UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MÓDULOS TILTING DE DIMENSIÓN PROYECTIVA FINITA

T E S I S

QUE PARA OPTAR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ALEJANDRO ARGUDÍN MONROY

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. OCTAVIO MENDOZA HERNÁNDEZ

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA CD. MX., ENERO 2017

Índice general

Agradecimientos

Para empezar quisiera agradecer a mi familia y amigos por alentarme y apoyarme durante la realización de este trabajo.

Un agradecimiento singular debo a mi asesor Octavio Mendoza Hernández por todo el tiempo y paciencia que invirtió en esta tesis; por los cursos avanzados que impartió, de los cuales el conocimiento que me brindaron se ven reflejadas en estas páginas; y por los apoyos que me ha brindado para asistir a minicursos, conferencias y seminarios a lo largo de mis estudios de maestría.

A mis sinodales, la Dra. Edith Corina Sáenz Valadez, el Dr. Valente Santiago Vargas, la Dra. Diana Avella Alaminos, la Dra. Clotilde García Villa y la Dra. Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda por su pronta y valiosa revisión de la tesis, la cual se vió enriquecida por sus sugerencias y comentarios.

Al Instituto de Matemáticas de la UNAM, donde he tomado gran parte de mis clases de maestría, y por brindarme una beca de lugar, la cual ha sido fundamental en la realización de mis estudios.

Por último debo mi agradecimiento a Jessica, por compartir su pasión por las matemáticas conmigo; ya que su apoyo, compañía y enriquecedoras pláticas han motivado e impulsado mis estudios y esfuerzos.

Introducción

Los módulos tilting surgieron en la década de los ochenta, apareciendo en los trabajos de Brenner-Butler [BB80], Bongartz [Bon81], Happel y Ringel [HR82], en el estudio de álgebras de dimensión finita. Empezando por Miyashita [Miy86], la noción de módulo tilting fue extendida al estudio de anillos arbitrarios por una larga lista de autores, entre los cuales podemos citar a Wakamatsu [Wak90], Colby y Fuller [CF97], Colpi y Trlifaj [CT95], y más recientemente, Angeleri Hügel y Coelho [AHUC01], Bazzoni [Baz04] y Wei [Wei04].

Para comprender el porqué de la existencia de los módulos tilting, nos podemos trasladar al año de 1973. En ese entonces, había sido probado recientemente por Gabriel [Gab72] que el álgebra de caminos kQ, de un carcaj finito Q sobre un campo algebraicamente cerrado k, admite solamente una cantidad finita de módulos inescindibles salvo isomorfismo cuando la gráfica subyacente de Q es una unión disjunta de diagramas de Dynkin. Entonces, Bernstein, Gelfand y Ponomarev [BGV73] mostraron que dichos módulos inescindibles pueden ser construidos de forma recursiva a partir de módulos simples, a través de los llamados funtores de reflexión. Tiempo después, dicho procedimiento fue generalizado por Auslander, Platzeck y Reiten [APR79] en el estudio de un álgebra de Artin Λ, en el que se construye un Λ-módulo T con anillo de endomorfismos Γ, de tal manera que el funtor

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(T, \_) : \mathrm{mod}(\Lambda) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$$

es un funtor de reflexión. Dicho módulo T fue el primer módulo tilting.

Para el año de 1980, la noción de módulo tilting fue formalmente definida y axiomatizada por Brenner y Butler [BB80]. En su trabajo, podemos encontrar uno de los resultados fundamentales de la teoría de módulos tilting para un Λ-módulo tilting T con anillo de endomorfismos Γ: el teorema de Brenner-Butler, también conocido como el teorema tilting, el cual muestra una equivalencia entre ciertas subcategorías de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ y $\mathrm{mod}(\Gamma)$. Con el tiempo, los axiomas fueron cambiando a versiones más simples y menos estrictas, entre las cuales podemos citar la de Ringel y Happel [HR82], que utilizó en la definición los funtores $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(T, \_)$, así como la de Miyashita [Miy86].

A partir del trabajo de Brenner y Butler, la teoría tilting se diversificó creando diferentes líneas de investigación. La línea de investigación en la que trabajaremos es la que iniciaron Auslander y Reiten en el año 1991, con su trabajo *Applications of contravariantly finite subcategories* [AR91]. En dicho trabajo se usa la noción de Miyashita, esto es, dada un álgebra de Artin Λ, se define un Λ-módulo tilting, como un Λ-módulo $T \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ que satisface las siguientes condiciones:

(a) la dimensión proyectiva de T es finita,

(b) $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(T,T) = 0$ para todo $i \geq 1$, y

(c) existe una sucesión exacta

$$0 \to \Lambda \to T_0 \to ... \to T_m \to 0$$

con T_0,...,T_m sumandos directos de T^n para algún $n \geq 1$.

Auslander y Reiten estaban interesados en la clase $\mathcal{P}^{<\infty}$, que consiste de Λ-módulos finitamente generados de dimensión proyectiva finita, por su relación con la dimensión finitista. De hecho, en [AR91] prueban que en caso de que $\mathcal{P}^{<\infty}$ sea contravariantemente finita (noción introducida en [AS80]), se tiene que la dimensión finitista pequeña es acotada. En su investigación, descubren que un Λ-módulo T es tilting si y sólo si $T^\perp$ es covariantemente finita (noción dual a la de contravariantemente finita). Más aún, encuentran una biyección entre los módulos tilting y las clases covariantemente finitas que son corresolventes.

Años despúes Angeleri Hügel y Coelho continuaron esta línea de investigación, publicando sus resultados en *Infinitely generated modules of finite projective dimention* [AHUC01]. En este artículo, se trabaja sobre un anillo arbitrario R, y se define un R-módulo tilting, como un R-módulo $T \in \mathrm{Mod}(R)$ que satisface las siguientes condiciones:

(a) la dimensión proyectiva de T es finita,

(b) $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(T, T^{(X)}) = 0$ para todo conjunto X y para todo $i \geq 1$, y

(c) existe una sucesión exacta

$$0 \to \Lambda \to T_0 \to ... \to T_n \to 0$$

con T_i un sumando directo de $T^{(X)}$ para algún conjunto X, para todo $0 \leq i \leq n$.

Con el objetivo de generalizar los resultados obtenidos en [AR91], Angeleri Hügel y Coelho utilizan las nociones de pares de cotorsión, preenvolvente y precubiertas utilizadas por Enochs [Eno81], encontrando una biyección entre los módulos tilting y pares de cotorsión especiales que llamaron pares de cotorsión tilting.

Diferentes matemáticos han continuado esta línea de investigación, entre los cuales podemos citar a Bazzoni [Baz04, BMT11], Wei [Wei05, Wei04], Angeleri Hügel, Tonolo y Trlifaj [AHT02, AHTT01], y Angeleri Hügel y Mendoza [HM10]; llegando a interesantes aplicaciones homológicas, que incluyen acotar las dimensiones finitistas y la diferencia entre las dimensiones finitistas.

El objetivo de esta tesis es brindar una exposición autocontenida sobre la teoría de los módulos tilting, así como de los resultados necesarios de la teoría de aproximaciones y pares de cotorsión, para lograr un enfoque global sobre los módulos tilting.

En el primer capítulo, se hace una breve introducción al algebra homológica, así como otras nociones básicas que se utilizarán en los capítulos a venir.

El segundo capítulo introduce al lector a la teoría de aproximaciones y pares de cotorsión. Define las nociones de precubierta y preenvolvente, para después mostrar la relación de éstas con los pares de cotorsión. Hecho esto se da una exposición sobre los pares de cotorsión completos y hereditarios, incluyendo importantes ejemplos que serán utilizados en los siguientes capítulos. Finalmente, el capítulo utiliza los pares de cotorsión para obtener algunos resultados del álgebra homológica relativa.

El tercer capítulo comienza a introducir al lector a la teoría tilting mostrándole cómo los generadores proyectivos se generalizan de manera natural a los $*$-módulos. Esta clase de módulos posee interesantes propiedades homológicas, las cuales al generalizarlas dan lugar a una serie de resultados que muestran la naturalidad de los módulos tilting.

Finalmente, los módulos tilting son presentados en el capítulo cuatro. En este capítulo, iniciamos introduciendo las definiciones clásicas de los módulos tilting, hasta llegar a la definición de Angeleri Hügel y Coelho [AHUC01]. Luego, se utiliza la maquinaria creada en los capítulos anteriores para dar las elegantes caracterizaciones de Wei [Wei05] y Bazzoni[Baz04].

Por último, el quinto capítulo aprovecha la maquinaria desarrollada de la teoría de pares de cotorsión para dar una exposición completa sobre la relación de los módulos tilting y las dimensiones finitistas.

1 Preliminares

En este capítulo sentamos las bases para el trabajo a venir. Para ello, en la primera sección, recordamos los conceptos y propiedades de generador proyectivo y de cogenerador inyectivo. En la segunda sección, hacemos una breve exposición sobre la dimensión proyectiva y la dimensión inyectiva de un R-módulo. Finalmente, motivados por las construcciones hechas en las primeras secciones, en la tercera sección se definen las clases necesarias para modelar las propiedades de los R-módulos proyectivos e inyectivos.

1.1. Nociones básicas

A lo largo de este trabajo se consideran sólo anillos asociativos con 1. Dado un anillo R, $\operatorname{Mod}(R)$ denotará a la categoría de R-módulos a izquierda y $\operatorname{Mod}(R^{op})$ a la categoría de R-módulos a derecha. En general trabajaremos con módulos a izquierda por lo que por un R-módulo se debe entender un R-módulo a izquierda, a menos que se mencione lo contrario. Dados R y S anillos, diremos que un grupo abeliano M es un $R-S$ bimódulo, si es un R-módulo a izquierda, S-módulo a derecha y satisface la propiedad de asociatividad

$$r(ms) = (rm)s \quad \forall r \in R \,\forall m \in M \,\forall s \in S.$$

Denotaremos por $\operatorname{Mod}(R-S)$ a la categoría de $R-S$ bimódulos.

Sea R un anillo. Es un hecho bien sabido que $\operatorname{Mod}(R)$ es una categoría abeliana que tiene productos y coproductos arbitrarios, por lo que satisface las siguientes condiciones:

- tiene objeto cero, el cual denotamos como 0;
- $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ es un grupo abeliano para todo par de R-módulos M, N;
- la composición distribuye la operación aditiva de $\operatorname{Hom}_R(M, N)$;
- existe el coproducto de cualquier familia de R-módulos, a saber, dada una familia de R-módulos $\{M_i\}_{i\in I}$ denotamos por

$$\bigoplus_{i\in I} M_i$$

a dicho coproducto; dados un R-módulo M y un cardinal α, el coproducto de α copias de M lo denotamos como

$$M^{(\alpha)};$$

- existe el producto de cualquier familia de R-módulos, a saber, dada una familia de R-módulos $\{M_i\}_{i\in I}$ denotamos por

$$\prod_{i\in I} M_i$$

a dicho producto; dado un R-módulo M y un cardinal α, el producto de α copias de M lo denotamos como

$$M^{\alpha};$$

- todo morfismo $f : M \to N$ tiene núcleo y conúcleo, los cuales denotamos como

$$k_f : \mathrm{Ker}\,(f) \to M \quad \text{ y } \quad c_f : N \to \mathrm{Coker}\,(f)\,; \text{ y}$$

- para todo morfismo $f : X \to Y$, el morfismo inducido por las propiedades universales de núcleo y conúcleo

$$\dot{f} : \mathrm{Coker}\,(k_f) \to \mathrm{Ker}\,(c_f)$$

es un isomorfismo.

En esta sección recordaremos algunas propiedades básicas de $\mathrm{Mod}\,(R)$, relacionadas con sus generadores y cogeneradores, así como algunas propiedades homológicas.

Definición 1.1. Sea $L \in \mathrm{Mod}\,(R)$.

(a) Decimos que L es proyectivo si para toda sucesión exacta

$$0 \to N \to M \xrightarrow{p} K \to 0.$$

la función $\mathrm{Hom}_R(L, p)$ es suprayectiva. A la clase de R-módulos proyectivos la denotamos como $\mathrm{Proj}\,(R)$.

(b) Decimos que L es inyectivo si para toda sucesión exacta

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \to K \to 0.$$

la función $\mathrm{Hom}_R(i, L)$ es suprayectiva. A la clase de R-módulos inyectivos la denotamos como $\mathrm{Inj}\,(R)$.

Para empezar, recordamos que $\mathrm{Mod}\,(R)$ es una categoría con suficientes proyectivos e inyectivos. Es decir, para todo R-módulo M existe un epimorfismo $P \to M$ con

$P \in \operatorname{Proj}(R)$ y un monomorfismo $M \to Q$ con $Q \in \operatorname{Inj}(R)$, donde $\operatorname{Proj}(R)$ denota la clase de módulos proyectivo e $\operatorname{Inj}(R)$ la clase de los módulos inyectivos. Además, para todo módulo M existe un módulo inyectivo $E(M)$, que recibe el nombre de envolvente inyectiva de M, que admite un monomorfismo esencial $i : M \to E(M)$, es decir $\operatorname{Im}(i)$ es un submódulo esencial, lo que quiere decir que $\operatorname{Im}(i) \cap N \neq 0$ para todo submódulo no nulo N de M.

Más aún, en $\operatorname{Mod}(R)$ existe un generador proyectivo, es decir un módulo proyectivo P tal que para todo módulo M, existe un epimorfismo $P^{(X)} \to M$ para algún conjunto X. Dicho R-módulo es por supuesto el anillo mismo, ya que para todo módulo M tenemos el epimorfismo

$$\begin{aligned} R^{(M)} &\to M \\ (r_m)_{m\in M} &\mapsto \sum_{m\in M} r_m m. \end{aligned}$$

La noción dual de un generador proyectivo es la de cogenerador inyectivo, que se define como un R-módulo inyectivo Q tal que para todo R-módulo M existe un monomorfismo $M \to Q^X$ para algún conjunto X.

La existencia de un cogenerador inyectivo se sigue de la serie de hechos que contiene la siguiente proposición. Para ello recordamos que un cogenerador en $\operatorname{Mod}(R)$ es un R-módulo X tal que todo R-módulo M admite un monomorfismo $M \to X^\alpha$ para algún cardinal α.

Proposición 1.2. *[Lam99] Para un anillo R, las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) Dado un R-módulo X, los siguientes enunciados son equivalentes.

  (a1) $\operatorname{Hom}_R(\_, X)$ *es un funtor fiel;*

  (a2) para todo R-módulo $N \neq 0$ y $0 \neq n \in N$, existe un morfismo $g : N \to X$ tal que $g(n) \neq 0$;

  (a3) X es un cogenerador en $\operatorname{Mod}(R)$*; y*

  (a4) para todo R-módulo simple S, existe un monomorfismo $E(S) \to X$.

(b) Las clases de isomorfía de R-módulos simples forman un conjunto.

(c) Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ un conjunto de representantes de las clases de R-módulos simples. Entonces el coproducto $\bigoplus_{i\in I} E(S_i)$ es un cogenerador, donde $E(S)$ denota la envolvente inyectiva de S en $\operatorname{Mod}(R)$.

(d) Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ un conjunto de representantes de las clases de R-módulos simples. Entonces el módulo $E(\bigoplus_{i\in I} S_i)$ es un cogenerador inyectivo en $\operatorname{Mod}(R)$.

Demostración.

(a) $(a1) \Rightarrow (a2)$ Sea $N \in \operatorname{Mod}(R)$ tal que $N \neq 0$. Consideremos $0 \neq n \in N$ y $f : R \to N$ el morfismo definido como $f(r) = rn$. Dado que $\operatorname{Hom}_R(\_, X)$ es fiel y $f \neq 0$, existe un morfismo $g : N \to X$ tal que $gf \neq 0$. Por lo tanto,

$$g(n) = gf(1) \neq 0.$$

$(a2) \Rightarrow (a3)$ Sea $N \in \operatorname{Mod}(R)$. Para $N = 0$ es claro que existe un monomorfismo $N \to X$. Para $N \neq 0$ y $0 \neq n \in N$ consideramos $f_n : N \to X$ tal que $f_n(n) \neq 0$. En tal caso, tenemos el monomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : N &\to \prod_{n \in N - \{0\}} X \\ x &\mapsto (f_n(x))_{n \in N - \{0\}}. \end{aligned}$$

$(a3) \Rightarrow (a1)$ Sean $N, M \in \operatorname{Mod}(R)$. Veamos que

$$\operatorname{Hom}_R(\_, X) : \operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{Hom}_R(N, X), \operatorname{Hom}_R(M, X))$$

es inyectivo. Consideremos un morfismo no nulo $f : M \to N$ y un monomorfismo

$$\psi = (\psi_i)_{i \in I} : N \to X^I.$$

Entonces $\psi f \neq 0$ debido a que ψ es un monomorfismo, así que existe $i \in I$ tal que $\psi_i f \neq 0$, probándose que $\operatorname{Hom}_R(f, X) \neq 0$.
$(a2) \Rightarrow (a4)$ Sea S un módulo simple y $E(S)$ su envolvente inyectiva. Por lo que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que S es un submódulo esencial de $E(S)$. Dado que S es cíclico, por (a2) sabemos que existe un morfismo $g : E(S) \to X$ con $g(s) \neq 0$ para todo $s \in S - \{0\}$. Por lo tanto, $\operatorname{Ker}(g) \cap S = 0$, así que $\operatorname{Ker}(g) = 0$ debido a que S es esencial en $E(S)$.
$(a4) \Rightarrow (a2)$ Sean N un módulo no nulo y $0 \neq x \in N$. Dado que xR es finitamente generado, tiene un submódulo maximal M. Sea $S = xR/M$. Tomando la composición de la inclusión $S \to E(S)$ con la proyección natural $xR \to S$, obtenemos un morfismo $xR \to E(S)$ no nulo, el cual se extiende a un morfismo $N \to E(S)$ por la inyectividad de $E(S)$. Luego, como X contiene una copia de $E(S)$ se sigue de lo anterior que existe un morfismo $g : N \to X$ tal que $g(x) \neq 0$.

(b) En efecto, dado que para todo simple S existe un epimorfismo del anillo a S, se tiene que las clases de simples están en biyección con una subclase de la clase de cocientes del anillo, la cual es un conjunto.

(c) Se sigue del punto (a4), pues para todo módulo simple S, existe un monomorfismo $E(S) \to \bigoplus_{i \in I} E(S_i)$.

(d) Se sigue del punto (a4), pues para todo R-módulo simple existe un monomorfismo $S \to \bigoplus_{i \in I} S_i \to E(\bigoplus_{i \in I} S_i)$ que se factoriza a través de la envolvente inyectiva

$S \to E(S)$ debido a que $E(S)$ es un R-módulo inyectivo.

□

La importancia de que $\mathrm{Mod}\,(R)$ tenga suficientes proyectivos e inyectivos es que de ello se sigue de la existencia de resoluciones proyectivas y corresoluciones inyectivas. Es decir, para todo R-módulo N existen sucesiones exactas

$$... \to P_n \overset{g_n}{\to} ... \overset{g_1}{\to} P_0 \overset{g_0}{\to} N \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to N \overset{f_0}{\to} E_0 \overset{f_1}{\to} ... \overset{f_n}{\to} E_n \to ...$$

con $E_i \in \mathrm{Inj}\,(R)$ y $P_i \in \mathrm{Proj}\,(R)$ para todo i, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *Todo R-módulo admite al menos una resolución proyectiva y una corresolución inyectiva.*

Demostración. Dado un R-módulo X, existe un monomorfismo $f_0 : X \to I_0$ con $I_0 \in \mathrm{Inj}\,(R)$, y un monomorfismo $g_0 : \mathrm{Coker}\,(f_0) \to I_1$ con $I_1 \in \mathrm{Inj}\,(R)$. Además, si $f_1 := g_0 c_0$ claramente se tiene que $f_1 f_0 = 0$. Recursivamente, se construye $f_n := g_{n-1} c_{n-1}$ que cumple que $f_n f_{n-1} = 0$. Por lo que se obtiene la siguiente sucesión exacta.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f_0"] & I_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr] & I_1 \arrow[r, "f_2"] & \cdots \arrow[r, "f_{n-1}"] & I_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[dr] & I_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] & {} \\
 & & & \mathrm{coker}(f_0) \arrow[u] & & & \mathrm{coker}(f_n) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Análogamente, se prueba la existencia de resoluciones proyectivas. □

Cabe hacer el siguiente par definiciones.

Definición 1.4. Sean $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$, $k \geq 0$ y

$$\eta : \quad ... \to P_n \overset{f_n}{\to} ... \overset{f_1}{\to} P_0 \overset{f_0}{\to} M \to 0$$

una resolución proyectiva. La k-ésima sizigia de M en η se define como el R-módulo $\mathrm{Im}\,(f_k)$. Denotamos por a la clase de las sizigias k-ésimas de M sobre cualquier resolución proyectiva de M.

Sea $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos. Consideraremos la siguiente clase de R-módulos

$$\Omega^k(\mathcal{M}) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \Omega^k(M).$$

Diremos que $\mathcal{M}$ es cerrada por sizigias en caso de que $\Omega^1(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$.

Definición 1.5. Sean $M \in \operatorname{Mod}(R)$, $k \geq 0$ y

$$\eta : \quad 0 \to M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} I_n \to \dots$$

una corresolución inyectiva. La k-ésima cosizigia de M en η se define como el módulo $\operatorname{Im}(f_k)$. Denotamos por $\Omega_k(M)$ a la clase de las cosizigias k-ésimas de M sobre cualquier corresolución inyectiva de M.

Sea $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos. Consideraremos la siguiente clase de R-módulos

$$\Omega_k(\mathcal{M}) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \Omega_k(M).$$

Diremos que $\mathcal{M}$ es cerrada por cosizigias en caso de que $\Omega_1(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$.

Dado que las resoluciones proyectivas y las corresoluciones inyectivas se utilizan para definir los funtores derivados, es que dichos objetos son estructuras básicas en el álgebra homológica.

A continuación recordamos los funtores derivados que utilizaremos con más frecuencia a lo largo de este trabajo y algunas de sus propiedades más importantes.

Definición 1.6. Dada una resolución proyectiva

$$X : \quad \dots \to P_n \xrightarrow{f_n} \dots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

de un R-módulo N, consideramos el complejo

$$\bar{X} : \quad \dots \to P_n \xrightarrow{f_n} \dots \xrightarrow{f_1} P_0 \to 0$$

y el funtor

$$F = \operatorname{Hom}_R(\_, M) : \operatorname{Mod}(R) \to Ab.$$

El n-ésimo funtor de extensión de N por M es el n-ésimo funtor derecho derivado de F. Es decir,

$$E_n(N, M) := H_n(\operatorname{Hom}_R(\bar{X}, M)).$$

De manera similar, dada una corresolución inyectiva

$$Y : \quad 0 \to N \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} I_n \to \dots$$

de un R-módulo N, consideramos el complejo

$$\bar{Y} : \quad 0 \to I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \to \dots \to I_n \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

y el funtor
$$F = \mathrm{Hom}_R(M, \_) : \mathrm{Mod}(R) \to A.$$
El n-ésimo funtor de extensión de N por M es el n-ésimo funtor izquierdo derivado de F. Es decir,
$$E^n(M,N) = H_n(\mathrm{Hom}_R(M,\bar{X})).$$
De hecho, se puede probar que $E^n(M,N) \cong E_n(M,N)$ y lo denotamos por
$$\mathrm{Ext}_R^n(M,N).$$

Por otro lado, considerando los funtores
$$T_1 = \_ \otimes M : \mathrm{Mod}(R^{op}) \to Ab$$
y $T_2 = M \otimes \_ : \mathrm{Mod}(R) \to Ab$, el n-ésimo funtor de torsión de N por M es el n-ésimo funtor derecho derivado de F, o equivalentemente de G, es decir
$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) := H_n(\bar{X} \otimes N) \cong H_n(N \otimes \bar{X}) =: \mathrm{Tor}_n^R(N,M).$$

Una propiedad clásica de los funtores $\mathrm{Ext}_R^n(\_,\_)$ es el lema del corrimiento que citamos a continuación.

Lema 1.7. *Sean $M, N \in \mathrm{Mod}(R)$ y*
$$\ldots \to P_n \xrightarrow{f_n} \ldots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} N \to 0$$
una resolución proyectiva de N. Si $K_{i+1} := \mathrm{Ker}(f_i)$ para todo $i \geq 0$, entonces para todo $n, k > 0$ y $Y \in \mathrm{Mod}(R)$ existen isomorfismos de funtores
$$\mathrm{Ext}_R^k(K_n, Y) \cong \mathrm{Ext}_R^{k+n}(N,Y).$$

Dualmente, dada corresolución inyectiva de N
$$0 \to N \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{f_1} \ldots \xrightarrow{f_n} E_n \to \ldots.$$
Si $L_{i+1} := \mathrm{Coker}(f_i)$ para todo $i \geq 0$, entonces para todo $n, k > 0$ y $Y \in \mathrm{Mod}(R)$ existen isomorfismos de funtores
$$\mathrm{Ext}_R^k(Y, L_n) \cong \mathrm{Ext}_R^{k+n}(Y,N).$$

Demostración. En 1.33 se prueba un resultado más general, por lo que se omite la prueba en este momento. $\square$

La siguiente proposición caracteriza a los módulos proyectivos e inyectivos usando el funtor $\operatorname{Ext}^i_R(\_,\_)$. Cabe señalar que, a pesar de su sencillez, dicha caracterización tiene importantes consecuencias que nos llevaran a buscar modelarla en las secciones venideras.

Proposición 1.8. *Para $N \in \operatorname{Mod}(R)$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) N *es inyectivo.*

(b) $\operatorname{Ext}^1_R(\_, N) = 0$.

(c) $\operatorname{Ext}^n_R(\_, N)$ *para todo* $n \geq 1$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ y $(a) \Rightarrow (c)$ son inmediatos. $(c) \Rightarrow (b)$ es trivial. Basta probar $(b) \Rightarrow (a)$.

Supóngase que $\operatorname{Ext}^1_R(\_, N) = 0$. Para probar que N es inyectivo, basta ver que toda sucesión exacta que empieza en N se escinde. Consideremos una sucesión exacta

$$\eta: \ 0 \to N \xrightarrow{f} M \to K \to 0.$$

Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_R(\_, N)$ a dicha sucesión, se obtiene la sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(K, N) \to \operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_R(N, N) \to \operatorname{Ext}^1_R(K, N) = 0,$$

lo que implica que f^* es un epimorfismo. Entonces, existe $g \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$ tal que $fg = 1_N$. Por lo tanto, la sucesión exacta corta η se escinde. □

Observación 1.9. *Para $N \in \operatorname{Mod}(R)$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) N *es proyectivo.*

(b) $\operatorname{Ext}^1_R(N, \_) = 0$.

(c) $\operatorname{Ext}^n_R(N, \_) = 0$ *para todo* $n \geq 1$.

Finalmente, los últimos resultados de esta sección, contienen importantes isomorfismos naturales que utilizaremos más adelante.

Teorema 1.10. *Dada una familia de R-módulos $(M_i)_{i\in I}$ y un R-módulo N, los siguientes enunciados se satisfacen.*

(a) $\operatorname{Ext}^n_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}^n_R(M_i, N)$.

(b) $\operatorname{Ext}^n_R(N, \prod_{i\in I} M_i) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}^n_R(N, M_i)$.

Demostración.

(a) Para cada $i \in I$, se toma una sucesión exacta $0 \to K_i \to P_i \to M_i \to 0$ con P_i proyectivo. Lo que lleva a una sucesión exacta

$$0 \to \bigoplus_{i\in I} K_i \to \bigoplus_{i\in I} P_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i \to 0.$$

Ahora, se prueba la proposición por inducción sobre n. Para $n = 0$, la proposición se cumple, pues

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N).$$

Para $n = 1$, se considera el siguiente diagrama, construido con las sucesiones exactas largas.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in X} P_i, N) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in X} K_i, N) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Ext}^1_R(\bigoplus_{i\in X} M_i, N) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
\prod_{i\in X} \mathrm{Hom}_R(P_i, N) \arrow[r] & \prod_{i\in X} \mathrm{Hom}_R(K_i, N) \arrow[r] & \prod_{i\in X} \mathrm{Ext}^1_R(M_i, N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El diagrama es conmutativo por el caso anterior, lo que induce el isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^1_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Ext}^1_R(M_i, N).$$

Suponiendo la proposición verdadera para $2 \leq n \leq k$ se prueba para $k + 1$. Para ello, se observa que dado un R-módulo N, existe el siguiente diagrama dado por las sucesiones exactas largas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Ext}^n_R(\bigoplus_{i\in X} K_i, N) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Ext}^{n+1}_R(\bigoplus_{i\in X} M_i, N) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \prod_{i\in X} \mathrm{Ext}^n_R(K_i, N) \arrow[r] & \prod_{i\in X} \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M_i, N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

el diagrama conmuta, lo que induce el isomorfismo deseado.

□

Lema 1.11. *(1.2.11 [GT06]) Sean R y S anillos, $A \in \mathrm{Mod}\,(R^{op})$, $n \in \mathbb{N}$, B un $R - S$ bimódulo y $E \in \mathrm{Mod}\,(S)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) Existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, E)) \cong \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, E).$$

(b) En caso de que E sea inyectivo, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\operatorname{Ext}_R^n(A, \operatorname{Hom}_S(B, E)) \cong \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Tor}_n^R(A, B), E).$$

(c) Consideremos una resolución proyectiva

$$\ldots \to P_n \to \ldots \to P_0 \to M \to 0,$$

donde P_i es finitamente generado para todo $i \leq m+1$. Entonces, para toda familia de módulos $\{N_j\}_{j \in J}$, se tiene que

$$\operatorname{Ext}_R^i\left(M, \bigoplus_{j \in J} N_j\right) \cong \bigoplus_{j \in J} \operatorname{Ext}_R^i(M, N_j).$$

para todo $i \leq m$.

Demostración.

(a) Consideremos la función

$$\begin{aligned} \phi(A, B, E) : \operatorname{Hom}_R(A, \operatorname{Hom}_S(B, E)) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_S(A \otimes_R B, E) \\ f &\longmapsto \left(\sum_i a_i \otimes b_i \overset{\alpha_f}{\mapsto} \sum_i f(a_i)(b_i)\right). \end{aligned}$$

Verifiquemos que la colección $\phi = \{\phi(A, B, E)\}$ es el isomorfismo natural buscado. En efecto, para cada terna, tenemos la función

$$\begin{aligned} \psi(A, B, E) : \operatorname{Hom}_S(A \otimes_R B, E) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_R(A, \operatorname{Hom}_S(B, E)) \\ \alpha &\longmapsto \left(a \overset{f_\alpha}{\mapsto} (\alpha(a \otimes \_))\right), \end{aligned}$$

la cual es la inversa de cada $\phi(A, B, E)$, puesto que

$$\phi(A, B, E)\psi(A, B, E)(\alpha)(a \otimes b) = \phi(A, B, E)(f_\alpha)(a \otimes b) = f_\alpha(a)(b) = \alpha(a \otimes b)$$

$$\psi(A, B, E)\phi(A, B, E)(f)(a) = \psi(A, B, E)(\alpha_f)(a) = \alpha_f(a \otimes \_) = f(a).$$

Es rutina probar que es una transformación natural.

(b) Sea

$$\ldots \to P_n \to \ldots \to P_0 \to A \to 0$$

una resolución proyectiva de A. Entonces

$$\operatorname{Ext}_R^n(A, \operatorname{Hom}_S(B, E))$$

es isomorfo al n-ésimo grupo de cohomología del complejo

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(P_0, \operatorname{Hom}_S(B,E)) \to ... \to \operatorname{Hom}_R(P_n, \operatorname{Hom}_S(B,E)) \to ...$$

Por (a), este complejo es isomorfo al complejo

$$0 \to \operatorname{Hom}_S(P_0 \otimes_R B, E) \to ... \to \operatorname{Hom}_S(P_n \otimes_R B, E) \to ...$$

Además, como E es inyectivo, $\operatorname{Hom}_S(\_, E)$ es exacto, y así, el n-ésimo grupo de cohomología es isomorfo a $\operatorname{Hom}_S(\operatorname{Tor}_n^R(A,B), E)$.

(c) Sea

$$F_{m+1} \overset{f_{m+1}}{\to} ... \overset{f_1}{\to} F_0 \overset{f_0}{\to} M \to 0$$

una sucesión exacta con F_i proyectivo y finitamente generado para todo i. Ahora, si $N = \bigoplus_{j\in J} N_j$, al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_R(\_, N)$ se obtiene el complejo

$$\dot{X}: \qquad \operatorname{Hom}_R(F_0, N) \overset{\operatorname{Hom}_R(f_1,N)}{\longrightarrow} .... \overset{\operatorname{Hom}_R(f_k,N)}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_R(F_k, N) \to ...$$

Por otro lado, al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_R(\_, N_i)$, se obtienen los complejos

$$\dot{X}_i : \operatorname{Hom}_R(F_0, N_i) \overset{\operatorname{Hom}_R(f_1,N_i)}{\longrightarrow} .... \overset{\operatorname{Hom}_R(f_k,N_i)}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_R(F_k, N_i) \to ...$$

Ahora, se puede probar fácilmente que $\bigoplus_{i\in J} \dot{X}_i \cong \dot{X}$. En efecto, para cada entero $m+1 \geq k \geq 0$, observamos que como F_k es finitamente generado, para todo $g : F_k \to \bigoplus_{j\in J} N_j$ existe un subconjunto finito $J_g \subseteq J$ tal que

$$g = \sum_{j\in J_g} \eta_j \pi_j g,$$

donde $\eta_j : N_j \to N$ es la inclusión canónica y $\pi_j : N \to N_j$ la proyección natural. De modo que, la colección de morfismos

$$\left\{ \varphi_k : \operatorname{Hom}_R(F_k, \bigoplus_{i\in J} N_j) \to \bigoplus_{j\in J} \operatorname{Hom}_R(F_k, N_j) \right\}_{k=0}^{m+1},$$

donde

$$\varphi_k(g) = (g_j)_{j\in J} \text{ con } g_j = \begin{cases} \eta_j\pi_j g & \text{si } j \in J_g, \\ 0 & \text{si } j \notin J_g, \end{cases}$$

define un isomorfismo de complejos $\varphi : \dot{X} \to \bigoplus_{i\in J} \dot{X}_i$.

Con esto se concluye que

$$\operatorname{Ext}_R^i\left(M, \bigoplus_{j\in J} N_j\right) \cong \bigoplus_{j\in J} \operatorname{Ext}_R^i\left(M, N_j\right),$$

ya que la homología de una suma directa de complejos es la suma directa de las homologías.

□

Observación 1.12. *También podemos contar con la siguiente versión de los isomorfismos antes vistos. Dados $A \in \operatorname{Mod}(R)$, $B \in \operatorname{Mod}(S-R)$ y $E \in \operatorname{Mod}(S)$, existe un isomorfismo natural:*

$$\operatorname{Hom}_R(A, Hom_S(B,E)) \cong \operatorname{Hom}_S(B \otimes_R A, E),$$

y en caso de que E sea inyectivo,

$$\operatorname{Ext}_R^n\left(A, Hom_S(B,E)\right) \cong Hom_S(\operatorname{Tor}_n^R\left(B,A\right), E).$$

Más aún, si S es un anillo conmutativo y R un S-álgebra, tenemos que

$$\operatorname{Ext}_R^n\left(A_R, Hom_S({}_RB_S, E_S)\right) \cong Hom_S(\operatorname{Tor}_n^R\left(A_R, B_S\right), E_S) \cong \operatorname{Ext}_R^n\left(B, Hom_S(A,E)\right).$$

1.2. Dimensión proyectiva y dimensión inyectiva de un módulo

Una interesante aplicación de los conceptos anteriores, es la definición de la dimensión proyectiva e inyectiva de un R-módulo. A lo largo de esta sección, definiremos éstas y exploraremos algunas propiedades.

Definición 1.13. Sea M un R-módulo.

- La dimensión proyectiva de M, denotada como pd (M), es el menor entero n tal que existe una resolución proyectiva

$$\to P_k \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

  con $P_i = 0$ para todo $i > n$. Si no existe tal entero, entonces se dice que la dimensión proyectiva de M es ∞.

- La dimensión inyectiva de M, denotada como id (M), es el menor entero n tal que existe una resolución inyectiva

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \ldots \to I_k \to \ldots$$

con $I_i = 0$ para todo $i > n$. Si no existe tal entero, entonces se dice que la dimensión inyectiva de M es ∞.

Ejemplo 1.14. M es proyectivo si y sólo si pd $(M) = 0$. Así como, M es inyectivo si y sólo si id $(M) = 0$.

Ejemplo 1.15. Para todo entero positivo m, se cumple que pd $(\mathbb{Z}_m) = 1$. En efecto, $\mathbb{Z}_m$ no es proyectivo, ya que los proyectivos sobre $\mathbb{Z}$ son libres, por lo que pd $(\mathbb{Z}_m) > 0$ y se tiene la resolución proyectiva

$$... \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \to 0$$

Ejemplo 1.16. Para todo $m = p^k$, con p primo, se cumple que id $(\mathbb{Z}_m) = 1$. En efecto, $\mathbb{Z}_m$ no es inyectivo, ya que los inyectivos sobre $\mathbb{Z}$ son divisibles, por lo que id $(\mathbb{Z}_m) > 0$ y se tiene la corresolución inyectiva

$$0 \to \mathbb{Z}_{p^k} \to \mathbb{Z}_{p^\infty} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}_{p^\infty} \to 0 \to ...$$

Ejemplo 1.17. Claramente pd $(\mathbb{Z}) = 0$ y id $(\mathbb{Z}) = 1$, ya que $\mathbb{Z}$ no es inyectivo y se tiene la corresolución inyectiva

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0 \to ...$$

De igual manera que caracterizamos los módulos proyectivos e inyectivos, a partir del funtor de extensión, podemos caracterizar a los módulos de dimensión proyectiva n con ayuda del funtor de extensión como mostramos a continuación.

Teorema 1.18. *Para un R-módulo M, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) pd $M \leq n$.

(b) $\mathrm{Ext}_R^k(M, \_) = 0$ *para todo* $k > n$.

(c) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, \_) = 0$.

(d) Si se tiene una sucesión exacta

$$0 \to L_n \to P_{n-1} \to ... \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

con P_i proyectivo para toda $i \in \{0, ..., n-1\}$, entonces L_n es proyectivo.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Si pd $M \leq n$, existe una resolución proyectiva

$$P:\, 0 \to P_n \to ... \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$

Entonces, dado un R-módulo N, se tiene que $\mathrm{Hom}_R(P_k, N) = 0$ para todo $k > n$, lo que implica que el k-ésimo módulo de homología de $\mathrm{Hom}_R(\bar{P}, N)$ es igual a 0 para todo $k > n$; es decir, $\mathrm{Ext}_R^k(M, N) = 0$ para todo $k > n$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Trivial.

$(c) \Rightarrow (d)$ Consideremos una sucesión exacta

$$0 \to L_n \to P_{n-1} \overset{f_{n-1}}{\to} ... \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

con P_i proyectivo para toda $i \in \{0, ..., n-1\}$. Claramente $L_n = \mathrm{Ker}(f_{n-1})$ y así, por 1.7, se tiene que $0 = \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, N) \cong \mathrm{Ext}_R^1(L, N)$, lo que implica que L es proyectivo.

$(d) \Rightarrow (a)$ Sea

$$\to P_{n-1} \overset{f_{n-1}}{\to} P_{n-1} \to ... \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

una resolución proyectiva de M. Por (d) tenemos que la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}(f_{n-1}) \to P_{n-1} \overset{f_{n-1}}{\to} ... \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

es una resolución proyectiva, lo que implica que $\mathrm{pd}\, M \leq n$. □

Observación 1.19. *Para un R-módulo M, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\mathrm{id}\ M \leq n$.

(b) $\mathrm{Ext}_R^k(\_, M) = 0$ *para todo* $k > n$.

(c) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(\_, M) = 0$.

(d) Si se tiene una sucesión exacta

$$0 \to M \to I_0 \to I_1 \to ... \to I_{n-1} \to L_n \to 0,$$

$I_i \in \mathrm{Inj}\,(R)$ *para toda* $i \in \{0, ..., n-1\}$*, entonces* $L_n \in \mathrm{Inj}\,(R)$.

Corolario 1.20. *Para todo R-módulo M, se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) si M no es proyectivo, entonces $\mathrm{pd}\ M = sup\{n \geq 1 \,|\, \mathrm{Ext}_R^n(M, \_) \neq 0\}$*, y*

(b) si M no es inyectivo, entonces $\mathrm{id}\ M = sup\{n \geq 1 \,|\, \mathrm{Ext}_R^n(\_, M) \neq 0\}$.

Corolario 1.21. *Para una familia de R-módulos $(M_i)_{i\in I}$, los siguientes enunciados se satisfacen*

(a) $\mathrm{pd}\ \bigoplus_{i\in I} M_i = sup\{\mathrm{pd}\ M_i \,|\, i \in I\}$,

(b) $\mathrm{id}\ \prod_{i\in I} M_i = sup\{\mathrm{id}\ M_i \,|\, i \in I\}$.

Demostración. Podemos asumir que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ no es proyectivo. Luego, por el corolario anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{pd} \bigoplus_{i\in I} M_i &= sup\{n \geq 1 \mid \operatorname{Ext}^n_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, \_) \neq 0\} \\ &= sup\{n \geq 1 \mid \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}^n_R(M_i, \_) \neq 0\} \\ &= sup\{n \geq 1 \mid \operatorname{Ext}^n_R(M_i, \_) \neq 0 \text{ para algún } i \in I\} \\ &= sup\{\operatorname{pd} M_i \mid i \in I\} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.22. Para todo entero $m > 1$, $\operatorname{id} \mathbb{Z}_m = 1$. En efecto, por la factorización $m = p_1^{k_1}...p_n^{k_n}$ en primos distintos $p_1, ..., p_n$, sabemos que

$$\mathbb{Z}_m \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}.$$

Luego, utilizando el corolario tenemos que

$$\operatorname{id}(\mathbb{Z}_m) = sup\{\operatorname{id} \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}} \mid i = 1, ..., n\} = 1,$$

por 1.16.

Una propiedad interesante, la cual relaciona las dimensiones proyectivas de los módulos en una sucesión exacta corta, es la siguiente.

Lema 1.23. *Sean $\mathcal{X}$ una clase de módulos y $0 \to A \to B \to C \to 0$ una sucesión exacta. Las siguientes desigualdades se satisfacen:*

(a) $\operatorname{id}(B) \leq \text{máx}\{\operatorname{id}(A), \operatorname{id}(C)\}$ *y se da la igualdad si* $\operatorname{id}(A) = \operatorname{id}(C)$,

(b) $\operatorname{id}(A) \leq \text{máx}\{\operatorname{id}(B), \operatorname{id}(C) + 1\}$ *y se da la igualdad si* $\operatorname{id}(B) = \operatorname{id}(C)$,

(c) $\operatorname{id}(C) \leq \text{máx}\{\operatorname{id}(B), \operatorname{id}(A) - 1\}$ *y se da la igualdad si* $\operatorname{id}(B) = \operatorname{id}(A)$,

(d) $\operatorname{pd}(B) \leq \text{máx}\{\operatorname{pd}(A), \operatorname{pd}(C)\}$ *y se da la igualdad si* $\operatorname{pd}(A) = \operatorname{pd}(C)$,

(e) $\operatorname{pd}(A) \leq \text{máx}\{\operatorname{pd}(B), \operatorname{pd}(C) - 1\}$ *y se da la igualdad si* $\operatorname{pd}(B) = \operatorname{pd}(C)$,

(f) $\operatorname{pd}(C) \leq \text{máx}\{\operatorname{pd}(A) + 1, \operatorname{pd}(B)\}$ *y se da la igualdad si* $\operatorname{pd}(A) = \operatorname{pd}(C)$.

Demostración. En 2.53 se prueba una forma más general de este resultado, por lo que se omite la prueba en este momento. □

Recordemos que todo morfismo de anillos $\phi : R \to S$, induce una estructura de R-módulo a todo S-módulo M mediante la acción de R en M

$$rm := \phi(r)m \quad \forall m \in M \; \forall r \in R.$$

El procedimiento anterior recibe el nombre de cambio de anillos.

Terminamos esta sección con un par de resultados relacionados con el comportamiento entre las dimensiones homológicas y los cambios de anillo. En este contexto, dado un morfismo de anillos $\phi : R \to S$ y un S-módulo M, denotaremos por $\operatorname{pd}_R(M)$ a la dimensión proyectiva del R-módulo M y como $\operatorname{pd}_S(M)$ a la dimensión proyectiva del S-módulo M.

Teorema 1.24 (Primer Teorema de Cambio de Anillos). *[Wei97] Sea x un elemento central de un anillo R que no sea divisor del cero. Si A es un $R/\langle x\rangle$-módulo no nulo con $\operatorname{pd}_{R/\langle x\rangle}(A) < \infty$, donde $\langle x\rangle$ denota al ideal bilateral generado por x, entonces*

$$\operatorname{pd}_R(A) = 1 + \operatorname{pd}_{R/\langle x\rangle}(A).$$

Demostración. Sea A un $R/\langle x\rangle$-módulo no nulo con $\operatorname{pd}_{R/\langle x\rangle}(A) < \infty$. Cabe hacer las siguientes observaciones.

(a) La proyección canónica $\pi : R \to R/\langle x\rangle$ induce un cambio de anillos, por el que todo $R/\langle x\rangle$-módulo M es un R-módulo tal que $xM = 0$.

(b) Como x no es divisor de cero, la función $f : R \to Rx$ definida como $f(r) = rx$ es un isomorfismo. Por lo tanto, Rx es un R-módulo proyectivo.

(c) Como x no es divisor de cero se sigue que $xa \neq 0$ para todo $a \in F - \{0\}$, donde F es un R-módulo libre. En particular, $xP \neq 0$ para todo R-módulo proyectivo no nulo P.

Ahora, A es un R-módulo tal que $xA = 0$, lo que implica que no es proyectivo. Por lo tanto $\operatorname{pd}_R(A) \geq 1$. Veamos por inducción sobre $\operatorname{pd}_{R/\langle x\rangle}(A)$ que

$$\operatorname{pd}_{R/\langle x\rangle}(A) + 1 = \operatorname{pd}_R(A).$$

Si $\operatorname{pd}_{R/\langle x\rangle}(A) = 0$, al ser proyectivo es sumando directo de $(R/\langle x\rangle)^{(\alpha)}$ para algún cardinal α. Por lo que

$$\operatorname{pd}_R(A) \leq \operatorname{pd}_R\left((R/\langle x\rangle)^{(\alpha)}\right) = \operatorname{pd}_R(R/\langle x\rangle) \leq 1,$$

ya que por la observación (b) tenemos una resolución proyectiva del R-módulo $R/\langle x\rangle$

$$0 \to Rx \to R \xrightarrow{\pi} R/\langle x\rangle \to 0.$$

Por lo tanto, $\operatorname{pd}_R(A) = 1 = 1 + \operatorname{pd}_{R/\langle x\rangle}(A)$ pues sabemos que $\operatorname{pd}_R(A) \geq 1$.

Supongamos que $\operatorname{pd}_{R/\langle x\rangle}(A) > 0$. En este caso existe una sucesión exacta de $R/\langle x\rangle$-módulos

$$0 \to M \to P \to A \to 0$$

con P proyectivo y $\mathrm{pd}_{R/\langle x\rangle}(M) = \mathrm{pd}_{R/\langle x\rangle}(A) - 1$. Se sigue por hipotesis de inducción que

$$\mathrm{pd}_R(M) = 1 + \mathrm{pd}_{R/\langle x\rangle}(M) = \mathrm{pd}_{R/\langle x\rangle}(A) \geq 1.$$

Del lema anterior, podemos concluir que

$$\mathrm{pd}_R(A) = \text{máx}\{1 + \mathrm{pd}_R(M), \mathrm{pd}_R(P)\} = 1 + \mathrm{pd}_R(M)$$

en caso de que $\mathrm{pd}_R(M) = \mathrm{pd}_R(P)$. Sunpongamos que $\mathrm{pd}_R(M) \neq \mathrm{pd}_R(P)$. Luego, $\mathrm{pd}_R(M) > 1$, así que $\mathrm{pd}_R(A) \neq 1$ pues de lo contrario tendríamos

$$1 < \mathrm{pd}_R(M) = \text{máx}\{\mathrm{pd}_R(A) - 1, \mathrm{pd}_R(P)\} = 1,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathrm{pd}_R(A) > 1$ y así

$$1 < \mathrm{pd}_R(M) \leq \text{máx}\{\mathrm{pd}_R(A) - 1, \mathrm{pd}_R(P)\} = \mathrm{pd}\,(A) - 1.$$

Por otro lado, también podemos considerar la desigualdad

$$\mathrm{pd}_R(A) \leq \text{máx}\{1 + \mathrm{pd}_R(M), \mathrm{pd}_R(P)\} = 1 + \mathrm{pd}_R(M),$$

que es equivalente a que

$$\mathrm{pd}_R(A) - 1 \leq \mathrm{pd}_R(M).$$

Por lo tanto, $\mathrm{pd}_R(A) = \mathrm{pd}_R(M) + 1 = \mathrm{pd}_{R/\langle x\rangle}(A) + 1$. □

Corolario 1.25. *Sean k un campo y $R = k[x_0, x_1, ..., x_n]$. Entonces*

$$\mathrm{pd}_R(R/\langle x_0, ..., x_n\rangle) = n + 1.$$

Demostración. Lo probaremos por inducción sobre n. Para $n = 0$, tenemos por el teorema anterior que $\mathrm{pd}_R(R/\langle x_0\rangle) = \mathrm{pd}_{R/\langle x_0\rangle}(R/\langle x_0\rangle) + 1 = 0 + 1$.

Supongamos que $n > 0$. Sea $R' = k[x_1, ..., x_n]$. Por hipótesis de inducción

$$\mathrm{pd}_{R'}(R'/\langle x_1, ...x_n\rangle) = n - 1 + 1.$$

Luego, observando que $R' \cong R/\langle x_0\rangle$ y $R'/\langle x_1, ...x_n\rangle \cong R/\langle x_0, x_1, ...x_n\rangle$, podemos concluir por el teorema anterior que

$$\mathrm{pd}_R(R/\langle x_0, ..., x_n\rangle) = \mathrm{pd}_{R/\langle x_0\rangle}(R/\langle x_0, ...x_n\rangle) + 1 = \mathrm{pd}_{R'}(R'/\langle x_0\rangle) + 1 = n + 1.$$

□

Teorema 1.26. *Sean $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de anillos y M_i un R_i-módulo para cada $i \in I$. Si M es el grupo abeliano $\prod_{i\in I} M_i$ con la estructura de $\prod_{i\in I} R_i$-módulo dada por* *la operación*

$$(m_i)(a_i) := (m_i a_i)\ \forall (m_i) \in \prod_{i\in I} M_i\ \forall (a_i) \in \prod_{i\in I} R_i,$$

entonces $\operatorname{pd}_{\prod_{i\in I} R_i}(M) = \sup\left\{\operatorname{pd}_{R_i}(M_i)\right\}_{i\in I}$.

Demostración. Se sigue de que existe un isomorfismo natural de categorías

$$\begin{aligned}\operatorname{Mod}\left(\prod_{i\in I} R_i\right) &\cong \prod_{i\in I} \operatorname{Mod}(R_i)\\ M &\mapsto \prod_{i\in I} e_i M,\end{aligned}$$

donde $e_i := (\delta_{ij} 1_{R_i})_{i\in I}$. De modo que M tiene una resolución proyectiva de longitud n si y sólo si todo M_i tiene una resolución proyectiva de longitud $\leq n$ y existe al menos un $j \in I$ con dicha resolución proyectiva de longitud n. $\square$

Corolario 1.27. *Sean $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de anillos. Si tomamos un R_j-módulo N de dimensión proyectiva n para algún $j \in I$, al tomar*

$$M_i = \begin{cases} N & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

tenemos que $\operatorname{pd}_{\prod_{i\in I} R_i}(M) = n$.

1.3. Algunas clases de módulos

Dado un generador proyectivo P, es fácil ver que la clase de los módulos proyectivos consiste de los sumandos directos de coproductos de P. Por otro lado, hemos visto que esta clase consiste de los módulos X tales que $\operatorname{Ext}^1_R(X, M) = 0$ para cualquier otro módulo M, o equivalentemente de los módulos X tales que $\operatorname{Ext}^k_R(X, M) = 0$ para cualquier otro módulo M y para todo $k > 0$.

De manera similar, dado un cogenerador inyectivo Q, la clase de los módulos inyectivos consiste de los sumandos directos de productos de Q, y se puede caracterizar como la clase de módulos X tales que $\operatorname{Ext}^1_R(M, X) = 0$ para cualquier otro módulo M, o equivalentemente como la clase de módulos X tales que $\operatorname{Ext}^k_R(M, X) = 0$ para cualquier otro módulo M y para todo $k > 0$.

De manera que, para modelar las contrucciones que se hacen a partir de módulos proyectivos e inyectivos, cabe pensar en las siguientes clases de módulos.

Definición 1.28. Sea $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos. Consideraremos las siguientes clases de R-módulos:

(a) Add $(\mathcal{M})$ denota a la clase de R-módulos isomorfos a sumandos directos de sumas directas arbitrarias de elementos de $\mathcal{M}$.

(b) add $(\mathcal{M})$ denota a la clase de R-módulos isomorfos a sumandos directos de sumas directas finitas de elementos de $\mathcal{M}$.

(c) Prod $(\mathcal{M})$ denota a la clase de módulos isomorfos a sumandos directos de productos arbitrarios de elementos de $\mathcal{M}$.

(d) $\mathcal{M}^{\perp} := \left\{ X \in \mathrm{Mod}(R) \mid \mathrm{Ext}_R^i(M, X) = 0 \quad \forall i \geq 1, \forall M \in \mathcal{M} \right\}$

(e) $\mathcal{M}^{\perp_i} := \left\{ X \in \mathrm{Mod}(R) \mid \mathrm{Ext}_R^i(M, X) = 0 \quad \forall M \in \mathcal{M} \right\}$

(f) ${}^{\perp}\mathcal{M} := \left\{ X \in \mathrm{Mod}(R) \mid \mathrm{Ext}_R^i(M, X) = 0 \quad \forall i \geq 1, \forall M \in \mathcal{M} \right\}$

(g) ${}^{\perp_i}\mathcal{M} := \left\{ X \in \mathrm{Mod}(R) \mid \mathrm{Ext}_R^i(X, M) = 0 \quad \forall M \in \mathcal{M} \right\}$

(h) En caso de que $\mathcal{M}$ consista de un sólo R-módulo M, dichas clases se denotan Add (M), add (M), Prod (M), $M^{\perp}$ y ${}^{\perp}M$, respectivamente.

Por lo tanto, dados un generador proyectivo P y un cogenerador inyectivo Q, podemos resumir lo anterior en las siguientes igualdades

$$\mathrm{Add}\,(P) = \mathrm{Proj}\,(R) = {}^{\perp_1}\mathrm{Mod}\,(R) = {}^{\perp}\mathrm{Mod}\,(R) \quad \text{y}$$
$$\mathrm{Prod}\,(Q) = \mathrm{Inj}\,(R) = \mathrm{Mod}\,(R)^{\perp_1} = \mathrm{Mod}\,(R)^{\perp}.$$

Por otro lado, dado un R-módulo M, los conceptos de generador y cogenerador nos llevan a pensar en los módulos X tales que admitan un epimorfismo $M^{(I)} \to X$ o un monomorfismo $X \to M^I$ para algún conjunto I.

Definición 1.29. Sea $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos.

(a) Gen $(\mathcal{M})$ denota la clase de los R-módulos $\mathcal{M}$-generados, que consiste de los módulos X que admiten un epimorfismo $\bigoplus_{i\in I} M_i \to X$ para algún conjunto $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}$.

(b) Cogen $(\mathcal{M})$ denota la clase de los R-módulos $\mathcal{M}$-cogenerados, que consiste de los módulos X que admiten un monomorfismo $X \to \prod_{i\in I} M_i$ para algún conjunto $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}$.

(c) En caso de que $\mathcal{M}$ consiste de un sólo R-módulo M, las clases Gen $(\mathcal{M})$ y Cogen $(\mathcal{M})$ las denotamos como Gen (M) y Cogen (M), respectivamente.

Observación 1.30. *Para toda clase de R-módulos $\mathcal{M}$, se satisfacen las siguientes proposiciones:*

(a) $\mathrm{add}\,(M) \subseteq \mathrm{Add}\,(M) \subseteq \mathrm{Gen}\,(M)$ *y* $\mathrm{add}\,(M) \subseteq \mathrm{Prod}\,(M) \subseteq \mathrm{Cogen}\,(M)$*;*

(b) Si $\mathcal{M} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{X}$*, entonces* $\operatorname{Add}(\mathcal{M}) \subseteq {}^{\perp}\mathcal{X}$*; y*

(c) Si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}^{\perp}$*, entonces* $\operatorname{Prod}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{X}^{\perp}$*.*

Observación 1.31. *En general, es falso que: si* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}^{\perp}$ *entonces* $\operatorname{Add}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{X}^{\perp}$*. Sin embargo, si* $M \in \operatorname{Mod}(R)$ *es un módulo con una resolución proyectiva*

$$... \to P_n \xrightarrow{f_n} ... \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

con P_i *finitamente generado para todo* i*, entonces por 1.11(c)* $M^{\perp}$ *es cerrado por coproductos. En particular, si* $\mathcal{M} \subseteq M^{\perp}$*, entonces* $\operatorname{Add}(\mathcal{M}) \subseteq M^{\perp}$*.*

Note que, un generador es un R-módulo M tal que $\operatorname{Gen}(M) = \operatorname{Mod}(R)$ y un cogenerador es un R-módulo M tal que $\operatorname{Cogen}(M) = \operatorname{Mod}(R)$.

De lo anterior, tenemos que si P es un generador proyectivo, entonces

$$\operatorname{Gen}(P) = \operatorname{Add}(P)^{\perp} = P^{\perp};$$

y por su parte, si Q es un cogenerador inyectivo, entonces

$$\operatorname{Cogen}(Q) = {}^{\perp}\operatorname{Prod}(Q) = {}^{\perp}Q.$$

Surge entonces, de manera natural, la pregunta de qué podemos decir de los módulos X que satisfacen que $\operatorname{Gen}(X) = X^{\perp}$ o que $\operatorname{Cogen}(X) = {}^{\perp}X$. La respuesta, a esta pregunta, se dará poco a poco a lo largo de esta tesis. Por ahora, nos limitaremos a estudiar a las clases $\mathcal{M}^{\perp}$ y ${}^{\perp}\mathcal{M}$.

Por otro lado, dado que queremos modelar las construcciones hechas con las clases $\operatorname{Inj}(R)$ y $\operatorname{Proj}(R)$, para una clase de R-módulos $\mathcal{X}$ y R-módulo M es natural considerar sucesiones exactas de la forma

$$... \to X_n \xrightarrow{f_n} ... \xrightarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0 \;\text{ y }\; 0 \to M \xrightarrow{f_0} X_0' \xrightarrow{f_1} ... \xrightarrow{f_n} X_n' \to ...$$

con $X_i \in \operatorname{Add}(\mathcal{X})$ y $X_i' \in \operatorname{Prod}(\mathcal{X})$. Por supuesto, dichas sucesiones no existen necesariamente, incluso en el caso en que $X \in \operatorname{Gen}(\mathcal{X})$, o bien $X \in \operatorname{Cogen}(\mathcal{X})$, respectivamente. Por esta razón, introducimos la siguiente definición.

Definición 1.32. Sea $\mathcal{X}$ una clase de R-módulos.

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{X}_n^{\wedge}$ a la clase de R-módulos que admiten una $\mathcal{X}$-resolución finita de longitud $\leq n$. Esto es, una sucesión exacta de la forma

$$0 \to X_n \to ... \to X_1 \to X_0 \to M \to 0, \tag{1.A}$$

con $X_i \in \mathcal{X}$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$. Luego, denotamos

$$\mathcal{X}^\wedge := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_n^\wedge.$$

(b) Dualmente, para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $\mathcal{X}_n^\vee$ a clase de R-módulos M que admiten una $\mathcal{X}$-corresolución finita de longitud n. Esto es, una sucesión exacta de la forma

$$0 \to M \to X_0 \to X_1 \to ... \to X_n \to 0, \tag{1.B}$$

con $X_i \in \mathcal{X}$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$. Luego, denotamos

$$\mathcal{X}^\vee := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_n^\vee.$$

(c) En caso de que $M \in \mathcal{X}^\wedge$, decimos que la dimensión de $\mathcal{X}$-resolución de M es n, si n es el mínimo entero positivo tal que existe una sucesión exacta de la forma 1.A. A dicho número lo denotamos $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M)$. En caso de que $M \notin \mathcal{X}^\wedge$, escribiremos $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) = \infty$.

(d) Dado $M \in \mathcal{X}^\vee$, decimos que la dimensión de $\mathcal{X}$-corresolución de M es n, si n es el mínimo entero positivo tal que existe una sucesión exacta de la forma 1.B. A dicho número lo denotamos $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{X}}(M)$. En caso de que $M \notin \mathcal{X}^\vee$, escribiremos $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{X}}(M) = \infty$.

(e) Dada una clase de R-módulos $\mathcal{M}$ denotamos

$$\operatorname{coresdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{M}) = \sup\{\operatorname{coresdim}_{\mathcal{X}}(M) \mid M \in \mathcal{M}\}$$
$$\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{M}) = \sup\{\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) \mid M \in \mathcal{M}\}.$$

A continuación estudiaremos las propiedades básicas de las clases definidas.

Lema 1.33 (Lema del corrimiento)**.** *Sean $A, Y \in \operatorname{Mod}(R)$ y*

$$0 \to A \to B_0 \to B_1 \to ... \to B_n \to 0$$

$$0 \to C_n \to ... \to C_1 \to C_0 \to A \to 0$$

sucesiones exactas. Entonces los siguientes enunciados se satisfacen:

(a) Si $B_i \in Y^\perp$ para todo $0 \leq i < n$, entonces

$$\operatorname{Ext}_R^k(Y, B_n) \cong \operatorname{Ext}_R^{k+n}(Y, A).$$

En particular, si $\operatorname{pd}(Y) \leq n$ *entonces $B_n \in Y^\perp$.*

(b) Si $C_i \in {}^{\perp}Y$ *para todo* $0 \leq i < n$*, entonces*

$$\operatorname{Ext}_R^k(C_n, Y) \cong \operatorname{Ext}_R^{k+n}(A, Y).$$

En particular, si id $(Y) \leq n$ *entonces* $C_n \in {}^{\perp}Y$*.*

(c) Si $\operatorname{Tor}_i^R(Y, C_j) = 0$ *para todo* $i \geq 1$ *y* $0 \leq j < n$*, entonces*

$$\operatorname{Tor}_{n+k}^R(Y, A) \cong \operatorname{Tor}_k^R(Y, C_n).$$

Demostración. Probaremos solamente (a), la prueba de (b) y (c) es similar.

Procederemos por inducción sobre n. Sea $n = 1$. Entonces, se tiene una sucesión exacta

$$0 \to A \to B_0 \to B_1 \to 0.$$

De modo que al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_R(Y, \_)$ a dicha sucesión, se obtiene la sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}_R^k(Y, B_0) \to \operatorname{Ext}_R^k(Y, B_1) \to \operatorname{Ext}_R^{k+1}(Y, A) \to \operatorname{Ext}_R^k(Y, B_0) = 0,$$

por lo que se conlcuye que $\operatorname{Ext}_R^k(Y, B_1) \cong \operatorname{Ext}_R^{k+1}(Y, A)$.

Sea

$$0 \to A \to B_0 \xrightarrow{d_0} B_1 \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_n} B_{n+1} \to 0$$

una sucesión exacta de R-módulos tal que $B_i \in Y^{\perp}$ para todo $0 \leq i \leq n$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Ker}(d_1) \xrightarrow{i} B_1 \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_n} B_{n+1} \to 0.$$

Dado que es de longitud n y satisface las hipótesis de (a), por hipotesis inductiva, se sigue que

$$\operatorname{Ext}_R^k(Y, B_{n+1}) \cong \operatorname{Ext}_R^{k+n}(Y, \operatorname{Ker} d_1)$$

Ahora, aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_R(Y, \_)$ a la sucesión

$$0 \to A \to B_0 \xrightarrow{d_0} \operatorname{Ker}(d_1) \to 0$$

dado que $B_0 \in Y^{\perp}$ se obtiene la sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}_R^{k+n}(Y, B_0) \to \operatorname{Ext}_R^{k+n}(Y, \operatorname{Ker} d_1) \to \operatorname{Ext}_R^{k+n+1}(Y, A) \to \operatorname{Ext}_R^{k+n+1}(Y, B_0) = 0$$

por lo que se concluye que $\operatorname{Ext}_R^k(Y, C_{n+1}) \cong \operatorname{Ext}_R^{k+n}(Y, \operatorname{Ker}(d_1)) \cong \operatorname{Ext}_R^{k+n+1}(Y, A)$. □

Corolario 1.34. *Para* $M \in \operatorname{Mod}(R)$*, las siguientes desigualdades se satisfacen:*

(a) $\operatorname{coresdim}_{M^{\perp}}(\operatorname{Mod}(R)) \leq \operatorname{pd}(M) + 1$ *y* $\operatorname{pd}\left({}^{\perp}(M^{\perp})\right) \leq \operatorname{pd}(M)$*.*

(b) $\operatorname{resdim}_{{}^{\perp}M}(\operatorname{Mod}(R)) \leq \operatorname{id}(M)+1$ *y* $\operatorname{id}\left(({}^{\perp}M)^{\perp}\right) \leq \operatorname{id}(M)$.

Demostración. (a) Podemos asumir que $\operatorname{pd}(M) = n < \infty$. Para $A \in \operatorname{Mod}(R)$, se puede construir una sucesión exacta

$$0 \to A \to I_0 \to ... \to I_n \to Q \to 0$$

con I_j inyectivo para toda j. Notando que $\operatorname{Inj}(R) \subseteq M^{\perp}$, podemos concluir que $Q \in M^{\perp}$ por 1.33 ya que $\operatorname{pd}(M) = n$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{X}^{\vee}$.
Ahora, si $Y \in^{\perp} \mathcal{X}$ y tomamos un módulo A y repetimos el procedimiento anterior. Se tiene que todo $I_j \in Y^{\perp}$, así que por 1.33 se tiene que

$$0 = \operatorname{Ext}_R^k(Y, I_n) \cong \operatorname{Ext}_R^{k+n}(Y, A)$$

para todo k. Lo que implica que $\operatorname{pd}(Y) \leq n$.

(b) Dual.

□

El resultado anterior, muestra que existe una relación entre la clase $M^{\perp}$ y la dimensión proyectiva de M. En particular, podemos afirmar que si $\operatorname{pd}(M) \leq n$, entonces para todo módulo X existe una sucesión exacta

$$0 \to X \to M_0 \to ... \to M_{n+1} \to 0$$

con $M_i \in M^{\perp}$ para todo $i \in \{0, ..., n+1\}$. En la siguiente proposición veremos que podemos decir más. Mostraremos que, en caso de existir una sucesión exacta como la anterior, con $M_i \in M^{\perp}$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$, tendremos necesariamente que $M_{n+1} \in M^{\perp}$.

Definición 1.35. [Baz04] Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos y $n \geq 1$. Decimos que $\mathcal{X}$ es cerrada por n-cocientes si para toda sucesión exacta de R-módulos

$$0 \to M_0 \to M_1 \to M_2 \to ... \to M_n \to M_{n+1} \to 0$$

con $M_1, ..., M_n \in \mathcal{X}$ se satisface que $M_{n+1} \in \mathcal{X}$.

Dualmente, decimos que $\mathcal{X}$ es cerrada por n-submódulos si para toda sucesión exacta de R-módulos

$$0 \to M_{n+1} \to M_n \to ... \to M_2 \to M_1 \to M_0 \to 0$$

con $M_1, ..., M_n \in \mathcal{X}$ se satisface que $M_{n+1} \in \mathcal{X}$.

Proposición 1.36. *Para* $M \in \operatorname{Mod}(R)$*, las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) $M^{\perp}$ *es cerrado por* n*-cocientes si y sólo si* $\operatorname{pd}(M) \leq n$*, y*

(b) $^{\perp}M$ *es cerrado por* n*-submódulos si y sólo si* $\mathrm{id}\,(M) \leq n$.

Demostración. Probaremos (a), la prueba de (b) es dual.
($\Rightarrow$) Consideremos la siguiente sucesión exacta de R-módulos

$$0 \to N \to I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_{n-1} \to V \to 0$$

con I_i inyectivo para toda i. Aplicando $\mathrm{Hom}_R(M, \_)$ a la sucesión exacta

$$0 \to K \to I_{n-1} \to V \to 0$$

obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}_R^1\,(M, I_{n-1}) \to \mathrm{Ext}_R^1\,(M, V) \to \mathrm{Ext}_R^2\,(M, K) \to \mathrm{Ext}_R^2\,(M, I_{n-1})\,,$$

donde $\mathrm{Ext}_R^1\,(M, I_{n-1}) = 0 = \mathrm{Ext}_R^2\,(M, I_{n-1})$; por lo que

$$\mathrm{Ext}_R^1\,(M, V) \cong \mathrm{Ext}_R^2\,(M, K)\,.$$

Ahora, por el lema del corrimiento, tenemos que

$$\mathrm{Ext}_R^2\,(M, K) \cong \mathrm{Ext}_R^{n-1+2}\,(M, N) = \mathrm{Ext}_R^{n+1}\,(M, N)\,;$$

lo cual concluye nuestra prueba ya que, como $M^{\perp}$ es cerrado por n-cocientes, tenemos que $V \in M^{\perp}$. Así que

$$0 = \mathrm{Ext}_R^1\,(M, V) \cong \mathrm{Ext}_R^2\,(M, K) \cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}\,(M, N)\,,$$

lo que implica que $\mathrm{pd}\,(M \leq n)$.
($\Leftarrow$) Se sigue del lema de corrimiento. □

Observamos además el siguiente fenómeno.

Lema 1.37. *Para* $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$ *y* t *un entero positivo, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\mathrm{pd}\,(M) \leq t$,

(b) $\bigcap_{i=t}^{\infty} M^{\perp_i}$ *es cerrada por cocientes,*

(c) $M^{\perp_t}$ *es cerrada por cocientes.*

En particular, $\mathrm{pd}\,(M) \leq 1$ *si y sólo si* $M^{\perp}$*, o* $M^{\perp_1}$ *respectivamente, es cerrada por cocientes.*

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Dado que $\mathrm{pd}\,(M) \leq t$, se tiene que $\mathrm{Ext}_R^i(M, \_) = 0$ para todo $i > t$. Consideremos una sucesión exacta

$$0 \to K \to X \to Y \to 0$$

con $X \in \bigcap_{i=t}^{\infty} M^{\perp_i}$. Al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_R(M, \_)$ a la sucesión anterior, para todo $k \geq t$ se obtiene la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}_R^k(M, X) \to \mathrm{Ext}_R^k(M, Y) \to \mathrm{Ext}_R^{k+1}(M, K),$$

donde $\mathrm{Ext}_R^{k+1}(M, K) = 0$. Ahora bien, $\mathrm{Ext}_R^k(M, X) = 0$ debido a que $X \in \bigcap_{i=t}^{\infty} M^{\perp_i}$. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}_R^k(M, Y) = 0$ para todo $k \geq t$, probándose que $Y \in \bigcap_{i=t}^{\infty} M^{\perp_i}$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Consideremos una sucesión exacta de R-módulos

$$0 \to Q \to F \to M \to 0,$$

con F libre. Note que

$$\mathrm{pd}\,(M) \leq \max\{\mathrm{pd}\,(F), \mathrm{pd}\,(Q) + 1\} = \mathrm{pd}\,(Q) + 1.$$

Por lo que basta mostrar que $\mathrm{pd}\,(Q) < t$. Para esto, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_R(\_, N)$ a la sucesión exacta anterior, donde $N \in \mathrm{Mod}\,(R)$, obteniéndose la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}_R^t(F, N) \to \mathrm{Ext}_R^t(Q, N) \to \mathrm{Ext}_R^{t+1}(M, N) \to \mathrm{Ext}_R^{t+1}(F, N).$$

Note que $\mathrm{Ext}_R^t(F, N) = 0 = \mathrm{Ext}_R^{t+1}(F, N)$, debido a que F es proyectivo; por lo que $\mathrm{Ext}_R^t(Q, N) \cong \mathrm{Ext}_R^{t+1}(M, N)$. Sea I la envolvente inyectiva de N . Al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_R(M, \_)$ a la sucesión exacta

$$0 \to N \to I \to I/N \to 0,$$

obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}_R^t(M, I) \to \mathrm{Ext}_R^t(M, I/N) \to \mathrm{Ext}_R^{t+1}(M, N) \to \mathrm{Ext}_R^{t+1}(M, I),$$

donde $\mathrm{Ext}_R^{t+1}(M, I) = 0 = \mathrm{Ext}_R^t(M, I)$ debido que I es inyectivo. Por lo que

$$\mathrm{Ext}_R^t(M, I/N) \cong \mathrm{Ext}_R^{t+1}(M, N).$$

De modo que $\mathrm{Ext}_R^t(Q, N) \cong \mathrm{Ext}_R^t(M, I/N)$. Ahora, como $I \in \bigcap_{i=t}^{\infty} M^{\perp_i}$ y $\bigcap_{i=t}^{\infty} M^{\perp_i}$ es cerrado por cocientes, se tiene que $I/N \in \bigcap_{i=t}^{\infty} M^{\perp_i}$. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}_R^t(Q, N) = 0$ para todo módulo N, así que $\mathrm{pd}\,(Q) < t$.

Finalmente las implicaciones $(a) \Rightarrow (c)$ y $(c) \Rightarrow (a)$ se prueban sustituyendo $\bigcap_{i=t}^{\infty} M^{\perp_i}$ por $M^{\perp_t}$ en las pruebas anteriores. $\square$

También se tiene el enunciado dual.

Lema 1.38. *Para $M \in \operatorname{Mod}(R)$ y t un entero positivo, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\operatorname{id}(M) \leq t$,

(b) $\bigcap_{i=t}^{\infty} {}^{\perp_i}M$ *es cerrada por submódulos,*

(c) ${}^{\perp_t}M$ *es cerrada por submódulos.*

En particular, $\operatorname{id}(M) \leq 1$ *si y sólo si* ${}^{\perp}M$, *o* ${}^{\perp_1}M$ *respectivamente, es cerrada por submódulos.*

Utilizando una vez más las ideas que hemos estando ocupando, tenemos lo siguiente.

Proposición 1.39. *Sean $n, k > 0$ y $M \in \operatorname{Mod}(R)$. Se tienen los siguientes enunciados:*

(a) si $M^{\perp_k}$ *es cerrado por n-cocientes, entonces* $\operatorname{pd}(M) < n + k$,

(b) si $M^{\perp_1}$ *es cerrado por n-cocientes, entonces* $\operatorname{pd}(M) \leq n$,

(c) si ${}^{\perp_k}M$ *es cerrado por n-submódulos, entonces* $\operatorname{id}(M) < n + k$, *y*

(d) si ${}^{\perp_1}M$ *es cerrado por n-submódulos, entonces* $\operatorname{id}(M) \leq n$.

Demostración. Probaremos los puntos (a) y (b), la prueba de los puntos (c) y (d) es dual.

(a) Probaremos que $\operatorname{Ext}_R^{n+k}(M, N) = 0$ para todo $N \in \operatorname{Mod}(R)$. Sean $N \in \operatorname{Mod}(R)$ y

$$0 \to N \to I_0 \to ... \to I_{n-1} \to V \to 0$$

una sucesión exacta con $I_i \in \operatorname{Inj}(R)$ para toda $0 \leq i \leq n-1$. Por hipótesis, tenemos que $V \in M^{\perp_k}$; y por lema de corrimiento, sabemos que

$$0 = \operatorname{Ext}_R^k(M, V) \cong \operatorname{Ext}_R^{k+n}(M, N).$$

Por lo tanto, $\operatorname{pd}(M) < n + k$.

(b) Se sigue de (a).

$\square$

2 Aproximaciones y pares de cotorsión

Una de las propiedades fundamentales de los módulos inyectivos es la existencia de envolventes inyectivas. Desde su descubrimiento, en la década de 1950 [ES53], las envolventes inyectivas se han vuelto un método usual en la teoría de módulos, llevando a la búsqueda de nuevos conceptos, como la cubierta proyectiva, así como una teoría general de aproximaciones a derecha y a izquierda por distintas clases de módulos, creada por Auslander y Reiten en el estudio de álgebras de dimensión finita y por Enochs y Xu para módulos arbitrarios.

En este capítulo, introduciremos los conceptos de preenvolvente y precubierta, lo que nos llevará al estudio de pares de cotorsión, resaltando la importancia de los pares de cotorsión hereditarios y completos. En la tercera sección, se mostrará la abundancia de los pares de cotorsión completos. Lo que nos lleva a ver ejemplos interesantes de pares de cotorsión completos y hereditarios, los cuales son generados por los módulos de dimensiones homológicas finitas.

Las secciones cinco y seis estarán dedicadas a la definición y estudio de las dimensiones homológicas relativas a un par de cotorsión.

2.1. Preenvolventes y precubiertas

En el capítulo anterior mencionamos algunas construcciones importantes, hechas con los módulos proyectivos e inyectivos, e iniciamos un proceso de abstracción para modelar éstas con otras clases de módulos.

En esta sección nos enfocaremos en la modelación de un par de propiedades sútiles que se pueden observar en la prueba de propiedades importantes de dichas construcciones.

La primera que podemos mencionar es la propiedad precubriente de $\mathrm{Proj}\,(R)$. Esto es, para todo módulo M sabemos que existe un epimorfismo $\alpha : P \to M$ con $P \in \mathrm{Proj}\,(R)$. Es inmediato de la definición de R-módulo proyectivo, que cualquier otro morfismo $\beta : P' \to M$, con $P' \in \mathrm{Proj}\,(R)$, se factoriza a través de α.

Dualmente, la clase $\mathrm{Inj}\,(R)$ cuenta con la propiedad de ser preenvolvente. Es decir, para todo módulo M sabemos que existe un monomorfismo $\alpha : M \to Q$ con $Q \in \mathrm{Inj}\,(R)$. Note que todo morfismo $M \to Q'$, con $Q' \in \mathrm{Inj}\,(R)$, se factoriza a través de α.

Dichas propiedades, de las clases $\mathrm{Inj}\,(R)$ y $\mathrm{Proj}\,(R)$, nos llevan a las siguientes definiciones.

Definición 2.1. Sean $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos y A un R-módulo. Un morfismo $f : A \to X$, con $X \in \mathcal{M}$, es una $\mathcal{M}$-preenvolvente de A si la función

$$\mathrm{Hom}_R(f, M) : \mathrm{Hom}_R(X, M) \to \mathrm{Hom}_R(A, M)$$

es suprayectiva para todo $M \in \mathcal{M}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & X \arrow[d, dashed] \\ & M \end{tikzcd}$$

Definición 2.2. Sea $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos y A un R-módulo. Un morfismo $f : X \to A$, con $X \in \mathcal{M}$, es una $\mathcal{M}$-precubierta de A si

$$\mathrm{Hom}_R(M, f) : \mathrm{Hom}_R(M, X) \to \mathrm{Hom}_R(M, A)$$

es suprayectiva para todo $M \in \mathcal{M}$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

Definición 2.3. Una clase de R-módulos $\mathcal{M}$ es preenvolvente si todo R-módulo admite una $\mathcal{M}$-preenvolvente. De igual manera decimos que una clase de R-módulos $\mathcal{M}$ es precubriente en caso de que todo R-módulo admita una $\mathcal{M}$-precubierta.

Retomando la discusión hecha en el capítulo anterior, observamos que si P es un generador proyectivo y Q un cogenerador inyectivo, entonces $\mathrm{Add}\,(P) = \mathrm{Proj}\,(R)$ es una clase precubriente mientras que $\mathrm{Prod}\,(Q) = \mathrm{Inj}\,(R)$ es una clase preenvolvente. En lo que sigue, mostraremos que para un R-módulo arbitrario M, la clase $\mathrm{Add}\,(M)$ es precubriente y la clase $\mathrm{Prod}\,(M)$ es preenvolvente. Para ello, necesitaremos los siguientes lemas.

Observación 2.4. *Sea $\{f_i : M_i \to N_i\}_{i\in I}$una familia de morfismos de R-módulos. Entonces f_i es epimorfismo para todo $i \in I$ si y sólo si $\prod_{i\in I} f_i$ es un epimorfismo.*

Observación 2.5. *Si $\{f_i : N_i \to M_i\}_{i\in I}$ es una familia de $\mathcal{M}$-preenvolventes, entonces, en caso de que $\bigoplus M_i \in \mathcal{M}$, el morfismo $\bigoplus_{i\in I} f_i$ es una preenvolvente de $\bigoplus_{i\in I} N_i$. En efecto, dado que f_i es $\mathcal{M}$-preenvolvente para toda $i \in I$, se tiene que $\mathrm{Hom}_R(f_i, M')$ es suprayectiva para todo $M' \in \mathcal{M}$. Así que,de la observación anterior y del isomorfismo natural*

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} f_i, M') \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(f_i, M')$$

se sigue que $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} f_i, M')$.

De la misma manera, si $\{f_i : M_i \to N_i\}_{i\in I}$ es una familia de $\mathcal{M}$-precubiertas, entonces en caso de que $\prod_{i\in I} M_i \in \mathcal{M}$, el morfismo $\prod_{i\in I} f_i$ es una $\mathcal{M}$-precubierta.

Observación 2.6. *Si $f : X \to M$ es una $\mathcal{M}$-preenvolvente, entonces f es una $\mathcal{N}$-preenvolvente para toda clase de R-módulos $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, siempre y cuando $M \in \mathcal{N}$. De* *manera similar, si $g : X \to M$ es una $\mathcal{M}$-precubierta, entonces g es una $\mathcal{N}$-precubierta para toda clase de R-módulos $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, siempre y cuando $M \in \mathcal{N}$.*

En particular, tenemos que:

(a) si $f : X \to M$ es una $\mathrm{Gen}\,(L)$-preenvolvente, entonces es una $\mathrm{Add}\,(L)$-preenvolvente si $M \in \mathrm{Add}\,(L)$, o una $\mathrm{add}\,(L)$-preenvolvente si $M \in \mathrm{add}\,(L)$ respectivamente.

(b) Si $g : X \to M$ es una $\mathrm{Cogen}\,(L)$-precubierta, entonces es una $\mathrm{Prod}\,(L)$-precubierta si $M \in \mathrm{Add}\,(L)$, o una $\mathrm{add}\,(L)$-precubierta si $M \in \mathrm{add}\,(L)$ respectivamente.

Definición 2.7. Sea $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos. Denotamos como $\oplus\mathcal{M}$ a la clase de módulos isomorfos a coproductos de elementos de $\mathcal{M}$, y como $\prod \mathcal{M}$ a la clase de módulos isomorfos a productos de elementos de $\mathcal{M}$.

Definición 2.8. Sea $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos. Denotamos como $\mathrm{Summ}\,(\mathcal{M})$ a la clase de módulos isomorfos a sumandos directos de elementos de $\mathcal{M}$.

Observación 2.9. *En particular, para una clase de R-módulos $\mathcal{M}$, tenemos que $\mathrm{Add}\,(\mathcal{M}) = \mathrm{Summ}\,((\bigoplus \mathcal{M}))$ y $\mathrm{Prod}\,(\mathcal{M}) = \mathrm{Summ}\,((\prod \mathcal{M}))$.*

Lema 2.10. *[RS98] Sea $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos.*

(a) Un morfismo $f : A \to M$ con $M \in \mathcal{M}$ es una $\mathcal{M}$-preenvolvente de A si y sólo si es una $\mathrm{Summ}\,(\mathcal{M})$-preenvolvente.

(b) Un morfismo $f : M \to A$ con $M \in \mathcal{M}$ es una $\mathcal{M}$-precubierta de A si y sólo si es una $\mathrm{Summ}\,(\mathcal{M})$-precubierta.

En particular, de la observación anterior podemos concluir que:

(a) un morfismo $f : A \to M$ con $M \in \bigoplus \mathcal{M}$ es una $\mathrm{Add}\,(\mathcal{M})$-preenvolvente si y sólo si es una $\bigoplus \mathcal{M}$-preenvolvente, y

(b) un morfismo $f : M \to A$ con $M \in \prod \mathcal{M}$ es una $\mathrm{Prod}\,(\mathcal{M})$-precubierta si y sólo si es una $\prod \mathcal{M}$-precubierta.

Demostración. Veamos que g es $\mathcal{M}$-precubierta de A si y sólo si es una $\mathrm{Summ}\,(\mathcal{M})$-precubierta.

Si g es una $\mathcal{M}$-precubierta de A y $h : M' \to A$ es un morfismo con $M' \in \mathrm{Summ}\,(\mathcal{M})$, entonces existe $F \in \mathcal{M}$ junto con una sucesión exacta que se escinde

$$0 \to N \xrightarrow{a} F \xrightarrow{b} M' \to 0,$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "g"] & & A \\
F \arrow[u, "g'"] \arrow[rr, bend left, "b"] & & M' \arrow[u, "h"'] \arrow[ll, bend left, "b'"]
\end{tikzcd}$$

es decir, existe un morfismo $b' : M' \to F$ tal que $bb' = 1$. Por otro lado, dado que $F \in \mathcal{M}$ y g es una $\mathcal{M}$-precubierta, existe un morfismo $g' : F \to M$ tal que $hb = gg'$. Así que $gg'b' = hbb' = h$.
Dado que $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Summ}\,(\mathcal{M})$, es inmediato que g es $\mathcal{M}$-precubierta de A si es una $\mathrm{Summ}\,(\mathcal{M})$-precubierta.

□

Con el lema anterior podemos probar nuestro objetivo.

Proposición 2.11. *Para un R-módulo arbitrario M,* $\mathrm{Add}\,(M)$ *es una clase precubriente y* $\mathrm{Prod}\,(M)$ *es una clase preenvolvente.*

Demostración. Sea $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$.

Probemos que $\mathrm{Add}\,(M)$ es una clase precubriente. Dado un módulo A se propone como $\mathrm{Add}\,(M)$-precubierta de A al morfismo

$$\begin{array}{rccc} \psi : & M^{(I)} & \to & A \\ & (m_f)_{f\in I} & \mapsto & \sum_{f\in I} f(m_f) \end{array}$$

donde $I = \mathrm{Hom}_R(M, A)$. Por el lema anterior basta probar que ψ es una $\bigoplus M$-precubierta. Para probar que $\mathrm{Hom}_R(M^{(J)}, \psi)$ es suprayectiva para todo $M^{(J)} \in \bigoplus M$, se observa que para todo $M^{(J)} \in \bigoplus M$ existe una equivalencia natural

$$\mathrm{Hom}_R(M^{(J)}, \psi) \cong \prod_J \mathrm{Hom}_R(M, \psi).$$

Por lo tanto, para probar que la función $\mathrm{Hom}_R(M^{(J)}, \psi)$ es suprayectiva para cada $M^{(J)} \in \mathrm{Add}\,(M)$, basta probar que $\mathrm{Hom}_R(M, \psi)$ es suprayectiva.

Esto último se prueba fácil, ya que dado $g \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$ se tiene que $\psi\iota_g = g$, donde $\iota_g : M \to M^{(I)}$ es la inclusión canónica.

$$\begin{tikzcd} M^{(I)} \arrow[r, "\psi"] & A \\ M \arrow[u, dashed, "\iota_g"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora, probemos que $\mathrm{Prod}\,(M)$ es una clase preenvolvente. Dado un R-módulo A se propone como $\mathrm{Prod}\,(M)$-preenvolvente de A al morfismo

$$\begin{array}{rccc} \psi : & A & \to & M^I \\ & a & \mapsto & (f(a))_{f\in I} \end{array},$$

donde $I = \mathrm{Hom}_R(A, M)$. Por el lema anterior, basta probar que ψ es una $\prod M$-preenvolvente, es decir que $\mathrm{Hom}_R(\psi, M^J)$ es suprayectiva para todo $M^J \in \prod M$. Para ello, se observa que para todo $M^J \in \prod M$ existe una equivalencia natural

$$\mathrm{Hom}_R(\psi, M^J) \cong \prod_J \mathrm{Hom}_R(\psi, M)^J.$$

Por lo tanto, para probar que $\mathrm{Hom}_R(\psi, M^J)$ es suprayectiva para cada $M^J \in \prod M$, basta probar que $\mathrm{Hom}_R(\psi, M)$ es suprayectiva.

Esto último se prueba de manera sencilla, ya que para todo $g \in \operatorname{Hom}_R(A, M)$ se tiene que

$$\pi_g \psi = g,$$

donde $\pi_g : M^I \to M$ es la proyección canónica.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "g"'] & M^I \arrow[d, dashed, "\pi_g"] \\ & M \end{tikzcd}$$

$\square$

Una segunda propiedad sutil de $\operatorname{Proj}(R)$ es que para toda precubierta $\alpha : P \to M$ se tiene que $\operatorname{Ker}(\alpha) \in \operatorname{Proj}(R)^{\perp_1}$. Dado que esta propiedad la cumple cualquier precubierta proyectiva, pareciera no ser importante, pero tendrá consecuencias interesantes en nuestro contexto generalizado, por lo que presentamos la siguiente definición.

Definición 2.12. Sea $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos.

(a) Una $\mathcal{M}$-preenvolvente es especial si es monomorfismo y su conúcleo pertenece a ${}^{\perp_1}\mathcal{M}$.

(b) Una $\mathcal{M}$-precubierta es especial si es epimorfismo y su núcleo pertenece a $\mathcal{M}^{\perp_1}$.

Observación 2.13. *Un morfismo $f : L \to A$ es $\mathcal{M}$-preenvolvente especial si y sólo si existe una sucesión exacta*

$$0 \to L \xrightarrow{f} A \to A/L \to 0$$

con $A \in \mathcal{M}$ y $A/L \in {}^{\perp_1}\mathcal{M}$. En efecto, claramente f es un monomorfismo, $A \in \mathcal{M}$ y $\operatorname{Coker}(f) = A/L \in {}^{\perp_1}\mathcal{M}$. *Por lo que basta probar que* $\operatorname{Hom}_R(f, X)$ *sea suprayectiva para todo $X \in \mathcal{M}$. Pero esto se cumple ya que al aplicar el funtor* $\operatorname{Hom}_R(\_, X)$ *a la sucesión exacta*

$$0 \to L \xrightarrow{f} A \to A/L \to 0$$

obtenemos la sucesión exacta

$$\operatorname{Hom}_R(A, X) \to \operatorname{Hom}_R(L, X) \to \operatorname{Ext}^1_R(A/L, X) = 0$$

lo que implica que $\operatorname{Hom}_R(f, X)$ *es suprayectiva.*

De la misma manera, un morfismo $f : A \to L$ es una $\mathcal{M}$-precubierta especial si y sólo si existe una sucesión exacta

$$0 \to K \to A \xrightarrow{f} L \to 0$$

con $K \in \mathcal{M}^{\perp_1}$

Definición 2.14. Sea $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos. Decimos que $\mathcal{M}$ es preenvolvente especial si todo R-módulo admite una preenvolvente especial. De manera dual, decimos que $\mathcal{M}$ es una clase precubriente especial si todo R-módulo admite una precubierta especial.

2.2. Pares de cotorsión

En la década de 1970, Salce observó que dada una clase de módulos $\mathcal{C}$, la clase $\mathcal{C}^{\perp_1}$ es precubriente especial si y sólo si ${}^{\perp_1}\left(\mathcal{C}^{\perp_1}\right)$ es precubriente especial. Parejas de clases de la forma $\left(\mathcal{C}^{\perp_1}, {}^{\perp_1}\left(\mathcal{C}^{\perp_1}\right)\right)$ son lo que se llama un par de cotorsión. En esta sección estudiaremos los pares de cotorsión y su relación con las aproximaciones como lo hizo Salce.

Definición 2.15. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \operatorname{Mod}(R)$. Decimos que la pareja $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión si $\mathcal{X} = {}^{\perp_1}\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp_1}$. En este caso, llamamos a la clase $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ el corazón o núcleo del par de cotorsión.

Cabe observar que, dada una clase de módulos arbitraria $\mathcal{C}$, podemos contruir los pares de cotorsión
$$\left({}^{\perp_1}\left(\mathcal{C}^{\perp_1}\right), \mathcal{C}^{\perp_1}\right) \quad \text{y} \quad \left({}^{\perp_1}\mathcal{C}, \left({}^{\perp_1}\mathcal{C}\right)^{\perp_1}\right);$$
los cuales llamamos el par de cotorsión generado y cogenerado por $\mathcal{C}$ respectivamente.

Observación 2.16. *Si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión, $\mathcal{X}$ es una clase cerrada por extensiones y coproductos que contiene a los módulos proyectivos, mientras que $\mathcal{Y}$ es una clase cerrada por extensiones y productos que contiene a los módulos inyectivos.*

A continuación mostramos el resultado central de esta sección, el lema de Salce [Sal75]. El cual muestra cómo, las nociones duales de clase preenvolvente especial y clase precubriente especial, están atadas a un par de cotorsión.

Lema 2.17 (Lema de Salce)**.** *Sean R un anillo y $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión. Entonces $\mathcal{X}$ es precubriente especial si y sólo si $\mathcal{Y}$ es preenvolvente especial.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{X}$ es precubriente especial. Dado un módulo M consideramos una sucesión exacta

$$0 \to M \to I \xrightarrow{\pi} F \to 0$$

con I inyectivo. Como $\mathcal{X}$ es precubriente especial, existe una sucesión exacta

$$0 \to Y \to X \xrightarrow{\rho} F \to 0$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{X}^{\perp_1} = \mathcal{Y}$. Tomando el pullback de π con ρ obtenemos las sucesiones exactas

$$\eta_1 : \ 0 \to Y \to P \to I \to 0 \text{ y}$$

$$\eta_2 : \ 0 \to M \to P \to A \to 0.$$

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& & M \arrow[r, equal] \arrow[d] & M \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Dado que $Y, I \in \mathcal{Y}$ se sigue de η_1 que $P \in \mathcal{Y}$. Por lo tanto, η_2 es una $\mathcal{Y}$-preenvolvente especial de M.

La implicación opuesta se sigue de un argumento dual. □

Definición 2.18. Decimos que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión completo si satisface alguna de las equivalencias del lema de Salce.

Otra característica especial de los pares de cotorsión es que relaciona clases cerradas por núcleos de epimorfismos y clases cerradas por conúcleos de monomorfismos, como muestra el lema de García Rozas.

Lema 2.19 (Lema de García-Rozas)**.** *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\mathcal{X}$ es cerrada por núcleos de epimorfismos,

(b) $\mathcal{Y}$ es cerrada por conúcleos de monomorfismos, y

(c) $\mathrm{Ext}^i_R(A, B) = 0$ para todo $i \geq 1$, $A \in \mathcal{X}$ y $B \in \mathcal{Y}$.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (c)$ Sean $A \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{Y}$. Consideramos una sucesión exacta

$$0 \to C \to P \to A \to 0$$

con P proyectivo. Dado que $A, P \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es resolvente tenemos que $C \in \mathcal{X}$. Luego, aplicando $\mathrm{Hom}_R(\_, B)$ obtenemos la sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^1_R(C, B) \to \mathrm{Ext}^2_R(A, B) \to \mathrm{Ext}^2_R(P, B) = 0,$$

por lo que podemos concluir que $\mathrm{Ext}^2_R(A, B) = 0$. Así, por inducción podemos concluir lo deseado.

$(b) \Rightarrow (c)$ Se sigue de un argumento dual al anterior.

$(c) \Rightarrow (b)$ Dada una sucesión exacta

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

con $A, B \in \mathcal{Y}$. Como $(a) \Rightarrow (b)$, aplicando $\mathrm{Hom}_R(X, \_)$ con $X \in \mathcal{X}$, obtenemos una sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^1_R(X, B) \to \mathrm{Ext}^1_R(X, C) \to \mathrm{Ext}^2_R(X, A) = 0.$$

Por lo tanto, $C \in \mathcal{X}^{\perp_1} = \mathcal{Y}$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Se prueba de manera similar a $(c) \Rightarrow (b)$. □

Cabe observar que si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión, $\mathcal{X}$ es una clase cerrada por extensiones que contiene a $\operatorname{Proj}(R)$, mientras que $\mathcal{Y}$ es una clase cerrada por extensiones que contiene a $\operatorname{Inj}(R)$. De modo que si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ satisface alguno de los puntos de el lema de García Rozas, tenemos que $\mathcal{X}$ es una clase cerrada por extensiones, que contiene a $\operatorname{Proj}(R)$ y cerrada por núcleos de epimorfismos; mientras que $\mathcal{Y}$ es una clase cerrada por extensiones, que contiene a $\operatorname{Inj}(R)$ y que es cerrada por conúcleos de monomorfismos. Clases con estas propiedades reciben el nombre de resolventes y coresolventes.

Definición 2.20. Sea $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos. La clase $\mathcal{M}$ es resolvente si contiene a la clase de los R-módulos proyectivos, es cerrada por núcleos de epimorfismos y es cerrada por extensiones. Dualmente, $\mathcal{M}$ es corresolvente si contiene a la clase de los R-módulos inyectivos, es cerrada por conúcleos de monomorfismos y es cerrada por extensiones.

Clases de este tipo cumplen propiedades interesantes, como las que mostramos a continuación.

Lema 2.21. *Si $\mathcal{M}$ es una clase de R-módulos cerrada bajo conúcleos de monomorfismos tal que* $\operatorname{Inj}(R) \subseteq \mathcal{M}$, *entonces* ${}^{\perp}\mathcal{M} ={}^{\perp_1} \mathcal{M}$ *. En particular, si $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos corresolvente , entonces* ${}^{\perp}\mathcal{M} ={}^{\perp_1} \mathcal{M}$.

Dualmente, Si $\mathcal{M}$ es una clase de R-módulos cerrada bajo núcleos de epimorfismos $\operatorname{Proj}(R) \subseteq \mathcal{M}$, *entonces* $\mathcal{M}^{\perp_1} = \mathcal{M}^{\perp}$. *En particular, si $\mathcal{M}$ una clase de módulos resolvente, entonces* $\mathcal{M}^{\perp_1} = \mathcal{M}^{\perp}$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{M}$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos y que contiene a la clase de los módulos inyectivos. Se sabe que ${}^{\perp}\mathcal{M} \subseteq^{\perp_1} \mathcal{M}$, de modo que basta probar que ${}^{\perp_1}\mathcal{M} \subseteq^{\perp} \mathcal{M}$.

Sea $C \in^{\perp_1} \mathcal{M}$. Se probará por inducción que $C \in^{\perp_n} \mathcal{M}$ para todo $n \geq 1$. Para $n = 1$, se tiene $C \in^{\perp_n} \mathcal{M}$ por hipótesis. Suponiendo que $C \in^{\perp_k} \mathcal{M}$, se observa que para todo $M \in \mathcal{M}$ se puede construir una sucesión exacta

$$0 \to M \to I \to K \to 0$$

con I inyectivo; lo que implica que $K \in \mathcal{M}$, ya que $M, I \in \mathcal{M}$. Así, al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_R(C, \_)$, se concluye que $\operatorname{Ext}_R^{k+1}(C, M) = 0$, puesto que

$$\operatorname{Ext}_R^{k}(C, K) \to \operatorname{Ext}_R^{k+1}(C, M) \to \operatorname{Ext}_R^{k+1}(C, I)$$

es una sucesión exacta, donde sabemos que $\operatorname{Ext}_R^{k}(C, K) = 0$ por hipótesis de inducción y $\operatorname{Ext}_R^{k+1}(C, I) = 0$ por ser I inyectivo. $\square$

Corolario 2.22. *Si $\mathcal{M}$ es una clase de R-módulos cerrada bajo conúcleos de monomorfismos tal que* $\operatorname{Inj}(R) \subseteq \mathcal{M}$, *entonces el conúcleo de toda $\mathcal{M}$-preenvolvente especial* *es un elemento de* ${}^{\perp}\mathcal{M}$*. En particular, si* $\mathcal{M}$ *una clase de* R*-módulos coresolvente, entonces el conúcleo de toda* $\mathcal{M}$*-preenvolvente especial es un elemento de* ${}^{\perp}\mathcal{M}$*.*

Dualmente, si $\mathcal{M}$ *es una clase de* R*-módulos cerrada bajo núcleos de epimorfismos tal que* $\operatorname{Proj}(R) \subseteq \mathcal{M}$*, entonces el núcleo de toda* $\mathcal{M}$*-precubierta especial es un elemento de* $\mathcal{M}^{\perp}$*. En particular, si* $\mathcal{M}$ *una clase de* R*-módulos resolvente, entonces el núcleo de toda* $\mathcal{M}$*-precubierta especial es un elemento de* $\mathcal{M}^{\perp}$*.*

Dada su importancia, cuando en un par de cotorsión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ satisface que $\mathcal{X}$ es resolvente, o equivalentemente cuando $\mathcal{Y}$ es coresolvente, tenemos la siguiente definción.

Definición 2.23. Decimos que un par de cotorsión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es hereditario si satisface alguna de las equivalencias del lema de García Rozas.

Observación 2.24. *Es inmediato de 2.21 que si* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *es hereditario,* $\mathcal{X} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$ *y* $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp}$*.*

Con ayuda de los siguientes lemas podemos mostrar que los pares de cotorsión hereditarios son abundantes.

Lema 2.25. *Sea* $\mathcal{X}$ *una clase en* $\operatorname{Mod}(R)$*. Se cumplen los siguientes enunciados:*

- *Si* $\mathcal{X}$ *es una clase cerrada por sizigias, entonces:*
  - *(a)* $\mathcal{X}^{\perp_1} = \mathcal{X}^{\perp}$ *y* ${}^{\perp_1}\left(\mathcal{X}^{\perp_1}\right) = {}^{\perp}\left(\mathcal{X}^{\perp}\right)$*, y*
  - *(b) el par de cotorsión generado por* $\mathcal{X}$ *es hereditario.*
- *Si* $\mathcal{X}$ *es una clase cerrada por cosizigias, entonces:*
  - *(a)* ${}^{\perp_1}\mathcal{X} = {}^{\perp}\mathcal{X}$ *y* $\left({}^{\perp_1}\mathcal{X}\right)^{\perp_1} = \left({}^{\perp}\mathcal{X}\right)^{\perp}$*, y*
  - *(b) el par de cotorsión cogenerado por* $\mathcal{X}$ *es hereditario.*

Demostración. Probaremos el primer enunciado. Sea $\mathcal{X}$ una clase cerrada por sizigias.

(a) Basta con probar que $\mathcal{X}^{\perp_1} \subseteq \mathcal{X}^{\perp}$. Dado $M \in \mathcal{X}^{\perp_1}$, por el lema del corrimiento tenemos que $\operatorname{Ext}_R^k(X, M) \cong \operatorname{Ext}_R^1\left(\Omega^{k-1}X, M\right)$. De modo que si $X \in \mathcal{X}$, tenemos que $\Omega^{k-1}X \in \mathcal{X}$ y así

$$\operatorname{Ext}_R^k(X, M) \cong \operatorname{Ext}_R^1\left(\Omega^{k-1}X, M\right) = 0.$$

Por lo tanto, $M \in {}^{\perp}\mathcal{X}$.
La prueba de ${}^{\perp_1}\left(\mathcal{X}^{\perp_1}\right) = {}^{\perp}\left(\mathcal{X}^{\perp}\right)$ se sigue de un razonamiento dual, puesto que $\mathcal{X}^{\perp_1} = \mathcal{X}^{\perp}$ es cerrada por cosizigias por ser corresolvente.

(b) Se sigue de 2.19 puesto que $\mathcal{X}^{\perp}$ es corresolvente.

□

Lema 2.26. *Sea $M \in \operatorname{Mod}(R)$ y*

$$\ldots \to P_n \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

una resolución proyectiva de M. Si S_i es la i-ésima sizigia de dicha resolución (incluyendo a $S_0 = M$) y $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$, entonces $S^{\perp_1} = M^{\perp}$.

De manera similar, si tenemos una corresolución inyectiva de M

$$0 \to M \xrightarrow{f_0} Q_0 \xrightarrow{f_1} \ldots \xrightarrow{f_n} Q_n \to \ldots$$

y C_i es la i-ésima cosizigia de dicha corresolución (incluyendo $C_0 = M$), tomando $C = \prod_{i \geq 0} C_i$ tenemos que ${}^{\perp_1}C = {}^{\perp} M$.

Demostración. En efecto, si $X \in S^{\perp_1}$ sabemos que $\operatorname{Ext}^1_R(S, X) = 0$, lo que implica que $\operatorname{Ext}^1_R(S_i, X) = 0$ para todo $i \geq 0$. Entonces, por el lema del corrimiento, tenemos para todo $k > 0$ que

$$\operatorname{Ext}^k_R(M, X) \cong \operatorname{Ext}^1_R(S_{k-1}, X) = 0,$$

por lo que $X \in M^{\perp}$. Por lo tanto, $S^{\perp_1} \subseteq M^{\perp}$.

Por otro lado, para todo $X \in M^{\perp}$ tenemos que $\operatorname{Ext}^i_R(M, X) = 0$ para todo $i > 0$. Entonces, por el lema del corrimiento, podemos concluir que

$$0 = \operatorname{Ext}^{k+1}_R(M, X) \cong \operatorname{Ext}^1_R(S_k, X)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y $X \in M^{\perp}$, lo que implica que

$$\operatorname{Ext}^1_R(S, X) \cong \prod_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Ext}^1_R(S_i, X) = 0.$$

Por lo tanto, $M^{\perp} \subseteq S^{\perp_1}$. □

Proposición 2.27. *Para todo conjunto de R-módulos $\mathcal{X}$, las parejas*

$$\left({}^{\perp}\left(\mathcal{X}^{\perp}\right), \mathcal{X}^{\perp}\right) \text{ y } \left({}^{\perp}\mathcal{X}, \left({}^{\perp}\mathcal{X}\right)^{\perp}\right)$$

son pares de cotorsión hereditarios.

Demostración. Sea $M = \bigoplus_{X \in \mathcal{X}} X$ de tal modo que $M^{\perp} = \mathcal{X}^{\perp}$. De 2.26 se sigue existe un módulo S tal que $S^{\perp_1} = M^{\perp}$. Luego, como $M^{\perp}$ es corresolvente, por 2.25 se sigue que

$$\left({}^{\perp_1}(S^{\perp_1}), S^{\perp_1}\right) = \left({}^{\perp}(M^{\perp}), M^{\perp}\right) = \left({}^{\perp}(\mathcal{X}^{\perp}), \mathcal{X}^{\perp}\right)$$

es un par de cotorsión hereditario.

Para el segundo par, la prueba es análoga tomando $M = \prod_{X \in \mathcal{X}} X$. $\square$

También se puede probar que los pares de cotorsión completos son abundantes, pero la prueba es más complicada. Dedicaremos la siguiente sección a dicho resultado.

2.3. Pares de Cotorsión completos

En esta sección probaremos que los pares de cotorsión generados por un conjunto son completos. Para lograr dicho objetivo necesitaremos desarrollar el lenguaje y las herramientas de las filtraciones transfinitas, incluyendo el célebre lema de Eklof.

Definición 2.28. Sea λ un número ordinal y $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ una familia de submódulos de M. Se dice que tal familia es una cadena continua, o cadena bien ordenada, si

(a) $M_\alpha \subset M_\beta$ para todo $\alpha \leq \beta < \lambda$ y

(b) $M_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$ para todo ordinal límite $\beta <\lambda$.

Definición 2.29. Se dice que un cardinal infinito λ es propio o regular si no se puede expresar como la suma cardinal de un conjunto de cardinalidad menor a λ.

Ejemplo 2.30.

- $\omega = |\mathbb{N}|$ es un cardinal infinito propio debido a que todo cardinal menor es finito, y toda suma cardinal finita de conjuntos finitos es finita.
- $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$ es un cardinal infinito propio ya que todo cardinal menor es numerable, y toda suma numerable de conjuntos numerables es numerable.

Lema 2.31. *Sea κ un cardinal menor a un cardinal infinito propio λ. Si M es un R-módulo que tiene un conjunto de generadores de cardinalidad κ y N es la unión de una cadena continua $(N_\alpha)_{\alpha<\lambda}$, entonces todo morfismo $f : M \to N$ cumple que $f(M) \subset N_\beta$ para algún $\beta < \lambda$.*

Demostración. Dado que $\bigcup_{\alpha<\lambda} N_\alpha = \sum_{\alpha<\lambda} N_\alpha$, podemos concluir que $f(x) \in N_{\beta_x}$ donde β_x es el mínimo cardinal (necesariamente menor a λ) que lo contiene. De igual manera, podemos concluir que $f(M) \subset N_\beta$, donde β es el mínimo cardinal mayor o igual a los cardinales $\{\beta_x\}_{x\in M}$. Observamos que β es la suma cardinal de los $|M|$ cardinales $\beta_x < \lambda$. Así que, dado que λ es un cardinal propio, $\beta < \lambda$. $\square$

Teorema 2.32. *Para cualesquiera $B, L \in \operatorname{Mod}(R)$. Existe un módulo*

$$A = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$$

donde $\{A_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es una cadena continua, que satisface las siguientes condiciones:

(a) $A_0 = L$,

(b) *para todo* $\alpha < \lambda$ *se tiene que* $A_{\alpha+1}/A_\alpha \cong B^{(X_\alpha)}$,

(c) $\operatorname{Ext}^1_R(B, A) = 0$.

Demostración. Tomamos una sucesión exacta

$$0 \to K \xrightarrow{\mu} F \to B \to 0$$

donde F es un módulo libre, y λ un cardinal infinito regular que sea mayor al cardinal de K. Definimos por inducción transfinita una cadena continua $(A_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ como sigue:

- $A_0 = L$.
- Para $\alpha + 1 < \lambda$, tomando $I_\alpha = \operatorname{Hom}_R(K, A_\alpha)$ consideramos el monomorfismo $\mu^{(I_\alpha)} : K^{(I_\alpha)} \to F^{(I_\alpha)}$ y el morfismo canónico $\varphi_\alpha : K^{(I_\alpha)} \to A_\alpha$, es decir

  $$\varphi_\alpha(k_f)_{f\in \operatorname{Hom}_R(K,A_\alpha)} = \sum_f f(k_f).$$

  Definimos $A_{\alpha+1}$ como el push-out de μ_α y φ_α. Observamos que $A_\alpha \subset A_{\alpha+1}$, dado que el push-out usado, da a lugar el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos.

  $$\begin{tikzcd}
  0 \arrow[r] & K^{(I_\alpha)} \arrow[r, "\mu_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"] & F^{(I_\alpha)} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_\alpha"] & B^{(I_\alpha)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
  0 \arrow[r] & A_\alpha \arrow[r, "\sigma_\alpha"] & A_{\alpha+1} \arrow[r] & A_{\alpha+1}/A_\alpha \arrow[r] & 0
  \end{tikzcd}$$

- Para $\alpha < \lambda$ ordinal límite, definimos $A_\alpha = \bigcup_{\alpha'<\alpha} A_{\alpha'}$.

Ya definida la cadena continua tomamos $A = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$. Por construcción tenemos que $A_{\alpha+1}/A_\alpha \cong B^{(I_\alpha)}$. Por lo que queda por mostrar que $\operatorname{Ext}^1_R(B, A) = 0$.

Para ello, se observa que para todo $\eta : K \to A_\alpha$ se tienen las inclusiones canónicas $\nu_\eta : K \to K^{(I_\alpha)}$ y $\nu'_\eta : F \to F^{(I_\alpha)}$ tales que $\nu'_\eta\mu = \mu_\alpha\nu_\eta$.

Dado que F es libre se tiene la sucesión exacta

$$\operatorname{Hom}_R(F, A) \to \operatorname{Hom}_R(K, A) \to \operatorname{Ext}^1_R(B, A) \to \operatorname{Ext}^1_R(F, A) = 0.$$

Por lo que, para probar que $\operatorname{Ext}^1_R(B, A) = 0$ basta con verificar que $\operatorname{Hom}_R(\mu, A)$ sea suprayectivo, lo que es equivalente a que para todo $f : K \to A$ exista $g : F \to A$ tal que $g\mu = f$.

Sea $\varphi : K \to A$. Dado que K es de cardinalidad menor a λ y que

$$\varphi(K) \subset A = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha,$$

podemos concluir que existe $\beta < \lambda$ tal que $\varphi(K) \subset A_\beta$. Entonces, tomando $\eta = \varphi|^{A_\beta}$, tenemos que

$$\psi_\beta \nu'_\eta \mu = \psi_\beta \mu_\beta \nu_\eta = \sigma_\beta \varphi_\beta \nu_\eta = \sigma_\beta \eta.$$

Por lo tanto, $\varphi = \iota \psi_\beta \nu'_\eta \mu$ donde $\iota : A_{\beta+1} \to A$ es la inclusión natural. □

Definición 2.33. Dadas dos cadenas continuas $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ y $(N_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ tales que

$$M = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha \qquad \text{y} \qquad N = \bigcup_{\alpha<\lambda} N_\alpha.$$

Decimos que una familia de morfismos $\{f_\alpha : M_\alpha \to N_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es continua o compatible si $f_\beta|_{M\alpha} = f_\alpha$ para todo $\alpha < \beta < \lambda$.

Definición 2.34. Sean $\mathcal{M}$ una clase de R-módulos y $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$. El módulo M es $\mathcal{M}$-filtrado, si existe una cadena continua $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ de submódulos de M tal que

(a) $M_0 \in \mathcal{M}$ y

(b) $M_{\alpha+1}/M_\alpha \in \mathcal{M} \quad \forall \alpha < \lambda$.

Denotamos como $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ a clase de R-módulos $\mathcal{M}$-filtrados..

Lema 2.35 (Lema de Eklof)**.** *Sean M y N R-módulos. Si M es ${}^\perp N$-filtrado, entonces $M \in {}^\perp N$.*

Demostración. Sea $(M_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ una ${}^\perp N$-filtración de M. Demostraremos por inducción transfinita para todo $\beta < \lambda$ que $\mathrm{Ext}^1_R\,(M_\beta, N) = 0$.

- Por hipótesis se sabe que $\mathrm{Ext}^1_R\,(M_0, N) = 0$.
- Si $\alpha + 1 < \lambda$ y $\mathrm{Ext}^1_R\,(M_\alpha, N) = 0$, entonces aplicando $\mathrm{Hom}_R(\_\_, N)$ a la sucesión exacta
$$0 \to M_\alpha \to M_{\alpha+1} \to M_{\alpha+1}/M_\alpha \to 0$$
obtenemos la sucesión exacta
$$\mathrm{Ext}^1_R\,(M_\alpha, N) \to \mathrm{Ext}^1_R\,(M_{\alpha+1}, N) \to \mathrm{Ext}^1_R\,(M_{\alpha+1}/M_\alpha, N)$$
con $\mathrm{Ext}^1_R\,(M_\alpha, N) = 0$ por hipótesis de inducción, y con $\mathrm{Ext}^1_R\,(M_{\alpha+1}/M_\alpha, N) = 0$ por hipótesis. Lo que implica que $\mathrm{Ext}^1_R\,(M_{\alpha+1}, N) = 0$.
- Sea $\beta < \lambda$ es un ordinal límite y supongamos que $\mathrm{Ext}^1_R\,(M_\alpha, N) = 0$ para todo $\alpha < \beta$. Considermos una sucesión exacta
$$0 \to N \to I \xrightarrow{\pi} I/N \to 0$$

con $I \in \operatorname{Inj}(R)$. De tal manera que para probar que $\operatorname{Ext}_R^1(M_\beta, I) = 0$ basta mostrar que $\operatorname{Hom}_R(M_\alpha, \pi)$ es sobreyectiva. Para ello, dado $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M_\alpha, I/N)$ construiremos para todo $\gamma < \beta$ un morfismo $\psi_\gamma : M_\gamma \to I$ tal que $\varphi|_{M_\gamma} = \pi\psi_\gamma$ y $\psi_\gamma|_{M_\delta} = \psi_\delta$ para todo $\delta < \gamma$:

- Para $\gamma = 0$, $\operatorname{Ext}_R^1(M_0, N) = 0$ por lo que que $\operatorname{Hom}_R(M_0, \pi)$ es sobreyectiva, así que existe $\psi_0 \in \operatorname{Hom}_R(M_0, I)$ tal que $\varphi|_{M_0} = \pi\psi_0$.
- Definido ψ_γ para $0 \leq \gamma < \beta$, dado que $I \in \operatorname{Inj}(R)$ existe $\eta : M_{\gamma+1} \to I$ tal que $\eta|_{M_\gamma} = \psi_\gamma$. Luego, si $d = \varphi|_{M_{\gamma+1}} - \pi\eta$, tenemos que $d|_{M_\gamma} = 0$. Así que por la propiedad universal del cociente existe $d' : M_{\gamma+1}/M_\gamma \to I/N$ tal que $d'\rho = d$ donde $\rho : M_{\gamma+1} \to M_{\gamma+1}/M_\gamma$ es la proyección natural. Por otro lado, dado que $\operatorname{Hom}_R(M_{\gamma+1}/M_\gamma, \pi)$ es sobreyectivo debido a que $M_{\gamma+1}/M_\gamma \in^{\perp_1} N$, existe $f : M_{\gamma+1}/M_\gamma \to I$ tal que $\pi f = d'$. Por lo tanto, $\epsilon = f\rho$ satisface que $\epsilon|_{M\gamma} = 0$ y $\pi\epsilon = \pi f\rho = d'\rho = d$, por lo que $\psi_{\gamma+1} = \eta + \epsilon$ es el morfismo buscado ya que $\psi_{\gamma+1}|_{M_\gamma} = \psi_\gamma$ y $\pi\psi_{\gamma+1} = \pi\eta + d = \varphi|_{M_{\gamma+1}}$.
- Para $\gamma < \beta$ límite tomamos $\psi_\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} \psi_\delta$.

$\square$

Teorema 2.36. *Dado un conjunto de módulos $\mathcal{S}$ se cumple que:*

- *para todo módulo M existe una sucesión exacta*

$$0 \to M \to P \to N \to 0$$

  con $P \in \mathcal{S}^{\perp_1}$ y $N \in {}^{\perp_1}\left(\mathcal{S}^{\perp_1}\right)$, con N $\operatorname{Add}(\mathcal{S})$-filtrado;
- *el par de cotorsión generado $\left({}^{\perp_1}\left(\mathcal{S}^{\perp_1}\right), \mathcal{S}^{\perp_1}\right)$ es completo, es decir $\mathcal{S}^{\perp_1}$ es preenvolvente especial y ${}^{\perp_1}\left(\mathcal{S}^{\perp_1}\right)$ es precubriente especial.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de R-módulos. Tomando $M = \bigoplus_{N\in\mathcal{S}} N$, se tiene que $\mathcal{S}^{\perp_1} = M^{\perp_1}$. Por lo que basta probar que $\left({}^{\perp_1}\left(M^{\perp_1}\right), M^{\perp_1}\right)$ es completo. Además, por el lema de Salce, basta probar que $M^{\perp_1}$ es preenvolvente especial.

Para esto, dado un módulo L construimos A como en el teorema anterior, es decir

$$A = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$$

donde $(A_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ es una cadena continua, que satisface las siguientes condiciones:

(a) $A_0 = L$,

(b) para todo $\alpha < \lambda$ se tiene que $A_{\alpha+1}/A_\alpha \cong M^{(X_\alpha)}$,

(c) $\operatorname{Ext}_R^1(M, A) = 0$.

Entonces $A \in M^{\perp_1}$. Probaremos ahora que $F = A/L \in^{\perp_1} \left(M^{\perp_1}\right)$, para ello basta mostrar que $\operatorname{Ext}^1_R(F, X) = 0$ siempre que $X \in M^{\perp_1}$. Lo cual se cumple ya que

$$F = \bigcup_{\alpha<\lambda} F_\alpha,$$

donde $F_\alpha = A_\alpha / L$. Así que

- $F_0 = 0$ y en particular $\operatorname{Ext}^1_R(F_0, X) = 0$ para todo $X \in M^\perp$;
- $F_{\alpha+1}/F_\alpha \cong M^{(X_\alpha)}$, por lo que

  $$0 = \prod_{X_\alpha} \operatorname{Ext}^1_R(M, X) = \operatorname{Ext}^1_R\left(M^{(X_\alpha)}, X\right) = \operatorname{Ext}^1_R(F_{\alpha+1}/F_\alpha, X)$$

  para todo $X \in M^{\perp_1}$.

En conclusión, por el lema de Eklof $F \in {}^{\perp_1}\left(M^{\perp_1}\right)$. Lo que implica que la inclusión natural $\iota : L \to A$ es una $M^\perp$-preenvolvente especial. □

En particular, podemos probar ahora que para todo módulo M, la clase $M^\perp$ es preenvolvente especial.

Teorema 2.37. *Sea $M \in \operatorname{Mod}(R)$. Entonces todo R-módulo tiene una $M^\perp$-preenvolvente especial.*

Demostración. Se sigue del teorema anterior junto con 2.26. □

Por último, veamos un par de corolarios del teorema 2.36.

Corolario 2.38. *Sea M un módulo. Denotamos por $\mathcal{Z}_M$, a la clase de módulos Z que admiten una sucesión exacta*

$$0 \to F \to Z \to G \to 0, \tag{2.A}$$

donde F es libre y G es M-filtrado. Los siguientes enunciados son equivalentes para un par de cotorsión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$:

(a) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es generado por M,

(b) $\mathcal{A}$ consiste de los sumandos directos de los elementos de $\mathcal{Z}_M$. Más aún, para todo $A \in \mathcal{A}$ existe $Z \in \mathcal{Z}_M$ y $C \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ tal que $A \oplus C \cong Z$.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Por hipótesis tenemos que $\mathcal{B} = M^{\perp_1}$. Dado $A \in \mathcal{A}$ podemos tomar una sucesión exacta

$$0 \to N \xrightarrow{\mu} F \to A \to 0$$

con F libre. Por otro lado, por 2.36 existe una $\mathcal{B}$-preenvolvente

$$0 \to N \xrightarrow{\nu} C \to G \to 0$$

con G un módulo M-filtrado. Observando el diagrama, concluimos que Z, el push-out de μ con ν, pertenece a $\mathcal{Z}_M$ y $Z \cong A \oplus C$. Además, $F, G \in \mathcal{A}$ implica que $Z \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $C \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] & 0 \\
 & G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$(b) \Rightarrow (c)$ Basta probar que $M^{\perp_1} = \mathcal{A}^{\perp_1} = \mathcal{B}$. Sea $X \in M^{\perp_1}$. Tenemos $\operatorname{Add}(M) \subseteq {}^{\perp_1}X$, por lo que todo módulo M-filtrado es ${}^{\perp_1}X$-filtrado. Así, por el lema de Eklof 2.35, todo módulo M-filtrado pertenece a ${}^{\perp_1}X$. Se sigue de la sucesión exacta 2.A que $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}} \subseteq {}^{\perp_1} X$, lo que implica que $\mathcal{A} \subseteq {}^{\perp_1} X$. Por lo tanto, $M^{\perp_1} \subseteq \mathcal{A}^{\perp_1}$.

Por otro lado, dado $X \in \mathcal{A}^{\perp_1}$ se tiene en particular que $X \in \mathcal{Z}_M^{\perp_1}$, lo que implica por 2.A que $\operatorname{Ext}^1_R(G, X) = 0$ para todo módulo M-filtrado G (tomando $F = 0$). Por lo tanto, $\operatorname{Ext}^1_R(M, X) = 0$. $\square$

Corolario 2.39. *Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de R-módulos que contiene a R. Entonces la clase ${}^{\perp_1}(\mathcal{S}^{\perp_1})$ consiste de todos los sumandos directos de los módulos $\mathcal{S}$-filtrados.*

Demostración. Tomando $M = \bigoplus_{N \in \mathcal{S}} N$, podemos concluir por el corolario anterior que ${}^{\perp_1}(\mathcal{S}^{\perp_1})$ consiste de los sumandos directos de los módulos Z que admiten una sucesión exacta

$$0 \to F \to Z \to G \to 0,$$

donde F es libre y G es M-filtrado. Pero, dado que $R \in \mathcal{S}$, tenemos que F también es $\mathcal{S}$-fitrado. Por lo tanto, Z es $\mathcal{S}$-filtrado. $\square$

2.4. Cotorsión de dimensión homológica finita

Veamos ahora los pares de cotorsión relacionados con las clases de módulos de dimensión proyectiva o inyectiva n. Los resultados en esta sección se pueden consultar en [GT06].

Definición 2.40. A lo largo de esta sección $\mathcal{P}$ denota a la clase de R-módulos de dimensión proyectiva finita. Para todo $n \in \mathbb{N}$ denotaremos a la clase de R-módulos de dimensión proyectiva menor o igual a n como $\mathcal{P}_n$. Dualmente definimos las clases $\mathcal{I}$ y $\mathcal{I}_n$.

Recordamos el criterio de Baer para módulos inyectivos.

Proposición 2.41 (Criterio de Baer). *Sea $M \in \operatorname{Mod}(R)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) M es inyectivo;

(b) para todo ideal izquierdo I, se tiene que todo morfismo $I \to M$ se puede extender a $R \to M$;

(c) para todo ideal izquierdo I, $\operatorname{Hom}_R(\mu, M)$ es suprayectiva para todo ideal izquierdo I, donde $\mu : I \to R$ es la inclusión natural; y

(d) para todo ideal izquierdo I, $\operatorname{Ext}^1_R(R/I, M) = 0$ para todo ideal derecho I.

Lema 2.42. *$\mathcal{P}_n$ es resolvente y $\mathcal{I}_n$ es coresolvente para todo $n \geq 0$.*

Demostración. En efecto, claramente $\mathcal{P}_n$ contiene a los proyectivos; dada una sucesión exacta

$$0 \to N \to M \to K \to 0$$

con $N, K \in \mathcal{P}_n$ se tiene que $\operatorname{pd}(M) \leq \max\{\operatorname{pd}(N), \operatorname{pd}(K)\}$ por lo que $\mathcal{P}_n$ es cerrado bajo extensiones; y dada una sucesión exacta

$$0 \to N \to M \to K \to 0$$

con M ,$K \in \mathcal{P}_n$ se tiene que $\operatorname{pd}(N) \leq \max\{\operatorname{pd}(M), \operatorname{pd}(K) - 1\}$. Por lo tanto, $\mathcal{P}_n$ es resolvente.

La prueba de que $\mathcal{I}_n$ es corresolvente es dual. □

Teorema 2.43. *Sea R un anillo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\left({}^{\perp}\mathcal{I}_n, \mathcal{I}_n\right)$ es un par de cotorsión completo y hereditario.*

Demostración. Sean M un R-módulo,

$$0 \to M \to I_0 \to I_1 \to ... \to I_{n-1} \to I_n \to ...$$

una corresolución inyectiva de M y C_n la n-ésima cosizigia de M en dicha sucesión. Entonces $M \in \mathcal{I}_n$ si y sólo si C_n es inyectivo, si y sólo si

$$\operatorname{Ext}^1_R(R/I, C_n) = 0$$

para todo ideal derecho I de R por el criterio de Baer, lo cual es equivalente a que

$$\operatorname{Ext}_R^n(R/I, M) = 0$$

para todo ideal derecho I por el lema del corrimiento.

Ahora, dado un ideal I, sea S_I la n-ésima sizigia de una resolución proyectiva de R/I. Entonces $\operatorname{Ext}_R^n(R/I, M) = 0$ si y sólo si $\operatorname{Ext}_R^1(S_I, M) = 0$. Por lo tanto,

$$\mathcal{I}_n = (\bigoplus_{I \leq R} S_I)^{\perp_1}.$$

Por lo tanto, sabemos que el par $\left({}^{\perp_1}\mathcal{I}_n, \mathcal{I}_n\right)$ es completo por 2.36. Además, por el lema anterior sabemos que $\mathcal{I}_n$ es corresolvente, lo que implica que ${}^{\perp_1}\mathcal{I}_n = {}^{\perp}\mathcal{I}_n$, y así $\left({}^{\perp}\mathcal{I}_n, \mathcal{I}_n\right)$ es hereditario. □

Cabe observar que no podemos dualizar dicha prueba debido a que no existe un criterio dual al de Baer, por lo que tendremos que recurrir a la siguiente definición para probar el enunciado dual.

Definición 2.44. Sea R un anillo y κ un cardinal.

(a) Decimos que un módulo M es $\leq \kappa$-generado si existe un conjunto de generadores de cardinalidad menor o igual a κ.

(b) Se dice que R es κ-noetheriano si todo ideal derecho es $\leq \kappa$-generado.

(c) Definimos la dimensión de R como el mínimo cardinal infinito propio κ tal que R es κ-noetheriano, y la denotamos como $\dim R$.

(d) Dado un cardinal κ denotaremos como $\mathcal{P}^{\leq\kappa}$ a la subclase de módulos de $\mathcal{P}$ que admiten una resolución proyectiva formada por módulos proyectivos $\leq \kappa$-generados.

(e) Para todo $n \in \mathbb{N}$ denotaremos $\mathcal{P}_n^{\leq\kappa}$ la subclase de R-módulos $\mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}^{\leq\kappa}$.

Lema 2.45. *Sea κ un cardinal infinito propio. Si un R-módulo M es $\leq \kappa$-generado, entonces M es la unión de una cadena continua $\{M_\alpha\}_{\alpha\leq\kappa'}$ tal que $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ es cíclico para todo $\alpha < \kappa'$, donde $\kappa' \leq \kappa$ es la cardinalidad de un conjunto de generadores de M.*

Más aún, M es $\leq \kappa$-generado si y sólo si es la unión de una cadena continua $\{M_\alpha\}_{\alpha\leq\kappa'}$ tal que $M_0 = 0$ y $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ es $\leq \kappa$-generado para todo $\alpha < \kappa'$, donde $0 < \kappa' \leq \kappa$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea X un conjunto de generadores de M de cardinalidad mínima κ'. Construimos la cadena buscada de la siguiente manera: $M_0 = mR$ para algún $m \in X$, $M_{\alpha+1} =$

$M_\alpha + mR$ para algún $m \in X$ tal que $m \notin M_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa'$, $M_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$ para todo ordinal límite $\beta < \kappa'$. Claramente dicha cadena cumple lo deseado.

($\Leftarrow$) Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\leq\kappa'}$ la cadena referida en el enunciado. Por hipótesis $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ es $\leq \kappa$-generado para todo $\alpha < \kappa'$, por lo que podemos tomar un conjunto $X_{\alpha+1} \subseteq M_{\alpha+1}$ de cardinalidad $\leq \kappa$ tal que

$$\{x + M_\alpha\}_{x\in X_{\alpha+1}}$$

es un conjunto de generadores de $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa'$. Dado que κ es propio, basta probar que M es generado por $\bigcup_{\alpha<\kappa'} X_{\alpha+1}$. Procedemos por inducción sobre κ'.

- Para $\kappa' = 0$ no hay nada que hacer,
- Si $\kappa' = 1$, entonces $M = M_1 = M_1/M_0$ es generado por X_1.
- En caso de que $\kappa' = \beta + 1$ para algún $\beta < \kappa$, tenemos que $M/M_\beta = M_{\beta+1}/M_\beta$ es $\leq \kappa$-generado por

  $$\{x + M_\alpha\}_{x\in X_{\beta+1}} .$$

  Mientras que, por hipótesis de inducción, M_β es generado por $\bigcup_{\alpha<\beta} X_{\alpha+1}$. Por lo tanto, $M = M_{\beta+1}$ es generado por $\bigcup_{\alpha<\beta+1} X_{\alpha+1}$.
- En caso de que κ' sea un cardinal límite, por hipótesis de inducción M_β es generado por $\bigcup_{\alpha<\beta} X_{\alpha+1}$ para todo $\beta < \kappa'$. Así, como $\{M_\alpha\}_{\alpha\leq\kappa'}$ es una cadena tenemos que

  $$M = M_{\kappa'} = \bigcup_{\alpha\leq\kappa'} M_\alpha = \bigcup_{\alpha\leq\kappa'} \left\langle \bigcup_{\alpha'<\alpha} X_{\alpha'+1} \right\rangle = \left\langle \bigcup_{\alpha'<\kappa'} X_{\alpha'+1} \right\rangle .$$

  Por lo tanto, M es generado por $\bigcup_{\alpha'<\kappa'} X_{\alpha'+1}$.

$\square$

Lema 2.46. *Sean R un anillo y κ un cardinal tal que* $\dim R \leq \kappa$. *Entonces, todo submódulo de un R-módulo $\leq \kappa$-generado es $\leq \kappa$-generado.*

Demostración. Primero observamos que si M es un R-módulo cíclico, entonces por el teorema de correspondencia todo submódulo es la imagen de un ideal derecho, por lo que es $\leq \kappa$-generado por hipótesis.

Ahora, si M es un módulo $\leq \kappa$-generado, por el lema anterior tenemos que M es la unión de una cadena continua $\{M_\alpha\}_{\alpha\leq\kappa'}$ tal que $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ es cíclico, donde $\kappa' \leq \kappa$ es la cardinalidad de un conjunto de generadores de M. De modo que si K es un submódulo de M, entonces K es la unión de la cadena continua $\{M_\alpha \cap K\}_{\alpha\leq\kappa'}$ donde $M_{\alpha+1} \cap K/M_\alpha \cap K$ es $\leq \kappa$-generado por la argumentación anterior. Así que, por el lema anterior, K es $\leq \kappa$-generado. $\square$

Lema 2.47. *Sean R un anillo, λ un cardinal infinito, $n \in \mathbb{N}$ y M un R-módulo con una resolución proyectiva (de longitud n) que consiste en R-módulos proyectivos $\leq \lambda$-generados. Entonces M tiene una resolución proyectiva (de longitud n) que consiste de R-módulos $\leq \lambda$-generados libres.*

Demostración. Se probará el caso cuando la resolución tiene longitud n.

Sea

$$0 \to P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

dicha sucesión. Recordamos que por el truco de Eilenberg para todo proyectivo P existe un módulo libre F tal que $P \oplus F$ es libre, y más aún si P es $\leq \lambda$-generado podemos escoger $F \leq \lambda$-generado. Entonces, observamos que si F_0 es un módulo libre $\leq \lambda$-generado tal que $P_0 \oplus F_0$ es libre, tenemos que la sucesión

$$0 \to P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \longrightarrow ... \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}} P_1 \oplus F_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} P_0 \oplus F_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_0 & 0 \end{pmatrix}} M \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva que consiste de módulos $\leq \lambda$-generados. Lo que da como resultado una resolución proyectiva

$$0 \to P_{n,1} \xrightarrow{f_{n,1}} P_{n-1,1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_{1,1} \xrightarrow{f_{1,1}} P_{0,1} \xrightarrow{f_{0,1}} M \longrightarrow 0$$

con $P_{0,1}$ libre $\leq \lambda$-generado. Repitiendo el mismo argumento con los módulos proyectivos no libres se construye la resolución buscada.

El caso de longitud infinita se prueba de manera similar haciendo una suma directa de la resolución proyectiva con complejos de la forma

$$... \to 0 \to F \to F \to 0 \to ...$$

donde F es el módulo libre adecuado para que $P_{s,t}$ sea libre $\leq \lambda$-generado. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
R^{(A_{\alpha,n}\cup B^0_n)} \arrow[dr] \arrow[dd, equal] & & R^{(A_{\alpha,n-1}\cup B^0_{n-1})} \arrow[dr] & & R^{(A_{\alpha,n-2}\cup B^0_{n-2})} & \cdots & R^{(A_{\alpha,1}\cup B^0_1)} \arrow[dr] & & R^{(A_{\alpha,0}\cup B^0_0)} \\
& \operatorname{Ker} f_{n-1}| \arrow[ur] & & \operatorname{Ker} f_{n-2}| \arrow[ur] & & & & \operatorname{Ker} f_0| \arrow[ur] & \\
R^{(A_{\alpha,n}\cup B^1_n)} \arrow[dr] & & R^{(A_{\alpha,n-1}\cup B^1_{n-1})} \arrow[dr] & & R^{(A_{\alpha,n-2}\cup B^1_{n-2})} & \cdots & R^{(A_{\alpha,1}\cup B^1_1)} \arrow[dr] & & R^{(A_{\alpha,0}\cup B^1_0)} \arrow[dd, equal] \\
& \operatorname{Im} f_n| \arrow[ur, hook] & & \operatorname{Im} f_{n-1}| \arrow[ur, hook] & & & & \operatorname{Im} f_1| \arrow[ur, hook] & \\
R^{(A_{\alpha,n}\cup B^0_n)} \arrow[dr] \arrow[dd, equal] & & R^{(A_{\alpha,n-1}\cup B^0_{n-1})} \arrow[dr] & & R^{(A_{\alpha,n-2}\cup B^0_{n-2})} & \cdots & R^{(A_{\alpha,1}\cup B^0_1)} \arrow[dr] & & R^{(A_{\alpha,0}\cup B^0_0)} \\
& \operatorname{Ker} f_{n-1}| \arrow[ur] & & \operatorname{Ker} f_{n-2}| \arrow[ur] & & & & \operatorname{Ker} f_0| \arrow[ur] & \\
R^{(A_{\alpha,n}\cup B^1_n)} \arrow[dr] \arrow[dd, dash, dotted] & & R^{(A_{\alpha,n-1}\cup B^1_{n-1})} \arrow[dr] & & R^{(A_{\alpha,n-2}\cup B^1_{n-2})} & \cdots & R^{(A_{\alpha,1}\cup B^1_1)} \arrow[dr] & & R^{(A_{\alpha,0}\cup B^1_0)} \arrow[dd, dash, dotted] \\
& \operatorname{Im} f_n| \arrow[ur, hook] & & \operatorname{Im} f_{n-1}| \arrow[ur, hook] & & & & \operatorname{Im} f_1| \arrow[ur, hook] & \\
R^{(A_{\alpha+1,n})} \arrow[rr] & & R^{(A_{\alpha+1,n-1})} \arrow[rr] & & R^{(A_{\alpha+1,n-2})} & \cdots & R^{(A_{\alpha+1,1})} \arrow[rr] & & R^{(A_{\alpha+1,0})}
\end{tikzcd}
$$

Diagrama para la prueba de 2.48.

Lema 2.48. *[AEJO01] Sean $n \in \mathbb{N}$, R un anillo y κ el menor cardinal propio mayor o igual a* $\dim R$*. Si $M \in \mathcal{P}_n$, entonces M es $\mathcal{P}_n^{\leq\kappa}$-filtrado.*

Demostración. Sea $\lambda = \kappa + \rho$, donde ρ es el mínimo número de generadores de M. Por el lema anterior, M tiene una resolución proyectiva

$$0 \to R^{(A_n)} \xrightarrow{f_n} R^{(A_{n-1})} \longrightarrow ... \longrightarrow R^{(A_1)} \xrightarrow{f_1} R^{(A_0)} \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

con $|A_m| \leq \lambda$ para cada $i \leq n$.

Sea $\{m_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ un conjunto de generadores de M. Por inducción sobre α, construiremos una cadena continua $\{M_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ que cumpla las condiciones buscadas, y que además, para cada α exista una resolución proyectiva

$$0 \to F_{\alpha,n} \xrightarrow{f_n|_{F_{\alpha,n}}} F_{\alpha,n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow F_{\alpha,1} \xrightarrow{f_1|_{F_{\alpha,1}}} F_{\alpha,0} \xrightarrow{f_0|_{F_{\alpha,0}}} M_\alpha \longrightarrow 0$$

tal que $m_\alpha \in M_{\alpha+1}$, $F_{\alpha,k} = R^{(A_{\alpha,k})}$ para algún $A_{\alpha,k} \subset A_k$ y $|A_{\alpha+1,i} \backslash A_{\alpha,i}| \leq \kappa$ para todo $\alpha < \lambda$ y $i \leq n$.

- Para $\alpha = 0$ tomamos $M_0 = 0$ y $A_{0,i} = \emptyset$.
- Sea $\alpha < \lambda$. En caso de que $M_\alpha = M$, tomamos $M_{\alpha+1} = M$ y $A_{\alpha+1,i} = A_{\alpha,i}$.
  En otro caso, $M_\alpha \neq M$, así que podemos tomar el mínimo índice γ tal que $m_\gamma \notin M_\alpha$, y $B_0^0 \subset A_0$ finito tal que

  $$m_\gamma \in f_0(R^{(A_{\alpha,0} \cup B_0^0)}).$$

  Ahora, dado que

  $$\operatorname{Ker}\left(f_0 \restriction R^{(A_{\alpha,0})}\right) = \operatorname{Ker}\left(f_0 \restriction R^{(A_{\alpha,0} \cup B_0^0)}\right) \cap R^{(A_{\alpha,0})}$$

  tenemos que

  $$\operatorname{Ker}\left(f_0 \restriction R^{(A_{\alpha,0} \cup B_0^0)}\right) / \operatorname{Ker}\left(f_0 \restriction R^{(A_{\alpha,0})}\right) \cong \left(\operatorname{Ker}\left(f_0 \restriction R^{(A_{\alpha,0} \cup B_0^0)}\right) + R^{(A_{\alpha,0})}\right) / R^{(A_{\alpha,0})}.$$

  Por lo que dicho cociente es isomorfo un submódulo de

  $$R^{(A_{\alpha,0} \cup B_0^0)} / R^{(A_{\alpha,0})} \cong R^{(B_0^0)}.$$

  Entonces, debido a que

  $$f_1(R^{(A_{\alpha,1})}) = \operatorname{Im}\left(f_1 \restriction R^{(A_{\alpha,1})}\right) = \operatorname{Ker}\left(f_0 \restriction R^{(A_{\alpha,0})}\right),$$

  tenemos que $\operatorname{Ker}\left(f_0 \restriction R^{(A_{\alpha,0} \cup B_0^0)}\right)$ es generado por $f_1(R^{(A_{\alpha,1})})$ más un conjunto de cardinalidad menor o igual a $|B_0| < \kappa$, por lo que existe $B_1^0 \subset A_1$ de cardinalidad menor o igual a κ tal que $\operatorname{Ker}\left(f_0 \restriction R^{(A_{\alpha,0} \cup B_0^0)}\right) \subseteq f_1(R^{(A_{\alpha,0} \cup B_1^0)})$.
  Utilizando este razonamiento de manera recursiva podemos concluir que para

todo $k \leq n$ existe $B_k^0 \subset A_k$ de cardinalidad menor o igual a κ tal que

$$\operatorname{Ker}\left(f_{k-1} \restriction R^{(A_{\alpha,k-1})\cup B_{k-1}^0}\right) \subseteq f_k(R^{(A_{\alpha,k}\cup B_k^0)}). \tag{2.B}$$

Ahora, dado que B_n^0 es de cardinalidad menor a κ, podemos concluir que a $f_n(R^{(B_n^0)})$ lo podemos generar con un subconjunto $B_{n-1}^0 \subseteq B_{n-1}^1 \subseteq A_{n-1}$ de cardinalidad menor o igual a κ. Por lo que existe $B_{n-1} \subseteq B_{n-1}^1 \subseteq A_{n-1}$ de cardinalidad menor o igual a κ tal que $f_n(R^{(A_{\alpha,n}\cup B_n^0)}) \subseteq R^{(A_{\alpha,n-1}\cup B_{n-1}^1)}$. Utilizando este razonamiento recursivamente, concluimos que para todo $n \geq i > 0$, existe $B_{i-1}^0 \subseteq B_{i-1}^1 \subseteq A_{i-1}$ de cardinalidad menor o igual a κ tal que

$$f_i(R^{(A_{\alpha,i}\cup B_i)}) \subseteq R^{(A_{\alpha,i-1}\cup B_{i-1}^1)}.$$

Repitiendo lo anterior recursivamente, se obtiene para todo $n \geq i \geq 0$ una cadena ascendente $(B_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de cardinalidad menor o igual a κ de A_i. Tomando $C_i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_i^k$, observamos que C_i es de cardinalidad $\leq \kappa$ y que la sucesión

$$0 \to F_{\alpha+1,n} \xrightarrow{f_n|_{F_{\alpha+1,n}}} F_{\alpha+1,n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow F_{\alpha+1,1} \xrightarrow{f_1|_{F_{\alpha+1,1}}} F_{\alpha+1,0} \xrightarrow{f_0|_{F_{\alpha+1,0}}} N \longrightarrow 0$$

con $F_{\alpha+1,i} = R^{(A_{\alpha,i}\cup C_i)}$ y $N = \operatorname{Im}\left(f_0|_{F_{\alpha+1,0}}\right)$ es exacta.
Ciertamente, sabemos que $\operatorname{Ker}\left(f_{k-1} \restriction R^{(A_{\alpha,k-1}\cup C_{k-1})}\right) \supseteq f_k(R^{(A_{\alpha,k}\cup C_k)})$ debido a que $f_{k-1}f_k = 0$; y si tomamos $x \in \operatorname{Ker}\left(f_{k-1} \restriction R^{(A_{\alpha,k-1}\cup C_{k-1})}\right)$ se sigue que

$$x \in \operatorname{Ker}\left(f_{k-1} \restriction R^{(A_{\alpha,k-1}\cup B_{k-1}^{2j})}\right) \subseteq f_k(R^{(A_{\alpha,k}\cup B_k^{2j})})$$

para algún $j \in \mathbb{N}$ por 2.B.
Finalmente, observamos que por construcción N contiene a m_γ y a M_α, por lo que tomando $M_{\alpha+1} = N$ se satisface que $M_{\alpha+1}/M_\alpha \in \mathcal{P}_n^{\leq\kappa}$. En efecto, al hacer el cociente de las resoluciones construidas de $M_{\alpha+1}$ y M_α, se obtiene una resolución proyectiva de $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ en la que cada proyectivo es un libre $\leq \kappa$-generado.

- Si $\beta < \lambda$ es un ordinal límite definimos $A_{\beta,i} = \bigcup_{\alpha<\beta} A_{\alpha,i}$ y $M_\beta = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$.

□

Corolario 2.49. *Sea R un anillo con* $\dim R = \kappa$. *Entonces* $\mathcal{P}_n^{\perp_1} = \left(\mathcal{P}_n^{\leq\kappa}\right)^{\perp_1}$.

Demostración. Sea $\kappa = \dim R$. Claramente $\mathcal{P}_n^{\perp_1} \subseteq \left(\mathcal{P}_n^{\leq\kappa}\right)^{\perp_1}$. Si $X \in \left(\mathcal{P}_n^{\leq\kappa}\right)^{\perp_1}$, como todo $M \in \mathcal{P}_n$ es $\mathcal{P}_n^{\leq\kappa}$-filtrado, se tiene por el lema de Eklof que $X \in \mathcal{P}_n^{\perp_1}$. Por lo tanto, $\mathcal{P}_n^{\perp_1} = \left(\mathcal{P}_n^{\leq\kappa}\right)^{\perp_1}$. □

Lema 2.50 (Lema de Auslander)**.** *Sean $n \in \mathbb{N}$ y M un R-módulo $\mathcal{P}_n$-filtrado. Entonces, $M \in \mathcal{P}_n$.*

Demostración. Por el lema del corrimiento observamos que, $M \in \mathcal{P}_n$ si y sólo si

$$M \in \{\Omega^n(N)\}^{\perp_1}_{N \in \mathrm{Mod}(R)}.$$

Lo cual se satisface por el lema de Eklof. □

Teorema 2.51. *Sean R un anillo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n^{\perp})$ es un par de cotorsión completo y hereditario.*

Demostración. Sea $\kappa = \dim R$. Sabemos que $\mathcal{P}_n^{\perp_1} = \left(\mathcal{P}_n^{\leq \kappa}\right)^{\perp_1}$, y $\mathcal{P}_n^{\leq \kappa}$ tiene un conjunto de representantes debido a que todo módulo en $\mathcal{P}_n^{\leq \kappa}$ es isomorfo a un cociente de $R^{(\kappa)}$. Así que por 2.36, $\left({}^{\perp_1}(\mathcal{P}_n^{\perp_1}), \mathcal{P}_n^{\perp_1}\right)$ es un par de cotorsión completo. Luego, por 2.42 sabemos que $\mathcal{P}_n$ es resolvente, por lo que $\mathcal{P}_n^{\perp} = \mathcal{P}_n^{\perp_1}$ y ${}^{\perp}\left(\mathcal{P}_n^{\perp}\right) = {}^{\perp_1}\left(\mathcal{P}_n^{\perp_1}\right)$, así que $\left({}^{\perp}\left(\mathcal{P}_n^{\perp}\right), \mathcal{P}_n^{\perp}\right)$ es hereditario y completo.

Por último, veamos que ${}^{\perp}\left(\mathcal{P}_n^{\perp}\right) = \mathcal{P}_n$. Claramente ${}^{\perp}\left(\mathcal{P}_n^{\perp}\right) \supseteq \mathcal{P}_n$. Luego, si $X \in {}^{\perp}\left(\mathcal{P}_n^{\perp}\right)$, consideramos una sucesión exacta

$$0 \to N \xrightarrow{\mu} F \to X \to 0$$

con F libre. Por 2.36 sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \to N \xrightarrow{\nu} C \to G \to 0$$

con $C \in \mathcal{P}_n^{\perp}$ y G es la unión de una cadena continua cuyos cocientes consecutivos pertenecen a $\mathcal{P}_n$. Así que al tomar el push-out de μ y ν, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to C \to Z \to X \to 0,$$

que se escinde, ya que $C \in \mathcal{P}_n^{\perp}$ y $X \in {}^{\perp}\left(\mathcal{P}_n^{\perp}\right)$. Por lo que basta probar que $Z \in \mathcal{P}_n$ para concluir que $X \in \mathcal{P}_n$. Para ello, observamos que del push-out anterior también obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to F \to Z \to G \to 0$$

donde $G \in \mathcal{P}_n$ por el lema de Auslander y $F \in \mathcal{P}_n$.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\
& G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

□

2.5. Dimensiones relativas y pares de cotorsión

Hasta ahora nos hemos dedicado a modelar las propiedades y comportamiento de los módulos proyectivos e inyectivos. En esta sección comenzaremos a generalizar las construcciones antes mencionadas, enfocándonos principalmente en la definición de las dimensiones relativas a una clase de módulos $\mathcal{X}$, así como en las conexiones con las dimensiones homológicas usuales y sus propiedades con los pares de cotorsión.

Definición 2.52. Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Mod}\,(R)$. Para un R-módulo C se definen las siguientes dimensiones:

(a) $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(C) = \text{mín}\left\{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}_R^k\,(C, \mathcal{X}) = 0\,\forall k > n\right\}.$

(b) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(C) = \text{mín}\left\{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}_R^k\,(\mathcal{X}, C) = 0\,\forall k > n\right\}.$

(c) Para una clase $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ se definen

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{Y}) = \sup\left\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\right\} \text{ y } \mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{Y}) = \sup\left\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\right\}.$$

Es inmediato la generalización de algunas propiedades de las dimensiones usuales como las siguientes.

Lema 2.53. *Sean $\mathcal{X}$ una clase de R-módulos y $0 \to A \to B \to C \to 0$ una sucesión exacta. Las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(B) \leq \text{máx}\left\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(A), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(C)\right\}$ *y* $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(B) \leq \text{máx}\left\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(A), \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(C)\right\}$,

(b) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(A) \leq \text{máx}\left\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(B), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(C) + 1\right\}$ *y* $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(A) \leq \text{máx}\left\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(B), \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(C) - 1\right\}$,

(c) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(C) \leq \text{máx}\left\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(B), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(A) - 1\right\}$ *y* $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(C) \leq \text{máx}\left\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(A) + 1, \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(B)\right\}$.

Demostración. Probaremos la primera desigualdad, la prueba de las demás son análogas. Podemos suponer que $\text{máx}\left\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(A), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(C)\right\} = n < \infty$. Para $X \in \mathcal{X}$ consideramos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}_R^k\,(X, A) \to \mathrm{Ext}_R^k\,(X, B) \to \mathrm{Ext}_R^k\,(X, C),$$

de la cual podemos conlcuir que $\mathrm{Ext}_R^k\,(X, B) = 0$ para todo $k > n$, puesto que $\mathrm{Ext}_R^k\,(X, A) = 0$ y $\mathrm{Ext}_R^k\,(X, C) = 0$ para todo $k > n$. Por lo tanto, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(B) \leq n$. □

Dado que parte de nuestro objetivo es explorar las dimensiones relativas a clases de cotorsión, comenzaremos relacionando las dimensiones entre dos clases de R-módulos.

Lema 2.54. *Para cualesquiera clases de R-módulos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ se satisface que*

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}).$$

Demostración. Veamos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$. Podemos suponer que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = n$. En este caso obtenemos que $\mathrm{Ext}_R^k(X, Y) = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ y $k > n$. Lo que implica que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$. La otra desigualdad se prueba de manera análoga. □

Teorema 2.55. *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases de R-módulos. Entonces para todo $L \in \mathrm{Mod}(R)$ las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L)$ *y*

(b) $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(L) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(L)$.

Demostración. Probaremos la primera desigualdad. Podemos suponer $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = n < \infty$ y $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L) = m < \infty$. Probaremos lo deseado por inducción sobre m.

Si $m = 1$, entonces existe una sucesión exacta

$$0 \to L \to Y_0 \to Y_1 \to 0$$

con $Y_0, Y_1 \in \mathcal{Y}$. De modo que para todo $X \in \mathcal{X}$ el funtor $\mathrm{Hom}_R(X, \_\_)$ induce una sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}_R^{k-1}(X, Y_1) \to \mathrm{Ext}_R^k(X, L) \to \mathrm{Ext}_R^k(X, Y_0)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, donde $\mathrm{Ext}_R^{k-1}(X, Y_1) = 0$ y $\mathrm{Ext}_R^k(X, Y_0) = 0$ para todo $k > n+1$. Por lo tanto, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq n+1 = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L)$.

Para $m \geq 2$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to L \xrightarrow{f} Y_0 \to \dots \to Y_m \to 0.$$

Observamos que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(K) < m$ donde $K = \mathrm{Im}(f)$, así que por hipótesis de inducción

$$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(K) < \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L).$$

Finalmente, de 2.53 se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) &\leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(Y_0), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K) + 1\}\\
&\leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(Y_0), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(K) + 1\}\\
&\leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(K) + 1\\
&\leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L).
\end{aligned}$$

□

Estamos listos para iniciar el estudio de las dimensiones asociadas a un par de cotorsión.

Teorema 2.56. *Sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *un par de cotorsión completo. Las siguientes desigualdades se satisfacen:*

(a) $\mathrm{id}\,(M) = \mathrm{máx}\,\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(M)\,, \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}\,(M)\}$ *y* $\mathrm{pd}\,(M) = \mathrm{máx}\,\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(M)\,, \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}\,(M)\}$ *para todo* $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$*,*

(b) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathrm{Mod}\,(R)) \leq \mathrm{pd}\,(\mathcal{X}) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{X}) + 1,$ *y*

(c) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}\,(\mathrm{Mod}\,(R)) \leq \mathrm{id}\,(\mathcal{Y}) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{X}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{Y}) + 1.$

Demostración.

(a) Veamos la primera igualdad. Es claro que $\mathrm{id}\,(M) \geq \mathrm{máx}\,\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(M)\,, \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}\,(M)\}$ por lo que basta probar la desigualdad opuesta. Para ello observamos que, como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es hereditario, para todo módulo N existe una sucesión exacta

$$0 \to N \to Y \to X \to 0$$

con $Y \in \mathcal{Y}$ y $X \in \mathcal{X}$. Así que por 2.53 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\{N\}}\,(M) = \mathrm{pd}_{\{M\}}\,(N) &\leq \mathrm{máx}\left\{\mathrm{pd}_{\{M\}}\,(Y)\,, \mathrm{pd}_{\{M\}}\,(X) - 1\right\} \\ &\leq \mathrm{máx}\left\{\mathrm{pd}_{\{M\}}\,(\mathcal{Y})\,, \mathrm{pd}_{\{M\}}\,(\mathcal{X})\right\} \\ &\leq \mathrm{máx}\,\{\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}\,(M)\,, \mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(M)\}\,. \end{aligned}$$

Lo que implica por 2.54 que

$$\mathrm{id}\,(M) = \mathrm{pd}_{\{M\}}\,(\mathrm{Mod}\,(R)) \leq \mathrm{máx}\,\{\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}\,(M)\,, \mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(M)\}\,.$$

La prueba de la segunda desigualdad es análoga.

(b) Veamos la primera desigualdad. Podemos suponer que $\mathrm{pd}\,(\mathcal{X}) = n < \infty$. Luego, por el lema del corrimiento, para todo módulo M tenemos que

$$\mathrm{Ext}^1_R\,(\mathcal{X}, \Omega_n M) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_R\,(\mathcal{X}, M) = 0,$$

donde $\Omega_n M$ es una n-ésima cosizigia de M. De modo que $\Omega_n M \in \mathcal{X}^{\perp_1} = \mathcal{Y}$, lo que implica que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathrm{Mod}\,(R)) \leq n$ puesto que todo módulo inyectivo pertenece a $\mathcal{X}^{\perp_1} = \mathcal{Y}$.
Para la segunda desigualdad observamos que, como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es completo para todo módulo M, existe una sucesión exacta

$$0 \to M \to Y \to X \to 0$$

con $Y \in \mathcal{Y}$ y $X \in \mathcal{X}$, así que por 2.53 y 2.55 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) &\leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(Y), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X)+1\}\\ &\leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(Y), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})+\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(X)+1\}\\ &= \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})+\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(X)+1\\ &\leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})+\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})+1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos conlcuir de 2.54 que

$$\mathrm{pd}\,(\mathcal{X}) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathrm{Mod}\,(R)) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})+\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})+1.$$

(c) Se prueba de manera análoga a 2.

□

Si el par de cotorsión es hereditario, además de ser completo, podemos afirmar lo siguiente.

Corolario 2.57. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión completo y hereditario. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) $\mathrm{pd}\,(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ *y* $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}) = \mathrm{id}\,(\mathcal{Y})$,

(b) Si M es un R-módulo tal que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(M) < \infty$, *entonces* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(M)$.

(c) Si M es un R-módulo tal que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M) < \infty$, *entonces* $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M)$.

(d) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(\mathrm{Mod}\,(R)) = \mathrm{pd}\,(\mathcal{X}) \leq \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})+1$,

(e) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathrm{Mod}\,(R)) = \mathrm{id}\,(\mathcal{Y}) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})+1$.

Demostración.

(a) Por 2.56(a) tenemos que

$$\mathrm{pd}\,(M) = \text{máx}\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M), \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M)\}$$

para todo $M \in \mathcal{X}$. Pero por 2.19(c) sabemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{pd}\,(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$. De manera similar se puede probar que $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}) = \mathrm{id}\,(\mathcal{Y})$.

(b) Lo probaremos por inducción sobre $n = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(M)$.
En caso de que $n = 0$, tenemos que $M \in \mathcal{Y}$, así que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) = 0$ por 2.19(c).
Si $n = 1$, existe una sucesión exacta

$$0 \to M \to Y_0 \to Y_1 \to 0$$

con $Y_0, Y_1 \in \mathcal{Y}$. Entonces por 2.53 tenemos que

$$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) \leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(Y_0), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(Y_1)+1\} = 1.$$

Por lo tanto, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) = 1$ ya que $M \notin \mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp_1}$.
Para $n > 1$. Por hipótesis inductiva, tenemos que que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(N) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(N)$ para todo módulo N con $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(N) \leq n-1$. Dado que tenemos una sucesión exacta

$$0 \to M \to Y_0 \xrightarrow{f} Y_1 \to ... \to Y_n \to 0$$

con $Y_i \in \mathcal{Y}$ y $K = \mathrm{Ker}(f)$ con $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(K) = n-1$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to M \to Y_0 \to K \to 0$$

con $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(K) = n-1$ por hipótesis de inducción. Así que por 2.53 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) &\leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(Y_0), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K)+1\} = n \quad \text{y} \\ n-1 = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K) &\leq \text{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(Y_0), \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M)-1\} = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M)-1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) = n$.

(c) Se prueba de manera dual al punto anterior.

(d) Por 2.56(b) y 2.19(c) basta mostrar que

$$\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(M) \geq \mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathrm{Mod}(R))$$

para todo $M \in \mathrm{Mod}(R)$. Lo cual es inmediato de (b).

(e) Se prueba de manera dual a (d).

□

2.6. Algunos Resultados de Auslander-Buchweitz

Por último presentamos los siguientes resultados de Auslander y Buchweitz [AB89] relacionados con aproximaciones.

Cabe decir que aunque la mayoría de los resultados que se exponen en esta sección son para una categoría de R-módulos, las pruebas son válidas para cualquier categoría abeliana, por lo que podemos referirnos a los resultados duales de esta sección.

Lema 2.58. *Sean $\mathcal{X}$ una clase cerrada bajo extensiones en una categoría abeliana y $\omega \subset \mathcal{X}$. Dadas sucesiones exactas*

$$0 \to K \to X \to C \to 0$$

$$0 \to K \to Y_K \to X_K \to 0$$

con $X, X_K \in \mathcal{X}$ y $Y_K \in \hat{\omega}$, se sigue que la sucesión

$$0 \to Y_K \to U \to C \to 0$$

en el diagrama pushout tiene la propiedad de que $Y_K \in \hat{\omega}$ y $U \in \mathcal{X}$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_K \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & X_K \arrow[r, equal] \arrow[d] & X_K \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Consideramos el pushout de los morfismos iniciales de las sucesiones dadas.

Ya sabemos que $Y_K \in \hat{\omega}$ y es inmediato que $U \in \mathcal{X}$ ya que $\mathcal{X}$ es cerrado bajo extensiones y que $X_K, X \in \mathcal{X}$. □

Lema 2.59. *Sean $\mathcal{X}$ una clase cerrada bajo extensiones en una categoría abeliana y $\omega \subset \mathcal{X}$. Dadas las sucesiones exactas*

$$0 \to Y_C \to X_C \to C \to 0$$

$$0 \to X_C \to W \to X \to 0$$

si $X, X_C \in \mathcal{X}$, $Y_C \in \hat{\omega}$ y $W \in \omega$, entonces la sucesión

$$0 \to C \to Z \to X \to 0$$

en el diagrama pushout tiene la propiedad de que $Z \in \hat{\omega}$ y $X \in \mathcal{X}$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Y_C \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y_C \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X_C \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Tomando el pushout del primer morfismo de la segunda sucesión dada con el segundo morfismo de la primera sucesión dada obtenemos el diagrama adjunto.

Sabemos que $X \in \mathcal{X}$ y es inmediato que $Z \in \hat{\omega}$ ya que $W \in \omega$ y $Y_C \in \hat{\omega}$. □

Definición 2.60. Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ una pareja de clases de módulos. Decimos que ω es un cogenerador de $\mathcal{X}$ si $\omega \subseteq \mathcal{X}$ y para cada $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta

$$0 \to X \to W \to X' \to 0$$

con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$.

Lema 2.61. *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases de módulos. Se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}^{\vee}) = \operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$.

(b) $\operatorname{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}^{\wedge}) = \operatorname{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$.

Demostración. Probaremos el primer punto, la prueba del segundo es dual.

Dado que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^{\vee}$ se sigue que $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}^{\vee}) \geq \operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$. Por lo que podemos suponer $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}^{\vee}) = k < \infty$. Por otro lado, dado $M \in \mathcal{X}^{\vee}$ probaremos por inducción sobre $n = \operatorname{coresdim}_{\mathcal{X}}(M)$ que $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$.

Si $n = 0$ entonces $M \in \mathcal{X}$. Por lo que es claro que $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$.

Sea $n > 0$. Por hipótesis inductiva, $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(N) \leq \operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$ para todo módulo N con $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{X}}(N) < n$. Tenemos una sucesión exacta

$$\eta : \quad 0 \to M \to X_0 \to K \to 0$$

con $X_0 \in \mathcal{X}$ y $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{X}}(K) = n - 1$, por lo que $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(K) \leq \operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = k$. De manera que al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_R(\_, Y)$ a η, obtenemos la sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}_R^k(X_0, Y) \to \operatorname{Ext}_R^k(M, Y) \to \operatorname{Ext}_R^{k+1}(K, Y),$$

donde $\operatorname{Ext}_R^k(X_0, Y) = 0 = \operatorname{Ext}_R^{k+1}(K, Y)$ para todo $Y \in \mathcal{Y}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}).$$

□

Teorema 2.62. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ una pareja de clases de módulos. Si ω es un cogenerador de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ cerrada por extensiones, entonces:*

(a) para cada $X \in \hat{\mathcal{X}}$ existen sucesiones exactas cortas

$$0 \to K_X \to M_X \xrightarrow{g_X} X \to 0 \qquad \textit{con } K_X \in \hat{\omega},\ M_X \in \mathcal{X} \qquad y$$

$$0 \to X \xrightarrow{f_X} B_X \to C_X \to 0 \qquad \textit{con } B_X \in \hat{\omega},\ C_X \in \mathcal{X} \qquad ;$$

(b) si $\omega \subset \mathcal{X}^{\perp}$, entonces $\hat{\omega} \subset \mathcal{X}^{\perp}$ y f_X es una $\hat{\omega}$-preenvolvente, g_X es una $\mathcal{X}$-precubierta.

Demostración. Sea ω una cogenerador de $\mathcal{X}$.

(a) Sea $C \in \hat{\mathcal{X}}$, es decir $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(C) = n < \infty$. Construiremos las sucesiones buscadas por inducción sobre n.
Si $n = 0$, entonces $C \in \mathcal{X}$. Dado que ω es cogenerador, existe una sucesión exacta

$$0 \to C \to W \to X' \to 0$$

con $W \in \omega \subseteq \hat{\omega}$ y $X' \in \mathcal{X}$. Además también tenemos la sucesión exacta

$$0 \to 0 \to C \xrightarrow{1} C \to 0$$

donde $0 \in \hat{\omega}$.
Sea $n > 0$. Por hipótesis de inducción, existen tales sucesiones para todo módulo N con $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(N) \leq k$. Dado que $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(C) = n$ tenemos que existe una sucesión exacta

$$0 \to K \to X_0 \to C \to 0$$

con $X_0 \in \mathcal{X}$ y $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(K) \leq n - 1$. Lo que implica por hipótesis de inducción que existen las sucesiones exactas

$$0 \to K_K \to M_K \xrightarrow{g_K} K \to 0 \qquad \text{con } K_K \in \hat{\omega},\ M_K \in \mathcal{X} \qquad \text{y}$$

$$0 \to K \xrightarrow{f_K} B_K \to C_K \to 0 \qquad \text{con } B_K \in \hat{\omega},\ C_K \in \mathcal{X} \qquad .$$

Entonces, del lema 2.58 tenemos que existe una sucesión exacta

$$0 \to B_K \to U \to C \to 0$$

con $U \in \mathcal{X}$ y $B_K \in \hat{\omega}$. Ahora bien, dado que $U \in \mathcal{X}$, existe una sucesión exacta

$$0 \to U \to W \to L \to 0$$

con $W \in \omega$ y $L \in \mathcal{X}$, entonces por el lema 2.59 tenemos que existe una sucesión exacta

$$0 \to C \to Z \to L \to 0$$

con $Z \in \hat{\omega}$ y $Z \in \mathcal{X}$.

(b) Dado que $\omega \subseteq \mathcal{X}^{\perp}$ si y sólo si $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$, se tiene que $\hat{\omega} \subseteq \mathcal{X}^{\perp}$ ya que $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\hat{\omega}) = \operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$. De manera que, al considerar las sucesiones del primer punto para un módulo $X \in \hat{\mathcal{X}}$ tenemos que $K_X \in \mathcal{X}^{\perp}$ y $C_X \in \mathcal{X} \subseteq^{\perp} (\hat{\omega})$.

Para ver que g_X es una $\mathcal{X}$-precubierta basta observar que un morfismo $f : Y \to X$ con $Y \in \mathcal{X}$ se factoriza a través de g_X si y sólo si la sucesión construida con el pullback de f y g_X se escinde, lo cual se cumple debido a que $\mathrm{Ext}^1_R(Y, K_X) = 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_X \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & Y \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & M_X \arrow[r, "g_X"'] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Análogamente se prueba que f_X es $\mathcal{X}$-precubierta.

□

Definición 2.63. Dada una clase de módulos $\mathcal{X}$, decimos que una clase ω es $\mathcal{X}$-inyectivo si $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$.

Lema 2.64. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de módulos tal que ω es $\mathcal{X}$-inyectivo. Entonces*

(a) $\omega^\wedge$ es $\mathcal{X}$-inyectivo;

(b) si ω es un cogenerador de $\mathcal{X}$ cerrado por sumandos directos, entonces

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp = \mathcal{X} \cap (\omega^\wedge) = \omega.$$

Demostración.

(a) Es inmediato de 2.61.

(b) Por el punto anterior es claro que $\mathcal{X} \cap (\omega^\wedge) \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp$.
Por otro lado, dado $X \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp$existe una sucesión exacta

$$0 \to X \to W \to X' \to 0$$

con $W \in \omega$ y $X' \in \mathcal{X}$, debido a que ω es cogenerador. Dicha sucesión se escinde pues $X \in \mathcal{X}^\perp$, así que $X \in \omega$.
Además, es claro que $\omega \subseteq \mathcal{X} \cap (\omega^\wedge)$. Por lo tanto, se tienen las igualdades buscadas.

□

Lema 2.65. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de módulos. Si ω es un cogenerador $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$ cerrado por sumandos directos, entonces se cumplen las siguientes igualdades:*

(a) $\mathcal{X} \cap \omega^\vee = \{X \in \mathcal{X} \mid \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X) < \infty\}$ y

(b) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) = \mathrm{coresdim}_\omega(M)$ para todo $M \in \mathcal{X} \cap \omega^\vee$.

Demostración.

(a) Dado $M \in \mathcal{X} \cap \omega^{\vee}$, por 2.55 tenemos que

$$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) + \mathrm{coresdim}_{\omega}(M) = \mathrm{coresdim}_{\omega}(M) < \infty.$$

Por otro lado, para todo $M \in \mathcal{X}$ con $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(X) = n < \infty$ podemos contruir una sucesión exacta

$$0 \to M \to W_0 \to ... \to W_{n-1} \to Z \to 0$$

con $W_i \in \omega$ y $Z \in \mathcal{X}$ debido a que ω es un cogenerador en $\mathcal{X}$. Así que por 1.33 se sigue que

$$\mathrm{Ext}_R^k(\mathcal{X}, Z) = \mathrm{Ext}_R^{n+k}(\mathcal{X}, M) = 0$$

para todo $k > 0$. Por lo tanto, $Z \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp} = \omega$ por 2.64. En conclusión, $\mathrm{coresdim}_{\omega}(M) \leq n$.

(b) Se sigue de la prueba anterior.

□

Teorema 2.66. *Sea $(\mathcal{X}, \omega)$ un par de clases de módulos cerradas por sumandos directos. Si $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y ω es un cogenerador $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$, entonces*

$$\mathrm{pd}_{\omega^{\wedge}}(C) = \mathrm{pd}_{\omega}(C) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) \quad \textit{para todo } C \in \mathcal{X}^{\wedge}.$$

Demostración. Sean $\mathcal{X}$ cerrada por extensiones, ω un cogenerador $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$ y $C \in \mathcal{X}^{\wedge}$.

- $\mathrm{pd}_{\omega}(C) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C)$.
  Se sigue de 2.55(b) que

$$\mathrm{pd}_{\omega}(C) \leq \mathrm{pd}_{\omega}(\mathcal{X}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(C) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(C) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(C).$$

- $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C) = \mathrm{pd}_{\omega}(C)$.
  Lo probamos por inducción sobre $n = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(C)$.
  Si $n = 0$ entonces $C \in \mathcal{X}$. Así que $\mathrm{pd}_{\omega}(C) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) = 0$.
  En caso de que $n = 1$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to X_1 \to X_0 \to C \to 0$$

  con $X_0, X_1 \in \mathcal{X}$. Además, por 2.62 existe una sucesión exacta

$$\eta: \quad 0 \to Y_C \to X_C \xrightarrow{\varphi} C \to 0$$

  donde $Y_C \in \omega^{\wedge}$, $X_C \in \mathcal{X}$ y φ es una $\mathcal{X}$-precubierta.

Tomando E como el pullback de las sucesiones anteriores, observamos que como φ es una $\mathcal{X}$-precubierta la sucesión exacta

$$0 \to X_1 \to E \to X_C \to 0$$

se escinde, por lo que $E \in \mathcal{X}$. Además, como $\omega^\wedge$ es $\mathcal{X}$-inyectivo por 2.64, se sigue que la sucesión exacta

$$0 \to Y_C \to E \to X_C \to 0$$

se escinde, por lo que $Y_C \in \mathcal{X}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & Y_C \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y_C \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & X_C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Finalmente, observamos que η no se escinde, ya que $C \notin \mathcal{X}$, y $Y_C \in \mathcal{X} \cap \omega^\wedge = \omega$ por 2.64. Por lo que podemos concluir que $\operatorname{Ext}_R^1(C, \omega) \neq 0$. Por lo tanto,

$$1 = \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(C) \geq \operatorname{pd}_\omega(C) \geq 1.$$

Sea $n > 1$. Por hipótesis de inducción, $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(N) = \operatorname{pd}_\omega(N)$ para todo módulo N con $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(C) < n$. Existe una sucesión exacta

$$\eta: \quad 0 \to K \to X_0 \to C \to 0$$

con $X_0 \in \mathcal{X}$ y $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(K) = n-1$, por lo que

$$\operatorname{pd}_\omega(K) = \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(K) = n-1.$$

De manera que existe $W \in \omega$ tal que $\operatorname{Ext}_R^{n-1}(K, W) \neq 0$. Por lo que al aplicar $\operatorname{Hom}_R(\_, W)$ a η obtenemos la sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}_R^{n-1}(X_0, W) \to \operatorname{Ext}_R^{n-1}(K, W) \to \operatorname{Ext}_R^n(C, W) \to \operatorname{Ext}_R^n(X_0, W) = 0,$$

y así podemos concluir que $\operatorname{Ext}_R^n(C, W) \neq 0$. Por lo tanto,

$$n \leq \operatorname{pd}_\omega(C) \leq \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(C) = n.$$

$\square$

Lema 2.67. *Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión completo y hereditario y $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Entonces*

(a) $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$ *y ω es un cogenerador $\mathcal{X}$-inyectivo en $\mathcal{X}$.*

(b) $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = \operatorname{pd}_\omega(M) = \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M)$ *para todo $M \in \mathcal{X}^\wedge$.*

(c) $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = \mathrm{resdim}_{\omega}(M)$ *para todo* $M \in \omega^{\wedge}$.

Demostración.

(a) Debido a que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es hereditario tenemos que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$ por 2.19. En particular, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\omega) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$. Por lo tanto, ω es $\mathcal{X}$-inyectivo.
Ahora, para probar que ω es cogenerador en $\mathcal{X}$ observamos que como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es completo, para todo $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta

$$0 \to X \to W \to X' \to 0$$

con $W \in \mathcal{Y}$ y $X' \in \mathcal{X}$. Pero como $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones, se sigue que $W \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $W \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \omega$.

(b) Sea $M \in \mathcal{X}^{\wedge}$. Por 2.66 y (a) tenemos que

$$\mathrm{pd}_{\omega^{\wedge}}(M) = \mathrm{pd}_{\omega}(M).$$

Por otro lado, por 2.55(b) tenemos que

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M).$$

Además, por 2.57 se tiene que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M)$. Por lo tanto,

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M).$$

(c) Análogamente a (b), dado $M \in \omega^{\wedge}$, por 2.55(b) tenemos que

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\omega) + \mathrm{resdim}_{\omega}(M) = \mathrm{resdim}_{\omega}(M).$$

Veamos por inducción sobre $n = \mathrm{resdim}_{\omega}(M)$ que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = \mathrm{resdim}_{\omega}(M)$.
En caso de que $n = 0$ se sigue que $M \in \omega \subseteq \mathcal{X}$. Por lo que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = 0$.
Sea $n > 0$. Por hipótesis de inducción $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(N) = \mathrm{resdim}_{\omega}(N)$ para todo módulo N con $\mathrm{resdim}_{\omega}(N) < n$. Observamos que tenemos una sucesión exacta

$$0 \to K \to W_0 \to M \to 0$$

con $W_0 \in \omega$ y K con $\mathrm{resdim}_{\omega}(K) = n - 1$, por lo que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(K) = n - 1$. Entonces por 2.53 tenemos que

$$n - 1 = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(K) \leq \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) - 1, \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(W_0)\} = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) - 1.$$

Por lo tanto,

$$n \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \mathrm{resdim}_{\omega}(M) = n.$$

□

Teorema 2.68. *Sean $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ un par de cotorsión hereditario y $\omega=\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) $\mathrm{pd}\,(\mathcal{X})=\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X})=\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{X})=\mathrm{coresdim}_{\omega}\,(\mathcal{X})=\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathrm{Mod}\,(R))$*;*

(b) $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X})<\infty$ *si y sólo si* $\mathcal{X}\subseteq\omega^{\vee}$ *y* $\mathrm{pd}\,(\omega)<\infty$*, y en tal caso* $\mathcal{Y}^{\vee}=\mathrm{Mod}\,(R)$.

Demostración.

(a) Por 2.57 sabemos que

$$\mathrm{pd}\,(\mathcal{X})=\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X})=\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathrm{Mod}\,(R))\leq\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{X})+1.$$

En caso de que $\mathrm{pd}\,(\mathcal{X})=\infty$, como $\omega\subseteq\mathcal{Y}$ tenemos que

$$\mathrm{coresdim}_{\omega}\,(\mathcal{X})\geq\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{X})\,.$$

Por lo que podemos concluir que

$$\mathrm{pd}\,(\mathcal{X})=\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X})=\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathrm{Mod}\,(R))=\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{X})=\mathrm{coresdim}_{\omega}\,(\mathcal{X})\,.$$

En caso de que $\mathrm{pd}\,(\mathcal{X})=n<\infty$. Como $\mathrm{pd}\,(\mathcal{X})=\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathrm{Mod}\,(R))$, se sigue que $\mathcal{Y}^{\vee}=\mathrm{Mod}\,(R)$. Así que por 2.55 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X})&=\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X})\\&\leq\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{Y})+\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{X})\\&=\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{X})\\&\leq\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathrm{Mod}\,(R))=\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X})\,.\end{aligned}$$

Además, como $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X})=\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X})<\infty$, por 2.65 sabemos que

$$\mathcal{X}=\{X\in\mathcal{X}\mid\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(X)<\infty\}=\mathcal{X}\cap\omega^{\vee}\subseteq\omega^{\vee}$$

y que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X})=\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X})=\mathrm{coresdim}_{\omega}\,(\mathcal{X})$.

(b) En caso de que $\mathrm{pd}\,(\mathcal{X})<\infty$, se ha probado que $\mathcal{Y}^{\vee}=\mathrm{Mod}\,(R)$ y que $\mathcal{X}\subseteq\omega^{\vee}$. Luego, por el resultado dual de 2.67 y el punto anterior tenemos que

$$\mathrm{pd}\,(\mathcal{X})=\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathrm{Mod}\,(R))=\mathrm{id}_{\omega}\,(\mathrm{Mod}R)=\mathrm{pd}\,(\omega)$$

En caso de que $\mathcal{X}\subseteq\omega^{\vee}$ y $\mathrm{pd}\,(\omega)=n<\infty$. Observamos que $\omega\subseteq\mathcal{X}\subseteq\omega^{\vee}$, lo que implica que $\mathrm{pd}\,(\omega)=\mathrm{pd}\,(\mathcal{X})$ por 2.61.

□

Definición 2.69. Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ clases de módulos. Definimos la clase

$$\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}):=\{X\in\mathcal{X}\mid\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}\,(X)<\infty\}\,.$$

En caso de que $\mathcal{Y} = \operatorname{Mod}(R)$ denotaremos $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = \mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Teorema 2.70. *Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión completo y hereditario, y $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Si $\operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) < \infty$, entonces los siguientes enunciados se satisfacen:*

(a) $\mathcal{X}^{\wedge} = \mathcal{P}_{\mathcal{Y}} \operatorname{Mod}(R) = \mathcal{P} \operatorname{Mod}(R)$ *y* $\mathcal{Y}^{\vee} = \operatorname{Mod}(R)$.

(b) $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) = \operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(M)$ *para todo* $M \in \mathcal{P} \operatorname{Mod}(R)$.

(c) $\operatorname{pd}(M) \leq \operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) + \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M)$ *para todo* $M \in \mathcal{P}(\operatorname{Mod}(R))$.

(d) $\mathcal{P}(\operatorname{Mod}(R)) \cap \mathcal{Y} = \omega^{\wedge}$.

Demostración.

(a) Dado que $\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = 0$ por 2.19, para todo $M \in \mathcal{X}^{\wedge}$ se tiene que

$$\operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) \tag{2.C}$$

por 2.55. En particular, $\mathcal{X}^{\wedge} \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{Y}} \operatorname{Mod}(R)$.
Por otro lado, de 1.33 podemos concluir que

$$\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) \leq \operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \tag{2.D}$$

para todo $M \in \operatorname{Mod}(R)$. Por lo tanto, $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}} \operatorname{Mod}(R) \subseteq \mathcal{X}^{\wedge}$, y así hemos probado que $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}} \operatorname{Mod}(R) \subseteq = \mathcal{X}$.
Ahora, como $\operatorname{Proj}(R) \subseteq \mathcal{X}$ tenemos que

$$\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) \leq \operatorname{resdim}_{\operatorname{Proj}(R)}(M) = \operatorname{pd}(M),$$

por lo que $\mathcal{P}(\operatorname{Mod}(R)) \subseteq \mathcal{X}^{\wedge}$.
Por otro lado, por 2.C y 2.D tenemos que $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) = \operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(M)$ para todo $M \in \mathcal{X}^{\wedge}$; así que por 2.55 tenemos que

$$\operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(M) \leq \operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) + \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) < \infty$$

para todo $M \in \mathcal{X}^{\wedge}$, lo que implica por 2.56 que $\operatorname{pd}(M) < \infty$ para todo $M \in \mathcal{X}^{\wedge}$.
Por lo tanto, $\mathcal{P} \operatorname{Mod}(R) = \mathcal{X}^{\wedge}$.
La ecuación $\mathcal{Y}^{\vee} = \operatorname{Mod}(R)$ es inmediata de 2.68.

(b) Se sigue de las ecuaciones 2.C y 2.D junto con el punto anterior.

(c) Por 2.55 sabemos que

$$\operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(M) \leq \operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) + \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M)$$

para todo módulo M. Además, en caso de que $M \in \mathcal{P}(\operatorname{Mod}(R))$ tenemos que

$$\operatorname{pd}(M) = \operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(M)$$

por 2.56 debido a que $\text{Proj}\,(R) \subseteq^{\perp_1} \mathcal{Y} = \mathcal{X}$. Dado que $\omega \subseteq \mathcal{Y} \cap \mathcal{P}(\text{Mod}\,(R))$ por 2.68, y tanto $\mathcal{Y}$ como $\mathcal{P}(\text{Mod}\,(R))$ son clases cerradas por conúcleos de monomorfismos, se sigue que $\omega^\wedge \subseteq \mathcal{Y} \cap \mathcal{P}(\text{Mod}\,(R))$.
Veamos la contención opuesta. Sean $M \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{P}(\text{Mod}\,(R))$ y $r = \text{pd}_{\mathcal{Y}}\,(M)$, la cual es finita debido a que $\text{pd}_{\mathcal{Y}}\,(M) \leq \text{pd}\,(M)$ por 2.56. Ahora, dado que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es completo de manera similar a la prueba de 2.67 se puede mostrar que para todo $Y \in \mathcal{Y}$ existe una sucesión exacta

$$0 \to Y' \to W \to Y \to 0$$

con $W \in \omega$ y $Y' \in \mathcal{Y}$. En particular, para M existe una sucesión exacta

$$0 \to K_1 \to W_0 \to M \to 0$$

con $W_0 \in \omega$ y $K_1 \in \mathcal{Y}$, y así $K_1 \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{P}(\text{Mod}\,(R))$ por 2.53. Repitiendo este razonamiento construimos con recursión una sucesión exacta

$$0 \to K_{r+1} \to W_r \to ... \to W_0 \to M \to 0$$

con $W_i \in \omega$ y $K_i \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{P}(\text{Mod}\,(R))$. Además, por 1.33 tenemos que

$$\text{Ext}^1_R\,(K_r, K_{r+1}) \cong \text{Ext}^{r+1}_R\,(M, K_{r+1}) = 0,$$

de modo que $K_{r+1} \in \omega$, ya que la sucesión exacta

$$0 \to K_{r+1} \to W_r \to K_r \to 0$$

se escinde. Por lo tanto, $\text{resdim}_\omega\,(M) \leq r + 1.$

$\square$

3 Las clases Gen$_n M$ y Cogen$_n M$

En los capítulos anteriores, analizamos el comportamiento de las clases $\text{Inj}(R)$ y $\text{Proj}(R)$ con el objetivo de recrear las construcciones hechas con módulos proyectivos e inyectivos. Dicho trabajo rindió frutos en el capítulo 2, donde generalizamos las dimensiones homológicas a dimensiones homológicas relativas y las relacionamos con pares de cotorsión.

En este capítulo, analizaremos uno de los resultados más importantes relacionados con un generador proyectivo: la equivalencia de Morita. Veremos que dicho resultado lo podemos generalizar, restringiéndolo a subcategorías de la forma $\text{Gen}(M)$ y $\text{Cogen}(M)$ para un módulo M que cumple ciertas propiedades.

Una vez hecho esto, se presentan las clases $\text{Gen}_n M$ y $\text{Cogen}_n M$ definidas en [Wei05] y [Baz04]. Aunque no encontraremos ningún teorema que incluya una equivalencia de categorías entre estas clases, veremos que generalizar las propiedades encontradas para $\text{Gen}(M)$ y $\text{Cogen}(M)$, nos brindarán interesantes características para $\text{Gen}_n(M)$ y $\text{Cogen}_n(M)$.

3.1. Equivalencias de subcategorías de módulos

Los teoremas de la equivalencia de Morita caracterizan las equivalencias entre dos categorías de módulos $\text{Mod}(R)$ y $\text{Mod}(S)$.

Teorema 3.1 (Morita I)**.** *Sean P_R un generador proyectivo y $S = \text{End}_R(P)$. Entonces*

$$\text{Hom}_R(P, \_) : \text{Mod}(R) \rightleftarrows \text{Mod}(S) : \_ \otimes_S P$$

es una equivalencia de categorías.

Teorema 3.2 (Morita II)**.** *Si R y S son anillos tales que existe una equivalencia de categorías*

$$F : \text{Mod}(R) \rightleftarrows \text{Mod}(S) : G,$$

y tomamos $P = G(S)$, entonces $S \cong \text{End}_R(P)$ de tal manera que P tiene una estructura natural de $S - R$ bimódulo. Además, con lo anterior podemos probar que existen isomorfismos naturales $F \cong \_ \otimes_S P$ y $G \cong \text{Hom}_R(P, \_)$.

Demostración. Ver los teoremas 18.24 y 18.26 de [Lam99]. □

Ahora, si en el enunciado de Morita I, quisiéramos usar un módulo arbitrario M en lugar de un generador proyectivo P, claramente necesitaremos cambiar el dominio y contradominio de los funtores. En esta sección exploraremos esta idea.

Las demostraciones de los resultados expuestos en esta sección, así como otros resultados relacionados, se pueden consultar en el capítulo 2 de [CF04].

Supongamos que tenemos una equivalencia de categorías

$$H := \mathrm{Hom}_R(V, \_) : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : \_ \otimes_S V =: T$$

donde $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son subcategorías de $\mathrm{Mod}\,(R)$ y $\mathrm{Mod}\,(S)$ respectivamente.

Recordemos que H y T son funtores adjuntos, por lo que para todo $M \in \mathcal{C}$ y $N \in \mathcal{D}$ existe un isomorfismo natural

$$\alpha = \{\alpha_{N,M} : \mathrm{Hom}_S(N, HM) \to \mathrm{Hom}_R(TN, M)\} \tag{3.A}$$

donde $\alpha(\delta)(n \otimes v) = \delta(n)(v)$ para todo $\delta \in \mathrm{Hom}_S(N, HM)$, $n \in N$ y $v \in V$.

Además, sabemos que asociadas a la adjunción existen las transformaciones naturales

$$\nu : TH \to 1_{\mathrm{Mod}(R)} \qquad \text{y} \qquad \eta : 1_{\mathrm{Mod}(S)} \to HT$$

donde, para todo $\varphi \in HM$, $v \in V$ y $n \in N$,

$$\nu_M(\varphi \otimes v) = \varphi(v) \qquad \text{y} \qquad \eta_N(n) : v \mapsto n \otimes v,$$

llamadas counidad y unidad respectivamente, las cuales podemos restringir claramente a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ (ver capítulo A.2. de [CF04]).

Por lo tanto, nos encontramos en la situación del siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Un par de funtores covariantes adjuntos $H : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : T$ son equivalencias si y sólo si la unidad y la counidad asociadas son isomorfismos naturales.*

Demostración. Ver A.3.3. de [CF04]. □

Por lo tanto, H y T son equivalencias, si y sólo si ν y η son isomorfismos naturales. Cabe introducir la siguiente definición.

Definición 3.4. [CM93]Sea $H : \mathrm{Mod}\,(R) \rightleftarrows \mathrm{Mod}\,(S) : T$ un par de funtores adjuntos con η y ν, la unidad y counidad asociadas, $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$ y $N \in \mathrm{Mod}\,(S)$. Decimos que M es ν-reflexivo si ν_M es isomorfismo, y que N es η-reflexivo si η_N es isomorfismo.

Proposición 3.5. *Sea* $H : \mathrm{Mod}\,(R) \rightleftarrows \mathrm{Mod}\,(S) : T$ *un par de funtores adjuntos con* η *y* ν*, la unidad y counidad asociadas. Para todo* $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$ *y* $N \in \mathrm{Mod}\,(S)$ *se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) Si M *es* ν*-reflexivo, entonces* HM *es* η*-reflexivo.*

(b) Si N *es* η*-reflexivo, entonces* TN *es* η*-reflexivo.*

Demostración. En efecto, dado $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$ tenemos que

$$H(\nu_M)\eta_{HM}(f) = \mathrm{Hom}_R(V, \nu_M)\eta_{HM}(f) = \nu_M\eta_{HM}(f) \quad \text{y}$$

$$f \overset{\eta_{HM}}{\mapsto} (f \otimes \_) \overset{\nu_M}{\mapsto} f.$$

Por lo tanto, $H(\nu_M)\eta_{HM} = 1_{HM}$. De modo que, si ν_M es isomorfismo, $H(\nu_M)$ es isomorfismo; y como $H(\nu_M)\eta_{HM} = 1_{HM}$, η_{HM} también lo es. □

En particular, dado que en nuestra discusión $H : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : T$ es una equivalencia de categorías, tenemos que $\mathcal{C}$ consiste R-módulos ν-reflexivos y $\mathcal{D}$ de R-módulos η-reflexivos. Veamos si podemos caracterizar estas clases de R-módulos de alguna manera:

Primero, observamos que

$$\mathrm{Im}\,(\nu_M) = \nu_M(M) = \sum_{f \in \mathrm{Hom}_R(V,M)} f(V),$$

por lo que ν_M es epimorfismo si y sólo si $M \in \mathrm{Gen}\,(V)$.

Para caracterizar los R-módulos N tales que η_N es monomorfismo observamos que

$$n \in \mathrm{Ker}\,(\eta_N) \text{ si y sólo si } (n \otimes v) = 0 \tag{3.B}$$

para todo $v \in V$. Recordando el isomorfismo natural 3.A, tenemos que

$$\delta(n)(v) = \alpha(\delta)(n \otimes v) \tag{3.C}$$

para todo $v \in V$ y $\delta \in \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(V, C))$ para cualquier $C \in \mathrm{Mod}\,(R)$. En particular, si C es un cogenerador inyectivo, de 3.B y 3.C tenemos que $n \in \mathrm{Ker}\,(\eta_N)$ si y sólo si $\delta(n) = 0$ para todo $\delta \in \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(V, C))$, lo cual sucede si y sólo si

$$n \otimes v \in \bigcap_{\delta \in \mathrm{Hom}_S(N, V^*)} \mathrm{Ker}\,(\alpha(\delta)) = \bigcap_{f \in \mathrm{Hom}_R(N \otimes V, C)} \mathrm{Ker}\,(f)\,,$$

donde $V^* = \mathrm{Hom}_R(V, C)$. Pero, como C es un cogenerador inyectivo, por 1.2(a2) tenemos que

$$\bigcap_{f \in \mathrm{Hom}_R(N \otimes V, C)} \mathrm{Ker}\,(f) = 0,$$

así que podemos concluir que

$$\bigcap_{f \in \mathrm{Hom}_S(N, V^*)} \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(\eta_N)\,.$$

Lo que implica que η_N es un monomorfismo si y sólo si $N \in \mathrm{Cogen}\,(V^*)$.

Hemos probado la siguiente proposición.

Proposición 3.6. *Sean $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$ y $N \in \mathrm{Mod}\,(S)$. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) ν_M es un epimorfismo si y sólo si $M \in \mathrm{Gen}\,(V)$;

(b) η_N es un monomorfismo si y sólo si $N \in \mathrm{Cogen}\,(V^*)$.

De modo que en nuestra discusión tenemos que $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Gen}\,(V)$ y $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{Cogen}\,(V^*)$. Es de particular importancia cuando $\mathcal{C} = \mathrm{Gen}\,(V)$ y $\mathcal{D} = \mathrm{Cogen}\,(V^*)$.

Definición 3.7. Sea V un módulo con $S = \mathrm{End}_R(V)$. Decimos que V es un $*$-módulo en caso de que

$$\mathrm{Hom}_R(V, \_) : \mathrm{Gen}\,(V) \rightleftarrows \mathrm{Cogen}\,(V^*) : \_ \otimes_S V$$

sea una equivalencia de categorías, donde $V^* := \mathrm{Hom}_R(V, C)$ para un cogenerador inyectivo C_R.

En particular, cuando V es un generador proyectivo, es un $*$-módulo. Para más ejemplos se puede consultar la sección 2.4 de [CF04].

Por último, el siguiente teorema contiene una caracterización de los $*$-módulos.

Teorema 3.8. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un R-módulo V con $S = \mathrm{End}_R(V)$:*

(a) V es un $*$-módulo;

(b) ν_M es monomorfismo para todo $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$ y η_N es un epimorfismo para todo $N \in \mathrm{Mod}\,(S)$;

(c) $\mathrm{Gen}\,(V)$ coincide con la clase

$$\{M \in \mathrm{Mod}\,(R) \mid \exists 0 \to V_1 \to V_0 \to M \to 0 \textit{ exacta con } V_0 \in \mathrm{Add}\,(V) \textit{ y } V_1 \in \mathrm{Gen}\,(V)\ \}\,,$$

V es un módulo finitamente generado y $\mathrm{Hom}_R(V, \_)$ es exacto en $\mathrm{Gen}\,(V)$.

Demostración. Ver teorema 2.3.8. de [CF04]. □

Ahora, lo primero que observamos en la caracterización anterior es que un $*$-módulo es finitamente generado, lo cual restringe demasiado nuestra elección de V. Por lo tanto, no continuaremos con la búsqueda de una equivalencia de categorías.

Sin embargo, del teorema anterior podemos observar una propiedad interesante: V es un módulo tal que para todo módulo $M \in \mathrm{Gen}\,(V)$ existe una sucesión exacta

$$0 \to U_1 \to V_0 \to M \to 0$$

con $U_1 \in \mathrm{Gen}\,(V)$ y $V_0 \in \mathrm{Add}\,(V)$. Se sigue que para U_1 existe una sucesión exacta

$$0 \to U_2 \to V_1 \to U_1 \to 0$$

con $U_2 \in \mathrm{Gen}\,(V)$ y $V_1 \in \mathrm{Add}\,(V)$. De modo que por recursión podemos construir una sucesión exacta

$$... \to V_n \to ... \to V_1 \to V_0 \to M \to 0$$

con $V_i \in \mathrm{Add}\,(V)$ para todo i. Es decir podemos contruir una resolución de M relativa a V. Lo cual nos interesa, puesto podremos utilizar nuestra herramienta construida en capítulos anteriores.

En lo que sigue se generalizan las clases $\mathrm{Gen}\,(M)$ y $\mathrm{Cogen}\,(M)$, así como el concepto de $*$-módulo.

3.2. Las clases Gen$_n M$ y Cogen$_n M$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{X}$ una clase de R-módulos. Denotaremos como $\mathrm{Gen}_n(\mathcal{X})$ a la clase de R-módulos X que admiten una sucesión exacta de la forma

$$X_n \to ... \to X_1 \to X \to 0$$

donde $X_i \in \mathrm{Add}\,(\mathcal{X})$ para todo i.

Dualmente, definimos la clase $\mathrm{Cogen}_n(M)$ como la colección de módulos que admiten una sucesión exacta de la forma

$$0 \to X \to X_1 \to ... \to X_n$$

donde $X_i \in \mathrm{Prod}\,(\mathcal{X})$ para todo i.

De manera similar podemos definir las clases

$$\mathrm{gen}_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathrm{Gen}_n(\mathcal{X}) \text{ y } \mathrm{cogen}_n(\mathcal{X}) \subseteq \mathrm{Cogen}_n(\mathcal{X})$$

si además pedimos que X_i sea finitamente generado para todo i.

Para dar una caracterización de estos módulos observamos lo siguiente:

Lema 3.9 (Truco de Eilenberg)**.** *Sea $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$. Si $K \in \mathrm{Add}\,(M)$, entonces existen cardinales α y β tales que $K \oplus M^{(\alpha)} \cong M^{(\beta)}$. Más aún, si existe una sucesión exacta*

$$M_n \to M_{n-1} \to ... \to M_1 \to X \to 0$$

con $M_i \in \mathrm{Add}\,(M)$ para toda $1 \leq i \leq n$, entonces podemos contruir una sucesión exacta

$$M^{(\alpha_n)} \to M^{(\alpha_{n-1})} \to ... \to M^{(\alpha_1)} \to X \to 0.$$

Dualmente, en caso de que $K \in \mathrm{Prod}\,(M)$, existen cardinales α y β tales que $K \oplus M^{\alpha} \cong M^{\beta}$. Además, si existe una sucesión exacta

$$0 \to X \to M_1 \to ... \to M_{n-1} \to M_n$$

con $M_i \in \mathrm{Prod}\,(M)$ para toda $1 \leq i \leq n$, entonces podemos contruir una sucesión exacta

$$0 \to X \to M^{\alpha_1} \to ... \to M^{\alpha_{n-1}} \to M^{\alpha_n}.$$

Demostración. Si $K \in \mathrm{Add}\,(M)$, entonces existe N tal que $K \oplus N = M^{(\alpha)}$. De modo que

$$K \oplus \left(M^{(\alpha)}\right)^{(\mathbb{N})} \cong K \oplus (N \oplus K)^{(\mathbb{N})} = K \oplus N \oplus K \oplus N \oplus ... \cong \left(M^{(\alpha)}\right)^{(\mathbb{N})}.$$

Ahora dada una sucesión exacta

$$0 \to X \to M_n \to M_{n-1} \to ... \to M_1$$

con $M_i \in \mathrm{Add}\,(M)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, utilizando el truco de Eilenberg, podemos construir un módulo $K_i \cong M^{(\alpha_i)}$ tal que $M_i \oplus K_i = M^{(\beta_i)}$ para ciertos cardinales α_i, β_i.

De manera que al hacer la suma directa de los complejos

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 \to & R & \to & M_0 & \to & M_1 & \to & M_2 & \to & ... & \to & M_n & \to & 0 \\
0 \to & 0 & \to & K_0 & \to & K_0 & \to & 0 & \to & ... & \to & 0 & \to & 0 \\
0 \to & 0 & \to & 0 & \to & K_1 & \to & K_1 & \to & ... & \to & 0 & \to & 0 \\
 & \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \\
0 \to & 0 & \to & 0 & \to & ... & \to & 0 & \to & K_{n-1} & \to & K_{n-1} & \to & 0 \\
0 \to & 0 & \to & 0 & \to & ... & \to & 0 & \to & K_n & \to & K_n & \to & 0
\end{array}$$

obtenemos la sucesión exacta buscada. □

Es inmediato el siguiente resultado.

Corolario 3.10. *Sea* $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$*. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) $X \in \mathrm{Gen}_n(M)$ *si y sólo si existe una sucesión exacta*

$$M^{(\alpha_n)} \to M^{(\alpha_{n-1})} \to ... \to M^{(\alpha_1)} \to X \to 0,$$

(b) $X \in \mathrm{Cogen}_n(M)$ *si y sólo si existe una sucesión exacta*

$$0 \to X \to M^{\alpha_n} \to M^{\alpha_{n-1}} \to ... \to M^{\alpha_1}.$$

Ahora exploraremos las propiedades de cerradura de las clases $\mathrm{Gen}_n(M)$ y $\mathrm{Cogen}_n(M)$. Para ello introducimos la siguiente defininción.

Definición 3.11. Sea M un módulo. Decimos que M es finendo si es finitamente generado sobre su anillo de endomorfismos.

Lema 3.12. *[GT06][AHTT01][CM93]Los siguientes enunciados son equivalentes para un módulo* M*:*

(a) M *es finendo;*

(b) existe una $\mathrm{add}\,(M)$*-preenvolvente de* R*;*

(c) existe una $\mathrm{Gen}\,(M)$*-preenvolvente de* R*;*

(d) $\mathrm{Gen}\,(M)$ *es una clase preenvolvente;*

(e) existe una $\mathrm{Add}\,(M)$*-preenvolvente* $R \to B$ *de* R*.*

(f) $M^X \in \mathrm{Gen}\,(M)$ *para todo* X*;*

(g) $\mathrm{Gen}\,(M)$ *es cerrado por productos arbitrarios;*

(h) $M^M \in \mathrm{Gen}\,(M)$*.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $E = \mathrm{End}_R(M)$. Dado que el R-módulo M es finendo y $\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M$ como $\mathrm{End}_R(M)$-módulos, existen $f_1, ..., f_n$ que generan a $\mathrm{Hom}_R(R, M)$. Se propone como $\mathrm{add}\,(M)$- envolvente de R al morfismo

$$\psi = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : R \to M^n.$$

Sea $g : R \to M'$ con $M' \in \mathrm{add}\,(M)$. Por defininción, existe N tal que $M' \oplus N = M^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Sean $\iota : M' \to M^k$ la inclusión natural y $\pi : M^k \to M'$ la proyección natural. Dado que $\iota g \in \mathrm{Hom}_R(R, M^k) \cong \mathrm{Hom}_R(R, M)^k$ podemos concluir que

$$\iota g = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^1 f_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_i^k f_i \end{pmatrix}$$

donde $a_i^j \in E$ para todo i, j. Así que

$$g = \pi\iota g = \pi \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^1 f_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_i^k f_i \end{pmatrix}.$$

De manera que si definimos $\phi : M^n \to M'$ como

$$\phi = \pi \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \dots & a_n^k \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$\phi\psi = \pi \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \dots & a_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^1 f_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_i^k f_i \end{pmatrix} = g.$$

Por lo tanto, ψ es $\mathrm{add}\,(M)$-preenvolvente.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sea $b : R \to B$ una $\mathrm{add}\,(M)$-preenvolvente. Veamos que b también es una $\mathrm{Gen}\,(M)$-preenvolvente. Sea $c : R \to C$ con $C \in \mathrm{Gen}\,(M)$. Dado que $C \in \mathrm{Gen}\,(M)$, existe un epimorfismo $f : M^{(X)} \to C$. Luego, como R es proyectivo, existe $c' : R \to M^{(X)}$ tal que $fc' = c$. Pero, como R es generado por 1, $c'(R)$ es generado por $c'(1)$; así que, como $c'(1) \in M^{(X_0)}$ con $X_0 \subseteq X$ finito, existe un morfismo $c'' : R \to M^{(X_0)}$ tal que $c = fic''$, donde $i : M^{(X_0)} \to M^{(X)}$ es la inclusión natural. Entonces, dado que $M^{(X_0)} \in \mathrm{add}\,(M)$, c'' se factoriza a través de b y entonces c también. Por lo tanto, b es una $\mathrm{Gen}\,(M)$-preenvolvente.

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "c''"'] \arrow[d, "c'"] \arrow[dr, "c"] & \\ M^{(X_0)} \arrow[r, "i"'] & M^{(X)} \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

$(c) \Rightarrow (d)$ Sea $b : R \to B$ una $\mathrm{Gen}\,(M)$-preenvolvente de R. Para un R-módulo arbitrario A, sabemos que existe un epimorfismo $\pi : R^{(I)} \to A$. Si

$$\begin{tikzcd} R^{(I)} \arrow[r, "b^{(I)}"] \arrow[d, "\pi"'] & B^{(I)} \arrow[d, "\sigma"] \\ A \arrow[r, "b'"'] & B' \end{tikzcd}$$

es un push-out, b' es una $\mathrm{Gen}\,(M)$-preenvolvente de A. En efecto, dado que π es un epimorfismo, σ también lo es; por lo que $B' \in \mathrm{Gen}\,(M)$. Luego, para todo morfismo $f : A \to X$ con $X \in \mathrm{Gen}\,(M)$, se tiene que $f\pi$ se factoriza a través de $b^{(I)}$ por ser una $\mathrm{Gen}\,(M)$-preenvolvente, pero el push-out hace que f se factorice a través de b'. Por lo tanto, b' es $\mathrm{Gen}\,(M)$- preenvolvente.

$$
\begin{tikzcd}
R^{(I)} \arrow[r, "b^{(I)}"] \arrow[d, "\pi"'] & B^{(I)} \arrow[d, "\sigma"] \arrow[ddr, bend left] & \\
A \arrow[r, "b'"'] \arrow[drr, bend right, "f"'] & B' \arrow[dr] & \\
 & & X
\end{tikzcd}
$$

$(d) \Rightarrow (a)$ Veamos que $M^X \in \mathrm{Gen}\,(M)$ para todo conjunto X. En efecto, consideremos un epimorfismo $f : R^{(Z)} \to M^X$; si $g : R^{(Z)} \to M'$ es una $\mathrm{Gen}\,(M)$-preenvolvente, se tiene que $\pi_x f$ se factoriza a través de g para todo $x \in X$ donde $\pi_x : M^X \to M$ es la proyección canónica. Pero por la propiedad universal del producto, existe un morfismo $h : M' \to M^X$ tal que $hg = f$. Entonces dado que f es epimorfismo, h es epimorfismo. Por lo tanto, $M^X \in \mathrm{Gen}\,(M)$ ya que hemos cubierto M^X con M' que ya estaba cubierto por un coproducto de M.

$$
\begin{tikzcd}
R^{(Z)} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M^X \arrow[d, "\pi_x"] \\
M' \arrow[r, "g'_x"'] & M
\end{tikzcd}
$$

Por lo anterior sabemos que existe un epimorfismo $\phi : M^{(X)} \to M^M$, donde el producto M^M lo manipularemos como el conjunto

$$M^M = \{f : M \to M \mid f \text{ es función}\},$$

y consideraremos las inclusiones canónicas $v_a : M \to M^{(X)}$ y las proyecciones canónicas $\pi_a : M^M \to M$. Dado que ϕ es epimorfismo, existe $x \in M^{(X)}$ tal que $\phi(x) = 1_M$. Entonces, si F es un subconjunto finito de X tal que $x = \sum_{a \in F} v_a(x_a)$, tenemos para todo $m \in M$ que

$$m = \pi_m \phi(x) = \pi_m \phi\left(\sum_{a \in F} v_a(x_a)\right) = \sum_{a \in F} \pi_m \phi v_a(x_a)$$

donde $\pi_m \phi v_a \in E$. Por lo tanto, ${}_E M$ es generado por $\{x_a\}_{a \in F}$.

$(b) \Rightarrow (e)$ Sea $b : R \to B$ una $\mathrm{add}\,(M)$-preenvolvente de R. Veamos que b es una $\mathrm{Add}\,(M)$-preenvolvente. Sea $g : R \to C$ con $C \in \mathrm{Add}\,(M)$, es decir C es sumando directo de $M^{(Z)}$ para algún Z. Dado que R es finitamente generado, g se facotoriza a través de $g' : R \to M^{(X_0)}$ para un subconjunto finito $X_0 \subseteq X$. Entonces g se factoriza a través de b, ya que g se factoriza a través de g', y g' se factoriza a través de b debido a que b es una $\mathrm{add}\,(M)$-preenvolvente.

$(e) \Rightarrow (c)$ Sea $b : R \to B$ una $\mathrm{Add}\,(M)$-preenvolvente. Veamos que b también es una $\mathrm{Gen}\,(M)$-preenvolvente. Sea $c : R \to C$ con $C \in \mathrm{Gen}\,(M)$, por lo que existe un epimorfismo $f : M^{(X)} \to C$. Entonces, como R es proyectivo, existe $c' : R \to M^{(X)}$ tal que $c = fc'$. Luego, dado que $M^{(X)} \in \mathrm{Add}\,(M)$, c' se factoriza a través de b, y así c se factoriza a través de b. Por lo tanto, b es una $\mathrm{Gen}\,(M)$-preenvolvente.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "c'"] \arrow[dr, "c"] & \\ M^{(X)} \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

$(a) \Rightarrow (f)$ Si ${}_E M$ es finitamente generado, existe un conjunto finito de generadores $\{y_1, ..., y_n\}$. Sea $\alpha = (m_x)_X \in M^X$. Para todo $x \in X$ existen $a_1^x, ..., a_n^x \in E$ tales que $\sum_{i=1}^n a_i^x y_i = m_x$. De modo que para todo $x \in X$ existe un morfismo

$$\phi_x = (a_1^x, ..., a_n^x) : M^n \to M$$

tal que $\phi_x(y_1, ..., y_n) = m_x$, y así existe un morfismo

$$\phi_\alpha = \prod_{x \in X} \phi_x : M^n \to M^X$$

tal que $\phi_\alpha(y_1, ..., y_n) = \alpha$. Por lo tanto,

$$\phi = \bigoplus_{\alpha \in M^X} \phi_\alpha : (M^n)^{(M^X)} \to M^X$$

es suprayectivo y así podemos concluir que $M^X \in \mathrm{Gen}\,(M)$.

$(f) \Rightarrow (g)$ Sea $(f_i : M^{(X_i)} \to N_i)_{i \in I}$ una familia de epimorfismos. Tomando $X = \cup_{i \in I} X_i$, dicha familia induce una segunda familia de epimorfismos $(f_i : M^{(X)} \to N_i)_{i \in I}$, la cual induce el epimorfismo

$$\prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} M^{(X)} \to \prod_{i \in I} N_i,$$

donde $\prod_{i \in I} M^{(X)} = \left(M^I\right)^{(X)} \in \mathrm{Gen}\,(M)$. Lo que implica que $\prod_{i \in I} N_i \in \mathrm{Gen}\,(M)$ ya que $M^I \in \mathrm{Gen}\,(M)$.

$(g) \Rightarrow (h)$ Trivial.

$(h) \Rightarrow (a)$ Por hipótesis tenemos un epimorfismo $\phi = (\phi_i)_{i \in I} : M^{(I)} \to M^M$. Sea $\alpha = (\alpha_m) \in M^M$ tal que $\alpha_m = m$ para toda $m \in M$. Dado que ϕ es un epimorfismo existe $(y_i)_{i \in I}$ tal que

$$\phi(y_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} \phi_i(y_i) = \alpha.$$

Ahora, si $\pi_m : M^M \to M$ a la m-ésima proyección canónica, y $F \subseteq I$ es un conjunto finito tal que $\alpha = \sum_{i\in F} \phi_i(y_i)$, tenemos para todo $m \in M$ que

$$m = \pi_m(\alpha) = \pi_m(\sum_{i\in F} \phi_i(y_i)) = \sum_{i\in F} \pi_m\phi_i(y_i).$$

Por lo tanto, M es generado por el conjunto finito $\{y_i\}_{i\in F}$. □

Observación 3.13. *En la demostración del lema anterior queda implícito que las condiciones son además equivalentes a las siguientes:*

(a) existe una $\mathrm{Add}\,(M)$*-preenvolvente de un progenerador,*

(b) existe una $\mathrm{Add}\,(M)$*-preenvolvente para todo progenerador,*

(c) existe una $\mathrm{Gen}\,(M)$*-preenvolvente para un progenerador, y*

(d) existe una $\mathrm{Gen}\,(M)$*-preenvolvente para todo progenerador.*

De la demostración del lema anterior podemos deducir el siguiente resultado.

Proposición 3.14. *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *y* $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$*. Considerando las siguientes enunciados:*

(a) M *es finendo,*

(b) $M^X \in \mathrm{Gen}\,(M)$ *para todo* X*,*

(c) $\mathrm{Gen}_n(M)$ *es cerrado por productos arbitrarios para todo* $n \geq 1$*,*

(d) $M^M \in \mathrm{Gen}\,(M)$*;*

tenemos que $(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a) \Rightarrow (b)$*. Más aún, en caso de que* $\mathrm{Gen}_n(M)$ *sea cerrado por* n*-cocientes también tenemos que* $(b) \Rightarrow (c)$*.*

Demostración. Ya hemos visto la prueba de las implicaciones $(d) \Leftrightarrow (a) \Leftrightarrow (b)$, por lo que basta probar las implicaciones $(b) \Rightarrow (c)$ y $(c) \Rightarrow (d)$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Dada una familia $\{N_i\}_{i\in I}$ en $\mathrm{Gen}_n(M)$, sabemos por el truco de Eilenberg que para cada $i \in I$ tenemos una sucesión exacta

$$M^{(\alpha_n^i)} \to M^{(\alpha_{n-1}^i)} \to ... \to M^{(\alpha_1^i)} \to N_i \to 0.$$

Con dichas sucesiones podemos construir una sucesión exacta

$$\prod_{i\in I} M^{(\alpha_n^i)} \to \prod_{i\in I} M^{(\alpha_{n-1}^i)} \to ... \to \prod_{i\in I} M^{(\alpha_1^i)} \to \prod_{i\in I} N_i \to 0,$$

donde cada $\prod_{i\in I} M^{(\alpha_k^i)} \cong (M^I)^{(\alpha_k^i)} \in \mathrm{Gen}\,(M)$ por hipótesis. Entonces como $\mathrm{Gen}_n(M)$ es cerrado por n-cocientes podemos concluir que $\prod_{i\in I} N_i \in \mathrm{Gen}_n(M)$.

$(3 \Rightarrow 4)$ Claramente $M \in \mathrm{Gen}_n(M)$, así que $M^M \in \mathrm{Gen}_n(M) \subseteq \mathrm{Gen}\,(M)$. □

Definición 3.15. Sea $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$. Decimos que M es cofinendo, si existe una $\mathrm{Prod}\,(M)$-precubierta de un cogenerador inyectivo Q.

El siguiente es el resultado dual del lema anterior.

Lema 3.16. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un módulo M:*

(a) $\mathrm{Cogen}\,(M)$ *es una clase precubriente;*

(b) todo cogenerador inyectivo tiene una $\mathrm{Prod}\,(M)$*-precubierta;*

(c) existe una $\mathrm{Prod}\,(M)$*-precubierta de un cogenerador inyectivo Q;*

(d) existe una $\mathrm{Cogen}\,(M)$*-precubierta de un cogenerador inyectivo Q.*

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$ Sea Q un cogenerador inyectivo. Dado que $\mathrm{Cogen}\,(M)$ es una clase precubriente, existe una $\mathrm{Cogen}\,(M)$-precubierta $f : M' \to Q$. Como $M' \in \mathrm{Cogen}\,(M)$, existe un monomorfismo $i : M' \to M^X$. Así que, como Q es inyectivo, existe un morfismo $g : M^X \to Q$ tal que $gi = f$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & M^X \arrow[dl, "g"] \\ & & Q & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"] & & M^X \arrow[dl, "g"] \\ M'' \arrow[ur, "h'"] \arrow[rr, "h"'] & & Q & \end{tikzcd}$$

Veamos que g es $\mathrm{Prod}\,(M)$-precubierta. Sea $h : M'' \to Q$ tal que $M'' \in \mathrm{Prod}\,(M)$. Dado que $\mathrm{Prod}\,(M) \subset \mathrm{Cogen}\,(M)$ por 1.30, y que f es una $\mathrm{Cogen}\,(M)$-precubierta, h se factoriza a través de f, pero como f se factoriza a través de g, h se factoriza a través de g. Por lo tanto, g es una $\mathrm{Prod}\,(M)$-precubierta de Q.

$(b) \Rightarrow (c)$ Trivial.

$(c) \Rightarrow (d)$ Sea $f : M' \to Q$ una $\mathrm{Prod}\,(M)$-precubierta de un cogenerador inyectivo. Veamos que f también es una $\mathrm{Cogen}\,(M)$-precubierta de Q. Sea $g : M'' \to Q$ con $M'' \in \mathrm{Cogen}\,(M)$. Como $M \in \mathrm{Cogen}\,(M)$, existe un monomorfismo $i : M'' \to M^X$. Entonces, como Q es inyectivo, existe un morfismo $g' : M^X \to Q$ tal que $g'i = g$. Pero, como f es una $\mathrm{Prod}\,(M)$-precubierta y $M^X \in \mathrm{Prod}\,(M)$, g' se factoriza a través de f, lo que implica que g se factoriza a través de f.

$(d) \Rightarrow (a)$ Sea Q un cogenerador inyectivo con una $\operatorname{Cogen}(M)$-precubierta $f : M' \to Q$. Sea $N \in \operatorname{Mod}(R)$, dado que Q es un cogenerador existe un monomorfismo $g : N \to Q^X$. Consideramos el pull-back (P, α, β) de $f^X : M'^X \to Q^X$ y g. Observamos que α es un monomorfismo dado que g es un monomorfismo, lo que implica que $P \in \operatorname{Cogen}(M)$.
Veamos que β es $\operatorname{Cogen}(M)$-precubierta. Sea $w : M'' \to N$ un morfismo con $M'' \in \operatorname{Cogen}(M)$. Dado que f^X es una $\operatorname{Cogen}(M)$-precubierta, existe un morfismo $w' : M'' \to M'$ tal que $gw = f^X w'$, lo que implica que w_1 se factoriza a través de β por la propiedad universal del pull-back.

$$\begin{tikzcd}
M'' \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "w"] \arrow[ddr, bend right, "w'"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[d, "g"] \\
& M'^X \arrow[r, "f^X"'] & Q^X
\end{tikzcd}$$

□

Observación 3.17. *Cabe observar que como todo módulo en* $\operatorname{Add}(M)$ *se puede encajar en un módulo de* $\operatorname{Prod}(M)$*. Siempre se satisface que* $\operatorname{Cogen}(M)$ *es cerrado por coproductos arbitrarios y* $\operatorname{Cogen}_n(M)$ *es cerrado por coproductos arbitrarios en caso de ser cerrado por n-núcleos.*

3.3. $*^n$-módulos

En la primera sección vimos que los $*$-módulos se pueden caracterizar como módulos finitamente generados M tales que $\operatorname{Gen}(M) = \operatorname{Gen}_2(M)$ y $\operatorname{Hom}_R(M, \_)$ es exacto en $\operatorname{Gen}(M)$. En esta sección buscaremos explorar la noción de $*$-módulo utilizando dicha caracterización.

En particular serán de interés los R-módulos T que satisfacen que

$$\operatorname{Gen}_{n+1}(T) = \operatorname{Gen}_n(T) \subseteq T^{\perp_1}.$$

Por lo que en esta sección, estudiaremos las propiedades que satisfagan estos módulos, así como otras clases de módulos que bautizaremos $*^n$-módulos fuertes y $*^n$-módulos especiales, las cuales son generalizaciones de las nociones de $*$-módulo y módulo n-quasitilting presentadas en [AHMV15].

Cabe mencionar que la noción de $*^n$-módulo fuerte lleva dicho nombre debido a que es una versión fuerte de la de $*^n$-módulo presentada en otras fuentes. Más aún, es un caso particular de la noción de R-módulo n-estrella presentada en [Wei05]. Por esta razón cabe observar que varias de las técnicas utilizadas en esta sección son las que utiliza Jiaqun Wei en [Wei05].

Empezaremos esta exposición con un par de observaciones sobre el comportamiento de la clase $\operatorname{Gen}_n(T)$ cuando $\operatorname{Gen}_n(T) = \operatorname{Gen}_{n+1}(T)$.

Observación 3.18. *Si un R-módulo T satisface que* $\mathrm{Gen}_{n+1}(T) = \mathrm{Gen}_n(T)$, *entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) *todo* $M \in \mathrm{Gen}_n(T)$ *admite una sucesión exacta*

$$0 \to N \to T' \to M \to 0$$

con $T' \in \mathrm{Add}\,(T)$ *y* $N \in \mathrm{Gen}_n(T)$,

(b) *todo* $M \in \mathrm{Gen}_n(T)$ *admite una* $\mathrm{Add}\,(T)$*-resolución.*

Observación 3.19. *Dualmente, si un R-módulo T satisface que* $\mathrm{Cogen}_n(T) = \mathrm{Cogen}_{n+1}(T)$, *entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) *todo* $M \in \mathrm{Cogen}_n(T)$ *admite una sucesión exacta*

$$0 \to M \to T' \to M \to 0$$

con $T' \in \mathrm{Add}\,(T)$ *y* $N \in \mathrm{Cogen}_n(T)$,

(b) *todo* $M \in \mathrm{Cogen}_n(T)$ *admite una* $\mathrm{Prod}\,(T)$*-resolución.*

A continuación nos concentraremos en las propiedades que presenta un módulo T tal que $\mathrm{Gen}_{n+1}(T) = \mathrm{Gen}_n(T) \subseteq T^{\perp_1}$.

Lema 3.20. *[Wei05] Si un R-módulo T satisface que* $\mathrm{Gen}_{n+1}(T) = \mathrm{Gen}_n(T) \subseteq T^{\perp_1}$, *entonces* $\mathrm{Gen}_n(T)$ *es cerrado por extensiones.*

Dualmente, si T satisface que $\mathrm{Cogen}_n(T) = \mathrm{Cogen}_{n+1}(T) \subseteq {}^{\perp_1}T$, *entonces* $\mathrm{Cogen}_n(T)$ *es cerrado por extensiones.*

Demostración. Sea

$$0 \to A \to B \xrightarrow{g} C \to 0$$

una sucesión exacta con $A, C \in \mathrm{Gen}_n(T) = \mathrm{Gen}_{n+1}(T)$. Sabemos que existen $\mathrm{Add}\,(T)$-resoluciones

$$... \to M_n \to ... \to M_0 \xrightarrow{a_0} A \to 0 \text{ y}$$
$$... \to M'_n \to ... \to M'_0 \xrightarrow{b_0} C \to 0.$$

Además, como $\mathrm{Gen}_n(T) \subseteq T^{\perp_1}$, sabemos que $\mathrm{Ext}^1_R\,(M'_0, B) = 0$ por lo que existe un morfismo $h : M'_0 \to B$ tal que $gh = b_0$.

Utilizando el lema de la serpiente, podemos concluir que el morfismo

$$c := fa_0 \oplus h : M_0 \oplus M'_0 \to B$$

es suprayectivo.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} a_0 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} c \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} b_0 \arrow[d] \arrow[dddll, out=-30, in=150, looseness=2] & \\
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & M_0 \oplus M_0' \arrow[r] \arrow[d] & M_0' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} c \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Más aún, dado que $\operatorname{Ker}(a_0), \operatorname{Ker}(b_0) \in \operatorname{Gen}_n(T)$ podemos repetir el argumento anterior n veces obteniendo una sucesión exacta

$$M_{n-1} \oplus M'_{n-1} \to ... \to M_1 \oplus M'_1 \to M_0 \oplus M'_0 \to B \to 0.$$

Por lo tanto, $B \in \operatorname{Gen}_n(T)$. □

Observación 3.21. *El resultado anterior también es válido para módulos T tales que toda sucesión exacta*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

con $A, C \in \operatorname{Gen}_n(T)$ permanezca exacta bajo $\operatorname{Hom}_R(T, \_)$.

Lema 3.22. *[Wei05] Sea $M \in \operatorname{Mod}(R)$. Si $\operatorname{Gen}_n(M)$ es cerrado por extensiones y $\operatorname{Gen}_n(M) = \operatorname{Gen}_{n+1}(M)$, entonces $\operatorname{Gen}_k(\operatorname{Gen}_n(M)) = \operatorname{Gen}_k(M)$ para todo $k \geq 1$. En particular, $\operatorname{Gen}_n(M)$ es cerrado por n-cocientes.*

Dualmente, si $\operatorname{Cogen}_n(M)$ es cerrado por extensiones y $\operatorname{Cogen}_n(M) = \operatorname{Cogen}_{n+1}(M)$, entonces $\operatorname{Cogen}_k(\operatorname{Cogen}_n M) = \operatorname{Cogen}_k(M)$ para todo $k \geq 1$. En particular, $\operatorname{Cogen}_n(M)$ es cerrada por n-submódulos.

Demostración. Dado que $\operatorname{Add}(M) \subseteq \operatorname{Gen}_n(M)$ es inmediato que

$$\operatorname{Gen}_k(\operatorname{Gen}_n(M)) \supseteq \operatorname{Gen}_k(M).$$

Por lo que basta probar que $\operatorname{Gen}_k(\operatorname{Gen}_n(M)) \subseteq \operatorname{Gen}_k(M)$. Procedemos por inducción.

Para $k = 1$, es inmediato debido a que $\operatorname{Gen}_n(M) \subseteq \operatorname{Gen}_1(M)$. Para $k > 1$, consideramos una sucesión exacta

$$C_{k+1} \to C_k \to ... \to C_1 \xrightarrow{f} M \to 0$$

con $C_i \in \mathrm{Gen}_n(M)$. Observamos que $M_1 = \mathrm{Ker}\,(f) \in \mathrm{Gen}_k(\mathrm{Gen}_n(M))$, por lo que $M_1 \in \mathrm{Gen}_k(M)$ por hipótesis de inducción. En conclusión, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to M_1 \xrightarrow{i} C_1 \to M \to 0$$

con $M_1 \in \mathrm{Gen}_k(M)$ y $C_1 \in \mathrm{Gen}_n(M)$.

Por otro lado, dado que $\mathrm{Gen}_n(M) = \mathrm{Gen}_{n+1}(M)$ y $C_1 \in \mathrm{Gen}_n(M)$, sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \to C' \to T_1 \xrightarrow{p} C_1 \to 0$$

con $T_1 \in \mathrm{Add}\,(M)$ y $C' \in \mathrm{Gen}_n M$. Luego, al considerar el pull-back de i con p obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to C' \to Y \xrightarrow{p'} M_1 \to 0.$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & C' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & T_1 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Ahora, dado que $M_1 \in \mathrm{Gen}_k(M)$ tenemos una sucesión exacta

$$0 \to M_1' \to T_1' \xrightarrow{p''} M_1 \to 0$$

con $T_1' \in \mathrm{Add}\,(M)$ y $M_1' \in \mathrm{Gen}_{k-1}(M)$.

Así que al tomar el pull-back de p' y p'' obtenemos una sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & M_1' \arrow[r, equal] \arrow[d] & M_1' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & T_1' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to C' \to X \to T_1' \to 0$$

con $C' \in \mathrm{Gen}_n(M)$ y

$$T_1' \in \mathrm{Add}\,(M) \subseteq \mathrm{Gen}_n(M),$$

lo que implica que $X \in \mathrm{Gen}_n(M)$ ya que por hipótesis $\mathrm{Gen}_n(M)$ es cerrado por extensiones. Por otro lado, del pull-back también obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to M_1' \to X \to Y \to 0$$

donde tenemos que $M_1' \in \mathrm{Gen}_{k-1}(M) \subseteq \mathrm{Gen}_{\,k-1}(\mathrm{Gen}_n(M))$ y $X \in \mathrm{Gen}_n(M)$, lo que implica que $Y \in \mathrm{Gen}_{\,k}(\mathrm{Gen}_n(M))$. Por lo tanto, $Y \in \mathrm{Gen}_k(M)$ por hipótesis de inducción.

Finalmente, observamos que del primer pull-back habíamos obtenido una sucesión exacta

$$0 \to Y \to T_1 \to M \to 0$$

donde $Y \in \mathrm{Gen}_k(M)$ y $T_1 \in \mathrm{Add}\,(M)$, lo que implica que $M \in \mathrm{Gen}_{k+1}(M)$. $\square$

Corolario 3.23. *Si T es un módulo tal que* $\mathrm{Gen}_{n+1}(T) = \mathrm{Gen}_n(T) \subseteq T^{\perp_1}$*, entonces* $\mathrm{Gen}_n(T)$ *es cerrado por extensiones, coproductos y n-cocientes.*

Dualmente, si $\mathrm{Cogen}_n(T) = \mathrm{Cogen}_{n+1}(T) \subseteq {}^{\perp_1}T$*, entonces* $\mathrm{Cogen}_n(T)$ *es cerrado por extensiones, productos y n-submódulos.*

3.3.1. $*^n$-módulos fuertes

En esta sección presentamos la clase de los $*^n$-módulos fuertes y su versión dual. Por completez se presentan los resultados duales, omitiendo la prueba cuando es análoga a su dual.

Definición 3.24. Sea $T \in \mathrm{Mod}\,(R)$.

(a) T es un $*^n$-módulo fuerte si $\mathrm{Gen}_{n+1}(T) = \mathrm{Gen}_n(T)$ y $\mathrm{Hom}_R(T, \_)$ es exacto para sucesiones exactas cortas en $\mathrm{Gen}_n(T)$.

(b) T es un co-$*^n$-módulo fuerte si $\mathrm{Cogen}_{n+1}(T) = \mathrm{Cogen}_n(T)$ y $\mathrm{Hom}_R(\_, T)$ es exacto para sucesiones exactas cortas en $\mathrm{Cogen}_n(T)$.

Observación 3.25. *Si T es un R-módulo tal que* $\mathrm{Gen}_{n+1}(T) = \mathrm{Gen}_n(T) \subseteq T^{\perp_1}$*, entonces T es un $*^n$-módulo fuerte.*

Lema 3.26. *[Wei05] Dado el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos en* $\mathrm{Mod}\,(R)$*:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"] & T_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f'"] & T_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "g'"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "i_1"] & T_1 \arrow[r, "p_1"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tenemos que $K_1 \oplus T_2 \cong K_2 \oplus T_1$.

Demostración. Por la conmutatividad del diagrama observamos que

$$p_1\,(1_{T_1} - g'g) = p_1 - g'gp_1 = 0,$$

por lo que $1_{T_1} - g'g$ se factoriza a través de K_1, es decir, existe un morfismo $\theta : T_1 \to K_1$ tal que $i_1\theta = 1_{T_1} - g'g$. Luego, tenemos que

$$i_1\theta i_1 = (1_{T_1} - g'g)\,i_1 = i_1 - g'gi_1 = i_1 - i_1f'f = i_1(1_{K_1} - f'f).$$

Así que debido a que i_1 es un monomorfismo tenemos que $\theta i_1 = 1_{K_1} - f'f$, por lo que $1_{K_1} = \theta i_1 + f'f$.

Por lo tanto, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} f \\ -i_1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & K_2 \oplus T_1 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} i_2 & g \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} f' & -\theta \\ i_2 & g \end{smallmatrix}\right)"] & T_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"'] & K_1 \oplus T_2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & T_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde es claro que el renglón inferior es exacto. Para probar la exactitud del renglón superior observamos que

- $\left(\begin{smallmatrix} f \\ -i_1 \end{smallmatrix}\right)$ es un monomorfismo debido a que i_1 lo es;
- $\left(\begin{smallmatrix} i_2 & g \end{smallmatrix}\right)$ es un epimorfismo debido a que dado $x \in T_2$, tenemos $p_2(x) = p_1(y)$ para algún $y \in T_1$, de modo que $g(y) - x \in \mathrm{Ker}\,(p_2) = \mathrm{Im}\,(i_2)$, lo que implica que $\left(\begin{smallmatrix} i_2 & g \end{smallmatrix}\right)$ sea suprayectiva;
- $\mathrm{Ker}\,(\left(\begin{smallmatrix} i_2 & g \end{smallmatrix}\right)) \supseteq \mathrm{Im}\left(\left(\begin{smallmatrix} f \\ -i_1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ ya que $\left(\begin{smallmatrix} i_2 & g \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} f \\ -i_1 \end{smallmatrix}\right) = 0$ claramente; y
- $\mathrm{Ker}\,(\left(\begin{smallmatrix} i_2 & g \end{smallmatrix}\right)) \subseteq \mathrm{Im}\left(\left(\begin{smallmatrix} f \\ -i_1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ debido a que si $\left(\begin{smallmatrix} i_2 & g \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} k \\ -t \end{smallmatrix}\right) = 0$, se tiene que $i_2(k) = g(t)$ por lo que $0 = p_2 i_2(k) = p_2 g(t) = p_1(t)$ y así $t \in \mathrm{Im}\,(i_1)$, de modo que si $t = i_1(a)$, tenemos que $i_2(k) = g(t) = g i_1(a) = i_2 f(a)$.

La conmutatividad y exactitud del diagrama implica la existencia del isomorfismo buscado. $\square$

Lema 3.27. *Consideramos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos en* $\mathrm{Mod}\,(R)$*:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, equal] & T_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "g"] & K_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, equal] & T_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "g'"] & K_2 \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "p_1"] & T_1 \arrow[r, "i_1"] & K_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces $K_1 \oplus T_2 \cong K_2 \oplus T_1$.

Demostración. Por la conmutatividad del diagrama observamos que

$$(1_{T_1} - g'g)\, p_1 = p_1 - g'gp_1 = 0.$$

De modo que $1_{T_1} - g'g$ se factoriza a través de K_1, es decir, existe $\theta : K_1 \to T_1$ tal que $\theta i_1 = 1_{T_1} - g'g$. Luego, tenemos que

$$i_1\theta i_1 = i_1\left(1_{T_1} - g'g\right) = i_1 - i_1 g'g = i_1 - f'fi_1 = (1_{K_1} - f'f)i_1.$$

Así que, como i_1 es un epimorfismo, tenemos que $i_1\theta = 1_{K_1} - f'f$, por lo que

$$1_{K_1} = i_1\theta + f'f.$$

Por lo tanto, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & T_2 \oplus K_1 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}g' & \theta\\ -i_2 & f\end{smallmatrix}\right)"] & K_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}g'\\ -i_2\end{smallmatrix}\right)"'] & T_1 \oplus K_2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}i_1 & f'\end{smallmatrix}\right)"'] & K_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde es claro que el renglón superior es exacto. Para probar la exactitud del renglón inferior observamos los siguientes puntos:

- $\left(\begin{smallmatrix}g'\\ -i_2\end{smallmatrix}\right)$ es un monomorfismo debido a que

$$\operatorname{Ker}\left(\left(\begin{smallmatrix}g'\\ -i_2\end{smallmatrix}\right)\right) = \operatorname{Ker}(g') \cap \operatorname{Ker}(i_2) = p_2N \cap \operatorname{Ker}(g') \subseteq \operatorname{Ker}(p_1) = 0.$$

- $\left(\begin{smallmatrix}i_1 & f'\end{smallmatrix}\right)$ es un epimorfismo debido a que i_1 lo es.
- $\operatorname{Ker}\left(\left(\begin{smallmatrix}i_1 & f'\end{smallmatrix}\right)\right) \supseteq \operatorname{Im}\left(\left(\begin{smallmatrix}g'\\ -i_2\end{smallmatrix}\right)\right)$ ya que $\left(\begin{smallmatrix}i_1 & f'\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}g'\\ -i_2\end{smallmatrix}\right) = 0$ claramente.
- $\operatorname{Ker}\left(\left(\begin{smallmatrix}i_1 & f'\end{smallmatrix}\right)\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\left(\begin{smallmatrix}g'\\ -i_2\end{smallmatrix}\right)\right)$. En efecto, en caso de que $\left(\begin{smallmatrix}i_1 & f'\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}t\\ -k\end{smallmatrix}\right) = 0$, tenemos que $i_1(t) = f'(k)$. Luego, como i_2 es un epimorfismo, existe $t' \in T_2$ tal que $i_2(t') = k$. De modo que $g'(t') - t \in \operatorname{Ker}(i_1) = \operatorname{Im}(p_1)$, por lo que existe $n \in N$ tal que

$$t = g'(t') + p_1(n).$$

  Por lo tanto,

$$\left(\begin{smallmatrix}t\\ -k\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}g'(t')+p_1(n)\\ i_2(-t')\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}g'(t')+g'p_2(n)\\ i_2(-t')\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}g'(t'+p_2(n))\\ i_2(-t')\end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix}g'\\ -i_2\end{smallmatrix}\right).$$

La conmutatividad y exactitud del diagrama implica la existencia del isomorfismo buscado. □

Lema 3.28. *[Wei05] Sean T un $*^n$-módulo fuerte y*

$$\eta : \quad 0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} N \to 0$$

una sucesión exacta que permanece exacta bajo $\mathrm{Hom}_R(T, \_)$*. Si L y M pertenecen a* $\mathrm{Gen}_n(T)$*, entonces $N \in \mathrm{Gen}_n(T)$.*

De manera similar, dado un co-$*^n$-módulo fuerte T y una sucesión exacta

$$\eta : \quad 0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} N \to 0$$

que permanece exacta bajo $\mathrm{Hom}_R(\_, T)$*. Si N y M pertenecen a* $\mathrm{Cogen}_n(T)$*, entonces $N \in \mathrm{Cogen}_n(T)$.*

Demostración. Si $L, N \in \mathrm{Gen}_n(T)$ existen sucesiones exactas

$$0 \to L' \to T_L \xrightarrow{\alpha} L \to 0 \ \text{ y } \ 0 \to N' \to T_N \xrightarrow{\gamma} N \to 0$$

con $L', N' \in \mathrm{Gen}_n(T)$ y $T_L, T_N \in \mathrm{Add}\,(T)$. Luego, dado que η permanece exacta bajo $\mathrm{Hom}_R(T, \_)$, tenemos que $\mathrm{Hom}_R(T, \pi)$ es suprayectiva, así que existe un morfismo $\theta : T_N \to M$ tal que $\pi\theta = \gamma$. En consecuencia, podemos construir el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_L \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\alpha"] & T_L \oplus T_N \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[d, "(i\alpha\ \theta)"] & T_N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Luego, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_R(T, \_)$ al diagrama anterior, observamos por el lema de la serpiente que todas las sucesiones exactas del diagrama permanecen exactas bajo $\mathrm{Hom}_R(T, \_)$. Por lo tanto, podemos repetir el procedimiento anterior en el renglón superior del diagrama anterior, y así recursivamente podemos concluir que $M \in \mathrm{Gen}_n(T)$. $\square$

Lema 3.29. *Si un R-módulo T satisface que* $\mathrm{Gen}\,(T) \subseteq T^{\perp_1}$*, entonces* $\mathrm{Gen}_n(T)$ *es cerrado por extensiones para todo $n \geq 1$.*

De manera similar, si $\mathrm{Cogen}\,(T) \subseteq {}^{\perp_1}T$*, entonces* $\mathrm{Cogen}_n(T)$ *es cerrado por extensiones para todo* $n \geq 1$*.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. Para $n = 1$, se prueba de manera similar al lema de la herradura.

Para $n > 1$, consideramos una sucesión exacta

$$0 \to A \to B \xrightarrow{g} C \to 0$$

con $A, C \in \mathrm{Gen}_n(T)$. Existen sucesiones exactas

$$M_1 \xrightarrow{a_1} \dots \to M_n \xrightarrow{a_n} A \to 0 \text{ y}$$
$$M_1' \xrightarrow{b_1} \dots \to M_n' \xrightarrow{b_n} C \to 0$$

con todo $M_i, M_i' \in \mathrm{Add}\,(T)$. Dado que $\mathrm{Gen}_n(T) \subseteq \mathrm{Gen}\,(T) \subseteq T^{\perp_1}$, sabemos que $\mathrm{Ext}^1_R\,(M_n', A) = 0$ por lo que $\mathrm{Hom}_R(M_n', g)$ es sobreyectiva, y así existe un morfismo $h : M_n' \to B$ tal que $gh = b_n$.

Luego, utilizando el lema de la serpiente de la misma manera a como se hizo en el lema anterior, observamos que el morfismo $c = fa_n \oplus h : M_n \oplus M_n' \to B$ es suprayectivo, y más aún, dado que $\mathrm{Ker}\,(a_n)\,, \mathrm{Ker}\,(b_n) \in \mathrm{Gen}_{n-1}(T)$ tenemos por hipótesis de inducción que $\mathrm{Ker}\,(fa_n \oplus h) \in \mathrm{Gen}_{n-1}(T)$. Por lo tanto, $B \in \mathrm{Gen}_n(T)$.

□

Lema 3.30. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un módulo* T *y* $n \geq 1$*:*

(a) T *es un* $*^n$*-módulo fuerte y* $\mathrm{Gen}_n(T)$ *es una clase cerrada por* n*-cocientes, coproductos y extensiones,*

(b) T *es un* $*^n$*-módulo fuerte y* $\mathrm{Gen}_n(T)$ *es cerrada bajo extensiones, y*

(c) $\mathrm{Gen}_{n+1}(T) = \mathrm{Gen}_n(T) \subseteq T^{\perp_1}$*.*

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Trivial.

$(b) \Rightarrow (c)$ Basta probar que $T \in {}^{\perp_1}\,\mathrm{Gen}_n(T)$. Para ello consideramos una sucesión exacta

$$0 \to M \to N \xrightarrow{g} T \to 0$$

con $M \in \mathrm{Gen}_n(T)$ y probaremos que se escinde. Dado que $\mathrm{Gen}_n(T)$, es una clase cerrada por extensiones tenemos $N \in \mathrm{Gen}_n(T)$. Por lo tanto, la sucesión considerada se encuentra en $\mathrm{Gen}_n(T)$. Así que, como T es un $*^n$-módulo, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(T, M) \to \mathrm{Hom}_R(T, N) \to \mathrm{Hom}_R(T, T) \to 0,$$

lo que implica que existe $f : T \to N$ tal que $1_T = gf$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Es inmediato del corolario 3.23. □

También tenemos la versión dual del lema anterior.

Lema 3.31. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un módulo T y $n \geq 1$:*

(a) T es un co-$*^n$-módulo fuerte y $\mathrm{Cogen}_n(T)$ es una clase cerrada por n-submódulos, productos y extensiones.

(b) T es un co-$*^n$-módulo fuerte y $\mathrm{Cogen}_n(T)$ es cerrada bajo extensiones.

(c) $\mathrm{Cogen}_{n+1}(T) = \mathrm{Cogen}_n(T) \subseteq {}^{\perp_1}T$.

3.3.2. $*^n$-módulos especiales

Sea T un $*^n$-módulo fuerte. En caso de que tengamos una sucesión exacta

$$T_n \to ... \to T_1 \to T_0 \xrightarrow{f} M \to 0$$

con $T_i \in \mathrm{Add}\,(T)$. Se sigue por definición que $M \in \mathrm{Gen}_{n+1}(T)$, sin embargo no por esto podemos concluir que $\mathrm{Ker}\,(f) \in \mathrm{Gen}_n(T)$. En esta sección exploraremos los $*^n$-módulos fuertes que nos permitan afirmar lo anterior.

Lema 3.32. *[Wei05] Sea T un módulo. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

(a) T es un $*^n$-módulo fuerte tal que $\mathrm{Gen}_n(T)$ es cerrado por conúcleos de monomorfismos.

(b) T satisface que :

(b1) $\mathrm{Gen}_n(T) = \mathrm{Gen}_{n+1}(T)$; y

(b2) Si $0 \to L \to T_0 \to N \to 0$ es una sucesión exacta con $T_0 \in \mathrm{Add}\,(T)$ y $N \in \mathrm{Gen}_n(T)$, entonces $L \in \mathrm{Gen}_n(T)$ si y sólo si la sucesión inducida

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(T, L) \to \mathrm{Hom}_R(T, T_0) \to \mathrm{Hom}_R(T, N) \to 0$$

es exacta.

Dualmente, son equivalentes los siguientes enunciados:

(a) T es un co-$*^n$-módulo tal que $\mathrm{Cogen}_n(M)$ es cerrado por núcleos de epimorfismos.

(b) T satisface que :

(b1) $\mathrm{Cogen}_n(T) = \mathrm{Cogen}_{n+1}(T)$; y

(b2) Si $0 \to N \to T_0 \to L \to 0$ *es una sucesión exacta con* $T_0 \in \operatorname{Prod}(T)$ *y* $N \in \operatorname{Cogen}_n(T)$*, entonces* $L \in \operatorname{Cogen}_n(T)$ *si y sólo si la sucesión inducida*

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(L, T) \to \operatorname{Hom}_R(T_0, T) \to \operatorname{Hom}_R(N, T) \to 0$$

es exacta.

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Sea

$$0 \to L \to T_0 \to N \to 0$$

una sucesión exacta con $T_0 \in \operatorname{Add}(T)$ y $N \in \operatorname{Gen}_n(T)$.

Si $L \in \operatorname{Gen}_n(T)$, entonces la sucesión inducida es exacta debido a que T es $*^n$-módulo.

Supongamos ahora que la sucesión

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(T, L) \to \operatorname{Hom}_R(T, T_0) \to \operatorname{Hom}_R(T, N) \to 0$$

es exacta. Dado que $N \in \operatorname{Gen}_n(T) = \operatorname{Gen}_{n+1}(T)$ tenemos que existe una sucesión exacta

$$0 \to L' \to T_0' \to N \to 0$$

con $T_0' \in \operatorname{Add}(T)$ y $L' \in \operatorname{Gen}_n(T)$. Dado que ambas sucesiones permanecen exactas al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_R(T, \_)$ por hipótesis y por definición, por el lema anterior tenemos que $L \oplus T_0' \cong L' \oplus T_0 \in \operatorname{Gen}_n(T)$.

Luego, como tenemos la sucesión exacta

$$0 \to T_0' \to L \oplus T_0' \to L \to 0$$

con $0, T_0', L \oplus T_0' \in \operatorname{Gen}_n(T)$ y $\operatorname{Gen}_n(T)$ es cerrada por conúcleos de monomorfismos, se sigue $L \in \operatorname{Gen}_n(T)$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Probaremos que T es un $*^n$-módulo tal que $\operatorname{Gen}_n(T)$ sea cerrado por conúcleos de monomorfismos:

- $\operatorname{Gen}_n(T)$ *es cerrado bajo conúcleos de monomorfismos.*
  Sea $0 \to L \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} N \to 0$ una sucesión exacta con $L, M \in \operatorname{Gen}_n(T)$. Por definición existen sucesiones exactas

$$0 \to L' \to T_L \xrightarrow{\alpha} L \to 0$$
$$0 \to M_1 \to T_M \xrightarrow{\beta} M \to 0$$

  con $L', M_1 \in \operatorname{Gen}_n(T)$ y $T_L, T_M \in \operatorname{Add}(T)$. Podemos construir el diagrama conmutativo y exacto adjunto.

Ahora, como $T_M \in \mathrm{Add}\,(T)$ y $M, M_1 \in \mathrm{Gen}_n(T)$, por hipótesis $\mathrm{Hom}_R(T, \beta)$ es sobreyectivo, lo que implica que $\mathrm{Hom}_R(T, \left(\begin{smallmatrix} i\alpha & \beta \end{smallmatrix}\right))$ es sobreyectivo, de modo que tenemos $M' \in \mathrm{Gen}_n(T)$ por hipótesis.
Observamos que, con el procedimiento anterior, encontramos un epimorfismo $T_M \to N$ con $T_M \in \mathrm{Add}\,(T)$, y quedamos en posición de repetir el mismo procedimiento sobre la sucesión exacta

$$0 \to L' \to M' \to N' \to 0.$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_L \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\alpha"] & T_L \oplus T_M \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} i\alpha & \beta \end{smallmatrix}\right)"] & T_M \arrow[r] \arrow[d, "\beta\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, de manera recursiva podemos contruir una sucesión exacta

$$T_n \to ... \to T_2 \to T_M \to N \to 0$$

con $T_i \in \mathrm{Add}\,(T)$. Por lo que podemos concluir que $N \in \mathrm{Gen}_n(T)$.

- *T es un $*^n$-módulo.*
  Sabemos que $\mathrm{Gen}_n(T) = \mathrm{Gen}_{n+1}(T)$, por lo que basta probar que $\mathrm{Hom}_R(T, \_\_)$ es exacto en $\mathrm{Gen}_n(T)$.
  Sea $0 \to L \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} N \to 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{Gen}_n(T)$. Dado que $L, M \in \mathrm{Gen}_n(T)$ podemos construir el mismo diagrama que el punto anterior. Observamos además que por el punto anterior podemos afirmar que $N' \in \mathrm{Gen}_n(T)$. Así que por hipótesis las sucesiones exactas

$$0 \to N' \to T_M \xrightarrow{\beta\pi} N \to 0 \text{ y}$$
$$0 \to T_L \to T_L \oplus T_M \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} T_M \to 0$$

quedan exactas tras aplicar $\mathrm{Hom}_R(T, \_\_)$. Se sigue entonces que $\mathrm{Hom}_R(T, \pi)$ es sobreyectiva debido ya que $\mathrm{Hom}_R(T, \beta\pi)$ y $\mathrm{Hom}_R(T, \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ sobreyectivas. En efecto, puesto que todo $s \in \mathrm{Hom}_R(T, N)$ se factoriza a a través de T_M como $s = \beta\pi s'$, y a su vez s' se factoriza a través de $T_L \oplus T_M$ como $s' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) s''$, tenemos que

$$s = \beta\pi s' = \beta\pi \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) s'' = \pi \left(\begin{smallmatrix} \iota\alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right) s''.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_R(T, \pi)$ es sobreyectiva.

□

Definición 3.33. Sea T un módulo.

(a) Si T satisface el primer enunciado del lema anterior, diremos que T es un $*^n$-módulo especial.

(b) Si T satisface el segundo enunciado del lema anterior, diremos que T es un co-$*^n$-módulo especial.

Será de utilidad la siguiente definición.

Definición 3.34. Sea $T \in \operatorname{Mod}(R)$. Decimos que una sucesión

$$\eta : \quad 0 \to N \to M \to K \to 0$$

es $\operatorname{Hom}_R(T, \_)$-exacta si permanece exacta bajo el funtor $\operatorname{Hom}_R(T, \_)$.

Lema 3.35. *[Wei05] Sea T un $*^n$-módulo especial y*

$$\eta : \quad 0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} N \to 0$$

una sucesión exacta que permanece exacta bajo $\operatorname{Hom}_R(T, \_)$*. Si dos de los tres módulos L, M y N pertenecen a* $\operatorname{Gen}_n(T)$*, se sigue que el tercero también pertenece a* $\operatorname{Gen}_n(T)$*.*

Dualmente, dado un co-$*^n$-módulo especial T y una sucesión exacta

$$\eta' : \quad 0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} L \to 0$$

que permanece exacta bajo $\operatorname{Hom}_R(\_, T)$*. Si dos de los tres módulos L, M y N pertenecen a* $\operatorname{Cogen}_n(T)$*, se sigue que el tercero también pertenece a* $\operatorname{Cogen}_n(T)$*.*

Demostración.

Si $L, M \in \operatorname{Gen}_n(T)$, es inmediato de la definición de $*^n$-módulo especial.

Si $L, N \in \operatorname{Gen}_n(T)$ el resultado se sigue de 3.28.

Por último, si tenemos que $M, N \in \operatorname{Gen}_n(T)$ existe una sucesión exacta

$$0 \to M' \to T_M \xrightarrow{\beta} M \to 0$$

con $M' \in \mathrm{Gen}_n(T)$ y $T_M \in \mathrm{Add}\,(T)$. De modo que al considerar el pullback de β con i, observamos que la columna central y el renglón inferior del diagrama son exactos bajo $\mathrm{Hom}_R(T, \_)$. Por lo que del lema de la serpiente, tenemos que el renglón central del diagrama también es $\mathrm{Hom}_R(T, \_)$-exacto. Así que, como T es un $*^n$-módulo especial, se sigue de 3.32 que $Y \in \mathrm{Gen}_n(T)$. Por lo tanto, $L \in \mathrm{Gen}_n(T)$ debido a que en el diagrama L es el conúcleo de un monomorfismo en $\mathrm{Gen}_n(T)$.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& M' \arrow[r, equal] \arrow[d] & M' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & T_M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

□

Teorema 3.36. *Para un módulo T son equivalentes los siguientes enunciados:*

(a) T es un $*^n$-módulo especial.

(b) Si $\eta :\ 0 \to L \to M \to N \to 0$ es una sucesión exacta con $M, N \in \mathrm{Gen}_n(T)$, entonces $L \in \mathrm{Gen}_n(T)$ si y sólo si η es $\mathrm{Hom}_R(T, \_)$-exacta.

De manera dual, los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) T es un co_$*^n$-módulo especial.

(b) Si $\eta :\ 0 \to N \to M \to L \to 0$ es una sucesión exacta con $M, N \in \mathrm{Cogen}_n(T)$, entonces $L \in \mathrm{Cogen}_n(T)$ si y sólo si η es $\mathrm{Hom}_R(\_, T)$-exacta.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Consideramos una sucesión exacta

$$\eta :\ 0 \to L \to M \to N \to 0.$$

Si η permanece exacta bajo $\mathrm{Hom}_R(T, \_)$, se sigue de 3.35 que $L \in \mathrm{Gen}_n(T)$ siempre que $M, N \in \mathrm{Gen}_n(T)$. Recíprocamente, es claro que η es $\mathrm{Hom}_R(T, \_)$-exacta por defínción de $*^n$-módulo.

$(b) \Rightarrow (a)$ Es inmediato que $\mathrm{Hom}_R(T, \_)$ es exacto en $\mathrm{Gen}_n(T)$ y que T satisface la propiedad (a2) que define a los $*^n$-módulos especiales. De modo que basta probar que $\mathrm{Gen}_n(T) = \mathrm{Gen}_{n+1}(T)$. Para ello observamos que para todo $N \in \mathrm{Gen}_n(T)$ el morfismo universal induce una sucesión exacta

$$0 \to K \to T^{(\mathrm{Hom}_R(T,N))} \to N \to 0$$

que claramente es $\operatorname{Hom}_R(T, \_)$-exacta. Así que por hipótesis $K \in \operatorname{Gen}_n(T)$, con lo que podemos concluir que $N \in \operatorname{Gen}_{n+1}(T)$. $\square$

Proposición 3.37. *Los siguientes enunciados son equivalentes para un módulo T:*

(a) T *es un* $*^n$*-módulo especial y* $\operatorname{Gen}_n(T)$ *es cerrado bajo extensiones;*

(b) T *es un* $*^n$*-módulo especial y* $\operatorname{Gen}_n(T)$ *es cerrado bajo extensiones, coproductos y* n*-cocientes; y*

(c) $\operatorname{Gen}_n(T) = \operatorname{Gen}_{n+1}(T) \subseteq T^{\perp_1}$ *y* $\operatorname{Gen}_n(T)$ *es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos.*

De manera dual, los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) T *es un co-*$*^n$*-módulo especial y* $\operatorname{Cogen}_n(T)$ *es cerrado bajo extensiones;*

(b) T *es un co-*$*^n$*-módulo especial y* $\operatorname{Cogen}_n(T)$ *es cerrado bajo extensiones, productos y* n*-submódulos; y*

(c) $\operatorname{Cogen}_n(T) = \operatorname{Cogen}_{n+1}(T) \subseteq {}^{\perp_1}T$ *y* $\operatorname{Cogen}_n(T)$ *es cerrada bajo núcleos de epimorfismos.*

Demostración. De 3.30 es inmediato que $(a) \Leftrightarrow (b)$.

$(a) \Rightarrow (c)$ Por 3.30 tenemos que $\operatorname{Gen}_n(T) = \operatorname{Gen}_{n+1}(T) \subseteq T^{\perp_1}$. Además, por definición de $*^n$-módulo especial tenemos que $\operatorname{Gen}_n(T)$ es cerrado por conúcleos de monomorfismos.

$(c) \Rightarrow (a)$ Por 3.30 tenemos que T es un $*^n$-módulo fuerte tal que $\operatorname{Gen}_n(T)$ es cerrado por extensiones. $\square$

4 Módulos n-tilting y módulos n-cotilting

En el capítulo anterior, estudiamos las interesantes propiedades de los $*^n$-módulos fuertes y especiales. Recordemos que en 3.37 probamos que un módulo T es $*^n$-módulo especial con $\mathrm{Gen}_n(T)$ cerrado por extensiones si y sólo si $\mathrm{Gen}_n(T) = \mathrm{Gen}_{n+1}(T) \subseteq T^{\perp_1}$ y $\mathrm{Gen}_n(T)$ es cerrada por conúcleos de monomorfismos.

Un caso natural a considerar de este fenómeno es cuando $\mathrm{Gen}_n(T) = \mathrm{Gen}_{n+1}(T) = T^{\perp}$. Un módulo que satisface las identidades anteriores es lo que se conoce como un módulo n-tilting.

En este capítulo, estudiaremos las propiedades de esta clase de módulos, así como las de la noción dual, la de los módulos n-cotilting. Comenzaremos dando la definición clásica así como varios ejemplos. En la segunda sección daremos una caracterización completa de estos módulos, incluyendo una caracterización utilizando las nociones de $*^n$-módulos fuertes y especiales. Terminaremos exponiendo los resultados principales obtenidos en [AHUC01], los cuales nos ayudarán a hacer un puente con los pares de cotorsión en el siguiente capítulo.

4.1. Módulos tilting y cotilting

Sean V un R-módulo, $S = \mathrm{End}_R(V)$ y $V^* := \mathrm{Hom}_R(V, C)$, donde C es un cogenerador inyectivo. En el capítulo anterior, observamos que un R-módulo V satisface que los funtores $H := \mathrm{Hom}_R(V, \_)$ y $\_ \otimes_S V$ forman una equivalencia de categorías

$$H : \ \mathrm{Gen}(V) \leftrightarrows \mathrm{Cogen}(V^*) \ : T,$$

si y sólo si $\mathrm{Gen}(V) = \mathrm{Gen}_2(V)$, V es finitamente generado y H es exacto en $\mathrm{Gen}(V)$.

En particular, V satisface esta propiedad cuando es un R-módulo finitamente generado tal que $\mathrm{Gen}(V) = V^{\perp}$. Ciertamente, dado que $\mathrm{Gen}(V) = V^{\perp}$, es claro que H es exacto en $\mathrm{Gen}(V)$. Por otro lado, dada una sucesión exacta

$$0 \to K \to P_0 \to V \to 0$$

con $P_0 \in \text{Proj}\,(R)$ y un módulo arbitrario Y, es fácil ver que

$$\text{Ext}^1_R\,(K, Y) \cong \text{Ext}^2_R\,(V, Y)\,; \tag{4.A}$$

pero para Y existe una sucesión exacta

$$0 \to Y \to I_0 \to C \to 0$$

con $I_0 \in \text{Inj}\,(R) \subseteq V^{\perp} = \text{Gen}\,(V)$, lo que implica que $C \in \text{Gen}\,(V)$. Así que de la sucesión anterior y 4.A podemos concluir que

$$\text{Ext}^1_R\,(K, Y) \cong \text{Ext}^2_R\,(V, Y) \cong \text{Ext}^1_R\,(V, C) = 0.$$

Dado que Y es arbitrario, esto implica que $K \in \text{Proj}\,(R)$, por lo que pd $(V) \leq 1$. Entonces, por 1.33 se sigue que $\text{Gen}\,(V) = \text{Gen}_2(V)$.

Módulos que satisfacen lo anterior son lo que llamamos módulos tilting clásicos. Esta clase de módulos son una herramienta bien conocida en la teoría de representaciones de álgebras de Artin, como se puede ver en [APR79, Bon81, BB80, HR82]. Una definción más conocida es la siguiente. Veremos más adelante que las dos definiciones son equivalentes.

Definición 4.1. Sea T un R-módulo. Decimos que T es tilting clásico si es finitamente generado y satisface los siguientes puntos:

Cl.T1 pd $(T) \leq 1$,

Cl.T2 $\text{Ext}^1_R\,(T, T^n) = 0$ para $n \in \mathbb{N}$, y

Cl.T3 existe una sucesión exacta

$$0 \to R \to V_0 \to V_1 \to 0$$

con $V_0, V_1 \in \text{add}\,(V)$.

Como es de esperar, el resultado central de los módulos tilting es un teorema de equivalencias de categorías, el cual presentamos a continuación.

Teorema 4.2 (El teorema tilting)**.** *Sean T un módulo tilting clásico con $S = \text{End}_R(V)$, $H := \text{Hom}_R(T, \_)$, $H' := \text{Ext}^1_R\,(T, \_)$, $T := \_ \otimes_S T$ y $T' := \text{Tor}^S_1\,(\_, T)$ junto con las clases $\mathcal{T} = \text{Ker}\,(H')$, $\mathcal{F} = \text{Ker}\,(H)$, $\mathcal{S} = \text{Ker}\,(T)$ y $\mathcal{E} = \text{Ker}\,(T')$. Entonces, las restricciones*

$$H : \mathcal{T} \leftrightarrows \mathcal{E} : T \qquad y \qquad H' : \mathcal{F} \leftrightarrows \mathcal{S} : T'$$

son equivalencias de categorías.

Demostración. Ver teorema 3.5.1 de [CF04]. □

Tiempo después Yoshi Miyashita generalizó el concepto en [Miy86] al siguiente:

Definición 4.3. $T \in \mathrm{Mod}\,(R)$ es un módulo tilting Miyashita si cumple las siguientes condiciones:

MT1 T tiene una resolución proyectiva

$$0 \to P_r \to ... \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$$

con P_i finitamente generado para toda $0 \leq i \leq r$,

MT2 $\mathrm{Add}\,(T) \subset T^{\perp}$, y

MT3 $\mathrm{coresdim}_{\mathrm{add}T}\,(R) < \infty$.

En [Miy86], Miyashita logra generalizar varios resultados de los módulos tilting clásicos incluyendo el célebre teorema tilting.

Sin embargo, la definición de nuestro interés es una generalización de la definición de Miyashita, dada por L. Angeleri Hügel y F. U. Coelho en [AHUC01].

Definición 4.4. $T \in \mathrm{Mod}\,(R)$ es un módulo tilting si cumple las siguientes condiciones:

T1 $\mathrm{pd}\;(T) < \infty$,

T2 $\mathrm{Add}\,(T) \subset T^{\perp}$, y

T3 $\mathrm{coresdim}_{\mathrm{Add}(T)}\,(R) < \infty$.

Si M cumple T1 y T2 se dice que es parcialmente tilting o tilting parcial.

Ejemplo 4.5. R_R o cualquier otro generador proyectivo es un módulo tilting. En efecto, para ver que un generador proyectivo P es tilting, T1 y T2 son inmediatos. Luego, al ser generador existe un epimorfismo $P^{(X)} \to R$, pero R es proyectivo, así que se tiene una sucesión

$$0 \to R \to P^{(X)} \to X \to 0$$

que se escinde, de donde se sigue T3.

Observación 4.6. *Sean $F = \{M_i\}_{i \in X}$ una familia de módulos y X_i un conjunto no vacío para todo $i \in X$. Entonces*

$$\mathrm{Add}\,(F) = \mathrm{Add}\left(\bigoplus_{i \in X} M_i^{(X_i)}\right).$$

En efecto, sea W el producto cartesiano $\times_{i \in X} X_i$. Si $M \in \mathrm{Add}\,(F)$, entonces existe N tal que

$$M \oplus N = \bigoplus_{i \in X} M_i^{(Y_i)},$$

pero entonces

$$(M \oplus N)^{(W)} = \left(\bigoplus_{i\in X} M_i^{(Y_i)}\right)^{(W)} = \bigoplus_{i\in X} M_i^{(Y_i\times W)} = \bigoplus_{i\in X} M_i^{(X_i\times W_i)} = \bigoplus_{i\in X} \left(M_i^{(X_i)}\right)^{W_i},$$

donde W_i *es el producto cartesino* $Y_i \times (\times_{i\neq j} X_i)$. *Por lo que,* M *es un sumando directo de* $\bigoplus_{i\in X} M_i^{(X_i)}$, *es decir* $M \in \operatorname{Add}\left(\bigoplus_{i\in X} M_i^{(X_i)}\right)$.

Por otro lado, si $M \in \operatorname{Add}\left(\bigoplus_{i\in X} M_i^{(X_i)}\right)$, *entonces claramente* $M \in \operatorname{Add}(F)$ *ya que* $\bigoplus_{i\in X} M_i^{(X_i)} \in \operatorname{Add}(F)$.

Por lo tanto, $\operatorname{Add}(F) = \operatorname{Add}\left(\bigoplus_{i\in X} M_i^{(X_i)}.\right)$

Con esta observación es inmediato el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.7. Si T es un módulo tilting Miyashita, $T^{(I)}$ es un módulo tilting para todo conjunto no vacío I.

En efecto, veamos cómo $T^{(I)}$ satisface los axiomas:

T1 $\operatorname{pd}\left(T^{(I)}\right) < \infty$.

Ciertamente, dado que $\operatorname{pd}(T) \leq n$ para algún natural n, se tiene que $\operatorname{pd}\left(T^{(I)}\right) \leq n$, puesto que en general

$$\operatorname{pd}\left(\bigoplus_{i\in Z} M_i\right) = \sup\left\{\operatorname{pd}(M_i)\right\}_{i\in Z}.$$

T2 $\operatorname{Ext}_R^i\left(T^{(I)}, \left(T^{(I)}\right)^{(X)}\right) = 0$ para todo conjunto X y para toda $i > 0$.

En efecto, $\left(T^{(I)}\right)^{(X)} = T^{(I\times X)}$ así que

$$\operatorname{Ext}_R^i\left(T^{(I)}, T^{(I\times X)}\right) = \prod_{i\in I} \operatorname{Ext}_R^i\left(T, T^{(I\times X)}\right) = 0$$

debido a que T es tilting.

T3 Existe una sucesión exacta larga

$$0 \to R \to M_0 \to ... \to M_n \to 0$$

con $M_i \in \operatorname{Add}\left(T^{(I)}\right)$ para toda i.
Efectivamente, sabemos que

$$\operatorname{add}(T) \subseteq \operatorname{Add}(T) = \operatorname{Add}\left(T^{(I)}\right).$$

Así que dicha sucesión existe por ser T tilting Miyashita.

Ejemplo 4.8. De manera análoga podemos probar que si T es un módulo tilting arbitrario, $T^{(I)}$ es un módulo tilting para todo conjunto no vacío I.

Ejemplo 4.9. Sea R un anillo noetheriano de dimensión global n. Si

$$0 \to R \to I_0 \to I_1 \to ... \to I_n \to 0$$

es una corresolución inyectiva de R, entonces $I = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i$ es un módulo tilting inyectivo. En efecto, es inmediato que I satisface T3. Además, dado que el anillo tiene dimensión global finita, I satiface T1. Finalmente, como R es noetheriano, las sumas directas arbitrarias de módulos inyectivos son inyectivas, por lo que es inmediato T3.

Ejemplo 4.10. Sea R un anillo n-Iwanaga-Gorenstein, es decir un anillo noetheriano a derecha y a izquierda tal que id $(R_R) \leq n$ y id $({}_RR) \leq n$. Es un hecho conocido que en este caso

$$\mathcal{P} = \mathcal{I} = \mathcal{P}_n = \mathcal{I}_n$$

(ver 9.1.10. de [EO00]). Entonces, dada una corresolución inyectiva

$$0 \to R \to I_0 \to I_1 \to ... \to I_n \to 0,$$

el módulo $I = \bigoplus_{i=0}^{n} I_i$ satisface T2 y T3 de manera análogo al ejemplo anterior, y satisface T1 debido a que $I \in \operatorname{Inj}(R) \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}_n$. Por lo tanto, I es un módulo n-tilting.

Veamos ahora la noción dual de módulo tilting.

Definición 4.11. $T \in \operatorname{Mod}(R)$ es un módulo cotilting si cumple las siguientes condiciones:

C1 id $(T) < \infty$,

C2 $\operatorname{Ext}_R^i\left(T^X, T\right) = 0$ para todo conjunto X y para toda $i > 0$, y

C3 existe una sucesión exacta larga

$$0 \to M_n \to ... \to M_0 \to Q \to 0$$

donde Q es un cogenerador inyectivo y $M_i \in \operatorname{Prod}(T)$ para toda i.

Si M cumple C1 y C2 diremos que es parcialmente cotilting o cotilting parcial.

Veamos algunas consecuencias inmediatas de la definción.

Lema 4.12. *Sea $M \in \operatorname{Mod}(R)$.*

(a) Si M satisface T2 y T3, y

$$0 \to R \xrightarrow{f_0} M_0 \to ... \xrightarrow{f_n} M_n \to 0$$

es una $\operatorname{Add}(M)$*-coresolución finita de* R *(la cual existe por T3), entonces* f_0 *es una* $M^{\perp}$*-preenvolvente especial.*

(b) *Si* M *satisface C2 y C3, y*

$$0 \to M_n \to \dots \to M_0 \xrightarrow{f_0} Q \to 0$$

es una $\operatorname{Prod}(M)$*-resolución finita de un cogenerador inyectivo* Q *(la cual existe por T3), entonces* f_0 *es una* ${}^{\perp}M$*-precubierta especial.*

Demostración. Probaremos (a), la prueba de (b) es dual.

Sea $M \in \operatorname{Mod}(R)$ satisfaciendo T2 y T3. Por T3, existe una sucesión exacta

$$0 \to R \xrightarrow{f_0} M_0 \to \dots \xrightarrow{f_n} M_n \to 0$$

con $M_j \in \operatorname{Add}(M)$ para toda $0 \leq j \leq n$.

Por T2, $\operatorname{Add}(M) \subseteq M^{\perp}$. En particular, $M_j \in M^{\perp}$ para toda $0 \leq j \leq n$. Toda clase de R-módulos $\mathcal{M}$ satisface que $\operatorname{Add}(\mathcal{M}) \subseteq {}^{\perp}\left(\mathcal{M}^{\perp}\right)$. De modo que, $M_j \in {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$ para toda $0 \leq j \leq n$. Además, como ${}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$ es resolvente, $K_j := \operatorname{Ker}(f_j) \in {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$ para toda $0 \leq j \leq n$. En particular, $\operatorname{Ext}^1_R(K_2, X) = 0$ para todo $X \in M^{\perp}$. Por lo tanto, $f_0 : R \to M_0$ es una $M^{\perp}$-preenvolvente especial. □

Lema 4.13. *Sea* $M \in \operatorname{Mod}(R)$*.*

(a) *Si* M *satisface T2 y T3, entonces* M *es finendo y* $M^{\perp} \subseteq \operatorname{Gen}(M)$*.*

(b) *Si* M *satisface C2 y C3, entonces* M *es cofinendo y* ${}^{\perp}M \subseteq \operatorname{Cogen}(M)$*.*

Demostración. Probaremos (a), la prueba de (b) es dual. Por el lema anterior, existe una $M^{\perp}$-preenvolvente especial $f_0 : R \to M_0$ con $M_0 \in \operatorname{Add}(M)$. Luego, como $\operatorname{Add}(M) \subseteq M^{\perp}$, f_0 es $\operatorname{Add}(M)$-preenvolvente. Por lo tanto, M es finendo por 3.12.

Veamos que $M^{\perp} \subseteq \operatorname{Gen}(M)$. Para ello, basta mostrar que $M^{\perp} \subseteq \operatorname{Gen}(M_0)$, debido que $M_0 \in \operatorname{Add}(M)$. Dado que f_0 es una $M^{\perp}$-preenvolvente, $f_0^{(Z)}$ también lo es para cualquier conjunto Z. Así que para todo $X \in M^{\perp}$, el epimorfismo natural $g : R^{(X)} \to X$ se factoriza a través de $f_o^{(X)} : R^{(X)} \to M_0^{(X)}$. Es decir, existe un morfismo $h : M_0^{(X)} \to X$ tal que $g = hf^{(X)}$. Además, como g es epimorfismo, h también lo es. Por lo tanto, $X \in \operatorname{Gen}(M_0)$. □

Lema 4.14. *Sea* $M \in \operatorname{Mod}(R)$*.*

(a) *Si* M *satisface T2 y* $M^{\perp} \subset \operatorname{Gen}(M)$*, entonces se cumplen los siguientes puntos:*

(a1) *para cada* $X \in M^{\perp}$ *existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to K \to M' \to X \to 0$$

con $M' \in \operatorname{Add}(M)$ *y* $K \in M^{\perp}$*;*

(a2) *todo morfismo* $A \to X$ *con* $A \in {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$ *y* $X \in M^{\perp}$ *se factoriza a través de* $\operatorname{Add}(M)$*. En particular, se tiene que* $\operatorname{Add}(M) = M^{\perp} \cap {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$*.*

(b) *Si* M *satisface C2 y* ${}^{\perp}M \subset \operatorname{Cogen}(M)$*, entonces se cumplen los siguientes puntos:*

(b1) *para todo* $X \in^{\perp} M$ *existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to X \to M' \to L \to 0$$

con $M' \in \operatorname{Prod}(M)$ *y* $L \in^{\perp} M$*;*

(b2) *todo morfismo* $X \to C$ *con* $C \in \left({}^{\perp}M\right)^{\perp}$ *y* $X \in^{\perp} M$ *se factoriza a través de* $\operatorname{Prod}(M)$*. En particular, se tiene que* $\operatorname{Prod}(M) =^{\perp} M \cap \left({}^{\perp}M\right)^{\perp}$*.*

Demostración.

(a) Dual a la prueba de 2.

(b) Supongamos que M es un módulo tal que ${}^{\perp}M \subset \operatorname{Cogen}(M)$ y que satisface C2.

(b1) Sea $X \in^{\perp} M$. Por 2.11 existe una $\operatorname{Prod}(M)$-preenvolvente $g : X \to M'$, y como $X \in^{\perp} M \subset \operatorname{Cogen}(M)$, existe un monomorfismo $g' : X \to M^R$, el cual se factoriza a través de g debido que $M^R \in \operatorname{Prod}(M)$, lo que implica que g es un monomorfismo.
Luego, queda por probar que $L = \operatorname{Coker}(g) \in^{\perp} M$. Lo cual se cumple porque, como g es una $\operatorname{Prod}(M)$-preenvolvente, $\operatorname{Hom}_R(g, M)$ es suprayectivo, así que $\operatorname{Ext}^1_R(L, M) = 0$. Luego, para $k > 1$ se considera la sucesión larga de homología asociada la sucesión exacta corta

$$0 \to X \xrightarrow{g} M' \xrightarrow{c} L \to 0,$$

observamos que para cada $k > 1$, se tiene

$$\operatorname{Ext}^{k-1}_R(X, M) \to \operatorname{Ext}^{k}_R(L, M) \to \operatorname{Ext}^{k}_R(M', M)$$

con $\operatorname{Ext}^{k}_R(M', M) = 0$ por C2 ya que $M' \in \operatorname{Prod}(M)$, y $\operatorname{Ext}^{k-1}_R(X, M) = 0$ ya que $X \in^{\perp} M$. Por lo tanto, $\operatorname{Ext}^{k}_R(L, M) = 0$ para todo $k \geq 1$.

(b2) Sea $f : X \to C$ con $C \in \left({}^{\perp}M\right)^{\perp}$ y $X \in {}^{\perp} M$. Por el punto anterior, existe una sucesión exacta

$$0 \to X \xrightarrow{g} M' \xrightarrow{c} L \to 0$$

con $M' \in \operatorname{Prod}(M)$ y $L \in {}^{\perp} M$. Entonces, como $C \in \left({}^{\perp}M\right)^{\perp}$ y $L \in {}^{\perp} M$, se sigue que $\operatorname{Ext}^1_R(L, C) = 0$. Esto implica que $\operatorname{Hom}_R(g, C)$ es suprayectivo, de modo que f se factoriza a través de g. Así que, como $M' \in \operatorname{Prod}(M)$, f se factoriza a través de $\operatorname{Prod}(M)$.

Luego, si $A \in {}^{\perp} M \cap \left({}^{\perp}M\right)^{\perp}$, entonces 1_A se factoriza a través de $\operatorname{Prod}(M)$. Lo que implica que $A \in \operatorname{Prod}(M)$. Por lo tanto, ${}^{\perp}M \cap \left({}^{\perp}M\right)^{\perp} \subseteq \operatorname{Prod}(M)$. Por otro lado, $\operatorname{Prod}(M) \subset {}^{\perp} M$ por C2, y $\operatorname{Prod}(M) \subseteq \left({}^{\perp}M\right)^{\perp}$ ya que $\operatorname{Ext}^i_R(X, \_)$ saca productos. En conclusión, ${}^{\perp}M \cap \left({}^{\perp}M\right)^{\perp} = \operatorname{Prod}(M)$.

□

Por último, para un R-módulo M, sabemos que $M^{\perp}$ es preenvolvente especial por 2.37. Se desconoce si la proposición dual es verdadera, pero podemos dar el siguiente resultado.

Proposición 4.15. *Si M es un R-módulo que satisface C2 y que ${}^{\perp}M \subseteq \operatorname{Cogen}(M)$, entonces ${}^{\perp}M$ es precubriente especial. En particular, si M es un módulo cotilting (o un módulo cotilting parcial tal que ${}^{\perp}M \subseteq \operatorname{Cogen}(M)$), entonces ${}^{\perp}M$ es precubriente especial.*

Demostración. Sean $\omega = \operatorname{Prod}(M)$, $\mathcal{X} = {}^{\perp} M$. Por 4.14 sabemos que $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}$ y que para todo $X \in \omega$ existe una sucesión exacta

$$0 \to X \to M' \to L \to 0$$

con $M' \in \omega$ y $L \in \mathcal{X}$. Es decir, ω es un cogenerador de $\mathcal{X}$. Entonces, por 2.62, se tiene que para todo $X \in \mathcal{X}^{\wedge}$ existe una sucesión exacta

$$0 \to K_X \to M_X \xrightarrow{g_X} X \to 0 \qquad \text{con } K_X \in \omega^{\wedge},\ M_X \in \mathcal{X}.$$

Más aún, dado que $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp} \subseteq \mathcal{X}^{\perp}$, 2.62 implica que $\omega^{\wedge} \subseteq \mathcal{X}^{\perp}$ y que g_X es una $\mathcal{X}$-precubierta, la cual es especial ya que $K_X \in \mathcal{X}^{\perp}$. Con lo cual podemos concluir el resultado, ya que por 1.34 tenemos que $\mathcal{X}^{\wedge} = \operatorname{Mod}(R)$.

En caso de que M sea un módulo cotilting, basta observar que por 4.13 se tiene que $\mathcal{X} \subset \operatorname{Cogen}(M)$. □

4.2. n-tilting y n-cotilting

Hemos mencionado que un R-módulo T es n-tilting si satisface que $\mathrm{Gen}_n(T) = T^{\perp}$. En esta sección probaremos que la noción definida en la sección anterior coincide con la de n-tilting. Cabe mencionar que esta caracterización de los módulos n-tilting se debe a Silvana Bazzoni y Jiaqun Wei en sus respectivos trabajos [Baz04] y [Wei05].

Lema 4.16. *Si M es un R-módulo tilting, entonces $M^{\perp} \subseteq \mathrm{Gen}_k(M)$ para todo $k \geq 1$. Dualmente, si M es cotilting, entonces ${}^{\perp}M \subseteq \mathrm{Cogen}_k(M)$ para todo $k \geq 1$.*

Demostración. Sea $X \in M^{\perp}$, por 4.13 y 4.14 sabemos que podemos construir una sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_n \arrow[r] \arrow[dr, equal] & M_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_2 \arrow[r] \arrow[dr] & M_1 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \\
& & K_n \arrow[u] & & & K_1 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

para todo $n \geq 1$, donde $M_i \in \mathrm{Add}\,(M)$ y $K_i \in M^{\perp}$ para todo $i \geq 1$, lo que concluye la demostración.

La prueba para M cotilting es análoga. $\square$

Corolario 4.17. *Sea $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$. Se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) Si M es tilting, entonces para todo $X \in M^{\perp}$

$$\mathrm{resdim}_{\mathrm{Add}_M}(X) \leq \mathrm{pd}\ (X) + 1.$$

(b) Si M es cotilting, entonces para todo $X \in {}^{\perp}M$

$$\mathrm{coresdim}_{\mathrm{Prod}_N}(X) \leq \mathrm{id}\ (X) + 1.$$

Demostración. Sea $X \in {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$. Podemos suponer que $\mathrm{pd}\ (X) = m < \infty$. Como hemos visto en la prueba del lema anterior, existe una sucesión exacta

$$0 \to K_{m+1} \xrightarrow{f} M_m \to ... \to M_0 \to X \to 0$$

con $M_i \in \mathrm{Add}\,(M)$ para todo $0 \leq i \leq m$ y $K_{m+1} \in M^{\perp}$. Por el lema del corrimiento tenemos que

$$\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Im} f, K_{m+1}) = \mathrm{Ext}^{m+1}_R(X, K_{m+1}) = 0.$$

Por lo tanto, K_{m+1} es un sumando directo de M_m, y así un elemento de $\mathrm{Add}\,(M)$. $\square$

Proposición 4.18. *Sea $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$. Se cumplen los siguientes puntos:*

- *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

  (a) M *es un* R*-módulo tilting con* $\mathrm{pd}\,(M) \leq n$,

  (b) $M^{\perp} = \mathrm{Gen}_n(M)$,

  (c) $M^{\perp} = \mathrm{Gen}_k(M)$ *para todo* $k \geq n$,

  (d) $M^{\perp} = \mathrm{Gen}_n(M) = \mathrm{Gen}_{n+1}(M) \subseteq M^{\perp_1}$ *y* $\mathrm{Gen}_n(M)$ *es cerrada por conúcleos de monomorfismos,*

  (e) M *es un* $*^n$*-módulo fuerte tal que* $\mathrm{Gen}_n(M) = M^{\perp}$ *es cerrado por conúcleos de monomorfismos,*

  (f) M *es un* $*^n$*-módulo especial tal que* $\mathrm{Gen}_n(M) = M^{\perp}$,

  (g) $M^{\perp}$ *es cerrado por* n*-cocientes y* $\mathrm{Add}\,(M) \subseteq M^{\perp} \subseteq \mathrm{Gen}\,(M)$, *y*

  (h) M *es un* R*-módulo tilting parcial con* $\mathrm{pd}\,(M) \leq n$ *y* $M^{\perp} \subseteq \mathrm{Gen}\,(M)$.

  Más aún, en tal caso, $\mathrm{coresdim}_{\mathrm{Add}(M)}\,(P) \leq n$ *para todo generador proyectivo* P.

- *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

  (a) M *es un* R*-módulo cotilting con* $\mathrm{id}\,(M) \leq n$,

  (b) ${}^{\perp}M = \mathrm{Cogen}_n(M)$,

  (c) ${}^{\perp}M = \mathrm{Cogen}_k(M)$ *para todo* $k \geq n$,

  (d) ${}^{\perp}M = \mathrm{Cogen}_n(M) = \mathrm{Cogen}_{n+1}(M) \subseteq {}^{\perp_1}M$ *y* $\mathrm{Cogen}_n(M)$ *es cerrada por núcleos de epimorfismos,*

  (e) M *es un co-*$*^n$*-módulo fuerte tal que* $\mathrm{Cogen}_n(M) = {}^{\perp}M$ *es cerrado por núcleos de epimorfismos,*

  (f) M *es un co-*$*^n$*-módulo especial tal que* $\mathrm{Cogen}_n(M) = {}^{\perp}M$,

  (g) ${}^{\perp}M$ *es cerrado por* n*-submódulos y* $\mathrm{Prod}\,(M) \subseteq {}^{\perp}M \subseteq \mathrm{Cogen}\,(M)$,

  (h) M *es un* R*-módulo cotilting parcial con* $\mathrm{id}\,(M) \leq n$ *y* ${}^{\perp}M \subseteq \mathrm{Cogen}\,(M)$, *y*

  Más aún, en tal caso, $\mathrm{resdim}_{\mathrm{Prod}(M)}\,(Q) \leq n$ *para todo cogenerador inyectivo* Q.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Por el lema anterior, sabemos que $M^{\perp} \subseteq \mathrm{Gen}_n(M)$, por lo que basta probar que $\mathrm{Gen}_n(M) \subseteq M^{\perp}$. Para ello, observamos que si existe una sucesión exacta

$$0 \to K \to M^{(\alpha_n)} \to M^{(\alpha_{n-1})} \to M^{(\alpha_{n-2})} \to ... \to M^{(\alpha_1)} \to X \to 0,$$

como $M^{(\alpha_i)} \in M^{\perp}$ por T2, y $M^{\perp}$ es cerrado por n-cocientes por 1.36, tenemos que $X \in M^{\perp}$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Se sigue de que que $\mathrm{Gen}_{k+1}(M) \subseteq \mathrm{Gen}_k(M)$ para todo $k \geq 1$.

$(c) \Rightarrow (d)$ Es claro que $\mathrm{Gen}_{n+1}(M) = \mathrm{Gen}_n(M) = M^{\perp} \subseteq M^{\perp_1}$. Luego, dado que $M^{\perp}$ es una clase corresolvente, se sigue que $\mathrm{Gen}_n(M) = M^{\perp}$ es cerrada por conúcleos de monomorfismos.

$(d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f)$ Se sigue de 3.30 y 3.37.

$(f) \Rightarrow (g)$ $M^{\perp} = \mathrm{Gen}_n(M)$ es cerrado por n-cocientes por 3.22 y es claro que

$$\mathrm{Add}\,(M) \subseteq \mathrm{Gen}_n(M) = M^{\perp} = \mathrm{Gen}_n(M) \subseteq \mathrm{Gen}\,(M)\,.$$

$(g) \Rightarrow (h)$ Dado que $M^{\perp}$ es cerrado por n-cocientes, $\mathrm{pd}\,(M) = n$ por 1.36. Por lo tanto, M satisface T1. Se sigue de la segunda hipótesis que M satisface T2 y $M^{\perp} \subseteq \mathrm{Gen}\,(M)$.

$(h) \Rightarrow (a)$ Dado que $\mathrm{Add}\,(M) \subseteq M^{\perp} \subseteq \mathrm{Gen}\,(M)$, por 4.14 sabemos que

$$\mathrm{Add}\,(M) = M^{\perp} \cap^{\perp} \left(M^{\perp}\right).$$

Luego, como $M^{\perp}$ es preenvolvente especial por 2.37, con el método usual podemos contruir una sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r] & M_0 \arrow[r] \arrow[dr] & M_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_{n-1} \arrow[r] \arrow[dr] & M_n \arrow[r] & 0 \\
& & & C_0 \arrow[u] & & & C_{n-1} \arrow[u, equal] &
\end{tikzcd}$$

donde $M_i \in M^{\perp}$ y $C_i \in^{\perp} \left(M^{\perp}\right)$ para todo $i \in \{0, ..., n-1\}$.

Ahora, como $M^{\perp}$ es cerrado por n-cocientes, tenemos que $M_n \in M^{\perp} \cap^{\perp} \left(M^{\perp}\right)$. Más aún, tomando $C_{-1} := R$, para todo $i \in \{0, ..., n\}$ se tiene que $M_i \in M^{\perp} \cap^{\perp} \left(M^{\perp}\right)$, debido a que tenemos una sucesión exacta

$$0 \to C_{i-1} \to M_i \to C_i \to 0,$$

donde $C_{i-1}, C_i \in^{\perp} \left(M^{\perp}\right)$. Por lo tanto, $M_i \in \mathrm{Add}\,(M)$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$.

Por la construcción anterior tenemos que $\mathrm{resdim}_{\mathrm{Add}(M)}\,(R) \leq n$. Por lo tanto, M satisface T3, y por las hipótesis es inmediato que también satisface T2 y T1. Cabe observar que la misma construcción se puede hacer para cualquier generador proyectivo P.

Para el caso cotilting la prueba es análoga para las implicaciones

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (h).$$

Para probar $(h) \Rightarrow (a)$, observamos que por 4.15 la clase ${}^{\perp}M$ es precubriente especial, y el resto de la prueba es análogo. $\square$

Observación 4.19. *De la prueba de* $(h) \Rightarrow (a)$*, podemos deducir que*

$$\operatorname{coresdim}_{\operatorname{Add}(M)}\left({}^{\perp}(M^{\perp})\right) \leq n$$

en caso de que M *sea* n*-tilting, y que*

$$\operatorname{resdim}_{\operatorname{Prod}(M)}\left(({}^{\perp}M)^{\perp}\right) \leq n$$

en caso de que M *sea* n*-cotilting. De hecho, probaremos en el próximo capítulo (ver 5.3), que*

$$\operatorname{coresdim}_{\operatorname{Add}(M)}\left({}^{\perp}(M^{\perp})\right) = n$$

en caso de que M *sea* n*-tilting, y que*

$$\operatorname{resdim}_{\operatorname{Prod}(M)}\left(({}^{\perp}M)^{\perp}\right) = n$$

en caso de que M *sea* n*-cotilting.*

Se sigue la definición dada a continuación.

Definición 4.20. Sea M un módulo.

- Si M satisface el primer punto de la proposición anterior, decimos que M es un módulo n-tilting.
- Si M satisface el segundo punto de la proposición anterior, decimos que M es un módulo n-cotilting.

4.3. Resutados principales

A continuación expondremos los resultados principales de [AHUC01].

En esta sección supondremos que dada una clase de módulos arbitraria $\mathcal{X}$, ésta es considerada cerrada bajo isomorfismos y sumandos directos.

Teorema 4.21. *Sea* $\mathcal{X}$ *una clase de módulos cerrada bajo conúcleos de monomorfismos tal que* $\mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$ *es cerrado bajo coproductos arbitrarios. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) existe un módulo n*-tilting* M *tal que* $\mathcal{X} = M^{\perp}$*,*

(b) $\mathcal{X}$ *es una clase preenvolvente especial tal que* $\operatorname{pd}\left({}^{\perp}\mathcal{X}\right) \leq n$*.*

Más aún, en tal caso $\mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X} = \operatorname{Add}(M)$*.*

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Por 2.37 sabemos que $M^{\perp}$ es preenvolvente especial. Además por 1.34 sabemos que pd $\left({}^{\perp}\mathcal{X}\right) \leq$ pd $(M) = n$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Se afirman los siguientes hechos:

- *$\mathcal{X}$ contiene a la clase de módulos inyectivos.*
  En efecto, dado que $\mathcal{X} = M^{\perp}$ es preenvolvente especial, para todo módulo inyectivo I existe una sucesión exacta

$$0 \to I \to X \to C \to 0$$

  con $X \in \mathcal{X}$. Entonces todo módulo inyectivo I es sumando directo de un módulo $X \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\operatorname{Inj}(R) \subseteq \mathcal{X}$.

- *Para todo módulo A existe una sucesión exacta*

$$0 \to A \stackrel{f_0}{\to} N_0 \stackrel{f_1}{\to} N_1 \to ... \stackrel{f_n}{\to} N_n \to 0$$

  tal que $N_i \in \mathcal{X}$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$ y $\operatorname{Coker}(f_i) \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ *para todo* $i \in \{0, ..., n\}$.
  En efecto, dado que $\mathcal{X}$ es preenvolvente especial, para todo módulo A existe una sucesión exacta

$$0 \to A \to N_0 \to C_1 \to 0,$$

  donde $N_0 \in \mathcal{X}$ y $C_1 \in {}^{\perp_1}\mathcal{X}$. Pero como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos y contiene a todos los módulos inyectivos, podemos concluir por 2.21 que $C_1 \in {}^{\perp}\mathcal{X}$. Recursivamente consideramos la k-ésima sucesión exacta

$$0 \to C_k \to N_k \to C_{k+1} \to 0$$

  donde $N_k \in \mathcal{X}$ y $C_{k+1} \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ por el razonamiento anterior. Continuando hasta el paso n, contruimos la sucesión exacta

$$0 \to A \to N_0 \to N_1 \to ... \to N_n \to C_{n+1} \to 0.$$

  Pero dado que $C_{n+1} \in {}^{\perp}\mathcal{X}$ y $N_i \in \mathcal{X}$ para todo $0 \leq i \leq n$, tenemos que $N_i \in (C_{n+1})^{\perp}$. Así que, por el lema del corrimiento,

$$\operatorname{Ext}^1_R(C_{n+1}, C_n) \cong \operatorname{Ext}^{n+1}_R(C_{n+1}, A) = 0$$

  debido a que pd $(C_{n+1}) \leq n$ por hipótesis. Se sigue que la sucesión

$$0 \to C_n \to N_n \to C_{n+1} \to 0$$

  se escinde. En particular, $C_n \in \mathcal{X}$ ya que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumandos directos.

Por lo tanto,

$$0 \to A \to N_0 \to N_1 \to ... \to N_{n-1} \to C_n \to 0$$

es la sucesión buscada.

- *Existe una sucesión exacta*

$$0 \to R_R \to B_0 \to B_1 \to ... \to B_n \to 0$$

con $B_i \in \mathcal{X} \cap^{\perp} \mathcal{X}$.
Ciertamente, sea

$$0 \to R_R \to B_0 \to B_1 \to ... \to B_n \to 0$$

la sucesión construida en la afirmación anterior. Entonces, dado que la clase ${}^{\perp}\mathcal{X}$ es cerrada bajo extensiones, podemos concluir de las sucesiones

$$0 \to C_k \to B_k \to C_{k+1} \to 0$$

que $B_k \in \mathcal{X} \cap^{\perp} \mathcal{X}$ para todo $k \in \{0, ..., n\}$.

- *El módulo* $M = \bigoplus_{i=0}^{n} B_i$ *es un módulo tilting.*
En efecto, dado que $B_k \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$ para todo $k \in \{0, ..., n\}$, por hipótesis tenemos que $M \in \mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$. Entonces, pd $(M) \leq n$ por hipótesis, por lo que M satisface T1.
Dado que $\mathcal{X} \cap^{\perp} \mathcal{X}$ es cerrado bajo coproductos arbitrarios y $M \in \mathcal{X} \cap^{\perp} \mathcal{X}$, se sigue que $\mathrm{Add}\,(M) \subseteq M^{\perp}$, por lo que M satisface T2.
Finalmente, de la observación anterior se sigue que M satisface T3.

Queda por probar que $\mathcal{X} = M^{\perp}$.

- $\mathcal{X} \subset M^{\perp}$.
En inmediato de que $M \in \mathcal{X} \cap^{\perp} \mathcal{X}$.

Para la contención opuesta probaremos primero la siguiente afirmación.

- $\mathcal{X} \cap^{\perp} \mathcal{X} = \mathrm{Add}\,(M)$.
La contención $\mathrm{Add}\,(M) \subseteq \mathcal{X} \cap^{\perp} \mathcal{X}$ es inmediata por contrucción y el hecho de que $\mathcal{X} \cap^{\perp} \mathcal{X}$ es cerrado bajo coproductos.
Recíprocamente, dado $X \in \mathcal{X} \cap^{\perp} \mathcal{X}$, por 4.13 sabemos que $M^{\perp} \subseteq \mathrm{Gen}\,(M)$, por lo que podemos usar 4.14 recursivamente para construir una sucesión exacta

$$0 \to K_n \to M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to ... \xrightarrow{f_1} M_0 \xrightarrow{f_0} X \to 0$$

con $M_i \in \mathrm{Add}\,(M)$ y $K_i = \mathrm{Ker}\,(f_i) \in M^{\perp}$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$. Luego, como $X \in^{\perp} \mathcal{X} \cap \mathcal{X}$ por hipótesis, tenemos que pd $(X) \leq n$, así que por el lema del corrimiento tenemos que $\mathrm{Ext}_R^1\,(K_{n-1}, K_n) \cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}\,(X, K_n) = 0$. Ahora,

$K_n \in \mathrm{Add}\,(M) \subset \mathcal{X}$, debido a que la sucesión exacta

$$0 \to K_n \to M_n \to K_{n-1} \to 0$$

se escinde.
Con esto último, utilizando que $\mathcal{X}$ es cerrado por conúcleos de monomorfismos, podemos concluir inductivamente que $K_0 \in \mathcal{X}$.

$$\boxed{\begin{array}{rr} 0 \to K_n \to M_n \to K_{n-1} \to 0 & (K_n, M_n \in \mathcal{X}) \Rightarrow (K_{n-1} \in \mathcal{X}) \\ 0 \to K_{n-1} \to M_{n-1} \to K_{n-2} \to 0 & (K_{n-1}, M_{n-1} \in \mathcal{X}) \Rightarrow (K_{n-2} \in \mathcal{X}) \\ \vdots & \vdots \\ 0 \to K_1 \to M_1 \to K_0 \to 0 & (K_1, M_1 \in \mathcal{X}) \Rightarrow (K_0 \in \mathcal{X}) \end{array}}$$

Finalmente, como $\mathrm{Ext}^1_R\,(X, K_0) = 0$, debido a que $K_0 \in \mathcal{X}$ y $X \in {}^{\perp}\mathcal{X}$, tenemos que la sucesión exacta

$$0 \to K_0 \to M_0 \to X \to 0$$

se escinde, por lo que $X \in \mathrm{Add}\,(M)$.

- $M^{\perp} \subset \mathcal{X}$.
Sea $A \in M^{\perp}$. Por la primera afirmación, sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \to A \xrightarrow{f_0} N_0 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{f_2} ... \xrightarrow{f_n} N_n \to 0$$

tal que $N_i \in \mathcal{X}$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$ y $\mathrm{Coker}\,(f_i) \in^{\perp} \mathcal{X}$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$. En particular, tenemos que $N_n \in \mathcal{X} \cap^{\perp} \mathcal{X} = \mathrm{Add}\,(M)$. Luego, como $A \in M^{\perp}$, $N_i \in \mathcal{X} \subset M^{\perp}$, $M^{\perp}$es corresolvente y en particular cerrado por cosizigias, tenemos que $\mathrm{Coker}\,(f_i) \in M^{\perp}$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$.
Veamos por inducción sobre n que $A \in \mathcal{X}$. Para $n = 0$, tenemos $A \cong N_0 \in \mathcal{X}$, y así $A \in \mathcal{X}$. Para $n = 1$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to A \to N_0 \to N_1 \to 0,$$

la cual se escinde ya que $A \in M^{\perp}$ y $N_1 = N_n \in \mathrm{Add}\,(M)$.
Para $n > 1$, primero observamos que $N_{n-1} \in \mathrm{Add}\,(M)$. En efecto, dado que $N_{n-1} \in \mathcal{X}$ y $\mathrm{Add}\,(M) = \mathcal{X} \cap^{\perp} \mathcal{X}$, basta probar que $N_{n-1} \in^{\perp} \mathcal{X}$. Para ello, consideramos la sucesión exacta natural

$$0 \to C \to N_{n-1} \to N_n \to 0,$$

donde C es el conúcleo de f_{n-2}. Tenemos entonces que $N_{n-1} \in^{\perp} \mathcal{X}$ ya que $C, N_n \in^{\perp} \mathcal{X}$. Por lo tanto, $N_{n-1} \in \mathrm{Add}\,(M)$.
Por otro lado, la sucesión anterior se escinde ya que $C \in M^{\perp}$ y $N_n \in \mathrm{Add}\,(M)$. Por lo que $C \in \mathrm{Add}\,(M)$, ya que $N_{n-1} \in \mathrm{Add}\,(M)$.

Entonces, considerando la sucesión exacta

$$0 \to A \xrightarrow{f_0} N_0 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{n-2}} N_{n-2} \to C \to 0$$

de longitud $n-1$, tenemos que $A \in \mathcal{X}$ por la hipótesis de inducción.

$\square$

Se tiene el teorema dual.

Teorema 4.22. *Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos cerrada bajo núcleos de epimorfismos y tal que $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp}$ es cerrado bajo productos arbitrarios. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) existe un módulo n-cotilting M con tal que $\mathcal{X} = {}^{\perp} M$,

(b) $\mathcal{X}$ es una clase precubriente especial tal que $\operatorname{id}\left(\mathcal{X}^{\perp}\right) \leq n$.

Más aún, en tal caso $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp} = \operatorname{Prod}(M)$.

Demostración. Dual a la prueba anterior. $\square$

Definición 4.23. Sea $\mathcal{X}$ una clase de R-módulos.

(a) Decimos que $\mathcal{X}$ es una clase tilting si satisface 4.21.

(b) Decimos que $\mathcal{X}$ es una clase cotilting si satisface 4.22.

Por otro lado, cabe observar que dado un R-módulo M, se tiene que $M^{\perp}$ es corresolvente. Pero si una clase $\mathcal{X}$ es corresolvente, ${}^{\perp}\mathcal{X} = {}^{\perp_1}\mathcal{X}$ por 2.21. Por lo tanto, el par de cotorsión $({}^{\perp}\mathcal{X}, \mathcal{X})$ es hereditario con $\mathcal{X} = M^{\perp}$.

Con este razonamiento podemos definir una biyección entre la clase de módulos tilting de dimensión proyectiva menor o igual a n, y la clase de pares de cotorsión hereditarios completos $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ con $\operatorname{pd}(\mathcal{Y}) = n$ y $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ cerrado bajo coproductos arbitrarios, que a su vez está en biyección con la colección de clases corresolventes $\mathcal{X}$ tales que $\operatorname{pd}\left({}^{\perp}\mathcal{X}\right) = n$ y $\mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$ cerrado bajo coproductos arbitrarios.

Corolario 4.24. *Existe una biyección entre las siguientes clases:*

- *las clases de módulos tilting de dimensión proyectiva n bajo la relación de equivalencia $\sim$, definida como $T \sim S$ si y sólo si $T^{\perp} = S^{\perp}$,*
- *los pares de cotorsión hereditarios y completos $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ con* $\operatorname{pd}(\mathcal{Y}) = n$ *y $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ cerrado bajo coproductos arbitrarios,*
- *las clases corresolventes $\mathcal{X}$ tales que* $\operatorname{pd}\left({}^{\perp}\mathcal{X}\right) = n$ *y $\mathcal{X} \cap {}^{\perp}\mathcal{X}$ cerrado bajo coproductos arbitrarios.*

Demostración. Claramente la relación propuesta es de equivalencia, denotaremos como $\overline{M}$ a la clase de equivalencia de un módulo tilting M de dimensión proyectiva n.

Por el razonamiento anterior, para cada módulo tilting M de dimensión proyectiva n podemos asignar el par de cotorsión hereditario y completo $({}^{\perp}(M^{\perp}), M^{\perp})$, donde $\text{pd}\left({}^{\perp}(M^{\perp})\right) = n$ debido a que $M \in \text{Add}\,(M) = M^{\perp} \cap^{\perp} \left(M^{\perp}\right)$ y $\text{pd}\left({}^{\perp}(M^{\perp})\right) \leq n$ por 4.21. Además, $M^{\perp} \cap^{\perp} \left(M^{\perp}\right)$ es cerrado bajo coproductos arbitrarios debido a que $M^{\perp} \cap^{\perp} \left(M^{\perp}\right) = \text{Add}\,(M)$. Por lo tanto, si $\overline{M}$ es la clase de equivalencia de M, podemos definir la correspondecia $\phi(\overline{M}) = ({}^{\perp}(M^{\perp}), M^{\perp})$, que claramente está bien definida.

Por otro lado, sea $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ un par de cotorsión hereditario y completo con $\text{pd}\,(\mathcal{Y}) = n$ y $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ cerrado bajo coproductos arbitrarios. Por 4.21, sabemos que existe un módulo tilting M tal que $M^{\perp} = \mathcal{X}$ y $\text{pd}\,(M) \leq n$. Más aún, podemos afirmar que $\text{pd}\,(M) = n$ ya que por 1.34, sabemos que $n = \text{pd}\,(\mathcal{Y}) \leq \text{pd}\,(M)$. Observamos además que si N es otro módulo tilting que satiface lo anterior se tiene que $\overline{M} = \overline{N}$. Por lo tanto, podemos definir una correspondencia $\psi(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) = \overline{M}$.

Ahora, observamos que si $\overline{N} = \psi\phi(\overline{M}) = \psi({}^{\perp}(M^{\perp}), M^{\perp})$, entonces $N^{\perp} = M^{\perp}$, y así $\overline{M} = \overline{N}$. Finalmente, vemos que si

$$(\mathcal{Y}', \mathcal{X}') = \phi\psi(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) = \phi(\overline{M}),$$

entonces $M^{\perp} = \mathcal{X}$ debido a que $\psi(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) = \overline{M}$ y $M^{\perp} = \mathcal{X}'$ debido a que $\phi(\overline{M}) = (\mathcal{Y}', \mathcal{X}')$ así que $(\mathcal{Y}', \mathcal{X}') = (\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Lo que prueba la existencia de la biyección buscada.

La segunda biyección es inmediata. □

Análogamente podemos considerar las correspondientes biyecciones para el caso dual.

Corolario 4.25. *Existe una biyección entre las siguientes clases:*

- *las clases de módulos cotilting de dimensión inyectiva n bajo la relación de equivalencia $\sim$, definida como $T \sim S$ si y sólo si ${}^{\perp}T =^{\perp} S$,*
- *los pares de cotorsión $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ hereditarios completos con* $\text{id}\,(\mathcal{X}) = n$ *y* $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ *cerrado bajo coproductos arbitrarios,*
- *las clases resolventes $\mathcal{Y}$ tales que* $\text{id}\left(\mathcal{Y}^{\perp}\right) = n$ *y* $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Y}^{\perp}$ *cerrado bajo coproductos arbitrarios.*

A continuación veremos algunas consecuencias de los teoremas anteriores. Para ello, se introduce la siguiente definición.

Definición 4.26. Decimos que una clase de módulos $\mathcal{X}$ es una clase de pretorsión si es cerrada bajo coproductos arbitrarios y cocientes.

Decimos que una clase de módulos $\mathcal{X}$ es una clase libre de pretorsión si es cerrada bajo productos arbitrarios y submódulos.

Los siguientes resultados generalizan y dan una prueba distinta de los resultados de [AHTT01].

Corolario 4.27. *Sea $\mathcal{X}$ una clase de pretorsión de módulos. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) Existe un módulo 1*-tilting M tal que $\mathcal{X} = M^{\perp}$.*

(b) $\mathcal{X}$ es una clase preenvolvente especial.

Además, en tal caso $\operatorname{pd}\left({}^{\perp}\mathcal{X}\right) \leq 1$ *y* ${}^{\perp}\mathcal{X} \cap \mathcal{X} = \operatorname{Add}(M)$*.*

Demostración. Observamos que una clase de pretorsión $\mathcal{X}$, satisface con ser cerrada bajo conúcleos de monomorfismos y con que $\mathcal{X} \cap^{\perp} \mathcal{X}$ es cerrado bajo coproductos. Por lo que nos encontramos con las hipótesis de 4.21.

$(a) \Rightarrow (b)$ Por 4.21 tenemos que $\mathcal{X}$ es una clase preenvolvente tal que $\operatorname{pd}\left({}^{\perp}\mathcal{X}\right) \leq 1$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Si $\mathcal{X}$ es una clase preenvolvente especial, por 4.21 basta probar que

$$\operatorname{pd}\left({}^{\perp}\mathcal{X}\right) \leq 1.$$

Sea $Y \in^{\perp} \mathcal{X}$. Dado un módulo A y su $\mathcal{X}$-preenvolvente especial

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

observamos que como $\mathcal{X}$ es cerrado bajo cocientes, $C \in \mathcal{X}$. Así que al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_R(Y, \_)$ a la sucesión anterior, tenemos para todo $i > 0$ la sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}_R^i(Y, C) \to \operatorname{Ext}_R^{i+1}(Y, A) \to \operatorname{Ext}_R^{i+1}(Y, B),$$

donde $\operatorname{Ext}_R^i(Y, C) = 0 = \operatorname{Ext}_R^{i+1}(Y, B)$ debido a que $Y \in^{\perp} \mathcal{X}$. Por lo tanto, para todo $A \in \operatorname{Mod}(R)$ y toda $i > 0$ tenemos que $\operatorname{Ext}_R^{i+1}(Y, A) = 0$. Por lo tanto, $\operatorname{pd}(Y) \leq 1$. $\square$

Corolario 4.28. *Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos libre de pretorsión. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) Existe un módulo 1*-cotilting M tal que $\mathcal{X} =^{\perp} M$,*

(b) $\mathcal{X}$ es una clase precubriente especial.

Además, en tal caso $\operatorname{id}\left(\mathcal{X}^{\perp}\right) \leq 1$ *y* $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^{\perp} = \operatorname{Prod}(M)$*.*

Demostración. Dual a la anterior. $\square$

Teorema 4.29. *Sea* $M \in \operatorname{Mod}(R)$*. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) M *es un* R*-módulo tilting;*

(b) M *es un* R*-módulo tilting parcial tal que* $M^{\perp} \subset \operatorname{Gen}(M)$*;*

(c) M *es un* R*-módulo tilting parcial tal que* $M^{\perp} \subset \operatorname{Gen}(M)$ *y que todo* $Y \in {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$ *tiene una* $\operatorname{Add}(M)$*-preenvolvente.*

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Es inmediato de 4.13.

$(b) \Rightarrow (c)$ Por 2.37 sabemos que $M^{\perp}$ es preenvolvente especial. En particular, todo $A \in {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$ tiene una $M^{\perp}$-preenvolvente especial $f : A \to B$. Además, por 4.14 dicha preenvolvente se factoriza a través de $\operatorname{Add}(M)$, por lo que existe $f' : A \to B'$ con $B' \in \operatorname{Add}(M)$ por el que se factoriza f. Finalmente, por T2 sabemos que $\operatorname{Add}(M) \subset M^{\perp}$, así que f' es una $\operatorname{Add}(M)$-preenvolvente. En efecto, si $g : A \to X$ es un morfismo con $X \in \operatorname{Add}(M)$, dado que $X \in M^{\perp}$, g se factoriza a través de f, pero como f se factoriza a través de f', tenemos que g se factoriza a través de f'.

$(c) \Rightarrow (a)$ Para un módulo $A \in {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$ observamos los siguientes hechos:

- A *tiene una* $\operatorname{Add}(M)$*-preenvolvente* $f : A \to B$*.*
- f *es una* $M^{\perp}$*-preenvolvente especial*
  En efecto, por 4.14 todo morfismo $A \to X$ con $X \in M^{\perp}$ se factoriza a través de $\operatorname{Add}(M)$, por lo que se factoriza a través de f por ser una $\operatorname{Add}(M)$-preenvolvente. En particular, la envolvente inyectiva $A \to I$ se factoriza a través de f debido a que $I \in M^{\perp}$. Lo que implica que f es un monomorfismo, debido a que la envolvente es monomorfismo.
  Luego, al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_R(\_, X)$ a la sucesión exacta

  $$0 \to A \xrightarrow{f} B \to C \to 0,$$

  obtenemos la sucesión exacta

  $$\operatorname{Hom}_R(B, X) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(f,X)} \operatorname{Hom}_R(A, X) \to \operatorname{Ext}^1_R(C, X) \to \operatorname{Ext}^1_R(B, X),$$

  donde $\operatorname{Hom}_R(f, X)$ es una función suprayectiva debido a que f es $M^{\perp}$-preenvolvente, y $\operatorname{Ext}^1_R(B, X) = 0$ debido a que $B \in \operatorname{Add}(M)$ y $X \in M^{\perp}$. Por lo tanto, $\operatorname{Ext}^1_R(C, X) = 0$ para todo $X \in M^{\perp}$.
- *Para todo* $A \in^{\perp} \mathcal{X}$ *existe una sucesión exacta*

  $$0 \to A \to B \to C \to 0$$

  con $B \in \operatorname{Add}(M)$ *y* $C \in {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$*.*
  En efecto, se sigue de la observación anterior por 2.21.

Ahora, si $n = \mathrm{pd}\,(M)$, utilizando lo anterior podemos construir una sucesión exacta

$$0 \to R \xrightarrow{f_0} B_0 \xrightarrow{f_1} B_1 \to \dots \to B_{n-1} \xrightarrow{f_n} C_n \to 0$$

con $B_i \in \mathrm{Add}\,(M) \subset M^{\perp}$ y $\mathrm{Coker}\,(f_i) \in {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$ para todo $0 \leq i \leq n-1$. Así que por el lema del corrimiento, tenemos que $\mathrm{Ext}^{i}_{R}\,(M, C_n) \cong \mathrm{Ext}^{i+n}_{R}\,(M, R) = 0$ para todo $i > 0$. Así que $C_n \in M^{\perp} \cap {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$. Pero $M^{\perp} \cap {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right) = \mathrm{Add}\,(M)$ por 4.14. Por lo tanto, se satisface T3.

□

Podemos dualizar al siguiente resultado.

Teorema 4.30. *Sea $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) M es un módulo cotilting;

(b) M es un módulo cotilting parcial tal que ${}^{\perp}M \subset \mathrm{Cogen}\,(M)$;

(c) M es un módulo cotilting parcial tal que ${}^{\perp}M \subset \mathrm{Cogen}\,(M)$ y que todo $Y \in \left({}^{\perp}M\right)^{\perp}$ tiene una $\mathrm{Prod}\,(M)$-precubierta.

4.4. Ejemplos

4.4.1. Clases cotilting de módulos libres de torsión

Es un hecho conocido que en un dominio entero conmutativo la clase de los módulos libres de torsión es una clase libre de torsión que es precubriente especial. Por lo que cabe preguntarse bajo qué condiciones un anillo satisface que dicha clase sea precubriente especial. En esta sección presentamos la clase de los p.p. anillos, y probaremos con ayuda de la teoría de módulos cotilting desarrollada, que en este caso la clase de los módulos libres de torsión es precubriente especial.

Definición 4.31. Sea R un anillo y $M \in \mathrm{Mod}\,(R)$. Decimos que M es libre de torsión en caso de que

$$\mathrm{Tor}^{R}_{1}\,(R/rR, M) = 0 \quad \forall r \in R.$$

Denotamos a la clase de todos los módulos libres de torsión como $\mathcal{F}$.

Observación 4.32. *Cabe observar que en caso de que R sea un dominio entero conmutativo la definición anterior coincide con la noción usual de que un módulo M sea libre de torsión, es decir $rm \neq 0$ para todo $r \in R - \{0\}$ y $m \in M - \{0\}$. En efecto,* *dado un dominio entero conmutativo R, $r \in R - \{0\}$ y $M \in \operatorname{Mod}(R)$, al aplicar el funtor $M \otimes_R \_\_$ a la sucesión exacta*

$$0 \to R \xrightarrow{f_r} R \to R/rR \to 0,$$

donde $f(x) = xr$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Tor}_1^R(R, M) \to \operatorname{Tor}_1^R(R/rR, M) \to R \otimes M \xrightarrow{1 \otimes f_r} R \otimes M,$$

donde $\operatorname{Tor}_1^R(R, M) = 0$ debido a que R es plano. Por lo tanto, dicha sucesión exacta es isomorfa a la sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Ker}(g_r) \to M \xrightarrow{g} M,$$

donde $g(x) = rx$. Por lo tanto, como M es libre de torsión si y sólo si $\operatorname{Ker}(g_r) = 0$ para todo $r \in R$, podemos concluir que M es libre de torsión si y sólo si $\operatorname{Tor}_1^R(R/rR, M) = 0$ para todo $r \in R$.

En caso de que R sea dominio entero, entonces la clase $\mathcal{F}$ de módulos libres de torsión está relacionada con un par de torsión. Recordamos a continuación la definición y algunos resultados de este concepto.

Definición 4.33. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una pareja de subclases de $\operatorname{Mod}(R)$. Decimos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de torsión, en caso de que $\mathcal{B} = {}^{\perp_0}\mathcal{A}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{\perp_0}$, donde

$$\begin{aligned}{}^{\perp_0}\mathcal{A} &:= \{X \in \operatorname{Mod}(R) \mid \operatorname{Hom}_R(X, A) = 0\, \forall A \in \mathcal{A}\} \text{ y} \\ \mathcal{B}^{\perp_0} &:= \{X \in \operatorname{Mod}(R) \mid \operatorname{Hom}_R(B, X) = 0\, \forall B \in \mathcal{B}\}.\end{aligned}$$

En tal caso, decimos que $\mathcal{A}$ es una clase de torsión y que $\mathcal{B}$ es una clase libre de torsión.

Proposición 4.34. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una pareja de subclases de $\operatorname{Mod}(R)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un par de torsión;*

(b) *$\mathcal{B} = {}^{\perp_0}\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es una clase cerrada por cocientes, coproductos y extensiones;*

(c) *$\mathcal{A} = \mathcal{B}^{\perp_0}$ y $\mathcal{B}$ es una clase cerrada por submódulos, productos y extensiones; y*

(d) *para todo módulo M existe una única sucesión exacta*

$$0 \to A \to M \to B \to 0$$

con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$.

Demostración. Ver capítulo 6 de [Ste75]. □

Con la proposición anterior, es fácil ver que, en caso de que R sea un dominio entero, $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión. Sin embargo, en general esto no sucede para anillos arbitrarios. En la siguiente proposición se caracterizan los anillos en los que sucede este fenómeno. Será de utilidad la siguiente definición.

Definición 4.35. [DF04] Sea R un anillo.

(a) Decimos que R es libre de torsión si todo ideal izquierdo es libre de torsión, o equivalentemente, si todo ideal izquierdo principal es plano (ver 3.4 de [DF04]).

(b) Decimos que R es un p.p. anillo si todo ideal izquierdo principal es proyectivo.

Observación 4.36. *Utilizando la segunda caracterización de anillo libre de torsión, podemos concluir que si R es un p.p. anillo, entonces R es libre de torsión.*

Proposición 4.37. *Sea R un anillo. Entonces, $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión y R es libre de torsión, si y sólo si R es un p.p. anillo.*

Demostración. Ver teorema 6.1 de [DF04]. □

Podemos probar además que $\mathcal{F}$ forma parte de un par de cotorsión. Utilizaremos el siguiente concepto.

Definición 4.38. Decimos que una pareja de clases $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es un Tor-par si $\mathcal{A} = {}^{\top}\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}^{\top} = \mathcal{B}$, donde

$${}^{\top}\mathcal{B} := \left\{M \in \operatorname{Mod}(R) \mid \operatorname{Tor}_1^R(M, \mathcal{B}) = 0\right\} \text{ y } \mathcal{A}^{\top} := \left\{M \in \operatorname{Mod}(R) \mid \operatorname{Tor}_1^R(\mathcal{A}, M) = 0\right\}.$$

Lema 4.39. *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un Tor-par. Entonces $\left(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\perp}\right)$ es un par de cotorsión en* $\operatorname{Mod}(R^{op})$ *y $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^{\perp})$ es un par de cotorsión en* $\operatorname{Mod}(R)$. *Más aún, $\left(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\perp}\right)$ es cogenerado por la clase $\mathcal{C} = \left\{B^C := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \mid B \in \mathcal{B}\right\}$.*

Demostración. En efecto, por 1.11 sabemos que existe un isomorfismo

$$\operatorname{Ext}_R^1\left(A, B^C\right) \cong \left(\operatorname{Tor}_1^R(A, B)\right)^C.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}_R^1\left(A, B^C\right) = 0 &\Leftrightarrow \left(\operatorname{Tor}_1^R(A, B)\right)^C = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(A, B) = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, ${}^{\perp_1}\mathcal{C} = \mathcal{A}$ y así $\left(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\perp}\right)$ es un par de cotorsión en $\operatorname{Mod}(R^{op})$.

Por otro lado, $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ es un Tor-par sobre el anillo opuesto, lo que implica por el razonamiento anterior que $\left(\mathcal{B}, \mathcal{B}^{\perp}\right)$ es un par de cotorsión en $\operatorname{Mod}(R)$. □

Se sigue del lema anterior que $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{\perp_1})$ es un par de cotorsión.

Proposición 4.40. *La pareja* $\left(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{\perp_1}\right)$ *es un par de cotorsión.*

Demostración. Sea $X = \bigoplus_{r \in R} R/rR$. Claramente $\mathcal{F} = X^{\top}$ y

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \subseteq \left({}^{\top}\mathcal{F}\right)^{\top} &= \left\{Z \in \operatorname{Mod}(R) \mid \operatorname{Tor}_1^R(M, Z) = 0 \, \forall M \in {}^{\top}\mathcal{F}\right\} \\ &\subseteq \left\{Z \in \operatorname{Mod}(R) \mid \operatorname{Tor}_1^R(X, Z) = 0\right\} \\ &= \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left({}^{\top}\mathcal{F}, \mathcal{F}\right)$ es un Tor-par. Así que por el lema anterior, $\left(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{\perp_1}\right)$ es un par de cotorsión. □

Recordemos el concepto de módulo divisible.

Definición 4.41. Decimos que un R-módulo a derecha N es divisible si

$$\operatorname{Ext}_R^1(R/rR, N) = 0 \quad \forall r \in R.$$

Un R-módulo a izquierda N es divisible si

$$\operatorname{Ext}_R^1(R/Rr, N) = 0 \quad \forall r \in R.$$

Observación 4.42. *Un R-módulo M es libre de torsión si y sólo si*

$$M^C := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

es un R-módulo a derecha divisble. En efecto, sean $M \in \operatorname{Mod}(R)$ y $r \in R$. Por 1.11 tenemos el isomorfismo natural

$$\operatorname{Ext}_R^1\left(R/rR, M^C\right) \cong \left(\operatorname{Tor}_1^R(R/rR, M)\right)^C.$$

Por lo tanto, $\operatorname{Ext}_R^1\left(R/rR, M^C\right) = 0$ *si y sólo si* $\operatorname{Tor}_1^R(R/rR, M) = 0$.

En el siguiente lema veremos que en caso de que R sea un p.p. anillo, M es divisible si y sólo si M^C es libre de torsión.

Lema 4.43. *Sea R un anillo tal que todo ideal principal es finitamente presentado. Entonces, un R-módulo M es divisible si y sólo si M^C es libre de torsión. En particular, en caso de que R sea un p.p. anillo, un R-módulo M es divisible si y sólo si M^C es libre de torsión.*

Demostración. Sea R un anillo tal que todo ideal principal sea finitamente presentado. Para todo $r \in R$, tenemos que Rr es finitamente presentado, por lo que tenemos una sucesión exacta

$$0 \to K_1 \to P_1 \to Rr \to 0$$

con P_1 proyectivo y tanto K_1 como P_1 finitamente generados. Luego, existe un epimorfismo $P_2 \to K_1$ con P_2 proyectivo finitamente generado. Considerando lo anterior, junto con la sucesión exacta natural

$$0 \to Rr \to R \to R/Rr \to 0$$

podemos concluir que existe una sucesión exacta

$$P_2 \to P_1 \to P_0 \to R/Rr \to 0$$

con P_2, P_1, P_0 R-módulos proyectivos finitamente generados. Entonces, por la observación hecha en la proposición 5.3 de [CE56], tenemos un isomorfismo natural

$$\operatorname{Tor}_1^R(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/Z), R/Rr) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{Ext}_R^1(R/Rr, M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Por lo tanto, $\operatorname{Tor}_1^R\left(M^C, R/Rr\right) = 0$ para todo $r \in R$ si y sólo si $\operatorname{Ext}_R^1(R/Rr, M) = 0$ para todo $r \in R$, así que podemos concluir lo deseado. □

Nos encontramos en condiciones para abordar el objetivo de esta sección.

Sea $B = \bigoplus_{r \in R} R/rR$, por 2.32 existe un R-módulo derecho

$$D_0 = \bigcup_{\alpha < \lambda} A_\alpha$$

donde $\{A_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es una cadena continua, que satisface las siguientes condiciones:

(a) $A_0 = R$,

(b) para todo $\alpha < \lambda$ se tiene que $A_{\alpha+1}/A_\alpha \cong B^{(X_\alpha)}$, y

(c) $\operatorname{Ext}_R^1(B, D_0) = 0$.

Luego, se sigue de 2.35 que existe una sucesión exacta

$$0 \to R \to D_0 \to D_1 \to 0,$$

donde D_0 es un R-módulo derecho divisible y D_1 es un R-módulo derecho $\operatorname{Add}(B)$-filtrado. A continuación veremos que en caso de que R sea un p.p. anillo, el R-módulo $D_0^C \oplus D_1^C$ es un R-módulo cotilting que induce el par de cotorsión $\left(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{\perp_1}\right)$.

Ejemplo 4.44 (Clases cotilting de módulos libres de torsión)**.** Sea R un p.p. anillo y $T := D_0^C \oplus D_1^C$. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\_, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ a la sucesión exacta anterior, obtenemos la sucesión exacta de R-módulos

$$\eta : \qquad 0 \to D_1^C \to D_0^C \xrightarrow{\pi} R^C \to 0.$$

Probaremos que ${}^{\perp_1}T = \mathcal{F} = \mathrm{Cogen}\,(T)$, con lo cual podremos concluir que T es un módulo cotilting que genera a los módulos libres de torsión por 4.18(b).

Veamos que $\mathrm{Cogen}\,(T) \subseteq \mathcal{F}$. Por 4.43, sabemos que $D_0^C \in \mathcal{F}$; y como $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión por 4.37, es cerrada por submódulos y productos por 4.34. Por lo tanto, $D_0^C, D_1^C \in \mathcal{F}$ y

$$\mathrm{Cogen}\,(T) = \mathrm{Cogen}\left(D_0^C \oplus D_1^C\right) \subseteq \mathcal{F}.$$

Veamos que ${}^{\perp_1}T \subseteq \mathrm{Cogen}\,(T)$. Sea $M \in {}^{\perp_1}T$. Como R^C es un cogenerador inyectivo de $\mathrm{Mod}\,(R)$, existe un cardinal λ y un monomorfismo $\mu : M \to \left(R^C\right)^\lambda$. Sea (K, ν, ρ) el pullback de π^λ y μ. Dicho pullback induce una sucesión exacta

$$0 \to \left(D_0^C\right)^\lambda \to K \xrightarrow{\rho} M \to 0.$$

Pero como $M \in {}^{\perp_1}T \subseteq {}^{\perp_1}D_0^C$, tenemos que $\mathrm{Ext}_R^1\left(M, \left(D_0^C\right)^\lambda\right) = 0$, por lo que dicha sucesión se escinde. Por lo tanto, M es isomorfo a un submódulo de K, que a su vez es isomorfo a un submódulo de $\left(D_1^C\right)^\lambda$ debido a que ν es un monomorfismo. Lo que implica que $M \in \mathrm{Cogen}\,(T)$.

Finalmente observamos que $\mathcal{F} \subseteq {}^{\perp_1}T$. Sabemos que $F \in \mathcal{F}$ si y sólo si

$$\mathrm{Tor}_1^R\,(R/rR, F) = 0$$

para todo $r \in R$, lo cual se cumple si y sólo si

$$\mathrm{Tor}_1^R\,(B, F) = 0.$$

Ahora, por 1.11(b) tenemos que

$$\mathrm{Ext}_R^1\,(B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}_1^R\,(B, F)\,, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0.$$

Luego, $\mathrm{Add}\,(B) \subseteq {}^{\perp_1}F^C$, así que como D_1 es $\mathrm{Add}\,(B)$-filtrado, es en particular ${}^{\perp_1}F^C$-filtrado, lo que implica que $D_1 \in {}^{\perp_1}F^C$ por 2.35. De modo que al utilizar el isomorfismo natural de 1.11(b), tenemos que $\mathrm{Tor}_1^R\,(D_1, F) = 0$ ya que

$$0 = \mathrm{Ext}_R^1\,(D_1, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}_1^R\,(D_1, F)\,, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Finalmente, utilizando 1.12, tenemos que

$$\operatorname{Ext}^1_R\left(F, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{Tor}^R_1\left(D_1, F\right), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0.$$

Por lo tanto, $F \in {}^{\perp_1}D_1^C$. Por otro lado, es fácil ver que ${}^{\perp_1}D_1^C = {}^{\perp_1}T$. En efecto, dado $F \in {}^{\perp_1}D_1^C$, aplicando $\operatorname{Hom}_R(F, \_)$ a la sucesión exacta η, obtenemos la sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}^1_R\left(F, D_1^C\right) \to \operatorname{Ext}^1_R\left(F, D_0^C\right) \to \operatorname{Ext}^1_R\left(F, R^C\right),$$

de donde concluimos que $\operatorname{Ext}^1_R\left(F, D_0^C\right) = 0$, ya que $\operatorname{Ext}^1_R\left(F, R^C\right) = 0$ debido a que R^Ces inyectivo. Por lo tanto,

$${}^{\perp_1}T = \left({}^{\perp_1}D_0^C \cap {}^{\perp_1}D_1^C\right) = {}^{\perp_1}D_1^C \subseteq {}^{\perp_1}D_0^C.$$

De los teoremas 4.18 y 4.22 junto con el ejemplo anterior es inmediato el siguiente corolario.

Corolario 4.45. *Sea R un p.p. anillo. Se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) $\left(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{\perp_1}\right)$ *es un par de cotorsión cotilting;*

(b) la clase de los módulos libres de torsión $\mathcal{F}$ es precubriente especial;

(c) $\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{F}^{\perp_1}$*; y*

(d) $\operatorname{id}\left(\mathcal{F}^{\perp}\right) \leq 1$.

4.4.2. El módulo tilting de Fuchs

En el año de 1984, Fuchs estudió en [Fuc84] un módulo δ sobre un dominio entero R con las interesantes propiedades de que

(a) es generador de la clase de R-módulos divisibles,

(b) tiene dimensión proyectiva 1, y

(c) $\delta^{\perp}$ es la clase de R-módulos divisibles.

Dos años después, Facchini probó en [Fac87] que dicho R-módulo es un módulo tilting. A continuación expondremos algunos resultados relacionados con una versión generalizada de dicho módulo, realizada por Salce y Fuchs en [SF92].

Definición 4.46. Sea R un dominio entero.

(a) Decimos que un subconjunto $S \subseteq R$ es multiplicativo si $1 \in S$ y $st \in S$ para todo $s, t \in S$.

(b) Dado un subconjunto multiplicativo S, decimos que un R-módulo M es S-divisible si para todo $s \in S$ se satisface que $sM = M$.

Proposición 4.47. *Sean R un dominio entero, $M \in \operatorname{Mod}(R)$ y S un subconjunto multiplicativo. Se satisfacen los siguientes puntos:*

(a) [ML63] $\operatorname{Ext}^1_R(R/sR, M) \cong M/sM$ para todo $s \in R$.

(b) M es S-divisible si y sólo si $\operatorname{Ext}^1_R(R/sR, M) = 0$ para todo $s \in S$.

Demostración.

(a) Dado $s \in S$, consideramos la sucesión exacta

$$0 \to R \xrightarrow{f_s} R \xrightarrow{\pi} R/sR \to 0$$

donde $f_s(x) = xs$. Aplicando $\operatorname{Hom}_R(\_, M)$, obtenemos la sucesión exacta

$$\operatorname{Hom}_R(R, M) \to \operatorname{Hom}_R(R, M) \to \operatorname{Ext}^1_R(R/sR, M) \to \operatorname{Ext}^1_R(R, M),$$

donde $\operatorname{Ext}^1_R(R, \delta_S) = 0$ debido a que R es proyectivo. Luego, la sucesión exacta anterior es isomorfa a la sucesión

$$M \xrightarrow{g_s} M \to M/sM \to 0$$

donde $g_s(x) = xs$. Por lo tanto, $\operatorname{Ext}^1_R(R/sR, M) \cong M/sM$.

(b) Es inmediato del inciso anterior.

□

Ejemplo 4.48 (Módulos tilting de Fuchs)**.** Sea R un dominio entero y S un subconjunto multiplicativo de R. Sea F es el R-módulo libre, cuya base B consiste de las sucesiones finitas en S incluyendo la sucesión vacía, es decir

$$B := \omega \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$$

donde $\omega = ()$ denota a la sucesión vacía. Considerando el submódulo libre G de F generado por el conjunto

$$\{s_n(s_1, s_2, ..., s_n) - (s_1, ..., s_{n-1}) \mid s_1, ..., s_n \in S\}_{n=1}^{\infty} \cup \{s(s) - \omega \mid s \in S\},$$

definimos el R-módulo

$$\delta_S := F/G.$$

Para cada $x \in F$, denotaremos como $\bar{x}$ a la clase de x en δ_S.

Veamos que δ_S es un módulo 1-tilting.

T1 Observamos que como G es libre, δ_S es de dimensión proyectiva ≤ 1 por 2.53.

T2 El R-módulo δ_S tiene una $\operatorname{Add}\left(\bigoplus_{s\in S} R/sR\right)$-filtración dada por la cadena

$$\delta_0 = R\overline{\omega} \qquad \delta_n = \langle \overline{x} \mid x \in S^n \rangle .$$

Observamos que $\delta_0 \cong R$, mientras que

$$\delta_{n+1}/\delta_n \cong \left(\bigoplus_{s\in S} R/sR\right)^{(S^n)} .$$

Además, para todo $s \in S$ y $(s_1, ..., s_n) \in B$ tenemos que

$$\overline{(s_1, ..., s_n, s)s} = \overline{(s_1, ..., s_n)}$$

en δ_S. Por lo tanto,

$$s\delta_S = \delta_S \tag{4.B}$$

para todo $s \in S$. Es decir δ_S es S-divisible, lo que implica que $\delta_S^{(\lambda)}$ es S-divisible para todo cardinal λ. Así, podemos concluir que $\operatorname{Ext}^1_R\left(R/sR, \delta_S^{(\lambda)}\right) = 0$ para todo $s \in S$ y para todo cardinal λ.
Por lo tanto, δ_S es ${}^{\perp}\delta_S^{(\lambda)}$-filtrado para todo cardinal λ. Así que por 2.35 podemos concluir que $\operatorname{Add}(\delta_S) \subseteq \delta_S^{\perp}$.

T3 Afirmamos que la sucesión exacta

$$0 \to R \overset{f_{\overline{\omega}}}{\to} \delta_S \to \delta_S/R\overline{\omega} \to 0$$

es una $\operatorname{Add}(\delta_S)$-corresolución, donde $f_{\overline{\omega}}(x) = x\overline{\omega}$ para todo $x \in R$. Basta probar que $\delta_S/R\overline{\omega} \in \operatorname{Add}(\delta_S)$. Consideramos el morfismo $\mu : F \to \delta_S$ definido en los generadores como

$$\mu(\omega) = \overline{(1)} \quad \text{y} \quad \mu(s_1, ...s_n) = \overline{(1, s_1, ...s_n)} \ \forall (s_1, ..., s_n) \in B.$$

Dado que

$$\mu\left(s_n(s_1, s_2, ..., s_n) - (s_1, ..., s_{n-1})\right) = \overline{s_n(1, s_1, s_2, ..., s_n)} - \overline{(1, s_1, ..., s_{n-1})} = 0$$

para todo $(s_1, ..., s_n) \in B$, y

$$\mu(s(s) - \omega) = \overline{s(1, s)} - \overline{(1)} = \overline{(1)} - \overline{(1)} = 0;$$

μ induce un morfismo $\overline{\mu} : \delta_S \to \delta_S$ tal que $\overline{\mu}\pi = \mu$, donde $\pi : F \to \delta_S$ es la proyección natural. Además, claramente tenemos que $\operatorname{Ker}(\overline{\mu}) = R\overline{\omega}$, por lo que el primer teorema de isomorfismos da a lugar un monomorfismo $\nu : \delta_S/R\overline{\omega} \to \delta_S$.

Veamos que ν se escinde. En efecto, considerando el morfismo $\tau : F \to \delta_S/R\overline{\omega}$ definido en la base como

$$\tau(\omega) = 0 + R\overline{\omega} \quad \text{y} \quad \tau(s_1, ...s_n) = \overline{(s_2, ...s_n)} + R\overline{\omega} \quad \forall (s_1, ..., s_n) \in B.$$

Dado que

$$\tau\left(s_n(s_1, s_2, ..., s_n) - (s_1, ..., s_{n-1})\right) = \overline{s_n(s_2, ..., s_n)} - \overline{(s_2, ..., s_{n-1})} + R\overline{\omega} = 0 + R\overline{\omega}$$

para todo $(s_1, ..., s_n) \in B$, y

$$\tau(s(s) - \omega) = \overline{s\omega} - 0 + R\overline{\omega} = 0 + R\overline{\omega};$$

τ induce un morfismo $\overline{\tau} : \delta_S \to \delta_S/R\overline{\omega}$ tal que $\overline{\tau}\pi = \tau$, el cual satisface que $\tau\nu = 1$.

Utilizando la herramienta desarrollada podemos concluir los siguientes resultados:

Proposición 4.49. *Sean R un dominio entero, S un conjunto multiplicativo, $\mathcal{S}$ la clase de R-módulos S-divisibles y δ_S es módulo tilting de Fuchs asociado. Se satisfacen los siguientes enunciados:*

(a) $\delta_S^{\perp} = \mathrm{Gen}\,(\delta_S) = \mathrm{Gen}_2(\delta_S) = \mathcal{S}$, *y*

(b) $\mathcal{S}$ *es una clase preenvolvente especial corresolvente y* $\mathrm{pd}\left({}^{\perp_1}\mathcal{S}\right) \leq 1$.

Demostración.

(a) Por 4.18 basta probar que $\mathcal{S} = \mathrm{Gen}\,(\delta_S)$. Claramente tenemos que $\mathrm{Gen}\,(\delta_S) \subseteq \mathcal{S}$. Veamos que $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Gen}\,(\delta_S)$. Dado $M \in \mathcal{S}$, basta probar que para todo $a \in M$ existe $f_a : \delta_S \to M$ tal que $a \in \mathrm{Im}\,(f)_a$. Sea $a \in M$. Recordamos que δ_S tiene una $\mathrm{Add}\,(\bigoplus_{s\in S} R/sR)$-filtración

$$\delta_S = \bigcup_{i=0}^{\infty} \delta_i$$

donde $\delta_0 = R\overline{\omega} \cong R$. Consideramos el morfismo

$$\begin{aligned} f_0 :\delta_0 &\to M \\ r\overline{\omega} &\mapsto ra. \end{aligned}$$

Por recursión definimos $f_n : \delta_n \to M$ a partir de $f_{n-1} : \delta_{n-1} \to M$ para todo $n \geq 1$ de la siguiente manera. Considerando la sucesión exacta natural

$$0 \to \delta_{n-1} \overset{\mu_n}{\to} \delta_n \to \delta_n/\delta_{n-1} \to 0,$$

observamos que $\mathrm{Hom}_R(\mu_n, M)$ es sobreyectiva, debido a que $\mathrm{Ext}^1_R(\delta_n/\delta_{n-1}, M) = 0$ por 4.47. De modo que f_{n-1} se extiende a un morfismo $f_n : \delta_n \to M$. Tomando $f = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n$, se concluye lo deseado.

(b) Se sigue de 4.21.

□

Ejemplo 4.50. En caso de que $R = \mathbb{Z}$ y $S = \mathbb{Z} - \{0\}$, tenemos que $M := \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un R-módulo tilting equivalente a δ_S. En efecto, considerando la sucesión exacta natural

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

tenemos que M satisface T3; como M es un cogenerador inyectivo, satisface T2; y como $\mathbb{Z}$ es hereditario, satisface T1. Por lo tanto, M es 1-tilting. Además, sabemos que M genera la clase de los módulos divisibles (ver 10.28 de [Rot95]). Por lo tanto, M es equivalente a δ_S.

4.4.3. Módulos tilting de Bass

En el año de 1963, Bass probó en [Bas63] que un anillo R es n-Gorenstein si y sólo si la corresolución inyectiva minimal de R es de la forma

$$0 \to R \to \bigoplus_{P \in P_0} E(R/P) \to ... \to \bigoplus_{P \in P_n} E(R/P) \to 0$$

donde P_k es el conjunto de ideales primos de altura k. Ya hemos mencionado en ejemplos anteriores que esto implica que $\bigoplus_{i=0}^{n} \left(\bigoplus_{P \in P_i} E(R/P) \right)$ sea un módulo tilting.

Utilizando dicha corresolución para el caso $n = 1$, en [GT06] se construye una sucesión exacta

$$0 \to R \to R_S \to \bigoplus_{P \in S} E(R/P) \to 0$$

para todo $\emptyset \neq S \subseteq P_1$, y se prueba que el módulo $T_S = R_S \oplus \bigoplus_{P \in S} E(R/P)$ es tilting. Más aún, en [TP07] se prueba que todo módulo tilting de un anillo 1-Gorenstein es equivalente a uno de esta forma.

En esta sección generalizaremos lo hecho en [TP07] para construir una familia de módulos n-tilting sobre un anillo n-Gorenstein. Empezaremos por recordar algunas definiciones y resultados clásicos.

Definición 4.51. Sea R un anillo conmutativo.

(a) Decimos que R es n-Gorenstein si es noetheriano y $\mathrm{id}\,(R) \leq n$.

(b) Un ideal P de R es primo si $ab \in P$ implica que $a \in P$ o $b \in P$.

(c) La altura de un ideal primo P se define como la longitud máxima de una cadena de ideales primos de la forma

$$0 \subseteq P_0 \subseteq P_1 \subseteq \ldots \subseteq P_n = P.$$

Recordamos las siguientes propiedades de un anillo noetheriano conmutativo.

Proposición 4.52. *Sea R un anillo conmutativo noetheriano y P_n el conjunto de ideales primos de altura n. Se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) el coproducto de módulos inyectivos es inyectivo;

(b) un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de módulos inyectivos inescindibles es

$$\{E(R/P) \,|\, P \text{ es ideal primo}\};$$

(c) si R es un anillo n-Gorenstein, entonces la altura máxima de los ideales primos es n;

(d) si P y Q son ideales primos de altura máxima, entonces P y Q son ideales maximales;

(e) dado un ideal primo P y $s \in R - P$, la función

$$\begin{aligned} f_s : E(R/P) &\to E(R/P) \\ x &\mapsto sx \end{aligned}$$

es un automorphismo;

(f) para todo ideal primo P tenemos que

$$P = \{x \in R \,|\, xE(R/P) = 0\};$$

(g) si P y Q son ideales primos, $\operatorname{Hom}_R(E(R/P), E(R/Q)) \neq 0$ si y sólo si $P \subseteq Q$;

(h) si P y Q son ideales primos tales que $P - Q \neq \emptyset$, entonces

$$\operatorname{Hom}_R(E(R/P), E(R/Q)^{(\lambda)}) = 0$$

para cualquier cardinal λ;

(i) si P es un ideal primo y X es una familia de ideales primos tal que $P - Q \neq \emptyset$ para todo $Q \in X$, entonces

$$\operatorname{Hom}_R(E(R/P), \bigoplus_{Q \in X} E(R/Q) = 0.$$

Demostración. La prueba de las primeras cinco propiedades se pueden consultar en el teorema 18.4 de [Mat06]. La prueba de (f) y (g) se encuentra en el teorema 3.3.8 de [EO00].

Para (h), sabemos que existe $s \in P - Q$. Entonces, considerando el automorfismo

$$f_s : E(R/Q) \to E(R/Q)$$

de (e), observamos que para todo $g \in \operatorname{Hom}_R(E(R/P), E(R/Q)^{(\lambda)})$ tenemos que

$$f_s^{(\lambda)} g(x) = sg(x) = g(sx) = g(0) = 0$$

para todo $x \in E(R/P)$ por (f), lo que implica que $g = 0$ debido a que f_s es un automorfismo.

La última propiedad se prueba de manera semejante. Para todo ideal $Q \in X$ existe $s(Q) \in P - Q$. Consideramos el automorfismo

$$\varphi := \bigoplus_{Q \in X} f_{s(Q)} : \bigoplus_{Q \in X} E(R/Q) \to \bigoplus_{Q \in X} E(R/Q),$$

donde $f_{s(Q)}$ es el automorfismo de (e). Como para todo

$$g \in \operatorname{Hom}_R(E(R/P), \bigoplus_{Q \in X} E(R/Q)$$

tenemos que

$$\varphi g(x) = \varphi\left(g(x)_{Q \in X}\right) = (s(Q)g(x)_{Q \in X}) = (g(s(Q)x)_{Q \in X}) = 0$$

para todo $x \in E(R/P)$ por (f), podemos concluir que $g = 0$ debido a que φ es un automorfismo. □

Proposición 4.53. *[EO00] Sea R un anillo conmutativo n-Gorenstein. Entonces*

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_n = \mathcal{I}_n = \mathcal{I}.$$

Es decir, un R-módulo tiene dimensión proyectiva finita si y sólo si tiene dimensión inyectiva finita, y en tal caso la dimensión es menor o igual a n.

Demostración. Ver 9.1.10. de [EO00]. □

Ejemplo 4.54 (Módulos tilting de Bass)**.** Sea R un anillo n-Gorenstein. Consideramos el conjunto P_i consistente de los ideales primos de altura i para cada $i \in \{0, ..., n\}$. Por un resultado clásico de Bass (ver 18.8 de [Mat06]), se sabe que la coresolución inyectiva minimal de R es de la forma

$$0 \to R \to M_0 \xrightarrow{f_0} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \to 0,$$

donde $M_i = \bigoplus_{P \in P_i} E(R/P)$ para cada $i \in \{0, ..., n\}$. Consideramos

$$M_S := \bigoplus_{P \in S} E(R/P)$$

para un subconjunto $\emptyset \neq S \subseteq P_n$. Al considerar el pullback R_S de $f_n . M_{n-1} \to M_n$ con la inclusión natural $\iota : M_S \to M_n$, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to K_{n-1} \to R_S \to M_S \to 0$$

donde $K_{n-1} = \operatorname{Ker}(f_n)$. Así que al considerar la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & R_S \arrow[r] \arrow[d] & M_S \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_{n-1} \arrow[r, tail] & M_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & M_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & M_{S'} \arrow[r, equal] \arrow[d] & M_{S'} \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$0 \to R \to M_0 \to \dots \to M_{n-2} \to K_{n-1} \to 0,$$

podemos construir la sucesión exacta

$$\eta : \quad 0 \to R \to M_0 \to \dots \to M_{n-2} \to R_S \xrightarrow{f_n|_{R_S}} M_S \to 0.$$

Veamos que $T_S := \left(\bigoplus_{i=0}^{n-2} M_i \right) \oplus R_S \oplus M_S$ es un R-módulo n-tilting siempre y cuando $K_1, ..., K_{n-1} \in {}^{\perp}\left(R_S^{(\lambda)} \right)$ para todo cardinal λ.

T1 Sea $M_{S'} = \bigoplus_{P \in P_n - S} E(R/P)$. Sabemos que $M_{n-1}, M_{S'} \in \operatorname{Inj}(R)$, así que id $(R_S) \leq 1$ debido a que del pullback tenemos la sucesión exacta

$$\epsilon : \quad 0 \to R_S \to M_{n-1} \to M_{S'} \to 0.$$

Se sigue que id $(T_S) \leq 1$ debido a que $\left(\bigoplus_{i=0}^{n-2} M_i \right) \oplus M_S \in \operatorname{Inj}(R)$. Por lo tanto pd $(T_S) \leq n$ por 4.53.

T3 Por construcción conocemos la coresolución η.

T2 Dado que $M_S \in \operatorname{Inj}(R)$ y $M_i \in \operatorname{Inj}(R)$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$, basta probar que $T_S \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$ para todo cardinal λ, para concluir que $\operatorname{Add}(T_S) \subseteq T_S^{\perp}$.
Observamos los siguientes hechos:

(a) $M_S \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$ para todo cardinal λ.

En efecto, sea λ un cardinal. Observamos que

$$\operatorname{Hom}_R(E(R/P), M_{S'}^{(\lambda)}) = 0$$

para todo $P \in S$ por 4.52(i). Considerando la sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Hom}_R(E(R/P), M_{S'}^{(\lambda)}) \to \operatorname{Ext}_R^1\left(E(R/P), R_S^{(\lambda)}\right) \to \operatorname{Ext}_R^1\left(E(R/P), M_{n-1}^{(\lambda)}\right) = 0,$$

obtenida de aplicar $\operatorname{Hom}_R(E(R/P), \_)$ con $P \in S$ a la sucesión exacta $\epsilon^{(\lambda)}$, donde $\operatorname{Ext}_R^1\left(E(R/P), M_{n-1}^{(\lambda)}\right) = 0$ debido a que $M_{n-1}^{(\lambda)}$ es inyectivo; podemos concluir que $\operatorname{Ext}_R^1\left(E(R/P), R_S^{(\lambda)}\right) = 0$ para todo $P \in S$. Más aún, observando la sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}_R^k\left(E(R/P), M_{S'}^{(\lambda)}\right) \to \operatorname{Ext}_R^{k+1}\left(E(R/P), R_S^{(\lambda)}\right) \to \operatorname{Ext}_R^{k+1}\left(E(R/P), M_{n-1}^{(\lambda)}\right) = 0,$$

obtenida de aplicar $\operatorname{Hom}_R(E(R/P), \_)$ a la sucesión exacta $\epsilon^{(\lambda)}$, podemos concluir que $\operatorname{Ext}_R^i\left(E(R/P), R_S^{(\lambda)}\right) = 0$ para todo $i \geq 0$ y $P \in S$. Por lo tanto, $M_S \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$.

(b) $R_S \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$ si y sólo si $K_{n-1} \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$ para todo cardinal λ.
Ciertamente, sea λ un cardinal. Aplicando $\operatorname{Hom}_R(\_, R_S^{(\lambda)})$ a la sucesión exacta

$$0 \to K_{n-1} \to R_S \to M_S \to 0,$$

para todo $k \geq 1$ obtenemos la sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}_R^k\left(M_S, R_S^{(\lambda)}\right) \to \operatorname{Ext}_R^k\left(R_S, R_S^{(\lambda)}\right) \to \operatorname{Ext}_R^k\left(K_{n-1}, R_S^{(\lambda)}\right) \to \operatorname{Ext}_R^{k+1}\left(M_S, R_S^{(\lambda)}\right) = 0,$$

donde $\operatorname{Ext}_R^k\left(M_S, R_S^{(\lambda)}\right) = 0$ y $\operatorname{Ext}_R^{k+1}\left(M_S, R_S^{(\lambda)}\right) = 0$ por (a). Por lo tanto, $\operatorname{Ext}_R^k\left(R_S, R_S^{(\lambda)}\right) = 0$ si y sólo si $\operatorname{Ext}_R^k\left(K_{n-1}, R_S^{(\lambda)}\right) = 0$.

(c) $R_S, M_0, M_1, ..., M_{n-2} \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$ si y sólo si $K_1, ..., K_{n-1} \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$ para todo cardinal λ.
Sea λ un cardinal. Supongamos que $K_1, ..., K_{n-1} \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$. Al considerar las sucesiones exactas

$$0 \to R \to M_0 \to K_1 \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to K_i \to M_{i+1} \to K_{i+1} \to 0$$

para $i \in \{1, ..., n-2\}$, podemos concluir que $M_0, ..., M_{n-2} \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$ debido a que $R, K_1, ..., K_{n-1} \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$. Además por (b) sabemos que $R_S \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$.
Recíprocamente, supongamos que $R_S, M_0, ..., M_{n-2} \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$. Por (b) sabemos que $K_{n-1} \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$, así que al aplicar $\operatorname{Hom}_R(\_, R_S^{(\lambda)})$ a la sucesión

exacta
$$0 \to K_{n-2} \to M_{n-2} \to K_{n-1} \to 0,$$
para todo $k \geq 1$ obtenemos la sucesión exacta
$$0 = \operatorname{Ext}_R^k \left(M_{n-2}, R_S^{(\lambda)}\right) \to \operatorname{Ext}_R^k \left(K_{n-2}, R_S^{(\lambda)}\right) \to \operatorname{Ext}_R^{k+1} \left(K_{n-1}, R_S^{(\lambda)}\right) = 0.$$
Por lo tanto, $K_{n-2} \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$. Repitiendo el argumento anterior recursivamente podemos probar que $K_1, ..., K_{n-1} \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$.

(d) $T_S \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$ para todo cardinal λ si y sólo si $K_1, ..., K_{n-1} \in {}^{\perp}R_S^{(\lambda)}$.
Se sigue de (b) y (c) recordando que $T_S := \left(\bigoplus_{i=0}^{n-2} M_i\right) \oplus R_S \oplus M_S$.

Por lo tanto, T_S es un R-módulo n-tilting siempre y cuando $K_1, ..., K_{n-1} \in {}^{\perp}\left(R_S^{(\lambda)}\right)$ para todo cardinal λ.

Ejemplo 4.55 (El caso 1-Gorenstein)**.** Sea R un anillo conmutativo 1-Gorenstein. Por el ejemplo anterior se sigue que para todo $\emptyset \neq S \subseteq P_1$, el módulo
$$T_S = R_S \oplus \left(\bigoplus_{P \in P_1} E(R/P)\right)$$
es un módulo 1-tilting.

5 La dimensión finitista

Una dimensión homológica utilizada en el estudio de anillos es la dimensión global. Sin embargo se pueden encontrar ejemplos en los que la dimensión global no es lo suficientemente fina. Por esta razón se introdujeron las dimensiones finitistas de un anillo.

En este capítulo, siguiendo la visión de [ZH14], daremos una breve introducción a dichas dimensiones, así como a las conjeturas relacionadas con dichas dimensiones. Para después utilizar la teoría tilting desarrollada en el capítulo anterior para dar cotas y criterios de igualdad para estas dimensiones.

5.1. La dimensión finitista y sus conjeturas

Las dimensiones homológicas nacieron con el objetivo de dar una medida para decir que tan lejos está un módulo de cierta clase de módulos.

El caso clásico es cuando consideramos la clase $\mathrm{Proj}\,(R)$. En este caso hemos visto que $\mathrm{pd}\,(M) = 0$ si y sólo si $M \in \mathrm{Proj}\,(R)$. De esta manera podemos utilizar la dimensión proyectiva para caracterizar ciertas clases de anillos. Por ejemplo,

$$\mathrm{pd}\,(\mathrm{Mod}R) = 0 \text{ si y sólo si } R \text{ es semisimple y}$$
$$\mathrm{pd}\,(\mathrm{Mod}R) = 1 \text{ si y sólo si } R \text{ es hereditario.}$$

Incluso podemos citar el siguiente resultado para mostrar la utilidad de esta dimensión.

Teorema de Auslander-Buchsbaum-Serre [AB56, Ser55] Si V es una variedad algebraica sobre un campo algebraicamente cerrado y R es su anillo de coordenadas, entonces $\mathrm{pd}\,(\mathrm{Mod}R)$ es finita si y sólo si V es suave.

Pareciera que $\mathrm{pd}\,(\mathrm{Mod}R)$, llamada la dimensión global del anillo, es una buena medida para ver que tan sencilla es la categoría de módulos de R. Sin embargo, podemos encontrar anillos en los que esta medida no es de utilidad.

Por ejemplo, si tomamos $R = \mathbb{Z}_{p^2}$ para un primo p, entonces el R-módulo $p\mathbb{Z}_{p^2}$ tiene dimensión proyectiva infinita. En efecto, considerando la sucesión exacta

$$0 \to p\mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{\pi} p\mathbb{Z}_{p^2} \to 0$$

donde π es la proyección natural, podemos construir la resolución proyectiva

$$... \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{\pi} p\mathbb{Z}_{p^2} \to 0$$

donde $f : \mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_{p^2}$ es el morfismo definido como $f(a) = pa$. Observamos que la k-ésima sizigia de $p\mathbb{Z}_{p^2}$ en dicha resolución es isomorfa a $p\mathbb{Z}_{p^2}$ para toda $k \geq 0$. Por lo tanto, por 1.33 podemos concluir que $\mathrm{pd}\,(\mathbb{Z}_{p^2}) = \infty$, puesto que para todo $k \geq 1$ tenemos que

$$\mathrm{Ext}^n_R\,(p\mathbb{Z}_{p^2}, p\mathbb{Z}_{p^2}) \cong \mathrm{Ext}^1_R\,(p\mathbb{Z}_{p^2}, p\mathbb{Z}_{p^2}) \neq 0$$

puesto que la proyección natural $\mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{\pi} p\mathbb{Z}_{p^2}$ no se escinde. Por lo tanto, la dimensión global de R es infinita. Sin embargo, por el teorema de Prüfer-Baer (ver corolario 10.37 de [Rot95]), todo R-módulo es coproducto de submódulos cíclicos, por lo que podemos concluir que todo R-módulo es de la forma

$$(\mathbb{Z}_{p^2})^{(X_1)} \oplus (p\mathbb{Z}_{p^2})^{(X_2)}\,.$$

Así que la categoría de R-módulos es relativamente sencilla.

Por este motivo se consideran las siguientes dimensiones, que reciben el nombre de dimensión finitista pequeña y dimensión finitista:

$$\mathrm{findim}\,({}_R R) := \sup\{\mathrm{pd}\,(M) \mid M \text{ es un módulo finitamente generado con } \mathrm{pd}\,(M) < \infty\}$$

$$\mathrm{Findim}\,({}_R R) := \sup\{\mathrm{pd}\,(M) \mid M \text{ es un módulo con } \mathrm{pd}\,(M) < \infty\}$$

Claramente estas dimensiones son más refinadas que la global. Por ejemplo en el caso del anillo $R = \mathbb{Z}_{p^2}$ tenemos que $\mathrm{findim}\,({}_R R) = 0 = \mathrm{Findim}\,({}_R R)$.

Cabe mencionar que la dimensión finitista pequeña fue considerada implícitamente en la prueba del célebre teorema de Auslander-Buchsbaum-Serre. Mientras que Kaplansky sugirió el estudio de la dimensión finitista grande.

Es natural preguntarse si dichas dimensiones son siempre finitas o si siempre coinciden, por lo que Bass publicó estas preguntas en la década de 1960. La respuesta a dichas preguntas es negativa como se puede ver en [AB57, GR71]. Para el caso de álgebras de dimensión finita reciben el nombre de conjeturas de la dimensión finitista.

Conjeturas de la dimensión finitista Sea R un álgebra de dimensión finita sobre un campo k.

I $\mathrm{findim}\,({}_R R) = \mathrm{Findim}\,({}_R R)$;

II $\mathrm{findim}\,({}_R R) < \infty$.

Por otro lado, podemos definir de manera dual la dimensión finitista injectiva de la siguiente manera.

$$\mathrm{inj.\,findim}\,({}_R R) := \sup\{\mathrm{id}\,(M) \mid M \text{ es un módulo finitamente generado con } \mathrm{id}\,(M) < \infty\}$$

$$\text{inj. Findim}\,({}_R R) \ := \ \sup\{\text{id}\ (M) \mid M \text{ es un módulo con } \text{id}\ (M) < \infty\}$$

Cabe observar que en caso de que el anillo sea artiniano por la izquierda se satisfacen las siguientes igualdades.

Proposición 5.1. *Si R es un anillo artiniano a izquierda, entonces*

$$\begin{aligned} \text{findim}\,({}_R R) &= \sup\{\text{pd}\ (S)\ | S \textit{ es simple y } \text{pd}\ (S) < \infty \textit{ o } S = 0\} \\ \text{inj. findim}\,({}_R R) &= \sup\{\text{id}\ (S)\ | S \textit{ es simple y } \text{id}\ (S) < \infty \textit{ o } S = 0\}. \end{aligned}$$

Demostración. Dado que el anillo es artiniano, todo R-módulo izquierdo finitamente generado tiene serie de composición. Veamos que un R-módulo no nulo M con una serie de composición

$$M = M_k \supseteq ... \supseteq M_1 \supseteq M_0 = 0,$$

satisface que

$$\text{pd}\ (M) = \sup\{\text{pd}\ (M_i/M_{i-1}) \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

En efecto, lo mostraremos por inducción sobre k. Si $k = 1$, entonces

$$M = M_1 = M_1/0$$

por lo que la afirmación es verdadera. Supongamos nuestra hipótesis cuando $k = n$. Para $k = n + 1$ consideramos la sucesión exacta

$$0 \to M_n \to M_{n+1} \to M_{n+1}/M_n \to 0,$$

y concluimos por 2.53 que

$$\text{pd}\ (M) = \text{pd}\ (M_{n+1}) \leq \text{máx}\{\text{pd}\ (M_n), \text{pd}\ (M_{n+1}/M_n)\},$$

donde $\text{pd}\ (M_n) = \sup\{\text{pd}\ (M_i/M_{i-1}) \mid 1 \leq i \leq n\}$ por hipótesis de inducción. Por lo tanto,

$$\text{pd}\ (M) = \sup\{\text{pd}\ (M_i/M_{i-1}) \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

En particular, si M es un R-módulo finitamente generado tal que $\text{pd}\ (M) < \infty$ tenemos que

$$\text{pd}\ (M) \leq \sup\{\text{pd}\ (S)\ |S \text{ es simple y } \text{pd}\ (S) < \infty \text{ o } S = 0\}.$$

Por lo tanto, $\sup\{\text{pd}\ (S)\ |S \text{ es simple y } \text{pd}\ (S) < \infty \text{ o } S = 0\}$. □

5.2. Pares de cotorsión tilting

En lo que queda del capítulo utilizaremos los R-módulos tilting para dar cotas a las dimensiones finitistas y dar algunos resultados sobre éstas. Para ello utilizaremos la herramienta desarrollada en el capítulo 2, asociándole a cada R-módulo tilting y a cada R-módulo cotilting un par de cotorsión.

En efecto, por 2.27 y 2.37 sabemos que todo R-módulo tilting T induce un par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, donde $\mathcal{Y} = T^{\perp}$ y $\mathcal{X} = {}^{\perp}\mathcal{B}$. Así como todo R-módulo cotilting T induce un par de cotorsión completo y hereditario $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ con $\mathcal{X} =^{\perp} T$ y $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp}$ por 2.27 y 4.15.

Definición 5.2. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par de cotorsión. Decimos que

(a) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión tilting si existe un R-módulo tilting T tal que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es el par de cotorsión inducido por T,

(b) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión cotilting si existe un R-módulo cotilting T tal que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es el par de cotorsión inducido por T.

Podemos reformular los teoremas 4.21 y 4.22 de la siguiente manera, como se hizo en [HM10].

Teorema 5.3. *[HM10] Sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *un par de cotorsión hereditario y completo en* $\mathrm{Mod}\,(R)$ *con* $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *es un par de cotorsión tilting,*

(b) $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X}) < \infty$ *y* ω *es cerrado bajo coproductos, y*

(c) ω *es cerrado bajo coproductos,* $\mathrm{pd}\,(\omega) < \infty$ *y* $\mathcal{X} \subseteq \check{\omega}$*.*

Más aún, en tal caso se cumple que

$$\mathrm{pd}\,(T) = \mathrm{pd}\,(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X}) = \mathrm{coresdim}_{\mathrm{Add}(T)}\,(\mathcal{X}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathrm{Mod}\,(R)) = \mathrm{id}_{AddT}\,(\mathcal{X}) \quad ,$$

donde T es un R-módulo tilting asociado a $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*.*

Demostración. $(a) \Leftrightarrow (b)$ Es inmediato de 4.21, notando que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}\,(\mathcal{X})$ por 2.57.

$(b) \Leftrightarrow (c)$ Se sigue de *2.68.*

Las igualdades

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X}) = \mathrm{coresdim}_{\mathrm{Add}(T)}\,(\mathcal{X}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathrm{Mod}\,(R)) = \mathrm{id}_{\mathrm{Add}T}\,(\mathcal{X})$$

se siguen de 2.57 y 2.68, notando que $\mathrm{pd}\,(T) = \mathrm{pd}\,(\mathrm{Add}T)$. □

Podemos dar la versión cotilting del resultado anterior.

Teorema 5.4. *Sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *un par de cotorsión hereditario y completo en* $\mathrm{Mod}\,(R)$ *con* $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *es un par de cotorsión cotilting.*

(b) $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}) < \infty$ *y* ω *es cerrado bajo productos.*

(c) ω *es cerrado bajo productos,* $\mathrm{id}\,(\omega) < \infty$ *y* $\mathcal{Y} \subseteq \omega^{\wedge}$*.*

Más aún, en tal caso se cumple que

$$\mathrm{id}\,(T) = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}) = \mathrm{id}\,(\mathcal{Y}) = \mathrm{resdim}_{ProdT}(\mathcal{Y}) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathrm{Mod}\,(R)) = \mathrm{pd}_{ProdT}(\mathcal{Y}),$$

donde T *es un módulo cotilting asociado a* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*.*

Demostración. Dual al teorema anterior. □

5.3. Un módulo tilting que mide la dimensión finitista pequeña

En esta sección, utilizaremos nuestras herramientas creadas en el capítulo 2 para calcular las dimensiones finitistas. Para empezar, observamos que si $\mathcal{P}$ denota a la clase de los módulos de dimensión proyectiva finita, entonces

$$\mathrm{Findim}\,({}_R R) = \mathrm{pd}\,(\mathcal{P}).$$

Si además suponemos que R es un anillo con $\mathrm{Findim}\,(R) \leq n$, la clase de módulos de dimensión proyectiva finita coincide con la clase $\mathcal{P}_n$, por lo que

$$\mathrm{Findim}\,({}_R R) = \mathrm{pd}\,(\mathcal{P}_n).$$

Por lo tanto, será de nuestro interés estudiar los pares de cotorsión $\left(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n^{\perp}\right)$.

De manera similar, podemos estudiar la dimensión finitista pequeña considerando los pares de cotorsión generados por las clases

$$\mathcal{P}_n^{<\infty} := \{X \in \mathcal{P}_n \mid X \text{ es finitamente generado}\}.$$

Siendo de particular importancia los casos cuando estos pares sean pares tilting. Sin embargo, lo anterior no siempre ocurre.

Para asegurarnos que los pares de cotorsión estudiados sean pares de cotorsión tilting nos restringiremos a trabajar con anillos coherentes a izquierda. A continuación recordamos cómo se define dicha clase de anillos.

Definición 5.5. Decimos que un anillo es coherente a izquierda si todo submódulo finitamente generado de un R-módulo finitamente presentado es finitamente presentado.

La razón por la que trabajaremos con esta clase de anillos es porque la clase de R-módulos finitamente presentados tiene resoluciones de R-módulos proyectivos finitamente generados como muestra el siguiente lema.

Lema 5.6. *Si R un anillo coherente a izquierda, entonces todo módulo finitamente presentado M tiene una resolución*

$$... \to F_n \overset{f_n}{\to} ... \overset{f_1}{\to} F_0 \overset{f_0}{\to} M \to 0$$

donde F_i es un módulo libre finitamente generado para todo $i \geq 0$ y cada sizigia es finitamente presentada. Más aún, si M es un módulo con una resolución proyectiva

$$\eta : \quad ... \to P_n \overset{f_n}{\to} ... \overset{f_1}{\to} P_0 \overset{f_0}{\to} M \to 0,$$

donde P_i es finitamente generado para todo $i \geq 0$, entonces toda sizigia de M en η es finitamente presentada.

Demostración. Sea M es finitamente presentado. Existe una sucesión exacta

$$0 \to K_0 \to F_0 \to M \to 0$$

con F_0 libre finitamente generado y K_0 finitamente generado. Ahora, como R es coherente a izquierda tenemos que K_0 es finitamente presentado, por lo que existe una sucesión exacta

$$0 \to K_1 \to F_1 \to K_0 \to 0$$

con F_1 libre finitamente generado y K_1 finitamente generado. Recursivamente, construimos la sucesión buscada.

La segunda parte se sigue de que todo módulo proyectivo finitamente generado es finitamente presentado. □

Cabe observar que lo que afirma el lema anterior es que la clase de módulos finitamente presentados sobre un anillo coherente a izquierda es cerrada por sizigias de resoluciones que consistan de módulos finitamente generados. Introduciremos la siguiente definición para referirnos a dicha propiedad.

Definición 5.7. Sea $\mathcal{S}$ una clase de módulos finitamente presentados. Diremos que $\mathcal{S}$ es cerrada por sizigias pequeñas si toda resolución proyectiva

$$... \to P_n \overset{f_n}{\to} ... \overset{f_1}{\to} P_0 \overset{f_0}{\to} M \to 0$$

con $M \in \mathcal{S}$ y P_i finitamente generado, satisface que toda sizigia pertenece a $\mathcal{S}$.

Tenemos la siguiente variante del lema 2.25.

Lema 5.8. *Sea R un anillo coherente a izquierda y $\mathcal{X}$ una clase de R-módulos finitamente presentados. Si $\mathcal{X}$ es una clase cerrada por sizigias pequeñas, entonces:*

(a) $\mathcal{X}^{\perp_1} = \mathcal{X}^{\perp}$ *y* ${}^{\perp_1}\left(\mathcal{X}^{\perp_1}\right) = {}^{\perp}\left(\mathcal{X}^{\perp}\right)$, *y*

(b) el par de cotorsión generado por $\mathcal{X}$ es hereditario.

Demostración. Sea $\mathcal{X}$ una clase cerrada por sizigias pequeñas.

(a) Basta con probar que $\mathcal{X}^{\perp_1} \subseteq \mathcal{X}^{\perp}$. Para ello, consideramos $M \in \mathcal{X}^{\perp_1}$, $X \in \mathcal{X}$ y recordamos que existe una resolución proyectiva

$$... \to F_n \overset{f_n}{\to} ... \overset{f_1}{\to} F_0 \overset{f_0}{\to} X \to 0,$$

donde F_i es un módulo libre finitamente generado para todo $i \geq 0$ y cada sizigia es finitamente presentada. Ahora, por el lema del corrimiento tenemos que

$$\mathrm{Ext}_R^k\left(X, M\right) \cong \mathrm{Ext}_R^1\left(\mathrm{Im} f_{k-1}, M\right) = 0.$$

Por lo tanto, $M \in {}^{\perp}X$ para toda $X \in \mathcal{X}$, es decir $M \in {}^{\perp}\mathcal{X}$.
La prueba de ${}^{\perp_1}\left(\mathcal{X}^{\perp_1}\right) = {}^{\perp}\left(\mathcal{X}^{\perp}\right)$ se sigue de 2.25, puesto que $\mathcal{X}^{\perp_1} = \mathcal{X}^{\perp}$ es cerrada por cosizigias por ser coresolvente.

(b) Se sigue de 2.19 puesto que $\mathcal{X}^{\perp}$ es coresolvente.

□

Con lo anterior podemos presentar el resultado central que nos permitirá probar que los pares de cotorsión referidos son pares de cotorsión tilting.

Lema 5.9. *[EO00] Sean R un anillo coherente a izquierda, $n > 0$, M un R-módulo finitamente presentado y $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos. Entonces*

$$\mathrm{Ext}_R^k\left(M, \bigoplus_{i\in I} N_i\right) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Ext}_R^k\left(M, N_i\right)$$

para todo $k \geq 0$.

Demostración. Como M es finitamente presentado sabemos por la observación anterior que existe una sucesión exacta

$$... \to F_n \overset{f_n}{\to} ... \overset{f_1}{\to} F_0 \overset{f_0}{\to} M \to 0$$

donde F_i es un módulo libre finitamente generado. Luego, consideramos el complejo

$$\eta' : \quad 0 \to \mathrm{Hom}_R(M, \bigoplus_{i\in I} N_i) \to \mathrm{Hom}_R(F_0, \bigoplus_{i\in I} N_i) \to ... \to \mathrm{Hom}_R(F_n, \bigoplus_{i\in I} N_i) \to ...$$

obtenido de aplicar $\operatorname{Hom}_R(-, \bigoplus_{i\in I} N_i)$ a la sucesión anterior, y la suma directa

$$\eta' : \quad 0 \to \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(M, N_i) \to \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(F_0, N_i) \to \dots \to \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(F_n, N_i) \to \dots$$

de los complejos obtenidos al aplicar $\operatorname{Hom}_R(-, N_i)$ a la sucesión exacta anterior. Recordando que $F_i \cong R^{(X_i)}$ para algún conjunto X_i para todo $i \geq 0$, tenemos que

$$\operatorname{Hom}_R(F_i, \bigoplus_{i\in I} N_i) \cong \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right)^{(X_i)} \cong \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(F_i, N_i)$$

para todo $i \geq 0$. Como el isomorfismo anterior es natural, obtenemos que las homologías de los complejos η y η' son isomorfos. Por lo que podemos concluir lo deseado ya que la homología conmuta con sumas directas. □

Ahora podemos dar una aplicación interesante al teorema 4.21.

Lema 5.10. *[AHT02] Sean $n > 0$, R un anillo coherente a izquierda y $\mathcal{S}$ una clase de módulos finitamente presentados cerrada por sizigias pequeñas. Si $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es el par de cotosión generado por $\mathcal{S}$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}_n$;

(b) existe un módulos n-tilting T tal que $\mathcal{V} = T^{\perp}$.

Demostración. Dado que $\mathcal{S}$ es cerrado por sizigias pequeñas, por 5.8 sabemos que

$$\mathcal{S}^{\perp} = \mathcal{S}^{\perp_1} = \mathcal{V} \quad \text{y} \quad {}^{\perp_1}\mathcal{V} = {}^{\perp}\mathcal{V} = \mathcal{U}$$

y que $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es hereditario. Además, dado que $\mathcal{S}$ consiste de módulos finitamente generados, tiene un conjunto de representantes, pues todo módulo es isomorfo a un cociente de $R^{(\mathbb{N})}$. Así que por 2.36 podemos concluir que $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es completo. Por lo tanto, basta mostrar que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ es cerrado bajo coproductos para concluir lo deseado por 4.21. Para ello, dado que $\mathcal{U}$ es cerrado por coproductos, basta ver que $\mathcal{V}$ también lo es. Esto se sigue del lema anterior puesto que $\mathcal{S}$ consiste de módulos finitamente presentados. □

Cabe observar que este lema nos da una basta colección de pares de cotorsión tilting.

Ejemplo 5.11. [AHT02] Sea R un anillo coherente a izquierda. Por 5.6 sabemos que para todo $0 < i \leq n$, la clase

$$\mathcal{S} := \Omega^{i-1} \{X \in \mathcal{P}_n \mid X \text{ es finitamente presentado}\}$$

es cerrada por sizigias. Por lo tanto, en caso de que el anillo sea coherente a izquierda, tenemos por el lema anterior que el par de cotorsión generado por $\mathcal{S}$ es un par de cotorsión tilting.

Una aplicación interesante del lema anterior resulta al considerar el par de cotorsión generado por la clase de módulos finitamente presentados de dimensión proyectiva menor o igual a n.

Proposición 5.12. *[AHT02] Sean R un anillo coherente a izquierda y*

$$\mathcal{S}_n := \{X \in \mathcal{P}_n \mid X \text{ es finitamente presentado}\}$$

para todo $n > 0$. Entonces para todo $n > 0$ existe un módulo n-tilting T_n tal que $T_n^{\perp} = \mathcal{S}_n^{\perp_1}$. Más aún, si R es noetheriano a izquierda y $\operatorname{findim}({}_R R) \geq n$*, entonces* $\operatorname{pd}(T_n) = n$*.*

Demostración. Sea $n > 0$. Por 5.6 la clase de los módulos finitamente presentados con dimensión proyectiva menor o igual a n es cerrado por sizigias pequeñas en caso de que el anillo sea coherente a izquierda. Así que por 5.10 sabemos que existe un módulo n-tilting T_n tal que $T_n^{\perp} = \mathcal{V}$, donde $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ es el par de cotorsión generado por $\mathcal{S}$.

Ahora, en caso de que el anillo sea noetheriano, la clase de los R-módulos finitamente generados coincide con la clase de los R-módulos finitamente presentados. En caso de que $\operatorname{findim}(R) \geq n$, existe un módulo finitamente presentado M con $\infty > \operatorname{pd}(M) \geq n$. Por lo que podemos concluir que

$$n \leq \operatorname{pd}(M) \leq \operatorname{pd}(\mathcal{S}) \leq \operatorname{pd}(\mathcal{U}) \leq n$$

por 4.21. Por lo tanto, $\operatorname{pd}(T_n) = n$ por 5.3. □

Con ayuda del lema anterior alcanzamos nuestro objetivo al caracterizar los anillos noetherianos a izquierda tales que $\operatorname{findim}({}_R R) < \infty$.

Teorema 5.13. *[AHT02] Sea R un anillo noetheriano por la izquierda y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ el par de cotorsión generado por $\mathcal{S}$, que denota a la clase de R-módulos finitamente generados de dimensión proyectiva finita. Entonces* $\operatorname{findim}(R) < \infty$ *si y sólo si existe un R-módulo tilting tal que $T^{\perp} = \mathcal{B}$. En tal caso,* $\operatorname{findim}({}_R R) = \operatorname{pd}(T)$*.*

Demostración. Supongamos que existe un R-módulo tilting T con $\operatorname{pd}(T) = n$ tal que $T^{\perp} = \mathcal{B}$. Dado que el anillo es noetheriano, $\mathcal{S}$ es cerrado por sizigias pequeñas por 5.6, así que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_n$ por 5.10. Pero para todo R-módulo finitamente gnerado M de dimensión proyectiva finita tenemos que

$$M \in \mathcal{S} \subseteq {}^{\perp}\left(\mathcal{S}^{\perp}\right) = \mathcal{A}.$$

Por lo tanto, $\operatorname{findim}({}_R R) \leq n$.

Para el recíproco retomamos la notación utilizada en 5.12, y observamos que en caso de que $\operatorname{findim}({}_R R) = n$, se tiene que $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}$. Luego, por 5.12 existe un módulo tilting T de dimensión proyectiva n tal que $T^{\perp} = \mathcal{S}_n^{\perp} = \mathcal{S}^{\perp} = \mathcal{B}$. □

5.4. Un criterio para la igualdad de las dimensiones finitistas

En esta sección, utilizaremos la teoría construida para caracterizar cuando un anillo coherente a izquierda R satisface que $\mathrm{Findim}\left({}_RR\right) = \mathrm{findim}\left({}_RR\right)$.

Proposición 5.14. *[AHT02] Sean R un anillo y M un R-módulo n-tilting. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) la categoría $\mathrm{Add}\,(M)$ es cerrada por cokerneles de monomorfismos,

(b) $\mathcal{P} =^{\perp} \left(M^{\perp}\right)$.

Además, en tal caso $\mathrm{Findim}\left({}_RR\right) \leq n$.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Por 5.3 sabemos que $\mathrm{pd}\left({}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)\right) \leq n$, con esto tenemos que ${}^{\perp}\left(M^{\perp}\right) \subseteq \mathcal{P}$, por lo que basta probar que $\mathcal{P} \subseteq {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$. Para ello recordamos que $M^{\perp}$ es preenvolvente especial por 2.37, de modo que para todo $A \in \mathcal{P}$ existe una sucesión exacta

$$0 \to A \to X \to Y \to 0$$

con $X \in M^{\perp}$ y $Y \in {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$. Ahora, por 2.53 podemos concluir que $X \in \mathcal{P}$ ya que $A, Y \in \mathcal{P}$. Luego, por 4.17 existe una sucesión exacta

$$0 \to M_{m+1} \xrightarrow{f} M_m \to \ldots \to M_0 \to X \to 0$$

con $M_i \in \mathrm{Add}\,(M)$ para todo $0 \leq i \leq m+1$, lo que implica que $X \in \mathrm{Add}\,(M)$ por hipótesis. Finalmente, como ${}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$ es resolvente y $X \in \mathrm{Add}\,(M) \subseteq {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$ por 4.18, al igual que Y, podemos concluir que $A \in {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$-

$(b) \Rightarrow (a)$ Por 4.18 sabemos que $\mathrm{Add}\,(M) = \mathcal{P} \cap M^{\perp}$, lo que implica que $\mathrm{Add}\,(M)$ es cerrado por conúcleos de monomorfismos puesto tanto $\mathcal{P}$ como $M^{\perp}$ lo son.

Ahora, en caso de que satisfaga alguno de estos puntos, como $\mathrm{pd}\left({}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)\right) = n$ por 5.3 y $\mathcal{P} = {}^{\perp}\left(M^{\perp}\right)$, se sigue que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n$. Por lo tanto, $\mathrm{Findim}\left({}_RR\right) \leq n$. □

Ahora podemos caracterizar cuando las dimensiones finitistas grande y pequeña coinciden cuando el anillo es coherente a izquierda.

Teorema 5.15. *[AHT02] Sean R un anillo coherente a izquierda, $\mathcal{S}$ es la clase de los módulos finitamente presentados de dimensión proyectiva finita y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ el par de cotorsión generado por $\mathcal{S}$. Los siguientes enuciados son equivalentes:*

(a) $\operatorname{Findim}({}_RR) < \infty$ *y* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S})$*;*

(b) $\operatorname{findim}({}_RR) < \infty$ *y* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S})$*;*

(c) existe un módulo n-tilting T tal que $\mathcal{B} = T^{\perp}$ y $\operatorname{Add}(T)$ *es cerrado por conúcleos de monomorfismos; y*

(d) $\mathcal{A} = \mathcal{P}$*.*

Además, en caso de que se cumpla alguna de estas condiciones

$$\operatorname{Findim}({}_RR) = \operatorname{findim}({}_RR) \leq n.$$

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Es trivial.

$(b) \Rightarrow (d)$ Supongamos que $\operatorname{findim}({}_RR) < \infty$ y $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S})$. Como $R \in \mathcal{S}$, se sigue de 2.39 que $\mathcal{A}$ consiste de los R-módulos que son sumandos directos de los R-módulos $\mathcal{S}$-filtrados. En particular, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$. Además, como $\operatorname{findim}({}_RR) = k < \infty$ tenemos que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}_k$. Así que por 2.50 tenemos que $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{P}_k) \subseteq \mathcal{P}_k$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_k$.

$(d) \Rightarrow (a)$ Supongamos que $\mathcal{A} = \mathcal{P}$. Como $R \in \mathcal{S}$, se sigue de 2.39 que todo elemento de $\mathcal{P}$ es sumando directo de un R-módulo $\mathcal{S}$-filtrado.

Además, como $\mathcal{P}$ es cerrado por coproductos podemos concluir que $\operatorname{Findim}({}_RR) < \infty$. En efecto, si suponemos que $\operatorname{Findim}({}_RR) = \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un R-módulo M_n tal que $\operatorname{pd}(M_n) \geq n$. Así que

$$\operatorname{pd}\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) = \infty,$$

lo cual contradice que $\mathcal{P}$ sea cerrado por coproductos.

$(b) \Rightarrow (c)$ Dado que $\operatorname{findim}({}_RR) < \infty$, existe $k \geq 0$ tal que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_k$, donde

$$\mathcal{S}_k := \{X \in \mathcal{P}_k \mid X \text{ es finitamente presentado}\}.$$

Así que por 5.12 existe un R-módulo k-tilting T tal que $T^{\perp} = \mathcal{B}$. Además como $(a) \Rightarrow (c)$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}$. Así que por 5.14 tenemos que $\operatorname{Add}(T)$ es cerrado por conúcleos de monomorfismos.

$(c) \Rightarrow (d)$ Supongamos que existe un R-módulo tilting T tal que $T^{\perp} = \mathcal{B}$ y $\operatorname{Add}(T)$ sea cerrado por conúcleos de monomorfismos. Por 5.14 sabemos que

$$\mathcal{P} = {}^{\perp}\left(T^{\perp}\right) = {}^{\perp}\mathcal{B} = \mathcal{A}.$$

Finalmente, en caso de que R satisfaga algunos de los puntos anteriores. Tenemos que $\operatorname{Findim}({}_RR) = n$ y $\operatorname{findim}({}_RR) = k$ para algún $\infty > n \geq k \geq 0$, por lo que existe un

R-módulo M tal que pd $(M) = n$ y $\mathcal{S} = \mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{P}_k$. Entonces, se sigue de 2.50, que todo R-módulo $\mathcal{S}$-filtrado pertenece a $\mathcal{P}_k$ por ser $\mathcal{P}_k$-filtrado. Ahora, también sabemos que $\mathcal{P}$ consiste de sumandos directos de R-módulos $\mathcal{S}$-filtrados, lo que implica que pd $(M) \leq k$ por el razonamiento anterior. Por lo tanto, findim $({}_RR) = \text{Findim}\,({}_RR)$. □

5.5. Cotas para la Dimensión Finitista

Se ha visto en la sección 2 que un par de cotorsión tilting $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par de cotorsión completo y hereditario tal que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) < \infty$, al igual que un par de cotorsión cotilting $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ que es hereditario, completo y que $\text{id}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) < \infty$. En esta sección veremos que un par de cotorsión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ satisfaciendo que $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) < \infty$ o que $\text{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}) < \infty$ brinda cotas atractivas para las dimensiones finitistas.

Comenzaremos por expresar las dimensiones finitistas en términos de dicho par de cotorsión siguiendo los pasos de [HM10].

Lema 5.16. *[HM10] Sean* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *un par de cotorsión completo y hereditario en* $\text{Mod}\,(R)$ *con* $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ *. En caso de que* $\text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) < \infty$ *y* $\alpha = \text{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{P})$*. Se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) $\alpha = \text{resdim}_{\mathcal{X}}(\hat{\omega}) = \text{resdim}_{\omega}(\hat{\omega}) = \text{pd}_{\omega}(\mathcal{P}) \leq \text{pd}\,(\hat{\omega})$.

(b) $\text{pd}\,(\hat{\omega}) = \text{Findim}\,({}_RR)$.

En caso de que $\text{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}) < \infty$ *y* $\alpha' = \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{I})$*. Se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) $\alpha' = \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}(\omega^{\vee}) = \text{coresdim}_{\omega}(\omega^{\vee}) = \text{id}_{\omega}(\mathcal{I}) \leq \text{id}\,(\omega^{\vee})$.

(b) $\text{id}\,(\omega^{\vee}) = \text{inj. Findim}\,({}_RR)$.

Demostración. Probaremos la primera parte, la prueba de la segunda es dual.

(a) Sea $M \in \mathcal{P}$. Por 2.70(b) tenemos que $\text{resdim}_{\mathcal{X}}(M) = \text{pd}_{\mathcal{Y}}(M)$. Más aún, dado que $\text{pd}\,(\mathcal{X}) = \text{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) < \infty$ por 2.68 y que $M \in \mathcal{P}$, si tomamos una sucesión exacta

$$0 \to M \to B \to A \to 0$$

con $A \in \mathcal{X}$ y $B \in \mathcal{Y}$, se tiene que $B \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Y} = \hat{\omega}$ por 2.70(b) (la cual existe por ser $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par completo). Además, por 2.53 tenemos que

$$\text{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \text{pd}_{\mathcal{Y}}(B) \leq \text{pd}_{\mathcal{Y}}(\hat{\omega}).$$

Lo cual prueba por 2.70(b) que $\alpha = \text{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{P}) \leq \text{pd}_{\mathcal{Y}}(\hat{\omega})$.
Por otro lado, dado que $\hat{\omega} \subseteq \mathcal{P}$ tenemos que $\text{resdim}_{\mathcal{X}}(\hat{\omega}) \leq \alpha$. Por lo que

$$\text{resdim}_{\mathcal{X}}(\hat{\omega}) \leq \alpha = \text{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{P}) \leq \text{pd}_{\mathcal{Y}}(\hat{\omega}),$$

pero como $\hat{\omega} = \mathcal{P} \cap \mathcal{B}$ tenemos que $\text{resdim}_{\mathcal{X}}\,(\hat{\omega} =)\,\text{pd}_{\mathcal{Y}}\,(\hat{\omega})$ por 2.70(2), así que

$$\text{resdim}_{\mathcal{X}}\,(\hat{\omega}) = \alpha = \text{pd}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{P}) = \text{pd}_{\mathcal{Y}}\,(\hat{\omega}) \leq \text{pd}\;(\hat{\omega})\,.$$

Finalmente, por 2.67 se obtiene que

$$\alpha = \text{resdim}_{\mathcal{X}}\,(\hat{\omega}) = \text{resdim}_{\omega}\,(\hat{\omega}) = \text{pd}_{\omega}\,(\mathcal{P}) \leq \text{pd}\;(\hat{\omega})\,.$$

(b) Por 2.70(d) sabemos que $\hat{\omega} = \mathcal{P} \cap \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}$, así que

$$\text{pd}\;(\hat{\omega}) \leq \text{pd}\;(\mathcal{P}) =: \text{Findim}\,({}_R R)\,.$$

Luego, para probar la otra desigualdad se observa que para todo $M \in \mathcal{P}$, por el razonamiento anterior existe una sucesión exacta

$$0 \to M \to B \to A \to 0$$

con $A \in \mathcal{X}$ y $B \in \hat{\omega}$. Así que por 2.53 tenemos que $\text{pd}\;(M) \leq \text{máx}\,\{\text{pd}\;(B)\,, \text{pd}\;(A) - 1\}$. Pero como $\text{pd}\;(\omega) = \text{pd}\;(\mathcal{X})$ por 2.68, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Findim}\,({}_R R) := \text{pd}\;(\mathcal{P}) &\leq \text{máx}\,\{\text{pd}\;(\hat{\omega})\,, \text{pd}\;(\mathcal{A}) - 1\} \\ &\leq \text{máx}\,\{\text{pd}\;(\hat{\omega})\,, \text{pd}\;(\omega) - 1\} \\ &\leq \text{pd}\;(\hat{\omega}) \end{aligned}$$

ya que $\omega \subseteq \hat{\omega}$.

□

Teorema 5.17. *[HM10] Sean* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *un par de cotorsión completo y hereditario,*

$$\alpha = \text{resdim}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{P})\,,\; \beta = \text{resdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{P}^{<\infty})\,,\; \alpha' = \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{I}) \;\; y\; \beta' = \text{coresdim}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{I}^{<\infty})\,.$$

En caso de que $\text{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X}) < \infty$*, se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) $\alpha \leq \text{Findim}\,({}_R R) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X}) + \alpha$.

(b) $\beta \leq \text{findim}\,({}_R R) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X}) + \beta$.

En caso de que $\text{id}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{Y}) < \infty$*, se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) $\alpha' \leq \text{inj.\,Findim}\,({}_R R) \leq \text{id}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{Y}) + \alpha'$.

(b) $\beta' \leq \text{inj.\,findim}\,({}_R R) \leq \text{id}_{\mathcal{Y}}\,(\mathcal{Y}) + \beta'$.

Demostración. Probaremos el primer enunciado, la prueba del segundo es dual.

(a) Por el lema anterior se tiene que $\alpha \leq \text{Findim}\,({}_R R)$, por lo que basta probar que $\text{Findim}\,({}_R R) \leq \text{pd}_{\mathcal{X}}\,(\mathcal{X}) + \alpha$, lo cual se cumple por 2.70(c).

(b) Por 2.70(b) tenemos que

$$\beta = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}\left(\mathcal{P}^{<\infty}\right) \leq \mathrm{pd}\ \left(\mathcal{P}^{<\infty}\right) := \mathrm{findim}\left({}_R R\right),$$

y por 2.70(c) tenemos que

$$\mathrm{findim}\left({}_R R\right) := \mathrm{pd}\ \left(\mathcal{P}^{<\infty}\right) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{X}\right) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{P}^{<\infty}\right) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{X}\right) + \beta.$$

□

Como corolario obtenemos un criterio de finitud para las dimensiones finitistas.

Corolario 5.18. *[HM10] Sea R un anillo.*

(a) Los siguientes enunciados son equivalentes:

(a1) $\mathrm{Findim}\left({}_R R\right) < \infty$*,*

(a2) existe un par de cotorsión hereditario y completo $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ que satisface las desigualdades $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{X}\right) < \infty$ *y* $\alpha = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{P}\right) < \infty$*,*

(a3) todo par de cotorsión hereditario y completo $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ con $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{X}\right) < \infty$ *cumple que* $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{P}\right) < \infty$*.*

(b) Los siguientes enunciados son equivalentes:

(b1) $\mathrm{findim}\left({}_R R\right) < \infty$*,*

(b2) existe un par de cotorsión hereditario y completo $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ que satisface las desigualdades $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{X}\right) < \infty$ *y* $\beta = \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{P}^{<\infty}\right) < \infty$*,*

(b3) todo par de cotorsión hereditario y completo $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ con $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{X}\right) < \infty$ *cumple que* $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{P}^{<\infty}\right) < \infty$*.*

(c) Los siguientes enunciados son equivalentes:

(c1) $\mathrm{inj.Findim}\left({}_R R\right) < \infty$*,*

(c2) existe un par de cotorsión hereditario y completo $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tal que $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}\left(\mathcal{Y}\right) < \infty$ *y* $\alpha' = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\left(\mathcal{I}\right) < \infty$*,*

(c3) todo par de cotorsión hereditario y completo $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ con $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}\left(\mathcal{Y}\right) < \infty$ *cumple que* $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\left(\mathcal{I}\right) < \infty$*.*

(d) Los siguientes enunciados son equivalentes:

(d1) $\mathrm{inj.findim}\left({}_R R\right) < \infty$*,*

(d2) existe un par de cotorsión hereditario y completo $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tal que $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}\left(\mathcal{Y}\right) < \infty$ *y* $\beta' = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}\left(\mathcal{I}^{<\infty}\right) < \infty$*,*

(d3) todo par de cotorsión hereditario y completo $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *con* $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}) < \infty$ *cumple que* $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{I}^{<\infty}) < \infty$.

Demostración. Probaremos los primeros dos enunciados. La prueba de los enunciados (c) y (d) es dual.

Las implicaciones $(a2) \Rightarrow (a1)$, $(a1) \Rightarrow (a3)$, $(b2) \Rightarrow (b1)$ y $(b1) \Rightarrow (b3)$ se siguen de 5.17, por lo que basta probar $(a3) \Rightarrow (a2)$ y $(b3) \Rightarrow (b2)$.

Para ello, basta mostrar que existe un par de cotorsión hereditario y completo $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ con $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) < \infty$, pero dicho par siempre existe. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ hemos visto que el par $(\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n^{\perp})$ es hereditario y completo, así que $\mathrm{pd}_{\mathcal{P}_n}(\mathcal{P}_n) = \mathrm{pd}\,(\mathcal{P}_n) \leq n$. □

Ahora comenzaremos nuestro análisis. Recordamos que la primer conjetura de la dimensión finitista afirma que $\mathrm{Findim}\,({}_RR) = \mathrm{findim}\,({}_RR)$. Dicha conjetura es falsa para anillos arbitrarios. De hecho Smalø mostró en [Sma00] que la diferencia entre $\mathrm{Findim}\,({}_RR)$ y $\mathrm{findim}\,({}_RR)$ puede ser tan grande como sea deseado. A continuación veremos un resultado que acota la diferencia entre dichos valores.

Teorema 5.19. *[HM10] Sean R noetheriano a izquierda con* $\mathrm{findim}\,({}_RR) < \infty$ *y* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *el par de cotorsión generado por* $\mathcal{P}^{<\infty}$ *y* $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. *Los siguientes enunciados se satisfacen:*

(a) $\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{P}) - \mathrm{findim}\,({}_RR) \leq \mathrm{Findim}\,({}_RR) - \mathrm{findim}\,({}_RR) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{P})$.

(b) $\mathrm{Findim}\,({}_RR) = \mathrm{findim}\,({}_RR)$ *si y sólo si* $\mathrm{pd}\,(\omega) = \mathrm{pd}\,(\omega^{\wedge})$.

Demostración. Observamos que como $\mathrm{findim}\,(R) < \infty$, existe un módulo tilting T tal que $T^{\perp} = \mathcal{Y}$ y $\mathrm{findim}\,({}_RR) = \mathrm{pd}\,(T) = \mathrm{pd}\,(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ por 5.13 y 5.3.

(a) Por 5.17 sabemos que

$$\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{P}) \leq \mathrm{Findim}\,({}_RR) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{P}).$$

Pero hemos observado que $\mathrm{findim}\,({}_RR) = \mathrm{pd}\,(\mathcal{X})$. Así que tenemos la desigualdad

$$\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{P}) \leq \mathrm{Findim}\,({}_RR) \leq \mathrm{findim}\,({}_RR) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{P})$$

que es equivalente a la desigualdad buscada.

(b) Debido a que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) < \infty$, sabemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}\,(\omega)$ por 2.68(b), y que $\mathrm{pd}\,(\omega^{\wedge}) = \mathrm{Findim}\,({}_RR)$ por 5.16. Pero $\mathrm{findim}\,({}_RR) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$. Por lo tanto, $\mathrm{Findim}\,({}_RR) = \mathrm{findim}\,({}_RR)$ si y sólo si $\mathrm{pd}\,(\omega) = \mathrm{pd}\,(\omega^{\wedge})$.

□

Corolario 5.20. *[HM10] Sea T un módulo tilting. Si R es noetheriano a izquierda, entonces*

$$\operatorname{Findim}\left({}_RR\right) \leq \operatorname{pd}\left(T\right) + \operatorname{id}\left(T\right).$$

Demostración. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ el par de cotorsión generado por T. Cabe recordar que

$$\omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \operatorname{Add}(T) \text{ y que } \operatorname{pd}\left(T\right) = \operatorname{pd}\left(\mathcal{X}\right) = \operatorname{pd}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{X}\right).$$

Considerando estas igualdades, por 5.17 tenemos que

$$\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{P}\right) \leq \operatorname{Findim}\left({}_RR\right) \leq \operatorname{pd}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{X}\right) + \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{P}\right) = \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{P}\right) + \operatorname{pd}\left(T\right),$$

pero por 5.16 sabemos que $\operatorname{pd}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{X}\right) = \operatorname{pd}_{\operatorname{Add}T}\left(\mathcal{P}\right)$, así que

$$\operatorname{pd}_{\mathcal{X}}\left(\mathcal{X}\right) = \operatorname{pd}_{\operatorname{Add}T}\left(\mathcal{P}\right) = \operatorname{id}_{\mathcal{P}}\left(\operatorname{Add}T\right) \leq \operatorname{id}\left(\operatorname{Add}T\right).$$

Finalmente, como R es noetheriano podemos concluir que $\operatorname{id}\left(T\right) = \operatorname{id}\left(\operatorname{Add}T\right)$. En efecto, en caso de que $\operatorname{id}\left(T\right) = \infty$, la afirmación es trivial puesto que $\operatorname{id}\left(T\right) \leq \operatorname{id}\left(\operatorname{Add}T\right)$ debido a que $T \in \operatorname{Add}(T)$. En caso de que $\operatorname{id}\left(T\right) = k < \infty$, existe una coresolución inyectiva

$$0 \to T \to I_0 \to \ldots \to I_k \to 0.$$

Así que al considerar el coproducto de α copias de la coresolución anterior, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to T^{(\alpha)} \to I_0^{(\alpha)} \to \ldots \to I_k^{(\alpha)} \to 0,$$

que es una coresolución inyectiva de $T^{(\alpha)}$, debido a que en un anillo noetheriano el coproducto de módulos inyectivos es inyectivo. Por lo tanto, $\operatorname{id}\left(\operatorname{Add}T\right) = \operatorname{id}\left(T\right)$. $\square$

5.6. Ejemplos

5.6.1. Acotando la dimensión finitista con la cotorsión de Warfield

En esta sección utilizaremos el trabajo hecho en 4.4.1. Para ello consideraremos un p.p. anillo R y la clase de módulos libres de torsión

$$\mathcal{F} := \left\{ M \in \operatorname{Mod}(R) \mid \operatorname{Tor}_1^R\left(R/rR, M\right) = 0 \quad \forall r \in R \right\}.$$

En este contexto, probamos en 4.45 que $\left(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{\perp_1}\right)$ es un par de cotorsión 1-cotilting.

A continuación aprovecharemos los resultados de este capítulo para acotar la dimensión finitista inyectiva con ayuda de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{\perp_1}$. Para ello mencionaremos algunos resultados conocidos de la clase $\mathcal{F}^{\perp_1}$.

Definición 5.21. Los R-módulos de la clase $\mathcal{F}^{\perp_1}$ reciben el nombre de módulos de cotorsión de Warfield. Por ello, denotaremos $\mathcal{W} := \mathcal{F}^{\perp_1}$.

Para comodidad del lector reformulamos 4.45 de la siguiente manera.

Corolario 5.22. *Si R es un p.p. anillo, entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(a) $(\mathcal{F}, \mathcal{W})$ *es un par de cotorsión cotilting;*

(b) $\mathcal{F}$ *es precubriente especial;*

(c) $\mathcal{W}$ *es preenvolvente especial;*

(d) ${}^{\perp_1}\mathcal{W} = {}^{\perp}\mathcal{W}$*;*

(e) $\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{F}^{\perp_1}$*; y*

(f) $\mathrm{id}\,(\mathcal{W}) \leq 1$.

Se sigue de 5.17 el siguiente resultado.

Proposición 5.23. *Si R es un p.p. anillo, entonces se cumplen las siguientes desigualdades;*

(a) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{W}}\,(\mathcal{I}) \leq \mathrm{inj.\,Findim}\,({}_RR) \leq 1 + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{W}}\,(\mathcal{I})$*, y*

(b) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{W}}\,(\mathcal{I}^{<\infty}) \leq \mathrm{inj.\,findim}\,({}_RR) \leq 1 + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{W}}\,(\mathcal{I}^{<\infty})$.

Podemos refinar el resultado anterior con ayuda del siguiente lema.

Lema 5.24. *Si* $\mathrm{pd}\,(\mathcal{F}) \leq n+1$*, entonces $\mathcal{W}$ es cerrado por n-cocientes.*

Demostración. Se sigue de 1.33(a). □

Ahora, en caso de que $\mathcal{W}$ sea cerrado por n-cocientes, es claro que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{W}}\,(M) \leq n$. Por lo tanto, obtenemos la siguiente cota de la dimensión finitista.

Proposición 5.25. *Si R es un p.p. anillo y* $\mathrm{pd}\,(\mathcal{F}) \leq n+1$*, entonces se cumplen las siguientes desigualdades;*

(a) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{W}}\,(\mathcal{I}) \leq \mathrm{inj.\,Findim}\,({}_RR) \leq n+1$*, y*

(b) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{W}}\,(\mathcal{I}^{<\infty}) \leq \mathrm{inj.\,findim}\,({}_RR) \leq n+1$.

5.6.2. Acotando la dimensión finitista con módulos S-divisibles

En esta subsección nos remitimos al ejemplo 4.4.2, donde, considerando un dominio entero R, un subconjunto multiplicativo S y la clase $\mathcal{S}$ de módulos S-divisibles, probamos que existe un módulo tilting δ_S tal que $\delta_S^{\perp} = \operatorname{Gen}(\delta_S) = \operatorname{Gen}_2(\delta_S) = \mathcal{S}$. A continuación estudiaremos el par de cotorsión $\left({}^{\perp}\mathcal{S}, \mathcal{S}\right)$ con el fin de acotar la dimensión finitista.

A lo largo de esta sección consideraremos un dominio entero R, un subconjunto multiplicativo S y la clase $\mathcal{S}$ de módulos S-divisibles. Además utilizaremos la siguiente notación.

Definición 5.26. Dado un anillo R denotamos como $\mathcal{G}(R)$ a la clase de R-módulos que admiten una resolución proyectiva de módulos proyectivos finitamente generados.

Siguiendo los pasos de Silvana Bazzoni en [Baz09] podemos probar lo siguiente.

Lema 5.27. *Dado $s \in S$ y $m \in \mathbb{Z}^+$ sea $u_m : R^m \to R^m$ el morfismo definido como $u(x) = sx$. Entonces, para todo $D \in \mathcal{S}$ el morfismo $\operatorname{Hom}_R(u_m, D)$ es suprayectivo.*

Demostración. Sea $g \in \operatorname{Hom}_R(R, D)$. Como D es S-divisible y $s \in S$, existe $f(1) \in D$ tal que $g(1) = sf(1)$. La función $f : R \to D$ definida como $f(x) = xf(1)$ es un morfismo de R-módulos tal que $g(x) = xg(1) = xsf(1) = sf(x)$. Por lo tanto, $\operatorname{Hom}_R(u, D)$ es suprayectivo para $m = 1$. Para $m > 1$, el resultado se sigue de que $u_m = \oplus_{i=1}^m u_1$. $\square$

Proposición 5.28. *Sea*

$$Q := RS^{-1} = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in R,\, s \in S \right\}.$$

Si $\operatorname{pd}_Q(\mathcal{G}(Q)) = 0$, entonces $\mathcal{S} = (\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R))^{\perp_1}$.

Demostración. Dado que $R/Rr \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R)$ para todo $r \in S$, es claro que

$$(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R))^{\perp_1} \subseteq \mathcal{S}.$$

Para probar que $\mathcal{S} \subseteq (\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R))^{\perp_1}$ observamos que para todo $C \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R)$ existe una sucesión exacta

$$0 \to P_1 \to P_0 \to C \to 0$$

con P_0 y P_1 R-módulos proyectivos finitamente generados. Como P_1 es proyectivo finitamente generado, existe Q_1 proyectivo finitamente generado tal que $P_1 \oplus Q_1 \cong R^m$ con $m \in \mathbb{Z}^+$. Se sigue que existe una sucesión exacta

$$0 \to R^m \to Q_1 \oplus P_0 \to C \to 0.$$

Análogamente, existe Q_0 proyectivo finitamente generado tal que $Q_0 \oplus Q_1 \oplus P_0 \cong R^n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto, existe una sucesión exacta

$$0 \to R^m \to R^n \to C \oplus Q_0 \to 0$$

con Q_0 proyectivo finitamente generado. Entonces, como $(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R))^{\perp_1}$ es cerrado por sumandos directos, basta probar que $\mathrm{Ext}^1_R(X, D) = 0$ para todo $D \in \mathcal{S}$ y todo X que admite una resolución proyectiva de la forma

$$0 \to R^m \xrightarrow{\mu} R^n \to X \to 0 \tag{5.A}$$

con $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

Sean $D \in \mathcal{S}$ y X un R-módulo con una resolución proyectiva de la forma 5.A. Como Q es plano (ver 3.48 de [Rot9f]), aplicando $\_ \otimes_R Q$ obtenemos la sucesión exacta de Q-módulos

$$0 \to R^m \otimes_R Q \xrightarrow{\mu \otimes_R Q} R^n \otimes_R Q \to X \otimes_R Q \to 0, \tag{5.B}$$

donde $R^m \otimes_R Q \cong Q^m$ y $R^n \otimes_R Q \cong Q^n$ son Q-módulos proyectivos. Por lo tanto, $X \otimes_R Q \in \mathcal{G}(Q)$, así por hipótesis $X \otimes_R Q$ es un Q-módulo proyectivo, lo que implica que la sucesión exacta 5.B se escinde. Por otro lado, podemos expresar a μ como una matriz $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(R)$. De modo que 5.B es equivalente a una sucesión exacta

$$0 \to Q^m \xrightarrow{A} Q^n \to X \otimes_R Q \to 0$$

que se escinde. Por lo que existe una matriz $B' \in \mathbb{M}_{m\times n}(Q)$ tal que $B'A = 1_m$, donde 1_m es la matriz identidad de $\mathbb{M}_{m\times m}(R)$. Además, si s es el producto de los denominadores de las entradas de B', tenemos que $B = sB'$ es una matriz en $\mathbb{M}_{m\times n}(R)$ tal que $sB'A = s1_m$ con $s \in S$.

Veamos que $\mathrm{Ext}^1_R(X, D) = 0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_R(\_, D)$ a 5.A obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_R(R^n, D) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(A,D)} \mathrm{Hom}_R(R^m, D) \to \mathrm{Ext}^1_R(C, D) \to \mathrm{Ext}^1_R(R^n, D) = 0.$$

Observamos que $\mathrm{Hom}_R(A, D)$ es suprayectiva. En efecto,

$$\mathrm{Hom}_R(A, D)\,\mathrm{Hom}_R(B, D) = \mathrm{Hom}_R(BA, D) = \mathrm{Hom}_R(s1_m, D)$$

es suprayectivo por el lema anterior, lo que implica que $\mathrm{Hom}_R(A, D)$ es suprayectivo. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_R(X, D) = 0$. $\square$

En caso de que R sea noetheriano sabemos que $(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R))^{\perp_1} = (\mathcal{P}_1^{<\infty})^{\perp_1} = \mathcal{P}_1^{\perp_1}$ por 2.49. Por lo que tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.29. *Sean R un dominio entero, S un subconjunto multiplicativo, $\mathcal{S}$ la clase de módulos S-divisibles y $Q := RS^{-1}$. Si $\operatorname{pd}_Q(\mathcal{G}(Q)) = 0$, entonces $\mathcal{S} = \mathcal{P}_1^{\perp_1}$.*

Podemos resumir los resultados obtenidos en la siguiente proposición.

Proposición 5.30. *Sean R un dominio entero, S un subconjunto multiplicativo, $\mathcal{S}$ la clase de módulos S-divisibles y $Q := RS^{-1}$. Entonces, existe un módulo 1-tilting δ_S tal que $\delta_s^{\perp} = \mathcal{S}$. Más aún, en caso de que $\operatorname{pd}_Q(\mathcal{G}(Q)) = 0$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R), \mathcal{S})$ *es un par de cotorsión tilting,*

(b) $(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R))^{\perp} = (\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R))^{\perp_1} = \mathcal{S}$, *y*

(c) ${}^{\perp_1}\mathcal{S} = {}^{\perp}\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R)$.

Si además el anillo es noetheriano, entonces dichas propiedades las podemos expresar de la siguiente manera:

(a) $(\mathcal{P}_1, \mathcal{S})$ *es un par de cotorsión 1-tilting,*

(b) $\mathcal{P}_1^{\perp} = \mathcal{P}_1^{\perp_1} = \mathcal{S}$, *y*

(c) ${}^{\perp_1}\mathcal{S} = {}^{\perp}\mathcal{S} = \mathcal{P}_1$.

Finalmente utilizando 5.17 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.31. *Sean R un dominio entero, S un subconjunto multiplicativo, $\mathcal{S}$ la clase de módulos S-divisibles y $Q := RS^{-1}$. Entonces,*

(a) $\operatorname{resdim}_{{}^{\perp}\mathcal{S}}(\mathcal{P}) \leq \operatorname{Findim}({}_RR) \leq \operatorname{resdim}_{{}^{\perp}\mathcal{S}}(\mathcal{P}) + 1$, *y*

(b) $\operatorname{resdim}_{{}^{\perp}\mathcal{S}}(\mathcal{P}^{<\infty}) \leq \operatorname{findim}({}_RR) \leq \operatorname{resdim}_{{}^{\perp}\mathcal{S}}(\mathcal{P}^{<\infty}) + 1$.

Más aún, en caso de que $\operatorname{pd}_Q(\mathcal{G}(Q)) = 0$, dichas desigualdades las podemos expresar como:

(a) $\operatorname{resdim}_{\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R)}(\mathcal{P}) \leq \operatorname{Findim}({}_RR) \leq \operatorname{resdim}_{\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R)}(\mathcal{P}) + 1$, *y*

(b) $\operatorname{resdim}_{\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R)}(\mathcal{P}^{<\infty}) \leq \operatorname{findim}({}_RR) \leq \operatorname{resdim}_{\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{G}(R)}(\mathcal{P}^{<\infty}) + 1$.

Si además el anillo es noetheriano, entonces dichas desigualdades las podemos expresar de la siguiente manera:

(a) $\operatorname{resdim}_{\mathcal{P}_1}(\mathcal{P}) \leq \operatorname{Findim}({}_RR) \leq \operatorname{resdim}_{\mathcal{P}_1}(\mathcal{P}) + 1$, *y*

(b) $\operatorname{resdim}_{\mathcal{P}_1}(\mathcal{P}^{<\infty}) \leq \operatorname{findim}({}_RR) \leq \operatorname{resdim}_{\mathcal{P}_1}(\mathcal{P}^{<\infty}) + 1$.

Bibliografía

[AB56] M. Auslander and D. Buchsbaum. Homological dimension in noetherian rings. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 42:36–38, 1956. 139

[AB57] M. Auslander and D. Buchsbaum. Homological dimension in regular local rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85:390–405, 1957. 140

[AB89] M. Auslander and R. Buchweitz. The homological theory of maximal cohen-macaulay approximations. *Memoirs of Soc. Math. de France (Suppl.), Nouvelle Serie*, 38, 1989. 63

[AEJO01] S.T. Aldrich, E. Enochs, O. Jenda, and L. Oyonarte. Envelopes and covers by modules of finite injective and projective dimensions. *Journal of Algebra*, 242:447–459, 2001. 55

[AHMV15] L. Angeleri Hügel, F. Marks, and J. Vitoria. Silting modules. *International Mathematics Research notices*, pages 1–34, 2015. 87

[AHT02] L. Angeleri Hügel and J. Trlifaj. Tilting theory and the finitistic dimension conjectures. *Translations of the AMS*, 11:4345–4358, 2002. 4, 146, 147, 148

[AHTT01] L. Angeleri Hügel, A. Tonolo, and J. Trlifaj. Tilting preenvelopes and cotilting precovers. *Algebras and Representation Theory*, 4:155–170, 2001. 4, 81, 120

[AHUC01] L. Angeleri Hügel and F. Ulhoa Coelho. Infinitely generated tilting modules of finite projective dimension. *Forum Mathematicum*, 13:239–250, 2001. 3, 4, 5, 103, 105, 114

[APR79] M. Auslander, M.I. Platzeck, and I. Reiten. Coxeter functors without diagrams. *Trans. Am. Math. Soc.*, 250:1–46, 1979. 3, 104

[AR91] M. Auslander and I. Reiten. Applications of contravariantly finite subcategories. *Adv. Math.*, 86:111–152, 1991. 3, 4

[AS80] M. Auslander and S.O. Smalø. Preprojective modules over artin algebras. *Journal of Algebra*, 66:61–122, 1980. 4

[Bas63] H. Bass. On the ubiquity of gorenstein rings. *Mathematische Zeitschrift*, 82:8–28, 1963. 132

[Baz04] S. Bazzoni. A characterization of n-cotilting and n-tilting modules. *Journal of Algebra*, 273:359–372, 2004. 3, 4, 5, 31, 75, 111

[Baz09] S. Bazzoni. Cotorsion pairs generated by modules of bounded projective dimension. *Israel Journal of Mathemathics*, 174:119–170, 2009. 156

[BB80] B. Brenner and M.C.R. Butler. Generalization of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. *Lect. Notes Math. Springer-Verlag*, 832:103–169, 1980. 3, 104

[BGV73] J. Bernstein, I.M. Gelfand, and Ponomarev V.A. Coxeter functors and Gabriel's theorem. *Uspekhi Mat. Nauk*, 38:19–33, 1973. 3

[BMT11] S. Bazzoni, F. Mantese, and A. Tonolo. Derived equivalence induced by infinitely generated n-tilting modules. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 139:4225–4234, 2011. 4

[Bon81] K. Bongartz. Tilted algebras. *Lect. Notes Math. Springer-Verlag*, 903:26–38, 1981. 3, 104

[CE56] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, New Jersey, U.S.A., 1956. 126

[CF97] R. Colby and K.R. Fuller. Tilting, cotilting and serially tilted rings. *Communications in Algebra*, 25(10):3225–3237, 1997. 3

[CF04] R. R. Colby and K. R. Fuller. *Equivalence and Duality for module categories with tilting and cotilting for rings*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004. 76, 78, 104

[CM93] R. Colpi and C. Menini. On the structures of *-modules. *Journal of Algebra*, 158:400–419, 1993. 76, 81

[CT95] R. Colpi and J. Trlifaj. Tilting modules and tilting torsion theories. *Journal of Algebra*, 178:614–634, 1995. 3

[DF04] J. Dauns and L. Fuchs. Torsion freeness for rings with zero-divisors. *Journal of Algebra and Its Applications*, 3(3):221–237, 2004. 124

[Eno81] P. Enochs. Injective and flat covers, envelopes and resolvents. *Israel J. Math.*, 39:189–209, 1981. 4

[EO00] E.E. Enochs and Jenda O.M.G. *Relative Homological Algebra*. de Gruyter, Berlin, 2000. 107, 134, 145

[ES53] B. Eckmann and A. Schopf. Über injective moduln. *Archiv der Mathematik*, 4:75–78, 1953. 35

[Fac87] A. Facchini. A tilting module over commutative integral domains. *Comm. Algebra*, 15:2235–2250, 1987. 128

[Fuc84] L. Fuchs. On divisible modules over integral domains. *Abelian groups and modules, CISM courses and lectures, Springer-Verlag*, 287:341–356, 1984. 128

[Gab72] P. Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen. I. *Manuscripta Mathematica*, 6(1):71–103, 1972. 3

[GR71] L. Gruson and L. Raynaud. Critères de platitude et de projectivité. techniques de platification d'un module. *Invent. Math.*, 13:1–89, 1971. 140

[GT06] R. Göbel and J. Trlifaj. *Approximations and Endomorphism Algebras of Modules*. de Gruyter, Berlin, 2006. 17, 50, 81, 132

[HM10] L.A. Hügel and O. Mendoza. Homological dimensions in cotorsion theories. *Illinois Journal of Mathematics*, 53:251–263, 2010. 4, 142, 150, 151, 152, 153, 154

[HR82] D. Happel and C.M. Ringel. Tilted algebras. *Trans. Am. Math. Soc.*, 274:399–443, 1982. 3, 104

[Lam99] Tsi-Yuen Lam. *Lectures on Modules and Rings*. Springer, New York, 1999. 11, 76

[Mat06] H. Matsumura. *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, New York, U.S.A., 2006. 134

[Miy86] Y. Miyashita. Tilting modules of finite projective dimension. *Mathematische Zeitschrift Springer-Verlag*, 193:113–146, 1986. 3, 105

[ML63] S. Mac Lane. *Homology*. Springer-Verlag, Berlin, Gutingen, Heidelberg, 1963. 129

[Rot9f] J. J. Rotman. *An introduction to Homological Algebra*. Springer, New York, U.S.A., 2009f. 157

[Rot95] J. J. Rotman. *An introduction to the Theory of Groups, 4th edition*. Springer-Verlag New York, New York, USA, 1995. 132, 140

[RS98] J. Rada and M. Saorin. Rings characterized by (pre)envelopes and (pre)covers of their modules. *Communications in Algebra*, 26:899–912, 1998. 37

[Sal75] L. Salce. Cotorsion theories for abelian groups. *Symp. Math.*, 23:11–32, 1975. 40

[Ser55] J.P. Serre. Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens. *Proceedings of the international Symposiumon Algebraic number theory, Tokyo & Nikko*, pages 175–189, 1955. 139

[SF92] L. Salce and L. Fuchs. S-divisible modules over domains. *Forum Math.*, 4:383–394, 1992. 128

[Sma00] S.O. Smalø. Homological difference between finite and infinite dimensional representations of algebras. *Trends in Math., Birkh auser*, pages 81–93, 2000. 153

[Ste75] B. Stenström. *Rings of Quotients. An introduction to Methods of Ring Theory.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1975. 123

[TP07] J. Trlifaj and D. Pospíšil. Tilting and cotilting classes over gorenstein rings. *Contemporary Mathemathics*, Rings, modules, and representations: International conference on rings and things in honor of Carl Faith and Barbara Osofsky:319–334, 2007. 132

[Wak90] T. Wakamatsu. Stable equivalence of self-injective algebras and generalization of tilting modules. *Journal of Algebra*, 134:298–325, 1990. 3

[Wei97] Charles A. Weibel. *An introduction to Homological Algebra.* Cambridge University Press, New York, U.S.A., 1997. 24

[Wei04] Jiaqun Wei. Equivalences and the tilting theory. *Journal of Algebra*, 283:584–595, 2004. 3, 4

[Wei05] Jiaqun Wei. n-star modules and n-tilting modules. *Journal of Algebra*, 283:711–722, 2005. 4, 5, 75, 87, 88, 89, 91, 94, 96, 99, 111

[ZH14] B. Zimmermann Huisgen. The finitistic dimension conjectures. a tale of 3.5 decades. *arXiv:1407.2383v1*, 2014. 139

Nomenclatura

$\mathrm{Add}\,(\mathcal{M})$	denota a la clase de R-módulos isomorfos a sumandos directos de sumas directas de elementos de $\mathcal{M}$
$\mathrm{add}\,(\mathcal{M})$	denota a la clase de R-módulos isomorfos a sumandos directos de sumas directas finitas de elementos de $\mathcal{M}$
$\bigoplus_{i\in I} M_i$	el coproducto de la familia de R-módulos $M_{i i\in I}$
$\mathrm{Cogen}\,(\mathcal{M})$	la clase de los R-módulos $\mathcal{M}$-cogenerados, que consiste de los R-módulos X que admiten un monomorfismo $X \to \prod_{i\in I} M_i$ para algún conjunto $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}$
$\mathrm{Cogen}_n(\mathcal{X})$	la clase de R-módulos X que admiten una sucesión exacta de la forma $0 \to X \to ... \to X_n$ donde $X_i \in \mathrm{Prod}\,(\mathcal{X})$ para todo i
$\mathrm{Coker}\,(f)$	conúcleo del morfismo f
$\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}\,(M)$	la dimensión de $\mathcal{X}$-coresolución
$\mathrm{Gen}\,(\mathcal{M})$	la clase de los R-módulos $\mathcal{M}$-generados, que consiste de los R-módulos X que admiten un epimorfismo $\bigoplus_{i\in I} M_i \to X$ para algún conjunto $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}$
$\mathrm{Gen}_n(\mathcal{X})$	la clase de R-módulos X que admiten una sucesión exacta de la forma $X_n \to ... \to X \to 0$ donde $X_i \in \mathrm{Add}\,(\mathcal{X})$ para todo i
$\mathrm{Hom}_{\,R}(M, N)$	el grupo de R-morfismos de M a N
$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\,(C)$	la dimensión inyectiva relativa a $\mathcal{X}$ de M
$\mathrm{Inj}\,(R)$	la clase de R-módulos inyectivos

$\operatorname{Ker}(f)$	núcleo del morfismo f
$\mathcal{F}$	la clase de los módulos libres de torsión, esto es, los módulos M tales que $\operatorname{Tor}_1^R(R/rR, M) = 0 \quad \forall r \in R$
$\mathcal{FM}$	la clase de R-módulos $\mathcal{M}$-filtrados
$\mathcal{G}(R)$	la clase de R-módulos que admiten una resolución proyectiva de módulos proyectivos finitamente generados
$\mathcal{I}$	la clase de las R-módulos de dimensión inyectiva finita
$\mathcal{I}_n$	la clase de las R-módulos de dimensión inyectiva menor o igual a n
$\mathcal{P}$	la clase de las R-módulos de dimensión proyectiva finita
$\mathcal{P}_n^{<\kappa}$	la subclase de R-módulos $\mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}^{<\kappa}$
$\mathcal{P}^{<\kappa}$	la subclase de R-módulos de $\mathcal{P}$ que admiten una resolución proyectiva formada por módulos proyectivos $\kappa >$-generados
$\mathcal{P}_n$	la clase de las R-módulos de dimensión proyectiva menor o igual a n
$\mathcal{X}^\vee$	la clase de R-módulos que admiten una $\mathcal{X}$-corresolución finita
$\mathcal{X}^\wedge$	la clase de R-módulos que admiten una $\mathcal{X}$-resolución finita
$\operatorname{Mod}(R)$	la categoría de R-módulos a izquierda
$\operatorname{Mod}(R-S)$	la categoría de bimódulos, R-módulos a derecha S-módulos a izquierda
$\operatorname{Mod}(R^{op})$	la categoría de R-módulos a derecha
$\Omega^k(\mathcal{M})$	la clase de las sizigias k-ésimas de M para todo $M \in \mathcal{M}$
$\Omega^k(M)$	la clase de las sizigias k-ésimas de M sobre cualquier resolución proyectiva de M

$\Omega_k(\mathcal{M})$	la clase de las cosizigias k-ésimas de M para cualquier $M \in \mathcal{M}$
$\Omega_k(M)$	la clase de las cosizigias k-ésimas de M sobre cualquier coresolución inyectiva de M
$\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(C)$	la dimensión proyectiva relativa a $\mathcal{X}$ de M
$\mathrm{Prod}(\mathcal{M})$	denota a la clase de R-módulos isomorfos a sumandos directos de productos de elementos de $\mathcal{M}$
$\prod_{i\in I} M_i$	el producto de la familia de R-módulos $M_{ii\in I}$
$\mathrm{Proj}(R)$	la clase de R-módulos proyectivos
$\mathrm{resdim}_{\mathcal{X}}(M)$	la dimensión de $\mathcal{X}$-resolución
$E(M)$	la envolvente inyectiva de M
M^{α}	el producto de α copias del R-módulo M
$M^{(\alpha)}$	el coproducto de α copias del R-módulo M