



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Caracterización Experimental y Analítica de un vórtice dipolar usando la técnica PIV y el dipolo de Lamb-Chaplygin en aguas someras.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

LUIS ALEJANDRO URÍZAR VALLE

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ERICK JAVIER LÓPEZ SÁNCHEZ



Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Agradecimientos	6
Introducción	9
1. Marco teórico	13
1.1. Fundamentos de la dinámica de fluidos	13
1.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad	14
1.1.2. Formulación función de corriente - vorticidad (2D)	15
1.1.3. Función de Corriente y Vorticidad ($\psi - \omega$)	15
1.1.4. Circulación	17
1.1.5. El gasto	18
1.2. Dipolo de Lamb-Chaplygin	19
2. Experimento	27
2.1. Técnica de medición (PIV)	27
2.2. Detalles del Montaje	27
3. Resultados y Análisis	35
3.1. Resultados y Análisis	35
3.1.1. Campo de velocidades	36
3.1.2. Velocidad u	36
3.1.3. Velocidad v	38
3.1.4. Vorticidad ω	40
3.1.5. Circulación Γ	42
3.1.6. Función de Corriente ψ	44
3.1.7. Cálculo de la constante k	45

4. Discusiones y Conclusiones	49
4.1. Discusiones	49
4.2. Conclusiones	50
Bibliografía	51
A. Ecuación de Poisson y Condiciones de Frontera	55
B. Uso de PIVlab	57
B.1. Software de Análisis	57
B.1.1. La exactitud del análisis de PIVlab	62
C. Datos de PIVlab	63
D. Circulación	65
E. Teoría Potencial	67
E.0.2. Analogía con la Teoría Electromagnética	67

Agradecimientos

Agradezco de manera especial a mi director de tesis, Dr. Erick Javier López Sánchez, por la oportunidad y enseñanzas, incluidos los regaños, por su paciencia en las muchas veces que me explicó la misma cosa hasta que la entendí, sin molestarse ni quejarse; al Dr. Gerardo Ruiz Chavarría por los apoyos de todo tipo, pero sobre todo por su gran calidad humana.

A mis sinodales los doctores Gerardo Ruiz Chavarría, Abraham Medina Ovando, Argelia Pérez Pacheco y al M. en C. Edgar Vázquez Luis por la revisión, comentarios y sugerencias que enriquecieron esta tesis.

A la maestra Margarita Sánchez y Sánchez, por creer en mí y poner un ladrillo más en la edificación de mi vida académica.

A mis colegas y amigos, José Antonio Trejo Gutiérrez, Roberto Ponce Juárez, Viridiana Ponce Juárez, Orlando Hernández, José Martín Panting Magaña, Uriel Jiménez, Roberto Hinojosa, Sergio Hernández Zapata, Pablo de la Mora y Palomar por el apoyo brindado cuando les solicité alguna explicación o les pedí algún favor y por darme tips para la programación o graficación, comentarios, etc., y por la buena convivencia y los buenos momentos.

A mis profesores en la carrera: Bertha Oda Noda, Antonio Guzmán, Enriqueta Hernández, Eugenia Marmolejo, Augusto Cabrera, Fidencio Galicia.

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo y el estímulo de mi bondadosa madre Ma. Estela Valle Damián y los buenos consejos de mi difunto padre Alfonso Urizar Vasconcelos.

No puedo dejar de agradecer a mis 5 hermanas: Laura Graciela, Marcela Mireya, Clau-

dia Consuelo, María Estela y Martha Elena y 9 hermanos: Sergio, Antonino, Alberto, José Antonio, Alfonso, Raymundo, Rogelio, Ángel y Mauricio Alfonso de los cuáles he recibido un montón de enseñanzas de vida.

Agradezco el apoyo a la DGAPA-UNAM bajo los proyectos IN116312 “Vorticidad y ondas no lineales en fluidos” y IN115315 “Ondas y estructuras coherentes en dinámica de fluidos”

Introducción

Desde el trabajo fundacional de Helmholtz (1858) en el que se formularon algunos teoremas acerca de vórtices, el tema de la dinámica de vorticidad ha seguido atrayendo a muchos fluidistas. Es interesante observar que en este campo, más que en cualquier otra rama de la mecánica de fluidos, muchos descubrimientos independientes fueron hechos tanto de las ecuaciones que gobiernan ciertos vórtices como de algunas soluciones analíticas exactas de los mismos. Un ejemplo es el análisis del problema de tres-vórtices, estudiado por W. Grobli en la tesis publicada en 1877 (para una detallada revisión, ver Aref et al. 1992): un buen número de los resultados descritos en su tesis fueron redescubiertos casi ¡un siglo más tarde!

Lo mismo parece haber ocurrido con dos artículos publicados por el ruso científico S.A. Chaplygin a comienzos del siglo pasado. En estos documentos se analizó el flujo debido a un vórtice elíptico puesto en un campo de flujo ambiente con vorticidad uniforme (Chaplygin 1899) y la estructura de un vórtice dipolar circular con una distribución de vorticidad continua de acuerdo con la relación lineal $\psi \propto \omega$ (Chaplygin 1903).

Chaplygin (1903) presenta una solución analítica de un vórtice dipolar con vorticidad distribuido dentro de un área circular de acuerdo con la relación lineal $\psi - \omega$. Al parecer, no era consciente de los textos de Lamb (1895) y Viena (1900), en que se hicieron breves comentarios acerca de la posibilidad de tener este tipo de soluciones. Chaplygin presentó soluciones analíticas tanto para el vórtice dipolar en movimiento constante a lo largo de un camino recto y para el movimiento del dipolo de manera constante a lo largo de una pista circular. En el primer caso, su solución es idéntica a la descrita por Lamb (1895) y se describe en más detalle por Lamb (1906); sin embargo, Chaplygin (1903) proporciona un análisis mucho más detallado de las características del dipolo. Por otra parte, Chaplygin dio una generalización para el caso de un dipolo no simétrico moviéndose de manera constante a lo largo de una línea recta.

Cabe señalar que las publicaciones de Chaplygin fueron hechas en ruso, que es probablemente la razón por la que gran parte de sus importantes contribuciones han escapado a la atención de la comunidad de fluidistas. A pesar de que los artículos de Chaplygin

fueron publicados hace bastante tiempo, en nuestra opinión, son todavía interesantes y valiosos para el experto en dinámica de fluidos de hoy en día.

Los remolinos son constantemente observados en la naturaleza y en muchos procesos físicos. Por ejemplo, en época de huracanes se producen ciclones por el vapor de agua que viene del oceano ecuatorial, los tornados se generan por las diferencias de temperatura de las capas de aire en ciertas latitudes. Hay remolinos que se forman en las piletas en el desagüe. En procesos físicos que no son tan naturales también se pueden observar a diferentes escalas y de diferentes tipos, por ejemplo, los aros que produce un fumador son del tipo toroidal (una dona), los torbellinos que se generan en el despegue de un avión o los que se producen en las aspas de una hélice son tipo filamentario, etc.

Cuando un fluido sale de un canal a un dominio abierto, debido a la vorticidad producida en las paredes sólidas del canal se forma un par de vórtices contra-rotatorios al que se le conoce como vórtice dipolar, o simplemente dipolo (Velasco, 2003). Esta estructura es importante en el transporte de masa.

Generalmente los vórtices a gran escala se observan en fotografías satelitales, como los huracanes o remolinos en el océano; en las desembocaduras de ríos en lagunas, en el mar o en ríos, etc. Esas fotografías sólo dan información en dos dimensiones, por lo que se puede caracterizar a este tipo de estructuras en forma bidimensional. Ver figura 1.

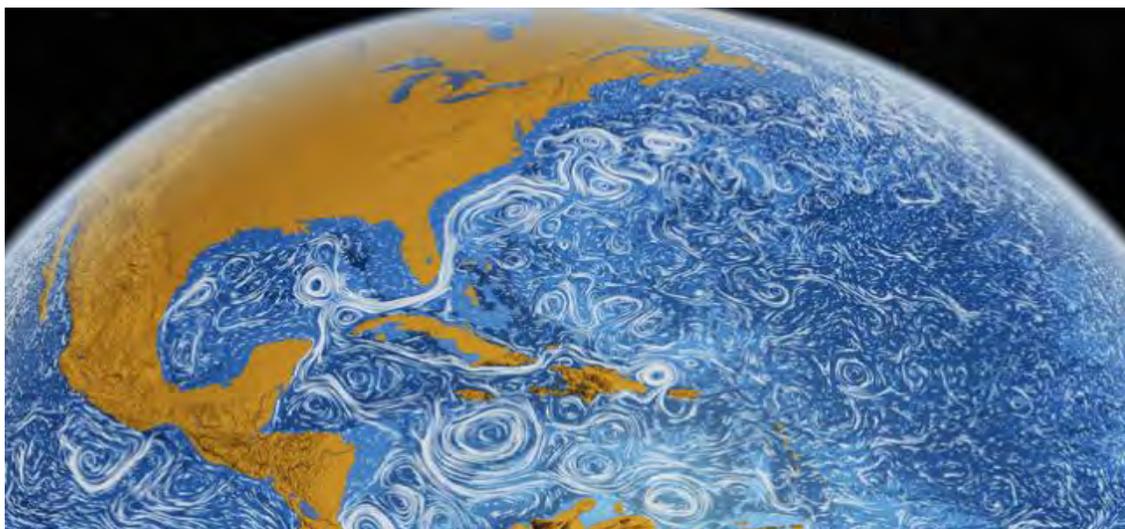


Figura 1: Remolinos o vórtices de mar abierto en el Atlántico Tropical Norte. Tomada de La NASA (2013).

Los fenómenos físicos se estudian tanto de forma teórica (analítica o numéricamente) como de forma experimental (realizando observaciones en laboratorio o *in situ*). En esta tesis se pretende hacer un estudio completo, realizando un experimento en laboratorio y comparando los resultados con un modelo analítico aceptado, de un proceso común en la naturaleza: la formación de un dipolo a la salida de un canal, en aguas someras. Para hacer esto, se usó una técnica de Velocimetría por Imágenes de Partículas, PIV (por sus siglas en inglés) que es un método óptico de la visualización del flujo usado en la educación y la investigación. Se utiliza para obtener mediciones instantáneas de velocidad y propiedades relacionadas en fluidos. El fluido se siembra con partículas trazadoras que, para partículas suficientemente pequeñas, se supone que siguen fielmente la dinámica del flujo. El fluido con partículas arrastradas se ilumina para que las partículas sean visibles. El movimiento de las partículas de siembra se utiliza para calcular la velocidad y la dirección (el campo de velocidad) del flujo que se está estudiando.

Una de las preguntas que surgen en este trabajo es si:

“Concordarán los datos experimentales con el modelo analítico de un vórtice dipolar de Lamb-Chaplygin en aguas someras”.

El **objetivo general** es caracterizar el campo de velocidades experimental de un dipolo usando la técnica experimental PIV, y compararlo con el modelo analítico de

Lamb-Chaplygin (Chaplygin, 1903, 2007).

Los **objetivos específicos** son los siguientes:

- Desarrollar un experimento en el que se genere un vórtice dipolar de tal manera que se pueda medir el campo de velocidades usando la técnica de PIV.
- Deducir las expresiones para la vorticidad y la función de corriente usando el modelo teórico de Lamb-Chaplygin.
- Comparar datos experimentales con resultados teóricos.
- Demostrar que la técnica PIV puede ser usada en docencia.

Esta tesis está organizada de la siguiente forma: En el capítulo 1 se describe el marco teórico de la producción de vorticidad de una manera muy general. Asimismo, se deducen las expresiones analíticas de la velocidad, vorticidad y función de corriente del modelo de Lamb-Chaplygin. En el capítulo 2 se describe el desarrollo del experimento, las técnicas de medición usadas, y se muestran los resultados experimentales. En el capítulo 3 se realiza el análisis de resultados, tanto numéricos como experimentales y se hace la comparación entre ellos. Finalmente en el capítulo 4 se hace una discusión sobre los resultados y se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. Fundamentos de la dinámica de fluidos

La teoría matemática de la dinámica de los fluidos comienza en el siglo XVII con el trabajo de Isaac Newton, quien fue el primero en aplicar sus leyes de la mecánica al movimiento de los fluidos (Navier, 1822). Más tarde Leonhard Euler escribió por primera vez en 1755 las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de un fluido ideal, es decir, en ausencia de disipación debido a la interacción entre moléculas (Stokes, 1845). Finalmente, Claude Navier en 1822 e, independientemente, Gabriel Stokes en 1845 introdujeron en el modelo el término viscoso y llegaron a las ecuaciones que hoy conocemos como “ecuaciones de Navier-Stokes” (Stokes, 1845).

Existen dos maneras de describir el movimiento de un fluido, la representación euleriana en la que los “parámetros del flujo se dan como una variable de campo, es decir, como una función del tiempo y del espacio. Es decir, $f = f(x, y, z, t)$. Una partícula en una posición y tiempo dados, debe tener cierta densidad, velocidad, energía, etcétera y, al transcurrir el tiempo, partículas diferentes ocuparían esa posición” (Smith, 2003). Y la representación lagrangiana cada partícula se identifica por su posición en un tiempo dado, es decir, (x_0, y_0, z_0, t_0) y se observa en el tiempo. Es decir, $f = f(x_0, y_0, z_0, t - t_0)$. Es difícil seguir el movimiento de las posiciones de todas las partículas, porque sus posiciones relativas cambian continuamente en el tiempo. La descripción euleriana es la más usada, puesto que es más fácil de implementar. Debido a eso, en este trabajo se usará dicha descripción para la obtención de resultados.

Existen varias formas de obtener el campo de velocidades de un dipolo analíticamente.

Una de ellas es calcular el campo de velocidades a partir de suponer que hay dos vórtices filamentosos. Este cálculo se hace mediante la ley de Biot-Savart (Kundu y Cohen, 2002). Sin embargo, un modelo más realista es el del dipolo de Lamb-Chaplygin (Chaplygin, 1903, 2007) que se obtiene a partir de la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas (Arfken, 1985; Asmar, 2005) para la función de corriente (Lamb, 1932; Landau y Lifschitz, 2001; Guyon *et al*, 2001). Esta segunda opción es la que se utilizó para modelar dicho dipolo.

El dipolo de Lamb-Chaplygin es una solución exacta de la ecuación de Helmholtz. La vorticidad está confinada a un círculo de radio R , y dentro de este círculo hay dos vórtices de tamaño finito. La solución desarrollada en este trabajo muestra que el dipolo de Lamb-Chaplygin (Chaplygin, 2007) es una buena aproximación para describir la etapa inicial de los vórtices (no su creación, sino cuando el dipolo ya está completamente formado) para números de Reynolds moderados.

1.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad

Las ecuaciones de Navier-Stokes reciben su nombre de Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes. Se trata de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones gobiernan la atmósfera terrestre, las corrientes oceánicas y el flujo alrededor de vehículos o proyectiles y, en general, cualquier fenómeno en el que se involucren fluidos newtonianos.

Las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad son las condiciones principales que deben satisfacer los fluidos al moverse. Se deducen de la combinación del balance de momento y la conservación de la masa, respectivamente, y son las ecuaciones de movimiento para un fluido, en el cual los efectos de la viscosidad son importantes. Para un fluido newtoniano las ecuaciones de movimiento son (López Sánchez. , 2013):

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \nu \left(\frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \nabla^2\vec{u} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u}) = 0 \quad (1.2)$$

donde $\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ es la derivada material, \vec{u} es el campo de velocidades, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática, μ es la viscosidad dinámica, ρ es la densidad del fluido y P la presión. La ecuación (1.1) es una ecuación vectorial, y forma las ecuaciones de Navier-

Stokes (son tantas ecuaciones como dimensiones se consideren), y la ecuación (1.2) es la ecuación de continuidad.

Si el flujo es incompresible las ecuaciones (1.1) y (1.2) se convierten en:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \nu\nabla^2\vec{u} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.4)$$

1.1.2. Formulación función de corriente - vorticidad (2D)

El problema original está contemplado para resolverse en tres dimensiones. Para eso se resuelven las ecuaciones de Navier Stokes y continuidad, cuyas variables dependientes originales son el campo de velocidades (\vec{u}) y la presión (P). Sin embargo este problema es en aguas someras y se puede aproximar a un problema en 2 dimensiones, lo que facilita los cálculos. De las variables dependientes originales se tienen, para dos dimensiones, las dos componentes de \vec{u} y P . Si se trabaja en la formulación función de corriente-vorticidad ($\psi - \omega$), al aplicar el rotacional a la ecuación (1.3) la presión desaparece, y nos quedan la vorticidad y la función de corriente que está relacionada con las dos componentes de la velocidad, eso nos da una ventaja respecto a la formulación original de velocidad-presión.

Esta formulación de función de corriente-vorticidad sólo es posible en dos dimensiones, así que cuando se quiera resolver el problema en tres dimensiones es necesario resolverlo en la formulación original ($\vec{u} - P$).

1.1.3. Función de Corriente y Vorticidad ($\psi - \omega$)

La *vorticidad* de un elemento de fluido está definida como el rotacional de su vector velocidad. Es decir:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (1.5)$$

con $\vec{u} = (u, v, w)$. Para dos dimensiones, solo se elimina la tercera componente, es decir, si el campo de velocidades yace en un plano, la vorticidad es un vector perpendicular a ese plano, ver figura (1.1). Aplicando el teorema de Stokes en la definición de circulación se observa que ésta y la vorticidad están relacionadas:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_{S_a} \vec{\omega} \cdot \hat{n} da \quad (1.6)$$

en donde S_a es el área definida por el contorno cerrado alrededor del cual la circulación es calculada y \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie.

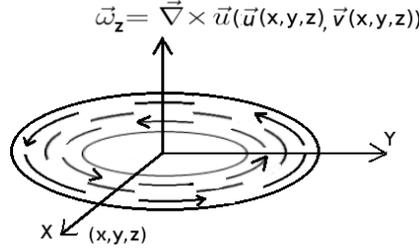


Figura 1.1: Si el campo de velocidades yace en un plano, la vorticidad es un vector perpendicular a ese plano.

El movimiento en dos dimensiones y no divergente, permite que el campo de velocidades pueda ser representado por una función escalar dada por $\psi(x, y, t)$ (también llamada *función de corriente*) definida como:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.7)$$

De la definición de vorticidad tenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

Cómo los vórtices están en el plano xy sólo nos interesa la vorticidad en el eje z entonces de la ecuación (1.8) nos queda:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega_z \quad (1.9)$$

Combinando la ecuación (1.7) con la ecuación (1.9) nos queda:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \omega_z \quad (1.10)$$

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega_z \quad (1.11)$$

Reescribiendo la ecuación (1.11) en forma compacta nos queda:

$$\nabla^2 \psi = -\omega_z \quad (1.12)$$

La ecuación (1.12) es la famosa ecuación de Poisson, que se resuelve por métodos numéricos para ψ en el apéndice A.

La suposición que hicieron Lamb-Chaplygin es que la vorticidad ω_z es proporcional a la función de corriente ψ , esto es:

$$\omega_z = k\psi \quad (1.13)$$

De tal manera que combinando la ecuación (1.13) y la ecuación (1.12) se transforma en la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2\psi = -k\psi \quad (1.14)$$

Ecuación que se resuelve en la sección 1.2 por el método de separación de variables en coordenadas polares.

1.1.4. Circulación

La *circulación* (Γ) contenida dentro de un contorno cerrado en el cuerpo de un fluido, se define como la integral, alrededor del contorno, de la componente del vector velocidad localmente tangente al contorno (Guyon *et al*, 2001; Landau y Lifschitz, 2001). Esto es, la circulación está definida por:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} \quad (1.15)$$

donde $d\vec{l}$ representa un elemento del contorno C . La integración se hace en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj.

Un modelo simple para el proceso de formación de un dipolo es considerar la inyección total de vorticidad creada por las paredes sólidas del canal (Shariff y Leonard, 1992). En este modelo hay una velocidad constante U dentro del canal actuando durante un tiempo t . La capa límite viscosa que se forma en la pared tiene un espesor δ . Dentro de esta capa la vorticidad promedio estará dada como $\omega = \frac{U}{\delta}$ y la velocidad promedio como $U/2$. Como la circulación es también (por el teorema de Stokes) la integral de área de la vorticidad, por lo tanto la circulación también se puede calcular por medio de la siguiente ecuación (Wells y van Heijst, 2003):

$$\Gamma = \int \int_A \omega \cdot n dA \sim \frac{U}{\delta} \times \delta \times \frac{U}{2} \times t = \frac{1}{2}U^2t$$

Esto también puede ser escrito como $\Gamma = 1/2UL$ donde L es el largo de la formación del dipolo, ver figura (1.2).

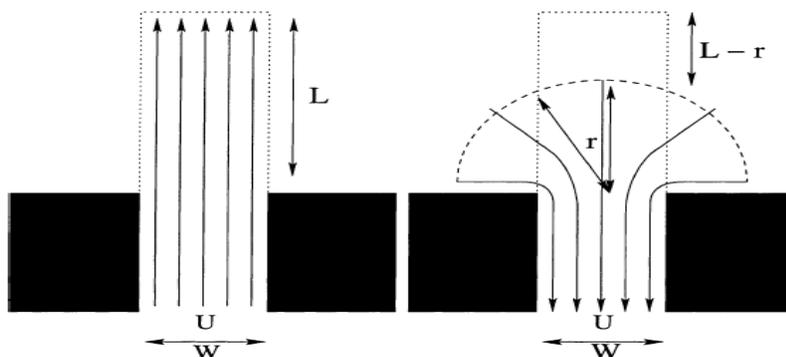


Figura 1.2: En el modelo conceptual de Stommel y Farmer (1952), el flujo de las mareas dejando un canal agudo puede separarse desde un cabo y formar un chorro. Cuando la marea cambia de fase, el flujo que entra en un canal tendrá típicamente la forma de un sumidero. Parte del chorro entonces no se dibuja de nuevo a través del canal, de modo que hay un intercambio neto de masas de agua. Tomada de Wells y van Heijst (2003).

1.1.5. El gasto

En mecánica de fluidos se define el gasto como: $G = \int \vec{u} \cdot \hat{n} da$. El resultado de ese producto punto es $u da$, considerando una profundidad $z_d = \text{cte.}$, el gasto queda como:

$$G = \int_0^y u z_d dy$$

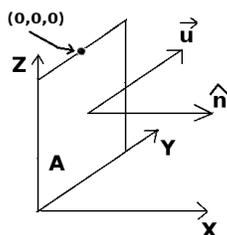


Figura 1.3: Fluido con velocidad \vec{u} pasando a través de un área. El origen de coordenadas está en el punto $(0,0,0)$.

Sustituyendo la ecuación (1.7), suponiendo una profundidad constante $z_d = 1$ e integrando a lo largo del eje y (de $-y$ a y), el gasto queda como:

$$G = \int_{-y}^y \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \int_{\psi_0}^{\psi_y} d\psi = \psi_y - \psi_0$$

Se pueden asignar los valores $\psi_0 = 0$ y $\psi_y = \alpha_g$, y son los valores para las condiciones de frontera para la función de corriente ψ .

La expresión de la velocidad en el perfil parabólico es:

$$u(y) = U \left(1 - \frac{y^2}{H_1^2/4} \right) \quad (1.16)$$

donde U es la velocidad máxima en el canal (ver la sección B1 del apéndice B de (López Sánchez. , 2013) para detalles).

1.2. Dipolo de Lamb-Chaplygin

Usando la metodología de Chaplygin (2007) y el procedimiento de López Sánchez. (2013) se calcularon las expresiones para la función de corriente y vorticidad del dipolo de Lamb-Chaplygin. Iniciando con la función de corriente fuera del cilindro que contiene a los vórtices del dipolo, y como suponemos que la vorticidad es cero fuera del cilindro y por la continuidad en la parte interior tenemos que:

$$\psi_1(r, \theta) = U_d r \sin \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (1.17)$$

donde U_d es la velocidad en la dirección de propagación del dipolo. Dentro del círculo la función de corriente satisface la ecuación de Helmholtz (1.14) que en coordenadas polares se escribe así:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -k\psi \quad (1.18)$$

Sabemos por el desarrollo que se hizo en el artículo Chaplygin (2007) que la ecuación de Poisson se cumple la ecuación (1.13) así pues los requerimientos del problema se satisfacen completamente si se asigna:

$$F(\psi) = -\omega_z = k\psi \quad \text{y} \quad \psi = f(r) \sin \theta \quad (1.19)$$

donde $f(r)$ es una función que se desea encontrar.

El flujo es simétrico respecto al eje $y = 0$, como se indica en la figura (1.4); $\psi_1 > 0$ en la mitad inferior porque de la ecuación (1.17), $\sin \theta$ es positivo en esa región, así que, por continuidad, $\psi_1 = \psi = 0$ en la frontera del cilindro y $\psi < 0$ en la mitad superior de la figura (1.4).

Para encontrar soluciones estables, k debe ser negativa, y se reasigna como $k \rightarrow -k^2$. Ya que no existen derivadas cruzadas ni productos mezclados, se puede proponer que la

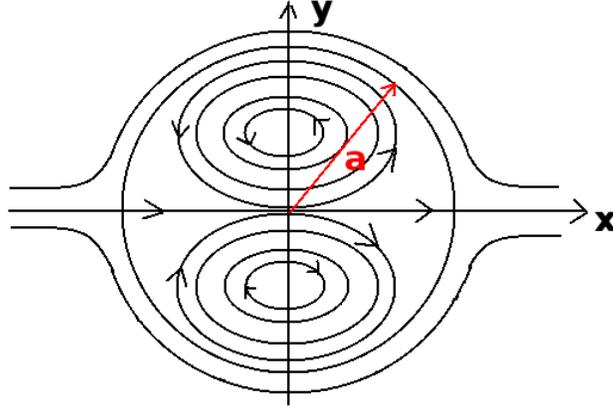


Figura 1.4: Función de corriente dentro y fuera del cilindro de radio a .

solución sea un producto de dos funciones independientes $\psi(r, \theta) = \mathfrak{R}(r)\Theta(\theta)$, y así usar el método de separación de variables para resolver la ecuación de Helmholtz:

$$\Theta \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial r^2} + \frac{\Theta}{r} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial r} + \frac{\mathfrak{R}}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + k^2 \Theta \mathfrak{R} = 0$$

Dividiendo entre $\psi(r, \theta) = \mathfrak{R}(r)\Theta(\theta)$ y multiplicando por r^2 :

$$\frac{r^2}{\mathfrak{R}} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial r^2} + \frac{r}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial r} + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + k^2 r^2 = 0$$

haciendo la separación de variables e introduciendo la constante de separación m^2 tenemos:

$$\frac{r^2}{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial r} + k^2 \mathfrak{R} \right) = -\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = m^2$$

donde $m \in \mathbb{Z}$ para que se cumplan las condiciones de frontera (Asmar, 2005). De aquí que

$$\Theta'' + m^2 \Theta = 0 \Rightarrow \Theta = A \cos m\theta + B \sin m\theta \quad (1.20)$$

$$r^2 \mathfrak{R}'' + r \mathfrak{R}' + (k^2 r^2 - m^2) \mathfrak{R} = 0 \quad (1.21)$$

De aquí se observa que la ecuación (1.20) es la del oscilador armónico simple cuya solución es la que se muestra en el lado derecho de la misma ecuación.

Para la ecuación (1.21) se realiza el re-escalamiento $\rho = kr$, esto implica que $d\rho = kdr$, y si hacemos que $\mathfrak{R}(r) = \mathfrak{R}(\rho/k) = R(\rho)$ por la regla de la cadena $\mathfrak{R}'(r) = \mathfrak{R}'(\rho/k) \frac{d\rho}{dr} = kR'(\rho)$ y como $\mathfrak{R}''(r) = k^2 R''(\rho)$ al sustituirlo en (1.21) se obtiene finalmente la ecuación de Bessel de orden m :

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\rho^2 - m^2) R = 0$$

cuya solución general es:

$$R(\rho) = C_1 J_m(\rho) + C_2 N_m(\rho) = C_1 J_m(kr) + C_2 N_m(kr) = \mathfrak{R}(r)$$

para que $\mathfrak{R}(0)$ sea finito, debemos hacer $C_2 = 0$ porque la ecuación de Neumann de orden entero N_m diverge en cero. Así que $\mathfrak{R}(r) = C_1 J_m(kr)$ y la condición de frontera $\mathfrak{R}(a) = 0$ se mantiene para $C_1 \neq 0$ si y solo si $ka = \alpha_{mj}$, por lo tanto

$$k = k_{mj} = \frac{\alpha_{mj}}{a}$$

son solo los valores positivos de k para los cuales hay soluciones no triviales, ver (Asmar, 2005). Así pues, en nuestro caso la función R tiene como solución: $R(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m J_m(\rho)$, donde J_m es la función de Bessel de orden m .

La solución general para la ecuación de Helmholtz (1.18) es:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m J_m(kr) (A \cos m\theta + B \sin m\theta) \quad (1.22)$$

Las constantes A , B y C_m , y la constante de separación m se deben determinar con las condiciones de frontera y de continuidad. De la condición (1.19) y la ecuación (1.20) se tiene que $A = 0$, $B = 1$ y $m = 1$. Como en la periferia del círculo $\psi(r = a, \theta) = 0$, entonces $k = \mu_1$, donde μ_1 es la primera raíz de $J_1(r)$ distinta de cero, que en este caso se aproxima como: $\mu_1 \approx 3.8317$.

Por la continuidad en el círculo, las derivadas también deben ser iguales, entonces:

$$\frac{\partial \psi(a)}{\partial r} = \frac{\partial \psi_1(a)}{\partial r}$$

de aquí que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= C_1 \sin \theta \mu_1 J_1'(\mu_1 r) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} &= - \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{aligned}$$

Evaluando en $r = a$, usando la identidad $xJ_p'(x) + pJ_p(x) = xJ_{p-1}(x)$, con $p = 1$ y $x = \mu_1 r$, e igualando:

$$C_1 \sin \theta \mu_1 J_0(\mu_1 a) = - \left(1 + \frac{a^2}{a^2} \right) \sin \theta$$

Por lo tanto:

$$C_1 = -\frac{2}{\mu_1 J_0(\mu_1 a)} \quad (1.23)$$

Si $a = 1$ como lo usan Duran-Matute *et al* (2010), porque están adimensionalizando respecto al radio, la expresión para el campo de velocidades es:

$$\vec{U}_{LC}(x, y) = \left(1 + \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \quad (1.24)$$

La función de corriente $\psi(r, \theta)$ queda determinada por:

$$\psi(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{2}{\mu_1 J_0(\mu_1)} J_1(\mu_1 r) \sin \theta & r \leq 1 \\ -\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta & r > 1 \end{cases}$$

Se expresa el campo de velocidades en coordenadas polares:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.25)$$

con $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.

Se usan las siguientes relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel y de sus derivadas:

$$\begin{aligned} J'_n(x) + \frac{n}{x} J_n(x) &= J_{n-1}(x) \\ J'_n(x) - \frac{n}{x} J_n(x) &= -J_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Sumando: $2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \quad (1.26)$$

Expresiones analíticas para $r < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= -\frac{2}{\mu_1 J_0(\mu_1)} J_1(\mu_1 r) \cos \theta \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -\frac{2}{\mu_1 J_0(\mu_1)} \frac{\sin \theta}{2} [J_0(\mu_1 r) - J_2(\mu_1 r)] \mu_1 \end{aligned}$$

Para el campo de velocidades:

$$u_r(r, \theta) = -\frac{2J_1(\mu_1 r) \cos \theta}{\mu_1 r J_0(\mu_1)}; \quad u_\theta(r, \theta) = \frac{J_0(\mu_1 r) - J_2(\mu_1 r)}{J_0(\mu_1)} \sin \theta \quad (1.27)$$

Expresiones analíticas para $r > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} &= -\left(r - \frac{1}{r}\right) \cos \theta \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} &= \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \sin \theta \end{aligned}$$

Para el campo de velocidades:

$$u_r(r, \theta) = - \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \cos \theta; \quad u_\theta(r, \theta) = - \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \sin \theta \quad (1.28)$$

Relación entre u_x , u_y y u_r u_θ

Usando la matriz de transformación de coordenadas polares a cartesianas, se obtienen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} u_x &= u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \\ u_y &= u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \end{aligned}$$

La vorticidad de este flujo se determina a través de las ecuaciones (1.5) y (1.7):

$$\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\nabla^2 \psi \hat{k}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

Se calculan las derivadas correspondientes:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\sin \theta}{\mu_1 J_0(\mu_1)} [J_0(\mu_1 r) - J_2(\mu_1 r)] \mu_1 \right) = -\frac{\mu_1 \sin \theta}{J_0(\mu_1)} [J_0'(\mu_1 r) - J_2'(\mu_1 r)]$$

Otra relación de recurrencia: $J_0'(x) = -J_1(x)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = -\frac{\mu_1 \sin \theta}{J_0(\mu_1)} (-J_1(\mu_1 r) - \frac{1}{2} [J_1(\mu_1 r) - J_3(\mu_1 r)]) = -\frac{\mu_1 \sin \theta}{J_0(\mu_1)} \left(-\frac{3}{2} J_1(\mu_1 r) + \frac{1}{2} J_3(\mu_1 r) \right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{2J_1(\mu_1 r) \cos \theta}{\mu_1 J_0(\mu_1)} \right) = \frac{2J_1(\mu_1 r) \sin \theta}{\mu_1 J_0(\mu_1)}$$

El laplaciano para $r \leq 1$ queda como:

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\sin \theta}{r J_0(\mu_1)} [J_0(\mu_1 r) - J_2(\mu_1 r)] - \frac{\mu_1 \sin \theta}{J_0(\mu_1)} \left(-\frac{3}{2} J_1(\mu_1 r) + \frac{1}{2} J_3(\mu_1 r) \right) + \frac{2J_1(\mu_1 r) \sin \theta}{r^2 \mu_1 J_0(\mu_1)}$$

Usando la identidad $J_3(x) = 4J_2(x)/x - J_1(x)$:

$$\nabla^2\psi = -\frac{\sin\theta}{rJ_0(\mu_1)}[J_0(\mu_1r) - J_2(\mu_1r)] - \frac{\mu_1 \sin\theta}{J_0(\mu_1)} \left(-\frac{3}{2}J_1(\mu_1r) + \frac{1}{2} \left[\frac{4}{\mu_1r}J_2(\mu_1r) - J_1(\mu_1r) \right] \right) + \frac{2J_1(\mu_1r) \sin\theta}{r^2\mu_1J_0(\mu_1)}$$

Factorizando $\frac{\sin\theta}{J_0(\mu_1)}$ y simplificando:

$$-\nabla^2\psi = \frac{\sin\theta}{J_0(\mu_1)} \left[2 \left(\frac{1}{\mu_1r^2} + \mu_1 \right) J_1(\mu_1r) - \frac{J_2(\mu_1r) + J_0(\mu_1r)}{r} \right] \quad (1.29)$$

y usando esta otra relación de recurrencia $\frac{2\lambda}{x}J_\lambda(x) = J_{\lambda+1}(x) + J_{\lambda-1}(x)$, finalmente obtenemos la vorticidad dentro del dipolo:

$$\omega_z = \frac{2\mu_1 \sin\theta J_1(\mu_1r)}{J_0(\mu_1)}$$

Para $r > 1$:

$$\nabla^2\psi_1 = \frac{1}{r^2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin\theta + \frac{2 \sin\theta}{r^3} - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \sin\theta = 0 \quad (1.30)$$

y fuera del dipolo: $\omega_z = 0$.

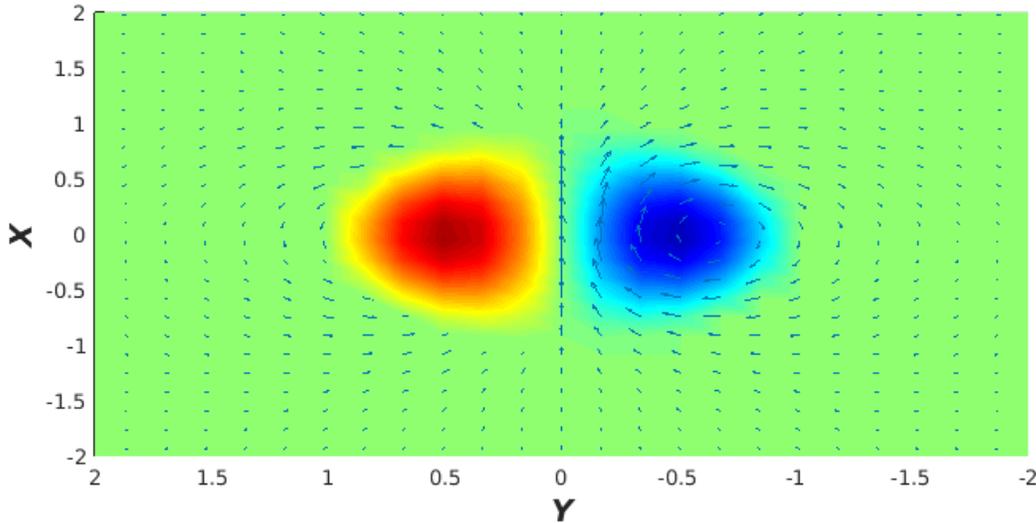


Figura 1.5: Campo de velocidades y vorticidad del dipolo de Lamb-Chaplygin

En la figura (1.5) se muestra el campo de velocidades y la vorticidad de esta estructura analítica. Con este modelo se pueden comparar los resultados numéricos, mismos que se

presentan en el siguiente capítulo. Al dipolo de Lamb-Chaplygin a partir de este momento se le llamará dipolo L-Ch.

Capítulo 2

Experimento

Realizamos un experimento en una maqueta construida de acrílico, la cual cuenta con un canal que conecta dos dominios rectangulares de diferentes tamaños. Se hizo pasar un fluido (agua) por el canal con el fin de producir el dipolo. Ya que el espesor de la capa de agua es pequeño comparada con la extensión del dominio, se tiene un sistema de aguas someras.

2.1. Técnica de medición (PIV)

Para la medición del campo de velocidades mediante la técnica PIV las partículas trazadoras que se siembran en el fluido se iluminan en un plano y se hacen tomas en ese plano en intervalos de tiempo muy cortos (Thielicke y Stamhuis, 2010). La posición de las partículas se registra mediante una cámara digital, como se muestra en el esquema de la figura (2.2). Las imágenes se dividen en un conjunto de celdas en donde se determina la posición de las partículas que hay en su interior. La medición de la velocidad se calcula comparando las posiciones de las partículas en dos imágenes consecutivas (ver 2.1). El software que se utilizó para analizar los datos de este experimento fue PIVlab (ver apéndice B) que es de libre distribución.

2.2. Detalles del Montaje

El experimento fue realizado en un contenedor compuesto de dos cuencas conectadas por un canal, como se muestra en la figura (2.3). Las dimensiones de la cuenca más pequeña son 43 cm \times 59 cm \times 15 cm y de la más grande son 118 cm \times 118 cm \times 15

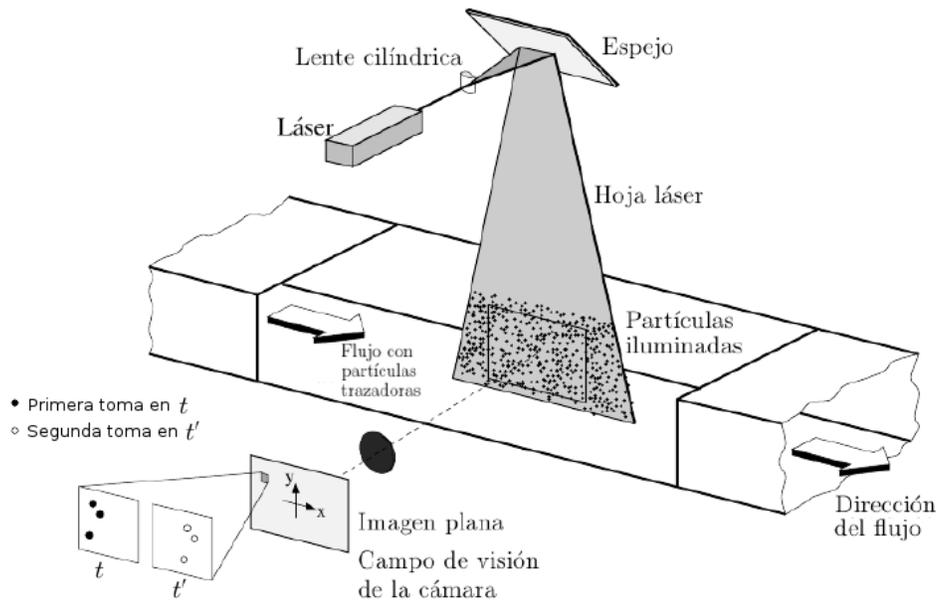


Figura 2.1: Tomada de López Sánchez. (2013).

cm. Ambas están conectadas por un canal de 15 cm de largo (el ancho del canal puede variar en intervalos de 4 a 18 cm). Para producir el pulso usamos un bloque de plexiglas y styrofoam conectado a un motor de pasos a través de un mecanismo cigüeñal. Dicho bloque tiene una base de $4 \times 57.5 \text{ cm}^2$.

Alineamos el láser de dos maneras: frontal sobre el eje de simetría del canal (sin ayuda de un espejo) y de manera lateral colocando un par de espejos alineados de tal forma que se reflejara una hoja horizontal dentro del fluido con anchura suficiente para observar ambos vórtices del dipolo. Se usó un motor de pasos el cual se ajustó con 28V y con 0.89A. El plano de hoja láser se colocó a 1.5 cm del fondo.

El láser utilizado fue de estado sólido con línea de emisión en 532 nm, de potencia regulable. La potencia máxima es de 2W. La iluminación en un plano se generó con un sistema de lentes para enfocar la luz (lente esférica) y para producir la hoja láser (lente cilíndrica, ver figura 2.4).

Usamos esferas huecas de vidrio recubiertas con plata con un diámetro promedio de $10 \mu\text{m}$, pues tiene una densidad parecida a la del agua, esto con la finalidad de asegurar que no se verán afectados por fuerzas como la gravedad y la flotación, al menos no en el intervalo de tiempo en el que se realizó el experimento.

El experimento fue hecho bajo las siguientes condiciones: la profundidad de la capa

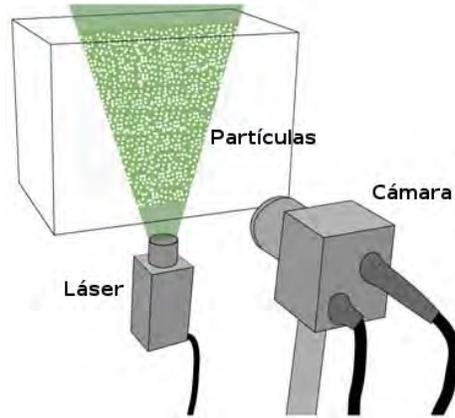


Figura 2.2: Esquema de PIV: Una hoja de láser ilumina las partículas contenidas en el fluido. Una cámara de alta velocidad registra el desplazamiento del patrón de partículas. Tomada de PIVlab (2010).

del líquido fue de 4.5 cm. Para la evolución del sistema se usó una cámara colocada a 80 cm de la superficie de la cuba, así que las imágenes tienen una resolución de 720×576 pixeles. En las fotografías (2.5) y (2.6) se puede apreciar el montaje del experimento.

Para estimar la velocidad representativa o velocidad de traslación del dipolo, que es la velocidad máxima del fluido que hay en el canal se procedió de dos maneras, una a través del cociente entre el gasto máximo y el área de sección transversal de la capa del fluido en el canal, ver la ecuación (2.4) y otra analizando dos imágenes del video en dos tiempos diferentes con dos distancias diferentes. Para el primer caso, cuando el bloque es sumergido en el fluido, una cierta cantidad de líquido es desplazado. El volumen desplazado es igual al volumen del bloque dentro del fluido (Villamil *et al*, 2015):

$$V(t) = l \times a \times h(t) \quad (2.1)$$

donde l es el largo del bloque, a es el ancho y $h(t) = h_m + h_o \sin(2\pi ft)$ es la distancia desde la superficie libre al fondo del bloque (h_m es el valor medio de $h(t)$). En el experimento $l = 57.5\text{cm}$, $a = 4\text{cm}$ y f la frecuencia. La razón de flujo o gasto es la derivada en el tiempo de $V(t)$:

$$Q = \frac{dV(t)}{dt} = 2\pi \times f \times l \times a \times h_o \cos(2\pi vt) \quad (2.2)$$

Para determinar el valor máximo del gasto Q_{max} se hace $\cos(2\pi vt) = 1$ en la ecuación (2.2) quedando:

$$Q_{max} = 2\pi \times f \times l \times a \times h_o \quad (2.3)$$

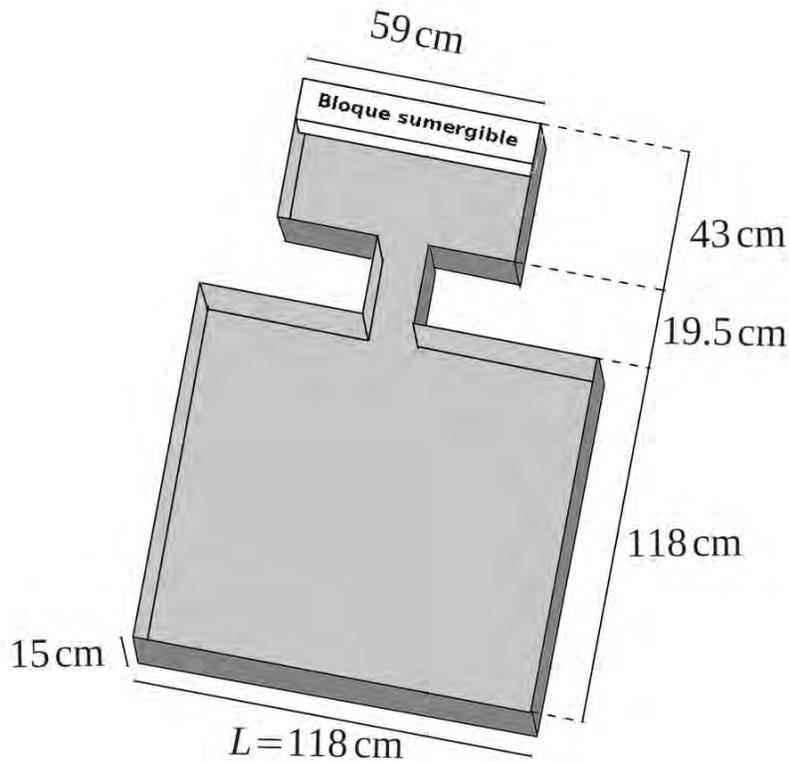


Figura 2.3: Dimensiones del contenedor usado para generar el dipolo. Tomada de López S. *et al* (2016).

y dado que en el experimento la $h_o = 4 \text{ mm}$ y frecuencia $f = 0.08 \text{ Hertz}$, al sustituir los valores en (2.3) dio un valor máximo de gasto igual a $4.624 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{seg}$.

La velocidad representativa U_o es el cociente de Q_{max} entre el área de sección transversal A de la capa del líquido en el canal:

$$U_o = \frac{Q_{max}}{A} \quad (2.4)$$

Donde $A = H \times P$, H es el ancho del canal y P es la profundidad de la capa del líquido. En el experimento el ancho del canal fue de $H = 4 \text{ cm}$ y el de la profundidad del líquido fue de $P = 4.5 \text{ cm}$. Haciendo los cálculos y sustituyendo en (2.4) nos queda una $U_o = 0.0257 \text{ m/s} = 2.57 \text{ cm/s}$.

Con éstas expresiones también pudimos calcular el número de Reynolds el cual está

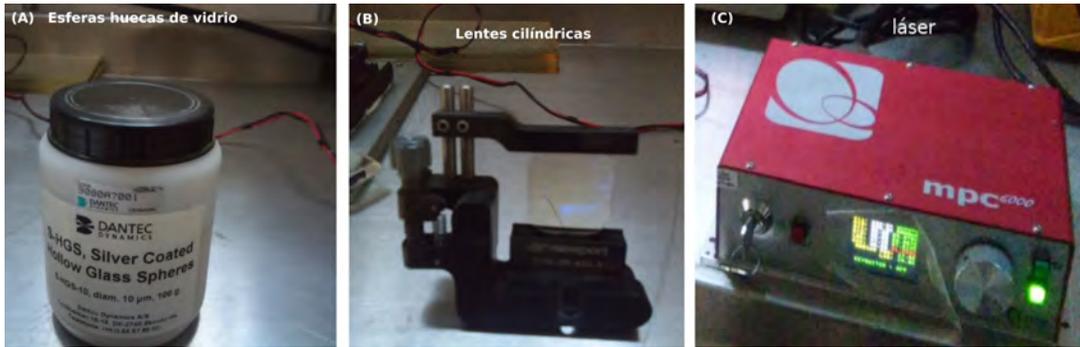


Figura 2.4: A) Bote con esferas huecas de vidrio, B) lentes cilíndricas que aplanan el haz y C) láser de estado sólido.

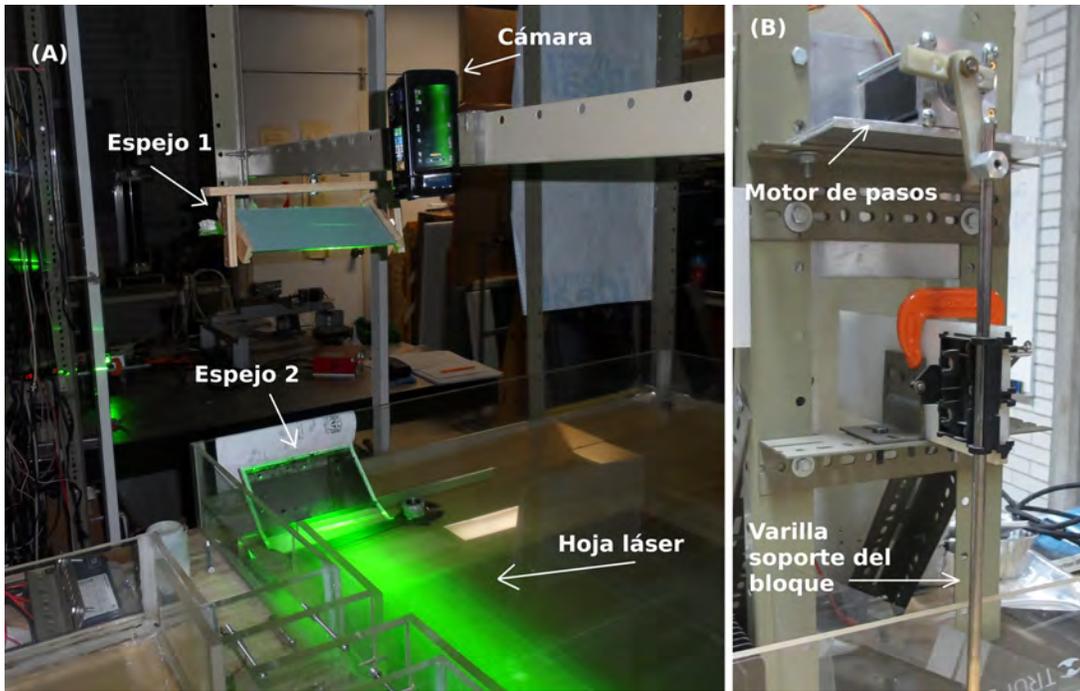


Figura 2.5: (A) El haz láser se hace incidir sobre el espejo de arriba para que se refleja en el de abajo generando una hoja láser horizontal. La cámara se coloca a una altura de 80 cm sobre la cuba para filmar los videos. (B) Motor de pasos conectado al cigüeñal y la varilla que sostiene al bloque sumergible.

definido como

$$Re = \frac{U_o \times H}{\nu} \quad (2.5)$$

siendo ν la viscosidad cinemática del agua con un valor de $1.003 \times 10^{-6} m^2/s$, al sus-

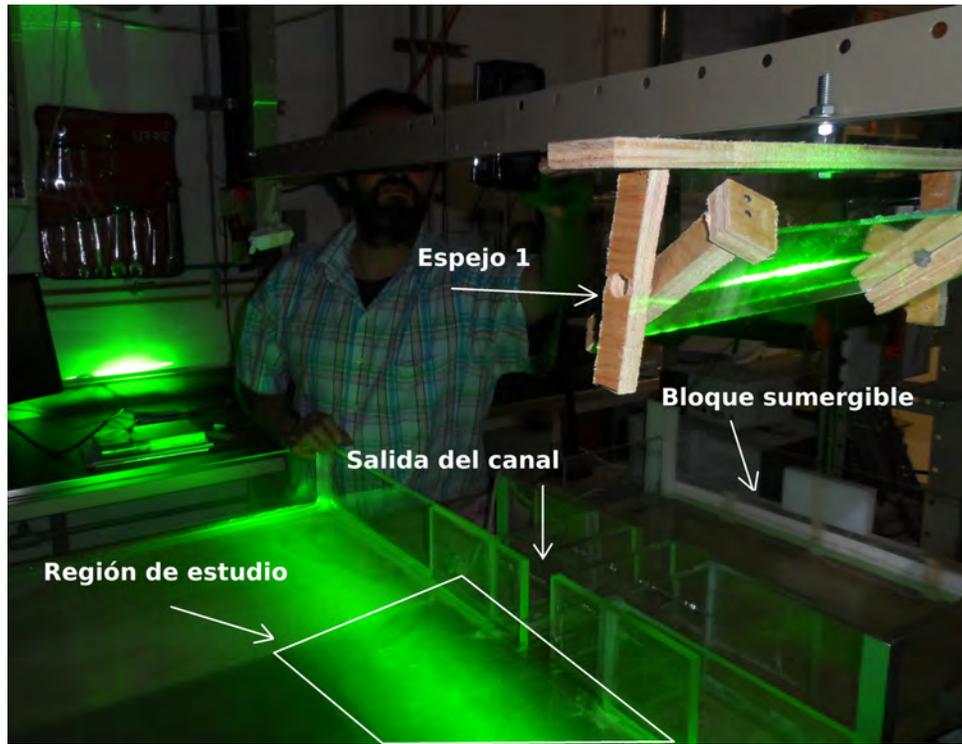


Figura 2.6: Montaje del experimento, usando una cámara JVC de alta resolución, se aprecia el polígono regular donde se llevó a cabo el estudio.

tituir los valores de U_o y H en (2.5) nos queda $R_e = 1024.9$

La otra manera de medir la velocidad característica del dipolo, fue usando el programa tracker, tomando dos imágenes del video en dos tiempos diferentes con cuatro distancias diferentes, para hacer un promedio, tal como se muestra en las figuras (2.7) y (2.8).

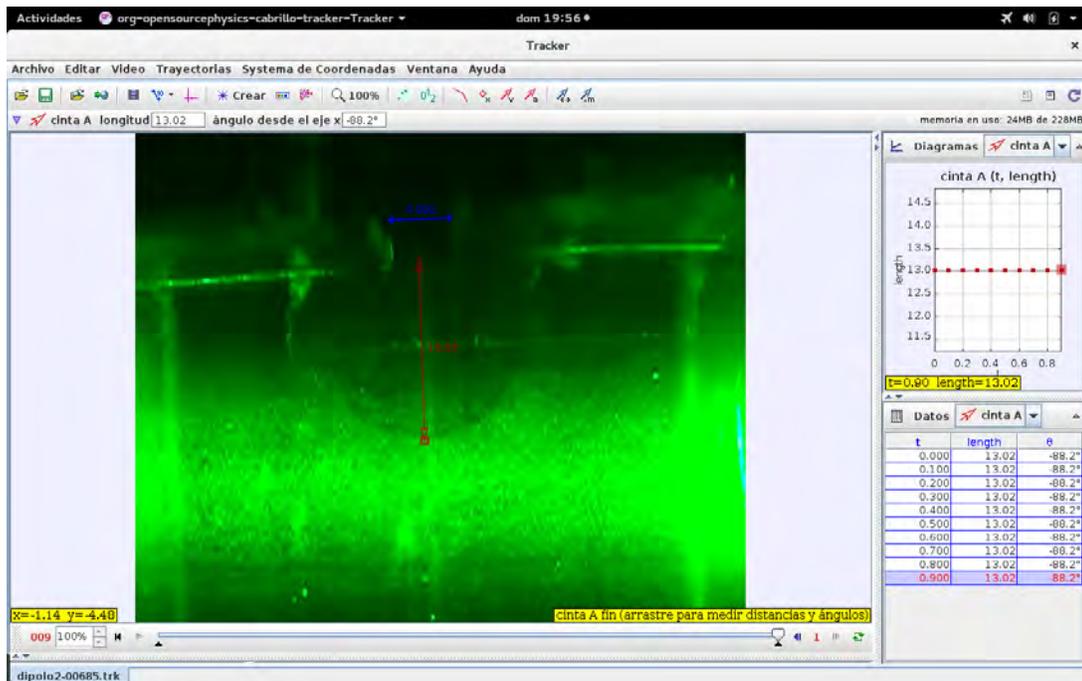


Figura 2.7: Seleccionada la imagen 685, que le corresponde al tiempo $t_1 = 13.7$ s. Se determinó una distancia inicial con valor de 13.02 cm.

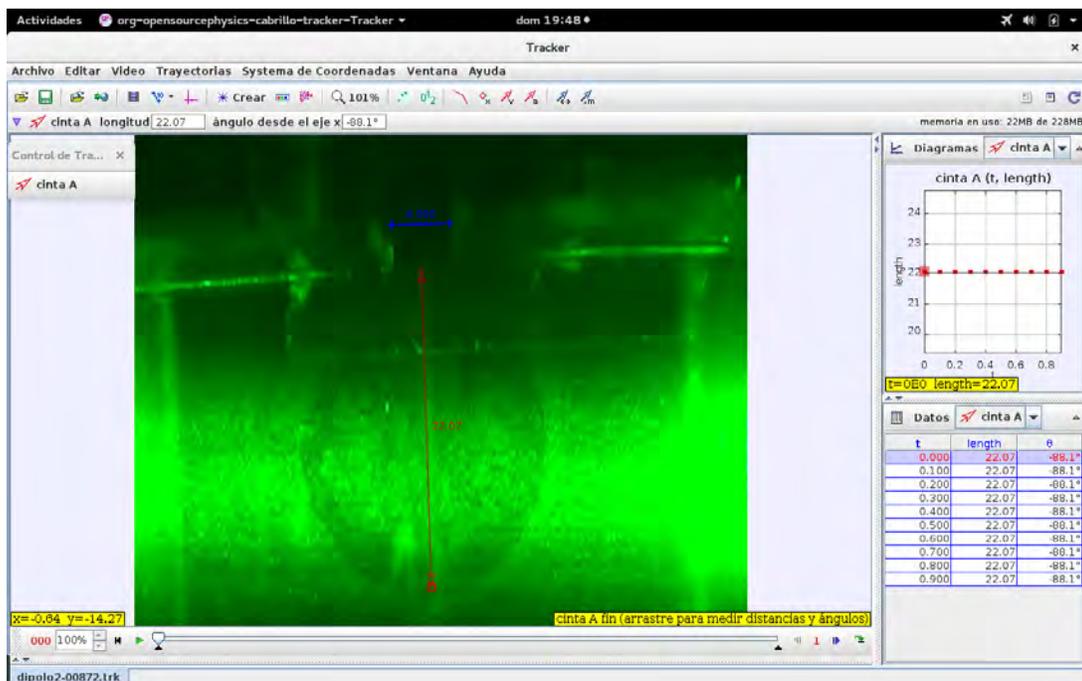


Figura 2.8: Seleccionada la imagen 872, que le corresponde al tiempo $t_2 = 17.44$ s. Se determinó una distancia final de 22.07 cm.

Primero se seleccionó la imagen 685 que le corresponde un $t_1 = 13.7\text{s}$ y se midió $x_1 = 13.02\text{ cm}$ y otra $x'_1 = 13.00\text{ cm}$; la segunda imagen seleccionada fue la 872 que le corresponde un $t_2 = 17.44\text{s}$ y se midió $x_2 = 22.07$ y otra $x'_2 = 23.28\text{ cm}$, y posteriormente con la sencilla fórmula de velocidad promedio que dice que:

$$\bar{U}_o = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (2.6)$$

Al sustituir los valores en (2.6) tenemos $\bar{U}_o = 2.42\text{ cm/s}$ y para las x' tenemos $\bar{U}_o = 2.74\text{ cm}$. Haciendo un promedio de éstas dos velocidades resulta $\bar{U}_o = 2.58\text{ cm/s}$, que es un resultado bastante similar al hecho de la otra manera. Lo que significaría que en ese intervalo de tiempo el dipolo se mantiene moviendo con velocidad constante.

Las mediciones se realizaron usando varios anchos del canal, desde 2 cm hasta 8 cm, y diferentes frecuencias en el motor de pasos (entre 0.08 y 0.10 Hz) para el desplazamiento del bloque, haciendo diferentes tomas de video en distintos intervalos de tiempo, en función del ancho del canal y la velocidad en que se sumergía el bloque (frecuencia del motor).

Finalmente los mejores resultados fueron obtenidos usando un ancho de canal de 4 cm y una frecuencia de 0.08 Hertz. Además, los videos que mejores imágenes del dipolo ofrecieron fueron los tomados al sistema de alineación lateral del láser, pues la forma frontal daba una hoja no muy ancha y de poca luminosidad debido a la atenuación por pasar por un volumen de líquido muy grande.

Capítulo 3

Resultados y Análisis

3.1. Resultados y Análisis

Una vez que se hicieron varias pruebas con los diferentes videos tomados, lo primero que se hizo fue seleccionar el video donde el dipolo se ve mejor y convertir éste en imágenes. Se tomó el tiempo donde empieza a salir y el tiempo donde se disipa. Por ejemplo, en el video `dipolo2.wmv` se observó que empieza a salir en el tiempo $t_1 = 5$ seg. y se disipa en el tiempo $t_2 = 30$ seg. Así pues, como sabemos que son 50 imágenes por segundo, entonces al multiplicar $50 \times 5 = 250$ y $50 \times 30 = 1500$. Lo cual quiere decir que el dipolo está entre las imágenes 250 y 1500. Así pues abrimos el PIVlab desde Matlab y seleccionamos esas imágenes con el comando “add e importar” ver figura (B.2), luego definimos una distancia de referencia y tiempo entre imágenes con el comando “calibration“ ver figura (B.3), posteriormente nos posicionamos en ”Analysis settings“ para definir la región de interest ”ROI”. Para definir las mallas nos posicionamos en “PIV settings“ dándole en el pass 1 (64,32) y en el pass 2 (32,16) ver figura (B.4), luego hacemos click en ”Analysis“. Una vez terminado el análisis PIVlab nos muestra los vectores generados de las 1,250 imágenes. Como PIVlab hace cálculos tomando dos imágenes consecutivas, el total de datos que arrojó fueron 625. Posteriormente, hacemos click en ”post processing“ para quitar los vectores espurios y suavizarlos ver figura (B.5). Luego entonces podemos guardar los datos en $file \implies save \implies ASCII - file(x, y, u, v, vort)$, (ver C.1) lo cuales pueden ser manipulados en Matlab.

Los resultados se presentaron en un orden de acuerdo a como fueron siendo obtenidos, es decir, las cantidades que se obtenían directamente del software PIVlab que son el campo de velocidades y la vorticidad. Después se muestra la circulación Γ , calculada a partir de la vorticidad (ver apéndice (D)). La función de corriente se calculó resolvien-

do numéricamente la ecuación de Poisson (ecuación 1.12) usando diferencias finitas (ver apéndice A) con un método iterativo de Gauss-Seidel (Burden *et al*, 2002) y utilizando los valores experimentales de ω , u y v como condiciones de frontera de Neumann (Asmar, 2005), donde la derivada normal de la función de corriente es conocida (u o v según sea el caso).

3.1.1. Campo de velocidades

3.1.2. Velocidad u

La siguiente figura 3.1 nos permite ver cómo se presentarán los resultados. En esta figura se puede observar cómo la componente de la velocidad en la dirección de propagación es mayor y positiva (rojo) en el centro y cambia de sentido en los lados externos del dipolo (par de círculos negros) donde se vuelve negativa (azul).

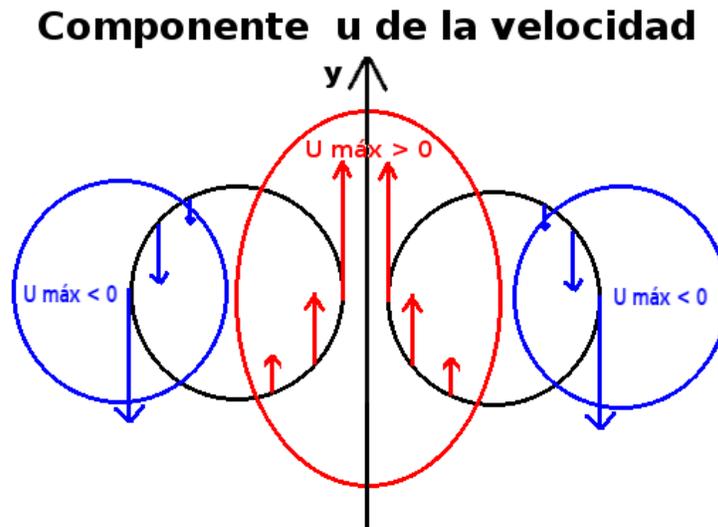


Figura 3.1: Dipolo (par de círculos negros) moviéndose en la dirección y . La velocidad u máxima negativa en azul y la velocidad u máxima positiva en rojo.

Se llamará componente de velocidad u a la que lleva la dirección de propagación del dipolo, que es la coordenada y . En la figura 3.2 podemos ver la distribución al tiempo 13.2 segundos (que corresponde al dato 330 arrojado por PIVlab) de la velocidad en dirección paralela a la propagación del dipolo. En esta misma figura se pueden observar las líneas de corriente en el plano XY.

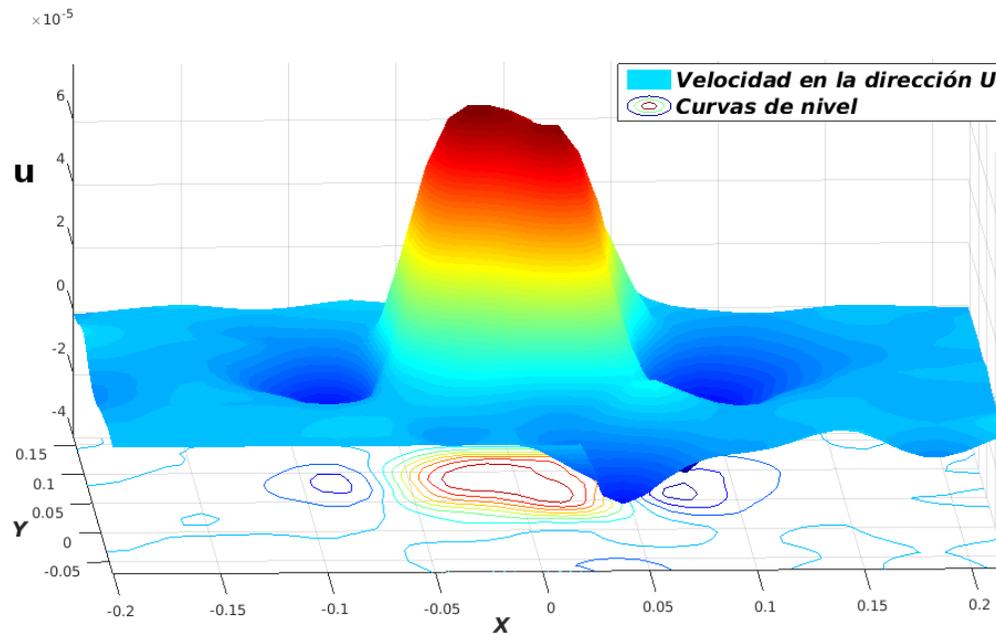


Figura 3.2: Componente u del campo de velocidades, en la dirección y . Resultado experimental.

En la figura (3.3) se puede ver en 2D la distribución de la velocidad u en el plano XY mostrando la comparación del resultado experimental al tiempo 13.2 segundos (figura 3.3 (a)) y el modelo teórico (figura 3.3 (b)). Se puede observar una gran concordancia cualitativa entre ambas figuras.

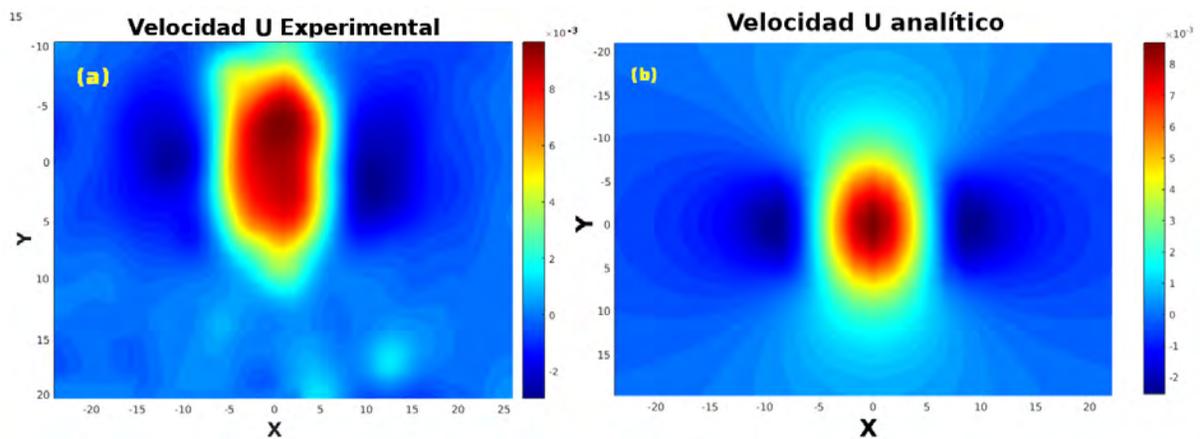


Figura 3.3: (a) Distribución de la velocidad u experimental del dipolo en el plano XY. (b) Distribución de la velocidad u analítica del dipolo en el plano XY.

Graficando esta velocidad experimental en una línea perpendicular a la dirección de

propagación que atraviese los centros del dipolo se obtiene la función de la figura (3.4).

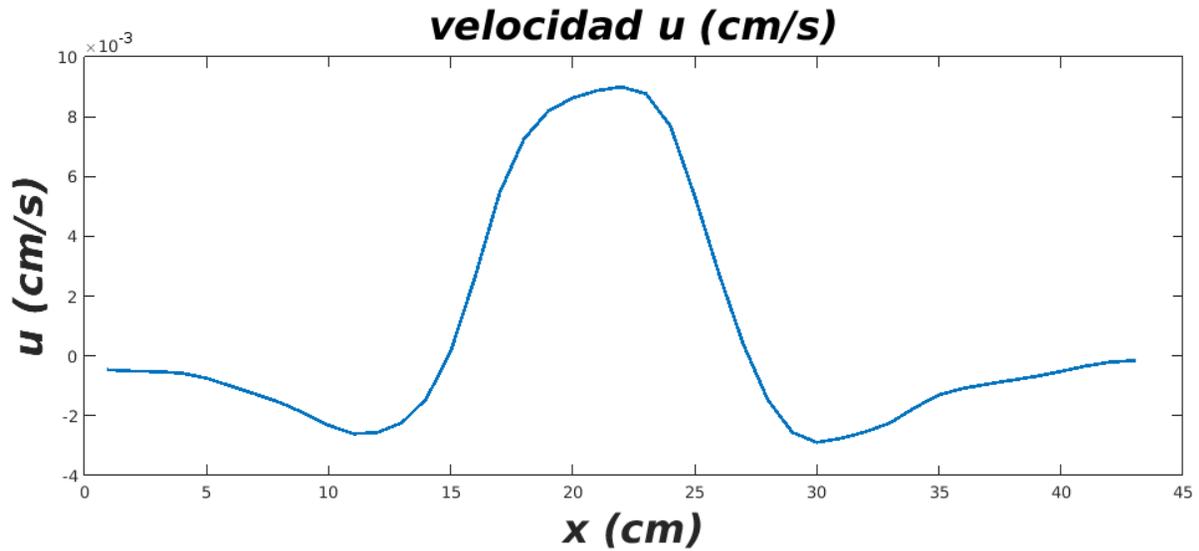


Figura 3.4: Componente u del campo de velocidades a lo largo de la línea $y = 0.02257m$.

3.1.3. Velocidad v

La figura (3.5) nos permite ver cómo se presentarán los resultados. En esta figura se puede observar que la componente de la velocidad v alcanza sus máximos positivos (rojo) en la parte superior del vórtice derecho (círculo negro) y en la parte inferior del vórtice izquierdo; y alcanza su velocidad v máxima negativa (azul), en la parte superior del vórtice izquierdo (círculo negro) así como en la parte inferior del vórtice derecho (círculo negro). En la línea horizontal punteada de negro que pasa por el centro de los vórtices la velocidad v es cero.

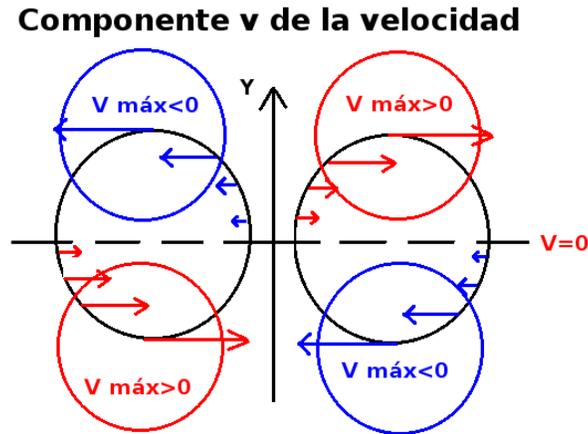


Figura 3.5: Dipolo (par de círculos negros) moviéndose en la dirección y . La velocidad v máxima negativa en azul y la velocidad v máxima positiva en rojo.

Se llamará componente de velocidad v a la que lleva la dirección perpendicular de propagación del dipolo, que es la coordenada x . En la figura (3.6) podemos ver en 3D la distribución de la velocidad en dirección perpendicular a la propagación del dipolo. En esta misma figura se pueden observar las curvas de nivel en el plano XY .

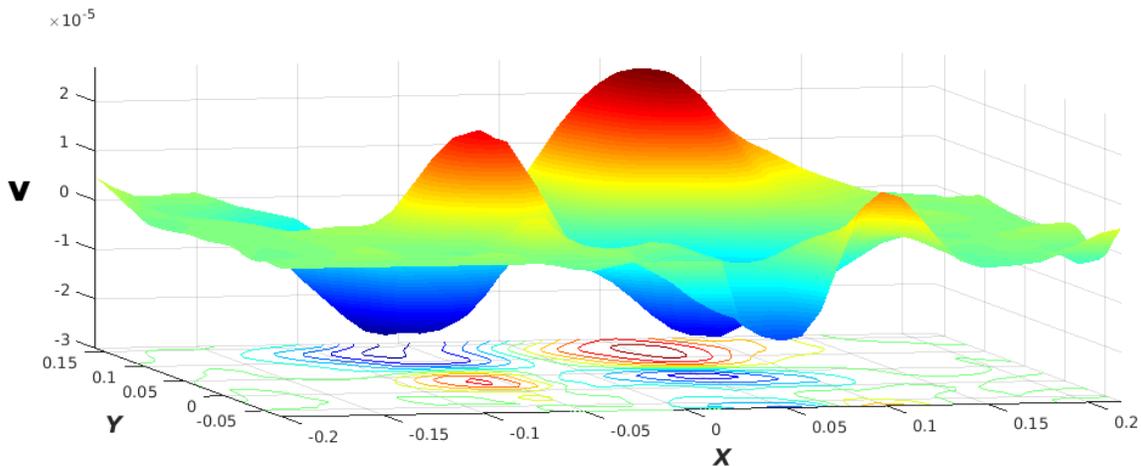


Figura 3.6: Componente v del campo de velocidades, en la dirección x . Resultado experimental.

En las siguientes gráficas (3.7) se puede ver en 2D la distribución de la velocidad v en dirección perpendicular a la propagación del dipolo, tanto del caso experimental como el analítico.

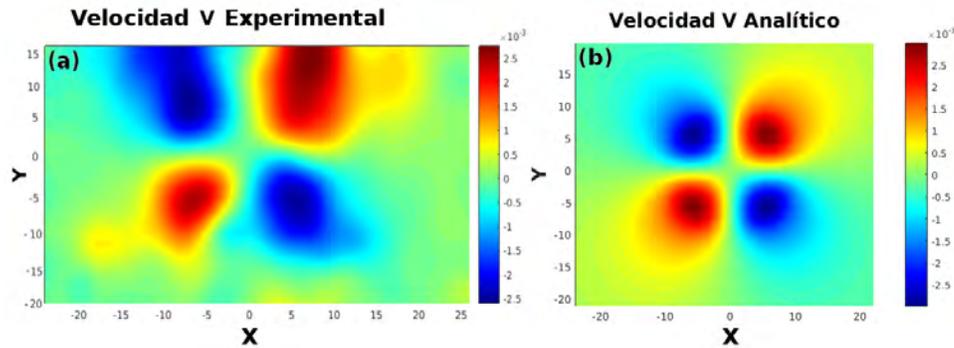


Figura 3.7: (a) Distribución de la velocidad v experimental del dipolo en el plano XY. (b) Distribución de la velocidad v analítica del dipolo en el plano XY.

3.1.4. Vorticidad ω

Se buscaron imágenes que mejor representaran a la vorticidad. En este caso la imagen con el tiempo 13.2 segundos fue la que mejor se apreciaba, así como también se buscó en el eje y de los datos experimentales el punto donde se tuviera la mayor vorticidad, el cual corresponde al índice 17 que tiene el valor de $y = 0.02257m$. En la figura (3.8) podemos ver en 3-D la vorticidad.

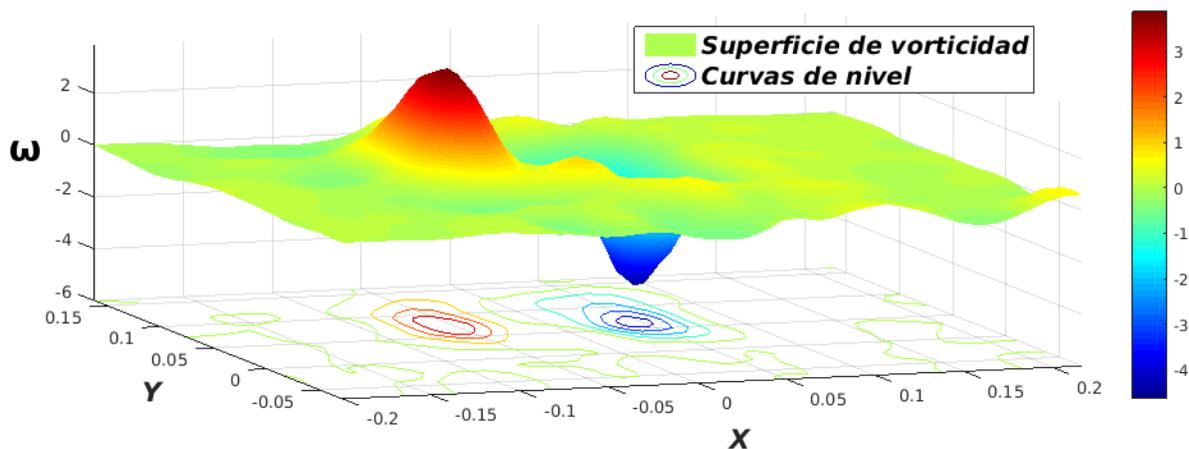


Figura 3.8: Componente v del campo de velocidades, en la dirección x . Resultado experimental.

En la figura (3.9) se puede ver en 2-D la vorticidad ω tanto del caso experimental como el analítico.

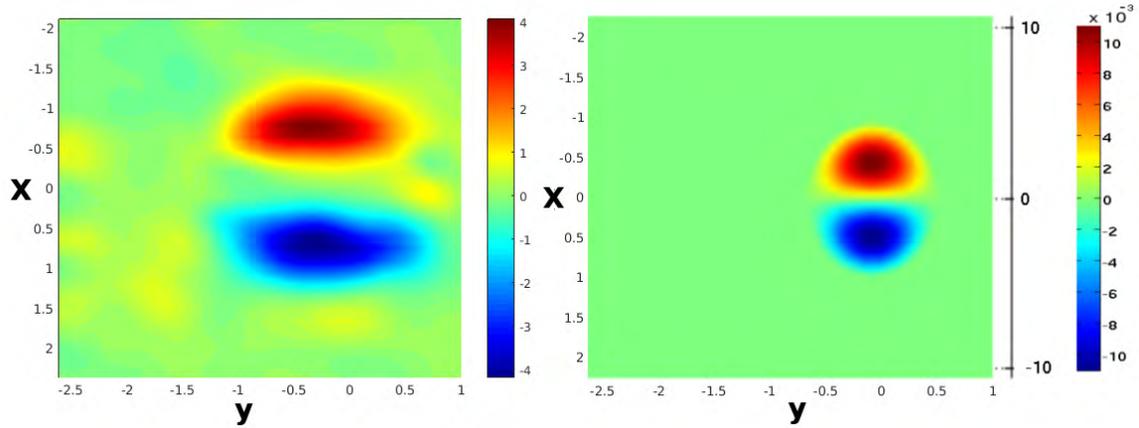


Figura 3.9: Vorticidad ω del dipolo en el plano XY. Comparación entre los resultados experimentales (izquierda) y la solución analítica (derecha).

La figura (3.10) nos muestra cómo es la vorticidad ω para un valor constante de y tanto del caso experimental como del analítico. Las barras de error se pusieron como $\pm\sigma_\omega$ que es la desviación estandar de la vorticidad.

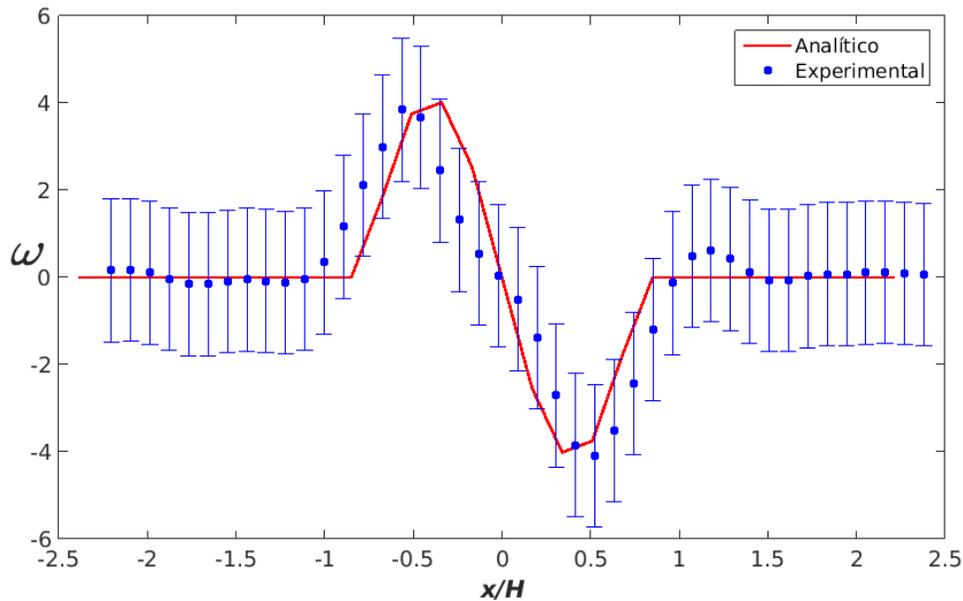


Figura 3.10: Comparación entre los resultados experimentales y la solución analítica. Vorticidad ω vs x . Los puntos azules son los resultados experimentales y la línea roja continua son los valores analíticos.

3.1.5. Circulación Γ

Para determinar la circulación sólo se consideró un vórtice del dipolo usando sumas de Riemann para integrar.

$$\Gamma = \int_A \omega ds \approx \sum_{i,j} \omega(i,j) \Delta x \Delta y \quad (3.1)$$

En la figura ?? se muestra el script realizado para dicho cálculo, (ver el apéndice D). En la figura (3.11) se muestra el dominio de integración:

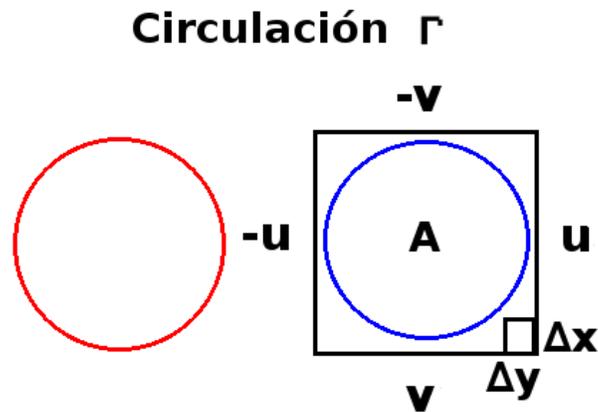


Figura 3.11: Cálculo de la circulación Γ tomando un vórtice del dipolo.

En la gráfica de la figura (3.12) se puede apreciar como varía la circulación con el tiempo desde su etapa de formación, crecimiento hasta su madurez para finalmente pasar a su destrucción. En el apéndice (D) se muestra un scrip realizado para dicho cálculo.

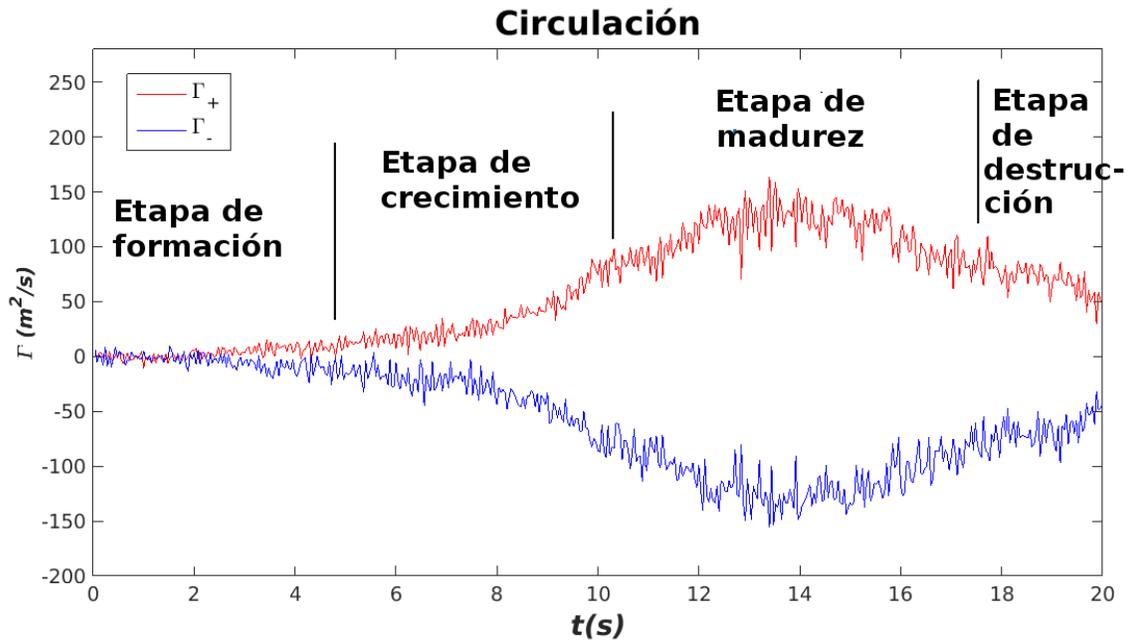


Figura 3.12: Etapas de la circulación variando con el tiempo del sistema dipolo. La curva roja es para uno de los vórtices y la curva azul es para el otro vórtice.

Haciendo un ajuste polinomial de 6to grado a saber: $P(x) = 0.0001x^6 - 0.006x^5 + 0.0744x^4 - 0.0977x^3 - 1.8832x^2 + 8.5958x - 5.7898$ se obtiene la gráfica (3.13).

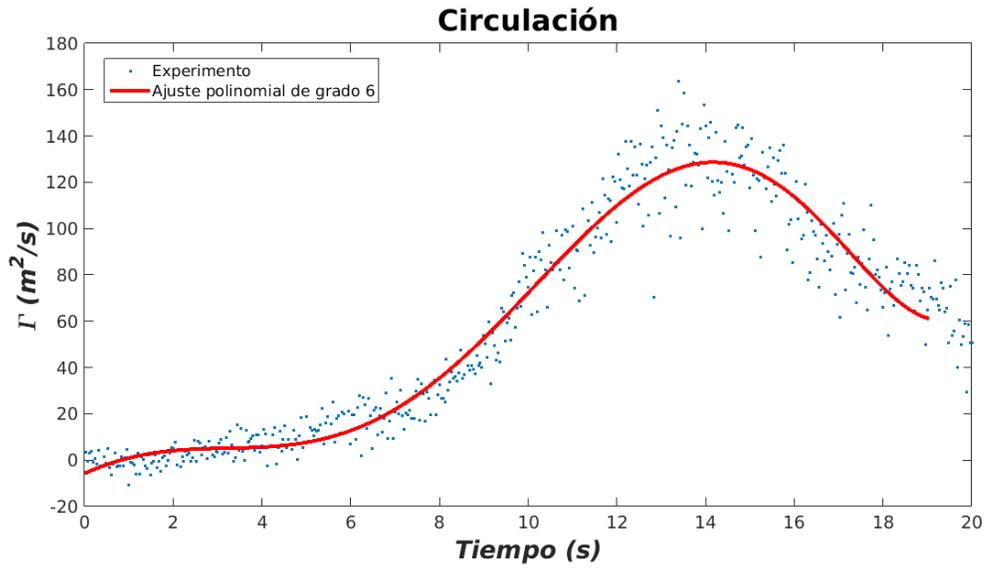


Figura 3.13: Circulación con un ajuste polinomial de 6to grado.

3.1.6. Función de Corriente ψ

Para calcular la función de corriente ψ experimental se resolvió la ecuación de Poisson por métodos numéricos usando diferencias finitas y el sistema de ecuaciones se resolvió usando el método iterativo de Gauss-Seidel, (ver apéndice A) y con los datos numéricos que arrojó el PIVlab (ver apéndice C). En la figura (3.14) se observa una de las gráficas obtenidas en el tiempo $t = 11.56$ s que corresponde a la imagen 289 arrojada por PIVlab.

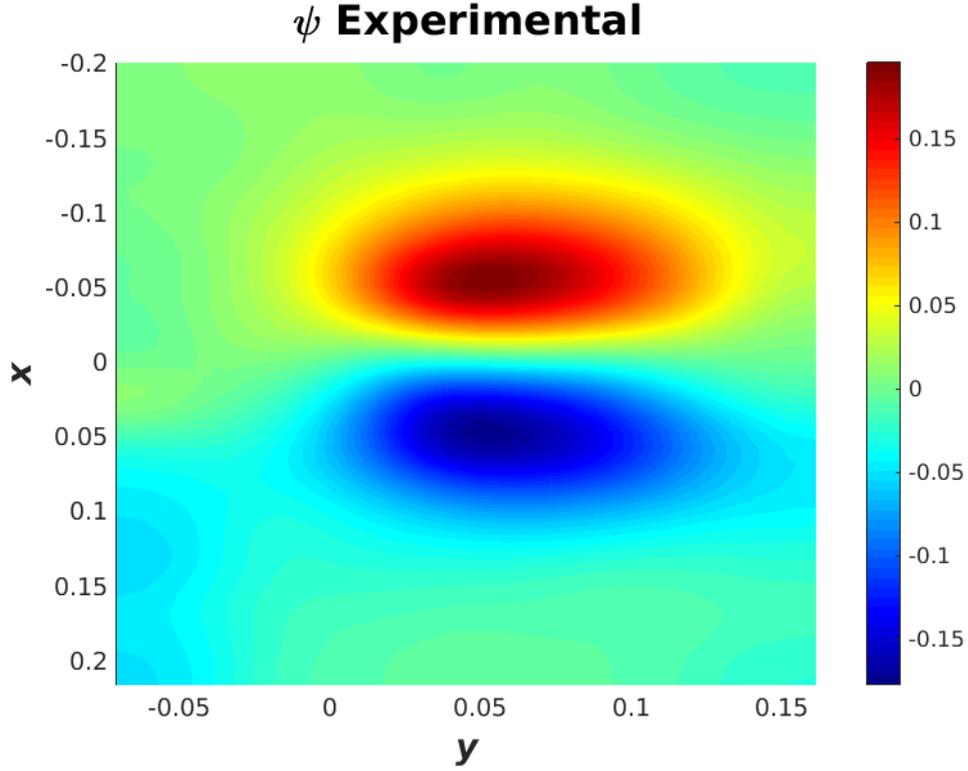


Figura 3.14: Imagen de la función de corriente ψ del dipolo experimental en el tiempo $t = 11.6$ s. La tolerancia utilizada para obtener este resultado fue de 4.7×10^{-6}

3.1.7. Cálculo de la constante k

Para el cálculo de la constante de proporcionalidad k , se adimensionalizaron las cantidades ψ y ω como sigue

$$\omega^* = \frac{\omega R_o}{U} \text{ y la } \psi^* = \frac{\psi}{R_o U} \quad (3.2)$$

donde R_o que es el radio del cilindro, es la longitud característica y U es la velocidad característica.

Así pues, al igualar (ver ecuación 1.14)

$$\omega^* = k\psi^* \quad (3.3)$$

$$\frac{\omega R_o}{U} = k \frac{\psi}{R_o U} \quad (3.4)$$

quedando $\omega = \frac{k}{R_0^2} \psi$

Por tanto se puede prescindir de la U característica.

En el cálculo de la constante de proporcionalidad k analítica se graficó ψ vs ω como se puede ver en la figura (3.15), de ésta se tomaron 5 pares de números (ψ_i, ω_i) y (ψ_j, ω_j) para que a través de la fórmula pendiente y dos puntos, $k = \frac{\omega_j - \omega_i}{\psi_j - \psi_i}$ y haciendo un promedio se obtuviera un valor de $k = 14.68$.

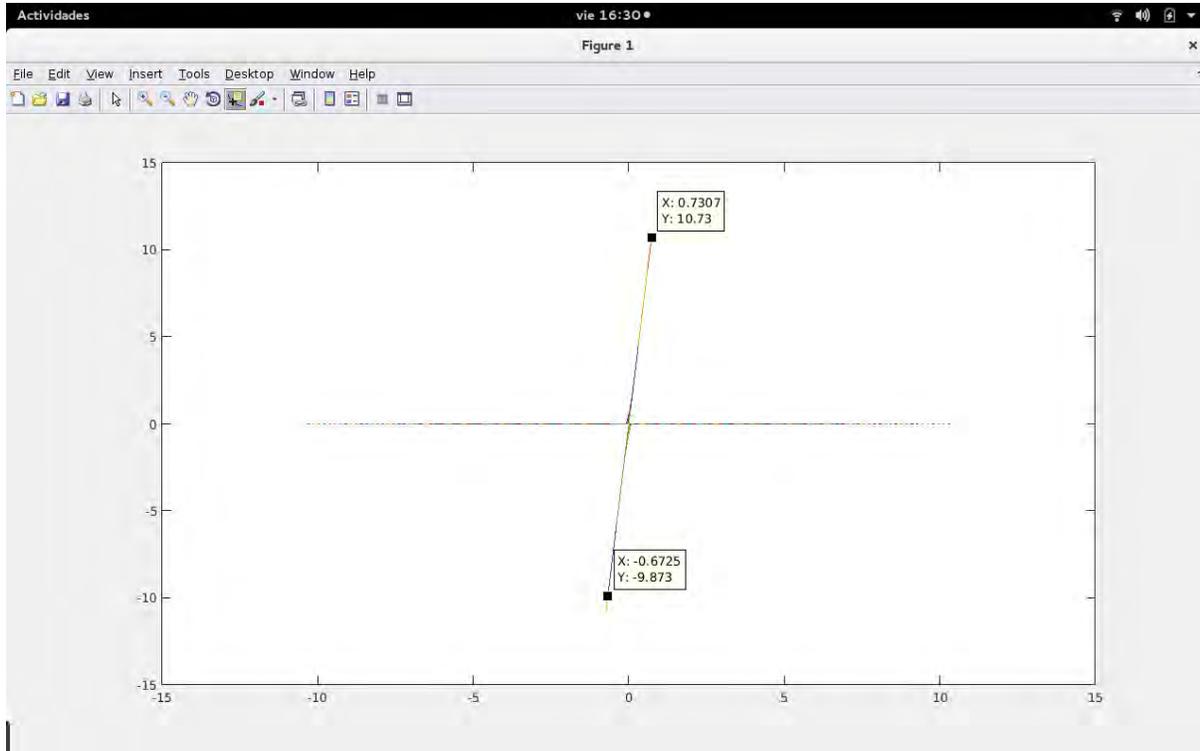


Figura 3.15: Cálculo de la pendiente k del modelo analítico, tomando dos pares de puntos.

Como en este trabajo se consideró la suposición que hicieron Lamb-Chaplygin de que la vorticidad ω fuera proporcional a la función de corriente ψ , esto es:

$$\omega = k\psi \quad (3.5)$$

Reacomodando a como se hizo:

$$\psi = \frac{1}{k}\omega \quad (3.6)$$

El valor analítico de $1/k$ es 0.0681. Para determinar el valor de $1/k$ experimental utilizamos el método de mínimos cuadrados obteniéndose un valor de 0.062 ± 0.036 lo cual es bastante satisfactorio y la ordenada al origen es de 0.050 ± 0.047 como se muestra en

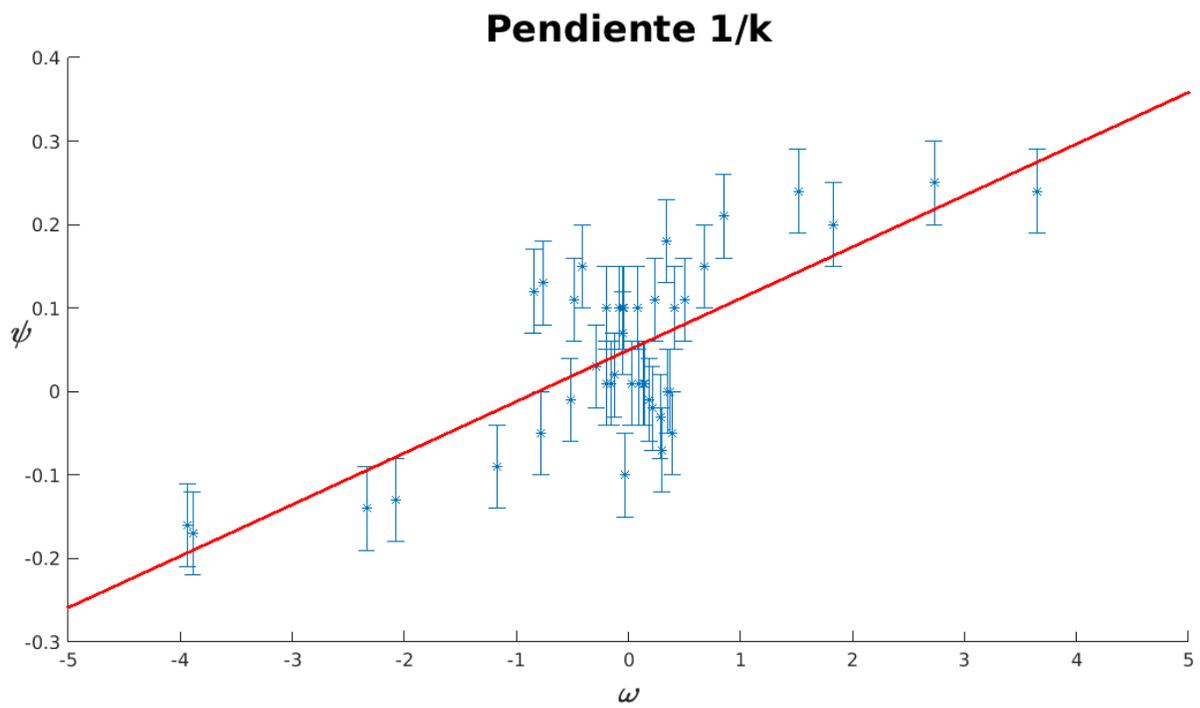


Figura 3.17: Gráfica de la pendiente $1/k$ usando el método de mínimos cuadrados.

Capítulo 4

Discusiones y Conclusiones

4.1. Discusiones

Se hicieron varias pruebas con los diferentes videos tomados. Con la cantidad de datos adquiridos fue posible calcular el campo de velocidades y vorticidad usando PIVlab, los cuales muestran el proceso de formación del dipolo de tal manera que fue posible ver con detalle el fenómeno.

Otras técnicas utilizadas para medir flujos son la velocimetría Doppler láser y la anemometría de hilo caliente. La principal diferencia entre PIV y esas técnicas es que PIV produce campos vectoriales bidimensionales o incluso tridimensionales, mientras que las otras técnicas miden la velocidad en un punto. Durante PIV, la concentración de partículas es tal que es posible identificar partículas individuales en una imagen, pero no con certeza para rastrearla entre imágenes. Cuando la concentración de partículas es tan baja que es posible seguir una partícula individual se denomina velocimetría de seguimiento de partículas, mientras que la velocimetría de moteado láser se usa para casos en los que la concentración de partículas es tan alta que es difícil observar partículas individuales en una imagen.

Partiendo de la hipótesis de que si concordarán los datos experimentales con el modelo teórico, la hipótesis se acepta.

- Los datos obtenidos en PIVlab no tenían un sistema de referencia centrado en el origen de coordenadas, así que fueron desplazados para poder hacer la comparación con los resultados analíticos. Lo mismo pasó con el cálculo de la ψ experimental. Además, en este mismo caso, como se debía comparar con resultados analíticos adimensionales, se tuvieron que adimensionalizar los resultados experimentales. Pero como la velocidad característica desaparecía en la adimensionalización, se definió como la velocidad característica $6U_0$,

pues fue una velocidad que coincidió en el cálculo tanto del gasto como en la velocidad de desplazamiento del dipolo.

4.2. Conclusiones

En este trabajo de tesis se hizo, por un lado un experimento para determinar el campo de velocidades, la vorticidad, la circulación y la función de corriente. Por otra parte, se hicieron cálculos para obtener expresiones analíticas de velocidad, vorticidad y función de corriente para el dipolo de Lamb-Chaplygin. Se cumplieron los objetivos tales como que si se pudo desarrollar un experimento del dipolo en 2-D usando la técnica de PIV. Asimismo, se desarrolló la deducción de las expresiones para la vorticidad y la función de corriente usando el modelo teórico de Lamb-Chaplygin.

Uno de los resultados obtenidos en este trabajo fue calcular la función de corriente ψ , resolviendo la ecuación de Poisson usando el método iterativo de Gauss-Seidel, ver apéndice D al final de este trabajo. Asimismo, se determinó el campo de velocidades y la circulación Γ . También se determinó la constante k experimental, el cual es mi resultado más importante porque me permite afirmar que mis resultados experimentales concuerdan con el modelo de Lamb-Chaplygin.

Al hacer la adimensionalización de los datos experimentales y compararlos con el modelo analítico se puede concluir que ajustan adecuadamente.

Se pudo demostrar que la técnica de Velocimetría por Imágenes de Partículas puede ser usada en la docencia.

Bibliografía

- Arfken, G. (1985) *Mathematical methods for physicist. 3th ed Academic Press.* USA.
- Asmar, N. H. (2005) *Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems. 2nd ed Pearson Prentice Hall.* USA.
- Batchelor, G. K. (2000) *An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press.* UK.
- Bourgoin, M., Qureshi, N., Baudet, C., Cartellier, A., y Gagne, Y. (2009) Lagrangian statistics of inertial particles in turbulent flow. B. Eckhardt (ed.) *Advances in Turbulence XII, Springer Proceedings in Physics* **132**, 31-34
- Bryant, D. B., Whilden, K. A., Socolofsky, S. A. y Chang, K. (2012) Formation of tidal starting-jet vortices through idealized barotropic inlets with finite length. *Environ. Fluid Mech.* DOI 10.1007/s10652-012-9237-4
- Burden, R. L., Faires, J. D. (2002) *Análisis numérico. 7ma Ed. Thomson Learning.* Bogotá, Colombia.
- Navier (1822) M´emoire sur les lois du mouvement des fluides, *Mem. Acad. Sci. Inst. France* 6, 380–440.
- Crow, S. C. (1970) Stability Theory for a Pair of Trailing Vortices. *AIAA Journal* Vol. 8 **12** 2172.
- Chaplygin, S.A. (1903) One case of vortex motion in fluid. *Tr. Otd. Fiz. Nauk Imper. Mosk. Obshch. Lyub. Estest.* 11 (**2**) 11-14.
- Chaplygin, S. A. (2007) One Case of Vortex Motion in Fluid. *Reg. Chaotic Dyn.* 2 **12** 219-232.
- Duran-Matute, M., Albagnac, J., Kamp, L. P. J., y van Heijst, G. J. F. (2010) Dynamics and structure of decaying shallow dipolar vortices. *Physics of Fluids* **22**, 116606

- Escauriaza, C., Sotiropoulos, F. (2011) Lagrangian model of bed-load transport in turbulent junction flows. *J. Fluid Mech.* **666** 36-76.
- Flór, J. B., Van Heijst, G.-J. F. (1994) An experimental study of dipolar vortex structures in a stratified fluid, *J. Fluid Mech.* **279** (1994) 101–133.
- Flór, J. B., Van Heijst, G.-J. F., Delfos, R. (1994) Decay of dipolar vortex structures in a stratified fluid. *Phys. Fluids* **7** 374
- Fornberg, B. (1980) A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **98** 4, 819-855.
- Gand, F., Deck, S., Brunet, V., Sagaut, P. (2010) Flow dynamics past a simplified wing body junction. *Physics Fluids* **22** 115111
- Gill, A. (1982) Atmosphere-Ocean Dynamics. *Academic Press*. USA.
- Guyon, E., Hulin, J.-P. & Petit, L. (2001) Hidrodynamique Physique. *EDP Sciences, CNRS Ed.* Paris.
- Heinbockel, J. H. (1996) Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics. *Old Dominion University*.
- Hsu, H. P. (1998) Análisis de Fourier. *Addison- Wesley Longman*. México.
- Jacobs, P. A., Pullin, D. I. (1985) Coalescence of stretching vortices. *Physics Fluids* **22** 1619
- Kizner, Z., Khovoles, R. (2004) Two Variations on the theme of Lamb-Chaplygin: Super-
smooth dipole and rotating multipoles. *Regular and Chaotic Dyn.* **94**, 509-518
- Kundu, P. K., Cohen, I. M. (2002) Fluid Mechanics. *2nd Ed. Academic Press*. USA.
- Lacaze, L., Brancher, P., Eiff, O., Labat L. (2010) Experimental characterization of the 3D dynamics of a laminar shallow vortex dipole. *Exp. Fluids* **48**, 225-231
- Lamb, H. (1932) Hydrodynamics. *6th Edition, Dover Publications*. New York.
- Landau, L. D., Lifschitz, E. M. (2001) Mecánica de Fluidos, Curso de Física Teórica Vol. 6. *2da Ed. Reverté*. Barcelona, España.
- López Sánchez E. J. (2013) Vorticidad y Transporte de Partículas a la Salida de un Canal. *Tesis doctoral, UNAM*. México.

- López Sánchez E. J., García Molina C. D., Medina Ovando, A. y Ruiz Chavarría, G. (2016) Pendiente.
- Mattews, J. H., Fink, K. D. (2007) Métodos numéricos con Matlab. *3ra Ed. Pearson-Prentice Hall*. España.
- Meunier, P., Leweke, T., Lebescond R., Van Aughtem, B. y Wang, C. (2004) DPIVsoft. User guide. *Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre. UMR 6594 CNRS / Universités Aix-Marseille I et II*. Francia.
- Meunier, P., & Leweke, T., (2005) Elliptic instability of a co-rotating vortex pair. *Exp. Fluids* **533**, 125–159.
- Mordant, N., Metz, P., Michel, O. & Pinton, J. F (2001) Measurement of lagrangian velocity in fully developed turbulence. *Phys. Rev.Lett.* **87** 214501
- Mordant, N. (2001) Mesure lagrangienne en turbulence: mise en œuvre et analyse. *Thèse de doctorat, l' Ecole Normale Supérieure de Lyon*. France.
- Nicolau del Roure, F., Sokolofsky, S. A. & Chang, K. (2009) Structure and evolution of tidal starting jet vortices at idealized barotropic inlets. *J. Geophys. Res.* Vol. 114, C05024
- Peyret, R. (2002) Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow. *Springer-Verlag*. USA.
- Thielicke W. & Eize J. Stamhuis(2010) PIVlab - Time-Resolved Digital Particle Image Velocimetry Tool for MATLAB. USA.
- Pond, S., Pickard, G. L. (1983) Introductory Dynamical Oceanography. *2nd Ed. Pergamon Press*. G. B.
- Pozrikidis, C. (1997) Introduction to theoretical and computational fluid dynamics. *Oxford University Press*. NY.
- Song, Y. y Haidvogel, D. (1994) A semi-implicit ocean circulation model using a generalized topography-following coordinate system. *J. Comput. Phys.* **115**, 228–244
- Sous, D., Bonneton, N., Sommeria, J. (2004) Turbulent vortex dipoles in a shallow water layer. *Physics of Fluids* **16**, 2886

- Sous, D., Bonneton, N. y Sommeria, J. (2005) Transition from deep to shallow water layer: formation of vortex dipoles. *Eur. J. Mech B/Fluids* **24**, 19-32
- Stokes (1845) On the theories of internal friction of fluids in motion, Trans. Cambridge. Philos. Soc. 8, 287-305.
- Van Dicke, M. (1982) An album of Fluid Motion. *The Parabolic Press* Stanford, Ca. USA.
- Velasco Fuentes, O. U. (2003) ¡Larga vida al vórtice!
- Jaime K. G. Ruiz (2015) Selected Topics of computational and Experimental Fluid Mechanics.
- Wells, M. G., van Heijst, G. -J. F. (2003) A model of tidal flushing of an estuary by dipole formation. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. **37** 223-244.
- Young, D. D., Munson, B. R., Okiishi, T. H. (2001) A Brief Introduction to Fluid Mechanics. *2nd Edition*, John Wiley & Sons Inc. New York.

Páginas web

- Free Software Foundation, Inc. (1996) <http://www.fsf.org/licensing/essays/free-sw.html> Consultada el 30 de mayo de 2013.
- The open source CFD toolbox. (2004) <http://www.opencfd.co.uk/openfoam> Consultada el 2 de abril de 2013.
- Anastasia Gubin(2015)<http://www.lagranepoca.com/internacionales/africa/6066-remolinos-de-zonas-muertas-sin-oxigeno-se-desplazan-en-el-atlantico.html>
- Dr. William Thielicke and Prof. Dr. Eize J. Stamhuis <http://pivlab.blogspot.mx/>

Apéndice A

Ecuación de Poisson y Condiciones de Frontera

Tenemos que la ecuación de Poisson es

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega$$

Al calcular las parciales por separado en forma numérica, tomando en cuenta que en el experimento $i = 26$ que corresponde a la coordenada y y $j = 43$ que corresponde a la coordenada x , tenemos

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \approx \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

Con lo cual obtenemos una expresión para la ecuación de Poisson en forma numérica como sigue

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \omega_{i,j}$$

Por otro lado, de la relación entre función de corriente y las componentes de velocidad sabemos que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$$

y

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

Al pasar éstas expresiones a su forma numérica y evaluarlas para $nx + 1$ y 1 y $ny + 1$ y 1 respectivamente nos quedan

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{nx+1} = \frac{3\psi_{nx+1,j} - 4\psi_{nx,j} + \psi_{nx-1,j}}{2\Delta x} = -v_{nx,j}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_1 = \frac{-3\psi_{1,j} + 4\psi_{2,j} - \psi_{3,j}}{2\Delta x} = -v_{1,j}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{ny+1} = \frac{3\psi_{i,ny+1} - 4\psi_{i,ny} + \psi_{i,ny-1}}{2\Delta y} = u_{i,ny}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_1 = \frac{-3\psi_{i,1} + 4\psi_{i,2} + \psi_{i,3}}{2\Delta y} = u_{i,1}$$

Las condiciones de frontera resultan en ecuaciones adicionales

$$3\psi_{i,ny+1} - 4\psi_{i,ny} + \psi_{i,ny-1} = 2\Delta y u_{i,ny+1}$$

$$3\psi_{i,1} - 4\psi_{i,2} + \psi_{i,3} = -2\Delta y u_{i,1}$$

$$3\psi_{nx+1,j} - 4\psi_{nx,j} + \psi_{nx-1,j} = 2\Delta x u_{nx+1,j}$$

$$3\psi_{1,j} - 4\psi_{2,j} + \psi_{3,j} = 2\Delta x u_{1,j}$$

Finalmente, despejamos $\psi_{i,j}$ de la ecuación $\Delta^2 \psi = -\omega$ y $\psi_{i,j}$ en las fronteras de $\frac{\partial \psi}{\partial n} = v$

$$\psi_{i,ny+1} = \frac{2\Delta y u_{i,ny+1} + 4\psi_{i,ny} - \psi_{i,ny-1}}{3}$$

$$\psi_{i,1} = \frac{-2\Delta y u_{i,1} + 4\psi_{i,2} - \psi_{i,3}}{3}$$

$$\psi_{nx+1,j} = \frac{2\Delta x v_{nx+1,j} + 4\psi_{nx,j} - \psi_{nx-1,j}}{3}$$

$$\psi_{1,j} = \frac{2\Delta x v_{1,j} + 4\psi_{2,j} - \psi_{3,j}}{3}$$

Apéndice B

Uso de PIVlab

B.1. Software de Análisis

PIVlab es un software de velocimetría por imágenes de partículas de código abierto (PIV) que no sólo calcula la distribución de velocidad dentro de pares de imágenes, sino que también se puede utilizar para derivar, mostrar y exportar múltiples parámetros del patrón de flujo. Una interfaz gráfica de usuario (GUI) fácil de usar hace que los análisis PIV y el postprocesamiento de datos sean rápidos y eficientes.

En éste apéndice se mostrará los pasos que se siguieron para analizar los videos con el software PIVlab ver figura (B.1). Lo primero que se hizo fue convertir el video en imágenes (por medio del comando `ffmpeg -i dipolo2.wmv -qscale 0 dip1_% 04d.jpg`), después se observó el video donde el vórtice se ve mejor. Se toma el tiempo donde empieza a salir y el tiempo donde se disipa. Por ejemplo, en el video dipolo2 se observa que empieza a salir en el tiempo $t_1 = 5$ seg. y se disipa en el tiempo $t_2 = 30$ seg. Así pues, como sabemos que son 50 imágenes por segundo, entonces al multiplicar $50 \times 5 = 250$ y $50 \times 30 = 1500$. Lo cual quiere decir que nuestro dipolo está entre las imágenes 250 y 1500. Así pues abrimos el PIVlab desde Matlab y seleccionamos esas imágenes con `add` e importar ver figura (B.2), luego definimos una distancia de referencia que en este caso es el ancho del canal y tiempo entre imágenes en el comando “calibration“ ver figura (B.3), posteriormente nos vamos a ”Analysis settings“ para definir nuestra región de interest ”ROI“, para definir el tamaño de una celda nos vamos a “PIV settings“ dándole en el pass 1 (64,32) y en el pass 2 (32,16) dado que mis imágenes son de 720×576 píxeles, al dividir 720 entre 64 nos da 11.25 y al dividir 576 entre 32 nos da 18, lo cual quiere decir que se traslaparan las celdas, ver figura (B.4), luego nos vamos a ”Analysis“. Una vez terminado el análisis PIVlab nos muestra los vectores generados. En seguida, vamos a ”post processing“ para quitar

los vectores espurios y suavizarlos ver figura (B.5). Luego entonces podemos guardar los datos en *file* \implies *save* \implies *ASCII-file(x, y, u, v, vort)* lo cual nos permite manipularlos en Matlab.

En la figura B.1 se puede apreciar la interface de PIVlab.

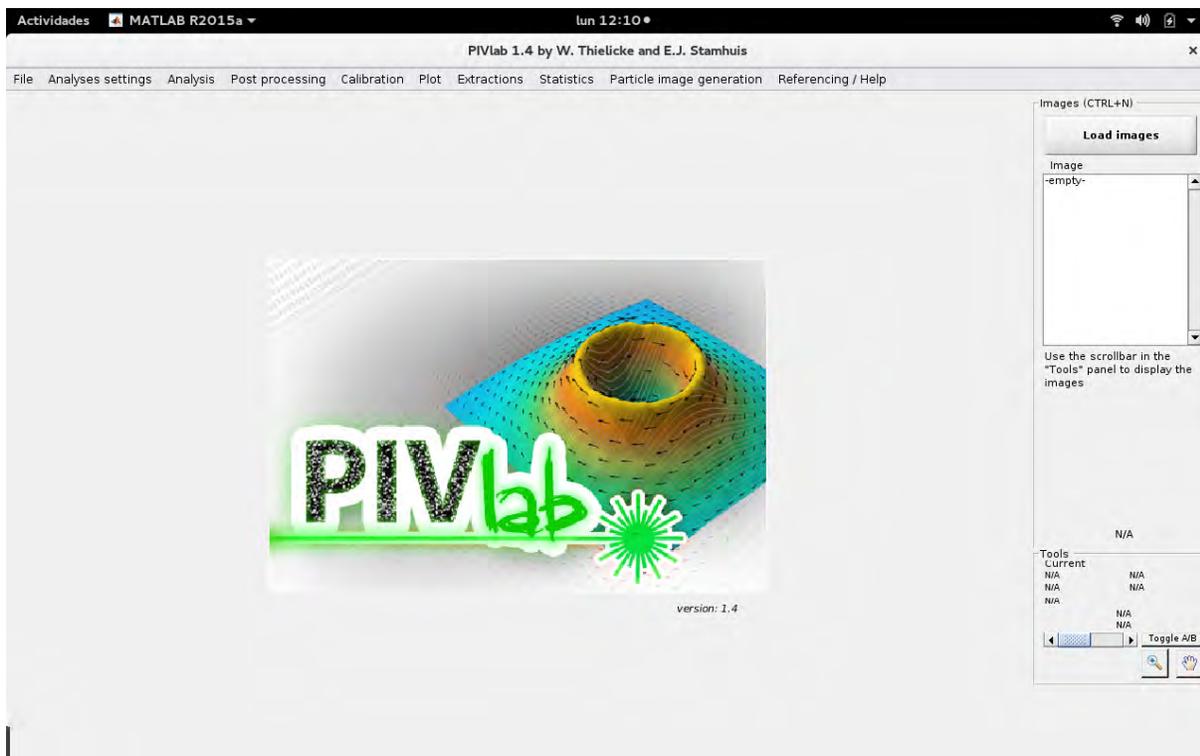


Figura B.1: la interface de PIVlab.

En la figura B.2 se puede ver la selección desde la imagen 250 hasta la 1500, esto es 1250 imágenes y agregamos e importamos. Y como PIVlab toma dos imágenes consecutivas para hacer los cálculos, entonces se obtuvieron 625 datos.

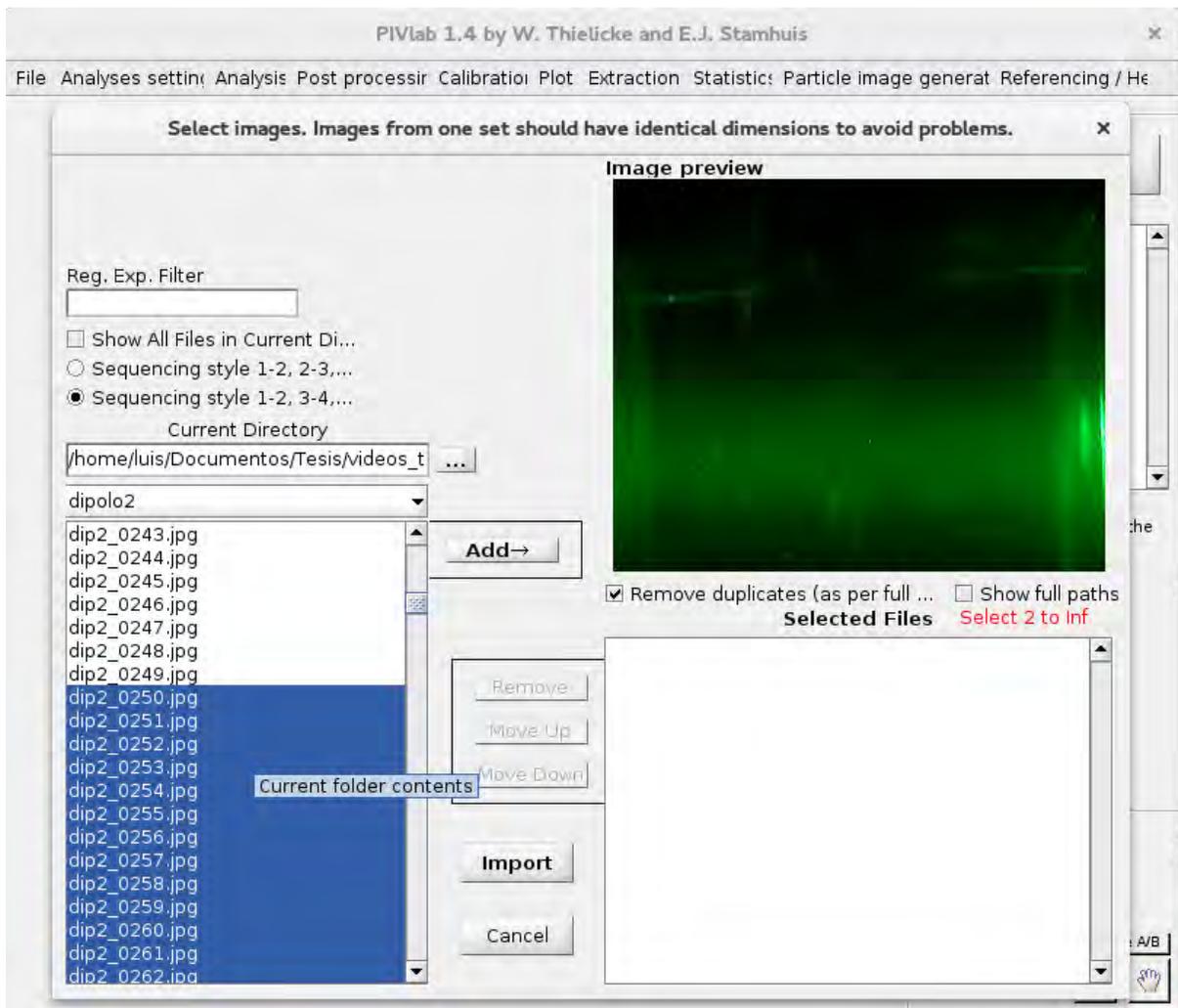


Figura B.2: En esta imagen se puede ver como se seleccionó desde la imagen 250 hasta 1500 y agregamos e importamos.

En la figura B.3 se selecciona una distancia de referencia que en este caso es de .04m que corresponde al ancho del canal y un tiempo entre imágenes en milisegundos que en nuestro caso es de $1/50 = .02s = 20ms$.

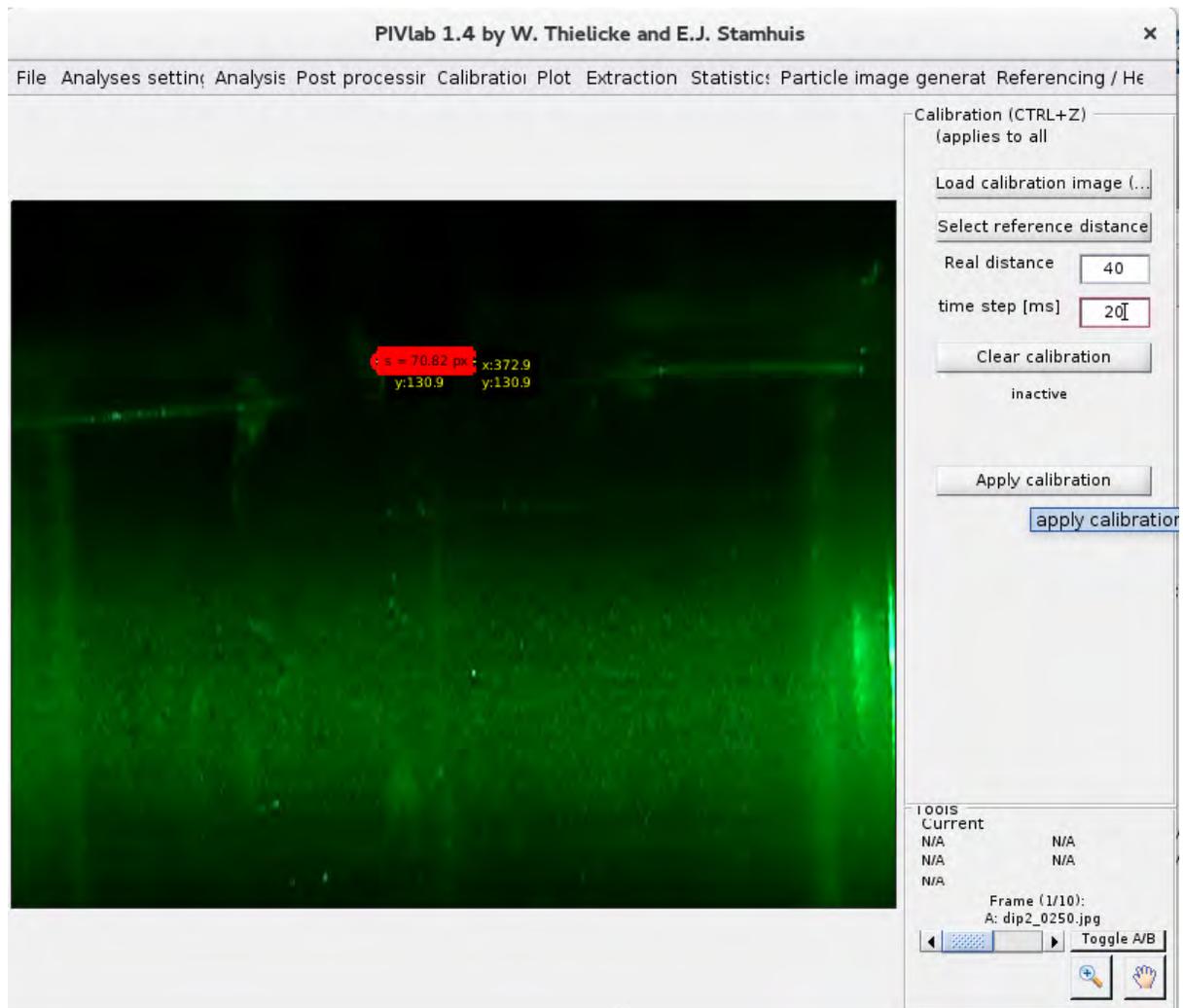


Figura B.3: En esta imagen se selecciona una distancia de referencia y se pone la distancia real y tiempo entre imágenes en milisegundos.

En la figura B.4 se define el mallado.

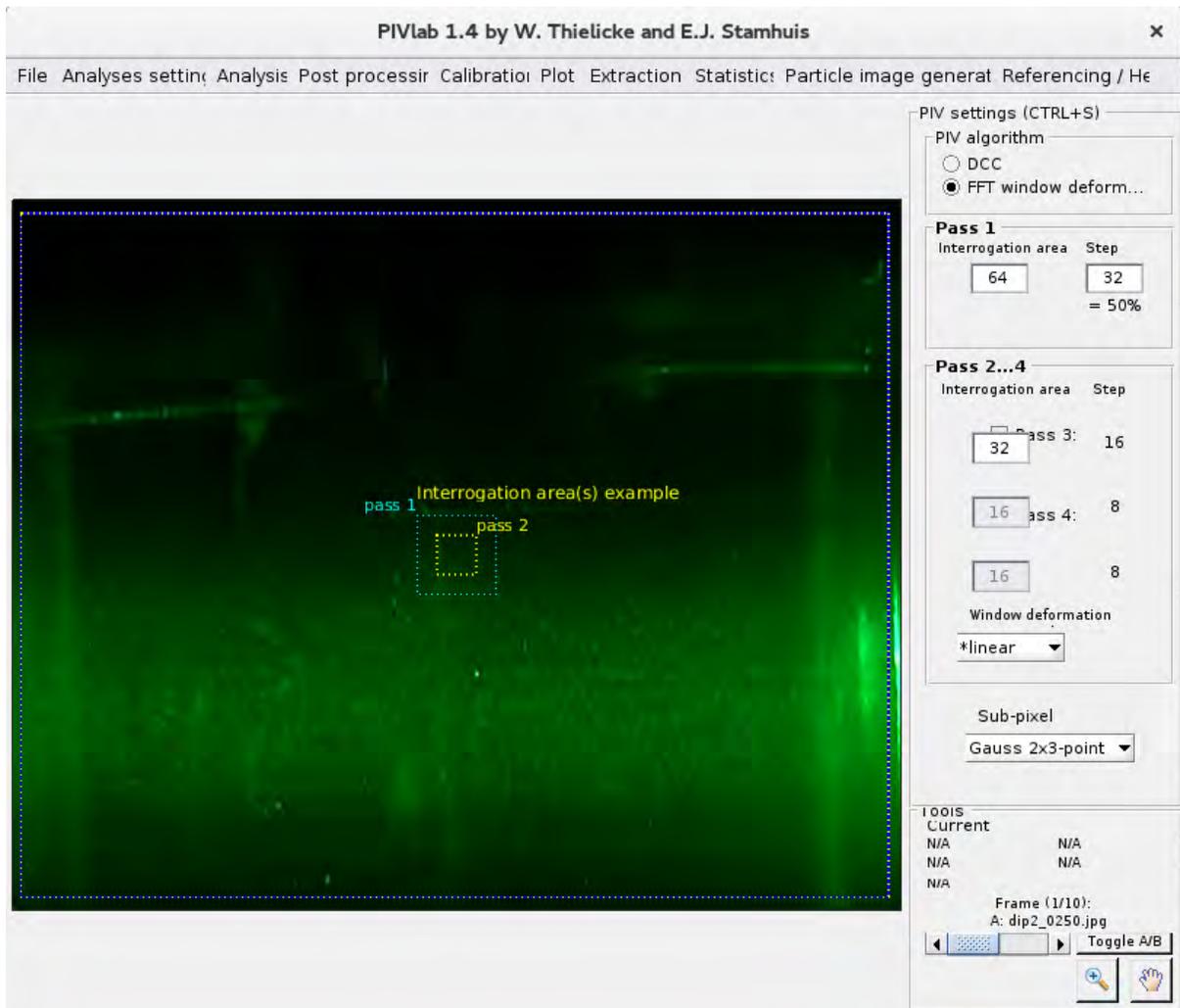


Figura B.4: En esta imagen se define el mallado, que en este caso muestra área de interrogación es pass1 (64,32) y la segunda área de interrogación es pass2 (32,16).

En la figura B.5 se puede observar el suavizado de vectores así como una región en color rojo llamada "mask" donde PIVlab no hizo cálculos para ahorrar tiempo de cómputo.

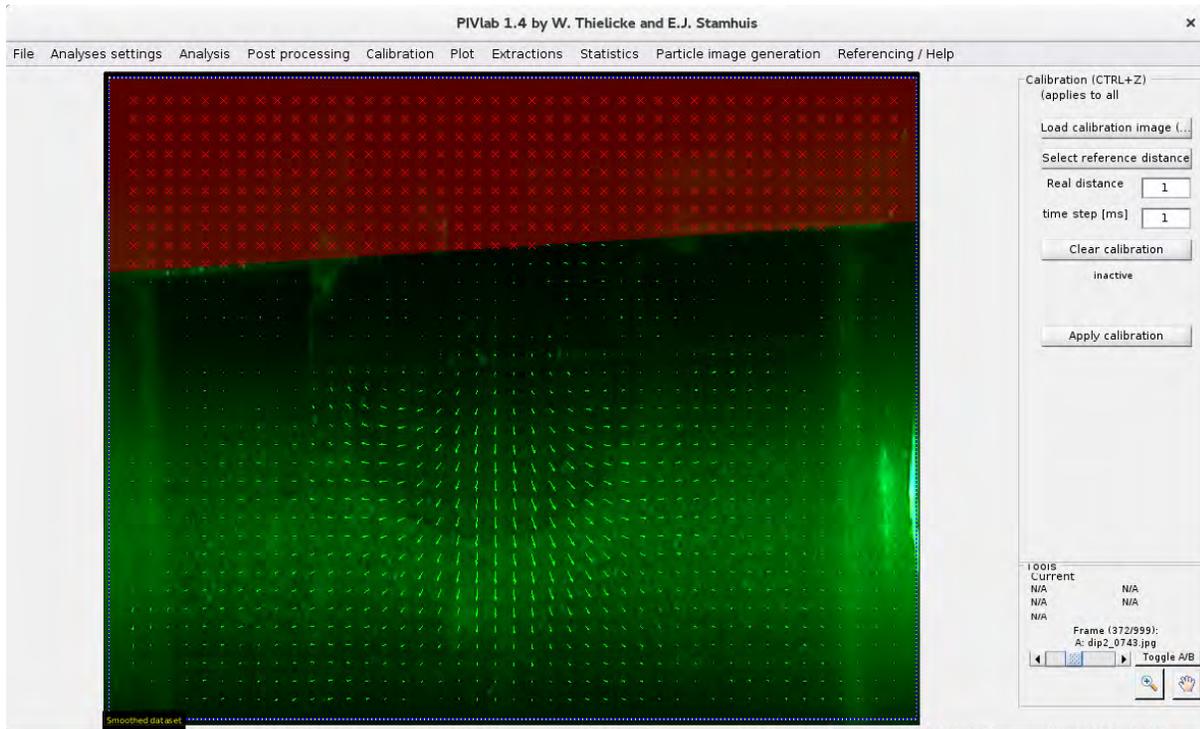


Figura B.5: En esta imagen se puede observar el suavizado de vectores así como una región en color rojo llamada "mask" donde PIVlab no hizo cálculos para ahorrar tiempo de cómputo.

B.1.1. La exactitud del análisis de PIVlab

La calidad de las mediciones de velocimetría por imágenes de partículas digitales en PIVlab fue extensivamente evaluada usando imágenes de partículas sintéticas con propiedades conocidas. Se determinó el efecto del diámetro de imagen de partículas, densidad de las partículas, el ruido del sensor, la pérdida de pares de partículas, el desenfoque de movimiento y de cizallamiento fue determinado y es reportado en detalle por Thielicke, W (2014). Estas pruebas de calidad revelaron que la Transformada de Fourier Discreta (DFT, por sus siglas en inglés) usando la deformación de ventana supera la correlación básica de Correlación Directa Cruzada (DDC por sus siglas en inglés) y la DFT, especialmente bajo condiciones difíciles. La carga de cálculo adicional es compensado por el aumento de la robustez y precisión del algoritmo. En condiciones óptimas (imagen de partículas de diámetro ≈ 3 píxeles, densidad de partículas ≈ 5 a 15 partículas por ventana, sin ruido, sin pérdida de par de partículas, sin desenfoque de movimiento, sin corte) el error de sesgo de los algoritmos de ventana de la deformación de PIVlab es menor que 0.005 píxeles y el error aleatorio es inferior a 0.02 píxeles ((Thielicke y Stamhuis, 2010)).

Apéndice C

Datos de PIVlab

En este apéndice se muestra cómo fue que se analizaron los datos arrojados por PIVlab. En la siguiente imagen se muestra un ejemplo de un archivo que corresponde al tiempo 13.2 segundos, por ser este el tiempo en que mejor se ve el dipolo y dicho archivo lleva por nombre: *PIVlab_0330.txt* de los 625 archivos que generó PIVlab.

Cómo se puede ver en la figura C.1 los datos que arrojó PIVlab son las posiciones en $x[m]$ y $y[m]$ y las velocidades $u[m/s]$ y $v[m/s]$ y la vorticidad $\omega[1/s]$. También en ese mismo archivo se ven enumeradas dichas cantidades del 1 al 20 y por razones de espacio no se pusieron las 1,462 que tiene dicho archivo.

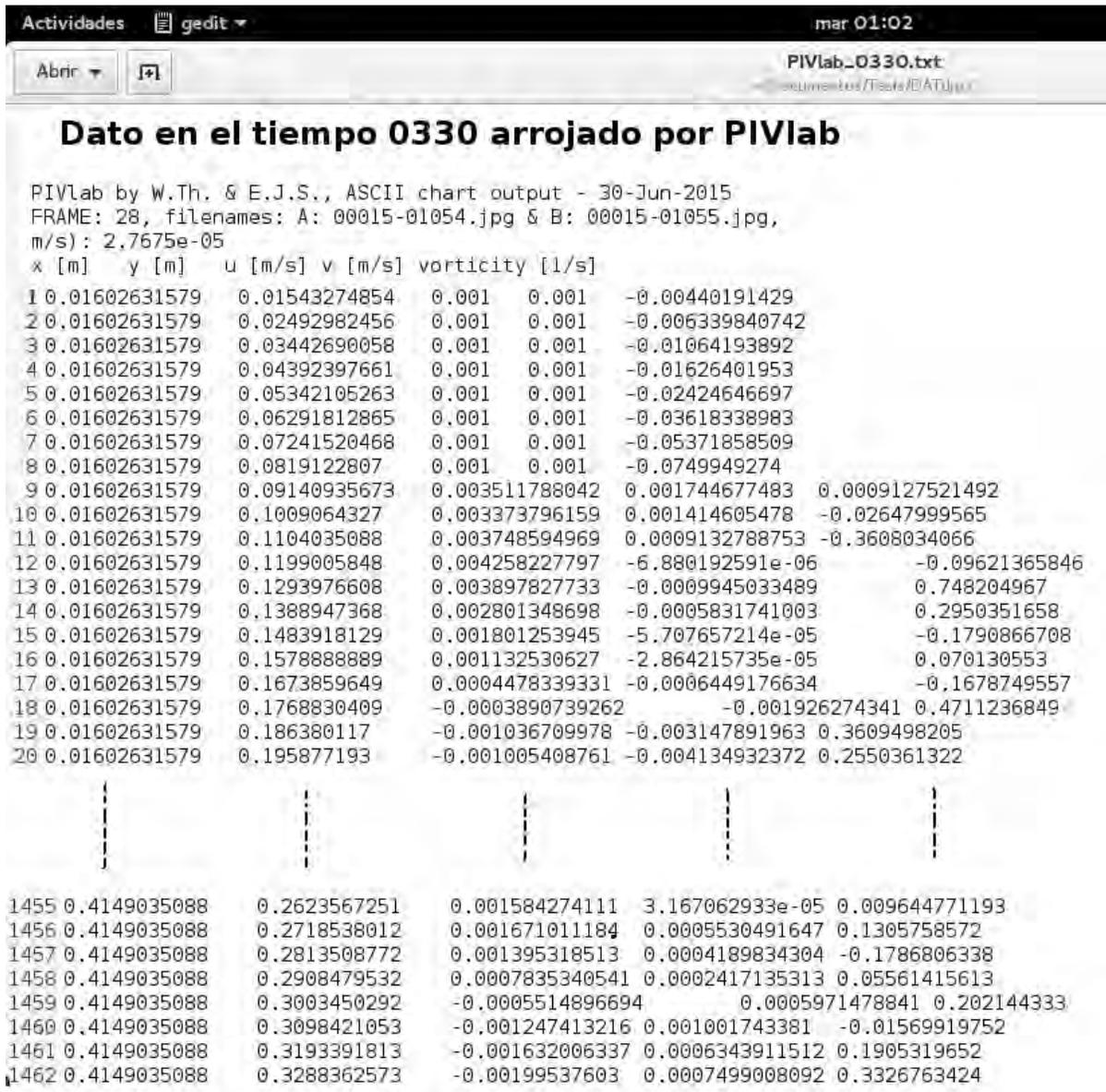


Figura C.1: Los primeros 20 datos y los últimos de las posiciones en $x[m]$ y $y[m]$ y las velocidades $u[m/s]$ y $v[m/s]$ y la vorticidad $\omega[1/s]$ en el tiempo 330.

Apéndice D

Circulación

Se integró la circulación utilizando sumas de Riemann sumando áreas de rectángulos. En la figura D.1 se muestra el script realizado para dicho cálculo.

Script para la circulación

```

clear;
base='PIVlab_0';

Ro= 6.94e-5;

N=0;
for i=0001:0500
    N = N +1;
    nombre=[base int2str(i) '.dat'];
    nom1=nombre;
    aij = nombre;
    [a b(1:1118,1:5,i)] = hdrload(nombre);
end

n=0;
for t=1:500
    N=0;
    n=n+1;
    for j=1:43
        for i=1:26
            N= N + 1;
            x(j,i,t) = b(N,1,t)-0.0003863/2;
            y(j,i,t) = b(N,2,t)-0.0003077/2;
            u(j,i,t) = b(N,3,t);
            v(j,i,t) = b(N,4,t);
            w(j,i,t) = b(N,5,t);
        end
    end

xa=x/Ro;
ya=y/Ro;
dt=1/50;
dx= x(2,1,t)-x(1,1,t);
dy= y(1,2,t)-y(1,1,t);

% circulación positiva

suma=0;
for i=1:22-1
    for j=1:26-1

        suma=suma+(w(i,j,t)+w(i+1,j+1,t))*dx*dy/2;
    end
end

circP(t)=suma;

% circulación negativa

% suma=0;
% for i=22:43-1
%     for j=1:26-1
%         %
%         suma=suma+(w(i,j,t)+w(i+1,j+1,t))*dx*dy/2;
%     end
% end
%
% circN(t)=suma;
tiempo(t)=t*dt;

%quiver(x(:, :, 330),y(:, :, 330),u(:, :, 330),v(:, :, 330))
%pcolor(xa(:, :, 330),ya(:, :, 330),w(:, :, 330))
% contour(xa(:, :, 330),ya(:, :, 330),w(:, :, 330))
% shading interp
% view(0,90)
% xlabel('Population','FontSize',30,'fontweight','b','color','r');
% ylabel('Population','fontSize',30,'fontweight','b','color','r');

end
% aux=mean(circ);
% circm(1:t)=aux;
%Para suavizar la curva de circulación
pM1=polyfit(tiempo,circP,6)
fM1=polyval(pM1,tiempo);
plot(tiempo,fM1);
%plot(tiempo,circP,tiempo,circN,'r')
plot(tiempo,circP,'.',tiempo(1:475),fM1(1:475),'r')

```

Apéndice E

Teoría Potencial

E.0.2. Analogía con la Teoría Electromagnética

La ecuación (1.5), la cual relaciona el campo de velocidad \vec{u} con la vorticidad $\vec{\omega}$, es similar a la ecuación electromagnética $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B} / \mu_0$, la cual nos da la dependencia, bajo condiciones estacionarias de la densidad de corriente \vec{J} sobre el campo magnético \vec{B} en el vacío. Abundaremos en este apéndice sobre esta analogía. Primero que todo, para un fluido incompresible, el campo de velocidades \vec{u} es una fuente libre - como el campo magnético \vec{B} - ya que satisface

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

Similarmente, recordando la ley de Ampere (relacionando la circulación de \vec{B} a lo largo de un contorno C , definido por el camino alrededor de un conductor llevando una corriente I), el cual se escribe como

$$I = \int \int_A \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \int \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

donde $d\vec{\ell} = \hat{n}_\ell d\ell$. Así, para la circulación en un paralelismo exacto, la ecuación

$$\Gamma = \int_C \vec{u} \cdot d\vec{\ell} = \int \int_\ell (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot d\vec{S} = \int \int_\ell \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$$

En ambos casos, la transformación desde la integral de superficie, a la integral de línea a lo largo del contorno C sobre el cual la superficie es anclada, sigue el teorema de Stokes. La *circulación* Γ es análoga a la corriente eléctrica I . También se representa, como se ilustra en la figura (E.1) abajo, el flujo del vector vorticidad.

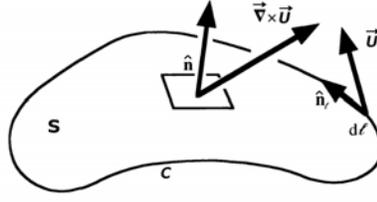


Figura E.1: El cálculo de la circulación del campo vectorial \vec{U} a lo largo de una curva espacial cerrada C del flujo de $\vec{\nabla} \times \vec{U}$ a través de cualquier superficie A “anclada” sobre C . Dibujo tomado de Guyon *et al* (2001).

La mecánica de fluidos tiene ciertas analogías con la teoría electromagnética, más específicamente con la magnetostática. De las leyes de Ampere y de Gauss para el magnetismo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{E.1})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{E.2})$$

se puede “emparejar” al campo magnético \vec{B} con el campo de velocidades en fluidos \vec{u} , al producto de la permitividad magnética con la densidad de corriente eléctrica $\mu_0 \vec{J}$, se asocia con la vorticidad $\vec{\omega}$.

De la ley de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}') dV}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

de donde

$$I = \int \vec{J} \cdot \hat{n} ds$$

Cambiando las variables:

$$\vec{u} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}') dV}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Así, la circulación Γ , dada por las ecuaciones (1.15) y (1.6), se relaciona con la corriente eléctrica I multiplicada por la permitividad magnética. Cambiando las variables correspondientes, de la ecuación (E.1) se obtiene la definición de vorticidad (ecuación 1.5), y de la ecuación (E.2) se obtiene la ecuación de continuidad (para fluidos incompresibles). Para que la analogía sea completa, se deben tener también las mismas condiciones de frontera.

Ahora discutiremos las características paralelas de los efectos de una continua y uniforme densidad de corriente j , y una densidad uniforme de vorticidad, cada uno dentro de

un tubo cilíndrico de radio r_0 , el cual es infinitamente largo y apuntando en la dirección z (Figura E.2) (para $r > r_0$, la densidad de corriente y la vorticidad se supone que deben ser cero). Este ejemplo ayuda a ilustrar la correspondencia entre estos dos campos.

Este primer problema se corresponde con el campo magnético alrededor del alambre recto llevando una corriente eléctrica con una densidad uniforme a través de la sección transversal del alambre. El segundo representa aproximadamente el vórtice que puede ser observado cuando un contenedor es vaciado a través de un hoyo circular. El campo de velocidad \vec{u} del fluido corresponde al campo magnético \vec{B} en la dirección azimutal alrededor del alambre, ambos con idéntica simetría. Se tiene la integral $\Gamma = \int \omega_z 2\pi r dr$ de la vorticidad ω del fluido, sobre la sección transversal del vórtice del tubo, correspondiendo una corriente total $I = \int 2\pi j r dr$ en el alambre.

La circulación de la velocidad $\Gamma = \omega_z \pi r_0^2$ es independiente de r siempre que $r > r_0$, que caracteriza a la fuerza del vórtice, y corresponde a la corriente total en el ejemplo de la figura E.2(a).

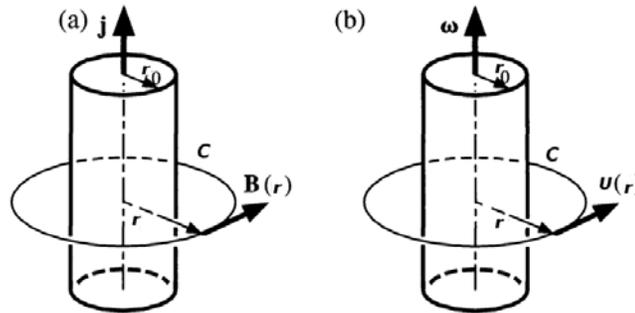


Figura E.2: (a) Un campo magnético inducido por un alambre recto que lleva corriente eléctrica. (b) El campo de velocidad del fluido genera un vórtice filamentario rectilíneo. Tomado de Guyon *et al* (2001).

Para el caso de un dipolo de vorticidad, la analogía con la magnetostática es el de un par de alambres rectos largos por los que pasa una corriente I en sentidos contrarios (figura E.3).

Así, dentro del vórtice la velocidad aumenta linealmente con el radio y fuera de él decae como $1/r$. En este sentido, un vórtice induce una cierta velocidad en el otro vórtice, por lo que el dipolo se desplazará también por la contribución de una componente de velocidad autoinducida.

La función de corriente debida al sumidero lineal está dada por Kundu y Cohen (2002):

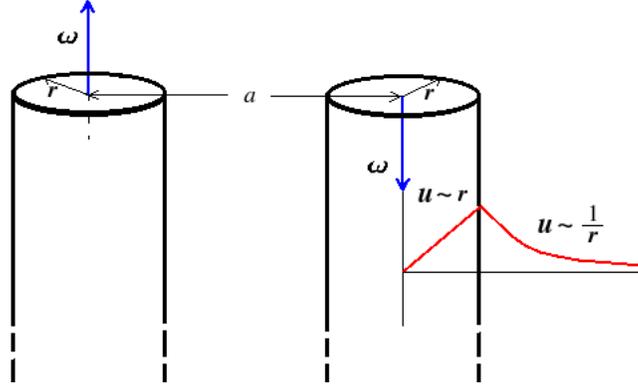


Figura E.3: Alambres rectos largos por los que pasa una corriente I en sentidos contrarios. La dirección de la corriente es la misma que la dirección del vector densidad de corriente \vec{J} , la cual, multiplicada por una constante representa a la vorticidad $\vec{\omega}$ en la mecánica de fluidos. En este caso la velocidad depende tanto del radio r como del ángulo θ (coordenadas polares). Tomado de López Sánchez. (2013).

$$\psi_s(x, y) = \frac{U}{4\pi} \left(\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{H}{2}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{H}{2}\right)^2} \right)$$

donde H es la abertura del sumidero. Por otro lado, la función de corriente del dipolo es:

$$\psi_d(x, y) = \frac{\Gamma}{4\pi} (\ln r_1 - \ln r_2)$$

donde Γ es la circulación, r_1 y r_2 son las distancias desde el centro de los vórtices al punto de observación.

La suma de los campos de velocidades del dipolo de vorticidad y del sumidero lineal (ver figura E.4) es lo que la teoría potencial considera como el comportamiento de un dipolo en un flujo periódico (Wells y van Heijst, 2003).

La velocidad autoinducida de traslación del dipolo en la dirección x es igual a:

$$u_d = \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

donde a es la distancia entre los centros de los vórtices. Esa velocidad es dependiente del tiempo, porque la circulación crece en la primera mitad del periodo de forzamiento.

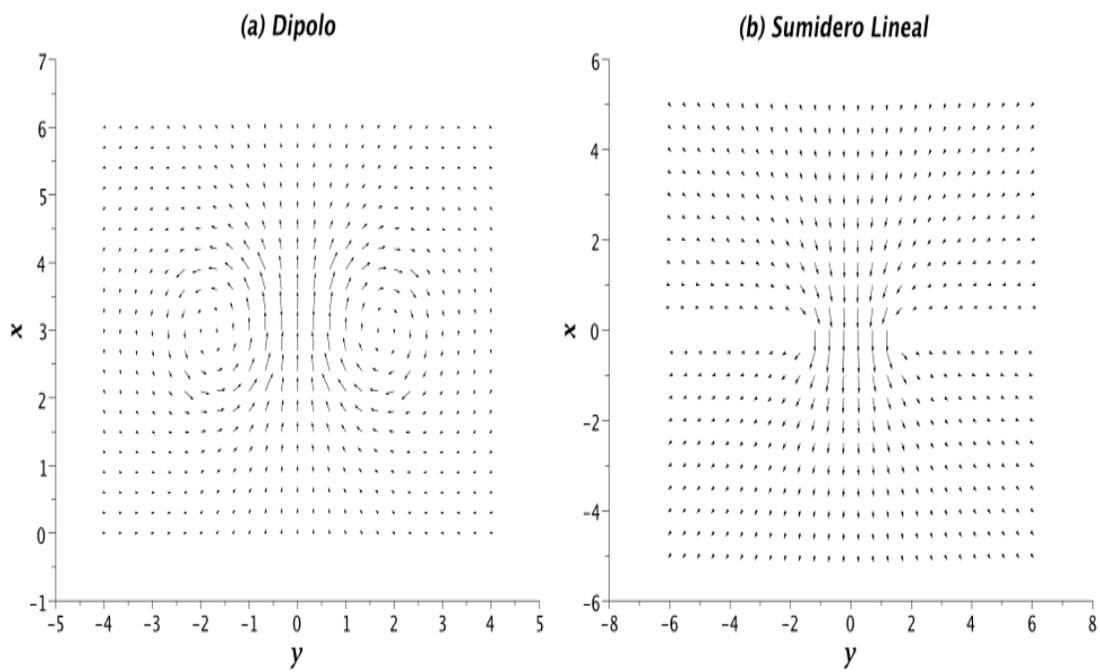


Figura E.4: Campos de velocidades del (a) dipolo, (b) sumidero lineal. Tomada de López Sánchez. (2013).