



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

CUANTIZACIÓN DE SISTEMAS DEPENDIENTES
DEL TIEMPO EN EL ESPACIO FASE EXTENDIDO

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

DANIEL GUTIÉRREZ RUIZ

DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DRA. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD
INSTITUTO DE FÍSICA

DRA. GABRIELA MURGUÍA ROMERO
FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., ENERO DE 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice

Agradecimientos	II
Resumen	III
1. Introducción	1
2. Transformaciones canónicas, sistemas con constricciones e integral de trayectoria	3
2.1. Transformaciones canónicas	3
2.2. Sistemas con constricciones	7
2.3. Esquemas de Schrödinger y Heisenberg	10
2.4. Integral de trayectoria	13
3. Adiabaticidad en mecánica clásica	16
3.1. Teoría de Hamilton-Jacobi	16
3.2. Variables ángulo-acción	18
3.3. Cambio adiabático	21
3.4. Aro de Hannay	23
3.5. Oscilador armónico generalizado	24
4. Adiabaticidad en mecánica cuántica	27
4.1. Evolución adiabática en mecánica cuántica	27
4.2. Fase de Berry	29
4.3. Fase no abeliana de Wilczek-Zee	39
5. Análisis clásico del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo	42
5.1. Búsqueda de una transformación canónica que simplifique el problema	42
5.2. Formulación en el espacio fase extendido	46
5.3. Un ejemplo	50
6. Análisis cuántico del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo	57
6.1. Kernel del oscilador armónico con frecuencia variable	57
6.2. Análisis del efecto de la transformación canónica en la integral de trayectoria	58
6.3. Formulación en el espacio fase extendido	61
6.4. Análisis de Lewis	64
6.5. Fase de Berry para el oscilador armónico generalizado	67
7. Conclusiones y perspectivas	74
Referencias	75

Agradecimientos

Agradezco a:

- Dios, por colmarme de gracias y permitirme concluir este trabajo.
- Mi familia, en especial a mi mamá, por su apoyo incondicional.
- Mi asesor, quien siempre fue comprensivo y paciente y me guió a través de las situaciones complicadas que se presentaron.
- Dr. Alejandro García Chung, quien me apoyó mucho y respondió varias dudas que surgieron a lo largo del proyecto.
- Mis amigos, por los buenos momentos que pasamos.
- El apoyo otorgado por el proyecto IN103716 del Programa de Apoyo de Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT), el cual me permitió finalizar la tesis.

Resumen

En este trabajo se analiza el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo desde el punto de vista clásico y cuántico. Se introducen primero los fundamentos teóricos que permiten su estudio, para después desarrollar la noción de adiabaticidad en mecánica clásica y en mecánica cuántica. El problema original se puede mapear al oscilador armónico con frecuencia constante, sin embargo, la transformación efectuada no es canónica ya que involucra también un reescalamiento temporal; es aquí donde surge la necesidad de estudiarla desde el punto de vista del espacio fase extendido, en donde el tiempo se toma como una coordenada más. Por otra parte, el análisis cuántico se hace por medio de la integral de trayectoria, y después, se añaden las constricciones para hacer el tratamiento en el espacio fase extendido; esto provee un factor que acompaña al kernel del oscilador armónico con frecuencia constante. Finalmente, se estudia un método que permite obtener correcciones a orden arbitrario a la fase de Berry; ahí, se demuestra que el oscilador armónico generalizado se puede mapear a un oscilador con frecuencia dependiente del tiempo, y a partir de este, se extrae la fase de Lewis, que a la postre, servirá para calcular la fase de Berry.

Capítulo 1

Introducción

La mecánica cuántica es una rama de la física cuyas bases fueron sentadas en la primera mitad del siglo XX, no obstante, debido al alcance y al poder de esta, existían multitud de fenómenos esperando ser explicados en la segunda mitad del siglo XX, y aún continúa vigente el estudio de efectos cuánticos en diferentes sistemas. La formulación inicial de la mecánica cuántica, ya sea la de Schrödinger o Heisenberg, dejaba entrever algunos aspectos que no se entendían del todo como el principio de superposición; sin embargo, cuando Feynman introduce la integral de trayectoria, hace uso explícito de este principio y arroja luz para entenderlo un poco mejor. Esta herramienta sería utilizada a la postre para construir una versión de la teoría cuántica de campos, la cual es la teoría física moderna para entender de qué está hecho el universo.

El problema fundamental a tratar en este trabajo es el análisis clásico y cuántico del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo. Este sistema aparece en varias ramas de la física [1], por ejemplo, en el estudio de la propagación de campos de radiación en regiones cubiertas por materia con “constante” dieléctrica dependiente del tiempo [2], el estudio del comportamiento de iones en trampas de Paul [3, 4], en teoría cuántica de campos en espacios curvos [5, 6] y en el estudio de un campo escalar real en un universo de Friedmann espacialmente plano [7], solo por mencionar algunas.

El análisis que haremos abarca encontrar la solución a la ecuación de movimiento, obtener el kernel, la fase de Berry y el ángulo de Hannay. Uno de los primeros trabajos para entender el oscilador con frecuencia variable desde el punto de vista cuántico es el de Lewis [8]; ahí se demuestra que es de gran utilidad encontrar un invariante, esto es, una función $I(q, p, t)$ que satisfaga $\dot{I} = 0$. El problema de encontrar invariantes para sistemas dependientes del tiempo se estudia en [9, 10, 11]. La simetría de Noether subyacente asociada al invariante es estudiada por Lutzky [12] y por Struckmeier [13]. Por otra parte, los trabajos de Hannay [14] y Berry [15] son claves para entender la noción de adiabaticidad en mecánica clásica y mecánica cuántica, respectivamente. Del tratamiento de Lewis [8] se puede entender la aparición de la fase de Berry como resultado de una expansión en un parámetro adiabático [16].

Para transformar el problema del oscilador armónico con frecuencia variable al oscilador con frecuencia constante se emplea una transformación canónica seguida de una transformación temporal [17, 18], las cuales pueden ser entendidas a la luz del espacio fase extendido [19, 20, 21]. Es en el espacio fase extendido, es decir, el espacio que surge de tomar al tiempo t como una coordenada más [22] y a su respectivo momento canónico conjugado p_t , en donde se aprecia que la transformación completa de coordenadas es una transformación canónica. Así mismo, esta formulación permite deducir que como consecuencia del teorema de Liouville [23], el volumen del espacio fase extendido $dqdt dp_t$ se conserva respecto al tiempo τ que se introduce como

parámetro en la acción.

Al estudiar el sistema desde el punto de vista cuántico, se puede definir la transformación canónica en términos de operadores [24], mientras que el kernel puede ser obtenido mediante la integral de trayectoria [25]. Este resultado se encuentra también transformando el problema al del oscilador con frecuencia constante al escribir la integral de trayectoria en el espacio fase [18].

El capítulo 2 comienza con el tratamiento de las transformaciones canónicas [26, 27]. Posteriormente, se introduce el tratamiento de Dirac para sistemas con constricciones [28, 29, 30]. Finalmente, se aborda la visión de la mecánica cuántica introducida por Feynman: la integral de trayectoria [31]; se establecen sus principios y se llega a la fórmula para el cálculo del propagador dado un Hamiltoniano.

En el capítulo 3 se introducirá la noción de adiabaticidad en mecánica clásica siguiendo la exposición de Calkin [32]. Primero, se repasará brevemente la teoría de Hamilton-Jacobi y las variables ángulo-acción, siendo estas las variables naturales para describir fenómenos adiabáticos. Se verá que el cambio en la variable ángulo en una excursión cíclica consta de dos contribuciones: una dinámica y una geométrica conocida como ángulo de Hannay [14]. Después se estudiarán dos ejemplos para ilustrar la aparición del ángulo de Hannay.

En el siguiente capítulo se estudiará la adiabaticidad en el ámbito de la mecánica cuántica. Ahí, se explorarán las consecuencias de estudiar un sistema bajo esta condición, en concreto, se verá cómo la función de onda adquiere dos fases: una fase dinámica y una fase de naturaleza completamente geométrica conocida como fase de Berry [15]. Se estudiarán dos ejemplos para observar la aplicación del formalismo desarrollado. Posteriormente, se analizará brevemente la conexión entre geometría y la fase de Berry, en particular, se mostrará que se puede introducir un tensor métrico para medir distancias en el espacio de parámetros. Finalmente se abordará el estudio de Hamiltonianos con espectro degenerado que conducen a la fase no abeliana de Wilczek-Zee, todo esto siguiendo la exposición de Chruściński [33].

En el capítulo 5 se hace el análisis clásico del oscilador armónico con frecuencia variable. Se comienza buscando una transformación canónica que simplifique el problema en base al invariante de Lewis. Posteriormente, se realiza el análisis en el espacio fase extendido y se concluye con la solución a la ecuación de movimiento para un sistema con frecuencia exponencial donde se ilustra el mapeo entre el oscilador con frecuencia variable y el oscilador con frecuencia constante.

En el sexto capítulo se deduce el kernel para el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo. Enseguida, se analiza el efecto de la transformación canónica en la integral de trayectoria, lo cual permitirá relacionar el kernel para frecuencia variable y el kernel para frecuencia constante. Después se estudia la formulación de la integral de trayectoria en el espacio fase extendido, y por último, seguimos el trabajo de Lewis para encontrar la fase del sistema, la cual, a través de una expansión perturbativa, proporcionará la fase de Berry y correcciones a esta.

Finalmente, se presentan las conclusiones y perspectivas del trabajo.

Capítulo 2

Transformaciones canónicas, sistemas con constricciones e integral de trayectoria

2.1. Transformaciones canónicas

Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a un Lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$ son

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (2.1)$$

Definimos la derivada Euleriana respecto a las coordenadas de la siguiente manera:

$$\hat{E}_q = \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.2)$$

De aquí se sigue que las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden escribirse simplemente como

$$\hat{E}_q L = 0. \quad (2.3)$$

También podemos definir la derivada Euleriana respecto a los momentos:

$$\hat{E}_p = \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{p}_i}, \quad (2.4)$$

con

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.5)$$

Sabemos que el Lagrangiano se escribe como¹

$$L = \dot{q}_i p_i - H(q, p, t). \quad (2.6)$$

Entonces, pedir que las derivadas Eulerianas respecto a las coordenadas y a los momentos se anulen,

¹Se usará la convención de suma de Einstein, la cual indica que un índice repetido está sumado.

equivale a pedir que se satisfagan las ecuaciones canónicas de Hamilton, ya que

$$\hat{E}_q L = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \dot{p}_i = 0, \quad (2.7)$$

$$\hat{E}_p L = \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p} = 0. \quad (2.8)$$

Esta es la llamada forma Lagrangiana de las ecuaciones de Hamilton. Ahora bien, sabemos que si aplicamos la derivada Euleriana a la derivada total de una función $F(q, p, t)$, esta se anula. Esto es,

$$\hat{E}_q \frac{dF}{dt} = 0, \quad \hat{E}_p \frac{dF}{dt} = 0. \quad (2.9)$$

De aquí podemos deducir que dos Lagrangianos que difieran por una derivada total resultan en las mismas ecuaciones de movimiento. Una transformación canónica es aquella transformación que deja invariante la forma Lagrangiana de las ecuaciones de Hamilton, y por tanto, los Lagrangianos correspondientes a las coordenadas antiguas y a las nuevas difieren por la derivada total de una función $F(q, p, t)$.

Las transformaciones canónicas son la generalización al espacio fase de las transformaciones puntuales $Q_i = Q_i(q, t)$, por este motivo, una transformación canónica provoca cambios no solo en la posición, sino también en el momento, esto es, define nuevas variables Q y P como

$$Q_i = Q(q, p, t), \quad (2.10)$$

$$P_i = P(q, p, t). \quad (2.11)$$

La idea detrás de una transformación canónica, como ya vimos, es que la forma Lagrangiana de las ecuaciones de movimiento de Hamilton permanezca invariante, es decir, que debe existir un nuevo Hamiltoniano K tal que

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (2.12)$$

Los Lagrangianos correspondientes difieren por una derivada total. Por tanto, se debe cumplir

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}, \quad (2.13)$$

donde F , conocida como función generadora, es una función de las coordenadas antiguas, las coordenadas nuevas y el tiempo. Si la función generadora es del tipo 2, esto es, $F_2 = F_2(q, P, t)$, podemos escribir $F = F_2 - Q_i P_i$, con lo cual (2.13) resulta

$$p_i \dot{q}_i - H = -Q_i \dot{P}_i - K + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Identificando los coeficientes tenemos las ecuaciones de transformación

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (2.15)$$

Existe otra manera de abordar el tema de las transformaciones canónicas: el enfoque simpléctico; para aplicarlo hay que poner todo en términos matriciales. Con tal motivo, podemos definir un vector columna $\boldsymbol{\eta}$

como

$$\eta_i = q_i, \quad \eta_{i+n} = p_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.16)$$

De la misma forma, definimos la derivada de H como un vector columna $\partial H/\partial \boldsymbol{\eta}$ con componentes dadas por

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)_{i+n} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (2.17)$$

Además, definimos una matriz \mathbf{J} de dimensión $2n \times 2n$:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

la cual tiene las siguientes propiedades:

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \mathbf{J} \mathbf{J}^T = \mathbb{I}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{J}^2 = -\mathbb{I}, \quad (2.21)$$

$$\det \mathbf{J} = 1. \quad (2.22)$$

Usando lo anterior, las ecuaciones de Hamilton toman la forma matricial

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}}. \quad (2.23)$$

Ahora efectuamos una transformación de coordenadas en el espacio fase, esto es, definimos nuevas coordenadas $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta}, t)$ con

$$\zeta_i = Q_i, \quad \zeta_{i+n} = P_i. \quad (2.24)$$

Entonces, se puede mostrar [26] que la transformación es canónica si

$$\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{M}^T = \mathbf{J}, \quad (2.25)$$

o bien,

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J}, \quad (2.26)$$

donde \mathbf{M} es la matriz Jacobiana asociada a la transformación con componentes

$$M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j}. \quad (2.27)$$

La matriz \mathbf{M} recibe el nombre de matriz simpléctica y la ecuación (2.25) se llama condición simpléctica.

Existe una manera más sencilla de averiguar si una transformación es canónica. Para este efecto, definimos el paréntesis de Poisson entre dos funciones f y g del espacio fase como

$$\{f, g\}_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}. \quad (2.28)$$

Esta expresión se escribe fácilmente en forma simpléctica:

$$\{f, g\}_{q,p} = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)^T \mathbf{J} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\eta}}. \quad (2.29)$$

Si se toman las coordenadas del espacio fase como las funciones f y g , se obtienen los llamados paréntesis de Poisson fundamentales:

$$\{q_i, q_j\}_{q,p} = 0, \quad \{p_i, p_j\}_{q,p} = 0, \quad \{q_i, p_j\}_{q,p} = \delta_{ij}. \quad (2.30)$$

En forma simpléctica se tiene que

$$\{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\}_{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}. \quad (2.31)$$

De aquí es fácil demostrar que

$$\{\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}\}_{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}, \quad (2.32)$$

o bien, de manera equivalente,

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0, \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}. \quad (2.33)$$

Con esto se puede ver que los paréntesis de Poisson fundamentales toman el mismo valor sin importar las variables respecto a las que se calculan. De igual forma, se demuestra que los paréntesis de Poisson para cualesquiera funciones f y g son invariantes bajo transformaciones canónicas, por lo cual se suele omitir el subíndice.

Los paréntesis de Poisson tienen las siguientes propiedades (α y β son constantes):

$$\{f, f\} = 0, \quad \{f, g\} = -\{g, f\}, \quad (2.34)$$

$$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha \{f, h\} + \beta \{g, h\}, \quad (2.35)$$

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g, \quad (2.36)$$

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (2.37)$$

Esta última relación se conoce como identidad de Jacobi.

El cambio en el tiempo de una función $f = f(q, p, t)$ es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.38)$$

Si usamos las ecuaciones de Hamilton para sustituir las velocidades y los momentos encontramos que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (2.39)$$

o bien, en notación simpléctica,

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)^T \mathbf{J} \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.40)$$

Podemos tomar como f a las posiciones o a los momentos, obteniendo así las ecuaciones de Hamilton,

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad (2.41)$$

o, compactándolas de forma simpléctica,

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \{\boldsymbol{\eta}, H\}. \quad (2.42)$$

Una propiedad importante a considerar es el cambio de un elemento de volumen del espacio fase bajo una transformación canónica. El elemento de volumen del espacio fase en las coordenadas antiguas es

$$d\eta = dq_1 \cdots dq_n dp_1 \cdots dp_n, \quad (2.43)$$

y en las coordenadas nuevas es

$$d\zeta = dQ_1 \cdots dQ_n dP_1 \cdots dP_n. \quad (2.44)$$

Sabemos que se cumple

$$d\zeta = |\det \mathbf{M}| d\eta, \quad (2.45)$$

lo cual, usando la condición simpléctica (2.25), conduce a $\det \mathbf{M} = \pm 1$, por lo que

$$d\zeta = d\eta, \quad (2.46)$$

esto es, el volumen del espacio fase se conserva bajo una transformación canónica.

El análisis de las transformaciones canónicas en mecánica cuántica se basa en mantener la estructura del conmutador fundamental, es decir, que en las nuevas variables (Q, P) se tenga que

$$[Q_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (2.47)$$

siendo los demás conmutadores cero [34]. Para encontrar el operador en el espacio de Hilbert que corresponde a una transformación canónica clásica se refiere al lector al artículo de Anderson [24], en donde se analizan varias sutilezas.

2.2. Sistemas con constricciones

El tratamiento Hamiltoniano para un sistema dado es de suma importancia al cuantizar una teoría; por este motivo, Dirac [28] desarrolló un método que permite llevar a cabo de manera consistente la cuantización incluso cuando existen constricciones presentes. En otras palabras, en una teoría sin constricciones se promueven los paréntesis de Poisson a conmutadores (salvo un factor de $i\hbar$), pero cuando hay constricciones, estas se deben incorporar, lo cual resulta en los paréntesis de Dirac. Nosotros haremos uso del método de Dirac, ya que el introducir al tiempo como una coordenada más conlleva el manejo de una restricción; esto es necesario si queremos realizar el análisis de sistemas clásicos en el espacio fase extendido.

Supongamos un sistema con Lagrangiano L . Sabemos que la acción está dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (2.48)$$

Las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Euler-Lagrange) resultan de pedir que la variación de la acción sea nula en la trayectoria solución. Además se utilizan las condiciones de frontera $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, donde δq representa la variación en la coordenada q . Estas ecuaciones son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.49)$$

o bien, desarrollando la derivada total,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2.50)$$

De aquí vemos que si la matriz Hessiana \mathcal{H} , definida por

$$\mathcal{H} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right], \quad (2.51)$$

puede ser invertida, entonces las aceleraciones estarán dadas de manera única en términos de las posiciones y velocidades.

Para pasar a la formulación Hamiltoniana necesitamos definir los momentos conjugados p_i :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.52)$$

Vemos entonces que si $\det \mathcal{H} = 0$, los momentos no son todos independientes, por lo que habrá relaciones del tipo

$$\phi_j(q, p, t) \approx 0, \quad j = 1, \dots, M. \quad (2.53)$$

Estas relaciones se denominan constricciones primarias y son débilmente cero, lo cual significa que se satisfacen sobre la hipersuperficie de restricción.

Ahora introducimos el Hamiltoniano canónico

$$H = \dot{q}_i p_i - L \quad (2.54)$$

y calculamos su variación:

$$\delta H = \dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (2.55)$$

donde se ha usado la definición de momento. Este Hamiltoniano es función de las coordenadas y los momentos. Sin embargo, H no está determinado únicamente, ya que los δp_i están sujetos a satisfacer las constricciones primarias. Entonces, el Hamiltoniano canónico está definido en la hipersuperficie del espacio fase en donde las constricciones son débilmente cero. Por tanto, si queremos extender H a todo el espacio fase, introducimos

el Hamiltoniano total H_T :

$$H_T = H + \lambda_i(q, p, t)\phi_i, \quad (2.56)$$

con la acción correspondiente

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H_T) dt. \quad (2.57)$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas son

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}, \quad (2.58)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial q_i}, \quad (2.59)$$

$$\phi(q, p) = 0. \quad (2.60)$$

Estas ecuaciones de movimiento tienen la forma

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\} = \{F, H\} + \lambda_i \{F, \phi_i\}, \quad (2.61)$$

donde $F = F(q, p, t)$.

Una condición de consistencia que pedimos es que las constricciones primarias se preserven en el tiempo, por lo que se debe cumplir $\dot{\phi}_i \approx 0$, esto es,

$$\dot{\phi}_i = \{\phi_i, H\} + \lambda_j \{\phi_i, \phi_j\} \approx 0. \quad (2.62)$$

Si esta ecuación se puede reducir a una relación solo entre coordenadas y momentos, y es independiente de las constricciones primarias, se le nombra *constricción secundaria*. Si hay una constricción secundaria $X(q, p, t) \approx 0$ debemos imponer una nueva condición de consistencia:

$$\dot{X} = \{X, H\} + \lambda_j \{X, \phi_j\} \approx 0. \quad (2.63)$$

De nuevo, tenemos que checar si esta relación provee más constricciones secundarias. Una vez terminado el proceso, tendremos K constricciones secundarias

$$\phi_k \approx 0, \quad k = M + 1, \dots, M + K. \quad (2.64)$$

Existe una clasificación diferente de constricciones, estas son las llamadas *constricciones de primera y segunda clase*. Una función $F(q, p, t)$ es de primera clase si

$$\{F, \phi_j\} \approx 0. \quad (2.65)$$

Por otro lado, $F(q, p, t)$ es de segunda clase si no se cumple lo anterior. Hay que notar que el paréntesis de Poisson de dos funciones de primera clase es también una función de primera clase.

Dirac conjeturó que todas las constricciones de primera clase generan transformaciones de norma, esto es,

si tenemos una función T del espacio fase y un conjunto de parámetros $\{\epsilon_i\}$ de la transformación, entonces

$$\delta_\epsilon T = \epsilon_i \{T, \phi_i\}, \quad (2.66)$$

y, por tanto, esta transformación no altera el estado físico al tiempo t .

Finalmente, supongamos que tenemos constricciones de segunda clase ϕ_i . Definimos una matriz \mathbf{M} con componentes

$$M_{ij} = \{\phi_i, \phi_j\}. \quad (2.67)$$

Entonces, si f y g son dos funciones del espacio fase, se define el paréntesis de Dirac $\{f, g\}^*$ como

$$\{f, g\}^* = \{f, g\} - \{f, \phi_i\} M_{ij}^{-1} \{\phi_j, g\}. \quad (2.68)$$

Esta operación satisface las propiedades del paréntesis de Poisson y es, precisamente, el que se promueve a conmutador al cuantizar la teoría.

2.3. Esquemas de Schrödinger y Heisenberg

El problema central de la mecánica cuántica es determinar la evolución temporal del sistema en cuestión, esto es, dado un estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$ al tiempo t_0 se quiere determinar el estado $|\psi(t)\rangle$ al tiempo t . El operador de evolución $\mathbf{U}(t, t_0)$ ² es precisamente el que relaciona estos estados, de manera que

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (2.69)$$

Este operador satisface la ecuación

$$i\hbar \frac{d\mathbf{U}(t, t_0)}{dt} = \mathbf{H}(t) \mathbf{U}(t, t_0) \quad (2.70)$$

con la condición inicial $\mathbf{U}(t_0, t_0) = \mathbb{I}$ y donde $\mathbf{H}(t)$ es el Hamiltoniano del sistema e \mathbb{I} es el operador identidad. Esto es consecuencia de que el estado $|\psi(t)\rangle$ satisfaga la ecuación de Schrödinger. El operador de evolución es lineal y unitario, y la solución a la ecuación de Schrödinger para $\mathbf{U}(t, t_0)$ es [35]

$$\mathbf{U}(t, t_0) = \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \mathbf{H}(t') \mathbf{U}(t', t_0). \quad (2.71)$$

Si estudiamos la ecuación (2.69) en el espacio de posiciones, resulta que

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi(t) \rangle = \langle q | \mathbf{U}(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle, \quad (2.72)$$

donde hemos supuesto un sistema unidimensional. Ahora, insertemos la identidad escrita en términos de los

²En este capítulo los operadores serán escritos en negritas.

autoestados $|q_0\rangle$, esto es,

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 |q_0\rangle\langle q_0|. \quad (2.73)$$

Obtenemos

$$\psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \langle q | \mathbf{U}(t, t_0) | q_0 \rangle \psi(q_0, t_0). \quad (2.74)$$

Al elemento de matriz del operador de evolución $\langle q | \mathbf{U}(t, t_0) | q_0 \rangle$ se le llama kernel y se denota como $K(q, t; q_0, t_0)$. Podemos notar que es una cantidad de sumo interés, puesto que el conocerla nos permite “propagar” la información desde el punto espaciotemporal (q_0, t_0) hasta el punto (q, t) . De hecho, el kernel resulta ser la amplitud de probabilidad de que una partícula localizada inicialmente en q_0 al tiempo t_0 se encuentre en q al tiempo t . Se puede decir que el problema de determinar el kernel es, entonces, el problema central de la mecánica cuántica, ya que dada una función de onda inicial $\psi(q_0, t_0)$ podemos determinar mediante (2.74) la función de onda $\psi(q, t)$ para cualquier posición y tiempo.

El kernel satisface también la ecuación de Schrödinger. Para ver esto, definimos el operador de Schrödinger, \mathbf{D}_S , como

$$\mathbf{D}_S = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{H}(q, p, t), \quad (2.75)$$

y lo hacemos actuar sobre la función de onda $\psi(q, t)$. Usando (2.74) obtenemos

$$\mathbf{D}_S \psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 [\mathbf{D}_S K(q, t; q_0, t_0)] \psi(q_0, t_0). \quad (2.76)$$

Como $\mathbf{D}_S \psi(q, t) = 0$, se sigue que

$$\mathbf{D}_S K(q, t; q_0, t_0) = 0; \quad (2.77)$$

así mismo, notemos que debido a la condición inicial se debe cumplir $K(q, t_0; q_0, t_0) = \delta(q - q_0)$.

Podemos expresar el kernel de otra manera haciendo uso del esquema de Heisenberg. En el esquema usual (de Schrödinger) los operadores son independientes del tiempo y los estados son los que evolucionan, pero en el esquema de Heisenberg los estados están fijos y los operadores evolucionan en el tiempo [36]. El estado de Heisenberg $|\psi_H\rangle$ se define como el estado $|\psi(t_0)\rangle$. De esta manera, de acuerdo a (2.69) tenemos que

$$|\psi_H\rangle = |\psi(t_0)\rangle = \mathbf{U}^\dagger(t, t_0) |\psi(t)\rangle. \quad (2.78)$$

Analicemos ahora el valor esperado de un operador \mathbf{A} , esto es,

$$\langle \mathbf{A}(t) \rangle = \langle \psi(t) | \mathbf{A} | \psi(t) \rangle = \langle \psi_H | \mathbf{U}^\dagger(t, t_0) \mathbf{A} \mathbf{U}(t, t_0) | \psi_H \rangle, \quad (2.79)$$

así que si queremos escribir el valor esperado en el esquema de Heisenberg, debemos pedir que el operador \mathbf{A}_H esté dado por

$$\mathbf{A}_H = \mathbf{U}^\dagger(t, t_0) \mathbf{A} \mathbf{U}(t, t_0), \quad (2.80)$$

de manera que

$$\langle \mathbf{A}(t) \rangle = \langle \psi_H | \mathbf{A}_H | \psi_H \rangle. \quad (2.81)$$

La ecuación de eigenvalores para el operador \mathbf{q} es

$$\mathbf{q}|q\rangle = q|q\rangle. \quad (2.82)$$

Multiplicamos ahora la ecuación por $\mathbf{U}^\dagger(t, t_0)$ e insertamos $\mathbb{I} = \mathbf{U}(t, t_0)\mathbf{U}^\dagger(t, t_0)$ entre \mathbf{q} y el estado $|q\rangle$, obteniendo así

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^\dagger(t, t_0)\mathbf{q}\mathbf{U}(t, t_0) [\mathbf{U}^\dagger(t, t_0)|q\rangle] &= q [\mathbf{U}^\dagger(t, t_0)|q\rangle], \\ \mathbf{q}_H|q, t\rangle &= q|q, t\rangle, \end{aligned} \quad (2.83)$$

donde hemos definido $|q, t\rangle = \mathbf{U}^\dagger(t, t_0)|q\rangle$. Podemos ver, entonces, que la ecuación de eigenvalores en el esquema de Heisenberg tiene la misma estructura, siendo el autovalor q el mismo que en el esquema de Schrödinger.

Si el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, la solución a la ecuación (2.70) con condición inicial $\mathbf{U}(t_0, t_0) = \mathbb{I}$ es

$$\mathbf{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}(t-t_0)}. \quad (2.84)$$

Entonces, un cálculo muy simple muestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq |q, t\rangle \langle q, t| = \mathbb{I} \quad (2.85)$$

y

$$\langle q', t|q, t\rangle = \delta(q' - q). \quad (2.86)$$

De esta manera, el kernel $K(q, t; q_0, t_0)$ puede ser expresado en el esquema de Heisenberg como

$$K(q, t; q_0, t_0) = \left(\langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}t} \right) \left(e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}t_0}|q_0\rangle \right) = \langle q, t|q_0, t_0\rangle. \quad (2.87)$$

A continuación, para ilustrar el cálculo de un kernel, abordaremos el problema más simple: la partícula libre. El Hamiltoniano correspondiente es

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (2.88)$$

Entonces, el kernel para ir de q_a en t_a a q_b en t_b es

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \langle q_b|e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\mathbf{p}^2}{2m}(t_b-t_a)}|q_a\rangle, \quad (2.89)$$

Ahora, podemos insertar la identidad escrita en término de eigenestados del momento, de manera que el operador $\exp(i\mathbf{p}^2/2m\hbar)$ aplicado al autoestado $|p\rangle$ arroje el eigenvalor $\exp(ip^2/2m\hbar)$.

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle q_b|e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\mathbf{p}^2}{2m}(t_b-t_a)}|p\rangle \langle p|q_a\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t_b-t_a)} \langle q_b|p\rangle \langle q_a|p\rangle^*. \quad (2.90)$$

Sabemos que el eigenestado del momento escrito en la base de posiciones es

$$\langle q|p\rangle = \frac{e^{\frac{i}{\hbar}qp}}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \quad (2.91)$$

por lo que

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m}(t_b-t_a) + \frac{i}{\hbar} p(q_b-q_a)}. \quad (2.92)$$

Esta integral, al ser cuadrática en p , se puede realizar de manera sencilla completando el cuadrado, obteniéndose así

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{m(q_b - q_a)^2}{2(t_b - t_a)} \right]. \quad (2.93)$$

2.4. Integral de trayectoria

Como ya habíamos establecido, el problema central en mecánica cuántica es conocer el kernel del sistema en cuestión. Richard Feynman [31] desarrolló una visión de la mecánica cuántica basada en el principio de superposición que establece que para determinar el kernel de una partícula es necesario sumar sobre todas las posibles trayectorias que pueda seguir la partícula, ya que cada una de ellas contribuye a la amplitud de probabilidad de propagación de un punto a otro.

Podemos construir cuantitativamente la versión de Feynman de la mecánica cuántica de manera muy sencilla. Supongamos que la partícula se encuentra al tiempo inicial t_a en q_a y queremos saber la amplitud de probabilidad (kernel) de que la partícula se propague al punto q_b en el tiempo t_b con $t_b > t_a$. Sabemos que

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle. \quad (2.94)$$

Si ahora insertamos la identidad

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 |q_1, t_1\rangle \langle q_1, t_1|, \quad (2.95)$$

donde $t_a < t_1 < t_b$, obtenemos

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \langle q_b, t_b | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_a, t_a \rangle. \quad (2.96)$$

Hagamos más inserciones, para ello definamos $t_0 = t_a$, $t_N = t_b$, $\epsilon = (t_b - t_a)/N$ y $t_j = t_a + j\epsilon$ con $j = 0, \dots, N$ y tal que $t_a < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_b$. Entonces,

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1} \langle q_b, t_b | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_a, t_a \rangle. \quad (2.97)$$

De esta manera vemos que, según (2.97), para ir del punto q_a en t_a al punto q_b al tiempo t_b , debemos sumar sobre todas las trayectorias intermedias que conecten estos dos puntos [37].

Cada elemento de matriz puede ser escrito como

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{H} \epsilon} | q_j \rangle, \quad (2.98)$$

El Hamiltoniano depende de \mathbf{q} y de \mathbf{p} , por lo que podemos insertar una identidad escrita en términos de

autoestados del momento:

$$\langle q_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{H} \epsilon} | q_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{H} \epsilon} | q_j \rangle. \quad (2.99)$$

Si tomamos el límite $N \rightarrow \infty$, esto es, $\epsilon \rightarrow 0$, entonces

$$\langle p_j | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{H} \epsilon} | q_j \rangle = \langle p_j | 1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon \mathbf{H} | q_j \rangle. \quad (2.100)$$

Para evaluar este elemento de matriz hay que tomar en cuenta que el Hamiltoniano puede depender de productos de \mathbf{q} y \mathbf{p} , por lo cual no es evidente de qué forma hay que ordenar estos productos. La elección más frecuente es el ordenamiento de Weyl, el cual suma cada posibilidad de orden y la divide entre el número de permutaciones posibles. Por ejemplo, si la función clásica a considerar es $V(q, p) = q^2 p$, el operador cuántico correspondiente de Weyl sería

$$\mathbf{V}_W(q, p) = \frac{1}{3} (q^2 p + q p q + p q^2). \quad (2.101)$$

Puede mostrarse [36] que, siguiendo el ordenamiento de Weyl,

$$\langle p_j | \mathbf{H}(p, q) | q_j \rangle = \langle p_j | q_j \rangle H \left(p_j, \frac{1}{2} (q_{j+1} + q_j) \right), \quad (2.102)$$

donde H es la función Hamiltoniana clásica. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{H} \epsilon} | q_j \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | 1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon H \left(p_j, \frac{1}{2} (q_{j+1} + q_j) \right) | q_j \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \epsilon H \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j) \right]. \end{aligned} \quad (2.103)$$

De esta manera, regresando a (2.97), encontramos que

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \left[p_j (q_{j+1} - q_j) - \epsilon H \left(p_j, \frac{q_{j+1} + q_j}{2} \right) \right] \right\}. \quad (2.104)$$

Para simplificar la notación, se suele definir la medida $\mathcal{D}q\mathcal{D}p$ como

$$\mathcal{D}q\mathcal{D}p = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar}, \quad (2.105)$$

así como reemplazar $q_{j+1} - q_j$ con $\epsilon \dot{q}(t_j)$, lo cual convierte a la suma que está en el argumento de la exponencial en una integral. Por tanto,

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \int_{q(t_a)=q_a}^{q(t_b)=q_b} \mathcal{D}q\mathcal{D}p \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt (p \dot{q} - H) \right]. \quad (2.106)$$

Si el Hamiltoniano es de la forma

$$\mathbf{H}(p, q) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{V}(q, t), \quad (2.107)$$

se puede realizar la integral sobre los momentos al ser Gaussiana. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_j \exp \left[\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(p_j \dot{q}_j - \frac{p_j^2}{2m} \right) \right] = \sqrt{\frac{2m\pi\hbar}{i\epsilon}} \exp \left(\frac{i\epsilon}{\hbar} \frac{m\dot{q}_j^2}{2} \right), \quad (2.108)$$

con lo cual,

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{N/2} \int_{q(t_a)=q_a}^{q(t_b)=q_b} \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \epsilon \left(\frac{m\dot{q}_j^2}{2} - V \left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2}, t \right) \right) \right]. \quad (2.109)$$

En forma abreviada, esta integral, conocida como integral de trayectoria Lagrangiana, es

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \mathcal{N} \int_{q(t_a)=q_a}^{q(t_b)=q_b} \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt L(q, \dot{q}, t) \right], \quad (2.110)$$

donde \mathcal{N} es una constante de normalización.

Capítulo 3

Adiabaticidad en mecánica clásica

3.1. Teoría de Hamilton-Jacobi

Una de las formulaciones más importantes de la mecánica clásica desde el punto de vista teórico es la de Hamilton-Jacobi. Es en esta formulación donde se cierra un ciclo: se comienza estudiando las ecuaciones de Euler-Lagrange derivadas de la acción, después se pasa al formalismo Hamiltoniano mediante una transformación de Legendre, y finalmente, por medio de las transformaciones canónicas se llega a la ecuación de Hamilton-Jacobi, cuya solución es la acción misma. De esta manera, se logra resolver el problema de encontrar la evolución de un sistema.

Antes de abordar el tema de las variables ángulo-acción conviene recapitular algunos resultados de la teoría de Hamilton-Jacobi. Para una transformación canónica del tipo 2, esto es, cuando la función generadora (denotada aquí como S) depende de q , P y t , las derivadas de $S(q, P, t)$ son, como vimos en el capítulo anterior,

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Si pedimos que el Hamiltoniano transformado K sea cero, se debe cumplir entonces

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (3.2)$$

Esta es la ecuación de Hamilton-Jacobi cuya solución es la función generadora S , que a partir de ahora llamaremos función principal de Hamilton. Es una ecuación diferencial parcial (en general, no lineal) en $n+1$ variables: q_1, \dots, q_n, t . Ahora bien, las ecuaciones de Hamilton pueden ser trivialmente integradas, puesto que

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0. \quad (3.3)$$

Lo anterior implica que $Q = \text{constante}$ y $P = \text{constante}$.

Para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi se necesita una solución completa, esto es, una solución que dependa de n constantes de integración α_i , $i = 1, \dots, n$. De esta manera,

$$S = S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t). \quad (3.4)$$

Las constantes de integración α_i se toman como los nuevos momentos P_i , es decir, $P_i = \alpha_i$. La segunda ecuación de transformación es, entonces,

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \equiv \beta_i. \quad (3.5)$$

Estas ecuaciones se pueden invertir para obtener $q_i = q_i(\alpha, \beta; t)$. Una vez hecho esto, se sustituyen las q_i en la primera ecuación de transformación, con lo cual se obtiene $p_i = p_i(\alpha, \beta; t)$. De esta forma, se ha resuelto el problema de encontrar la evolución del sistema.

La función principal de Hamilton es en realidad la acción del sistema módulo una constante, tal como se puede ver tomando su derivada total:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial S}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L, \quad (3.6)$$

donde se usó la ecuación de Hamilton-Jacobi y el hecho que los momentos P_i son constantes.

En el caso en que el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, se propone que la solución a la ecuación (3.2) sea

$$S = W(q) + T(t). \quad (3.7)$$

Con esto, la ecuación se logra separar dando como resultado

$$S = W - Et, \quad (3.8)$$

donde W es la función característica de Hamilton que cumple con

$$H\left(q, \frac{dW}{dq}\right) = E, \quad (3.9)$$

siendo E la energía del sistema. Si ponemos la dependencia completa en las constantes de movimiento, entonces S es

$$S(q; \alpha; t) = W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) - E(\alpha_1, \dots, \alpha_n)t. \quad (3.10)$$

Un sistema se dice completamente separable si la función característica de Hamilton se puede escribir como

$$W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{a=1}^n W_a(q_a; \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (3.11)$$

Para ilustrar estos conceptos consideremos la partícula libre en tres dimensiones. El Hamiltoniano correspondiente es

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \quad (3.12)$$

Al no tener dependencia explícita del tiempo, la ecuación de Hamilton-Jacobi se reduce a

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] = E. \quad (3.13)$$

Ahora resulta natural intentar la separación de variables (3.11). Proponemos

$$W = W_1(x) + W_2(y) + W_3(z). \quad (3.14)$$

Con esto, encontramos que

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dW_1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dW_2}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dW_3}{dz} \right)^2 \right] = E. \quad (3.15)$$

De aquí es claro que cada término debe ser constante. Llamaremos a estas constantes α_x^2 , α_y^2 y α_z^2 , respectivamente. Entonces,

$$E = \frac{1}{2m} (\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2). \quad (3.16)$$

Las tres ecuaciones diferenciales ordinarias que resultan se integran trivialmente, con lo cual podemos escribir la función característica de Hamilton como

$$W = x\alpha_x + y\alpha_y + z\alpha_z, \quad (3.17)$$

y por tanto,

$$S = x\alpha_x + y\alpha_y + z\alpha_z - \frac{1}{2m} (\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2) t. \quad (3.18)$$

Podemos obtener ahora los momentos:

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \alpha_x, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y} = \alpha_y, \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = \alpha_z, \quad (3.19)$$

y las nuevas coordenadas:

$$\beta_x = \frac{\partial S}{\partial \alpha_x} = x - \frac{\alpha_x}{m} t, \quad \beta_y = \frac{\partial S}{\partial \alpha_y} = y - \frac{\alpha_y}{m} t, \quad \beta_z = \frac{\partial S}{\partial \alpha_z} = z - \frac{\alpha_z}{m} t. \quad (3.20)$$

Invirtiendo las ecuaciones resulta la solución al sistema en términos de las constantes α y β .

$$x = \beta_x + \frac{\alpha_x}{m} t, \quad y = \beta_y + \frac{\alpha_y}{m} t, \quad z = \beta_z + \frac{\alpha_z}{m} t. \quad (3.21)$$

De aquí es claro que podemos identificar a las constantes β_i con las posiciones iniciales y a α_i con los momentos iniciales.

3.2. Variables ángulo-acción

Ahora abordaremos la teoría de las variables ángulo-acción. Consideraremos sistemas para los que la ecuación de Hamilton-Jacobi es completamente separable al menos en un sistema de coordenadas. Supondremos también que el movimiento es acotado, por lo cual solo habrá dos movimientos posibles: oscilación y rotación.

Sean (q_1, \dots, q_n) coordenadas generalizadas para las cuales se cumple

$$W(q; \alpha) = \sum_{a=1}^n W_a(q_a; \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (3.22)$$

El momento p_a conjugado a q_a está dado por

$$p_a = \frac{\partial S}{\partial q_a} = \frac{\partial W_a}{\partial q_a}. \quad (3.23)$$

Esto muestra que para sistemas separables se puede considerar cada grado de libertad por separado. [32] En el plano fase correspondiente a cada q_a se lleva a cabo el movimiento de oscilación o rotación, lo cual resulta en que el sistema sea periódico en cada q_a .

Si integramos el momento respecto a su coordenada obtenemos

$$W_a = \int p_a(q_a; \alpha_1, \dots, \alpha_n) dq_a. \quad (3.24)$$

Al tomar q_a durante un ciclo manteniendo a las otras coordenadas fijas, el sistema regresa a su estado original, haciendo que W_a cambie por

$$\Delta W_a = \oint p_a dq_a. \quad (3.25)$$

Con esto queda claro que W_a es una función multivaluada del estado del sistema. Pictóricamente, la integral da como resultado el área en el plano fase encerrada por (o, para rotación, debajo de) la trayectoria. Definimos la variable acción para el a -ésimo grado de libertad, I_a , como

$$I_a = \frac{1}{2\pi} \Delta W_a = \frac{1}{2\pi} \oint p_a dq_a. \quad (3.26)$$

Por medio de esta definición podemos ver que las variables acción están dadas como función de las constantes de separación $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, esto es,

$$I_a = I_a(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (3.27)$$

Si asumimos que estas ecuaciones son invertibles, podemos tomar a las variables acción como los nuevos momentos. De esta manera, la función característica de Hamilton es

$$W(q; I) = \sum_{a=1}^n W_a(q_a; I_1, \dots, I_n). \quad (3.28)$$

Lo que falta ahora es encontrar la coordenada ϕ_a conjugada a I_a , la cual está dada por las ecuaciones de transformación

$$\phi_a = \frac{\partial W}{\partial I_a}. \quad (3.29)$$

Estas coordenadas se llaman variables ángulo. Vemos entonces que $W(q; I)$ es la función generadora de la transformación canónica de las variables (q, p) a las variables ángulo-acción (ϕ, I) .

Si el a -ésimo grado de libertad se toma durante un ciclo con los otros grados de libertad fijos, entonces el

cambio en la variable ángulo es 2π , tal como puede verse a continuación:

$$\Delta\phi_a = \Delta \frac{\partial W}{\partial I_a} = \frac{\partial \Delta W_a}{\partial I_a} = \frac{\partial(2\pi I_a)}{\partial I_a} = 2\pi. \quad (3.30)$$

El Hamiltoniano para los sistemas en consideración se escribe únicamente en términos de las constantes α . Al realizar la inversión de (3.27), podemos escribir estas constantes en términos de las variables acción I , con lo cual el Hamiltoniano dependerá solamente de estas últimas,

$$H = H(I_1, \dots, I_n). \quad (3.31)$$

Lo anterior quiere decir que todas las variables ángulo son cíclicas. Además, las variables acción son constantes, tal como se ve de (3.27). El Hamiltoniano K correspondiente a la transformación canónica con función generadora $W(q; I)$ es

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t}; \quad (3.32)$$

pero W no depende del tiempo, por lo que $K = H(I)$. Entonces, la evolución de las variables ángulo está dada por las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{d\phi_a}{dt} = \frac{\partial H(I)}{\partial I_a} = \omega_a(I), \quad (3.33)$$

donde las frecuencias angulares ω_a son constantes, puesto que dependen solamente de las variables acción. Estas ecuaciones se integran fácilmente, dando como resultado

$$\phi_a(t) = \phi_a(0) + \omega_a(I)t. \quad (3.34)$$

Las ecuaciones $I_a = cte.$ junto con la anterior definen un toro n -dimensional.

A continuación, como ejemplo de aplicación del formalismo de las variables ángulo-acción, estudiaremos el oscilador armónico unidimensional. El Hamiltoniano de este sistema es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 = E \equiv \alpha. \quad (3.35)$$

donde E es la constante de separación y corresponde a la energía del sistema. Utilizamos ahora la definición de la variable acción:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2q^2} dq. \quad (3.36)$$

Es conveniente hacer el cambio de variable

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin\theta. \quad (3.37)$$

Con esto, la integral (tomada a un ciclo) es

$$I = \frac{\alpha}{\pi\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{\alpha}{\omega}. \quad (3.38)$$

De aquí podemos escribir el Hamiltoniano como $H = I\omega$. La ecuación de movimiento para la variable

ángulo es

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega, \quad (3.39)$$

con lo cual llegamos a

$$\phi(t) = \phi(0) + \omega t. \quad (3.40)$$

3.3. Cambio adiabático

La noción de adiabaticidad yace en el borde de la estática y la dinámica: toma en cuenta efectos dinámicos pero en el límite de cambios infinitamente lentos. Uno puede aplicar esta noción cuando el sistema se divide en dos subsistemas con distintas escalas de tiempo [33]. Por ejemplo, si tenemos un péndulo oscilando y movemos lentamente el soporte, hay dos escalas de tiempo: el periodo del péndulo (tiempo interno) T_i , y el tiempo en que el soporte se mueve apreciablemente (tiempo externo) T_e . Un proceso adiabático es aquel en el que $T_e \gg T_i$ [38].

El Hamiltoniano de un sistema depende generalmente de parámetros $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots)$. Nos interesa averiguar qué sucede cuando estos parámetros cambian lentamente y de una forma no relacionada al movimiento del sistema.

A continuación, analizaremos únicamente sistemas con un grado de libertad. Supongamos que tenemos un Hamiltoniano $H_0(q, p, \mathbf{X})$ escrito en términos de variables canónicas q y p , y que depende de los parámetros \mathbf{X} . Inicialmente, estos parámetros son constantes; después se cambian adiabáticamente y se asume que las variables (q, p) satisfacen las ecuaciones de Hamilton con parámetros dependientes del tiempo. El que esto ocurra depende del sistema, los cambios y las variables canónicas usadas.

Queremos analizar cuáles son las ecuaciones que satisfacen las variables ángulo-acción (ϕ, I) . En cada instante t estas variables se obtienen a partir de (q, p) mediante una transformación canónica con función generadora $W(q, I, \mathbf{X}(t))$. Por tanto, las variables ángulo-acción satisfacen las ecuaciones canónicas de Hamilton con Hamiltoniano

$$H(\phi, I, \mathbf{X}(t)) = H_0(I, \mathbf{X}(t)) + \left(\frac{\partial W(q, I, \mathbf{X}(t))}{\partial \mathbf{X}} \right)_{q, I} \cdot \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}, \quad (3.41)$$

donde el subíndice indica las variables que se mantienen constantes al momento de derivar. Entonces,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \right)_{\phi, I} = \nabla W = \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)_{I, \mathbf{X}} \left(\frac{\partial q}{\partial \mathbf{X}} \right)_{\phi, I} + \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \right)_{q, I} = p \nabla q + \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \right)_{q, I}. \quad (3.42)$$

De aquí se sigue que las ecuaciones de Hamilton para las variables ángulo-acción son

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \frac{\partial}{\partial I} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \right)_{q, I} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right] = \omega(I, \mathbf{X}) + \frac{\partial}{\partial I} (-p \nabla q + \nabla W) \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} \quad (3.43)$$

y

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial}{\partial \phi} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \right)_{q, I} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right] = -\frac{\partial}{\partial \phi} (-p \nabla q + \nabla W) \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt}, \quad (3.44)$$

en donde $\omega(I, \mathbf{X}) = \partial H_0(I, \mathbf{X})/\partial I$ y el operador nabla denota la derivada respecto a los parámetros manteniendo las variables ángulo-acción fijas. Si ahora suponemos que los parámetros cambian lentamente, de

manera que $(1/|\mathbf{X}|)(d\mathbf{X}/dt) \ll \omega$, entonces el sistema pasa por muchos ciclos en el tiempo en que los parámetros cambian apreciablemente. Para calcular el cambio en las variables ángulo-acción en muchos ciclos podemos, como aproximación, reemplazar el lado derecho de las ecuaciones por su promedio en un ciclo [15]

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\phi. \quad (3.45)$$

Se puede demostrar que al promediar el lado derecho de la ecuación de la acción el resultado es cero, y por tanto, para cambios adiabáticos,

$$\frac{dI}{dt} \approx 0, \quad (3.46)$$

de donde se sigue que la variable acción es constante, es decir, es un invariante adiabático. En el caso del oscilador armónico con frecuencia variable $\omega(t)$, la variable acción es, según (3.38),

$$I = \frac{E(t)}{\omega(t)}, \quad (3.47)$$

y es un invariante, esto es, el área definida por la elipse

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)q^2}{2} = E(t), \quad (3.48)$$

permanece constante durante la evolución adiabática.

Para la ecuación de la variable ángulo, el promedio en un ciclo es

$$\frac{d\phi}{dt} \approx \omega(I, \mathbf{X}) + \frac{\partial \mathbf{A}(I, \mathbf{X})}{\partial I} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt}, \quad (3.49)$$

donde

$$\mathbf{A}(I, \mathbf{X}) = -\langle p\nabla q \rangle + \langle \nabla W \rangle. \quad (3.50)$$

Recordando que la variable acción es constante, podemos integrar la ecuación para obtener el cambio en la variable ángulo en el intervalo de t_0 a t :

$$\Delta\phi \approx \int_{t_0}^t \omega(I, \mathbf{X}) dt + \frac{\partial}{\partial I} \int_{t_0}^t \mathbf{A}(I, \mathbf{X}) \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} dt = \int_{t_0}^t \omega(I, \mathbf{X}) dt + \frac{\partial}{\partial I} \int_{\mathbf{X}_0}^{\mathbf{X}} \mathbf{A}(I, \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X}. \quad (3.51)$$

El primer término representa el cambio dinámico, mientras que el segundo término, llamado cambio de Hannay, representa un cambio debido a una trayectoria en el espacio de parámetros.

La variable ángulo está definida hasta una transformación canónica del tipo 2 generada por

$$F_2 = \phi I' + \Lambda(I', \mathbf{X}). \quad (3.52)$$

Esto da como resultado

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \Lambda(I', \mathbf{X})}{\partial I'} \quad (3.53)$$

e

$$I' = I. \quad (3.54)$$

El cambio inducido en \mathbf{A} se encuentra de la ecuación de Hamilton para la variable ángulo transformada

$$\frac{d\phi'}{dt} = \frac{d\phi}{dt} + \nabla \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial I} \right) \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \omega + \frac{\partial}{\partial I} (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt}. \quad (3.55)$$

Comparando con (3.49) vemos que

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda. \quad (3.56)$$

Esto tiene precisamente la misma forma que una transformación de norma para el potencial vectorial de la electrodinámica. El cambio de Hannay en la variable ángulo depende de la norma, sin embargo, para circuitos cerrados en el espacio de parámetros, el cambio de Hannay

$$\Delta\phi_H = \frac{\partial}{\partial I} \oint \mathbf{A}(I, \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X} \quad (3.57)$$

es independiente de la norma, puesto que $\oint \nabla \Lambda \cdot d\mathbf{X} = \oint d\Lambda = 0$. A $\Delta\phi_H$ se le llama ángulo de Hannay.

Podemos reescribir la integral de la uno-forma $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{X}$ usando el teorema de Stokes. Ahora tomamos un sistema con tres parámetros para poder usar la notación vectorial. Introducimos el vector \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.58)$$

Recordando la definición de \mathbf{A} , encontramos que

$$\mathbf{B} = -\langle \nabla \times (p\nabla q) \rangle + \langle \nabla \times (\nabla W) \rangle = -\langle p\nabla \times (\nabla q) \rangle - \langle \nabla p \times \nabla q \rangle, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{B} = \langle \nabla q \times \nabla p \rangle, \quad (3.60)$$

donde se anulan los términos que contienen el rotacional de un gradiente. Usando el teorema de Stokes, tenemos que

$$\Delta\phi_H = \frac{\partial}{\partial I} \int \mathbf{B}(I, \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.61)$$

3.4. Aro de Hannay

A continuación, se presentarán dos ejemplos que ilustran la aparición del ángulo de Hannay.

Primero, consideremos un aro sobre el cual está una cuenta que lo recorre con rapidez constante. El aro, además, está rotando con una velocidad angular $\Omega = d\theta/dt$. La velocidad de la cuenta respecto al aro \dot{s} es tangente al aro, y la velocidad del punto del aro en que la cuenta está instantáneamente localizada respecto al sistema inercial subyacente es $r\Omega$ y es perpendicular al radio vector. El ángulo entre estas dos velocidades es $3\pi/2 - \alpha$. Usamos la ley de los cosenos para obtener

$$v^2 = \dot{s}^2 + r^2\Omega^2 + 2\dot{s}r\Omega\sin\alpha. \quad (3.62)$$

El Lagrangiano ($mv^2/2$) es

$$L(s, \dot{s}, t) = \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + r^2\Omega^2 + 2\dot{s}r\Omega\sin\alpha), \quad (3.63)$$

y el momento conjugado a s es

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} + mr\Omega\sin\alpha. \quad (3.64)$$

Con esto, podemos construir el Hamiltoniano

$$H = p\dot{s} - L = \frac{(p - mr\Omega\sin\alpha)^2}{2m} - \frac{1}{2}mr^2\Omega. \quad (3.65)$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} - r\Omega\sin\alpha, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial s}. \quad (3.66)$$

Si ahora reemplazamos el lado derecho de las ecuaciones por el promedio temporal en la posición, obtenemos

$$\frac{ds}{dt} \approx \left\langle \frac{p}{m} \right\rangle - \frac{\Omega}{\ell} \int_0^\ell r\sin\alpha ds = \left\langle \frac{p}{m} \right\rangle - \frac{2A\Omega}{\ell}, \quad \frac{dp}{dt} \approx -\frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{\partial H}{\partial s} ds = 0, \quad (3.67)$$

donde $A = \frac{1}{2} \int_0^\ell r\sin\alpha ds$ es el área encerrada por el aro. Integramos la primera ecuación para obtener el cambio en la posición, lo cual da

$$\Delta s = \int_0^T \frac{ds}{dt} dt = \frac{p}{m} T - \frac{2A}{\ell} \Delta\theta. \quad (3.68)$$

Aquí, $\Delta\theta = \int_0^T \Omega dt$ es el ángulo al que se rota el aro. El primer término es el cambio dinámico y el segundo término es el cambio de Hannay.

3.5. Oscilador armónico generalizado

El segundo ejemplo que abordaremos es el llamado “oscilador armónico generalizado” [14], cuyo Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{1}{2} (X(t)q^2 + 2Y(t)qp + Z(t)p^2), \quad (3.69)$$

donde (X, Y, Z) son parámetros y se cumple $XZ > Y^2$. Lo primero que intentaremos será deshacernos del término cruzado. Sea $\xi = (q, p)^T$ el vector columna de las variables canónicas; entonces, el Hamiltoniano se escribe

$$H = \xi^T M \xi, \quad (3.70)$$

con

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

Ahora introducimos nuevas variables canónicas tales que

$$\xi' = R\xi, \quad (3.72)$$

donde R es una matriz ortogonal (lo cual es posible debido a que M es simétrica). De aquí se sigue que

$$H = (R^T \xi')^T M (R^T \xi') = \xi'^T (RMR^T) \xi', \quad (3.73)$$

y por tanto, la matriz transformada es

$$M' = RMR^T. \quad (3.74)$$

Pedimos que M' sea diagonal,

$$M' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

siendo λ_+ y λ_- los eigenvalores. El Hamiltoniano será, entonces,

$$H = \frac{1}{2} \lambda_+ q'^2 + \frac{1}{2} \lambda_- p'^2. \quad (3.76)$$

Al ser el determinante un invariante tenemos que

$$\det M = \det M' = XZ - Y^2 = \lambda_+ \lambda_-. \quad (3.77)$$

Como $XZ - Y^2 > 0$, los signos de λ_+ y λ_- son iguales, por tanto, las trayectorias en el espacio fase (q', p') son elipses. El área que encierra una elipse es

$$A = \pi \sqrt{\frac{2E}{\lambda_+}} \sqrt{\frac{2E}{\lambda_-}} = \frac{2\pi E}{\sqrt{XZ - Y^2}}, \quad (3.78)$$

y de aquí se sigue que la variable acción es

$$I = \frac{A}{2\pi} = \frac{E}{\sqrt{XZ - Y^2}}. \quad (3.79)$$

Si resolvemos la ecuación de Hamilton-Jacobi, encontramos que

$$W = -\frac{Y}{2Z} q^2 + \frac{1}{Z} \int \sqrt{2ZE - (XZ - Y^2)q^2} dq. \quad (3.80)$$

Para hacer la integral, hacemos el cambio de variable

$$q = \sqrt{\frac{2ZE}{XZ - Y^2}} \sin \phi, \quad (3.81)$$

con esto, la función característica de Hamilton se escribe como

$$W = -\frac{Y}{2Z} q^2 + \frac{E}{\sqrt{XZ - Y^2}} (\phi + \sin \phi \cos \phi). \quad (3.82)$$

En un ciclo, ϕ incrementa en 2π , y por tanto, W incrementa en $2\pi E / \sqrt{XZ - Y^2}$, por lo cual, la variable acción es

$$I = \frac{\Delta W}{2\pi} = \frac{E}{\sqrt{XZ - Y^2}} = \frac{E}{\omega}, \quad (3.83)$$

donde $\omega = \sqrt{XZ - Y^2}$. En términos de I , la función característica de Hamilton está dada por

$$W = -\frac{Y}{2Z}q^2 + I(\phi + \sin\phi\cos\phi), \quad (3.84)$$

el momento es

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = -\frac{Y}{Z}q + \sqrt{\frac{2\omega I}{Z}}\cos\phi, \quad (3.85)$$

y la variable ángulo es

$$\frac{\partial W}{\partial I} = \phi. \quad (3.86)$$

Por tanto,

$$q = \sqrt{\frac{2ZI}{\omega}}\sin\phi, \quad p = \sqrt{\frac{2ZI}{\omega}}\left(-\frac{Y}{Z}\sin\phi + \frac{\omega}{Z}\cos\phi\right). \quad (3.87)$$

Supongamos ahora que los parámetros son variados adiabáticamente y el sistema es tomado alrededor de un circuito cerrado. Para calcular el ángulo de Hannay necesitamos los promedios del gradiente de q y de p . El vector \mathbf{B} definido en (3.60) es, entonces,

$$\mathbf{B} = \langle \nabla q \times \nabla p \rangle = -\frac{1}{2}\nabla\left(\frac{Z}{\omega}\right) \times \nabla\left(\frac{Y}{Z}\right). \quad (3.88)$$

Haciendo los cálculos pertinentes, encontramos que

$$\mathbf{B} = \frac{I\mathbf{R}}{4\omega^3}, \quad (3.89)$$

y, por tanto, el ángulo de Hannay es

$$\Delta\phi_H = \frac{\partial}{\partial I} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}}{4\omega^3}, \quad (3.90)$$

esto es,

$$\Delta\phi_H = \int \frac{XdY \wedge dZ + YdZ \wedge dX + ZdX \wedge dY}{4(XZ - Y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.91)$$

Capítulo 4

Adiabaticidad en mecánica cuántica

4.1. Evolución adiabática en mecánica cuántica

Para analizar la evolución adiabática consideremos un Hamiltoniano dependiente del tiempo $H(t)$. Si asumimos que el espectro de H es discreto y no degenerado, se propone que la ecuación de eigenvalores de H se cumpla a cada instante de tiempo, esto es,

$$H(t)|n(t)\rangle = E_n(t)|n(t)\rangle, \quad (4.1)$$

donde los eigenestados cumplen con

$$\langle n(t)|m(t)\rangle = \delta_{nm}. \quad (4.2)$$

Podemos notar que $|n(t)\rangle$ no está definido de manera única. Si hacemos la transformación

$$|n(t)\rangle \rightarrow |n'(t)\rangle = e^{i\lambda_n(t)}|n(t)\rangle, \quad (4.3)$$

con funciones arbitrarias $\lambda_n(t)$, entonces (4.1) y (4.2) permanecen invariantes. Una transformación de este tipo se llama transformación de norma.

La solución general a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle, \quad (4.4)$$

se propone como una combinación lineal de los estados $|n(t)\rangle$, esto es,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{i\theta_n(t)} |n(t)\rangle, \quad (4.5)$$

donde

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(\tau) d\tau \quad (4.6)$$

es el factor de fase generalizado al caso en que la energía depende del tiempo.

Si ahora se sustituye (4.5) en (4.4), se obtienen las siguientes ecuaciones para los coeficientes $c_m(t)$:

$$\dot{c}_m(t) = -c_m(t)\langle m(t)|\dot{m}(t)\rangle - \sum_{k \neq m} c_k(t)\langle m(t)|\dot{k}(t)\rangle \exp[i(\theta_k(t) - \theta_m(t))]. \quad (4.7)$$

Enseguida, derivamos (4.1) respecto al tiempo y proyectamos en el ket $|m\rangle$ tal que $m \neq k$:

$$\langle m|\dot{k}\rangle = \frac{\langle m|\dot{H}|k\rangle}{E_k - E_m}. \quad (4.8)$$

La evolución de $H(t)$ es considerada adiabática si

$$\left| \langle m|\dot{H}|k\rangle \right| \ll \frac{|E_k - E_m|}{\Delta T_{km}}, \quad (4.9)$$

donde ΔT_{km} es el tiempo característico de transición entre los estados k y m . Esto quiere decir que los cambios en H son lentos en comparación con la escala natural de tiempo del sistema, definida mediante la transición entre estados energéticos [33]. En el límite adiabático $\Delta T_{km} \rightarrow \infty$ los cambios en H son infinitamente lentos, esto es,

$$\left| \langle m|\dot{H}|k\rangle \right| \rightarrow 0, \quad (4.10)$$

y por tanto, según (4.8),

$$\langle m|\dot{k}\rangle \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Si sustituimos este resultado en (4.7), obtenemos la ecuación de evolución adiabática

$$\dot{c}_m = -c_m \langle m|\dot{m}\rangle, \quad (4.12)$$

con solución

$$c_m(t) = c_m(0)e^{i\phi_m(t)}, \quad (4.13)$$

donde

$$\phi_m(t) = i \int_0^t \langle m(\tau)|\dot{m}(\tau)\rangle d\tau. \quad (4.14)$$

Usando la condición inicial $c_m(0) = \delta_{mn}$, y sustituyendo en (4.5), tenemos que

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\theta_n(t)} e^{i\phi_n(t)} |n(t)\rangle. \quad (4.15)$$

Este es precisamente el teorema adiabático: si el sistema comienza en $t = 0$ en el eigenestado $|n\rangle$, entonces permanece en él para todo tiempo, adquiriendo solamente un par de fases.

La fase adicional $\phi_n(t)$ fue ignorada por casi cincuenta años, debido a que con la libertad de norma podemos tomar un nuevo eigenvector

$$|\tilde{n}(t)\rangle = e^{i\phi_n(t)} |n(t)\rangle, \quad (4.16)$$

de tal forma que

$$\frac{d}{dt} |\tilde{n}(t)\rangle = i\dot{\phi}_n(t) |\tilde{n}\rangle + e^{i\phi_n(t)} |\dot{n}\rangle. \quad (4.17)$$

Por tanto,

$$\langle \tilde{n} | \frac{d}{dt} | \tilde{n} \rangle = i\dot{\phi}_n + \langle n | \dot{n} \rangle = i\dot{\phi}_n - i\dot{\phi}_n = 0. \quad (4.18)$$

El eigenvector $|\tilde{n}\rangle$ que satisface esta ecuación, se dice que está en la norma de Born-Fock. Entonces, en esta norma,

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\theta_n(t)} |\tilde{n}(t)\rangle. \quad (4.19)$$

De esta manera, se remueve la fase adicional, sin embargo, hay situaciones en donde esto falla y la fase adquiere un significado físico.

4.2. Fase de Berry

4.2.1. Fases en mecánica cuántica

Los estados puros en mecánica cuántica son representados por vectores en un espacio de Hilbert complejo. A cada operador A le corresponde un valor esperado dado por

$$A \rightarrow \langle \psi | A | \psi \rangle, \quad (4.20)$$

donde $|\psi\rangle$ es un vector de estado normalizado a la unidad que pertenece al espacio de Hilbert. No obstante, aún queda la posibilidad de que dos estados, $|\psi\rangle$ y $|\varphi\rangle$, produzcan el mismo valor esperado siempre y cuando difieran en una fase; esto es claro de la ecuación (4.20). Es decir, $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ son equivalentes si se cumple

$$|\psi\rangle = e^{i\alpha} |\varphi\rangle. \quad (4.21)$$

Debido a la igualdad del valor esperado, uno dice que esta fase no tiene significado físico. No obstante, la interferencia cuántica es resultado de la aparición de una fase relativa entre dos estados. Por ejemplo, supongamos que dos estados con una fase relativa se superponen. Esto resulta en una interferencia, cuya intensidad está dada por

$$I \propto |1 + e^{i\alpha}|^2 = 4\cos^2(\alpha/2). \quad (4.22)$$

Entonces, buscando puntos de interferencia constructiva y destructiva se puede medir la fase.

4.2.2. Derivación de la fase de Berry

Hemos visto que durante la evolución adiabática el estado $|n\rangle$ adquiere dos fases: una fase dinámica

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(\tau) d\tau, \quad (4.23)$$

y una fase geométrica

$$\phi_n(t) = i \int_0^t \langle n(\tau) | \dot{n}(\tau) \rangle d\tau. \quad (4.24)$$

Ahora consideremos una curva C sobre una variedad M de parámetros externos x . La dependencia temporal del Hamiltoniano entra vía la dependencia de parámetros externos, tales como potenciales, campos, etc. Supongamos que para cualquier $x \in M$ el Hamiltoniano $H(x)$ tiene un espectro discreto, esto es

$$H(x)|n(x)\rangle = E_n(x)|n(x)\rangle, \quad (4.25)$$

con

$$\langle n(x)|m(x)\rangle = \delta_{nm}. \quad (4.26)$$

Los eigenvectores no están definidos de manera única, puesto que podemos hacer que difieran en una fase, esto es

$$|n(x)\rangle \rightarrow |n'(x)\rangle = e^{i\alpha_n(x)}|n(x)\rangle, \quad (4.27)$$

donde $\alpha_n(x)$ es una función arbitraria de los parámetros.

Sabemos que

$$\dot{\phi}_n = i\langle n|\dot{n}\rangle, \quad (4.28)$$

lo cual implica que podemos definir una uno-forma en M :

$$A^{(n)} \equiv i\langle n|dn\rangle, \quad (4.29)$$

o, en coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) ,

$$A^{(n)} = A_k^{(n)} dx^k, \quad (4.30)$$

con $A_k^{(n)} = i\langle n|\partial_k n\rangle$. Debido a que $\langle n|dn\rangle$ es imaginario puro¹, podemos escribir

$$A^{(n)} = -\text{Im}\langle n|dn\rangle. \quad (4.31)$$

Entonces,

$$\phi_n(t) = i \int_0^t \langle n(\tau)|\dot{n}(\tau)\rangle d\tau = \int_C A^{(n)}, \quad (4.32)$$

donde la uno-forma se integra en la curva C desde el punto $x_0 = x(0)$ hasta el punto $x_t = x(t)$.

En el caso de una evolución cíclica ($x_0 = x_T$ para algún $T > 0$), entonces la fase geométrica es

$$\gamma_n(C) \equiv \phi_n(T) = \oint_C A^{(n)}. \quad (4.33)$$

Esta fase se conoce como fase de Berry, la cual corresponde a una evolución adiabática cíclica a lo largo de C . Hay que remarcar que la fase de Berry aparece cuando el Hamiltoniano depende de dos o más parámetros, puesto que la integral cerrada se anularía para un parámetro debido a la condición $x_0 = x_T$.

Cabe mencionar que se puede obtener el ángulo de Hannay $\Delta\phi_H$ a partir de la fase de Berry $\gamma_n(C)$ como [15]

$$\Delta\phi_H = -\frac{\partial\gamma_n(C)}{\partial n}. \quad (4.34)$$

Esto es válido para sistemas cuadráticos, y es aproximado para cualquier otro sistema.

¹Esto se sigue derivando la identidad $\langle n|n\rangle = 1$ respecto a los parámetros.

Usando el teorema de Stokes podemos reescribir la fase como

$$\gamma_n(C) = \int_{\Sigma} F^{(n)}, \quad (4.35)$$

donde Σ es tal que $\partial\Sigma = C$ y

$$F^{(n)} = dA^{(n)} = -\text{Im}\langle dn | \wedge | dn \rangle. \quad (4.36)$$

En coordenadas locales sobre M se tiene que

$$F^{(n)} = \frac{1}{2} F_{ij}^{(n)} dx^i \wedge dx^j, \quad (4.37)$$

con

$$F_{ij}^{(n)} = -\text{Im}(\langle \partial_i n | \partial_j n \rangle - \langle \partial_j n | \partial_i n \rangle) = i(\langle \partial_i n | \partial_j n \rangle - \langle \partial_j n | \partial_i n \rangle). \quad (4.38)$$

Podemos notar que al realizar el cambio (4.27), la uno-forma $A^{(n)}$ transforma como

$$A^{(n)} \rightarrow A'^{(n)} = A^{(n)} - d\alpha_n, \quad (4.39)$$

o bien,

$$A'_k{}^{(n)} = A_k{}^{(n)} - \partial_k \alpha_n, \quad (4.40)$$

esto es, transforma de la misma manera que el potencial vectorial de la electrodinámica. Debido a esto, se le conoce también como potencial vectorial de Berry. Ahora bien, ya que $d^2\alpha_n = 0$, la dos-forma $F^{(n)}$ es invariante de norma, y por tanto, también lo es la fase de Berry $\gamma_n(C)$. La cantidad $F^{(n)}$ juega el papel del campo magnético obtenido a través del potencial vectorial $A^{(n)}$.

Finalmente, podemos expresar a $F^{(n)}$ en términos de los eigenvalores de la energía E_k . Insertando la identidad

$$\mathbb{I} = \sum_m |m\rangle\langle m| \quad (4.41)$$

en (4.36), se sigue que

$$F^{(n)} = -\text{Im} \sum_{m \neq n} \overline{\langle m | dn \rangle} \wedge \langle m | dn \rangle \quad (4.42)$$

El término con $m = n$ no contribuye ya que $\langle n | dn \rangle$ es imaginario puro. Ahora bien, (4.25) implica que, para $m \neq n$,

$$\langle m | dn \rangle = \frac{\langle m | dH | n \rangle}{E_n - E_m}. \quad (4.43)$$

Por tanto,

$$F^{(n)} = -\text{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | dH | m \rangle \wedge \langle m | dH | n \rangle}{(E_m - E_n)^2}. \quad (4.44)$$

Una propiedad importante y fácil de demostrar de $F^{(n)}$ es

$$\sum_n F^{(n)} = 0. \quad (4.45)$$

4.2.3. ¿Cómo medir la fase de Berry?

Si tenemos una evolución adiabática cíclica, entonces podemos medir la fase relativa entre $\psi(0)$ y $\psi(T)$. Supongamos que el sistema inicia preparado en el estado $|n\rangle$ y se divide en $t = 0$ en dos subsistemas; uno de ellos se cicla adiabáticamente y el otro no. Durante la evolución, ambos subsistemas adquirirán fases dinámicas φ_1 y φ_2 , respectivamente. El sistema que fue ciclado adquirirá adicionalmente una fase geométrica $\gamma_n(C)$. Si los dos subsistemas se combinan en $t = T$, entonces la intensidad de la superposición estará dada por

$$\begin{aligned} I &\propto |\exp[i(\varphi_1 + \gamma_n(C))] + \exp(i\varphi_2)|^2 \\ &= 4\cos^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2 + \gamma_n(C))\right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Por tanto, al conocer las fases dinámicas φ_1 y φ_2 podemos detectar la fase geométrica como un corrimiento en el patrón de interferencia.

Otro tipo de experimento involucra dos o más estados del mismo Hamiltoniano. Supongamos que a $t = 0$ se tiene

$$\psi(0) = a_n|n\rangle + a_m|m\rangle, \quad (4.47)$$

donde $|m\rangle$ y $|n\rangle$ son eigenestados de $H(0)$. Si H cambia adiabáticamente y $H(T) = H(0)$, entonces los estados adquirirán fases dinámicas y fases geométricas, de tal forma que

$$\psi(T) = a_m \exp[i(\varphi_m + \gamma_m(C))] |m\rangle + a_n \exp[i(\varphi_n + \gamma_n(C))] |n\rangle. \quad (4.48)$$

Si tenemos un observable A que no conmute con $H(0)$ ², entonces,

$$\begin{aligned} \langle \psi(T) | A | \psi(T) \rangle &= |a_m|^2 \langle m | A | m \rangle + |a_n|^2 \langle n | A | n \rangle \\ &+ 2\text{Re}(a_m a_n^* \langle n | A | m \rangle \exp[i(\varphi_n - \varphi_m + \gamma_n(C) - \gamma_m(C))]). \end{aligned} \quad (4.49)$$

De esta manera, podemos detectar la diferencia de fases geométricas, $\gamma_n(C) - \gamma_m(C)$, siempre que conozcamos las fases dinámicas φ_n y φ_m [33].

A continuación se presentan dos ejemplos para ilustrar la aparición de la fase de Berry en mecánica cuántica.

4.2.4. Partícula de espín 1/2 en un campo magnético

Consideremos la evolución adiabática de una partícula con espín 1/2 en un campo magnético \mathbf{B} que varía lentamente. El Hamiltoniano correspondiente es

$$H(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \mu \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}. \quad (4.50)$$

Las componentes del campo magnético juegan el rol de los parámetros externos de los cuales depende el

²Se pide esto para que $\langle n | A | m \rangle \neq 0$ y haya término de interferencia.

Hamiltoniano. Podemos escribir el campo magnético en coordenadas esféricas, de forma que

$$\mathbf{B} = B(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta). \quad (4.51)$$

Si $|\pm \mathbf{B}\rangle = |\pm(\theta, \varphi)\rangle$ denotan eigenvectores del Hamiltoniano, esto es,

$$H(\mathbf{B})|\pm(\theta, \varphi)\rangle = E_{\pm}(B)|\pm(\theta, \varphi)\rangle, \quad (4.52)$$

donde $E_{\pm}(B) = \pm\mu B/2$, entonces se encuentra que

$$|+(\theta, \varphi)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad |-(\theta, \varphi)\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Ya que los eigenvectores no dependen de B , es natural tomar como espacio de parámetros la esfera bidimensional, esto es, $M = S^2$. Insertando estos eigenvectores en (4.29) obtenemos

$$A^{(+)} = i\langle +(\theta, \varphi)|\partial_{\theta}|+(\theta, \varphi)\rangle d\theta + i\langle +(\theta, \varphi)|\partial_{\varphi}|+(\theta, \varphi)\rangle d\varphi, \quad (4.54)$$

$$A^{(+)} = -\frac{1}{2}(1 - \cos\theta)d\varphi. \quad (4.55)$$

Y, para $A^{(-)}$,

$$A^{(-)} = -\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)d\varphi. \quad (4.56)$$

De aquí podemos obtener las dos-formas correspondientes

$$F^{(+)} = dA^{(+)} = -\frac{1}{2}\sin\theta d\theta \wedge d\varphi, \quad (4.57)$$

$$F^{(-)} = dA^{(-)} = \frac{1}{2}\sin\theta d\theta \wedge d\varphi. \quad (4.58)$$

Se verifica fácilmente que se cumple (4.45):

$$F^{(+)} + F^{(-)} = 0. \quad (4.59)$$

Ahora calculamos las fases de Berry asociadas a $F^{(+)}$ y $F^{(-)}$.

$$\gamma_{\pm}(C) = \int_{\Sigma} F^{(\pm)} = \mp \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sin\theta d\theta \wedge d\varphi = \mp \frac{1}{2} \Omega(C), \quad (4.60)$$

donde $\Omega(C)$ es el ángulo sólido subtendido por la curva C sobre la esfera S^2 . Si integramos sobre todo S^2 , entonces

$$\int_{S^2} F^{(\pm)} = \mp \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\varphi = \mp 2\pi, \quad (4.61)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^2} F^{(\pm)} = \mp 1. \quad (4.62)$$

Podemos obtener el mismo resultado utilizando (4.44):

$$F^{(+)} = -\text{Im} \frac{\langle +|dH|-\rangle \wedge \langle -|dH|+\rangle}{(E_- - E_+)^2}. \quad (4.63)$$

Sabemos que

$$dH = \frac{1}{2}\mu \sum_{k=1}^3 \sigma_k dB^k, \quad (4.64)$$

y

$$(E_- - E_+)^2 = (\mu B)^2. \quad (4.65)$$

Por tanto,

$$F^{(+)} = -\frac{1}{B^2} \sum_{k,l=1}^3 \text{Im} [\langle +|\sigma_k|-\rangle \langle -|\sigma_l|+\rangle - \langle +|\sigma_l|-\rangle \langle -|\sigma_k|+\rangle] dB^k \wedge dB^l. \quad (4.66)$$

Si tomamos el punto $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, se encuentra que

$$F_{12}^{(+)} = -\frac{1}{2B^2}, \quad F_{13}^{(+)} = F_{23}^{(+)} = 0. \quad (4.67)$$

Entonces, para \mathbf{B} arbitrario, tenemos que

$$F_{kl}^{(+)} = -\frac{1}{2|\mathbf{B}|^3} \epsilon_{klm} B^m. \quad (4.68)$$

4.2.5. Oscilador armónico generalizado

Ahora, estudiaremos el sistema de interés: el oscilador armónico generalizado³. Consideremos el siguiente Hamiltoniano que depende de los parámetros externos $\mathbf{R}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$:

$$H(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} [X(t)q^2 + Y(t)(qp + pq) + Z(t)p^2]. \quad (4.69)$$

La ecuación de eigenvalores es

$$H(\mathbf{R})\psi_n(\mathbf{R}) = E_n(\mathbf{R})\psi_n(\mathbf{R}), \quad (4.70)$$

la cual, en el espacio de configuración, toma la forma

$$-\frac{Z\hbar^2}{2} \frac{d^2\psi_n}{dq^2} - i\hbar Y q \frac{d\psi_n}{dq} + \left(\frac{Xq^2}{2} - i\hbar \frac{Y}{2} \right) \psi_n = E_n \psi_n. \quad (4.71)$$

Para resolverla, necesitamos deshacernos del término que contiene la primera derivada y así tener la ecuación de Schrödinger usual. A tal efecto, se propone la siguiente factorización:

$$\psi_n(q; \mathbf{R}) = M_n(q; \mathbf{R})N(q; \mathbf{R}), \quad (4.72)$$

³Este sistema se reduce al oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo tomando $X(t) = m\omega^2(t)$, $Y(t) = 0$ y $Z(t) = 1/m$.

donde

$$N(q; \mathbf{R}) = \exp\left(-\frac{iYq^2}{2Z\hbar}\right). \quad (4.73)$$

De esta manera, al sustituir la propuesta en la ecuación original, obtenemos

$$-\frac{Z\hbar^2}{2} \frac{d^2 M_n}{dq^2} + \frac{XZ - Y^2}{2Z} q^2 M_n = E_n M_n. \quad (4.74)$$

Con esto, hemos eliminado el término que contiene la primera derivada. Ahora, la ecuación que obtuvimos para $M_n(q; \mathbf{R})$ es la ecuación del oscilador armónico usual, cuya solución es conocida. Por tanto, $\psi_n(q; \mathbf{R})$ es

$$\psi_n(q; \mathbf{R}) = \left(\frac{\omega}{Z\hbar}\right)^{1/4} \chi_n\left(q\sqrt{\frac{\omega}{Z\hbar}}\right) \exp\left(-\frac{iYq^2}{2Z\hbar}\right), \quad (4.75)$$

donde

$$\omega = (XZ - Y^2)^{1/2} \quad (4.76)$$

y

$$\chi_n(\xi) = (n!2^n\sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad (4.77)$$

con H_n el n -ésimo polinomio de Hermite que satisface la ecuación

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} + (2n + 1 - x^2)H_n(x) = 0. \quad (4.78)$$

De (4.76) podemos notar que se debe cumplir

$$XZ > Y^2, \quad (4.79)$$

por lo cual, la variedad M a considerar es

$$M = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 | XZ > Y^2\}. \quad (4.80)$$

Los eigenvalores de la energía están dados por

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega. \quad (4.81)$$

Si sustituimos la función de onda (4.75) en (4.36), encontramos que⁴

$$\begin{aligned} F^{(n)} &= -\text{Im} \, d_{\mathbf{R}} \int \psi_n^*(q; \mathbf{R}) \wedge d_{\mathbf{R}} \psi_n(q; \mathbf{R}) dq \\ &= \frac{1}{2\hbar} d_{\mathbf{R}} \sqrt{\frac{\omega}{Z\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^2\left(q\sqrt{\frac{\omega}{Z\hbar}}\right) q^2 \wedge d_{\mathbf{R}} \left(\frac{Y}{Z}\right) dq. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Ahora hacemos el cambio de variable

$$\xi = q\sqrt{\frac{\omega}{Z\hbar}}, \quad (4.83)$$

⁴Se denota la derivada respecto a los parámetros como $d_{\mathbf{R}}$ para distinguirla de la derivada respecto a la posición.

y usamos la siguiente propiedad de las funciones de Hermite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \chi_n^2(\xi) d\xi = n + \frac{1}{2}, \quad (4.84)$$

de tal manera que se obtiene

$$F^{(n)} = -\frac{1}{4} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{X d_{\mathbf{R}} Y \wedge d_{\mathbf{R}} Z + Y d_{\mathbf{R}} Z \wedge d_{\mathbf{R}} X + Z d_{\mathbf{R}} X \wedge d_{\mathbf{R}} Y}{(XZ - Y^2)^{3/2}}. \quad (4.85)$$

De aquí podemos identificar la uno-forma $A^{(n)}$ que cumple con $F^{(n)} = dA^{(n)}$:

$$A^{(n)} = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[\frac{d_{\mathbf{R}} Y}{(XZ - Y^2)^{1/2}} - \frac{Y d_{\mathbf{R}} Z}{Z (XZ - Y^2)^{1/2}} \right], \quad (4.86)$$

con lo cual, la fase de Berry es

$$\gamma_n(C) = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^T \frac{\dot{Y}Z - Y\dot{Z}}{Z (XZ - Y^2)^{1/2}} dt. \quad (4.87)$$

Si usamos la correspondencia (4.34) entre la fase de Berry y el ángulo de Hannay, vemos que este último está dado por

$$\Delta\phi_H = -\frac{\partial}{\partial n} \int F^{(n)}, \quad (4.88)$$

lo cual, al sustituir (4.85), concuerda con (3.91).

4.2.6. Tensor geométrico cuántico

Los componentes de la dos-forma que hemos definido en la fase de Berry están dados por

$$F_{ij}^{(n)} = -\text{Im} (\langle \partial_i n | \partial_j n \rangle - \langle \partial_j n | \partial_i n \rangle). \quad (4.89)$$

Este tensor es invariante bajo las transformaciones de norma (4.27). Berry mostró que existe otro tensor definido en M que es invariante de norma y es conocido como el tensor geométrico cuántico, cuyas componentes están dadas por

$$T_{ij}^{(n)} \equiv \langle \partial_i n | \partial_j n \rangle - \langle \partial_i n | n \rangle \langle n | \partial_j n \rangle, \quad (4.90)$$

Se puede mostrar fácilmente que es invariante de norma y hermitiano, y además podemos obtener $F^{(n)}$ de su parte imaginaria, esto es

$$\text{Im} T_{ij}^{(n)} = -\frac{1}{2} F_{ij}^{(n)}. \quad (4.91)$$

Ahora definamos un nuevo tensor simétrico

$$g_{ij}^{(n)} \equiv \text{Re} T_{ij}^{(n)}. \quad (4.92)$$

Resulta que este tensor puede usarse para medir distancias en el espacio de parámetros, por lo que se le

llama tensor métrico cuántico. Consideremos dos estados cercanos entre sí, $|n(x)\rangle$ y $|n(x + dx)\rangle$ y definamos una distancia $\Delta(x, x + dx)$ mediante

$$\Delta^2(x, x + dx) = 1 - |\langle n(x)|n(x + dx)\rangle|^2. \quad (4.93)$$

Ahora desarrollamos en serie de Taylor el estado $|n(x + dx)\rangle$

$$|n(x + dx)\rangle = |n(x)\rangle + |\partial_i n(x)\rangle dx^i + \frac{1}{2} |\partial_i \partial_j n(x)\rangle dx^i dx^j + \dots \quad (4.94)$$

Entonces,

$$\langle n(x)|n(x + dx)\rangle = 1 + \langle n(x)|\partial_i n(x)\rangle dx^i + \frac{1}{2} \langle n(x)|\partial_i \partial_j n(x)\rangle dx^i dx^j + \dots \quad (4.95)$$

Por tanto,

$$|\langle n(x)|n(x + dx)\rangle|^2 = 1 + \left(\frac{1}{2} \langle \partial_i \partial_j n|n \rangle + \frac{1}{2} \langle n|\partial_i \partial_j n \rangle + \langle n|\partial_i n \rangle \langle \partial_j n|n \rangle \right) dx^i dx^j + \dots, \quad (4.96)$$

donde se usó

$$\langle n|\partial_i n \rangle + \langle \partial_i n|n \rangle = 0 \quad (4.97)$$

Si derivamos la expresión anterior encontramos que

$$\langle \partial_i \partial_j n|n \rangle = -\langle \partial_i n|\partial_j n \rangle - \langle \partial_j n|\partial_i n \rangle - \langle n|\partial_i \partial_j n \rangle. \quad (4.98)$$

Ahora sustituimos esto en (4.96), obteniendo

$$|\langle n(x)|n(x + dx)\rangle|^2 = 1 - \frac{1}{2} (\langle \partial_i n|\partial_j n \rangle + \langle \partial_j n|\partial_i n \rangle - 2\langle n|\partial_i n \rangle \langle \partial_j n|n \rangle) dx^i dx^j + \dots \quad (4.99)$$

Pero

$$\frac{1}{2} (\langle \partial_i n|\partial_j n \rangle + \langle \partial_j n|\partial_i n \rangle - 2\langle n|\partial_i n \rangle \langle \partial_j n|n \rangle) = \text{Re} T_{ij}^{(n)} = g_{ij}^{(n)}, \quad (4.100)$$

por lo que

$$\Delta^2(x, x + dx) = g_{ij}^{(n)} dx^i dx^j + \dots \quad (4.101)$$

Parecería que la definición de la distancia es un poco arbitraria, sin embargo, se puede justificar su introducción de la siguiente manera [39]. Sabemos que el producto escalar en el espacio de Hilbert proporciona una forma de medir distancias, por lo cual, proponemos que la separación entre dos estados $|n(x)\rangle$ y $|n(x + dx)\rangle$ sea

$$\|n(x + dx) - n(x)\|^2 = \langle n(x + dx) - n(x)|n(x + dx) - n(x)\rangle. \quad (4.102)$$

Desarrollando en serie de Taylor encontramos

$$\|n(x + dx) - n(x)\|^2 = \langle \partial_i n|\partial_j n \rangle dx^i dx^j + \dots \quad (4.103)$$

Separamos en parte real e imaginaria, de manera que

$$\langle \partial_i n | \partial_j n \rangle = \frac{1}{2} \underbrace{(\langle \partial_i n | \partial_j n \rangle + \langle \partial_j n | \partial_i n \rangle)}_{\gamma_{ij}^{(n)}} + \frac{1}{2i} \underbrace{(\langle \partial_i n | \partial_j n \rangle - \langle \partial_j n | \partial_i n \rangle)}_{\sigma_{ij}^{(n)}}. \quad (4.104)$$

Notamos aquí que la parte real $\gamma_{ij}^{(n)}$ es simétrica y la parte imaginaria $\sigma_{ij}^{(n)}$ es antisimétrica, por lo cual,

$$\|n(x + dx) - n(x)\|^2 = \gamma_{ij}^{(n)} dx^i dx^j + \dots \quad (4.105)$$

La parte imaginaria $\sigma_{ij}^{(n)}$ puede escribirse como

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2i} (\partial_i \langle n | \partial_j n \rangle - \partial_j \langle n | \partial_i n \rangle) = -\frac{1}{2} F_{ij}^{(n)}. \quad (4.106)$$

Por otro lado, los componentes $\gamma_{ij}^{(n)}$ transforman como un tensor covariante,

$$\gamma_{ij}^{\prime(n)} = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x^j} \gamma_{kl}^{(n)}, \quad (4.107)$$

no obstante, $\gamma_{ij}^{(n)}$ no es invariante de norma. Esto es, si escogemos dos estados que difieran por una fase, $|n\rangle$ y $|n'\rangle = e^{i\alpha_n(x)}|n\rangle$, encontramos que $\gamma_{ij}^{\prime(n)} \neq \gamma_{ij}^{(n)}$; de hecho,

$$\gamma_{ij}^{\prime(n)} = \gamma_{ij}^{(n)} + \beta_i^{(n)} \partial_j \alpha_n + \beta_j^{(n)} \partial_i \alpha_n + (\partial_i \alpha_n)(\partial_j \alpha_n), \quad (4.108)$$

donde

$$\beta_i^{(n)} = -i \langle n | \partial_i n \rangle = -A_i^{(n)}. \quad (4.109)$$

Al hacer una transformación de norma $|n\rangle \rightarrow |n'\rangle$ el cambio en beta es

$$\beta_i^{(n)} \rightarrow \beta_i^{\prime(n)} = \beta_i^{(n)} + \partial_i \alpha_n. \quad (4.110)$$

Entonces, si definimos

$$g_{ij}^{(n)} = \gamma_{ij}^{(n)} - \beta_i^{(n)} \beta_j^{(n)}, \quad (4.111)$$

podemos verificar que este objeto transforma como tensor covariante, es invariante de norma y es positivo definido. A este objeto se le llama tensor métrico del espacio de parámetros. Es fácil ver que es, justamente, el $g_{ij}^{(n)}$ definido como la parte real del tensor geométrico cuántico $T_{ij}^{(n)}$.

Ahora, iremos un paso más allá que Provost [39], y calcularemos a segundo orden la distancia entre dos estados infinitesimalmente cercanos. A tal efecto, recordemos que los parámetros x^i son funciones del tiempo, esto es, $x^i = x^i(t)$, por lo cual la expansión correcta debe ser en términos de t , esto es,

$$\begin{aligned} \|n(x + dx) - n(x)\|^2 &= \left\langle \frac{dn}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2 n}{dt^2} dt^2 + \dots \middle| \frac{dn}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2 n}{dt^2} dt^2 + \dots \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{dn}{dt} \middle| \frac{dn}{dt} \right\rangle dt^2 + \frac{1}{2} \left\langle \frac{dn}{dt} \middle| \frac{d^2 n}{dt^2} \right\rangle dt^3 + \frac{1}{2} \left\langle \frac{d^2 n}{dt^2} \middle| \frac{dn}{dt} \right\rangle dt^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.112)$$

Utilizando la regla de la cadena vemos que

$$\frac{dn}{dt} = (\partial_i n) \dot{x}^i, \quad (4.113)$$

y

$$\frac{d^2n}{dt^2} = \frac{d}{dt} [(\partial_i n) \dot{x}^i] = \dot{x}^i \frac{d}{dt} (\partial_i n) + \ddot{x}^i \partial_i n = (\partial_i \partial_j n) \dot{x}^i \dot{x}^j + (\partial_i n) \ddot{x}^i. \quad (4.114)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|n(x+dx) - n(x)\|^2 &= \langle \partial_i n | \partial_j n \rangle \dot{x}^i \dot{x}^j dt^2 + \frac{1}{2} [\langle \partial_i n | \partial_j \partial_k n \rangle + \langle \partial_j \partial_k n | \partial_i n \rangle] \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k dt^3 \\ &\quad + \frac{1}{2} [\langle \partial_i n | \partial_j n \rangle + \langle \partial_j n | \partial_i n \rangle] \dot{x}^i \ddot{x}^j dt^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.115)$$

Simetrizamos ahora los tres términos, obteniendo

$$\begin{aligned} \|n(x+dx) - n(x)\|^2 &= \gamma_{ij}^{(n)} \dot{x}^i \dot{x}^j dt^2 + \frac{1}{6} [\langle \partial_i n | \partial_j \partial_k n \rangle + \langle \partial_j \partial_k n | \partial_i n \rangle + \langle \partial_j n | \partial_k \partial_i n \rangle + \langle \partial_k \partial_i n | \partial_j n \rangle \\ &\quad + \langle \partial_k n | \partial_i \partial_j n \rangle + \langle \partial_i \partial_j n | \partial_k n \rangle] \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k dt^3 + \frac{1}{2} \gamma_{ij}^{(n)} (\dot{x}^i \ddot{x}^j + \ddot{x}^i \dot{x}^j) dt^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.116)$$

Reconociendo derivadas, podemos reescribir esto como

$$\|n(x+dx) - n(x)\|^2 = \gamma_{ij}^{(n)} \dot{x}^i \dot{x}^j dt^2 + \frac{1}{6} \left(\partial_i \gamma_{jk}^{(n)} + \partial_j \gamma_{ki}^{(n)} + \partial_k \gamma_{ij}^{(n)} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k dt^3 + \frac{1}{2} \gamma_{ij}^{(n)} \frac{d}{dt} (\dot{x}^i \dot{x}^j) dt^3 + \dots \quad (4.117)$$

Si usamos que

$$\gamma_{ij}^{(n)} \frac{d}{dt} (\dot{x}^i \dot{x}^j) = \frac{d}{dt} \left(\gamma_{ij}^{(n)} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) - \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{\gamma}_{ij}^{(n)}, \quad (4.118)$$

entonces,

$$\frac{1}{2} \gamma_{ij}^{(n)} \frac{d}{dt} (\dot{x}^i \dot{x}^j) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \gamma_{ij}^{(n)} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) - \frac{1}{2} \partial_k \gamma_{ij}^{(n)} \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k. \quad (4.119)$$

Simetrizamos ahora el término de la derivada de la métrica, de manera que

$$\frac{1}{2} \partial_k \gamma_{ij}^{(n)} \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = \frac{1}{6} \left(\partial_i \gamma_{jk}^{(n)} + \partial_j \gamma_{ki}^{(n)} + \partial_k \gamma_{ij}^{(n)} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k. \quad (4.120)$$

Por tanto, reduciendo los términos semejantes,

$$\|n(x+dx) - n(x)\|^2 = \gamma_{ij}^{(n)} \dot{x}^i \dot{x}^j dt^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \gamma_{ij}^{(n)} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) dt^3 + \dots \quad (4.121)$$

4.3. Fase no abeliana de Wilczek-Zee

Analicemos ahora lo que ocurre en caso de tener degeneración. Supongamos que el n -ésimo eigenvalor del Hamiltoniano es N veces degenerado, esto es,

$$H(x)|\psi_{na}(x)\rangle = E_n(x)|\psi_{na}(x)\rangle, \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (4.122)$$

Sabemos de la teoría cuántica que siempre podemos escoger ortonormales a los vectores que expanden al n -ésimo eigenspacio. Entonces,

$$\langle \psi_{na}(x) | \psi_{nb}(x) \rangle = \delta_{ab}. \quad (4.123)$$

Sin embargo, esta elección no es única. Podríamos realizar una transformación unitaria para obtener vectores ortonormales $|\psi'_{na}(x)\rangle$ tales que

$$|\psi'_{na}(x)\rangle = \sum_{b=1}^N U_{ab}(x) |\psi_{nb}(x)\rangle. \quad (4.124)$$

Consideremos la evolución adiabática del vector $|\psi(t)\rangle$ que corresponde a un cambio adiabático de los parámetros externos x . Supongamos que $|\psi(0)\rangle$ pertenece al n -ésimo eigenspacio. Si la evolución adiabática es cíclica, esto es $x_0 = x_T$, entonces el teorema adiabático implica que $|\psi(T)\rangle$ pertenece también al n -ésimo eigenspacio. Esto significa que $|\psi(0)\rangle$ y $|\psi(T)\rangle$ están relacionados unitariamente

$$|\psi(T)\rangle = V |\psi(0)\rangle, \quad (4.125)$$

para algún operador unitario V . Para encontrar esta matriz supongamos que $|\psi(0)\rangle = |\psi_{na}\rangle$. Entonces, la solución a la ecuación de Schrödinger bajo la aproximación adiabática tiene la forma

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\tau) d\tau\right) \sum_{b=1}^N U_{ab}^{(n)}(t) |\psi_{nb}(x_t)\rangle, \quad (4.126)$$

donde $U^{(n)}$ es una matriz unitaria de $N \times N$. Si insertamos esta expresión en la ecuación de Schrödinger, obtenemos la siguiente ecuación para la matriz $U^{(n)}$:

$$\left(U^{(n)-1} \dot{U}^{(n)} \right)_{ab} = -\langle \psi_{na} | \dot{\psi}_{nb} \rangle. \quad (4.127)$$

Si definimos la uno-forma conocida como potencial de Wilczek-Zee, esto es,

$$A_{ab}^{(n)} \equiv i \langle \psi_{nb} | d\psi_{na} \rangle, \quad (4.128)$$

entonces encontramos que

$$V = V_{din} V_{geo}, \quad (4.129)$$

con

$$V_{din} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T E_n(\tau) d\tau\right) \mathbb{I}_N, \quad (4.130)$$

y el factor geométrico de Wilczek-Zee, V_{geo}

$$V_{geo} = U^{(n)}(T) = \mathcal{P} \exp\left(i \oint_C A^{(n)}\right), \quad (4.131)$$

donde \mathcal{P} denota ordenamiento de trayectoria.

Ahora podemos definir la norma de Born-Fock en el caso degenerado. Se dice que la familia ψ_{na} está en

la norma de Born-Fock si y solo si

$$\langle \psi_{na} | \dot{\psi}_{nb} \rangle = 0. \quad (4.132)$$

Realicemos una transformación unitaria (4.124). Entonces,

$$\begin{aligned} A'_{ab}{}^{(n)} &= i \langle \psi'_{nb} | d\psi'_{na} \rangle = i \sum_{c,d=1}^N U_{bd}^* (dU_{ac} \langle \psi_{nd} | \psi_{nc} \rangle + U_{ac} \langle \psi_{nd} | d\psi_{nc} \rangle) \\ &= \sum_{c,d=1}^N \left(U_{ac} A_{cd}^{(n)} U_{bd}^* + i (dU_{ac}) \delta_{cd} U_{bd}^* \right) \\ &= (UAU^\dagger + i(dU)U^\dagger)_{ab}. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Reconocemos aquí que $A^{(n)}$ transforma como un potencial de norma en la teoría no-Abeliana. Por tanto, un espectro degenerado conduce a una teoría de norma $U(N)$, en donde N es el grado de degeneración. De esta manera, podemos definir el campo de norma correspondiente,

$$F^{(n)} = dA^{(n)} - iA^{(n)} \wedge A^{(n)}. \quad (4.134)$$

En coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) se obtiene

$$(F_{kl}^{(n)})_{ab} = \partial_k (A_l^{(n)})_{ab} - \partial_l (A_k^{(n)})_{ab} - i[A_k^{(n)}, A_l^{(n)}]_{ab}. \quad (4.135)$$

Capítulo 5

Análisis clásico del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo

5.1. Búsqueda de una transformación canónica que simplifique el problema

A continuación, intentaremos mapear el problema del oscilador con frecuencia dependiente del tiempo a un oscilador con frecuencia constante. Para hacerlo, recurriremos al formalismo de las transformaciones canónicas.

El oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo $\omega(t)$ tiene el Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\omega^2(t)q^2. \quad (5.1)$$

La ecuación de movimiento que resulta de extremizar la acción es

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2(t) \right] q(t) = 0. \quad (5.2)$$

El Hamiltoniano obtenido mediante una transformación de Legendre sobre (5.1) es

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2(t)}{2}q^2. \quad (5.3)$$

De aquí se obtienen las ecuaciones canónicas

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \quad (5.4)$$

$$\dot{p} = -m\omega^2 q. \quad (5.5)$$

Para resolver la ecuación de movimiento utilizamos el ansatz

$$q(t) = f(t)[A\cos g(t) + B\sin g(t)], \quad (5.6)$$

lo cual resulta en las dos ecuaciones siguientes:

$$\ddot{f} - f\dot{g}^2 + \omega^2 f = 0, \quad (5.7)$$

$$2f\dot{g} + f\ddot{g} = 0. \quad (5.8)$$

Multiplicamos (5.8) por f e integramos, con lo cual se obtiene

$$f^2\dot{g} = \omega_0, \quad (5.9)$$

siendo ω_0 una constante de integración. Si sustituimos esto en (5.7) encontramos que

$$\ddot{f} + \omega^2 f - \frac{\omega_0^2}{f^3} = 0. \quad (5.10)$$

Para efectuar el mapeo mencionado necesitaremos un invariante $I(t)$ tal que $\dot{I}(t) = 0$; proponemos [8]

$$I(t) = \frac{1}{2m} [\alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + 2\gamma(t)qp], \quad (5.11)$$

con $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\gamma(t)$ funciones a determinar mediante

$$\dot{I}(t) = \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\} = 0. \quad (5.12)$$

Tenemos que

$$\dot{I}(t) = \frac{1}{2m} \left[\dot{\alpha}q^2 + \dot{\beta}p^2 + 2\dot{\gamma}qp - 2m\omega^2\gamma q^2 + \frac{2}{m}\gamma p^2 + 2\left(\frac{\alpha}{m} - \beta m\omega^2\right)qp \right] \quad (5.13)$$

$$= \frac{1}{2m} \left[(\dot{\alpha} - 2m\omega^2\gamma)q^2 + \left(\dot{\beta} + \frac{2}{m}\gamma\right)p^2 + 2\left(\dot{\gamma} + \frac{\alpha}{m} - \beta m\omega^2\right)qp \right]. \quad (5.14)$$

Igualando a cero cada término obtenemos las tres ecuaciones siguientes

$$\dot{\alpha} = 2m\omega^2\gamma, \quad (5.15)$$

$$\dot{\beta} = -\frac{2}{m}\gamma, \quad (5.16)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{1}{m}\alpha + m\omega^2\beta. \quad (5.17)$$

Introducimos ahora la función $b(t)$ dada por

$$\beta(t) = b^2(t), \quad (5.18)$$

por lo que al utilizar la segunda ecuación, obtenemos

$$\gamma = -mb\dot{b}. \quad (5.19)$$

Despejando α de la tercera ecuación y usando (5.19), encontramos

$$\alpha = m^2\omega^2b^2 + m^2(\dot{b}^2 + b\ddot{b}). \quad (5.20)$$

Tomando la derivada de esta ecuación podemos acomodarla de la forma

$$b\frac{d}{dt}(m^2\ddot{b} + m^2\omega^2b) + 3\dot{b}(m^2\ddot{b} + m^2\omega^2b) = 0. \quad (5.21)$$

Integrando, resulta

$$\ddot{b} + \omega^2b - \frac{\omega_0^2}{b^3} = 0. \quad (5.22)$$

donde ω_0 es una constante de integración.

Podemos ver que esta ecuación auxiliar es la misma que (5.10), así que identificamos $b(t) = f(t)$. Hay que notar que así como se puede escribir la solución a la ecuación de movimiento $q(t)$ en términos de la solución a la ecuación (5.22), también se puede escribir la solución a la ecuación auxiliar en términos de soluciones a la ecuación de movimiento [9].

Ahora, haciendo las sustituciones necesarias, encontramos que

$$\alpha = m^2\dot{b}^2 + \frac{m^2\omega_0^2}{b^2}, \quad (5.23)$$

$$\beta = b^2, \quad (5.24)$$

$$\gamma = -mb\dot{b}. \quad (5.25)$$

De esta manera, el invariante está dado por

$$I(t) = \frac{1}{2m} \left[\left(m^2\dot{b}^2 + \frac{m^2\omega_0^2}{b^2} \right) q^2 + b^2p^2 - 2mb\dot{b}qp \right], \quad (5.26)$$

o bien,

$$I(t) = \frac{1}{2m} (bp - mb\dot{q})^2 + \frac{m\omega_0^2}{2b^2} q^2. \quad (5.27)$$

Esta forma del invariante sugiere efectuar la transformación a nuevas variables (Q, P) tales que

$$Q = \frac{q}{b}, \quad P = bp - mb\dot{q}. \quad (5.28)$$

Se demuestra fácilmente que esta transformación es canónica, puesto que $\{Q, P\} = 1$. El invariante está dado, entonces, por

$$I = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} Q^2. \quad (5.29)$$

Para encontrar el nuevo Hamiltoniano K , debemos determinar la función generadora $F_2(q, P, t)$. Las ecuaciones de transformación son

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}, \quad (5.30)$$

por lo cual

$$F_2 = \int p dq + f_1(P) = \int \left(\frac{P}{b} + \frac{m\dot{b}}{b} q \right) dq + f_1(P) = \frac{1}{b} qP + \frac{m\dot{b}}{2b} q^2 + f_1(P) \quad (5.31)$$

y

$$F_2 = \int Q dP + f_2(q) = \int \frac{1}{b} q dP + f_2(q) = \frac{1}{b} qP + f_2(q). \quad (5.32)$$

Comparando estas dos ecuaciones concluimos que

$$F_2(q, P, t) = \frac{m\dot{b}}{2b} q^2 + \frac{1}{b} qP. \quad (5.33)$$

Ahora podemos encontrar K mediante

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (5.34)$$

Aquí, H y la derivada parcial de F_2 respecto al tiempo están escritos en términos de las nuevas variables (Q, P) . Por tanto,

$$K = \frac{1}{2m} \left(\frac{P}{b} + m\dot{b}Q \right)^2 + \frac{m\omega^2 b^2}{2} Q^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} \right) b^2 Q^2 - \frac{\dot{b}}{b} QP \quad (5.35)$$

$$= \frac{1}{2mb^2} P^2 + \frac{m}{2} b(\omega^2 b + \ddot{b}) Q^2 = \frac{P^2}{2mb^2} + \frac{m\omega_0^2}{2b^2} Q^2, \quad (5.36)$$

donde se ha usado la ecuación auxiliar (5.10). Entonces,

$$K = \frac{1}{b^2} \left(\frac{1}{2m} P^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} Q^2 \right) = \frac{I}{b^2}. \quad (5.37)$$

Las ecuaciones canónicas de Hamilton en las variables (Q, P) son

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial I}{\partial P}, \quad (5.38)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -\frac{1}{b^2} \frac{\partial I}{\partial Q}. \quad (5.39)$$

Estas ecuaciones sugieren cómo efectuar el mapeo al oscilador armónico con frecuencia constante ω_0 (con Hamiltoniano I): redefiniremos la variable temporal, de manera que

$$b^2 \frac{d}{dt} = \frac{d}{dT} = \frac{dt}{dT} \frac{d}{dt}. \quad (5.40)$$

De aquí concluimos que

$$\frac{dt}{dT} = b^2 \rightarrow T = \int^t \frac{dt'}{b^2(t')}. \quad (5.41)$$

Entonces, las ecuaciones de Hamilton en variables (Q, P, T) son

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{\partial I}{\partial P} = \frac{P}{m}, \quad (5.42)$$

$$\frac{dP}{dT} = -\frac{\partial I}{\partial Q} = -m\omega_0^2 Q. \quad (5.43)$$

Reconocemos aquí al oscilador armónico usual, por lo que hemos realizado el mapeo ya mencionado.

5.2. Formulación en el espacio fase extendido

Las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse como un sistema dinámico [22]. Definimos $\mathbf{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, de manera que

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial x_{n+i}}, \quad \dot{x}_{n+i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (5.44)$$

y, en forma conjunta,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (5.45)$$

Un sistema para el que \mathbf{f} no depende del tiempo se llama autónomo. Para este tipo de sistemas las trayectorias en el espacio fase no se intersectan, de manera que cada punto en el espacio fase pertenece a una sola curva. Cuando \mathbf{f} tiene dependencia explícita en el tiempo el sistema se llama no-autónomo y en este caso las curvas se cruzan, ya que dos estados pueden tener la misma posición y momento a tiempos diferentes. No obstante, cuando consideramos al tiempo como una variable más, el sistema se vuelve autónomo. Este nuevo espacio se llama espacio fase extendido.

La transformación (5.28) más el reescalamiento temporal (5.41) ya no son en conjunto una transformación canónica, por lo que si queremos preservar la noción de canonicidad tendremos que promover al tiempo t como una coordenada más. Es en este sentido que se habla del espacio fase extendido.

La acción para el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo es

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m\omega^2(t)}{2} q^2 \right] dt. \quad (5.46)$$

Ahora consideramos a t como otra coordenada e introducimos el parámetro τ que jugará el rol del tiempo, de tal manera que $t = t(\tau)$. La acción se escribe, entonces, como

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\frac{m}{2} \frac{q'^2}{t'} - \frac{m\omega^2(\tau)}{2} t' q^2 \right] d\tau, \quad (5.47)$$

donde la prima indica derivada respecto a τ . La matriz Hessiana \mathcal{H} de este Lagrangiano \tilde{L} es

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial q'^2} & \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial q' \partial t'} \\ \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial t' \partial q'} & \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial t'^2} \end{pmatrix} = \frac{m}{t'^3} \begin{pmatrix} t'^2 & -q' t' \\ -q' t' & q'^2 \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

y se cumple $\det \mathcal{H} = 0$, por lo cual el Lagrangiano es singular; esto quiere decir que habrá constricciones presentes. Los momentos conjugados a q y t son, respectivamente,

$$p = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q'} = \frac{mq'}{t'}, \quad (5.49)$$

$$p_t = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t'} = -\frac{m}{2} \frac{q'^2}{t'^2} - \frac{m\omega^2}{2} q^2. \quad (5.50)$$

Vemos que ahora tenemos un sistema autónomo, pues no aparece una dependencia explícita en τ .

De la primera relación despejamos q' y la sustituimos en la segunda, obteniendo la constricción primaria

$$\phi = p_t + H = p_t + \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \approx 0. \quad (5.51)$$

El Hamiltoniano total H_T es igual, entonces, a

$$H_T = \tilde{H} + \lambda\phi, \quad (5.52)$$

donde \tilde{H} es el Hamiltoniano asociado a \tilde{L} . Para construirlo, seguimos la prescripción usual de la transformación de Legendre:

$$\tilde{H} = pq' + p_t t' - \tilde{L} = t' \left(p_t + \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \right) \approx 0. \quad (5.53)$$

Por tanto,

$$H_T = \lambda\phi. \quad (5.54)$$

La constricción ϕ es de primera clase, puesto que

$$\phi' = \{\phi, H_T\} = \{\phi, \lambda\}\phi + \lambda\{\phi, \phi\} \approx 0. \quad (5.55)$$

Los paréntesis de Poisson se deben generalizar, de manera que si f_1 y f_2 son funciones del espacio fase extendido, entonces,

$$\{f_1, f_2\} = \frac{\partial f_1}{\partial q} \frac{\partial f_2}{\partial p} + \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial p_t} - \frac{\partial f_1}{\partial p} \frac{\partial f_2}{\partial q} - \frac{\partial f_1}{\partial p_t} \frac{\partial f_2}{\partial t}. \quad (5.56)$$

Las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

$$q' = \{q, H_T\} = \lambda \frac{p}{m}, \quad (5.57)$$

$$t' = \{t, H_T\} = \lambda, \quad (5.58)$$

$$p' = \{p, H_T\} = -\lambda m \omega^2 q, \quad (5.59)$$

$$p_t' = \{p_t, H_T\} = -\lambda m \omega \dot{q}^2. \quad (5.60)$$

Podemos ver que si hacemos la elección de norma $t = \tau$ y tomamos $\lambda = 1$, recuperamos las ecuaciones de Hamilton en el espacio fase (q, p) .

Finalmente, la acción (5.47) se escribe como

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (pq' + p_t t' - \lambda\phi) d\tau. \quad (5.61)$$

Ya estamos en posición de introducir las transformaciones canónicas en el espacio fase extendido. El vector

ζ de las nuevas coordenadas en función de las antiguas es

$$\zeta = \begin{pmatrix} Q \\ T \\ P \\ P_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{b} \\ \int_{t_0}^t \frac{ds}{b^2(s)} \\ bp - m\dot{b}q \\ G(q, t, p, p_t) \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

La matriz Jacobiana \mathbf{M} asociada a la transformación es

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & -\frac{\dot{b}}{b^2}q & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ -m\dot{b} & \dot{b}p - m\ddot{b}q & b & 0 \\ \frac{\partial G}{\partial q} & \frac{\partial G}{\partial t} & \frac{\partial G}{\partial p} & \frac{\partial G}{\partial p_t} \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

De la condición simpléctica (2.25) se desprende que

$$-\frac{1}{b^2} \frac{\partial G}{\partial q} - \frac{m\dot{b}^2 q}{b^2} + \frac{\dot{b}p - m\ddot{b}q}{b} = 0, \quad (5.64)$$

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\dot{b}q}{b} = 0, \quad (5.65)$$

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial G}{\partial p_t} = 1. \quad (5.66)$$

Estas ecuaciones se integran fácilmente, resultando

$$G = P_T = b^2 p_t + b\dot{b}qp - \frac{m}{2} b\ddot{b}q^2 - \frac{m}{2} \dot{b}^2 q^2. \quad (5.67)$$

La función generadora de esta transformación canónica es del tipo 2, esto es, $F_2 = F_2(q, t, P, P_T)$, y se encuentra integrando las ecuaciones de transformación de la misma manera que se hizo en la sección anterior. El resultado es

$$F_2(q, t, P, P_T) = P_T \int_{t_0}^t \frac{ds}{b^2(s)} + \frac{1}{b} qP + \frac{m\dot{b}}{2b} q^2. \quad (5.68)$$

Por tanto, el nuevo Hamiltoniano total K_T será igual a

$$K_T = H_T + \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial \tau}}_{=0}, \quad (5.69)$$

esto es,

$$K_T = \lambda(p_t + H) = \lambda \left[\frac{P_T}{b^2} + \frac{P^2}{2mb^2} + \frac{mb}{2} (\ddot{b} + \omega^2 b) Q^2 \right]. \quad (5.70)$$

Entonces, la acción en las nuevas variables, tomando en cuenta que $F = F_2 - QP - TP_T$, es

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[PQ' + P_T T' - \lambda \frac{1}{b^2} (P_T + I) \right] d\tau + \Delta F, \quad (5.71)$$

donde

$$\Delta F = \frac{m\dot{b}}{2b} q^2 \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}, \quad (5.72)$$

e

$$I(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{mb^3}{2} (\ddot{b} + \omega^2 b) Q^2. \quad (5.73)$$

Para que I sea el nuevo Hamiltoniano y también el invariante de Lewis, imponemos

$$\frac{dI}{dT} = 0, \quad \frac{dQ}{dT} = \frac{\partial I}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dT} = -\frac{\partial I}{\partial Q}. \quad (5.74)$$

Por tanto,

$$\frac{dI}{dT} = \frac{P}{m} \frac{dP}{dT} + \frac{mb^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} [b^3 (\ddot{b} + \omega^2 b)] Q^2 + mb^3 (\ddot{b} + \omega^2 b) Q \frac{dQ}{dT}. \quad (5.75)$$

Al usar las ecuaciones de movimiento se eliminan el primer y tercer término quedando únicamente

$$\frac{dI}{dT} = \frac{mb^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} [b^3 (\ddot{b} + \omega^2 b)] Q^2 = 0. \quad (5.76)$$

Entonces, se debe cumplir

$$\frac{\partial}{\partial t} [b^3 (\ddot{b} + \omega^2 b)] = 0, \quad (5.77)$$

esto es,

$$\ddot{b} + \omega^2 b - \frac{\omega_0^2}{b^3} = 0, \quad (5.78)$$

con ω_0 una constante de integración.

La constricción en las nuevas coordenadas es

$$\phi = \frac{1}{b^2} (P_T + I), \quad (5.79)$$

por lo que $P_T = -I$. Sustituyendo esto en la acción obtenemos

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (PQ' - IT') d\tau + \Delta F. \quad (5.80)$$

Finalmente, en términos del tiempo T ,

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(P \frac{dQ}{dT} - I \right) \frac{dT}{d\tau} d\tau + \Delta F = \int_{T_1}^{T_2} \left(P \frac{dQ}{dT} - I \right) dT + \Delta F. \quad (5.81)$$

Vemos, entonces, que del estudio del oscilador armónico con frecuencia variable en el espacio fase extendido podemos extraer de manera natural tanto el invariante asociado al sistema como la ecuación auxiliar. El término de frontera ΔF no aparece en el análisis hecho por Struckmeier [11, 19, 20]. Como veremos más adelante, este término jugará un papel determinante en la cuantización del sistema por integral de trayectoria.

Ahora discutiremos el teorema de Liouville tal como lo hace Arnold [23] y veremos que tiene como consecuencia que el volumen en el espacio fase extendido se conserve.

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Sea $\{g^t\}$

el grupo de transformaciones

$$\mathbf{g}^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})t + \mathcal{O}(t^2), \quad (t \rightarrow 0), \quad (5.82)$$

y sea $D(0)$ una región en el espacio de las \mathbf{x} con volumen $V(0)$. Además, sea $V(t)$ el volumen de la región $D(t) = g^t D(0)$. El teorema de Liouville establece que si la divergencia de \mathbf{f} es cero, entonces g^t preserva el volumen, es decir, $V(t) = V(0)$. Esto se debe a que se cumple la siguiente expresión:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=0} = \int_{D(0)} \nabla \cdot \mathbf{f} \, d^n x. \quad (5.83)$$

En el caso del espacio fase extendido, el vector \mathbf{x} está dado por

$$\mathbf{x} = (q, t, p, p_t), \quad (5.84)$$

y las derivadas (las componentes de \mathbf{f}) respecto a τ están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \{q, \lambda\phi\} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial p}, \\ \dot{p} &= \{p, \lambda\phi\} = -\lambda \frac{\partial \phi}{\partial q}, \\ \dot{t} &= \{t, \lambda\phi\} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial p_t}, \\ \dot{p}_t &= \{p_t, \lambda\phi\} = -\lambda \frac{\partial \phi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5.85)$$

por lo que

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\lambda \frac{\partial \phi}{\partial p_t} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(-\lambda \frac{\partial \phi}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial p_t} \left(-\lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0, \quad (5.86)$$

y, por tanto, se conserva el volumen en el espacio fase extendido. Nótese que no se hizo referencia a algún sistema en específico, por lo que este resultado es general.

5.3. Un ejemplo

A continuación, presentaremos un ejemplo que ilustra los diversos aspectos que se han estudiado.

Consideremos que la frecuencia del oscilador armónico está dada por

$$\omega(t) = \sqrt{\omega_0^2 e^{2At} - \frac{A^2}{4}}, \quad (5.87)$$

donde A es un parámetro real positivo con dimensiones de recíproco del tiempo y cumple con la condición $A < 2\omega_0$. Aquí vemos que recuperamos al oscilador armónico con frecuencia constante poniendo $\omega = \omega_0$, lo cual equivale a tener $b = 1$, esto es, el sistema posee amplitud y frecuencia constantes.

Regresando a la frecuencia dependiente del tiempo propuesta, notamos que la ecuación auxiliar (5.22) toma la forma

$$\ddot{b} + \left(\omega_0^2 e^{2At} - \frac{A^2}{4} \right) b - \frac{\omega_0^2}{b^3} = 0. \quad (5.88)$$

La solución es

$$b(t) = e^{-\frac{A}{2}t}. \quad (5.89)$$

La nueva variable temporal T es

$$T = \int^t \frac{dt'}{b^2(t')} = \int^t e^{At'} dt' = \frac{e^{At}}{A}, \quad (5.90)$$

de lo cual se sigue que, integrando (5.9),

$$g(t) = \int^t \frac{\omega_0 dt'}{f^2(t')} = \int^t \frac{\omega_0 dt'}{b^2(t')} = \frac{\omega_0}{A} e^{At}. \quad (5.91)$$

Por tanto, según (5.6), la solución a la ecuación de movimiento está dada por

$$q(t) = C_1 e^{-\frac{A}{2}t} \cos\left(\frac{\omega_0}{A} e^{At}\right) + C_2 e^{-\frac{A}{2}t} \sin\left(\frac{\omega_0}{A} e^{At}\right), \quad (5.92)$$

o bien,

$$q(t) = C_3 e^{-\frac{A}{2}t} \cos\left(\frac{\omega_0}{A} e^{At} + \alpha\right), \quad (5.93)$$

con

$$C_3 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \tan \alpha = -\frac{C_2}{C_1}. \quad (5.94)$$

Tomemos para lo siguiente $A = m = \omega_0 = 1$. Supongamos, además, las condiciones iniciales

$$q(0) = 2, \quad \dot{q}(0) = 0. \quad (5.95)$$

Si resolvemos para C_1 y C_2 , encontramos que

$$C_1 = 2\cos(1) - \sin(1) \approx 0.23913, \quad C_2 = \cos(1) + 2\sin(1) \approx 2.22324, \quad (5.96)$$

por lo cual,

$$C_3 = \sqrt{5} \approx 2.23607, \quad \alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \approx -1.46365. \quad (5.97)$$

De esta manera, la solución al sistema es

$$q(t) = \sqrt{5} e^{-\frac{t}{2}} \cos(e^t + \alpha), \quad (5.98)$$

$$p(t) = \dot{q}(t) = -\frac{\sqrt{5}}{2} e^{-\frac{t}{2}} \cos(e^t + \alpha) - \sqrt{5} e^{\frac{t}{2}} \sin(e^t + \alpha). \quad (5.99)$$

El Hamiltoniano (energía) $H(t) = \frac{1}{2}p^2(t) + \frac{1}{2}\omega^2(t)q^2(t)$ toma la siguiente forma:

$$H(t) = \frac{5}{2} \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \cos(e^t + \alpha) - e^{\frac{t}{2}} \sin(e^t + \alpha) \right]^2 + \frac{5}{2} e^{-t} \left(e^{2t} - \frac{1}{4} \right) \cos^2(e^t + \alpha). \quad (5.100)$$

Podemos ver de las expresiones analíticas para la posición, el momento y la energía, y también de sus

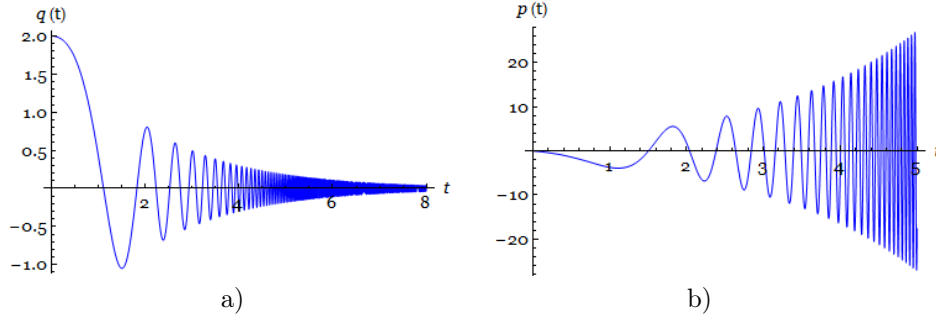


Figura 5.1: a) Posición en función del tiempo. b) Momento en función del tiempo.

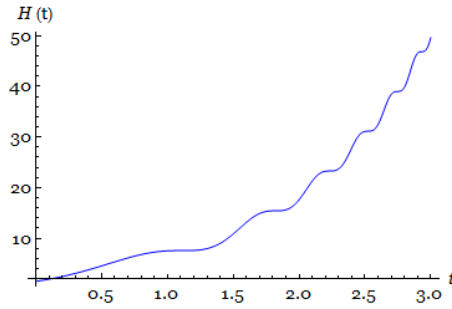


Figura 5.2: Energía en función del tiempo.

correspondientes gráficas (Figuras 5.1 y 5.2), que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \infty. \quad (5.101)$$

Ahora, analicemos la trayectoria de la partícula en el espacio fase. Como se puede apreciar en la Figura 5.3-a, la partícula comienza en $q = 2$ y su posición oscila alrededor de cero, con una amplitud que va decayendo; por otra parte, el alargamiento vertical corresponde al incremento del momento en cada oscilación. También, podemos notar que la curva se interseca a sí misma, lo cual es resultado de que el sistema no sea autónomo, como ya vimos en la sección 5.2.

Una pregunta que surge es si las áreas de las figuras que se forman al intersectarse la curva consigo misma son iguales, ya que podría parecer que el incremento de la dimensión vertical compensa a la disminución de la dimensión horizontal. Para averiguarlo, necesitamos encontrar esos puntos de intersección. Una curva paramétrica ($q = q(t), p = p(t)$) se cruza consigo misma cuando hay dos valores de t , $t = a$ y $t = b$, tales que se cumple

$$q(a) = q(b), \quad p(a) = p(b). \quad (5.102)$$

Por supuesto, pueden existir varios a y b que satisfacen estas ecuaciones, lo que significa que la curva se interseca a sí misma más de una vez. En nuestro caso, el par de ecuaciones resulta

$$\begin{cases} e^{-\frac{a}{2}} \cos(e^a + \alpha) = e^{-\frac{b}{2}} \cos(e^b + \alpha) \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{a}{2}} \cos(e^a + \alpha) + e^{\frac{a}{2}} \sin(e^a + \alpha) = \frac{1}{2} e^{-\frac{b}{2}} \cos(e^b + \alpha) + e^{\frac{b}{2}} \sin(e^b + \alpha) \end{cases} \quad (5.103)$$

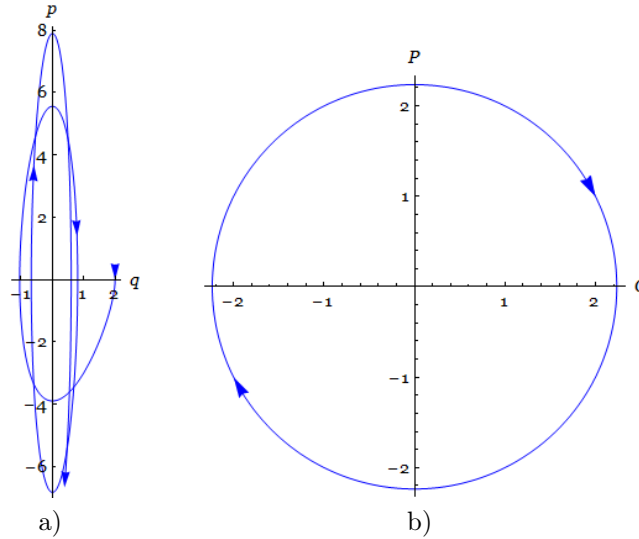


Figura 5.3: a) Trayectoria en el espacio fase (q, p) . b) Trayectoria en el espacio fase (Q, P) .

Resolviendo numéricamente encontramos¹

$$a_1 = 0.92777, \quad b_1 = 2.11051, \quad (5.104)$$

$$a_2 = 2.15902, \quad b_2 = 2.68682, \quad (5.105)$$

$$a_3 = 2.70142, \quad b_3 = 3.04515. \quad (5.106)$$

En la Figura 5.4 se pueden observar las tres regiones correspondientes a cada par de valores de t . Para calcular el área de cada región se utiliza el teorema de Green:

$$A = \iint_S dqdp = \oint_C p dq = \int_a^b p(t) \dot{q}(t) dt, \quad (5.107)$$

donde C es la curva que delimita a la región S . De esta manera, realizando numéricamente las integrales, encontramos que

$$A_1 = 14.1768, \quad A_2 = 15.0288, \quad A_3 = 15.2693. \quad (5.108)$$

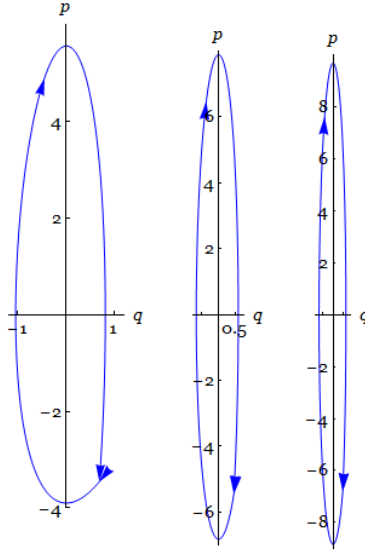
Es claro de estos resultados que el área no se conserva en cada ciclo, lo cual era de esperarse, puesto que solo se conserva para sistemas en los que $\omega(t)$ varíe lentamente (adiabáticos).

Ya vimos que mediante la transformación canónica (5.28) el oscilador con frecuencia variable $\omega(t)$ se mapea al oscilador con frecuencia constante ω_0 . A continuación, analicemos el efecto de la transformación para las condiciones iniciales que establecimos.

El tiempo inicial $t_0 = 0$ corresponde a $T_0 = e^{t_0} = 1$. Como el sistema transformado es de frecuencia constante ($\omega_0 = 1$), tenemos que

$$Q(T) = C_4 \cos(T + \beta), \quad P(T) = -C_4 \sin(T + \beta), \quad (5.109)$$

¹Se encontraron solamente tres intersecciones, puesto que se hace cada vez más difícil encontrar un número mayor debido a la naturaleza de la curva.


 Figura 5.4: Las tres primeras figuras cerradas en el espacio fase (q, p) .

con C_4 y β dos constantes a determinar.

Sabemos que

$$b(t) = e^{-t/2}, \quad \dot{b}(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2}, \quad (5.110)$$

por lo cual, evaluando la transformación en el tiempo inicial,

$$Q(1) = C_4 \cos(1 + \beta) = \frac{q(0)}{b(0)} = 2, \quad (5.111)$$

$$P(1) = -C_4 \sin(1 + \beta) = b(0)p(0) - \dot{b}(0)q(0) = 1. \quad (5.112)$$

A partir de estas dos ecuaciones podemos resolver para C_4 y β , obteniendo así la solución al movimiento en las coordenadas nuevas:

$$Q(T) = \sqrt{5} \cos(T + \alpha), \quad P(T) = -\sqrt{5} \sin(T + \alpha), \quad (5.113)$$

donde α está dado por (5.97).

La trayectoria en el espacio fase (Q, P) se observa en la Figura 5.3-b. Vemos, entonces, una gran simplificación en la descripción del movimiento en las nuevas coordenadas.

Ahora, extraeremos un resultado importante de la definición de transformación canónica. Sabemos que una transformación se dice canónica si se cumple (2.13), la cual, escrita en forma diferencial, es

$$pdq - Hdt = PdQ - Kdt + dF. \quad (5.114)$$

En nuestro caso, $F = F_2(q, P, t) - QP$. Además, se cumple que $Kdt = (I/b^2)(b^2 dT) = IdT$, por lo que

$$pdq - Hdt = PdQ - IdT + dF. \quad (5.115)$$

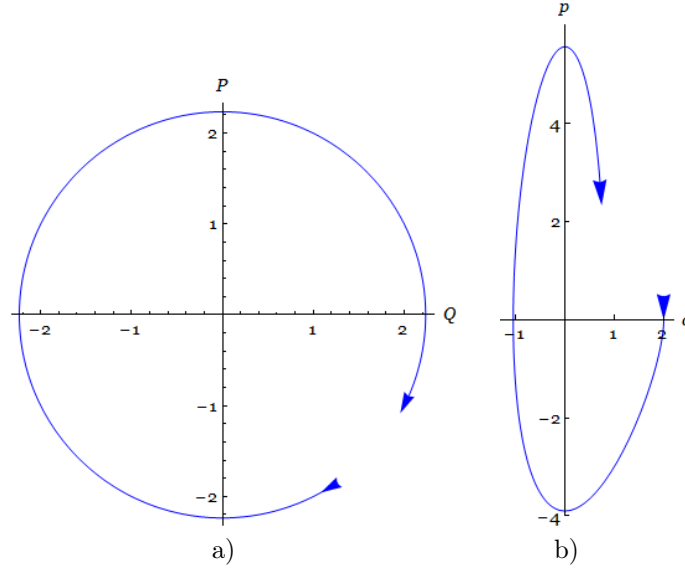


Figura 5.5: a) Trayectoria en (Q, P) correspondiente a un ciclo en el espacio fase (q, p) . b) Trayectoria en (q, p) correspondiente a un ciclo en el espacio fase (Q, P) .

Si integramos esta expresión a lo largo de un ciclo, ya sea en el espacio fase (q, p) o en (Q, P) , obtenemos

$$\oint pdq - \oint H dt = \oint PdQ - \oint I dT + \Delta F, \quad (5.116)$$

o bien, en términos de la notación del espacio fase extendido,

$$\oint pdq + \oint p_t dt = \oint PdQ + \oint P_T dT + \Delta F. \quad (5.117)$$

Hay que recalcar que la integral cerrada de dF en general no se anula, puesto que F depende explícitamente del tiempo. Las integrales que involucran a la energía deben interpretarse como el área debajo de la curva. Para ser más claros, tomamos un ciclo en el espacio fase (q, p) (el cual corresponde, en el espacio (Q, P) , a la Figura 5.5-a), definido entre $t = a$ y $t = b$; de esta manera, (5.116) se escribe como

$$\int_a^b p(t)\dot{q}(t)dt - \int_a^b H(t)dt = \int_{e^a}^{e^b} P(T)\dot{Q}(T)dT - \int_{e^a}^{e^b} I(T)dT + \Delta F. \quad (5.118)$$

Igualmente, podemos considerar el ciclo en el espacio fase (Q, P) (el cual corresponde, en el espacio (q, p) , a la Figura 5.5-b), definido entre $T = A$ y $T = B$. Con esto,

$$\int_{\ln A}^{\ln B} p(t)\dot{q}(t)dt - \int_{\ln A}^{\ln B} H(t)dt - \Delta F = \int_A^B P(T)\dot{Q}(T)dT - \int_A^B I(T)dT, \quad (5.119)$$

donde hemos pasado la diferencia de F del lado izquierdo por conveniencia.

Para el primer caso, integremos entre $a = 0.92777$ y $b = 2.11051$. Sabemos, además, que

$$F = \frac{\dot{b}q^2}{2b}, \quad (5.120)$$

por lo cual,

$$\Delta F = -\frac{1}{4} [q^2(b) - q^2(a)] = 0, \quad (5.121)$$

puesto que estamos considerando un ciclo en el espacio (q, p) . Si hacemos las integrales correspondientes, encontramos que

$$\int_a^b p(t)\dot{q}(t)dt - \int_a^b H(t)dt = \int_A^B P(T)\dot{Q}(T)dT - \int_A^B I(T)dT = 0. \quad (5.122)$$

Ahora, para el segundo caso, tomando $A = 1$ y $B = 1 + 2\pi$, las integrales del lado derecho pueden hacerse de manera sencilla:

$$\int_A^B P(T)\dot{Q}(T)dT = \text{área encerrada por la circunferencia} = 5\pi, \quad (5.123)$$

$$\int_A^B I(T)dT = I(1) \times 2\pi = \frac{5}{2} \times 2\pi = 5\pi, \quad (5.124)$$

donde se usó el hecho que $\dot{I} = 0$. Por tanto,

$$\int_{\ln A}^{\ln B} p(t)\dot{q}(t)dt - \int_{\ln A}^{\ln B} H(t)dt - \Delta F = \int_A^B P(T)\dot{Q}(T)dT - \int_A^B I(T)dT = 0. \quad (5.125)$$

Que esta suma de integrales se anule puede entenderse al agrupar el lado derecho, el cual no es más que la acción tomada en un ciclo:

$$S = \int_A^B (P\dot{Q} - I)dT. \quad (5.126)$$

En el capítulo siguiente, encontraremos que la acción para el oscilador armónico con frecuencia constante es

$$S = \frac{1}{2} [Q(B)\dot{Q}(B) - Q(A)\dot{Q}(A)] = \frac{1}{2} [Q(1 + 2\pi)\dot{Q}(1 + 2\pi) - Q(1)\dot{Q}(1)]. \quad (5.127)$$

De aquí, se ve claramente que la acción es cero, ya que Q y P son funciones periódicas de T .

Capítulo 6

Análisis cuántico del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo

6.1. Kernel del oscilador armónico con frecuencia variable

Como ya vimos, el kernel $K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle$ se calcula por medio de la integral de trayectoria

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \left[p_j (q_{j+1} - q_j) - \epsilon H \left(p_j, \frac{q_{j+1} + q_j}{2}, \frac{t_{j+1} + t_j}{2} \right) \right] \right\}, \quad (6.1)$$

donde ahora se supone que el Hamiltoniano puede depender explícitamente del tiempo.

Al abordar el problema del cálculo de una integral de trayectoria con Lagrangiano de la forma

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} W(t) q^2, \quad (6.2)$$

se separa $q(t)$ como la suma de la trayectoria clásica $q_{cl}(t)$ y una trayectoria cuántica $x(t)$, de tal manera que las condiciones a la frontera sean $q(t_a) = q_{cl}(t_a) = q_a$ y $q(t_b) = q_{cl}(t_b) = q_b$, con lo cual la parte cuántica queda restringida a anularse en los bordes, esto es, $x(t_a) = x(t_b) = 0$. Se puede mostrar que el kernel, entonces, se puede escribir como [25]

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar f_w^0(t_b, t_a)}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{cl} \right), \quad (6.3)$$

en donde S_{cl} es la acción clásica del sistema y $f_w^0(t, t_a)$ satisface la ecuación

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + W(t) \right] f_w^0(t, t_a) = 0 \quad (6.4)$$

con condiciones de frontera

$$f_w^0(t_a, t_a) = 0, \quad \dot{f}_w^0(t_a, t_a) = 1. \quad (6.5)$$

siendo esto consecuencia del Teorema de Gelfand-Yaglom.

Consideremos ahora el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo $\omega(t)$ con Lagrangiano

(5.1). Utilizaremos las abreviaciones $g(t) = g$, $g(t_a) = g_a$, $\dot{g}(t_a) = \dot{g}_a$, etc. Se comprueba fácilmente, entonces, que una función que satisface (6.4) y (6.5) con $W(t) = \omega^2(t)$ es

$$f_w^0(t, t_a) = \frac{\sin(g - g_a)}{\sqrt{\dot{g}\dot{g}_a}}. \quad (6.6)$$

Por tanto, de acuerdo a (6.3) obtenemos

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \sqrt{\frac{m\sqrt{\dot{g}_b\dot{g}_a}}{2\pi i\hbar \sin(g_b - g_a)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}\right). \quad (6.7)$$

Debemos determinar la acción clásica para dejar el kernel en términos de $f(t)$ y $g(t)$. De (5.6) y las condiciones $q(t_a) = q_a$, $q(t_b) = q_b$ podemos resolver para los coeficientes A y B , lo cual resulta en

$$q(t) = \frac{f(t)}{\sin(g_b - g_a)} \left(\frac{q_a}{f_a} \sin(g_b - g) - \frac{q_b}{f_b} \sin(g_a - g) \right). \quad (6.8)$$

Entonces, la acción clásica es

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2(t) q^2 \right] dt, \quad (6.9)$$

Escribimos ahora

$$\dot{q}^2 = \frac{d}{dt}(q\dot{q}) - q\ddot{q}, \quad (6.10)$$

y sustituimos en la acción clásica para obtener

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt}(q\dot{q}) dt - \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} q [\ddot{q} + \omega^2(t)q] dt = \frac{m}{2} (q_b \dot{q}_b - q_a \dot{q}_a), \quad (6.11)$$

donde se ha usado la ecuación de movimiento. Ahora se necesitan las velocidades, las cuales se determinan fácilmente a partir de (6.8). El resultado es

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{\sin(g_b - g_a)} \left[\frac{\dot{f}q_1}{f_1} \sin(g_2 - g) - \frac{\dot{f}q_2}{f_2} \sin(g_1 - g) - \frac{f\dot{g}q_1}{f_1} \cos(g_2 - g) + \frac{f\dot{g}q_2}{f_2} \cos(g_1 - g) \right]. \quad (6.12)$$

Sustituyendo en S_{cl} , obtenemos

$$S_{cl} = \frac{m}{2} \left[\frac{\dot{f}_b q_b^2}{f_b} - \frac{\dot{f}_a q_a^2}{f_a} + (\dot{g}_b q_b^2 + \dot{g}_a q_a^2) \cot(g_b - g_a) - \frac{2q_b q_a \sqrt{\dot{g}_a \dot{g}_b}}{\sin(g_b - g_a)} \right]. \quad (6.13)$$

6.2. Análisis del efecto de la transformación canónica en la integral de trayectoria

A continuación, analizaremos el efecto de la transformación canónica (5.28) en la medida de (6.1), lo cual proveerá un factor que permitirá relacionar los propagadores. El primer paso es reconocer que las q_j y

p_j que aparecen en (6.1) no satisfacen las ecuaciones de Hamilton, puesto que son variables de integración independientes. De esta forma, las ecuaciones de transformación (5.30) para el j -ésimo intervalo deben ser escritas como ecuaciones en diferencias [18], esto es,

$$p_j = \frac{\Delta F_2}{\Delta q_j} = \frac{F_2(q_{j+1}, P_j, \bar{t}_j) - F_2(q_j, P_j, \bar{t}_j)}{q_{j+1} - q_j}, \quad (6.14)$$

$$Q_j = \frac{\Delta F_2}{\Delta P_j} = \frac{F_2(q_j, P_{j+1}, t_j) - F_2(q_j, P_j, t_j)}{P_{j+1} - P_j}, \quad (6.15)$$

donde $\bar{t}_j = (t_{j+1} + t_j)/2$. Haciendo el cálculo, encontramos que

$$p_j = \frac{m\dot{b}(\bar{t}_j)}{b(\bar{t}_j)}q_j + \frac{1}{b(\bar{t}_j)}P_j + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (6.16)$$

$$Q_j = \frac{q_j}{b_j}, \quad (6.17)$$

con $b_j = b(t_j)$.

Vemos también que

$$\begin{aligned} b_{j+1}b_j &= \frac{1}{4} [(b_{j+1} + b_j)^2 - (b_{j+1} - b_j)^2] \\ &= \frac{1}{4} [(b_{j+1} + b_j)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \\ &= b^2(t_j) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = b^2(\bar{t}_j) + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Sustituyendo esto en (6.16) tenemos que

$$p_j = \frac{m\dot{b}(\bar{t}_j)}{\sqrt{b_{j+1}b_j}}q_j + \frac{1}{\sqrt{b_{j+1}b_j}}P_j + \mathcal{O}(\epsilon) = m\dot{b}(t_j)\sqrt{\frac{b_j}{b_{j+1}}}Q_j + \frac{1}{\sqrt{b_{j+1}b_j}}P_j + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (6.19)$$

Ahora calculamos el Jacobiano para el j -ésimo intervalo despreciando los términos $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$dq_j dp_j = \begin{vmatrix} b_j & 0 \\ m\dot{b}(t_j)\sqrt{\frac{b_j}{b_{j+1}}} & \frac{1}{\sqrt{b_{j+1}b_j}} \end{vmatrix} dQ_j dP_j = \sqrt{\frac{b_j}{b_{j+1}}} dQ_j dP_j. \quad (6.20)$$

Entonces,

$$\mathcal{D}q\mathcal{D}p = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \left(\prod_{j=1}^{N-1} dq_j \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \left(\prod_{j=1}^{N-1} \sqrt{\frac{b_j}{b_{j+1}}} dQ_j \frac{dP_j}{2\pi\hbar} \right). \quad (6.21)$$

Pero

$$dp_0 = \frac{\partial p_0}{\partial P_0} dP_0 + \frac{\partial p_0}{\partial Q_0} dQ_0 = \frac{dP_0}{\sqrt{b_1 b_0}}, \quad (6.22)$$

puesto que $Q_0 = q_0/b_0$ no tiene variación al ser un punto extremo. Notamos, además, que

$$\prod_{j=1}^{N-1} \sqrt{\frac{b_j}{b_{j+1}}} = \sqrt{\frac{b_1}{b_N}}, \quad (6.23)$$

de esta manera,

$$\mathcal{D}q\mathcal{D}p = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dP_0}{2\pi\hbar\sqrt{b_1b_0}} \sqrt{\frac{b_1}{b_N}} \left(\prod_{j=1}^{N-1} dQ_j \frac{dP_j}{2\pi\hbar} \right), \quad (6.24)$$

o bien,

$$\mathcal{D}q\mathcal{D}p = \frac{1}{\sqrt{b_0b_N}} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} dQ_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dP_j}{2\pi\hbar} = \frac{1}{\sqrt{b_a b_b}} \mathcal{D}Q\mathcal{D}P. \quad (6.25)$$

Recordemos que la definición de una transformación canónica es un cambio de variables (q, p) a nuevas variables (Q, P) tales que se cumpla

$$p\dot{q} - H = P\dot{Q} - K + \frac{dF}{dt}, \quad (6.26)$$

por lo cual, la acción se expresa como

$$S = \int_{t_a}^{t_b} (p\dot{q} - H) dt = \int_{t_a}^{t_b} \left(P\dot{Q} - K + \frac{dF}{dt} \right) dt. \quad (6.27)$$

Este resultado se obtiene también considerando la acción como una sumatoria sobre la partición $\{t_j\}$ con $j = 0, \dots, N$ y aplicando la transformación canónica (6.16). De hecho, esa es la forma correcta, puesto que las variables (q, p) en la integral de trayectoria no satisfacen las ecuaciones de Hamilton.

Ahora realizamos el cambio en el tiempo, con lo cual escribimos $dt = b^2 dT$, $\dot{Q} = Q'/b^2$ y $K = I/b^2$, donde la prima denota derivada respecto a T . Obtenemos, así

$$S = \int_{T_a}^{T_b} (PQ' - I) dT + F \Big|_{t_a}^{t_b} = \int_{T_a}^{T_b} (PQ' - I) dT + \Delta F. \quad (6.28)$$

Entonces, $S = S^{oas} + \Delta F$, con S^{oas} la acción para el oscilador armónico simple con frecuencia constante ω_0 . Con esto, podemos expresar el kernel para el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo en términos del oscilador con frecuencia constante:

$$\begin{aligned} \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle &= \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt (p\dot{q} - H) \right] = \frac{1}{\sqrt{b_a b_b}} \int \mathcal{D}Q\mathcal{D}P \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{T_a}^{T_b} dT (PQ' - I) \right] \\ &\quad \times \exp \left(\frac{i}{\hbar} \Delta F \right), \end{aligned} \quad (6.29)$$

esto es,

$$\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle = \frac{\exp \left(\frac{i}{\hbar} \Delta F \right)}{\sqrt{b_a b_b}} \langle Q_b, T_b | Q_a, T_a \rangle. \quad (6.30)$$

Para una función generadora del tipo 2, $F_2(q, P, t)$, la función F que aparece evaluada en los extremos es

$$F = F_2(q, P, t) - QP. \quad (6.31)$$

Sustituyendo (5.33) encontramos que

$$F = \frac{m\dot{b}}{2b}q^2 + \frac{1}{b}qP - QP = \frac{m\dot{b}}{2b}q^2. \quad (6.32)$$

Ahora, usamos el resultado conocido para la acción clásica del oscilador con frecuencia constante ω_0 [31],

$$S_{cl}^{oas} = \int_{T_a}^{T_b} (PQ' - I)dT = \frac{m\omega_0}{2\sin[\omega_0(T_b - T_a)]} \{ (Q_a^2 + Q_b^2)\cos[\omega_0(T_b - T_a)] - 2Q_aQ_b \}, \quad (6.33)$$

y escribimos todo en términos de $g(t)$ y $f(t)$, obteniendo

$$S_{cl}^{oas} = \frac{m}{2}(\dot{g}_a q_a^2 + \dot{g}_b q_b^2)\cot(g_b - g_a) - \frac{m\sqrt{\dot{g}_a \dot{g}_b} q_a q_b}{\sin(g_b - g_a)}. \quad (6.34)$$

Si añadimos ΔF encontramos que

$$S_{cl}^{oas} + \Delta F = \frac{m}{2}(\dot{g}_a q_a^2 + \dot{g}_b q_b^2)\cot(g_b - g_a) - \frac{m\sqrt{\dot{g}_a \dot{g}_b} q_a q_b}{\sin(g_b - g_a)} + \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{f}_b}{f_b} q_b^2 - \frac{\dot{f}_a}{f_a} q_a^2 \right), \quad (6.35)$$

lo cual concuerda con la acción clásica S_{cl} dada en (6.13).

A continuación, notemos que si empezamos con (6.3) aplicada al oscilador con frecuencia constante ω_0 , es decir, calculamos $\langle Q_b, T_b | Q_a, T_a \rangle$, obtenemos el resultado conocido [31]

$$\langle Q_b, T_b | Q_a, T_a \rangle = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\pi i \hbar \sin[\omega_0(T_b - T_a)]}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}^{oas}\right), \quad (6.36)$$

donde S_{cl}^{oas} está dada por (6.33).

Reescribiendo esto en términos de $f(t)$ y $g(t)$, usando (5.9), encontramos

$$\langle Q_b, T_b | Q_a, T_a \rangle = \sqrt{b_a b_b} \sqrt{\frac{m\sqrt{g_a g_b}}{2\pi i \hbar \sin(g_b - g_a)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \Delta F\right), \quad (6.37)$$

es decir,

$$\langle Q_b, T_b | Q_a, T_a \rangle = \sqrt{b_a b_b} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \Delta F\right) \langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle, \quad (6.38)$$

lo cual concuerda con (6.30). De esta manera, hemos comprobado la relación existente entre los propagadores.

6.3. Formulación en el espacio fase extendido

Nuestro objetivo en esta sección será obtener el kernel $K(q_b, t_b; q_a, t_a)$ a partir de la integral de trayectoria en el espacio fase extendido. La expresión (6.1) puede ser encontrada mediante la siguiente amplitud:

$$\langle q_b, t_b, \tau_b | q_a, t_a, \tau_a \rangle^{(0)} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}t \mathcal{D}p \mathcal{D}p_t \delta(t - g(\tau)) \delta(p_t + H) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau [pq' + p_t t' - \lambda(p_t + H)] \right\}, \quad (6.39)$$

donde $g(\tau)$ provee la norma temporal. Este kernel, en su forma particionada, es igual a (6.1).

$$\begin{aligned} \langle q_b, t_b, \tau_b | q_a, t_a, \tau_a \rangle^{(0)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \prod_{j=1}^{N-1} dt_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \prod_{j=0}^{N-1} dp_{t_j} \delta(t_j - g(\tau_j)) \delta(p_{t_j} + H_j) \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} [p_j(q_{j+1} - q_j) + p_{t_j}(t_{j+1} - t_j) - (\tau_{j+1} - \tau_j) \lambda \phi(\bar{q}_j, \bar{t}_j p_j, p_{t_j})] \right\}, \end{aligned} \quad (6.40)$$

con $\bar{q}_j = (q_{j+1} + q_j)/2$ y $H_j = H(\bar{q}_j, p_j, \bar{t}_j)$.

Evaluando la delta de Dirac en p_t obtenemos

$$\langle q_b, t_b, \tau_b | q_a, t_a, \tau_a \rangle^{(0)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j dt_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \delta(t_j - g(\tau_j)) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} [p_j(q_{j+1} - q_j) - H_j(t_{j+1} - t_j)] \right\}. \quad (6.41)$$

Ahora, evaluamos la condición de norma $t = g(\tau)$. Abusando de la notación, vemos que $p_j = p(\tau_j) = p(g^{-1}(t_j)) = p(t_j) = p_j$. Entonces,

$$\langle q_b, t_b, \tau_b | q_a, t_a, \tau_a \rangle^{(0)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} [p_j(q_{j+1} - q_j) - H_j(t_{j+1} - t_j)] \right\}. \quad (6.42)$$

Si definimos $\epsilon = t(\tau_{j+1}) - t(\tau_j) = t_{j+1} - t_j$, esta expresión se convierte en

$$\langle q_b, t_b, \tau_b | q_a, t_a, \tau_a \rangle^{(0)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} [p_j(q_{j+1} - q_j) - \epsilon H_j] \right\}. \quad (6.43)$$

Por tanto, hemos probado que la amplitud calculada en el espacio fase extendido con constricciones es igual a la amplitud en el espacio fase original.

A continuación, mostraremos que bajo una transformación canónica en la integral de trayectoria sobre el espacio fase extendido, la amplitud se puede escribir como un producto de dos factores: uno de ellos es el kernel del sistema independiente del tiempo, y el otro está relacionado con el término de frontera (5.72). Para lograr esto, hay que realizar la transformación canónica discretizada, tal como se vio en la sección anterior.

La transformación temporal $t_j \rightarrow T_j$ en cada intervalo está dada por

$$t_j = h(T_j), \quad (6.44)$$

donde h denota a la función inversa de $T(t)$. En nuestro caso,

$$T = \int_{t_0}^t \frac{ds}{b^2(s)}. \quad (6.45)$$

Si definimos $\bar{t}_j = (t_{j+1} + t_j)/2$, entonces, vemos que

$$\bar{t}_j = \frac{t(T_{j+1}) + t(T_j)}{2} \approx h(\bar{T}_j) \equiv \bar{h}_j \quad (6.46)$$

y

$$\Delta t_j \equiv t_{j+1} - t_j = b^2(\bar{t}_j)\Delta T_j = \bar{b}_j^2 \Delta T_j, \quad (6.47)$$

donde $\Delta T_j = T_{j+1} - T_j$ y $\bar{T}_j = (T_{j+1} + T_j)/2$. Con estas relaciones, una función del tiempo $F(t)$ cumple con

$$\bar{F}_j \equiv \frac{F(t_{j+1}) + F(t_j)}{2} \approx F(\bar{t}_j) \quad (6.48)$$

y

$$\Delta F_j \equiv F(t_{j+1}) - F(t_j) \approx \Delta t_j \dot{F}(\bar{t}_j) = \bar{b}_j^2 \dot{F}_j \Delta T_j. \quad (6.49)$$

La transformación para q es

$$q_j = b_j Q_j, \quad (6.50)$$

y, por tanto,

$$\bar{q}_j \equiv \frac{q_{j+1} + q_j}{2} = \bar{b}_j \bar{Q}_j + \frac{\bar{b}_j^2 \dot{b}_j \Delta Q_j \Delta T_j}{4}, \quad \Delta q_j = q_{j+1} - q_j = \bar{b}_j \Delta Q_j + \bar{b}_j^2 \dot{b}_j \bar{Q}_j \Delta T_j. \quad (6.51)$$

La ecuación de transformación para los momentos es

$$p_j \approx \frac{F_2(q_{j+1}, \bar{t}_j, P_j, P_{T_j}) - F_2(q_j, \bar{t}_j, P_j, P_{T_j})}{\Delta q_j}, \quad p_{t_j} \approx \frac{F_2(\bar{q}_j, t_{j+1}, P_j, P_{T_j}) - F_2(\bar{q}_j, t_j, P_j, P_{T_j})}{\Delta t_j}. \quad (6.52)$$

Un cálculo similar al de la sección anterior muestra que

$$p_j \approx \frac{P_j}{\bar{b}_j} + \frac{m \dot{\bar{b}}_j q_j}{\bar{b}_j}, \quad p_{t_j} \approx \frac{P_{T_j} \Delta T_j}{\Delta t_j} + \Delta \left(\frac{1}{b_j} \right) \frac{\bar{q}_j P_j}{\Delta t_j} + \frac{m b_{j+1} - m b_j}{2 \Delta t_j} \bar{q}_j^2. \quad (6.53)$$

Para ver el efecto de la transformación canónica en la medida, debemos partir los productos del espacio fase y aplicar la regla de transformación de coordenadas mediante el Jacobiano, tal como ya se hizo. Obtenemos

$$\mathcal{D}q \mathcal{D}t \mathcal{D}p \mathcal{D}p_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j dt_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j dp_{t_j}}{2\pi\hbar} = \prod_{j=1}^{N-1} b_j^3 dQ_j dT_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dP_j dP_{T_j}}{2\pi\hbar b_j^3}. \quad (6.54)$$

Las deltas de Dirac transforman como

$$\prod_{j=1}^{N-1} \delta(t_j - g(\tau_j)) \prod_{j=0}^{N-1} \delta(p_{t_j} + H_j) = \prod_{j=1}^{N-1} \frac{\delta(T_j - T_j^{(0)})}{b^2(g_j)} \prod_{j=0}^{N-1} \bar{b}_j^2 \delta(P_{T_j} + I_j), \quad (6.55)$$

en donde

$$T_j^{(0)} = \int_{t_{0_j}}^{g_j} \frac{ds}{b^2(s)}. \quad (6.56)$$

El invariante I_j para el intervalo j -ésimo está dado por

$$I_j = \frac{P_j^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} \bar{Q}_j^2. \quad (6.57)$$

A primer orden en ΔQ_j y ΔT_j :

$$p_j \Delta q_j \approx P_j \Delta Q_j + \bar{b}_j \dot{\bar{b}}_j P_j \bar{Q}_j \Delta T_j + m \bar{b}_j \dot{\bar{b}}_j Q_j \Delta Q_j + m \bar{b}_j^2 \dot{\bar{b}}_j^2 \bar{Q}_j^2 \Delta T_j, \quad (6.58)$$

$$p_{t_j} \Delta t_j \approx P_{T_j} \Delta T_j + \Delta \left(\frac{1}{b_j} \right) P_j \left(\bar{b}_j \bar{Q}_j + \frac{\bar{b}_j^2 \dot{\bar{b}}_j \Delta Q_j \Delta T_j}{4} \right) + \frac{m b_{j+1} - m b_j}{2 b_{j+1} b_j} \left(\bar{b}_j^2 \bar{Q}_j^2 + \frac{\bar{b}_j^2 \dot{\bar{b}}_j \bar{Q}_j \Delta Q_j \Delta T_j}{2} \right). \quad (6.59)$$

Sumando e insertando la relación $P_{T_j} = -I_j$, obtenemos

$$p_j \Delta q_j + p_{t_j} \Delta t_j \approx P_j \Delta Q_j - I(\bar{Q}_j, P_j) \Delta T_j + m \bar{b}_j \dot{\bar{b}}_j \bar{Q}_j \Delta Q_j + \frac{m \bar{b}_j^2}{2} (\bar{b}_j \ddot{\bar{b}}_j + \dot{\bar{b}}_j^2) \Delta T_j \bar{Q}_j^2. \quad (6.60)$$

Además, de manera análoga a la sección anterior, podemos deducir que

$$\bar{b}_j = b(\bar{T}_j) = \sqrt{b(T_j) b(T_{j+1})}. \quad (6.61)$$

Ahora, usamos estos resultados y evaluamos las deltas de Dirac en la integral de trayectoria, reteniendo solo términos lineales en ΔT_j y en ΔQ_j . De aquí, se sigue que

$$\begin{aligned} \langle q_b, t_b, \tau_b | q_a, t_a, \tau_a \rangle^{(0)} &= \sqrt{\frac{1}{b(t_a) b(t_b)}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \frac{m b \dot{b}}{2} Q^2 \Big|_{T_a}^{T_b} \right) \int \mathcal{D}Q \mathcal{D}P \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{T_a}^{T_b} dT \left(P \frac{dQ}{dT} - I \right) \right] \\ &= \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \Delta F}}{\sqrt{b_a b_b}} \langle Q_b, T_b | Q_a, T_a \rangle, \end{aligned} \quad (6.62)$$

el cual es el resultado que habíamos deducido en el espacio fase original.

6.4. Análisis de Lewis

El análisis cuántico del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo comienza asumiendo que existe un operador hermitiano con dependencia explícita del tiempo, $I(t)$, que satisface

$$\dot{I}(t) = 0. \quad (6.63)$$

El problema de eigenvalores para este operador es

$$I(t) |\lambda, t\rangle = \lambda |\lambda, t\rangle, \quad (6.64)$$

donde se puede demostrar que los eigenvalores λ son independientes del tiempo y los eigenestados son tales que

$$\langle \lambda, t | \lambda', t \rangle = \delta_{\lambda \lambda'}. \quad (6.65)$$

Para resolver la ecuación de Schrödinger se propone la solución

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} e^{i\alpha_{\lambda}(t)} |\lambda, t\rangle, \quad (6.66)$$

con $\alpha_\lambda(t)$ una fase a determinar.

Vemos claramente que esta propuesta es simplemente una combinación lineal de los autoestados de $I(t)$. Si ahora sustituimos este ansatz en la ecuación de Schrödinger, encontramos que $\alpha_\lambda(t)$ debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\hbar \frac{d\alpha_\lambda(t)}{dt} = \langle \lambda, t | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \lambda, t \rangle. \quad (6.67)$$

Consideremos ahora el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo. Haciendo un análisis similar al de la sección 5.1 podemos obtener el invariante $I(t)$ para el sistema cuántico pidiendo que $\dot{I}(t) = 0$. El resultado es

$$I(t) = \frac{1}{2m} (bp - m\dot{b}q)^2 + \frac{m\omega_0^2}{2b^2} q^2, \quad (6.68)$$

donde q y p son operadores que satisfacen $[q, p] = i\hbar$, y por tanto, hay que tener cuidado con el ordenamiento al expandir el binomio al cuadrado. La ecuación auxiliar que satisface $b(t)$ es (5.22):

$$\ddot{b} + \omega^2 b - \frac{\omega_0^2}{b^3} = 0. \quad (6.69)$$

Vemos de la forma del invariante una posible factorización. Para lograrla introducimos los operadores a y a^\dagger dados por

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}} \left[\frac{m\omega_0}{b} q + i(bp - m\dot{b}q) \right], \quad (6.70)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}} \left[\frac{m\omega_0}{b} q - i(bp - m\dot{b}q) \right]. \quad (6.71)$$

Estos operadores satisfacen

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad I = \hbar\omega_0 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (6.72)$$

De aquí se sigue que los autoestados de $a^\dagger a$ son también autoestados de $I(t)$; los llamaremos $|n, t\rangle$:

$$a^\dagger a |n, t\rangle = n |n, t\rangle, \quad I(t) |n, t\rangle = \lambda_n |n, t\rangle, \quad \lambda_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.73)$$

De las propiedades anteriores se sigue que

$$a |n, t\rangle = \sqrt{n} |n-1, t\rangle, \quad a^\dagger |n, t\rangle = \sqrt{n+1} |n+1, t\rangle. \quad (6.74)$$

Para resolver (6.67) debemos encontrar los elementos de matriz $\langle n, t | H | n, t \rangle$ y $\langle n, t | \partial / \partial t | n, t \rangle$. Para lograr esto, los operadores q y p deben expresarse en términos de a y a^\dagger :

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} b(a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \left[\left(\frac{m\omega_0}{b} - im\dot{b} \right) a^\dagger - \left(\frac{m\omega_0}{b} + im\dot{b} \right) a \right]. \quad (6.75)$$

Entonces, elevando al cuadrado ambos operadores, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle n, t | H | n, t \rangle &= \frac{1}{2m} \langle n, t | p^2 | n, t \rangle + \frac{m\omega^2}{2} \langle n, t | q^2 | n, t \rangle \\ &= \left(\frac{\hbar\omega_0}{2b^2} + \frac{\hbar\dot{b}^2}{2\omega_0} + \frac{\hbar\omega^2 b^2}{2\omega_0} \right) (\langle n, t | a^\dagger a | n, t \rangle + \langle n, t | n, t \rangle) \end{aligned}$$

$$= \frac{\hbar}{2\omega_0} \left(\dot{b}^2 + \omega^2 b^2 + \frac{\omega_0^2}{b^2} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (6.76)$$

Sabemos que

$$a^\dagger |n-1, t\rangle = \sqrt{n} |n, t\rangle. \quad (6.77)$$

Derivando respecto al tiempo esta relación encontramos que

$$\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} |n-1, t\rangle + a^\dagger \frac{\partial}{\partial t} |n-1, t\rangle = \sqrt{n} \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle. \quad (6.78)$$

Ahora, proyectamos con el bra $\langle n, t|$:

$$\langle n, t| \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle = \langle n-1, t| \frac{\partial}{\partial t} |n-1, t\rangle + \frac{1}{\sqrt{n}} \langle n, t| \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} |n-1, t\rangle. \quad (6.79)$$

Si usamos que

$$\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}} \left[-\frac{m\omega_0 \dot{b}}{b} q - i\dot{b}p + im\ddot{b}q \right], \quad (6.80)$$

entonces, sustituyendo q y p en términos de a y a^\dagger , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} &= -\frac{\dot{b}}{2b}(a + a^\dagger) + \frac{\dot{b}}{2m\omega_0} \left[\left(\frac{m\omega_0}{b} - im\dot{b} \right) a^\dagger - \left(\frac{m\omega_0}{b} + im\dot{b} \right) a \right] + \frac{i\ddot{b}}{2\omega_0}(a + a^\dagger), \\ &= \left(-\frac{\dot{b}}{b} - \frac{i\dot{b}^2}{2\omega_0} + \frac{i\ddot{b}}{2\omega_0} \right) a + \left(-\frac{i\dot{b}^2}{2\omega_0} + \frac{i\ddot{b}}{2\omega_0} \right) a^\dagger. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Con esto,

$$\langle n, t| \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} |n-1, t\rangle = \frac{i\sqrt{n}}{2\omega_0} (b\ddot{b} - \dot{b}^2), \quad (6.82)$$

y, por tanto,

$$\langle n, t| \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle = \langle n-1, t| \frac{\partial}{\partial t} |n-1, t\rangle + \frac{i}{2\omega_0} (b\ddot{b} - \dot{b}^2), \quad (6.83)$$

o bien,

$$\langle n, t| \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle = \langle 0, t| \frac{\partial}{\partial t} |0, t\rangle + \frac{in}{2\omega_0} (b\ddot{b} - \dot{b}^2). \quad (6.84)$$

Escogemos el elemento de matriz del operador diferencial evaluado en el estado base de tal manera que se cumpla $\alpha_n(t) = -\omega t(n + 1/2)$ cuando $\omega = \omega_0$; de esta manera,

$$\langle 0, t| \frac{\partial}{\partial t} |0, t\rangle = \frac{i}{4\omega_0} (b\ddot{b} - \dot{b}^2). \quad (6.85)$$

Entonces,

$$\langle n, t| \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle = \frac{i}{2\omega_0} (b\ddot{b} - \dot{b}^2) \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (6.86)$$

Ahora, sustituimos los resultados obtenidos en (6.67),

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = i\langle n, t| \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle - \frac{1}{\hbar} \langle n, t| H |n, t\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\omega_0}(b\ddot{b} - \dot{b}^2) \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2\omega_0} \left(\dot{b}^2 + \omega^2 b^2 + \frac{\omega_0^2}{b^2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{\omega_0}{b^2} \left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{6.87}
\end{aligned}$$

donde se usó la ecuación auxiliar que satisface $b(t)$.

Finalmente, integramos para obtener

$$\alpha_n(t) = -\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^t \frac{dt'}{b^2(t')}. \tag{6.88}$$

6.5. Fase de Berry para el oscilador armónico generalizado

A continuación, deduciremos la fase de Lewis para el oscilador armónico generalizado y de ahí extraeremos la fase de Berry. La importancia del método que se presentará [16] radica en que se pueden obtener correcciones a la fase de Berry a orden arbitrario.

El Hamiltoniano de este sistema es

$$H(t) = \frac{1}{2} [X(t)q^2 + Y(t)(qp + pq) + Z(t)p^2]. \tag{6.89}$$

Consideremos primero el caso clásico. Proponemos la siguiente transformación canónica

$$Q = A(t)q + B(t)p, \quad P = C(t)q + D(t)p, \tag{6.90}$$

y pedimos que el invariante $I(t)$ esté dado por

$$I = \frac{1}{2}(Q^2 + P^2). \tag{6.91}$$

Hay que notar que la canonicidad implica $AD - BC = 1$. Entonces,

$$I = \frac{1}{2} [(A^2 + C^2)q^2 + 2(AB + CD)qp + (B^2 + D^2)p^2]. \tag{6.92}$$

Según las ecuaciones de Hamilton,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = Zp + Yq, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -Xq - Yp, \tag{6.93}$$

por lo que, desarrollando la igualdad $\dot{I}(t) = 0$ y usando este resultado, obtenemos

$$\begin{aligned}
&(A\dot{A} + A^2Y + C\dot{C} + C^2Y - ABX - CDX)q^2 + (A^2Z + C^2Z + \dot{A}B + A\dot{B} + \dot{C}D + C\dot{D} - B^2X - D^2X)qp \\
&+ (ABZ + CDZ + B\dot{B} - B^2Y + D\dot{D} - D^2Y)p^2 = 0. \tag{6.94}
\end{aligned}$$

Los factores que preceden a las coordenadas deben ser cero independientemente de los otros, por lo cual tenemos tres ecuaciones. Resulta que se pueden simplificar enormemente si tomamos $B = 0$. De la condición

del determinante se desprende que $AD = 1$, por tanto, si nombramos $b = D$, se debe cumplir $A = 1/b$. Sustituyendo esto en las tres ecuaciones obtenemos

$$\frac{1}{b} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{b} \right) + \frac{Y}{b^2} - CXb + C\dot{C} + C^2Y = 0, \quad (6.95)$$

$$C\dot{b} + \dot{C}b + \frac{Z}{b^2} - b^2X + C^2Z = 0, \quad (6.96)$$

$$b\dot{b} + CZb - b^2Y = 0. \quad (6.97)$$

De la tercera podemos despejar C :

$$C = \frac{Yb}{Z} - \frac{\dot{b}}{Z}, \quad (6.98)$$

y, sustituyendo en la segunda encontramos que

$$\frac{1}{b} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{b}}{Z} \right) - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{Y}{Z} \right) - \frac{XZ - Y^2}{Z} + \frac{Z}{b^4} \right] = 0. \quad (6.99)$$

Esta es la ecuación auxiliar que debe satisfacer $b(t)$. La transformación canónica está dada, entonces, por

$$Q = \frac{q}{b}, \quad P = b \left(p + \frac{Y}{Z}q \right) - \frac{\dot{b}}{Z}q, \quad (6.100)$$

y el invariante es

$$I(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{q^2}{b^2} + \left[b \left(p + \frac{Y}{Z}q \right) - \frac{\dot{b}}{Z}q \right]^2 \right\}. \quad (6.101)$$

Vemos que este método para encontrar el invariante es más sencillo y directo que el de Lewis, y obtenemos como caso particular el oscilador armónico con frecuencia variable (salvo un factor de masa) si tomamos $\omega_0 = 1$, $X(t) = m\omega^2(t)/2$, $Y(t) = 0$ y $Z(t) = 1/m$.

Para el caso cuántico se procede de manera similar, obteniendo el mismo invariante pero ahora cuidando el orden de los productos de q con p . Se definen, entonces, los operadores a y a^\dagger como

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[\frac{q}{b} + i \left(bp + \frac{bY - \dot{b}}{Z}q \right) \right], \quad (6.102)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[\frac{q}{b} - i \left(bp + \frac{bY - \dot{b}}{Z}q \right) \right]. \quad (6.103)$$

Estos operadores satisfacen $[a, a^\dagger] = 1$ y el invariante se puede escribir como

$$I = \hbar \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (6.104)$$

Al igual que en el caso del oscilador con frecuencia variable, los autoestados de $a^\dagger a$ son autoestados de $I(t)$, y los denotaremos como $|n, t\rangle$. De la relación de conmutación se sigue que

$$a|n, t\rangle = \sqrt{n}|n-1, t\rangle, \quad a^\dagger|n, t\rangle = \sqrt{n+1}|n+1, t\rangle. \quad (6.105)$$

Además, los eigenvalores de $I(t)$ están dados por

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.106)$$

Seguimos un procedimiento similar al de la sección anterior para encontrar los elementos de matriz $\langle n, t|H|n, t\rangle$ y $\langle n, t|\partial/\partial t|n, t\rangle$, obteniendo

$$\langle n, t|H|n, t\rangle = \frac{\hbar}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[Xb^2 - 2Yb \left(\frac{bY - \dot{b}}{Z}\right) + \left(\frac{bY - \dot{b}}{Z}\right)^2 Z + \frac{Z}{b^2} \right], \quad (6.107)$$

$$\langle n, t|\frac{\partial}{\partial t}|n, t\rangle = \langle 0, t|\frac{\partial}{\partial t}|0, t\rangle + \frac{in}{2} \left[\frac{bY - \dot{b}}{Z} \dot{b} - b \frac{d}{dt} \left(\frac{bY - \dot{b}}{Z}\right) \right]. \quad (6.108)$$

Escogemos el elemento de matriz evaluado en el estado base como

$$\langle 0, t|\frac{\partial}{\partial t}|0, t\rangle = \frac{i}{4} \left[\frac{bY - \dot{b}}{Z} \dot{b} - b \frac{d}{dt} \left(\frac{bY - \dot{b}}{Z}\right) \right]; \quad (6.109)$$

de esta manera,

$$\langle n, t|\frac{\partial}{\partial t}|n, t\rangle = \frac{i}{2} \left[\frac{bY - \dot{b}}{Z} \dot{b} - b \frac{d}{dt} \left(\frac{bY - \dot{b}}{Z}\right) \right] \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (6.110)$$

Así pues, (6.67) toma la siguiente forma:

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = -\frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{bY - \dot{b}}{Z} \dot{b} - b \frac{d}{dt} \left(\frac{bY - \dot{b}}{Z}\right) + Xb^2 - 2Yb \left(\frac{bY - \dot{b}}{Z}\right) + \left(\frac{bY - \dot{b}}{Z}\right)^2 Z + \frac{Z}{b^2} \right], \quad (6.111)$$

la cual, después de usar la ecuación auxiliar, se reduce a

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{Z}{b^2}. \quad (6.112)$$

Integrando, obtenemos

$$\alpha_n(t) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^t \frac{Z(t')}{b^2(t')} dt'. \quad (6.113)$$

Ahora, introduciremos el tratamiento de Morales [16] para relacionar la fase de Lewis $\alpha_n(t)$ con la fase de Berry $\gamma_n(C)$ para el oscilador armónico generalizado. En particular, nosotros iremos a primer orden para encontrar la siguiente corrección a la fase de Berry. Debemos notar que la fase de Lewis es exacta, mientras que la fase de Berry resulta de hacer la aproximación adiabática, por lo que es interesante averiguar cuál es el siguiente término en la serie adiabática; de hecho, encontraremos que en un caso en específico la corrección está presente mientras que la fase de Berry se anula.

Sabemos que la fase de Berry para un ciclo C en el espacio de parámetros con periodo T está dada por

$$\gamma_n(C) = i \int_0^T \langle \psi_n(t) | \frac{d}{dt} | \psi_n(t) \rangle dt, \quad (6.114)$$

donde $|\psi_n(t)\rangle$ es tal que

$$H(t)|\psi_n(t)\rangle = E_n(t)|\psi_n(t)\rangle. \quad (6.115)$$

Por otro lado, la fase de Lewis se encuentra al resolver la ecuación (6.67):

$$\hbar \frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \langle n, t | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | n, t \rangle, \quad (6.116)$$

donde $|n, t\rangle$ son los eigenestados del operador invariante $I(t)$.

De acuerdo a la sección anterior, para un Hamiltoniano dado por

$$H(t) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\Omega^2(t)}{2}q^2, \quad (6.117)$$

cuya ecuación de movimiento es

$$\ddot{q} + \Omega^2(t)q = 0, \quad (6.118)$$

los elementos de matriz necesarios son

$$\langle n, t | H | n, t \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\dot{b}^2 + \Omega^2 b^2 + \frac{1}{b^2} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (6.119)$$

y

$$\langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle = \frac{i}{2} (b\ddot{b} - \dot{b}^2) \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (6.120)$$

donde $b(t)$ satisface la ecuación auxiliar

$$\ddot{b} + \Omega^2(t)b - \frac{1}{b^3} = 0. \quad (6.121)$$

Si sustituimos estos resultados en la ecuación que satisface $\alpha_n(t)$ obtenemos

$$\alpha_n(t) = - \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{dt'}{b^2(t')}. \quad (6.122)$$

Por otro lado, la ecuación de movimiento para el oscilador armónico generalizado es

$$\ddot{q} - \frac{\dot{Z}}{Z} \dot{q} + \left(XZ - Y^2 + \frac{\dot{Z}Y - \dot{Y}Z}{Z} \right) q = 0. \quad (6.123)$$

Ya hemos visto en la sección 4.2.5 cómo eliminar el término que contiene a la primera derivada. En este caso, se hace el cambio de variable $Q = Z^{-\frac{1}{2}}q$, lo cual resulta en

$$\ddot{Q} + \Omega^2(t)Q = 0, \quad (6.124)$$

donde hemos definido

$$\Omega^2(t) = XZ - Y^2 + \frac{\dot{Z}Y - \dot{Y}Z}{Z} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{Z}}{Z} - \frac{3}{4} \frac{\dot{Z}^2}{Z^2}. \quad (6.125)$$

Por tanto, se ha reducido el problema al del oscilador armónico con frecuencia variable $\Omega(t)$. De esta

manera, podemos aplicar (6.122) para obtener la fase de Lewis del problema original (oscilador armónico generalizado). A tal efecto, definimos la variable τ (tiempo lento) como $\tau = \epsilon t$, con ϵ un parámetro pequeño. Entonces,

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \epsilon \frac{dQ}{d\tau}, \quad (6.126)$$

y, por tanto, (6.124) toma la forma

$$Q'' + \frac{\Omega^2(\tau)}{\epsilon^2} Q = 0, \quad (6.127)$$

donde la prima denota derivada respecto a τ .

Definimos $\tilde{\Omega}^2(\tau) = \Omega^2(\tau)/\epsilon^2$, esto es,

$$\tilde{\Omega}^2(\tau) = \frac{1}{\epsilon^2} \left[XZ - Y^2 + \epsilon \frac{Z'Y - Y'Z}{Z} + \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} \frac{Z''}{Z} - \frac{3}{4} \frac{Z'^2}{Z^2} \right) \right]. \quad (6.128)$$

La ecuación auxiliar se escribe como

$$\epsilon^2 b'' + \tilde{\Omega}^2(\tau) b - \frac{1}{b^3} = 0. \quad (6.129)$$

Esta ecuación es un caso particular de los sistemas cuasiperiódicos estudiados por Kruskal [40] mediante un análisis asintótico. La propuesta para resolverla es asumir que $b(t)$ está dada como una serie en potencias de ϵ^2 :

$$b(t) = b_0(t) + b_2(t)\epsilon^2 + b_4(t)\epsilon^4 + \dots \quad (6.130)$$

El término no lineal de la ecuación auxiliar lo podemos expandir a segundo orden, de manera que

$$b^{-3} = b_0^{-3} \left(1 + \frac{b_2}{b_0} \epsilon^2 + \dots \right)^{-3} = b_0^{-3} \left(1 - \frac{3b_2}{b_0} \epsilon^2 + \dots \right). \quad (6.131)$$

Entonces,

$$\left(\tilde{\Omega}^2 b_0 - b_0^{-3} \right) + \left(b_0'' + \tilde{\Omega}^2 b_2 + \frac{3b_2}{b_0^4} \right) \epsilon^2 + \dots = 0. \quad (6.132)$$

Igualando cada término a cero obtenemos

$$b_0 = \tilde{\Omega}^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.133)$$

$$b_2 = -\frac{b_0''}{4\tilde{\Omega}^2} = \frac{1}{8} \tilde{\Omega}^{-\frac{7}{2}} \tilde{\Omega}'' - \frac{3}{16} \tilde{\Omega}^{-\frac{9}{2}} \tilde{\Omega}'^2. \quad (6.134)$$

Más órdenes en la expansión se pueden consultar en [9].

Para calcular la fase de Lewis $\alpha_n(\tau)$ necesitamos b^{-2} . A tal efecto, realizamos de nuevo una expansión binomial:

$$b^{-2} = b_0^{-2} \left(1 + \frac{b_2}{b_0} \epsilon^2 + \dots \right)^{-2} = b_0^{-2} - \frac{2b_2}{b_0^3} \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (6.135)$$

o bien, en términos de Ω ,

$$b^{-2} = \tilde{\Omega} + \left(\frac{3}{8} \tilde{\Omega}^{-3} \tilde{\Omega}'^2 - \frac{1}{4} \tilde{\Omega}^{-2} \tilde{\Omega}'' \right) \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (6.136)$$

A continuación, hay que determinar el orden en ϵ de cada término. Notamos que Ω es de orden ϵ^{-1} , por lo que $\tilde{\Omega}^{-2} \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$ y $\tilde{\Omega}^{-3} \sim \mathcal{O}(\epsilon^3)$. Analizando las derivadas, se puede probar que $\tilde{\Omega}' \sim \mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ y $\tilde{\Omega}'' \sim \mathcal{O}(\epsilon^{-1})$.

Por tanto,

$$\tilde{\Omega}^{-3}\tilde{\Omega}'^2\epsilon^2 \sim \mathcal{O}(\epsilon^3)\mathcal{O}(\epsilon^{-2})\mathcal{O}(\epsilon^2) \sim \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (6.137)$$

$$\tilde{\Omega}^{-2}\tilde{\Omega}''\epsilon^2 \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)\mathcal{O}(\epsilon^{-1})\mathcal{O}(\epsilon^2) \sim \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (6.138)$$

y, entonces,

$$b^{-2} = \tilde{\Omega} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (6.139)$$

Si sustituimos este resultado en (6.122) obtenemos

$$\alpha_n(\tau) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^\tau \frac{d\tau'}{b^2(\tau')} = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^\tau \tilde{\Omega}(\tau') d\tau' + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (6.140)$$

Ahora expandimos $\tilde{\Omega}(\tau)$ a segundo orden en ϵ usando la serie binomial:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(\tau) &= \frac{1}{\epsilon}(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \epsilon \frac{Z'Y - Y'Z}{Z(XZ - Y^2)} + \epsilon^2 \frac{1}{XZ - Y^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{Z'}{Z}\right)' - \frac{1}{4} \left(\frac{Z'}{Z}\right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\epsilon}(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{Z'Y - Y'Z}{2Z(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} + \epsilon \left[\frac{\left(\frac{Z'}{Z}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{Z'}{Z}\right)^2}{4(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(Z'Y - Y'Z)^2}{8Z^2(XZ - Y^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (6.141)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \alpha_n(\tau) &= -\frac{1}{\epsilon} \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^\tau (XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}} d\tau' + \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^\tau \frac{Y'Z - Z'Y}{Z(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} d\tau' \\ &\quad - \epsilon \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^\tau \left[\frac{\left(\frac{Z'}{Z}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{Z'}{Z}\right)^2}{4(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(Z'Y - Y'Z)^2}{8Z^2(XZ - Y^2)^{\frac{3}{2}}} \right] d\tau' + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (6.142)$$

De aquí podemos extraer las diferentes contribuciones para un ciclo C realizado en un tiempo T :

- Fase dinámica

$$\theta_n(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(\tau') d\tau' = -\frac{1}{\epsilon} \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^T (XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}} d\tau'. \quad (6.143)$$

- Fase de Berry

$$\gamma_n(C) = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^T \frac{Y'Z - Z'Y}{Z(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} d\tau'. \quad (6.144)$$

- Corrección de primer orden a la fase de Berry

$$\phi_n(C) = -\epsilon \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^T \left[\frac{\left(\frac{Z'}{Z}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{Z'}{Z}\right)^2}{4(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(Z'Y - Y'Z)^2}{8Z^2(XZ - Y^2)^{\frac{3}{2}}} \right] d\tau'. \quad (6.145)$$

Vemos que la fase dinámica es la esperada, puesto que, según la sección 4.2.5, $E_n = (n + 1/2)\hbar(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}$. El factor ϵ^{-1} que aparece enfrente nos dice que el efecto dinámico es grande debido a que $\epsilon \rightarrow 0$. Además, la fase de Berry es justamente la misma que ya habíamos calculado en (4.87). Lo novedoso es la corrección a la fase de Berry dada por $\phi_n(C)$; es una corrección pequeña ya que es de primer orden en ϵ , sin embargo, hay un caso en que la fase de Berry se anula y la corrección $\phi_n(C)$ entra en juego: cuando $Y = 0$ (no hay término cruzado qp). En este caso, persisten la fase dinámica y la corrección, aunque no sabemos si términos de mayor orden en ϵ también estén presentes.

Capítulo 7

Conclusiones y perspectivas

A lo largo de este trabajo hemos explorado el concepto de adiabaticidad en el contexto clásico y cuántico. Primero, introdujimos las nociones de transformaciones canónicas y de integral de trayectoria, las cuales son necesarias para abordar el tratamiento de sistemas adiabáticos. Después, expusimos el tratamiento de Dirac para sistemas con constricciones [28], el cual nos sería útil a la postre para entender estas nociones en el espacio fase extendido. Luego, dedujimos el ángulo de Hannay en el contexto clásico y vimos la aparición de la fase de Berry en mecánica cuántica. Con esto en mente, pudimos atacar el problema del oscilador armónico generalizado y obtener el ángulo de Hannay y la fase de Berry correspondiente. Observamos, además, que para este caso el ángulo de Hannay puede extraerse de manera sencilla de la fase geométrica.

Posteriormente, emprendimos la tarea de mapear el oscilador armónico con frecuencia variable a un oscilador armónico con frecuencia constante. Esto fue posible gracias a una transformación canónica generalizada. Vimos que esta transformación cobraba sentido en el espacio fase extendido, siendo esta una contribución del presente trabajo. También propusimos un ejemplo concreto que ayudó a apreciar el efecto de la transformación sobre el sistema, en particular, encontramos que para ciclos en el espacio fase original la cantidad $p dq + p_t dt$ se conserva.

En la parte cuántica, siguiendo el método de Chetouani [18], incorporamos la transformación canónica a la integral de trayectoria para relacionar el kernel del oscilador con frecuencia variable con el del oscilador con frecuencia constante. Posteriormente, otra contribución fue realizar este análisis en el espacio fase extendido, llegando a la conclusión que hay que introducir las constricciones a la integral de trayectoria para obtener el resultado conocido de Dittrich [25].

Una contribución más fue que, a partir del tratamiento de Morales de la fase de Lewis, logramos extraer la corrección a la fase de Berry al siguiente orden en el parámetro adiabático ϵ y, en particular, vimos que para cierto caso la corrección estaba presente aún cuando la fase de Berry se anulara.

Concluimos, entonces, que el tratamiento de sistemas dependientes del tiempo puede entenderse de una mejor manera en el espacio fase extendido, en donde las nociones de transformación canónica y kernel deben generalizarse de manera natural al incluir el tiempo como una variable más. El precio que hay que pagar es la introducción de constricciones, las cuales pueden ser tratadas por el método de Dirac. Queda abierta la cuestión de relacionar la corrección a la fase de Berry con alguna cantidad geométrica que tenga que ver con la manera en que se miden distancias en el espacio de parámetros, del mismo modo que la dos-forma $F_{ij}^{(n)}$ tiene que ver con el tensor métrico cuántico. Además, para un trabajo futuro, se puede aplicar el análisis en el espacio fase extendido para potenciales más generales que el del oscilador armónico.

Referencias

- [1] D. Gómez y E. J. S. Villaseñor, *Ann. Phys.* **324**, 1360 (2009).
- [2] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963).
- [3] W. Paul, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 531 (1990).
- [4] L. S. Brown, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 527 (1991).
- [5] N. D. Birrell y P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press (1984).
- [6] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, The University of Chicago Press (1994).
- [7] V. Mukhanov y S. Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity*, Cambridge University Press (2007).
- [8] H. R. Lewis y W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969).
- [9] H. R. Lewis, *J. Math. Phys.* **9**, 1976 (1968).
- [10] H. R. Lewis y P. G. L. Leach, *J. Math. Phys.* **23**, 2371 (1982).
- [11] J. Struckmeier y C. Riedel, *Phys. Rev. E* **64**, 026503 (2001).
- [12] M. Lutzky, *Phys. Lett.* **68A**, 3 (1978).
- [13] J. Struckmeier y C. Riedel, *Phys. Rev. E* **66**, 066605 (2002).
- [14] J. H. Hannay, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, 221 (1985).
- [15] M. V. Berry, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, 15 (1985).
- [16] D. A. Morales, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21**, 889 (1988).
- [17] P. G. L. Leach, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 2695 (1990).
- [18] L. Chetouani, L. Guechi y T. F. Hammann, *Phys. Rev. A* **40**, 1157 (1989).
- [19] J. Struckmeier y C. Riedel, *Ann. Phys. (Leipzig)* **11**, 15 (2002).
- [20] J. Struckmeier, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 1257 (2005).
- [21] J. Struckmeier, *Int. J. Mod. Phys. A* **18**, 79 (2009).
- [22] J. S. Török, *Analytical Mechanics with an Introduction to Dynamical Systems*, John Wiley & Sons (2000).
- [23] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, segunda edición (1989).
- [24] A. Anderson, *Ann. Phys.* **232**, 292 (1994).
- [25] W. Dittrich y M. Reuter, *Classical and Quantum Dynamics*, Springer, tercera edición (2001).

- [26] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, tercera edición (2000).
- [27] C. L. Siegel y J. K. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer (1995).
- [28] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Dover Publications (2001).
- [29] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag (1982).
- [30] M. Henneaux y C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press (1991).
- [31] R. P. Feynman y A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Dover Publications, edición corregida (2005).
- [32] M. G. Calkin, *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*, World Scientific (1996).
- [33] D. Chruściński y A. Jamiołkowski, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Springer Science+Business Media (2004).
- [34] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, cuarta edición (1958).
- [35] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics Volume I*, John Wiley & Sons (1977).
- [36] A. Das, *Field Theory A Path Integral Approach*, World Scientific, segunda edición (2006).
- [37] W. Greiner y J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer (1996).
- [38] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Pearson Prentice Hall, segunda edición (2005).
- [39] J. P. Provost y G. Vallee, *Commun. Math. Phys.* **76**, 289 (1980).
- [40] M. Kruskal, *J. Math. Phys.* **3**, 806 (1962).
- [41] S. N. Rasband, *Dynamics*, John Wiley & Sons (1983).
- [42] J. J. Sakurai y J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, segunda edición (2011).
- [43] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific, quinta edición (2009).