UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA DE INVARIANTES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

P R E S E N T A:
A N G E L I N A L Ó P E Z M A D R I G A L

TUTOR PRINCIPAL:
Dr. ROLANDO JIMÉNEZ BENÍTEZ
(INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, CAMPUS OAXACA)

COMITÉ TUTOR:
Dr. DANIEL JUAN PINEDA (CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS), Dr. JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA (INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, CAMPUS CUERNAVACA)

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX. ENERO 2017

Índice general

Agradecimientos II

Introducción III

1. Preliminares **1**
- 1.1. Conceptos básicos sobre álgebra homológica 1
  - 1.1.1. Complejos de cadenas 1
  - 1.1.2. Sucesiones espectrales. 4
- 1.2. Complejo de cadenas de grupos invariantes 8

2. Sucesión espectral para la homología de un grupo de cadenas invariante **10**
- 2.1. Descomposición del complejo barra 11
- 2.2. Construcción de la sucesión espectral 19

3. Productos **28**
- 3.1. Producto Cruz Invariante 28
- 3.2. Aplicación Diagonal Invariante 30
- 3.3. Producto Invariante 34
  - 3.3.1. Propiedades del Producto Invariante 35

4. Teorema de dualidad invariante **40**
- 4.1. Aproximación diagonal completa estándar 41
- 4.2. Complejo completo estándar y su diagonal 50
- 4.3. Cohomología y homología de Tate invariante 61
- 4.4. Teorema de dualidad invariante 64
- 4.5. Cálculos de cohomología invariante 67

Conclusiones **72**

Bibliografía **74**

Agradecimientos

Quiero dedicar esta tesis a toda mi familia, en especial a mis padres y hermanos, por su gran amor, comprension y apoyo incondicional que me brindaron durante esta gran etapa de mi vida.

Quiero agradecer al Dr. Rolando Jiménez Benítez por haberme sugerido el tema de tesis en la que a lo largo de este trabajo disfruté mucho y que por tal motivo me gustaría seguir trabajando en este tema de investigación. También quiero agradecerle por su enseñanza como amigo y maestro al Dr. Quitzeh Morales Meléndez quien me apoyó para resolver el problema de esta tesis. Al Dr. Daniel Juan Pineda, Dr. José Luis Cisneros, Dr. Gregor Weingart, Dr. Noé Bárcenas Torres, Dr. Ernesto Lupercio y al Dr. Israel Moreno Mejía por su valioso tiempo dedicado a la revisión de este trabajo.

Agradezco al CONACYT por apoyarme por medio de una BECA ya que gracias a ella pude concluir este trabajo. Al instituto de Matemáticas de la UNAM Unidad Oaxaca por apoyarme en sus instalaciones durante todo este tiempo.

Introducción

Sea F una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$ y A un G-módulo. Definimos los *grupos de homología y cohomología de un grupo G con coeficientes en A* de la siguiente manera

$$H_*(G,A) = H_*(F \otimes_G A), \quad H^*(G,A) = H^*(\mathscr{H}om_G(F,A)).$$

Debido a que estas definiciones son independientes de la resolución que escojamos, nosotros podemos calcular estos grupos de homología y cohomología utilizando la *resolución barra* $B(G)$, la cual está definida para cualquier grupo G. El *complejo barra* $C(G)$ está definido como el producto tensorial $C(G) = B(G) \otimes_G \mathbb{Z}$ donde G actúa trivialmente sobre $\mathbb{Z}$. Resulta que en general no es cierto que $C(G) \otimes A \cong B(G) \otimes_G A$ y $\mathscr{H}om(C(G), A) \cong \mathscr{H}om_G(B(G), A)$, pero en el caso de que G actúa trivialmente sobre A si se tienen los isomorfismos anteriores y por lo tanto obtenemos los siguientes isomorfismos en homología y cohomología

$$H_*(G,A) \cong H_*(C(G) \otimes A), \quad H^*(G,A) \cong H^*(\mathscr{H}om(C(G),A)),$$

los cuales nos dan otra opción de cómo calcular estos grupos.

Cabe mencionar que si G es un grupo finito, entonces existe una resolución completa $F = (F_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ para G. Tate definió la *homología y cohomología de Tate* de un grupo finito G con coeficientes en un G-módulo A como

$$\hat{H}_*(G,A) = H_*(F \otimes_G A), \quad \hat{H}^*(G,A) = H^*(\mathscr{H}om_G(F,A)).$$

Tate demostró la igualdad $\hat{H}^i(G,A) = \hat{H}_{-i-1}(G,A)$ [2, pág. 135] mediante los ismorfismos

$$\hat{H}^i(G,A) \cong \begin{cases} H^i(G,A) & i \geq 1 \\ coker\, N & i = 0 \\ ker\, N & i = -1 \\ H_{-i-1}(G,A) & i \leq -2 \end{cases}, \quad \hat{H}_i(G,A) \cong \begin{cases} H_i(G,A) & i \geq 1 \\ ker\, N & i = 0 \\ coker\, N & i = -1 \\ H^{-i-1}(G,A) & i \leq -2, \end{cases}$$

donde N es la aplicación norma $N(a) = \sum_{g \in G} ga$; el cual dió lugar a importantes consecuencias en esta teoría. En particular, se demostró que la dualidad entre los grupos de cohomología $\hat{H}^i(G,\mathbb{Z})$ y $\hat{H}^{-i}(G,\mathbb{Z})$ es dado por el *producto cup*

$$\hat{H}^i(G,\mathbb{Z}) \otimes \hat{H}^{-i}(G,\mathbb{Z}) \to \hat{H}^0(G,\mathbb{Z}),$$

obteniendo de esta manera que $H^i(G,\mathbb{Z}) \cong H_{i-1}(G,\mathbb{Z})$ $(i \geq 2)$ [2, pág. 147]. Sin embargo, en esta tesis nosotros demostramos que los grupos de cohomología y homología invariante $H^i_Q(G,\mathbb{Z})$, $H^Q_{i-1}(G,\mathbb{Z})$ son isomorfos $(i \geq 2)$. En el siguiente párrafo hablaremos brevemente sobre estos grupos de homología.

Sea Q un grupo finito. Suponemos que actúa sobre un grupo G como un grupo de automorfismos. Esta acción induce una acción de Q sobre el complejo barra $C(G) = \mathbb{Z}\{[g_1 \mid \cdots \mid g_i] \mid g_s \in G\}$ definida como

$$q[g_1 \mid \cdots \mid g_i] = [q(g_1) \mid \cdots \mid q(g_i)],$$

el cual se usa para el cálculo de la homología de G. Si A es un grupo abeliano tal que G y Q actúan trivialmente sobre A, entonces podemos definir los grupos de homología $H^Q_*(G,A)$ y cohomología $H^*_Q(G,A)$ con coeficientes; definidos por Kevin P. Knudson como *homología* y *cohomología de grupos invariantes* [1].

Utilizando técnicas en topología equivariante Knudson calculó la homología $H^Q_*(G,A)$ de algunos grupos cíclicos. Sin embargo, hasta el momento no hay más cálculos de estos grupos de homología ni de cohomología, tampoco se ha hecho más investigación de estos grupos. Cabe mencionar que en las revistas MathSciNet y Science, el artículo de Knudson no tiene citas. Por lo tanto, debido a esta situación, el objetivo de esta tesis ha sido desarrollar la teoría que concierne a estos grupos. Nuestra contribución tiene los siguientes dos aspectos:

El primero, es una aportación teórica, se construye una *sucesión espectral*, definimos productos y demostramos un *teorema de dualidad*.

El segundo aspecto de esta constribución es computacional, se calculan algunos ejemplos nuevos de grupos de homología y cohomología de invariantes.

A continuación presentamos el esquema de investigación planteado en este trabajo de tesis.

El primer capítulo incluye algunos preliminares y resultados que serán utilizados en el resto de este trabajo. Para ser más preciso, en la primera sección hemos introducido complejos de cadenas y sucesiones espectrales, dos principales nociones en álgebra homológica. En la segunda sección damos una pequeña introducción sobre la homología y cohomología de grupos invariantes.

En la primera sección del capítulo 2 proporcionamos dos descomposiciones nuevas del complejo de invariantes $C_n(G)^Q$. La primera descomposición está dada por sus Q-órbitas (ver el teorema 2.1) y es utilizada para dar una descripción de $H^Q_1(G,\mathbb{Z})$ y hacer algunos cálculos.

Teorema 2.2.

$$H^Q_1(G,\mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}\left\{\sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g]}} q[g] \,\middle|\, g \in G\right\}}{\mathbb{Z}\left\{a\sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g_2]}} q[g_2] - b\sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g_1g_2]}} q[g_1g_2] + c\sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g_1]}} q[g_1] \,\middle|\, g_i \in G\right\}},$$

donde $a = \frac{|Q_{[g_2]}|}{|Q_{[g_1]}\cap Q_{[g_2]}|}$, $b = \frac{|Q_{[g_1g_2]}|}{|Q_{[g_1]}\cap Q_{[g_2]}|}$ *y* $c = \frac{|Q_{[g_1]}|}{|Q_{[g_1]}\cap Q_{[g_2]}|}$.

Teorema 2.3. *Supongamos que* $Q = \mathbb{Z}_2$ *actúa sobre* $G = \mathbb{Z}_n$ *por* $g \mapsto -g$. *Entonces,*

$$H_1^Q(G, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0 & n = \textit{impar}, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & n \equiv 0 \quad \text{mód } 4, \\ \mathbb{Z}_2 & n \equiv 2 \quad \text{mód } 4. \end{cases}$$

La segunda descomposición está dada en términos de inducción de algunos grupos de isotropía $Q_{(g_1,\cdots,g_n)}$ del grupo Q (ver el teorema 2.4). En la segunda sección presentamos la *principal* aportación de esta tesis; utilizando la última descomposición, construimos una *sucesión espectral* que converge a $H_*(Q, C(G) \otimes A)$ cuyo segundo término es isomorfo a $H_*^Q(G, A)$ para algunos coeficientes.

Teorema 2.5. *Sean los grupos* G *y* A *como en la definición 1.35 y sea* Q *un grupo cíclico finito. Supongamos que* $|\, Q \,|$ *es invertible en* A *y que la acción de* Q *sobre* G *is semi-libre (los grupos de isotropía son* Q *ó* $\{e\}$*). Entonces existe un isomorfismo* $H_*^Q(G, A) \cong H_*(Q, C(G) \otimes A)$.

Obteniendo el siguiente resultado:

Teorema 2.6. *Sean* $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle r \rangle$, $G = \mathbb{Z}_n = \langle t \rangle$ *y* $A = \mathbb{Z}_m = \langle s \rangle$ *con* m *impar, tal que* Q *actúa sobre* G *por* $t \mapsto t^{n-1}$. *Entonces,*

$$H_i^Q(G, A) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_m & i = 0, \\ \mathbb{Z}_{(n,m)} & i = 4k - 1 \quad k \geq 1, \\ \mathbb{Z}_{(n,m)} & i = 4k \qquad\ \ k \geq 1, \\ 0 & \textit{otro lado}. \end{cases}$$

En el capítulo 3 introducimos algunos productos para la homología y cohomología de grupos invariantes; en particular, *la homología del producto cruz invariante*, *la cohomología del producto cruz invariante* y *producto invariante*.

En el último capítulo, a partir de la *resolución completa estándar* (ver el teorema 4.5)

$$\cdots \to B_1(G) \overset{\partial_1}{\to} B_0(G) \overset{\partial_0}{\to} B_{-1}(G) \overset{\partial_{-1}}{\to} B_{-2}(G) \to \cdots,$$

construimos el *complejo completo estándar* (teorema 4.4)

$$\cdots \to C_2(G) \overset{\partial_2}{\to} C_1(G) \overset{\partial_1}{\to} C_0(G) \overset{\partial_0}{\to} C_{-1}(G) \overset{\partial_{-1}}{\to} C_{-2}(G) \to \cdots,$$

el cual, la parte positiva está inducido por el complejo barra, y su dual en la parte negativa. Con este complejo completo construimos la diagonal $\hat{\Delta} : C(G) \to C(G) \hat{\otimes} C(G)$ (ver el teorema 4.6). Además, de la existencia del complejo completo estándar definimos el *complejo completo estándar invariante* F^Q(ver la definición 4.4)

$$\cdots \overset{d_{-2}}{\to} F_1^Q \overset{d_1}{\to} F_0^Q \overset{d_0}{\to} F_{-1}^Q \overset{d_{-1}}{\to} \cdots$$

y definimos la *homología* y *cohomología de Tate invariante*, $\hat{H}^Q_*(G,A)$ y $\hat{H}_Q^*(G,A)$ (ver las definiciones 4.5 y 4.6), respectivamente. Similarmente como en la homología y cohomología de Tate (ver [2, pág. 128]), obtuvimos el isomorfismo

$$\hat{H}^i_Q(G,A) \cong \hat{H}^Q_{-i-1}(G,A)$$

mediante los isomorfismos en homología y cohomología de Tate invariante

Teorema 4.7. *Si G es un grupo finito entonces*

$$\hat{H}^Q_i(G,A) \cong \begin{cases} H^Q_i(G,A) & i \geq 1, \\ ker\, N & i = 0, \\ coker\, N & i = -1, \\ H_Q^{-i-1}(G,A) & i \leq -2, \end{cases}$$

donde N es el homomorfismo $N: A \to A$ dado por $N(a) = \mid G \mid a$ para toda $a \in A$.

Teorema 4.8. *Si G es un grupo finito entonces*

$$\hat{H}^i_Q(G,A) \cong \begin{cases} H^Q_{-i-1}(G,A) & i \leq -2, \\ ker\, N & i = -1, \\ coker\, N & i = 0, \\ H^i_Q(G,A) & i \geq 1. \end{cases}$$

donde N es el homomorfismo $N: A \to A$ dado por $N(a) = \mid G \mid a$ para toda $a \in A$.

Más aún, para el coeficiente $A = \mathbb{Z}$, obtuvimos los siguientes resultados:

Teorema 4.10. *Para cualquier grupo finito G tenemos que*

$$H^i_Q(G,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, \\ 0 & i = 1, \\ H^Q_{i-1}(G,\mathbb{Z}) & i \geq 2. \end{cases}$$

Teorema 4.11. *Para cualquier grupo finito G tenemos el isomorfismo*

$$\hat{H}^i_Q(G,\mathbb{Z}) \cong \hat{H}^Q_{i-1}(G,\mathbb{Z}) \;\; \forall\, i \in \mathbb{Z}.$$

Más explícitamente,

$$\begin{array}{cccccc}
\cdots H^Q_2 & H^Q_1 & ker\, N & coker\, N & H^1_Q & H^2_Q \cdots \\
\| & \| & \| & \| & \| & \| \\
\cdots \hat{H}^{-3}_Q & \hat{H}^{-2}_Q & \hat{H}^{-1}_Q & \hat{H}^0_Q & \hat{H}^1_Q & \hat{H}^2_Q \cdots \\
\| & \| & \| & \| & \| & \| \\
\cdots \hat{H}^Q_{-4} & \hat{H}^Q_{-3} & \hat{H}^Q_{-2} & \hat{H}^Q_{-1} & \hat{H}^Q_0 & \hat{H}^Q_1 \cdots \\
\| & \| & \| & \| & \| & \| \\
\cdots H^3_Q & H^2_Q & H^1_Q & coker\, N & ker\, N & H^Q_1 \cdots
\end{array}$$

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo incluimos las definiciones, notaciones y resultados básicos que utlilizaremos en el resto de este trabajo. En particular, en la primera sección damos las nociones fundamentales en álgebra homológica: complejos de cadenas y sucesiones espectrales. La segunda sección contiene la definición y algunos resultados de homología y cohomología del complejo de cadenas de grupos invariantes.

1.1. Conceptos básicos sobre álgebra homológica

1.1.1. Complejos de cadenas

Definición 1.1. *Sea R un anillo arbitrario. Un R-módulo graduado C es una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de R-módulos. Si $x \in C_n$, entonces decimos que x tiene grado n y lo denotamos como $deg\, x = n$.*

Definición 1.2. *Sean C y $C^{'}$ R-módulos graduados y sea $n \in \mathbb{Z}$. Una aplicación de grado n, el cual la denotamos por $f : C \to C^{'}$, es una familia de homomorfismos $f = (f_q : C_q \to C^{'}_{q+n})_{n\in\mathbb{Z}}$. El grado de f es n y lo denotamos como $deg\, f = n$. Además, $deg\, f(x) = deg\, f + deg\, x$.*

Definición 1.3. *Un complejo de cadenas (resp. cocadenas) sobre R es un par (C, d) donde C es un R-módulo graduado y $d : C \to C$ es una aplicación de grado -1 (resp. $+1$) tal que $d^2 = 0$. La aplicación d es llamada el diferencial u operador frontera (resp. cofrontera) de C.*

Definición 1.4. *Sea (C, d) un complejo de cadenas sobre un anillo R. Definimos los ciclos $Z(C)$, las fronteras $B(C)$ y la homología $H(C)$ como: $Z(C) = ker\, d$, $B(C) = Im\, d$ y $H(C) = Z(C)/B(C)$.*

Cabe mencionar que no existe una diferencia entre los complejos de cadenas y cocadenas ya que los podemos convertir de uno a otro con $C_n = C^{-n}$.

Definición 1.5. *Un complejo de cadenas* (C, d) *sobre un anillo* R *es acíclico si* $H(C) = 0$*, es decir si* $ker\, d = Im\, d$ *para todo grado* $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.6. *Si* (C, d) *y* $(C^{'}, d^{'})$ *son complejos de cadenas, entonces una aplicación de cadenas de* C *a* $C^{'}$ *es una aplicación* $f : C \to C^{'}$ *de grado* 0 *tal que* $d^{'} \circ f = f \circ d$.

Definición 1.7. *Sea* R *un anillo (asociativo, con identidad) y* M *un* R*-módulo. Una resolución de* M *es una sucesión exacta de* R*-módulos*

$$F : \quad \cdots \to F_n \overset{d_n}{\to} F_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \cdots \overset{d_2}{\to} F_1 \overset{d_1}{\to} F_0 \overset{\varepsilon}{\to} M \to 0.$$

Una resolución libre de un módulo M *es una resolución en la que todos los módulos* F_i *son* R*-módulos libres. Así mismo, las resoluciones proyectivas y planas son resoluciones tal que todos los módulos* F_i *son* R*-módulos proyectivos y planos, respectivamente.*

Cabe mencionar que cualquier resolución se puede considerar como una aplicación de cadenas $\varepsilon : F \to M$.

Definición 1.8. *Sean* $f, g : C \to C^{'}$ *aplicaciones de cadenas de* R*-módulos. Una homotopía* h *de* f *a* g *es una aplicación* $h : C \to C^{'}$ *de grado* $+1$ *tal que* $d^{'}h + hd = f - g$*. Si existe una homotopía de* f *y* g *se denota por* $f \simeq g$.

Teorema 1.1. *[2, Proposición 0.1, pág. 5] La aplicación de cadenas* $f : C \to C^{'}$ *induce un mapeo en homología* $H(f) : H(C) \to H(C^{'})$ *y si* $f \simeq g$ *entonces* $H(f) = H(g)$.

Definición 1.9. *Una aplicación de cadenas* $f : C \to C^{'}$ *se llama equivalencia homotópica si existe una aplicación de cadenas* $f^{'} : C^{'} \to C$ *tal que* $f^{'} \circ f \simeq 1_C$ *y* $f \circ f^{'} \simeq 1_{C^{'}}$.

Definición 1.10. *Un complejo de cadenas* C *se llama contraíble si existe una homotopía contraíble a el complejo de cadenas cero; es decir, si* $1_C \simeq 0$.

Definición 1.11. *Una categoría* $\mathcal{C}$ *consiste de*

(i) *Una clase de objetos* $Ob(\mathcal{C})$.

(ii) *Para cada par de objetos* $A, B \in Ob(\mathcal{C})$*, un conjunto* $Hom(A, B)$ *cuyos elementos se llaman morfismos* f *de* A *en* B*, denotados con* $f : A \to B$.

(iii) *Para cada terna de objetos* A, B, $C \in Ob(\mathcal{C})$*, una ley de composición* $Hom(A, B) \times Hom(B, C) \to Hom(A, C)$ *que satisface los siguientes axiomas:*

  (a) $Hom(A, B) = Hom(D, E)$ *sí, y sólo sí,* $A = D$, $B = E$.

  (b) *Si* $f : A \to B$, $g : B \to C$ *y* $h : C \to D$*, entonces* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

  (c) *Para todo objeto* $A \in Ob(\mathcal{C})$ *existe un morfismo* $1_A : A \to A$ *tal que para cualquier* $f : A \to B$ *y* $g : C \to A$*, se tiene que* $f \circ 1_A = f$ *y* $1_A \circ g = g$.

Definición 1.12. *Definimos la categoría de pares $\mathcal{C}$ de la siguiente manera:*

(i) $(G, M) \in Ob(\mathcal{C})$ *si* G *es un grupo y* M *es un* G*-módulo.*

(ii) Un morfismo de (G, M) *a* $(G^{'}, M^{'})$ *es un par* (α, f) *donde* $\alpha : G \to G^{'}$ *es un homomorfismo de grupos y* $f : M \to M^{'}$ *es un homomorfismo de grupos abelianos tal que* $f(gm) = \alpha(g)f(m)$ *para* $g \in G$, $m \in M$.

Definición 1.13. *Si* (C, d) *(resp.* $(C^{'}, d^{'})$*) es un complejo de cadenas de* R*-módulos derechos (resp.* R*-módulos izquierdos) entonces el producto tensorial* $C \otimes_R C^{'}$ *lo definimos por la fórmula*

$$(C \otimes_R C^{'})_n \quad = \bigoplus_{q+q^{'}=n} C_q \otimes_R C^{'}_{q'}$$

y el diferencial D *lo definimos como* $D_n(c \otimes c^{'}) = dc \otimes c^{'} + (-1)^{deg\, c} c \otimes d^{'} c^{'}$.

Teorema 1.2 (Fórmula de Künneth)**.** *[2, Proposición 0.8, pág. 7] Sea* R *un dominio de ideales principales y sean* C *y* $C^{'}$ *complejos de cadenas tales que cada componente* C_n *de* C *es un* R*-módulo libre. Entonces existe una sucesión exacta*

$$\begin{aligned} 0 \quad \to \quad & \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H_q(C) \otimes_R H_{n-q}(C^{'}) \to H_n(C \otimes_R C^{'}) \\ \to \quad & \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} Tor_1^R(H_q(C), H_{n-q-1}(C^{'})) \to 0, \end{aligned}$$

y además la sucesión se escinde.

Un caso especial de este teorema es en el que $C^{'}$ consiste de un sólo módulo M, considerado como un complejo de cadenas concentrado en dimensión 0 (i.e. $C^{'}_0 = M$ y $C^{'}_n = 0$ para $n \neq 0$). En este caso este teorema es llamado *Teorema de los coeficientes universales* y la sucesión exacta toma la siguiente forma

$$0 \to H_n(C) \otimes_R M \to H_n(C \otimes_R M) \to Tor_1^R(H_{n-1}(C), M) \to 0 \tag{1.1}$$

Definición 1.14. *Sean* (C, d) *y* $(C^{'}, d^{'})$ *complejos de cadenas. Entonces* $\mathscr{H}om_R$ $(C, C^{'})$ *lo definimos por la fórmula*

$$\mathscr{H}om_R(C, C^{'})_n = \prod_{q \in \mathbb{Z}} Hom_R(C_q, C^{'}_{q+n}),$$

y su diferencial $D_n : \mathscr{H}om_R(C, C^{'})_n \to \mathscr{H}om_R(C, C^{'})_{n-1}$ *lo definimos como* $D_n(f) = d^{'} f + (-1)^n f d$.

Lema 1.1. *[2, pág. 8] Sean* $u^{'} \in \mathscr{H}om_R(C^{'}, C)$, $u \in \mathscr{H}om_R(C, D)$, $v^{'} \in \mathscr{H}om_R(E^{'}, E)$ *y* $v \in \mathscr{H}om_R(E, N)$*. Entonces*

$$(u \otimes v) \circ (u^{'} \otimes v^{'}) = (-1)^{deg\, v \cdot deg\, u^{'}} (u \circ u^{'}) \otimes (v \circ v^{'}).$$

Definición 1.15. *Sean C y $C^{'}$ módulos graduados. El producto tensorial completo $C\hat{\otimes}C^{'}$ lo definimos de la siguiente manera*

$$(C\hat{\otimes}C^{'})_n = \prod_{q+q^{'}=n} C_q \otimes C^{'}_{q^{'}}.$$

Definición 1.16. *Sean C, $C^{'}$, D y $D^{'}$ módulos graduados y sean las aplicaciones $u : C \to D$ de grado r y $v : C^{'} \to D^{'}$ de grado s. Definimos una aplicación $u\hat{\otimes}v : C\hat{\otimes}C^{'} \to D\hat{\otimes}D^{'}$ de grado $r+s$ como*

$$(u\hat{\otimes}v)_n = \prod_{q+q^{'}=n} (-1)^{qs} u_q \otimes v_{q^{'}} : \prod_{q+q^{'}=n} C_p \otimes C^{'}_{q^{'}} \to \prod_{q+q^{'}=n} D_{q+r} \otimes D^{'}_{q^{'}+s}.$$

1.1.2. Sucesiones espectrales.

Definición 1.17. *Sea R un anillo con unidad. Un R-módulo bigraduado es una familia $E = \{E_{q,q^{'}}\}$ de R-módulos tal que a cada pareja q, $q^{'} = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, se le asocia un módulo.*

Definición 1.18. *Un diferencial $d^r : E^r \to E^r$ de grado $(-r, r-1)$ es una familia de homomorfismos $\{d^r : E^r_{q,q^{'}} \to E^r_{q-r,q^{'}+r-1}\}$, una para cada pareja q, $q^{'}$ tal que $d^2 = 0$.*

Definición 1.19. *Una homología $H(E) = H(E, d^r)$ del módulo E con respecto a este diferencial es un módulo bigraduado $\{H_{p,q}(E)\}$ que se define de manera usual*

$$H_{q,q^{'}}(E) = \frac{ker\{d^r : E^r_{q,q^{'}} \to E^r_{q-r,q^{'}+r-1}\}}{Im\{d^r : E^r_{q+r,q^{'}-r+1} \to E^r_{q,q^{'}}\}}.$$

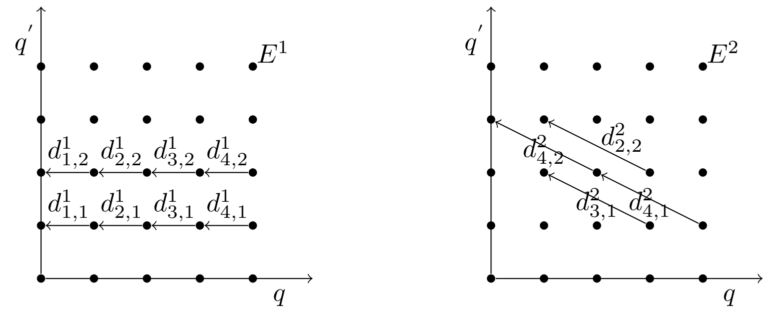
Definición 1.20. *Una sucesión espectral $E = \{E^r, d^r\}$ es una sucesión E^0, E^1, $\cdots$ de R-módulos bigraduados con diferenciales*

$$d^r : E^r_{q,q^{'}} \to E^r_{q-r,q^{'}+r-1} \quad r = 0, 1, \cdots$$

de grado $(-r, r-1)$, además se tienen los isomorfismos $H(E^r, d^r) \cong E^{r+1}$, $r = 0, 2, 3, \cdots$. Es decir, cada módulo E^{r+1} es un módulo bigraduado de la homología del módulo anterior (E^r, d^r). De esta manera E^r y d^r definen a E^{r+1} pero no definen a d^{r+1}.

Definición 1.21. *Una sucesión espectral $E = \{E^r, d^r\}$ se llama sucesión espectral de primer cuadrante si $E^r_{q,q^{'}} = 0$ para $q < 0$ o $q^{'} < 0$. (Si se cumple esta condición para E^0 entonces se cumple para $r > 0$).*

Si E es una sucesión espectral del primer cuadrante, es útil representar los módulos bigraduados $E^r = \{E^r_{q,q^{'}}\}_{q,q^{'} \in \mathbb{Z}}$ como puntos con coordenadas enteras en el primer cuadrante del plano $(q, q^{'})$. En las siguientes figuras consideramos los niveles $r = 1, 2$, pero solo con algunos diferenciales incluidos.



Definición 1.22. *La sucesión espectral converge si para algún entero $k > 0$ tenemos que $d^n E^n = 0$ para todo $n \geq k$. En este caso $ker\, d^n = E^n$ y $Im\, d^n = 0$, luego $E^k = E^{k+1} = E^{k+2} = \cdots$.*

Por E^∞ denotaremos a estos grupos abelianos mutuamente idénticos.

Definición 1.23. *Decimos que la sucesión espectral $E = \{E^n, d^n\}$ colapsa cuando $d^n = 0$ para $n \geq 2$ y luego cuando $E^2 = E^3 = \cdots = E^\infty$.*

Definición 1.24. *Una filtración creciente F de un complejo de cadenas $(C, d) = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de subcomplejos $F_qC = (F_qC_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para cada $q \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$\cdots \subseteq F_{q-1}C_n \subseteq F_qC_n \subseteq F_{q+1}C_n \subseteq \cdots \qquad (\forall\, n \in \mathbb{Z}).$$

NOTA 1.1. *Una filtración F de un complejo de cadenas (C, d) induce una filtración F_H sobre $H(C)$. Sea $i_q : F_qC \hookrightarrow C$ el homomorfismo inclusión; entonces definimos $F_{H_q}H(C) = H_n(i_q)(H_nF_qC)$. En otras palabras, la filtración está dada por*

$$F_{H_q}H_n(C) = \frac{F_qC \bigcap Z}{F_qC \bigcap B},$$

donde Z (resp. B) es el módulo de ciclos (resp. fronteras) de C.

Definición 1.25. *Una filtración F de $C = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ está acotada si para cada grado n existen mínimos enteros $s = s(n) < t = t(n)$ tal que $F_sC_n = 0$ y $F_tC_n = C_n$. Esta condición es equivalente a que la filtración es finita para cada C_n.*

$$0 = F_sC_n \subseteq F_{s+1}C_n \subseteq \cdots \subseteq F_tC_n = C_n.$$

Ya que $F_{q-1}C$ es un subcomplejo de cadenas de F_qC para cada $q \in \mathbb{Z}$, tiene sentido considerar el cociente $F_qC/F_{q-1}C$. Decimos que los elementos $F_qC/F_{q-1}C$ tienen grado de filtración igual a q, grado complementario $q^{'}$ y grado total $n = q + q^{'}$.

Definición 1.26. *Sea $H = \{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un módulo graduado. Una sucesión espectral $\{E^r, d^r\}$ converge a H ($E^2 \Longrightarrow H$) si existe una filtración F_H de H tal que para cada q se tiene el isomorfismo $E^{\infty}_{q,*} \cong F_{H_q}H/F_{H_{q-1}}H$.*

Teorema 1.3. *[5, Teorema 3.1, pág. 327] Sea una F filtración creciente de un complejo de cadenas $(C, d) = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Existe una filtración $E = E(C, F) = (E^r, d^r)_{r\geq 0}$ definida por*

$$E^r_{q,q'} = \frac{Z^r_{q,q'} \cup F_{q-1}C_{q+q'}}{d_{q+q'+1}\left(Z^{r-1}_{q+r-1,q'-r+2}\right) \cup F_{q-1}C_{q+q'}},$$

donde $Z^r_{p,q'}$ es el submódulo $Z^r_{q,q'} = \{a \in F_qC_{q+q'} \mid d_{q+q'}(a) \in F_{q-r}C_{q+q'-1}\}$ y $d^r_{q,q'} : E^r_{q,q'} \to E^r_{q-r,q'+r-1}$ es el homomorfismo inducido por estos cocientes. Cuando $r = 0$ y $r = 1$, la sucesión espectral satisface

$$E^0_{q,q'} = \frac{F_qC_{q+q'}}{F_{q-1}C_{q+q'}} \quad E^1_{q,q'} \cong H_{q+q'}\left(\tfrac{F_qC}{F_{q-1}C}\right). \tag{1.2}$$

Además si la filtración está acotada, entonces $E^2 \Longrightarrow H(C)$, más preciso, se tienen los isomorfismos naturales

$$E^{\infty}_{q,q'} \cong \frac{F_{H_q}(H_{q+q'}(C))}{F_{H_{q-1}}(H_{q+q'}(C))}.$$

Definición 1.27. *Un bicomplejo C es una familia $\{C_{q,q'}\}$ de módulos con dos familias*

$$\partial' : C_{q,q'} \to C_{q-1,q'}, \quad \partial'' : C_{q,q'} \to C_{q,q'-1}$$

de homomorfismos de módulos definidos para todo q, q' tales que

$$\partial'\partial' = 0, \ \ \partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0, \ \ \partial''\partial'' = 0.$$

Definición 1.28. *Sea C un bicomplejo. Definimos el complejo de cadenas TC, llamado complejo total, de la siguiente manera*

$$(TC)_n = \bigoplus_{q+q'} C_{q,q'},$$

con diferencial $\partial\,|_{C_{q,q'}} = \partial' + (-1)^q\partial''$.

El producto tensorial de dos complejos de cadenas C' y C'' nos da un ejemplo familiar de esta construcción. En efecto, nosotros tenemos un bicomplejo C con $C_{q,q'} = C'_q \otimes C''_{q'}$, y TC es simplemente el usual producto tensorial $C' \otimes C''$ de complejos de cadenas.

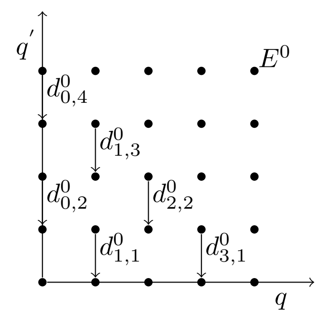
Definición 1.29. *Definimos la primera filtración ${}^IF$ del complejo total TC de la siguiente manera*

$${}^IF_q(TC)_n = \bigoplus_{i\leq q} C_{i,n-i}.$$

Definición 1.30. *La sucesión espectral asociada a esta filtración se llama la primera sucesión espectral* ${}^{I}E$ *de un bicomplejo.*

Teorema 1.4. *[2, pág. 165] La primera sucesión espectral* ${}^{I}E$ *del bicomplejo* C *con complejo total* TC *converge a la homología* $H(TC)$.

Podemos ver que el teorema anterior se puede deducir de la definición 1.29 y del teorema 1.3. Además, de la ecuación (1.2) también podemos deducir que la primera sucesión espectral es de primer cuadrante y que para cada pareja $(q,q^{'})$, q, $q^{'} \geq 0$, ${}^{I}E^0 = C_{q,q'}$ y $d^0_{q,q'} = \partial^{''}$ ($d^0_{q,q'} : C_{q,q'} \to C_{q,q'-1}$, $\partial^{''}$ es un diferencial del bicomplejo C). El siguiente diagrama muestra el 0-término de la primera sucesión espectral con algunos diferenciales incluidos; el cual, podemos ver que ${}^{I}E^1$ es la línea vertical de C; es decir ${}^{I}E^1_{q,q'} = H_{q'}(C_q,*)$.



Definición 1.31. *Definimos la segunda filtración* ${}^{II}F$ *del complejo total* TC *de la siguiente manera*

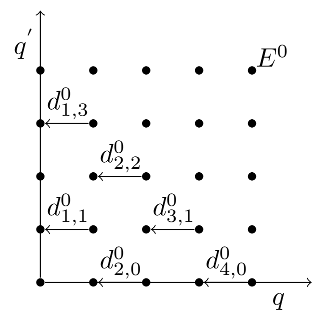
$${}^{II}F_q(TC)_n = \bigoplus_{j\leq q} C_{n-j,j}.$$

Definición 1.32. *La sucesión espectral asociada a esta filtración se llama la segunda sucesión espectral* ${}^{II}E$ *de un bicomplejo.*

Teorema 1.5. *[2, pág. 165] La segunda sucesión espectral* ${}^{II}E$ *del bicomplejo* C *con complejo total* TC *converge a la homología* $H(TC)$.

Como en el caso de la primera sucesión espectral, podemos ver de la ecuación (1.2) que la segunda sucesión espectral es de primer cuadrante tal que cada término de ${}^{II}E^0$ se cumple que $E^0_{q,q'} = C_{q,q'}$ y $d^0_{q,q'} = \partial^{'}_{q,q'}$ ($d^0_{q,q'} : C_{q',q} \to C_{q'-1,q}$), obteniendo de esta manera que ${}^{I}E^1_{q,q'} = H_{q'}(C_{*.q})$ donde

$d^1_{q,q'} : E'_{q,q'} \to E^1_{q-1,q'}$ como en la definición 1.20.



1.2. Homología y cohomología de un complejo de cadenas de grupos invariantes

Definición 1.33. *Sea G un grupo y sea $[g_1 \mid \cdots \mid g_n] = (1, g_1, g_1g_2, \ldots, g_1 \cdots g_n)$ tal que $g_i \in G$ para toda i. Para $n = 0$ definimos $B_0(G)$ como el G-módulo libre con generador el símbolo $[\,]$ (por lo tanto $B_0(G) \cong \mathbb{Z}[G]$), y para $n \geq 1$ definimos $B_n(G)$ como el G-módulo libre con base todos los elementos $[g_1 \mid \cdots \mid g_n]$ donde $g_i \in G$. Sea $\varepsilon : B_0(G) \to \mathbb{Z}$ el homomorfismo aumentación, $\varepsilon([\,]) = 1$ y para $n \geq 1$, definimos $\partial_n : B_n(G) \to B_{n-1}(G)$ por*

$$\begin{aligned}\partial_n([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) =& g_1[g_2 \mid \cdots \mid g_n] + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k [g_1 \mid \cdots \mid g_k g_{k+1} \mid \cdots \mid g_n] + \\ & (-1)^n [g_1 \mid \cdots \mid g_{n-1}].\end{aligned}$$

La resolución barra es la sucesión exacta de G-módulos libres

$$B(G) : \cdots \to B_2(G) \xrightarrow{\partial_2} B_1(G) \xrightarrow{\partial_1} B_0(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

Definición 1.34. *Definimos el complejo barra $C(G)$ como el producto tensorial $C(G) = B(G) \otimes_G \mathbb{Z}$ tal que G actúa trivialmente sobre $\mathbb{Z}$:*

$$C(G) := \cdots \longrightarrow C_2(G) \xrightarrow{\partial_2 \otimes 1_{\mathbb{Z}}} C_1(G) \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1_{\mathbb{Z}}} C_0(G).$$

NOTA 1.2. *En general no es cierto que $C(G) \otimes A \cong B(G) \otimes_G A$ y $\mathscr{H}om(C(G), A) \cong \mathscr{H}om_G(B(G), A)$ para cualquier G-módulo A; sin embargo, para el caso de que G actúe trivialmente sobre A si se tienen los isomorfismos anteriores, por lo tanto tenemos los siguientes isomorfismos en homología y cohomología:*

$$H_*(G, A) \cong H_*(C(G) \otimes A), \qquad H^*(G, A) \cong H^*(\mathscr{H}om(C(G), A)).$$

Definición 1.35. *Sea Q un grupo finito que actúa sobre un grupo G como un grupo de automorfismos y sea A un grupo abeliano tal que G y Q actúan* *trivialmente. Entonces la acción de Q sobre G induce una acción sobre $C(G)\otimes A$ por*

$$q([g_1 \mid \cdots \mid g_i] \otimes a) = [q(g_1) \mid \cdots \mid q(g_i)] \otimes a.$$

Denotaremos al subcomplejo de cadenas de grupos invariantes de $C(G) \otimes A$ por $(C(G) \otimes A)^Q$.

Definición 1.36. *Definimos la homología y cohomología de grupos invariantes por*

$$\begin{aligned} H_*^Q(G,A) &= H_*((C(G) \otimes A)^Q)) \\ H_Q^*(G,A) &= H^*(\mathscr{H}om(C(G)^Q, A)). \end{aligned}$$

Cabe mencionar que de las inclusiones de complejos de cadenas

$$C(G^Q) \otimes A \hookrightarrow (C(G) \otimes A)^Q \hookrightarrow C(G) \otimes A$$

Knudson [1] obtuvo la siguiente afirmación:

Lema 1.2. *[1, Lema 1.2, pág 18] Sea G^Q el subgrupo de Q-invariantes de G. Entonces tenemos las siguientes aplicaciones naturales*

$$H_*(G^Q, A) \xrightarrow{i_*} H_*^Q(G,A) \xrightarrow{j_*} H_*(G,A).$$

Notemos que $im\, j_* \subset H_*(G,A)^Q$, ya que un ciclo Q-invariante en $(C(G) \otimes A)^Q$ da lugar a una clase de homología Q-invariante en $H_*(G,A)$, de esta manera lo que realmente obtenemos son las siguientes aplicaciones

$$H_*(G^Q, A) \xrightarrow{i_*} H_*^Q(G,A) \xrightarrow{j_*} H_*(G,A)^Q.$$

Las siguientes proposiciones también fueron probadas por Kevin P. Knudson en [1].

Proposición 1.1. *[1, Proposición 3.3, pág. 22] Supongamos que $\mid Q \mid$ es invertible en A. Entonces la aplicación natural*

$$H_*^Q(G,A) \to H_*(G,A)^Q$$

es un isomorfismo.

Proposición 1.2. *[1, Proposición 2.4, pág.20] Supongamos que $\mid Q \mid$ es invertible en A. Entonces la aplicación natural*

$$H_*(BG/Q, A) \to H_*^Q(G,A)$$

es un isomorfismo.

NOTA 1.3. *$\mid Q \mid$ es invertible en A si el homomorfismo $\mid Q \mid : A \to A$ dado por $\mid Q \mid (a) = \mid Q \mid a$ es un isomorfismo.*

Capítulo 2

Sucesión espectral para la homología de un grupo de cadenas invariante

En la primera sección de este capítulo empezamos proporcionando dos descomposiciones del subcomplejo de invariantes $C_n(G)^Q$. La primera descomposición está dada por sus Q-órbitas (ver el teorema 2.1), esta descomposición se usa para dar una descripción de $H_1^Q(G, \mathbb{Z})$ y hacer algunos cálculos (ver los teoremas 2.2 y 2.3). La segunda descomposición está dada en términos de inducción de algunos grupos de isotropía $Q_{(g_1,\cdots,g_n)}$ al grupo Q (ver el teorema 2.4).

En la próxima sección, usando la última descomposición, construimos una sucesión espectral que converge a $H_*(Q, C(G) \otimes A)$ cuyo segundo término coincide con $H_*^Q(G, A)$ cuando $\mid G \mid$ es invertible en A. Esta sucesión espectral se utiliza para probar el siguiente resultado.

Teorema 2.5. *Sean los grupos G y A como en la definición 1.35 y sea Q un grupo cíclico finito. Supongamos que $\mid Q \mid$ es invertible en A y que la acción de Q sobre G is semi-libre (los grupos de isotropía son Q ó $\{e\}$). Entonces existe un isomorfismo $H_*^Q(G, A) \cong H_*(Q, C(G) \otimes A)$.*

El teorema 2.5 se utiliza para hacer el siguiente cálculo.

Teorema 2.6. *Sean $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle r \rangle$, $G = \mathbb{Z}_n = \langle t \rangle$ y $A = \mathbb{Z}_m = \langle s \rangle$ con m impar, tal que Q actúa sobre G por $t \mapsto t^{n-1}$. Entonces,*

$$H_i^Q(G, A) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_m & i = 0, \\ \mathbb{Z}_{(n,m)} & i = 4k - 1 \quad k \geq 1, \\ \mathbb{Z}_{(n,m)} & i = 4k \quad k \geq 1, \\ 0 & \textit{otro lado.} \end{cases}$$

2.1. Descomposición del complejo barra

Siguiendo [1], supongamos que el grupo Q actúa por medio de automorfismos sobre el grupo G y que esta acción induce una acción de Q sobre $C(G)$ definida por

$$q([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = [q(g_1) \mid \cdots \mid q(g_n)]. \tag{2.1}$$

La órbita y el grupo de isotropía de $[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \in C(G)$ las denotaremos como $Q([g_1 \mid \cdots \mid g_n])$ y $Q_{[g_1|\cdots|g_n]}$, respectivamente.

Teorema 2.1. *Tenemos la siguiente descomposición:*

$$C_n(G)^Q = \mathbb{Z}\left\{ \sum_{\overline{q}\in Q/Q_{[g_1|\ldots|g_n]}} q[g_1|\ldots|g_n] \middle| Q_{[g_1|\ldots|g_n]} < Q,\, g_1,\ldots,g_n \in G \right\},$$

donde $\overline{q}$ es la clase lateral izquierda en $Q/Q_{[g_1|\ldots|g_n]}$ correspondiente a $q \in Q$.

Demostración. Es claro que cada generador $\sum_{\overline{q}\in Q/Q_{[g_1|\cdots|g_n]}} q[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \in C_n(G)^Q$. Por lo tanto

$$\mathbb{Z}\left\{ \sum_{\overline{q}\in Q/Q_{[g_1|\ldots|g_n]}} q[g_1|\ldots|g_n] \middle| Q_{[g_1|\ldots|g_n]} < Q,\, g_1,\ldots,g_n \in G \right\} \subset C_n(G)^Q.$$

Ahora probemos lo siguiente:

$$C_n(G)^Q \subset \mathbb{Z}\left\{ \sum_{\overline{q}\in Q/Q_{[g_1|\ldots|g_n]}} q[g_1|\ldots|g_n] \middle| Q_{[g_1|\ldots|g_n]} < Q,\, g_1,\ldots,g_n \in G \right\}.$$

Sean $x = \sum_s n_s x_s \in C_n(G)^Q$ y $E = \{x_1, \cdots, x_k\}$ el conjunto de representantes para el conjunto de órbitas $Q\backslash C_n(G)$ de (2.1). Entonces

$$x = \sum_{j=1}^{k} \sum_{x_i\in R_j} n_i x_i,$$

donde $R_j = \{x_i \mid x_i \in Q(x_j), x_j \in E\}$. Ya que $qx = x$ para toda $q \in Q$, entonces, para cualquier $\sum_{x_i\in R_j} n_i x_i \in \sum_{j=1}^{k} \sum_{x_i\in R_j} n_i x_i$, tenemos que

$$q \sum_{x_i\in R_j} n_i x_i = \sum_{x_i\in R_j} n_i x_i, \qquad \forall\, q \in Q.$$

Supongamos que para cada $x_i \in R_j$, $x_i = [g_{1i} \mid \cdots \mid g_{ni}]$. Entonces, para cada pareja de elementos $[g_{1i} \mid \cdots \mid g_{ni}]$, $[g_{1r} \mid \cdots \mid g_{nr}] \in R_j$ existe $q_{ri} \in Q$ tal que

$$q_{ri}[g_{1i} \mid \cdots \mid g_{ni}] = [g_{1r} \mid \cdots \mid g_{nr}].$$

Sea $[g_{1l} \mid \cdots \mid g_{nl}] \in R_j$ un elemento fijo, entonces

$$\sum_{[g_{1i}|\cdots|g_{ni}]\in R_j} n_i[g_{1i} \mid \cdots \mid g_{ni}] = \sum_{[g_{1r}|\cdots|g_{nr}]\in R_j} n_r q_{rl}[g_{1l} \mid \cdots \mid g_{nl}].$$

Afirmamos que $R_j = Q([g_{1l} \mid \cdots \mid g_{nl}])$.

Es claro que $R_j \subset Q([g_{1l} \mid \cdots \mid g_{nl}])$, entonces sólo falta probar que $Q([g_{1l} \mid \cdots \mid g_{nl}]) \subset R_j$.

Sea $q[g_{1l} \mid \cdots \mid g_{nl}] \in Q([g_{1l} \mid \cdots \mid g_{nl}])$. Dado que $[g_{1l} \mid \cdots \mid g_{nl}] \in R_j$ y

$$q \sum_{[g_{1i}|\cdots|g_{ni}]\in R_j} n_i[g_{1i} \mid \cdots \mid g_{ni}] = \sum_{[g_{1i}|\cdots|g_{ni}]\in R_j} n_i[g_{1i} \mid \cdots \mid g_{ni}],$$

entonces $q[g_{1l} \mid \cdots \mid g_{nl}] = [g_{1s} \mid \cdots \mid g_{ns}]$ para algún $[g_{1s} \mid \cdots \mid g_{ns}] \in R_j$. Por lo tanto, $q[g_{1l} \mid \cdots \mid g_{nl}] \in R_j$.

Ya que existe una biyección entre $Q([g_{1l} \mid \cdots \mid g_{nl}])$ y $Q/Q_{[g_{1l}|\cdots|g_{nl}]}$, tenemos que

$$\sum_{[g_{1r}|\cdots|g_{nr}]\in R_j} n_r q_{rl}[g_{1l} \mid \cdots \mid g_{nl}] = \sum_{\bar{q}_{rl}\in Q/Q_{[g_{1l}|\cdots|g_{nl}]}} n_r q_{rl}[g_{1l} \mid \cdots \mid g_{nl}].$$

□

Teorema 2.2.

$$H_1^Q(G,\mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}\left\{\sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g]}} q[g] \middle| g \in G\right\}}{\mathbb{Z}\left\{a\sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g_2]}} q[g_2] - b\sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g_1g_2]}} q[g_1g_2] + c\sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g_1]}} q[g_1] \middle| g_i \in G\right\}},$$

donde $a = \frac{|Q_{[g_2]}|}{|Q_{[g_1]}\cap Q_{[g_2]}|}$, $b = \frac{|Q_{[g_1g_2]}|}{|Q_{[g_1]}\cap Q_{[g_2]}|}$ *y* $c = \frac{|Q_{[g_1]}|}{|Q_{[g_1]}\cap Q_{[g_2]}|}$.

Demostración. Por definición de $H_1^Q(G,\mathbb{Z})$ y el teorema 2.1, tenemos

$$H_1^Q(G,\mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}\left\{\sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g]}} q[g] \middle| g \in G\right\}}{Im\{C_2(G)^Q \to C_1(G)^Q\}}.$$

Solo necesitamos calcular $Im\{C_2(G)^Q \to C_1(G)^Q\}$, pero es suficiente hacer los cálculos para los generadores de $C_2(G)^Q$. Entonces

$$\begin{aligned}
\partial(\sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g_1]}\cap Q_{[g_2]}} q[g_1 \mid g_2]) &= \sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g_1]}\cap Q_{[g_2]}} (q[g_2]-[q(g_1g_2)]+q[g_1]) \\
&= \sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g_1]}\cap Q_{[g_2]}} q[g_2] - \sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g_1]}\cap Q_{[g_2]}} q[g_1g_2] \\
&\quad + \sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g_1]}\cap Q_{[g_2]}} q[g_1] \\
&= a\sum_{q\in Q/Q_{[g_2]}} q[g_2] - b\sum_{q\in Q/Q_{[g_1g_2]}} q[g_1g_2] \\
&\quad + c\sum_{q\in Q/Q_{[g_1]}} q[g_1],
\end{aligned}$$

donde a, b y c son como en las condiciones del teorema. □

Con la descomposición del teorema 2.1 y del teorema anterior, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.3. *Supongamos que $Q = \mathbb{Z}_2$ actúa sobre $G = \mathbb{Z}_n$ por $g \mapsto -g$. Entonces,*

$$H_1^Q(G,\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0 & n = impar, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & n \equiv 0 \mod 4, \\ \mathbb{Z}_2 & n \equiv 2 \mod 4. \end{cases}$$

Demostración. CASO 1: *n impar*

Calculemos las órbitas $Q(g)$ y grupos de isotropía Q_g:

$$\begin{aligned}
Q(0) &= \{0\}, \\
Q(1) &= \{1, n-1\}, \\
&\vdots \\
Q(\frac{n-1}{2}) &= \{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\}, \\
Q_0 &= Q, \\
Q_g &= 0,\ \forall g \neq 0.
\end{aligned}$$

Sea $E = \{0, 1, \cdots, \frac{n-1}{2}\}$ el conjunto de representantes de las Q-órbitas de G. Entonces por el teorema 2.1, tenemos lo siguiente:

$$C_1(G)^Q = \mathbb{Z}\left\{ \sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g]}} q[g] \,\middle|\, 0 \le g \le \frac{n-1}{2} \right\}. \tag{2.2}$$

Para cada generador (2.2), denotemos $\overline{[g]} := \sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g]}} q[g]$. Entonces por el teorema 2.2, tenemos lo siguiente:

$$H_1^Q(G,\mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}\left\{\overline{[g]}\middle| 0 \leq g \leq \frac{n-1}{2}\right\}}{\mathbb{Z}\left\{a\overline{[g_2]} - b\overline{[g_1g_2]} + c\overline{[g_1]}\middle| 0 \leq g_1, g_2 \leq \frac{n-1}{2}\right\}}.$$

Así que $H_1^Q(G,\mathbb{Z})$ tiene la siguiente presentación:

$$\left\langle \overline{[0]}, \cdots, \overline{[\frac{n-1}{2}]} \middle| a\overline{[g_2]} - b\overline{[g_1g_2]} + c\overline{[g_1]} = 0 \ : 0 \leq g_1, g_2 \leq \frac{n-1}{2} \right\rangle.$$

En particular, tenemos las relaciones:

$$(\overline{[0]}, \overline{[0]}): \qquad \overline{[0]} - \overline{[0]} + \overline{[0]} = 0, \tag{2.3}$$

$$(\overline{[1]}, \overline{[g]}): \qquad \overline{[1]} - \overline{[1+g]} + \overline{[g]} = 0, \qquad 1 \leq g \leq \frac{n-1}{2}. \tag{2.4}$$

Ahora, si consideramos a la ecuación (2.4) con $g = \frac{n-1}{2}$, entonces

$$\overline{[1]} - \overline{[\frac{n+1}{2}]} + \overline{[\frac{n-1}{2}]} = 0.$$

Sin embargo, ya que $\frac{n-1}{2}$ y $\frac{n+1}{2}$ están en la misma órbita, entonces, en la ecuación anterior obtenemos que $\overline{[1]} = 0$.

Además, dado que $\overline{[1]} = 0$, si subtituimos en la ecuación (2.4) los valores de $g = 1$ a $g = \frac{n-1}{2} - 1$, entonces, tenemos que $\overline{[2]} = \overline{[3]} = \cdots = \overline{[\frac{n-1}{2}]} = 0$, pero por (2.3) $\overline{[0]} = 0$. Por lo tanto, $H_1^Q(G,\mathbb{Z}) = 0$.

CASO 2: $n \equiv 0 \mod 4$

Calculando las órbitas $Q(g)$ y grupos de isotropía Q_g, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
Q(0) &= \{0\},\\
Q(1) &= \{1, n-1\},\\
&\vdots\\
Q(\frac{n}{2}-1) &= \{\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+1\},\\
Q(\frac{n}{2}) &= \{\frac{n}{2}\},\\
Q_0 &= Q\\
Q_g &= 0 \ \forall 1 \leq g \leq \frac{n}{2}-1,\\
Q_{\frac{n}{2}} &= Q.
\end{aligned}$$

Sea $E = \{0, 1, \cdots, \frac{n}{2}\}$ el conjunto de representantes de las Q-órbitas de G. Entonces, por el teorema 2.1, obtenemos

$$C_1(G)^Q = \mathbb{Z}\left\{\sum_{\bar{q}\in Q/Q_{[g]}} q[g] \middle| 0 \leq g \leq \frac{n}{2}\right\}. \tag{2.5}$$

Como en el caso anterior, para cada generador (2.5), denotamos

$$\overline{[g]} := \sum_{\bar{q} \in Q/Q_{[g]}} q[g].$$

Entonces, por el teorema 2.2, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} H_1^Q(G,\mathbb{Z}) &= \frac{\mathbb{Z}\left\{\overline{[g]}\middle| 0 \leq g \leq \frac{n}{2}\right\}}{\mathbb{Z}\left\{a\overline{[g_2]} - b\overline{[g_1g_2]} + c\overline{[g_1]}\middle| 0 \leq g_1, g_2 \leq \frac{n}{2}\right\}} \\ &\cong \left\langle \overline{[0]}, \cdots, \overline{[\frac{n}{2}]} \middle| a\overline{[g_2]} - b\overline{[g_1g_2]} + c\overline{[g_1]} = 0 \ : 0 \leq g_1, g_2 \leq \frac{n}{2} \right\rangle. \end{aligned} \tag{2.6}$$

En esta presentación obtenemos las siguientes relaciones:

$$(\overline{[0]}, \overline{[0]}): \qquad \overline{[0]} - \overline{[0]} + \overline{[0]} = 0, \tag{2.7}$$

$$(\overline{[1]}, \overline{[g]}): \qquad \overline{[1]} - \overline{[1+g]} + \overline{[g]} = 0, \;\; 1 \leq g \leq \frac{n}{2} - 2, \tag{2.8}$$

$$(\overline{[1]}, \overline{[\frac{n}{2}-1]}): \qquad \overline{[1]} - 2\overline{[\frac{n}{2}]} + \overline{[\frac{n}{2}-1]} = 0, \tag{2.9}$$

$$(\overline{[1]}, \overline{[\frac{n}{2}]}): \qquad \overline{[1]} - \overline{[\frac{n}{2}+1]} + 2\overline{[\frac{n}{2}]} = 0. \tag{2.10}$$

Si sumamos la ecuación (2.9) con la ecuación (2.10), y ya que $\frac{n}{2} - 1$ y $\frac{n}{2} + 1$ están en la misma órbita, tenemos $2\overline{[1]} = 0$. Ahora, si substituimos en la ecuación (2.8) $g = \overline{[1]}$ y $g = \overline{[2]}$, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\overline{[1]} - \overline{[2]} + \overline{[1]} = 0, \tag{2.11}$$

$$\overline{[1]} - \overline{[3]} + \overline{[2]} = 0. \tag{2.12}$$

Sumando estas ecuaciones, tenemos $3\overline{[1]} = \overline{[3]}$, pero $2\overline{[1]} = 0$. Así que $\overline{[1]} = \overline{[3]}$. Si $g = \overline{[3]}$ en la ecuación (2.8),

$$\overline{[1]} - \overline{[4]} + \overline{[3]} = 0. \tag{2.13}$$

Por lo tanto, cuando sumamos las ecuaciones (2.12) y (2.13), obtenemos

$$2\overline{[1]} + \overline{[2]} = \overline{[4]}.$$

Sin embargo, ya que $2\overline{[1]} = 0$, entonces, $\overline{[2]} = \overline{[4]}$.

Continuando este procedimiento con las ecuaciones restantes, obtenemos las siguientes realciones:

$$\begin{aligned} \overline{[1]} = \overline{[3]} = \overline{[5]} = \quad \cdots \quad &= \overline{[\frac{n}{2} - 1]}, \\ \overline{[2]} = \overline{[4]} = \overline{[6]} = \quad \cdots \quad &= \overline{[\frac{n}{2} - 2]} = 2\overline{[\frac{n}{2}]}. \end{aligned}$$

Por la ecuación (2.11), $2\overline{[1]} = \overline{[2]}$ y como $2\overline{[1]} = 0$, entonces, $2\overline{[1]} = \overline{[2]} = 0$. Luego,

$$
\begin{aligned}
0 &= 2\overline{[1]} = 2\overline{[3]} = 2\overline{[5]} = \cdots = 2\overline{[\frac{n}{2}-1]}, \\
0 &= \overline{[2]} = \overline{[4]} = \overline{[6]} = \cdots = \overline{[\frac{n}{2}-2]} = 2\overline{[\frac{n}{2}]}.
\end{aligned}
$$

Por la ecuación (2.7), tenemos $\overline{[0]} = 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
H_1^Q(G,\mathbb{Z}) &\cong \left\langle \overline{[1]}, \overline{[\frac{n}{2}]} \middle| 2\overline{[1]} = 2\overline{[\frac{n}{2}]} = 0 \right\rangle \\
&\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}
$$

CASO 3: $n \equiv 2 \mod 4$

Como n es par, entonces, obtenemos las mismas órbitas $Q(g)$ y grupos de isotropía Q_g como en el caso anterior.

Similarmente, consideremos el conjunto de representantes $E = \{0, 1, \cdots, \frac{n}{2}\}$ de las Q-órbitas de G y denotemos a los generadores de $C_1(G)^Q$ por $\overline{[g]} := \sum_{\overline{q} \in Q/Q_{[g]}} q[g]$, $g \in E$. Entonces, por el teorema 2.2, obtenemos una presentación como en (2.6) y las mismas relaciones (2.7), (2.8), (2.9) y (2.10). Sin embargo, cuando sumamos estas ecuaciones como en el caso anterior, y como $n \equiv 2 \mod 4$, entonces obtenemos las relaciones:

$$
\begin{aligned}
\overline{[1]} = \overline{[3]} = \overline{[5]} = &\cdots = \overline{[\frac{n}{2}-2]} = 2\overline{[\frac{n}{2}]}, \\
\overline{[2]} = \overline{[4]} = \overline{[6]} = &\cdots = \overline{[\frac{n}{2}-1]}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, $2\overline{[1]} = \overline{[2]}$ (por la ecuación (2.11)) y $2\overline{[1]} = 0$. Entonces, $2\overline{[1]} = \overline{[2]} = 0$, también recalcando que $\overline{[0]} = 0$ (por la ecuación (2.7)) y considerando la relación para el par $(\overline{[\frac{n}{2}]}, \overline{[\frac{n}{2}]})$, obtenemos $\overline{[\frac{n}{2}]} - \overline{[0]} + \overline{[\frac{n}{2}]} = 0$. Por lo tanto, $2\overline{[\frac{n}{2}]} = 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
0 &= \overline{[1]} = \overline{[3]} = \overline{[5]} = \cdots = \overline{[\frac{n}{2}-2]} = 2\overline{[\frac{n}{2}]}, \\
0 &= \overline{[0]} = \overline{[2]} = \overline{[4]} = \overline{[6]} = \cdots = \overline{[\frac{n}{2}-1]}.
\end{aligned}
$$

En este forma,

$$
\begin{aligned}
H_1^Q(G,\mathbb{Z}) &\cong \left\langle \overline{[\frac{n}{2}]} \middle| 2\overline{[\frac{n}{2}]} = 0 \right\rangle \\
&\cong \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}
$$

□

Consideremos el producto $G^n = G \times \cdots \times G$ como un Q-conjunto con la acción

$$\begin{array}{rcl} Q \times (G \times \cdots \times G) & \to & G \times \cdots \times G \\ (q, (g_1, \cdots, g_n)) & \mapsto & (q(g_1), \cdots, q(g_n)). \end{array}$$

Denotemos por $\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}$ como una copia del grupo cíclico $\mathbb{Z}$. Es claro que el complejo barra $C_n(G)$ es un Q-módulo cuyo grupo abeliano es una suma directa $\bigoplus_{(g_1,\cdots,g_n)\in G^n} \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}$, y la acción de Q sobre G^n permuta a los sumandos de tal manera que $q\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} = \mathbb{Z}_{(q(g_1),\cdots,q(g_n))}$.

Teorema 2.4. *Consideremos a Q y $C_n(G)$ como arriba. Sea $Q_{(g_1,\cdots,g_n)}$ el grupo de isotropía de $(g_1, \cdots, g_n)$ y sea $\sum_n$ el conjunto de representantes para las órbitas $Q(g_1, \cdots, g_n)$ en $Q\backslash(G \times \cdots \times G)$. Entonces $\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}$ es un $Q_{(g_1,\cdots,g_n)}$-módulo trivial, y existe un Q-isomorfismo*

$$C_n(G) \cong \bigoplus_{(g_1,\cdots,g_n)\in\sum_n} Ind^Q_{Q_{(g_1,\cdots,g_n)}} \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}.$$

Demostración. Dado que $C_n(G) \cong \bigoplus_{(g_1,\cdots,g_n)\in G^n} \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}$ y

$$G^n = \bigsqcup_{(g_1,\cdots,g_n)\in\sum_n} Q(g_1, \cdots, g_n),$$

entonces

$$C_n(G) = \bigoplus_{(g_1,\cdots,g_n)\in\sum_n} \; \bigoplus_{q(g_1,\cdots,g_n)\in Q(g_1,\cdots,g_n)} \mathbb{Z}_{q(g_1,\cdots,g_n)}. \tag{2.14}$$

Además, la suma interior de la ecuación anterior

$$\bigoplus_{q(g_1,\cdots,g_n)\in Q(g_1,\cdots,g_n)} \mathbb{Z}_{q(g_1,\cdots,g_n)}$$

es un Q-módulo tal que la Q-acción de Q sobre $Q(g_1, \cdots, g_n)$ es transitiva y la acción de $Q_{(g_1,\cdots,g_n)}$ sobre $\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}$ es trivial. Ahora, si consideramos los $Q_{(g_1,\cdots,g_n)}$-homomorfismos $j : \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} \to \bigoplus_{q(g_1,\cdots,g_n)\in Q(g_1,\cdots,g_n)} \mathbb{Z}_{q(g_1,\cdots,g_n)}$ dado por la inclusión y el homomorfismo $i : \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} \to Ind^Q_{Q_{(g_1,\cdots,g_n)}} \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}$ dado por $i(z) = 1 \otimes z$, entonces, por la propiedad universal de extensión de escalares, existe un único Q-homomorfismo

$$f : Ind^Q_{Q_{(g_1,\cdots,g_n)}} \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} \to \bigoplus_{q(g_1,\cdots,g_n)\in Q(g_1,\cdots,g_n)} \mathbb{Z}_{q(g_1,\cdots,g_n)}$$

tal que $f \circ i = j$, i.e., el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & Ind^{Q}_{Q_{(g_1,\cdots,g_n)}}\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} \arrow[dl, dashed, "f"] \\
\displaystyle\bigoplus_{q(g_1,\cdots,g_n)\in Q(g_1,\cdots,g_n)} \mathbb{Z}_{q(g_1,\cdots,g_n)} &
\end{tikzcd}$$

commuta. Por otro lado, sabemos que $Ind^{Q}_{Q_{(g_1,\cdots,g_n)}}\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} \cong \bigoplus_{q\in E} q \otimes \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}$ (ver en [2, pág. 67]), donde E es el conjunto de representantes para las órbitas en $Q_{(g_1,\cdots,g_n)}\backslash Q$. Entonces, f mapea el sumando $q \otimes \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}$ de $Ind^{Q}_{Q_{(g_1,\cdots,g_n)}}\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}$ isomorficamente sobre el sumando correspondiente $\mathbb{Z}_{q(g_1,\cdots,g_n)}$ de la suma directa $\displaystyle\bigoplus_{q(g_1,\cdots,g_n)\in Q(g_1,\cdots,g_n)} \mathbb{Z}_{q(g_1,\cdots,g_n)}$:

$$\begin{aligned}
f : Ind^{Q}_{Q_{(g_1,\cdots,g_n)}}\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} &\rightarrow \bigoplus_{q(g_1,\cdots,g_n)\in Q(g_1,\cdots,g_n)} \mathbb{Z}_{q(g_1,\cdots,g_n)} \\
f(q \otimes \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}) &= \mathbb{Z}_{q(g_1,\cdots,g_n)}.
\end{aligned}$$

Primero probemos que f es sobreyectivo.

Sea $\mathbb{Z}_{(g_1',\cdots,g_n')} \in \displaystyle\bigoplus_{q(g_1,\cdots,g_n)\in Q(g_1,\cdots,g_n)} \mathbb{Z}_{q(g_1,\cdots,g_n)}$, entonces, existe $q \in Q$ tal que $q(g_1,\cdots,g_n) = (g_1^{'},\cdots,g_n^{'})$. Por lo tanto, $f(q\otimes\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}) = \mathbb{Z}_{q(g_1,\cdots,g_n)} = \mathbb{Z}_{(g_1',\cdots,g_n')}$.

Ahora probemos que f es inyectivo.

Supongamos que $f(q_1\otimes\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}) = f(q_2\otimes\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)})$, entonces $\mathbb{Z}_{q_1(g_1,\cdots,g_n)} = \mathbb{Z}_{q_2(g_1,\cdots,g_n)}$ sí y sólo sí $q_1(g_1,\cdots,g_n) = q_2(g_1,\cdots,g_n)$. Así

$$(g_1,\cdots,g_n) = q_1^{-1}q_2(g_1,\cdots,g_n).$$

Pero como $Q_{(g_1,\cdots,g_n)}$ es el grupo de isotropía de $(g_1,\cdots,g_n)$, entonces $q_1^{-1}q_2 \in Q_{(g_1,\cdots,g_n)}$. Luego, $q_2 = q_1q^{'}$ para algún $q^{'} \in Q_{(g_1,\cdots,g_n)}$. Por lo tanto

$$q_2 \otimes \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} = q_1q^{'} \otimes \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} = q_1 \otimes q^{'}\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} \subset q_1 \otimes \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}.$$

Por otro lado, $q_1 = q_2(q^{'})^{-1}$, así

$$q_1\otimes\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} = q_2(q^{'})^{-1}\otimes\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} = q_2\otimes(q^{'})^{-1}\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} \subset q_2\otimes\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}.$$

Por lo tanto, $q_1 \otimes \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} = q_2 \otimes \mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}$. Luego f es inyectiva. Por lo tanto, f es un isomorfismo.

De esta manera, por la ecuación (2.14) y por el isomorfismo anterior obtenemos la demostración del teorema. $\square$

Dado que la acción de $Q_{(g_1,\cdots,g_n)}$ sobre $\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)}$ es trivial, entonces

$$Ind^{Q}_{Q_{(g_1,\cdots,g_n)}}\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} \cong \mathbb{Z}[Q/Q_{(g_1,\cdots,g_n)}]$$

bajo el isomorfismo

$$\varphi : Ind^{Q}_{Q_{(g_1,\cdots,g_n)}}\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)} \to \mathbb{Z}[Q/Q_{(g_1,\cdots,g_n)}],$$

dado por $\phi(q \otimes n) = n(qQ_{(g_1,\cdots,g_n)})$. Entonces, por el teorema anterior, el subcomplejo de invariantes $C(G)^Q$ tiene la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned} C_n(G)^Q &\cong \bigoplus_{(g_1,\cdots,g_n)\in\sum_n} (\mathrm{Ind}^{Q}_{Q_{(g_1,\cdots,g_n)}}\mathbb{Z}_{(g_1,\cdots,g_n)})^Q \\ &\cong \bigoplus_{(g_1,\cdots,g_n)\in\sum_n} \mathbb{Z}[Q/Q_{(g_1,\cdots,g_n)}]^Q. \end{aligned}$$

Pensamos que es posible escribir el diferencial del complejo de invariantes en términos de esta descomposición; obteniendo una alternativa para calcular la homolgía $H^Q_*(G, A)$ para cualquier grupo abeliano A.

2.2. Construcción de la sucesión espectral

A continuación probamos algunas afirmaciones y las utilizamos para construir una sucesión espectral que converge a la homología $H_*(Q, C(G) \otimes A)$ cuyo segundo término es isomorfo a $H^Q_*(G, A)$ para algunos coeficientes. Esta construcción se usa para probar el teorema 2.5.

Lema 2.1. *Si Q es un grupo finito que actúa sobre sí mismo por multiplicación sobre la derecha, entonces*

$$\mathbb{Z}[Q]^Q \cong \mathbb{Z}\langle \sum_{q\in Q} q\rangle \cong \mathbb{Z},$$

donde $\mathbb{Z}\langle\sum_{q\in Q} q\rangle$ es el grupo cíclico generado por $\sum_{q\in Q} q$.

Demostración. Sea $m = \sum_{i=0}^{k} n_{q_i} q_i \in \mathbb{Z}[Q]^Q$. Ya que Q está actuando sobre sí mismo por multiplicación, entonces, Q está actuando transitivamente. Así que para cada $q_i \in Q$ que está en la suma de m, existe $g_i \in Q$ tal que $g_i q_{i-1} = q_i$, $1 \le i \le k$. Por otro lado, dado que $m \in \mathbb{Z}[Q]^Q$, entonces, para cada g_i, $1 \le i \le k$, tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} &n_0 g_i q_0 + n_1 g_i q_1 + \cdots + n_{i-1} g_i q_{i-1} + \cdots + n_k g_i q_k \\ &= n_0 q_0 + \cdots + n_{i-1} q_{i-1} + n_i q_i + \cdots + n_k q_k. \end{aligned}$$

Ya que $g_i q_{i-1} = q_i$, entonces

$$\begin{aligned} &n_0 g_i q_0 + n_1 g_i q_1 + \cdots + n_{i-1} q_i + \cdots + n_k g_i q_k \\ &= n_0 q_0 + \cdots + n_{i-1} q_{i-1} + n_i q_i + \cdots + n_k q_k. \end{aligned}$$

Esto implica que $n_{i-1} = n_i$. Como esto es cierto para cada $1 \leq i \leq k$, entonces $n_0 = n_1 = \cdots = n_k$. Por lo tanto, $m = n_0 \sum_{i=0}^{k} q_i \in \mathbb{Z}\langle \sum_{q\in Q} q \rangle$. □

Lema 2.2. *Sea Q un grupo finito y A un grupo abeliano. Consideremos la acción de Q sobre el grupo abeliano $\mathbb{Z}[Q] \otimes A$ dada por $q(x \otimes a) = qx \otimes a$. Entonces*

$$(\mathbb{Z}[Q] \otimes A)^Q \cong \mathbb{Z}[Q]^Q \otimes A \cong A.$$

Demostración. Ya que Q es un grupo finito, entonces por el lema anterior

$$\mathbb{Z}[Q]^Q \otimes A \cong \mathbb{Z} \otimes A \cong A.$$

Por otro lado, dado que $[Q : \{e\}] < \infty$, entonces $\mathbb{Z}[Q] \otimes A$ es Q-isomorfo a $Hom(\mathbb{Z}[Q], A)$. Así $(\mathbb{Z}[Q] \otimes A)^Q \cong Hom(\mathbb{Z}[Q], A)^Q$. Pero $Hom(\mathbb{Z}[Q], A)^Q = Hom_Q(\mathbb{Z}[Q], A)$ y además $Hom_Q(\mathbb{Z}[Q], A) \cong A$. Entonces $(\mathbb{Z}[Q] \otimes A)^Q \cong A$. Por lo tanto, $(\mathbb{Z}[Q] \otimes A)^Q \cong \mathbb{Z}[Q]^Q \otimes A$. □

Lema 2.3. *Si Q es un grupo finito, entonces $(Ind_{\{e\}}^{Q}\, \mathbb{Z})^Q \cong \mathbb{Z} \otimes_{\{e\}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.*

Demostración. Es una consecuencia de los lemas 2.1 and 2.2. □

Definición 2.1. *Si Q es un grupo y M es un Q-módulo izquierdo entonces definimos el grupo de los co-invariantes de M como $M_Q = \frac{M}{\langle qm - m | q\in Q, m\in M\rangle}$, donde $\langle\, \rangle$ denota el subgrupo aditivo generado por el conjunto indicado.*

Cabe mencionar que $M_Q \cong \mathbb{Z} \otimes_Q M$.

Lema 2.4. *Sean Q un grupo finito, M un Q-módulo y $\bar{N} : M_Q \to M^Q$ dado por $\bar{N}(\bar{m}) = \sum_{q\in Q} qm$.*

a) Entonces, $ker\, \bar{N}$ y $coker\, \bar{N}$ son anulados por $\mid Q \mid$.

b) Supongamos que $M = \mathbb{Z}[Q] \otimes A$ donde A es un grupo abeliano y Q actúa sobre M por $q(r\otimes a) = qr\otimes a$. Entonces $\bar{N} : M_Q \to M^Q$ es un isomorfismo.

c) $\bar{N}$ es un isomorfismo si M es un Q-módulo proyectivo.

d) $\bar{N}$ es un isomorfismo si $\mid Q \mid$ es invertible en M y Q actúa trivialmente sobre M.

Demostración. a) Sea $\bar{m} \in ker\, \bar{N}$. Entonces tenemos que $\bar{N}(\bar{m}) = \sum_{q\in Q} qm = 0$. Así,

$$\mid Q \mid m = -(0 - \mid Q \mid m) = -(\sum_{q\in Q} qm - \mid Q \mid m) = -(\sum_{q\in Q}(qm - m)).$$

Esto implica que $\mid Q \mid m \in \langle qm - m \rangle_{q\in Q, m\in M}$. Por lo tanto, $\mid Q \mid \bar{m} = 0$.

Ahora, sea $\bar{m} \in coker\, \bar{N} = \frac{M^Q}{im\, \bar{N}}$. Ya que $m \in M^Q$, entonces

$$\bar{N}(\bar{m}) = \sum_{q\in Q} qm = \mid Q \mid m.$$

De esta manera, tenemos que $\mid Q \mid m \in im\, \bar{N}$. Por lo tanto, $\mid Q \mid \bar{m} = 0$.

b) Sabemos que $M_Q = (\mathbb{Z}[Q] \otimes A)_Q = \mathbb{Z} \otimes_Q (\mathbb{Z}[Q] \otimes A)$. Pero como $\mathbb{Z}[Q]$ es un $(\mathbb{Z}[Q], \mathbb{Z})$-bimódulo y Q está actuando trivialmente sobre A, entonces tenemos los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned} M_Q &= \mathbb{Z} \otimes_Q (\mathbb{Z}[Q] \otimes A) \cong (\mathbb{Z} \otimes_Q \mathbb{Z}[Q]) \otimes A \\ &\cong \mathbb{Z}[Q]_Q \otimes A \cong \mathbb{Z} \otimes A. \end{aligned}$$

Por otro lado, por los lemas 2.2 y 2.1, tenemos lo siguiente

$$M^Q = (\mathbb{Z}[Q] \otimes A)^Q \cong \mathbb{Z}[Q]^Q \otimes A \cong \mathbb{Z}\langle \sum_{q \in Q} q \rangle \otimes A \cong \mathbb{Z} \otimes A.$$

Por lo tanto, bajo estos isomorfismos la aplicación norma está definida como sigue: $\bar{N}(z \otimes a) = z \sum_{q \in Q} q \otimes a$, donde $z \in \mathbb{Z}$, $a \in A$. Es claro que $\bar{N}$ es un homomorfismo biyectivo. Por lo tanto, $\bar{N}$ es un isomorfismo y $M_Q \cong M^Q$.

c) Si M es un Q-módulo proyectivo, entonces M es sumando directo de un Q-módule libre F, i.e., $F = M \oplus N$, donde $F \cong \oplus_i \mathbb{Z}[Q]$. Ya que $F = \oplus_i (\mathbb{Z}[Q] \otimes \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[Q] \otimes (\oplus_i \mathbb{Z})$, entonces F es un módulo inducido. Luego por b), $F_Q \cong F^Q$. Por lo tanto, $(M \oplus N)_Q \cong (M \oplus N)^Q$. Si Q actúa sobre $M \oplus N$ diagonalmente, obtenemos

$$\begin{aligned} (M \oplus N)_Q &= \mathbb{Z} \otimes_Q (M \oplus N) \cong \mathbb{Z} \otimes_Q M \oplus \mathbb{Z} \otimes_Q N = M_Q \oplus N_Q, \\ (M \oplus N)^Q &= M^Q \oplus N^Q. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $M_Q \cong M^Q$ y $N_Q \cong N^Q$.

d) Primero probemos que $\bar{N}$ es inyectiva. Sea $\bar{m} \in ker\, \bar{N}$, entonces por *a)* de este lema, tenemos que $\mid Q \mid \bar{m} = 0$. Por otro lado, como Q actúa trivialmente sobre M, entonces $M_Q = \frac{M}{\langle qm - m \rangle} \cong \frac{M}{0} \cong M$. Luego, $\mid Q \mid m = 0$. Ya que $\mid Q \mid$ es invertible en M (i.e., la multiplicación por $\mid Q \mid$ es un isomorfismo), $m = 0$. Por lo tanto, $\bar{N}$ es inyectiva.

Ahora probemos que $\bar{N}$ es sobreyectiva. Sea $m \in M^Q$, entonces como en la prueba del inciso *a)*, esto implica que $\mid Q \mid m \in im\, \bar{N}$, i.e, existe $\bar{a} \in M_Q$ tal que $\bar{N}(\bar{a}) = \mid Q \mid m$. Por otro lado, como Q actúa trivialmente sobre M y $\bar{N}$ es inyectiva, tenemos que $\bar{a} = \bar{m}$. Ya que $\mid Q \mid$ es invertible en M, entonces $\frac{1}{|Q|} m \in M$ y $\bar{N}(\frac{1}{|Q|}\bar{m}) = \mid Q \mid \frac{1}{|Q|} m = m$. Por lo tanto, $\bar{N}$ es sobreyectiva.

□

Sea $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[Q]$ y supongamos que Q actúa sobre $C(G) \otimes A$ como en la definición 1.35.

Para el complejo total $F \otimes_Q C(G) \otimes A$, tenemos la primera y segunda sucesión espectral ${}^{I}E^2_{p,q}$ y ${}^{II}E^1_{p,q}$, respectivamante [2, pág. 169]:

$$\begin{aligned} {}^{I}E^2_{p,q} &= H_p(Q, H_q(G,A)) \Longrightarrow H_{p+q}(Q, C(G) \otimes A), && (2.15) \\ {}^{II}E^1_{p,q} &= H_q(Q, C_p(G) \otimes A) \Longrightarrow H_{p+q}(Q, C(G) \otimes A). && (2.16) \end{aligned}$$

Además, por el teorema 2.4

$$C_p(G) \otimes A \cong \bigoplus_{z \in \sum_p} (\mathrm{Ind}^Q_{Q_z} \mathbb{Z}_z) \otimes A \cong \bigoplus_{z \in \sum_p} \mathrm{Ind}^Q_{Q_z} A_z, \tag{2.17}$$

donde $\sum_p$ es el conjunto de representantes de las Q-órbitas de los p -generadores, Q_z es el grupo de isotropía de z y $\mathbb{Z}_z$ es el grupo cíclico infinito. Entonces de esta descomposición tenemos la siguiente afirmación.

Lema 2.5. *Existe una sucesión espectral de la forma*

$${}^{II}E^1_{p,q} = \bigoplus_{z \in \sum_p} H_q(Q_z, A_z) \Longrightarrow H_{p+q}(Q, C(G) \otimes A).$$

Demostración. La prueba se sigue fácilmente de la descomposición anterior y del lema de Shapiro [2, Proposición 6.2, pág. 73]. □

Teorema 2.5. *Sean los grupos G y A como en la definición 1.35 y sea Q un grupo cíclico finito. Supongamos que $\mid Q \mid$ es invertible en A y que la acción de Q sobre G is semi-libre (los grupos de isotropía son Q ó $\{e\}$). Entonces existe un isomorfismo $H^Q_*(G,A) \cong H_*(Q, C(G) \otimes A)$.*

Demostración. Sean $\sum_p' = \{z \in \sum_p \mid Q_z = Q\}$ y $\sum_p'' = \{z \in \sum_p \mid Q_z = \{e\}\}$, entonces, por el lema anterior, tenemos lo siguiente:

$${}^{II}E^1_{p,q} = \bigoplus_{z \in \sum_p'} H_q(Q, A_z) \oplus \bigoplus_{z \in \sum_p''} H_q(\{e\}, A_z). \tag{2.18}$$

Por otro lado, como Q es un grupo cíclico, entonces

$$H_q(Q, A_z) \cong \begin{cases} A_Q & q = 0, \\ ker\, \bar{N} & q = \text{par}, \\ coker\, \bar{N} & q = \text{impar}. \end{cases}$$

Además, ya que $\mid Q \mid$ es invertible en A, entonces $\bar{N}$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $ker\, \bar{N} = coker\, \bar{N} = 0$. De esta manera, $H_q(Q, A_z)$ únicamente sobrevive si $q = 0$. Por otro lado,

$$H_q(\{e\}, A_z) \cong \begin{cases} A_z & q = 0, \\ 0 & q \neq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, la sucesión espectral (2.18) no se anula únicamente para $q = 0$. También, por (2.16), tenemos que ${}^{II}E^1_{p,0} = H_0(Q, C_p(G) \otimes A) \cong (C_p(G) \otimes A)_Q \cong$

$(C_p(G) \otimes A)^Q$ (como en la prueba de la proposición 2.4 en [1]). Por otro lado, por definición ${}^{II}E^2_{p,0} = \frac{ker\{{}^{II}E^1_{p,0} \to {}^{II}E^1_{p-1,0}\}}{Im\{{}^{II}E^1_{p+1,0} \to {}^{II}E^1_{p,0}\}} \cong \frac{ker\{C_p(G)^Q \to C_{p-1}(G)^Q\}}{Im\{C_{p+1}(G)^Q \to C_p(G)^Q\}} \cong H^Q_p(G, A)$. Resumiendo,

$${}^{II}E^2_{p,q} \cong \begin{cases} H^Q_p(G, A) & q = 0, \\ 0 & q \neq 0, \end{cases}$$

y la sucesión espectral colapsa. Por lo tanto,

$$H^Q_*(G, A) \cong H_*(Q, C(G) \otimes A).$$

□

Consideremos el siguiente ejemplo.

1. $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle r \rangle$, $G = \mathbb{Z}_n = \langle t \rangle$, $A = \mathbb{Z}_m = \langle s \rangle$, con m *impar* tal que Q actúa sobre G por $t \mapsto t^{n-1}$.

Lema 2.6. *Sean $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle r \rangle$, $G = \mathbb{Z}_n = \langle t \rangle$ y $A = \mathbb{Z}_m = \langle s \rangle$ tal que $\mathbb{Z}_2$ actúa sobre $\mathbb{Z}_m$ por $t \mapsto t^{n-1}$. Entonces, Q actúa sobre $H_q(G, A)$ por*

$$t\overline{z} = \begin{cases} \overline{z} & q = 4k & k \geq 0, \\ \overline{z} & q = 4k - 1 & k \geq 1, \\ (n-1)\overline{z} & q = 4k - 3 & k \geq 1, \\ (n-1)\overline{z} & q = 2(2k-1) & k \geq 1. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos el siguiente isomorfismo en la categoría de pares $\mathscr{C}$ ([2, III.8]):

$$\begin{array}{rcl} c(r) : (\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) & \to & (\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \\ (t \overset{\alpha}{\mapsto} t^{n-1} & ; & n \overset{f}{\mapsto} n) \end{array}$$

induciendo el isomorfismo $c(r)_* : H_*(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \to H_*(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$. Entonces, la acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre $H_*(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ es

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}_2 \times H_*(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) & \to & H_*(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \\ (r, \overline{z}) & \mapsto & c_*(r)(\overline{z}). \end{array}$$

Así, podemos calcular $c(r)_*$ en términos de cadenas. Para ello, necesitamos encontrar en el siguiente diagrama aplicaciones apropiadas τ_q

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "t-1"] \arrow[d, "\tau_3"] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "N"] \arrow[d, "\tau_2"] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "t-1"] \arrow[d, "\tau_1"] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\tau_0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\ {} \arrow[r] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "t-1"] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "N"] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "t-1"] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

que sean compatibles con el homomorfismo α; es decir, $\tau_q(t^i x) = \alpha(t^i)\tau(x)$ para todo $0 \leq i \leq n-1$, $x \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$. Los homomorfismos τ_q pueden ser considerados como sigue:

$$\tau_q(1) = \begin{cases} 1 & q = 4k \quad k \geq 0, \\ 1 + t + \cdots + t^{n-2} & q = 4k - 3 \quad k \geq 1, \\ 1 + t + \cdots + t^{n-2} & q = 2(2k - 1) \quad k \geq 1, \\ t^{n-2} & q = 4k - 1 \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Ahora, aplicando $- \otimes_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}_m$ a la aplicación de cadenas $\tau_q : \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$ ($\mathbb{Z}_n$ actuando trivialmente sobre $\mathbb{Z}_m$) y dado que $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \otimes_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_m$, entonces la aplicación de cadenas $\tau_q \otimes 1$ es isomorfa a la siguiente aplicación de cadenas:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \mathbb{Z}_m \arrow[r, "t-1"] \arrow[d, "\overline{\tau}_3"] & \mathbb{Z}_m \arrow[r, "N"] \arrow[d, "\overline{\tau}_2"] & \mathbb{Z}_m \arrow[r, "t-1"] \arrow[d, "\overline{\tau}_1"] & \mathbb{Z}_m \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\overline{\tau}_0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\ {} \arrow[r] & \mathbb{Z}_m \arrow[r, "t-1"] & \mathbb{Z}_m \arrow[r, "N"] & \mathbb{Z}_m \arrow[r, "t-1"] & \mathbb{Z}_m \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{2.19}$$

donde

$$\overline{\tau}_q(1) = \begin{cases} 1 & q = 4k \quad k \geq 0, \\ n-1 & q = 4k - 3 \quad k \geq 1, \\ n-1 & q = 2(2k - 1) \quad k \geq 1, \\ 1 & q = 4k - 1 \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2 \times H_q(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) &\to H_q(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \\ (r, \bar{z}) &\mapsto c_q(r)(\bar{z}) = \begin{cases} \bar{z} & q = 4k \quad k \geq 0, \\ (n-1)\bar{z} & q = 4k - 3 \quad k \geq 1, \\ (n-1)\bar{z} & q = 2(2k - 1) \quad k \geq 1, \\ \bar{z} & q = 4k - 1 \quad k \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

De esta manera podemos concluir que la acción de r sobre $H_q(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ es trivial para $q = 4k$ ($k \geq 0$) y $4k - 1$ ($k \geq 1$). Falta probar cómo actúa r sobre $H_q(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ en los otros casos.

Sin embargo, por (2.19) sabemos que $H_q(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \frac{ker\,(t-1)}{Im\,N}$ para $q \geq 0$ impar y $H_q(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \frac{ker\,N}{Im\,(t-1)}$ para números pares mayores que cero. Por otro lado, ya que $\mathbb{Z}_n$ actúa trivialmente sobre $\mathbb{Z}_m$, y como $ker\,(t-1) = \mathbb{Z}_m$, $Im\,(t-1) = 0$, $ker\,N = \frac{m}{(n,m)}\mathbb{Z}_m$ y $Im\,N = (n,m)\mathbb{Z}_m$ (ver [7]), entonces

$$H_q(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \begin{cases} \frac{\mathbb{Z}_m}{(n,m)\mathbb{Z}_m} & q = \text{impar}, \\ \frac{m}{(n,m)}\mathbb{Z}_m & q = \text{par}. \end{cases}$$

Además, $\frac{\mathbb{Z}_m}{(n,m)\mathbb{Z}_m} \cong \mathbb{Z}_{(n,m)}$ con el epimorfismo $\varphi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{(n,m)}$ dado por $\varphi(s) = u$, donde s y u son los generadores de $\mathbb{Z}_m$ y $\mathbb{Z}_{(n,m)}$, respectivamente . Además, $\frac{m}{(n,m)}\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{(n,m)}$ con el isomorfismo $\beta : \frac{m}{(n,m)}\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{(n,m)}$ definido por $\beta(s^{\frac{m}{(n,m)}}) = u$. Por lo tanto, para todo $q = 4k - 3$, podemos concluir que la acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre la q-homología es la aplicación que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_2 \times \frac{\mathbb{Z}_m}{(n,m)\mathbb{Z}_m} \arrow[r] \arrow[d, "1\times\bar{\varphi}"] & \frac{\mathbb{Z}_m}{(n,m)\mathbb{Z}_m} \arrow[d, "\bar{\varphi}"] \\
\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{(n,m)} \arrow[r] & \mathbb{Z}_{(n,m)}.
\end{tikzcd}$$

Es decir,

$$\begin{tikzcd}
(r, \bar{s}) \arrow[r] \arrow[d, "1\times\bar{\varphi}"] & s^{\bar{n}-1} \arrow[d, "\bar{\varphi}"] \\
(r, u) \arrow[r] & u^{n-1} = u^{(n,m)-1}.
\end{tikzcd}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_2 \times H_{4k-3}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) &\to H_{4k-3}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \\
(r, u) &\mapsto u^{(n,m)-1}.
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $\mathbb{Z}_2$ no está actuando trivialmente sobre $H_{4k-3}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$. Por lo tanto, cada elemento de la homología es enviado a su inverso. Similarmente obtenemos que $\mathbb{Z}_2$ no actúa trivialmente sobre la $2(2k-1)$-homología. $\square$

Teorema 2.6. *Sean $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle r \rangle$, $G = \mathbb{Z}_n = \langle t \rangle$ y $A = \mathbb{Z}_m = \langle s \rangle$ con m impar, tal que Q actúa sobre G por $t \mapsto t^{n-1}$. Entonces,*

$$H_i^Q(G, A) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_m & i = 0, \\ \mathbb{Z}_{(n,m)} & i = 4k-1 \quad k \geq 1, \\ \mathbb{Z}_{(n,m)} & i = 4k \quad k \geq 1, \\ 0 & \textit{otro lado.} \end{cases}$$

Demostración. En la primera sucesión espectral (2.15) obtuvimos que

$${}^{I}E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(G, A)) \Longrightarrow H_{p+q}(Q, C(G) \otimes A).$$

Entonces, en este caso,

$$H_p(Q, H_q(G, A)) = \begin{cases} H_q(G, A)_Q & p = 0, \\ \textit{coker}\, \overline{N} & p = \text{impar}, \\ \textit{ker}\, \overline{N} & p = \text{par}, \end{cases} \tag{2.20}$$

donde $\overline{N}$ es la aplicación norma $\overline{N} : H_q(G, A)_Q \to H_q(G, A)^Q$ dada por $\overline{N}(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{1} r^i x$, $x \in H_q(G, A)$ tal que Q actúa sobre $H_q(G, A)$ como en el lema anterior.

Entonces, Q actúa sobre $H_0(G, A) = \mathbb{Z}_m$ trivialmente, y para todo $q > 0$, Q actúa sobre $H_q(G, A) = \mathbb{Z}_{(n,m)}$ como sigue:

1. Para $q = 4k-1$, $q = 4k$, $k \geq 1$, Q actúa trivialmente.
2. Para $q = 4k-3$, $q = 2(2k-1)$ $k \geq 1$, Q actúa enviando cada elemento a su inverso.

Nota que el máximo común divisor de n y m es 1 ó un número impar. Entonces, si la acción de Q sobre $\mathbb{Z}_{(n,m)}$ no es trivial (Q actúa enviando cada elemento a su inverso), tenemos que $(\mathbb{Z}_{(n,m)})_Q \cong \frac{\mathbb{Z}_{(n,m)}}{\langle r^i x - x\rangle^1_{i=0, x\in\mathbb{Z}_{(n,m)}}} \cong \frac{\mathbb{Z}_{(n,m)}}{2\mathbb{Z}_{(n,m)}} = 0$. Si Q actúa trivialmente, entonces $(\mathbb{Z}_{(n,m)})_Q = \mathbb{Z}_{(n,m)}$ y $(\mathbb{Z}_m)_Q = \mathbb{Z}_m$. De esta manera

$$H_q(G,A)_Q = \begin{cases} \mathbb{Z}_m & q = 0, \\ \mathbb{Z}_{(n,m)} & q = 4k-1 \quad k \geq 1, \\ \mathbb{Z}_{(n,m)} & q = 4k \quad k \geq 1, \\ 0 & \text{otro lado.} \end{cases}$$

Además,

$$\mathbb{Z}^Q_{(n,m)} = \begin{cases} \mathbb{Z}_{(n,m)} & \text{para la acción trivial de } Q, \\ 0 & \text{para la acción no-trivial de } Q. \end{cases}$$

Por lo tanto, para el caso trivial, obtenemos que la aplicación norma es la multiplicación por 2 ($\overline{N} : \mathbb{Z}_{(n,m)} \to \mathbb{Z}_{(n,m)}$, $x \mapsto 2x$) y para el caso no trivial es la multiplicación por 0. Entonces, en ambos casos obtenemos que *coker* $\overline{N}$ y *ker* $\overline{N}$ son 0. Un análisis similar para la aplicación norma $\overline{N} : (\mathbb{Z}_m)_Q \to \mathbb{Z}_m^Q$ (caso $q = 0$), tenemos que el *coker* $\overline{N}$ y *ker* $\overline{N}$ también son 0. Por lo tanto,

$${}^I E^2_{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z}_m & p = 0 \quad q = 0, \\ \mathbb{Z}_{(n,m)} & p = 0 \quad q = 4k-1 \quad k \geq 1, \\ \mathbb{Z}_{(n,m)} & p = 0 \quad q = 4k \quad k \geq 1, \\ 0 & \text{otro lado.} \end{cases}$$

Esto quiere decir que los términos de la sucesión espectral se concentran únicamente en el eje vertical q. Por lo tanto, la sucesión espectral colapsa; esto es, para cada p y q debemos tener que ${}^I E^2_{p,q} = \cdots = {}^I E^\infty_{p,q}$. Ya que la sucesión espectral converge a $H_{p+q}(Q, C(G)\otimes A)$, entonces ${}^I E^\infty_{p,q} \cong \frac{F_p H_{p+q}(Q,C(G)\otimes A)}{F_{p-1} H_{p+q}(Q,C(G)\otimes A)}$. De esta manera para determinar la homología $H_i(Q, C(G)\otimes A)$ con $i = p+q$, para cada i, podemos considerar las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow F_{-1}H_i(Q, C(G)\otimes A) \longrightarrow F_0H_i(Q, C(G)\otimes A) \longrightarrow {}^IE^{\infty}_{0,i} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow F_0H_i(Q, C(G)\otimes A) \longrightarrow F_1H_i(Q, C(G)\otimes A) \longrightarrow {}^IE^{\infty}_{1,i-1} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow F_1H_i(Q, C(G)\otimes A) \longrightarrow F_2H_i(Q, C(G)\otimes A) \longrightarrow {}^IE^{\infty}_{2,i-2} \longrightarrow 0,$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow F_{i-2}H_i(Q, C(G)\otimes A) \longrightarrow F_{i-1}H_i(Q, C(G)\otimes A) \longrightarrow {}^IE^{\infty}_{i-1,1} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow F_{i-1}H_i(Q, C(G)\otimes A) \longrightarrow F_iH_i(Q, C(G)\otimes A) \longrightarrow {}^IE^{\infty}_{i,0} \longrightarrow 0.$$

Además, $F_{-1}H_i(Q, C(G)\otimes A) = 0$ y ${}^IE^{\infty}_{1,i-1} = \cdots = {}^IE^{\infty}_{i,0} = 0$. Entonces, por las sucesiones exactas anteriores obtenemos

$$^IE^{\infty}_{0,i} \cong F_0H_i(Q, C(G)\otimes A) \cong \cdots \cong F_iH_i(Q, C(G)\otimes A).$$

También sabemos que ${}^IE^{\infty}_{0,i} = {}^IE^{2}_{0,i}$ y $F_iH_i(Q, C(G)\otimes A) = H_i(Q, C(G)\otimes A)$, entonces ${}^IE^{2}_{0,i} = H_i(Q, C(G)\otimes A)$. Ya que en el teorema 2.5 obtuvimos que $H_i(Q, C(G)\otimes A) \cong H_i^Q(G, A)$, entonces el teorema está probado. $\square$

Capítulo 3

Productos

En este capítulo definimos la *homología y cohomología del producto cruz invariante*. Además, en particular para $Q = \mathbb{Z}_{p^k}$, donde p es un número primo, construimos la *aplicación diagonal invariante* en donde está inducido el subcomplejo de invariantes $C(G)^Q$ y con ella definimos el *producto invariante.*

3.1. Producto Cruz Invariante

Sean G, $G^{'}$, $C(G)^Q$ y $C(G^{'})^Q$ los subcomplejos barra de G y $G^{'}$, respectivamente. Si A y $A^{'}$ son grupos abelianos con G y Q acciones triviales tenemos el isomorfismo

$$f : \bigoplus_{i+j=n} C_i(G)^Q \otimes A \otimes C_j(G^{'})^Q \otimes A^{'} \to \bigoplus_{i+j=n} C_i(G)^Q \otimes C_j(G^{'})^Q \otimes A \otimes A^{'},$$

dado por $(x \otimes a) \otimes (x^{'} \otimes a^{'}) \mapsto (x \otimes x^{'}) \otimes (a \otimes a^{'})$.
Si $z \in C(G)^Q \otimes A$ y $z^{'} \in C(G^{'})^Q \otimes A^{'}$, entonces denotaremos por $z \times z^{'}$ la imagen de $z \otimes z^{'}$ bajo esta aplicación.

Lema 3.1. *Si $z = x \otimes a$ y $z^{'} = x^{'} \otimes a^{'}$, entonces*

$$\partial(z \times z^{'}) = \partial(z) \times z^{'} + (-1)^{deg\, z} z \times \partial z^{'}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\partial(z \times z^{'}) &= \partial(x \otimes x^{'} \otimes a \otimes a^{'}) \\
&= \partial(x) \otimes x^{'} \otimes a \otimes a^{'} + (-1)^{deg\, x} x \otimes \partial(x^{'}) \otimes a \otimes a^{'} \\
&= \partial(x) \otimes x^{'} \otimes a \otimes a^{'} + (-1)^{deg\, (x \otimes a)} x \otimes \partial(x^{'}) \otimes a \otimes a^{'} \\
&= f(\partial(x) \otimes a \otimes x^{'} \otimes a^{'}) + (-1)^{deg\, (x \otimes a)} f(x \otimes a \otimes \partial(x^{'}) \otimes a^{'}) \\
&= f(\partial(x \otimes a) \otimes x^{'} \otimes a^{'}) + (-1)^{deg\, (x \otimes a)} f(x \otimes a \otimes \partial(x^{'} \otimes a^{'})) \\
&= f(\partial(z) \otimes z^{'}) + (-1)^{deg\, z} f(z \otimes \partial(z^{'})) \\
&= \partial(z) \times z^{'} + (-1)^{deg\, z} z \times \partial(z^{'}).
\end{aligned}$$

□

Por lo tanto, el producto de dos ciclos es un ciclo, cuya homología depende únicamente sobre de las clases de los ciclos dados. De esta manera obtenemos un producto inducido:

$$\begin{aligned} \times : \bigoplus_{i+j=n} H_i^Q(G,A) \otimes H_j^Q(G^{'},A^{'}) &\rightarrow H_n(\bigoplus_{i+j=n} C_i(G)^Q \otimes C_j(G^{'})^Q \otimes A \otimes A^{'}) \\ [z] \otimes [z^{'}] &\rightarrow [z \times z^{'}], \end{aligned}$$

al que le vamos a llamar *homología del producto cruz invariante.*

Similarmente, dadas dos cocadenas $u \in \mathscr{H}om(C(G)^Q, A)$ y $v \in \mathscr{H}om$ $(C(G^{'})^Q, B)$, definimos su producto cruz $u \times v \in \mathscr{H}om(C(G)^Q \otimes C(G^{'})^Q, A \otimes B)$ como:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}om(C(G)^Q, A) \otimes \mathscr{H}om(C(G^{'})^Q, B) &\rightarrow \mathscr{H}om(C(G)^Q \otimes C(G^{'})^Q, A \otimes B) \\ u \otimes v &\mapsto \langle u \times v, x \otimes x^{'} \rangle \\ &= (-1)^{deg\, v \cdot deg\, x} \langle u, x \rangle \otimes \langle v, x^{'} \rangle. \end{aligned}$$

NOTA: Aquí queda entendido que el complejo de cadenas $C(G)^Q \otimes C(G^{'})^Q$ es el complejo total: $\bigoplus_{i+j=n} C_i(G)^Q \otimes C_j(G^{'})^Q$.

Lema 3.2. *Si δ es el diferencial de los tres complejos $\mathscr{H}om$ entonces $\delta(u \times v) = \delta u \times v + (-1)^{deg\, u} u \times \delta v$.*

Demostración. Supongamos que $u \times v \in \mathscr{H}om(C(G)^Q \otimes C(G)^Q, A \otimes B)_{-n}$, entonces

$$\begin{aligned} &\left\langle \delta(u \times v), \sum_{q=0}^{n+1} x_q \otimes x_{n+1-q} \right\rangle \\ &= (-1)^{deg\,(u \times v)+1} \left\langle u \times v, \sum_{q=0}^{n+1} \partial\left(x_q \otimes x_{n+1-q}\right) \right\rangle \\ &= (-1)^{deg\,(u \times v)+1} \left\langle u \times v, \sum_{q=0}^{n+1} \partial x_q \otimes x_{n+1-q} + (-1)^q x_q \otimes \partial x_{n+1-q} \right\rangle \\ &= (-1)^{deg\,(u \times v)+1} \sum_{q=0}^{n+1} \langle u \times v, \partial x_q \otimes x_{n+1-q} \rangle \\ &+ \sum_{q=0}^{n+1} (-1)^{deg\,(u \times v)+q+1} \langle u \times v, x_q \otimes \partial x_{n+1-q} \rangle \\ &= (-1)^{deg\,(u \times v)+1} \sum_{q=0}^{n+1} (-1)^{deg\, v \cdot (q-1)} \langle u, \partial x_q \rangle \otimes \langle v, x_{n+1-q} \rangle \\ &+ (-1)^{deg\,(u \times v)+1} \sum_{q=0}^{n+1} (-1)^q (-1)^{deg\, v \cdot (q)} \langle u, x_q \rangle \otimes \langle v, \partial x_{n+1-q} \rangle. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por otro lado,

$$\left\langle \delta u \times v, \sum_{q=0}^{n+1} x_q \otimes x_{n+1-q} \right\rangle = \sum_{q=0}^{n+1} \langle \delta u \times v, x_q \otimes x_{n+1-q} \rangle$$
$$= \sum_{q=0}^{n+1} (-1)^{deg\, v \cdot (q)} \langle \delta u, x_q \rangle \otimes \langle v, x_{n+1-q} \rangle$$
$$= \sum_{q=0}^{n+1} (-1)^{deg\, v \cdot (q)} (-1)^{deg\, u+1} \langle u, \partial x_q \rangle \otimes \langle v, x_{n+1-q} \rangle,$$

además,

$$\left\langle u \times \delta v, \sum_{q=0}^{n+1} x_q \otimes x_{n+1-q} \right\rangle = \sum_{q=0}^{n+1} \langle u \times \delta v, x_q \otimes x_{n+1-q} \rangle$$
$$= \sum_{q=0}^{n+1} (-1)^{deg\, \delta v \cdot (q)} \langle u, x_q \rangle \otimes \langle \delta v, x_{n+1-q} \rangle$$
$$= \sum_{q=0}^{n+1} (-1)^{(deg\, v+1) \cdot q} (-1)^{deg\, v+1} \langle u, x_q \rangle \otimes \langle v, \partial x_{n+1-q} \rangle.$$

Pero como $deg\,(u \times v) = deg\, u + deg\, v$, desarrollando y simplificando nuevamente a la ecuación (3.1), obtenemos que $\delta(u \times v) = \delta u \times v + (-1)^{deg\, u} u \times \delta v$. □

Por lo tanto, definimos la *cohomología* del *producto cruz invariante* como:

$$\begin{aligned} \times : \bigoplus_{i+j=n} H_Q^i(G, A) \otimes H_Q^j(G', B) &\rightarrow H^{i+j}\Big(\bigoplus_{i+j=n} C_i(G)^Q \otimes C_j(G')^Q, A \otimes B\Big) \\ [u] \otimes [v] &\rightarrow [u \times v]. \end{aligned}$$

3.2. Aplicación Diagonal Invariante

Supongamos que $Q = \mathbb{Z}_{p^k} = \langle t \rangle$, donde p es un número primo. De [6] sabemos que

$$C_n(G)^Q = \bigoplus_{i=0}^{k} X_i, \tag{3.2}$$

donde $X_0 = \mathbb{Z}\{[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \mid g_j \in G^Q\}$ y para $1 \leq i \leq k$, los grupos abelianos libres X_i están generados por $\sum_{s=0}^{p^i-1} t^s [g_1 \mid \cdots \mid g_n]$, de tal manera que cada $g_j \in G^{\mathbb{Z}_{p^{k-i}}}$, $1 \leq j \leq n$ y existe $i_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $g_{i_0} \notin G^{\mathbb{Z}_{p^{k-(i-1)}}}$. De esto último, supongamos que $g_j \in G^{\mathbb{Z}_{p^{k-i}}}$, $1 \leq j \leq n$ y que $g_j \notin G^{\mathbb{Z}_{p^{k-(i-1)}}}$, $1 \leq j \leq n$ y denotemos $X_i := X_{n,i}$ para cada $0 \leq i \leq k$.

Por lo tanto, definimos la *aplicación diagonal invariante* Δ:

$$\begin{aligned}\Delta : C_n(G)^Q &\to \bigoplus_{q=0}^{n} C_q(G)^Q \otimes C_{n-q}(G)^Q \\ \Delta\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) &= \sum_{i=0}^{k} \Delta_i(x_i),\end{aligned}$$

donde $x_i \in X_{n,i}$, $\Delta_i : X_{n,i} \to \bigoplus_{q=0}^{n} X_{q,i} \otimes X_{n-q,i}$, $\forall\, 0 \leq i \leq k$, tal que

$$\Delta_0[g_1 \mid \cdots \mid g_n] = \sum_{q=0}^{n} [g_1 \mid \cdots \mid g_q] \otimes [g_{q+1} \mid \cdots \mid g_n]$$

y

$$\Delta_i\left(\sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]\right) = \sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_q] \otimes \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_{q+1} \mid \cdots \mid g_n]\right),$$

para toda $1 \leq i \leq k$.

NOTA: Denotaremos a $[\ ]$ como el generador de $C_0(G)^Q = \mathbb{Z}$, así que la diagonal $\Delta : C_0(G)^Q \to C_0(G)^Q \otimes C_0(G)^Q$ será dada como $\Delta[\ ] = [\ ] \otimes [\ ]$.

Teorema 3.1. Δ *es una aplicación de cadenas:*

$$\begin{tikzcd} C_n(G)^Q \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Delta"'] & C_{n-1}(G)^Q \arrow[d, "\Delta"'] \\ \bigoplus_{q=0}^{n} C_q(G)^Q \otimes C_{n-q}(G)^Q \arrow[r, "\partial"] & \bigoplus_{q=0}^{n-1} C_q(G)^Q \otimes C_{n-1-q}(G)^Q \end{tikzcd}$$

Demostración. Por definición de Δ y dado que $C_n(G)^Q = \bigoplus_{i=0}^{k} X_{n,i}$, es suficiente demostrar que $\partial \circ \Delta_i(x_i) = \Delta \circ \partial(x_i)$ para cada x_i generador de $X_{n,i}$, $0 \leq i \leq k$.

$i = 0$

$$\begin{aligned}\Delta_0 \circ \partial([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) &= \Delta_0([g_2 \mid \cdots \mid g_n]) \\ &\quad + \Delta_0\left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k [g_1 \mid \cdots \mid g_k g_{k+1} \mid \cdots \mid g_n]\right) \\ &\quad + (-1)^n \Delta_0([g_1 \mid \cdots \mid g_{n-1}]).\end{aligned}$$

Desarrollando estas sumas obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_0 \circ \partial([g_1 \mid \cdots \mid g_n])\\
&=[\ ]\otimes[g_2|\cdots|g_n]+[g_2]\otimes[g_3|\cdots|g_n]+[g_2|g_3]\otimes[g_4|\cdots|g_n]+\cdots+[g_2|\cdots|g_n]\otimes[\ ]\\
&\quad-[\ ]\otimes[g_1g_2|g_3|\cdots|g_n]+[g_1g_2]\otimes[g_3|\cdots|g_n]+[g_1g_2|g_3]\otimes[g_4|\cdots|g_n]+\cdots+[g_1g_2|\cdots|g_n]\otimes[\ ]\\
&\quad+([\ ]\otimes[g_1|g_2g_3|\cdots|g_n]+[g_1]\otimes[g_2g_3|\cdots|g_n]+[g_1|g_2g_3]\otimes[g_4|\cdots|g_n]+\cdots+[g_1|g_2g_3|\cdots|g_n]\otimes[\ ])\\
&\quad-([\ ]\otimes[g_1|g_2|g_3g_4|\cdots|g_n]+[g_1]\otimes[g_2|g_3g_4|\cdots|g_n]+[g_1|g_2]\otimes[g_3g_4|\cdots|g_n]\\
&\quad+\cdots+[g_1|g_2|g_3g_4|\cdots|g_n]\otimes[\ ])\\
&\quad+\\
&\quad\vdots\\
&\quad+\\
&\quad(-1)^k([\,]\otimes[g_1|\cdots|g_kg_{k+1}|\cdots|g_n]+[g_1]\otimes[g_2|\cdots|g_kg_{k+1}|\cdots|g_n]+[g_1|g_2]\otimes[g_3|\cdots|g_kg_{k+1}|\cdots|g_n]\\
&\quad+\cdots+[g_1|\cdots|g_kg_{k+1}|\cdots|g_n]\otimes[\,])\\
&\quad+\\
&\quad\vdots\\
&\quad+\\
&\quad(-1)^{n-1}([\ ]\otimes[g_1|\cdots|g_{n-1}g_n]+[g_1]\otimes[g_2|\cdots|g_{n-1}g_n]+[g_1|g_2]\otimes[g_3|\cdots|g_{n-1}g_n]\\
&\quad+\cdots+[g_1|\cdots|g_{n-1}g_n]\otimes[\ ])\\
&\quad(-1)^n([\ ]\otimes[g_1|\cdots|g_{n-1}]+[g_1]\otimes[g_2|\cdots|g_{n-1}]+[g_1|g_2]\otimes[g_3|\cdots|g_{n-1}]+\cdots+[g_1|\cdots|g_{n-1}]\otimes[\ ]).
\end{aligned}
$$

Así, agrupando los términos de cada renglón de acuerdo al grupo abeliano en que se encuentren y aplicando la definición del diferencial ∂ del complejo barra, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\Delta_0 \circ \partial([g_1 \mid \cdots \mid g_n])\\
&=[\ ]\otimes\partial[g_1|\cdots|g_n]+(\partial[g_1|g_2]\otimes[g_3|\cdots|g_n]-[g_1]\otimes[g_3|\cdots|g_n]-[g_1]\otimes\partial[g_2|\cdots|g_n]+[g_1]\otimes[g_3|\cdots|g_n])\\
&\quad+(\partial[g_1|g_2|g_3]\otimes[g_4|\cdots|g_n]+[g_1|g_2]\otimes[g_4|\cdots|g_n]+[g_1|g_2]\otimes\partial[g_3|\cdots|g_n]-[g_1|g_2]\otimes[g_4|\cdots|g_n])\\
&\quad+\\
&\quad\vdots\\
&\quad+\partial[g_1|\cdots|g_{q+1}]\otimes[g_{q+2}|\cdots|g_n]-(-1)^{q+1}[g_1|\cdots|g_q]\otimes[g_{q+2}|\cdots|g_n]\\
&\quad+(-1)^{q+1}[g_1|\cdots|g_q]\otimes\partial[g_{q+1}|\cdots|g_n]-(-1)^{q+1}[g_1|\cdots|g_q]\otimes[g_{q+2}|\cdots|g_n]\\
&\quad+\partial[g_1|\cdots|g_n]\otimes[\ ].
\end{aligned}
$$

Luego, eliminando los términos semejantes tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\Delta_0 \circ \partial([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) \\
&=\sum_{q=0}^{n}(\partial[g_1 \mid \cdots \mid g_q] \otimes [g_{q+1} \mid \cdots \mid g_n] + (-1)^q [g_1 \mid \cdots \mid g_q] \otimes \partial[g_{q+1} \mid \cdots \mid g_n]) \\
&=\partial\left(\sum_{q=0}^{n}[g_1 \mid \cdots \mid g_q] \otimes [g_{q+1} \mid \cdots \mid g_n]\right) \\
&=\partial\Delta_0[g_1 \mid \cdots \mid g_n].
\end{aligned}$$

$1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
\Delta_i \circ \partial\left(\sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]\right) &= \Delta_i\left(\sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_2 \mid \cdots \mid g_n]\right) \\
&+ \Delta_i\left(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_k g_{k+1} \mid \cdots \mid g_n]\right) \\
&+ (-1)^n \Delta_i\left(\sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_{n-1}]\right).
\end{aligned}$$

Similarmente como en el caso anterior, desarrollando las sumas, agrupando los términos semejantes, aplicando la definición de ∂ (del complejo barra) y como ∂ es Q-equivariante obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\Delta_i \circ \partial\left(\sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]\right) \\
&=\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{s=0}^{p^i-1} t^s\partial[g_1 \mid \cdots \mid g_q] \otimes \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_{q+1} \mid \cdots \mid g_n]\right) \\
&\quad+\sum_{q=0}^{n}\left((-1)^q \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_q] \otimes \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s\partial[g_{q+1} \mid \cdots \mid g_n]\right) \\
&=\partial\left(\sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_q] \otimes \sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_{q+1} \mid \cdots \mid g_n]\right)\right) \\
&=\partial\Delta_i\left(\sum_{s=0}^{p^i-1} t^s[g_1 \mid \cdots \mid g_n]\right).
\end{aligned}$$

□

3.3. Producto Invariante

Supongamos que $Q = \mathbb{Z}_{p^k}$ (p es un número primo) y que $C_n(G)^Q = \bigoplus_{i=0}^{k} X_{n,i}$ donde los grupos $X_{n,i}$ son como en la sección anterior.

Sea $u \in \mathscr{H}om(C(G)^Q, A)$, $v \in \mathscr{H}om(C(G)^Q, B)$ y sea Δ la aplicación diagonal invariante. Definimos el *producto invariante* $u \cup v \in \mathscr{H}om(C(G)^Q, A \otimes B)$ como la composición:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}om(C(G)^Q, A) \otimes \mathscr{H}om(C(G)^Q, B) &\rightarrow \mathscr{H}om(C(G)^Q, A \otimes B) \\ u \otimes v &\mapsto u \cup v = u \times v \circ \Delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\Delta(\sum_{i=0}^{k} x_k) = \sum_{i=0}^{k} \Delta_i(x_i) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{q=0}^{n} x_{q,i} \otimes x_{n-q,i}$ donde $\sum_{i=0}^{k} x_k \in C_n(G)^Q$, entonces el producto $u \cup v$ queda definido puntualmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u \cup v \left(\sum_{i=0}^{k} x_k \right) &= u \times v \circ \Delta \left(\sum_{i=0}^{k} x_k \right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{q=0}^{n} (-1)^{deg\, v(q)} \langle u, x_{q,i} \rangle \otimes \langle v, x_{n-q,i} \rangle. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Lema 3.3. *En el producto cup* $\delta(u \cup v) = \delta u \cup v + (-1)^{deg\, u} u \cup \delta v$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \left\langle \delta(u \cup v), \sum_{i=0}^{k} x_i \right\rangle &= (-1)^{deg\,(u \cup v)+1} \left\langle u \cup v, \partial \left(\sum_{i=0}^{k} x_i \right) \right\rangle \\ &= (-1)^{deg\,(u \cup v)+1} \left\langle u \times v \circ \Delta, \partial \left(\sum_{i=0}^{k} x_i \right) \right\rangle \\ &= (-1)^{deg\,(u \cup v)+1} \left\langle u \times v, \Delta \partial \left(\sum_{i=0}^{k} x_i \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Pero por la sección anterior, sabemos que $\Delta \partial = \partial \Delta$, así

$$\begin{aligned} \left\langle \delta(u \cup v), \sum_{i=0}^{k} x_i \right\rangle &= (-1)^{deg\,(u \cup v)+1} \left\langle u \times v, \partial \Delta \left(\sum_{i=0}^{k} x_i \right) \right\rangle \\ &= (-1)^{deg\,(u \cup v)+1} (-1)^{deg\,(u \times v)+1} \left\langle \delta(u \times v), \Delta \left(\sum_{i=0}^{k} x_i \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Pero por el lema 3.2, $\delta(u \times v) = \delta u \times v + (-1)^{deg\, u} u \times \delta v$ y como $deg\,(u \cup v) =$

$deg\,(u \times v)$, de esta manera

$$\left\langle \delta(u \cup v), \sum_{i=0}^{k} x_i \right\rangle = \left\langle \delta u \times v, \Delta\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right)\right\rangle + (-1)^{deg\,u}\left\langle u \times \delta v, \Delta\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right)\right\rangle$$
$$= \left\langle \delta u \cup v, \sum_{i=0}^{k} x_i \right\rangle + (-1)^{deg\,u}\left\langle u \cup \delta v, \sum_{i=0}^{k} x_i \right\rangle.$$

□

Por lo tanto, el producto de dos ciclos es un ciclo, tal que la clase de la homología depende únicamente de la clase de los ciclos dados, luego obtenemos el producto:

$$\begin{array}{rcl} \bigoplus_{q=0}^{n} H_Q^q(G,A) \otimes H_Q^{n-q}(G,B) & \to & H_Q^n(G, A \otimes B) \\ [u] \otimes [v] & \to & [u \cup v], \end{array}$$

que le llamaremos *cohomología del producto invariante*.

3.3.1. Propiedades del Producto Invariante

- *Dimensión* 0. El producto invariante

$$H_Q^0(G,A) \otimes H_Q^0(G,B) \to H_Q^0(G, A \otimes B)$$

es inducido por la aplicación

$$\begin{array}{rcl} A \otimes B & \to & A \otimes B \\ u[\,] \otimes v[\,] & \mapsto & \langle u, [\,]\rangle \otimes \langle v, [\,]\rangle. \end{array}$$

Demostración. Sabemos que $C_0(G)^Q \cong \mathbb{Z}$, entonces $Hom(C_0(G)^Q, M) \cong Hom(\mathbb{Z}, M) \cong M$ (para cualquier grupo abeliano M) bajo el isomorfismo $f \overset{\phi}{\cong} f[\,]$. De esta manera, a nivel de cadenas podemos considerar al producto invariante de grado 0 como el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Hom(C_0(G)^Q, A) \otimes Hom(C_0(G)^Q, B) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\phi"'] & Hom(C_0(G)^Q, A \otimes B) \arrow[d, "\phi"] \\ A \otimes B \arrow[r, "\cup"'] & A \otimes B, \end{tikzcd}$$

es decir;

$$\begin{tikzcd} u \otimes v \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\phi"'] & u \times v \circ \Delta \arrow[d, "\phi"] \\ u[\,] \otimes v[\,] \arrow[r, "\cup"'] & \langle u, [\,]\rangle \otimes \langle v, [\,]\rangle. \end{tikzcd}$$

□

- *Naturalidad con respecto a un homomorfismo de coeficientes*: Dados los homomorfismos de G-módulos $f : A \to A^{'}$ y $g : B \to B^{'}$ (G-actúa trivialmente sobre A, $A^{'}$, B y $B^{'}$) y elementos $u \in H_Q^*(G, A)$ y $v \in H_Q^*(G, B)$, tenemos que

$$(f \otimes g)_*(u \cup v) = f_*u \cup g_*v$$

en $H_Q^*(G, A^{'} \otimes B^{'})$, donde $f_* = H_Q^*(G, f)$, etc.

Demostración. Demostremos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom(C_q(G)^Q, A) \otimes Hom(C_{n-q}(G)^Q, B) \arrow[r, "u\cup v"] \arrow[dr, "f_* u \cup g_* v"'] & Hom(C_n(G)^Q, A \otimes B) \arrow[d, "(f\otimes g)_*"] \\
 & Hom(C_n(G)^Q, A^{'} \otimes B^{'})
\end{tikzcd}$$

Por la ecuación (3.3) y por definición de $(f \otimes g)_*$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&(f\otimes g)_*(u \cup v)\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) \\
&\quad = (f \otimes g)_* \sum_{i=0}^{k}\sum_{q=0}^{n}(-1)^{deg\, v\cdot(q)}\langle u, x_{q,i}\rangle \otimes \langle v, x_{n-q,i}\rangle \\
&\quad = \sum_{i=0}^{k}\sum_{q=0}^{n}(-1)^{deg\, v\cdot(q)} f(\langle u, x_{q,i}\rangle) \otimes g(\langle v, x_{n-q,i}\rangle) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{k}\sum_{q=0}^{n}(-1)^{deg\, v\cdot(q)}\langle f_*u, x_{q,i}\rangle \otimes \langle g_*v, x_{n-q,i}\rangle,
\end{aligned}$$

pero $deg\, v = deg\, fv$, así

$$\begin{aligned}
(f \otimes g)_*(u \cup v)\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{q=0}^{n}(-1)^{deg\, fv\cdot(q)}\langle f_*u, x_{q,i}\rangle \otimes \langle g_*v, x_{n-q,i}\rangle \\
&= f_*u \cup g_*v\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right).
\end{aligned}$$

□

NOTA: Dado que G actúa trivialmente sobre A, $A^{'}$, B y $B^{'}$ entonces podemos considerar a los G- homomorfismos f y g como homomorfismos de $\mathbb{Z}$-módulos.

- *Compatibilidad con el homomorfismo conector* δ. Sea $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A'' \to 0$ una sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos y sea B un $\mathbb{Z}$-módulo tal que la sucesión $0 \to A' \otimes B \xrightarrow{i\otimes 1} A \otimes B \xrightarrow{\pi\otimes 1} A'' \otimes B \to 0$ es exacta. Entonces tenemos que $\delta(u \cup v) = \delta u \cup v$ para cualquier $u \in H^q_Q(G, A'')$ y $v \in H^{n-q}_Q(G, B)$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} H^q_Q(G, A'') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "-\cup v"'] & H^{q+1}_Q(G, A') \arrow[d, "-\cup v"'] \\ H^n_Q(G, A'' \otimes B) \arrow[r, "\delta"] & H^{n+1}_Q(G, A' \otimes B). \end{tikzcd}$$

Demostración. Como $C(G)^Q$ es $\mathbb{Z}$-libre entonces es $\mathbb{Z}$-proyectivo, por lo tanto el funtor $Hom(C(G)^Q, -)$ es exacto. Con esto, probemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Hom(C_q(G)^Q, A') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "-\cup v"'] & Hom(C_q(G)^Q, A) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "-\cup v"'] & Hom(C_q(G)^Q, A'') \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Hom(C_n(G)^Q, A' \otimes B) \arrow[r, "(i\otimes 1)_*"] & Hom(C_n(G)^Q, A \otimes B) \arrow[r, "(\pi\otimes 1)_*"] & Hom(C_n(G)^Q, A'' \otimes B) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Sea $f \in Hom(C_q(G)^Q, A')$ y $g \in Hom(C_q(G)^Q, A)$, entonces por la propiedad anterior, tenemos

$$(- \cup v) \circ i_*(f) = i_* f \cup v = (i \otimes 1)_*(f \cup v),$$
$$(- \cup v) \circ \pi_*(g) = \pi_* g \cup v = (\pi \otimes 1)_*(g \cup v).$$

Además las líneas verticales conmutan con el operador co-frontera δ en $Hom(C(G)^Q, -)$, ya que $\delta(f' \cup g') = \delta f' \cup g' + (-1)^{deg\, f'} f' \cup \delta g'$ que reduce a la fórmula $\delta(f' \cup g') = \delta f' \cup g'$ si g' es un co-ciclo. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & Hom(C_{q-1}(G)^Q, -) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "-\cup v"'] & Hom(C_q(G)^Q, -) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "-\cup v"'] & Hom(C_{q+1}(G)^Q, -) \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"'] & {} \\ {} \arrow[r] & Hom(C_{n-1}(G)^Q, -) \arrow[r, "\delta"] & Hom(C_n(G)^Q, -) \arrow[r, "\delta"] & Hom(C_{n+1}(G)^Q, -) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, el resultado se sigue de la naturalidad del homomorfismo conector con respecto a las aplicaciones de sucesiones exactas cortas. □

- *Existencia de identidad.* Existe un elemento $1 \in H^0_Q(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ tal que $1 \cup u = u \cup 1 = u$ para todo $u \in H^*_Q(G, A)$.

Demostración. Sea $\varepsilon : B_0(G) \to \mathbb{Z}$ el homomorfismo aumentación. Dado que $C_i(G)^Q = (B_i(G) \otimes_G \mathbb{Z})^Q$ y $H^0_Q(G,\mathbb{Z}) = ker\{Hom(C_0(G)^Q,\mathbb{Z}) \to Hom(C_1(G)^Q,\mathbb{Z})\}$ entonces es claro que $\overline{\varepsilon} = \varepsilon \otimes 1 \in H^0_Q(G,\mathbb{Z})$. Supongamos que $u \in H^q_Q(G,\mathbb{Z})$. Así por definición del producto invariante tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon} \cup u\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) &= \overline{\varepsilon} \times u \circ \Delta\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right)\\ &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{q=0}^{n}\langle \overline{\varepsilon} \times u, x_{q,i} \otimes x_{n-q,i}\rangle\\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^{deg\, u(0)}\langle \overline{\varepsilon}, x_{0,i}\rangle \otimes \langle u, x_{n,i}\rangle.\end{aligned}$$

Pero como $\overline{\varepsilon}\cup u(\sum_{i=0}^{k} x_i) \in \mathbb{Z}\otimes A$ y $\mathbb{Z}\otimes A \cong A$ (bajo el isomorfismo $n\otimes a \mapsto na$, donde na significa n-veces a), esto implica que bajo este isomorfismo, $\langle \overline{\varepsilon}, x_{0,i}\rangle \otimes \langle u, x_{n,i}\rangle$ sea igual a $\langle \overline{\varepsilon}, x_{0,i}\rangle\langle u, x_{n,i}\rangle$ para toda $0 \le i \le k$. Pero $x_{0,i} = [\,]$, $\forall\, 0 \le i \le k$, además $\overline{\varepsilon}[\,] = 1$. Por otro lado, por definición de producto invariante tenemos que $x_i = x_{n,i}$, $0 \le i \le k$. Entonces

$$\overline{\varepsilon} \cup u(\sum_{i=0}^{k} x_i) = \sum_{i=0}^{k}\langle u, x_i\rangle = u(\sum_{i=0}^{k} x_i).$$

Por lo tanto, $\overline{\varepsilon} \cup u = u$ para todo $u \in H^*_Q(G,A)$, similarmente se sigue que $u \cup \overline{\varepsilon} = u$. □

- *Asociatividad*: Dados $u_j \in H^*_Q(G,A_j)$ $(j = 1,2,3)$ entonces $u_1 \cup (u_2 \cup u_3) = (u_1 \cup u_2) \cup u_3$.
- *Conmutatividad*: Para cualquier $u \in H^*_Q(G,A)$, $v \in H^*_Q(G,B)$ tenemos que $u \cup v = (-1)^{deg\, u \cdot deg\, v} v \cup u$.

Demostración. Sean

$$\tau : \bigoplus_{i+j=n} C_i(G)^Q \otimes C_j(G)^Q \to \bigoplus_{i+j=n} C_i(G)^Q \otimes C_j(G)^Q$$

el automorfismo de cadenas dado por $\tau(x \otimes y) = (-1)^{deg\, x \cdot deg\, y} y \otimes x$ y $t : A \otimes B \to B \otimes A$ el isomorfismo canónico definido como $t(a \otimes b) = b \otimes a$. Es suficiente que demostremos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}om(C(G)^Q,A) \otimes \mathscr{H}om(C(G)^Q,B) & \xrightarrow{\times} & \mathscr{H}om(C(G)^Q \otimes C(G)^Q, A \otimes B) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\psi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{H}om(\tau,t)} \\ \mathscr{H}om(C(G)^Q,B) \otimes \mathscr{H}om(C(G)^Q,A) & \xrightarrow{\times} & \mathscr{H}om(C(G)^Q \otimes C(G)^Q, B \otimes A), \end{array}$$

donde $\mathscr{H}om(\tau,t)(f)(x\otimes y) = t\circ f\circ\tau(x\otimes y)$, $f \in \mathscr{H}om(C(G)^Q \otimes C(G)^Q, A\otimes B)$, $x\otimes y\in C(G)^Q\otimes C(G)^Q$, y ψ es el isomorfismo $\psi(u\otimes v) = (-1)^{deg\,u\,deg\,v} v\otimes u$ tal que $u\in\mathscr{H}om(C(G)^Q, A)$, $v\in\mathscr{H}om(C(G)^Q, B)$. Así

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}om(\tau,t)(u\times v)(x\otimes y) &= t(u\times v)\tau(x\otimes y)\\
&= (-1)^{deg\,x\cdot deg\,y} t\langle u\times v, y\otimes x\rangle\\
&= t((-1)^{deg\,x\cdot deg\,y}(-1)^{deg\,v\cdot deg\,y}\langle u,y\rangle\otimes\langle v,x\rangle)\\
&= (-1)^{deg\,x\cdot deg\,y}(-1)^{deg\,v\cdot deg\,y}\langle v,x\rangle\otimes\langle u,y\rangle.
\end{aligned}$$

Por otro lado, el producto cruz de $\psi(u\otimes v) = (-1)^{deg\,u\cdot deg\,v} v\otimes u$ es $(-1)^{deg\,u\cdot deg\,v}\langle v\times u, x\otimes y\rangle$, donde

$$(-1)^{deg\,u\cdot deg\,v}\langle v\times u, x\otimes y\rangle = (-1)^{deg\,u\cdot deg\,v}(-1)^{deg\,u\cdot deg\,x}\langle v,x\rangle\otimes\langle u,y\rangle.$$

Pero $\langle v,x\rangle = 0$ a menos que $deg\,v = deg\,x$ y $\langle u,y\rangle = 0$ a menos que $deg\,u = deg\,y$, de esta manera obtenemos que el diagrama connmuta. $\square$

Capítulo 4

Teorema de dualidad invariante

A lo largo de este capítulo G será un grupo finito. Además, como en [1] supondremos que A es un grupo abeliano con G y Q acciones triviales, y que $\mathbb{Z}$ es un G-módulo trivial al menos que se mencione lo contrario.

En la primera sección de este capítulo demostramos que si G es un grupo finito y existe una resolución $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ de G-módulos libres con base finita entonces existe una resolución completa $F = (F_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ para G. En particular, nosotros trabajamos con la *resolución completa estándar* (ver el teorema 4.2) y damos una forma explícita de cómo construir la *aproximación diagonal completa estándar* (ver el teorema 4.3). Toda esta teoría fue basada en los libros [2] y [3].

En la siguiente sección, apartir de la aproximación diagonal completa estándar, construimos el *complejo completo estándar* y definimos una diagonal $\tilde{\Delta}$ inducida por este complejo (ver los teoremas 4.4 y 4.6).

De la existencia del complejo completo estándar, en la tercera sección, definimos el *complejo completo estándar invariante* F^Q (definición 4.4) y con ello definimos la *homología y cohomología de Tate invariante* $\tilde{H}_*^Q(G,A)$ y $\tilde{H}_Q^*(G,A)$ (ver las definiciones 4.5 y 4.6), respectivamente, obteniendo los teoremas 4.7 y 4.8.

En la tercera sección, obtenemos un isomorfismo entre la homología $\tilde{H}_*^Q(G,\mathbb{Z})$ y cohomología $\tilde{H}_Q^*(G,\mathbb{Z})$ del subcomplejo de invariantes (ver el teorema 4.11).

Por último, en la última sección, damos algunos ejemplos de cohomología invariante $H_Q^*(G,A)$.

A continuación enunciamos algunas proposiciones que fueron demostradas en [3] y que utilizaremos en la siguiente sección.

Proposición 4.1. *[3, Proposición 1.4.4, pág. 20] Sean M y $\mathbb{Z}$ dos G-módulos tal que G actúa trivialmente sobre $\mathbb{Z}$ y sea $\hat{M} = Hom(M,\mathbb{Z})$. Entonces:*

(1) $\hat{M}$ es un G-módulo.

(2) *Si M es un G-módulo libre con base finita entonces $\hat{M}$ también es un G-módulo libre con base finita.*

NOTA 4.1. *Vale la pena resaltar que la acción de G sobre $\hat{M}$ es la siguiente:*

$$\begin{array}{rcl} G \times \hat{M} & \to & \hat{M} \\ (g, f) & \mapsto & (gf)(m) = gf(g^{-1}m) \quad (m \in M). \end{array}$$

Proposición 4.2. *[3, Proposición 2.1.3, pág. 46] Sean M_1 y M_2 G-módulos, entonces la traza de un homomorfismo de M_1 en M_2 es un G-homomorfismo, esto es*

$$S : Hom(M_1, M_2) \to Hom_G(M_1, M_2) = Hom(M_1, M_2)^G$$

donde $S(f) = \sum_{g\in G} gf$.

Definición 4.1. *[3, pág. 47] Sea M un G-módulo. Entonces M es G-regular si existe un $\mathbb{Z}$-submódulo B de M tal que*

$$M = \bigoplus_{g\in G} gB.$$

Proposición 4.3. *[3, Proposición 2.1.4, pág. 47]*

(1) *Si M es G-libre, entonces es G-regular.*

(2) *Si $M = \bigoplus_{g\in G} gB$ es G-regular y B es $\mathbb{Z}$-libre, entonces M es G-libre.*

(3) *Si M es G-regular entonces existe $\pi \in Hom(M, M)$ tal que*

$$S(\pi) = \sum_{g\in G} g\pi = 1_M.$$

4.1. Resolución y aproximación diagonal completa estándar

Definición 4.2. *Una resolución completa $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ para G es un complejo acíclico $F = (F_{i\in\mathbb{Z}})_{i\in\mathbb{Z}}$ de G-módulos proyectivos, junto con una aplicación $\varepsilon : F_0 \to \mathbb{Z}$ tal que $\varepsilon : F_+ \to \mathbb{Z}$ es una resolución en el sentido usual, donde $F_+ = (F_i)_{i\geq 0}$.*

Teorema 4.1. *[3, Teorema 1.4.1, pág. 18] Sea G un grupo finito. Si existe un G-complejo de cadenas acíclico*

$$\cdots \to F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \tag{4.1}$$

tal que cada F_n es G-libre con base finita, entonces existe un G-complejo de cadenas acíclico

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} F_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} F_{-2} \xrightarrow{\partial_{-2}} F_{-3} \to \cdots \tag{4.2}$$

tal que cada F_{-n} es G-libre con base finita.

Demostración. Por hipótesis sabemos que para todo $i \geq 0$ cada módulo F_i es un G-módulo libre con base finita, entonces por la proposición 4.1 tenemos que el dual $\hat{F}_i$ de cada módulo F_i $(i \geq 0)$ también es un G-módulo libre con base finita. Por lo tanto, al dualizar la sucesión exacta (4.1), obtenemos la sucesión de G-módulos libres

$$0 \to \hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\hat{\varepsilon}} \hat{F}_0 \xrightarrow{\hat{\partial}_1} \hat{F}_1 \xrightarrow{\hat{\partial}_2} \hat{F}_2 \to \cdots, \tag{4.3}$$

donde los homomorfismos $\hat{\partial}_i : \hat{F}_{i-1} \to \hat{F}_i$ son definidos como $\hat{\partial}_i(f) = f \circ \partial_i$, y además afirmamos que cada uno de estos homomorfismos es G-equivariante:

$$\begin{aligned}
(g\hat{\partial}(f))(x) &= g\hat{\partial}(f)(g^{-1}x) \\
&= gf\partial(g^{-1}x) \\
&= gf(g^{-1}\partial(x)) \qquad \text{(ya que } \partial \text{ es } G\text{-equivariante)} \\
&= (gf)(\partial(x)) \\
&= \hat{\partial}(gf)(x).
\end{aligned}$$

Por otro lado, por definición de $\hat{\partial}_i$ es claro que $\hat{\partial}_i\hat{\partial}_{i-1}(f) = 0$. Además, sabemos que (4.1) tiene homología igual a *cero* y que cada módulo F_i es un grupo abeliano libre (dado que son $\mathbb{Z}[G]$-módulos libres), entonces existen $\mathbb{Z}$-homomorfismos $E : \mathbb{Z} \to F_0$ y $D_n : F_n \to F_{n+1}$ para toda $n \geq 0$ (ver el corolario I.7.6 de [2]), tales que

$$\begin{aligned}
\varepsilon \circ E &= 1 \qquad \text{sobre } \mathbb{Z} \\
\partial_1 \circ D_0 + E \circ \varepsilon &= 1 \qquad \text{sobre } F_0 \\
\partial_{n+1} \circ D_n + D_{n-1} \circ \partial_n &= 1 \qquad \text{sobre } F_n \ n \geq 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, al dualizar los homomorfismos E y D_n $\forall n \geq 0$ obtenemos los $\mathbb{Z}$-homomorfismos $\hat{E} : \hat{F}_0 \to \hat{\mathbb{Z}}$ y $\hat{D}_n : \hat{F}_{n+1} \to \hat{F}_n$ tal que

$$\begin{aligned}
\hat{E}\hat{\varepsilon} &= 1 \qquad \text{sobre } \hat{\mathbb{Z}} \\
\hat{D}_0 \circ \hat{\partial}_1 + \hat{\varepsilon} \circ \hat{E} &= 1 \qquad \text{sobre } \hat{F}_0 \\
\hat{D}_n \circ \hat{\partial}_{n+1} + \hat{\partial}_n \circ \hat{D}_{n-1} &= 1 \qquad \text{sobre } \hat{F}_n \ n \geq 1.
\end{aligned}$$

Esto implica que la sucesión (4.3) tiene una homotopía contraíble. Esto implica que la sucesión (4.3) sea una sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos, lo cual también implica que sea una sucesión exacta de G-módulos ya que los homomorfimos $\hat{\partial}_n$ $(n \geq 1)$ son G-equivariantes. Así, definimos $F_{-(i+1)} := \hat{F}_i$ $(i \geq 0)$, $\partial_{-i} := \hat{\partial}_i$ $(i \geq 1)$ y $\mu := \hat{\varepsilon}$. Además dado que $\hat{\mathbb{Z}} \cong_G \mathbb{Z}$, entonces obtenemos una sucesión exacta como (4.2), de esta manera obtenemos el teorema. $\square$

Un diagrama que ilustra la prueba del teorema anterior en el G-complejo de cadenas acíclico , es el siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, shift left] & F_1 \arrow[r, shift left, "\partial_1"] \arrow[l, shift left] & F_0 \arrow[rr, shift left, "\partial_0=\hat\varepsilon\varepsilon"] \arrow[l, shift left, "D_0"] \arrow[dr, shift left, "\varepsilon"] & & \hat F_0 \arrow[r, shift left, "\partial_{-1}=\hat\partial_1"] \arrow[ll, shift left, "E\hat E"] \arrow[dl, shift left, "\hat E"] & \hat F_1 \arrow[r, shift left] \arrow[l, shift left, "\hat D_0"] & \cdots \arrow[l, shift left] \\
& & & \mathbb{Z}\cong\hat{\mathbb{Z}} \arrow[ul, shift left, "E"] \arrow[ur, shift left, "\mu=\hat\varepsilon"] \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{tikzcd}
\tag{4.4}
$$

En particular, aplicando este teorema a la resolución barra $\varepsilon : B(G) \to \mathbb{Z}$, obtenemos el G-complejo acíclico de G-módulos libres con base finita

$$\cdots \to B_1(G) \overset{\partial_1}{\to} B_0(G) \overset{\partial_0}{\to} B_{-1}(G) \overset{\partial_{-1}}{\to} B_{-2}(G) \to \cdots ,$$

al que llamamos *resolución completa estándar*.

A continuación daremos una descripción de las bases de los G-módulos libres $B_i(G)$ $(i \in \mathbb{Z})$ de la resolución completa estándar.

Por la definición 1.33 sabemos que $B_0(G)$ tiene una G-base que consiste de un solo elemento $[\,]$, entonces se sigue de la prueba de la proposición 4.1 que $B_{-1}(G) = B_0\hat{(G)}$ tiene una G-base canónica que consiste del único elemento $\langle\,\rangle$, definido como (-1)-*celda*. Además, la evaluación de $B_0(G)$ sobre cualquier elemento $\tau\langle\ \rangle \in B_0\hat{(G)}$ $(\tau \in G)$ es dada por su $\mathbb{Z}$-base $\{g[\,] \mid g \in G\}$; es decir,

$$(\tau\langle\ \rangle)(g[\,]) = \tau\langle\ \rangle(\tau^{-1}g[\,]) = \langle\ \rangle(\tau^{-1}g[\,]) = \begin{cases} 1 & g = \tau, \\ 0 & \text{otro lado} . \end{cases}$$

Por otro lado, sabemos que el conjunto $\{[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \mid g_i \in G\}$ es una G-base para $B_n(G)$ $(n \geq 1)$, entonces una G-base para $B_{-(n+1)}(G) = B_n\hat{(G)}$ es el conjunto de todas las $-(n+1)$-celdas, $\langle \tau_1, \cdots, \tau_n\rangle$. Notemos que una $-(n+1)$-celda es dada por una n-tupla de elementos de G. La evaluación de $B_n(G)$ sobre $B_n\hat{(G)} = B_{-(n+1)}(G)$ es dada como sigue:

$$\begin{aligned} &(\tau\langle\tau_1, \cdots ,\tau_n\rangle)(g[g_1 \mid \cdots \mid g_n]) \\ &\qquad = \tau\langle\tau_1, \cdots, \tau_n\rangle(\tau^{-1}g[g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = \begin{cases} 1 & g = \tau, \tau_i = g_i, \\ 0 & \text{otro lado} . \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora veamos cómo se define el diferencial ∂_0 mediante los generadores de $B_0\hat{(G)}$. Primero notemos que $\partial_0 = \mu \circ \varepsilon$ (ecuación (4.4), $\mu = \hat\varepsilon$). Entonces

$$\partial_0[\,] = \hat\varepsilon \circ \varepsilon[\,] = \hat\varepsilon(1) = \hat\varepsilon(\hat 1) = 1 \circ \varepsilon = \varepsilon.$$

Pero $\varepsilon : F_0 \to \mathbb{Z}$ es el G-homomorfismo que aplica $g[\,] \to 1 \in \mathbb{Z}$, en particular, ε es un elemento de $B_0\hat{(G)} = B_{-1}(G)$. Por otro lado, el elemento $\sum_{\tau\in G} \tau\langle\ \rangle$ es un elemento de $B_0\hat{(G)}$ y también aplica $g[\,] \to 1$ dado que

$$\sum_{\tau\in G}(\tau\langle\ \rangle)(g[\,]) = \sum_{\tau\in G}\tau\langle\ \rangle(\tau^{-1}g[\,]) = \sum_{\tau\in G}\langle\ \rangle(\tau^{-1}g[\,]) = 1.$$

Entonces $\varepsilon = \sum_{\tau\in G} \tau\langle\ \rangle$. Por lo tanto $\partial_0[\ ] = \sum_{\tau\in G} \tau\langle\ \rangle$.

De esta manera tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.2. *[3, Teorema 1.4.7, pág. 24] Para cualquier grupo finito G existe una resolución completa*

$$\cdots \to B_2(G) \overset{\partial_2}{\to} B_1(G) \overset{\partial_1}{\to} B_0(G) \overset{\partial_0}{\to} B_{-1}(G) \overset{\partial_{-1}}{\to} B_{-2}(G) \to \cdots \tag{4.5}$$

denominada resolución completa estándar. Donde

$$B_0(G) = \mathbb{Z}[G][\ ], \qquad B_{-n}(G) = B_{n-1}\hat{}(G), \quad n \geq 1, \qquad B_{-1}(G) = \mathbb{Z}[G]\langle\ \rangle$$

$$\begin{aligned} B_n(G) &= \mathbb{Z}[G]\{[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \mid g_i \in G\} \qquad n > 0 \\ B_{-n}(G) &= \mathbb{Z}[G]\{\langle\tau_1, \cdots, \tau_{n-1}\rangle \mid \tau_i \in G\} \qquad n > 1 \end{aligned}$$

$$\partial_{-n} = \hat{\partial_n} \qquad n \geq 1 \qquad \varepsilon = \sum_{\tau\in G} \tau\langle\ \rangle = \mu(1) = \partial_0[\ ]$$

y las fronteras son dadas por

$$\begin{aligned} \partial_1[g] =& g[\ ] - [\ ] \\ \partial_n[g_1 \mid \cdots g_n] =& g_1[g_2 \mid \cdots \mid g_n] \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid g_i g_{i+1} \mid g_{i+2} \mid \cdots \mid g_n] \\ &+ (-1)^n [g_1 \mid \cdots \mid g_{n-1}] \qquad (n \geq 2) \\ \partial_{-1}\langle\ \rangle =& \sum_{\tau\in G} \tau^{-1}\langle\tau\rangle - \sum_{\tau\in G}\langle\tau\rangle \\ \partial_{-n}\langle\tau_1, \cdots, \tau_{n-1}\rangle =& \sum_{\tau\in G} \tau^{-1}\langle\tau, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}\rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \sum_{\tau\in G} \langle\tau_1, \cdots, \tau_{i-1}, \tau_i\tau^{-1}, \tau, \tau_{i+1}, \cdots, \tau_{n-1}\rangle \\ &+ \sum_{\tau\in G} \langle\tau_1, \cdots, \tau_{n-1}, \tau\rangle \qquad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Ahora sea $\varepsilon : B(G) \to \mathbb{Z}$ la resolución completa estándar y sea ∂ el diferencial en $B(G)$. Entonces

$$B(G)\hat{\otimes}B(G)$$

es un complejo de cadenas con un diferencial total $\partial = \partial' + \partial''$ tal que $\partial' \circ \partial' = 0$, $\partial'' \circ \partial'' = 0$ y $\partial' \circ \partial'' = -\partial'' \circ \partial'$, donde $\partial' = \partial\hat{\otimes}1$, $\partial'' = 1\hat{\otimes}\partial$.

Además, afirmamos que $\varepsilon : B(G)\hat{\otimes}B(G) \to \mathbb{Z}$ es una resolución completa para G [2, pág. 139]. Así con esto podemos resaltar que para todo $n \in \mathbb{Z}$ existen $\mathbb{Z}$-homomorfismos $D : B(G)_n \to B(G)_{n+1}$ y $\pi : B(G)_n \to B(G)_n$ tal que

$D\partial + \partial D = 1$ y $S(\pi) = 1$ (ver el teorema 4.1 y la proposición 4.3). Además, de los $\mathbb{Z}$-homomorfismos $D \otimes \pi : B(G)_q \otimes B(G)_{q'} \to B(G)_{q+1} \otimes B(G)_{q'}$ y $\pi \otimes D : B(G)_q \otimes B(G)_{q'} \to B(G)_q \otimes B(G)_{q'+1}$ podemos construir G-homomorfismos $D^{'} = S(D \otimes \pi)$ y $D^{''} = S(\pi \otimes D)$ tal que $\partial^{'} D^{'} + D^{'} \partial^{'} = 1$ y $\partial^{''} D^{''} + D^{''} \partial^{''} = 1$ [3, pág. 140].

Teorema 4.3. *Para la resolución completa estándar existen G-homomorfismos*

$$\Delta_{q,q'} : B(G)_{q+q'} \quad \to \quad B(G)_q \otimes B(G)_{q'}$$

tales que

I. $\varepsilon = (\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ \Delta_{0,0}$.

$II_{q,q'}$. $\Delta_{q,q'} \circ \partial = (-1)^{q^{'}} \partial^{'} \circ \Delta_{q+1,q'} + (-1)^q \partial^{''} \circ \Delta_{q,q'+1} \qquad \forall\, q, q^{'} \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Primero observemos que si evaluamos a la ecuación $II_{q,q'}$ con el diferencial $\partial^{'}$ obtenemos lo siguiente:

$$\partial^{'} \circ \Delta_{q,q'} \circ \partial = (-1)^q \partial^{'} \circ \partial^{''} \circ \Delta_{q,q'+1}. \tag{4.6}$$

El primer paso para la demostración es construir $\Delta_{0,q'}$ tal que $\varepsilon = (\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ \Delta_{0,0}$ y $\partial^{'} \circ \Delta_{0,q'} \circ \partial = \partial^{'} \circ \partial^{''} \circ \Delta_{0,q'+1}$ $\forall\, q^{'} \in \mathbb{Z}$. De esta manera, para cada $q^{'} \in \mathbb{Z}$ consideremos el $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\psi_{0,q'} : B_{q'}(G) \to B_0(G) \otimes B_{q'}(G)$ definido como

$$\psi_{0,q'}(x) = [\,] \otimes \pi(x), \qquad x \in B_{q'}(G).$$

Entonces obtenemos un G-homomorfismo $\Delta_{0,q'} : B_{q'}(G) \to B_0(G) \otimes B_{q'}(G)$ dado de la siguiente manera

$$\Delta_{0,q'} := S(\psi_{0,q'}) = \sum_{\sigma \in G} \sigma \psi_{0,q'}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\varepsilon \otimes 1(\Delta_{0,q'}(x)) &= \varepsilon \otimes 1 \left(\sum_{g \in G} g[\,] \otimes (g\pi)(x) \right) \\
&= \sum_{g \in G} \varepsilon(g[\,]) \otimes (g\pi)(x) \qquad\qquad (x \in B_{q'}(G)) \\
&= 1 \otimes \sum_{g \in G} (g\pi)(x) \\
&= 1 \otimes x \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(ver la proposición 4.3)}.
\end{aligned}$$

De esta manera

$$(\varepsilon \otimes \varepsilon)(\Delta_{0,0}(x)) \quad = \quad (1 \otimes \varepsilon)(\varepsilon \otimes 1)(\Delta_{0,0}(x)) = (1 \otimes \varepsilon)(1 \otimes x) = 1 \otimes \varepsilon(x),$$

el cual esta última ecuación es isomorfa a $\varepsilon(x)$ dado que $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$. Por lo tanto, $(\varepsilon\otimes\varepsilon)(\Delta_{0,0}(x))=\varepsilon(x)$.
Ahora probemos que la ecuación (4.6) se satisface para $p=0$ y para toda $q^{'}\in\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\partial^{'}\Delta_{0,q^{'}}\partial(x) &= (\partial\otimes 1)\Delta_{0,q^{'}}\partial(x)\\ &= (\mu\otimes 1)(\varepsilon\otimes 1)\Delta_{0,q^{'}}\partial(x)\\ &= (\mu\otimes 1)(1\otimes\partial(x))\\ &= \mu(1)\otimes\partial(x),\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\partial^{'}\partial^{''}\Delta_{0,q^{'}+1}(x) &= -\partial^{''}\partial^{'}\Delta_{0,q^{'}+1}(x)\\ &= -(1\otimes\partial)(\partial\otimes 1)\Delta_{0,q^{'}+1}(x)\\ &= -(1\otimes\partial)(\mu\otimes 1)(\varepsilon\otimes 1)\Delta_{0,q^{'}+1}(x)\\ &= \mu(1)\otimes\partial(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\partial^{'}\Delta_{0,q^{'}}\partial(x)=\partial^{'}\partial^{''}(x)$.

Ahora supongamos que existen homomorfismos $\Delta_{q,q^{'}}$ para un entero $q<0$ fijo y para todo $q^{'}\in\mathbb{Z}$, tal que se cumple la ecuación (4.6).

Sea

$$\Delta_{q-1,q^{'}}=(-1)^{q+q^{'}-1}D^{''}\circ\partial^{'}\circ\Delta_{q,q^{'}-1}\qquad(q^{'}\in\mathbb{Z}).\tag{4.7}$$

Así

$$\begin{aligned}\Delta_{q-1,q^{'}}\circ\partial &= (-1)^{q+q^{'}-1}D^{''}\circ\partial^{'}\circ\Delta_{q,q^{'}-1}\circ\partial\\ &= (-1)^{q+q^{'}-1}D^{''}\circ[(-1)^{q}\partial^{'}\circ\partial^{''}\circ\Delta_{q,q^{'}}] && \text{(por inducción)}\\ &= (-1)^{q^{'}}D^{''}\circ\partial^{''}\circ\partial^{'}\circ\Delta_{q,q^{'}} && (\partial^{'}\circ\partial^{''}=-\partial^{''}\circ\partial^{'})\\ &= (-1)^{q^{'}}[1-\partial^{''}\circ D^{''}]\partial^{'}\circ\Delta_{q,q^{'}}\\ &= (-1)^{q^{'}}\partial^{'}\circ\Delta_{q,q^{'}}+(-1)^{q^{'}+1}\partial^{''}\circ[(-1)^{q+q^{'}}\Delta_{q-1,q^{'}+1}] && \text{(ec(4.7))}\\ &= (-1)^{q^{'}}\partial^{'}\circ\Delta_{q,q^{'}}+(-1)^{q+1}\partial^{''}\circ\Delta_{q-1,q^{'}+1}\\ &= (-1)^{q^{'}}\partial^{'}\circ\Delta_{q,q^{'}}+(-1)^{q-1}\partial^{''}\circ\Delta_{q-1,q^{'}+1},\end{aligned}$$

por lo tanto se cumple la ecuación $II_{q-1,q^{'}}$ del enunciado de este teorema.

Por último, supongamos que existen los homomorfismos $\Delta_{q,q^{'}}$ para un entero $q>0$ fijo y para toda $q^{'}\in\mathbb{Z}$, tal que satisfacen la ecuación (4.6). Probemos que existe $\Delta_{q+1,q^{'}}$ tal que satisface la ecuación $II_{q,q^{'}}$ del enunciado de este teorema.

Dado que

$$
\begin{aligned}
\Delta_{q,q'} \circ \partial =& (\partial' \circ D' + D' \circ \partial') \circ \Delta_{q,q'} \circ \partial, && (1 = \partial' D' + D' \partial')\\
=& \partial' \circ D' \circ \Delta_{q,q'} \circ \partial + (-1)^q D' \circ \partial' \circ \partial'' \circ \Delta_{q,q'+1} && (\text{por inducción})\\
=& \partial' \circ D' \Delta_{q,q'} \circ \partial + (-1)^q (1 - \partial' \circ D')\partial'' \circ \Delta_{q,q'+1}, && (1 = \partial' D' + D' \partial')\\
=& \partial' \circ [D' \circ \Delta_{q,q'} \circ \partial + (-1)^{q+1} D' \circ \partial'' \circ \Delta_{q,q'+1}] + (-1)^q \partial'' \circ \Delta_{q,q'+1}\\
=& (-1)^{q'} \partial' \circ [(-1)^{q'} D' \circ \Delta_{q,q'} \circ \partial + (-1)^{q+q'+1} D' \circ \partial'' \circ \Delta_{q,q'+1}]\\
&+ (-1)^q \partial'' \Delta_{q,q'+1},
\end{aligned}
$$

de esta manera, definimos $\Delta_{q+1,q'} = (-1)^{q'} D' \circ \Delta_{q,q'} \circ \partial + (-1)^{q+q'+1} D' \circ \partial'' \circ \Delta_{q,q'+1}$ y obtenemos lo que queriamos. □

A la aplicación de cadenas Δ del teorema anterior la conocemos como *aproximación diagonal completa estándar*. Notemos que para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$\Delta_n := (\Delta_{q,q'})_{q+q'=n} : B_n(G) \to \prod_{q+q'=n} B_q(G) \otimes B_{q'}(G).$$

A continuación les mostramos algunos de los G-homomorfismos de esta diagonal.

(1) $\Delta_{0,0}[\,] = [\,] \otimes [\,]$.
En la demostración del teorema 4.3 obtuvimos lo siguiente:

$$\Delta_{0,q'}(x) = \sum_{g \in G} (g[\,] \otimes g\pi(g^{-1}x)) \qquad (q' \in \mathbb{Z}). \tag{4.8}$$

Entonces

$$\Delta_{0,0}([\,]) = \sum_{g \in G} (g[\,] \otimes g\pi(g^{-1}[\,])),$$

pero $\pi(g^{-1}[\,]) = [\,]$ si $g^{-1} = 1$, de esta manera $\Delta_{0,0} = [\,] \otimes [\,]$.

(2) $\Delta_{0,q'}[g_1 \mid \cdots \mid g_{q'}] = [\,] \otimes [g_1 \mid \cdots \mid g_{q'}]\ \forall q' > 0$.
De la misma manera como demostramos el inciso anterior, obtenemos directamente que $\Delta_{0,q'}[g_1 \mid \cdots \mid g_{q'}] = [\,] \otimes [g_1 \mid \cdots \mid g_{q'}]$.

(3) $\Delta_{0,-q'}\langle \tau_1, \cdots, \tau_{q'-1} \rangle = [\,] \otimes \langle \tau_1, \cdots, \tau_{q'-1} \rangle$ para todo $q' > 1$.
La demostración es similar al caso anterior.

(4) $\Delta_{-1,1}[\,] = \sum_{\tau \in G} \tau\langle\,\rangle \otimes \tau[\tau^{-1}]$.

Sustituyendo en la ecuación (4.7) $q = 0$ y $q^{'} = 1$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Delta_{-1,1}[\,] &= D^{''}\partial^{'}\Delta_{0,0}[\,] \\
\Delta_{-1,1}[\,] &= S(\pi \otimes D)\partial^{'}\Delta_{0,0}[\,] \\
&= S(\pi \otimes D)\partial^{'}([\,] \otimes [\,]) \\
&= S(\pi \otimes D)(\partial[\,] \otimes [\,]) \\
&= \sum_{g \in G} g(\pi \otimes D)(g^{-1}(\partial[\,] \otimes [\,])) \\
&= \sum_{g \in G} g\pi(g^{-1}\partial[\,]) \otimes g[g^{-1}].
\end{aligned}$$

Pero para cada $g \in G$ tenemos que

$$\pi(g^{-1}\partial[\,]) = \pi\left(g^{-1}\sum_{\tau \in G}\tau\langle\,\rangle\right) = \pi\left(\sum_{\tau \in G} g^{-1}\tau\langle\,\rangle\right) = \langle\,\rangle \quad \text{si } g^{-1}\tau = 1,$$

de esta manera si $g^{-1}\tau = 1$, entonces $g = \tau$, así

$$\Delta_{-1,1}[\,] = \sum_{\tau \in G}\tau\langle\,\rangle \otimes \tau[\tau^{-1}]$$

(5) $\Delta_{1,1}[g_1 \mid g_2] = -g_1[1] \otimes g_1[g_2] + g_1[g_1^{-1}] \otimes g_1[g_2]$.
Del teorema 4.3 tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,1}[g_1 \mid g_2] =& - S(D \otimes \pi)\Delta_{0,1}\partial[g_1 \mid g_2] + S(D \otimes \pi)\partial^{''}\Delta_{0,2}[g_1 \mid g_2] \\
=& - S(D \otimes \pi)\Delta_{0,1}(g_1[g_2] - [g_1g_2] + [g_1]) \\
&+ S(D \otimes \pi)\partial^{''}([\,] \otimes [g_1 \mid g_2]) \\
=& - S(D \otimes \pi)(g_1[\,] \otimes g_1[g_2] - [\,] \otimes [g_1g_2] + [\,] \otimes [g_1]) \\
&+ S(D \otimes \pi)([\,] \otimes (g_1[g_2] - [g_1g_2] + [g_1])).
\end{aligned}$$

Pero como $S(D \otimes \pi)$ es $\mathbb{Z}$-homomorfismo entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,1}[g_1 \mid g_2] =& - S(D \otimes \pi)(g_1[\,] \otimes g_1[g_2]) + S(D \otimes \pi)([\,] \otimes g_1[g_2]) \\
=& - \sum_{g \in G} gD(g^{-1}g_1[\,]) \otimes g\pi(g^{-1}g_1[g_2]) \\
&+ \sum_{g \in G} gD(g^{-1}[\,]) \otimes g\pi(g^{-1}g_1[g_2]),
\end{aligned}$$

pero $\pi(g^{-1}\tau_1[g_2]) = [g_2]$ si $g^{-1}g_1 = 1$, así $g = g_1$. Por lo tanto

$$\Delta_{1,1}[g_1 \mid g_2] = -g_1[1] \otimes g_1[g_2] + g_1[g_1^{-1}] \otimes g_1[g_2].$$

(6) $\Delta_{1,-1}[\,] = \sum_{\tau\in G}\{(\tau[1] - \tau[\tau^{-1}]) \otimes \tau\langle\,\rangle\}$.

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,-1}[\,] &= -\,S(D\otimes\pi)\Delta_{0,-1}\partial[\,] - S(D\otimes\pi)\partial''\Delta_{0,0}[\,]\\
&= -\,S(D\otimes\pi)\Delta_{0,-1}\left(\sum_{\tau\in G}\tau\langle\,\rangle\right) - S(D\otimes\pi)\partial''([\,]\otimes[\,])\\
&= -\,S(D\otimes\pi)\left(\sum_{\tau\in G}\tau[\,]\otimes\tau\langle\,\rangle\right) - S(D\otimes\pi)\left([\,]\otimes\sum_{\tau\in G}\tau\langle\,\rangle\right)\\
&= -\sum_{g\in G}\sum_{\tau\in G} gD(g^{-1}\tau[\,])\otimes g\pi(g^{-1}\tau\langle\,\rangle)\\
&\quad -\sum_{g\in G} gD(g^{-1}[\,])\otimes g\pi\left(\sum_{g\in G} g^{-1}\tau\langle\,\rangle\right).
\end{aligned}$$

Pero para cada g, $\tau\in G$, $\pi(g^{-1}\tau\langle\,\rangle) = \langle\,\rangle$ si $g^{-1}\tau = 1$ entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,-1}[\,] &= \sum_{\tau\in G}\tau[1]\otimes\tau\langle\,\rangle - \sum_{\tau\in G}\tau[\tau^{-1}]\otimes\tau\langle\,\rangle\\
&= \sum_{\tau\in G}\{(\tau[1] - \tau[\tau^{-1}])\otimes\tau\langle\,\rangle\}.
\end{aligned}$$

Definición 4.3. *A nivel de cadenas definimos el producto cup de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}om_G(B(G),M)\otimes\mathscr{H}om_G(B(G),N) &\;\to\; \mathscr{H}om(B(G),M\otimes N)\\
u\otimes v &\;\mapsto\; u\cup v = (u\hat{\otimes}v)\circ\Delta.
\end{aligned}$$

Lema 4.1. *Para cualquier* $u\in\mathscr{H}om_G(B(G),M)$ *y* $v\in\mathscr{H}om_G(B(G),N)$ *obenemos*

$$\delta(u\cup v) = \delta u\cup v + (-1)^{deg\,u}u\cup\delta v.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\delta((u\hat{\otimes}v)\circ\Delta) &= (-1)^{deg\,h+1}(u\hat{\otimes}v)\circ\Delta\circ\partial \qquad\qquad (\text{Si } h = (u\hat{\otimes}v)\circ\Delta)\\
&= (-1)^{deg\,h+1}u\hat{\otimes}v\circ\partial\circ\Delta\\
&= (-1)^{deg\,h+1}u\hat{\otimes}v\circ(\partial\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}\partial)\circ\Delta\\
&= (-1)^{deg\,h+1}[(-1)^{deg\,v\cdot deg\,\partial}u\partial\hat{\otimes}v + u\hat{\otimes}v\partial]\circ\Delta,
\end{aligned}$$

pero $deg\,h = deg\,u\hat{\otimes}v = deg\,u + deg\,v$ (ver la definición 1.16) y $deg\,\partial = -1$

entonces

$$\begin{aligned}
\delta((u\hat{\otimes}v)\circ\Delta) =& (-1)^{deg\,u+deg\,v+1}[(-1)^{-deg\,v}u\partial\hat{\otimes}v + u\hat{\otimes}v\partial]\circ\Delta \\
=& (-1)^{deg\,u+1}(u\partial\hat{\otimes}v)\circ\Delta + (-1)^{deg\,u+deg\,v+1}(u\hat{\otimes}v\partial)\circ\Delta \\
=& (-1)^{deg\,u+1}(-1)^{deg\,u+1}(\delta u\hat{\otimes}v)\circ\Delta \\
&+ (-1)^{deg\,u+deg\,v+1}(-1)^{deg\,v+1}(u\hat{\otimes}\delta v)\circ\Delta \\
=& (\delta u\hat{\otimes}v)\circ\Delta + (-1)^{deg\,u}(u\hat{\otimes}\delta v)\circ\Delta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\delta(u\cup v) = \delta u\cup v + (-1)^{deg\,u}u\cup\delta v$. □

Notemos que $\mathscr{H}om_G(B(G),M)_{-p} = Hom_G(B(G)_p, M)$. Entonces, de este lema obtenemos que para cada p, $q\in\mathbb{Z}$, $u\in Hom_G(B(G)_p,M)$ y $v\in Hom_G(B(G)_q,N)$, el diferencial δ cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\delta((-1)^{p\cdot q}(u\otimes v)\circ\Delta_{p,q}) =& (-1)^{(p+1)\cdot q}(\delta u\otimes v)\circ\Delta_{p+1,q} \\
&+ (-1)^p(-1)^{p\cdot(q+1)}(u\otimes\delta v)\circ\Delta_{p,q+1}
\end{aligned}$$

donde $\Delta_{p,q}: B_{p+q}\to B_p(G)\otimes B_q(G)$. De esta manera, siguiendo la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
(-1)^{p\cdot q+p+q+1}(u\otimes v\circ\Delta_{p,q})\circ\partial =& (-1)^{(p+1)\cdot q}(-1)^{p+1}(u\partial\otimes v)\circ\Delta_{p+1,q} \\
&+ (-1)^p(-1)^{p\cdot(q+1)}(-1)^{q+1}(u\otimes v\partial)\circ\Delta_{p,q+1} \\
=& (-1)^{p\cdot q+p+q+1}(-1)^{-q}(u\otimes v)\circ(\partial\otimes 1)\circ\Delta_{p+1,q} \\
&+ (-1)^{p\cdot q+q+1}(u\otimes v)\circ(1\otimes\partial)\circ\Delta_{p,q+1} \\
=& (-1)^{p\cdot q+p+q+1}u\otimes v[(-1)^q\partial^{'}\circ\Delta_{p+1,q} \\
&+ (-1)^p\partial^{''}\circ\Delta_{p,q+1}],
\end{aligned}$$

4.2. Complejo completo estándar y su diagonal

El anillo de grupo $\mathbb{Z}[G]$ tiene propiedades importantes, en particular, cualquier G-módulo izquierdo M se puede hacer G-módulo derecho y viceversa:

$$\begin{aligned}
G\times M &\to M & &\Rightarrow & M\times G &\to M \\
(g,m) &\mapsto gm & & & (m,g) &\mapsto mg = g^{-1}m.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si G actúa sobre $B_n(G)$ y $Hom(B_n(G),\mathbb{Z})$, como en la sección anterior, entonces $Hom(B_n(G),\mathbb{Z})$ es un G-módulo derecho:

$$\begin{aligned}
&Hom(B_n(G),\mathbb{Z})\times G\to Hom(B_n(G),\mathbb{Z}) \\
&\qquad (u,g)(x)\mapsto ug(x) = g^{-1}u(x) = g^{-1}u(gx) = u(gx) \quad (x\in B_n(G)).
\end{aligned}$$

Además, si suponemos que el anillo de grupo $\mathbb{Z}[G]$ actúa sobre sí mismo por multiplicación sobre la izquierda, entonces $Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}[G])$ es naturalmente un G-módulo derecho:

$$\begin{aligned} Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}[G]) \times G &\to Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}[G]) \\ (u, g)(x) &\mapsto u(x)g \qquad\qquad (x \in B_n(G)), \end{aligned}$$

esto último es posible ya que $\mathbb{Z}[G]$ se puede hacer también un G-módulo derecho. De igual manera obtenemos que $Hom_G(B(G), \mathbb{Z}[G])$ es un G-módulo izquierdo, $(gu)(x) = (ug^{-1})(x) = u(x)g^{-1}$.

Lema 4.2. *Con las hipótesis anteriores, tenemos los siguientes isomorfismos:*

(1) $Hom(B_n(G), \mathbb{Z}) \otimes_G \mathbb{Z} \cong Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}[G]) \otimes_G \mathbb{Z}$.

(2) $Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}[G]) \otimes_G \mathbb{Z} \cong Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z})$.

(3) $Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}) \cong Hom(B_n(G)_G, \mathbb{Z})$.

Demostración. (1) La prueba se deduce rápidamente del G-isomorfismo

$$\psi : Hom(B_n(G), \mathbb{Z}) \to Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}[G]),$$

definido por $\psi(u)(x) = \sum_{g\in G} u(g^{-1}x)g$ para $u \in Hom(B_n(G), \mathbb{Z})$, $x \in B_n(G)$ (ver la sección §IV.3 de [2]).

(2) Como G es un grupo finito entonces $B_n(G)$ es un G-módulo proyectivo finitamente generado, entonces $Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}[G]) \otimes_G \mathbb{Z}$ y $Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z})$ son isomorfos (ver §I.8 en [2]) bajo el isomorfismo

$$\varphi : Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}[G]) \otimes_G \mathbb{Z} \to Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}),$$

definido por

$$\varphi(u \otimes z)(x) = u(x) \cdot z \qquad u \in Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}[G]),\ z \in \mathbb{Z},\ x \in B_n(G).$$

(3) Sabemos que $Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}) = Hom(B_n(G), \mathbb{Z})^G$.

De esta manera, definimos

$$\theta : Hom(B_n(G), \mathbb{Z})^G \to Hom(B_n(G)_G, \mathbb{Z})$$

como $\theta(u)(\overline{x}) = u(x)$ para $u \in Hom(B_n(G), \mathbb{Z})^G$, $\overline{x} \in B_n(G)_G$. Probemos que θ es un isomorfismo.

Primero probemos que θ está bien definida. Supongamos que $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$ entonces $x_1 - x_2 \in \langle \{gx - x\}_{g\in G, x\in B_n(G)} \rangle$, así $x_1 - x_2 = \sum_{i\in I}(g_i x_i - x_i)$. Por lo tanto, $\theta(u)(\overline{x}_1) = u(x_1) = u(x_2) + \sum_{i\in I}(u(g_i x_i) - u(x_i))$. Pero como $u \in Hom(B_n(G), \mathbb{Z})^G$, entonces para cada $i \in I$ obtenemos que $g_i^{-1}u = u$, $g_i \in G$. De esta manera, $g_i^{-1}u(g_i x_i) = u(g_i x_i) = u(x_i)$, $x_i \in B_n(G)$. Por lo tanto, $u(x_1) = u(x_2)$, por consiguiente $\theta(u)(\overline{x}_1) = \theta(u)(\overline{x}_2)$.

Ahora probemos que θ es inyectiva. Supongamos que $\theta(u_1) = \theta(u_2)$, entonces $\theta(u_1)(\overline{x}) = \theta(u_2)(\overline{x})$ para todo $\overline{x} \in B_n(G)_G$. Luego $u_1(x) = u_2(x)$ $\forall x \in B_n(G)$. Por lo tanto $u_1 = u_2$, de esta manera θ es inyectiva.

Por último mostremos que θ es sobreyectiva. Sea $h \in Hom(B_n(G)_G, \mathbb{Z})$ y consideremos $j : B_n(G) \to \mathbb{Z}$ tal que $h \circ \pi = j$ (donde $\pi : B_n(G) \to B_n(G)_G$ es la proyección). Probemos que $j \in Hom(B_n(G), \mathbb{Z})^G$. Como G actúa trivialmente sobre $\mathbb{Z}$ entonces

$$(gj)(x) = (g(h \circ \pi))(x) = g(h \circ \pi)(g^{-1}x) = h(\overline{g^{-1}x}) = h(\overline{x}) = j(x),$$

por lo tanto $j \in Hom(B_n(G), \mathbb{Z})^G$. Entonces $\theta(j)(\overline{x}) = j(x) = h(\overline{x})$, luego θ es sobreyectiva.

□

Notemos que los co-invariantes $B_n(G)_G$ de cada G-módulo $B_n(G)$ es isomorfo al producto tensorial $B_n(G) \otimes_G \mathbb{Z}$ $(\forall\, n \geq 0)$, de esta manera, ocupando la notación de [1] denotaremos a los co-onvariantes de $B_n(G)$ como $C_n(G)$ $(\forall\, n \geq 0)$.

Lema 4.3. *Para toda $n \geq 1$ obtenemos las siguientes aplicaciones de cadenas:*

$$\begin{tikzcd}
Hom(B_{n-1}(G), \mathbb{Z}) \otimes_G \mathbb{Z} \arrow[r, "\partial_{-n} \otimes 1_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "\psi \otimes 1_{\mathbb{Z}}"'] & Hom(B_n(G), \mathbb{Z}) \otimes_G \mathbb{Z} \arrow[d, "\psi \otimes 1_{\mathbb{Z}}"] \\
Hom_G(B_{n-1}(G), \mathbb{Z}[G]) \otimes_G \mathbb{Z} \arrow[r, "\partial_{-n} \otimes 1_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "\varphi"'] & Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}[G]) \otimes_G \mathbb{Z} \arrow[d, "\varphi"] \\
Hom_G(B_{n-1}(G), \mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial_{-n}"] \arrow[d, "\theta"'] & Hom_G(B_n(G), \mathbb{Z}) \arrow[d, "\theta"] \\
Hom(C_{n-1}(G), \mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial_{-n}"] & Hom(C_n(G), \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Demostración. 1. $(\psi \otimes 1_{\mathbb{Z}}) \circ (\partial_{-n} \otimes 1_{\mathbb{Z}}) = (\partial_{-n} \otimes 1_{\mathbb{Z}}) \circ (\psi \otimes 1_{\mathbb{Z}})$.

Del inciso (1) del lema anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
(\psi \otimes 1_{\mathbb{Z}}) \circ (\partial_{-n} \otimes 1_{\mathbb{Z}})(u \otimes z) &= \psi\partial_{-n}(u) \otimes z \\
&= \psi(u\partial_n) \otimes z \\
&= \left[\sum_{g \in G} (u\partial_n)(g^{-1})g\right] \otimes z. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(\partial_{-n}\otimes 1_{\mathbb{Z}})\circ(\psi\otimes 1_{\mathbb{Z}})(u\otimes z) &= \partial_{-n}\psi(u)\otimes z\\ &= \partial_{-n}\left(\sum_{g\in G}u(g^{-1})g\right)\otimes z\\ &= \left[(\sum_{g\in G}u(g^{-1})g)\partial_n\right]\otimes z\\ &= \left[\sum_{g\in G}u(g^{-1}\partial_n)g\right]\otimes z\\ &= \left[\sum_{g\in G}(u\partial_n)(g^{-1})g\right]\otimes z, \qquad (4.10)\end{aligned}$$

por lo tanto de las ecuaciones (4.9) y (4.10) obtenemos que $\psi\otimes 1_{\mathbb{Z}}\circ\partial_{-n}\otimes 1_{\mathbb{Z}}(u\otimes z)=\partial_{-n}\otimes 1_{\mathbb{Z}}\circ\psi\otimes 1_{\mathbb{Z}}(u\otimes z)$.

2. $\varphi\circ(\partial_{-n}\otimes 1_{\mathbb{Z}})=\partial_{-n}\circ\varphi$.

   Por definición de φ tenemos lo siguiente:

   $$\varphi\circ(\partial_{-n}\otimes 1_{\mathbb{Z}})(u\otimes z)=\varphi(u\partial_n\otimes z)=u\partial_n\cdot z,$$

   por otro lado

   $$\partial_{-n}\circ\varphi(u\otimes z)=\partial_{-n}(uz)=(ua)\partial_n=u\partial_n\cdot z.$$

   Por lo tanto, claramente obtenemos lo que queríamos.

3. $\theta\circ\partial_{-n}=\partial_{-n}\circ\theta$.

   Del inciso (3) del lema anterior obtenemos

   $$\theta\circ\partial_{-n}(u)(x\otimes 1)=\theta(u\partial_n)(x\otimes 1)=u\partial_n(x),$$

   además

   $$\partial_{-n}\circ\theta(u)(x\otimes 1)=\theta(u)(\partial_n\otimes 1_{\mathbb{Z}})(x\otimes 1)=u(\partial_n x).$$

$\square$

Lema 4.4. *El grupo abeliano $Hom(C_n(G),\mathbb{Z})$ $(n\geq 1)$ está generado por los elementos de la forma $\langle\tau_1,\cdots,\tau_n\rangle_1$ $(\tau_i\in G)$ tales que*

$$\langle\tau_1,\cdots,\tau_n\rangle_1[g_1\mid\cdots\mid g_n]=\begin{cases}1 & \tau_1=g_1,\cdots,\tau_n=g_n\\ 0 & \textit{otro lado}\ .\end{cases}$$

Demostración. Sea

$$\gamma := \theta \circ \varphi \circ (\psi \otimes 1_{\mathbb{Z}}) : Hom(B_n(G), \mathbb{Z}) \otimes_G \mathbb{Z} \to Hom(C_n(G), \mathbb{Z}).$$

Dado que $Hom(B_n(G), \mathbb{Z})$ es un G-módulo libre generado por elementos de la forma $\langle \tau_1, \cdots \tau_n \rangle$ ($\tau_i \in G$), entonces es claro que $Hom(B_n(G), \mathbb{Z}) \otimes_G \mathbb{Z}$ está generado por los elementos de la forma $\langle \tau_1, \cdots, \tau_n \rangle \otimes 1$. Además, como γ es un isomorfismo, entonces $Hom(C_n(G), \mathbb{Z})$ está generado por la imagen de los generadores de $Hom(B_n(G), \mathbb{Z}) \otimes_G \mathbb{Z}$.

Sea $x \otimes 1 \in C_n(G)$, entonces

$$\begin{aligned}
\gamma(\langle \tau_1, \cdots, \tau_n \rangle \otimes 1)(x \otimes 1) &= \theta\varphi(\psi \otimes 1_{\mathbb{Z}})(\langle \tau_1, \cdots, \tau_n \rangle \otimes 1)(x \otimes 1) \\
&= \theta\varphi \left(\sum_{g \in G} \langle \tau_1, \cdots, \tau_n \rangle (g^{-1}) g \otimes 1 \right) (x \otimes 1) \\
&= \theta \left(\sum_{g \in G} \langle \tau_1, \cdots, \tau_n \rangle (g^{-1}) g \cdot 1 \right) (x \otimes 1) \\
&= \sum_{g \in G} \langle \tau_1, \cdots, \tau_n \rangle (g^{-1} x) g \cdot 1.
\end{aligned}$$

De esta última ecuación supongamos que $x = [g_1 \mid \cdots \mid g_n]$, de esta manera, por definición de la función $\langle \tau_1, \cdots, \tau_n \rangle$ y como G actúa trivialmente sobre $\mathbb{Z}$ obtenemos lo siguiente:

$$\gamma(\langle \tau_1, \cdots, \tau_n \rangle \otimes 1)([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = \begin{cases} 1 & \tau_1 = g_1, \cdots, \tau_n = g_n \\ 0 & \text{otro lado} . \end{cases}$$

Por lo tanto, si denotamos $\gamma(\langle \tau_1, \cdots, \tau_n \rangle \otimes 1) = \langle \tau_1, \cdots, \tau_n \rangle_1$ obtenemos el resultado. $\square$

Afirmación 4.1. *Dado que* $Hom(B_0(G), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[G]\langle\ \rangle$ *y* $Hom(B_0(G), \mathbb{Z}) \otimes_G \mathbb{Z} \cong Hom(C_0(G), \mathbb{Z})$*, entonces*

$$Hom(C_0(G), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\langle\ \rangle.$$

Lema 4.5. *El diferencial* $\partial_{-n} : Hom(C_{n-1}(G), \mathbb{Z}) \to Hom(C_n(G), \mathbb{Z})$ *es dado por*

$$\begin{aligned}
\partial_{-n}(\langle \tau_1, \cdots, \tau_{n-1} \rangle_1) = &\sum_{\tau \in G} \langle \tau, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1} \rangle (\,) \cdot 1 \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \sum_{\tau \in G} \langle \tau_1, \cdots, \tau_{i-1}, \tau_i \tau^{-1}, \tau, \tau_{i+1}, \cdots, \tau_{n-1} \rangle (\,) \cdot 1 \\
&+ (-1)^n \sum_{\tau \in G} \langle \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}, \tau \rangle (\,) \cdot 1 \qquad (n \geq 2).
\end{aligned}$$

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo del lema 4.3:

$$\begin{tikzcd} Hom(B_{n-1}(G),\mathbb{Z}) \otimes_G \mathbb{Z} \arrow[r, "\partial_{-n}\otimes 1_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "\gamma"'] & Hom(B_n(G),\mathbb{Z}) \otimes_G \mathbb{Z} \arrow[d, "\gamma"] \\ Hom(C_{n-1}(G),\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial_{-n}"] & Hom(C_n(G),\mathbb{Z}). \end{tikzcd}$$

Sea $\langle \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}\rangle \otimes 1$ un generador de $Hom(B_{n-1}(G),\mathbb{Z}) \otimes_G \mathbb{Z}$, entonces por el teorema 4.2 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\gamma(\partial_{-n}\otimes 1_{\mathbb{Z}})(\langle \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}\rangle \otimes 1) &= \gamma\left(\sum_{\tau\in G}(\tau^{-1}\langle \tau, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}\rangle) \otimes 1\right) \\
&\quad + \gamma\left(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \sum_{\tau\in G}\langle \tau_1, \cdots, \tau_{i-1}, \tau_i\tau^{-1}, \tau, \tau_{i+1}, \cdots, \tau_{n-1}\rangle \otimes 1\right) \\
&\quad + (-1)^n\gamma\left(\sum_{\tau\in G}\langle \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}, \tau\rangle \otimes 1\right) \\
&= \sum_{g\in G}\sum_{\tau\in G}(\tau^{-1}\langle \tau, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}\rangle)(g^{-1})g\cdot 1 \\
&\quad + \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \sum_{\tau\in G}\langle \tau_1, \cdots, \tau_{i-1}, \tau_i\tau^{-1}, \tau, \tau_{i+1}, \cdots, \tau_{n-1}\rangle(g^{-1})g\cdot 1 \\
&\quad + (-1)^n \sum_{g\in G}\sum_{\tau\in G}\langle \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}, \tau\rangle(g^{-1})g\cdot 1 \\
&= \sum_{\tau\in G}\langle \tau, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}\rangle(\,)\cdot 1 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \sum_{\tau\in G}\langle \tau_1, \cdots, \tau_{i-1}, \tau_i\tau^{-1}, \tau, \tau_{i+1}, \cdots, \tau_{n-1}\rangle(\,)\cdot 1 \\
&\quad + (-1)^n \sum_{\tau\in G}\langle \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}, \tau\rangle(\,)\cdot 1.
\end{aligned}$$

Pero como el diagrama conmuta, entonces

$$\gamma(\partial_{-n}\otimes 1_{\mathbb{Z}})(\langle \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}\rangle\otimes 1) = \partial_{-n}\gamma(\langle \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}\rangle\otimes 1) = \partial_{-n}\langle \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}\rangle_1,$$

por lo tanto obtenemos el resultado. □

Teorema 4.4. *Para cualquier grupo finito G existe un complejo*

$$\cdots \to C_2(G) \xrightarrow{\partial_2} C_1(G) \xrightarrow{\partial_1} C_0(G) \xrightarrow{\partial_0} C_{-1}(G) \xrightarrow{\partial_{-1}} C_{-2}(G) \to \cdots \tag{4.11}$$

denominado complejo completo estándar. Donde

$$C_0(G) = \mathbb{Z}[\,], \qquad C_{-n}(G) = \hat{C}_{n-1}(G), \quad n \geq 1, \qquad C_{-1}(G) = \mathbb{Z}\langle\,\rangle$$

$$
\begin{aligned}
C_n(G) &= \mathbb{Z}\{[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \mid \; g_1, \cdots, g_n \in G\} \qquad n > 0 \\
C_{-n}(G) &= \mathbb{Z}\{\langle \tau_1, \cdots, \tau_{n-1} \rangle_1 \mid \; \tau_1, \cdots, \tau_n \in G\} \qquad n > 1
\end{aligned}
$$

$$
\partial_{-n} = \hat{\partial_n} \qquad n \geq 1 \qquad \partial_0[\;] = \left(\sum_{\tau \in G} \langle\,\rangle_1 \right) \cdot 1
$$

y las fronteras son dadas por

$$
\begin{aligned}
\partial_1 =& 0 \\
\partial_n[g_1 \mid \cdots g_n] =& [g_2 \mid \cdots \mid g_n] \\
&+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid g_i g_{i+1} \mid g_{i+2} \mid \cdots \mid g_n] \\
&+ (-1)^n [g_1 \mid \cdots \mid g_{n-1}] \qquad\qquad (n \geq 2) \\
\partial_{-1} =& 0 \\
\partial_{-n}(\langle \tau_1, \cdots, \tau_{n-1} \rangle_1) =& \sum_{\tau \in G} \langle \tau, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1} \rangle (\,) \tau \cdot 1 \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \sum_{\tau \in G} \langle \tau_1, \cdots, \tau_{i-1}, \tau_i \tau^{-1}, \tau, \tau_{i+1}, \cdots, \tau_{n-1} \rangle (\,) \cdot 1 \\
&+ (-1)^n \sum_{\tau \in G} \langle \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}, \tau \rangle (\,) \cdot 1 \qquad (n \geq 2).
\end{aligned}
$$

Demostración. Aplicándole el funtor $- \otimes_G \mathbb{Z}$ a la resolución completa estándar (4.5), además por los isomorfismos del lema 4.2, las aplicaciones de cadenas del lema 4.3 ($n \geq 1$) y el teorema 4.2 obtenemos el complejo completo que enuncia el teorema. Aunque, sólo resta ver cómo se define el homomorfismo frontera ∂_0. De esta manera, veamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
B_0(G) \otimes_G \mathbb{Z} \arrow[r, "\partial_0 \otimes 1_{\mathbb{Z}}"] \arrow[dddr, "\partial_0"'] & B_{-1}(G) \otimes_G \mathbb{Z} \arrow[d, "\psi"] \\
 & Hom_G(B_0(G), \mathbb{Z}[G]) \otimes_G \mathbb{Z} \arrow[d, "\varphi"] \\
 & Hom_G(B_0(G), \mathbb{Z}) \arrow[d, "\theta"] \\
 & Hom(C_0(G), \mathbb{Z}),
\end{tikzcd}
$$

así

$$\begin{aligned}
\theta\varphi\psi(\partial_0 \otimes 1_{\mathbb{Z}})([\ ] \otimes 1)([\ ]) &= \theta\varphi\psi\left(\sum_{\tau\in G}\tau\langle\,\rangle \otimes 1\right)([\ ]) \\
&= \theta\psi\left((\sum_{g\in G}\sum_{\tau\in G}\tau\langle\,\rangle(g^{-1})g) \otimes 1\right)([\ ]) \\
&= \theta\left((\sum_{g\in G}\sum_{\tau\in G}\tau\langle\,\rangle(g^{-1})g) \cdot 1\right)([\ ]) \\
&= \sum_{g\in G}\sum_{\tau\in G}\tau\langle\,\rangle(g^{-1}[\ ]g) \cdot 1 \\
&= \sum_{\tau\in G}\langle\,\rangle([\ ]) \cdot 1.
\end{aligned}$$

□

Ahora supongamos que le aplicamos el funtor $-\otimes_G \mathbb{Z}$ a la aproximación diagonal completa estándar $\Delta : B(G) \to B(G)\hat{\otimes}B(G)$ (donde G-actúa diagonalmente sobre el producto tensorial completo y trivialmente sobre $\mathbb{Z}$), entonces directamente del teorema 4.3 obtenemos la siguiente afirmación:

Lema 4.6. *Para la resolución completa estándar existen homomorfismos*

$$\Delta_{q,q'} \otimes 1_{\mathbb{Z}} : B(G)_{q+q'} \otimes_G \mathbb{Z} \quad\to\quad (B(G)_q \otimes B(G)_{q'}) \otimes_G \mathbb{Z}$$

tal que

I. $\varepsilon \otimes 1_{\mathbb{Z}} = ((\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ \Delta_{0,0}) \otimes 1_{\mathbb{Z}}$.

$II_{q,q'}$. $(\Delta_{q,q'} \circ \partial) \otimes 1_{\mathbb{Z}} = (-1)^{q'}(\partial' \circ \Delta_{q+1,q'}) \otimes 1_{\mathbb{Z}} + (-1)^q(\partial'' \circ \Delta_{q,q'+1}) \otimes 1_{\mathbb{Z}}$ $\forall\, q, q' \in \mathbb{Z}$.

Luego, para cada $q, q' \in \mathbb{Z}$ tal que $q + q' = n$ ($n \in \mathbb{Z}$ fijo) definimos los homomorfismos

$$\begin{aligned}
\beta_{q,q'} : (B_q(G) \otimes B_{q'}(G)) \otimes_G \mathbb{Z} \quad&\to\quad (B_q(G) \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes (B_{q'}(G) \otimes_G \mathbb{Z}) \\
\beta_{q,q'}(x \otimes y \otimes 1) \quad&=\quad x \otimes 1 \otimes y \otimes 1.
\end{aligned}$$

Veamos que están bien definidos.

$$\begin{aligned}
\beta_{q,q'}(g(x \otimes y) \otimes 1) &= \beta_{q,q'}((gx \otimes gy) \otimes 1) \\
&= gx \otimes 1 \otimes gy \otimes 1 \\
&= x \otimes g \cdot 1 \otimes y \otimes g \cdot 1 \\
&= x \otimes 1 \otimes y \otimes 1 \\
&= \beta_{q,q'}(x \otimes y \otimes 1).
\end{aligned}$$

De esta manera, para cada $n \in \mathbb{Z}$ obtenemos el homomorfismo de grupos

$$\beta_n = (\beta_{q,q'})_{q+q'=n}$$

$$\prod_{q+q'=n} (B_q(G) \otimes B_{q'}(G)) \otimes_G \mathbb{Z} \longrightarrow \prod_{q+q'=n} (B_q(G) \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes (B_{q'}(G) \otimes_G \mathbb{Z}),$$

obteniendo el siguiente resultado:

Lema 4.7. *La aplicación β_n es una aplicación de cadenas.*

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{q+q'=n} (B_q(G) \otimes B_{q'}(G)) \otimes_G \mathbb{Z} \arrow[r, "\partial\otimes 1_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "\beta_n"'] & \prod\limits_{q+q'=n-1} (B_q(G) \otimes B_{q'}(G)) \otimes_G \mathbb{Z} \arrow[d, "\beta_{n-1}"'] \\
\prod\limits_{q+q'=n} (B_q(G) \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes (B_{q'}(G) \otimes_G \mathbb{Z}) \arrow[r, "\hat{\partial}"] & \prod\limits_{q+q'=n-1} (B_q(G) \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes (B_{q'}(G) \otimes_G \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

donde $\partial \otimes 1_{\mathbb{Z}} = \partial' \otimes 1_{\mathbb{Z}} + \partial'' \otimes 1_{\mathbb{Z}}$ *y* $\hat{\partial} = \hat{\partial}' + \hat{\partial}'' = \partial \otimes 1_{\mathbb{Z}} \otimes 1 \otimes 1_{\mathbb{Z}} + 1 \otimes 1_{\mathbb{Z}} \otimes \partial \otimes 1_{\mathbb{Z}}$.

Demostración. Sea $x \otimes y \otimes 1 \in (B_p(G) \otimes B_q(G)) \otimes_G \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\hat{\partial} \circ \beta_n(x \otimes y \otimes 1) =& \hat{\partial} \circ \beta_{p,q}(x \otimes y \otimes 1) \\
=& \hat{\partial}(x \otimes 1 \otimes y \otimes 1) \\
=& \hat{\partial}'(x \otimes 1 \otimes y \otimes 1) \\
&+ \hat{\partial}''(x \otimes 1 \otimes y \otimes 1) \\
=& \partial(x) \otimes 1 \otimes y \otimes 1 \\
&+ (-1)^p x \otimes 1 \otimes \partial(y) \otimes 1,
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\beta_{n-1} \circ (\partial \otimes 1_{\mathbb{Z}})(x \otimes y \otimes 1) =& \beta_{n-1} \circ ((\partial' + \partial'') \otimes 1_{\mathbb{Z}})(x \otimes y \otimes 1) \\
=& \beta_{n-1}(\partial(x) \otimes y \otimes 1 + (-1)^p x \otimes \partial(y) \otimes 1) \\
=& \partial(x) \otimes 1 \otimes y \otimes 1 + (-1)^p x \otimes 1 \otimes \partial(y) \otimes 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos el resultado. □

Teorema 4.5. *El homomorfismo*

$$\beta_n \circ (\Delta_n \otimes 1_{\mathbb{Z}}) : B_n(G) \otimes_G \mathbb{Z} \to \prod_{q+q'=n} (B_q(G) \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes (B_{q'}(G) \otimes_G \mathbb{Z})$$

es de cadenas.

Demostración. La demostración se obtiene inmediatamente del los lemas 4.6 y 4.7. □

Pero como $C_n(G) = B_n(G) \otimes_G \mathbb{Z}$, entonces obtenemos que existe una aplicación de cadenas

$$\hat{\Delta}_n := \beta_n \circ (\Delta_n \otimes 1_{\mathbb{Z}}) : C_n(G) \to \prod_{q+q^{'}=n} C_q(G) \otimes C_{q^{'}}(G).$$

Además, viendo este teorema desde otro punto vista obtenemos la siguiente afirmación:

Teorema 4.6. *Para el complejo completo estándar $C(G)$ existen homomorfismos*

$$\hat{\Delta}_{q,q^{'}} : C_{q+q^{'}}(G) \quad \to \quad C_q(G) \otimes C_{q^{'}}(G)$$

tal que

$\hat{I}$. $(\varepsilon \otimes 1_{\mathbb{Z}} \otimes \varepsilon \otimes 1_{\mathbb{Z}}) \circ \hat{\Delta}_{0,0} = \varepsilon \otimes 1_{\mathbb{Z}}$,

$\hat{I}I_{q,q^{'}}$. $\hat{\Delta}_{q,q^{'}} \circ (\partial \otimes 1_{\mathbb{Z}}) = (-1)^{q^{'}} \hat{\partial}^{'} \circ \hat{\Delta}_{q+1,q^{'}} + (-1)^q \hat{\partial}^{''} \circ \hat{\Delta}_{q,q^{'}+1}$ $\forall q, q^{'} \in \mathbb{Z}$.

Demostración. El inciso $\hat{I}$ se sigue de los lemas 4.6 y 4.7 dado que $(\varepsilon \otimes \varepsilon) \otimes 1_{\mathbb{Z}} \circ (\Delta_{0,0} \otimes 1_{\mathbb{Z}}) = \varepsilon \otimes 1_{\mathbb{Z}}$ y $(\varepsilon \otimes 1_{\mathbb{Z}} \otimes \varepsilon \otimes 1_{\mathbb{Z}}) \circ \beta_{0,0} = (\varepsilon \otimes \varepsilon) \otimes 1_{\mathbb{Z}}$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
C_0(G) \arrow[d, "\Delta_{0,0}\otimes 1_{\mathbb{Z}}"] \arrow[dr, "\varepsilon\otimes 1_{\mathbb{Z}}"] & \\
(B_0(G) \otimes B_0(G)) \otimes_G \mathbb{Z} \arrow[r, "(\varepsilon\otimes\varepsilon)\otimes 1_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "\beta_{0,0}"] & \mathbb{Z} \\
C_0(G) \otimes C_0(G). \arrow[ur, "\varepsilon\otimes 1_{\mathbb{Z}}\otimes\varepsilon\otimes 1_{\mathbb{Z}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Similarmente para probar el inciso $\hat{I}I$ ocupemos los lemas 4.6 y 4.7:

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}_{q,q^{'}} \circ (\partial \otimes 1_{\mathbb{Z}}) &= \beta_{q,q^{'}} \circ (\Delta_{q,q^{'}} \otimes 1_{\mathbb{Z}}) \circ (\partial \otimes 1_{\mathbb{Z}}) \\
&= \beta_{q,q^{'}} \circ (\Delta \circ \partial \otimes 1_{\mathbb{Z}}) \\
&= \beta_{q,q^{'}} [((-1)^{q^{'}} \partial^{'} \circ \Delta_{q+1,q^{'}} + (-1)^q \partial^{''} \circ \Delta_{q,q^{'}+1}) \otimes 1_{\mathbb{Z}}] && \text{(lema 4.6)} \\
&= \beta_{q,q^{'}} [(-1)^{q^{'}} (\partial^{'} \circ \Delta_{q+1,q^{'}}) \otimes 1_{\mathbb{Z}} + (-1)^q (\partial^{''} \circ \Delta_{q,q^{'}+1}) \otimes 1_{\mathbb{Z}}] \\
&= \beta_{q,q^{'}} [(-1)^{q^{'}} (\partial \otimes 1 \otimes 1_{\mathbb{Z}}) \circ (\Delta_{q+1,q^{'}} \otimes 1_{\mathbb{Z}})] && (\partial^{'} = \partial \otimes 1) \\
&\quad + \beta_{q,q^{'}} [(-1)^q (1 \otimes \partial \otimes 1_{\mathbb{Z}}) \circ (\Delta_{q,q^{'}+1} \otimes 1_{\mathbb{Z}})] && (\partial^{''} = 1 \otimes \partial) \\
&= (-1)^{q^{'}} (\partial \otimes 1_{\mathbb{Z}} \otimes 1 \otimes 1_{\mathbb{Z}}) \circ \beta_{q+1,q^{'}} \circ (\Delta_{q+1,q^{'}} \otimes 1_{\mathbb{Z}}) \\
&\quad + (-1)^q (1 \otimes 1_{\mathbb{Z}} \otimes \partial \otimes 1_{\mathbb{Z}}) && \text{(lema 4.7)} \\
&= (-1)^{q^{'}} \hat{\partial}^{'} \circ \hat{\Delta}_{q+1,q^{'}} + (-1)^q \hat{\partial}^{''} \circ \hat{\Delta}_{q,q^{'}+1}.
\end{aligned}$$

□

Del teorema anterior y del teorema 4.3 obtenemos los siguientes homomorfismos:

$(\hat{1})$ $\hat{\Delta}_{0,0}([\,]) = [\,] \otimes [\,]$.

$(\hat{2})$ $\hat{\Delta}_{0,q'}([g_1 \mid \cdots \mid g_{q'}]) = [\,] \otimes [g_1 \mid \cdots \mid g_{q'}]$, para todo $q^{'} > 0$.

$(\hat{3})$ $\hat{\Delta}_{0,-q'} : C_{-q'}(G) \to C_0(G) \otimes C_{-q'}(G)$ está definido de la siguiente manera:

$$\hat{\Delta}_{0,-q'} \langle \tau_1, \cdots, \tau_{q'-1} \rangle_1 = [\,] \otimes \langle \tau_1, \cdots, \tau_{q'-1} \rangle_1.$$

Por la prueba del teorema 4.3 y el teorema 4.6 sabemos que

$$\hat{\Delta}_{0,-q'}(\langle \tau_1, \cdots, \tau_{q'-1} \rangle \otimes 1) = ([\,] \otimes 1) \otimes (\langle \tau_1, \cdots, \tau_{q-1} \rangle \otimes 1).$$

Pero

$$\begin{aligned} C_{-q'}(G) &= B_{-q'}(G) \otimes_G \mathbb{Z} \\ &= Hom(B_{q'-1}(G), \mathbb{Z}) \otimes_G \mathbb{Z} \\ &\underbrace{\cong}_{\gamma} Hom(C_{q'-1}(G), \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Entonces bajo el isomorfismo γ obtenemos que

$$\langle \tau_1, \cdots, \tau_{q'-1} \rangle \otimes 1 \cong \langle \tau_1, \cdots, \tau_{q'-1} \rangle_1.$$

$(\hat{4})$ $\hat{\Delta}_{-1,1} : C_0(G) \to C_{-1}(G) \otimes C_1(G)$ está dado por

$$\hat{\Delta}_{-1,1}[\,] = \sum_{\tau \in G} \langle\ \rangle_1 \otimes [\tau^{-1}].$$

De todo lo que hemos visto sabemos que $\hat{\Delta}_{-1,1}$ está definida de la siguiente manera

$$\hat{\Delta}_{-1,1}([\,] \otimes 1) = \sum_{\tau \in G} \langle\ \rangle \otimes 1 \otimes [\tau^{-1}] \otimes 1.$$

Pero

$$C_{-1}(G) = B_{-1}(G) \otimes_G \mathbb{Z} = Hom(B_0(G), \mathbb{Z}) \otimes_G \mathbb{Z} \underbrace{\cong}_{\gamma} Hom(C_0(G), \mathbb{Z}).$$

De esta manera obtenemos que bajo el isomorfismo γ, $\langle\ \rangle \otimes 1 \cong \langle\ \rangle_1$.

$(\hat{5})$ $\hat{\Delta}_{1,1}([g_1 \mid g_2]) = -[1] \otimes [g_2] + [g_1^{-1}] \otimes [g_2]$.

$(\hat{6})$ $\hat{\Delta}_{1,-1}([\,]) = \sum_{\tau \in G} [1] \otimes \langle\ \rangle_1 - [\tau^{-1}] \otimes \langle\ \rangle_1$.

4.3. Cohomología y homología de Tate invariante

Definición 4.4. *Al complejo de cadenas F^Q:*

$$\cdots \xrightarrow{d_2} F_1^Q \xrightarrow{d_1} F_0^Q \xrightarrow{d_0} F_{-1}^Q \xrightarrow{d_{-1}} \cdots \tag{4.12}$$

donde $F_n^Q = C_n(G)^Q$ $\forall n \geq 0$, $F_{-n}^Q = Hom(C_{n-1}(G)^Q, \mathbb{Z})$ $\forall n \geq 1$, $d_n = \partial_n \mid_{C_n(G)^Q}$ $\forall n \geq 0$ y $d_{-n} = \partial_{-n} \mid_{Hom(C_{n-1}(G)^Q,\mathbb{Z})}$ $\forall n \geq 1$, lo definimos como complejo completo estándar invariante.

Definición 4.5. *La homologia de Tate invariante de un grupo finito G con coeficientes en un grupo abeliano A la definimos como:*

$$\hat{H}_*^Q(G, A) = H_*(F^Q \otimes A).$$

Teorema 4.7. *Si G es un grupo finito entonces*

$$\hat{H}_i^Q(G, A) \cong \begin{cases} H_i^Q(G, A) & i \geq 1, \\ ker\, N & i = 0, \\ coker\, N & i = -1, \\ H_Q^{-i-1}(G, A) & i \leq -2, \end{cases}$$

donde N es el homomorfismo $N : A \to A$ dado por $N(a) =\mid G \mid a$ para toda $a \in A$.

Demostración. Sean $F_+^Q = (F_i^Q)_{i\geq 0}$, $F_-^Q = (F_i^Q)_{i\leq -1}$ y sea C_+^Q (resp. C_-^Q) el complejo $F_+^Q \otimes A$ (resp. $F_-^Q \otimes A$). Luego

$$\hat{H}_0^Q(G, A) = \frac{ker\,(d_0 \otimes 1)}{Im\,(d_1 \otimes 1)}; \qquad H_0(C_+^Q) = \frac{C_0(G)^Q \otimes A}{Im\,(d_1 \otimes 1)}$$
$$\hat{H}_{-1}^Q(G, A) = \frac{ker\,(d_{-1} \otimes 1)}{Im\,(d_0 \otimes 1)}; \qquad H_{-1}(C_-^Q) = ker\,(d_{-1} \otimes 1). \tag{4.13}$$

Probemos que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to \hat{H}_0^Q(G, A) \xrightarrow{i} H_0(C_+^Q) \xrightarrow{\overline{d_0 \otimes 1}} H_{-1}(C_-^Q) \xrightarrow{\pi} \hat{H}_{-1}^Q(G, A) \to 0, \tag{4.14}$$

donde i es la inclusión, $\overline{d_0 \otimes 1}$ es el homomorfismo inducido por $d_0 \otimes 1$ y π es la proyección.

Siguiendo la ecuación (4.13) obtenemos la siguiente sucesión:

$$0 \to \frac{ker\,(d_0 \otimes 1)}{Im\,(d_1 \otimes 1)} \xrightarrow{i} \frac{C_0(G)^Q \otimes A}{Im\,(d_1 \otimes 1)} \xrightarrow{\overline{d_0 \otimes 1}} ker\,(d_{-1} \otimes 1) \xrightarrow{\pi} \frac{ker\,(d_{-1} \otimes 1)}{Im\,(d_0 \otimes 1)} \to 0,$$

pero como i es la inclusión y $\overline{d_0 \otimes 1}$ es el homomorfismo inducido por $d_0 \otimes 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} ker\, \overline{d_0 \otimes 1} &= \{[x \otimes a] \in \frac{C_0(G)^Q \otimes A}{Im\,(d_1 \otimes 1)} \mid x \otimes a \in ker\,(d_0 \otimes 1)\} \\ &= \frac{ker\,(d_0 \otimes 1)}{Im\,(d_1 \otimes 1)} = Im\, i. \end{aligned}$$

Además es claro que $ker\, \pi = Im\,(d_0 \otimes 1) = Im\,(\overline{d_0 \otimes 1})$, por lo tanto la sucesión (4.14) es exacta.
Por otro lado, como $Im\,(d_1 \otimes 1) = 0$ y $C_0(G)^Q \otimes A \cong A$, entonces $H_0(C_+^Q) = A$. Además ya que $Hom(C_0(G)^Q, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ y $d_{-1} \otimes 1 = 0$, entonces $H_{-1}(C_-^Q) = A$. Por lo tanto, la sucesión exacta (4.14) es isomorfa a la sucesión exacta

$$0 \to ker\,(d_0 \otimes 1) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\overline{d_0 \otimes 1}} A \xrightarrow{\pi} \frac{A}{Im\,(d_0 \otimes 1)}. \tag{4.15}$$

Además, del teorema 4.4 podemos ver que $d_0[\;] = \partial_0 \mid_{C_0(G)} [\;] = \mid G \mid$, de esta manera obtenemos que $\overline{d_0 \otimes 1}$ está inducida por el homomorfismo $N : A \to A$ dado por $N(a) = \mid G \mid a \;\forall a \in A$. Entonces, por la exactitud de la sucesión exacta (4.15) obtenemos que $\hat{H}_0(G, A) = ker\, N$ y $\hat{H}_{-1}(G, A) = coker\, N$.

Ahora bien, para calcular la homología de Tate invariante para $i \geq 1$ y $i \leq -2$ enunciemos el siguiente lema:

Lema 4.8. *$Hom(C_n(G)^Q, \mathbb{Z}) \otimes A \cong Hom(C_n(G)^Q, A)$ para toda $n \geq 0$.*

Demostración. Como los grupos $C_n(G)^Q$ son $\mathbb{Z}$-libres, entonces $Hom(C_n(G)^Q, \mathbb{Z}) \otimes A \cong Hom(\bigoplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes A \cong \bigoplus(Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes A) \bigoplus(\mathbb{Z} \otimes A) \cong \bigoplus A$. Por otro lado, $Hom(C_n(G)^Q, A) \cong Hom(\bigoplus \mathbb{Z}, A) \cong \bigoplus Hom(\mathbb{Z}, A) \cong \bigoplus A$. Por lo tanto obtenemos el resultado. $\square$

Luego por el lema anterior $C_-^Q = F_-^Q \otimes A \cong \mathscr{H}om(C(G)^Q, A)$. Además siguiendo la notación de [1] tenemos que $C_+^Q = F_+^Q \otimes A = (C(G) \otimes A)^Q$. Por lo tanto $\hat{H}_i^Q(G, A) = H_i^Q(G, A) \;\forall i \geq 1$ y $\hat{H}_i^Q(G, A) = H_Q^{-i-1}(G, A) \;\forall i \leq -2$. $\square$

Definición 4.6. *La cohomología de Tate invariante de un grupo finito G con coeficientes en un grupo abeliano A la definimos como:*

$$\hat{H}_Q^i(G, A) = H^i(\mathscr{H}om(F^Q, A)).$$

Argumentos análogos a los anteriores muestran que:

Teorema 4.8. *Si G es un grupo finito entonces*

$$\hat{H}_Q^i(G, A) \cong \begin{cases} H_{-i-1}^Q(G, A) & i \leq -2, \\ ker\, N & i = -1, \\ coker\, N & i = 0, \\ H_Q^i(G, A) & i \geq 1. \end{cases}$$

donde N es el homomorfismo $N : A \to A$ dado por $N(a) = \mid G \mid a$ para toda $a \in A$.

Demostración. Sea $F_+^Q = (F_i^Q)_{i\geq 0}$, $F_-^Q = (F_i^Q)_{i\leq -1}$ y sea C_Q^+ (resp. C_Q^-) el complejo de cadenas $\mathscr{H}om(F_+^Q, A)$ (resp. $\mathscr{H}om(F_-^Q, A)$).

Consideremos las siguientes ecuaciones:

$$\hat{H}_Q^{-1}(G,A) = \frac{ker\,\delta_{-1}}{Im\,\delta_{-2}}; \qquad H^{-1}(C_Q^-) = \frac{\mathscr{H}om(F_{-1}^Q, A)}{Im\,\delta_{-2}}$$
$$\hat{H}_Q^{0}(G,A) = \frac{ker\,\delta_{0}}{Im\,\delta_{-1}}; \qquad H^{0}(C_Q^+) = ker\,\delta_0.$$

De acuerdo a estas ecuaciones veamos que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to \hat{H}_Q^{-1}(G,A) \xrightarrow{i} H^{-1}(C_Q^{-1}) \xrightarrow{\alpha} H^0(C_Q^+) \xrightarrow{\pi} \hat{H}_Q^0(G,A) \to 0, \tag{4.16}$$

es decir,

$$0 \to \frac{ker\,\delta_{-1}}{Im\,\delta_{-2}} \xrightarrow{i} \frac{\mathscr{H}om(F_{-1}^Q, A)}{Im\,\delta_{-2}} \xrightarrow{\alpha} ker\,\delta_0 \xrightarrow{\pi} \frac{ker\,\delta_0}{Im\,\delta_{-1}} \to 0,$$

donde i es la inclusión, α es el homomorfismo inducido por δ_{-1} y π es la proyección.

Como

$$\begin{aligned} ker\,\alpha &= \{\overline{f} \in \frac{\mathscr{H}om(F_{-1}^Q, A)}{Im\,\delta_{-2}} \mid \alpha(f) = 0\} \\ &= \{\overline{f} \in \frac{\mathscr{H}om(F_{-1}^Q, A)}{Im\,\delta_{-2}} \mid \delta_{-1}(f) = 0\} \\ &= \frac{ker\,\delta_{-1}}{Im\,\delta_{-2}} = Im\,i. \end{aligned}$$

Además por definición de α y π se tiene que $Im\,\alpha = Im\,\delta_{-1} = ker\,\pi$, por lo tanto obtenemos que la sucesión (4.16) es exacta.

Ahora calculemos $H^0(C_Q^+)$ y $H^{-1}(C_Q^-)$.

Sabemos que $\mathscr{H}om(F_{-1}^Q, A) = \mathscr{H}om(\mathscr{H}om(C_0(G)^Q, \mathbb{Z}), A) \cong C_0(G)^Q \otimes A$ (ver [2, Teorema I.8.3, pág. 28]) y $C_0(G)^Q \otimes A \cong A$ (ya que $C_0(G)^Q \cong \mathbb{Z}$). Además, como $d_{-1} = 0$ entonces $\delta_{-2}(f) = f(d_{-1}) = 0$. Entonces

$$H^{-1}(C_Q^-) = \frac{Hom(F_{-1}^Q, A)}{Im\,\delta_{-2}} \cong A.$$

Por otro lado

$$H^0(C_Q^+) = ker\,\delta_0 = Hom(C_0(G)^Q, A) \cong Hom(\mathbb{Z}, A) \cong A,$$

entonces la sucesión (4.16) es isomorfa a la sucesión exacta

$$0 \to \hat{H}_Q^{-1}(G,A) \to A \xrightarrow{\alpha} A \to \hat{H}_Q^0(G,A) \to 0.$$

Por otro lado, por construcción obtenemos que α está inducida por el homomorfismo $N : A \to A$ dado por $N(a) = |G| a \; \forall a \in A$. Por lo tanto $\hat{H}_Q^{-1}(G,A) = ker\, N$ y $\hat{H}_Q^0(G,A) = coker\, N$. Además, $\mathscr{H}om(F_{-n}^Q, A) = \mathscr{H}om(Hom(C_{n-1}(G)^Q, \mathbb{Z}), A) = \mathscr{H}om((C_{n-1}(G)^Q)^*, A) \cong C_{n-1}(G)^Q \otimes A \cong (C_{n-1}(G) \otimes A)^Q$. De esta manera

$$\hat{H}_Q^i(G,A) = H_{-i-1}^Q(G,A) \; \forall\, i \leq -2, \qquad \hat{H}_Q^i(G,A) = H_Q^i(G,A) \; \forall\, i \geq 1.$$

□

4.4. Teorema de dualidad invariante

Definición 4.7. *Para cualquier grupo abeliano A definimos $A^{'} = Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.*

Lema 4.9. *Si A es un grupo abeliano tal que $nA = 0$, para algún $n > 0$, entonces*

$$A^{'} \cong Hom(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Demostración. Sea $f \neq 0 \in Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ y supongamos que f está dada por $f(a) = \frac{b}{c} + \mathbb{Z}$ para alguna $a \in A$ y b, $c \in \mathbb{Z}$. Como $nA = 0$ para algún $n > 0$, entonces $na = 0$. Luego $0 = f(0) = f(na) = n\frac{b}{c} + \mathbb{Z}$, esto implica que $n\frac{b}{c} \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, definimos

$$\begin{array}{rcl} \varphi : Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \to & Hom(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ \varphi(f) & = & g \end{array}$$

donde $g(a) = n\frac{b}{c} + n\mathbb{Z}$. Probemos que φ es un isomorfismo.

Primero mostremos que φ es sobre. Sea $h \in Hom(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, entonces $h(a) = r + n\mathbb{Z}$ para alguna $a \in A$, $r \in \mathbb{Z}$. De esta manera, definimos $f \in Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ como $f(a) = \frac{r}{n} + \mathbb{Z}$. Por lo tanto obtenemos que $\varphi(f) = h$.

Ahora probemos que φ es inyectiva. Supongamos que $\varphi(f) = g = 0$, donde f y g son como las definimos anteriormente. Entonces $g(a) = n\frac{b}{c} + n\mathbb{Z} = 0$, esto implica que $n\frac{b}{c} \in n\mathbb{Z}$. Así $\frac{b}{c} \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $f(a) = \frac{b}{c} + \mathbb{Z} = 0 \; \forall\, a \in A$. De esta manera $f = 0$ y obtenemos que φ es inyectiva. Por lo tanto, φ es un isomorfismo. □

Lema 4.10. *Si A es un grupo cíclico de orden n entonces $A^{'}$ también es un grupo cíclico de orden n.*

Demostración. Como $A = \mathbb{Z}_n$, entonces $nA = 0$, luego por el lema anterior $A^{'} \cong Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n)$. Por lo tanto es suficiente mostrar que $Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n$.

Sea $\varphi : Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \to \mathbb{Z}_n$ dada por $\varphi(f) = f(\bar{1})$.

Probemos que φ es inyectiva.

Supongamos que $\varphi(f) = 0$, entonces $f(\bar{1}) = 0$. Esto implica que $f = 0$, de esta manera f es inyectiva.

Ahora mostremos que φ es sobre.

Sea $\bar{s} \in \mathbb{Z}_n$, entonces definimos $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ como $f(\bar{1}) = \bar{s}$. De esta manera $f(\bar{r}) = \overline{rs}$ para cualquier $\bar{r} \in \mathbb{Z}_n$. Luego $f(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = \overline{(r_1 + r_2)s} = \overline{r_1 s} + \overline{r_2 s} = f(\bar{r}_1) + f(\bar{r}_2)$ y $f(0) = 0$. Por lo tanto f es un homomorfismo. Así $\varphi(f) = f(\bar{1}) = \bar{s}$. $\square$

Lema 4.11. *Para cualquier grupo abeliano finito A, $A^{'} \cong A$.*

Lema 4.12. *Si A es un grupo abeliano con torsión, entonces $A^{'} \cong Ext^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})$.*

Demostración. Consideremos la siguiente resolución inyectiva de $\mathbb{Z}$:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$$

Ahora, aplicando el funtor $Hom(A, -)$ a la sucesión exacta anterior, obtenemos

$$0 \to Hom(A, \mathbb{Z}) \to Hom(A, \mathbb{Q}) \stackrel{\delta^0}{\to} Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \stackrel{\delta^1}{\to} 0 \to \cdots . \tag{4.17}$$

Por definición, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) = \frac{ker\,\delta^1}{Im\,\delta^0} = \frac{Hom(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}{Im\,\delta^0}$. Pero como $\mathbb{Q}$ es libre de torsión entonces $Hom(A, \mathbb{Q}) = 0$. De esta manera $Im\,\delta^0 = 0$, por lo tanto $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \cong Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = A^{'}$. $\square$

Teorema 4.9. *Para toda $i \in \mathbb{Z}$, los grupos $\hat{H}^Q_i(G, \mathbb{Z})$ son un grupos abelianos finitos.*

Demostración. Sabemos que los grupos $\hat{H}^Q_i(G, \mathbb{Z})$ son abelianos, de esta manera, si probamos que estos grupos son finitamente generados y $\mid G \mid \hat{H}^Q_i(G, \mathbb{Z}) = 0$, entonces por el teorema fundamental de grupos abelianos finitamente generados obtenemos que los grupos $\hat{H}^Q_i(G, \mathbb{Z})$ son finitos.

Primero probemos que los grupos abelianos $\hat{H}^Q_i(G, \mathbb{Z})$ son finitamente generados.

Los grupos en el complejo completo estándar invariante (4.12), $F^Q_i = C_i(G)^Q$, $\forall\, i \geq 0$ y $F^Q_{-i} = Hom(C_{i-1}(G)^Q, \mathbb{Z})$ $\forall\, i \geq 1$ son $\mathbb{Z}$-módulos finitamente generados, dado que para cada i, $C_i(G) = B_i(G) \otimes_G \mathbb{Z}$ y además cada G-módulo $B_i(G)$ es finitamente generado. Por otro lado, por definición de homología de Tate invariante, $\hat{H}^Q_i(G, \mathbb{Z}) = H_i(F^Q_i) = \frac{ker\,d_i}{Im\,d_{i+1}}$. Pero como el anillo $\mathbb{Z}$ es Noetheriano y F^Q_i es finitamente generado, entonces F^Q_i es un $\mathbb{Z}$-módulo Noetheriano. De esta manera, todos los submódulos de F^Q_i son finitamente generados. En particular, $ker\,d_i$ y $Im\,d_{i+1}$ son finitamente generados y sus respectivos submódulos también lo son. Por lo tanto $ker\,d_i$ y $Im\,d_{i+1}$ son $\mathbb{Z}$-módulos Noetherianos, el cual implica que $\frac{ker\,d_i}{Im\,d_{i+1}}$ sea Noetheriano. De esta manera todos los submódulos de $\frac{ker\,d_i}{Im\,d_{i+1}}$ son finitamente generados, en particular $\frac{ker\,d_i}{Im\,d_{i+1}}$ es finitamente generado. Por lo tanto, $\hat{H}^Q_i(G, \mathbb{Z})$ es finitamente generado.

Ahora mostremos que $\mid G \mid \hat{H}^Q_i(G, \mathbb{Z}) = 0$.

Por el teorema 4.7, $\hat{H}^Q_i(G, \mathbb{Z}) \cong H^Q_i(G, \mathbb{Z})$ $\forall\, i \geq 1$. Pero como G es finito, por la proposición 4.1 de [1], $\mid G \mid$ anula a $H^Q_i(G, \mathbb{Z})$. Por lo tanto, $\mid G \mid \hat{H}^Q_i(G, \mathbb{Z}) = 0$ $\forall\, i \geq 1$.

Ahora supongamos que $i \leq -2$.

Definimos el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} j^* : \hat{H}_i^Q(G, \mathbb{Z}) & \rightarrow & \hat{H}_i^Q(\{e\}, \mathbb{Z}) \\ j^*[f] & = & [f \circ j_*], \end{array}$$

donde $j_* : C_i(\{e\})^Q \rightarrow C_i(G)^Q$ es la aplicación inducida por la inclusión. También definimos

$$\begin{array}{rcl} tr^* : \hat{H}_i^Q(\{e\}, \mathbb{Z}) & \rightarrow & \hat{H}_i^Q(G, \mathbb{Z}) \\ tr^*[f] & = & [f \circ tr], \end{array}$$

donde $tr : C_i(G)^Q \rightarrow C_i(\{e\})^Q$ es la aplicación transfer definida en [1]. Por lo tanto,

$$tr^* \circ j^*[f] = tr^*[f \circ j_*] = [f \circ j_* \circ tr] = \mid G \mid [f].$$

Pero como $\hat{H}_i^Q(\{e\}, \mathbb{Z}) = 0$, entonces $\mid G \mid [f] = 0$. De esta manera, $\mid G \mid \hat{H}_i^Q(G, \mathbb{Z}) = 0 \ \forall\, i \leq -2$.

Por otro lado, $\hat{H}_i^Q(G, \mathbb{Z}) = 0$ y $\hat{H}_{-1}^Q(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/ \mid G \mid \mathbb{Z}$, el cual es claro que $\mid G \mid$ anula a estos dos grupos. □

Lema 4.13. *Para cualquier grupo finito G, $Hom(H_i^Q(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0 \ \forall\, i \geq 1$.*

Demostración. Supongamos que existe $f \neq 0 \in Hom(H_i^Q(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$, entonces $f(x) = r \neq 0$ para alguna $x \in H_i^Q(G, \mathbb{Z})$. Pero por el teorema anterior, $\mid H_i^Q(G, \mathbb{Z}) \mid < \infty$, entonces $\mid H_i^Q(G, \mathbb{Z}) \mid x = 0$, y como f es homomorfismo, entonces $0 = f(0) = f(\mid H_i^Q(G, \mathbb{Z}) \mid x) = \mid H_i^Q(G, \mathbb{Z}) \mid r$. Esto implica que $\mid H_i^Q(G, \mathbb{Z}) \mid r = 0$, el cual es imposible ya que $r \in \mathbb{Z}$ y r no tiene orden finito. Por lo tanto, $Hom(H_i^Q(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$. □

Teorema 4.10. *Para cualquier grupo finito G tenemos que*

$$H_Q^i(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, \\ 0 & i = 1, \\ H_{i-1}^Q(G, \mathbb{Z}) & i \geq 2. \end{cases}$$

Demostración. Como $\mathbb{Z}$ es un anillo de ideales principales, por el teorema de los coeficientes universales [2, Proposición 0.8, pág. 7] obtenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Ext_{\mathbb{Z}}^1(H_{i-1}(C_{i-1}(G)^Q), \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(Hom(C_i(G)^Q, \mathbb{Z})) \\ \rightarrow Hom(H_i(C_i(G)^Q), \mathbb{Z}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$0 \rightarrow Ext_{\mathbb{Z}}^1(H_{i-1}^Q(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_Q^i(G, \mathbb{Z}) \rightarrow Hom(H_i^Q(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \rightarrow 0. \quad (4.18)$$

Primero supongamos que $i = 0$, entonces en la sucesión exacta anterior obtenemos

$$0 \to Ext^1_{\mathbb{Z}}(H^Q_{-1}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to H^0_Q(G,\mathbb{Z}) \to Hom(H^Q_0(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to 0. \tag{4.19}$$

Dado que $H^Q_{-1}(G,\mathbb{Z}) = 0$ entonces $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^Q_{-1}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = 0$. Además $H^Q_0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, de esta manera $Hom(H^Q_0(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Pero como la sucesión exacta (4.19) también se escinde, entonces obtenemos que $H^0_Q(G,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Ahora sustituyendo $i = 1$ en (4.18) obtenemos

$$0 \to Ext^1_{\mathbb{Z}}(H^Q_0(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to H^1_Q(G,\mathbb{Z}) \to Hom(H^Q_1(G,\mathbb{Z}).\mathbb{Z}) \to 0, \tag{4.20}$$

Pero en el lema anterior obtuvimos que $Hom(H^Q_1(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = 0$, entonces $H^1_Q(G,\mathbb{Z}) \cong Ext^1_{\mathbb{Z}}(H^Q_0(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$. Por otro lado, $H^Q_0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, así solo necesitamos calcular $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$. Pero como $\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo entonces $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = 0$. Por lo tanto $H^1_Q(G,\mathbb{Z}) = 0$.

Por último, supongamos que $i \geq 2$.

Como $Hom(H^Q_i(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = 0$ y como la sucesión exacta (4.18) se escinde, entonces

$$H^i_Q(G,\mathbb{Z}) \cong Ext^1_{\mathbb{Z}}(H^Q_{i-1}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}).$$

Pero como los grupos $H^Q_{i-1}(G,\mathbb{Z})$ son finitos y tienen torsión, entonces

$$Ext^1_{\mathbb{Z}}(H^Q_{i-1}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \cong H^Q_{i-1}(G,\mathbb{Z})' \cong H^Q_{i-1}(G,\mathbb{Z}),$$

por lo tanto

$$H^i_Q(G,\mathbb{Z}) \cong H^Q_{i-1}(G,\mathbb{Z}).$$

□

Teorema 4.11. *Para cualquier grupo finito G tenemos el isomorfismo*

$$\hat{H}^i_Q(G,\mathbb{Z}) \cong \hat{H}^Q_{i-1}(G,\mathbb{Z}) \ \ \forall\, i \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Obtenemos el resultado directamente de los teoremas 4.7, 4.8 y 4.10. □

4.5. Cálculos de cohomología invariante

Lema 4.14.

$$Hom(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{(n,m)} \quad n,m \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Sea $f \in Hom(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m)$ y supongamos que $f(\bar{1}) = \bar{c}$ para algún $\bar{c} \in \mathbb{Z}_n$, entonces

$$\bar{0} = f(\bar{n}) = nf(\bar{1}) = n\bar{c}.$$

De esta manera $nc \equiv 0 \mod m$, esto implica que $\frac{nc}{(n,m)} \equiv 0 \mod \frac{m}{(n,m)}$. Pero como el máximo común divisor $(\frac{n}{(n,m)}, \frac{m}{(n,m)}) = 1$, entonces $\frac{m}{(n,m)}$ divide a c.

Por lo tanto, $c = \frac{m}{(n,m)}k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Pero $\bar{c} = \overline{\frac{m}{(n,m)}k}$, entonces solo hay (n,m) posibles valores para $\bar{c}$ ($\overline{\frac{m}{(n,m)}(1)}$, $\overline{\frac{m}{(n,m)}(2)}, \cdots$, $\overline{\frac{m}{(n,m)}((n,m)-1)}$, $\overline{\frac{m}{(n,m)}(n,m)} = \bar{0}$).

De esta forma, definiendo un homomorfismo para cada uno de estos (n,m) posibles valores obtenemos que $\mid Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \mid = (n,m)$. Con lo anterior obtenemos que $Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \langle f(\bar{1}) \rangle$ bajo el isomorfismo $\varphi : Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ dado por $\varphi(f) = f(\bar{1})$, donde $f(\bar{1}) = \overline{\frac{m}{(n,m)}}$. Por lo tanto, $Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{(n,m)}$. □

Lema 4.15. *Sea $\mathbb{Z}_m$, para algún $m \geq 2$. Entonces para cualquier grupo abeliano D, tenemos que $Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, D) \cong D/mD$.*

Demostración. Consideremos la siguiente resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$-módulos:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \to 0.$$

De esta manera, aplicandole a esta sucesión exacta el funtor $Hom(-, D)$, obtenemos

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, D) \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, D) \xrightarrow{m} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, D) \to 0 \to \cdots .$$

Pero dado que $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, D) \cong D$, entonces la sucesión exacta anterior es isomorfa a la siguiente sucesión:

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, D) \to D \xrightarrow{m} D \to 0 \to \cdots .$$

Por lo tanto, por definición de $Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, D)$ obtenemos que $Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, D) \cong D/mD$. □

Lema 4.16.

$$Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & m = par, \\ 0 & m = impar. \end{cases}$$

Demostración. Ver la demostración en [4, pág. 780]. □

Teorema 4.12. *Supongamos que $Q = \mathbb{Z}_2$ actúa sobre $G = \mathbb{Z}$ por $g \mapsto -g$. Entonces para $i > 0$, obtenemos que*

$$H^i_Q(G, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & i = par, \\ 0 & i = impar. \end{cases}$$

Demostración. Como $\mathbb{Z}$ es un anillo de ideales principales entonces por el teorema de los coeficientes universales obtenemos que la siguiente sucesión exacta se escinde (ver el teorema 1.2 y la ecuación 1.1):

$$0 \to Ext^1_{\mathbb{Z}}(H^Q_{2i-1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to H^{2i}_Q(G, \mathbb{Z}) \to Hom(H^Q_{2i}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to 0.$$

Pero en [1, Teorema 5.8, pág. 33], Knudson obtuvo que $H^Q_{2i-1}(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ y $H^Q_{2i}(G, \mathbb{Z}) = 0$, de esta manera obtenemos que

$$H^{2i}_Q(G, \mathbb{Z}) \cong Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}).$$

Pero por el lema 4.15 tenemos que $Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$, por lo tanto $H^{2i}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$.

Por otro lado, para el caso impar consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to Ext^1_{\mathbb{Z}}(H^Q_{2i}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to H^{2i+1}_Q(G,\mathbb{Z}) \to Hom(H^Q_{2i+1}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to 0.$$

Pero sabemos que $H^Q_{2i}(G,\mathbb{Z}) = 0$, entonces $Ext^1_{\mathbb{Z}}(H^Q_{2i}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = 0$. Además, $H^Q_{2i+1}(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$, el cual es un grupo finito. Por otro lado, $Hom(D,\mathbb{Z})$ para cualquier grupo abeliano finito D (esto se puede probar como se demostró el lema 4.13), de esta manera obtenemos que $Hom(H^Q_{2i+1}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = 0$. Por lo tanto, $H^{2i+1}_Q(G,\mathbb{Z}) = 0$. □

Teorema 4.13. *Sean $Q = \mathbb{Z}_2$, $G = \mathbb{Z}_{2^s}$ con $s \geq 2$ y $A = \mathbb{Z}_m$ con m un número par tal que Q actúa sobre G por $g \mapsto -g$. Entonces,*

$$H^i_Q(G,A) \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}_2)^{4k-2} & i = 4k-3, \quad k \geq 2, \\ (\mathbb{Z}_2)^{4k-1} & i = 4k-2, \quad k \geq 1, \\ (\mathbb{Z}_2)^{4k-1} \bigoplus \mathbb{Z}_m/2^s\mathbb{Z}_m & i = 4k-1, \quad k \geq 1, \\ (\mathbb{Z}_2)^{4k} & i = 4k, \qquad k \geq 1. \end{cases}$$

Demostración. $i = 4k-3$ $(k \geq 2)$

Por el teorema de los coeficientes universales

$$0 \to Ext^1_{\mathbb{Z}}(H^Q_{4k-4}(G,\mathbb{Z}),A) \to H^{4k-3}_Q(G,A) \to Hom(H^Q_{4k-3}(G,\mathbb{Z}),A) \to 0.$$

Pero en [1, Teorema 5.7, pág. 32], Knudson obtuvo lo siguiente:

$$H^Q_{4k-4}(G,\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}_2)^{2k-2}, \qquad H^Q_{4k-3}(G,\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}_2)^{2k}.$$

De esta manera

$$0 \to Ext^1_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}_2)^{2k-2},A) \to H^{4k-3}_Q(G,A) \to Hom((\mathbb{Z}_2)^{2k},A) \to 0,$$

el cual es equivalente a la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,A)^{2k-2} \to H^{4k-3}_Q(\mathbb{Z}_{2^s},A) \to Hom(\mathbb{Z}_2,A)^{2k} \to 0.$$

Además, como la sucesión exacta se escinde, entonces

$$H^{4k-3}_Q(\mathbb{Z}_{2^k},A) = Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,A)^{2k-2} \bigoplus Hom(\mathbb{Z}_2,A)^{2k}.$$

Luego, por los lemas 4.14 y 4.16, obtenemos

$$\begin{aligned} H^{4k-3}_Q(\mathbb{Z}_{2^k},A) &\cong (\mathbb{Z}_2)^{2k-2} \bigoplus (\mathbb{Z}_2)^{2k} \\ &\cong (\mathbb{Z}_2)^{4k-2}. \end{aligned}$$

$i = 4k-2$ $(k \geq 1)$

Nuevamente, utilizando el teorema de los coeficientes universales tenemos que

$$0 \to Ext^1_{\mathbb{Z}}(H^Q_{4k-3}(G,\mathbb{Z}),A) \to H^{4k-2}_Q(G,A) \to Hom(H^Q_{4k-2}(G,\mathbb{Z}),A) \to 0.$$

Además, por [1, Teorema 5.7, pág. 32]

$$H^Q_{4k-2}(G,\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}_2)^{2k-1}, \qquad H^Q_{4k-3}(G,\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}_2)^{2k},$$

entonces

$$0 \to Ext^1_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}_2)^{2k},A) \to H^{4k-2}_Q(G,A) \to Hom((\mathbb{Z}_2)^{2k-1},A) \to 0.$$

Además, como la sucesión exacta se escinde, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} H^{4k-2}_Q(G,A) &\cong Ext^1_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}_2)^{2k},A) \bigoplus Hom((\mathbb{Z}_2)^{2k-1},A) \\ &\cong Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,A)^{2k} \bigoplus Hom(\mathbb{Z}_2,A)^{2k-1}. \end{aligned}$$

Pero por los lemas 4.14 y 4.16, obtenemos lo siguiente:

$$Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_2, \qquad Hom(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} H^{4k-2}_Q(G,A) &\cong (\mathbb{Z}_2)^{2k} \bigoplus (\mathbb{Z}_2)^{2k-1} \\ &\cong (\mathbb{Z}_2)^{4k-1}. \end{aligned}$$

$i = 4k-1$ $(k \geq 1)$

Por el teorema de los coeficientes universales

$$0 \to Ext^1_{\mathbb{Z}}(H^Q_{4k-2}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_m) \to H^{4k-1}_Q(G,A) \to Hom(H^Q_{4k-1}(G,\mathbb{Z}),A) \to 0.$$

Pero como la sucesión exacta se escinde y dado a los cálculos de [1] ($H^Q_{4k-2}(G,\mathbb{Z})$ $= (\mathbb{Z})^{2k-1}$ y $H^Q_{4k-1}(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{2^s} \oplus (\mathbb{Z}_2)^{2k}$), obtenemos que

$$\begin{aligned} H^{4k-1}_Q(G,A) &= Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_m)^{2k-1} \bigoplus Hom(\mathbb{Z}_{2^s},\mathbb{Z}_m) \bigoplus Hom(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_m)^{2k} \\ &\cong (\mathbb{Z}_2)^{2k-1} \bigoplus \mathbb{Z}_m/2^s\mathbb{Z}_m \bigoplus (\mathbb{Z}_2)^{2k} \\ &= (\mathbb{Z}_2)^{4k-1} \bigoplus \mathbb{Z}_m/2^s\mathbb{Z}_m. \end{aligned}$$

$i = 4k$ $(k \geq 1)$

Como ya hemos visto en los casos anteriores, aplicamos el teorema de los coeficientes universales obteniendo:

$$0 \to Ext^1_{\mathbb{Z}}(H^Q_{4k-1}(G,\mathbb{Z}),A) \to H^{4k}_Q(G,A) \to Hom(H^Q_{4k}(G,\mathbb{Z}),A) \to 0.$$

Pero como $H^Q_{4k-1}(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{2^s}\bigoplus(\mathbb{Z}_2)^{2k}$ y $H^Q_{4k}(G,\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}_2)^{2k}$, y además la sucesión exacta se escinde, entonces

$$\begin{aligned} H_Q^{4k}(G,A) &\cong Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{2^s},\mathbb{Z}_m)\bigoplus Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_m)^{2k}\bigoplus Hom(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_m)^{2k} \\ &\cong \mathbb{Z}_m/2^s\mathbb{Z}_m\bigoplus(\mathbb{Z}_2)^{4k}. \end{aligned}$$

$\square$

Conclusiones

A lo largo de esta tesis hemos hablado de distintas homologías.

La primera de ellas es la homología de un grupo G con coeficientes en un G-módulo A. Para definirla necesitamos la existencia de una resolución proyectiva F de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$, pero es sabido que para cualquier grupo G podemos construir una resolución libre; en particular la resolución barra. Por otro lado, encontrar una resolución del grupo G no nos garantiza que será fácil calcular la homología del grupo. También damos por hecho que para cualquier dos resoluciones F y $F^{'}$ de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$ existe una aplicación de cadenas $f : F \to F^{'}$ que es única salvo homotopía y que es una equivalencia homotópica, implicando así que los grupos de homología y cohomología para ambas resoluciones del grupo G sean iguales. Vale la pena mencionar que con estos grupos de homología y cohomología se definieron productos: cruz, intersección y unión. En el que para definir este último se demostró la existencia de una G-aplicación diagonal $\Delta : F \to F \otimes F$, en la que nosotros de forma muy particular hemos trabajado con la diagonal estándar.

Otros de los grupos de homología y cohomología que hemos hablado en esta tesis fue la homología y cohomología de Tate, definidos cuando G es un grupo finito y de la existencia de una resolución completa. Al igual que con la (co)homología de un grupo G con coeficientes en un G-módulo A, la (co)homología de Tate no depende de la resolución con que estemos trabajando. En esta teoría también se definieron productos: cruz, intersección y unión. Gracias a la definición y teoría de estos productos Tate demostró el impresionante teorema de dualidad: $H^i(G, \mathbb{Z}) \cong H_{i-1}(G, \mathbb{Z})$ [2, Teorema 7.4, pág. 147] .

Ahora nos remitiremos a hablar un poco de la cohomología de Farrell [2, pág. 273], para ello es importante primero definir la dimensión cohomológica virtual de un grupo G, denotado como $vcd\, G$. La dimensión cohomológica virtual de un grupo G es la dimensión cohomológica común de los subgrupos libres de torsión G de índice finito. El cual el teorema de Serre [2, Teorema 3.1, pág. 190] nos garantiza que tales grupos tengan la misma dimensión cohomológica. La cohomología de Farrell se definió a partir de $vcd\, G < \infty$ y de la existencia de resoluciones completas (F, P, ε):

$$\hat{H}^*(G, A) = H^*(\mathscr{H}om_G(F, A)) \quad (A \text{ es un } G\text{-módulo}).$$

Cabe mencionar que para cualesquiera dos resoluciones completas (F, P, ε) y

$(F^{'}, P^{'}, \varepsilon^{'})$ existe una única clase de homotopía de aplicaciones de cadenas de (F, P, ε) a $(F^{'}, P^{'}, \varepsilon^{'})$ y estas aplicaciones son equivalencias homotópicas. Es importante señalar que a lo largo de nuestra investigación vimos que $\hat{H}^i(G, A) = H^i(G, A)$ (cohomología de Farrell es igual a la cohomología de G) para $i > vcd\, G$ y que $\hat{H}^*(G, A) = 0$ para cualquier grupo G libre de torsión. Esto implica que la cohomología de Farrell $\hat{H}^i(G, A)$ sea igual a la cohomología de Tate para $i > 0$ (ya que $vcd\, G = 0$). Viéndolo de otra manera, pudimos ver que la cohomología de Farrell generaliza la cohomología de Tate para grupos finitos.

Nuestra principal inspiración en esta tesis fue desarrollar una nueva teoría en los grupos de homología y cohomología invariante. Vale la pena recordar que en nuestra investigación definimos nuevos productos, definimos la homología y cohomología de Tate invariante; el cual están inducidos los grupos de homología y cohomología invariante, también demostramos un teorema de dualidad: $H^i_Q(G, \mathbb{Z}) \cong H^Q_{i-1}(G, \mathbb{Z})$ $(i \geq 2)$, y además, nuestra principal aportación de esta tesis fue la construcción de una sucesión espectral obteniendo con esta poderosa herramienta algunos grupos de homología invariante. Sin embargo, como vimos en esta tesis, la definición de (co)homologia invariante depende del complejo de invariantes $C(G)^Q$, el cual nosotros queremos demostrar bajo que condiciones existe una resolución libre tal que al tensorizarla con el anillo $\mathbb{Z}$ bajo G (G actuando trivialmente sobre $\mathbb{Z}$), los Q-invariantes de este producto tensorial sea una equivalencia homotópica con el subcomplejo de invariantes. Haciendo esto posible, pensamos que nos facilitaría hacer más cálculos con la homología y cohomología invariante, ya que con el complejo barra fue muy difícil calcularlos. Podemos ver que entre la cohomología de Farrell y la cohomología de Tate invariante para un grupo finito existe un homomorfismo

$$\hat{H}^i(G, A) \to \hat{H}^i_Q(G, A) \quad (i > 0)$$

inducido por la inclusión; sin embargo, nosotros queremos generalizar la cohomología de Tate invariante, para ello creemos que es necesario definir una resolución completa donde esté inducido el complejo de invariantes $C(G)^Q$, pero que nos garantice que esta nueva cohomología no necesariamente dependa de este subcomplejo de cadenas. A lo largo de esta investigación, nosotros tratamos de construir esta resolución, pero no es fácil, debido a que no todas las resoluciones F de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$ inducen un complejo de cadenas $(F \otimes_G \mathbb{Z})^Q$ tal que los grupos de (co)homología de este complejo sean los mismos que los del subcomplejo de invariantes $C(G)^Q$.

Bibliografía

[1] Knudson, Kevin P. *The homology of invariant group chains*. Journal of Algebra 298(2006): 15-33.

[2] Brown, Kenneth S. *Cohomology of Groups*. New York: Springer-Verlag, 1982.

[3] Weiss, Edwin. *Cohomology of groups*. New York and London: Academic Press, 1969.

[4] Dummit, David S. *Abstract Algebra*. United States of America: John Wiley and Sons, Inc, 2004.

[5] Maclane, Saunders. *Homology*. Berlin: Springer-Verlag, 1963.

[6] López Madrigal, Angelina. *Sucesiones Espectrales y Homología de Invariantes* (Master Thesis), UNAM 2012.

[7] Morales Meléndez, Quitzeh. *Número de extensiones y el orden del multiplicador de Schur de los grupos metacíclicos* (Master thesis). Biblioteca Central UNAM (2006): 42pp. Advisor: Rolando Jiménez Benítez.