



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Modelación de superficies de trabajo en jets astrofísicos.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Manuel Eduardo de la Cruz Hernández

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Sergio Mendoza Ramos

Ciudad Universitaria, CDMX, 2017





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

De la Cruz

Hernández

Manuel Eduardo

31836534

Universidad Nacional Autónoma

de México

Facultad de Ciencias

Física

309029373

2. Datos del tutor

Dr

Sergio

Mendoza

Ramos

3. Datos del sinodal 1

Dr

Roberto Allan

Sussman

Livovsky

4. Datos del sinodal 2

Dr

Erika María

Benítez

Lizaola

5. Datos del sinodal 3

Dr

Juan Carlos

Hidalgo

Cuéllar

6. Datos del sinodal 4

Dr

Pablo Luis

Rendón

Garrido

7. Datos del trabajo escrito

Modelación de superficies de trabajo
en jets astrofísicos

68 p.

2017

Índice general

Agradecimientos	IX
Lista de símbolos	XI
Introducción	XIII
1. Hidrodinámica no-relativista	1
§1. Dinámica de fluidos ideales	1
§2. Superficies de discontinuidad	4
§3. Ondas de choque	6
§4. Superficies de trabajo	12
§5. Superficie de trabajo dentro de un flujo no-relativista	12
2. Hidrodinámica relativista	19
§6. Ecuaciones de la hidrodinámica relativista	19
§7. Velocidad del sonido relativista	22
§8. Ecuación de estado Bondi-Wheeler	23
3. Ondas de choque relativistas.	27
§9. Condiciones de salto en ondas de choque relativistas	27
§10. Condiciones de salto para un flujo de gas ultra-relativista	31
§11. Condiciones de energía	37
Conclusión	43

Apéndice 1	45
§1. Relaciones entre las cantidades hidrodinámicas dentro de la superficie de trabajo	45
Apéndice 2	49
§2. Potencia generada en la superficie de trabajo por una inyección de velocidad periódica	49

Índice de figuras

1.1. Pistón generando una onda de choque	5
1.2. Condiciones de salto	7
1.3. Superficie de trabajo generada por una discontinuidad inicial.	13
1.4. Superficie de trabajo para un modelo no-relativista	14
3.1. Línea de universo de la onda de choque	30
3.2. Superficie de trabajo dentro de un flujo relativista	32
3.3. Velocidad de inyección variable	39
3.4. Curva de luz del modelo de superficie de trabajo relativista	40

Agradecimientos

Mis mas sinceros agradecimientos a las instituciones que han sido parte fundamental de mi crecimiento como estudiante de la carrera de Física. A la Facultad de Ciencias y todo el personal académico que me enseñó a razonar y a pensar de una manera curiosa, lógica y descriptiva que nunca creí posible alcanzar.

Al Instituto de Astronomía que me dio su apoyo como asociado, brindándome todo el material, las instalaciones y varios de los investigadores asociados para que yo pudiera desarrollarme mas en el ámbito de esta rama muy querida por mi: la Astrofísica.

Agradezco a la UNAM en general por darme la oportunidad de ser estudiante durante todo este periodo de alimentación científica.

Doy las gracias al proyecto DGAPA-UNAM(IN112616) la cual me dio su apoyo económico para realizar este trabajo.

Este trabajo fue apoyado también por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) CB-2014-1 proyecto #240512, muchas gracias.

Agradezco a Yaxkin Coronado por otorgarme la información necesaria del modelo de superficies de trabajo en flujos no-relativistas.

Así como los sinodales: Dra. Erika María Benítez Lizaola, Dr. Roberto Allan Sussman Livovsky, Dr. Juan Carlos Hidalgo Cuéllar y Dr. Pablo Luis Rendón Garrido que revisaron este trabajo y me dieron sus observaciones y comentarios

Al Dr. Sergio Mendoza le agradezco por todo su apoyo, paciencia y atención durante todo el periodo que estuve bajo su asesoría.

A mis padres, que sin su apoyo y cariño no hubiera logrado llegar hasta este punto de mi vida, los amo mucho.

A mis amigos y familiares por estar al pendiente de mi avance durante la carrera, por darme su amistad, apoyo y esos momentos agradables a su lado.

Agradezco a mi novia que me dio su atención, amor y amabilidad sin condiciones

durante el tiempo que realicé el presente trabajo.

Lista de símbolos

M	número de Mach (no-relativista y relativista)
v	velocidad
a	velocidad del sonido no-relativista y relativista
c	velocidad de la luz
e	energía interna propia por unidad de volumen propio
n	número of partículas por unidad de volumen propio
$V := 1/n$	volumen propio por partícula
p	presión
s	entropía específica
u_μ	cuatro-velocidad
$\beta := v/c$	velocidad en unidades de c
t	tiempo
τ	tiempo propio
γ	factor de Lorentz
Γ	factor de Lorentz
κ	índice politrópico
ρ	densidad de masa

σ	entropía específica propia
ω	entalpía específica propia
ϵ	energía interna específica
$T^{\mu\nu}$	tensor energía-impulso
índices griegos: $\{\alpha, \beta, \dots\}$	toman valores 0, 1, 2, 3,
índices latinos: $\{a, b, \dots\}$	toman valores 1, 2, 3,

Introducción

En el presente trabajo se describe un modelo analítico de una superficie de trabajo creada a partir de una discontinuidad inicial generada por una velocidad de inyección variable dentro de un jet astrofísico relativista.

Los jets astrofísicos relativistas son fenómenos altamente energéticos y comunes en el universo. Se han observado con potencias de hasta 10^{47} J/s. Estos objetos existen en diversas escalas. Desde los destellos de rayos gamma (GRB) con longitudes < 1 pc hasta los cuasares que miden típicamente alrededor de 100kpc. Todos ellos emanan de estrellas de neutrones o agujeros negros (Kulkarni et al. (1999)). Están rodeados por un disco de acreción y comparten las características de ser altamente colimados y terminar en grandes lóbulos.

Las ondas de choque en el cosmos son detectadas debido a la radiación que emiten. Al calentar el gas del medio que les rodea, las ondas de choque dibujan una estela radiativa detrás de ellas que por lo general ioniza al gas no chocado. El gas chocado se enfría mediante distintos procesos que, dependiendo de la temperatura, emiten radiación característica del estrato post-choque.

El objetivo de la presente tesis es encontrar una solución analítica a una superficie de trabajo (dos ondas de choque moviéndose, ambas en una misma dirección y separadas por una superficie de contacto), dentro de un flujo en una dimensión, en el límite de choque fuerte relativista. La intención astrofísica es que dicha superficie de trabajo es generada por una inyección de material a velocidad variable en la base de un jet relativista. Suponiendo que la energía térmica dentro de la superficie de trabajo se radía fuertemente mediante algún proceso eficiente, se calculará también la potencia o luminosidad que dicho fenómeno mecánico generaría.

Además se caracterizará una curva de luz estrictamente emitida por la superficie de trabajo por medio de las condiciones hidrodinámicas del jet y el medio externo que lo rodea donde se impactará dentro de una superficie de trabajo en la cual se produzcan destellos de luz.

Capítulo 1

Hidrodinámica no-relativista

Del mismo modo que el aumento constante de la entropía es la ley básica del universo, la ley básica de la vida es estar cada vez mejor estructurado y luchar contra la entropía

Václav Havel, 1977.

En este capítulo se presentan las leyes de conservación de la mecánica de fluidos no-relativista. Dichas leyes son utilizadas en la descripción de discontinuidades que se presentan en un fluido. En particular se analizan las discontinuidades conocidas como ondas de choque y su efecto sobre un flujo unidimensional.

§1. Dinámica de fluidos ideales

En la descripción del movimiento de un fluido se deben considerar las cantidades conservadas en su trayectoria. para determinar formalmente las características del flujo tomemos un *elemento de fluido*, es decir, un volumen de fluido lo suficientemente pequeño que el fluido en consideración. este elemento de fluido es lo suficientemente grande para que en su descripción no sea necesario considerar la interacción de cada partícula que lo compone. Cada elemento de fluido está caracterizado por dos cantidades termodinámicas, la presión p y la densidad ρ . Cualquier otra cantidad termodinámica se puede calcular mediante la ecuación de estado y las leyes de la termodinámica. El movimiento del fluido está descrito por el campo de velocidades \mathbf{v} . Las expresiones que a continuación se enlistan sin demostración pueden ser consultadas en los excelentes libros de Landau & Lifshitz (1987) y en Zel'dovich & Raizer (1966).

La conservación de masa o *ecuación de continuidad*, expresa que en ausencia de fuentes o sumideros, la masa que entra en un volumen fijo en el tiempo t debe ser la misma que sale. En otras palabras

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.1)$$

Integrando esta última ecuación sobre un volumen fijo v se obtiene,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho dv = - \oint_{\partial v} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}. \quad (1.2)$$

Esta es la forma integral de la ecuación de continuidad e indica que el cambio de masa en un volumen v es igual a la cantidad de fluido que entra, menos la que sale a través del área que lo limita por ∂v .

En la dinámica de *gases ideales*, es decir, gases en los que la conductividad térmica y la viscosidad son efectos despreciables en el movimiento del fluido, la ecuación de movimiento de un elemento de fluido es la llamada *ecuación de Euler*,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1.3)$$

Esta ecuación representa la segunda ley de Newton para fluidos. la cantidad $\rho d\mathbf{v}/dt$ es la aceleración multiplicada por la masa por unidad de volumen de un elemento de fluido. el gradiente de presión representa entonces la fuerza por unidad de volumen que se ejerce sobre un elemento de fluido determinado.

Por otra parte, la ecuación de conservación de la entropía

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad (1.4)$$

impone un movimiento adiabático en cada elemento del fluido.

En las dos ecuaciones anteriores, la derivada total

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (1.5)$$

es el cambio total en el tiempo total o *lagrangiano* que experimenta alguna cantidad a lo largo de su movimiento.

A partir de estas tres ecuaciones se pueden construir dos ecuaciones de conservación que comparten la estructura de la ecuación (1.1) Landau & Lifshitz (1987). La primera es la

conservación de energía

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = -\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \right], \quad (1.6)$$

en donde ϵ es la densidad de energía interna por unidad de masa[†].

La *densidad de energía*, o la energía por unidad de volumen, está dada por $\rho v^2/2 + \rho \epsilon$, y por lo tanto el *flujo de energía* es $\rho \mathbf{v} (v^2/2 + w)$, donde $w := \epsilon + p/\rho$ es la entalpía por unidad de masa del fluido. Al integrar la ecuación (1.6) sobre un volumen fijo v y usando el teorema de gauss se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) dv = - \oint_{\partial v} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \right] \cdot d\mathbf{a}. \quad (1.7)$$

En esta igualdad el miembro izquierdo representa la tasa de cambio de energía en el volumen v . el segundo miembro es la energía neta que entra al volumen por la frontera ∂v que lo envuelve.

De la misma forma se puede construir una ecuación de conservación de momento si definimos el momento por unidad de volumen o la *densidad de momento* como $\rho \mathbf{v}$, obteniendo

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = - \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1.8)$$

donde v_i es la componente i -ésima de la velocidad y el *flujo de momento* es un tensor de rango-2 dado por $\pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k$, con δ_{ik} el tensor unitario.[‡]

Integrando la ecuación 1.8 sobre un volumen fijo v se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho v_i dv = - \oint_{\partial v} \pi_{ik} da_k = - \oint_{\partial v} \pi_{ik} n_k da, \quad (1.9)$$

donde $da_k = n_k da$ con \mathbf{n} un vector unitario normal al área ∂v . el lado izquierdo de la

[†] esta energía interna satisface la primera ley de la termodinámica: $d\epsilon = tds - p dv$.

[‡] aquí y en lo sucesivo utilizaremos notación de suma implícita de Einstein. Los índices latinos varían como 1,2 y 3 y los griegos como 0, 1, 2 y 3 representando las coordenadas (x, y, z) y (ct, x, y, z) respectivamente, donde c es la velocidad de la luz. Superíndices representan cantidades contra-variantes y subíndices cantidades covariantes. Dado que en el espacio plano no-relativista de tres dimensiones no es necesario hacer distinción entre covariantes y contra-variantes, todos los índices se representan como subíndices. Para mayor información sobre esto véase Mendoza (2016).

expresión anterior es la tasa de cambio del momento total contenido en el volumen v . de aquí que $\pi_{ik}n_k$ represente el flujo de la componente i -ésima del momento a través del área cuyo vector normal es n_k .

Las ecuaciones de conservación de masa, energía y momento presentadas son de gran importancia en la dinámica de gases con discontinuidades como veremos en la siguiente sección.

§2. Superficies de discontinuidad

Para comenzar con el estudio de las discontinuidades en los flujos debemos considerar los cambios que experimentan los fluidos en su dinámica al ser perturbados. Una perturbación δp en la presión es una compresión cuando $\delta p > 0$ y una descompresión (también llamada *rarefacción*) si $\delta p < 0$ en el punto de la perturbación.

Las perturbaciones a primer orden en las cantidades físicas de un fluido ideal generan ondas que se propagan a la velocidad del sonido[†] (Landau & Lifshitz, 1987) $a = (\partial p / \partial \rho)_s^{1/2}$. Esta es la velocidad de propagación de la información en fluidos.

Cuando un fluido presenta cambios drásticos en las cantidades físicas que lo describen, los gradientes pueden ser tan grandes que se generan *discontinuidades* en las cantidades físicas del fluido. estas discontinuidades ocurren a través de superficies bidimensionales en las que cualquier elemento de fluido que las atraviesa cambia discontinua-mente de un estado definido por un conjunto de valores a otro. Los posibles estados que puede alcanzar un elemento al atravesar una discontinuidad no son arbitrarios y están regidos por las ecuaciones de conservación presentadas en la sección §1.

Existen múltiples situaciones en las que una discontinuidad tiene lugar en un flujo. consideremos un tubo cilíndrico que contiene un gas en reposo. supongamos que una de las paredes del cilindro es un pistón que sella al tubo como se muestra en la figura 1.1. Al empujar suavemente el pistón se genera una onda que viaja con la velocidad del sonido y cambia la presión en el gas de manera continua. Si el pistón es empujado lo suficientemente fuerte de tal manera que su velocidad sea supersónica, los gradientes de presión son tan grandes que se genera una superficie de discontinuidad delante del pistón que se denomina

[†] Cuando hablamos de perturbaciones que viajan a la velocidad del sonido con respecto al fluido, no nos referimos a aquellas que viajan con el fluido como la vorticidad y la entropía (Landau & Lifshitz, 1987).

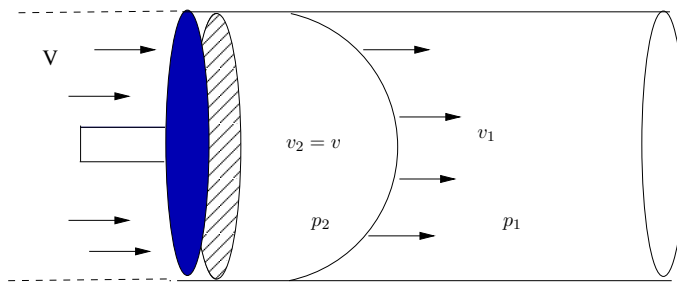


Figura 1.1: Un ejemplo de onda de choque se produce cuando un pistón es empujado a velocidad supersónica v dentro de un cilindro cuyo interior tiene un estado con parámetros p_1 , v_1 y ρ_1 que pasa a un estado p_2 , v_2 y ρ_2 , debido a la alta presión p_2 que se ejerce dentro de el cilindro se genera una superficie de discontinuidad.

onda de choque. La clasificación de las discontinuidades posibles que pueden existir en un fluido se presenta en la sección §3. Por lo pronto basta indicar que un elemento de fluido que atraviesa una onda de choque cambia su presión considerablemente. Lo mismo ocurre con el resto de las cantidades hidrodinámicas. El gas *chocado*, i.e. el gas detrás de la superficie de discontinuidad se propaga en este caso con la velocidad del pistón.

En la descripción matemática del flujo, las superficies de discontinuidad representan fronteras para el análisis del fluido tanto detrás como delante de la superficie. el flujo de masa, energía y momento deben ser conservados al cruzar la discontinuidad. para mostrar esto consideramos un sistema de referencia donde la discontinuidad se encuentre fija y perpendicular a uno de los ejes coordenados. sin pérdida de generalidad, en lo sucesivo tomaremos al eje x como el eje perpendicular a la superficie de discontinuidad.

La descripción del flujo en la discontinuidad se aproxima considerando un gas ideal ya que la viscosidad del gas es despreciable cuando este se desplaza a velocidades comparables a la del sonido a (Landau & Lifshitz, 1987).

La figura 1.2 muestra un volumen cerrado v que intersecta la discontinuidad. Consideremos que el fluido es estacionario, i.e. $\partial/\partial t = 0$. De esta manera la ecuación (1.2) queda como

$$\oint_{\partial v} \rho v da = 0. \tag{2.1}$$

Si ahora hacemos tender a cero el radio y la altura del cilindro v , entonces la integral de la ecuación 2.1 se puede expresar como

$$-(\rho_1 v_{1x} - \rho_2 v_{2x}) = 0. \quad (2.2)$$

Si denotamos la diferencia de valores de cualquier cantidad hidrodinámica q antes y después de la discontinuidad como $[q] := q_1 - q_2$, la ecuación (2.2) puede escribirse de la forma

$$[\rho v_x] = 0. \quad (2.3)$$

Del mismo modo se puede ver (Landau & Lifshitz (1987)) que la conservación del flujo de energía y el flujo de momento en todas sus componentes están dados respectivamente por

$$\left[\rho v_x \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \right] = 0, \quad (2.4)$$

$$[p + \rho v_x^2] = 0, \quad (2.5)$$

$$[\rho v_x v_y] = 0, \quad [\rho v_x v_z] = 0. \quad (2.6)$$

§3. Ondas de choque

De las condiciones de frontera arriba enunciadas se pueden derivar dos tipos distintos de discontinuidades. el primero corresponde a una discontinuidad a través de la cual no hay flujo alguno de masa en la superficie. Utilizando la ecuación (2.3) y escribiendo $v = v_x$, se sigue que $v_1 = v_2 = 0$. Con esto y usando las ecuaciones (2.5) y (2.6) se obtiene que

$$[p] = 0.$$

Las componentes de la velocidad v_y y v_z que son tangenciales a la superficie, aceptan cualquier diferencia entre ambos lados de la discontinuidad (Landau & Lifshitz, 1987). Este tipo de discontinuidades se denominan *discontinuidades tangenciales*. La discontinuidad tangencial es estacionaria respecto al gas en ambas caras de la misma. Los gases en ambos lados de la discontinuidad tangencial no se mezclan, puesto que no existe ningún movimiento del gas a través de una discontinuidad tangencial.

Las discontinuidades en las que las partículas de fluido sí atraviesan la discontinuidad se

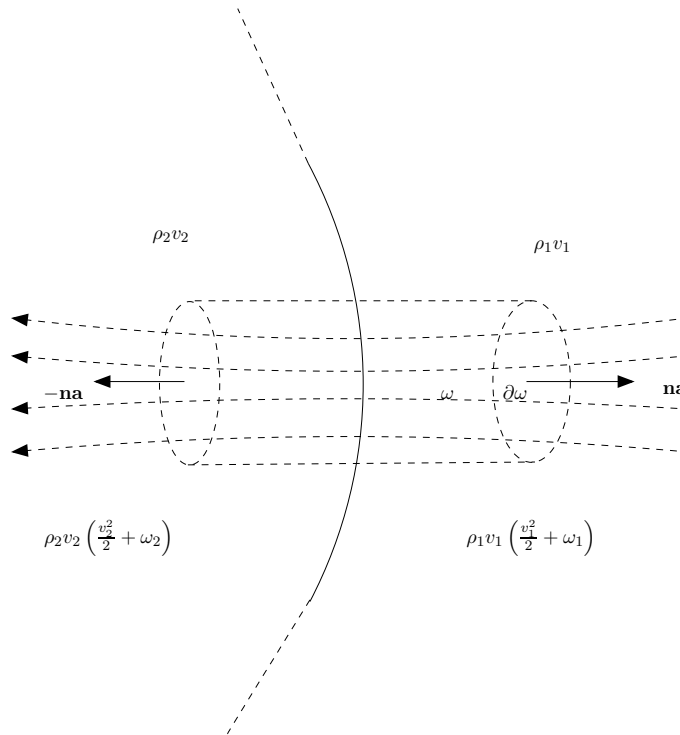


Figura 1.2: Para calcular las condiciones matemáticas sobre las variables hidrodinámicas en la región de la superficie de discontinuidad (línea curva), encerramos un elemento de ésta superficie con un elemento de volumen infinitesimal v en el que se integran las ecuaciones de conservación. Así se encuentran las condiciones de salto entre las regiones separadas de la superficie de discontinuidad

denominan *ondas de choque*. En ellas la característica $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \neq 0$ implica, de acuerdo a las igualdades (2.3) y (2.5), que las velocidades tangenciales v_y y v_z son continuas a través de la onda de choque. Las demás condiciones de conservación están dadas por las siguientes *condiciones de salto*,

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 := j, \quad (3.1)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{2}v_1^2 + w_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + w_2, \quad (3.3)$$

donde j representa el flujo de masa a través de la superficie. de estas igualdades se sigue de Landau & Lifshitz (1987):

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(v_1 - v_2)}, \quad (3.4)$$

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = -\frac{1}{2}(v_1 - v_2)(p_1 + p_2), \quad (3.5)$$

donde $v := 1/\rho$ es el volumen específico.

Debido a que la entalpía específica es $w := \epsilon + pv$, la ecuación (3.5) puede escribirse también como

$$w_1 - w_2 = -\frac{1}{2}(v_2 + v_1)(p_2 - p_1). \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) se conoce como *adiabática de Hugoniot* o adiabática del choque. Dado un estado inicial del gas (v_1, p_1) y conociendo la ecuación de estado del gas en ambos lados de la discontinuidad, la relación (3.6) determina de manera única el punto (v_2, p_2) para el gas chocado[†].

Para una onda de choque débil, donde las diferencias $p_2 - p_1$ y $\rho_2 - \rho_1$ son cantidades de primer orden, la ecuación (3.1) junto con la ecuación (3.4) implican que

[†] En el caso de las ondas de choque llamaremos *gas no-chocado* a aquel que se encuentra frente a la onda de choque sin aun haberla atravesado. Las cantidades hidrodinámicas que lo describen están etiquetadas con el subíndice 1. Al gas que ha cruzado lo llamamos gas chocado o posterior al choque. Las cantidades hidrodinámicas de este gas estarán etiquetadas con el subíndice 2.

$$jv_1 = \sqrt{-\frac{v_1^2(p_2 - p_1)}{v_1 - v_2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}. \quad (3.7)$$

De aquí se sigue que las velocidades del flujo son tales que $v_1 = v_2 = jv_1 = a = (\partial p / \partial \rho)_s^{1/2}$.

Cuando el fluido atraviesa la superficie de discontinuidad, la entropía por unidad de masa s aumenta, $s_2 > s_1$. Esto determina la dirección del flujo a través de la onda de choque. De aquí se puede mostrar que (Landau & Lifshitz, 1987)

$$p_2 > p_1, \quad (3.8)$$

por lo tanto, utilizando las ecuaciones (3.1)-3.3, se obtiene

$$v_1 > a_1, \quad v_2 < a_2. \quad (3.9)$$

de esta manera y utilizando nuevamente las ecuaciones (3.1)-(3.4) se tiene que

$$v_1 > v_2, \quad v_1 > v_2. \quad (3.10)$$

En resumen, cuando un elemento de fluido pasa a través de una onda de choque del estado (p_1, v_1) al estado (p_2, v_2) este sufre una compresión. en otras palabras, su presión, densidad y temperatura aumentan y su velocidad disminuye cambiando de un valor supersónico a uno subsónico.

Ahora bien, consideremos un gas ideal que fluye adiabáticamente en las etapas anterior y posterior a la onda de choque (Chandrasekhar, 1958). La ecuación de estado del gas ideal puede escribirse como (Stanyukovich, 1960)

$$p = \exp\left(\frac{s - s_0}{c_v}\right) \rho^\kappa, \quad (3.11)$$

donde c_v representa el calor específico a volumen constante, y $\kappa = c_v / c_p$ es un índice que se mantiene constante a lo largo del flujo. En particular, para un gas mono-atómico $\kappa = 5/3$ y en un gas diatómico $\kappa = 7/5$. De la ecuación (3.11) se observa que en el movimiento adiabático se cumple la relación *politrópica* $p/\rho^\kappa = \text{const}$. En cada elemento de fluido[†]. Con esto y utilizando la primera ley de la termodinámica se observa que la energía interna

del gas está dada por

$$\epsilon = \frac{pv}{\kappa - 1} = \frac{a^2}{\kappa(\kappa - 1)}. \quad (3.12)$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación (3.5) se obtiene

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(\kappa + 1)p_1 + (\kappa - 1)p_2}{(\kappa - 1)p_1 + (\kappa + 1)p_2}. \quad (3.13)$$

Debido a que en un gas ideal $t_2/t_1 = (p_2v_2) / (p_1v_1)$, entonces la ecuación (3.13) es también

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{p_2(\kappa + 1)p_1 + (\kappa - 1)p_2}{p_1(\kappa - 1)p_1 + (\kappa + 1)p_2}. \quad (3.14)$$

Las velocidades antes y después del choque son en este caso (Landau & Lifshitz, 1987)

$$v_1^2 = \frac{1}{2}v_1 \{(\kappa - 1)p_1 + (\kappa + 1)p_2\}, \quad (3.15)$$

$$v_2^2 = \frac{1}{2}v_1 \frac{\{(\kappa + 1)p_1 + (\kappa - 1)p_2\}}{\{(\kappa - 1)p_1 + (\kappa + 1)p_2\}}, \quad (3.16)$$

y por lo tanto

$$v_1 - v_2 = \frac{\sqrt{2v_1}(p_2 - p_1)}{\sqrt{(\kappa - 1)p_1 + (\kappa + 1)p_2}}. \quad (3.17)$$

Las condiciones (3.13)-(3.16) se conocen como las condiciones de salto o de *Rankine-Hugoniot*. Definen de cierta manera que tan fuerte es la discontinuidad en una onda de choque. Se dice que una onda de choque es fuerte si $p_1 \ll p_2$. En este caso las condiciones de salto en la discontinuidad se reducen a (Landau & Lifshitz, 1987)

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \quad (3.18)$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{(\kappa - 1)p_2}{(\kappa + 1)p_1}. \quad (3.19)$$

La ecuación (3.18) muestra que el cociente de densidades es finito aún cuando el cociente

[†] Los procesos politrópicos son cambios de estado en los que se conservan calores específicos constantes, i.e. $dq/dt = \text{const}$, con q la energía transferida por calor durante el proceso y t la temperatura. esto incluye en particular a los procesos adiabáticos donde el valor de esta constante es cero (Chandrasekhar, 1989).

de presiones crece ilimitadamente. no obstante, el cociente de temperaturas se incrementa sin límite tan rápido como p_2/p_1 . De las ecuaciones (3.15) y (3.16) se sigue además que las velocidades crecen sin límite como la raíz de la presión post choque:

$$v_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\kappa + 1)p_2 v_1}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\kappa - 1)^2 p_2 v_1}{(\kappa + 1)}}. \quad (3.20)$$

Para poder introducir el concepto de onda de rarefacción consideremos un tubo lleno de gas en reposo el cual es dividido en dos compartimientos que están separados por una pared móvil. inicialmente el gas en uno de los compartimientos tiene una densidad y presión mucho mayor que el otro. En el tiempo inicial $t = 0$, la membrana se remueve y el gas comienza a fluir del lado con mayor presión al de menor presión. Al momento de quitar la pared móvil, se produce una discontinuidad inicial (Landau & Lifshitz, 1987) que decae en una onda de rarefacción y una onda de choque separadas por una discontinuidad de contacto, las cuales se propagan en direcciones opuestas alejándose de la posición de la discontinuidad inicial. La onda de choque se mueve hacia la región donde hay menos presión (Landau & Lifshitz, 1987), mientras que la onda de rarefacción se mueve en la zona donde hay mayor presión. las ondas de rarefacción se forman debido a la baja presión que antecede a la compresión presentada por la onda de choque. Un análisis detallado utilizando la ecuación de continuidad para un valor determinado del gas cuando éste se mueve en función del tiempo se puede encontrar en Landau & Lifshitz (1987). Las desigualdades que se cumplen para una onda de rarefacción son

$$\frac{d\rho}{dt} < 0, \quad \frac{dp}{dt} < 0 \quad (3.21)$$

y con ayuda de la ecuación de *Euler* se puede encontrar que $dv/dt < 0$, sin embargo, esto no significa que el valor de la velocidad disminuye con el tiempo, puesto que v puede ser negativa. Desde el punto de vista de las velocidades características (suponiendo que el flujo va de izquierda a derecha), las ondas de choque se forman cuando las velocidades características del lado izquierdo son mayores que las velocidades características del lado derecho. Las ondas de rarefacción se forman en el caso contrario (Landau & Lifshitz, 1987).

§4. Superficies de trabajo

Una de las razones más importantes para la presencia de una superficie de trabajo en un flujo de gas es la posibilidad de discontinuidades en las condiciones iniciales. En general las distribuciones iniciales de velocidad, presión, densidad pueden escribirse arbitrariamente, sin embargo deben cumplirse ciertas condiciones sobre las superficies de discontinuidad estables en un flujo de gas, por ejemplo, en una onda de choque las discontinuidades de presión y de densidad están relacionadas por la adiabática del choque.

En particular esta discontinuidad inicial se divide en varios tipos de discontinuidades si no se cumplen las condiciones mencionadas sobre la superficie de discontinuidad estable en el flujo de gas (onda de choque o una discontinuidad de contacto).

Tomando en cuenta estos conceptos, supongamos que tenemos un flujo de gas con velocidad variable, si un elemento de fluido viaja a lo largo del flujo a una velocidad relativamente más rápida que otro elemento de fluido anteriormente eyectado entonces eventualmente el flujo rápido alcanzara al flujo lento, así pues, parecería que el flujo se vuelve multivaluado. La naturaleza resuelve esta aparente contradicción formando una discontinuidad inicial. la figura 1.3 muestra una ruptura de la discontinuidad inicial que da origen a dos ondas de choque s y una discontinuidad tangencial t entre ellas, esta discontinuidad t es estacionaria respecto al gas en ambas caras de la misma, a esta conjunto de dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto se le llama superficie de trabajo (Landau & Lifshitz, 1987).

Además de lo mencionado anteriormente, se puede encontrar una descripción completa de esta fenomenología en el libro de Landau & Lifshitz (1987) en donde se deducen las condiciones analíticas que determinan el modo en que se rompe la discontinuidad inicial, en función de sus parámetros hidrodinámicos.

§5. Modelo analítico no-relativista de superficies de trabajo moviéndose dentro de un medio estático

Un modelo no-relativista que describe una superficie de trabajo por medio de una solución analítica en términos de las variables hidrodinámicas de inyección de flujo y del medio externo donde el jet se propaga es presentado por Coronado & Mendoza (2017), pre-print, en el que se utilizan dos sistemas de referencia auxiliares y sus soluciones asociadas. como se describió previamente la superficie de trabajo consiste de dos ondas de choque

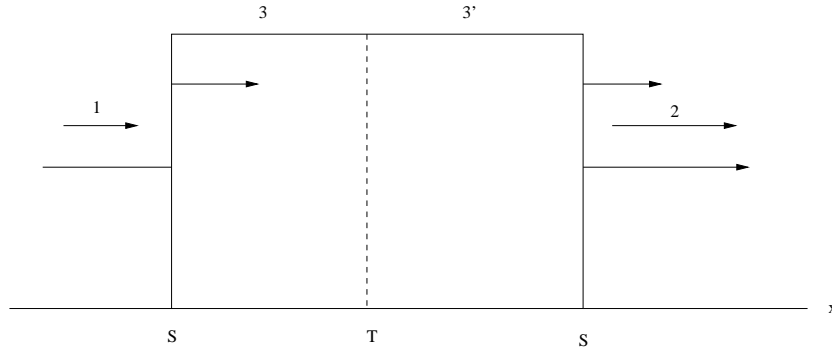


Figura 1.3: La figura muestra dos ondas de choque (s) separadas por una discontinuidad de contacto (t) estacionaria respecto al flujo del gas que rodea a ésta última. Ésta condición hidrodinámica es generada a partir de una discontinuidad inicial por las cantidades hidrodinámicas iniciales. A este conjunto de discontinuidades se le llama superficie de trabajo. Las flechas indican la dirección del movimiento de las ondas de choque (líneas continuas) y del movimiento del flujo.

y una superficie de contacto. El primer sistema de referencia considera las dos ondas de choque como estacionarias en dos casos separados. El segundo sistema de referencia toma la superficie de contacto como estacionaria, que lleva a ambas ondas de choque a alejarse de esta misma.

Estos sistemas se muestran en la figura 1.4, que indican su correspondiente transformación de velocidades y direcciones, así como las condiciones hidrodinámicas sobre la superficie de trabajo.

El primer caso se puede separar en dos sistemas de referencia. Ya que las dos ondas de choque son independientes, resolvamos cada uno por separado obteniendo así la presión, densidad y velocidad de las regiones tres y tres primada en términos de la primera y segunda región respectivamente, es decir,

$$\rho_3 = \left[\frac{(\kappa + 1)m_1^2}{(\kappa - 1)m_1^2 + 2} \right] \rho_1, \quad (5.1)$$

$$p_3 = \left[\frac{2\kappa m_1^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right] p_1, \quad (5.2)$$

$$b_3 = \left[\frac{2 + m_1^2(\kappa - 1)}{m_1^2(\kappa + 1)} \right] b_1, \quad (5.3)$$

donde $m_1 := b_1/a_1$ corresponde al número de Mach de la primera región, definida en el

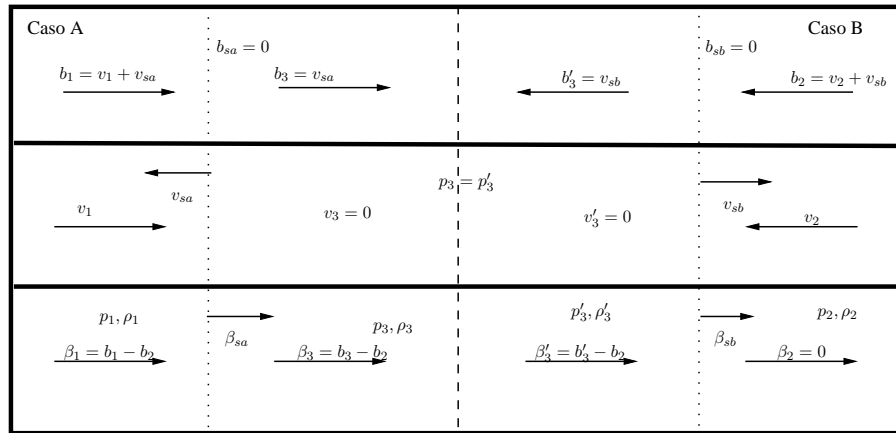


Figura 1.4: Los paneles de arriba hacia abajo muestran tres sistemas de referencia particulares para una superficie de trabajo. Las flechas indican la dirección de la velocidad del flujo o de las ondas de choque. Las líneas punteadas son las ondas de choque, mientras que la línea discontinua denota la discontinuidad de contacto. El panel de arriba muestra la superficie de trabajo en dos sistemas de referencia independientes donde, en cada uno la onda de choque correspondiente se encuentra en reposo. El panel de en medio muestra la superficie de trabajo de tal forma que la discontinuidad de contacto está en reposo. el panel de abajo muestra a la superficie de trabajo moviéndose a través de un medio estacionario.

sistema estacionario del choque, con b_1 la velocidad del primer fluido y a_1 es la velocidad del sonido en la primera región. las ecuaciones (5.1)-(5.3) se obtienen de las condiciones de salto. De la misma manera, podemos obtener para el otro caso:

$$\rho'_3 = \left[\frac{(\kappa + 1)m_2^2}{(\kappa - 1)m_2^2 + 2} \right] \rho_2, \quad (5.4)$$

$$p'_3 = \left[\frac{2\kappa m_2^2 - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right] p_2, \quad (5.5)$$

$$b'_3 = \left[\frac{2 + m_2^2(\kappa - 1)}{m_2^2(\kappa + 1)} \right] b_2, \quad (5.6)$$

donde $m_2 := b_2/a_2$ corresponde al numero de Mach de la segunda región, con b_2 la velocidad del segundo fluido y a_2 es la velocidad del sonido en la segunda región.

Utilizando las transformaciones de coordenadas galileanas entre los diferentes sistemas de referencia y la proporción de las velocidades entre las regiones para el caso A y B, se encuentra la velocidad del choque v_{sa} y v_{sb} del sistema de referencia estacionario de la superficie de contacto obteniendo

$$v_{sa} = -\frac{1}{4} \left((\kappa + 1)v_1 \pm \sqrt{[(\kappa + 1)v_1]^2 + 16c_{sa}^2} \right), \quad (5.7)$$

donde $c_{sa} = v_{sa}/m_{sa}$ representa la velocidad del sonido asociada al choque entre la región uno y tres, así como:

$$v_{sb} = -\frac{1}{4} \left((\kappa + 1)v_2 \pm \sqrt{[(\kappa + 1)v_2]^2 + 16c_{sb}^2} \right), \quad (5.8)$$

con $c_{sb} = v_{sb}/m_{sb}$ la velocidad del sonido asociada al choque entre la región dos y tres prima.

Las condiciones de la superficie de contacto implican que las expresiones de las regiones tres y tres prima deben ser las mismas, es decir: $p_3 = p'_3$ (Landau & Lifshitz, 1987). Utilizando esto y las ecuaciones (5.2) y (5.5) se obtiene

$$m_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2m_1^2 p_1}{p_2} + \frac{p_1}{\kappa p_2} - \frac{p_1}{p_2} - \frac{1}{\kappa} + 1}. \quad (5.9)$$

De la expresión para la velocidad de inyección en el sistema de referencia del movimiento

completo, $\beta_1 = b_1 - b_2$ obtenemos una relación entre los números de Mach en el primer y segundo choque que constituye la superficie de trabajo:

$$m_2 = (m_1 - m_1) \frac{c_1}{c_2}, \quad (5.10)$$

con $m_1 = \beta_1/c_1$. utilizando la ecuación (5.9) y la expresión previa obtenemos una solución de los números de Mach m_1 y m_2 en términos de las variables del flujo inyectado y el medio externo β_1, p_1, ρ_1 y $\beta_2 = 0, p_2, \rho_2$ respectivamente (Coronado & Mendoza, 2017), pre-print.

Para calcular la energía dentro de la superficie de trabajo tomemos las condiciones de choque fuerte para los números de Mach m_1 y m_2 , es decir, supongamos que

$$m_1 \gg 1, \quad (5.11)$$

y por lo tanto:

$$m_2 \approx \left(\frac{\kappa - 1}{2\kappa} \right)^{1/2}. \quad (5.12)$$

Para los casos A y B, la energía cinética por unidad de volumen de la región tres y tres prima esta dado respectivamente por:

$$E_{k3} = \frac{1}{2} \beta_3^2 \rho_3, \quad (5.13)$$

$$E'_{k3} = \frac{1}{2} \beta_3'^2 \rho_3'. \quad (5.14)$$

si calculamos ahora la energía cinética total dentro de la superficie de trabajo $E_{kt} = E_{k3} + E'_{k3}$ entonces la variación de esta energía como función del tiempo, es decir la potencia $L := dE_{kt}/dt$ de la superficie de trabajo está dada por

$$L = \rho_3 \frac{d\beta_3}{dt} + \frac{1}{2} \beta_3^2 \frac{d\rho_3}{dt} + \rho_3' \frac{d\beta_3'}{dt} + \frac{1}{2} \beta_3'^2 \frac{d\rho_3'}{dt}. \quad (5.15)$$

En el caso en que se considere que existe un proceso de radiación térmico muy eficiente de tal manera que la potencia mecánica se radía, entonces ésta cantidad representa la luminosidad emitida por la superficie de trabajo a medida que está se mueve a lo largo del jet.

Un caso en donde se modela una superficie de trabajo de forma balística y relativista se

puede encontrar en Mendoza et al. (2009), el cual es el primer referente para este trabajo. Los propósitos del artículo antes mencionado no se abarcarán aquí puesto que la idea del presente trabajo es construir un modelo totalmente hidrodinámico para encontrar una solución analítica y exacta sobre modelos de superficies de trabajo en jets astrofísicos relativistas.

Capítulo 2

Hidrodinámica relativista

Lo mas incomprensible del mundo es que sea totalmente comprensible.
Albert Einstein.

Cuando un fluido en movimiento alcanza velocidades cercanas a la de la luz, las ecuaciones que describen el estado y evolución del mismo deben tener en cuenta efectos relativistas.

En este capítulo se describirá brevemente la dinámica de los fluidos relativistas con base a los libros de Landau & Lifshitz (1987) y Mendoza (2016). La importancia de tener en cuenta los efectos relativistas puede deberse no solo a una gran velocidad del movimiento macroscópico, si no también, una gran velocidad del movimiento microscópico de las partículas del fluido (Landau & Lifshitz, 1987).

§6. Ecuaciones de la hidrodinámica relativista

Para un fluido perfecto en movimiento, en ausencia de campos de fuerza se debe determinar la forma del cuatro-tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ medido desde el sistema de referencia propio (Landau & Lifshitz, 1987)

$$T^{\nu\mu} = (p + \epsilon + \rho c^2)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}p, \quad (6.1)$$

donde c es la velocidad de la luz, u^μ es la cuatro velocidad medida desde ún sistema de referencia elegido y $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico que para el caso de un espacio-tiempo plano de Minkowski en una dimensión espacial toma la forma

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, 0, 0). \quad (6.2)$$

La cuatro-velocidad esta dada por:

$$u^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \gamma \left(1, \beta := \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{dx^1}{cdt} \right), \quad (6.3)$$

y por tanto

$$u^1 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6.4)$$

Las cantidades termodinámicas están medidas en el sistema propio del fluido. Al igual que en el capítulo anterior trabajamos con fluidos ideales y por lo tanto despreciaremos los efectos de viscosidad y conducción térmica. Con esto, el tensor de energía momento toma la forma:

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{e + \rho c^2 + \beta^2 p}{1 - \beta^2} & \frac{\beta(p + e + \rho c^2)}{1 - \beta^2} & 0 & 0 \\ \frac{\beta(p + e + \rho c^2)}{1 - \beta^2} & \frac{(e + \rho c^2)\beta^2 + p}{1 - \beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

En la mecánica relativista, en un espacio-tiempo con simetría plana las ecuaciones de campo para un sistema cerrado están determinados por la divergencia nula del tensor de energía-momento Landau & Lifshitz (1987):

$$\frac{\partial T^{\beta\alpha}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c} \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^i} = 0, \quad (6.6)$$

las cuales pueden ser escritas con el par de ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial T^{0\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} = 0, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial T^{i\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c} \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0. \quad (6.8)$$

La componente temporal T^{00} del tensor energía-momento representa la densidad de energía relativista. El vector cT^{0i} es el flujo de energía por unidad de tiempo a través de un área

unitaria perpendicular a la dirección x^i y por tanto la ecuación (6.7) es una ecuación en forma conservativa de la energía. Por otro lado, el vector T^{i0}/c representa la densidad de momento y T^{ij} es el flujo de la componente i -ésima del momento por unidad de tiempo en la dirección perpendicular al área unitaria cuyo vector normal es x^j , de tal forma que la ecuación (6.8) es una ecuación conservativa del momento lineal.

A las ecuaciones de conservación (6.7) y (6.8) debemos agregar una ecuación relativista de continuidad o conservación de masa. Para esto denotamos con n el número de partículas por unidad de volumen propio. En el sistema de laboratorio, es decir, un sistema de referencia fijo donde se observa al fluido moverse, cada partícula se mueve con una velocidad v y la densidad de partículas medida en dicho sistema es γn . Así el número de partículas contenido en un volumen V fijo al sistema de referencia del laboratorio es entonces

$$\int_V \gamma n dV, \quad (6.9)$$

De esta manera, el número total de partículas por unidad de tiempo que fluye a través de un elemento de área $d\mathbf{a}$ esta dado por

$$\oint_{\delta V} \gamma n \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}. \quad (6.10)$$

Debido a que el elemento de área apunta hacia afuera de la superficie, entonces la cantidad $\gamma n \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$ es positiva si el fluido fluye hacia afuera y negativa en caso contrario (Mendoza, 2016), donde δV es la superficie de frontera de V . Por otro lado, la tasa de decremento de partículas en dicho volumen es

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \gamma n dV. \quad (6.11)$$

Si no existen fuentes o sumideros de partículas en este volumen, las dos cantidades anteriores se igualan resultando en la forma integral de la ecuación de conservación del número de partículas:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \gamma n dV = -\frac{1}{c} \oint_{\delta V} \gamma n \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{1}{c} \int_V \nabla \cdot [\gamma n \mathbf{v}] dV. \quad (6.12)$$

Como ésta última igualdad es válida para cualquier volumen fijo y arbitrario V , los integrandos del lado derecho e izquierdo son iguales de modo que la ecuación (6.12) implica

que:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\gamma n) = -\frac{1}{c} \nabla \cdot [\gamma n \mathbf{v}]. \quad (6.13)$$

En términos de cuatro-vectores la ecuación de conservación del número de partículas o ecuación de continuidad se escribe como (Landau & Lifshitz, 1987):

$$\frac{\partial n u^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (6.14)$$

A pesar de que el enfoque de este trabajo sea sobre el flujo en una dimensión con espacio-tiempo plano de Minkowski, en general si desarrollamos el tensor energía-momento en las ecuaciones (6.7) y (6.8) a lo largo de la coordenada r y sabiendo que $\rho = mn$, siendo m la masa promedio por partícula, se obtiene el siguiente sistema de tres ecuaciones de conservación de momento, energía y densidad de materia respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\beta \frac{p + e + \rho c^2}{1 - \beta^2} \right] + \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\sigma p + \beta^2 (e + \rho c^2) \right] - \frac{\sigma p}{r} = 0, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{e + p\beta^2 + \rho c^2}{1 - \beta^2} \right] + \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\sigma \beta \frac{p + e + \rho c^2}{1 - \beta^2} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\beta \frac{\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] + \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\sigma \beta \frac{\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] = 0, \quad (6.16)$$

donde τ es el tiempo propio y $\sigma = 0, 1, 2$ para una simetría plana, esférica y cilíndrica respectivamente. En el capítulo 3 encontraremos las condiciones de salto para una onda de choque relativista de tal forma que las ecuaciones de la hidrodinámica se conserven.

§7. Velocidad del sonido relativista

Consideremos una perturbación en el fluido de tal forma que las cantidades $p = p_0 + \hat{p}$, $e = e_0 + \hat{e}$ y $v = v_0 + \hat{v}$ donde \hat{e} , \hat{p} y \hat{v} son cantidades pequeñas alrededor de los valores fijos de energía e_0 , presión p_0 y $v_0 = 0$. Sustituyendo esto en las ecuaciones (6.15)-(6.16) se obtiene a primer orden de aproximación y por lo tanto:

$$\frac{e_0 + p_0}{c^2} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = 0, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial \hat{e}}{\partial t} + (e_0 + p_0) \frac{1}{r^k} \frac{\partial (r^k \hat{v})}{\partial r} = 0. \quad (7.2)$$

Igualando la divergencia de la ecuación (7.1) con la derivada temporal de la ecuación (7.2), se encuentra que

$$\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r^k} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^k \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \right]. \quad (7.3)$$

Debido a que una onda sonora en un fluido ideal es adiabática entonces la variación pequeña de \hat{e} de la energía esta relacionada con la pequeña modificación \hat{p} de la presión a través de $\hat{e} = (\partial e / \partial p)_\sigma \hat{p}$, con lo cual se obtiene la ecuación de onda para la presión \hat{p} , o alternativamente para la energía \hat{e} . En ambos casos la velocidad de propagación de la onda es la velocidad del sonido a , tal que

$$a^2 = c^2 \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_\sigma. \quad (7.4)$$

Al igual que en hidrodinámica no-relativista la velocidad del fluido es una cantidad característica del medio y servirá como parámetro en el estudio de las discontinuidades que realizaremos en esto mismo trabajo..

§8. Ecuación de estado Bondi-Wheeler

Consideremos un gas ideal que fluye adiabaticamente en la etapa anterior y posterior a una onda de choque, este gas ideal cumple la siguiente relación politrópica (Stanyukovich, 1960):

$$p = \Theta \rho^k, \quad (8.1)$$

donde k es el índice politrópico del flujo. Para el caso de un proceso adiabático, la primera ley de la termodinámica esta dada por:

$$d \left(\frac{\omega}{n} \right) = \left(\frac{1}{n} \right) p, \quad (8.2)$$

donde $\omega = e + p$ es la entalpía específica por unidad de volumen y e es la energía por unidad de volumen total específica dado por:

$$e = nmc^2 + \epsilon = \rho c^2 + \epsilon. \quad (8.3)$$

De lo anterior se sigue que:

$$\frac{de}{e - p} = \frac{d\rho}{\rho}. \quad (8.4)$$

Sustituyendo la ecuación (8.1) en (8.4) se obtiene

$$p \frac{de}{dp} - \frac{e}{k} = \frac{p}{k}, \quad (8.5)$$

cuyas soluciones homogénea e_h y particular e_p son respectivamente

$$e_h = \xi p^{1/k}, \quad e_p = \frac{p}{\kappa - 1}. \quad (8.6)$$

Así pues la solución general de la ecuación (8.5) está dada por:

$$e = e_h + e_p = \xi p^{1/k} + \frac{p}{\kappa - 1}. \quad (8.7)$$

De la ecuación (8.1) y (8.5) se obtiene que $\xi = c^2/\Theta^{1/k}$ y por tanto la ecuación (8.7) queda de la forma:

$$e = c^2 \left(\frac{p}{\Theta} \right)^{1/\kappa} + \frac{p}{\kappa - 1}. \quad (8.8)$$

La ecuación de estado más general para un gas politrópico relativista se obtiene al sustituir la ecuación (8.1) en (8.8) para obtener (Tooper, 1965):

$$e = \rho c^2 + \frac{p}{k - 1}. \quad (8.9)$$

En algunas situaciones astrofísicas cuando se tienen gases ultra-relativistas sucede que la

presión p del mismo es mucho mayor que su densidad de masa en reposo ρc^2 . Esto equivale a elegir $\xi = 0$ y a la relación resultante se le denomina la ecuación de estado de Bondi-Wheeler para flujos ultra-relativistas :

$$p = (k - 1)e. \tag{8.10}$$

En el caso de un gas de fotones o electrones moviéndose a velocidades ultra-relativistas, el índice politrópico es $\kappa = 4/3$ (Landau & Lifshitz, 1986).

Capítulo 3

Ondas de choque relativistas.

En el universo hay un plan coherente, aunque no sé para qué es ese plan.

Fred Hoyle.

En este capítulo se describen las condiciones de salto en ondas de choque en un flujo relativista. Además como tema principal de este trabajo se desarrolla un modelo para una superficie de trabajo que se mueve a velocidades ultra-relativistas a través de un flujo de eyección periódico.

§9. Condiciones de salto en ondas de choque relativistas

Una parte importante en el estudio de la hidrodinámica relativista, así como de la no-relativista, es la presencia de ondas de choque generadas por gradientes de presión suficientemente grandes. En el espacio-tiempo de Minkowski, una onda de choque está representada por una tres hiper-superficie que se reduce a una línea de universo para un flujo en una dimensión como se muestra en la figura 3.1 (McKee & Colgate, 1973).

Sobre ésta línea de universo las cantidades hidrodinámicas varían de manera discontinua y resulta que, cuando un elemento de fluido atraviesa la onda de choque las cantidades hidrodinámicas cambian de modo que la entropía por unidad de volumen σ aumenta, en completa concordancia con la segunda ley de la termodinámica. Utilizando, como antes los subíndices 1 y 2 para las cantidades antes y después de la onda de choque respectivamente, esto significa que

$$\sigma_1 < \sigma_2.$$

Esta desigualdad determina la forma en que cambian el resto de las cantidades hidrodinámicas (Taub, 1967). En el sistema de referencia de la onda de choque, la velocidad del fluido satisface las siguientes desigualdades (Landau & Lifshitz, 1987):

$$v_1 > a_1, \quad v_2 < a_2.$$

De igual modo, el aumento de entropía indica que la densidad de partículas y la presión aumentan, esto es:

$$n_1 < n_2, \quad p_2 > p_1.$$

Los cambios en las cantidades hidrodinámicas no son arbitrarios. El flujo de momento, energía y masa deben ser conservados a través de la hiper-superficie de discontinuidad. Para escribir las condiciones de salto en cualquier sistema de referencia describiremos brevemente a continuación el método presentado por McKee & Colgate (1973) considerando una hiper-superficie cerrada sobre la línea de universo de la onda de choque como se muestra en la figura 3.1.

De las ecuaciones de conservación:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\beta \frac{p + e + \rho c^2}{1 - \beta^2} \right] + \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\sigma \frac{p + \beta^2(e + \rho c^2)}{1 - \beta^2} \right] - \frac{\sigma p}{r} = 0, \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{e + p\beta^2 + \rho c^2[1 - \sqrt{(1 - \beta^2)}]}{1 - \beta^2} \right] + \\ \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\sigma \beta \frac{p + e + \rho c^2[1 - \sqrt{(1 - \beta^2)}]}{1 - \beta^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\beta \frac{\rho}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \right] + \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\sigma \beta \frac{\rho}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \right] = 0. \quad (9.3)$$

Cada una de estas ecuaciones tiene la forma:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(r^\sigma A) + \frac{\partial}{\partial r}(r^\sigma B) + C = 0, \quad (9.4)$$

donde A , B y C son funciones de las cantidades hidrodinámicas ρ , e , p , y β . Integrando la relación (9.4) sobre una hiper-superficie suficientemente pequeña que contenga la línea de universo de la onda de choque, como se muestra en la figura 3.1, se llega a la expresión:

$$\int \int \left[\frac{\partial}{\partial \tau}(r^\sigma A) + \frac{\partial}{\partial r}(r^\sigma B) + C \right] dr d\tau = 0, \quad (9.5)$$

o bien, de acuerdo al teorema de Stokes:

$$\oint (r^\sigma B d\tau - r^\sigma A dr) + \int \int C dr d\tau = 0. \quad (9.6)$$

Dado que queremos encontrar condiciones de salto, de las variables hidrodinámicas a través de la onda de choque, tomemos el caso limite en el que los segmentos normales a la hiper-superficie tienden a cero. Así, la contribución de los segmentos normales a la curva en la integral (9.6) de línea será entonces despreciable. Además, si el volumen que encierra la hiper-superficie es muy pequeño, la integral de área en la ecuación (9.6) es una cantidad de orden superior a la integral de línea y puede ser despreciable. Por lo tanto r es continua a través del choque y puede entonces ser tomada aproximadamente como una constante sobre el volumen que encierra la hiper-superficie. De ésta manera, la ecuación (9.6) se reduce a:

$$\oint (r^\sigma B d\tau - r^\sigma A dr) = 0. \quad (9.7)$$

Como se muestra en la figura 3.1 denotemos por A^- , B^- , A^+ y B^+ a los valores pre y post choque de las funciones A y B respectivamente. Así, debido a los argumentos expuestos anteriormente la ecuación (9.7) implica que:

$$A^+(r_2 - r_1) - A^-(r_2 - r_1) = B^+(\tau_2 - \tau_1) - B^-(\tau_2 - \tau_1). \quad (9.8)$$

Dividiendo la ecuación anterior entre el intervalo de tiempo propio $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ y definiendo

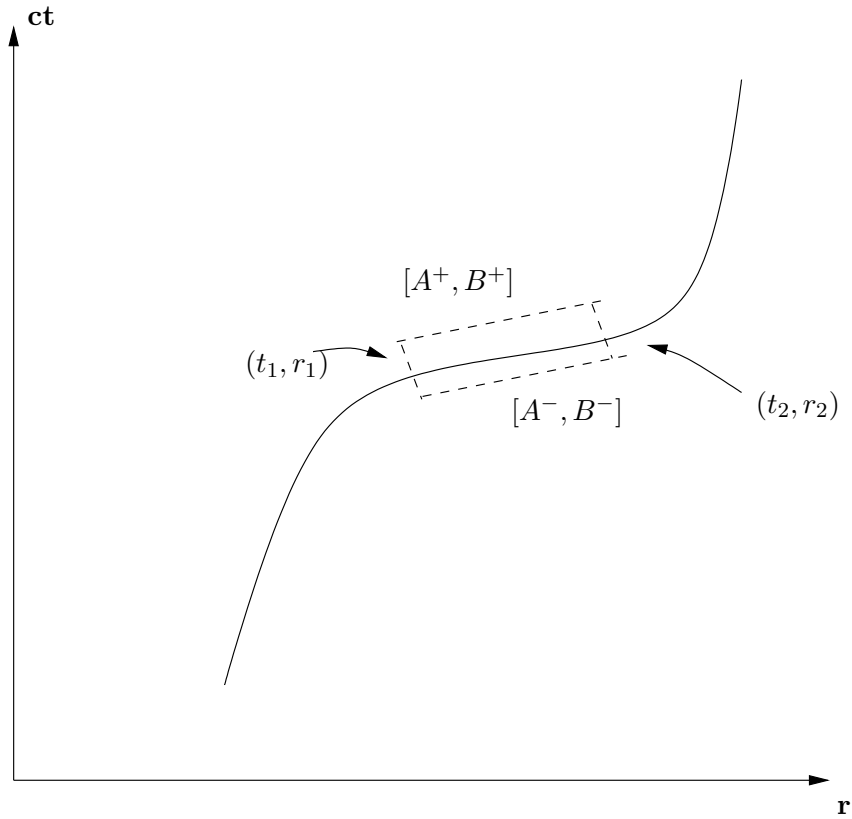


Figura 3.1: En el espacio-tiempo de la figura, la línea continua representa a la línea universo de la onda de choque. La región superior a ésta línea es tal que la materia aun no es afectada por la onda de choque y debajo de esta línea la materia ha sido chocada por la misma. La superficie infinitesimal mostrada en líneas punteadas cubre a un elemento suficientemente pequeño de la línea universo y sobre esta superficie se integran las ecuaciones de conservación para obtener así las condiciones de salto entre las regiones separadas del choque.

$$\delta A := A^+ - A^-, \quad \delta B := B^+ - B^-, \quad (9.9)$$

se obtiene:

$$\beta_s \delta A = \delta B, \quad (9.10)$$

donde $\beta_s = r_2 - r_1/\tau_2 - \tau_1$ es la velocidad de la onda de choque. La ecuación (9.10) representa las condiciones de salto relativistas para cualquier sistema de referencia. en el caso en que la onda de choque está en reposo, se denominan condiciones de salto de Taub (Landau & Lifshitz, 1987) y para este mismo caso en el limite no-relativista convergen a las condiciones de salto de Rankin-Hugoniot. Sustituyendo las ecuaciones de conservación (9.1)-(9.3) en la ecuación (9.10) se obtienen las condiciones de salto a través de una onda de choque en una dimensión con simetría plana, esférica y cilíndrica. En un espacio-tiempo plano de Minkowski se obtiene:

$$\beta_s \delta \left[\frac{p + e + \rho c^2}{1 - \beta^2} \right] = \delta \left[\frac{p + \beta^2(e + \rho c^2)}{1 - \beta^2} \right], \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} \beta_s \delta \left[\frac{e + p\beta^2 + \rho c^2[1 - \sqrt{(1 - \beta^2)}]}{1 - \beta^2} \right] \\ = \delta \left[\beta \frac{p + e + \rho c^2[1 - \sqrt{(1 - \beta^2)}]}{1 - \beta^2} \right], \end{aligned} \quad (9.12)$$

$$\beta_s \delta \left[\frac{\rho}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \right] = \delta \left[\beta \frac{\rho}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \right]. \quad (9.13)$$

para los saltos en la momento, energía y masa respectivamente. Estas son las condiciones de salto representadas en un sistema de referencia inercial arbitrario.

§10. Condiciones de salto para un flujo de gas ultra-relativista

Consideremos un flujo de gas politrópico eyectado con una presión p_j , una densidad de energía por unidad de volumen ϵ_j , una densidad de masa ρ_j y con una velocidad ultra-

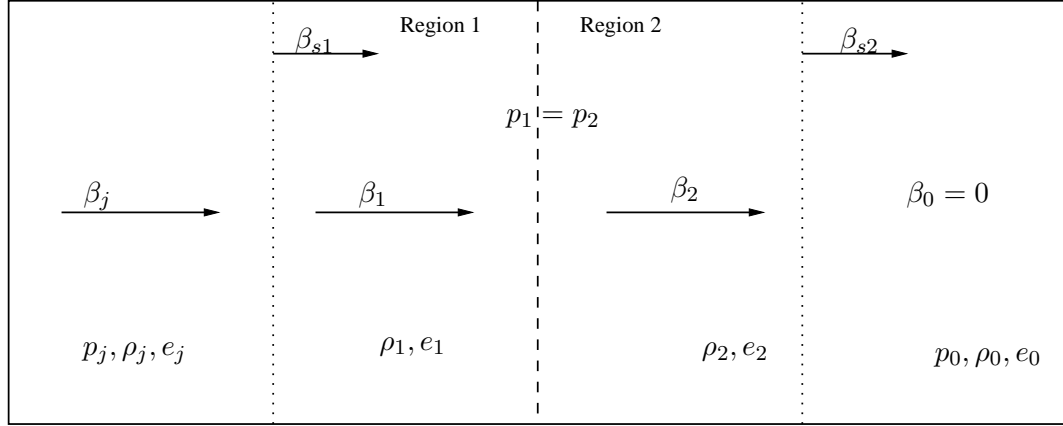


Figura 3.2: La figura muestra una superficie de trabajo, es decir, dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto la cual se propaga sobre un gas en reposo. En el presente trabajo se supone que la superficie de trabajo ha sido generada por una inyección de flujo variable proveniente del lado izquierdo de la figura. Las líneas punteadas representan las ondas de choque y la línea discontinua a la discontinuidad de contacto. Las flechas indican la dirección de la velocidad del flujo y de las ondas de choque. Las cantidades ρ , e y p son distintas en cada una de las regiones de la superficie de trabajo y están determinadas a partir de las condiciones iniciales del flujo de eyección y el medio externo que lo rodea.

relativista $\beta_j \approx 1$ variable. Supongamos además que la ecuación de estado del fluido es ultra-relativista de tal manera que la energía interna específica es mucho más grande que la energía en reposo de cada partícula del fluido, es decir, $\epsilon \gg \rho c^2$. Éste flujo es eyectado sobre un medio externo circundante con una presión p_0 y densidad ρ_0 en reposo. El flujo ultra-relativista generará una discontinuidad inicial debido a que la velocidad v_j varía con el tiempo, y así, si una fracción de flujo de masa eyectada a una velocidad más rápida eventualmente alcanzara a flujo lento en algún punto a lo largo del medio externo generando un flujo multivaluado. La naturaleza resuelve este problema generando una discontinuidad inicial que da origen a la creación de una superficie de trabajo (Mendoza et al. (2009), Landau & Lifshitz (1987)).

La figura 3.2 muestra dos ondas de choque separadas por una discontinuidad de contacto generadas por una velocidad periódica de eyección. Denotemos a la parte derecha entre la discontinuidad de contacto y la onda de choque como la región 2 que contiene material chocado. La onda de choque produce una discontinuidad en las cantidades hidrodinámicas

entre el medio externo ($p_0, \rho_0, \beta_0 = 0$) y el flujo de eyección (p_2, ρ_2, β_2). Asimismo, denotemos a la región izquierda entre la onda de choque y la discontinuidad de contacto como la región 1 que contiene material chocado inyectado, pero con una densidad de masa diferente a la región 2. La onda de choque en ésta región también produce una discontinuidad en las cantidades hidrodinámicas entre el flujo de eyección (p_j, ρ_j, v_j) y el medio chocado (p_1, ρ_1, β_1). Si consideramos por separado, dos sistemas de referencia donde en cada una de estas las ondas de choque se encuentran en reposo respecto al medio no chocado correspondiente, entonces podemos analizar ambas ondas de choque por separado a partir de las condiciones de salto encontradas en la sección §9

Aplicando las condiciones de salto (9.11)-(9.13) entre la región 1 y el material del jet donde se inyecta el flujo se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \beta_{s1} \left(\frac{\beta_1(p_1 + e_1 + \rho_1 c^2)}{(1 - \beta_1^2)} - \frac{\beta_j(p_j + e_j + \rho_j c^2)}{(1 - \beta_j^2)} \right) \\ = \frac{p_1 + \beta_1^2(e_1 + \rho_1 c^2)}{(1 - \beta_1^2)} - \frac{p_j + \beta_j^2(e_j + \rho_j c^2)}{(1 - \beta_j^2)}, \end{aligned} \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} \beta_{s1} \left(\frac{e_1 + \beta_1^2 p_1 + \rho_1 c^2 (1 - \sqrt{1 - \beta_1^2})}{1 - \beta_1^2} - \frac{e_j + \beta_j^2 p_j + \rho_j c^2 (1 - \sqrt{1 - \beta_j^2})}{1 - \beta_j^2} \right) \\ = \beta_1 \frac{e_1 + p_1 + \rho_1 c^2 (1 - \sqrt{1 - \beta_1^2})}{1 - \beta_1^2} - \beta_j \frac{e_j + p_j + \rho_j c^2 (1 - \sqrt{1 - \beta_j^2})}{1 - \beta_j^2}, \end{aligned} \quad (10.2)$$

$$\beta_{s1} \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} - \frac{\rho_j}{\sqrt{1 - \beta_j^2}} \right) = \frac{\rho_1 \beta_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} - \frac{\rho_j \beta_j}{\sqrt{1 - \beta_j^2}}, \quad (10.3)$$

para los saltos en el momento, energía y masa respectivamente. Utilizando las condiciones de choque fuerte con $\epsilon \gg \rho c^2$ y la ecuación de Bondi-Wheeler (8.10) para un flujo ultra-relativista con índice politrópico $\kappa = 4/3$, las relaciones (10.1)-(10.3) se reducen a

$$\beta_{s1} \left(\frac{4p_1\beta_1}{1-\beta_1^2} - \frac{4p_j\beta_j}{1-\beta_j^2} \right) = \frac{3p_1\beta_1^2 + p_1}{1-\beta_1^2} - \frac{3p_j\beta_j^2 + p_j}{1-\beta_j^2}, \quad (10.4)$$

$$\beta_{s1} \left(\frac{p_1\beta_1^2 + 3p_1}{1-\beta_1^2} - \frac{p_j\beta_j^2 + 3p_j}{1-\beta_j^2} \right) = \frac{4p_1\beta_1}{1-\beta_1^2} - \frac{4p_j\beta_j}{1-\beta_j^2}, \quad (10.5)$$

$$\beta_{s1} \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} - \frac{\rho_j}{\sqrt{1-\beta_j^2}} \right) = \frac{\rho_1\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} - \frac{\rho_j\beta_j}{\sqrt{1-\beta_j^2}}. \quad (10.6)$$

La velocidad del fluido y la velocidad del choque de la región 1 se relacionan con el factor de Lorentz del fluido y el factor de Lorentz del choque a orden $O(\Gamma^{-2})$ de la siguiente manera:

$$\beta_{s1} = 1 - \frac{1}{2\Gamma_{s1}^2}, \quad (10.7)$$

y

$$\beta_1 = 1 - \frac{1}{2\Gamma_1^2}. \quad (10.8)$$

Como se muestra en apéndice §1, la ecuación (10.5) puede ser escrita como:

$$\beta_{s1} - \beta_1 = \frac{(1-\beta_1^2)[\beta_1(p_1 + D) - E]}{p_1\beta_1^2 + 3p_1 - (1-\beta_1^2)D}, \quad (10.9)$$

en donde:

$$D = \frac{p_j\beta_j^2 + 3p_j}{1-\beta_j^2}, \approx 4p_j\Gamma_j^2, \quad (10.10)$$

$$E = \frac{4p_j\beta_j}{1-\beta_j^2} \approx 4p_j\Gamma_j^2, \quad (10.11)$$

al mismo orden de aproximación. Sustituyendo las ecuaciones (10.7)-(10.8) junto con las dos definiciones anteriores en la ecuación (10.9) se llega a una relación entre los factores de Lorentz del flujo y de la onda de choque respectivamente:

$$\Gamma_{s1}^2 \approx \frac{1}{2} \frac{p_0}{p_j} \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_j} \right)^2. \quad (10.12)$$

Sustitución directa de ésta ultima relación en la ecuación (10.6) implica que (cf. apéndice §1):

$$\rho_1 = \frac{2(F - G)p_0\Gamma_1}{p_0 + D}, \quad (10.13)$$

donde F y G son funciones que dependen implícitamente de la velocidad de eyección β_j variable, están dadas por:

$$F = \frac{\rho_j}{\sqrt{1 - \beta_j^2}} \approx \rho_j \Gamma_j, \quad (10.14)$$

$$G = \frac{\rho_j \beta_j}{\sqrt{1 - \beta_j^2}} \approx \rho_j \Gamma_j. \quad (10.15)$$

Sustituyendo estas dos ultimas relaciones junto con las ecuaciones (10.7) y (10.8) se deduce una relación entre la densidad de masa y los factores de Lorentz del choque y de eyección como se muestra a continuación:

$$\rho_1 \approx \frac{\rho_j p_0 \Gamma_1}{2 p_j \Gamma_j}. \quad (10.16)$$

Encontremos ahora las relaciones equivalentes para las cantidades hidrodinámicas de la región 2 y el medio externo que está en reposo. Este caso particular fue descrito por McKee & Colgate (1973) y las condiciones que se obtienen son:

$$\beta_{s2} \left(\frac{\beta_2(p_2 + e_2 + \rho_2 c^2)}{1 - \beta_2^2} \right) = \frac{p_2 + \beta_2^2(e_2 + \rho_2 c^2)}{1 - \beta_2^2} - p_0, \quad (10.17)$$

$$\beta_{s2} \left(\frac{e_2 + \beta_2^2 p_2 + \rho_2 c^2 (1 - \sqrt{1 - \beta_2^2})}{1 - \beta_2^2} - e_0 \right) = \beta_2 \frac{e_2 + p_2 + \rho_2 c^2 (1 - \sqrt{1 - \beta_2^2})}{1 - \beta_2^2}, \quad (10.18)$$

$$\beta_{s2} \left(\frac{\rho_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} - \rho_0 \right) = \frac{\rho_2 \beta_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}. \quad (10.19)$$

De aquí se sigue en particular que (McKee & Colgate, 1973):

$$\beta_{s2} - \beta_2 = \frac{\beta_2 (1 - \beta_2^2) (p_2 + e_0)}{\beta_2^2 p_2 + e_2 + \rho_2 c^2 \left[1 - \sqrt{(1 - \beta_2^2)} \right] - e_0 (1 - \beta_2^2)}, \quad (10.20)$$

$$p_2 = \frac{p_0 + \beta_2 \beta_{s2} (e_0 + \rho_0 c^2)}{1 - \beta_2 \beta_{s2}}, \quad (10.21)$$

$$\rho_2 = \rho_0 \frac{\beta_{s2} \sqrt{1 - \beta_2^2}}{\beta_{s2} - \beta_2}. \quad (10.22)$$

De la misma manera que antes, supongamos que los flujos se mueven a velocidades ultra-relativistas y que están caracterizados por la ecuación de estado de Bondi-Wheeler (8.10) con un índice politrópico $\kappa = 4/3$. Así, a orden $O(\Gamma^{-2})$ de aproximación, las velocidades están dadas por:

$$\beta_{s2} = 1 - \frac{1}{2\Gamma_{s2}^2}, \quad (10.23)$$

y

$$\beta_2 = 1 - \frac{1}{2\Gamma_2^2}. \quad (10.24)$$

De aquí se sigue que (Blandford & McKee, 1976)

$$\Gamma_{s2}^2 = 2\Gamma_2^2, \quad (10.25)$$

y con esto se pueden obtener las relaciones entre las cantidades ρ_2 y p_2 con ambos factores de Lorentz que están dadas por:

$$\rho_2 = 4\rho_0\Gamma_2, \quad (10.26)$$

$$p_2 = \frac{2}{3}\Gamma_{s2}^2\omega_2, \quad (10.27)$$

donde la entalpía específica $\omega_2 = 4p_0$ para el caso de flujos ultra-relativistas.

Además, dentro de la superficie de contacto la presión es continua, es decir, $p_1 = p_2$ pero no así la densidad de masa (y por lo tanto tampoco la temperatura ni la entropía). Debido a que el movimiento del flujo es en una sola dirección y ya que su velocidad intrínseca es perpendicular a la discontinuidad de contacto se concluye que la velocidad es continua a través de la discontinuidad de contacto, es decir, $\beta_1 = \beta_2$ (Landau & Lifshitz, 1987). Por tanto se puede encontrar una relación entre los factores de Lorentz de ambas ondas de choque:

$$\Gamma_{s2}^2 = 2 \left(1 + \frac{D}{2p_0} \right) \Gamma_{s1}^2 \approx 4 \frac{p_0}{p_j} \Gamma_j^2 \Gamma_{s1}^2. \quad (10.28)$$

Como la presión es continua en ambas regiones se puede calcular ahora la presión p_1 en términos de Γ_1 (cf. apéndice §1)

$$p_1 = \frac{4}{3}\Gamma_1^2\omega_2. \quad (10.29)$$

Finalmente enlistamos una relación entre la dependencia de la velocidad de la región 1 con la velocidad de eyección variable β_j :

$$\beta_1 = 1 - \frac{p_j}{p_0} \frac{1}{8A^2(1 - \beta_j)^2}, \quad (10.30)$$

donde $A \approx 0.02$. El apéndice §1 muestra como obtener ésta última ecuación.

§11. Condiciones de energía

Calculemos ahora la energía por unidad de volumen e_T dependiente del tiempo que se produce dentro de la superficie de trabajo. Dicha energía es la suma de las energías e_{k1} y e_{k2} producidas en las regiones 1 y 2, es decir:

$$e_T(t) = e_{k1}(t) + e_{k2}(t), \quad (11.1)$$

donde las energías por unidad de volumen de cada región están dados respectivamente por:

$$e_{k1}(t) = \Gamma_1(t)\rho_1(t)c^2 + \epsilon_1(t), \quad (11.2)$$

$$e_{k2}(t) = \Gamma_2(t)\rho_2(t)c^2 + \epsilon_2(t), \quad (11.3)$$

siendo ϵ_1 y ϵ_2 las energías internas por unidad de volumen en las regiones 1 y 2, dadas por (McKee & Colgate, 1973)

$$\epsilon_1(t) = \rho_1(t)c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1(t)^2}} - 1 \right) + \frac{\beta_{s1}(t)(\beta_1(t)J(t) - L(t)) + M(t) - \beta_1 K(t)}{\beta_{s1}(t) - \beta_1(t)}, \quad (11.4)$$

$$\epsilon_2(t) = \rho_2(t)c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2(t)^2}} - 1 \right) + \frac{\beta_{s2}(t)e_0 + \beta_2(t)p_0}{\beta_{s2}(t) - \beta_2(t)}, \quad (11.5)$$

en donde:

$$J(t) = K(t) = L(t) = M(t) = 4p_j\Gamma_j(t)^2. \quad (11.6)$$

Si suponemos que la energía e_T es radiada completamente de la superficie de trabajo debido a algún proceso de enfriamiento radiativo totalmente eficiente, entonces es posible calcular la potencia por unidad de volumen $L := de_T/dt$ que es emitida por la superficie de trabajo. Supongamos ahora que la eyección de flujo es oscilante y que su velocidad está dada por:

$$\beta_j = \beta_{j0} + \beta_{j1} \sin \omega t, \quad (11.7)$$

donde $\beta_{j0} \leq 1$ es una velocidad de eyección constante, $\beta_{j1} \ll 1$ es un parámetro positivo pequeño y ω es la frecuencia angular de la oscilación. Esta elección produce una pequeña perturbación sinusoidal alrededor de una velocidad base β_{j0} cercana a la velocidad de la luz. El parámetro $\beta_{j1} \sin \omega t$ es elegido suficientemente pequeño de tal forma que el movimiento no sea superlumínico. Un ejemplo de esto se muestra en la figura 3.3. Además, suponemos

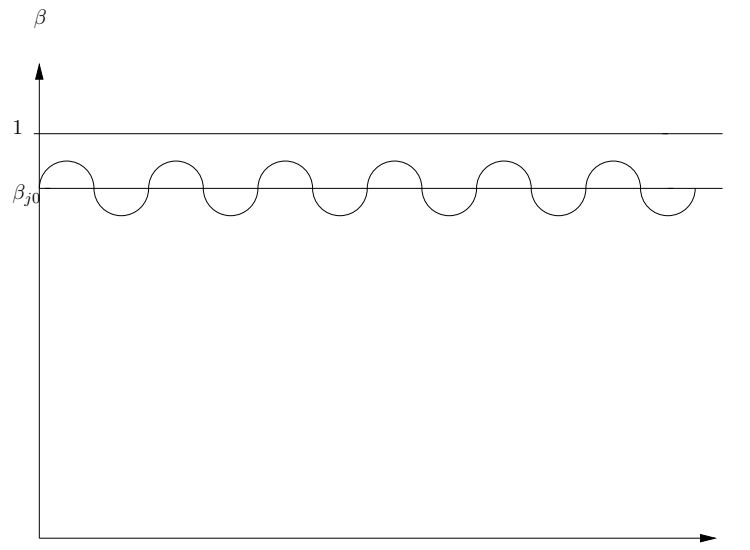


Figura 3.3: La gráfica muestra un tipo de variabilidad que se impone a la velocidad de inyección β_j en la base del jet como se muestra en la ecuación (11.7). El término sinusoidal produce ondulaciones alrededor de una velocidad de fondo fija β_{j0} . A la velocidad de eyección se le impone ser menor o igual a la velocidad en unidades de c , es decir, $\beta_j \leq 1$ para que el movimiento no sea superlumínico.

que la eyección de densidad de masa ρ_j es constante en el flujo inicial.

Dimensionalmente la luminosidad depende de las cantidades c , β_{j0} , β_{j1} , ρ_j , ρ_0 y ω . Si elegimos un sistema de unidades tal que $c = 1$, con dimensiones correspondientes $[c] = 1$, entonces las dimensiones de la densidad de masa son ml^{-3} y la frecuencia $[\omega] = 1/l$, con m las dimensiones de masa y l las dimensiones de longitud respectivamente. Además, ya que β_{j0} y β_{j1} son adimensionales, entonces las dimensiones de L en este sistema son $[L] = l^2$.

A manera de ejemplo, consideremos los siguientes valores de las cantidades hidrodinámicas: $\beta_{j0} = 0.9$, $\beta_{j1} = 0.09$, $\rho_j = 10.0$, $\rho_0 = 1.0$. Con esto se puede encontrar la luminosidad como función del tiempo derivando la ecuación (11.1) respecto al tiempo. En el apéndice §2 se muestra la expresión completa de la luminosidad $L(t)$ que se encuentra con ayuda del Computer Algebra System (CAS) Maxima (www.maxima.sourceforge.net). La figura 3.4 muestra la correspondiente curva de luz de resultado.

La gráfica de la figura 3.4 caracteriza la disipación de energía con el paso del tiempo por la superficie de trabajo. La luminosidad no inicia desde un tiempo $t = 0$ ya que el flujo rápido alcanza a flujo lento a un tiempo $t > 0$ en el cual se genera la superficie de trabajo. Además se muestra un crecimiento abrupto en la luminosidad a tiempos cortos, mostrando

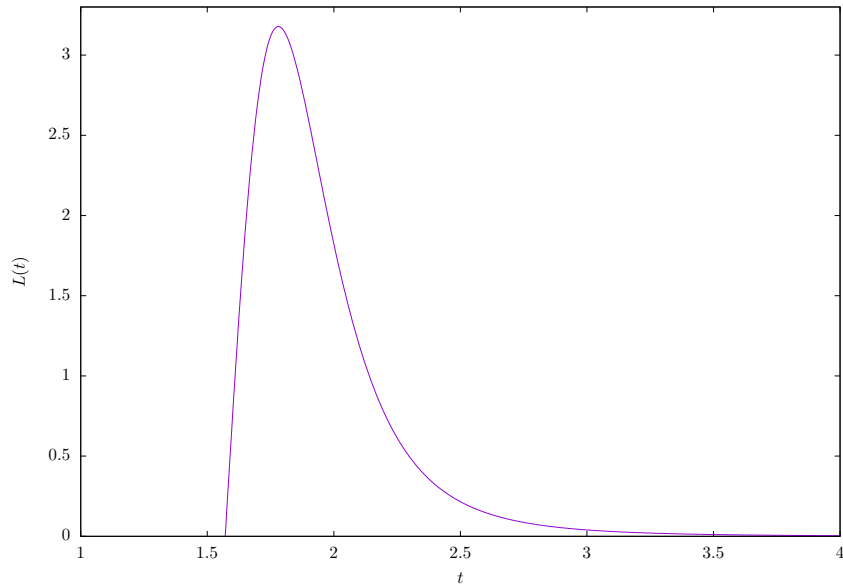


Figura 3.4: La curva describe la potencia o luminosidad necesaria L medida en unidades de 10^9 que produce la superficie de trabajo respecto al tiempo t . Esta curva de luz muestra un crecimiento abrupto en un intervalo de tiempo corto que describe la energía emitida por la superficie de trabajo. Esta energía liberada decrece monótonamente por lo que el flujo regresa a ser estable mientras no haya un cambio que lo perturbe. La gráfica fue construida utilizando las cantidades $\beta_{j0} = 0.9$, $\beta_{j1} = 0.09$, $\rho_j = 10.0$, $\rho_0 = 1.0$ en un sistema de unidades donde la velocidad dada es $[c] = 1$ cuando su magnitud es unitaria.

que la energía perdida por la superficie de trabajo es radiada eficientemente. Esto hace que el flujo deja de ser adiabático debido a la transferencia de energía con el medio externo. Esta disipación de energía por enfriamiento ocurre en intervalos de tiempo suficientemente pequeños por lo que la curva de luz decrece monótonamente.

Conclusión

En este trabajo se ha encontrado una solución analítica de las cantidades hidrodinámicas en las condiciones de salto que ocurren al generarse una superficie de trabajo a lo largo de un flujo relativista. Dicho de otra manera, las cantidades hidrodinámicas dentro de la superficie de trabajo quedaron determinadas por la velocidad de inyección variable del flujo inicial β_j , la densidad de masa ρ_j , la presión p_j y por las cantidades que caracterizan al medio externo que rodea a este flujo relativista: ρ_0 y p_0 . Todos estos son valores propuestos a partir de las condiciones iniciales dadas para nuestro problema a caracterizar. Por tanto se obtiene una solución exacta de las condiciones de salto que deben de cumplirse para que las cantidades hidrodinámicas no violen ninguna ley de conservación a través de la superficie de trabajo.

Además se calculó la potencia radiada, es decir, la energía por unidad de volumen por unidad de tiempo, generada por la superficie de trabajo. Suponiendo un proceso de enfriamiento de emisión radiativa eficiente, ésta energía se disipará en forma de emisión electromagnética. Así se generará un destello de luz descrito por una curva luz como función de las condiciones iniciales impuestas a la inyección del flujo ultra-relativista.

A manera de ejemplificar el resultado obtenido, en el presente trabajo se caracterizó a un flujo adiabático cuya velocidad variable de eyección tuviese una forma oscilatoria alrededor de un valor fijo constante y que la densidad de masa inyectada fuera constante en el flujo inicial adiabático. Las cantidades hidrodinámicas que elegimos de acuerdo a un análisis dimensional de la luminosidad L , trazan una curva de luz cuya característica principal refleja un crecimiento abrupto en la potencia o luminosidad en un intervalo de tiempo suficientemente corto. Tiempo mas tarde, esta curva decrece de manera suave hasta que el flujo regresa a su estado original.

Apéndice 1

§1. Relaciones entre las cantidades hidrodinámicas dentro de la superficie de trabajo

Para obtener las relaciones de las cantidades hidrodinámicas que existen entre el flujo eyectado y la región 1 del medio chocado por la onda ultra-relativista como se muestra en la figura 3.2 y en la sección §10, utilicemos las condiciones de salto con condiciones de choque fuerte, es decir, las ecuaciones (10.4) a (10.6) y apliquemos algunos de los resultados expuestos por McKee & Colgate (1973).

Comencemos por escribir la ecuación de la energía dada (10.5) de la siguiente manera:

$$\beta_{s1} \left(\frac{p_1 \beta_1^2 + 3p_1}{1 - \beta_1^2} - D \right) = \frac{4p_1 \beta_1}{1 - \beta_1^2} - E, \quad (1.1)$$

o bien:

$$(p_1 \beta_1^2 + 3p_1 - (1 - \beta_1^2)D) = 4p_1 \beta_1 - (1 - \beta_1^2)E. \quad (1.2)$$

Resolviendo para $\beta_{s1} - \beta_1$ se obtiene que:

$$\beta_{s1} - \beta_1 = \frac{(1 - \beta_1^2)(\beta_1(p_0 + D) - E)}{p_1 \beta_1^2 + 3p_1 - (1 - \beta_1^2)D}. \quad (1.3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (10.7)-(10.8) en la expresión anterior se obtiene a orden $O(\Gamma^{-2})$ de aproximación:

$$\frac{1}{2\Gamma_1^2} - \frac{1}{2\Gamma_{s1}^2} = \frac{-8D + (4p_0 - D + E)/\Gamma_1^2}{-8p_0 + (2p_0 + 3D)/\Gamma_1^2 + 32p_0\Gamma_1^2}, \quad (1.4)$$

es decir:

$$\Gamma_{s1}^2 = \frac{\Gamma_1^2}{1 + D/2p_0}. \quad (1.5)$$

Utilizando las ecuaciones (1.5) y (10.25) es posible relacionar las velocidades de ambas ondas de choque debido a la continuidad de las velocidades en la superficie de trabajo, es decir, debido a que $\beta_1 = \beta_2$, y por lo tanto:

$$\Gamma_{s2}^2 = 2 \left(1 + \frac{D}{2p_0} \right) \Gamma_{s1}^2 \approx 4 \frac{p_0}{p_j} \Gamma_j^2 \Gamma_{s1}^2. \quad (1.6)$$

Para obtener una relación de la densidad de masa utilicemos la ecuación de conservación de masa (10.6), reescrita de la siguiente forma:

$$\beta_{s1} \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} - F \right) = \frac{\rho_1 \beta_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} - G, \quad (1.7)$$

donde

$$F := \frac{\rho_j}{\sqrt{1 - \beta_j^2}}, \quad G := \frac{\rho_j \beta_j}{\sqrt{1 - \beta_j^2}}, \quad (1.8)$$

La densidad de masa puede entonces obtenerse de la ecuación (1.7):

$$\rho_1^2 = \frac{(\beta_{s1}^2 F^2 - 2GF\beta_{s1}^2 + G^2)(1 - \beta_1^2)}{\beta_{s1}^2 - 2\beta_{s1}\beta_1 + \beta_1^2}, \quad (1.9)$$

y sustituyendo las relaciones (10.7) y (10.8) en esta última ecuación se llega a:

$$\rho_1^2 = \frac{(F^2(1 - \Gamma_{s1}^{-2} + (4\Gamma_{s1}^4)^{-1}) - 2GF(1 - (2\Gamma_{s1}^2)^{-1}) + G^2)(\Gamma_1^{-2} - (4\Gamma_1^4)^{-1})}{1 - \Gamma_{s1}^{-2} + (4\Gamma_{s1}^4)^{-1} - 2(1 - (2\Gamma_{s1}^2)^{-1})(1 - (2\Gamma_1^2)^{-1}) + 1 - \Gamma_1^{-2} + (4\Gamma_1^4)^{-1}}. \quad (1.10)$$

Haciendo una Sustitución directa del resultado de la relación entre los factores de Lorentz (1.5) en 1.10 y simplificando a orden $O(\Gamma^{-4})$ de aproximación se obtiene:

$$\rho_1^2 = \frac{(F^2 - 2GF + G^2)\Gamma_1^{-2} + \Gamma_1^{-4}(GFH/2p_0 + GF/2 - G^2/4 - F^2/4)}{\Gamma_1^{-4}(H^2/4p_0^2 + 1/4 - H/4p_0)}, \quad (1.11)$$

donde:

$$H := 2p_0 + D, \quad (1.12)$$

Así, la densidad de masa es:

$$\rho_1 = \frac{2(G - F)p_0\Gamma_1}{p_0 - H}. \quad (1.13)$$

Podemos ahora obtener una relación entre la presión p_1 y el factor de Lorentz del choque Γ_1 . Para esto utilicemos la relación (10.24), utilizando el hecho de que la presión es continua sobre la discontinuidad de contacto, es decir, $p_1 = p_2$. Así, con esto y usando la ecuación (1.6) se obtiene:

$$p_1 = \frac{2}{3}\Gamma_{s2}\omega_2 = \frac{8}{3}\Gamma_{s2}p_0 = \frac{8}{3}p_0 \left(4\Gamma_j^2 \frac{p_j}{p_0}\right) \Gamma_{s1}^2 = \frac{16}{3}p_0\Gamma_1 = \frac{4}{3}\omega_2\Gamma_1. \quad (1.14)$$

Por ultimo se puede encontrar una relación entre los factores de Lorentz del choque Γ_1 y del flujo eyectado Γ_j , así como una relación entre sus velocidades β_1 y β_j respectivamente. Para esto, sustituyamos la relación politrópica (8.1) para un fluido relativista $k = 4/3$ en la ecuación (1.14) para obtener:

$$\rho_1 = \left(\frac{16}{3}p_0\Gamma_1^2\right)^{3/4}. \quad (1.15)$$

Igualando esta ecuación con la relación (10.16) se obtiene:

$$\left(\frac{16}{3}p_0\Gamma_1^2\right)^{3/4} = \frac{\rho_j\Gamma_1 p_0}{2\Gamma_j p_j}, \quad (1.16)$$

que con ayuda de la relación politrópica para p_j y p_0 toma la forma:

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\rho_0}{\rho_j}\right)^{2/3} \frac{A}{\Gamma_j^2}. \quad (1.17)$$

A partir de esto y de la definición de los factores de Lorentz tanto del flujo eyectado como del choque se llega a la relación buscada entre éstas velocidades:

$$\beta_1 = 1 - \frac{p_j}{p_0} \frac{1}{8A^2(1 - \beta_j)^2}. \quad (1.18)$$

Apéndice 2

§2. Potencia generada en la superficie de trabajo por una inyección de velocidad periódica

Usando la energía total producida dentro de la superficie de trabajo expresada en la ecuación (11.1), es posible calcular la potencia necesaria que se radia de la superficie de trabajo.

En particular, requerimos de una expresión de la energía en función de una velocidad variable $\beta_j(t)$ y de una densidad de masa de eyección constante ρ_j . Para esto, es necesaria la sustitución de la ecuación (1.18) en los términos de la expresión (11.1) y por tanto, la derivada a esta ecuación (11.1) respecto al tiempo determina la función de luminosidad $L(t) := de_{kT}(t)/dt$.

Si en particular $\beta_j(t)$ toma la forma expresada en la ecuación (11.7) entonces la potencia o luminosidad es[†] :

$$\begin{aligned} L(t) = & c^{**2.0}*(-(3.0*A*betaj1*rho0**2.0*w*cos(t*w)* \backslash \\ & \text{sqrt}(-betaj1*\sin(t*w)-betaj0+1.0))/(sqrt(2.0)*rhoj) \backslash \\ & -(8.0*A*betaj1*rho0**(5.0/3.0)*w*cos(t*w))/rhoj**(2.0/3.0))* \backslash \\ & ((2.0*abs(A))/(rhoj**(2.0/3.0)*sqrt(1.0/(rho0**(4.0/3.0)* \backslash \\ & (1.0-(betaj1*\sin(t*w)+betaj0)**2.0))))-1.0)+(2.0*abs(A)* \backslash \\ & c^{**2.0}*(-(3.0*A*betaj1*rho0**2.0*w*cos(t*w)* \backslash \\ & \text{sqrt}(-betaj1*\sin(t*w)-betaj0+1.0))/(sqrt(2.0)*rhoj)- \backslash \\ & (8.0*A*betaj1*rho0**(5.0/3.0)*w*cos(t*w))/ \backslash \\ & rhoj**(2.0/3.0)))/(rhoj**(2.0/3.0)*sqrt(1.0/ \backslash \end{aligned}$$

[†] Este resultado fue calculado utilizando el Computer Algebra System(CAS) Maxima (www.maxima.sourceforge.net).

$$\begin{aligned}
& (\rho_0^{**}(4.0/3.0)*(1.0-(\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0})^{**2.0}))) - \backslash \\
& (4.0*\text{abs}(A)*c^{**2.0}*\text{betaj1}*w*\cos(t*w)*(\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0}) * \backslash \\
& ((\text{sqrt}(2.0)*A*\rho_0^{**2.0}*(-\text{betaj1}*\sin(t*w)-\text{betaj0}+1.0)^{(3.0/2.0)})/\rho_{oj} \backslash \\
& +(8.0*A*\rho_0^{**}(5.0/3.0)*(-\text{betaj1}*\sin(t*w)-\text{betaj0}+1.0))/\rho_{oj}^{**}(2.0/3.0)))/ \backslash \\
& (\rho_0^{**}(4.0/3.0)*\rho_{oj}^{**}(2.0/3.0)*(1.0-(\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0})^{**2.0})^{**2.0} * \backslash \\
& (1.0/(\rho_0^{**}(4.0/3.0)*(1.0-(\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0})^{**2.0})))^{**}(3.0/2.0)) - \backslash \\
& ((-\text{betaj1}*\rho_{oj}^{**}(8.0/3.0)*w*\cos(t*w))/(8.0*A^{**2.0}*\rho_0^{**}(8.0/3.0)* \backslash \\
& (-\text{betaj1}*\sin(t*w)-\text{betaj0}+1.0)^{**2.0}*(1.0-(\text{betaj1}*\sin(t*w)+ \backslash \\
& \text{betaj0})^{**2.0}))-(\text{betaj1}*\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)*w*\cos(t*w)* \backslash \\
& (\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0})*(\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)/(\rho_0^{**}(4.0/3.0)* \backslash \\
& (-\text{betaj1}*\sin(t*w)-\text{betaj0}+1.0))+1.0))/(4.0*A^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)* \backslash \\
& (1.0-(\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0})^{**2.0})^{**2.0})+ \backslash \\
& (\text{betaj1}*\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)*w*\cos(t*w)*(\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0}))/ \backslash \\
& (4.0*A^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)*(1.0-(\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0})^{**2.0})^{**2.0}) * \backslash \\
& ((1.0-(\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)*(\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)/(\rho_0^{**}(4.0/3.0)* \backslash \\
& (-\text{betaj1}*\sin(t*w)-\text{betaj0}+1.0))+1.0))/(8.0*A^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)* \backslash \\
& (1.0-(\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0})^{**2.0}))) * ((2.0*\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)* \backslash \\
& (1.0-\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)/(\rho_0^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)*(1.0- \backslash \\
& (\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0})^{**2.0}))))/(-\text{betaj1}*\sin(t*w)-\text{betaj0}+1.0)- \backslash \\
& (2.0*\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0))/(-\text{betaj1}*\sin(t*w)-\text{betaj0}+1.0))- \backslash \\
& (2.0*\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)*(1.0-\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)/(\rho_0^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)* \backslash \\
& (1.0-(\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0})^{**2.0}))))/(-\text{betaj1}*\sin(t*w)-\text{betaj0}+1.0)+ \backslash \\
& (2.0*\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0))/(-\text{betaj1}*\sin(t*w)-\text{betaj0}+1.0)))/((\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)/ \backslash \\
& (8.0*A^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)*(1.0-(\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0})^{**2.0}))- \backslash \\
& (\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)*(\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)/(\rho_0^{**}(4.0/3.0)*(-\text{betaj1}*\sin(t*w)- \backslash \\
& \text{betaj0}+1.0))+1.0))/(8.0*A^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)*(1.0-(\text{betaj1}*\sin(t*w)+ \backslash \\
& \text{betaj0})^{**2.0}))^{**2.0}+((-\text{betaj1}*\rho_{oj}^{**}(8.0/3.0)*w*\cos(t*w))/(8.0*A^{**2.0}* \backslash \\
& \rho_0^{**}(8.0/3.0)*(-\text{betaj1}*\sin(t*w)-\text{betaj0}+1.0)^{**2.0}*(1.0-(\text{betaj1}* \backslash \\
& \sin(t*w)+\text{betaj0})^{**2.0}))-(\text{betaj1}*\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)*w*\cos(t*w)* \backslash \\
& (\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0})*(\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)/(\rho_0^{**}(4.0/3.0)* \backslash \\
& (-\text{betaj1}*\sin(t*w)-\text{betaj0}+1.0))+1.0))/(4.0*A^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)* \backslash \\
& (1.0-(\text{betaj1}*\sin(t*w)+\text{betaj0})^{**2.0})^{**2.0}) * ((2.0*\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)* \backslash \\
& (1.0-\rho_{oj}^{**}(4.0/3.0)/(\rho_0^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)*(1.0-(\text{betaj1}*\sin(t*w)+ \backslash \\
& \text{betaj0})^{**2.0}))))/(-\text{betaj1}*\sin(t*w)-\text{betaj0}+1.0)-(2.0* \backslash
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rho_j^{**}(4.0/3.0))/(-\beta_{j1}*\sin(t*w)-\beta_{j0}+1.0))+1.0-(\rho_j^{**}(4.0/3.0)* \backslash \\
 & (\rho_j^{**}(4.0/3.0)/(\rho_0^{**}(4.0/3.0)*(-\beta_{j1}*\sin(t*w)-\beta_{j0}+1.0))+ \backslash \\
 & 1.0))/(8.0*A^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)*(1.0-(\beta_{j1}*\sin(t*w)+\beta_{j0})^{**2.0}))) * \backslash \\
 & ((2.0*\beta_{j1}*\rho_j^{**}(4.0/3.0)*w*\cos(t*w)*(1.0-\rho_j^{**}(4.0/3.0)/(8.0*A^{**2.0}* \backslash \\
 & \rho_0^{**}(4.0/3.0)*(1.0-(\beta_{j1}*\sin(t*w)+\beta_{j0})^{**2.0}))))/(-\beta_{j1}* \backslash \\
 & \sin(t*w)-\beta_{j0}+1.0)^{**2.0}-(\beta_{j1}*\rho_j^{**}(8.0/3.0)*w*\cos(t*w)*(\beta_{j1}* \backslash \\
 & \sin(t*w)+\beta_{j0}))/ (2.0*A^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)*(-\beta_{j1}*\sin(t*w)- \backslash \\
 & \beta_{j0}+1.0)*(1.0-(\beta_{j1}*\sin(t*w)+\beta_{j0})^{**2.0})^{**2.0})-(2.0*\beta_{j1}* \backslash \\
 & \rho_j^{**}(4.0/3.0)*w*\cos(t*w))/(-\beta_{j1}*\sin(t*w)-\beta_{j0}+1.0)^{**2.0})-(2.0* \backslash \\
 & \beta_{j1}*\rho_j^{**}(4.0/3.0)*w*\cos(t*w)*(1.0-\rho_j^{**}(4.0/3.0)/(8.0*A^{**2.0}* \backslash \\
 & \rho_0^{**}(4.0/3.0)*(1.0-(\beta_{j1}*\sin(t*w)+\beta_{j0})^{**2.0}))))/(-\beta_{j1}* \backslash \\
 & \sin(t*w)-\beta_{j0}+1.0)^{**2.0}+(\beta_{j1}*\rho_j^{**}(8.0/3.0)*w*\cos(t*w)* \backslash \\
 & (\beta_{j1}*\sin(t*w)+\beta_{j0}))/ (2.0*A^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)*(-\beta_{j1}* \backslash \\
 & \sin(t*w)-\beta_{j0}+1.0)*(1.0-(\beta_{j1}*\sin(t*w)+\beta_{j0})^{**2.0})^{**2.0})+(2.0* \backslash \\
 & \beta_{j1}*\rho_j^{**}(4.0/3.0)*w*\cos(t*w))/(-\beta_{j1}*\sin(t*w)-\beta_{j0}+1.0)^{**2.0})/ \backslash \\
 & (\rho_j^{**}(4.0/3.0)/(8.0*A^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)*(1.0-(\beta_{j1}*\sin(t*w)+ \backslash \\
 & \beta_{j0})^{**2.0}))- (\rho_j^{**}(4.0/3.0)*(\rho_j^{**}(4.0/3.0)/(\rho_0^{**}(4.0/3.0)* \backslash \\
 & (-\beta_{j1}*\sin(t*w)-\beta_{j0}+1.0))+1.0))/(8.0*A^{**2.0}*\rho_0^{**}(4.0/3.0)* \backslash \\
 & (1.0-(\beta_{j1}*\sin(t*w)+\beta_{j0})^{**2.0})).
 \end{aligned}$$

Bibliografía

- BLANDFORD, R. D. & MCKEE, C. F., 1976. Fluid dynamics of relativistic blast waves. *Physics of Fluids*, **19**, 1130–1138.
- CHANDRASEKHAR, S., 1958. *An introduction to the study of stellar structure*. Dover, 1st ed.
- CHANDRASEKHAR, S., 1989. *Stellar structure and stellar atmospheres*. Chicago : University of Chicago Press, 1989.
- CORONADO, Y. & MENDOZA, S., 2017. A Hidrodinamical model for light curves. Preprint otorgado con autorización de los autores.
- KULKARNI, S. R., DJORGOVSKI, S. G., ODEWAHN, S. C., BLOOM, J. S., GAL, R. R. ET AL., 1999. The afterglow, redshift and extreme energetics of the γ -ray burst of 23 January 1999. *Nature*, **398**, 389–394.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M., 1986. *Física Estadística, Curso de Física Teórica, V. 5*. Editorial Reverté, México, 1st ed.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M., 1987. *Fluid Mechanics, Course on theoretical Physics V.6*. Pergamon Press, London, 2nd ed.
- MCKEE, C. R. & COLGATE, S. A., 1973. Relativistic Shock Hydrodynamics. *Astrophysical Journal*, **181**, 903–938.
- MENDOZA, S., 2016. *Astrofísica Relativista*. <http://www.mendozza.org/sergio/gravitacion>.
- MENDOZA, S., HIDALGO, J. C., OLVERA, D. & CABRERA, J. I., 2009. Internal shocks in relativistic jets with time-dependent sources. *MNRAS*, **395**, 1403–1408.

-
- STANYUKOVICH, K. P., 1960. *Non-steady motion of continuous media*. Oxford University Press, Oxford, U.K.
- TAUB, A. H., 1967. Relativistic Hydrodynamics. In *Relativity Theory and Astrophysics. Vol.1: Relativity and Cosmology*, 170–+.
- TOOPER, R. F., 1965. Adiabatic Fluid Spheres in General Relativity. *Astrophysical Journal*, **142**, 1541–+.
- ZEL'DOVICH, Y. B. & RAIZER, Y. P., 1966. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Academic Press, New York and London, 2nd ed.