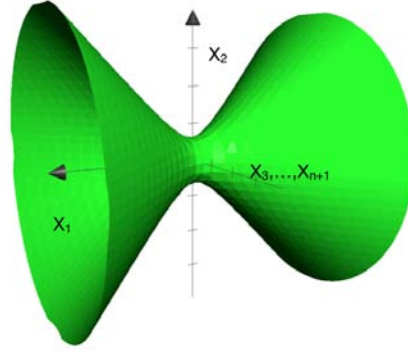


Figura 2.1: Hiperboloide sobre un espacio plano, en el cual se esquematiza de manera gráfica el espacio *Anti de Sitter*.

donde $\tau \in [0, 2\pi]$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$. Usando una coordenada radial modificada, $\tan \alpha \equiv \sinh \rho$, donde $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, podemos reescribir la métrica AdS_n de la siguiente manera:

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos \alpha} (-d\tau^2 + d\alpha^2 + \text{sen}^2 \alpha d\Omega_{n-2}^2) \quad . \quad (2.28)$$

Si ahora tomamos una transformación conforme, como se vio en el capítulo anterior, podemos eliminar el factor de enfrente, es decir:

$$ds^2 \rightarrow ds'^2 \equiv L^2 (-d\tau^2 + d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\Omega_{n-2}^2) \quad . \quad (2.29)$$

Esto nos permite crear una representación de AdS completa en una región que es finita a lo largo de las direcciones espaciales, preservando los conos de luz a 45° . A esta representación se le conoce como diagrama de Penrose de AdS (véase figura 2.2). Es importante notar que la coordenada τ

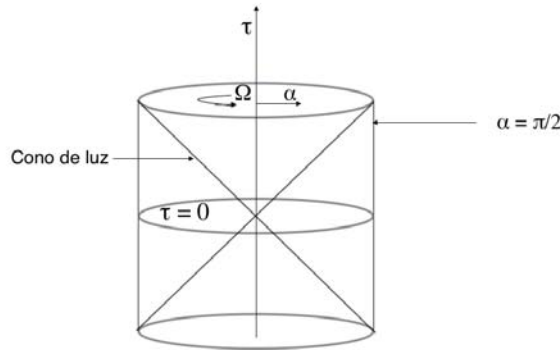


Figura 2.2: Diagrama de Penrose de AdS . Se esquematiza con Ω la dirección angular y como $\alpha = \pi/2$ la frontera del espacio.

tiene un periodo 2π , que define curvas tipo tiempo cerradas. Para eliminar esto simplemente evitamos hacer esta identificación y definimos AdS como el cilindro infinito $-\infty < \tau < \infty$, en lugar de $-\pi < \tau < \pi$. Nosotros expresaremos las coordenadas globales usando la transformación $R \equiv L \sinh \rho$ y $T \equiv L\tau$, con lo que la métrica toma la forma

$$ds^2 = -f(R)dT^2 + \frac{1}{f(R)}dR^2 + R^2 d\Omega_{n-2}^2 \quad , \quad (2.30)$$

con $f(R) = 1 + \frac{R^2}{L^2}$.

Una manera distinta de parametrizar dicho hiperboloide es usando las **coordenadas de Poincaré**:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{L^2}{2r} \left(1 + \frac{r^2}{L^4} (L^2 + \vec{x}^2 - t^2) \right) , \\
 X_2 &= \frac{r}{L} t , \\
 X_i &= \frac{r}{L} x_i \quad x_i \in 3, \dots, n , \\
 X_{n+1} &= \frac{L^2}{2r} \left(1 - \frac{r^2}{L^4} (L^2 - \vec{x}^2 + t^2) \right) ,
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

donde $0 \leq r < \infty$ y $-\infty < x_i, t, < \infty$. Con esta parametrización, la métrica toma la forma

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2} dr^2 .
 \tag{2.32}$$

A diferencia de las coordenadas globales, al usar esta parametrización no se tiene un recubrimiento completo, es decir, las coordenadas de Poincaré solo cubren una porción del espacio-tiempo de AdS , al cual se le conoce como la *cuña de Poincaré* (véase figura 2.3). Los eventos que se en-

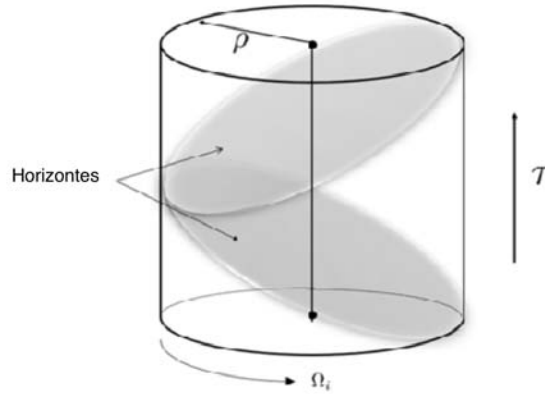


Figura 2.3: Representación gráfica de la cuña de Poincaré la cual se encuadra limitada por sus horizontes, los cuales están representados de gris. (Imagen tomada de [17]).

cuentran dentro de esta cuña son aquellos a los que tienen acceso una familia de observadores uniformemente acelerados. Para estos observadores la hipersuperficie $r = 0$ denota el límite de dicha cuña, o dicho de otra forma, marca la región que les es causalmente accesible y se le conoce como horizonte causal. Debido a que esta parametrización no contiene el espacio-tiempo de AdS completo, resulta que las trayectorias tipo tiempo o nulas no se mantienen en esta región y en general cruzan el horizonte en un tiempo global finito, pero en un tiempo de Poincaré infinito. En el contexto de AdS/CFT , se sabe que el tiempo de Poincaré se relaciona directamente con el tiempo de la CFT , por lo que tiene sentido restringirnos únicamente a la cuña de Poincaré ya que los eventos que podamos de alguna forma observar en la CFT siempre caerán en la cuña y de manera inversa los eventos que se encuentren dentro de esta región tendrán su contraparte en la CFT . Para estas coordenadas nos convendrá hacer un cambio usando una coordenada radial

invertida, $z \equiv \frac{L^2}{r}$, lo cual nos deja las coordenadas

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2} (L^2 + \vec{x}^2 - t^2) \right) , \\
 X_2 &= \frac{Lt}{z} , \\
 X_i &= \frac{Lx_i}{z} \quad x_i \in 3, \dots, n , \\
 X_{n+1} &= \frac{z}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} (L^2 - \vec{x}^2 + t^2) \right) ,
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

y la métrica como

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + dz^2 + d\vec{x}^2) . \tag{2.34}$$

Cualquier suceso del lado de *AdS* tiene su contraparte en una *CFT*, por esto hay que hacer notar que las coordenadas en Poincaré, al igual que otras parametrizaciones, tiene su significado físico en una teoría de campos. La coordenada temporal corresponde al tiempo de la *CFT* y las coordenadas \vec{x} son de nueva cuenta las coordenadas espaciales de la teoría de campo. La coordenada radial z tiene una interpretación diferente, ya que corresponde a una escala de distancia, o equivalentemente, una escala de energía.

Capítulo 3

ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO HOLOGRÁFICA

3.1. Fórmula de Ryu-Takayanagi

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, la correspondencia AdS/CFT nos indica que una teoría cuántica de gravedad en un espacio anti-de Sitter $AdS_{(d+2)}$ es equivalente a una $CFT_{(d+1)}$. Por esta razón, es intuitivo pensar que debe existir una manera de calcular la entropía de entrelazamiento en la CFT en el lenguaje gravitacional. Para definir la entropía de entrelazamiento en una CFT_{d+1} , cortamos a un tiempo fijo, y el espacio resultante N lo dividimos en regiones A y B (véase la figura 3.1). En las coordenadas de Poincaré, la CFT_{d+1} vive en la frontera de AdS_{d+2} , $z \rightarrow 0$. Si traducimos lo anterior a la parte de gravedad, necesitamos extender la división $N = A \cup B$ al espacio M que se tiene a tiempo fijo en el bulto. Para ello extendemos la frontera de la región A , ∂A a una superficie γ_A en M , de modo que $\partial\gamma_A = \partial A$. Hay que notar que existen una infinidad de superficies que podemos elegir. La receta será tomar la que tenga área mínima, es decir, se requiere que la variación funcional de área sea cero. Este procedimiento nos arroja una única superficie mínima a la que denotaremos γ_A . Usando lo anterior, *Ryu-Takayanagi* [2] propusieron que la entropía de entrelazamiento S_A en una CFT_{d+1} se puede calcular a partir de

$$S_A = \frac{\text{Área}(\gamma_A)}{4G_N^{(d+2)}} \quad . \quad (3.1)$$

A esta igualdad se le conoce como la *fórmula de Ryu-Takayanagi*. Este es un resultado fundamental en la correspondencia holográfica, que nos permite calcular la entropía de entrelazamiento en un espacio asintóticamente AdS . Hay que hacer hincapié en que la variedad γ_A es una superficie de área mínima d -dimensional en AdS_{d+2} , cuya frontera está dada por ∂A . Su área está denotada por $\text{Área}(\gamma_A)$ y $G_N^{(d+2)}$ es la constante de Newton $(d+2)$ -dimensional. La apariencia de esta fórmula es muy similar a la formula de *Bekenstein-Hawking*, y debe considerarse como una generalización de ella.

Una de las propiedades más importantes de la entropía de entrelazamiento es la desigualdad de subaditividad fuerte. Es posible verificar que la fórmula de Ryu-Takayanagi satisface dicha propiedad. Empecemos suponiendo que tenemos tres regiones A , B y C para un tiempo fijo en la CFT . Extendemos esta configuración a la descripción holográfica. Consideremos las entropías de entrelazamiento S_{A+B} y S_{B+C} . En la descripción de la ecuación (3.1), estas están dadas por el área mínima de las superficies γ_{A+B} y γ_{B+C} , las cuales satisfacen $\partial\gamma_{A+B} = \partial(A+B)$ y $\partial\gamma_{B+C} = \partial(B+C)$. Es fácil ver ahora que se pueden dividir estas dos superficies de área mínima en cuatro y recombinarse en dos superficies γ'_A y γ'_{A+B+C} , o dos superficies γ'_A y γ'_C [18]. El significado aquí de γ'_X es el de una superficie que satisface $\partial\gamma'_X = \partial X$, sin embargo en general estas no corresponden a una

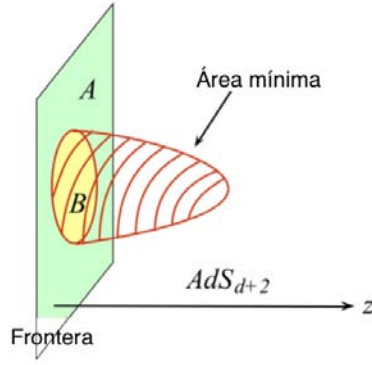


Figura 3.1: Diagrama que muestra la forma en que se calcula la entropía de entrelazamiento en la teoría *AdS/CFT*. (Imagen tomada de [7]).

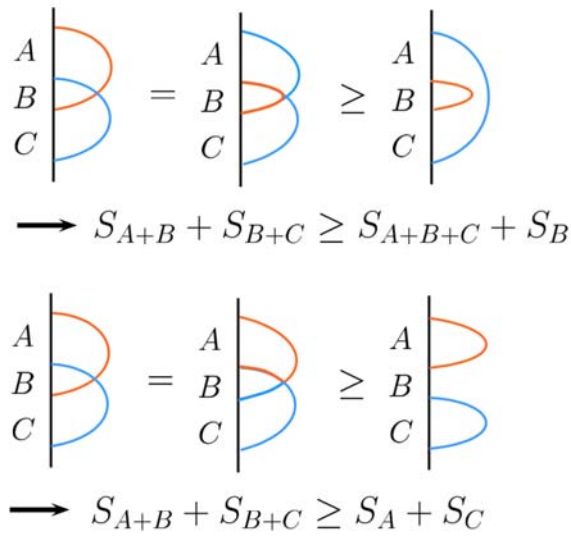


Figura 3.2: Demostración gráfica de la desigualdad de subaditividad fuerte en holografía. (Imagen tomada de [7])

superficie de área mínima, por lo que tendremos que $\text{Área}(\gamma'_X) \geq \text{Área}(\gamma_X)$. Con estos argumentos se puede ver que:

$$\begin{aligned} \text{Área}(\gamma_{A+B}) + \text{Área}(\gamma_{B+C}) &= \text{Área}(\gamma'_B) + \text{Área}(\gamma'_{A+B+C}) \geq \text{Área}(\gamma_B) + \text{Área}(\gamma_{A+B+C}), \\ \text{Área}(\gamma_{A+B}) + \text{Área}(\gamma_{B+C}) &= \text{Área}(\gamma'_A) + \text{Área}(\gamma'_C) \geq \text{Área}(\gamma_A) + \text{Área}(\gamma_C). \end{aligned} \quad (3.2)$$

En la figura 3.2 se muestra de una manera gráfica lo explicado anteriormente.

3.2. Cálculos de la entropía de entrelazamiento en holografía

Con la finalidad de explicar más a detalle cómo funciona la fórmula de Ryu-Takayanagi, calcularemos los casos más sencillos para mostrar la manera de obtener la entropía de entrelazamiento en la correspondencia holográfica.

3.2.1. Entropía de entrelazamiento para un intervalo en una CFT_2

El caso más sencillo que podemos estudiar es cuando consideramos una CFT con una dimensión espacial y a temperatura cero. Como se vio en el capítulo anterior, este es dual a un espacio AdS_3 , en el cual tomaremos las coordenadas de Poincaré. Tomando un tiempo fijo $t = t_0$ tenemos que $dt = 0$. Con esto nos quedan las coordenadas como

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(dz^2 + dx^2) \quad , \quad (3.3)$$

donde x es la coordenada espacial de la CFT , cuya región de altas energías es dual a la frontera $z \rightarrow 0$. Ahora definimos un sistema A como el intervalo de longitud l

$$A = \{x \mid -l/2 \leq x \leq l/2\} \quad . \quad (3.4)$$

La facilidad que nos da la correspondencia holográfica es que, para el cálculo de la entropía de entrelazamiento, basta encontrar la longitud propia de la curva geodésica correspondiente. Para ello simplemente aplicamos la condición de longitud extremal, haciendo que la variación de la longitud sea igual a cero:

$$\delta(\mathcal{L}_A) = 0 \quad . \quad (3.5)$$

Esta curva puede escribirse en términos de la coordenada espacial $z(x)$, por lo que la longitud de dicha curva en el espacio AdS_3 , a tiempo fijo, se calcula mediante la integral

$$\mathcal{L}_A = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{h} \quad , \quad (3.6)$$

donde h se define como el determinante de la métrica inducida sobre la curva,

$$h_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \quad . \quad (3.7)$$

Calculando $h_{\alpha\beta}$ para nuestro caso, donde $\alpha\beta = x$, tenemos que

$$h = \frac{L^2}{z^2}(1 + z'^2) \quad , \quad (3.8)$$

ya que los elementos fuera de la diagonal son cero. Sustituyendo en la ecuación (3.6) obtenemos

$$\mathcal{L}_A = L \int_{-l/2}^{l/2} dx \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{z} \quad . \quad (3.9)$$

Ahora debemos aplicar la condición de longitud extremal (3.5),

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{z} &\Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z'} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{z^2} + \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2} z} = 0 \\ &\Rightarrow 1 + z'^2 + z'^2 z - \frac{z'^2 z'' z}{1 + z'^2} - z'^2 = 0 \quad \Rightarrow z'' z + z'^2 + 1 = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

La última ecuación se puede resolver aplicado las condiciones de frontera, es decir $z(\pm l/2) = 0$, con lo cual llegamos a

$$x^2 + z^2 = \frac{l^2}{4} . \quad (3.11)$$

Observemos que esta solución es un semicírculo de radio $l/2$ en la región $z > 0$. De igual forma, obtenemos el valor de z' , el cual debemos sustituir en (3.21) para finalmente resolver la integral haciendo uso del cambio de variable $dx = \frac{l}{2} \cos(s) ds$. Por lo tanto nos queda que

$$\mathcal{L}_A = L \int_{-l/2}^{l/2} dx \frac{\sqrt{1 + (\frac{-x}{z})^2}}{z} = 2L \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sin(s)} = -2L \log(\cot(s) + \csc(s)) \Big|_0^{\pi/2} . \quad (3.12)$$

Aquí es importante notar que la integral evaluada diverge, ya que la métrica tiene una divergencia cuando $z \rightarrow 0$. Por ende debemos tomar un parámetro de corte, a , cerca de la frontera, es decir, truncaremos a $z \geq a$, o lo que es lo mismo, $S \geq \epsilon$, con

$$a \equiv \frac{l}{2} \epsilon , \quad (3.13)$$

que sustituimos en la integral y nos queda

$$-2L \log(\cot(s) + \csc(s)) \Big|_{\epsilon}^{\pi/2} = 2L \log\left(\frac{2}{\epsilon}\right) = 2L \log\left(\frac{l}{a}\right) . \quad (3.14)$$

Finalmente, para encontrar la entropía de entrelazamiento, debemos sustituir este último resultado en la ecuación (3.1), obteniendo

$$S_A = \frac{2L}{4G_N^{(3)}} \log\left(\frac{l}{a}\right) . \quad (3.15)$$

Se puede mostrar que este resultado coincide con el de una CFT_2 [2]. Si analizamos el comportamiento que tiene esta función, notaremos que la entropía tiende a cero cuando $l \rightarrow a$.

3.2.2. Entropía de entrelazamiento para un disco en una CFT_3

Para una CFT con dos dimensiones espaciales planas, como ya se ha mencionado, el espacio dual al vacío corresponde a AdS_4 , por lo que usando las coordenadas de Poincaré a tiempo constante tenemos que la métrica es

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (dz^2 + d\vec{x}^2) , \quad (3.16)$$

donde $d\vec{x}^2 = \sum_{i=1}^2 dx^i dx^i$. Podemos escribir estas x^i en coordenadas polares (r, θ) , con lo cual la métrica nos queda como

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2) . \quad (3.17)$$

Definamos nuestro subsistema A de la siguiente forma (Figura 3.3):

$$A = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq l, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} . \quad (3.18)$$

Este subsistema corresponde a un disco de radio l . Como se muestra en la figura, la superficie de área mínima de A resultará ser un hemisferio con la condición de frontera $r = l$. Para obtener la entropía de entrelazamiento debemos calcular dicha superficie de área mínima, por lo que

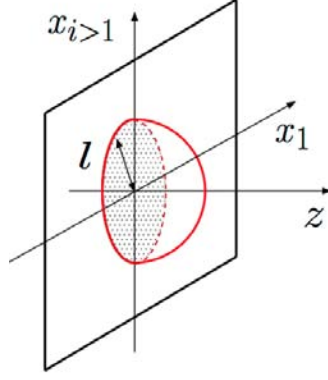


Figura 3.3: Representación gráfica de subsistema A, que corresponde a un disco de radio l , el cual se extiende hacia el bulto con la misma condición. (Imagen tomada de [4]).

consideraremos que la superficie está descrita como una función de $z(r, \theta)$. Usando el mismo procedimiento del problema anterior, calcularemos primero la métrica inducida usando la ecuación (3.7), donde $\alpha = r$ y $\beta = \theta$. Con lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned} h_{rr} &= \frac{L^2}{z^2} \left(1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right) , \\ h_{r\theta} &= h_{\theta r} = 0 , \\ h_{\theta\theta} &= \frac{L^2}{z^2} r^2 . \end{aligned} \quad (3.19)$$

El determinante de esta matriz entonces estará dado por

$$h = \frac{L^4}{z^4} r^2 (1 + z'^2) . \quad (3.20)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.6) obtenemos:

$$\mathcal{L}_A = \int dr d\theta \frac{L^2}{z^2} r \sqrt{1 + z'^2} . \quad (3.21)$$

Podemos observar que el integrando no depende de θ , y quedarnos con una sola integral,

$$\mathcal{L}_A = 2\pi L^2 \int_0^l dr r \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{z^2} . \quad (3.22)$$

Ahora debemos aplicar la condición de longitud extremal (3.5),

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= r \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{z^2} \Rightarrow \frac{d}{dr} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z'} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} = 0 , \\ &\Rightarrow \frac{d}{dr} \frac{r z'}{\sqrt{1 + z'^2} z^2} + 2r \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{z^3} = 0 , \\ &\Rightarrow r z z'' + z z'^3 + z z' + 2r z'^2 + 2r = 0 . \end{aligned} \quad (3.23)$$

De igual forma que en el caso anterior, podemos resolver esta ecuación diferencial aplicando las condiciones de frontera, $z(\pm l) = 0$. Con lo cual obtenemos

$$r^2 + z^2 = l^2 , \quad (3.24)$$

que representa un hemisferio con $r = l$, el cual se muestra en la figura 3.3. Podemos obtener el valor de z' y remplazarlo en el integrando de (3.21),

$$\mathcal{L}_A = 2\pi L^2 \int_0^l dr r \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{-r}{z}\right)^2}}{z^2} . \quad (3.25)$$

Haciendo el cambio de variables de acuerdo a la ecuación (3.24) obtenemos

$$\mathcal{L}_A = -2\pi L^2 \int_0^l dz \frac{l}{z^2} . \quad (3.26)$$

Podemos resolver esta integral haciendo el cambio de variables $y = \frac{z}{l}$ y usando un parámetro de corte a , el cual nos permite evadir la divergencia en el resultado, ya que debemos recordar que la métrica diverge cuando $z \rightarrow 0$. Juntado lo anterior

$$\mathcal{L}_A = -2\pi L^2 \int_{a/l}^1 \frac{dy}{y^2} = 2\pi L^2 \left(\frac{l}{a} - 1 \right) . \quad (3.27)$$

Por último, para obtener la entropía de entrelazamiento para este sistema debemos sustituir el resultado anterior en la ecuación (3.1) para así obtener

$$S_A = \frac{2\pi L^2}{4G_N^{(4)}} \left(\frac{l}{a} - 1 \right) . \quad (3.28)$$

Analizando este resultado, vemos a primera instancia que la entropía para este sistema depende de manera lineal en l y, como el caso para una CFT_2 , diverge cuando $a \rightarrow 0$. Esta expresión es compatible con la ley de área (primer capítulo), donde el factor de proporcionalidad está dado por una combinación de los parámetros de la teoría de gravedad, que en general depende del número de grados de libertad de la teoría de campos.

3.3. Entropía diferencial

La fórmula descrita por Ryu-Takayanagi (RT) nos permite calcular la entropía de entrelazamiento, y muestra que existe una conexión entre la geometría y el entrelazamiento. Un punto importante aquí es que la descripción RT selecciona un tipo muy específico de superficies, aquellas de área mínima, que se encuentran ancladas en la frontera de AdS . Se puede utilizar esto como punto de partida para reconstruir una superficie cerrada arbitraria en la descripción holográfica, y relacionar el área de dicha superficie con la entropía de entrelazamiento. A esta cantidad se le conoce como *entropía diferencial*. Si bien es cierto que la correspondencia AdS/CFT nos indica que una teoría cuántica de gravedad en un espacio anti-de Sitter es equivalente a una CFT , entonces hay una traducción a la teoría de campos de la entropía diferencial, sin embargo en este trabajo solo se estudiará la parte que corresponde a la teoría gravitacional [19].

En esta sección nos vamos a concentrar nuevamente en AdS_3 puro, que corresponde al vacío en una CFT_2 . Representaremos a AdS_3 en las coordenadas globales de la ec. (2.30),

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{R^2}{L^2} \right) dT^2 + \left(1 + \frac{R^2}{L^2} \right)^{-1} dR^2 + R^2 d\tilde{\theta}^2 , \quad (3.29)$$

donde haremos una distinción entre la coordenada $\tilde{\theta}$ que corresponde a un punto en el bulto y la coordenada θ que corresponde a un punto en la frontera.

Para motivar la definición matemática de la entropía diferencial, usaremos la desigualdad de subaditividad fuerte, $S(A \cup B) \leq S(A) + S(B) - S(A \cap B)$, para dos intervalos,

$$S(I_1 \cup I_2) \leq S(I_1) + S(I_2) - S(I_1 \cap I_2) . \quad (3.30)$$

Ahora podemos tomar un conjunto de n intervalos en secuencia y sumar $n - 1$ veces sobre la fórmula anterior, lo cual nos queda que

$$S_n \leq \sum_{k=1}^n S(I_k) - \sum_{k=1}^{n-1} S(I_k \cap I_{k+1}) \quad , \quad (3.31)$$

donde S_n es la entropía de la unión de los n intervalos. Hay que notar que el espacio donde nos encontramos es periódico, lo que significa que si los intervalos cubren todo el espacio, podemos identificar $I_{n+1} \equiv I_1$. Este hecho introduce un intervalo más $I_n \cup I_1$, por lo que la suma anterior con este término extra nos queda como

$$S_n \leq \sum_{k=1}^n [S(I_k) - S(I_k \cap I_{k+1})] \quad . \quad (3.32)$$

Nos interesa obtener el límite de esta suma cuando $n \rightarrow \infty$. Para proceder con esto primero debemos expresar la entropía de entrelazamiento en términos del tamaño de cada intervalo. Sea $\alpha(\theta)$ el tamaño de cada uno de ellos, es decir, el intervalo centrado en θ tiene ángulo de apertura $\alpha(\theta)$. Podemos expresar a $I_k \cap I_{k+1}$ como la separación angular entre estos dos intervalos contiguos, es decir, $\Delta\theta = 2\pi/n$. Haciendo estos cambios obtenemos que el lado derecho de (3.32) toma la forma

$$\sum_{k=1}^n [S(\alpha(\theta)) - S(\alpha(\theta) - \Delta\theta)] \quad . \quad (3.33)$$

Una vez hecho esto, podemos tomar el límite $n \rightarrow \infty$. Multiplicando y dividiendo por $\Delta\theta$, lo podemos expresar como $\Delta\theta \rightarrow 0$. En el límite continuo, la diferencia entre las entropías nos queda como una derivada, y la suma como una integral, llegando finalmente a nuestra definición matemática de entropía diferencial como

$$E \equiv \int_0^{2\pi} d\theta \left. \frac{dS(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha(\theta)} \quad . \quad (3.34)$$

Esta es una funcional de intervalos que viven en la frontera y están determinados por la función $\alpha(\theta)$. De manera implícita esta función define una curva diferenciable en el espacio AdS_3 : se trata de la curva que es tangente a todas las geodésicas asociadas a la familia de intervalos especificada por $\alpha(\theta)$. Dicho de otra manera, a partir de $\alpha(\theta)$ se puede trazar una curva cerrada que se encuentra en el bulto. Interesantemente, se puede mostrar que la longitud de esta curva se puede calcular a partir de la funcional E , que es una combinación de entropías de entrelazamiento en la frontera [3]. Concretamente,

$$E = \frac{\text{circunferencia}}{4G_N} \quad . \quad (3.35)$$

Una manera gráfica de explicar esto es tomar la ecuación (3.33) y graficar para diferentes valores de n , como se muestra en la figura 3.4.

3.3.1. Curvas en el bulto

Consideremos una curva cerrada suave en el bulto, $R(\tilde{\theta})$, a un tiempo fijo $T = 0$. Para cada punto de la curva, es posible trazar una única geodésica tangente a ese punto, que de igual forma se encuentra en $T = 0$, y tiene sus extremos anclados a la frontera de AdS_3 . Denotaremos estos extremos como $\theta(\tilde{\theta}) \pm \alpha(\tilde{\theta})$, siendo $\tilde{\theta}$ el punto donde la geodésica es tangente a la curva $R(\tilde{\theta})$; véase la figura 3.5. En la *CFT* podemos en principio determinar los parámetros que definen las geodésicas en AdS_3 puro, haciendo uso de la conexión encontrada por Ryu y Takayanagi entre la entropía de entrelazamiento de un intervalo y la longitud de una geodésica espacial en AdS_3 que se encuentra anclada a la frontera del intervalo. En nuestro caso, la geodésica está dada por

$$\tan^2(\theta - \tilde{\theta}) = \frac{R^2 \tan^2 \alpha - L^2}{R^2 + L^2} \quad . \quad (3.36)$$

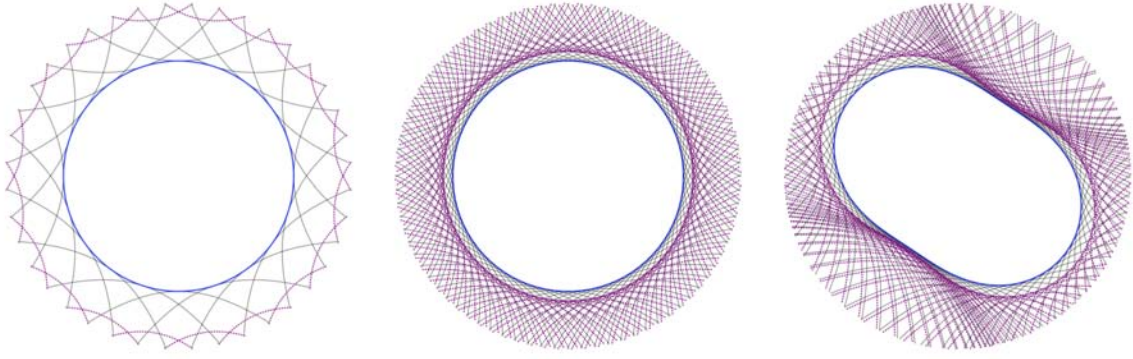


Figura 3.4: Representación gráfica de la ecuación (3.35), partiendo de la versión discreta (3.33). Las líneas negras son las geodésicas tangentes a la curva en el bulto, donde su longitud es $S(I_k)$. Las líneas discontinuas de color morado simulan las geodésicas $I_k \cap I_{k+1}$. En esta figura se tomaron distintos valores para n . En el límite $n \rightarrow \infty$, las restas y sumas que figuran en (3.33) hacen que las geodésicas se cancelen entre sí casi por completo, con excepción de las porciones tangentes a la curva. Por esta razón, E calcula la circunferencia de la curva, como se indica en (3.35). (Imagen tomada de [20]).

Esta ecuación puede expresarse en términos de R y su derivada con respecto de $\tilde{\theta}$ de la siguiente forma¹ :

$$R^2 = \frac{L^2 \sec^2(\theta - \tilde{\theta})}{\tan^2 \alpha - \tan^2(\theta - \tilde{\theta})} ,$$

$$\frac{d \log R}{d \tilde{\theta}} = \frac{\sin(\theta - \tilde{\theta}) \cos(\theta - \tilde{\theta})}{\cos^2(\theta - \tilde{\theta}) - \cos^2 \alpha} . \quad (3.37)$$

Resolviendo para α y $\theta - \tilde{\theta}$ en términos de R y $d \log R / d \tilde{\theta}$,

$$\tan \alpha(\tilde{\theta}) = \frac{L}{R} \sqrt{1 + \frac{L^2}{R^2 + L^2} \left(\frac{d \log R}{d \tilde{\theta}} \right)^2} , \quad (3.38)$$

$$\tan(\tilde{\theta} - \theta(\tilde{\theta})) = \frac{L^2}{R^2 + L^2} \frac{d \log R}{d \tilde{\theta}} . \quad (3.39)$$

Estas últimas ecuaciones nos dan los parámetros $\alpha(\tilde{\theta})$ y $\tilde{\theta} - \theta(\tilde{\theta})$ que definen nuestras geodésicas en AdS_3 .

3.4. Puntos y distancias

En esta sección vamos explicar los objetos geométricos más básicos en AdS_3 que surgen a parti de esta herramienta matemática. El aporte hecho por la teoría de campos es la entropía de entrelazamiento en regiones espaciales. Mostraremos como usarla para construir una geometría Euclidiana.

Consideremos un círculo de radio r centrado en un punto arbitrario en AdS_3 a un tiempo $T = 0$. De manera general, podemos tomar la ecuación del círculo, y usando las ecuaciones (3.38) y (3.39) podemos calcular la función de frontera $\alpha(\theta)$. Un punto en el bulto, A , lo podemos definir tomando el límite cuando $r \rightarrow 0$, con lo cual obtendremos el punto en el centro del círculo. Podemos calcular la función de frontera correspondiente tomando el mismo límite y notando que de

¹Ésta forma de resolver el sistema de ecuaciones se tomó de [3].

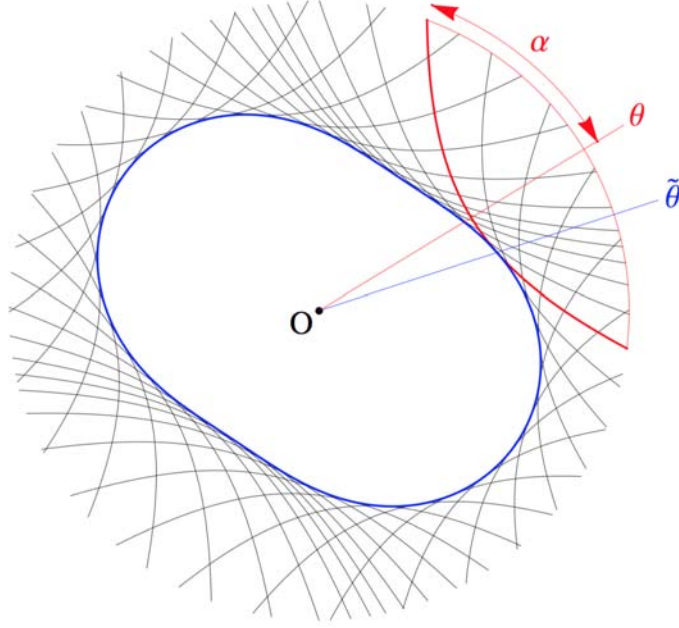


Figura 3.5: Consideraremos el conjunto de geodésicas tangentes a la curva $R(\tilde{\theta})$, donde $\tilde{\theta}$ es la coordenada angular del bulto. Las geodésicas están centradas en $\theta(\tilde{\theta})$, que corresponde a la coordenada angular de la frontera, y tienen un ancho de $\alpha(\tilde{\theta})$. (Imagen tomada de [20]).

la ecuación (3.38) se obtiene

$$\alpha_A(\theta) = \cos^{-1} \frac{R \cos(\theta - \tilde{\theta})}{\sqrt{L^2 + R^2}} . \quad (3.40)$$

Notemos que α_A es una función que depende solo en las coordenadas del bulto, R y θ . Explícitamente podemos graficar un punto A usando solamente la función de frontera. Insertando $\alpha_A(\theta)$ en la fórmula de la entropía diferencial (3.34) obtendremos que es idénticamente cero, ya que un punto tiene circunferencia cero. Con esta herramienta matemática es posible definir un punto en AdS_3 en coordenadas globales.

3.4.1. Distancia entre dos puntos

Dado que es posible definir un punto en coordenadas globales, debe ser de igual manera posible definir dos puntos en este espacio y tener alguna noción de distancia entre estos dos objetos. Dados dos puntos A y B con su función de frontera correspondiente, α_A y α_B , se puede definir la distancia entre ellos como:

Definición: Sea $\gamma(\theta) = \min\{\alpha_A(\theta), \alpha_B(\theta)\}$ para todo θ . La distancia entre A y B es:

$$d(A, B) = 2G_N E[\gamma(\theta)] . \quad (3.41)$$

La manera más fácil de ver que esta definición es la correcta es tomar la fórmula (3.35), la cual nos relaciona la entropía diferencial con la circunferencia de una curva cerrada. Cuando estas curvas son dos puntos A y B , primero la curva corre de A a B y luego regresa de B a A , de modo que $E(A, B)$ es la doble distancia de A a B . Para mostrar cómo funciona y cerciorarnos que realmente esta función es la distancia entre dichos puntos, calcularemos la integral de línea usando la métrica y la definición antes dada, entre dos puntos. El ejemplo más sencillo es calcular la distancia entre el origen y un punto arbitrario A a un tiempo $T = 0$. Para simplificar los cálculos tomemos que el punto A se encuentra a un R arbitrario y un ángulo $\tilde{\theta} = 0$. Calculando la distancia utilizando

la métrica (3.29), nos queda que

$$d(0, A) = \int_0^R dR' \left(1 + \frac{R'^2}{L^2}\right)^{-1/2}. \quad (3.42)$$

Para usar la definición de distancia antes dada, hay que notar que el origen se encuentra a $\alpha_0 = \pi/2$ y α_A en la ecuación (3.40) es mayor a $\pi/2$ fuera del intervalo $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Aplicando la definición obtenemos que

$$d(0, A) = G_N \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left. \frac{dS(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha(\theta_A)}. \quad (3.43)$$

En (3.15) hemos ya calculado la entropía de entrelazamiento para un intervalo, en coordenadas de Poincaré. En coordenadas globales, el resultado es [2]

$$S(\alpha) = \frac{L}{2G_N} \log\left(\frac{2L \sin \alpha}{\epsilon}\right), \quad (3.44)$$

donde ϵ es el parámetro de corte. Con lo anterior podemos calcular la distancia

$$d(0, A) = \frac{L}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{R \cos \theta}{\sqrt{L^2 + R^2 \sin^2 \theta}}, \quad (3.45)$$

y tomando el cambio de variable $dR' = R \cos \theta d\theta$ llegamos a

$$d(0, A) = \int_0^R dR' \left(1 + \frac{R'^2}{L^2}\right)^{-1/2}. \quad (3.46)$$

Con lo anterior podemos ver que la distancia entre dos puntos usando la funcional E concuerda con (3.6).

3.5. Curvas cerradas y puntos en Poincaré

Finalmente llegamos al punto central de este trabajo, que es definir curvas cerradas y puntos en el parche de Poincaré. Hasta ahora no se ha publicado una definición como tal para curvas cerradas y puntos en estas coordenadas. Es sencillo imaginar curvas $z(x)$ que se extienden a lo largo de todo el eje x generadas a través de geodésicas tangentes en cada punto de la curva. Pero no es del todo claro cómo a partir de este mecanismo se puede generar una curva cerrada, porque a primera vista pareciera que para trazar la parte de dichas curvas que está más alejada de la frontera nos harían falta geodésicas que descienden desde $z \rightarrow \infty$. Esto sería consistente con el hecho de que las coordenadas de Poincaré no cubran todo AdS_3 . Pero la rebanada del espacio AdS_3 a tiempo global $T = 0$ coincide por completo con la rebanada a tiempo de Poincaré $t = 0$, así que cualquier curva que tracemos en coordenadas globales estará contenida en las coordenadas de Poincaré al mismo tiempo, y por ende debe ser posible generar de igual forma curvas cerradas en Poincaré. Debe bastarnos entonces con hacer el cambio de coordenadas y calcular las geodésicas para definir cada uno de los objetos geométricos que nos interesan.

3.5.1. Círculo centrado en el origen de las coordenadas globales

Para trazar una curva cerrada en AdS_3 usando coordenadas globales, es necesario calcular la función de frontera $\alpha(\tilde{\theta})$, que depende de dicha curva y que a su vez es la encargada de definir

nuestras geodésicas tangentes a la curva. Los extremos de estas geodésicas en la frontera se encuentran en los puntos definidos por

$$\theta_{\pm} = \theta(\tilde{\theta}) \pm \alpha(\tilde{\theta}) \quad , \quad (3.47)$$

donde el subíndice \pm identifica al extremo en cuestión. Definamos un círculo centrado en el origen, en coordenadas globales. Para hacer esto usamos la ecuaciones (3.38) y (3.39), con lo cual podemos deducir trivialmente que la función de frontera que define nuestra figura y geodésicas es constante, es decir $\alpha(\tilde{\theta}) = \alpha_0$, y los ángulos del bulto y de la frontera son iguales, $\theta(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}$. Nuestros extremos están entonces dados por

$$\theta_{\pm} = \theta \pm \alpha_0 \quad . \quad (3.48)$$

Para traducir esto a AdS_3 a $T = 0$, y tomando la constante de curvatura $L = 1$ para simplificar la escritura, expresaremos al hiperboloide en coordenadas de Poincaré y globales de la siguiente forma:

Poincaré	Globales
$X_1 = \frac{z}{2} + \frac{1+x^2}{2z}$	$X_1 = \sqrt{R^2 + 1}$
$X_2 = 0$	$X_2 = 0$
$X_3 = \frac{x}{z}$	$X_3 = R \cos \theta$
$X_4 = \frac{z}{2} - \frac{1-x^2}{2z}$	$X_4 = R \sin \theta$

Cuadro 3.1: Parametrización de AdS_3 en coordenadas de Poincaré y globales.

Como primer punto debemos observar que a diferencia de α_0 , que es un ángulo de apertura, los θ_{\pm} que identifican los extremos para cualquier geodésica son directamente coordenadas angulares en el bulto. Esto es crucial ya que es posible traducir un ángulo a Poincaré. Simplemente observamos del cuadro 1.1, que en globales tenemos que

$$\theta = \arctan\left(\frac{X_4}{X_3}\right) \quad , \quad (3.49)$$

y como estas X son las coordenadas del hiperboloide, podemos sustituirlas por las de Poincaré, es decir,

$$\tan(\theta) = \left(\frac{X_4}{X_3}\right) = \left(\frac{\frac{z}{2} - \frac{1-x^2}{2z}}{\frac{x}{z}}\right) = \left(\frac{z^2 + x^2 - 1}{2x}\right) \quad . \quad (3.50)$$

El segundo punto que debemos notar es que los θ_{\pm} viven en la frontera de AdS_3 , por lo que para realizar una traducción a Poincaré debemos tomar el límite en la ecuación (3.50) cuando $z \rightarrow 0$

$$\tan(\theta) = \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right) \quad . \quad (3.51)$$

Juntando todo lo anterior, obtenemos que

$$\tan(\theta_{\pm}) = \left(\frac{x_{\pm}^2 - 1}{2x_{\pm}}\right) \quad , \quad (3.52)$$

y finalmente resolviendo para x_{\pm} y sustituyendo θ_{\pm} , en la expresión anterior llegamos a

$$x_{\pm} = \tan(\theta \pm \alpha_0) + \sec(\theta \pm \alpha_0) \quad . \quad (3.53)$$

Esta ecuación nos da los extremos de las geodésicas tangentes que definen nuestra curva, en este caso un círculo en el origen, en la coordenadas de Poincaré². Si bien es cierto que lo descrito anteriormente es para reproducir un círculo centrado en el origen en coordenadas de Poincaré, hay que tener total certeza de que dicha figura se encuentra en el hiperboloide. La manera de constatar esto es haciendo uso de la fórmula (2.25) y tomando que la ecuación que describe un círculo, $X_3^2 + X_4^2 = c^2$, donde c es el radio de la circunferencia llegamos a la condición

$$X_1^2 = 1 + c^2 \quad . \quad (3.54)$$

Esto nos garantiza que dicha curva existe en el hiperboloide. Para tener una representación gráfica de nuestra circunferencia, usaremos la ecuación del círculo y tomamos que el radio es igual a la unidad, $c = 1$. Esto nos da una circunferencia centrada en $(z, x) = (\sqrt{2}, 0)$. Para tener una descripción gráfica de como las geodésicas son tangentes a la circunferencia antes descrita, tomaremos distintos valores para θ , con lo cual obtendremos los extremos de las geodésicas que se encuentran en la frontera. Hay que notar que al asignar un valor al radio como $c = 1$ esto automáticamente arroja el valor de nuestra función de frontera, es decir, $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$. Véase la figura 3.6.

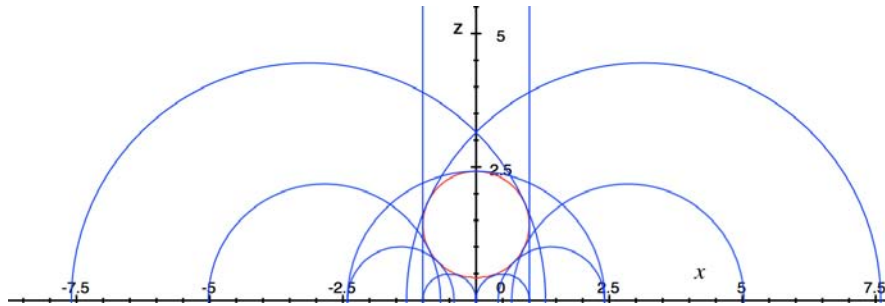


Figura 3.6: Con color rojo, está trazado el círculo con centro en el origen global, traducido aquí a coordenadas de Poincaré. En color azul se muestran las geodésicas tangentes a esta curva. En esta figura solo se trazaron once geodésicas, ya que solo se trata de dar un imagen general; sin embargo hay que considerar que para cada punto del espacio existe una geodésica tangente a la curva.

Lo primero que debemos notar es que, las geodésicas tocan a la curva en un solo punto, por lo que la descripción de una curva cerrada en Poincaré sí es posible y queda completamente determinada, contrario a lo que injenuamente hubiéramos esperado, por la función de frontera. Para la parte inferior de nuestra curva, era trivial imaginar su descripción a través de geodésicas tangentes que salen de la frontera, sin embargo no quedaba del todo claro cómo reconstruir la parte superior. Con nuestros resultados podemos observar que para la parte superior, las geodésicas tangentes a cada punto del círculo pasan por encima este, con lo cual se tiene una completa descripción de la curva. Un punto importante es que mientras que θ corre de 0 a π , el centro de nuestras geodésicas en Poincaré cubre por completo el eje x dos veces, una para las geodésicas que cubren la parte inferior y la segunda pasada para las geodésicas que cubren la parte superior, sin embargo para estas últimas se tiene que $x_- > x_+$. Es decir, los extremos quedan invertidos luego de que en (3.53) se tiene $x_+ \rightarrow \infty$, y a continuación x_+ reaparece en $-\infty$. Son precisamente estas geodésicas invertidas las que cubre la parte superior de nuestra curva cerrada.

²Notemos que esta ecuación es cuadrática, por lo que nuestra solución tendrá dos valores para cada extremo. Hay que considerar un signo para ambas soluciones ya que este solo influenciará el sentido en el que recorreremos a nuestra curva. Para este trabajo se tomó para ambas el signo positivo.

Para continuar con nuestra descripción, si es posible trazar una circunferencia en Poincaré definiendo una función de frontera, entonces de igual forma debe ser posible ubicar al punto en su centro tomando el límite cuando el radio tiende a cero. Haciendo esto nuestra función de frontera toma el valor de $\alpha(\theta) = \pi/2$. En la figura 3.7, podemos observar cómo todas las geodésicas

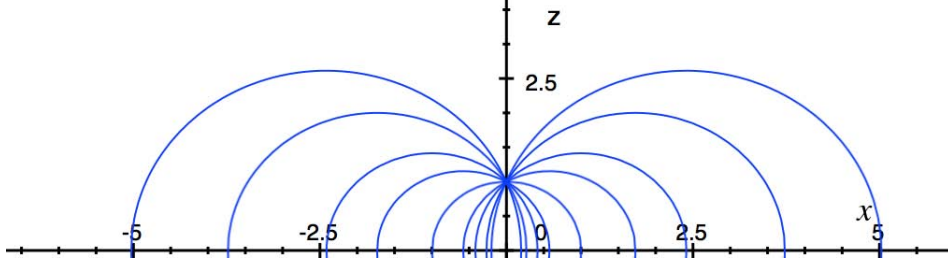


Figura 3.7: Representación de un punto en coordenadas de Poincaré. Este está localizado en $z = \sqrt{2}$ y $x = 0$ ya que se tomó la constante de curvatura $L = 1$.

son tangentes a este punto, $(\sqrt{2}, 0)$, cuando $c \rightarrow 0$. Esto encaja con la descripción antes hecha en coordenadas globales, lo cual no es ninguna sorpresa, ya el resultado debe ser independiente del tipo de coordenadas asignadas al espacio, para $T = 0$.

3.5.2. Círculos fuera del origen de las coordenadas globales

Podemos de igual manera trazar círculos más generales. Un aspecto a destacar aquí es que, cuando movemos la circunferencia fuera del origen de las coordenadas globales, la curva en Poincaré se empieza a deformar y deja de ser un círculo (véase la figura 3.8).

Usando la misma metodología para la circunferencia centrada en el origen, podemos determinar la función de frontera usando las fórmulas (3.38) y (3.39). Como ejemplo ilustrativo, podemos calcular esta función usando que $R = 4 \cos(\tilde{\theta})$, que es una circunferencia de radio 2 centrada en $(2 + \sqrt{5}, 0)$. Con lo anterior, nos queda que los parámetros que definen a nuestros extremos para las geodésicas están dados por

$$\alpha(\tilde{\theta}) = \arctan \left(\frac{1}{4 \sin(\tilde{\theta})} \sqrt{1 + \frac{\cot^2(\tilde{\theta})}{16 \sin(\tilde{\theta}) + 1}} \right) , \quad (3.55)$$

$$\theta(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta} - \arctan \left(\frac{\cot(\tilde{\theta})}{16 \sin(\tilde{\theta}) + 1} \right) . \quad (3.56)$$

Una vez que se tienen los parámetros definidos, identificamos igual que antes los extremos de las geodésicas,

$$\begin{aligned} x_{\pm} = & \tan \left(\tilde{\theta} - \arctan \left(\frac{\cot(\tilde{\theta})}{16 \sin(\tilde{\theta}) + 1} \right) \pm \arctan \left(\frac{1}{4 \sin(\tilde{\theta})} \sqrt{1 + \frac{\cot^2(\tilde{\theta})}{16 \sin(\tilde{\theta}) + 1}} \right) \right) \\ & + \sec \left(\tilde{\theta} - \arctan \left(\frac{\cot(\tilde{\theta})}{16 \sin(\tilde{\theta}) + 1} \right) \pm \arctan \left(\frac{1}{4 \sin(\tilde{\theta})} \sqrt{1 + \frac{\cot^2(\tilde{\theta})}{16 \sin(\tilde{\theta}) + 1}} \right) \right) . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Vuelve a ocurrir aquí que las geodésicas que cubren la parte superior de nuestras curvas tienen sus extremos intercambiados en la frontera, $x_+ < x_-$, es decir, en las geodésicas que cubren la parte inferior de nuestra curva podemos identificar que x_- es el extremo izquierdo y x_+ es el extremo derecho caso contrario a las geodésicas que cubren la parte superior.

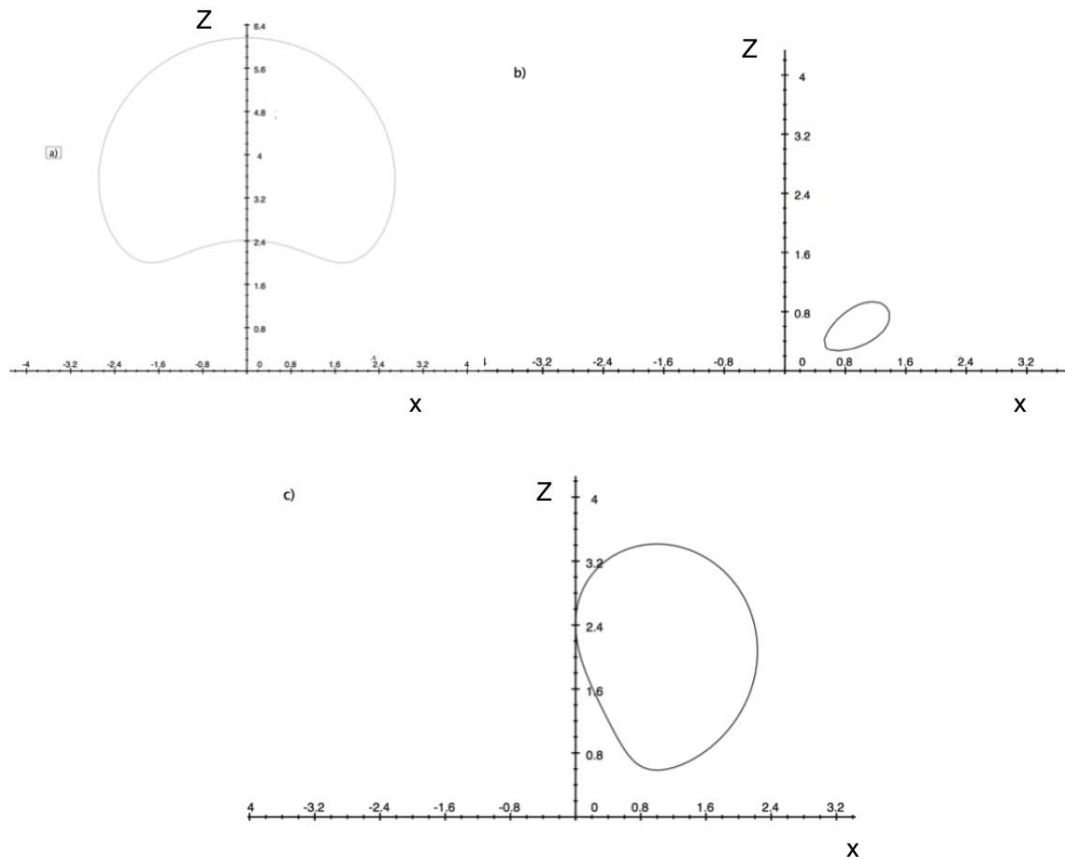


Figura 3.8: Se puede observar cómo la circunferencia fuera del origen se deforma, según se aleje de este, (z_0, x_0) . a) Muestra una circunferencia con origen en $(2, 0)$. b) Circunferencia en $(0, 2)$. c) Cinfunferencia en $(1, 1)$.

Ahora que ya se tienen los parámetros definidos en coordenadas de Poincaré, basta graficar para dar un panorama general de cómo esta función de frontera define curvas cerradas en general, ya que si bien es cierto que para este caso se consideró un círculo fuera del origen, en Poincaré la curva está distorsionada, y solo es un círculo topológicamente hablando. En la figura 3.9 mostramos cómo basta con definir la función de la frontera para modelar la curva en cuestión. Nuevamente podemos ver que, al trazar curvas cerradas en coordenadas de Poincaré, las geodésicas tangentes a la parte superior de la curva se encuentran por encima de la curva, y tienen sus extremos intercambiados.

Para seguir con nuestra descripción, dado que es posible trazar una circunferencia fuera del origen, entonces debemos poder ubicar el punto centro de dicha curva. Antes de hacer esto debemos asegurarnos que dicha solución existe en el hiperboloide. Esto lo podemos hacer resolviendo la ecuación

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{z}{2} - \frac{1}{2z}(1 - x^2) - 2\right)^2 = 0 \quad , \quad (3.58)$$

con lo cual se obtiene

$$x = 0, z = 2 + \sqrt{5} \quad . \quad (3.59)$$

Ahora que tenemos localizado el punto, podemos comparar con el resultado arrojado por nuestra función de frontera. Usando la ecuación (3.40), podemos calcular los extremos de las geodésicas

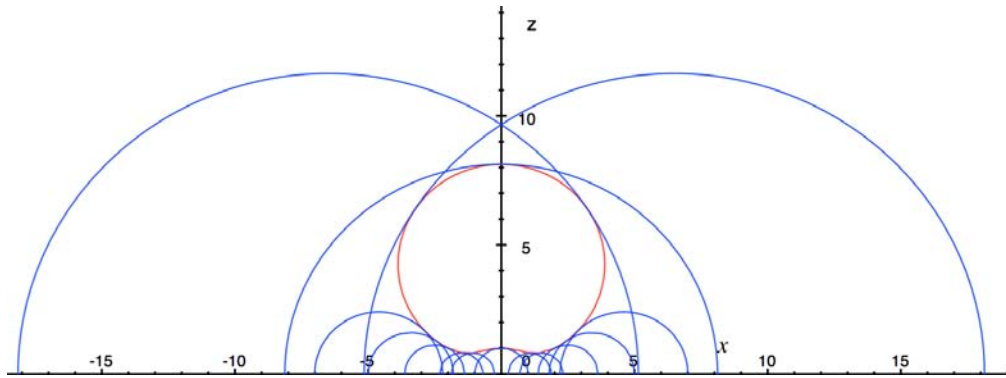


Figura 3.9: Gráfica que muestra, de color rojo, la curva cerrada que corresponde a lo que en coordenadas globales en un círculo fuera del origen. De color azul, las geodésicas tangentes a la curva. Para esta descripción solo se tomaron algunos valores; sin embargo hay que considerar que de cada punto del espacio existe una geodésica tangente a la curva.

tangentes a nuestro punto,

$$x_{\pm} = \tan(\theta \pm \alpha_A) + \sec(\theta \pm \alpha_A) \quad . \quad (3.60)$$

En este caso, un círculo centrado en $(2 + \sqrt{5}, 0)$, nuestra función de frontera queda determinada por

$$\alpha_A = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad . \quad (3.61)$$

Juntando lo anterior, los extremos de las geodésicas tangentes a este punto están dadas por

$$x_{\pm} = \tan\left(\theta \pm \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right) + \sec\left(\theta \pm \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \quad . \quad (3.62)$$

En la figura 3.10 mostramos cómo la ecuación (3.62) modela los extremos que nos permiten trazar las geodésicas, las cuales son todas tangentes al mismo punto. Para una mejor visualización, solo se muestran unas cuantas geodésicas; sin embargo hay que considerar que para cualquier punto en la frontera existe una geodésica que toca al punto en cuestión.

Con nuestro resultado podemos concluir que para cualquier curva cerrada en el parche de Poincaré es posible definir la función de frontera que determina a las geodésicas tangentes a la curva y nos ayuda por lo tanto a modelarla. Podemos ver además que al trazar una curva cerrada en coordenadas globales, esta misma sigue siendo una curva cerrada en Poincaré. De igual forma, el punto en coordenadas globales, es un punto en coordenadas de Poincaré.

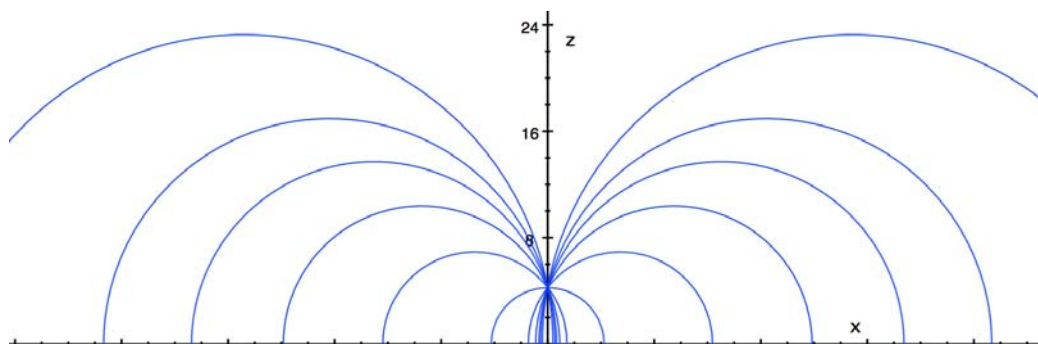


Figura 3.10: Gráfica de un punto modelado a través de geodésicas ancladas a la frontera. De color azul se muestran las geodésicas tangentes al punto, $z = 2 + \sqrt{5}$, que es valor del punto cuando el radio de la curva cerrada de la figura anterior tiende a cero. Se observa claramente que todas las geodésicas coinciden en este punto.

Usando esta herramienta es posible entonces generar curvas cerradas, definiendo una función de frontera, en coordenadas de Poincaré. Podemos notar que a pesar de estar en coordenadas de Poincaré, las fórmulas usadas para trazar nuestras curvas usan todavía parámetros en coordenadas globales. En el siguiente capítulo daremos una traducción completa a Poincaré, y más aún, formularemos la entropía diferencial y sus propiedades en estas coordenadas.

Capítulo 4

ENTROPÍA DIFERENCIAL EN POINCARÉ

En este capítulo se extenderá la definición de entropía diferencial a coordenadas de Poincaré sin hacer referencia a ningún parámetro en coordenadas globales. Para hacer esto, debemos introducir una nueva versión de la entropía diferencial en estas coordenadas. Podemos hacer esto usando, como en la definición original dada en el capítulo anterior, que la entropía diferencial está dada por

$$E = \sum_{k=1}^n (S(I_k) - S(I_k \cap I_{k+1})) \quad , \quad (4.1)$$

donde $S(I_k)$ es la entropía de entrelazamiento del intervalo I_k de una familia de intervalos consecutivos que cubren la frontera a un tiempo constante. Tomando el límite continuo cuando $n \rightarrow \infty$ se obtiene [21]

$$E = \int d\lambda \left. \frac{\partial S(\gamma_I(\lambda), \gamma_D(\bar{\lambda}))}{\partial \bar{\lambda}} \right|_{\bar{\lambda}=\lambda} \quad . \quad (4.2)$$

Al igual que en coordenadas globales, la entropía diferencial en Poincaré es una funcional que depende de las funciones de los intervalos de entropía de entrelazamiento y que a su vez estas están dadas por la curva en el bulto. Explícitamente, la entropía de cada intervalo está dada por $S(\gamma_I(\lambda), \gamma_D(\bar{\lambda}))$, donde $\gamma_{I,D}$ denotan los extremos de las geodésicas, extremo izquierdo y derecho, los cuales están anclados a la frontera y cada una de estas geodésicas es tangente a un punto de la curva en el bulto, que denotaremos $\gamma_B(\lambda)$. De este modo, podemos usar parámetros de la frontera o del bulto para calcular la entropía diferencial de una curva, según sea más sencillo el cálculo, con la única condición de que λ debe ser un parámetro continuo.

Antes de comenzar, debemos dar una definición general para las curvas en Poincaré. Consideremos una curva en el bulto, $\gamma_B = \{\tilde{z}(\lambda), \tilde{x}(\lambda), \tilde{t}(\lambda)\}$ y λ un parámetro continuo. Seguimos aquí con la convención de denotar con tildes las coordenadas de puntos en el bulto, y sin tildes las de la frontera. Debido a que AdS es invariante de Lorentz, para cada valor de λ podemos usar un boost para pasar a un marco donde la tangente a la curva en el bulto apunten puramente en la dirección espacial. En ese marco, la geodésica tangente a la curva será un semicírculo justo como en el capítulo anterior. Después de algunos cálculos y regresando al sistema sin boost, se encuentra que la familia de geodésicas tangentes a la curva γ_B está dada por [21]

$$\Gamma(s; \lambda) = \left(r^*(\lambda) \sin s, \tilde{x}(\lambda) + \frac{\tilde{z}(\lambda)\tilde{z}'(\lambda)\tilde{x}'(\lambda)}{\tilde{x}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2} - \frac{\tilde{x}'(\lambda)r^*(\lambda)}{\sqrt{\tilde{x}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2}} \cos s, \right. \quad (4.3)$$

$$\left. \tilde{t}(\lambda) + \frac{\tilde{z}(\lambda)\tilde{z}'(\lambda)\tilde{t}'(\lambda)}{\tilde{x}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2} - \frac{\tilde{t}'(\lambda)r^*(\lambda)}{\sqrt{\tilde{x}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2}} \cos s \right) \quad ,$$

donde $s \in [0, \pi]$ es un parámetro que nos mueve a lo largo de cada geodésica y

$$r^* = \tilde{z}(\lambda) \sqrt{1 + \frac{\tilde{z}'(\lambda)^2}{\tilde{x}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2}} \quad , \quad (4.4)$$

es el radio de la geodésica en el marco boosteado. Estas geodésicas intersectan a la frontera de AdS en $s = 0$ y $s = \pi$. Sus extremos izquierdos y derechos están dadas por

$$\gamma_{I,D}(\lambda) = (x_{I,D}(\lambda), t_{I,D}(\lambda)) \quad , \quad (4.5)$$

donde

$$x_{D,I} = \tilde{x}(\lambda) + \frac{\tilde{z}(\lambda)\tilde{z}'(\lambda)\tilde{x}'(\lambda)}{\tilde{x}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2} \pm \frac{\tilde{x}'(\lambda)r^*(\lambda)}{\sqrt{\tilde{x}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2}} \quad , \quad (4.6)$$

$$t_{D,I} = \tilde{t}(\lambda) + \frac{\tilde{z}(\lambda)\tilde{z}'(\lambda)\tilde{t}'(\lambda)}{\tilde{x}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2} \pm \frac{\tilde{t}'(\lambda)r^*(\lambda)}{\sqrt{\tilde{x}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2}} \quad . \quad (4.7)$$

A partir de estas relaciones [21] generalizaremos la entropía diferencial en coordenadas de Poincaré.

4.1. Entropía diferencial a tiempo constante

4.1.1. Longitud de una curva

Una de las principales propiedades de la entropía diferencial que debemos de verificar es que nos da la longitud de la curva. Tomemos como ejemplo el caso sencillo del capítulo anterior, un círculo centrado en el origen de radio R en coordenadas globales traducido a Poincaré. La parametrización está dada por $\gamma_B(\lambda) = \{\lambda, \tilde{z}(\lambda)\}$

$$\tilde{z}(\lambda) = \sqrt{L^2 + R^2} \pm \sqrt{R^2 - \tilde{x}(\lambda)^2} \quad , \quad (4.8)$$

tomando $\tilde{x}(\lambda) = \lambda$, donde $\lambda \in [-R, R]$. Con esta parametrización dividimos el círculo en dos partes, la parte superior e inferior, que corresponde simplemente a tomar signo positivo o negativo en (4.8). Los extremos de las geodésicas que son tangentes a la curva del bulto están dadas por

$$x_{D,L}(\lambda) = \lambda + \tilde{z}(\lambda)\tilde{z}'(\lambda) \pm \tilde{z}(\lambda)\sqrt{1 + \tilde{z}'(\lambda)^2} \quad . \quad (4.9)$$

Ahora, debemos calcular la entropía diferencial para cada parte de la curva, inferior y superior. La forma de hacerlo es comenzar con la entropía (3.15) para el intervalo asociado a cada geodésica,

$$S(\gamma_I(\lambda), \gamma_D(\lambda)) = \frac{L}{4G_N} \ln \left(\frac{x_D - x_I}{\epsilon} \right) \quad , \quad (4.10)$$

y usar la ecuación (4.2). Obtenemos que para la parte inferior (denotada por i),

$$E_i = \frac{L}{4G_N} \int_{-R}^R \left(\frac{\sqrt{1 + \tilde{z}'(\lambda)^2}}{\tilde{z}(\lambda)} + \frac{\tilde{z}'(\lambda)}{\tilde{z}(\lambda)} + \frac{\tilde{z}'(\lambda)\tilde{z}''(\lambda)}{1 + \tilde{z}'(\lambda)^2} + \frac{\tilde{z}''(\lambda)}{\sqrt{1 + \tilde{z}'(\lambda)^2}} \right) d\lambda \quad , \quad (4.11)$$

Y para la parte superior (denotada por s) obtenemos que¹

$$E_s = \frac{L}{4G_N} \int_R^{-R} \left(-\frac{\sqrt{1 + \tilde{z}'(\lambda)^2}}{\tilde{z}(\lambda)} + \frac{\tilde{z}'(\lambda)}{\tilde{z}(\lambda)} + \frac{\tilde{z}'(\lambda)\tilde{z}''(\lambda)}{1 + \tilde{z}'(\lambda)^2} - \frac{\tilde{z}''(\lambda)}{\sqrt{1 + \tilde{z}'(\lambda)^2}} \right) d\lambda \quad . \quad (4.12)$$

¹Hay que recordar que, como se vio en el capítulo anterior, para cubrir la parte superior los extremos de las geodésicas cambian, lo que hace que el integrando de la entropía diferencial va ya de R a $-R$.

Si sumamos ambas contribuciones a de la entropía diferencial se corrobora que

$$E_i + E_s = \frac{2\pi R}{4G_N} , \quad (4.13)$$

que es la correspondiente longitud de la curva. En general se obtiene que en Poincaré, la entropía diferencial para una curva cerrada nos da la longitud de dicha curva. Un punto a destacar es que las entropías diferenciales (4.11) y (4.12) contienen por separado partes en la integral que divergen; sin embargo dichas partes divergentes se cancelan cuando sumamos ambas contribuciones para obtener de la entropía diferencial total. Es solo después de esta suma que reproducimos la longitud de nuestra curva cerrada. Si consideramos en cambio en una curva abierta (como sería por sí sola la parte inferior o superior de una curva cerrada), para calcular su longitud tendemos que agregar a la entropía diferencial un término de superficie,

$$E = \int_{\lambda_0}^{\lambda_f} d\lambda \left. \frac{\partial S(\gamma_I(\lambda), \gamma_D(\tilde{\lambda}))}{\partial \tilde{\lambda}} \right|_{\tilde{\lambda}=\lambda} + f(\tilde{z}(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) \Big|_{\lambda_0}^{\lambda_f} , \quad (4.14)$$

donde

$$f(\tilde{z}(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) = \frac{L}{4G_N} \left[\ln(\tilde{z}(\lambda)) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tilde{x}(\lambda) - x_I}{x_D - \tilde{x}(\lambda)} \right) \right] . \quad (4.15)$$

Lo que ocurre es que los integrandos de la entropía diferencial y la longitud difieren por una derivada total, que no contribuye en el caso de una curva cerrada; pero sí debe tomarse en cuenta cuando la curva es abierta (esto también sucede en *AdS* global [20]). La demostración general de que dicha función de superficie cancela los términos divergentes que encontramos al dividir una curva cerrada en sus porciones inferior y superior se hará más adelante. En el ejemplo del círculo, podemos verificar esto directamente al calcular por separado la longitud de sus porciones inferior y superior, con lo que se encuentra que

$$E_{s,i} + f(\tilde{z}(\lambda), \tilde{x}(\lambda)) = \frac{\pi R \mp 2 \tan^{-1} \left(\frac{R}{L} \right)}{4G_N} , \quad (4.16)$$

que además de ser finito es el resultado correcto. En general, para tiempo constante podemos obtener la longitud para una curva cerrada usando simplemente la entropía diferencial, o para una curva abierta usando la ecuación (4.14).

4.1.2. Puntos en el bulto

Ahora que tenemos bajo control la longitud de curvas en el bulto, podemos pasar al caso de un punto en el bulto. Para describir un punto tenemos dos opciones. La primera es tomar curvas cerradas, que tienen la ventaja que no es necesario agregar términos de superficie que quiten las divergencias, y la desventaja que para este tipo de curvas es necesario recorrer el eje x dos veces, una vez para la parte inferior y otra para la parte superior. La segunda opción es considerar curvas abiertas (como un semicírculo) tales que la pendiente en sus extremos diverja. En este caso no tenemos que lidiar con el problema de recorrer el eje x dos veces; pero sí debemos incluir un término de superficie para cancelar las divergencias en los extremos y obtener correctamente que la longitud del punto es nula.

Sabemos que las geodésicas tangentes a un punto en el bulto son semicírculos que tienen la forma

$$(\tilde{x} - x_c)^2 + \tilde{z}^2 = \ell^2 , \quad (4.17)$$

con

$$x_c \equiv \frac{x_+ + x_-}{2} \quad (4.18)$$

el centro de la geodésica y

$$\ell \equiv \frac{x_+ - x_-}{2} \quad (4.19)$$

su radio. Ya sea para una curva cerrada o una abierta, podemos recuperar la ecuación (4.17) comenzando con la familia de geodésicas tangentes a la curva y tomando el radio de la curva tendiendo a cero, $R \rightarrow 0$.

4.1.3. Distancia entre dos puntos

Para completar la descripción de la entropía diferencial en Poincaré, es necesario tener una definición de distancia entre dos puntos en estas coordenadas. Se esperaría que, al ser el paso de global a Poincaré un simple cambio de coordenadas, la definición de distancia en coordenadas globales formulada en [20] siguiera siendo útil.

Consideremos dos puntos en el bulto P y Q (supondremos sin pérdida de generalidad que $x_P \leq x_Q$), con sus correspondientes familias de geodésicas, que denotaremos como $l_P(x_c)$ y $l_Q(x_c)$, con coordenadas en el bulto $(\tilde{x}_P, \tilde{z}_P)$ y $(\tilde{x}_Q, \tilde{z}_Q)$ correspondientemente. La geodésica que conecta estos dos puntos, que denotaremos \overline{PQ} , está centrada en el punto en la frontera que llamaremos M . Explícitamente

$$x_M = \frac{\tilde{x}_P + \tilde{x}_Q}{2} + \frac{\tilde{z}_P^2 - \tilde{z}_Q^2}{2(\tilde{x}_P - \tilde{x}_Q)} \quad , \quad (4.20)$$

y el radio de \overline{PQ} esta dado por

$$\ell_{\overline{PQ}} = \frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{x}_P - \tilde{x}_Q)^2 + 2(\tilde{z}_P^2 + \tilde{z}_Q^2) + \frac{(\tilde{z}_P^2 - \tilde{z}_Q^2)^2}{(\tilde{x}_P - \tilde{x}_Q)^2}} \quad . \quad (4.21)$$

Comparando las expresiones encontramos que la distancia entre dos puntos en coordenadas de Poincaré está dada por

$$d(P, Q) = \frac{1}{2} (\mathcal{E}[l_{PQ}] - \mathcal{E}[l_{-P-Q}]) \quad , \quad (4.22)$$

donde \mathcal{E} denota a la entropía diferencial “renormalizada” con el término de superficie indicado en (4.14),

$$\mathcal{E}[\ell] \equiv E[\ell] + f(x_c) \Big|_{x_{c,i}}^{x_{c,f}} \quad , \quad (4.23)$$

$l_{PQ}(x_c)$ denota a la familia combinada de geodésicas tal que $l_{PQ}(x_c)$ es $l_P(x_c)$ para $x_c \leq x_M$ y $l_Q(x_c)$ para $x_c \geq x_M$, y $l_{-P-Q}(x_c)$ se refiere a la combinación análoga para los puntos $-P$ y $-Q$, que se obtienen al reflejar P y Q a través del origen en Poincaré: $(\tilde{x}_{-P}, \tilde{z}_{-P}) = (-\tilde{x}_P, \tilde{z}_P)$ y simplemente para $-Q$. Con (4.22) podemos calcular, haciendo uso de la entropía diferencial renormalizada, la distancia entre dos puntos arbitrarios. La forma más sencilla de ver que la fórmula en verdad reproduce dicha distancia es observar que

$$d(P, Q) = \frac{1}{2} (\mathcal{E}[l_{PQ}] - \mathcal{E}[l_{-P-Q}]) = \int_{\tilde{x}_P}^{\tilde{x}_Q} d\tilde{x} \frac{L}{\tilde{z}_g(\tilde{x})} \sqrt{1 + \tilde{z}'_g(\tilde{x})^2} \quad , \quad (4.24)$$

donde $\tilde{z}_g(\tilde{x})$ es la parametrización de \overline{PQ} . La última ecuación hace evidente que la parte del integrando corresponde a la longitud de esta geodésica desde \tilde{x}_P a \tilde{x}_Q .

4.2. Caso covariante

En esta parte, tomaremos el caso más general para Poincaré en $2+1$ -dimensiones sin la restricción de mantenernos a tiempo constante, es decir, una curva en el bulto parametrizada como $\gamma_B = \{\tilde{z}(\lambda), \tilde{x}(\lambda), \tilde{t}(\lambda)\}$ y analizaremos las propiedades de la entropía diferencial.

4.2.1. Longitud de una curva para $t \neq 0$

Para el caso covariante queremos de nuevo obtener la longitud de una curva en el bulto a partir de la entropía diferencial. Como ejemplo concreto, analizaremos el caso más sencillo, que en coordenadas globales es un círculo en el origen tiempo T constante, pero ahora con $t \neq 0$ que implica que el tiempo t de Poincaré no será ya constante.

Para facilitar los cálculos recordemos que en AdS_{3+1} en coordenadas globales tenemos

$$\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{R^2 + L^2} \cos T \quad , \\ X_2 &= \sqrt{R^2 + L^2} \sin T \quad , \\ X_3 &= R \cos \theta \quad , \\ X_4 &= R \sin \theta \quad , \end{aligned} \tag{4.25}$$

y en coordenadas de Poincaré,

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2} (L^2 + x^2 - t^2) \right) \quad , \\ X_2 &= \frac{Lt}{z} \quad , \\ X_3 &= \frac{Lx}{z} \quad , \\ X_4 &= \frac{z}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} (L^2 - x^2 + t^2) \right) \quad . \end{aligned} \tag{4.26}$$

Ahora bien, si tomamos un círculo en coordenadas globales a T constante podemos hacer una parametrización de la curva en el bulto de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\lambda) &= \lambda \quad , \\ \tilde{t}(\lambda) &= az(\lambda) \quad , \\ \tilde{z}(\lambda) &= z(\lambda) \quad , \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde a es una constante definida como $a = \sqrt{R^2 + L^2} \sin(T)$ y $\lambda \in [-R, R]$. Usando las ecuaciones (4.6) y (4.7), obtenemos que los extremos de las geodésicas tangenciales a nuestra curva están dados por

$$\begin{aligned} x_{D,I} &= \lambda + \frac{z(\lambda)z'(\lambda)}{1 - a^2 z'(\lambda)^2} \pm \frac{z(\lambda)}{1 - a^2 z'(\lambda)^2} \sqrt{1 + z'(\lambda)^2(1 - a^2)} \quad , \\ t_{D,I} &= az(\lambda) + \frac{az(\lambda)z'(\lambda)^2}{1 - a^2 z'(\lambda)^2} \pm \frac{az(\lambda)z'(\lambda)}{1 - a^2 z'(\lambda)^2} \sqrt{1 + z'(\lambda)^2(1 - a^2)} \quad . \end{aligned} \tag{4.28}$$

El cálculo de la entropía de cada intervalo cambia un poco con respecto a los ejemplos vistos en el capítulo anterior, ya que ahora se tiene que cada geodésica tiene sus extremos anclados en la frontera para una posición $x_{D,I}$ y para un tiempo también variable $t_{D,I}$. En general se tiene que

$$S(\gamma_I(\lambda), \gamma_D(\lambda)) = \frac{L}{2G_N} \ln \left(\frac{|\gamma_D - \gamma_I|}{\epsilon} \right) = \frac{L}{4G_N} \ln \left(\frac{(x_D - x_I)^2 - (t_D - t_I)^2}{\epsilon^2} \right) \quad . \tag{4.29}$$

Del mismo modo que en el caso con t constante, dividimos la curva en dos partes, superior e inferior, con lo que podemos calcular la entropía diferencial para cada una de ella. Haciendo uso de la ecuación (4.2) obtenemos para la parte inferior

$$E_i = \frac{1}{4G_N} \left\{ \frac{L}{2} \ln(l_X^2 - l_T^2) + \tanh^{-1} \left(\frac{z'(\lambda)}{\sqrt{1 + z'(\lambda)^2(1 - a^2)}} \right) \right\} \Big|_{-R}^R + \frac{1}{4G_N} \int_{-R}^R d\lambda \frac{\sqrt{1 + z'(\lambda)^2(1 - a^2)}}{z(\lambda)} \quad , \tag{4.30}$$

y para la parte superior

$$E_s = \frac{1}{4G_N} \left\{ -\frac{L}{2} \ln(l_X^2 - l_T^2) - \tanh^{-1} \left(\frac{z'(\lambda)}{\sqrt{1 + z'(\lambda)^2(1 - a^2)}} \right) \right\} \Big|_{-R}^R + \frac{1}{4G_N} \int_{-R}^R d\lambda \frac{\sqrt{1 + z'(\lambda)^2(1 - a^2)}}{z(\lambda)}, \quad (4.31)$$

donde definimos como $l_x = \frac{x_D - x_I}{2}$ y $l_t = \frac{t_D - t_I}{2}$. Sumando ambas partes de la entropía diferencial se obtiene la longitud total de la curva.

$$E = E_s + E_i = \frac{1}{2G_N} \int_{-R}^R d\lambda \frac{\sqrt{1 + z'(\lambda)^2(1 - a^2)}}{z(\lambda)}. \quad (4.32)$$

Podemos ver que la longitud de la curva que calculamos esta dada en términos de la constante a , que definimos debajo de la ec. (4.27).

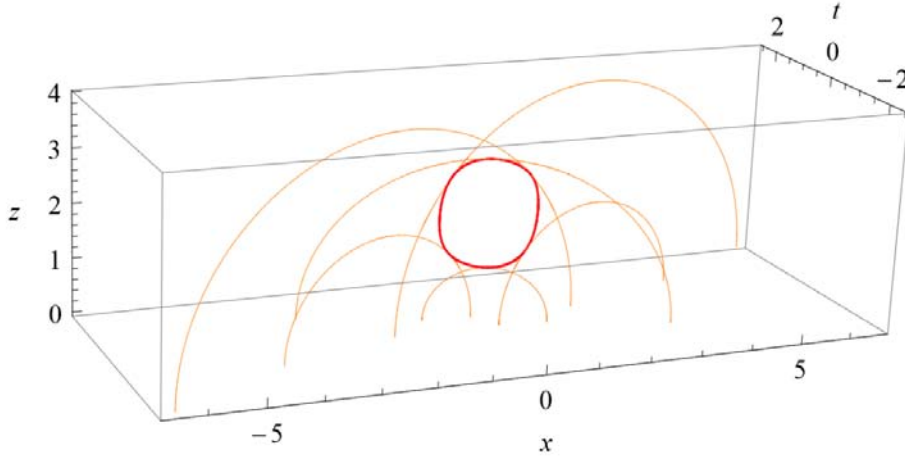


Figura 4.1: Representación en Poincaré de lo que en coordenadas globales es un círculo a $T = \text{cte.} \neq 0$.

4.2.2. Curvas abiertas con tiempo variable

Consideremos una curva abierta en el bulto $\gamma_B(\lambda) = \{\tilde{z}(\lambda), \tilde{x}(\lambda), \tilde{t}(\lambda)\}$ parametrizada por $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_f]$. De forma general podemos calcular la entropía diferencial para una curva arbitraria usando las ecuaciones (4.2), (4.6), (4.7) y (4.29) y se obtiene que

$$E = \frac{L}{4G_N} \int_{\lambda_0}^{\lambda_f} d\lambda \left(\frac{1}{\tilde{z}(\lambda)} \sqrt{\tilde{x}'(\lambda)^2 + \tilde{z}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2} + \frac{\tilde{z}''(\lambda)}{\sqrt{\tilde{x}'(\lambda)^2 + \tilde{z}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2}} \right. \\ \left. + \frac{l_X l'_x - l_T l'_T}{l_X^2 - l_T^2} + \frac{\tilde{z}'(\lambda)}{\tilde{x}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2} \frac{\tilde{t}'(\lambda) \tilde{t}''(\lambda) - \tilde{x}'(\lambda) \tilde{x}''(\lambda)}{\sqrt{\tilde{x}'(\lambda)^2 + \tilde{z}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2}} \right). \quad (4.33)$$

Todos los términos excepto el primero son derivadas totales, e integrando llegamos a

$$E = \frac{L}{4G_N} \int_{\lambda_0}^{\lambda_f} d\lambda \left(\frac{1}{\tilde{z}(\lambda)} \sqrt{\tilde{x}'(\lambda)^2 + \tilde{z}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2} \right) \\ + \frac{1}{4G_N} \left[\frac{L}{2} \ln(l_X^2 - l_T^2) + L \sinh^{-1} \left(\frac{\tilde{z}'(\lambda)}{\sqrt{\tilde{x}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2}} \right) \right] \Big|_{\lambda_0}^{\lambda_f} \quad (4.34)$$

El integrando de la última ecuación corresponde a la longitud de la curva, mientras que los términos restantes son divergentes y, en el caso de curvas cerradas no contribuyen. Para una curva

abierta en necesario quitar dichas divergencias. El término de superficie que necesitamos agregar para recuperar la longitud está dado por

$$f(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{1}{4G_N} \left[-\frac{L}{2} \ln(\ell_x^2 - \ell_t^2) + \frac{L}{2} \ln \left(\frac{\tilde{x} - x_I}{x_D - \tilde{x}} \right) \right] , \quad (4.35)$$

que es la generalización covariante de (4.15). El primer término corresponde a una divergencia logarítmica, que para el caso a con t variable tiene esta forma en general, mientras que el segundo término idéntico al que teníamos en el caso con t constante, por lo que de forma general podemos probar que este último término cancela las divergencias en ambos casos. La forma de comprobarlo es observar que en la ecuación (4.34) la divergencia en cuestión está dada por

$$L \sinh^{-1} \left(\frac{\tilde{z}'(\lambda)}{\sqrt{\tilde{x}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2}} \right) , \quad (4.36)$$

por lo que basta observar que

$$L \sinh^{-1} \left(\frac{\tilde{z}'(\lambda)}{\sqrt{\tilde{x}'(\lambda)^2 - \tilde{t}'(\lambda)^2}} \right) + \frac{L}{2} \ln \left(\frac{\tilde{x} - X_I}{X_D - \tilde{x}} \right) = 0 . \quad (4.37)$$

Es fácil obtener esta conclusión haciendo uso de las propiedades del logaritmo y usando que $\sinh^{-1}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$. Este término de superficie, ecuación (4.35), nos permite calcular de forma general la longitud de cualquier curva abierta en el bulto con t variable. Como ejemplo podemos tomar el círculo anterior, y al agregar este término a la entropía diferencial de sus partes superior e inferior,

$$f_{s,i}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{1}{4G_N} \left\{ \pm \frac{L}{2} \ln(l_X^2 - l_T^2) \pm \tanh^{-1} \left(\frac{z'(\lambda)}{\sqrt{1 + z'(\lambda)^2(1 - a^2)}} \right) \right\} \Big|_{-R}^R , \quad (4.38)$$

se obtiene que la longitud de cada parte está dada por

$$E = E_{s,i} + f_{s,i}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{L}{4G_N} \int_{-R}^R d\lambda \frac{\sqrt{1 + z'(\lambda)^2(1 - a^2)}}{z(\lambda)} . \quad (4.39)$$

De esta modo tenemos una manera de calcular de forma general cualquier tipo de curvas, abiertas o cerradas.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

En este trabajo se abordó el problema de definir la entropía diferencial en coordenadas de Poincaré. Para ello primero se estudió la entropía de entrelazamiento y cómo se define en la mecánica cuántica. Después se analizó cómo es que se define la entropía de entrelazamiento en la teoría cuántica de campos en el caso de una partición espacial de los grados de libertad, y se señaló una posible conexión de este resultado a los agujeros negros. Ello nos llevó a extender la definición de esta cantidad, en concreto a la correspondencia *AdS/CFT*. La correspondencia holográfica nos dice que una teoría conforme en $d + 1$ -dimensiones es dual a una teoría gravitacional en AdS_{d+2} . Para llegar a esta conjetura se dió una breve introducción a la teoría de cuerdas y a la deducción de la correspondencia. El tema de más interés en el capítulo 2 fue la descripción del espacio AdS_{d+2} en diferentes coordenadas, y las propiedades que tiene cada conjunto de coordenadas. Hecho esto, presentamos la fórmula de Ryu-Takayanagi, la fórmula de la entropía de entrelazamiento en la correspondencia holográfica. Vimos algunos ejemplos en los cuales el cálculo de la entropía es muy sencillo, en comparación con el cálculo directo en la teoría de campos, que es muy complicado incluso en el caso de campos libres. Estos resultados fueron calculados en coordenadas de Poincaré. El resultado de mayor interés para nosotros fue la entropía de entrelazamiento para un intervalo en AdS_{2+1} .

Una vez estudiado esto, tuvimos las herramientas necesarias para introducir el concepto de entropía diferencial y cómo es que a través de esta se puede construir el espacio-tiempo de AdS_{2+1} en coordenadas globales a tiempo $T = 0$. Mostramos cómo definir los conceptos más básicos de la geometría, puntos y distancia, y cómo calcular la longitud de curvas en el bulto. Este fue el punto de partida principal de este trabajo ya que a primera vista no era obvio cómo definir curvas cerradas y puntos usando la entropía diferencial en coordenadas de Poincaré. Logramos responder esta pregunta examinando el cambio de coordenadas globales a Poincaré. Vimos que hay una sutileza en este cambio de coordenadas, puesto que la entropía regularizada no es invariante.

El ejemplo utilizado en primera instancia fue un círculo centrado en el origen en coordenadas globales, que traducido a Poincaré resulta ser también un círculo. Posteriormente se hizo tender su radio a cero para obtener un punto. Mostramos cómo utilizar la entropía diferencial en Poincaré para obtener los mismos resultados que anteriormente se analizaron en coordenadas globales. Usando resultados previos de Myers y sus colaboradores [21],[22], logramos definir la longitud de una curva cerrada a partir de la entropía diferencial. Un punto importante a destacar es que dada una orientación de la curva cerrada, se encuentra que las geodésicas que cubren la parte superior e inferior de la curva tienen orientaciones opuestas, lo cual se ve reflejado en un signo menos en la entropía diferencial y el intercambio de los límites de integración en dicha fórmula. También mostramos cómo obtener la longitud de una curva abierta, para la cual es necesario incluir un término de superficie específico. Una vez entendido esto, construimos una forma de definir puntos en el bulto y calcular la distancia entre ellos.

En la última parte de nuestro trabajo, generalizamos el análisis al caso de curvas con tiem-

po variable. Mostramos cómo calcular la longitud de una curva abierta, con su correspondiente término de superficie, y cómo definir puntos. De igual forma se analizó la forma de calcular la distancia entre puntos a tiempos desiguales.

Con este trabajo hemos logrado entonces extender el rango de aplicabilidad de la entropía diferencial, y verificar cómo ella nos permite codificar algunas de las nociones más básicas de la geometría en una teoría gravitacional en términos del patrón de entrelazamiento en una teoría cuántica de campos de menor dimensión. Dado esto, este trabajo sirvió además para aportar algunos resultados a un artículo que aun esta en proceso, sin embargo en el también se abarcan temas que aquí no se cubren, incluyendo la generalización al caso de puntos separados por intervalos tipo tiempo, y el estudio de la manera en que la evolución dinámica no lineal de la geometría se ve reflejada en la evolución del patrón de entrelazamiento.

Bibliografía

- [1] J. Maldacena, “The large-N limit of superconformal field theories and supergravity,” *International journal of theoretical physics*, vol. 38, no. 4, pp. 1113–1133, 1999.
- [2] S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from the anti-de sitter space/conformal field theory correspondence,” *Physical review letters*, vol. 96, no. 18, p. 181602, 2006.
- [3] V. Balasubramanian, B. D. Chowdhury, B. Czech, J. de Boer, and M. P. Heller, “Bulk curves from boundary data in holography,” *Physical Review D*, vol. 89, no. 8, p. 086004, 2014.
- [4] S. Ryu and T. Takayanagi, “Aspects of holographic entanglement entropy,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2006, no. 08, p. 045, 2006.
- [5] G. 't Hooft, “Renormalizable lagrangians for massive yang-mills fields,” *Nuclear physics: B*, vol. 35, no. 1, pp. 167–188, 1971.
- [6] P. Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, *Conformal field theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] T. Nishioka, S. Ryu, and T. Takayanagi, “Holographic entanglement entropy: an overview,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 42, no. 50, p. 504008, 2009.
- [8] P. Calabrese and J. Cardy, “Entanglement entropy and quantum field theory,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2004, no. 06, p. P06002, 2004.
- [9] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement entropy in free quantum field theory,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 42, no. 50, p. 504007, 2009.
- [10] H. Casini, M. Huerta, and R. C. Myers, “Towards a derivation of holographic entanglement entropy,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2011, no. 5, pp. 1–41, 2011.
- [11] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, “The four laws of black hole mechanics,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 31, no. 2, pp. 161–170, 1973.
- [12] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, “Superstring theory, vol. 1,” 1987.
- [13] D. Bailin and A. Love, *Supersymmetric gauge field theory and string theory*. CRC Press, 1994.
- [14] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, *Supergravity*. Cambridge University Press, 2012.
- [15] G. T. Horowitz and A. Strominger, “Black strings and p-branes,” *Nuclear Physics B*, vol. 360, no. 1, pp. 197–209, 1991.
- [16] J. Polchinski, “Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges,” *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 26, p. 4724, 1995.

- [17] I. Fujisawa and R. Nakayama, “Quantization of a scalar field in two poincaré patches of anti-de sitter space and AdS/CFT,” *Nuclear Physics B*, vol. 886, pp. 135–165, 2014.
- [18] M. Headrick and T. Takayanagi, “Holographic proof of the strong subadditivity of entanglement entropy,” *Physical Review D*, vol. 76, no. 10, p. 106013, 2007.
- [19] B. Czech, P. Hayden, N. Lashkari, and B. Swingle, “The information theoretic interpretation of the length of a curve,” *arXiv preprint arXiv:1410.1540*, 2014.
- [20] B. Czech and L. Lamprou, “Holographic definition of points and distances,” *Physical Review D*, vol. 90, no. 10, p. 106005, 2014.
- [21] M. Headrick, R. C. Myers, and J. Wien, “Holographic holes and differential entropy,” *arXiv preprint arXiv:1408.4770*, 2014.
- [22] R. C. Myers, J. Rao, and S. Sugishita, “Holographic holes in higher dimensions,” *arXiv preprint arXiv:1403.3416*, 2014.