



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**Estudio de las trayectorias de
meteoroides a través de la atmósfera
terrestre.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Licenciada en Física

PRESENTA:
Sonia Cornejo Patiño

DIRECTORA DE TESIS:
Dra. María Guadalupe Cordero Tercero

Ciudad Universitaria, Ciudad de México
2017





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos de la alumna

Cornejo
Patiño
Sonia
5563.8179
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
309008992

2. Datos de la tutora

Doctora
María Guadalupe
Cordero
Tercero

3. Datos del sinodal 1

Doctora
María Dolores
Maravilla
Meza

4. Datos del sinodal 2

Doctora
Antígona
Segura
Peralta

5. Datos del sinodal 3

Doctora
Gloria Inmaculada
Delgado
Inglada

6. Datos del sinodal 4

Doctora
Graciela
Velasco
Herrera

7. Datos del trabajo

Estudio de las trayectorias de meteoroides a través de la atmósfera terrestre.
106 pp.
2017

Para mis papás



Índice general

Resumen	1
1. Introducción	3
1.1. Motivación y antecedentes	3
1.2. Objetivos	4
1.3. Justificación	4
1.4. Metodología	4
1.5. Hipótesis	5
1.6. Contenido de la tesis	6
2. Los meteoroides	7
2.1. Marco histórico	7
2.2. Los procesos de formación planetaria	10
2.3. Reservas de cuerpos pequeños	15
2.4. Dinámica de los meteoroides	18
2.4.1. Movimiento orbital	18
2.4.2. Movimiento en la atmósfera	19
3. Movimiento orbital	23
3.1. Ecuaciones de movimiento	23
3.2. Movimiento debido a una fuerza central	26
3.3. Ecuación <i>Vis Viva</i>	32
4. Movimiento a través de atmósferas planetarias	35
4.1. Ecuaciones de entrada	35
4.2. Las ecuaciones de movimiento del meteoroides	46

4.3. Consideraciones sobre la atmósfera	48
5. Reconstrucción de la trayectoria	51
5.1. Astrometría de la traza del meteoro	56
5.2. La trayectoria durante la ablación	58
5.3. La órbita del meteoróide	62
5.4. La trayectoria en el vuelo oscuro	66
5.5. Software	68
6. Conclusiones y trabajo futuro	69
6.1. Aspecto computacional	70
6.2. Posibles líneas de investigación a partir de este trabajo	72
A. Astrometría	75
A.1. Método del simplex	75
A.2. Sistema ecuatorial y estándar	77
A.3. Sistema estándar y coordenadas de imagen	82
A.4. Sistema ecuatorial y eclíptico	92
B. Ecuación del plano que contiene la trayectoria	95
C. Función atan2	101

Resumen

La trayectoria de un meteoróide que llega a la Tierra tiene dos fases: la primera es su movimiento orbital, gobernado principalmente por su interacción gravitacional con el Sol, y la segunda comienza cuando ingresa en la atmósfera terrestre. En ésta pasa por cuatro procesos: el precalentamiento, la ablación, el vuelo oscuro y el impacto. En esta tesis se desarrolla un método para reconstruir la trayectoria de meteoroides a partir del registro en fotografía o video de su trayectoria durante su ablación desde dos puntos distintos. Empleando distintas transformaciones y conociendo la ascensión recta, la declinación y las coordenadas sobre la imagen de estrellas de referencia se determina la ascensión recta y la declinación que tuvo el objeto. Con esto se construyen planos con esta dirección que contendrán la trayectoria del meteoróide. Intersectándolos se obtiene la posición, velocidad y aceleración del objeto durante la ablación.

Para reconstruir la órbita del objeto se obtiene el radiante del mismo y se corrige la velocidad promedio observada para obtener la velocidad preatmosférica. Con esto se calculan sus coordenadas heliocéntricas y se obtiene la velocidad que llevaba en su órbita para determinar sus elementos orbitales. Para obtener la elipse de dispersión se resuelve numéricamente el conjunto de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento de un objeto que ingresa en la atmósfera. Usando los datos cinéticos del objeto al término de la ablación y estimando su masa se calcula un punto de impacto a partir del cual se construye la elipse.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y antecedentes

Siguiendo la resolución número 5 de la Unión Astronómica Internacional del año 2006, los asteroides y los núcleos cometarios son cuerpos pequeños del sistema solar independientemente de su órbita y composición [1]. Para nosotros, un meteoroides será un cuerpo de naturaleza asteroidal, cometaria o planetaria que tiene un tamaño entre $10 \mu\text{m}$ a 1 m [2]. Desde un punto de vista científico, estudiar a los meteoroides es de interés ya que nos ayudan a entender más acerca del origen de la vida y del sistema solar.

Los meteoroides chocan con nuestro planeta continuamente. Se estima que entran en la atmósfera de la Tierra alrededor de 40000 toneladas por año [3]. Al ingresar en la atmósfera terrestre pueden pasar por cuatro procesos: el precalentamiento, la ablación, el vuelo oscuro y el impacto. Durante el precalentamiento el material del meteoroides, que lleva velocidades entre 11.2 y 72.8 km/s , comienza a interactuar con los átomos y moléculas de la atmósfera y el objeto comienza a calentarse. Como consecuencia, empieza el proceso conocido como ablación en el cual el material del meteoroides se calienta, funde, evapora, excita y/o ioniza debido a su interacción con la atmósfera. La emisión de luz es lo que se conoce como meteoro, conocido comúnmente como estrella fugaz. Si el meteoro es más brillante que el planeta Venus se le nombra bólido. El vuelo oscuro comienza cuando el meteoroides deja de brillar debido a que ya no hay energía suficiente para excitar los átomos del material. Esto permite que se forme la corteza de fusión. Cuando la presión aerodinámica iguala a la resistencia del objeto, éste se fragmenta súbitamente liberando una gran cantidad de energía. Los fragmentos del meteoroides continúan cayendo siguiendo el camino que el centro de masa del meteoroides habría llevado. Cuando el meteoroides o sus fragmentos logran sobrevivir a su entrada en la atmósfera y se depositan sobre la superficie terrestre reciben el nombre de meteoritas [4].

La Red Mexicana de Meteoros “Citlalin Tlamina” busca cubrir el territorio nacional con estaciones con cámaras de video que permitan registrar la entrada de meteoroides en la atmósfera

terrestre para que, analizando los registros fotográficos obtenidos, se reconstruyan las trayectorias de estos objetos y, posteriormente, determinar órbitas de pre-entrada y extrapolar los sitios de emplazamiento de las meteoritas asociadas para su posterior búsqueda [5].

1.2. Objetivos

Los objetivos principales de este trabajo son:

- Entender los métodos para reconstruir las trayectorias de los meteoroides a partir de videos.
- Hacer un programa que incorpore estos métodos y observaciones para determinar la órbita del meteorode y el posible lugar de emplazamiento de la meteorita.
- Presentar un método que sirva como base para proponer técnicas más eficientes que permitan estudiar varios aspectos sobre la física de los meteoroides (interacción meteorode-atmósfera, dinámica orbital, entre otros).

Esto se hace estudiando las trayectorias aparentes (proyectadas sobre la bóveda celeste) de estos objetos desde diferentes sitios. A partir de esta información y sabiendo la ubicación de los observadores en la superficie, la trayectoria real puede ser calculada.

1.3. Justificación

Una teoría que describa el origen y evolución del sistema solar debe ser consistente con las actuales características dinámicas y de composición química que los objetos en él tienen. Tomando en cuenta la valiosa información que contienen las meteoritas sobre esto es importante recuperar la mayor cantidad posible de éstas para su análisis en laboratorio y poder conocer la ubicación en el sistema solar de la cual vienen. Además, es importante entender las propiedades físicas y químicas de los meteoroides para poder comprender a sus cuerpos padres y de esta forma planear mejor cómo proceder en caso de una futura colisión significativa con alguno de ellos. Estudiar sus órbitas, procedencia y periodicidad permitirá encontrar patrones orbitales que en algún momento ayuden a predecir la entrada de estos objetos en la atmósfera terrestre. Por último, la detección temprana de estos objetos permitirá proporcionar información a las distintas estaciones de protección civil de los estados con el propósito de guiar su actividad tanto en caso de peligro probable como para dar información verídica y oportuna a la sociedad civil.

1.4. Metodología

Para construir este método se hizo un estudio profundo de gran parte de la bibliografía referente al tema. El método que se presenta contiene ideas de los trabajos de varios autores, específicamente:

- En las expresiones para realizar el trabajo astrométrico se hacen adaptaciones y correcciones de los trabajos de Atreya [6], Steyaert [7], Trigo-Rodríguez [8] y Van de Kamp [9].
- El proceso para generar los planos que contienen la trayectoria durante la ablación se construye a partir del trabajo de Ceplecha [10] que posteriormente Trigo-Rodríguez [8] retoma.
- Para obtener los elementos orbitales del objeto se hace uso tanto de las técnicas propuestas por Ceplecha [10] como del trabajo de Jenniskens [11] y Murray y Dermott [12].
- Finalmente, para obtener el punto de impacto se hace uso de expresiones desarrolladas por Vinh, Busemann y Culp [13] y Passey y Melosh [14] que son unificadas por Cordero-Tercero [15].

1.5. Hipótesis

Las suposiciones que se realizaron para construir el método están en función tanto de los aspectos físicos detrás del movimiento de los meteoroides como de los instrumentos que se utilizan para obtener las imágenes de los objetos. El método propuesto para realizar la astrometría es válido únicamente cuando se usan cámaras que no cubren un campo de visión cercano a los 180° como lo hacen las lentes de ojo de pescado. El procesamiento de esta clase de imágenes requiere otros métodos astrométricos como el sugerido por Borovicka, Spurny y Keclikova [16]. Las suposiciones que se hacen sobre el movimiento del meteoroides son

- La velocidad que el meteoroides tenía antes de impactar a la Tierra únicamente difiere de la velocidad promedio observada durante la ablación por dos factores: la rotación terrestre y su campo gravitacional.
- Una vez corregida la velocidad de impacto del meteoroides, su órbita de procedencia está en función únicamente de su interacción gravitacional con el Sol, es decir, su movimiento orbital puede modelarse con el problema de 2 cuerpos.
- Las ecuaciones que describen el movimiento del meteoroides en la atmósfera no toman en cuenta la fragmentación del objeto. Se determina un punto de impacto imaginario (que es el sitio donde habría impactado el centro de masa del meteoroides) y a partir de este sitio se determina la elipse de dispersión asociada.
- El efecto del viento sobre el objeto es prescindible (en caso de querer consultarse cómo el viento afecta el movimiento de estos objetos ver [15]).

1.6. Contenido de la tesis

El capítulo 2 inicia con una breve descripción de los procesos de formación planetaria con el fin de introducir al lector a las ideas que actualmente se tienen sobre la formación de los cuerpos pequeños. Posteriormente, se hace una exposición de los lugares donde se concentran estos objetos yendo desde la Nube de Oort hasta las órbitas que ocupan los Objetos Cercanos a la Tierra para conocer cómo es la distribución de asteroides y cometas en el sistema solar. Finalmente, se habla sobre los mecanismos que permiten que los meteoroides lleguen a la Tierra y los procesos que sufren al ingresar en su atmósfera.

En los capítulos 3 y 4 se estudian las ecuaciones que describen el movimiento del meteoroides. En el capítulo 3 se estudian las expresiones del movimiento orbital. Primero se realiza el planteamiento de la ecuación de movimiento de una partícula que se mueve con una fuerza central dada por la ley de gravitación de Newton. Una vez resuelta esta ecuación de movimiento se introducen los tipos de órbitas (elíptica, parabólica e hiperbólica) y los elementos orbitales. En el capítulo 4 se construyen las ecuaciones que describen el movimiento de un objeto que ingresa a hipervelocidad en una atmósfera planetaria.

El capítulo 5 comienza con una descripción del método desarrollado. En la primer sección de este capítulo se explica el tratamiento que debe hacerse a las imágenes obtenidas de la traza del meteorito para conocer su posición en la bóveda celeste respecto a cada estación. Después se presenta el procedimiento para generar los planos que contienen la trayectoria del meteoroides y la expresión que resulta de su intersección para obtener la trayectoria del objeto durante su ablación. A partir de esta información se puede reconstruir tanto la órbita como el sitio de emplazamiento de las meteoritas. Primero se expone el procedimiento para reconstruir la órbita del objeto haciendo correcciones al valor promedio de la velocidad y usando el valor calculado para el radiante. Esta información permite determinar los elementos orbitales del meteoroides. Después, se expone como obtener un valor estimado de la masa del objeto al término de la ablación para poder resolver numéricamente el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen la trayectoria del meteoroides durante el vuelo oscuro. Esto permite determinar un punto de impacto suponiendo que el objeto no se fragmentó. A partir de este punto se puede construir la elipse de dispersión. Por lo elaborado del método, se buscó que las secciones 5.1 y 5.2 tuvieran explícitamente cómo realizar el tratamiento de los videos y las expresiones para las transformaciones empleadas en el orden en que se tienen que realizar. En caso de querer conocer cómo se construyen estas expresiones se pueden consultar los apéndices A y B. Finalmente, se incluye una sección donde se explica un poco el funcionamiento del conjunto de hojas de cálculo y programas que llevan a cabo estas tareas.

Por último, en el capítulo 6 se presenta una idea de cómo se puede mejorar el software en un futuro y se esbozan nuevas propuestas que permiten obtener más información de los meteoroides a partir del trabajo hecho en la presente tesis.

Capítulo 2

Los meteoroides

2.1. Marco histórico

Quizá uno de los procesos más interesantes en la historia de la ciencia ha sido la evolución en la comprensión de los cuerpos celestes. Ya en el siglo III a. C. algunos filósofos griegos sostenían que el Sol era el centro del sistema solar. Pero los aristotélicos, cuyas ideas dominaron hasta la edad media, supusieron que la Tierra era el centro del universo y que los demás cuerpos celestes se movían en torno a ella. Los cuerpos conocidos en aquel tiempo eran la Luna, el Sol, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno [17].

El astrónomo Ptolomeo de Alejandría, en el siglo II d. C., desarrolló la teoría de los epiciclos para explicar el movimiento de los planetas los cuales se movían alrededor de la Tierra. En su libro, *Almagesto*, se recopila la parte esencial de los logros de la astronomía antigua y fue el primer tratado matemático sistemático que dio una descripción de los movimientos celestes, mostrando el sistema geocéntrico y el movimiento aparente de las estrellas y los planetas [17].

En cuanto se hizo evidente que los epiciclos no podían explicar con precisión los movimientos planetarios, los astrónomos añadieron más epiciclos para determinar la posición de los planetas, pero no se llegó a un modelo que describiera con precisión lo que se observaba. Todo esto condujo a la revolución copernicana. Copérnico rechazó el sistema de Ptolomeo y buscó un método de cálculo radicalmente nuevo. Para él, la necesidad de remendar una teoría era un claro indicio de que se requería de un enfoque distinto. Como consecuencia comenzó a pensar en la movilidad de la Tierra. En su libro *De revolutionibus orbium coelestium* afirma que la Tierra es esférica y describe las órbitas circulares de los planetas ubicando al Sol en el centro [17].

Si Copérnico fue el principal astrónomo europeo en la primera mitad del siglo XVI, Tycho Brahe lo fue en la segunda. Fue el responsable de cambios de enorme importancia en las técnicas de observación astronómica y en los niveles de precisión que cabía exigir a los datos astronómicos. Inauguró la técnica de efectuar observaciones regulares de los planetas en su curso a través de los cielos. Las observaciones modernas indican que sus datos poseían un error de un minuto de

arco, lo cual es sorprendente para una observación a simple vista, aunque hay que recordar que Tycho construyó una serie de instrumentos con la intención de obtener mediciones más precisas que las obtenidas con los instrumentos comunes en su época [18].

Tiempo después Johannes Kepler, empleando las observaciones realizadas por Tycho Brahe, insistió en que, si el Sol regía todos los planetas, los planos de las diferentes órbitas planetarias debían contener al Sol. En su libro *Astronomia Nova*, expuso que los planetas se desplazaban sobre órbitas elípticas donde uno de los focos está ocupado por el Sol. Esto es conocido como la primera ley de Kepler. La segunda ley dice que la velocidad orbital de cada planeta varía de tal forma que una línea que una al Sol con el planeta en cuestión barre áreas iguales en intervalos de tiempos iguales. Por primera vez las predicciones teóricas estaban en acuerdo con los datos obtenidos por la observación. La tercera ley de Kepler fue enunciada durante 1619 en su libro *Harmonices mundi*. Esta ley afirma que, si T_1 y T_2 son los respectivos periodos que tardan dos planetas en completar sus respectivas revoluciones y R_1 y R_2 son las distancias medias de tales planetas al Sol, la razón de los cuadrados de los periodos entre el cubo de sus distancias medias al Sol es tal que

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} \quad (2.1)$$

Los componentes astronómicos de la historia no acaban en la obra de Kepler. En 1609, el científico italiano Galileo Galilei observaba por primera vez los cielos a través de un telescopio, con el cual se pudieron descubrir innumerables testimonios en favor de la nueva teoría. Además, descubrió que la superficie de la Luna estaba cubierta por cavidades, valles y montañas, que el Sol giraba constantemente sobre sí mismo, observó que Júpiter tenía alrededor cuatro pequeños puntos luminosos cuya explicación más simple era suponer que giraban continuamente alrededor suyo. Con la obra astronómica de Galileo se logró la popularización de la astronomía copernicana [18].

El año en que Galileo murió, nació Isaac Newton. Él ingresó al Trinity College a la edad de 18 años y se consagró al estudio de las matemáticas. A mediados del verano de 1665, la gran peste cayó sobre Londres y la Universidad de Cambridge cerró por su proximidad al centro de la plaga. Newton volvió al hogar de sus padres y permaneció ahí hasta que la Universidad volvió a abrir. Durante este periodo concibió prácticamente todas las ideas que le debe el mundo. En su libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Newton da las ideas de la interpretación dinámica del movimiento de los cuerpos, un punto de vista que dominó la física hasta principios del siglo pasado y sólo sucumbió bajo el efecto de la teoría de la relatividad. Después de formular sus famosas tres leyes, incluyó la idea de que la fuerza de gravedad es responsable tanto de la caída de una roca como del movimiento de los cuerpos celestes. Newton llegó al resultado de que la fuerza gravitacional decrece como el cuadrado inverso de la distancia al centro de la Tierra. Generalizando este descubrimiento a todos los cuerpos del universo, Newton formuló la ley de la gravitación universal según la cual todo cuerpo material atrae a otro con una fuerza directamente

proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos [17].

Ya en el siglo XVIII, Johann Tietz (Titius) tradujo al alemán la obra *Contemplation de la Nature* de Charles Bonnet en la cual agregó una nota en la que sugería que la distancia media al Sol de cada planeta podía obtenerse usando la siguiente expresión

$$\text{Distancia (UA)} = 0,4 + (0,3 \times 2^n) \quad (2.2)$$

donde $n = -\infty, 1, 2, \dots$. Esta regla fue popularizada en el año de 1772 por Johann Bode, por lo cual es conocida como la ley de Titius-Bode. En la tabla 2.1 se compara la distancia al Sol de los primeros 6 planetas, que eran los que hasta ese tiempo se conocían, con la obtenida con la ley de Titius-Bode [18].

Durante el siglo XVIII, los astrónomos estuvieron fascinados con esta expresión. Como se mencionó, hasta ese tiempo sólo se conocían los planetas hasta Saturno y la ley de Titius-Bode parecía predecir correctamente las posiciones de los planetas. El único inconveniente era que n debía valer 3 para Júpiter y se observaba que las distancias del Sol a Júpiter y a Saturno sólo se recuperaban si $n = 4$ para Júpiter y $n = 5$ para Saturno. Los astrónomos comenzaron a preguntarse ¿Qué existe en el sitio para $n = 3$, es decir, a aproximadamente 2.8 UA? ¿Cómo puede explicarse el hueco entre las órbitas de Marte y Júpiter?

Tabla 2.1: Distancia del Sol a los planetas según la ley de Titius-Bode.

Planeta	n	Ley de Titius-Bode [UA]	Distancia al Sol [UA]
Mercurio	$-\infty$	0.40	0.39
Venus	0	0.70	0.72
Tierra	1	1	1
Marte	2	1.60	1.52
	3	2.80	
Júpiter	4	5.20	5.20
Saturno	5	10	9.54

Cuando Sir William Herschel descubrió Urano en 1781 a la distancia que la ley de Titius-Bode indicaba para $n = 6$, la gran mayoría de los científicos se convencieron de que un planeta debía existir entre Marte y Júpiter. A principios del siglo XIX, en 1801 Guiseppe Piazzi descubrió a Ceres en esa región del sistema solar. Lo único que no encajaba con lo esperado era el tamaño del objeto. Las observaciones indicaban que el diámetro de Ceres era de aproximadamente 940 km, lo cual era muy pequeño para lo esperado, por lo que la búsqueda por el planeta perdido continuó. Entre 1801 y 1808 los astrónomos encontraron 3 objetos más con características similares a las de Ceres: Pallas, Juno y Vesta en la región alrededor de las 2.8 UA. En los siguientes 40 años no

encontraron más objetos de este tipo. Durante estos años, Herschel propuso que estos cuerpos necesitaban un nombre distinto e introdujo el término de asteroides (que significa como estrellas). Luego de estos 40 años se encontró a Astraea y después, cientos de objetos fueron encontrados en órbitas heliocéntricas comprendidas entre 2.2 y 3 UA (tabla 2.2).

Tabla 2.2: Los primeros 10 asteroides encontrados

Objeto	Año de descubrimiento	Observador
(1) Ceres	1801	Giuseppe Piazzi
(2) Pallas	1802	Heinrich Wilhelm Matthias Olbers
(3) Juno	1804	Karl Ludwig Harding
(4) Vesta	1807	Heinrich Wilhelm Matthias Olbers
(5) Astraea	1845	Karl Ludwig Hencke
(6) Hebe	1847	Karl Ludwig Hencke
(7) Iris	1847	John Russell Hind
(8) Flora	1847	John Russell Hind
(9) Metis	1848	Andrew Graham
(10) Hygiea	1849	Annibale de Gasparis

Así, la idea de que estos objetos eran el remanente de un planeta que pudo haberse roto de alguna manera comenzó a tener auge. Actualmente se dice que estos cuerpos con diámetros de unos pocos cientos de kilómetros o menos (siendo Ceres el más grande de ellos), con un semieje mayor entre 2 y 4.2 UA forman lo que se conoce como Cinturón Principal de Asteroides. Como el número de asteroides conocidos aumentó, pudo comenzarse a estudiar sus principales características y las técnicas empleadas para su estudio fueron refinándose. Para 1900 se conocían 450, 1000 en 1923, 5000 en 1991 y actualmente el número va en más de medio millón [19].

2.2. Los procesos de formación planetaria

A grandes rasgos, actualmente se acepta que el sistema solar comenzó a formarse a partir de una nube molecular la cual comenzó a girar y a contraerse en un disco de gas y polvo llamado disco protoplanetario. A partir de este disco se formó una estrella central y muchos cuerpos girando alrededor de él [20]. Toda esta evolución se resume en los siguientes procesos

- Colapso y fragmentación de la nube molecular interestelar.
- Formación del protosol y de la nebulosa solar a su alrededor.
- Evaporación y condensación de sólidos. Acumulación en planetésimos.

- Acrecentamiento de planetésimos en embriones planetarios y posteriormente en planetas.
- Migraciones planetarias.
- Fotoevaporación del disco.

Se presume que los procesos que llevan a cabo la formación de los sistemas planetarios ocurren en el medio interestelar, donde la densidad y la temperatura varían de forma considerable. Los lugares para que se formen las estrellas son las regiones más frías (ya que el movimiento del gas por su energía cinética es menor) y las más densas (ya que la atracción entre las partículas del medio es relativamente fuerte). Estas regiones son conocidas como nubes moleculares. Debido al impacto de una onda de choque de una supernova, el material de la nube se volvió gravitacionalmente inestable y comenzó a contraerse. Así, se formaron regiones con una densidad mayor que, con el paso del tiempo se contrajeron de manera independiente formando núcleos que estaban destinados a convertirse en estrellas. Con el colapso de la nube molecular se formó un disco que tuvo el tamaño de unas pocas veces el tamaño actual del sistema solar con un núcleo de unas 10 UA de radio [20].

El material en este disco protoplanetario siguió contrayéndose y acumulándose sobre todo en el centro del disco donde se acumuló una gran energía gravitacional. La mitad de ésta fue liberada como energía de radiación calentando el material del disco. Ya que en el centro del disco hay una mayor masa y el material siguió cayendo, la energía gravitacional continuó aumentando lo cual provocó que en la parte central del disco aumentara la presión. Esto frenó parcialmente la contracción de la masa central. La temperatura de la parte central del disco, debida al calentamiento derivado de la energía de amarre gravitacional, hizo que el gas se ionizara. La energía que se empleó en la ionización de los átomos disminuyó la energía térmica por lo que ocurrió un segundo colapso que finalmente formó una protoestrella de unos pocos radios solares. Este colapso se frenó cuando la fuerza ejercida por la presión del gas se igualó con la gravitacional. Al final de este segundo colapso, en el interior solar había la densidad y la temperatura suficientes para empezar la fusión del hidrógeno [20].

El proceso de formación planetaria comenzó con la condensación de sólidos. Primero se formó el polvo y fue arrastrado por el gas, lo cual generó colisiones entre sus partículas dando lugar a una aglomeración. Después se formaron las rocas y éstas se acumularon en planetésimos. A partir de choques entre los planetésimos se formaron los embriones planetarios. Los embriones planetarios son cuerpos de más de 10 km. Por su tamaño, su movimiento está controlado únicamente por el campo gravitacional del protosol. En función de su tamaño y del material del que estaban formados, el campo gravitacional hizo que presentaran una diferenciación. Los embriones planetarios fueron del tamaño de la Luna y Marte en la región interna y formaron los núcleos de los planetas gaseosos en la región externa. Los planetas gigantes se habrían terminado de formar por la acreción del gas restante en la nebulosa y los planetas terrestres por colisiones entre los embriones planetarios [20].

Durante la migración planetaria, las órbitas de los planetas gigantes cambiaron de semieje debido a la interacción gravitacional de estos cuerpos con el gas del disco. Según algunos modelos, Júpiter migró hasta la posición actual de Marte removiendo el material presente en el disco a grandes escalas espaciales. Esta migración provocó un intercambio de materiales entre la zona interna y externa del disco protoplanetario. Después de un cierto periodo, Júpiter y Saturno cayeron en una resonancia orbital que ocasionó que las órbitas de Neptuno y Urano se movieran más allá de la órbita de Júpiter.

El material restante en los discos protoplanetarios podría ser dispersado por el viento solar y el calor debido a la radiación electromagnética. Esta radiación interactúa con la materia y la calienta, lo cual le aporta la energía cinética suficiente para escapar del sistema. De esta manera, el gas del disco protoplanetario que no se acreta en los planetas se dispersó mediante el proceso conocido como fotoevaporación [20].

Enfocándonos en nuestro objetivo de estudio, se considera que tanto los asteroides como los cometas:

- Representan los escombros de la formación del sistema solar, es decir, material que no alcanzó a acretarse lo suficiente para presentar diferenciación.

En el caso de los cometas se piensa que constituyen el remanente de gas y polvo congelado en la región externa del sistema solar (donde la temperatura fue lo suficientemente fría como para que los volátiles se condensaran). Sin embargo, los hielos cometarios muestran fuertes diferencias, mientras unos muestran similitudes con los hielos interestelares otros muestran procesamiento dentro de la nebulosa solar y señales espectroscópicas de silicatos cristalinos que requieren procesamiento a altas temperaturas.

- Los mayores a 120 km, representan los fragmentos generados después de la colisión de objetos grandes que presentaron diferenciación.

En el caso de los asteroides algunos estudios muestran que los objetos con un diámetro mayor a los 120 km pudieron fragmentarse a partir de colisiones entre ellos lo que nos permite encontrar desde objetos con una abundancia química mayoritariamente metálica (que representa el núcleo del objeto diferenciado) hasta objetos silicatados (que representan la corteza del objeto progenitor).

Así, en los meteoroides encontramos información valiosa que permite comprender mejor la formación del sistema solar ya que representan a la materia prima que lo formó. Por fortuna, gran parte de los meteoroides han conservado su composición original y a partir de distintos estudios de sus meteoritas asociadas pueden inferirse algunas condiciones del sistema solar primitivo, es decir, pueden utilizarse como discriminantes entre los modelos de formación planetaria [21].

En la figura 2.1 se muestra una línea del tiempo en la que se pueden observar los periodos que ocuparon los procesos de formación planetaria mientras que en la figura 2.2 se ilustran.

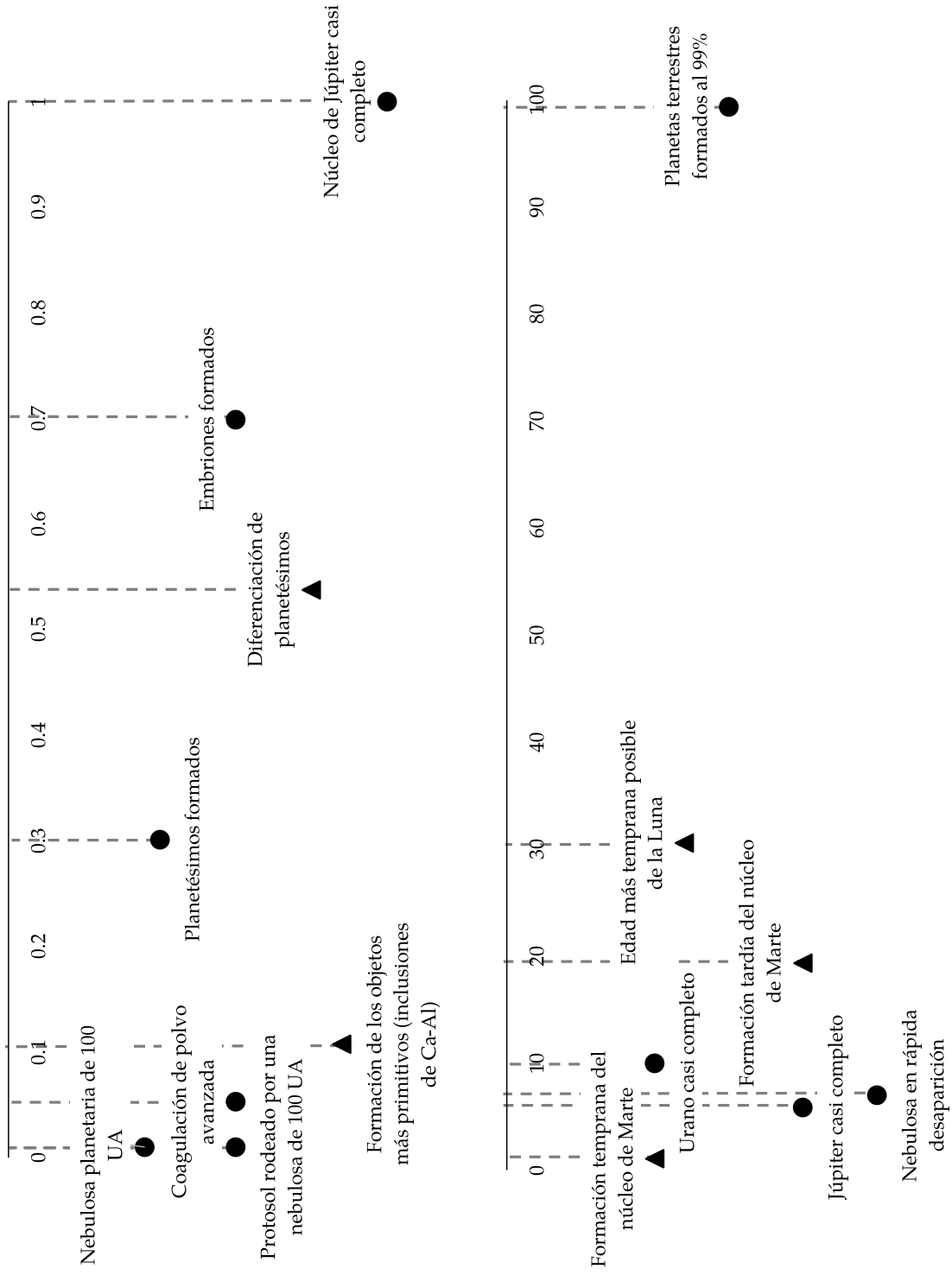
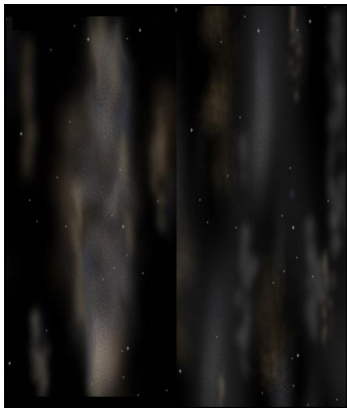


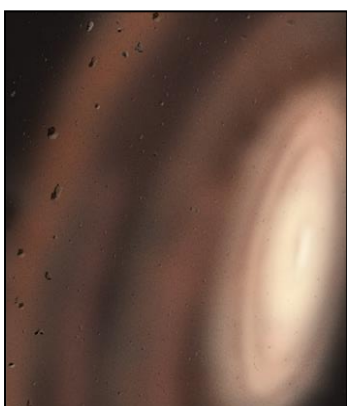
Figura 2.1: Línea del tiempo de los procesos de formación planetaria. El eje marca el tiempo después del inicio de la formación del sistema solar en millones de años. Las fechas marcadas con ● fueron tomadas de [20] y las marcadas con ▲ de [22].



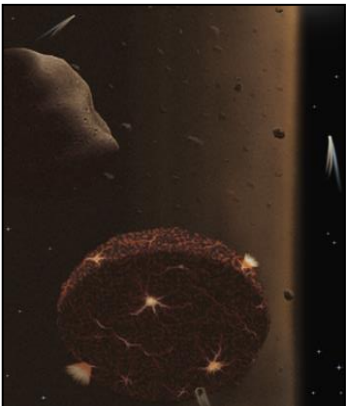
Nube molecular y su colapso y fragmentación.



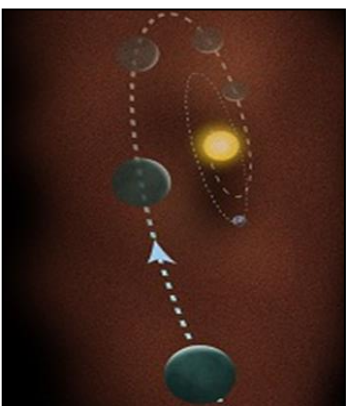
Formación del protosol y de la nebulosa solar.



Condensación de sólidos y acumulación en planetésimos.



Acrescentamiento de planetésimos en embriones planetarios y en planetas.



Migraciones planetarias.

Figura 2.2: Ilustraciones de los procesos de formación planetaria. Adaptada de [23].

2.3. Reservas de cuerpos pequeños

Los científicos clasifican a los cuerpos pequeños del sistema solar basados en su localización, características y comportamiento. La diferencia principal entre estos objetos depende del lugar donde han pasado la mayor parte del tiempo los últimos 4.5 mil millones de años en el sistema solar. La gran mayoría de los asteroides se encuentra en el Cinturón de Asteroides aunque también pueden encontrarse en órbitas cercanas a la Tierra o en puntos estables de Lagrange de los distintos planetas. Por parte de los cometas se conocen dos reservas principales: el Cinturón de Kuiper y la Nube de Oort [24]. En la figura 2.3 se muestra una comparación entre las órbitas de estos sitios.

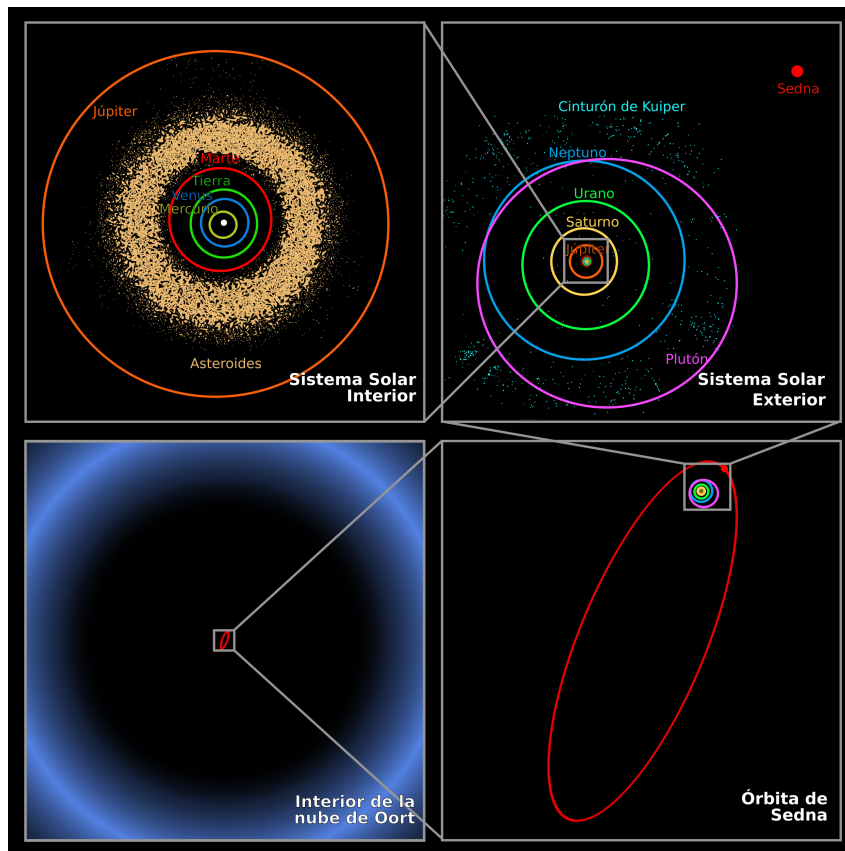


Figura 2.3: Distancia de la nube de Oort a los diferentes objetos del sistema solar. Fuente [25].

Entonces, si pudiéramos viajar a los límites del sistema solar llegaríamos a la Nube de Oort. Este sitio fue formado por las perturbaciones gravitacionales que Júpiter y Saturno ejercieron sobre el remanente del material del disco, expulsando a una parte de los planetésimos a esta región. El material de esta zona, al estar poco ligado gravitacionalmente a nuestra estrella, puede ingresar al sistema solar interior gracias a las perturbaciones ejercidas por otros cuerpos de la Vía Láctea. El llamarle nube es un término adecuado, ya que se supone que los cometas de

esta región están distribuidos en un cascarón esférico alrededor del Sol [26].

Otro lugar donde parte de los cuerpos pequeños se localizan es en el Cinturón de Kuiper. En 1951, Kuiper propuso que algunos escombros de la formación del sistema solar debían estar más allá de los planetas gigantes, siendo una zona donde un planeta no logró terminar de formarse. El cinturón se divide en el cinturón de Kuiper clásico y el disco disperso. El disco disperso se encuentra a una distancia entre las 30 y 100 UA, está poblado por un número incierto de objetos de hielo y silicatos, algunos de más de 1000 km de diámetro. El primer objeto en ser descubierto en esta región fue encontrado en el año de 1995 mientras que el primer objeto que se descubrió en el Cinturón de Kuiper clásico fue encontrado por los astrónomos estadounidenses David Jewitt y Jane Luu en 1992. Se estima que hay al menos 70000 objetos con diámetros mayores a 100 km en esta región. Las observaciones indican que los objetos de esta zona están confinados en una banda delgada que forma un anillo o cinturón alrededor del Sol [27].

Un poco más cerca, ya en la órbita de Júpiter, han sido descubiertos alrededor de 700 asteroides cerca de los puntos estables de Lagrange. A esta clase de asteroides se les llama asteroides troyanos. El primer objeto de esta clase fue descubierto por Max Wolf en 1906 y fue nombrado Aquiles. Recientemente se ha descubierto que en los puntos estables de Lagrange de las órbitas de Marte, Neptuno y la Tierra también existen troyanos. El de nuestro planeta fue descubierto en 2010 y recibió el nombre provisional de 2010 TK_7 [28].

Se estima que el 99.8% de las meteoritas que se han encontrado provienen de los meteoroides con origen en el Cinturón Principal de Asteroides. El Cinturón de Asteroides, que abarca de las 2 a las 4 UA, contiene asteroides con tamaños muy variados. El más grande de ellos es (1) Ceres con 952,4 km de diámetro. Los siguientes más grandes son (2) Pallas, (4) Vesta e (10) Hygiea. La mayor parte de la masa del Cinturón de Asteroides se concentra en estos objetos aunque los asteroides más pequeños son más numerosos [19].

Por último, los asteroides que tienen una distancia media al Sol menor que 1.5 UA se conocen como asteroides cercanos a la Tierra o NEAs (por su acrónimo inglés de *near-Earth asteroid*). Estos asteroides se clasifican en asteroides tipo Amor, cuyos perihelios van entre las 1.017 y las 1.3 UA; asteroides Apolo, cuyos perihelios son menores a 1.017 UA y semiejes mayores a 1 UA; asteroides Atón, que tienen órbitas cuyos semiejes son menores a 1 UA y afelios mayores a 0.983 UA y los asteroides Atira o Apohele, con órbitas dentro la órbita de la Tierra. Estos asteroides no pueden permanecer en sus órbitas por más de unas decenas de millones de años sin colisionar con alguno de los planetas terrestres. Mientras que las órbitas de los asteroides Apolo y Atón cruzan la órbita terrestre (por lo que se conocen como asteroides cruzadores), los asteroides Amor cruzan la órbita de Marte y los Atira están dentro de la órbita terrestre pero, a pesar de que no cruzan la órbita de la Tierra, en su trayectoria pueden sufrir perturbaciones que los desvíen a una órbita que los puede llevar a impactar nuestro planeta [29].

En la figura 2.4 podemos observar la distancia al Sol de las reservas de cuerpos pequeños del sistema solar.

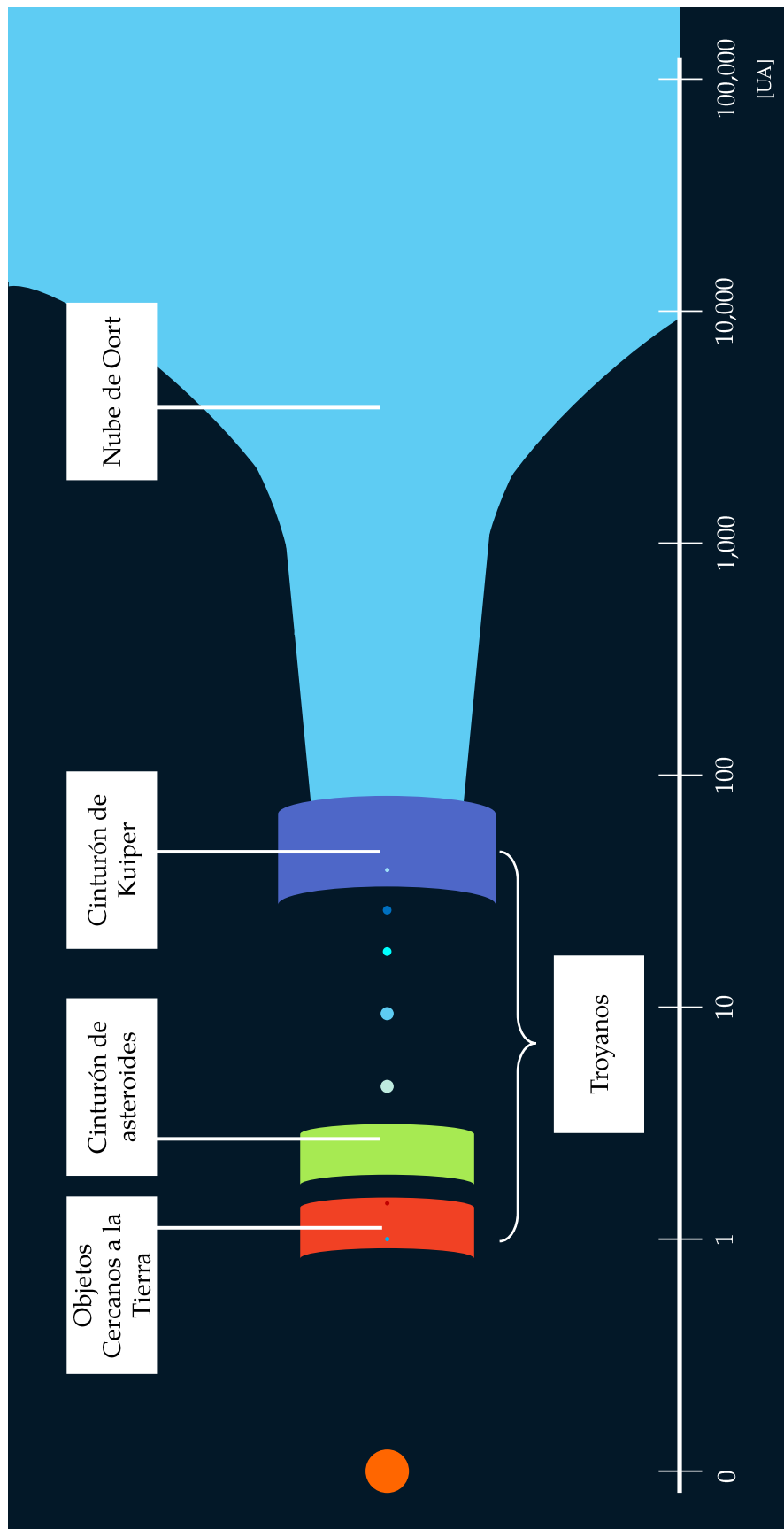


Figura 2.4: Distancia al Sol de los distintos reservorios de cuerpos pequeños. La escala empleada en la imagen es logarítmica.

2.4. Dinámica de los meteoroides

Los meteoroides chocan con nuestro planeta continuamente, entrando en la atmósfera de la Tierra del orden de 40000 ton/año [3]. El camino que sigue un meteoroides hasta llegar a la superficie terrestre se puede visualizar en 2 fases, una de ellas describe su movimiento en el sistema solar y la otra tiene que ver con su interacción con el cuerpo planetario. Respecto a esta última, en cuerpos sin atmósfera, como Mercurio o la Luna, todos los objetos que chocan contra sus superficies producen cráteres de impacto cuyos tamaños van de centímetros a cientos e incluso miles de kilómetros de diámetro. En cuerpos con atmósfera, el movimiento del objeto puede tener hasta 4 etapas: el precalentamiento, la ablación, el vuelo oscuro (del inglés *dark flight*) y el impacto. Su trayectoria dentro de la atmósfera, además de estar en función de la naturaleza del cuerpo planetario, está relacionada con su ángulo de impacto y con la masa, velocidad y composición del objeto [4]. A continuación se explica de forma breve cada una de estas fases.

2.4.1. Movimiento orbital

La ruta de los meteoroides hacia los cuerpos que finalmente impactan es aleatoria ya que, aunque su movimiento en el sistema solar es dominado por el campo gravitacional solar, se modifica por la radiación de la estrella (efecto Yarkovsky), las colisiones y las perturbaciones gravitacionales con cuerpos mayores [30].

Efecto Yarkovsky

El efecto Yarkovsky es la consecuencia de la exposición de los meteoroides a la radiación solar. Cuando el momento asociado a las ondas electromagnéticas cambia el estado de movimiento del cuerpo observado se dice que sobre el cuerpo se está ejerciendo presión de radiación. En este caso, los objetos pequeños van absorbiendo la radiación solar mientras rotan y por su forma irregular, se produce un ligero desequilibrio por el cual un meteoroides (en el rango de los 0,1 a 10m) puede tener cambios importantes en sus órbitas con el paso del tiempo [31].

Colisiones

En el caso de las colisiones tenemos las que se producen entre ellos mismos y las colisiones que tienen contra otros cuerpos planetarios. Las colisiones entre asteroides suceden de manera frecuente astronómicamente hablando: se espera que las colisiones entre objetos con un radio de 10 km en el Cinturón de Asteroides ocurran una vez cada 10 millones de años. Estas colisiones, dependiendo de la velocidad de impacto, hacen que los asteroides se fragmenten en objetos más pequeños o bien, que queden unidos. Finalmente, el cambio de velocidad produce un cambio en el movimiento del objeto lo cual termina en la modificación de la órbita [31]. El impacto de asteroides y cometas contra otros cuerpos planetarios hace que algunos fragmentos de la

superficie planetaria puedan salir arrojados del cuerpo planetario si estos vencen la velocidad de escape. Después de deambular por el espacio, su órbita puede acercarse lo suficiente a nuestro planeta como para ser atrapado y chocar con él [30].

Perturbaciones gravitacionales

Finalmente, las perturbaciones originadas por los planetas gigantes producen zonas caóticas alrededor de las ubicaciones de las resonancias lo cual ocasiona que las excentricidades de las órbitas alcancen valores grandes al grado de moverlos de su lugar de origen [30].

2.4.2. Movimiento en la atmósfera

Precaentamiento

La velocidad de impacto de un meteoróide o de un cuerpo pequeño con otro cuerpo planetario depende de la velocidad de escape de este último, de su velocidad orbital heliocéntrica y de la velocidad del impactor a la distancia heliocéntrica del cuerpo impactado. Para la Tierra, la velocidad de impacto mínima es la velocidad de escape, 11.2 km/s, y la máxima es de 72.8 km/s. Cuando los meteoroides y los asteroides de hasta unas pocas decenas de diámetro entran en la atmósfera terrestre, su velocidad disminuye conforme el objeto atraviesa capas más densas de atmósfera. El precaentamiento (en inglés *preheating*) es causado por el impacto de las moléculas de la atmósfera con el meteoróide. Esto sucede en una región comprendida entre los 300 y los 100 km y dura sólo algunos segundos. La temperatura superficial del meteoróide se eleva rápidamente mientras que su interior se mantiene frío (con excepción de meteoroides pequeños). Para los objetos grandes, mayores a 1 mm, este proceso está gobernado por la conducción de calor, mientras que la radiación es el fenómeno importante para objetos más pequeños [32] [4].

Ablación

La ablación es un proceso que se da por la interacción del meteoróide con la atmósfera terrestre. En este proceso la velocidad se reduce por la resistencia de la atmósfera, la cual es lo suficientemente densa para desacelerar al meteoróide permitiéndole alcanzar el suelo a una velocidad mucho menor que la velocidad de entrada. Este cambio en la velocidad implica una conversión de energía cinética a térmica, produciendo un calentamiento del cuerpo así como del aire circundante, calentándose la cara delantera del meteoróide al grado de erosionar, fundir y evaporar parte de su superficie [4].

La ablación inicia con la interacción de las moléculas del aire con el meteoróide lo que origina al meteoro asociado. La luz es producida por dos mecanismos diferentes actuando de forma simultánea. Primero, el cuerpo sólido del meteoróide se vuelve incandescente al alcanzar su punto de fusión, esta incandescencia emite luz, pero no tan fuerte como para ser observada

desde el suelo. Después, como el aumento de temperatura del meteoroides continua, los átomos del meteoroides y los de la atmósfera que están rodeando al meteoroides se excitan y los átomos del meteoroides pierden electrones. Posteriormente, los átomos recapturan sus electrones, liberando la luz que caracteriza a los meteoros [32].

La presión aerodinámica de la atmósfera sobre el meteoroides puede llegar a igualar o sobrepasar la resistencia interna del material en cuyo caso el objeto empezará a fragmentarse. La fragmentación del objeto no es inmediata, la onda de presión debe transmitirse al interior del objeto, lo cual ocurre bastante rápido considerando que la velocidad de propagación de este tipo de ondas está entre 2930 y 6260 m/s. Al principio, los fragmentos se mueven conservando una misma onda de choque, pero conforme se van separando lateralmente, entre ellos empieza a haber mayor espacio hasta que cada fragmento adquiere su propia onda de choque. Cuando ocurre esta separación brusca se dice que el objeto explota [33].

Aproximadamente a los 50 km de altura la intensidad del meteoro es máxima mientras que bajo los 30 km de altura el meteoro se extingue. Es también en este punto en el que termina el proceso de ablación. En promedio el meteoro de un meteoroides dura entre 1 y 6 segundos. Los fragmentos del meteoroides tienen dos destinos dependiendo de su masa y velocidad, uno es seguir su trayectoria a través de la atmósfera o bien, evaporarse [4].

Vuelo oscuro

Si el meteoroides ha sobrevivido a este proceso, entonces tendrá una buena oportunidad de llegar al suelo y convertirse en una meteorita. A la etapa entre que el meteoroides deja de brillar y cae al suelo se le conoce como vuelo oscuro, aunque en sentido estricto no es un vuelo si no una caída. Durante el vuelo oscuro ya no hay energía cinética suficiente como para evaporar o proveer calor al meteoroides por lo cual la temperatura superficial del meteoroides disminuye permitiendo que el material se solidifique. Así es como se forma la costra de fusión. Los fragmentos del meteoroides continúan viajando por la atmósfera más o menos juntos siguiendo el camino que el centro de masa del meteoroides habría llevado [4].

Impacto

El material que sobrevive a todos estos procesos es el que impacta contra la superficie terrestre. Como vimos, el meteoroides puede o no fragmentarse. Si el meteoroides no se fragmenta, el punto de impacto se determina siguiendo el camino del centro de masa. Cuando se fragmenta, sus restos continúan viajando por la atmósfera más o menos juntos siguiendo la trayectoria que el centro de masa del meteoroides habría llevado y quedan distribuidos sobre el suelo dentro de una elipse de dispersión. En ésta, los fragmentos más grandes son llevados más lejos debido a su gran momento y los más pequeños caen cerca del sitio de caída. Norton y Chitwood señalan que, en promedio, las piezas grandes caen con un ángulo de 30° con la vertical y las pequeñas con uno de 20° . El eje

mayor de esta elipse coincide con la dirección que tenía el meteoróide en su trayectoria (figura 2.5) [34]. Los fragmentos sobrevivientes se conocen como meteoritas. Comúnmente el nombre que se les asigna a las meteoritas es el nombre de la localidad o la ubicación geográfica donde fue encontrada.



Figura 2.5: Elipse de dispersión asociada a la fragmentación de un meteoróide. Fuente [34].

En el caso de objetos muy grandes, de decenas de metros de largo, sus fragmentos pueden tener dos destinos: llegar a Tierra con la energía cinética suficiente para crear cráteres de impacto o sufrir una explosión que pulverice el material y genere una onda de choque (evento tipo Tunguska) [35]. La onda de choque atmosférica, generada durante la explosión de un meteoróide, puede generar movimientos telúricos detectables por sismómetros [36]. En la figura 2.6 se muestra un diagrama en el que se observa la frecuencia de impacto en función del tamaño del objeto y sus posibles consecuencias en la Tierra.

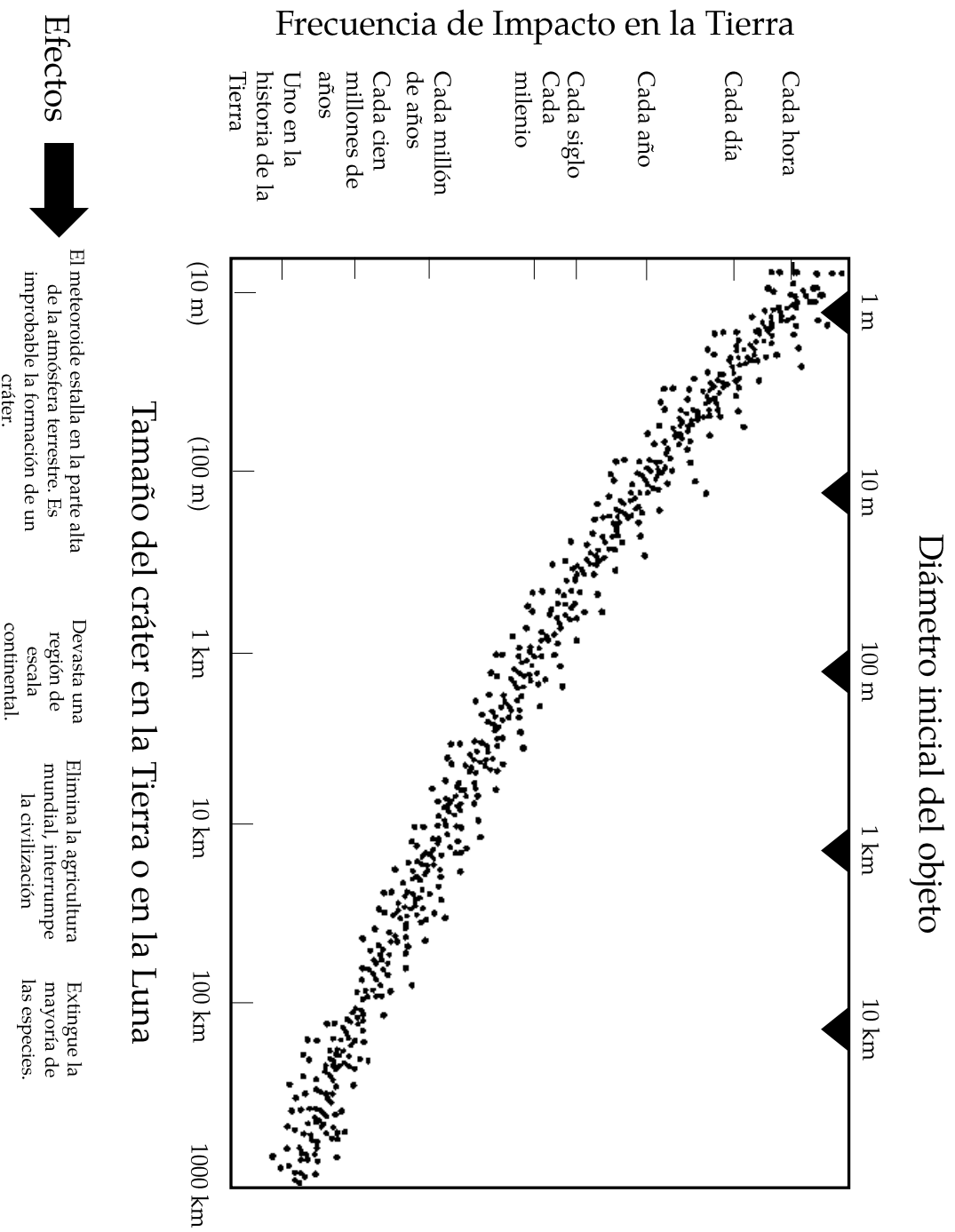


Figura 2.6: Frecuencia de impacto de meteoroides de distintos tamaños y sus posibles efectos. Adaptada de [37].

Capítulo 3

Movimiento orbital

Aunque previamente mencionamos que la órbita del meteoróide está influenciada tanto por su interacción con la radiación solar como por las perturbaciones que otros objetos tengan sobre él, en este caso consideraremos que su órbita depende únicamente de su atracción gravitacional con el Sol. El problema de los dos cuerpos consiste en dos masas puntuales moviéndose bajo la atracción gravitacional mutua descrita por la Ley de Gravitación Universal

$$\mathbf{F} = k \frac{Mm}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \quad (3.1)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza ejercida entre los dos cuerpos de masas M y m separados una distancia r [38] y k es la constante gravitacional.

3.1. Ecuaciones de movimiento

Consideremos el movimiento de dos masas M y m con vectores de posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 con respecto a un origen \mathbf{O} fijado en el espacio inercial (figura 3.1). Definiendo el vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ como la posición relativa de la masa m_2 con respecto a la masa m_1 la fuerza gravitacional que siente cada una de las masas es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= -k \frac{Mm}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = M \left(-k \frac{m}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \right) = M \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} \\ \mathbf{F}_2 &= +k \frac{Mm}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = m \left(+k \frac{M}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \right) = m \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2}$ es la aceleración de la masa M y $\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2}$ es la que experimenta m . Si sumamos \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 y empleamos la segunda ley de Newton llegamos a

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = 0 \quad (3.3)$$

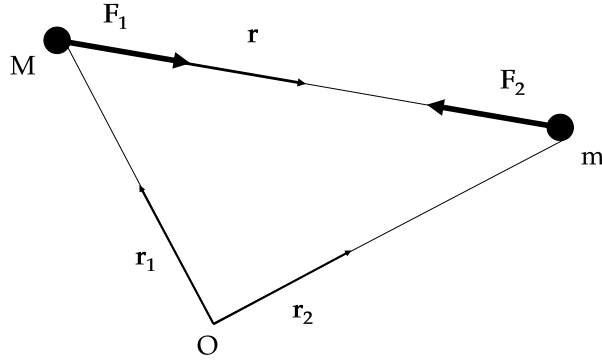


Figura 3.1: Diagrama vectorial para las fuerzas que actúan sobre M y m con vectores de posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 respectivamente.

La expresión (3.3) puede integrarse directamente respecto al tiempo y se obtiene

$$M \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{a} \quad (3.4)$$

Integrando nuevamente obtenemos

$$M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2 = \mathbf{a} + t\mathbf{b} \quad (3.5)$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son constantes de integración. El vector de posición del centro de masa está dado por

$$\mathbf{R} = \frac{M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2}{M + m} = \frac{\mathbf{a} + t\mathbf{b}}{M + m} \quad (3.6)$$

Derivando la expresión (3.6) obtenemos

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\mathbf{b}}{M + m} \quad (3.7)$$

Las últimas dos expresiones nos muestran que el centro de masa se está moviendo en línea recta con velocidad constante con respecto a \mathbf{O} . Adicionalmente, tomando la diferencia entre las aceleraciones mostradas en (3.2) llegamos a

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = k \frac{M+m}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \quad (3.8)$$

donde el factor $k(M+m)$ se conoce como parámetro gravitacional estándar y se denota con la letra griega μ ¹.

Derivando dos veces el vector \mathbf{r} obtenemos

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} \quad (3.9)$$

con lo cual la expresión (3.8) queda como

$$\mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Resolver esta última expresión nos permite encontrar la trayectoria que describe m con respecto a M o viceversa. Ahora calculemos el producto cruz de \mathbf{r} con (3.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \left(\mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) &= \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{r} \times \mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.11)$$

El primer término de este producto vectorial es cero, por lo cual

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

que puede integrarse directamente para obtener

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{h} \quad (3.13)$$

donde \mathbf{h} es una constante de integración perpendicular a \mathbf{r} y a $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ cuyo valor determinaremos más adelante. Este vector nos indica que el movimiento de m respecto a M está en un plano perpendicular a la dirección de \mathbf{h} lo cual implica que los vectores de posición y velocidad siempre están en el mismo plano. Esto quiere decir que \mathbf{h} , conocido como momento angular por unidad de masa, es siempre perpendicular al plano de la órbita.

¹En general, el parámetro gravitacional estándar está dado por $\mu = k(M+m)$ sin embargo en nuestro caso, como $m \ll M$, μ puede expresarse como $\mu = kM$ donde M es la masa del cuerpo central. En el caso del Sol, el parámetro gravitacional estándar es $\mu_{\text{Sol}} = 1,32712440018 \times 10^{20} \frac{m^3}{s^2}$ y en el caso de la Tierra $\mu_{\text{Tierra}} = 3,986004418 \times 10^{14} \frac{m^3}{s^2}$ [39].

3.2. Movimiento debido a una fuerza central

Una fuerza central es una fuerza que está dirigida a lo largo de una recta radial a un centro fijo y cuya magnitud sólo depende de la coordenada radial \mathbf{r} . La característica que tiene esta clase de movimiento es que cumple con los teoremas de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento angular orbital lo cual mostraremos más adelante. En nuestro caso, la fuerza central que está actuando sobre el cuerpo es la fuerza gravitacional [40]. Con respecto a un punto de referencia \mathbf{O} , sean \mathbf{r} el vector de posición de una partícula con masa m , \mathbf{v} el vector velocidad y \mathbf{a} la aceleración como función del tiempo.

En la figura 3.2 vemos que podemos construir un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}_r$ en la dirección de \mathbf{r} y ortogonal a éste está $\hat{\mathbf{u}}_\theta$. De esta manera, podemos expresar a \mathbf{r} como

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{u}}_r \quad (3.14)$$

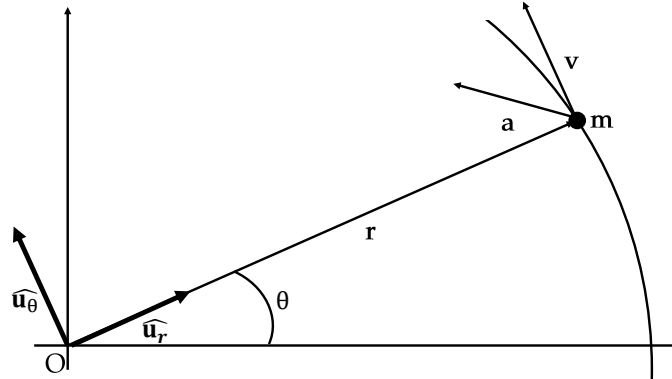


Figura 3.2: Notación usual para denotar a los vectores de un movimiento curvilíneo.

Derivando la ecuación (3.14) la velocidad queda como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{u}}_r + r\frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt}$$

Observando que $\frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{u}}_\theta$ obtenemos

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{u}}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (3.15)$$

Derivando la ecuación (3.15) para obtener la aceleración tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{u}}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) \\ &= \frac{d^2r}{dt^2} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\mathbf{u}}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta}{dt}\end{aligned}$$

Como $\frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{u}}_r$ tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d^2r}{dt^2} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\mathbf{u}}_\theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \hat{\mathbf{u}}_r \\ &= \frac{d^2r}{dt^2} \hat{\mathbf{u}}_r + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\mathbf{u}}_\theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \hat{\mathbf{u}}_r\end{aligned}$$

Factorizando obtenemos

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{\mathbf{u}}_r + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (3.16)$$

Ya que sabemos que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, utilizando las ecuaciones (3.16) y (3.1) tenemos

$$-\mu \frac{m}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r = m \left\{ \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{\mathbf{u}}_r + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \hat{\mathbf{u}}_\theta \right\}$$

de donde

$$\left[+\frac{\mu}{r^2} + \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{\mathbf{u}}_r + \left[r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \hat{\mathbf{u}}_\theta = 0 \quad (3.17)$$

Separando la ecuación (3.17) en sus componentes tenemos para la parte radial

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad (3.18)$$

y para la parte angular

$$\begin{aligned}r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow r^2 \frac{d\theta}{dt} &= h\end{aligned} \quad (3.19)$$

donde h es la magnitud del vector momento angular por unidad de masa visto en (3.13). Para conocer su valor debemos recordar que cuando una fuerza es central, el momento angular está dado por

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

Lo cual implica que

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{cte} \quad (3.21)$$

Sustituyendo las expresiones (3.14) y (3.15) en (3.21) tenemos

$$\mathbf{L} = r\hat{\mathbf{u}}_r \times m \left(\frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{u}}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.22)$$

donde $\hat{\mathbf{z}}$ es un vector unitario perpendicular al plano de la órbita. Definiendo \mathbf{h} como el momento angular por unidad de masa tenemos que

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{L}}{m} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.23)$$

y su magnitud es

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (3.24)$$

Las componentes de \mathbf{h} son 3 de las 4 constantes de movimiento asociadas a este problema. Elevando (3.19) al cuadrado tenemos que $h^2 = r^4 \frac{d\theta^2}{dt^2}$ de donde

$$\frac{d\theta^2}{dt} = \left(\frac{h}{r^2} \right)^2 \quad (3.25)$$

Sustituyendo (3.25) en (3.18)

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{h}{r^2} \right)^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad (3.26)$$

es decir

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad (3.27)$$

Haciendo $u = \frac{1}{r}$ y usando la regla de la cadena

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

De la expresión (3.24) obtenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = hu^2 \quad (3.28)$$

Por lo cual,

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} h u^2 \frac{du}{d\theta} = -h \left(\frac{du}{d\theta} \right) \quad (3.29)$$

Adicionalmente,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -h \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -h \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (3.30)$$

Usando nuevamente (3.28) tenemos

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \quad (3.31)$$

De esta manera, usando (3.31) la expresión (3.27) se reescribe como

$$-h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - h^2 u^3 + \mu u^2 = 0$$

Dividiendo entre $h^2 u^2$ tenemos

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}$$

La solución para la última ecuación diferencial es de la forma

$$u(\theta) = \left(\frac{h^2}{\mu} \right) \frac{1}{1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})}$$

De tal forma que

$$r(\theta) = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})} \quad (3.32)$$

donde e es una amplitud que se conoce como la excentricidad de la órbita y $\bar{\omega}$ es una fase. Definiendo el semilado recto p como

$$p \equiv \frac{h^2}{\mu} \quad (3.33)$$

obtenemos que la ecuación (3.32) tiene la misma forma que la ecuación polar de una sección cónica

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})} \quad (3.34)$$

Sabiendo el valor de la excentricidad podemos determinar el tipo y la forma de la cónica. Las cuatro posibles cónicas que puede tener el cuerpo m como trayectoria son circunferencia, elipse, parábola e hipérbola (tabla 3.1).

Tabla 3.1: Posibles formas que puede tener una órbita en función de su excentricidad, semilado recto y energía. Adaptado de [38] y [12].

Cónica	Excentricidad	Semilado Recto	Energía
Circunferencia	$e = 0$	$p = a$	$E < 0$
Elipse	$0 < e < 1$	$p = a(1 - e^2)$	$E < 0$
Parábola	$e = 1$	$p = 2q$	$E = 0$
Hipérbola	$e > 1$	$p = a(e^2 - 1)$	$E > 0$

En el caso de la parábola, el semilado recto está en función de q que es la distancia mínima del objeto a su centro de fuerzas. En tanto, los valores del semilado recto están en función de a que se conoce como el semieje mayor. De aquí en adelante, estudiaremos las órbitas elípticas. En este caso, el semieje mayor es el promedio de los desplazamientos mínimo y máximo de la partícula desde la localización de la fuerza central, es decir

$$a = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max})$$

En la ecuación (3.32) observamos que r_{max} ocurre cuando $\theta = \bar{\omega} + \pi$ y se conoce como afelio, mientras que, cuando r_{min} , $\theta = \bar{\omega}$ se conoce como perihelio,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{\mu} \left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{\mu} \left[\frac{1-e+1+e}{(1+e)(1-e)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{\mu} \left[\frac{2}{1-e^2} \right] \end{aligned}$$

Por tanto

$$a = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1-e^2}$$

De aquí obtenemos que la distancia al afelio, Q , y al perihelio, q , está dada por

$$\begin{aligned} Q &= a(1+e) \\ q &= a(1-e) \end{aligned} \tag{3.35}$$

De la expresión (3.2) podemos ver que $\frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2)$. Con esto, la ecuación (3.34) se reescribe como

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})}$$

donde r se mide desde el foco de la órbita, θ se conoce como longitud verdadera y $\bar{\omega}$ es la longitud del perihelio. Definimos el ángulo $\nu = \theta - \bar{\omega}$ el cual es llamado anomalía verdadera. Con esto podemos reescribir

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad (3.36)$$

En el caso del problema de 2 cuerpos, si la órbita es circular, la velocidad angular promedio n es constante. De la tercera ley de Kepler

$$T = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu} \quad (3.37)$$

y sabiendo que $n = \frac{2\pi}{T}$ entonces,

$$n = \left(\frac{\mu}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.38)$$

Además como $\frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2)$.

$$h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} = na^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (3.39)$$

La excentricidad y el semieje mayor son dos parámetros que nos definen la forma y el tamaño de la órbita del objeto que estamos estudiando. Por una parte, la excentricidad describe que tan elongada es la elipse comparándola con una circunferencia mientras que el semieje mayor representa la distancia media del cuerpo a la fuente central gravitacional. Sin embargo, el conocer estos dos elementos no nos da una información completa que nos permita describir la órbita del objeto alrededor (en este caso) del Sol. Para hacerlo, en un espacio de tres dimensiones, necesitamos la ayuda de varios ángulos que orienten la órbita (figura 3.3).

Cuando consideramos el movimiento de objetos alrededor del Sol, es usual considerar nuestro sistema con el Sol en el centro donde el plano de referencia es el plano de la órbita terrestre (la eclíptica) y la línea de referencia está en la dirección del punto vernal. En general, el plano de la órbita del objeto en cuestión estará inclinado respecto a la eclíptica, es decir, existe un ángulo que especifica el ángulo que hace el semieje mayor de la órbita con la eclíptica. Éste se conoce como la inclinación y se denota con la letra i . La línea de intersección entre el plano orbital y el sistema de referencia estándar es conocida como línea de nodos. El punto en ambos planos donde la órbita cruza el plano de referencia es llamado nodo ascendente mientras que el

ángulo entre la línea de referencia y el radio vector dirigido a él se conoce como longitud del nodo ascendente Ω . El ángulo entre este radio vector y el pericentro de la órbita es conocido como argumento del pericentro ω (en nuestro caso, argumento del perihelio). Estas características de la órbita sólo son válidas en una determinada época ya que la órbita se modifica a través del tiempo por las perturbaciones gravitacionales que ejercen otros cuerpos sobre ella. Por esto, para terminar de caracterizar la órbita, debemos determinar la posición del objeto en su órbita en algún tiempo concreto. A este valor se le conoce como anomalía media M . En algunas ocasiones, en lugar de la anomalía media de la época se utiliza la anomalía verdadera ν la cual es el ángulo que forman las líneas que parten del perihelio y de la posición actual del cuerpo hacia el punto alrededor del cual el objeto orbita. Las cantidades a, e, i, ω, Ω y M o ν se conocen como elementos orbitales.

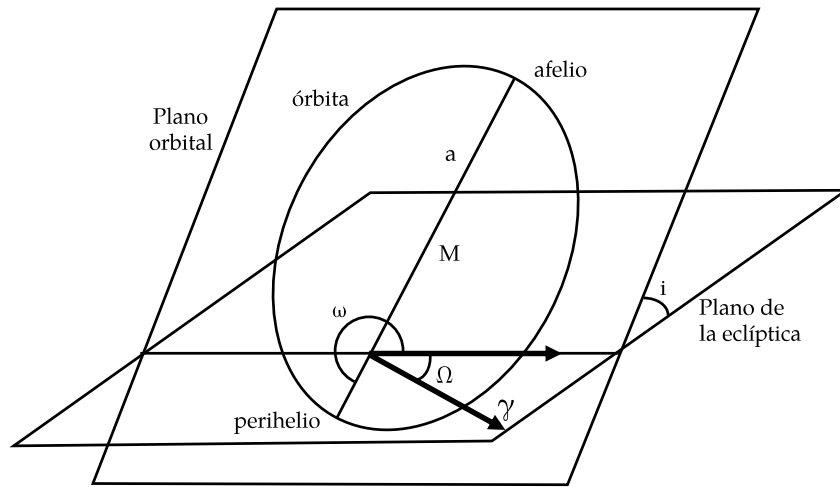


Figura 3.3: Elementos orbitales de un cuerpo alrededor del Sol.

3.3. Ecuación *Vis Viva*

Ahora, derivemos la última constante de movimiento tomando el producto punto de $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ con la ecuación (3.10)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \left(\mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \mu \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Sustituyendo (3.14) y (3.15) en (3.40) obtenemos

$$\mu \left(\frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{u}}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) \cdot \frac{r}{r^3} \hat{\mathbf{u}}_r + \left(\frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{u}}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{\mathbf{u}}_r = 0 \quad (3.41)$$

En esta última ecuación todos los términos en los que se encuentre $\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta$ se hacen cero porque son vectores perpendiculares. Con esto, llegamos a la ecuación escalar

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} = 0 \quad (3.42)$$

El producto $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ se obtiene con las expresiones (3.15) y (3.16)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \left(\frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{u}}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) \cdot \left(\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{\mathbf{u}}_r + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \hat{\mathbf{u}}_\theta \right) \\ &= \frac{dr}{dt} \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + r \frac{d\theta}{dt} \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \\ &= \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} + r \frac{dr}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.42)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} \quad (3.43)$$

Integrando la ecuación (3.43)

$$\frac{1}{2} \int \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 dt + \frac{1}{2} \int \frac{d}{dt} \left[r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] dt = -\mu \int \frac{1}{r^2} dr \quad (3.44)$$

de donde

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left[r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \right\} = \frac{\mu}{r} + E \quad (3.45)$$

donde la magnitud de la velocidad de la partícula es $v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left[r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$ y $E = \text{cte}$. Reescribiendo la ecuación tenemos

$$E = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \quad (3.46)$$

esta expresión se conoce como ecuación *vis viva* y muestra que la energía orbital o energía total por unidad de masa se conserva. La energía gravitacional total entonces puede escribirse como

$$E_T = \frac{1}{2}mv^2 + \pi(r) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} \quad (3.47)$$

donde $\pi(r)$ es la energía potencial.

Ya que la velocidad se expresa como

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left[r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] \quad (3.48)$$

$$y \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(\nu + \bar{\omega})}{dt}$$

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left[r^2 \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2\right] \quad (3.49)$$

Diferenciando la ecuación (3.36) tenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r \frac{d\nu}{dt} e \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (3.50)$$

Usando que $r^2 \frac{d\nu}{dt} = h = na^2 \sqrt{1 - e^2}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}} e \sin \nu \\ r \frac{d\nu}{dt} &= \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}} (1 + e \cos \nu) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Con lo cual, (3.49) se puede escribir como

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{n^2 a^2}{1 - e^2} (1 + 2e \cos \nu + e^2) \\ &= \frac{n^2 a^2}{1 - e^2} \left[\frac{2a(1 - e^2)}{r} - (1 - e^2) \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

de donde

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (3.53)$$

Capítulo 4

Movimiento a través de atmósferas planetarias

4.1. Ecuaciones de entrada

Para describir el movimiento de un cohete que reingresa en la Tierra, de un misil que viaja a través de nuestro planeta o de un meteoróide después de su colisión hay que obtener las ecuaciones de movimiento de un objeto que entra a hipervelocidad en una atmósfera planetaria [13]. El movimiento de un objeto con masa m está definido por su vector de posición $\mathbf{r}(t)$ y su vector velocidad $\mathbf{v}(t)$. Consideremos que el objeto se encuentra en un sistema de referencia \mathbf{Oxyz} que rota con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ respecto a un sistema fijo \mathbf{OXYZ} (figura 4.1).

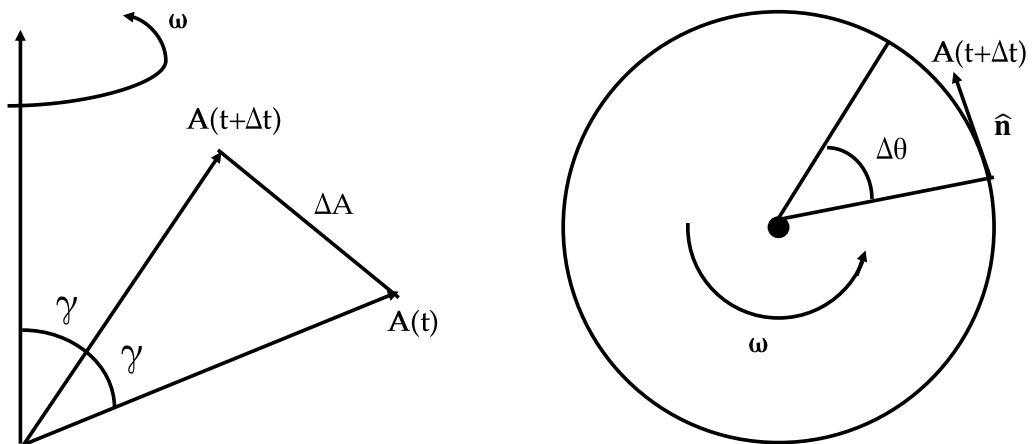


Figura 4.1: Movimiento del objeto visto desde el sistema de referencia fijo.

Si $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ son los vectores unitarios en $Oxyz$, un vector \mathbf{A} cualquiera tiene coordenadas

$$\mathbf{A}(t) = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}} \quad (4.1)$$

Ya que $Oxyz$ está rotando, $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ están en función del tiempo. Por ende, al derivar (4.1) tendremos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + A_x \frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + \frac{dA_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} + A_y \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + \frac{dA_z}{dt} \hat{\mathbf{k}} + A_z \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} \\ &= \frac{dA_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dA_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dA_z}{dt} \hat{\mathbf{k}} + A_x \frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + A_y \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + A_z \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} \end{aligned} \quad (4.2)$$

En la figura 4.1 podemos observar que el cambio $|\Delta\mathbf{A}| = |\mathbf{A}| \sin\gamma$. Para volver esta expresión un vector, hay que tomar en cuenta la dirección en que la velocidad angular cambia. Con esto obtenemos que

$$\Delta\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \sin\gamma \Delta\theta \hat{\mathbf{n}} \quad (4.3)$$

donde $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}}{|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}|}$. Dividiendo la ecuación (4.3) entre Δt y tomando la expresión como una derivada obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} &= |\mathbf{A}| \sin\gamma \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \hat{\mathbf{n}} \\ \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= |\mathbf{A}| \sin\gamma \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

Como $\frac{d\theta}{dt} = |\boldsymbol{\omega}|$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= |\mathbf{A}| \sin\gamma |\boldsymbol{\omega}| \hat{\mathbf{n}} \\ &= |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}| \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

Usando la definición de $\hat{\mathbf{n}}$ tenemos que

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}| \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}}{|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}|}$$

Para obtener finalmente que

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (4.4)$$

Si en la expresión (4.4) sustituimos $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ obtendremos

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}} \\ \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}} \\ \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Por tanto, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$ puede escribirse como

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} = A_x \frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + A_y \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + A_z \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} \quad (4.5)$$

Sustituyendo la expresión (4.5) en (4.2) obtenemos

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dA_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dA_z}{dt} \hat{\mathbf{k}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

Si llamamos al término inercial

$$\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} = \frac{dA_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dA_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dA_z}{dt} \hat{\mathbf{k}}$$

tenemos que

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) es la expresión para transformar la derivada temporal de un vector de un sistema fijo a un sistema que está rotando [41]. Consideremos el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ del objeto. Para obtener una expresión de su velocidad en el sistema que está rotando no hay que hacer más que sustituir en (4.6)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (4.7)$$

Para obtener una expresión de su aceleración en el sistema que está rotando derivamos (4.7) usando (4.6)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right] + \boldsymbol{\omega} \times \left[\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right] \quad (4.8)$$

Suponiendo que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es constante, entonces $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{0}$, por tanto

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (4.9)$$

Usando la expresión (4.9) y la segunda ley de Newton podemos escribir

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \left(\frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right)$$

de donde, desde el sistema de referencia inercial

$$m \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta t^2} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Reescribiendo en términos de la velocidad y cambiando la notación

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (4.10)$$

En el sistema de referencia fijo al planeta, \mathbf{r} es función de su magnitud $|\mathbf{r}|$, su latitud ϕ y su longitud θ . El sistema de referencia en rotación $Oxyz$ quedará definido al poner el eje x en la dirección del vector de posición \mathbf{r} del objeto y y en la dirección del plano ecuatorial. Ahora definiremos dos ángulos: el primero irá en la dirección del ángulo entre el plano horizontal local y es conocido como el ángulo de la trayectoria de vuelo γ . El segundo se conoce como encabzamiento ψ y es el ángulo entre el paralelo local y la proyección de \mathbf{v} (figura 4.2).

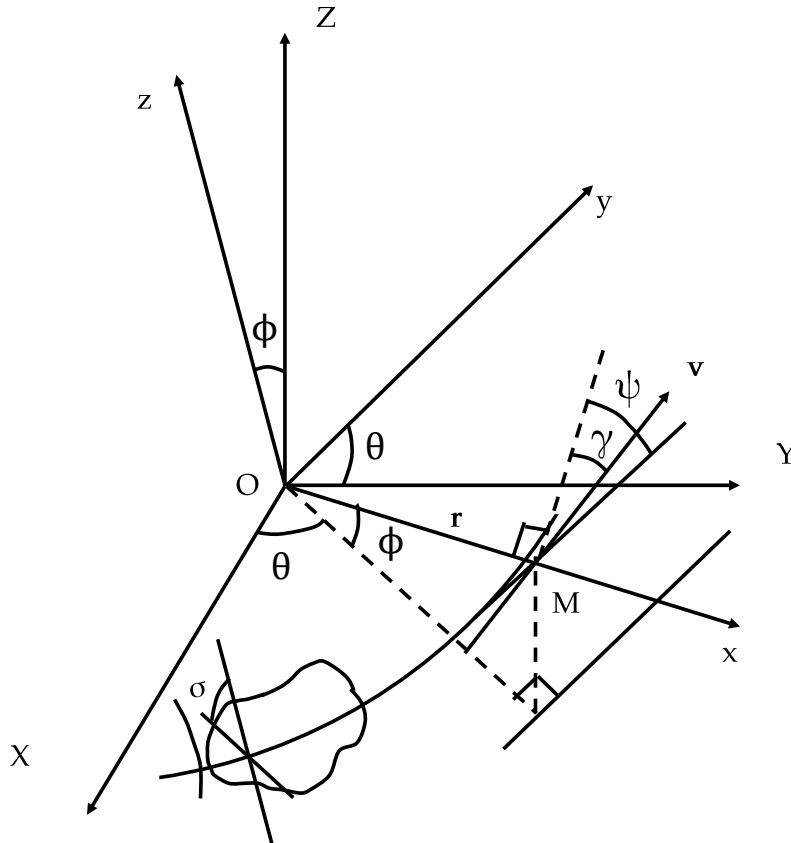


Figura 4.2: Sistemas coordenados

De esta manera el vector de posición y el vector de velocidad se escriben como

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{i}} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{v} = v \sin \gamma \hat{\mathbf{i}} + v \cos \gamma \cos \psi \hat{\mathbf{j}} + v \cos \gamma \sin \psi \hat{\mathbf{k}} \quad (4.12)$$

Por otra parte, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ se escribe como

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \sin \phi \hat{\mathbf{i}} + \omega \cos \phi \hat{\mathbf{k}} \quad (4.13)$$

Con las expresiones (4.12) y (4.13) podemos obtener el producto $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$,

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \omega \sin \phi & 0 & \omega \cos \phi \\ v \sin \gamma & v \cos \gamma \cos \psi & v \cos \gamma \sin \psi \end{vmatrix}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = & (-v\omega \cos \gamma \cos \psi \cos \phi) \hat{\mathbf{i}} + (v\omega \sin \gamma \cos \phi - v\omega \cos \gamma \sin \psi \sin \phi) \hat{\mathbf{j}} \\ & + (v\omega \cos \gamma \cos \psi \sin \phi) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Con (4.11) y (4.13) podemos obtener la expresión para $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$. Calculando primero $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ tenemos

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \omega \sin \phi & 0 & \omega \cos \phi \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\omega \cos \phi \hat{\mathbf{j}}$$

Con eso,

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \omega \sin \phi & 0 & \omega \cos \phi \\ 0 & r\omega \cos \phi & 0 \end{vmatrix}$$

de donde

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -r\omega^2 \cos^2 \phi \hat{\mathbf{i}} + r\omega^2 \sin \phi \cos \phi \hat{\mathbf{k}} \quad (4.15)$$

Sustituyendo (4.14) y (4.15) en (4.10)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{1}{m}\mathbf{F} \\ &- 2v\omega \left[-\cos\gamma \cos\psi \cos\phi \hat{\mathbf{i}} + (\sin\gamma \cos\phi - \cos\gamma \sin\psi \sin\phi) \hat{\mathbf{j}} + \cos\gamma \cos\psi \sin\phi \hat{\mathbf{k}} \right] \\ &- r\omega^2 \left[-\cos^2\phi \hat{\mathbf{i}} + \sin\phi \cos\phi \hat{\mathbf{k}} \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Resta ver cómo se comporta la fuerza. A cada instante, el objeto está sujeto a una fuerza neta compuesta por la fuerza gravitacional, la fuerza aerodinámica \mathbf{A} y el impulso \mathbf{T} . De esta manera

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} + \mathbf{A} + m\mathbf{g} \quad (4.17)$$

La fuerza gravitacional es simplemente

$$m\mathbf{g} = -mg(r)\hat{\mathbf{i}} \quad (4.18)$$

La fuerza aerodinámica \mathbf{A} puede descomponerse en una fuerza de arrastre \mathbf{D} que se opone al vector velocidad y en una fuerza ascensional \mathbf{L} ortogonal a él. Además, si el vuelo es simétrico, el vector \mathbf{T} está contenido en el plano definido por \mathbf{D} y \mathbf{L} . Descomponiendo \mathbf{T} en una componente a lo largo del vector velocidad y otra a lo largo de la fuerza ascensional podemos escribir

$$\begin{aligned} F_T &= T \cos \epsilon - D \\ F_N &= T \sin \epsilon + L \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde F_T es la componente que agrupa las componentes a lo largo de \mathbf{v} y F_N las ortogonales a ésta. Como F_T va a lo largo de \mathbf{v} , usando (4.12) tenemos

$$\mathbf{F}_T = F_T \sin\gamma \hat{\mathbf{i}} + F_T \cos\gamma \cos\psi \hat{\mathbf{j}} + F_T \cos\gamma \sin\psi \hat{\mathbf{k}} \quad (4.20)$$

Para obtener una expresión para \mathbf{F}_N tenemos que observar que podemos separarla en una componente $\mathbf{F}_N \cos\sigma$ en el plano vertical ortogonal a \mathbf{v} y en otra ortogonal al plano vertical dada por $\mathbf{F}_N \sin\sigma$ (figura 4.3).

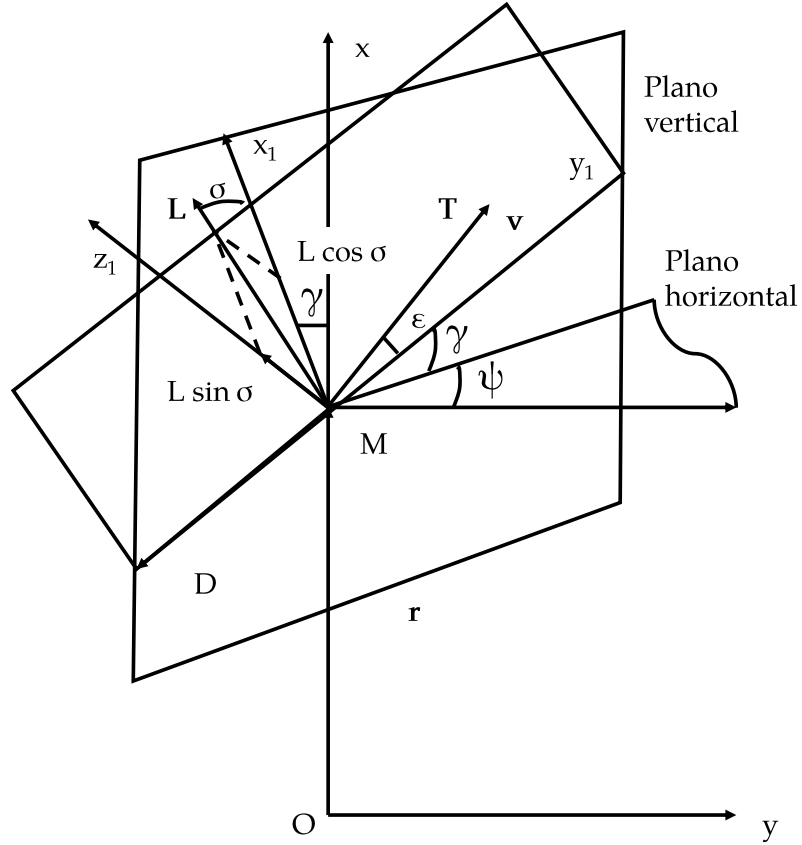


Figura 4.3: Fuerzas aerodinámicas y componentes de empuje.

Sean x' , y' y z' tres ejes paralelos a x , y y z que tienen origen M que coincide con el punto donde está el centro del objeto y x_1 , y_1 y z_1 otros ejes que apuntan a lo largo de $\mathbf{F}_N \cos \sigma$, \mathbf{v} y $\mathbf{F}_N \sin \sigma$ respectivamente.

En este caso podemos obtener a $Mx_1y_1z_1$ a partir de rotar el sistema $Mx'y'z'$ con un ángulo ψ en el plano horizontal seguido de una rotación con un ángulo γ en el plano vertical. De esto

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma \cos \psi & \cos \gamma \cos \psi & -\sin \psi \\ -\sin \psi \sin \gamma & \cos \gamma \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
x' &= x_1 \cos \gamma + y_1 \sin \gamma \\
y' &= -x_1 \sin \gamma \cos \psi + y_1 \cos \gamma \cos \psi - z_1 \sin \psi \\
z' &= -x_1 \sin \gamma \sin \psi + y_1 \cos \gamma \sin \psi + z_1 \cos \psi
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Ya que en el sistema primado $\mathbf{F}_N = F_N \cos \sigma \hat{\mathbf{i}} + F_N \sin \sigma \hat{\mathbf{k}}$, en el sistema que rota \mathbf{F}_N' queda como

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}'_N &= F_N \cos \sigma \cos \gamma \hat{\mathbf{i}} \\
&+ (-F_N \cos \sigma \sin \gamma \cos \psi - F_N \sin \sigma \sin \psi) \hat{\mathbf{j}} \\
&+ (-F_N \cos \sigma \sin \gamma \sin \psi + F_N \sin \sigma \cos \psi) \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

De esta manera podemos obtener una expresión para la fuerza sustituyendo en (4.17) las expresiones (4.18), (4.20) y (4.23)

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= [-mg(r) + F_T \sin \gamma + F_N \cos \sigma \cos \gamma] \hat{\mathbf{i}} \\
&+ [F_T \cos \gamma \cos \psi - F_N \cos \sigma \sin \gamma \cos \psi - F_N \sin \sigma \sin \psi] \hat{\mathbf{j}} \\
&+ [F_T \cos \gamma \sin \psi - F_N \cos \sigma \sin \gamma \sin \psi + F_N \sin \sigma \cos \psi] \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Con la expresión (4.24) hemos terminado de resolver las componentes de la ecuación (4.16). Para poder derivar las ecuaciones de (4.16) necesitamos conocer la expresión de la velocidad angular en los sistemas en rotación. El sistema $Oxyz$ se obtiene de $OXYZ$ haciendo una rotación con un ángulo θ en el eje Z seguido de una rotación con un ángulo ϕ en el eje Y . De este modo $\boldsymbol{\Omega}$ se ve como

$$\boldsymbol{\Omega} = \sin \phi \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{i}} - \frac{d\phi}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \cos \phi \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{k}} \tag{4.25}$$

De esta manera

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} &= \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{i}} = \cos \phi \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{d\phi}{dt} \hat{\mathbf{k}} \\
\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} &= \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{j}} = -\cos \phi \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \sin \phi \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{k}} \\
\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} &= \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{k}} = -\frac{d\phi}{dt} \hat{\mathbf{i}} - \sin \phi \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{j}}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

De la ecuación (4.11) teníamos que $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{i}}$, derivando

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{i}} + r \frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \\
&= \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{d\phi}{dt} \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Igualando las ecuaciones (4.12) y (4.27) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{v \cos \gamma \cos \psi}{r \cos \phi} \\
\frac{d\phi}{dt} &= \frac{v \cos \gamma \sin \psi}{r}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Por otro lado, si tomamos la derivada de (4.12) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{dv}{dt} \sin \gamma \hat{\mathbf{i}} + v \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} \hat{\mathbf{i}} + v \sin \gamma \frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \\
&+ \frac{dv}{dt} \cos \gamma \cos \psi \hat{\mathbf{j}} - v \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} \cos \psi \hat{\mathbf{j}} - v \cos \gamma \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \hat{\mathbf{j}} + v \cos \gamma \cos \psi \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} \\
&+ \frac{dv}{dt} \cos \gamma \sin \psi \hat{\mathbf{k}} - v \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt} \sin \psi \hat{\mathbf{k}} + v \cos \gamma \cos \psi \frac{d\psi}{dt} \hat{\mathbf{k}} + v \cos \gamma \sin \psi \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt}
\end{aligned}$$

sustituyendo las ecuaciones (4.26) se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \left[\frac{dv}{dt} \sin \gamma + v \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} \right] \hat{\mathbf{i}} \\
&+ \left[\frac{dv}{dt} \cos \gamma \cos \psi - v \sin \gamma \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} - v \cos \gamma \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \right] \hat{\mathbf{j}} \\
&+ \left[\frac{dv}{dt} \cos \gamma \sin \psi - v \sin \gamma \sin \psi \frac{d\gamma}{dt} + v \cos \gamma \cos \psi \frac{d\psi}{dt} \right] \hat{\mathbf{k}} \\
&+ v \sin \gamma \left[\cos \phi \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{d\phi}{dt} \hat{\mathbf{k}} \right] \\
&+ v \cos \gamma \cos \psi \left[-\cos \phi \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \sin \phi \frac{d\theta}{dt} + \hat{\mathbf{k}} \right] \\
&+ v \cos \gamma \sin \psi \left[-\frac{d\phi}{dt} \hat{\mathbf{i}} - \sin \phi \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{j}} \right]
\end{aligned}$$

Factorizando por componentes

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} = & \left[\frac{dv}{dt} \sin \gamma + v \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} - v \cos \gamma \cos \psi \cos \phi \frac{d\theta}{dt} - v \cos \gamma \sin \psi \frac{d\phi}{dt} \right] \hat{\mathbf{i}} \\
& + \left[\frac{dv}{dt} \cos \gamma \cos \psi - v \sin \gamma \cos \psi \frac{d\gamma}{dt} - v \cos \gamma \sin \psi \frac{d\psi}{dt} + v \sin \gamma \cos \phi \frac{d\theta}{dt} - v \cos \gamma \sin \gamma \sin \phi \frac{d\theta}{dt} \right] \hat{\mathbf{j}} \\
& + \left[\frac{dv}{dt} \cos \gamma \sin \psi - v \sin \gamma \sin \psi \frac{d\gamma}{dt} + v \cos \gamma \cos \psi \frac{d\psi}{dt} + v \sin \gamma \frac{d\phi}{dt} + v \cos \gamma \cos \psi \sin \phi \frac{d\theta}{dt} \right] \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones para $\frac{d\theta}{dt}$ y $\frac{d\phi}{dt}$ que se obtuvieron en (4.28)

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} = & \left[\frac{dv}{dt} \sin \gamma + v \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} - \frac{v \cos \gamma \cos \psi \cos \phi v \cos \gamma \cos \psi}{r \cos \phi} - \frac{v \cos \gamma \sin \psi v \cos \gamma \sin \psi}{r} \right] \hat{\mathbf{i}} \\
& + \left[\frac{dv}{dt} \cos \gamma \cos \psi - v \sin \gamma \cos \psi \frac{d\gamma}{dt} - v \cos \gamma \sin \psi \frac{d\psi}{dt} + \frac{v \sin \gamma \cos \phi v \cos \gamma \cos \psi}{r \cos \phi} - \frac{v \cos \gamma \sin \psi \sin \phi v \cos \gamma \cos \psi}{r \cos \phi} \right] \hat{\mathbf{j}} \\
& + \left[\frac{dv}{dt} \cos \gamma \sin \psi - v \sin \gamma \sin \psi \frac{d\gamma}{dt} + v \cos \gamma \cos \psi \frac{d\psi}{dt} + \frac{v \sin \gamma v \cos \gamma \sin \psi}{r} + \frac{v \cos \gamma \cos \psi \sin \phi v \cos \gamma \cos \psi}{r \cos \phi} \right] \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} = & \left[\frac{dv}{dt} \sin \gamma + v \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} - \frac{v^2}{r} \cos^2 \gamma \cos^2 \psi - \frac{v^2}{r} \cos^2 \gamma \sin^2 \psi \right] \hat{\mathbf{i}} \\
& + \left[\frac{dv}{dt} \cos \gamma \cos \psi - v \sin \gamma \cos \psi \frac{d\gamma}{dt} - v \cos \gamma \sin \psi \frac{d\psi}{dt} + \frac{v^2}{r} \sin \gamma \cos \gamma \cos \psi - \frac{v^2}{r} \cos^2 \gamma \sin \psi \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \cos \psi \right] \hat{\mathbf{j}} \\
& + \left[\frac{dv}{dt} \cos \gamma \sin \psi - v \sin \gamma \sin \psi \frac{d\gamma}{dt} + v \cos \gamma \cos \psi \frac{d\psi}{dt} + \frac{v^2}{r} \sin \gamma \cos \gamma \sin \psi + \frac{v^2}{r} \cos \gamma \cos \psi \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \cos \gamma \cos \psi \right] \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} = & \left[\frac{dv}{dt} \sin \gamma + v \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} - \frac{v^2}{r} \cos^2 \gamma \right] \hat{\mathbf{i}} \\
& + \left[\frac{dv}{dt} \cos \gamma \cos \psi - v \sin \gamma \cos \psi \frac{d\gamma}{dt} - v \cos \gamma \sin \psi \frac{d\psi}{dt} + \frac{v^2}{r} \cos \gamma \cos \psi (\sin \gamma - \cos \gamma \sin \psi \tan \phi) \right] \hat{\mathbf{j}} \quad (4.29) \\
& + \left[\frac{dv}{dt} \cos \gamma \sin \psi - v \sin \gamma \sin \psi \frac{d\gamma}{dt} + v \cos \gamma \cos \psi \frac{d\psi}{dt} + \frac{v^2}{r} \cos \gamma (\sin \gamma \sin \psi + \cos^2 \psi \tan \phi \cos \gamma) \right] \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Igualando componente a componente las ecuaciones (4.16) y (4.29) y usando (4.24) obtenemos las siguientes ecuaciones escalares

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} \sin \gamma + v \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} - \frac{v^2}{r} \cos^2 \gamma = & \\
\frac{1}{m} F_T \sin \gamma + \frac{1}{m} F_N \cos \sigma \cos \gamma - g - 2v\omega \cos \gamma \cos \psi \cos \phi + r\omega^2 \cos^2 \phi & \quad (4.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} \cos \gamma \cos \psi - v \sin \gamma \cos \psi \frac{d\gamma}{dt} - v \cos \gamma \sin \psi \frac{d\psi}{dt} + \frac{v^2}{r} \cos \gamma \cos \psi (\sin \gamma - \cos \gamma \sin \psi \tan \phi) = & \\
\frac{1}{m} F_T \cos \gamma \cos \psi - \frac{1}{m} F_N \cos \sigma \sin \gamma \cos \psi - \frac{1}{m} F_N \sin \sigma \sin \psi - 2v\omega (\sin \gamma \cos \phi - \cos \gamma \sin \psi \sin \phi) & \quad (4.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dv}{dt} \cos \gamma \sin \psi - v \sin \gamma \sin \psi \frac{d\gamma}{dt} + v \cos \gamma \cos \psi \frac{d\psi}{dt} + \frac{v^2}{r} \cos \gamma (\sin \gamma \sin \psi + \cos^2 \psi \tan \phi \cos \gamma) = \\
& \frac{1}{m} F_T \cos \gamma \sin \psi - \frac{1}{m} F_N \cos \sigma \sin \gamma \sin \psi + \frac{1}{m} F_N \sin \gamma \cos \psi - 2v\omega \cos \gamma \cos \psi \sin \phi - r\omega^2 \sin \phi \cos \phi
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Las expresiones (4.30), (4.31) y (4.32) nos proporcionan un sistema de ecuaciones con tres incógnitas que nos permite obtener las ecuaciones para $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ y $\frac{d\psi}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F_T - g \sin \gamma + \omega^2 r \cos \phi (\sin \gamma \cos \phi - \cos \gamma \sin \phi \sin \psi) \tag{4.33}$$

$$v \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{m} F_N \cos \sigma - g \cos \gamma + \frac{v^2}{r} \cos \gamma + 2\omega v \cos \phi \cos \psi + \omega^2 r \cos \phi (\cos \gamma \cos \phi + \sin \gamma \sin \phi \sin \psi) \tag{4.34}$$

$$v \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{m} \frac{F_N \sin \sigma}{\cos \gamma} - \frac{v^2}{r} \cos \gamma \cos \psi \tan \phi + 2\omega v (\tan \gamma \cos \phi \sin \psi - \sin \phi) - \frac{\omega^2 r}{\cos \gamma} \sin \phi \cos \phi \cos \psi \tag{4.35}$$

Las expresiones (4.33), (4.34) y (4.35) son las tres ecuaciones de la fuerza. En este punto es conveniente hacer un par de suposiciones. La primera es que la atmósfera no rota con respecto al planeta. Si suponemos que la atmósfera está en reposo respecto al planeta, entonces la ω del planeta y la atmósfera es la misma. En términos generales ω es pequeña, por lo que el término $\omega^2 r$ puede despreciarse. La segunda suposición es que el planeta y la atmósfera no rotan. Esto puede suponerse únicamente si el interés está en las variaciones de la velocidad y la altitud del objeto en la parte de la trayectoria donde se produce la desaceleración. Si $\omega = 0$ entonces el término de Coriolis, $2\omega v$, puede ignorarse. Así, (4.33), (4.34) y (4.35) se pueden ver como

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m} F_T - g \sin \gamma \\
v \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{1}{m} F_N \cos \sigma - g \cos \gamma + \frac{v^2}{r} \cos \gamma \\
v \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{m} \frac{F_N \sin \sigma}{\cos \gamma} - \frac{v^2}{r} \cos \gamma \cos \psi \tan \phi
\end{aligned} \tag{4.36}$$

En el caso de un vuelo de entrada en la atmósfera se tiene que $T = 0$, $F_T = -D$ y $F_N = L$,

de donde las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{D}{m} - g \sin \gamma \\ v \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{L \cos \sigma}{m} - g \cos \gamma + \frac{v^2}{r} \cos \gamma \\ v \frac{d\psi}{dt} &= \frac{L \sin \sigma}{m \cos \gamma} - \frac{v^2}{r} \cos \gamma \cos \psi \tan \phi \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde γ es el ángulo de trayectoria de vuelo y ϕ es el ángulo de alcance (figura 4.4).

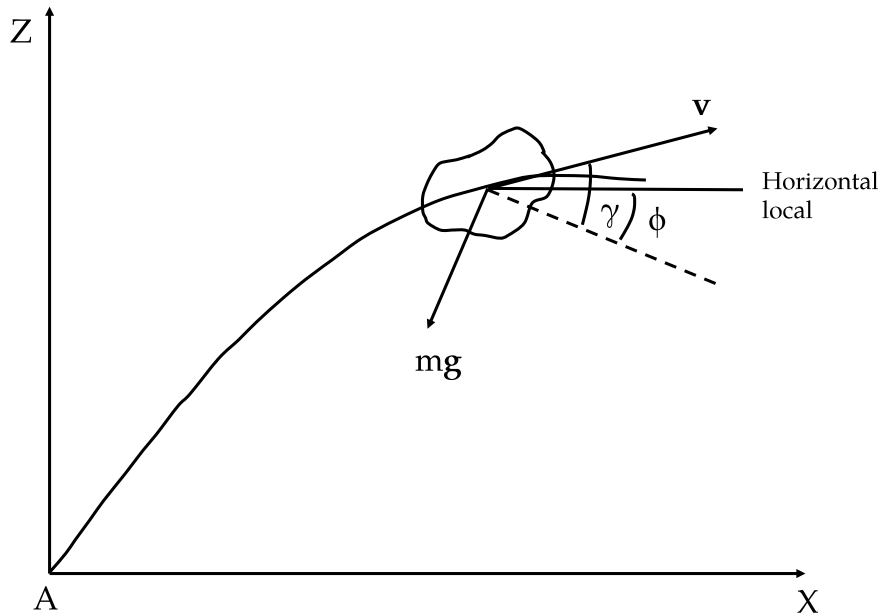


Figura 4.4: Sistema inercial en la superficie de la Tierra.

4.2. Las ecuaciones de movimiento del meteoroide

En cada instante de tiempo el meteoroide está sujeto a dos fuerzas

- La fuerza gravitacional $F_g = mg$.
- La fuerza aerodinámica A que puede descomponerse en una fuerza de arrastre D y una fuerza de elevación L .

Si asumimos que la fuerza de elevación L y la fuerza de arrastre D tienen la forma

$$L = \frac{1}{2}\rho S C_L v^2$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S C_D v^2$$

donde ρ es la densidad atmosférica y S el área de sección transversal del objeto en caída. C_D y C_L se conocen como coeficiente de arrastre y elevación respectivamente y dependen del ángulo de ataque α , el número de Mach M y el número de Reynolds R_e (figura 4.5).

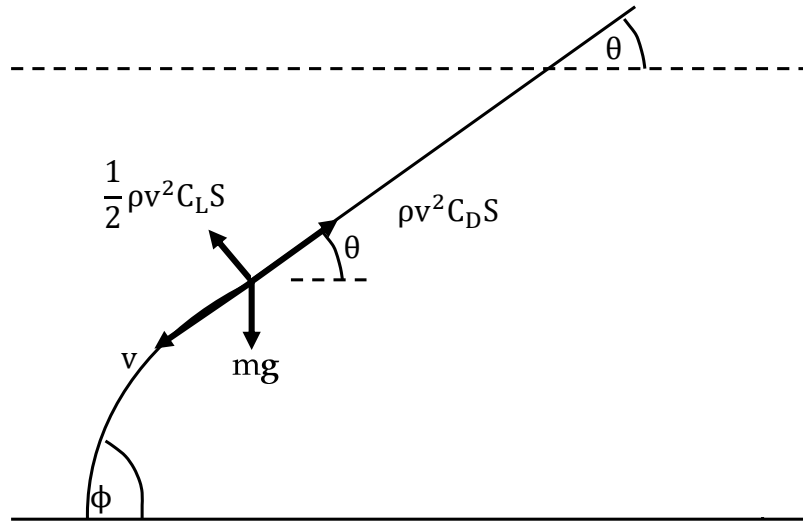


Figura 4.5: Fuerzas que actúan sobre el meteorito en su vuelo a través de la atmósfera.

Sustituyendo lo anterior en las expresiones (4.37) y considerando que la fuerza de elevación es despreciable, las ecuaciones de movimiento en el plano de un círculo máximo son

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho S C_D v^2}{m} - g(r) \sin \gamma$$

$$v \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\rho S C_L v^2 \cos \sigma}{m} \left[g(r) - \frac{v^2}{r} \right] \cos \gamma$$

$$\frac{dr}{dt} = v \sin \gamma$$

donde r es la distancia radial a partir del centro del planeta. En estas circunstancias $\sigma = 0$ y la

densidad atmosférica ρ y la aceleración son funciones únicamente de la distancia r . Introduciendo la ecuación de ablación y cambiando la notación tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{mg(r) \cos \theta - \frac{1}{2}C_L\rho S v^2}{mv} \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{\rho S C_H v^3}{\zeta} \left(\frac{v^2 - v_{CR}^2}{v^2} \right) \\ \frac{dz}{dt} &= -v \sin \theta \\ \frac{dx}{dt} &= v \cos \theta\end{aligned}$$

Corrigiendo las ecuaciones debido a la esfericidad del planeta llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -\frac{\rho S C_D v^2}{2m} + g(r) \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{g(r) \cos \theta}{v} - \frac{v \cos \theta}{R_p + z} \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{\rho S C_H v^3}{\zeta} \left(\frac{v^2 - v_{CR}^2}{v^2} \right) \\ \frac{dz}{dt} &= -v \sin \theta \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{v \cos \theta}{1 + \frac{z}{R_p}}\end{aligned}\tag{4.38}$$

donde m la masa del meteorode, $S = S_F \left(\frac{m}{\rho_m} \right)^{\frac{2}{3}}$ es el factor de forma, C_D es el coeficiente de arrastre, C_H es el coeficiente transferencia de calor y ζ es el calor de ablación del meteorode. θ se mide en grados con respecto a la horizontal local, v es la velocidad del meteorode, V_{CR} es la velocidad crítica (en $\frac{km}{s}$), g es la aceleración gravitacional y R_p el radio del planeta.

4.3. Consideraciones sobre la atmósfera

Falta conocer cómo varía la densidad de la atmósfera terrestre ρ . Para esto hay que suponer que la atmósfera no rota con respecto al planeta y que tiene una simetría esférica. Ésta última tiene una consecuencia inmediata: la presión es función únicamente de la altitud. Con esto, podemos suponer que la presión cumple con la ecuación de equilibrio hidrostático [42]

$$dp = -\rho g dr\tag{4.39}$$

Suponiendo que la atmósfera se comporta como un gas ideal, es decir, que cumple con la ecuación de gases ideales

$$pV = kT \quad (4.40)$$

y recordando que la densidad está dada por $\rho = \frac{m}{V}$ entonces la expresión anterior queda como

$$p = \frac{k}{m} \rho T \quad (4.41)$$

de la expresión (4.41) llegamos a

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (4.42)$$

Si sustituimos las expresiones (4.39) y (4.41) en la ecuación (4.42) obtenemos

$$-\frac{mg}{kT} dr = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (4.43)$$

de la ecuación (4.43) podemos despejar $\frac{d\rho}{\rho}$

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \left[\frac{mg}{kT} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right] dr \quad (4.44)$$

Llamemos β al término entre corchetes, es decir,

$$\beta = \frac{mg}{kT} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \quad (4.45)$$

Con esto la ecuación (4.44) se reduce a

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta dr \quad (4.46)$$

β en este caso puede identificarse como un recíproco de la altura. Haciendo diferentes suposiciones sobre el parámetro β podemos modelar distintos tipos de atmósfera [42]. En este caso supondremos que β es constante a trozos. Ya que β es localmente constante, la solución para (4.44) es

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\beta(r-r_0)} \quad (4.47)$$

donde vemos que la densidad se comporta localmente como una exponencial. Un caso particular sería suponer una atmósfera isotérmica. Como no hay un cambio en la temperatura, el término $\frac{dT}{dr}$ se hace cero. Esto nos lleva a

$$\beta = \frac{mg}{kT} = \text{cte} \quad (4.48)$$

De esta manera, la solución para la ecuación (4.44) estará dada por

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{mg}{kT}r} \quad (4.49)$$

Así, podemos ver que la densidad va variando como función de la altura y está modulada tanto por la densidad ρ_0 como por el factor $-\frac{mg}{kT}$. De esta manera podemos reescribir estos parámetros para describir el decrecimiento que presenta la densidad en función de la altura con la siguiente expresión

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h}{H}} \quad (4.50)$$

donde, para la Tierra, $\rho_0 = 0,001293 \frac{g}{cm^3}$ es la densidad a una altura $h = 0$ km y el factor de escala H es $H \approx 8$ km [43].

Capítulo 5

Reconstrucción de la trayectoria

Como revisamos previamente, el movimiento de un meteoróide que entra en la atmósfera de la Tierra tiene dos fases. La primer fase, previa al contacto con la atmósfera, es su movimiento orbital gobernado principalmente por su interacción gravitacional con el Sol. La segunda fase es el movimiento a través de la atmósfera terrestre. Esta última se puede ver en 4 etapas, el precalentamiento, la ablación, el vuelo oscuro y el impacto.

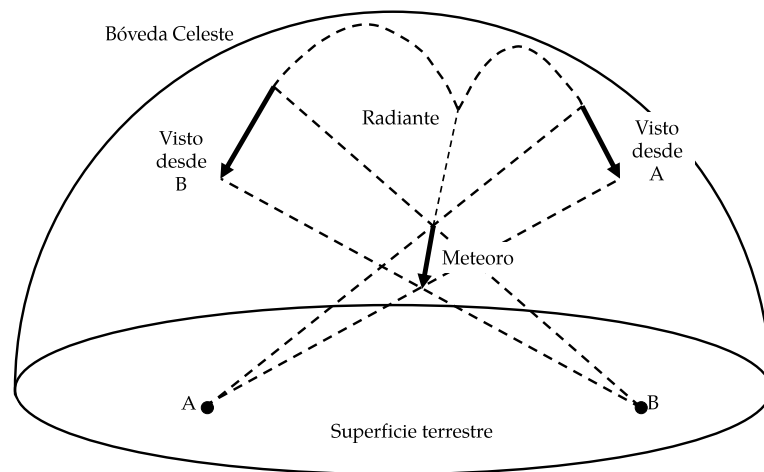


Figura 5.1: La obtención de imágenes de un meteoróide desde al menos dos estaciones de observación permite reconstruir la trayectoria real del meteoróide.

Ya que es de interés recuperar las meteoritas para su estudio y conocer la zona del sistema solar de la cual provienen es importante observar y estudiar a los meteoroides. Un método para hacerlo, propuesto en 1800 por Brandes y Benzerberg, es estudiar la trayectoria que el meteoróide

lleva durante la ablación (ya que esta etapa es visible debido a la formación del meteorito). Si se observa la trayectoria aparente (con respecto a un observador) desde dos puntos distintos sobre la superficie terrestre se puede reconstruir la trayectoria del meteorito (figura 5.1) [44]. Esto se realiza usando el registro del meteorito. Con éste podemos decir, desde cada punto, en qué dirección se observa usando estrellas de referencia. Si conocemos bien las coordenadas ecuatoriales (ascensión recta y declinación) de las estrellas de referencia y sus coordenadas sobre la imagen (que llamaremos coordenadas de imagen) puede determinarse qué ascensión recta y declinación tuvo el objeto empleando distintas transformaciones. De esta forma se puede determinar el plano donde se encuentra la trayectoria del meteorito desde dos lugares distintos. Esto se lleva a cabo usando tres marcos de referencia: el sistema ecuatorial, el sistema estándar y el sistema propio de la imagen como se explicará en los párrafos siguientes.

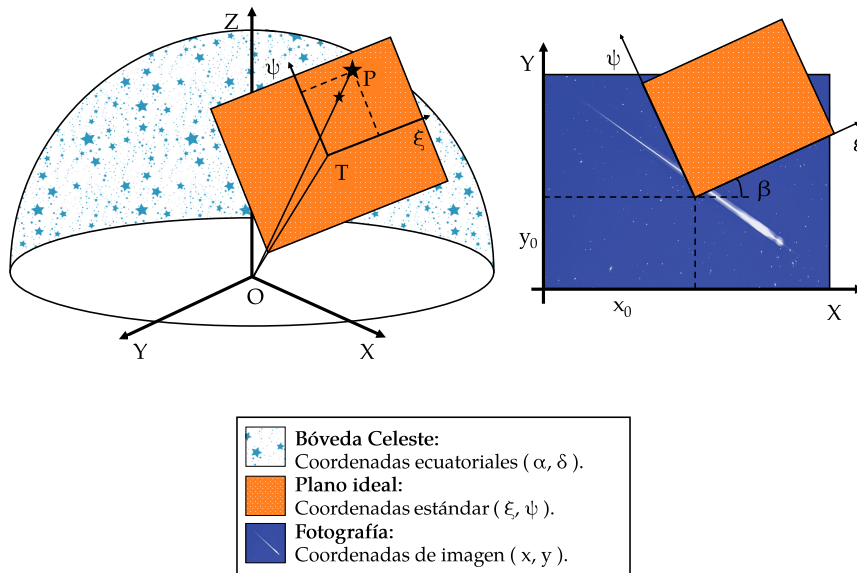


Figura 5.2: Sistemas coordenados empleados para realizar la astrometría. Fuente de la fotografía: [45].

Ya que el meteorito puede proyectarse en una región de la bóveda celeste podemos asociarle coordenadas ecuatoriales (ascensión recta y declinación). Estas coordenadas nos indican los puntos ocupados por el objeto sobre la esfera celeste. Sin embargo, hay que recordar que una imagen de cualquier región de la bóveda celeste es una representación plana de un área curva. Esta clase de representaciones se conoce como *proyección estereográfica* o *gnomónica*. De forma ideal se toma como punto de origen el centro de la esfera y el plano de proyección se toma tangente a ella. Las coordenadas de este plano ideal son llamadas *coordenadas estándar*

y son coordenadas rectangulares definidas por (ξ, ψ) . Su origen es el punto de tangencia T a la esfera definido por su ascensión recta A y su declinación D , el cual coincide con el centro de imagen. De esta manera, a cada punto $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ sobre la esfera (o bóveda celeste) en la dirección (α_i, δ_i) le corresponde uno P'_i en el plano tangente que tendrá coordenadas (ξ_i, ψ_i) . Por la incertidumbre asociada a cualquier medición, sabemos que la imagen que se tenga del meteoro no va a coincidir con la imagen que se tendría sobre el plano ideal (el de coordenadas estándar). Por esto, es necesario encontrar una relación entre las coordenadas medidas sobre la imagen y las coordenadas estándar (figura 5.2).

Lo primero que se hace es conocer las coordenadas ecuatoriales (α, δ) que tengan las estrellas de referencia en el momento en que ocurre el meteoro. Con esto se puede calcular la dirección que tendrá el punto de tangencia T del plano ideal sobre la bóveda celeste. Así, podemos obtener las coordenadas estándar (sobre el plano ideal) que tienen las estrellas de referencia en ese instante. Una vez que se determinan las coordenadas ecuatoriales y sobre la imagen de esas estrellas de referencia, podemos hacer una transformación que nos permitirá saber las coordenadas estándar de cualquier punto sobre la imagen a partir de sus coordenadas sobre ésta.

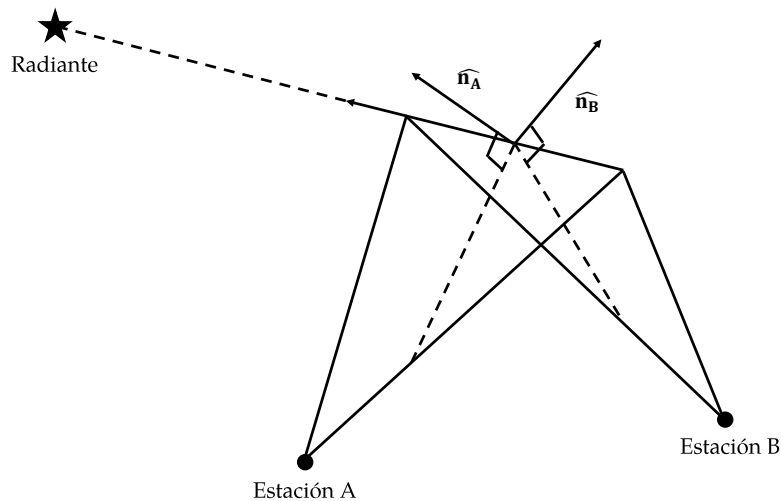


Figura 5.3: Planos que contienen la trayectoria del meteoróide generados desde dos estaciones.

El paso a seguir es determinar las coordenadas de imagen de la traza del meteoro. Con la transformación obtenida en el paso anterior podemos determinar sus coordenadas estándar y después sus coordenadas ecuatoriales. Con esto tendremos las direcciones desde el observador a cada uno de los puntos que delimitan la trayectoria del meteoróide. Conociendo dichas direcciones

se pueden hacer dos cosas: una es construir un plano promedio definido por todas las direcciones determinadas y la otra es construir una serie de planos definidos con cada par de direcciones (figura 5.3).

En cada uno de los planos estará contenida la trayectoria del meteoroides durante la ablación. Al intersectar los planos obtenidos por dos observadores diferentes, se obtiene la trayectoria del meteoroides vista desde el centro de la Tierra. Esto traerá consigo la información sobre la trayectoria del objeto, es decir la posición, velocidad y aceleración que llevaba el meteoroides en esta etapa de su trayectoria. Con esta información seremos capaces de reconstruir la órbita de origen y obtener la elipse de dispersión para poder buscar las meteoritas asociadas al objeto que ingresó a nuestra atmósfera.

Para reconstruir la órbita del objeto, podemos suponer que su movimiento era gobernado únicamente por el campo gravitacional del Sol. Así, la velocidad heliocéntrica con la que haya impactado a la Tierra será la misma que el cuerpo llevaba en ese punto de su órbita. Como se verá posteriormente, para conseguir los parámetros orbitales sólo hará falta hacer unas correcciones debidas a los movimientos de la Tierra.

Para calcular la elipse de dispersión, el área de emplazamiento de las meteoritas, hay que emplear el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un objeto a través de una atmósfera obtenidas en el capítulo anterior. La solución de éstas depende de los parámetros físicos del objeto (posición, velocidad, ángulo de entrada, resistencia, etc.). Ya que la trayectoria que reconstruimos del objeto debe ser solución de este sistema de ecuaciones, los valores de posición, velocidad y aceleración del objeto al término de la ablación se toman como valores iniciales del vuelo oscuro. Haciendo un estimado de la masa del meteoroides se calcula un punto de impacto a partir del cual se pueda construir la elipse de dispersión.

Resumiendo, los pasos a seguir para reconstruir la trayectoria son

1. Obtener los videos donde se muestre la traza del meteoro.
2. Procesar las imágenes para conocer los valores de ascensión recta y declinación del objeto.
3. Sabiendo las coordenadas ecuatoriales del meteoroides, construir los planos que contengan la trayectoria del objeto.
4. Intersectando estos planos, calcular su trayectoria durante la ablación.
5. Calcular el radiante y velocidad promedio del objeto para obtener la órbita de procedencia del objeto.
6. Hacer una estimación de la masa del meteoroides al término de la ablación, calcular la trayectoria en el vuelo oscuro y determinar su elipse de dispersión.

En la figura 5.4 se muestran ilustraciones de este procedimiento.

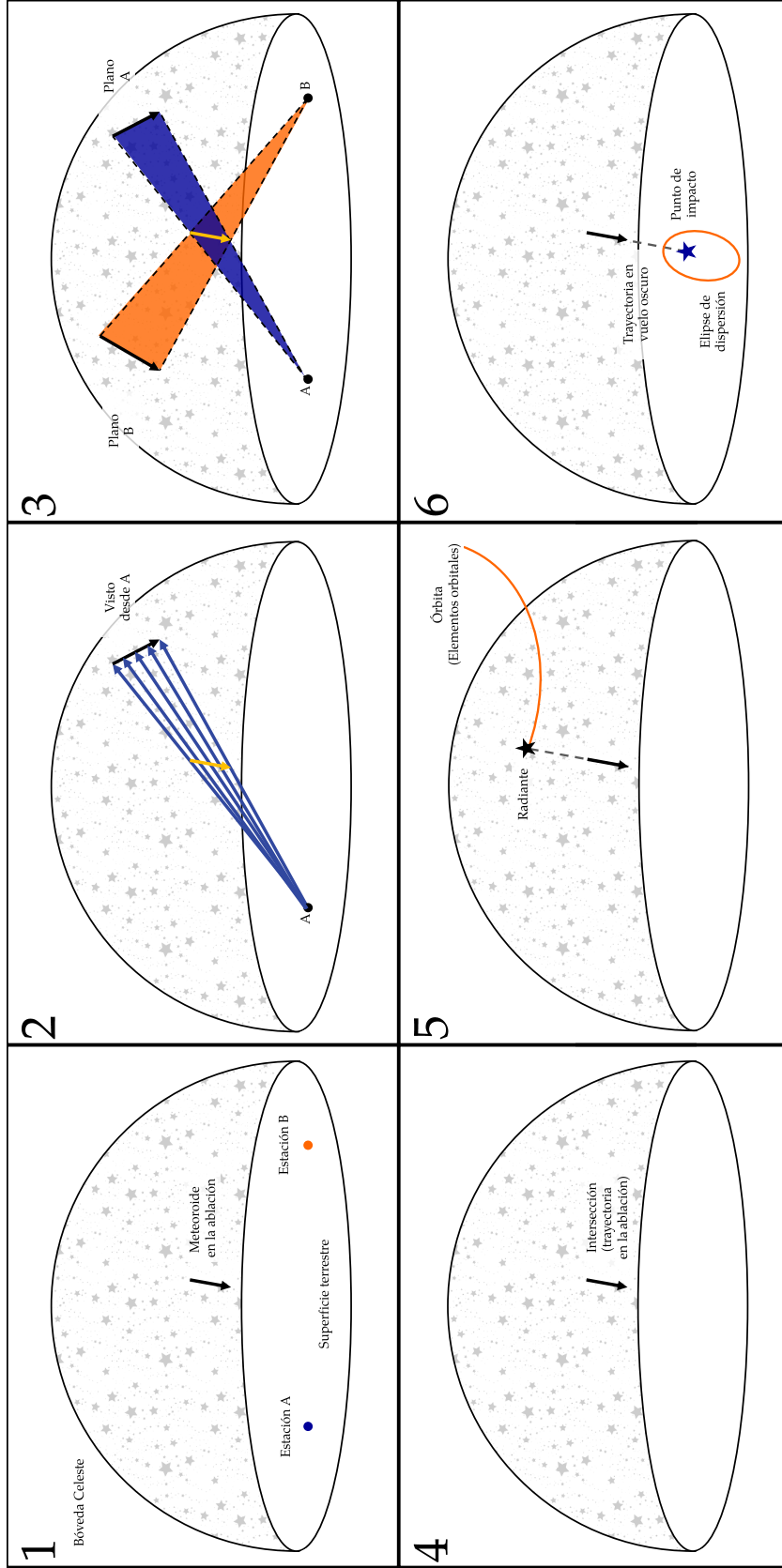


Figura 5.4: Ilustraciones de los pasos a seguir para reconstruir la trayectoria del meteoróide.

5.1. Astrometría de la traza del meteoro

Ya que desde cada sitio la trayectoria aparente es distinta podemos identificar desde cada estación la traza del meteoróide. Como los meteoros son fenómenos que ocurren en la atmósfera podemos asociar a su traza coordenadas ecuatoriales, las cuales determinarán la posición del meteoróide en la bóveda celeste. Además de estas coordenadas, podemos asociarle unas coordenadas de imagen que son las que se miden de forma directa sobre el registro fotográfico obtenido. El uso de catálogos estelares permite determinar los parámetros necesarios para realizar el cambio entre coordenadas ecuatoriales y coordenadas de la imagen. Para realizar todo el proceso anterior, primero, es necesario procesar los videos de los meteoros para poder obtener las coordenadas de imagen del objeto. El objetivo es conocer

- Las coordenadas ecuatoriales (α, δ) y las coordenadas de imagen de cada estrella de referencia.
- La ascensión recta y declinación del centro de la imagen.
- Las coordenadas de imagen de la traza del meteoro en cada cuadro del video.
- Las coordenadas ecuatoriales de la traza del meteoro.

El proceso inicia separando los distintos cuadros del video y sumándolos en una sola imagen. Con la imagen sumada se obtienen las coordenadas de imagen de las estrellas que se emplearán como referencia. Éstas deben estar situadas cerca de la traza del meteoro, la cual se encuentra dentro del área comprendida por un polígono que es construido tomando como vértices las estrellas de referencia. Ya que conocemos las coordenadas de imagen de las estrellas se debe buscar en algún catálogo su ascensión recta y declinación. De este modo para cada estrella de referencia i tendremos las coordenadas de imagen x_i y y_i y las coordenadas ecuatoriales α_i y δ_i .

Una vez hecho esto, se determinan las coordenadas del centro de imagen, el cual se asume coincide con el punto de tangencia T . Para determinar el punto de tangencia T lo supondremos como el centro del área comprendida por las estrellas de referencia haciendo que

$$T = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \right) = (A, D) \quad (5.1)$$

para cada estrella i con ascensión recta α_i y declinación δ_i donde n es el número total de estrellas ¹.

¹Para determinar el punto T estamos usando el método propuesto por [6] por su simplicidad, sin embargo, existen otros procedimientos para calcularlo con mayor precisión. Uno de ellos es el método del simplex propuesto por Steyaert [7] y empleado por [8]. El desarrollo de este método se encuentra en el apéndice A.

Este punto depende de las estrellas de referencia, ya que con éstas se determinan las propiedades geométricas de la proyección de esa sección de la bóveda celeste. Sabiendo las coordenadas ecuatoriales de cada estrella y las del centro de imagen se determinan las coordenadas estándar ξ_i y ψ_i de cada estrella de referencia (para ver con detalle todo el desarrollo de estas transformaciones, consultar el apéndice A). Esto lo haremos con las ecuaciones (A.29):

$$\begin{aligned}\xi_i &= -\frac{\sin(\alpha_i - A) \cos \delta_i}{\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \cos D + \sin \delta_i \sin D} \\ \psi_i &= \frac{-\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \sin D + \sin \delta_i \cos D}{\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \cos D + \sin \delta_i \sin D}\end{aligned}\quad (5.2)$$

Con las coordenadas estándar ξ_i y ψ_i y las coordenadas de imagen x_i y y_i de las n estrellas determinamos los parámetros de imagen con las ecuaciones mostradas en (A.89), los cuales son

$$\begin{aligned}A &= \sum_{i=1}^n x_i \\ B &= \sum_{i=1}^n y_i \\ C &= \sum_{i=1}^n \xi_i \\ D &= \sum_{i=1}^n \psi_i \\ E &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \\ F &= \sum_{i=1}^n \xi_i x_i + \psi_i y_i \\ G &= \sum_{i=1}^n \xi_i y_i - \psi_i x_i\end{aligned}\quad (5.3)$$

Con éstas podemos calcular los valores de los parámetros u , dados por el conjunto de ecuaciones (A.90)

$$\begin{aligned}u_1 &= nF - AC - BD \\ u_2 &= nG - BC + AD \\ u_3 &= -AF - BG + EC \\ u_4 &= -BF + AG + ED \\ u_5 &= \frac{1}{[nE - (A^2 + B^2)]^2}\end{aligned}\quad (5.4)$$

Con estos últimos podemos obtener la relación que nos permite pasar de las coordenadas de imagen a las coordenadas estándar sustituyéndolos en las ecuaciones

$$\begin{aligned}\xi_j &= u_5 (u_1 x_j + u_2 y_j + u_3) \\ \psi_j &= u_5 (-u_2 x_j + u_1 y_j + u_4)\end{aligned}\tag{5.5}$$

Una vez encontradas las coordenadas estándar de las estrellas de referencia y se calculen los parámetros para calibrar la imagen, se determinan las coordenadas de imagen de cada punto de la traza del meteoro. Estos últimos valores se sustituyen en las ecuaciones (5.5) y así se obtienen sus coordenadas estándar (las coordenadas sobre el plano ideal tangente a la esfera celeste). Finalmente, a cada punto (ξ_j, ψ_j) podemos asociar un valor de ascensión recta α_j y declinación δ_j con las expresiones (A.30), es decir,

$$\begin{aligned}\alpha_j &= A + \tan^{-1} \left(\frac{-\xi_j}{\cos D - \psi_j \sin D} \right) \\ \delta_j &= \sin^{-1} \left(\frac{\psi_j \cos D + \sin D}{\sqrt{\psi_j^2 + \xi_j^2 + 1}} \right)\end{aligned}\tag{5.6}$$

con las cuales conoceremos los valores de ascensión recta α_j y declinación δ_j de la traza del meteoro desde cada punto de observación.

5.2. La trayectoria durante la ablación

Con los distintos valores de la ascensión recta y declinación de la traza meteoro y con la información geográfica sobre el sitio donde se obtuvo el registro se determina la ecuación de los planos que contienen a la trayectoria. Después estos planos se intersectan y se obtiene una recta que describe la trayectoria promedio del meteoróide durante la ablación. Con esto se determinan las posiciones y velocidades del meteoróide durante este proceso. Así, tendremos las posiciones, tiempos y velocidades para cada punto de esta parte de la trayectoria.

Ya que conocemos las coordenadas ecuatoriales α_j y δ_j de cada punto de la traza del meteoro, podemos construir m vectores unitarios dirigidos hacia la trayectoria aparente vista desde cada estación (el desarrollo de las siguientes expresiones puede consultarse en el apéndice B). Estos puntos son de la forma $P_j = (\xi_j, \psi_j, \eta_j)$ tales que

$$\begin{aligned}\xi_j &= \cos \delta_j \cos \alpha_j \\ \psi_j &= \cos \delta_j \sin \alpha_j \\ \eta_j &= \sin \delta_j\end{aligned}\tag{5.7}$$

en coordenadas ecuatoriales. De esta forma, visto desde el centro de la Tierra, el plano que contendrá tanto la trayectoria del meteoróide como el sitio donde se tomó la imagen está dado por la expresión (B.25), es decir

$$a_k \xi + b_k \psi + c_k \eta - d_k = 0 \quad (5.8)$$

donde k denota la estación. Si a' , b' y c' son iguales a

$$\begin{aligned} a'_k &= \sum_{j=1}^m \xi_j \psi_j \sum_{j=1}^m \psi_j \eta_j - \sum_{j=1}^m \xi_j \eta_j \sum_{j=1}^m \psi_j^2 \\ b'_k &= \sum_{j=1}^m \xi_j \psi_j \sum_{j=1}^m \xi_j \eta_j - \sum_{j=1}^m \xi_j^2 \sum_{j=1}^m \psi_j \eta_j \\ c'_k &= \sum_{j=1}^m \xi_j^2 \sum_{j=1}^m \psi_j^2 - \left(\sum_{j=1}^m \xi_j \psi_j \right)^2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

entonces, los coeficientes a_k , b_k y c_k se definen como

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{a'_k}{\sqrt{a_k'^2 + b_k'^2 + c_k'^2}} \\ b_k &= \frac{b'_k}{\sqrt{a_k'^2 + b_k'^2 + c_k'^2}} \\ c_k &= \frac{c'_k}{\sqrt{a_k'^2 + b_k'^2 + c_k'^2}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

y la distancia d_k , que es la distancia desde el centro de la Tierra hasta el sitio donde está la estación, puede calcularse con la expresión (B.24), es decir

$$d_k = a_k x_k + b_k y_k + c_k z_k \quad (5.11)$$

donde x_k , y_k y z_k son las coordenadas de la posición geocéntrica del punto donde se tomó la medición. Éstas están dadas por las expresiones (B.19), es decir

$$\begin{aligned} x_k &= (R_k + h_k) \cos \lambda_k \cos \vartheta_k \\ y_k &= (R_k + h_k) \cos \lambda_k \sin \vartheta_k \\ z_k &= (R_k + h_k) \sin \lambda_k \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde h_k es la altura sobre el nivel del mar, ϑ_k es el tiempo sideral local, λ_k es la latitud geocéntrica y R_k es el radio geocéntrico de la estación. Si sabemos la latitud geográfica λ'_k de la estación, podemos determinar la latitud geocéntrica usando la expresión (B.21)

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{1 - e^2}{\tan \lambda'} \right) \quad (5.13)$$

con

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (5.14)$$

donde $a = 6378137$ m y $b = 6356752$ m usando el sistema WGS84. Para determinar R_j usamos la expresión (B.20)

$$R_k = \sqrt{\frac{1}{1 + \left[\frac{1}{(1-f)^2} - 1 \right] \sin^2 \lambda}} \quad (5.15)$$

donde, usando el sistema WGS84, r es el radio ecuatorial ($r = 6378137$ m), f es el achatamiento $f = \frac{1}{298.257223563}$ y λ es la latitud geocéntrica [46].

Ya que, en principio, se tiene el registro de la trayectoria del meteoróide durante su ablación desde al menos 2 estaciones, se pueden generar al menos 2 planos que contienen la trayectoria del mismo. Si sólo se tienen dos registros del meteoró, la intersección de los dos planos nos dará la trayectoria promedio del meteoróide. Si tenemos las imágenes desde la estación 1 y la estación 2, usando las ecuaciones (5.8) y (5.11) tendremos los planos

- desde la estación 1

$$a_1\xi + b_1\psi + c_1\eta - d_1 = 0 \quad (5.16)$$

con

$$d_1 = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 \quad (5.17)$$

- desde la estación 2

$$a_2\xi + b_2\psi + c_2\eta - d_2 = 0 \quad (5.18)$$

con

$$d_2 = a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 \quad (5.19)$$

Con esto, la recta que resulta de la intersección de los dos planos tendrá la forma

$$\mathbf{L} = \mathbf{s} + t\hat{\mathbf{v}} \quad (5.20)$$

donde \mathbf{s} es un punto sobre la recta y $\hat{\mathbf{v}}$ es el vector unitario del producto cruz de $\hat{\mathbf{n}}_1$ y $\hat{\mathbf{n}}_2$. Así,

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_2}{|\hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_2|} \quad (5.21)$$

Entonces

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_2 = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1) \quad (5.22)$$

y

$$|\hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_2| = \sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_2c_1 - a_1c_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2} \quad (5.23)$$

Finalmente, $\mathbf{s} = (\xi^*, \psi^*, 0)$ lo podemos obtener como la solución al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1\xi^* + b_1\psi^* &= d_1 \\ a_2\xi^* + b_2\psi^* &= d_2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

usando el método de Cramer. Conociendo estos dos vectores podemos determinar la recta $\mathbf{L} = \mathbf{s} + t\hat{\mathbf{v}}$ que resulta ser la trayectoria promedio del meteoróide durante la ablación. Para determinar el peso estadístico de la intersección se obtiene el valor del ángulo θ entre los dos planos, el cual está dado por

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right) \\ &= \cos^{-1} |a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2| \end{aligned} \quad (5.25)$$

si θ fuera muy pequeño la intersección entre los planos pierde peso estadístico. En este caso, el peso estadístico puede definirse como proporcional al $\sin^2 \theta$. En cualquier caso, el valor de θ nos permite obtener una estimación de qué tan confiable es la trayectoria obtenida.

Para conocer la latitud geocéntrica λ y la altura sobre el nivel del mar h de cada punto de la trayectoria del meteoróide se utilizan las ecuaciones (5.12)

$$\begin{aligned} x_j &= (R_j + h_j) \cos \lambda_j \cos \vartheta_j \\ y_j &= (R_j + h_j) \cos \lambda_j \sin \vartheta_j \\ z_j &= (R_j + h_j) \sin \lambda_j \end{aligned} \quad (5.26)$$

Al resolverlas podemos convertir la latitud geocéntrica λ en la latitud geográfica λ' y la longitud estará dada por ϑ_j que es el tiempo sideral local. Con esto podemos calcular distancias a lo largo de la trayectoria del meteoróide,

$$l_n = \sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2 + (z_n - z_1)^2} \quad (5.27)$$

Ahora, debemos ver cómo interpretar los intervalos temporales. Estos dependen tanto del movimiento del meteoroide como de la cámara que registre el video. Si definimos el tiempo relativo como cero para el primer punto (es decir, $t = 0$ cuando $l = l_1$) entonces t_m , el tiempo en el que se tomó el emésimo cuadro es $m \frac{1}{N}$ donde N es el número de cuadros por segundo que es capaz de tomar la cámara.

Con este procedimiento ya tenemos la información dinámica del meteoroide durante su ablación y podemos determinar su elipse de dispersión (determinando la trayectoria del objeto en el vuelo oscuro) y su órbita de procedencia.

Teniendo las distancias recorridas por el meteoroide entre cada par de cuadros l_n para cada tiempo t_n podemos obtener la velocidad media del meteoroide en cada tramo, la cual estará dada por

$$v_i = \frac{l_i}{t_i} \quad (5.28)$$

5.3. La órbita del meteoroide

Para definir los elementos orbitales del objeto emplearemos los datos observacionales que se acaban de determinar. Lo primero que calcularemos es el radiante, que es la zona del cielo por donde parece que el objeto ingresó en la atmósfera. Para hacerlo, se obtiene el promedio de las coordenadas de la trayectoria, es decir, se promedian las componentes x , y y z de cada punto de la trayectoria determinada durante la ablación. Despejando α y δ de las ecuaciones en (5.7), el radiante estará dado por

$$\begin{aligned} \alpha_R &= \tan^{-1} \left[\frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right] \\ \delta_R &= \sin^{-1} [\bar{z}] \end{aligned} \quad (5.29)$$

Ahora se requiere determinar la velocidad preatmosférica \mathbf{v}_∞ del meteoroide. Primero determinaremos la velocidad promedio \bar{v} , que llamaremos velocidad observada, empleando la dirección definida por el radiante. Así, las componentes de \bar{v} están dadas por

$$\begin{aligned} v_x &= |v| \cos \delta_R \cos \alpha_R \\ v_y &= |v| \cos \delta_R \sin \alpha_R \\ v_z &= |v| \sin \delta_R \end{aligned} \quad (5.30)$$

donde $|v|$ es la velocidad promedio durante la ablación. Lo que sigue es obtener la velocidad preatmosférica del objeto. Para ello, se corrige la velocidad observada debido a los efectos que la rotación terrestre y el campo gravitacional de la Tierra inducen sobre la velocidad \mathbf{v}_∞ al interactuar con ella. Para determinar el efecto de la rotación de la Tierra v_R emplearemos la expresión

$$v_R = \frac{2\pi (R + h) \cos \lambda}{T} \quad (5.31)$$

donde $R + h$ corresponde a la magnitud del radio vector que apunta al punto medio de la trayectoria calculada, λ es la latitud geocéntrica de este punto y T es el periodo de rotación de la Tierra (si $T = 23 \text{ h } 56' 4''$ entonces $T \sim 86164 \text{ s}$). El factor v_R sólo modifica la velocidad observada en la dirección de la ascensión recta, de tal forma que el vector velocidad corregida \mathbf{v}_c tiene componentes dadas por

$$\begin{aligned} v_{xc} &= v_x - v_R \cos \alpha_R \\ v_{yc} &= v_y - v_R \sin \alpha_R \\ v_{zc} &= v_z \end{aligned} \quad (5.32)$$

El paso que sigue es determinar la corrección por la atracción gravitacional terrestre. Esta corrección está dada por

$$v_G^2 = \frac{2\mu_{Tierra}}{R + h} \quad (5.33)$$

donde μ_{Tierra} es el parámetro gravitacional estándar de la Tierra. Ya que la velocidad corregida es proporcional a la velocidad preatmosférica y al efecto que tiene el campo gravitacional terrestre en ella ($v_c^2 = v_\infty^2 + v_G^2$) la magnitud de la velocidad preatmosférica está dada por

$$v_\infty = [v_c^2 - v_G^2]^{\frac{1}{2}} \quad (5.34)$$

Esta magnitud de la velocidad es la que se observa desde un sistema geocéntrico. A partir de este se determina tanto la posición \mathbf{r}_H como la velocidad heliocéntrica \mathbf{v}_H del meteoróide en ese punto de su órbita. Primero calcularemos la longitud L y la latitud B eclípticas con las expresiones obtenidas en el apéndice A

$$\begin{aligned} B &= \sin^{-1} [\cos \epsilon \sin \delta_c - \sin \epsilon \cos \delta_c \sin \alpha_c] \\ L &= \tan^{-1} \left[\frac{\sin \epsilon \sin \delta_c + \cos \epsilon \cos \delta_c \sin \alpha_c}{\cos \delta_c \cos \alpha_c} \right] \end{aligned} \quad (5.35)$$

donde ϵ es la inclinación de la eclíptica en el ecuador $\sim 23^\circ 26' 21,4091''$. En este sistema eclíptico, las componentes de \mathbf{r}_H se escriben como

$$\begin{aligned}x &= r \cos L \cos B \\y &= r \sin L \cos B \\z &= r \sin B\end{aligned}\tag{5.36}$$

donde r es la distancia desde el Sol. El vector velocidad de la Tierra en órbita puede calcularse a partir del cambio de la longitud solar L_{Sol} y del cambio en el radio vector \vec{r} . Denotando esta velocidad como v_{AP} en $\frac{km}{s}$ podemos escribir

$$v_{AP} = \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{dL_{Sol}}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}\tag{5.37}$$

La dirección de v_{AP} viene dada por la longitud eclíptica del ápex terrestre (L_{AP}) con lo que podemos escribir

$$L_{AP} = L_{Sol} - \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{dr}{dt}}{r \frac{dL_{Sol}}{dt}}\tag{5.38}$$

Por otra parte, las coordenadas rectangulares de la velocidad heliocéntrica \mathbf{v}_H del meteoróide se calculan a partir de la velocidad obtenida en (5.34),

$$\begin{aligned}v_{Hx} &= -v_\infty \cos L \cos B + v_{AP} \cos L_{AP} \\v_{Hy} &= -v_\infty \sin L \cos B + v_{AP} \sin L_{AP} \\v_{Hz} &= -v_\infty \sin B\end{aligned}\tag{5.39}$$

Con la posición \mathbf{r}_H y la velocidad heliocéntrica \mathbf{v}_H se determina el vector momento angular por unidad de masa con la expresión

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}_H \times \mathbf{v}_H\tag{5.40}$$

Con las componentes de este vector se determinan la inclinación i y la longitud del nodo ascendente Ω de la órbita usando la función atan2 (definida en el apéndice C). La inclinación se obtiene con la expresión

$$i = \text{atan2} \left[(h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}, h_z \right]\tag{5.41}$$

mientras que la longitud del nodo ascendente con la ecuación

$$\Omega = \text{atan2}[h_x, -h_y] \quad (5.42)$$

Para determinar la excentricidad, el semieje mayor y el argumento del perihelio se calcula el parámetro ε con la siguiente expresión

$$\varepsilon = |\mathbf{v}_H|^2 - \frac{\mu_{Sol}}{|\mathbf{r}_H|} \quad (5.43)$$

De aquí, la excentricidad estará dada por la magnitud del siguiente vector

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\mu_{Sol}} [\varepsilon \mathbf{r}_H - (\mathbf{r}_H \cdot \mathbf{v}_H) \mathbf{v}_H] \quad (5.44)$$

que es el vector de excentricidad. Para obtener el inverso del semieje mayor, usamos la ecuación (3.53)

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{\mathbf{r}_H} - \frac{|\mathbf{v}_H|^2}{\mu_{Sol}} \quad (5.45)$$

de la cual, tenemos que el semieje a estará dado por

$$a = \frac{\mu_{Sol} |\mathbf{r}_H|}{2\mu - |\mathbf{r}_H| |\mathbf{v}_H|^2} \quad (5.46)$$

Con las expresiones (3.35) se calcula la distancia al afelio y al perihelio

$$\begin{aligned} Q &= a(1 + e) \\ q &= a(1 - e) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Definiendo el vector de momento angular relativo como $\mathbf{n} \equiv (-h_y, h_x, 0)$ el argumento del perihelio es

$$\omega = \cos^{-1} \left[\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{e}|} \right] \quad (5.48)$$

Por último, para determinar la anomalía verdadera se usa la expresión (3.36), es decir,

$$r_H = \frac{a(1 + e)}{1 + e \cos \nu} \quad (5.49)$$

de donde

$$\nu = \cos^{-1} \left[\frac{r_h - a(1 + e)}{er_H} \right] \quad (5.50)$$

Con lo anterior, los elementos orbitales del meteoróide quedan determinados.

5.4. La trayectoria en el vuelo oscuro

Las ecuaciones (4.38) son las que describen el movimiento de un meteoroide durante su trayectoria en la atmósfera terrestre. Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -\frac{\rho S C_D v^2}{2m} + g \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{g(r) \cos \theta}{v} - \frac{v \cos \theta}{R_p + z} \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{1}{2} \rho \sigma v^3 \left(\frac{v^2 - v_{CR}^2}{v^2} \right) \\ \frac{dz}{dt} &= -v \sin \theta \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{v \cos \theta}{1 + \frac{z}{R_p}}\end{aligned}$$

La ablación concluye cuando la velocidad del meteoroide se iguala con la velocidad crítica. Esto quiere decir que la ecuación para el cambio de masa se hace cero. De esta manera, durante el vuelo oscuro las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -\frac{\rho S C_D v^2}{2m} + g \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{g(r) \cos \theta}{v} - \frac{v \cos \theta}{R_p + z} \\ \frac{dz}{dt} &= -v \sin \theta \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{v \cos \theta}{1 + \frac{z}{R_p}}\end{aligned}\tag{5.51}$$

donde las variables que se pueden obtener a partir de nuestros datos son θ (que se mide en grados con respecto a la horizontal local), v es la velocidad del meteoroide, g es la aceleración gravitacional y R_p el radio del planeta. Los parámetros relacionados con la forma y composición del meteoroide son S el factor de forma ($S = S_F \left(\frac{m}{\rho_m} \right)^{\frac{2}{3}}$), m la masa del meteoroide y C_D el coeficiente de arrastre.

Para poder estimar la zona de impacto del material del meteoroide que sobrevivió a la ablación se resuelven numéricamente las ecuaciones mostradas en (5.51). Las condiciones iniciales de esta simulación coincidirán, en primera aproximación, con los últimos valores reconstruidos de la ablación. Los valores que podemos conocer a partir de la reconstrucción de la trayectoria son la posición, la velocidad, la aceleración y el ángulo con respecto a la horizontal local. Nos falta conocer el valor del coeficiente de arrastre C_D y el factor de forma S del meteoroide, la densidad atmosférica, la masa aproximada del objeto y su densidad al término de la ablación. Los valores

C_D y S están ligados a la forma del meteoroido. Si suponemos que el objeto es esférico, $C_D = 0,5$ y la constante S_F dentro de la expresión para el factor de forma será $S_F = 1,21$. Para determinar cómo va cambiando la densidad atmosférica en función de la altura emplearemos la expresión (4.50) dada por

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h}{H}} \quad (5.52)$$

con $\rho_0 = 0,001293 \frac{g}{cm^3}$ es la densidad a una altura $h = 0$ km y el factor de escala H es $H \approx 8$ km.

Para hacer una aproximación de la masa del meteoroido se determina su masa al término de la ablación. Para hacerlo emplearemos la primer ecuación del conjunto de expresiones en (4.38), es decir

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho S C_D v^2}{2m} + g \sin \theta \quad (5.53)$$

Recordando que el factor de forma se expresa como $S = S_F \left(\frac{m}{\rho_m}\right)^{\frac{2}{3}}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{\rho C_D S_F v^2}{2m} \left(\frac{m}{\rho_m}\right)^{\frac{2}{3}} + g \sin \theta \\ &= -\frac{\rho C_D S_F v^2}{2\rho_m^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{m^{\frac{1}{3}}} + g \sin \theta \end{aligned} \quad (5.54)$$

de donde

$$\Rightarrow \frac{\rho C_D v^2 S_F}{2\rho_m^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{m^{\frac{1}{3}}} = g \sin \theta - \frac{dv}{dt} \quad (5.55)$$

despejando la masa m tendremos

$$m = \left[\frac{\rho C_D S_F v^2}{2\rho_m^{\frac{2}{3}} \left(g \sin \theta - \frac{dv}{dt}\right)} \right]^3 \quad (5.56)$$

Ahora sólo falta conocer la densidad del objeto. Como sabemos, la densidad es función de la masa y del volumen de un cuerpo por lo cual estará en función del material del que esté formado el meteoroido. Los valores de la densidad que típicamente se usan son $1000 \frac{kg}{m^3}$ para meteoroides que tienen origen cometario, $3300 \frac{kg}{m^3}$ para los meteoroides con origen asteroidal formados principalmente por silicatos y $7800 \frac{kg}{m^3}$ para los que tienen también origen asteroidal pero que son formados mayoritariamente por materiales metálicos [47]. Se pretende incluir con las cámaras una rejilla de difracción que permita obtener el espectro de emisión del objeto. A

partir del espectro se puede elegir la densidad asociada al objeto, sin embargo, la sección de espectroscopía de meteoros no es objeto de estudio en esta tesis. En caso de no tener un espectro y por ende, no saber de qué material está formado cada meteoróide, pueden hacerse simulaciones distintas para observar el movimiento en cada caso.

Con todo lo anterior ya sabemos las condiciones iniciales para la solución numérica de las ecuaciones mostradas en (5.51) y (5.54). El resultado nos mostrará el punto de impacto ya sea de los residuos del objeto original o bien el punto de contacto del centro de masa de los restos con la superficie en el caso de que el meteoróide se haya fragmentado en la atmósfera. En este último caso se trazaría la elipse de dispersión alrededor de este punto de tal manera que el semieje quede en la dirección de entrada del meteoróide.

5.5. Software

Para reconstruir la trayectoria durante la ablación fueron elaboradas unas hojas de cálculo que permiten al usuario introducir los valores de las coordenadas de imagen de la traza del meteoro y de las estrellas de referencia. Además, se permite introducir las coordenadas ecuatoriales de las estrellas, las cuales deben buscarse manualmente con la ayuda de algún programa como Stellarium o una base de datos como Simbad. A partir de estos datos el programa calcula las coordenadas ecuatoriales de la traza del meteoro. Una vez hecho esto, introduciendo los datos geográficos de las estaciones en cuestión, se determinan los planos que contienen la trayectoria y su intersección. La salida de la hoja de cálculo incluye los datos sobre posición, velocidad, aceleración y la estimación de la masa del objeto al término de la ablación. Para obtener los datos orbitales se elaboró otra hoja de cálculo en la cual se introducen los datos de salida previamente obtenidos. La salida de esta hoja contiene los elementos orbitales del objeto y una gráfica en la que se observa su órbita.

Por último, para resolver las ecuaciones durante el vuelo oscuro, se empleó el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Este algoritmo fue implementado en un programa en C con el propósito de conocer el punto de impacto (cuando $z = 0$). A partir de esta información puede obtenerse la latitud y longitud geográfica del punto donde el centro de masa del meteoróide impactaría y a partir de él puede determinarse la elipse de dispersión (en el caso de que se considere que el objeto se haya fragmentado).

Todas estas herramientas pueden ser consultadas solicitándolas a la autora por correo electrónico.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

La Red Mexicana de Meteoros “Citlalin Tlamina” actualmente está trabajando en proporcionar la infraestructura necesaria para poder estudiar a los meteoroides. Su meta a mediano y largo plazo es poder cubrir todo el territorio nacional con estaciones que permitan registrar su entrada en la atmósfera terrestre. Algunos de sus objetivos son estudiar en detalle la interacción meteoroides-atmósfera, determinar propiedades físicas de los impactores y recuperar y estudiar meteoritas. El primer paso para realizar esto es conocer la trayectoria que el meteoroides siguió a través de la atmósfera analizando los registros fotográficos obtenidos. En este contexto nació la necesidad de crear un método que permitiera reconstruir la trayectoria del meteoroides. Así, a partir de videos registrados desde distintos puntos sobre la superficie terrestre donde se vea la traza de su meteoroides, se buscó crear programas que arrojaran la órbita de procedencia y la elipse de dispersión del objeto lo cual fue el objetivo de este trabajo. Si bien varios autores han trabajado en la determinación de trayectorias y órbitas, era vital entender todos los procesos involucrados para ser capaces no sólo de entender a fondo la dinámica involucrada sino poder modificar y mejorar los trabajos previos (incluso se hicieron algunas correcciones a las ecuaciones que los autores planteaban). Por ejemplo, un punto importante de este trabajo fue el cálculo del punto de impacto del meteoroides, o bien, del centro de masa de sus fragmentos a partir de combinar las ecuaciones (5.51) con las observaciones. Esto permitirá obtener la elipse de dispersión asociada a cada objeto. De esta manera, el trabajo que se presenta en esta tesis constituye la primer parte del tratamiento de la información que se obtendrá con la Red. Sin embargo, existen varios aspectos en los que este trabajo puede ser complementado o mejorado, por ejemplo:

- Crear mallas que asocien a cada punto sobre la imagen coordenadas ecuatoriales. Esto permitirá analizar objetos cuando no existan estrellas de referencia y ahorrar tiempo de análisis.
- Estudiar la interacción meteoroides-atmósfera. Tomando parejas de puntos consecutivos se puede construir un conjunto de planos para describir la trayectoria durante la ablación con

mayor precisión.

Estas propuestas se explicarán en las siguientes secciones con mayor detalle.

6.1. Aspecto computacional

Calibración y creación de mallas

Una ventaja que el sistema ecuatorial ofrece es que las coordenadas α y δ no varían debido a la rotación diurna de la esfera celeste, ya que se miden desde puntos del ecuador celeste que participan de la rotación. Este hecho puede aprovecharse para crear un programa que permita saber qué ascensión recta y declinación le corresponde a cada pixel mostrado por las cámaras. Esto da dos ventajas importantes

- Permitirá poder hacer el análisis de imágenes de trazas de meteoros ocurridos durante el día.
- Se podrá evitar realizar el ajuste cada que ingrese un objeto ahorrando tiempo de análisis.

Para realizar esto, el programa puede partir de una imagen en la que se observen la mayor cantidad posible de estrellas que se utilizarán como referencia. Buscando de nuevo manualmente las coordenadas ecuatoriales de las estrellas se determinan las coordenadas del centro de imagen T ya sea obteniendo un promedio

$$T = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \right) = (A, D) \quad (6.1)$$

o usando el método del simplex. A partir de esto, el programa calcula las coordenadas estándar ξ_i y ψ_i de cada estrella de referencia con las ecuaciones (A.29)

$$\begin{aligned} \xi_i &= -\frac{\sin(\alpha_i - A) \cos \delta_i}{\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \cos D + \sin \delta_i \sin D} \\ \psi_i &= \frac{-\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \sin D + \sin \delta_i \cos D}{\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \cos D + \sin \delta_i \sin D} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Con las coordenadas estándar ξ_i y ψ_i y las coordenadas de imagen x_i y y_i de las n estrellas determinamos los parámetros de calibración de la imagen

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^n x_i \\
B &= \sum_{i=1}^n y_i \\
C &= \sum_{i=1}^n \xi_i \\
D &= \sum_{i=1}^n \psi_i \\
E &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \\
F &= \sum_{i=1}^n \xi_i x_i + \psi_i y_i \\
G &= \sum_{i=1}^n \xi_i y_i - \psi_i x_i
\end{aligned} \tag{6.3}$$

y calcular los parámetros u

$$\begin{aligned}
u_1 &= nF - AC - BD \\
u_2 &= nG - BC + AD \\
u_3 &= -AF - BG + EC \\
u_4 &= -BF + AG + ED \\
u_5 &= \frac{1}{[nE - (A^2 + B^2)]^2}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

para finalmente obtener la relación entre coordenadas estándar y puntos-pixel sobre la imagen

$$\begin{aligned}
\xi_j &= u_5 (u_1 x_j + u_2 y_j + u_3) \\
\psi_j &= u_5 (-u_2 x_j + u_1 y_j + u_4)
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Para finalmente asociar a cada punto (ξ_j, ψ_j) un valor de ascensión recta α_j y declinación δ_j con las expresiones (A.30), es decir,

$$\begin{aligned}
\alpha_j &= A + \tan^{-1} \left(\frac{-\xi_j}{\cos D - \psi_j \sin D} \right) \\
\delta_j &= \sin^{-1} \left(\frac{\psi_j \cos D + \sin D}{\sqrt{\psi_j^2 + \xi_j^2 + 1}} \right)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Los parámetros de calibración de cada cámara y su ubicación geográfica pueden guardarse en un archivo en alguna computadora central que permita tener listas las transformaciones para trabajar en caso de ser necesario

Automatización de los procesos

Ya que las cámaras son capaces de detectar movimiento, sería útil hacer un programa que distinga meteoros de otros objetos en movimiento para optimizar/clasificar los registros y que envíe el video de la traza del meteoro a la computadora central empleada el paso anterior. Obtener la posición del objeto durante la ablación será un proceso sencillo de realizar que también, junto con la determinación de la órbita y la elipse de dispersión, puede automatizarse.

Comunicación del fenómeno

Sería ideal que toda esta información podría ser reportada lo más pronto posible en la página de la Red Mexicana de Meteoros para que la población esté informada sobre éstos fenómenos así como una comunicación directa con Protección Civil. Esto ayudaría a mantener a la gente informada y evitar el pánico. La población incluso pudiera ayudar a recuperar las meteoritas asociadas ya que en caso de que algún ciudadano se encontrara cerca de la elipse de dispersión y encontrara alguna meteorita podría entregarla posteriormente a la Red.

6.2. Posibles líneas de investigación a partir de este trabajo

Estudio de la interacción meteoroides-atmósfera

En la reconstrucción de la trayectoria durante la ablación se pueden obtener dos grupos de datos

- Datos promedio

A partir de la ascensión recta y declinación de la traza del objeto se puede obtener un plano que contenga la trayectoria promedio vista desde cada estación. Esta aproximación sirve para nuestros fines ya que las correcciones que se hacen para obtener la velocidad y posición de entrada a la Tierra y la trayectoria durante el vuelo oscuro utiliza los datos promedio de la posición y la velocidad promedio.

- Datos punto a punto

De una manera similar, puede construirse un conjunto de planos para describir la trayectoria durante la ablación con mayor precisión. Tomando parejas de puntos consecutivos pueden construirse planos que contengan la trayectoria en ese pequeño intervalo de tiempo durante la ablación para conocer con mayor precisión la posición del objeto y la velocidad del mismo

entre estos puntos. La trayectoria quedaría como un conjunto de rectas. Entre más corto sea el intervalo temporal entre cada cuadro del video más preciso será este cálculo.

Los datos punto a punto son de suma importancia para aprovechar el hecho de que la trayectoria reconstruida durante la ablación es solución del sistema de ecuaciones mostrado en (4.38), es decir,

$$\begin{aligned}
 \frac{dv}{dt} &= -\frac{\rho S C_D v^2}{2m} + g(r) \sin \theta \\
 \frac{d\theta}{dt} &= \frac{g(r) \cos \theta}{v} - \frac{v \cos \theta}{R_p + z} \\
 \frac{dm}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{\rho S C_H v^3}{\zeta} \left(\frac{v^2 - v_{CR}^2}{v^2} \right) \\
 \frac{dz}{dt} &= -v \sin \theta \\
 \frac{dx}{dt} &= \frac{v \cos \theta}{1 + \frac{z}{R_p}}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

donde m es la masa del objeto, C_D es el coeficiente de arrastre del objeto, C_H es el coeficiente de transferencia de calor y ζ el calor de ablación. Estos valores dependen de la forma del meteoride y del material del cual está formado. Con la información que tenemos, podría hacerse una estimación de los valores de estos parámetros. La determinación de estos parámetros también permitirá conocer mejor la naturaleza de los cuerpos que ingresan en la atmósfera.

Descubrimiento de nuevas lluvias de estrellas o grupos de NEOs

Ya que muchos enjambres meteóricos asociados a cometas y asteroides tienen órbitas todavía desconocidas determinar la información orbital extraída del análisis de los meteoroides y la frecuencia de entrada de estos objetos es útil. Ésta puede emplearse para analizar la evolución temporal en el sistema solar del objeto que originó el meteoro y, en algunos casos, establecer el cuerpo progenitor del que se desprendió. Esto se hace comparando el radiante y la órbita de los distintos objetos con el objeto que se piense es el cuerpo progenitor.

Trabajo de campo y en laboratorio

Ya que con el método propuesto puede estimarse el área en que las meteoritas asociadas cayeron puede realizarse trabajo de campo que permita encontrarlas. Al realizar un análisis petrológico de las meteoritas se puede saber la composición química de cada meteoride. Como además se conoce la órbita de procedencia del mismo se puede caracterizar la composición química de los objetos de cada región del sistema solar. Estudiando la evolución orbital de estos objetos podemos obtener información sobre el origen y la formación de nuestro sistema planetario.

Apéndice A

Astrometría

La astrometría es una rama de la astronomía que se encarga, entre otras cosas, de medir y estudiar las posiciones de los cuerpos celestes. Ésta es esencial en campos como la mecánica celeste ya que, además de dar un marco de referencia para realizar las observaciones, permite calcular las órbitas y hacer un seguimiento de diversos objetos. Durante el siglo XX, el posicionamiento preciso de estrellas fijas en la bóveda celeste y su posterior registro en un catálogo, así como la amplia difusión de esta información, favoreció el trabajo astronómico. Por otro lado, los astrónomos idearon toda una serie de desarrollos matemáticos para calcular posiciones de diversos objetos, a partir de las posiciones de varias estrellas utilizadas como referencia. En este apéndice estudiamos las transformaciones entre los distintos sistemas coordenados que se emplean para reconstruir la trayectoria del meteoróide.

A.1. Método del simplex

Este punto depende de las estrellas de referencia, ya que con éstas se determinan las propiedades geométricas de la proyección de esa sección de la bóveda celeste. Un método para determinar la ascensión recta A y declinación D de T es el método del simplex. El método consiste en asignar previamente un valor aproximado del centro con coordenadas (A_0, D_0) con el que obtenemos una medida inicial del error cuadrático J . A partir de ese punto, se construye un simplex (un polígono que tiene un vértice más que la dimensión del espacio donde está definido) con los vértices del triángulo $P = (A_0, D_0)$, $M = (A_0 + \epsilon, D_0)$ y $N = (A_0, D_0 + \epsilon)$ donde ϵ es un aumento angular pequeño. Para cada uno de estos vértices se debe calcular el error cuadrático. Este método se adapta del trabajo de [7] y [8]. Una vez determinado este error se revisa qué vértice proporcionó el error más alto y es sustituido por otro usando el siguiente procedimiento:

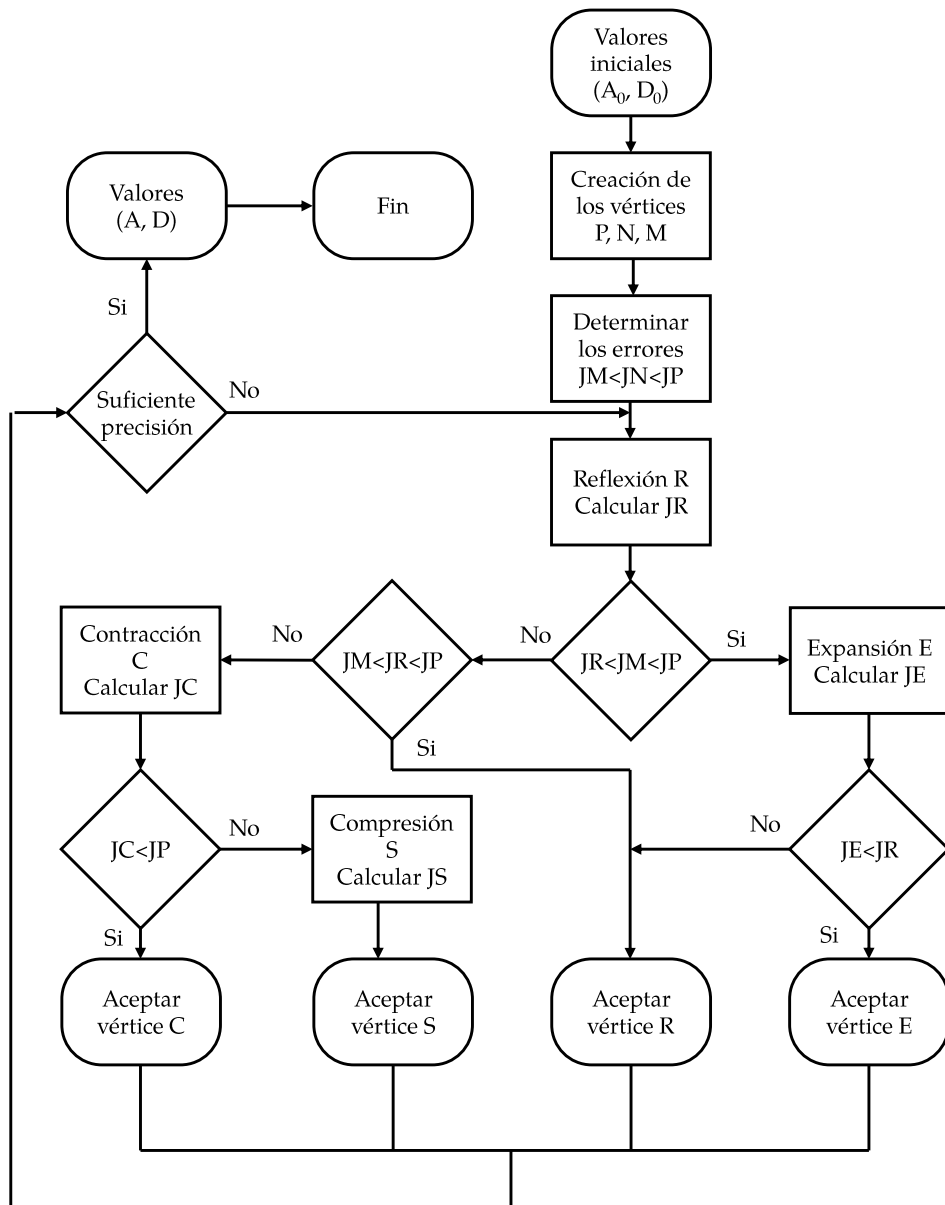


Figura A.1: Organigrama del método del simplex. Adaptado de [7].

- Reflexión

Si P fuera el peor vértice, se calcula un nuevo vértice R por la reflexión de P , siendo $RO = OP$ con O el punto medio de MN . Si el vértice R es mejor que el de P y peor que M entonces se sustituye P por R .

- Expansión

Si R es mejor que P y mejor que M entonces se calcula un vértice E por expansión de P : $EO = 2OP$. Si

- E es mejor que R entonces se toma E
- E es peor que R entonces se acepta R

- Contracción

Si el vértice R fuera peor que P se calcula un vértice C tal que $CO = \frac{OP}{2}$. Si C es mejor que P entonces se acepta C .

- Compresión

Si el vértice C resultara peor que P se hace una compresión para crear S moviéndose hacia M con $PS = \frac{PM}{2}$ y $OM = \frac{NM}{2}$. A partir de este punto se repite el algoritmo.

Este algoritmo recursivo deberá aplicarse conforme vayamos minimizando el error cuadrático J para obtener el centro de imagen con ascensión recta A y declinación D . En la figura A.1 se muestra de forma esquemática este proceso.

A.2. Sistema ecuatorial y estándar

Para poder pasar de las coordenadas ecuatoriales a las estándar se realiza lo siguiente. Definimos un sistema de coordenadas rectangulares con origen O en el centro de la esfera $OXYZ$ (ver figura A.2).

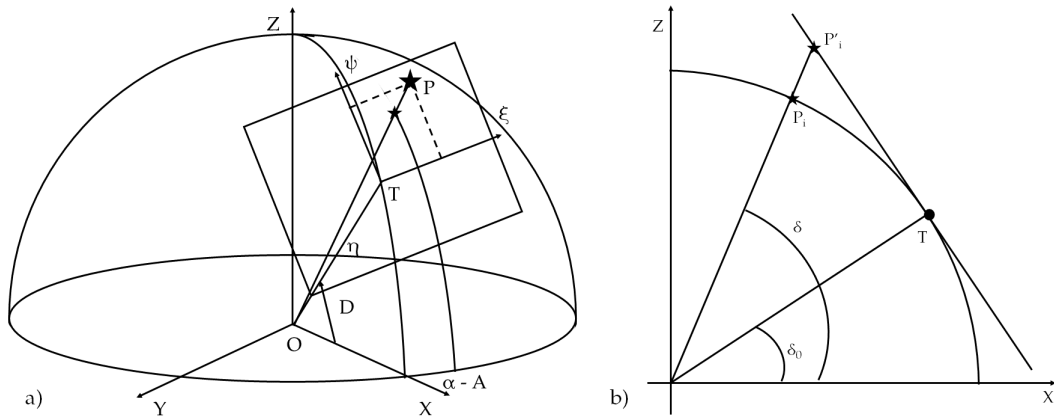


Figura A.2: a) Sistema estándar representado junto con el ecuatorial. b) Sección transversal de la esfera y el plano tangente a ella.

Así, las coordenadas de un punto $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ en la dirección (α_i, δ_i) estarán dadas por las siguientes expresiones

$$x_i = t \cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \quad (\text{A.1})$$

$$y_i = t \sin(\alpha_i - A) \cos \delta_i \quad (\text{A.2})$$

$$z_i = t \sin \delta_i \quad (\text{A.3})$$

donde t es un parámetro de la imagen. De esta forma, el plano tangente a la esfera en el punto T , con coordenadas angulares (A, D) , será el plano $\xi\psi$ cuya ecuación es

$$x \cos D + z \sin D = 1 \quad (\text{A.4})$$

Sustituyendo (A.1) y (A.3) en (A.4) se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= t \cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \cos D + t \sin \delta_i \sin D \\ &= t [\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \cos D + \sin \delta_i \sin D] \end{aligned}$$

con lo cual se llega a

$$t = \frac{1}{\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \cos D + \sin \delta_i \sin D} \quad (\text{A.5})$$

De la ecuación (A.5) podemos ver que conforme el campo fotográfico se haga más pequeño el valor de t irá acercándose a 1, es decir, nos encontraremos más cerca del punto de tangencia T . Trasladaremos el punto (x_i, y_i, z_i) al sistema de coordenadas tangente a la esfera en T haciendo una traslación sobre el vector $(\cos D, 0, \sin D)$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos D \\ 0 \\ \sin D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i - \cos D \\ y_i \\ z_i - \sin D \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Como ahora estamos en $T\psi\xi\eta$ haremos una rotación de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje Z para que el eje X y el ψ coincidan

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} x - \cos D \\ y \\ z - \sin D \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

como la matriz de rotación es

$$R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

entonces

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \cos D \\ y \\ z - \sin D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x - \cos D \\ z - \sin D \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, al resultado de (A.9) le haremos una rotación alrededor del eje X' con un ángulo de $-(D + \frac{\pi}{2})$ para que el sistema $X''Y''Z''$ coincida con el $\xi\psi\eta$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix} = R_X \left[-\left(D + \frac{\pi}{2}\right) \right] \begin{pmatrix} -y \\ x - \cos D \\ z - \sin D \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$R_X \left[-\left(D + \frac{\pi}{2}\right) \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \left[-\left(D + \frac{\pi}{2}\right)\right] & -\sin \left[-\left(D + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ 0 & \sin \left[-\left(D + \frac{\pi}{2}\right)\right] & \cos \left[-\left(D + \frac{\pi}{2}\right)\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin D & \cos D \\ 0 & -\cos D & -\sin D \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Sustituyendo (A.11) en (A.10)

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin D & \cos D \\ 0 & -\cos D & -\sin D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x - \cos D \\ z - \sin D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ (x - \cos D)(-\sin D) + (z - \sin D)\cos D \\ (x - \cos D)(-\cos D) + (z - \sin D)(-\sin D) \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

De la expresión (A.12) podemos se tiene

$$\xi = -y \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \psi &= (x - \cos D)(-\sin D) + (z - \sin D)\cos D \\ &= -x\sin D + \cos D\sin D + z\cos D - \cos D\sin D \\ &= -x\sin D + z\cos D \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \eta &= (x - \cos D)(-\cos D) + (z - \sin D)(-\sin D) \\ &= -x\cos D + \cos^2 D - z\sin D + \sin^2 D \\ &= -x\cos D - z\sin D + 1 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo (A.2) y (A.5) en (A.13)

$$\xi_i = -\frac{\sin(\alpha_i - A)\cos\delta_i}{\cos(\alpha_i - A)\cos\delta_i\cos D + \sin\delta_i\sin D} \quad (\text{A.16})$$

De manera similar, si sustituimos (A.1), (A.3) y (A.5) en (A.14) tenemos

$$\psi_i = \frac{-\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \sin D + \sin \delta_i \cos D}{\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \cos D + \sin \delta_i \sin D} \quad (\text{A.17})$$

Las ecuaciones (A.16) y (A.17) son las relaciones que nos permiten obtener los valores de las coordenadas estándar en función de la ascensión recta y declinación de cada punto.

Para obtener los valores de ascensión recta y declinación en función de las coordenadas estándar realizaremos lo siguiente. De la ecuación (A.17) tenemos

$$\begin{aligned} \psi_i [\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \cos D + \sin \delta_i \sin D] &= -\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \sin D + \sin \delta_i \cos D \\ \psi_i \sin \delta_i \sin D - \sin \delta_i \cos D &= -\psi_i \cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \cos D \\ &\quad - \cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \sin D \\ \sin \delta_i [\psi_i \sin D - \cos D] &= \cos \delta_i [-\psi_i \cos(\alpha_i - A) \cos D - \cos(\alpha_i - A) \sin D] \quad (\text{A.18}) \\ \frac{\sin \delta_i}{\cos \delta_i} &= \frac{\cos(\alpha_i - A) (-\psi_i \cos D - \sin D)}{\psi_i \sin D - \cos D} \\ \tan \delta_i &= \cos(\alpha_i - A) \frac{\psi_i \cos D + \sin D}{\cos D - \psi_i \sin D} \end{aligned}$$

de donde

$$\cos(\alpha_i - A) = \tan \delta_i \left(\frac{\cos D - \psi_i \sin D}{\psi_i \cos D + \sin D} \right) \quad (\text{A.19})$$

De la ecuación (A.16)

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_i - A) &= -\xi_i \frac{\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \cos D + \sin \delta_i \sin D}{\cos \delta_i} \\ &= -\xi_i [\cos(\alpha_i - A) \cos D + \tan \delta_i \sin D] \quad (\text{A.20}) \end{aligned}$$

Sustituyendo (A.19) en (A.20)

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_i - A) &= -\xi_i \left[\frac{\cos D \tan \delta_i (\cos D - \psi_i \sin D)}{\psi_i \cos D + \sin D} + \tan \delta_i \sin D \right] \\ &= -\xi_i \tan \delta_i \left[\frac{\cos^2 D - \psi_i \sin D \cos D + \psi_i \sin D \cos D + \sin^2 D}{\psi_i \cos D + \sin D} \right] \quad (\text{A.21}) \\ &= -\xi_i \tan \delta_i \left[\frac{\cos^2 D + \sin^2 D}{\psi_i \cos D + \sin D} \right] \end{aligned}$$

de donde

$$\sin(\alpha_i - A) = -\frac{\xi_i \tan \delta_i}{\psi_i \cos D + \sin D} \quad (\text{A.22})$$

Dividiendo la ecuación (A.22) entre la ecuación (A.19)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\alpha_i - A)}{\cos(\alpha_i - A)} &= \frac{-\frac{\xi_i \tan \delta_i}{\psi_i \cos D + \sin D}}{\frac{\tan \delta_i (\cos D - \psi_i \sin D)}{\psi_i \cos D + \sin D}} \\
\tan(\alpha_i - A) &= \frac{-\xi_i}{\cos D - \psi_i \sin D} \\
\alpha_i - A &= \tan^{-1} \left(\frac{-\xi_i}{\cos D - \psi_i \sin D} \right)
\end{aligned} \tag{A.23}$$

con lo cual

$$\alpha_i = A + \tan^{-1} \left(\frac{-\xi_i}{\cos D - \psi_i \sin D} \right) \tag{A.24}$$

Elevando las ecuaciones (A.22) y (A.19) y sumándolas tenemos

$$\begin{aligned}
\sin^2(\alpha_i - A) + \cos^2(\alpha_i - A) &= \frac{\xi_i^2 \tan^2 \delta_i}{(\psi_i \cos D + \sin D)^2} + \frac{\tan^2 \delta_i (\cos D - \psi_i \sin D)^2}{(\psi_i \cos D + \sin D)^2} \\
1 &= \frac{\tan^2 \delta_i \left[\xi_i^2 + (\cos D - \psi_i \sin D)^2 \right]}{(\psi_i \cos D + \sin D)^2} \\
\frac{1}{\tan^2 \delta_i} &= \cot^2 \delta_i = \frac{\xi_i^2 + (\cos D - \psi_i \sin D)^2}{(\psi_i \cos D + \sin D)^2}
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Como

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x} \tag{A.26}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\sin^2 \delta_i &= \frac{1}{1 + \frac{\xi_i^2 + (\cos D - \psi_i \sin D)^2}{(\psi_i \cos D + \sin D)^2}} \\
&= \frac{(\psi_i \cos D + \sin D)^2}{(\psi_i \cos D + \sin D)^2 + \xi_i^2 + (\cos D - \psi_i \sin D)^2} \\
&= \frac{(\psi_i \cos D + \sin D)^2}{\psi_i^2 \cos^2 D + 2\psi_i \cos D \sin D + \sin^2 D + \cos^2 D - 2\psi_i \cos D \sin D + \psi_i^2 \sin^2 D + \xi_i^2} \\
&= \frac{(\psi_i \cos D + \sin D)^2}{\psi_i^2 (\cos^2 D + \sin^2 D) + 1 + \xi_i^2} \\
&= \frac{(\psi_i \cos D + \sin D)^2}{\psi_i^2 + \xi_i^2 + 1} \\
\sin \delta_i &= \frac{\psi_i \cos D + \sin D}{\sqrt{\psi_i^2 + \xi_i^2 + 1}}
\end{aligned} \tag{A.27}$$

con esto

$$\delta_i = \sin^{-1} \left(\frac{\psi_i \cos D + \sin D}{\sqrt{\psi_i^2 + \xi_i^2 + 1}} \right) \quad (\text{A.28})$$

Con todo lo anterior obtuvimos dos conjuntos de ecuaciones que nos permite ir de un sistema coordinado a otro. El primero se conforma por las ecuaciones (A.16) y (A.17)

$$\begin{aligned} \xi_i &= -\frac{\sin(\alpha_i - A) \cos \delta_i}{\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \cos D + \sin \delta_i \sin D} \\ \psi_i &= \frac{-\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \sin D + \sin \delta_i \cos D}{\cos(\alpha_i - A) \cos \delta_i \cos D + \sin \delta_i \sin D} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

que son las relaciones con las que sabiendo los valores α_i y δ_i) se obtienen las coordenadas estándar.

El segundo grupo está formado por las ecuaciones (A.24) y (A.28)

$$\begin{aligned} \alpha_i &= A + \tan^{-1} \left(\frac{-\xi_i}{\cos D - \psi_i \sin D} \right) \\ \delta_i &= \sin^{-1} \left(\frac{\psi_i \cos D + \sin D}{\sqrt{\psi_i^2 + \xi_i^2 + 1}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

que son las ecuaciones con las que se pueden determinar el valor de la ascensión recta α_i y δ_i si se saben las coordenadas estándar.

A.3. Sistema estándar y coordenadas de imagen

Es necesario encontrar una relación entre las coordenadas medidas sobre la imagen y las coordenadas estándar. Para conocer las dependencias entre (ξ, ψ) y (x, y) se toman en cuenta las ecuaciones de los movimientos entre los ejes coordinados en el plano: la rotación con un ángulo β , la traslación en (x_0, y_0) y un cambio de escala k .

De esta manera, la relación entre las coordenadas estándar y las coordenadas de imagen es

$$k \begin{pmatrix} \xi_i \\ \psi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i - x_0 \\ y_i - y_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

De la ecuación (A.31) tenemos que para obtener las coordenadas estándar de un punto arbitrario sobre la imagen podemos escribir

$$\begin{aligned} k\xi_i &= \cos \beta (x_i - x_0) + \sin \beta (y_i - y_0) \\ k\psi_i &= -\sin \beta (x_i - x_0) + \cos \beta (y_i - y_0) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

así,

$$\xi_i = \frac{\cos \beta}{k} x_i + \frac{\sin \beta}{k} y_i - \frac{x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta}{k} \quad (\text{A.33})$$

$$\psi_i = -\frac{\sin \beta}{k} x_i + \frac{\cos \beta}{k} y_i - \frac{x_0 \sin \beta - y_0 \cos \beta}{k} \quad (\text{A.34})$$

Si definimos las constantes

$$v_1 = \frac{\cos \beta}{k} \quad (\text{A.35})$$

$$v_2 = \frac{\sin \beta}{k} \quad (\text{A.36})$$

$$v_3 = -\frac{x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta}{k} \quad (\text{A.37})$$

$$v_4 = \frac{x_0 \sin \beta - y_0 \cos \beta}{k} \quad (\text{A.38})$$

las ecuaciones (A.33) y (A.34) se reescriben como

$$\xi_i = x_i v_1 + y_i v_2 + v_3 \quad (\text{A.39})$$

$$\psi_i = -x_i v_2 + y_i v_1 + v_4 \quad (\text{A.40})$$

Dividiendo la ecuación (A.36) entre (A.35) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{v_2}{v_1} &= \frac{\frac{\sin \beta}{k}}{\frac{\cos \beta}{k}} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \\ &= \tan \beta \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

de donde

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \quad (\text{A.42})$$

Ahora, elevando (A.35) y (A.36) al cuadrado para sumarlas después

$$v_1^2 + v_2^2 = \frac{1}{k^2} (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = \frac{1}{k^2} \quad (\text{A.43})$$

de donde

$$k^2 = \frac{1}{v_1^2 + v_2^2} \quad (\text{A.44})$$

despejando k se llega a

$$k = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \quad (\text{A.45})$$

Para obtener las constantes de traslación hacemos los productos de las expresiones

- (A.35) y (A.37)

$$\begin{aligned} v_1 v_3 &= \left(\frac{\cos \beta}{k} \right) \left(-\frac{x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta}{k} \right) \\ &= -\frac{1}{k^2} (x_0 \cos^2 \beta + y_0 \sin \beta \cos \beta) \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

- (A.36) y (A.38)

$$\begin{aligned} v_2 v_4 &= \left(\frac{\sin \beta}{k} \right) \left(\frac{x_0 \sin \beta - y_0 \cos \beta}{k} \right) \\ &= \frac{1}{k^2} (x_0 \sin^2 \beta - y_0 \sin \beta \cos \beta) \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

- (A.36) y (A.37)

$$\begin{aligned} v_2 v_3 &= \left(\frac{\sin \beta}{k} \right) \left(-\frac{x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta}{k} \right) \\ &= -\frac{1}{k^2} (x_0 \sin \beta \cos \beta - y_0 \sin^2 \beta) \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

- (A.35) y (A.38)

$$\begin{aligned} v_1 v_4 &= \left(\frac{\cos \beta}{k} \right) \left(\frac{x_0 \sin \beta - y_0 \cos \beta}{k} \right) \\ &= \frac{1}{k^2} (x_0 \sin \beta \cos \beta - y_0 \cos^2 \beta) \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Restando a (A.47) la ecuación (A.46)

$$\begin{aligned} v_2 v_4 - v_1 v_3 &= \frac{1}{k^2} (x_0 \sin^2 \beta - y_0 \sin \beta \cos \beta + x_0 \cos^2 \beta + y_0 \sin \beta \cos \beta) \\ k^2 (v_2 v_4 - v_1 v_3) &= x_0 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \\ x_0 &= k^2 (v_2 v_4 - v_1 v_3) \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Usando (A.44) llegamos a

$$x_0 = \frac{v_2 v_4 - v_1 v_3}{v_1^2 + v_2^2} \quad (\text{A.51})$$

Sumando las expresiones (A.49) y (A.49)

$$\begin{aligned} v_2 v_3 + v_1 v_4 &= \frac{1}{k^2} (-x_0 \sin \beta \cos \beta - y_0 \sin^2 \beta + x_0 \sin \beta \cos \beta - y_0 \cos^2 \beta) \\ k^2 (v_2 v_3 + v_1 v_4) &= -y_0 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \\ y_0 &= -k^2 (v_2 v_3 + v_1 v_4) \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Usando nuevamente (A.44) llegamos a

$$y_0 = \frac{v_2 v_3 + v_1 v_4}{v_1^2 + v_2^2} \quad (\text{A.53})$$

Las ecuaciones (A.42), (A.45), (A.51) y (A.53) nos muestran que utilizando las cuatro constantes propuestas, v_1 , v_2 , v_3 y v_4 , podemos determinar los valores de las constantes de rotación, cambio de escala y traslación.

Las ecuaciones (A.39) y (A.40) nos muestran cómo podemos pasar de las coordenadas sobre la imagen a las estándar sabiendo v_1 , v_2 , v_3 y v_4 . Para determinar estos valores se necesitan n puntos de referencia de los cuales sepamos tanto sus coordenadas sobre la imagen como las coordenadas estándar. Para un sistema general con n puntos de referencia, (A.39) y (A.40) adquieren la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & -x_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 \\ y_n & -x_n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.54})$$

Si

$$\Phi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.55})$$

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & -x_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 \\ y_n & -x_n & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.56})$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.57})$$

tenemos que $\Phi = MV$, entonces

$$MV - \Phi = 0 \quad (\text{A.58})$$

para resolver (A.58) hacemos

$$\begin{aligned} M^T(MV - \Phi) &= 0 \\ M^T MV - M^T \Phi &= 0 \\ (M^T M)V &= M^T \Phi \\ (M^T M)^{-1} (M^T M)V &= (M^T M)^{-1} M^T \Phi \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

de donde

$$V = (M^T M)^{-1} M^T \Phi \quad (\text{A.60})$$

Entonces, habrá que calcular $(M^T M)^{-1} M^T$ y aplicarlo a Φ para determinar V . De (A.56), podemos calcular M^T , que es

$$M^T = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & x_n & y_n \\ y_1 & -x_1 & \cdots & y_n & -x_n \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.61})$$

Usando (A.56) y (A.61) tenemos que

$$M^T M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & x_n & y_n \\ y_1 & -x_1 & \cdots & y_n & -x_n \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & -x_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 \\ y_n & -x_n & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.62})$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2 & x_1 y_1 - x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n - x_n y_n & x_1 + \cdots + x_n & y_1 + \cdots + y_n \\ x_1 y_1 - x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n - x_n y_n & x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2 & y_1 + \cdots + y_n & -x_1 - \cdots - x_n \\ x_1 + \cdots + x_n & y_1 + \cdots + y_n & 1 + \cdots + 1 & 0 \\ y_1 + \cdots + y_n & -x_1 - \cdots - x_n & 0 & 1 + \cdots + 1 \end{pmatrix}$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & x_n & y_n \\ y_1 & -x_1 & \cdots & y_n & -x_n \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & -x_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 \\ y_n & -x_n & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.63})$$

de donde

$$M^T M = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 & 0 & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i \\ 0 & \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 & \sum_{i=1}^n y_i & -\sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i & n & 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i & -\sum_{i=1}^n x_i & 0 & n \end{pmatrix} \quad (\text{A.64})$$

Si renombramos como $x = \sum_{i=1}^n x_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i$ y $z = \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2$ la expresión (A.64) se ve como

$$M^T M = \begin{pmatrix} z & 0 & z & y \\ 0 & z & y & -x \\ z & y & n & 0 \\ y & -x & 0 & n \end{pmatrix} \quad (\text{A.65})$$

Para determinar $(M^T M)^{-1}$ hay que recordar que si una matriz A tiene inversa, ésta estará dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A) \quad (\text{A.66})$$

Entonces, para encontrar la inversa de $M^T M$ habrá que calcular su adjunta (transpuesta conjugada) y su determinante. La adjunta de $M^T M$ es

$$\text{adj}(M^T M) = \begin{pmatrix} n & 0 & -x & -y \\ 0 & n & -y & x \\ -x & -y & z & 0 \\ -y & x & 0 & z \end{pmatrix} \quad (\text{A.67})$$

Ahora, calculemos el determinante de la matriz (A.65) por menores

$$\begin{vmatrix} z & y & -x \\ y & n & 0 \\ -x & 0 & n \end{vmatrix} = n^2 z - ny^2 - nx^2 \quad (\text{A.68})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & y & -x \\ x & n & 0 \\ y & 0 & n \end{vmatrix} = -2nxy \quad (\text{A.69})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & z & -x \\ x & y & 0 \\ y & -x & n \end{vmatrix} = -nxz + x^3 + xy^2 \quad (\text{A.70})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & z & y \\ x & y & n \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = nyz - x^2 y - y^3 \quad (\text{A.71})$$

con las ecuaciones (A.65), (A.68), (A.69), (A.70) y (A.71) el determinante queda como

$$\begin{aligned} \det(M^T M) &= z(n^2 z - ny^2 - nx^2) - 0(-2nxy) + x(-nxz + x^3 + xy^2) \\ &\quad - y(nyz - x^2 y - y^3) \\ &= n^2 z^2 - ny^2 z - nx^2 z - nx^2 z + x^4 + x^2 y^2 - ny^2 z + x^2 y^2 + y^4 \\ &= n^2 z^2 - 2ny^2 z - 2nx^2 z + x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 \\ &= n^2 z^2 - 2nz(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

de donde

$$\det(M^T M) = [nz - (x^2 + y^2)]^2 \quad (\text{A.73})$$

Con (A.67) y (A.73)

$$(M^T M)^{-1} = \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} \begin{pmatrix} n & 0 & -x & -y \\ 0 & n & -y & x \\ -x & -y & z & 0 \\ -y & x & 0 & z \end{pmatrix} \quad (\text{A.74})$$

Usando (A.61) y (A.74)

$$\begin{aligned} (M^T M)^{-1} M^T &= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} \begin{pmatrix} n & 0 & -x & -y \\ 0 & n & -y & x \\ -x & -y & z & 0 \\ -y & x & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & x_n & y_n \\ y_1 & -x_1 & \cdots & y_n & -x_n \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} \begin{pmatrix} nx_1 - x & ny_1 - y & \cdots & nx_n - x & ny_n - y \\ ny_1 - y & -nx_1 + x & \cdots & ny_n - y & -nx_n + x \\ -xx_1 - yy_1 + z & -xy_1 + yx_1 & \cdots & -xx_n - yy_n + z & -xy_n + yx_n \\ -yx_1 + xy_1 & -yy_1 - xx_1 + z & \cdots & -yx_n + xy_n & -yy_n - xx_n + z \end{pmatrix} \quad (\text{A.75}) \end{aligned}$$

En la expresión (A.60) teníamos que $V = (M^T M)^{-1} M^T \Phi$. Haciendo el producto de (A.75) por (A.57) tendremos para v_1

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} [\xi_1 (nx_1 - x) + \psi_1 (ny_1 - y) + \cdots + \xi_n (nx_n - x) + \psi_n (ny_n - y)] \\ &= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} [\xi_1 nx_1 - \xi_1 x + \psi_1 ny_1 - \psi_1 y + \cdots + \xi_n nx_n - \xi_n x + \psi_n ny_n - \psi_n y] \\ &= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} \left[n \sum_{i=1}^n \xi_i x_i - x \sum_{i=1}^n \xi_i + n \sum_{i=1}^n \psi_i y_i - y \sum_{i=1}^n \psi_i \right] \quad (\text{A.76}) \end{aligned}$$

de donde

$$v_1 = \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} \left[n \left(\sum_{i=1}^n \xi_i x_i + \psi_i y_i \right) - x \sum_{i=1}^n \xi_i - y \sum_{i=1}^n \psi_i \right] \quad (\text{A.77})$$

Para v_2

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} [\xi_1 (ny_1 - y) + \psi_1 (-nx_1 + x) + \cdots + \xi_n (ny_n - y) + \psi_n (-nx_n + x)] \\ &= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} [\xi_1 ny_1 - \xi_1 y - \psi_1 y - \psi_1 nx_1 + \psi_1 x + \cdots + \xi_n ny_n - \xi_n y - \psi_n nx_n + \psi_n x] \\ &= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} \left[n \sum_{i=1}^n \xi_i y_i - y \sum_{i=1}^n \xi_i - n \sum_{i=1}^n \psi_i x_i + x \sum_{i=1}^n \psi_i \right] \quad (\text{A.78}) \end{aligned}$$

de donde

$$v_2 = \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} \left[n \left(\sum_{i=1}^n \xi_i y_i - \psi_i x_i \right) + x \sum_{i=1}^n \psi_i - y \sum_{i=1}^n \xi_i \right] \quad (\text{A.79})$$

Para v_3

$$\begin{aligned}
v_3 &= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} [\xi_1 (-xx_1 - yy_1 + z) + \psi_1 (-xy_1 + yx_1) + \cdots + \xi_n (-xx_n - yy_n + z) + \psi_n (-xy_n + yx_n)] \\
&= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} [-\xi_1 xx_1 - \xi_1 yy_1 + z\xi_1 - \psi_1 xy_1 + \psi_1 yx_1 + \cdots - \xi_n xx_n - \xi_n yy_n + z\xi_n - \psi_n xy_n + \psi_n yx_n] \quad (\text{A.80}) \\
&= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} \left[-x \sum_{i=1}^n \xi_i x_i - y \sum_{i=1}^n \xi_i y_i + z \sum_{i=1}^n \xi_i - z \sum_{i=1}^n \psi_i y_i + y \sum_{i=1}^n \psi_i x_i \right]
\end{aligned}$$

entonces

$$v_3 = \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} \left[-x \left(\sum_{i=1}^n \xi_i x_i + \psi_i y_i \right) - y \left(\sum_{i=1}^n \xi_i y_i - \psi_i x_i \right) + z \sum_{i=1}^n \xi_i \right] \quad (\text{A.81})$$

Para v_4

$$\begin{aligned}
v_4 &= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} [\xi_1 (-yx_1 + xy_1) + \psi_1 (-yy_1 - xx_1 + z) + \cdots + \xi_n (-yx_n + xy_n) + \psi_n (-yy_n - xx_n + z)] \\
&= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} [-\xi_1 yx_1 + \xi_1 xy_1 - \psi_1 yy_1 - \psi_1 xx_1 + \psi_1 z + \cdots - \xi_n yx_n + \xi_n xy_n - \psi_n yy_n - \psi_n xx_n + \psi_n z] \\
&= \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} [y(-\xi_1 x_1 - \psi_1 y_1 - \cdots - \xi_n x_n - \psi_n y_n) + x(\xi_1 y_1 - \psi_1 x_1 + \cdots + \xi_n y_n - \psi_n x_n) + z(\psi_1 + \cdots + \psi_n)] \quad (\text{A.82})
\end{aligned}$$

de donde

$$v_4 = \frac{1}{[nz - (x^2 + y^2)]^2} \left[-y \left(\sum_{i=1}^n \xi_i x_i + \psi_i y_i \right) + x \left(\sum_{i=1}^n \xi_i y_i - \psi_i x_i \right) + z \sum_{i=1}^n \psi_i \right] \quad (\text{A.83})$$

Recordando que $x = \sum_{i=1}^n x_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i$ y $z = \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2$ las ecuaciones (A.77), (A.79), (A.81) y (A.83) quedan como

$$v_1 = \frac{n \left(\sum_{i=1}^n \xi_i x_i + \psi_i y_i \right) - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n \psi_i}{\left\{ n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \right) - \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right] \right\}^2} \quad (\text{A.84})$$

$$v_2 = \frac{n \left(\sum_{i=1}^n \xi_i y_i - \psi_i x_i \right) + \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \psi_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n \xi_i}{\left\{ n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \right) - \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right] \right\}^2} \quad (\text{A.85})$$

$$v_3 = \frac{-\sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{i=1}^n \xi_i x_i + \psi_i y_i \right) - \sum_{i=1}^n y_i \left(\sum_{i=1}^n \xi_i y_i - \psi_i x_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \right) \sum_{i=1}^n \xi_i}{\left\{ n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \right) - \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right] \right\}^2} \quad (\text{A.86})$$

$$v_4 = \frac{-\sum_{i=1}^n y_i \left(\sum_{i=1}^n \xi_i x_i + \psi_i y_i \right) + \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{i=1}^n \xi_i y_i - \psi_i x_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \right) \sum_{i=1}^n \psi_i}{\left\{ n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \right) - \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right] \right\}^2} \quad (\text{A.87})$$

Una vez determinados los parámetros v_1 , v_2 , v_3 y v_4 se pueden sustituir en las ecuaciones (A.39) y (A.40), es decir,

$$\begin{aligned} \xi_j &= x_j v_1 + y_j v_2 + v_3 \\ \psi_j &= -x_j v_2 + y_j v_1 + v_4 \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

para tener las ecuaciones con las que se transforman las coordenadas de la imagen a coordenadas estándar.

Para facilitar la visualización de estas ecuaciones, llamaremos parámetros de la imagen a

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n x_i \\ B &= \sum_{i=1}^n y_i \\ C &= \sum_{i=1}^n \xi_i \\ D &= \sum_{i=1}^n \psi_i \\ E &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \\ F &= \sum_{i=1}^n \xi_i x_i + \psi_i y_i \\ G &= \sum_{i=1}^n \xi_i y_i - \psi_i x_i \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

entonces v_1 , v_2 , v_3 y v_4 pueden representarse como

$$\begin{aligned}
u_1 &= nF - AC - BD \\
u_2 &= nG - BC + AD \\
u_3 &= -AF - BG + EC \\
u_4 &= -BF + AG + ED \\
u_5 &= \frac{1}{[nE - (A^2 + B^2)]^2}
\end{aligned}
\tag{A.90}$$

De esta manera las transformaciones quedan como

$$\begin{aligned}
\xi_i &= u_5 (u_1 x_i + u_2 y_i + u_3) \\
\psi_i &= u_5 (-u_2 x_i + u_1 y_i + u_4)
\end{aligned}
\tag{A.91}$$

A.4. Sistema ecuatorial y eclíptico

Las tres relaciones principales entre estos sistemas coordenados pueden ser derivadas empleando la ayuda de coordenadas rectangulares. Utilizando el triángulo esférico ABC mostrado en la figura A.3, definimos el eje z dirigido al punto A , el segmento AB contenido en el plano yz mientras que x es perpendicular a yz .

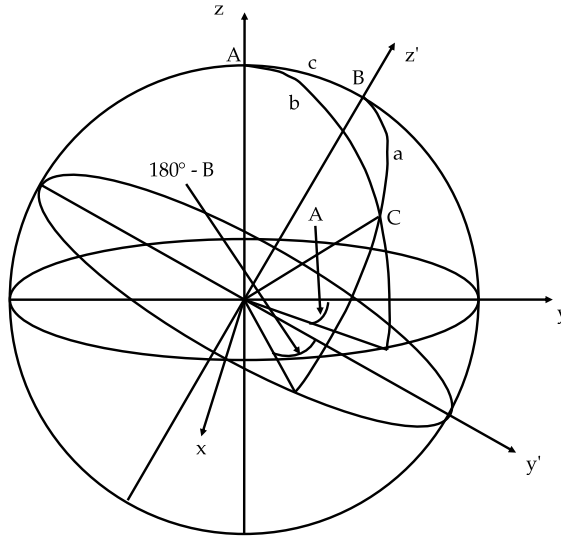


Figura A.3: Relación entre un triángulo esférico y dos sistemas coordenados rectangulares.

Si asumimos que la esfera es unitaria, las tres coordenadas estarán dadas por

$$\begin{aligned}
x &= \sin b \sin A \\
y &= \sin b \cos A \\
z &= \cos b
\end{aligned} \tag{A.92}$$

Ahora, consideremos otro sistema coordenado obtenido mediante una rotación con un ángulo c alrededor del eje x . De este modo, el eje z' apunta a B y el plano $y'z'$ coincide con el yz . Las coordenadas en este sistema están dadas por

$$\begin{aligned}
x' &= \sin a \sin B \\
y' &= -\sin a \cos B \\
z' &= \cos a
\end{aligned} \tag{A.93}$$

Ambos sistemas coordenados están relacionados por medio de las expresiones

$$\begin{aligned}
x' &= x \\
y' &= y \cos c - z \sin c \\
z' &= z \cos c + y \sin c
\end{aligned} \tag{A.94}$$

Sustituyendo (A.92) y (A.93) en (A.94) obtenemos

$$\begin{aligned}
\sin a \sin B &= \sin b \sin A \\
\sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos A \cos c \\
\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \cos A \sin c
\end{aligned} \tag{A.95}$$

En nuestro caso, debemos señalar que el eje x está apuntando al punto vernal, y al ecuador, z al polo norte ecuatorial, y' a la eclíptica y z' señala al polo norte eclíptico. Así, en este caso el triángulo esférico está formado por una estrella S y los polos norte ecuatorial y eclíptico (figura A.4). Con esto, las ecuaciones mostradas en (A.95) se vuelven

$$\begin{aligned}
\sin B &= \cos \epsilon \sin \delta - \sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha \\
\cos B \sin L &= \sin \epsilon \sin \delta + \cos \epsilon \cos \delta \sin \alpha \\
\cos B \cos L &= \cos \delta \cos \alpha
\end{aligned} \tag{A.96}$$

donde ϵ es la inclinación de la eclíptica en el ecuador ($\sim 23^{\circ}27'$), L y B son la longitud y la latitud eclípticas y α y δ son las coordenadas ecuatoriales de la estrella que se esté estudiando.

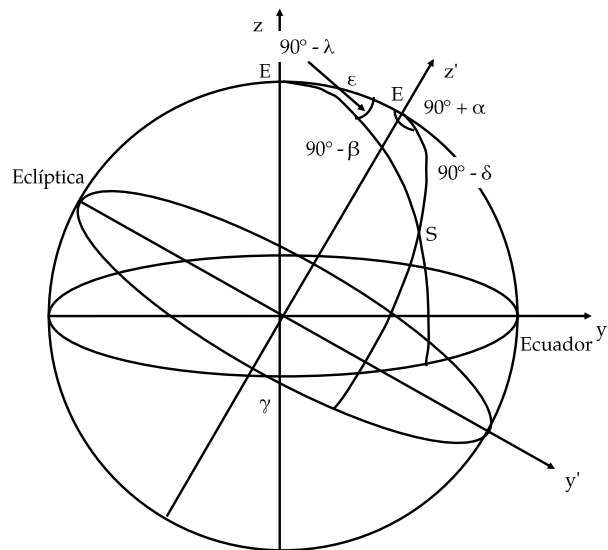


Figura A.4: Relación entre las coordenadas ecuatoriales y eclípticas.

Despejando B y L podemos obtener las expresiones que nos permiten pasar de coordenadas ecuatoriales a coordenadas eclípticas, las cuales son

$$\begin{aligned}
 B &= \sin^{-1} [\cos \epsilon \sin \delta - \sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha] \\
 L &= \tan^{-1} \left[\frac{\sin \epsilon \sin \delta + \cos \epsilon \cos \delta \sin \alpha}{\cos \delta \cos \alpha_c} \right]
 \end{aligned}
 \tag{A.97}$$

Apéndice B

Ecuación del plano que contiene la trayectoria

Ya que a cada punto (ξ_i, ψ_i) podemos asociar un valor de ascensión recta α_i y declinación δ_i tenemos que, desde una estación, podemos construir k vectores unitarios que estén dirigidos hacia los k puntos, con coordenadas (α_i, δ_i) , de la trayectoria aparente del meteoróide. Ya que en coordenadas ecuatoriales un vector unitario $\vec{P}_i = (\xi_i, \psi_i, \eta_i)$ en la dirección de α_i y δ_i cumple que

$$\begin{aligned}\xi_i &= \cos \delta_i \cos \alpha_i \\ \psi_i &= \cos \delta_i \sin \alpha_i \\ \eta_i &= \sin \delta_i\end{aligned}\tag{B.1}$$

entonces

$$\begin{aligned}\vec{P}_i &= (\xi_i, \psi_i, \eta_i) \\ &= (\cos \delta_i \cos \alpha_i, \cos \delta_i \sin \alpha_i, \sin \delta_i)\end{aligned}\tag{B.2}$$

De esta manera, el plano que contendrá la trayectoria más probable del meteoróide puede construirse empleando los k vectores unitarios y un vector $\hat{n} = (a, b, c)$ tal que, de forma ideal, $\hat{n} \cdot \vec{P} = 0$ es decir

$$a\xi_i + b\psi_i + c\eta_i = 0\tag{B.3}$$

Como tenemos k vectores, la igualdad a cero no es estricta, entonces, si tenemos un \hat{n} fijo, la ecuación del plano será de la forma

$$a\xi_i + b\psi_i + c\eta_i = \Delta_i\tag{B.4}$$

Para poder determinar los valores de a , b y c necesitamos encontrar una \hat{n} que cumpla que

$$\sum_{i=1}^k \Delta_i^2 = \text{mín} \quad (\text{B.5})$$

es decir,

$$a^2 \sum_{i=1}^k \xi_i^2 + b^2 \sum_{i=1}^k \psi_i^2 + c^2 \sum_{i=1}^k \eta_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^k \xi_i \psi_i + 2ac \sum_{i=1}^k \xi_i \eta_i + 2bc \sum_{i=1}^k \psi_i \eta_i = \text{mín}$$

Para lograr esto, debemos sacar las parciales de esta expresión respecto a a , b y c y después igualarlas a cero. Al hacer esto tendremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a : 2a \sum_{i=1}^k \xi_i^2 + 2b \sum_{i=1}^k \xi_i \psi_i + 2c \sum_{i=1}^k \xi_i \eta_i &= 0 \\ b : 2b \sum_{i=1}^k \psi_i^2 + 2a \sum_{i=1}^k \xi_i \psi_i + 2c \sum_{i=1}^k \psi_i \eta_i &= 0 \\ c : 2c \sum_{i=1}^k \eta_i^2 + 2a \sum_{i=1}^k \xi_i \eta_i + 2b \sum_{i=1}^k \psi_i \eta_i &= 0 \end{aligned}$$

este sistema puede verse como

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \xi_i^2 & \sum_{i=1}^k \xi_i \psi_i & \sum_{i=1}^k \xi_i \eta_i \\ \sum_{i=1}^k \xi_i \psi_i & \sum_{i=1}^k \psi_i^2 & \sum_{i=1}^k \psi_i \eta_i \\ \sum_{i=1}^k \xi_i \eta_i & \sum_{i=1}^k \psi_i \eta_i & \sum_{i=1}^k \eta_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Si hacemos que $A = \sum_{i=1}^k \xi_i^2$, $B = \sum_{i=1}^k \xi_i \psi_i$, $C = \sum_{i=1}^k \xi_i \eta_i$, $D = \sum_{i=1}^k \psi_i^2$, $E = \sum_{i=1}^k \psi_i \eta_i$ y $F = \sum_{i=1}^k \eta_i^2$ podemos reescribir el sistema de ecuaciones dado en (B.6) como

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

El paso a seguir ahora será diagonalizar la matriz M si

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Multiplicando el renglón dos por $\frac{A}{B}$ y el renglón 3 por $\frac{A}{C}$ podemos obtener

$$M \sim \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & \frac{AD}{B} & \frac{AE}{B} \\ A & \frac{AE}{C} & \frac{AF}{C} \end{pmatrix}$$

Haciendo el nuevo renglón 2 como el antiguo 2 menos el 1 y el renglón 3 como el antiguo menos el 1 llegamos a

$$M \sim \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & \frac{AD-B^2}{B} & \frac{AE-BC}{B} \\ 0 & \frac{AE-BC}{C} & \frac{AF-C^2}{C} \end{pmatrix}$$

Multiplicando el renglón 2 por $\frac{B^2}{AD-B^2}$ y el renglón 3 por $\frac{BC}{AE-BC}$ obtenemos

$$M \sim \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & B & B \frac{AE-BC}{AD-B^2} \\ 0 & B & B \frac{AF-C^2}{AE-BC} \end{pmatrix}$$

Haciendo que el renglón 1 sea el renglón 1 anterior menos el renglón 2 y el renglón 3 como el 3 menos el 2

$$M \sim \begin{pmatrix} A & 0 & C - B \left(\frac{AE-BC}{AD-B^2} \right) \\ 0 & B & B \left(\frac{AE-BC}{AD-B^2} \right) \\ 0 & 0 & B \left(\frac{AF-C^2}{AE-BC} - \frac{AE-BC}{AD-B^2} \right) \end{pmatrix}$$

Factorizando el término $AD - B^2$ de dos términos de la tercer columna

$$M \sim \begin{pmatrix} A & 0 & \frac{1}{AD-B^2} [C(AD - B^2) - B(AE - BC)] \\ 0 & B & \frac{1}{AD-B^2} [B(AE - BC)] \\ 0 & 0 & B \left[\frac{AF-C^2}{AE-BC} - \frac{AE-BC}{AD-B^2} \right] \end{pmatrix}$$

Como $C(AD - B^2) - B(AE - BC) = A(CD - BE)$

$$M \sim \begin{pmatrix} A & 0 & \frac{A}{AD-B^2} [CD - BE] \\ 0 & B & \frac{B}{AD-B^2} [AE - BC] \\ 0 & 0 & B \left[\frac{AF-C^2}{AE-BC} - \frac{AE-BC}{AD-B^2} \right] \end{pmatrix}$$

dividiendo el primer renglón entre A y el segundo entre B y sustituyendo en (B.7) tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{CD-BE}{AD-B^2} \\ 0 & 1 & \frac{AE-BC}{AD-B^2} \\ 0 & 0 & B \left[\frac{AF-C^2}{AE-BC} - \frac{AE-BC}{AD-B^2} \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

de este sistema puede verse que

$$a = c \frac{BE - CD}{AD - B^2} \quad (\text{B.10})$$

$$b = c \frac{BC - AE}{AD - B^2} \quad (\text{B.11})$$

$$cB \left[\frac{AF - C^2}{AE - BC} - \frac{AE - BC}{AD - B^2} \right] = 0 \quad (\text{B.12})$$

Observando la ecuación (B.12) tenemos que c podría tomar cualquier valor. La propuesta más cómoda es hacer

$$c = AD - B^2 \quad (\text{B.13})$$

ya que este valor es el denominador en las expresiones (B.10) y (B.11). De este modo, sustituyendo el valor de c , llegamos a que

$$a = BE - CD \quad (\text{B.14})$$

$$b = BC - AE \quad (\text{B.15})$$

entonces, un vector \mathbf{n} ortogonal al plano que contiene la trayectoria del meteoroides será de la forma

$$\vec{n} = (BE - CD, BC - AE, AD - B^2) \quad (\text{B.16})$$

como habíamos pedido que el vector fuera unitario, necesitamos dividir este vector entre su norma. Recordando que $A = \sum_{i=1}^k \xi_i^2$, $B = \sum_{i=1}^k \xi_i \psi_i$, $C = \sum_{i=1}^k \xi_i \eta_i$, $D = \sum_{i=1}^k \psi_i^2$, $E = \sum_{i=1}^k \psi_i \eta_i$ y

$F = \sum_{i=1}^k \eta_i^2$ si llamamos

$$\begin{aligned}
a' &= \sum_{i=1}^k \xi_i \psi_i \sum_{i=1}^k \psi_i \eta_i - \sum_{i=1}^k \xi_i \eta_i \sum_{i=1}^k \psi_i^2 \\
b' &= \sum_{i=1}^k \xi_i \psi_i \sum_{i=1}^k \xi_i \eta_i - \sum_{i=1}^k \xi_i^2 \sum_{i=1}^k \psi_i \eta_i \\
c' &= \sum_{i=1}^k \xi_i^2 \sum_{i=1}^k \psi_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k \xi_i \psi_i \right)^2
\end{aligned} \tag{B.17}$$

las entradas del vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ serán

$$\begin{aligned}
a &= \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \\
b &= \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \\
c &= \frac{c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

que son los valores obtenidos divididos entre la norma del vector \mathbf{n} . Sustituyendo estos valores en la expresión (B.3) obtenemos la ecuación del plano que contiene la trayectoria del meteoroido desde el sitio donde se adquirió la imagen del meteoroido. Al hacer los cálculos se tomó como origen para generar los planos el punto donde se tomaron las imágenes. Para realizar las intersecciones de los planos hace falta movernos a un sistema de referencia con origen en el centro de la Tierra.

La posición geocéntrica del punto donde se tomó la medición está definida por

$$\begin{aligned}
x &= (R + h) \cos \lambda \cos \vartheta \\
y &= (R + h) \cos \lambda \sin \vartheta \\
z &= (R + h) \sin \lambda
\end{aligned} \tag{B.19}$$

donde h es la altura sobre el nivel del mar, ϑ es el tiempo sideral local y λ y R son la latitud y radio geocéntricos respectivamente.

Usando el sistema de coordenadas WGS84 el radio geocéntrico está dado por

$$R = \sqrt{\frac{1}{1 + \left[\frac{1}{(1-f)^2} - 1 \right] \sin^2 \lambda}} \tag{B.20}$$

donde r es el radio ecuatorial ($r = 63781370m$), f es el achatamiento $f = \frac{1}{298,257223563}$ y λ es la latitud geocéntrica, la cual está dada por

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{1 - e^2}{\tan \lambda'} \right) \quad (\text{B.21})$$

donde λ' es la latitud geográfica y e^2 está dada por

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (\text{B.22})$$

donde $a = 6378137,0$ m y $b = 6356752,0$ m usando el sistema WGS84.

Para ver el plano de la ecuación (B.3) desde el centro de la Tierra únicamente hay que hacer una traslación, es decir, habrá que moverlo una distancia d dada por la distancia desde el centro de la Tierra al plano visto desde la estación. Esta distancia está dada por

$$d = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (\text{B.23})$$

ya que $\hat{n} = (a, b, c)$ es un vector unitario su norma es igual a uno, por lo cual la distancia d es

$$d = ax + by + cz \quad (\text{B.24})$$

Así, cada punto (ξ_i, η_i, ζ_i) de la trayectoria del meteoróide y el sitio desde donde se tomó la imagen estarán contenidos en el plano

$$a_j \xi + b_j \psi + c_j \eta - d_j = 0 \quad (\text{B.25})$$

donde j denota la estación.

Apéndice C

Función atan2

En trigonometría la función de dos argumentos atan2 representa una variación de la arcotangente. Esta función existe en varios lenguajes de programación debido a que permite usar dos argumentos en lugar de uno para conocer la información de los signos del resultado. Está definida para todos los reales excepto cuando ambos argumentos son cero. A continuación se escribe la definición de esta función [48]

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{Si } x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{Si } x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{Si } x < 0 \wedge y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{Si } x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{Si } x = 0 \wedge y < 0 \\ \text{No está definida} & \text{Si } x = 0 \wedge y = 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Bibliografía

- [1] International Astronomical Union. (2006). *RESOLUTION B5: Definition of a Planet in the Solar System*. Recuperado el 20 de diciembre de 2016 de https://www.iau.org/static/resolutions/Resolution_GA26-5-6.pdf.
- [2] Rubin, A. E.; Grossman, J. N. (2010). Meteorite and meteoroid: New comprehensive definitions. *Meteoritics & Planetary Science*, (45), pp. 114-122.
- [3] Brownlee, D. E. (2001). The Origin and Properties of Dust Impacting the Earth. Peucker-Ehrenbrink, B. & Schmitz, B. *Accretion of Extraterrestrial Matter Throughout Earth's History* (pp. 1-12). Estados Unidos: Springer.
- [4] Ceplecha, Z.; Borovička, J.; Elford, W. G.; Revelle, D. O.; Hawkes, R. L.; Porubčan, V.; et. al. (1998). Meteor phenomena and bodies. *Space Science Reviews*, (84), pp. 327-471.
- [5] Cordero-Tercero, M. G.; Velázquez-Villegas, F.; Vázquez-Hernández, C. F.; Ramírez-Cruz, J. L.; Arévalo-Vieyra, A.; Mendoza-San-Agustín, A.; et. al. (2016). The Mexican Meteor Network: A Preliminary Proposal. *Geofísica Internacional*, (55-1), pp. 69-77.
- [6] Atreya, P. (2009). *Development of a Software Package for the Reduction and Analysis of Video Records of Meteors*. Tesis de doctorado, The Queen's University of Belfast, Irlanda.
- [7] Steyaert, C. (1990). *Photographic Astrometry*. Bélgica: International Meteor Organization.
- [8] Trigo-Rodríguez, J. M. (2002). *Análisis espectroscópico de fragmentos cometarios y asteroidales a su entrada en la atmósfera terrestre*. Tesis de doctorado, Universitat de València, España.
- [9] Van de Kamp, P. (1967). *Principles of Astrometry: With special emphasis on long-focus photographic astrometry*. Estados Unidos: Freeman.
- [10] Ceplecha, Z. (1987). Geometric, dynamic, orbital, and photometric data on meteoroids from photographic fireball networks. *Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences*, (38), pp. 222-234.

- [11] Jenniskens, P.; Gural, P. S.; Dynneson, L.; Grigsby, B. J.; Newman, K. E.; Borden, M.; et. al. (2011). CAMS: Cameras for Allsky Meteor Surveillance to establish minor meteor showers. *Icarus*, (216), pp. 40-61.
- [12] Murray, C. D.; Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*. Reino Unido: Cambridge University Press.
- [13] Vinh, N. X.; Busemann, A.; Culp, R. D. (1980). *Hypersonic and planetary entry flight mechanics*. Estados Unidos: The University of Michigan Press.
- [14] Passey, Q. R.; Melosh, H. J. (1980). Effects of Atmospheric Breakup on Crater Field Formation. *Icarus*, (42), pp. 213-233.
- [15] Cordero-Tercero, M. G. (1997). *Efectos del viento en la entrada de meteoritos a la atmósfera de Venus*. Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- [16] Borovicka, J.; Spurny, P.; Keclikova, J. (1995). A new positional astrometric method for all-sky cameras. *Astronomy and Astrophysics Supplement*, (112), pp. 173-178.
- [17] Koestler, A. (1959). *Los sonámbulos: Historia de la cambiante cosmovisión del hombre*. México: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.
- [18] Poveda, A., Herrera, M. A. (1992). *Materia oscura en el Universo*. México: Equipo Sirius.
- [19] Belbruno, E.; Williams, I. P. (1999). Asteroids and Trans-Neptunian objects: Introduction. En Steves, B. A.; Roy, A. E. (comps). *The dynamics of Small Bodies in the Solar System* (pp. 1-5). Italia: Springer.
- [20] Jones, B. W. (2007) *Discovering the Solar System*. (Segunda edición) Reino Unido: John Wiley & Sons.
- [21] Cervantes de la Cruz, K. E. (2009). *Estudio petrológico de los condros de las meteoritas condriticas mexicanas Cuartaparte, Cosina y Nuevo mercurio: origen y evolución de dichas estructuras*. Tesis de doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- [22] Halliday, A. N. (2006). The Origin of the Earth. What's new?. *Elements*, (2), pp. 205-210.
- [23] Lunar & Planetary Institute. (2003). *Formation of our Solar System*. Recuperado el 20 de diciembre de 2016 de http://www.lpi.usra.edu/education/resources/s_system/solar_sys_formation.ppt.
- [24] Choi, C. Q. (2014). *Asteroids: Fun Facts and Information About Asteroids*. Recuperado el día 19 de diciembre de 2016 de <http://www.space.com/51-asteroids-formation-discovery-and-exploration.html>.

- [25] Basquetteur. (2014) *Wikipedia*. Recuperado el día 19 de diciembre de 2016 de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oort_cloud_Sedna_orbit-es.svg.
- [26] Encrenaz, T. (2013). *Planets: ours and others. From Earth to Exoplanets*. Francia: World Scientific Publishing Company.
- [27] Jiménez-Torres, J. J. (2009). *Dinámica de sistemas planetarios en diferentes ambientes galácticos*. Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- [28] Connors, M.; Wiegert, P.; Veillet, C. (2010) *Earth's first Trojan asteroid: 2010 TK7*. Recuperado el día 20 de diciembre de 2016 de <http://web.archive.org/web/20160328011810/http://www.astro.uwo.ca/~wiegert/2010TK7/>.
- [29] Curioica-Gálvez, M. K. (2014) *Frecuencia de colisiones de asteroides con la Tierra*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- [30] Wisdom, J. (1985) Meteorites may follow a chaotic route to Earth. *Letters to Nature*, (315), pp. 731-733.
- [31] Lewis, J. S. (1995). *Physics and Chemistry of the Solar System*. Estados Unidos: Academic Press.
- [32] Museo del meteorito. (2002). *Suceso de caída*. Recuperado el día 19 de diciembre de 2016 de http://www.museodelmeteorito.cl/index.php?option=com_content&view=article&id=10&Itemid=16.
- [33] Flynn, G.J.; Klöck, W.; Krompholz, R. (1999). Speed of sound, elastic and shear modulus measurements on meteorites: implications for cratering and disruption of asteroids. *Lunar & Planetary Science XXX (1073)*.
- [34] Norton, O. R.; Chitwood, L. A. (2008). *Field guide to meteors and meteorites*. Reino Unido: Springer.
- [35] Svetsov, V.; Shuvalov, V. (2008). Tunguska Catastrophe of 30 June 1908. Adushkin, V.; Nemchinov, I. *Catastrophic Events Caused by Cosmic Objects* (pp. 227-266). Países Bajos: Springer.
- [36] Ben-Menahem, A. (1975). Source Parameters of the Siberian Explosion of June 30, 1908, from Analysis and Synthesis of Seismic Signals at Four Stations. *Physics of the Earth and Planetary Interiors (11)*, pp. 1-35.
- [37] Hartmann, W. K. (1972). *Moons and planets: An introduction to planetary science*. Estados Unidos: Wadsworth.
- [38] Navarro-Góngora, D. A. (2003). *Comparación de dos métodos numéricos en integraciones orbitales*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México: México.

- [39] Wikipedia. (2016) *Standard gravitational parameter*. Recuperado el día 20 de diciembre de 2016 de https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_gravitational_parameter.
- [40] Hauser, W. (1965). *Introduction to the Principles of Mechanics*. Estados Unidos: Addison-Wesley Publishing Company.
- [41] Cushman-Roisin, B.; Beckers, J. M. (2009). *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects*. Estados Unidos: Academic Press.
- [42] Sears, F. W. (1967). *Fundamentos de Física: Mecánica, Calor y Sonido*. (Séptima edición). España: Aguilar.
- [43] Hills, J. G.; Goda, M. P. (1992). The fragmentation of small asteroids in the atmosphere. *The Astronomical Journal*, (105), pp. 1114-1144.
- [44] Rendtel, J. (1993). *Handbook for photographic meteor observations*. Bélgica: International Meteor Organization.
- [45] EuroPlanet. (2016). *PSWS Hosted Models at a Glance*. Recuperado el 20 de diciembre de 2016 de <http://planetaryspaceweather-europlanet.irap.omp.eu/dist/psws.html#earth>.
- [46] Stevens, B. L.; Lewis, F. L. (1992). *Aircraft control and simulation*. Estados Unidos: John Wiley & Sons.
- [47] Trigo-Rodríguez, J. M.; Rietmeijer, F. J. M.; Llorca, J.; Janches, D. (2008). *Advances in Meteoroid and Meteor Science*. Estados Unidos: Springer.
- [48] Wikipedia. (2016). *Arcotangente2*. Recuperado el 20 de diciembre de 2016 de <https://it.wikipedia.org/wiki/Arcotangente2>.