



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

ESTIMACIÓN DE LA VISCOSIDAD SANGUÍNEA MEDIANTE LA APLICACIÓN DE
FLUJO PULSÁTIL

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

PRESENTA:

RIGEL LEONARDO MORENO MORALES

TUTOR PRINCIPAL:

DR.OCTAVIO MANERO BRITO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES,UNAM

COMITÉ TUTOR:

DR. LUIS MEDINA TORRES
FACULTAD DE QUÍMICA,UNAM

DRA.GUADALUPE SÁNCHEZ OLIVARES
CENTRO DE INNOVACIÓN APLICADA EN TECNOLOGÍAS COMPETITIVAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, ENERO 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Lista de figuras	7
Índice de figuras	7
Lista de tablas	11
Índice de tablas	11
1 Introducción	15
1.1. Motivación	15
1.2. Viabilidad de la propuesta	16
1.3. Sangre	16
1.4. Fenómenos Cardiacos	17
1.5. Hemorreología	19
1.6. Ecuaciones constitutivas y flujo pulsátil	23
2 Hipótesis y Objetivos	25
2.1. Hipótesis	26
2.2. Objetivos	26
3 Ecuaciones	27
3.1. Preliminares estocásticos	27
3.1.1. Promedio de funciones	28
3.2. Flujo a través de un tubo	30

3.2.1.	Ecuación de Hagen-Poiseuille	30
3.2.2.	Flujo pulsátil en un fluido Newtoniano	34
3.2.3.	Flujo pulsátil en un fluido descrito por el modelo de Ostwald de Wåle	37
3.2.4.	Flujo pulsátil para un fluido descrito por el modelo de Ellis	40
3.3.	Modelos viscoelásticos	41
3.3.1.	Modelo White-Metzner	41
3.3.2.	Modelo de Phan-Thien-Tanner	42
3.3.3.	Modelo de Giesekus	43
3.3.4.	Modelo de Oldroyd-B	43
3.3.5.	Modelo de Moyers-Owens	44
4	Flujo Pulsátil	45
4.1.	Modelo Bautista Manero Puig (BMP)	45
4.1.1.	Esquema de adimensionalización de las ecuaciones	49
4.1.2.	Variables adimensionales	49
4.1.3.	Números adimensionales	50
4.1.4.	Grupos adimensionales	51
4.2.	Ecuaciones de movimiento y reológicas adimensionales	51
4.3.	Flujo volumétrico del modelo BMP	53
4.4.	Esquema perturbativo	56
4.4.1.	Orden 0 (ϵ^0)	59
4.4.2.	Orden 1 (ϵ^1)	63
4.5.	Optimización de flujo (aplicación de orden cero y uno)	67
4.6.	Esfuerzo de Cedencia	70
5	Metodología	71
5.1.	Muestras de sangre	71
5.2.	Modificación de patrones cardiacos	71
5.3.	Caracterización reológica	72
5.3.1.	Pruebas oscilatorias de baja amplitud de deformación SAOS	72

5.3.2.	Pruebas de corte simple en estado estacionario	73
5.4.	Simulaciones	73
6	Resultados	75
6.1.	Resultados bioquímicos y biométricos	75
6.2.	Reometría y modelado matemático	78
6.2.1.	Pruebas de corte simple en estado estacionario	78
6.2.2.	Pruebas oscilatorias de baja amplitud SAOS	82
6.2.3.	Microscopía	85
6.2.4.	Regla de Cox-Merz	86
6.2.5.	Viscosidad como función del hematocrito	88
6.2.6.	Esfuerzo de cedencia	91
6.3.	Aplicaciones para sangre humana con el orden cero del modelo BMP	92
6.4.	Funciones estocásticas	96
6.4.1.	Predicciones para el orden combinado uno y cero	96
6.4.2.	Aumento de flujo en función de los parámetros bioquímicos de la sangre	105
6.4.3.	Parámetro cinético estructural en función del hematocrito	112
6.4.4.	Aumento de flujo en función de los parámetros biométricos de la sangre	113
6.4.5.	Simulaciones mediante la versión multimodal	114
7	Conclusiones	117
	Bibliografía	119
A	Glosario	125
B	Productividad	127
C	Agradecimientos y Dedicatorias	131
C.1.	Agradecimientos	131

C.2. Dedicatorias 132

Índice de figuras

1.1. Representación del fenómeno cardiaco mecánico	18
1.2. Simulación de la ecuación de Charm-Kurland de la viscosidad sanguínea en función del la concentración de células (Hematocrito)	20
3.1. Funciones Seno (línea punteada) y Coseno (línea continua)	28
3.2. Funciones Seno (línea punteada) y Coseno (línea continua) elevadas al cuadrado	29
3.3. Funciones Seno (línea punteada) y Coseno (línea continua) elevadas al cubo .	29
3.4. Sistema capilar a considerar	31
4.1. Analogía mecánica de la evolución estructural de un fluido complejo por acción de un esfuerzo cortante o un gradiente de presión.	48
4.2. Función esfuerzo a orden cero BMP. $A=1$, a) $B = 0.037$, b) $B = 0.37$ c) $B = 1$ d) $B = 37.7$, e) $B = 188.6$ [6]	61
4.3. Función viscosidad del modelo BMP a orden cero. $A=1$, a) $B = 0.037$, b) $B = 0.37$ c) $B = 1$ d) $B = 37.7$, e) $B = 188.6$ [6]	62
4.4. Función flujo volumétrico del modelo BMP. $A=1$, a) $B = 0.037$, b) $B = 0.37$ c) $B = 1$ d) $B = 37.78$, e) $B = 188.6$ [6]	63
4.5. Función flujo volumétrico a orden uno del modelo BMP. $A=1$, a) $B = 0.037$, b) $B = 0.37$ c) $B = 1$ d) $B = 37.7$, e) $B = 188.6$ [6]	66
4.6. Función viscosidad a orden uno del modelo BMP. $A=1$, a) $B = 0.037$, b) $B = 0.37$ c) $B = 1$ d) $B = 37.7$, e) $B = 188.6$ [6]	67

4.7. Función flujo volumétrico del modelo BMP. $A=1$, $B=37.73$. La línea continua representa el flujo volumétrico a orden cero y la línea discontinua el flujo volumétrico a orden uno.	68
4.8. Función flujo volumétrico del modelo BMP. $A=1$, $B=37.73$. La línea continua representa la viscosidad a orden cero y la línea discontinua la viscosidad a orden uno.	68
4.9. Aumento de flujo. $A_0 = 1$, $a)B = 188.37$, $b)B = 37.73$, $c)B = 20$, $d)B = 5$, $\langle n(t^*) \rangle = 1$	69
4.10. Aumento de flujo. $B = 5$ $a)A_0 = 25$, $b)A_0 = 20$, $c)A_0 = 15$, $d)A_0 = 10$, $\langle n(t^*) \rangle = 1$	70
6.1. 3 principales muestras de pacientes modeladas con la versión multimodal del modelo BMP. Colesterol total elevado (cuadros llenos, paciente 49), colesterol total moderado (triángulos llenos, paciente 25) y colesterol total bajo (rombos llenos, paciente 9).	79
6.2. Modelo BMP (línea sólida), modelo de Carreau (línea punteada), Modelo de Quemada (línea discontinua), datos experimentales puntos azules.	81
6.3. Módulos viscoso y elástico (G'' y G') de una muestra de sangre con baja concentración de colesterol total (114 mg/dL)	83
6.4. Parte imaginaria η'' y real η' de la viscosidad compleja	84
6.5. Figura A alto colesterol, figura B bajo colesterol. Magnificación de 1000x	85
6.6. Comparación de la viscosidad compleja (triángulos) y dinámica (círculos) para 10 muestras representativas.	87
6.7. Curva maestra en función del hematocrito con colesterol constante (215 mg/dL).	88
6.8. Factor de desplazamiento para la realización de la curva maestra	89
6.9. Datos experimentales (triángulos llenos), predicción con un modelo exponencial (línea punteada), simulación con la ecuación Charm-Kurland (línea continua)	90
6.10. Simulación con el modelo BMP (Línea continua) y Casson (Línea discontinua) para el esfuerzo de cedencia de ciertas muestras con altos niveles de colesterol total y datos experimentales puntos llenos	92

6.11. Datos experimentales representados por cuadrados (colesterol total elevado, 300 mg/dL), triángulos (colesterol total moderado, 174 mg/dL) y rombos (colesterol total bajo, 114mg/dL), predicciones teóricas con líneas continua, segmentada y punteada respectivamente.	93
6.12. Parámetros del modelo BMP en función de la concentración de colesterol total. La función que se ajusta al comportamiento de los datos $aTC^2 + bTC + c$. . .	95
6.13. Función tipo diente de sierra [33] para 6 términos (línea discontinua), general estocástica (línea continua) para 6 términos, comparadas con datos experimentales [24] obtenidos a través de sonda intracardiaca (cuadros vacíos) y datos de baumanómetro digital (cuadros llenos).	97
6.14. Simulación para 75 pulsaciones/min (A), para 90 pulsaciones /min (B), para 95 pulsaciones /min (C), para 120 pulsaciones/min (D), para 180 pulsaciones /min (E). Se adimensionalizó con una presión máxima.	98
6.15. Estructura lógica del algoritmo desarrollado. O0 representa el flujo volumétrico a orden cero (ecuación 4.4.34), O1 a orden uno (ecuación 4.4.44), σ_w el esfuerzo en la pared (ecuación 6.4.3) y $n(t)$ es la función de perturbación en cuestión (ecuación 6.4.1)	101
6.16. Predicciones para tres diferentes niveles de colesterol. Colesterol elevado 300 mg/dL (cuadros llenos y vacíos), colesterol moderado 177 mg/dL (rombos llenos y vacíos), colesterol bajo 114 mg/dL (triángulos llenos y vacíos).	103
6.17. Flujo volumétrico a orden cero y uno (línea continua y discontinua respectivamente) para la muestra con contenido de colesterol de 300 mg/dL	105
6.18. Flujo volumétrico a orden cero y uno (línea continua y discontinua respectivamente) para la muestra con contenido de colesterol de 174 mg/dL	106
6.19. Flujo volumétrico a orden cero y uno (línea continua y discontinua respectivamente) para la muestra con contenido de colesterol de 114 mg/dL	106
6.20. Viscosidad a orden cero y uno (línea continua y discontinua respectivamente) para la muestra con contenido de colesterol de 300 mg/dL	107

6.21. Viscosidad a orden cero y uno (línea continua y discontinua respectivamente) para la muestra con contenido de colesterol de 174 mg/dL	108
6.22. Viscosidad a orden cero y uno (línea continua y discontinua respectivamente) para la muestra con contenido de colesterol de 114 mg/dL	108
6.23. Aumento de flujo para una muestra de sangre con 300 mg/dL de colesterol total para 5 diferentes perfiles de presión y ritmo cardiaco.	109
6.24. Aumento de flujo para una muestra de sangre con 174 mg/dL de colesterol total para 5 diferentes perfiles de presión y ritmo cardiaco.	110
6.25. Aumento de flujo para una muestra de sangre con 114 mg/dL de colesterol total para 5 diferentes perfiles de presión y ritmo cardiaco.	110
6.26. Parámetro cinético-estructural en función del hematocrito, manteniendo la concentración de colesterol constante (231 mg/dL).	112
6.27. Aumento de flujo característico para diferentes valores de hematocrito, mante- niendo el parámetro cinético estructural constante. Concentración de colesterol 231 mg/dL	113
6.28. Aumento de flujo para 3 grupos principales. Línea punteada colesterol total bajo, línea discontinua colesterol total medio y línea continua colesterol total elevado	115
B.1. Moreno, L., Calderas, F., Sanchez-Olivares, G., Medina-Torres, L., Sanchez- Solis, A., and Manero, O. (2015). Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood. Korea-Australia Rheology Journal, 27(1) 1-10	127
B.2. Ortega, M., Medina-Torres, L., Calderas, F., Moreno, L., Bernad-Bernad MJ., Sanchez-Olivares, G., Sanchez-Solis, A., and Manero, O. (2015). La reología aplicada en sistemas biológicos con diferentes niveles de colesterol, (26), 26-34.	128
B.3. Moreno, L., Calderas, F., Sanchez-Olivares, G., Medina-Torres, L., Sanchez- Solis, A., and Manero, O. (2013). La sangre desde el punto de vista de la reología. Materiales, (20), 33-37.	130

Índice de tablas

4.1. Parámetros estructurales y cinéticos del modelo BMP	49
6.1. Resultados bioquímicos y físicos para los 50 pacientes convocados al estudio. P denota al número de la persona, CT colesterol total (mg/dL), TG triglicéridos (mg/dL), H % hematocrito (porcentaje), PS presión sistólica, PD presión diastólica y RC ritmo cardiaco.	76
6.2. Resultados bioquímicos y físicos para los 50 pacientes convocados al estudio. P denota al número de la persona, CT colesterol total (mg/dL), TG triglicéridos (mg/dL), H % hematocrito (porcentaje), PS presión sistólica, PD presión diastólica y RC ritmo cardiaco.	77
6.3. Datos para el modelado teórico con el modelo BMP multimodal para 3 muestras de sangre con niveles elevados de colesterol total promedio 370 mg/dL.	80
6.4. Datos para el modelado teórico de 3 muestras de sangre con niveles medios de colesterol total promedio 213 mg/dL.	80
6.5. Datos para el modelado teórico de 3 muestras de sangre con niveles bajos de colesterol total promedio 114 mg/dL.	80
6.6. Parámetros del modelo BMP β (s/Pa), η_0 y η_∞ (Pa s). Parámetros para el modelo de Carreau η_0 and η_∞ (Pa s), λ (s) y n son adimensionales. Parámetros para el modelo de Quemada η_p (Pa s), $\dot{\gamma}_c$ (1/s), k_0 and k_∞ son adimensionales	82
6.7. Datos experimentales para la simulación con el modelo Multimodal de Maxwell	82

6.8. Datos asociados a las muestras presentadas en la figura 6.6. El valor de hematocrito se considera como la cantidad de células por unidad de volumen expresado como un porcentaje.	86
6.9. Unidades de los parámetros del modelo de Casson σ (Pa), K_0 (Pa s). Unidades del modelo BMP β (s/Pa), φ_∞ (1/Pa s), y σ_y (Pa).	91
6.10. Datos encontrados a través de la simulación en orden cero para 10 muestras de sangre con diferentes niveles de colesterol y hematocrito constante (42%). Unidades de cada parámetro β (s/Pa) y B es adimensional	93
6.11. La función gradiente presión modificado $\frac{\partial p}{\partial z} = p_0 p(t)$ donde $p(t)$ representa la función de perturbación.	97
6.12. Valores numéricos para el ajuste de la función propuesta para 75 latidos por minuto. $\langle n(t) \rangle = 0.64$	99
6.13. Valores numéricos para el ajuste de la función propuesta para 90 latidos por minuto. $\langle n(t) \rangle = 0.67$	99
6.14. Valores numéricos para el ajuste de la función propuesta para 95 latidos por minuto. $\langle n(t) \rangle = 0.71$	99
6.15. Valores numéricos para el ajuste de la función propuesta para 120 latidos por minuto. $\langle n(t) \rangle = 0.76$	99
6.16. Valores numéricos para el ajuste de la función propuesta para 180 latidos por minuto. $\langle n(t) \rangle = 0.77$	99
6.17. Pendientes calculadas para una sección representativa de los datos experimentales y para las predicciones realizadas.	102
6.18. Orden combinado para 5 esfuerzos en la pared calculados mediante el algoritmo propuesto.	104
6.19. Datos para la simulación del aumento de flujo y viscosidad a orden cero y uno en función de parámetros del modelo BMP.	111
6.20. Datos obtenidos del modelado con la versión multimodal del modelo BMP para tres grupos principales. 4 Muestras de colesterol total bajo, 3 de colesterol total medio y 3 de colesterol total elevado.	114

Resumen

En el presente trabajo se caracterizaron reológicamente 50 muestras de sangre humana con diferentes niveles de colesterol total y hematocrito. De esta caracterización se obtuvieron los parámetros reológicos de la sangre a partir de las curvas de viscosidad cortante y oscilatorias de baja amplitud de deformación.

Se desarrolló un algoritmo que a partir de la teoría de pequeñas perturbaciones, fuera posible incluir éstas dentro del modelo constitutivo BMP (Bautista Manero Puig) y así obtener una relación entre de los parámetros materiales de la sangre en función de los parámetros del modelo citado. El esquema perturbativo supone el estado estacionario y homogéneo (orden cero) y una primera perturbación al sistema (orden 1) que simula la acción del corazón. Finalmente las relaciones encontradas revelan que existe una relación entre las concentraciones normales de colesterol total y hematocrito y valores mínimos de disipación viscosa, la cual se relaciona con un proceso de optimización de flujo de la sangre.

Introducción

1.1. Motivación

En México, los problemas de obesidad, sobrepeso y enfermedades cardiovasculares, están mermando la salud y la calidad de vida de una gran parte de la población. Nuestro país ocupa el primer lugar un número de niños que padecen los problemas antes mencionados. México gasta aproximadamente el 6 % del PIB (producto interno bruto) en el sector salud; mientras que Estados Unidos de Norteamérica gasta el 18 % de su PIB en el mismo rubro. Dentro de las consecuencias que existen al padecer este tipo de problemas, son un aumento de 12 veces en la mortalidad de jóvenes de 25 a 35 años. El 25 % de las incapacidades laborales están relacionadas con estas condiciones de salud. Finalmente, el 75 % de las camas de un hospital del sector salud se encuentran ocupadas por pacientes obesos o con sobrepeso. Problemática que se pretende comenzar a resolver. Ejemplo de esto, el gobierno federal implementó medidas como la prohibición en la venta de golosinas, comida frita y botanas altas en grasas dentro de las escuelas y se obligó a colocar bebederos con agua potable. Estas son algunas de las medidas para evitar que los niños al crecer adquieren enfermedades y malos hábitos de alimentación.

Gran parte de la población en México desconoce por completo cuales deben ser las concentraciones normales de colesterol y triglicéridos y más aún las concentraciones propias. En escasas ocasiones una persona promedio conoce la concentración de colesterol y triglicéridos que su sangre contiene. Con la finalidad de resolver este problema, en este proyecto se pretende sentar las bases para relacionar los contenidos de colesterol total

y triglicéridos en función de la presión sanguínea. La relación entre la viscosidad de un fluido, en este caso la sangre y la diferencia de presión que obliga a fluir al material en cuestión viene determinado por la Ley de Poiseuille. Esta relaciona el gasto volumétrico, la viscosidad del fluido y la geometría del sistema.

1.2. Viabilidad de la propuesta

La presencia de ciertos problemas de salud a nivel nacional ha ido en constante aumento, entre ellos el cáncer, enfermedades respiratorias y en mayor medida enfermedades que se consideran prevenibles como la diabetes y padecimientos cardiovasculares. Estas patologías tienen una relación muy estrecha con la alimentación de la población. Con este proyecto se pretende ayudar a detectar el problema de un sector muy particular de la población, el seguimiento de la concentración de niveles plasmáticos de colesterol total y triglicéridos en tiempo real, a través del conocimiento generado con el estudio de la sangre mediante técnicas reométricas y el modelado matemático de comportamiento reológico en flujos controlados.

1.3. Sangre

La existencia de los organismos multicelulares altamente evolucionados, es impensable sin un adecuado sistema circulatorio que provea a los tejidos de nutrientes y los libere de desechos metabólicos. La sangre actúa como ese acarreador que irriga a todos los tejidos del cuerpo humano. Su composición es principalmente una suspensión de células en un líquido llamado plasma [45], este último compuesto por agua, iones inorgánicos, hormonas, glucosa y proteínas. Los eritrocitos son las células principales, cuya concentración en hombres es 40-50 vol. % y en mujeres de 36-44 vol. % [15]. La alta concentración de estas células en la sangre dicta el comportamiento reológico de la misma.

La sangre se compone por células sin núcleo llamadas eritrocitos, las cuales contienen en su centro una proteína llamada hemoglobina que tiene como función de coordinar oxígeno y dióxido de carbono a y de los tejidos distales. Dichas células tienen origen en un

proceso llamado hematopoyesis. La hematopoyesis tiene lugar en la médula ósea (huesos largos y planos del cuerpo humano). Los componentes proteicos son sintetizados en el hígado y los hormonales en las glándulas suprarrenales, principalmente.

Las propiedades al flujo se ven alteradas por el arreglo, la orientación y la deformabilidad de las células [49]. Dentro de los componentes de la sangre, el colesterol total es el factor que influye en mayor medida sobre las interacciones transitorias entre las células [34]. El comportamiento reológico de la sangre humana es adelgazante al aumento del flujo debido a la desestructuración de los cúmulos celulares por acción de un esfuerzo cortante aplicado. Los agregados celulares se ven magnificados por los elevados niveles de colesterol total y triglicéridos que generan puentes entre las membranas reduciendo la repulsión electroestática natural entre las células. Varias estructuras transitorias se someten a un proceso de formación y la deformación dentro de la sangre. Para comprender la cinética de dichas estructuras, realizar pruebas en flujos controlados es vital.

1.4. Fenómenos Cardiacos

Por otro lado, el flujo de la sangre dentro del cuerpo humano, es generado por una fuerza que deforma continua e irreversiblemente al fluido. Un gradiente de presión generado por el corazón mueve la sangre desde los tejidos proximales hasta los tejidos distales. El recorrido de la sangre en el cuerpo humano tiene una duración de 20 segundos. El corazón actúa como una bomba que obliga a que la sangre recorra todo el sistema cardiovascular irrigando a todos los tejidos del cuerpo. Desde el punto de vista fisiológico, el corazón exhibe tres mecanismo principales, el fenómeno eléctrico, el acústico y el mecánico. El primero de ellos es la manifestación de los procesos de despolarización de las células cardiacas para generar contracción y relajación debido a la entrada y salida de iones a través de los canales de iónicos expresados en las membranas celulares [20]. El segundo de ellos es la manifestación de los ruidos cardiacos, el primero de estos corresponde al comienzo de la sístole ventricular y el segundo coincide con el comienzo de la diástole ventricular.

Finalmente el fenómeno mecánico que se analiza tiene los siguiente puntos característicos.

Cabe mencionar que un latido cardiaco tiene una duración de 0.8 s en un estado basal de reposo.

- Sístole

Sístole atrial 0-0.12 s

Contracción isovolumétrica 0.12-0.15 s

Ejección rápida 0.15-0.25 s

- Diástole

Eyección lenta 0.25-0.38 s

Contracción isovolumétrica 0.38-0.47 s

Llenado ventricular rápida 0.47-0.59 s

Diástasis 0.59-0.8 s

Este fenómeno de evolución temporal de la presión con respecto al tiempo se da en todos los organismos superiores, con mayor o menor intensidad y duración. Es importante mencionar que este fenómeno es alterado por las condiciones en las que una persona se encuentre, es decir, al realizar actividad física, dormir, estar sentado etc.

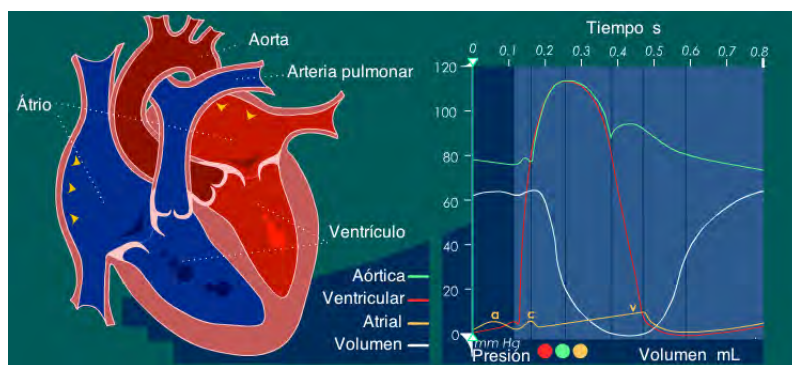


Figura 1.1: Representación del fenómeno cardiaco mecánico

1.5. Hemorreología

El interés de describir los parámetros físicos de la sangre humana mediante modelos matemáticos o fenomenológicos ha sido constante. Ejemplo de esto se encuentra en la ley de Poiseuille, que describe la relación entre el gasto volumétrico, la viscosidad, la caída de presión, el radio y la longitud de una geometría cilíndrica. Fue descrita por Jean Loius Poiseuille en el siglo XIX y describe satisfactoriamente flujo de la sangre dentro de un capilar Ec.1.5.1.

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\mu L} \quad (1.5.1)$$

Es importante mencionar que esta aproximación no considera ningún parámetro biológico de la sangre humana ni mucho menos su comportamiento reológico (fluido no newtoniano adelgazante al corte).

Las condiciones de esta relación son que la velocidad del flujo sea lo suficientemente baja para permanecer en régimen laminar. La condición para que pueda considerarse que un fluido se encuentra en este régimen y por lo tanto la ley de Poiseuille sea válida, es que la magnitud de un valor adimensional denominado número de Reynolds Ec.1.5.2 debe ser menor a 2000:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (1.5.2)$$

Re es el número de Reynolds, ρ es la densidad del fluido, v es la velocidad del fluido, R es el diámetro de la geometría y μ es la viscosidad del fluido. El número de Reynolds se considera como la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas.

Las primeras aproximaciones de los factores que afectan el comportamiento reológico de la sangre humana en función ciertos parámetros biológicos se he abordado desde varias perspectivas. Charm-Kurland [12], describen el efecto que tiene el hematocrito y la temperatura en la viscosidad sanguínea. Dicha aproximación es válida únicamente para intervalos de hematocrito de 40 a 70 %, donde es la μ viscosidad de la sangre, μ_p es la

viscosidad del plasma, α es un factor que incluye la temperatura T de la sangre y H el hematocrito Ec.1.5.3.

$$\mu = \mu_p \left(\frac{1}{1 - \alpha H} \right) \quad (1.5.3)$$

donde α

$$\alpha = 0.007e^{2.49H + \frac{1107}{T}} e^{-1.69H} \quad (1.5.4)$$

En la Figura 1.2 se ilustra una simulación con la ecuación de Charm-Kurland, en la cual se puede observar que para valores de hematocrito normal (44 %) la viscosidad de la sangre está dentro del intervalo de viscosidad sanguínea medida con técnicas reométricas. Es importante mencionar que esta ecuación considera la sangre como un fluido de viscosidad constante.

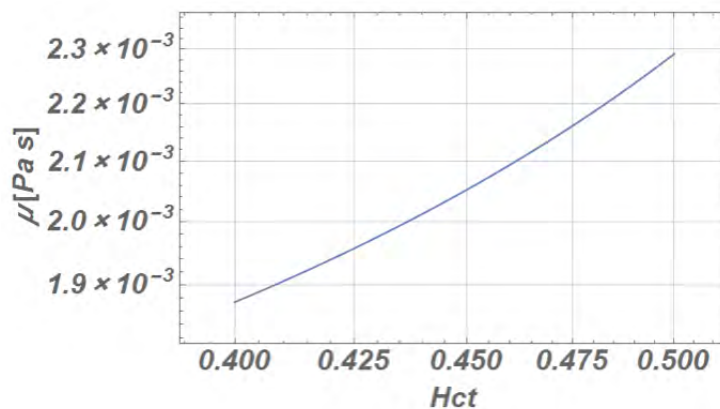


Figura 1.2: Simulación de la ecuación de Charm-Kurland de la viscosidad sanguínea en función del la concentración de células (Hematocrito)

Posteriormente, en 1972 se comenzó a introducir el concepto de viscoelasticidad para la sangre y se relacionó con el hematocrito (porcentaje de células presentes por unidad de volumen sanguíneo). Publicaciones posteriores [49] relacionaron los parámetros del modelo de Casson con el hematocrito, suponiendo que este es el único componente de la sangre que afecta su comportamiento reológico.

En 1979, se describió la relación de la viscosidad de la sangre con las dislipidemias más comunes (Hipertrigliceridemia e Hipercolesterolemia) [2], encontrando que hay una

relación entre la viscosidad puntual (viscosidad medida a una única rapidez de deformación) de la sangre con las concentraciones de colesterol total plasmático.

En 1997 [53], se estudió el efecto combinado del flujo cortante y oscilatorio en sangre humana y soluciones poliméricas, describiendo por primera vez un mecanismo por el cual la sangre se comporta como un fluido adelgazante, en el cual se demuestra que las células sanguíneas forman estructuras transitorias que se desagregan por acción del esfuerzo cortante.

En el año 2006 [27] por primera vez, se simuló computacionalmente la deformación de las células sanguíneas al ser sometidas a un esfuerzo cortante. Se atañe la evolución de las estructuras únicamente al esfuerzo aplicado y no a ninguna patología o condición bioquímica.

En el 2008, [35, 36, 37], se publicaron estudios en los cuales se describe el efecto de Fåhræus, el cual hace referencia al fenómeno fisiológico de la migración celular dentro de capilares (reducción del hematocrito dinámico). Se propone predecir mecánicamente estructuras tipo Rouleaux simulándose como un resorte lineal. Para la descripción reológica de la sangre humana como fluido se aplica un modelo empírico como el de Cross, que si bien describe el comportamiento adelgazante al corte de la sangre humana, no provee de una descripción de los mecanismos por los cuales se comporta de tal manera.

Ya para el año 2012 [1], se propuso que el efecto de la presencia de un campo eléctrico afecta el comportamiento reológico de la sangre humana y la formación de estructuras tipo Rouleaux. Dicha suposición resultó no ser del todo cierta, presentando modificaciones poco representativas en el comportamiento reológico de la sangre humana con y sin presencia de campo magnético

En el año 2013 [5], se describió que la agregabilidad celular se presenta al haber niveles elevados de fibrinógeno o en presencia de polímeros como el Dextran. En este trabajo se atañe la agregabilidad a estructuras celulares llamadas Rouleaux. En este mismo año [31], se discutió sobre el comportamiento reológico de la sangre humana mediante modelos tales como Casson, Ree-Eyring y Quemada, de pacientes postinfartados, ofreciendo una descripción mecánica de la sangre humana y asociándolo a concentraciones elevadas de

fibrinógeno.

En 2013, [10] se obtuvieron descripciones cinéticas de los fenómenos de agregación-desagregación mediante los modelos de Giesekus y sPPT (Modelo simplificado de Phan-Thien-Tanner). Cabe mencionar que no se ofrecen predicciones de los modelos con respecto a parámetros bioquímicos de la sangre.

Para el 2013 [8], se describió una vez más el comportamiento reológico de la sangre humana en flujo cortante y extensional. Se aborda la importancia de la viscoelasticidad del plasma y su facilidad de fluir a través de capilares. Retoman una descripción reológica mediante el modelo empírico de Carreau.

El comportamiento de fluidos complejos ha sido descrito satisfactoriamente por modelos como el Bautista-Manero-Puig (BMP), Carreau y Quemada. Cabe destacar que el modelo Constitutivo BMP ofrece una interpretación del fenómeno de desagregación de los eritrocitos por acción de un esfuerzo cortante [34]. Las propiedades al flujo de la sangre humana son afectadas por la deformabilidad, la orientación y el arreglo de los eritrocitos. La concentración de metabolitos plasmáticos, la cantidad de células presentes en un volumen determinado de sangre modifican las propiedades al flujo. Una muestra de sangre está compuesta principalmente de dos fases, la líquida, que está conformada por agua, iones, proteínas y metabolitos, mientras que la fase sólida está compuesta por eritrocitos, leucocitos y plaquetas. El comportamiento reológico de la sangre humana se ve afectado por condiciones patológicas como la hipercolesterolemia y la hipertrigliceridemia.

1.6. Ecuaciones constitutivas y flujo pulsátil

La teoría de flujo pulsátil fue descrita por primera vez por Leonhard Euler en 1775 y Thomas Young en 1808 [24]. Posteriormente, numerosos intentos se efectuaron para describir el flujo de la sangre tales como el análisis tipo Womersley [54].

Para el año 1982 [41], se describió que una perturbación al flujo de un polímero, se traducía a un aumento de flujo por acción del abatimiento en la viscosidad.

En 2001 [43] se demostró teóricamente mediante el modelo de Casson y una perturbación estocástica del gradiente de presión, que el perfil de velocidades se ve modificado por la presencia de dicha perturbación. El número de Womersley propuesto en este trabajo, permite analizar el balance entre las fuerzas viscosas y las fuerzas inerciales en un flujo pulsátil que a diferencia del número de Reynolds lo hace para un flujo constante.

Estudios posteriores en el año 2006 [44], con el modelo Herschel Bulkley, se analiza el flujo pulsátil a través de arterias cateterizadas; además de realizar comparaciones con modelos como el de Newton y Ostwald de Wäle. El análisis consta de una perturbación estocástica de tipo sinusoidal al gradiente de presión con la finalidad de emular la evolución mecánica que sucede dentro del corazón. En este estudio se concluye que al crecer el número de Womersley (incrementos en las fuerzas viscosas), se manifestaba el esfuerzo de cedencia en la sangre. Sin embargo no se ofrece una interpretación de los mecanismos cinéticos por los cuales este fenómeno sucede.

Para el año 2009 [22], se estudió teóricamente el flujo pulsátil de soluciones de micelas tipo gusano mediante el modelo constitutivo BMP. Se demostró que el aumento de flujo está íntimamente relacionado con fluidos cuya estructura transitoria se ve afectada por el esfuerzo cortante (desestructuración), es decir, que el fluido tenga características adelgazantes.

Hipótesis y Objetivos

Hasta el momento, se ha descrito el comportamiento de la sangre humana con modelos empíricos como los son Carreau, Cross, Quemada y con modelos viscoelásticos como lo son Phan-Thien-Tanner, Oldroyd-B, Giesekus, Moyer-Owens entre otros. Todas las descripciones tanto empíricas como fenomenológicas se han basado en sangre aparentemente normal y escasamente se han asociado cambios en su comportamiento reológico en función de parámetros biológicos.

Por su parte, se ha demostrado que el flujo pulsátil genera aumentos en el flujo de sistemas no Newtonianos. Las aplicaciones de éste se han realizado para recuperación de crudo en el proceso de Fracking o hasta en sistemas biológicos, con la aplicación únicamente de funciones estocásticas simples $Sen(t)$, $Cos(t)$ o combinaciones de las mismas sobre modelos empíricos como lo es el modelo de Casson o el de Carreau.

La originalidad de este trabajo consiste en lo siguiente:

- Se aplicará una función de perturbación que emule lo mejor posible la evolución temporal del fenómeno cardiaco mecánico.
- Se acoplará flujo pulsátil a un modelo viscoelástico como lo es el BMP.
- Los parámetros mecánicos de la sangre humana se relacionarán con los parámetros bioquímicos de la misma predichos por el modelo BMP acoplado a flujo pulsátil.

- El trabajo servirá como base para el desarrollo de metodologías que permitan no solamente la interpretación de resultados sino la estimación de parámetros sanguíneos en función su comportamiento reológico.
- Se generará una curva de viscosidad a partir mediciones de presión en diferentes circunstancias, en las cuales se generan variaciones en la frecuencia de los latidos del corazón.

2.1. Hipótesis

- Si la sangre humana se ve afectada en su comportamiento reológico por factores como la concentración de colesterol total, triglicéridos plasmáticos y hematocrito. Mediante un modelo fenomenológico como lo es el BMP acoplado con la teoría de flujo pulsátil, se puede predecir su comportamiento en función de dichos parámetros.

2.2. Objetivos

- General

Generar un algoritmo que sea capaz de estimar la viscosidad sanguínea modificada por un gradiente de presión pulsátil a partir de mediciones de presión sanguínea.

- Particulares

Encontrar una función de la viscosidad bajo flujo pulsátil del modelo BMP.

Relacionar los parámetros materiales de la sangre con la concentración plasmática de colesterol total.

Relacionar los parámetros materiales de la sangre con el hematocrito.

Ecuaciones

3.1. Preliminares estocásticos

El flujo pulsátil es una combinación de un esfuerzo cortante perturbado por una fluctuación en la fuerza que deforma continua e irreversiblemente al fluido (gradiente de presión). En la literatura, se han aplicado ciertos esquemas de perturbación en términos de la amplitud de un gradiente de presión sinusoidal. Para que la perturbación tenga un efecto benéfico, el fluido deberá tener comportamiento adelgazante al corte, de tal modo que exhiba un cambio debido al gradiente de presión y la perturbación [4]. Townsend extendió el esquema no solamente para perturbaciones de características sinusoidales. Sino también para funciones tipo escalera y diente de sierra [51]. Las funciones estocásticas propuestas deberán cumplir con las propiedades de Wiener-Khintchine:

- $R(s) = \langle n(t+s) \rangle$
- $\langle n(t) \rangle = 0$

La correlación $R(s)$ es invariante ante una translación en el tiempo y solamente son importantes los incrementos de s . Por otro lado la segunda condición implica que el promedio de la función es cero $\langle n(t) \rangle = 0$, Ec. 3.1.1.

$$\langle n(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} n(t) dt \quad (3.1.1)$$

3.1.1. Promedio de funciones

Las funciones trigonométricas tales como el seno y el coseno y combinaciones de éstas, tienen un promedio igual a cero cuando estas están elevadas a una potencia impar. Al elevar estas a potencias pares, dichos promedios se vuelven diferentes de cero. En las Figuras 3.1, 3.3 es notorio que el área bajo la curva para la función seno y coseno es cero $\langle n(t) \rangle = 0$, $\langle n(t)^3 \rangle = 0$. Sin embargo para ambas funciones cuando estas están elevadas al cuadrado, dicho promedio se vuelve diferente de cero $\langle n(t)^2 \rangle \neq 0$ (Figura 3.2).

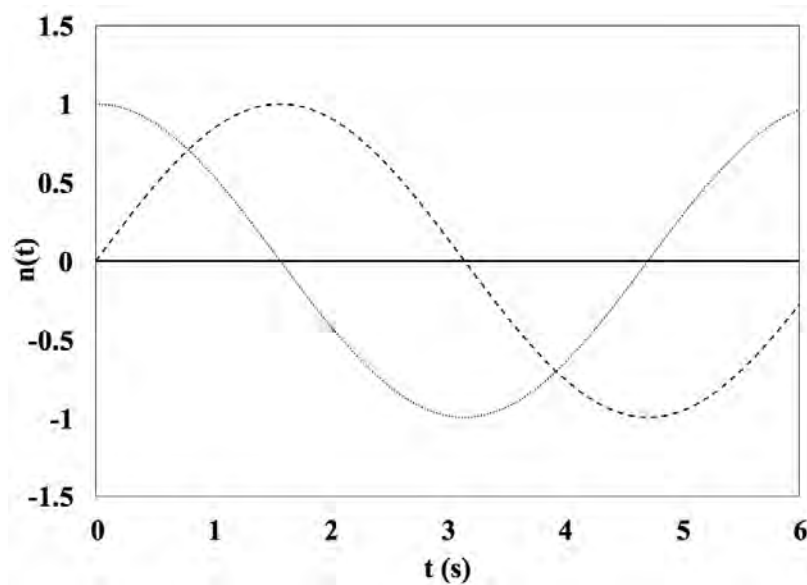


Figura 3.1: Funciones Seno (línea punteada) y Coseno (línea continua)

Las funciones de perturbación que se han aplicado para resolver problemas de flujo pulsátil cumplen a cabalidad las condiciones mencionadas en la sección anterior Wiener-Khintchine, siendo $Sen[t]$, $Cos[t]$ y acoplamiento de las mismas, funciones que cumplen con dichas condiciones. Sin embargo, para fenómenos fisiológicos, tales como el latido cardiaco (la evolución de la presión sanguínea en función del tiempo), las funciones que pueden describir dicha evolución no son tan simples como las mencionadas anteriormente.

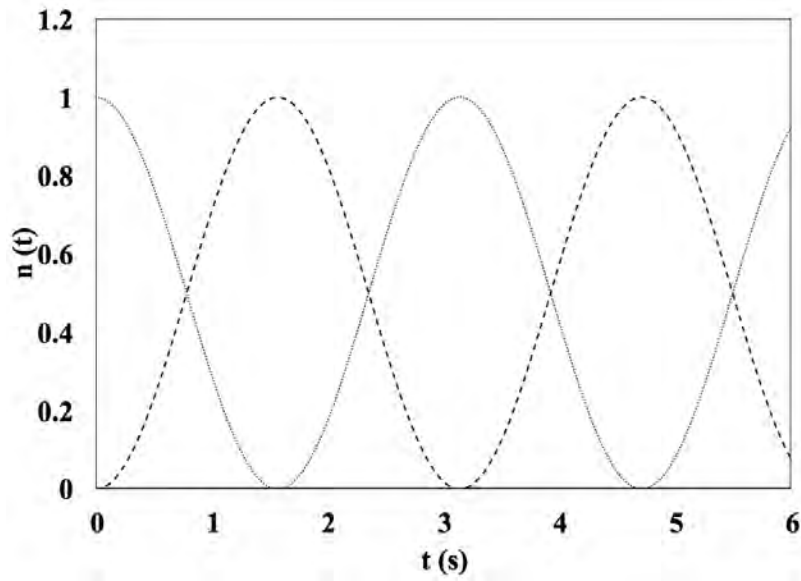


Figura 3.2: Funciones Seno (línea punteada) y Coseno (línea continua) elevadas al cuadrado

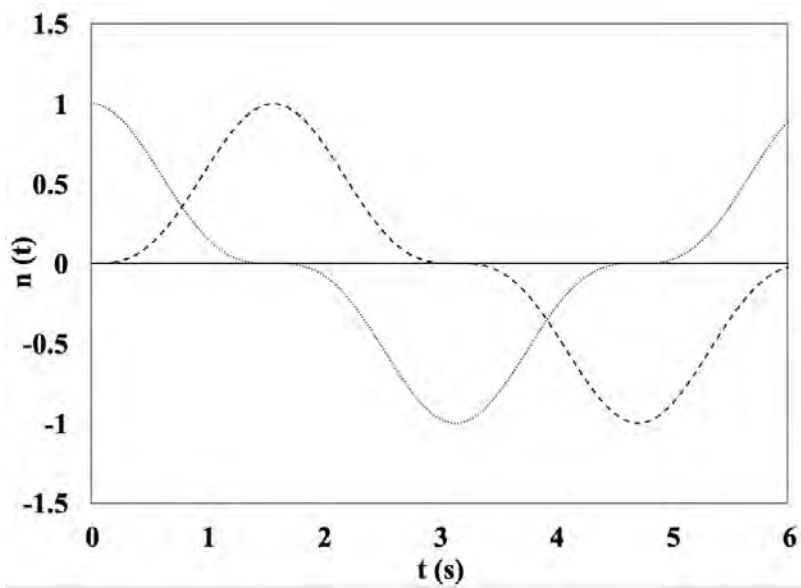


Figura 3.3: Funciones Seno (línea punteada) y Coseno (línea continua) elevadas al cubo

3.2. Flujo a través de un tubo

3.2.1. Ecuación de Hagen-Poiseuille

El principio básico de conservación de materia tiene que ser satisfecho en cada instante en un flujo y dicho principio se expresa en la ecuación Ec. 3.2.1:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \underline{v}) = 0 \quad (3.2.1)$$

tomando en cuenta las siguientes consideraciones físicas:

1. Estado estacionario, es decir que la variaciones temporales de las variables dinámicas son cero

$$\sigma, \gamma, D$$

2. Flujo unidireccional; el campo de velocidades solo tendrá la componente axial

$$\underline{v} = [v_r, v_\theta, v_z] = [0, 0, v_z(r, t)]$$

3. Coordenadas cilíndricas; cualquier punto material puede ser caracterizado a través del sistema de referencia

$$\underline{X} = \underline{X}(r, \theta, z)$$

4. Flujo incompresible; la densidad del fluido no depende ni de la posición ni del tiempo.

$$\rho \neq (\rho, t)$$

5. Fuerza que deforma continua e irreversiblemente el sistema es un gradiente de presión

$$\nabla p$$

6. Simetría cilíndrica

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$$

Aplicando la propiedad 3, la ecuación de continuidad Ec.3.2.2 se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (3.2.2)$$

Tomando la propiedad 1:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (3.2.3)$$

Al aplicar la propiedad 2:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (3.2.4)$$

Finalmente aplicando la propiedad 4:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.2.5)$$

La ecuación Ec.3.2.5 anterior define la propiedad 7 (incomprensibilidad del fluido).

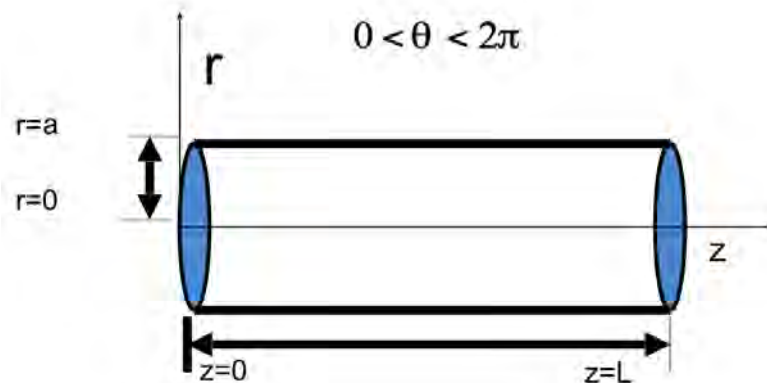


Figura 3.4: Sistema capilar a considerar

Por otro lado, la ecuación de movimiento Ec. 3.2.6.

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{g}} \quad (3.2.6)$$

Expresando la ecuación anterior Ec. 3.2.6 en coordenadas cilíndricas (propiedad 3)

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} v_r \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zr} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{z\theta} + \frac{\sigma_{\theta r} - \sigma_{r\theta}}{r} \right] + \rho g_\theta \quad (3.2.7)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_{\theta z} \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} \right] + \rho g_z$$

Aplicando las propiedades 1, 2, 4, 6 y 7. La ecuación Ec.3.2.7 se reduce considerablemente a la siguiente expresión Ec.3.2.8.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{rz})}{\partial r} \quad (3.2.8)$$

Al integrar la ecuación anterior Ec. 3.2.8 con respecto a la coordenada radial, se tendrá.

$$\sigma_{rz} = \frac{r}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{c_1}{r} \quad (3.2.9)$$

Al considerar el fenómeno físico analizado, la constante de integración $c_1 = 0$, para resolver la singularidad. La ecuación adquiere la siguiente forma Ec.3.2.10:

$$\sigma_{rz} = \frac{r}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (3.2.10)$$

Para un fluido Newtoniano, su ecuación constitutiva Ec.3.2.11 es:

$$\sigma_{rz} = \mu \left(\frac{dv_z}{dr} \right) \quad (3.2.11)$$

Al igualar las expresiones 3.2.11 y 3.2.10, se obtiene una expresión para la rapidez de corte en función de un gradiente de presión pulsátil y el radio del sistema Ec. 3.2.12.

$$\mu \left(\frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{r}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (3.2.12)$$

Reacomodando la anterior expresión anterior Ec.3.2.12, se obtiene.

$$\left(\frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{r}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (3.2.13)$$

Integrando la ecuación Ec. 3.2.13 con respecto a la coordenada radial, se obtiene la velocidad axial en el sistema cilíndrico cuya fuerza motriz es un gradiente de presión Ec.3.2.14.

$$v_z = \frac{r^2}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + c \quad (3.2.14)$$

Al aplicar la condición de frontera de no deslizamiento $v_z = 0, r = R$, se obtendrá finalmente Ec. 3.2.15.

$$v_z = \frac{a^2}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (3.2.15)$$

donde el gradiente de presión puede ser expresado como una diferencia de presión por unidad de longitud, Ec.3.2.16.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \left(\frac{P_L - P_0}{L} \right) = \frac{\Delta p}{L} \quad (3.2.16)$$

La ecuación anterior 3.2.16 adquirirá la siguiente forma Ec. 3.2.17.

$$v_z = \frac{a^2}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (3.2.17)$$

Como parte final, se calculará al flujo volumétrico a partir de la ecuación anterior. Para dicho cálculo, se considerará la siguiente expresión Ec. 3.2.18:

$$Q = \int_s \int \underline{v} \cdot \underline{nds} \quad (3.2.18)$$

La relación anterior Ec. 3.2.18 expresada en coordenadas cilíndricas:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a v_z r dr d\theta \quad (3.2.19)$$

Al sustituir la velocidad axial en la expresión 3.2.19, se obtiene.

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a^2}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad (3.2.20)$$

El resolver la primera integral con respecto a la coordenada angular, la expresión anterior Ec. 3.2.20:

$$Q = \int_0^a \frac{2\pi a^2}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] r dr \quad (3.2.21)$$

Al resolver la segunda integral con respecto a la coordenada radial de la expresión Ec.3.2.20, se obtiene finalmente la ecuación de Hagen-Poiseuille Ec.3.2.22 que describe el flujo volumétrico de un fluido Newtoniano en una geometría cilíndrica.

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \quad (3.2.22)$$

3.2.2. Flujo pulsátil en un fluido Newtoniano

Al igualar las expresiones 3.2.11 y 3.2.10 pero esta última incluyendo una perturbación de tipo $(1 + \epsilon n(t))$, se obtiene una expresión para la rapidez de corte en función de un gradiente de presión pulsátil y el radio del sistema (Ec. 3.2.23).

$$\mu \left(\frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{r}{2} \left(\left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \epsilon n(t)) \right) \quad (3.2.23)$$

Reacomodando la anterior expresión anterior (Ec.3.2.23), se obtiene:

$$\left(\frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{r}{2\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \epsilon n(t)) \quad (3.2.24)$$

Integrando la ecuación Ec. 3.2.24 con respecto al radio, se obtiene la velocidad axial en el sistema cilíndrico cuya fuerza motriz es un gradiente de presión pulsátil Ec.3.2.25.

$$v_z = \frac{r^2}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \epsilon n(t)) + c \quad (3.2.25)$$

Al aplicar la condición de frontera de no deslizamiento $v_z = 0, r = R$, se obtendrá finalmente la ecuación para el perfil de velocidades (Ec. 3.2.26):

$$v_z = \frac{a^2}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \epsilon n(t)) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (3.2.26)$$

donde el gradiente de presión puede ser expresado como una diferencia de presión por unidad de longitud y con un parámetro de perturbación Ec.3.2.27.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \epsilon n(t)) \quad (3.2.27)$$

La ecuación anterior 3.2.27 adquirirá la siguiente forma Ec. 3.2.28.

$$v_z = \frac{a^2}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \epsilon n(t)) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (3.2.28)$$

Como parte final, se calculará al flujo volumétrico a partir de la ecuación anterior. Para dicho cálculo, se considerará la siguiente expresión Ec. 3.2.29:

$$Q = \int_s \int \underline{v} \cdot \underline{n} ds \quad (3.2.29)$$

La relación anterior Ec. 3.2.29 expresada en coordenadas cilíndricas.

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a v_z r dr d\theta \quad (3.2.30)$$

Al sustituir la velocidad axial en la expresión 3.2.30, se tendrá lo siguiente.

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a^2}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \epsilon n(t)) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad (3.2.31)$$

Tras resolver las integrales pertinentes, se habrá deducido la ecuación de Hagen-Poiseuille Ec.3.2.32 que describe el flujo de un fluido Newtoniano dentro de un capilar, cuya fuerza motriz es un gradiente de presión pulsátil.

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \epsilon n(t)) \quad (3.2.32)$$

Con la finalidad de demostrar el efecto que tiene una perturbación sobre el gradiente de presión se calculará el aumento de flujo en el sistema, será necesario utilizar el teorema

del valor medio.

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{a-b} \int_a^b f(x) dx \quad (3.2.33)$$

Al aplicar dicha definición al problema planteado.

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t Q(t) dt \quad (3.2.34)$$

Al sustituir la expresión del flujo volumétrico en la definición del valor medio.

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\pi a^4}{8\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \epsilon n(t)) dt \quad (3.2.35)$$

La expresión se reduce a lo siguiente.

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{\pi a^4}{8\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \epsilon \langle n(t) \rangle) \quad (3.2.36)$$

Tomando en cuenta las propiedades de White-Metzner, donde $\langle n(t) \rangle = 0$, la ecuación anterior Ec.3.2.36, se expresa de la siguiente manera.

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{\pi a^4}{8\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + 0) \quad (3.2.37)$$

Para analizar el comportamiento del fluido al perturbar el sistema con una pulsación, es necesario calcular el aumento de flujo que provoca la perturbación del sistema. Para hacer dicho cálculo, se deberá utilizar la siguiente expresión Ec.3.2.38.

$$I(\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q(t)_0}{Q(t)_0} \quad (3.2.38)$$

Al sustituir las ecuaciones Ec.3.2.37 y Ec.3.2.32

$$I(\%) = \frac{\frac{\pi a^4}{8\mu} \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right) - \frac{\pi a^4}{8\mu} \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right)}{\frac{\pi a^4}{8\mu} \left(\frac{P_0 - P_L}{L} \right)} \quad (3.2.39)$$

El aumento de flujo para un fluido Newtoniano es cero, debido a la ausencia de estructuras que se desagreguen por acción del flujo.

$$I(\%) = 0 \quad (3.2.40)$$

3.2.3. Flujo pulsátil en un fluido descrito por el modelo de Ostwald de Wäle

Para un fluido cuyo comportamiento reológico sea descrito por el modelo de Ostwald de Wäle Ec. 3.2.41, se deberá tomar en consideración la ecuación constitutiva de dicho modelo.

$$\sigma_{rz} = k \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^n \quad (3.2.41)$$

donde σ_{rz} es el esfuerzo cortante, k es el índice de consistencia y n es el índice de adelgazamiento del fluido. Dicha ecuación presenta las siguientes particularidades:

- $n < 1$ Fluido Pseudoplástico
- $n = 1$ Fluido Newtoniano
- $n > 1$ Fluido Dilatante

Al igualar las ecuaciones 3.2.10 y 3.2.41.

$$\sigma_{rz} = k \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^n = \frac{r}{2} \left(\left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \epsilon n(t)) \right) \quad (3.2.42)$$

Reacomodando los términos de la ecuación anterior 3.2.42 y despejando la rapidez de deformación (derivada de la velocidad axial con respecto a la coordenada radial), se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{r}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\left(\frac{\Delta p}{L} \right) \frac{1}{2} (1 + \epsilon n(t)) \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.2.43)$$

Al renombrar los términos $\frac{1}{n} = b$ y $\frac{1}{k} = \alpha$, la expresión anterior Ec3.2.43 tomará la siguiente forma:

$$\frac{dv_z}{dr} = \alpha r^b \left(\left(\frac{\Delta p}{L} \right) \frac{1}{2} (1 + \epsilon n(t)) \right)^b \quad (3.2.44)$$

Al realizar la respectiva integral con respecto a la coordenada radial del sistema, se obtiene la siguiente ecuación para la velocidad axial Ec. 3.2.45.

$$v_z = \frac{\alpha r^{b+1}}{b+1} \left(\left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \varepsilon n(t)) \right)^b + c \quad (3.2.45)$$

Al aplicar la condición de no deslizamiento para el sistema en cuestión, es posible tener una expresión para la velocidad axial Ec. 3.2.46 muy similar a la ecuación Ec. 3.2.28.

$$v_z = \frac{-\alpha a^{b+1}}{b+1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \varepsilon n(t)) \right) \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{b+1} \right) \quad (3.2.46)$$

A partir de la expresión anterior Ec.3.2.45, se calculará el flujo volumétrico del sistema utilizando la definición Ec.3.2.30 . Se obtiene la expresión mostrada a continuación.

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{-\alpha a^{b+1}}{b+1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) (1 + \varepsilon n(t)) \right) \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^{b+1} \right) r dr d\theta \quad (3.2.47)$$

La resolución de la ecuación anterior Ec. 3.2.47 expresa que el flujo volumétrico de un fluido cuyo comportamiento reológico queda descrito por el modelo de Ostwald de Wäle Ec. 3.2.48.

$$Q = -\frac{2\pi\alpha a^{b+1}}{b+3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta p}{L} \right)^b (1 + \varepsilon n(t))^b \right) \quad (3.2.48)$$

Es importante mencionar que es necesario aplicar una expansión en serie de Taylor del término $(1 + \varepsilon n(t))^b$. Dicha expansión (Ec. 3.2.49) se expresa de la siguiente manera:

$$(1 + \varepsilon n(t))^b = 1 + b\varepsilon n(t) + \frac{b(b-1)\varepsilon^2 n^2(t)}{2} + \frac{b(b-1)(b-2)\varepsilon^3 n^3(t)}{6} + 0^4 \quad (3.2.49)$$

Al sustituir la expansión Ec. 3.2.49 en la ecuación de flujo volumétrico 3.2.48; se obtiene la siguiente ecuación (3.2.50):

$$Q(t) = -\frac{2\pi\alpha a^{b+1}}{b+3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta p}{L} \right)^b \left(1 + b\varepsilon n(t) + \frac{b(b-1)\varepsilon^2 n^2(t)}{2} + \frac{b(b-1)(b-2)\varepsilon^3 n^3(t)}{6} \right) \right) \quad (3.2.50)$$

Con la finalidad de no tener dependencias temporales en el flujo volumétrico, se tomarán los promedios de las funciones estocásticas. Para ello se ha supuesto que dicha función estocástica es $n(t) = Sen(t)$.

$$\langle Q(t) \rangle = -\frac{2\pi\alpha a^{b+1}}{b+3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta p}{L} \right)^b \left(1 + b\varepsilon \langle n(t) \rangle + \frac{b(b-1)\varepsilon^2 \langle n^2(t) \rangle}{2} + \frac{b(b-1)(b-2)\varepsilon^3 \langle n^3(t) \rangle}{6} \right) \right) \quad (3.2.51)$$

Del promedio de la función estocástica, los valores promedios del mismo orden 1 y 3 son cero. La función anterior Ec. 3.2.51 adquirirá la siguiente forma (Ec.3.2.52).

$$\langle Q \rangle = \frac{-2\pi\alpha a^{b+1}}{b+3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta p}{L} \right)^b \left(1 + \frac{\varepsilon M^2 (b)(b-1)}{4} \right) \right) \quad (3.2.52)$$

Finalmente, para demostrar que la presencia de una perturbación afectará el flujo de este sistema, se calculará el aumento de flujo mediante la expresión utilizada en la sección anterior Ec. 3.2.38. Es necesario mencionar que para definir el flujo volumétrico sin perturbaciones, se deberá aplicar el siguiente límite.

$$Q_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle Q(t) \rangle = \frac{-2\pi\alpha a^{b+1}}{b+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta p}{L} \right) \quad (3.2.53)$$

por lo que el aumento de flujo para un fluido cuyo comportamiento reológico esté descrito por el modelo de Ostwald de Wäle está expresado por:

$$I(\%) = \frac{\frac{-\alpha a^{b+1} 2\pi}{b+3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta p}{L} \right)^b \left(\frac{\varepsilon M^2 (b)(b-1)}{4} \right) \right) - \frac{-2\pi\alpha a^{b+1}}{b+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} \right)}{\frac{-2\pi\alpha a^{b+1}}{b+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} \right)} \quad (3.2.54)$$

Simplificando la expresión anterior Ec.3.2.40:

$$I(\%) = 100 \frac{1}{4} b(b-1) M^2 = 25 \frac{1}{4} b(b-1) M^2 \quad (3.2.55)$$

Con lo anterior queda demostrado que el aumento de flujo para un fluido no Newtoniano será diferente de cero.

3.2.4. Flujo pulsátil para un fluido descrito por el modelo de Ellis

El modelo de Ellis considera la parte adelgazante de un sistema tal como lo hace el modelo de Ostwald de Wäle y la parte de viscosidad constante del modelo de Newton. Dicha aproximación permitirá introducir un esquema para un modelo complejo el cual considera la viscosidad del medio y la viscosidad del polímero. La expresión para el modelo de Ellis es la siguiente Ec. 3.2.56.

$$\dot{\gamma}_{rz} = \dot{\gamma}_{rz}^p + \dot{\gamma}_{rz}^s \quad (3.2.56)$$

La rapidez cortante de este modelo resulta de las contribuciones de la rapidez cortante de un solvente y de un polímero. El primero descrito por un el modelo de Newton y el segundo por el modelo de Ostwald de Wäle.

Considerando las ecuaciones constitutivas de los modelos citados previamente. La velocidad axial queda expresada de la siguiente manera Ec. 3.2.57:

$$\frac{dv_z}{dr} = \varphi_0 \left(\frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (1 + \varepsilon n(t)) \right) + \varphi_1 \left(\frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (1 + \varepsilon n(t)) \right)^b \quad (3.2.57)$$

Debido a que el modelo de Ellis considera al modelo de Newton y al modelo de Oswald de Wäle, el tratamiento matemático resulta muy similar. Se expresarán solamente las ecuaciones para el perfil de velocidades Ec. 3.2.57, flujo volumétrico Ec. 3.2.58 y flujo volumétrico promedio Ec.3.2.59.

$$Q = -\frac{\varphi_0 \pi a^4}{4} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) (1 + \varepsilon n(t)) - \frac{\varphi_1 a R^{b+3}}{b+3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^b (1 + \varepsilon n(t))^b \right) \quad (3.2.58)$$

$$\langle Q(t) \rangle = -\frac{\varphi_0 \pi a^3}{4} \left(\frac{\partial p}{\partial z} a \right) (1 + \varepsilon n(t)) - \frac{\varphi_1 \alpha a^3}{b+3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} a \right)^b (1 + \varepsilon n(t))^b \right) \left[1 + \frac{b(b-1)\epsilon^2 M^2}{4} \right] \quad (3.2.59)$$

Es de esperar que el aumento de flujo para este modelo sea diferente de cero e igual al modelo de Ostwald de Wäle Ec. 3.2.60.

$$I(\%) = 100 \frac{1}{4} b(b-1) M^2 = 25 \frac{1}{4} b(b-1) M^2 \quad (3.2.60)$$

3.3. Modelos viscoelásticos

Las teorías de viscoelasticidad lineal describen el comportamiento de soluciones poliméricas y líquidos viscoelásticos en zonas de baja deformación. Para hacer descripciones más adecuadas a la física de deformación de materiales complejos se requiere una teoría no lineal que lo explique.

Para ello, el modelo de Oldroyd, introdujo el concepto de derivada convectiva. Este operador genera que los modelos que originalmente estaban circunscritos a regiones de baja deformación, se puedan generalizar para deformaciones finitas. La ecuación constitutiva deberá cumplir con las siguientes propiedades:

- Principio del determinismo del esfuerzo
- Principio de acción local
- Principio de la invarianza o indiferencia material

La ecuación reológica deberá ser independiente del movimiento absoluto en el espacio. La superposición del movimiento de un cuerpo rígido no tendrá efecto sobre el campo de esfuerzos más que los debidos a cambios de orientación por movimiento rotatorios. Finalmente, las derivadas convectivas deberán reducirse a derivadas parciales comunes en el límite de muy bajas deformaciones.

3.3.1. Modelo White-Metzner

El modelo White-Metzner se deriva a la teoría de redes de polímeros. Se toman en cuenta la viscosidad y en un tiempo de relajación como función de la rapidez cortante, $\dot{\gamma}$. Este modelo exhibe el comportamiento adelgazante, además el tiempo de relajación crece a alta rapidez de deformación [29]. La ecuación constitutiva tiene la siguiente forma Ec.3.3.1:

$$\sigma_1 + \lambda(\dot{\gamma}) \overset{\circ}{\sigma} = 2\eta(\dot{\gamma})D \quad (3.3.1)$$

donde $\eta(\dot{\gamma})$ puede ser obtenida experimentalmente de pruebas de corte simple y la función $\lambda(\dot{\gamma})$ de la curva de la primera diferencia de esfuerzos normales.

3.3.2. Modelo de Phan-Thien-Tanner

El modelo de Phan-Thien-Tanner hace referencia a un modelo viscoelástico cuasi lineal el cual ha sido ampliamente utilizado para la simulación de flujo de polímeros. La ecuación original fue escrita utilizando: la derivada de Gordon-Schowalter y un segmento cinético. El modelo supone creación y destrucción puntos estructurales según la teoría de Lodge y Yamamoto [48], [39]. El modelo de Phan-Thien-Tanner (PPT) predice viscosidad a bajo y alto corte η_0 y η_∞ respectivamente. Además de propiedades extensionales transitorias. En comparación con los modelos integrales de Bird-Carreau y Wagner, los modelos diferenciales permiten algoritmos más robustos al momento de modelar [48]. En el modelo PPT se considera un tensor de esfuerzos extra σ , el cual es la suma de las contribuciones del polímero σ_1 (viscoelásticas) y del solvente (Newtonianas) σ_2 (Ec.3.3.2).

$$\underline{\underline{\sigma}}_T = \underline{\underline{\sigma}}_1 + \underline{\underline{\sigma}}_2 \quad (3.3.2)$$

donde el segundo tensor $\sigma_2 = 2\eta_2 \underline{\underline{D}}$ y $\underline{\underline{D}}$ es el tensor rapidez de deformación.

El modelo se expresa en las ecuaciones siguientes:

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}} + \xi (D \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot D^T) + \frac{Y}{\lambda} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 2G \underline{\underline{D}} \quad (3.3.3)$$

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{DV}{Dt} - (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla V - \nabla V^T \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \quad (3.3.4)$$

donde la derivada convectiva $\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}$ superior de Oldroyd se define en la ecuación 3.3.4, ∇V y ∇V^T son los tensores gradiente de velocidad y tensores gradiente de velocidad transpuesto. Finalmente $\frac{DV}{Dt}$ es la derivada material de la velocidad, λ es un tiempo de relajación del fluido, G es el módulo elástico del material, ξ es un parámetro que relaciona el movimiento entre las cadenas poliméricas y el fluido. El parámetro Y depende de la

creación y destrucción de puntos estructurales [7]. Cabe mencionar que cuando $\xi = 0$ el modelo se reduce a la ecuación simplificada de Phan-Thien-Tanner Ec.3.3.5.

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{Y}{\lambda} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 2GD \quad (3.3.5)$$

Analizando el modelo PPT (3.3.3), el primer término hace referencia al tensor de esfuerzos y la parte transitoria del flujo, el segundo término al deslizamiento entre las cadenas poliméricas y el solvente y el tercer término a los efectos elásticos.

3.3.3. Modelo de Giesekus

Este modelo está basado en un concepto de configuración dependiente de la movilidad molecular. En este modelo, el componente viscoelástico adicional del tensor de esfuerzos se representa con los siguientes parámetros, η_p viscosidad del polímero, λ tiempo característico y α es el factor de movilidad [19], [18].

$$\sigma_p + \lambda_1 \dot{\sigma}_p - \frac{\alpha \lambda_1}{\eta} \sigma_p^2 + \eta \dot{\gamma} = 0 \quad (3.3.6)$$

El parámetro α tiene relación con la anisotropía del sistema. Para $\alpha = 0$ el modelo describe un sistema isótropo, para $\alpha = 1$, el modelo describe un sistema anisotrópico, mientras que para $0 < \alpha < 1$, el parámetro α tiene que ser estimado numéricamente. Es importante mencionar que el el modelo de Giesekus es capaz de predecir el comportamiento adelgazante al corte [13].

3.3.4. Modelo de Oldroyd-B

El modelo de Oldroyd-B, tiene la siguiente forma (Ec.3.3.7):

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 + \lambda_1 \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_1 - 2\eta_1 \left(\underline{\underline{D}} - \lambda_2 \overset{\circ}{\underline{\underline{D}}} \right) = 0 \quad (3.3.7)$$

donde D es el tensor de deformación, η_1 viscosidad cortante, λ_1 es el tiempo de relajación y λ_2 es el segundo tiempo característico [38]. El modelo Oldroyd-B es comúnmente usado para describir el estado reológico de soluciones poliméricas poco concentradas a moderada

y alta rapidez de corte. Cuando $\lambda_1 = 0$, se reduce a un fluido de segundo orden, con $\lambda_2 = 0$ se reduce al modelo convectivo superior de Maxwell y $\lambda_1 = \lambda_2$ se reduce al fluido Newtoniano.

3.3.5. Modelo de Moyers-Owens

Este modelo fue concebido para describir el comportamiento reológico de la sangre humana en función de la concentración de células circundantes (hematocrito). El modelo está acotado para describir la evolución de estructuras formadas por cúmulos celulares al ser sometidas a un gradiente de presión dentro de una geometría cuyo diámetro deberá ser alrededor de 1 micrómetro. Este modelo tiene la siguiente forma Ec.3.3.8:

$$\sigma + \lambda_h \overset{\nabla}{\sigma} - D_{tr} \lambda_h (\nabla^2 \sigma + (\nabla \nabla : \sigma) \delta) = N_0 (k_B T + \kappa) \lambda_H \dot{\gamma} \quad (3.3.8)$$

Cuando el modelo considera una geometría con diámetro mayor, se recupera el modelo de Owens que describe una cinética de desestructuración en función de un gradiente de presión.

Flujo Pulsátil

4.1. Modelo Bautista Manero Puig (BMP)

Todos los modelos viscoelásticos descritos en la secciones anteriores requieren un vasto conocimiento de la estructura del material en cuestión. Los modelos Oldroyd-B, Giesekus, Phan-Thien-Tanner, White-Metzner y Moyers-Owens han sido ampliamente estudiados para describir el comportamiento reológico de fluidos complejos y realizar predicciones de los mismos en procesos de extrusión, inyección, flujo sanguíneo, flujo pulsátil, etc. Sin embargo el modelo convectivo superior de Maxwell y cinético de Fredrickson ofrecen predicciones la descripción de una evolución estructural de un fluido complejo en función de un esfuerzo cortante aplicado.

El modelo fenomenológico BMP [6] describe el estado reológico de un fluido con estructura transitoria, el cual resulta de acoplar la ecuación convectiva superior de Maxwell Ec. 4.1.1 con una ecuación de evolución estructural Ec. 4.1.2. Ambas ecuaciones se describen a continuación.

$$\underline{\underline{\sigma}} + \frac{\zeta \left(II_{\underline{\underline{D}}} \right)}{G_0} \overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}} = 2\zeta (II_{\underline{\underline{D}}}) \underline{\underline{D}} \quad (4.1.1)$$

Donde $\underline{\underline{\sigma}}$ es el tensor de esfuerzos, $\zeta \left(II_{\underline{\underline{D}}} \right)$ se traduce a ser un parámetro estructural relacionado con los puntos materiales de entrecruzamiento por la estructuras dentro de un fluido complejo, $\overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}}$ es la derivada convectiva superior de Maxwell que describe la velocidad de cambio del esfuerzo relativo a la deformación expresada por los tensores de Finger o

Green y $\underline{\underline{D}}$ es el tensor rapidez de deformación.

Por otro lado, la ecuación cinético-estructural de Fredrickson, relaciona la evolución por acción de un esfuerzo de puntos estructurales dentro de un fluido complejo.

$$\frac{d}{dt} \ln \zeta(II_{\underline{\underline{D}}})^\lambda = 1 - \frac{\zeta(II_{\underline{\underline{D}}})}{\eta_0} + k\lambda \left(1 - \frac{\zeta(II_{\underline{\underline{D}}})}{\eta_\infty} \right) \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \quad (4.1.2)$$

Para lograr acoplar estas ecuaciones, es importante definir los siguientes tensores y propiedades:

Tensor gradiente de velocidad.

$$\nabla \underline{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

Tensor gradiente de velocidad transpuesto.

$$\nabla \underline{v}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

El tensor de esfuerzos.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

El tensor rapidez de deformación.

$$2\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

La derivada convectiva superior.

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \frac{D\underline{\underline{\sigma}}}{Dt} - (\nabla \underline{v}^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \underline{v}) \quad (4.1.7)$$

Al sustituir las ecuaciones y tensores 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6 y 4.1.7 dentro de la ecuación convectiva superior de Maxwell 4.1.1 se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} + \frac{\eta}{G_0} \left[\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \dot{\gamma}_{rz} \sigma_{rz} & 0 & \dot{\gamma}_{rz} \sigma_{zz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{rz} \sigma_{zz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \\
& = \eta \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma}_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{rz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.8}
\end{aligned}$$

Al considerar las definiciones previamente planteadas, se generan ecuaciones que describen el estado reológico de un fluido sometido a un esfuerzo Ec. 4.1.9, 4.1.10, 4.1.11 y 4.1.12. Las ecuaciones muestran a continuación:

$$\sigma_{rr} + \frac{\eta}{G_0} \left[\frac{d\sigma_{rr}}{dt} - 2 \dot{\gamma}_{rz} \sigma_{rz} \right] = 0 \tag{4.1.9}$$

$$\sigma_{rz} + \frac{\eta}{G_0} \left[\frac{d\sigma_{rz}}{dt} - \dot{\gamma}_{rz} \sigma_{zz} \right] = \eta \dot{\gamma} \tag{4.1.10}$$

$$\sigma_{\theta\theta} + \frac{\eta}{G_0} \frac{d\sigma_{\theta\theta}}{dt} = 0 \tag{4.1.11}$$

$$\sigma_{zz} + \frac{\eta}{G_0} \frac{d\sigma_{zz}}{dt} = 0 \tag{4.1.12}$$

Además, con el modelo BMP se puede predecir el primer y segundo coeficiente de esfuerzos normales a partir de las ecuaciones Ec. 4.1.9 y 4.1.10 y 4.1.11 4.1.12, respectivamente.

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\dot{\gamma}^2} \tag{4.1.13}$$

$$\Psi_2(\dot{\gamma}) = \frac{N_2}{\dot{\gamma}^2} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}}{\dot{\gamma}^2} \tag{4.1.14}$$

Al considerar la ecuación de evolución estructural Ec. 4.1.2 y suponiendo un estado estacionario $\frac{d}{dt} \ln \eta(II_{\underline{D}})^\lambda = 0$ y homogéneo $\eta(II_{\underline{D}}) = \eta(\dot{\gamma})$; dicha ecuación adquiere la siguiente forma:

$$0 = 1 - \frac{\eta(\dot{\gamma})}{\eta_0} + k\lambda \left(1 - \frac{\eta(\dot{\gamma})}{\eta_\infty} \right) \sigma \dot{\gamma} \quad (4.1.15)$$

Para un fluido complejo con estructuras condensadas con k puntos estructurales, al aplicarle un esfuerzo a este fluido, la estructura que lo compone pasará a tener $k - 1$ puntos estructurales, en una zona de alta rapidez de deformación, la estructura del fluido complejo quedará deshecha completamente para encontrarse completamente orientada en la dirección del flujo. Cabe mencionar que este proceso es reversible. En la figura 4.1 se muestra la analogía mecánica utilizada para interpretar la constante cinética a la cual se está refiriendo este trabajo.

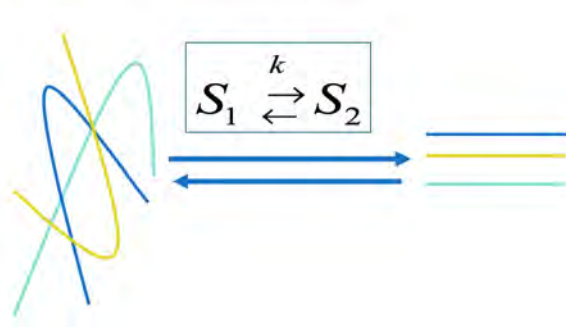


Figura 4.1: Analogía mecánica de la evolución estructural de un fluido complejo por acción de un esfuerzo cortante o un gradiente de presión.

Por otro lado, considerando la ecuación Ec.4.1.10 y suponiendo un estado estacionario $\frac{d\sigma_{rz}}{dt} = 0$, la ecuación 4.1.10 se reduce a:

$$\sigma_{rz} = \eta \dot{\gamma} \quad (4.1.16)$$

Al acoplar las ecuaciones Ec.4.1.15 y 4.1.16

$$0 = 1 - \frac{\eta(\dot{\gamma})}{\eta_0} + k\lambda \left(1 - \frac{\eta(\dot{\gamma})}{\eta_\infty} \right) \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}^2 \quad (4.1.17)$$

Rearreglando la ecuación anterior Ec.4.1.17.

$$0 = 1 - \frac{\eta(\dot{\gamma})}{\eta_0} + \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}^2 k\lambda - \eta(\dot{\gamma})^2 \dot{\gamma}^2 k\lambda \frac{1}{\eta_\infty} \quad (4.1.18)$$

Al factorizar los términos $\eta(\dot{\gamma})^2$ y $\eta(\dot{\gamma})^1$, resulta en una ecuación de segundo grado. Dicha ecuación ya se ha aplicado para describir varios sistemas complejos como lo es la sangre humana [34]. Se demostró que dicha descripción cinética planteada satisface los mecanismos cinéticos presentes en la sangre cuando a ésta se le aplica un esfuerzo.

$$\eta(k, \lambda, \eta_0, \eta_\infty, \dot{\gamma}) = \frac{k\lambda \dot{\gamma}^2 - 1 + \sqrt{(k\lambda \dot{\gamma}^2 - 1)^2 + 4k\lambda \frac{\eta_0}{\eta_\infty}}}{2k\lambda \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \dot{\gamma}^2} \quad (4.1.19)$$

En la tabla 4.1 se muestra la interpretación que tiene cada uno de los parámetros que constituyen el modelo BMP.

Tabla 4.1: Parámetros estructurales y cinéticos del modelo BMP

Parámetro	Interpretación
k	Constante cinética
λ	Tiempo de reestructuración luego de un periodo de deformación
η_0	Viscosidad a baja rapidez de deformación
η_∞	Viscosidad a alta rapidez de deformación

4.1.1. Esquema de adimensionalización de las ecuaciones

La correcta elección de los números, grupos y variables adimensionales generan una simplificación al momento de realizar simulaciones computacionales, además de restringir el espacio de solución del sistema en cuestión. A continuación se presenta el esquema propuesto para las expresiones que dan lugar a el sistema físico que se desea modelar (modelo Bautista Manero Puig, ecuación de movimiento y de conservación).

4.1.2. Variables adimensionales

El conjunto de ecuaciones Ec.4.1.20, muestran las variables adimensionales que se aplicarán para describir el sistema de flujo en cuestión. Esfuerzo, coordenada radial, flujo

volumétrico, tiempo, parámetro estructural, función viscosidad y velocidad promedio.

$$\begin{aligned}\sigma^* &= \frac{a\sigma_w}{\eta_0\langle v_z \rangle} & r^* &= \frac{r}{a} & Q^* &= \frac{Q}{\pi a^3\langle v_z \rangle} & t^* &= \frac{at}{\langle v_z \rangle} \\ \zeta^* &= \frac{\zeta}{\eta_0} & \eta^* &= \frac{\eta}{\eta_0} & \langle v_z \rangle &= \frac{Q}{\pi a^2}\end{aligned}\tag{4.1.20}$$

4.1.3. Números adimensionales

El conjunto de números adimensionales se describen a continuación

- **Número de Reynolds**

$$Re = \frac{\rho D \langle v_z \rangle}{\eta_0}\tag{4.1.21}$$

$$Re = \begin{cases} Re \gg 1 & \text{Predominan mecanismos inerciales} \\ Re = 1 & \text{Hay un balance entre los mecanismos inerciales y viscosos} \\ Re \ll 1 & \text{Predominan mecanismos viscosos} \end{cases}$$

Los tres casos planteados indican. Cuando $Re \gg 1$, dominan los mecanismos inerciales, por lo tanto se está tratando con un fluido de baja viscosidad; cuando $Re = 1$, los mecanismos inerciales y viscosos están en el mismo orden de magnitud y finalmente cuando $Re \ll 1$ los mecanismos viscosos dominan sobre los mecanismos inerciales.

- **Número de Deborah**

$$De = \frac{\langle v_z \rangle \eta_0}{aG_0}\tag{4.1.22}$$

$$De = \begin{cases} De \rightarrow 1 & \text{Fluido complejo} \\ De \rightarrow \infty & \text{Sólido elástico} \end{cases}$$

4.1.4. Grupos adimensionales

- Grupo A (Cinética estructural vs cinética viscoelástica)

$$A_0 = \frac{k\lambda\eta_0 \langle v_z^2 \rangle}{a^2} \quad (4.1.23)$$

$$A_0 = \begin{cases} A > 1 & \text{Mecanismos viscosos} \\ A < 1 & \text{Mecanismos cinético estructurales} \end{cases}$$

- Grupo B (Características reológicas del fluido)

$$B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \quad (4.1.24)$$

$$B = \begin{cases} B > 1 & \text{Fluido adelgazante} \\ B = 1 & \text{Fluido Newtoniano} \\ B < 1 & \text{Fluido Dilatante} \end{cases}$$

4.2. Ecuaciones de movimiento y reológicas adimensionales

Considerando las variables, números y grupos adimensionales descritos anteriormente, es posible expresar las ecuaciones codeformacional de Maxwell, cinética de Fredrickson y de movimiento en una versión adimensional conveniente para el análisis del problema planteado inicialmente.

$$\sigma^* + De\zeta^*(II_{\underline{D}})\overset{\nabla}{\sigma^*} = 2\zeta^*(II_{\underline{D}})\underline{D}^* \quad (4.2.1)$$

$$De_\lambda \frac{d}{dt^*} \ln \zeta^*(II_{\underline{D}}) = 1 - \zeta^*(II_{\underline{D}}) + A_0 \left(1 - B\zeta^*(II_{\underline{D}})\right) \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{D}}^* \quad (4.2.2)$$

$$Re \frac{Dv^*}{Dt^*} = -\nabla p^* + \nabla \cdot \sigma^* + fe^* \quad (4.2.3)$$

Al realizar las siguientes consideraciones pertinentes al sistema en cuestión:

1. Se considera un número de Reynolds tal que las fuerzas inerciales son muy pequeñas.
2. Las fuerzas hidrodinámicas, magnéticas, eléctricas y gravitacionales son cero.
3. Flujo unidireccional

$$v = [v_r, v_\theta, v_z] = [0, 0, v_z(r, t)]$$

4. Coordenadas cilíndricas

$$X = X(r, \theta, z)$$

5. Flujo incompresible

$$\rho \neq (\rho, t)$$

6. Fuerza que deforma continua e irreversiblemente el sistema

$$\nabla p = \frac{\Delta p}{\Delta L} (1 + \epsilon n(t))$$

7. Simetría cilíndrica

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$$

Las ecuaciones previamente planteadas Ec.4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3 con las consideraciones 1 a 7, toman la siguiente forma:

$$Re \frac{dv_z^*}{dt^*} = -p^* (1 + \epsilon n(t^*)) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (\sigma_{zr}^* r^*) \quad (4.2.4)$$

$$\left(1 + De\zeta^* \frac{\partial}{\partial t^*}\right) \sigma_{zr}^* - De\zeta^* N_2^* = \zeta^* \dot{\gamma}_{rz}^* \quad (4.2.5)$$

$$De_\lambda \frac{d}{dt^*} Ln\zeta^* (\dot{\gamma}_{rz}^*) = 1 - \zeta^* (\dot{\gamma}_{rz}^*) + A \left(1 - B\zeta^* (\dot{\gamma}_{rz}^*) \right) \sigma_{zr}^* \dot{\gamma}_{rz}^* \quad (4.2.6)$$

Tomando en cuenta el estado estacionario para la ecuación Ec.4.2.5, y además que la segunda diferencia de esfuerzos normales N_2^* es una cantidad despreciable, se obtiene la siguiente ecuación Ec.4.2.7:

$$\sigma_{zr}^* = \eta^* \dot{\gamma}_{rz}^* \quad (4.2.7)$$

Es importante mencionar que el parámetro estructural ζ^* en un estado estacionario y homogéneo se reduce a la función viscosidad η^* .

Por otro lado, la ecuación 4.2.6, expresa la igualdad del parámetro estructural ζ^* , con la función viscosidad η^* .

$$0 = 1 - \eta^* (\dot{\gamma}_{rz}^*) + A(1 - B\eta^* (\dot{\gamma}_{rz}^*)) \sigma_{rz}^* \dot{\gamma}_{rz}^* \quad (4.2.8)$$

Al acoplar las ecuaciones Ec.4.2.6 y 4.2.7 y factorizar los términos para la viscosidad, se obtiene una ecuación que describe la evolución de la viscosidad en función de la rapidez de deformación Ec.4.2.9.

$$\eta(\dot{\gamma}_{rz}^*) = \frac{A\dot{\gamma}_{rz}^{2*} - 1 + \sqrt{(A\dot{\gamma}_{rz}^{2*} - 1)^2 + 4AB\dot{\gamma}_{rz}^{2*}}}{2AB\dot{\gamma}_{rz}^*} \quad (4.2.9)$$

4.3. Flujo volumétrico del modelo BMP

A partir del esfuerzo adimensional del modelo BMP plasmado en la ecuación 4.2.9, es posible despejar la rapidez de deformación:

$$\dot{\gamma}_{rz}^* = \frac{AB\sigma_{rz}^{2*} - 1 + \sqrt{(AB\sigma_{rz}^{2*} - 1)^2 + 4A\sigma_{rz}^{2*}}}{2A\sigma_{rz}^{2*}} \quad (4.3.1)$$

al utilizar la definición de flujo volumétrico:

$$Q^* = v_z^*(r^* = 1) - \int_0^1 \dot{\gamma}_{rz}^* r^{*2} dr = \int_0^1 \left(-\dot{\gamma}_{rz}^* \right) r^{*2} dr^* \quad (4.3.2)$$

Integrando con respecto a la coordenada radial, es posible obtener el flujo volumétrico del modelo BMP.

$$Q^* = \int_0^1 \gamma_{rz}^* r^{*2} dr^* \quad (4.3.3)$$

Para realizar tal integral, primero es necesario expresar el esfuerzo en términos del esfuerzo en la pared mediante la siguiente relación.

$$\sigma_{rz}^* = -\sigma_w^* r^* \quad (4.3.4)$$

Al realizar la sustitución pertinente, se obtiene la siguiente ecuación (4.3.5):

$$Q^* = \int_0^1 \frac{AB (\sigma_w^* r^*)^2 - 1 + \sqrt{(AB (\sigma_w^* r^*)^2 - 1)^2 + 4A (\sigma_w^* r^*)^2}}{2A (\sigma_w^* r^*)^2} r^{*2} dr^* \quad (4.3.5)$$

Se tomará en cuenta el siguiente cambio de variable para realizar la integral:

$$u = A\sigma_w^{*2} r^{*2} \quad (4.3.6)$$

Por ende:

$$du = 2A\sigma_w^{*2} r^* dr \quad (4.3.7)$$

La integral se expresa de la siguiente manera.

$$Q = \frac{1}{4A_0^2 \sigma_w^{*3}} \int_0^{A_0 \sigma_w^{*2}} \left(Bu - 1 + \sqrt{(Bu - 1)^2 + 4u} \right) du \quad (4.3.8)$$

Separando la integral, en dos términos es posible resolverla de una manera más sencilla.

$$Q^* = \frac{1}{4A_0 \sigma_w^{*3}} \left[\int_0^{A_0 \sigma_w^{*2}} (Bu - 1) du + \int_0^{A_0 \sigma_w^{*2}} \left(\sqrt{(Bu - 1)^2 + 4u} \right) du \right] \quad (4.3.9)$$

$$Q^* = \frac{1}{4A_0 \sigma_w^{*3}} \left[\frac{BA_0^2 \sigma_w^{*4}}{2} - A_0 \sigma_w^{*2} + \int_0^{A_0 \sigma_w^{*2}} \left(\sqrt{(Bu - 1)^2 + 4u} \right) du \right] \quad (4.3.10)$$

Finalmente se deberán considerar dos casos límites, los cuales incluyen descripciones fenomenológicas similares pero con sensibles cambios en la parte matemática pues la sangre presenta dos comportamientos principales, dependiendo de la concentración de lípidos plasmáticos y hematocrito. El primero de ellos consta en una descripción de un fluido sin esfuerzo de cedencia y el segundo con un fluido que sí presenta este fenómeno.

Al realizar la integral planteada en la ecuación anterior, se obtiene la siguiente expresión

$$Q = \frac{1}{4A_0^2\sigma_w^{*3}} \int_0^{A_0\sigma_w^{*2}} \left(Bu - 1 + \sqrt{(Bu - 1)^2 + 4u} \right) du \quad (4.3.11)$$

La integral anterior se puede expresar de la siguiente manera:

$$Q^* = \frac{1}{4A_0\sigma_w^{*3}} \left[\int_0^{A\sigma_w^{*2}} (Bu - 1) du + \int_0^{A\sigma_w^{*2}} \left(\sqrt{(Bu - 1)^2 + 4u} \right) du \right] \quad (4.3.12)$$

$$Q^* = \frac{1}{4A_0\sigma_w^{*3}} \left[\frac{BA_0^2\sigma_w^{*4}}{2} - A_0\sigma_w^{*2} + \int_0^{A\sigma_w^{*2}} \left(\sqrt{(Bu - 1)^2 + 4u} \right) du \right] \quad (4.3.13)$$

La segunda integral puede ser reescrita como:

$$\int_0^{A\sigma_w^{*2}} \left(\sqrt{(u - \varphi)^2 + 4\varphi^2 u} \right) du \quad (4.3.14)$$

Completando una diferencia de cuadrados, se obtiene lo siguiente:

$$\int_0^{A\sigma_w^{*2}} \sqrt{u^2 + 2u\varphi(2\varphi - 1) + (\varphi(2\varphi - 1))^2 - (\varphi(2\varphi - 1))^2 + \varphi^2} \quad (4.3.15)$$

Las constantes δ_1^2 y δ_2^2 están definidas como:

$$\delta_1^2 = \varphi^2 - (\varphi(2\varphi - 1))^2 \quad (4.3.16)$$

$$\delta_2^2 = (\varphi(2\varphi - 1))^2 \quad (4.3.17)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores 4.3.16 y 4.3.17 en la integral Ec.4.3.15, se obtiene:

$$\int_0^{A\sigma_w^{*2}} \left(\sqrt{(u + \delta_2^2)^2 + \delta_1^2} \right) du \quad (4.3.18)$$

Al aplicar los siguientes cambios de variable: $u + \delta_2 = \delta_1 \tan \theta$ and $du = \delta_1 \sec^2 \theta - \delta_2 d\theta$, de la integral anterior (Ec.4.3.18), se obtiene:

$$\delta_1^2 \int_0^{A\sigma_w^{*2}} \sec^3 \theta d\theta \quad (4.3.19)$$

Como resultado de la integral anterior, se obtiene:

$$\frac{1}{2} \left((u + \delta) \sqrt{(u + \delta_2)^2 + \delta_1^2} - \delta_2 \sqrt{\delta_2^2 + \delta_1^2} + \delta_1^2 \log \left(\frac{\sqrt{(u + \delta_2)^2 + \delta_1^2} + u + \delta_2}{\sqrt{\delta_2^2 + \delta_1^2} + \delta_2} \right) \right) \quad (4.3.20)$$

Al retomar las variables originales, es posible expresar la fluencia del modelo BMP de la siguiente manera Ec. 4.3.21:

$$\begin{aligned} \varphi_0^* [A_0, B, \sigma_{w0}^*] = & \frac{1}{2} B - \frac{1}{A_0 \sigma_{w0}^{*2}} + \frac{1}{2A_0^2 B^2 \sigma_{w0}^{*4}} \left((A_0 B^2 \sigma_{w0}^{*2} + 2 - B) \left(\sqrt{(A_0 B^2 \sigma_{w0}^{*2})^2 + 4A_0 \sigma_{w0}^{*2}} - (2 - B) \right) \right) \\ & + \frac{2}{A_0^2 \sigma_{w0}^{*4}} \left(\frac{B - 1}{B} \right) \text{Log} \left[\frac{2 + A_0 B^2 \sigma_{w0}^{*2} + B \left(\sqrt{(A_0 B^2 \sigma_{w0}^{*2})^2 + 4A_0 \sigma_{w0}^{*2}} - 1 \right)}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Finalmente, dicha fluencia al multiplicarla por el esfuerzo se tendrá el flujo volumétrico del BMP Ec. 4.3.22 sin perturbaciones, es decir, a orden cero:

$$Q_{BMP} = \frac{\sigma_{rz}^*}{4} \varphi_0^* [A_0, B, \sigma_{w0}^*] \quad (4.3.22)$$

4.4. Esquema perturbativo

Para lograr realizar las predicciones con flujo pulsátil, se propone un esquema de perturbación en términos un parámetro pequeño ϵ [22, 40]. Sin embargo, difiere de otros esquemas en los que la expansión se aplica para la velocidad y el esfuerzo cortante en términos de otro parámetro perturbativo) [44, 47]. Sin embargo, el parámetro perturbativo por definición debe ser considerablemente pequeño para asegurar que tal perturbación mantenga el sistema en cuestión dentro de equilibrio. Por otro lado, el parámetro pertur-

vativo ϵ deberá estar relacionado con un parámetro material del sistema, el número de Reynolds, Re .

Las ecuaciones de movimiento y reológicas Ec.4.4.1 4.4.2, 4.4.3 en su versión adimensional se deberán considerar:

$$Re \frac{dv_z^*}{dt^*} = -p^* (1 + \epsilon n(t^*)) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (\sigma_{zr}^* r^*) \quad (4.4.1)$$

$$\left(1 + De\zeta^* \frac{\partial}{\partial t^*}\right) \sigma_{zr}^* - De\zeta^* N_2^* = \zeta^* \dot{\gamma}_{rz}^* \quad (4.4.2)$$

$$De_\lambda \frac{d}{dt^*} Ln\zeta^* \left(\dot{\gamma}_{rz}^*\right) = 1 - \zeta^* \left(\dot{\gamma}_{rz}^*\right) + A \left(1 - B\zeta^* \left(\dot{\gamma}_{rz}^*\right)\right) \sigma_{zr}^* \dot{\gamma}_{rz}^* \quad (4.4.3)$$

El esquema perturbativo propuesto en términos de ϵ para la rapidez de deformación, viscosidad y esfuerzo, se muestran a continuación (4.4.4, 4.4.5 y 4.4.6):

Para la rapidez de deformación.

$$\dot{\gamma} = \gamma_0 \epsilon^0 + \gamma_1 \epsilon^1 + \gamma_2 \epsilon^2 \quad (4.4.4)$$

Para la viscosidad.

$$\eta = \eta_0 \epsilon^0 + \eta_1 \epsilon^1 + \eta_2 \epsilon^2 \quad (4.4.5)$$

Para el esfuerzo

$$\sigma = \sigma_0 \epsilon^0 + \sigma_1 \epsilon^1 + \sigma_2 \epsilon^2 \quad (4.4.6)$$

La ecuación Ec.4.4.4 se reescribe de la siguiente manera:

$$\dot{\gamma} - \gamma_0 \epsilon^0 = \gamma_1 \epsilon^1 + \gamma_2 \epsilon^2 \quad (4.4.7)$$

Las ecuaciones propuestas Ec. 4.4.4, 4.4.5, 4.4.6, involucran términos de los cuales no se tiene información específica. Al aplicar el teorema de Taylor para la función viscosidad y esfuerzo, se obtiene lo siguiente:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0(\dot{\gamma}) \epsilon^0 + \frac{d\eta_0(\dot{\gamma})}{d\dot{\gamma}_0} (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0) \epsilon^1 + \frac{1}{2} \frac{d^2\eta_0(\dot{\gamma})}{d\dot{\gamma}_0^2} (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0)^2 \epsilon^2 \quad (4.4.8)$$

$$\sigma(\dot{\gamma}) = \sigma_0(\dot{\gamma}) \epsilon^0 + \frac{d\sigma_0(\dot{\gamma})}{d\dot{\gamma}_0} (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0) \epsilon^1 + \frac{1}{2} \frac{d^2\sigma_0(\dot{\gamma})}{d\dot{\gamma}_0^2} (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0)^2 \epsilon^2 \quad (4.4.9)$$

Es importante mencionar que la siguiente notación para las derivadas del esfuerzo y viscosidad a orden cero se considera en las ecuaciones 4.4.10, 4.4.11, 4.4.12 y 4.4.13:

$$\dot{\sigma}_0 = \frac{d\sigma_0}{d\dot{\gamma}}; \quad (4.4.10)$$

$$\ddot{\sigma}_0 = \frac{d^2\sigma_0}{d\dot{\gamma}^2}; \quad (4.4.11)$$

$$\dot{\eta}_0 = \frac{d\eta_0}{d\dot{\gamma}}; \quad (4.4.12)$$

$$\ddot{\eta}_0 = \frac{d^2\eta_0}{d\dot{\gamma}^2}; \quad (4.4.13)$$

Entonces las ecuaciones 4.4.8 y 4.4.9 tomarán la siguiente forma Ec.4.4.14, 4.4.15:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0(\dot{\gamma}) \epsilon^0 + \dot{\eta}_0(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0) \epsilon^1 + \frac{1}{2} \ddot{\eta}_0(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0)^2 \epsilon^2 \quad (4.4.14)$$

$$\sigma(\dot{\gamma}) = \sigma_0(\dot{\gamma}) \epsilon^0 + \dot{\sigma}_0(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0) \epsilon^1 + \frac{1}{2} \ddot{\sigma}_0(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0)^2 \epsilon^2 \quad (4.4.15)$$

Al expandir los términos $(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0)$ y $(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_0)^2$ y agruparlos por orden de magnitud en función del parámetro ϵ , se obtiene ahora el esquema perturbativo en términos completamente medibles.

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 \epsilon^0 + (\dot{\eta}_0 \dot{\gamma}_1) \epsilon^1 + \left(\dot{\eta}_0 \dot{\gamma}_2 + \frac{1}{2} \ddot{\eta}_0 \dot{\gamma}_1^2 \right) \epsilon^2 + (\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \ddot{\eta}_0) \epsilon^3 + \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma}_2^2 \ddot{\eta}_0 \right) \epsilon^4 \quad (4.4.16)$$

$$\sigma(\dot{\gamma}) = \sigma_0 \epsilon^0 + (\dot{\sigma}_0 \dot{\gamma}_1) \epsilon^1 + \left(\dot{\sigma}_0 \dot{\gamma}_2 + \frac{1}{2} \sigma_0 \ddot{\gamma}_1 \right) \epsilon^2 + (\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \ddot{\sigma}_0) \epsilon^3 + \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma}_2^2 \ddot{\sigma}_0 \right) \epsilon^4 \quad (4.4.17)$$

De las ecuaciones anteriores (Ec. 4.4.16 y 4.4.17), los términos de orden superior a (ϵ^2) se desprecian, dejando para el esquema de perturbación los términos a orden 0 y 1.

$$\dot{\gamma}^*(r^*, t^*) = \dot{\gamma}_0^* \epsilon^0 + \dot{\gamma}_1^* \epsilon^1 + \dots \quad (4.4.18)$$

$$\eta^*(r^*, t^*) = \eta_0^* \epsilon^0 + (\dot{\eta}_0^* \dot{\gamma}_1^*) \epsilon^1 + \dots \quad (4.4.19)$$

$$\sigma^*(r^*, t^*) = \sigma_0^* \epsilon^0 + (\dot{\sigma}_0^* \dot{\gamma}_1^*) \epsilon^1 + \dots \quad (4.4.20)$$

4.4.1. Orden 0 (ϵ^0)

El flujo volumétrico a orden cero coincide con el estado estacionario y homogéneo que se conoce para el modelo constitutivo BMP, debido a que es un flujo sin perturbaciones [6]. Para obtener las expresiones de flujo volumétrico a orden cero, es necesario partir de la ecuación movimiento adimensional Ec. 4.4.21.

$$Re \frac{dv_z^*}{dt^*} = -p^* (1 + \epsilon n(t^*)) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (\sigma_{rz}^* r^*) \quad (4.4.21)$$

Se considera que $Re \ll \ll 1$ y que las fuerzas externas son nulas f_e^* , con lo que la ecuación anterior Ec. 4.4.21 toma la siguiente forma Ec. 4.4.22:

$$p(1 + \epsilon n(t^*)) = \frac{1}{r^*} \frac{\partial (\sigma_{rz}^* r^*)}{\partial r^*} \quad (4.4.22)$$

Integrando sobre la coordenada radial es posible obtener una expresión Ec. 4.4.23 para el esfuerzo análogo a la Ec. 3.2.23.

$$\sigma_{rz}^* = \frac{r^*}{2} p (1 + \epsilon n(t^*)) \quad (4.4.23)$$

en donde $\sigma_w = \frac{r^*}{2}p$ de tal modo que la ecuación anterior (Ec.4.4.23) adquiere la siguiente forma (4.4.24):

$$\sigma_{rz}^* = \sigma_w (1 + \epsilon n(t^*)) = \sigma_w + \sigma_w \epsilon n(t^*) = \sigma_0 + \sigma_1 \epsilon n(t^*) \quad (4.4.24)$$

De la ecuación de Maxwell adimensional (Ec.4.4.25):

$$\left(1 + De\zeta^* \frac{\partial}{\partial t^*}\right) \sigma_{zr}^* - De\zeta^* N_2^* = \zeta^* \dot{\gamma}_{rz}^* \quad (4.4.25)$$

Considerando que la segunda diferencia de esfuerzos normales N_2^* es un valor despreciable y que el producto del esfuerzo a orden cero no tiene dependencia con respecto al tiempo, se obtiene la siguiente expresión (Ec.4.4.26).

$$\sigma_0^* = \eta_0^* \dot{\gamma}_0 \quad (4.4.26)$$

De la ecuación de Fredickson adimensional 4.4.27.

$$De_\lambda \frac{d}{dt^*} Ln\zeta^* \left(\dot{\gamma}_{rz}^*\right) = 1 - \zeta^* \left(\dot{\gamma}_{rz}^*\right) + A \left(1 - B\zeta^* \left(\dot{\gamma}_{rz}^*\right)\right) \sigma_{zr}^* \dot{\gamma}_{rz}^* \quad (4.4.27)$$

Para un estado estacionario y homogéneo donde $\frac{d}{dt^*} \ln \eta^*(\dot{\gamma}) = 0$ y $\zeta^* = \eta^*$, al sustituir la ecuación Ec. 4.4.26 en la ecuación Ec. 4.4.27 se obtiene:

$$0 = 1 - \eta_0^*(\dot{\gamma}) + A \left(1 - B\eta_0^*(\dot{\gamma})\right) \eta_0^* \left(\dot{\gamma}\right) \dot{\gamma}_0^2 \quad (4.4.28)$$

Simplificando la nomenclatura $\eta_0^*(\dot{\gamma}) = \eta_0^*$

$$0 = 1 - \eta_0^* + A(1 - B\eta_0^*) \eta_0^* \dot{\gamma}_0^2 \quad (4.4.29)$$

Reescribiendo la ecuación anterior Ec.4.4.30.

$$0 = 1 - \eta_0^* + A\eta_0^* \dot{\gamma}_0^2 - AB\eta_0^{*2} \dot{\gamma}_0^2 \quad (4.4.30)$$

Factorizando los términos η_0^* y η_0^{*2} :

$$0 = 1 - \eta_0^* (-A \dot{\gamma}_0^2 + 1) - \eta_0^{*2} (AB \dot{\gamma}_0^2) \quad (4.4.31)$$

Al realizar el álgebra pertinente y resolver una ecuación de segundo grado para la viscosidad a orden 0 de la ecuación anterior (Ec.4.4.28) se obtiene lo siguiente:

$$\sigma_0^* = \eta_0^* \dot{\gamma}_0^* = \frac{A \dot{\gamma}_0^{2*} - 1 + \sqrt{(A \dot{\gamma}_0^{2*} - 1)^2 + 4AB \dot{\gamma}_0^{2*}}}{2AB \dot{\gamma}_0^{2*}} \dot{\gamma}_0^* = \sigma_w^* r^* \quad (4.4.32)$$

La función de esfuerzo a orden cero del modelo BMP reproduce en un amplio intervalo la evolución del esfuerzo con respecto a la rapidez de corte adimensional. Se muestra en la figura 4.2 comportamiento monótonamente creciente, pero diferentes concavidades. Para las simulaciones a y b, el parámetro cinético-estructural A, tiene valores de 100 y 10 respectivamente; el rompimiento de puntos estructurales en esta zona es máximo. Por otro lado, para las simulaciones c y d, los valores de dicho parámetro son mínimos lo que se traduce en un rompimiento menor de puntos estructurales.

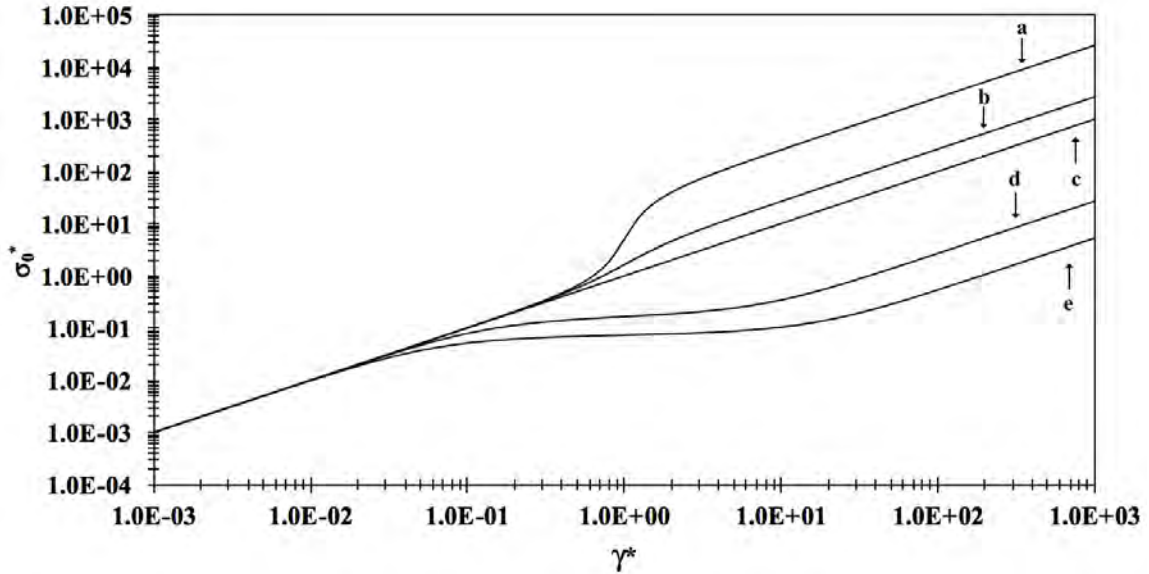


Figura 4.2: Función esfuerzo a orden cero BMP. A=1, a) $B = 0.037$, b) $B = 0.37$ c) $B = 1$ d) $B = 37.7$, e) $B = 188.6$ [6]

Para la sangre humana, los valores de dicho parámetro o similares de éste se han reportado en intervalos de $10^0 - 10^1 (s/Pa)$ [34]. Es importante mencionar que el parámetro dimensional B aplicado para dicha simulación corresponde a la de un fluido adelgazante al corte $B > 1$.

La ecuación Ec.4.2 puede ser expresada también como se muestra a continuación. Cabe mencionar que el subíndice no hace referencia al término viscosidad a bajo corte η_0 , sino a la viscosidad a orden cero.

$$\eta_0^* = \frac{A \dot{\gamma}_0^{2*} - 1 + \sqrt{(A \dot{\gamma}_0^{2*} - 1)^2 + 4AB \dot{\gamma}_0^{2*}}}{2AB \dot{\gamma}_0^{2*}} \quad (4.4.33)$$

En la figura 4.3, se muestra una simulación de la función viscosidad a orden cero. Se utilizaron datos teóricos para fluidos adelgazantes (a,b), engrosantes (d y e) y Newtoniano (c), respectivamente.

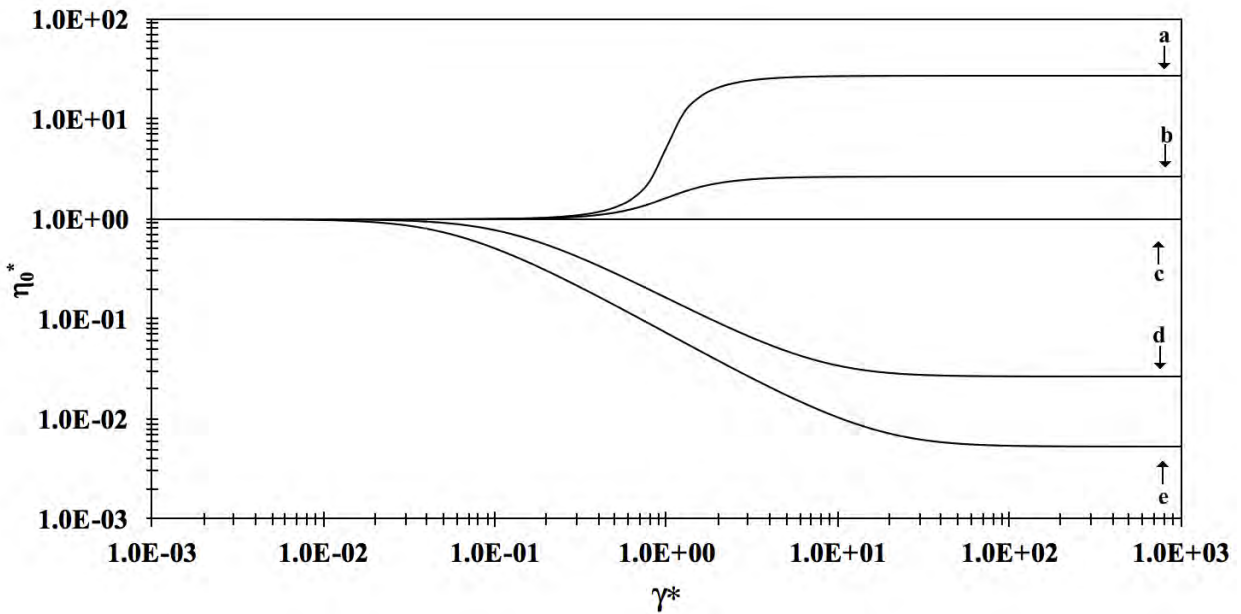


Figura 4.3: Función viscosidad del modelo BMP a orden cero. $A=1$, a) $B = 0.037$, b) $B = 0.37$ c) $B = 1$ d) $B = 37.7$, e) $B = 188.6$ [6]

El hecho que el orden cero coincida con el estado estacionario y homogéneo del modelo BMP, permite que las simulaciones se realicen de una manera muy similar a lo reportado previamente con la versión multimodal del modelo BMP (3 y 2 modos, respectivamente) [11, 34]. En este caso en particular, todo el desarrollo fue realizado suponiendo una versión monomodal, por tal razón el intervalo de predicción donde el modelo BMP describe satisfactoriamente el comportamiento reológico de la sangre humana es entre $10^0 - 10^1$ s^{-1} .

El orden cero de la ecuación BMP Ec.4.4.32 coincide además con el estado estacionario y homogéneo del mismo modelo.

$$\langle Q_0 \rangle = \int_0^1 \langle \dot{\gamma}_0^*(r^*, t^*) \rangle r^{*2} dr^* \quad (4.4.34)$$

Para realizar el proceso de integración, se consideran los cambios de variable y reportados en la sección 4.3, resultando en las ecuaciones 4.3.21 y 4.3.22.

Se presenta una simulación de la función flujo volumétrico a orden cero del modelo BMP.

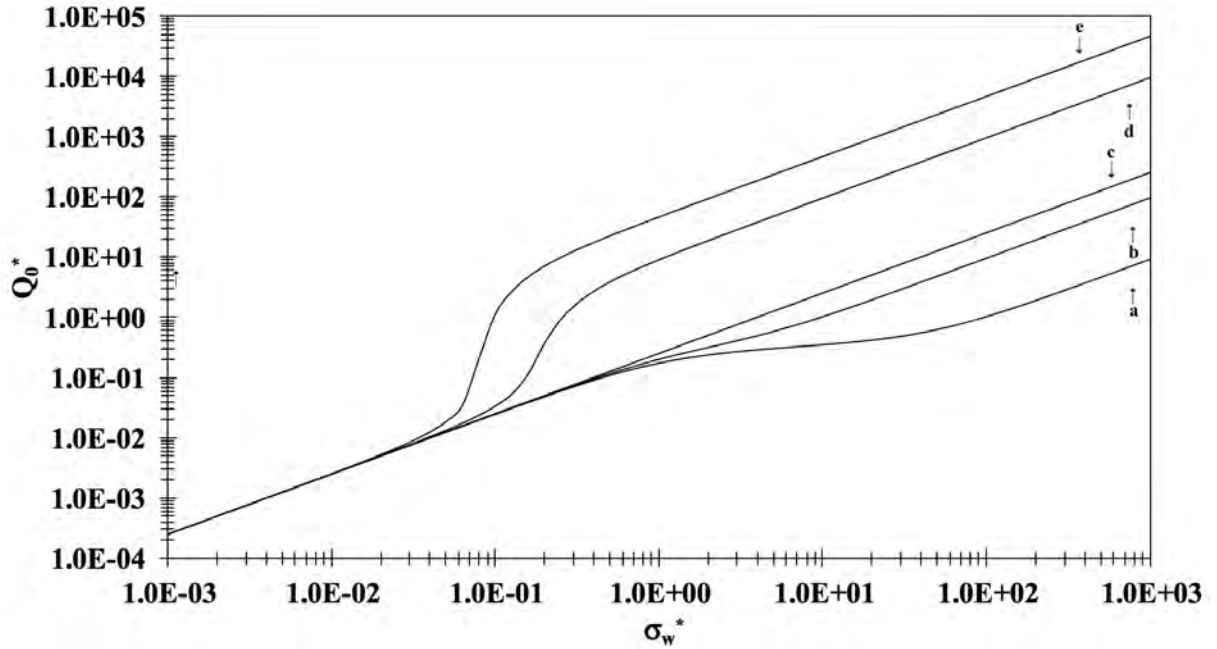


Figura 4.4: Función flujo volumétrico del modelo BMP. A=1, a) $B = 0.037$, b) $B = 0.37$ c) $B = 1$ d) $B = 37.78$, e) $B = 188.6$ [6]

4.4.2. Orden 1 (ϵ^1)

Para obtener la primera perturbación en el sistema, es necesario comenzar con la ecuación 4.4.24 y considerar los términos a orden 1.

$$\sigma_{rz}^* = \frac{1}{2}\sigma_w r + \frac{1}{2}\sigma_w r \epsilon n(t^*) = \sigma_0 + \sigma_1 \epsilon n(t^*) \quad (4.4.35)$$

Partiendo de la ecuación anterior (Ec.4.4.36), la función esfuerzo a orden 1 será:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \epsilon n(t^*) \quad (4.4.36)$$

Por otro lado, la ecuación de Maxwell adimensional (Ec.4.4.25) a orden 1 es:

$$\sigma_1 + De\eta_0 \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = \eta_1 \dot{\gamma}_0 + \eta_0 \dot{\gamma}_1 \quad (4.4.37)$$

Sustituyendo la ecuación Ec. 4.4.36 en la ecuación Ec. 4.4.37 y tomando en cuenta que $\eta_1 = \dot{\eta}_0 \dot{\gamma}_1$.

$$\frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon n(t^*) + De \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon \dot{n}(t^*) \eta_0 = \dot{\eta}_0 \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_0 + \eta_0 \dot{\gamma}_1 \quad (4.4.38)$$

Se factorizan los términos de esfuerzo a orden cero en la parte izquierda de la ecuación y rapidez cortante a orden 1 de la parte derecha. Es importante mencionar que para agrupar los términos correctamente se deberá considerar que $\frac{d\sigma_0}{d\dot{\gamma}_0} = \eta_0 + \dot{\eta}_0 \dot{\gamma}_0$. Con ello se obtendrá una expresión para la rapidez cortante a orden 1 (Ec.4.4.39).

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{\sigma_0^*}{\sigma_0^*} \left(n(t^*) + De\eta_0 \dot{n}(t^*) \right) \quad (4.4.39)$$

La ecuación Ec. 4.4.39 coincide con lo reportado por *Herrera, 2009* [22].

Como ya se había definido anteriormente, el esfuerzo a orden cero, tiene la siguiente expresión Ec.4.4.40:

$$\sigma_0^* = \frac{A \dot{\gamma}_0^{2*} - 1 + \sqrt{\left(A \dot{\gamma}_0^{2*} - 1 \right)^2 + 4AB \dot{\gamma}_0^{2*}}}{2AB \dot{\gamma}_0^*} = \sigma_w^* r^* \quad (4.4.40)$$

Para calcular el flujo volumétrico, es necesario calcular la derivada del esfuerzo con respecto a la rapidez cortante $\frac{d\sigma_0^*}{d\dot{\gamma}_0^*}$.

Se propone el siguiente cambio de variable: $u = A \dot{\gamma}_0^{2*} - 1 + \sqrt{\left(A \dot{\gamma}_0^{2*} - 1 \right)^2 + 4AB \dot{\gamma}_0^{2*}}$ y $v = \dot{\gamma}_0^*$. Aplicando dicho cambio de variable en la definición de la derivada de un cociente

de funciones: $\frac{d\frac{u}{v}}{d\dot{\gamma}_0^*} = \frac{v \frac{du}{d\dot{\gamma}_0^*} - u \frac{dv}{d\dot{\gamma}_0^*}}{v^2}$.

Al reescribir toda la función:

$$\frac{1}{2AB \dot{\gamma}_0} \left[\dot{\gamma}_0 \left(\frac{d}{d \dot{\gamma}_0} A \dot{\gamma}_0^2 - 1 + \sqrt{\left(A \dot{\gamma}_0^2 - 1 \right)^2 + 4AB \dot{\gamma}_0^2} \right) - I \right]$$

donde I está dado por:

$$I = \left(\sqrt{\left(A \dot{\gamma}_0^2 - 1 \right)^2 + 4AB \dot{\gamma}_0^2} - A \dot{\gamma}_0^2 \right) \frac{d \dot{\gamma}_0}{d \dot{\gamma}_0}$$

El primer miembro de la suma, requiere aplicar la regla de la cadena y la derivada de la suma y el segundo término queda intacto.

$$\frac{d}{d \dot{\gamma}_0} \left(A \dot{\gamma}_0^2 - 1 + \sqrt{\left(A \dot{\gamma}_0^2 - 1 \right)^2 + 4AB \dot{\gamma}_0^2} \right)$$

El resultado final para la derivada del esfuerzo con respecto a la rapidez cortante es el siguiente (Ec.4.4.41):

$$\dot{\sigma}_0 = \frac{1 + A\gamma^2\sqrt{A\gamma^2 - 1 + 2A + 1(2B - 1)\gamma^2 + A^2\gamma^4}}{2AB\gamma^2\sqrt{2A + 1(2B - 1)\gamma^2 + A^2\gamma^4}} \quad (4.4.41)$$

La expresión final para el cociente del esfuerzo a orden cero y su derivada, quedará definido de la siguiente manera (Ec.4.4.42):

$$\frac{\sigma_0}{\dot{\sigma}_0} = \frac{\dot{\gamma}_0}{1 + A \dot{\gamma}_0^2} \left(2AB \dot{\gamma}_0 \sigma_0 - \left(A \dot{\gamma}_0^2 - 1 \right) \right) \quad (4.4.42)$$

Para calcular el flujo volumétrico a orden uno ϵ^1 será necesario aplicar la definición:

$$\langle Q_1 \rangle = \int_0^1 \left\langle \dot{\gamma}_1^* (r^*, t^*) \right\rangle r^{*2} dr^* \quad (4.4.43)$$

donde la función de rapidez de deformación a orden cero $\dot{\gamma}_0^*$ viene dada por la ecuación 4.3.1. Al sustituir los valores, se encuentra la siguiente expresión:

$$\langle Q_1 \rangle = \int_0^1 \left\langle \frac{\dot{\gamma}_0}{1 + A \dot{\gamma}_0^2} \left(2AB \dot{\gamma}_0 \sigma_0 - \left(A \dot{\gamma}_0^2 - 1 \right) \right) (n(t^*) + D\epsilon\eta_0 \dot{n}(t^*)) \right\rangle r^{*2} dr^* \quad (4.4.44)$$

donde $n(t^*) = 1$ y $\dot{n}(t^*) = 0$. Al aplicar ambas condiciones, la integral tendrá que resolverse de manera numérica mediante el método de Simpson.

En la figura 4.5, se presentan simulaciones de flujo volumétrico a orden uno del modelo BMP. Se utilizó una constante $A = 1$ y diferentes valores de B para realizar tal simulación. Es importante destacar que para relizar la simulación es necesario calcular la integral de la ecuación (Ec.4.4.39) $\dot{\gamma}_1 = \frac{\sigma_0^*}{\sigma_0^*} \left(n(t^*) + De\eta_0 \dot{n}(t^*) \right)$ con respecto a la coordenada radial. Además será necesario considerar por primera vez el promedio de la función estocástica que va a dar lugar a la perturbación. Para esta simulación en particular, se considerará que el promedio de dicha función estocástica sera diferente de cero $\langle n(t) \rangle \neq 0$ y se normalizará como la unidad $\langle n(t) \rangle = 1$. Se hace evidente que la derivada temporal de la función estocástica es cero y la contribución elástica (De) no se manifiesta. La simulación a orden 1 predice el comportamiento de reológico de diversos fluidos, desde engrozantes (a y b), Newtonianos (c) y adelgazantes al corte (d y e). En una zona de esfuerzo en la pared bajo $\sigma_w < 0.01$ se presenta una zona de crecimiento constante que denota una región de viscosidad constante, posteriormente se comienzan a mostrar diferencias considerables en la región ($0.01 < \sigma_w < 10$) donde se manifiesta la característica del fluido (adelgazante o engrozante) y finalmente una zona de crecimiento constante que también revela zonas de viscosidad constante para todos los fluidos simulados ($\sigma_w > 10$).

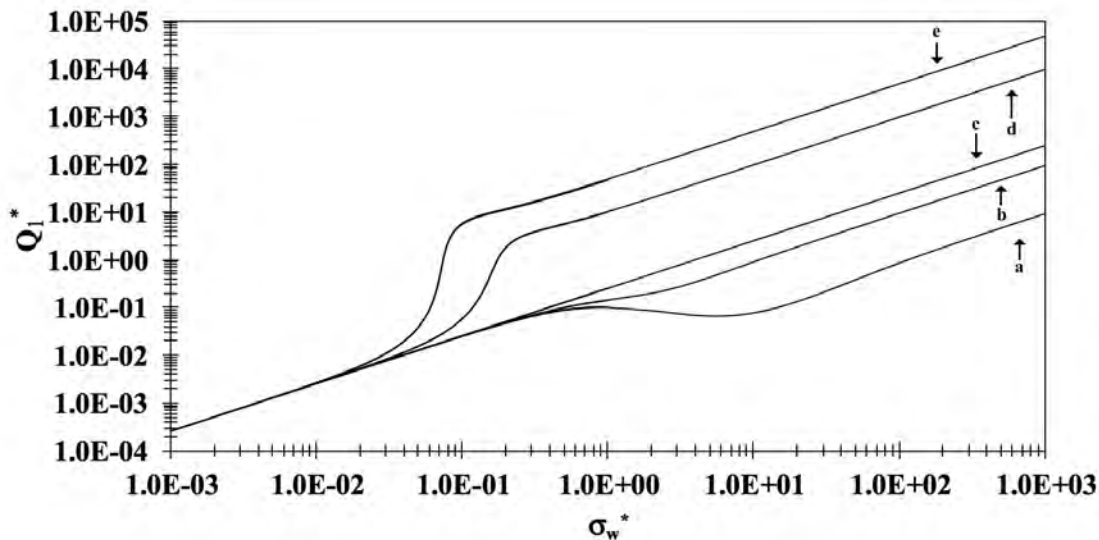


Figura 4.5: Función flujo volumétrico a orden uno del modelo BMP. $A=1$, a) $B = 0.037$, b) $B = 0.37$ c) $B = 1$ d) $B = 37.7$, e) $B = 188.6$ [6]

De a partir de la descripción de flujo volumétrico a orden uno, puede obtenerse la función viscosidad a orden uno. En la figura 4.6 se aprecia el la función viscosidad a

orden uno del modelo BMP. Se utilizaron datos teóricos para fluidos adelgazantes (a,b), engrosantes (d y e) y Newtoniano (c), respectivamente.

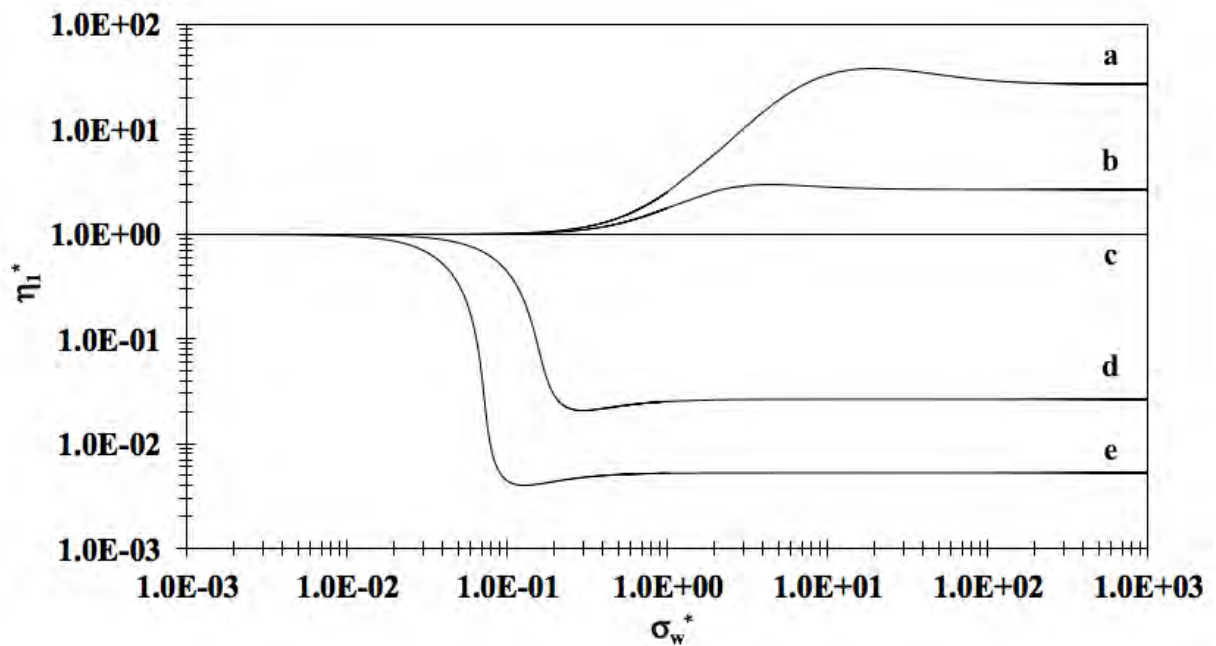


Figura 4.6: Función viscosidad a orden uno del modelo BMP. $A=1$, a) $B = 0.037$, b) $B = 0.37$ c) $B = 1$ d) $B = 37.7$, e) $B = 188.6$ [6]

4.5. Optimización de flujo (aplicación de orden cero y uno)

En la figura 4.7 se muestra la función flujo volumétrico a orden cero (línea continua) y uno (línea punteada). El efecto que tiene la perturbación sobre la función a orden uno es similar un aumento de los mecanismos adelgazantes del fluido, aumentando así la desestructuración del fluido. El efecto se ve manifestado en un intervalo de $1.0E - 02 < \sigma_w^* < 1.0E + 00$. Para la función flujo volumétrico y viscosidad a orden uno, se utilizó para el parámetro cinético-estructural $A_0 = 1$ y el número $B = 37.7$ correspondiente a un fluido adelgazante al corte.

En una representación similar, la figura 4.8 muestra la viscosidad a orden cero y uno. La perturbación simulada se manifiesta en el mismo intervalo antes citado.

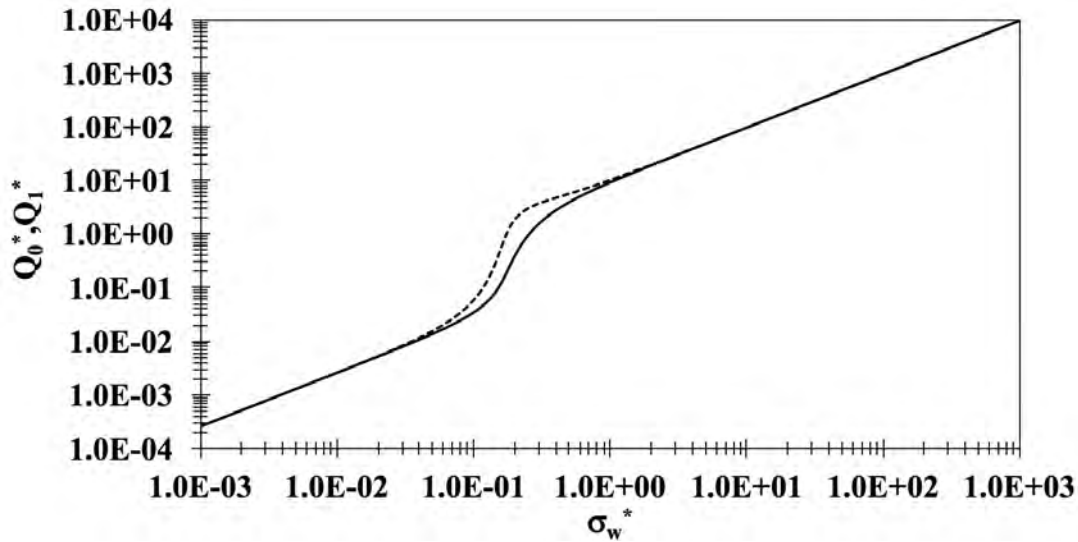


Figura 4.7: Función flujo volumétrico del modelo BMP. $A=1$, $B=37.73$. La línea continua representa el flujo volumétrico a orden cero y la línea discontinua el flujo volumétrico a orden uno.

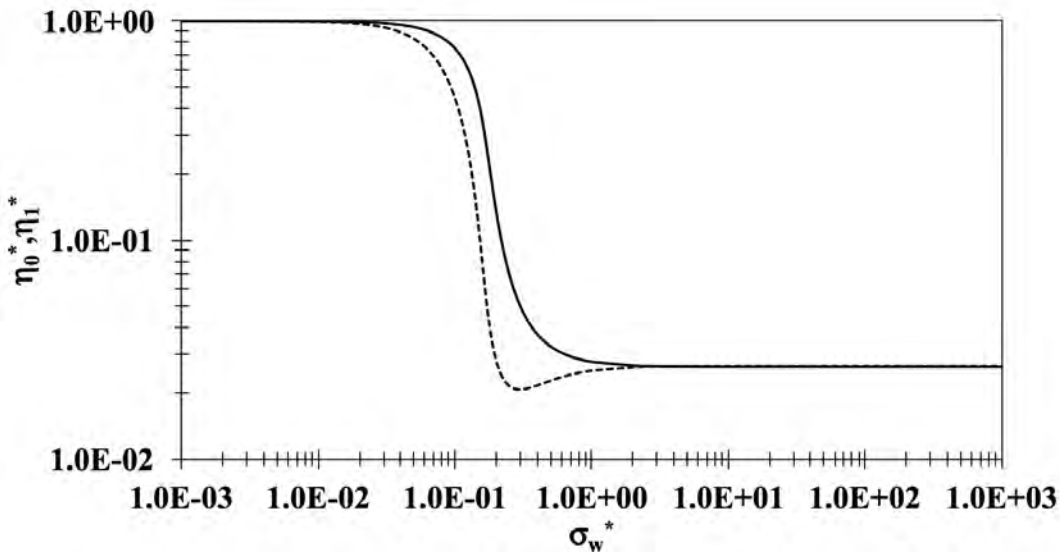


Figura 4.8: Función flujo volumétrico del modelo BMP. $A=1$, $B=37.73$. La línea continua representa la viscosidad a orden cero y la línea discontinua la viscosidad a orden uno.

Tales diferencias fueron encontradas también con la utilización del modelo de Casson y perturbaciones simples por *K. Rohlf, et al, 2001.*, [43] vistas en los perfiles de velocidad del fluido y sus respectivos aumentos causados por la perturbación y por *Herrera E.E, et al., 2009* [22] analizando el aumento de flujo por la presencia de perturbaciones. La perturbación tiene un efecto significativo, el comportamiento del fluido en cuestión se ve exacerbado en la región de adelgazamiento.

Con la finalidad de analizar las diferencias de manera cuantitativa entre el orden uno y cero, se muestra a continuación el aumento de flujo, el cual es una razón entre el flujo a orden uno y orden cero (Ec. 4.5.1).

$$I(\%) = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} * 100 \quad (4.5.1)$$

En la figura 4.9 se muestra el aumento de flujo por acción de una perturbación para diferentes valores del parámetro adimensional $5 \leq B \leq 188$. Se hace patente que el máximo en el aumento de flujo se manifiesta cuando el fluido simulado tiene el mayor carácter adelgazante, en valores cercanos a $B = 1$ (fluido Newtoniano), el aumento de flujo se minimiza. En esta situación, el fluido carece de estructura alguna que se pueda orientar en dirección del gradiente de presión aplicado. Se logran aumentos de flujo de alrededor de 1000 % para el caso de $B = 188.6$ (un fluido con carácter altamente adelgazante).

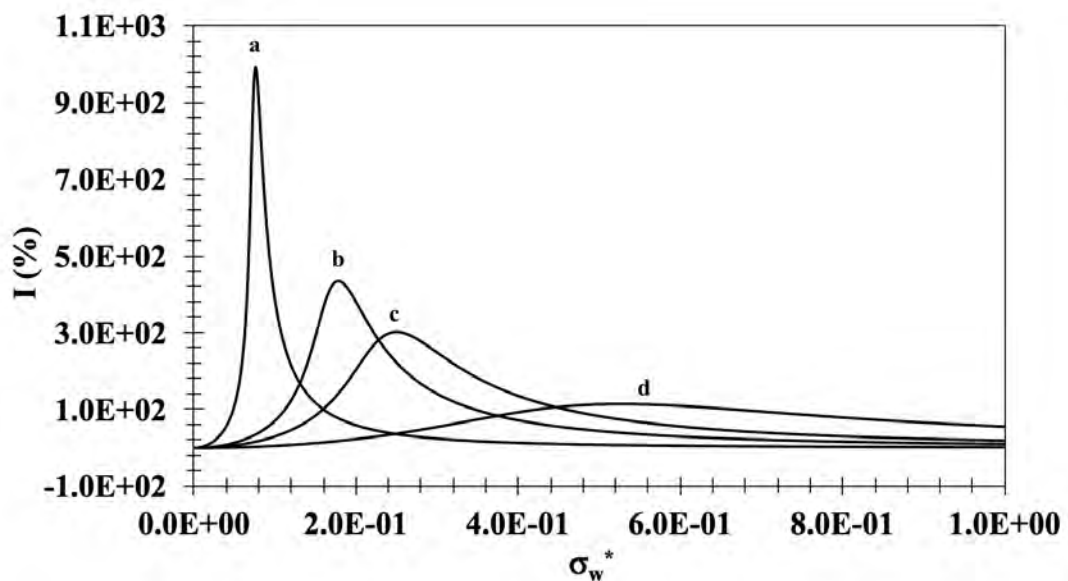


Figura 4.9: Aumento de flujo. $A_0 = 1$, a) $B = 188.37$, b) $B = 37.73$, c) $B = 20$, d) $B = 5$, $\langle n(t^*) \rangle = 1$

Por otro lado, para una situación análoga, en la figura 4.10, donde se mantiene fijo el parámetro B y se modifica el parámetro A_0 (constante cinético-estructural), el aumento de flujo tiene un máximo para cualquier caso presentado de 110 %, pero este se presenta a diferentes valores de esfuerzo en la pared.

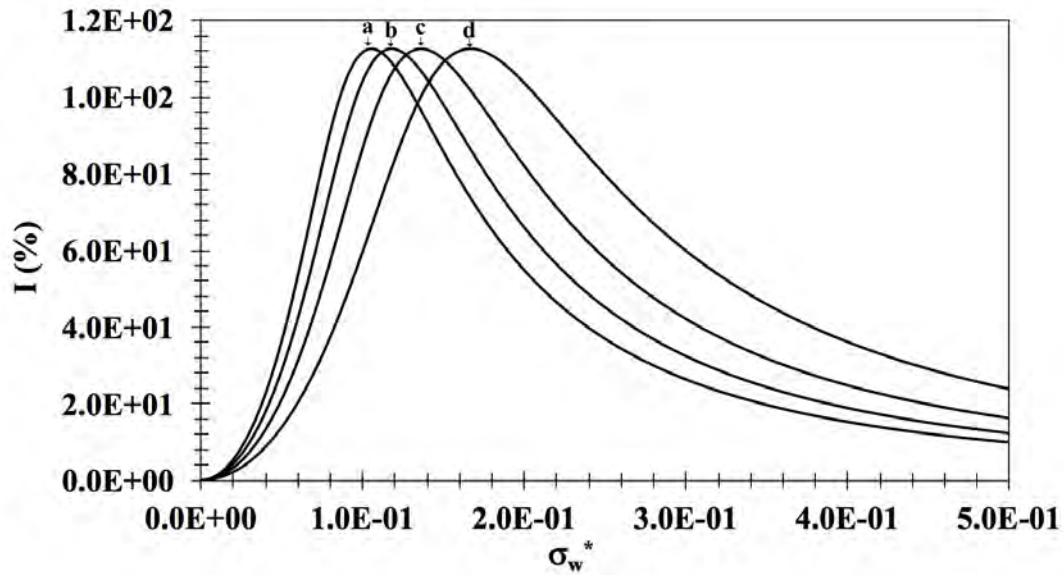


Figura 4.10: Aumento de flujo. $B = 5$ a) $A_0 = 25$, b) $A_0 = 20$, c) $A_0 = 15$, d) $A_0 = 10$, $\langle n(t^*) \rangle = 1$

4.6. Esfuerzo de Cedencia

Se ha demostrado que el esfuerzo de cedencia se presenta en la sangre humana cuando los niveles elevados de colesterol y triglicéridos son elevados (niveles patológicos) [34]. Además se presenta con condiciones como concentraciones elevadas de fibrinógeno [25]. El modelo BMP además de predecir el comportamiento de un fluido complejo (engrosamiento y adelgazamiento al corte), es capaz de describir el esfuerzo de cedencia de un fluido. El esfuerzo de cedencia para el modelo BMP resulta de $\varphi_0 = 0$ [9]. Al tomar en cuenta tal consideración, se obtiene la siguiente ecuación (4.6.1):

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{k\lambda\varphi_\infty}} \quad (4.6.1)$$

Metodología

5.1. Muestras de sangre

Se contó con 50 muestras de sangre humana obtenidas gracias a un convenio de colaboración Jaloma-UNAM. La sangre fue extraída por punción venosa y almacenada en tubos adicionados con EDTA (anticoagulante). A las muestras mencionadas les fueron determinadas las concentraciones plasmáticas de colesterol total, triglicéridos, fibrinógeno y hematocrito; anteriormente se ha reportado que dichos parámetros son los que modifican el comportamiento reológico de la sangre humana fuertemente [34]. La mayor cantidad de las muestras analizadas presentaron un hematocrito de 40 a 42 %. A cada paciente le fueron extraídos tres tubos de 5 mL de sangre, dos para la caracterización bioquímica y uno más para la caracterización reológica. La caracterización reológica se debió realizar minutos después de la extracción evitando así la degradación de la muestra o la pérdida de sus propiedades viscoelásticas [23, 28].

5.2. Modificación de patrones cardiacos

A los pacientes les fue medida su presión sanguínea y ritmo cardiaco en estado basal. Posteriormente se pidió que realizaran actividades físicas tales como levantarse, hacer sentadillas, caminar y de nuevo sentarse. Estos condicionantes obligan a que tanto la presión sanguínea como el ritmo cardiaco se modifiquen. Las 5 condiciones permiten obtener resultados para realizar las simulaciones asociadas a orden cero y uno.

5.3. Caracterización reológica

La caracterización reológica fue realizada en un reómetro de esfuerzos controlados (AR-G2, TA Instruments) equipado con una geometría de cilindros concéntricos adaptado para 5 mL de muestra. La geometría antes mencionada fue utilizada debido a que es apropiada para la caracterización de fluidos de baja viscosidad, mantiene homogénea la temperatura y previene la evaporación. Adicional a esto, la rapidez de deformación es constante en la zona reométrica. La reproducibilidad y precisión de las mediciones se ve afectada por la tendencia natural de los eritrocitos a sedimentar [26]. Para evitar tal fenómeno, la caracterización fue realizada poco tiempo después de ser extraída y previamente homogeneizada. Todas las determinaciones reométricas fueron realizadas a 37 °C con la finalidad de emular la temperatura corporal [34].

Por otro lado, para las determinaciones de las propiedades reológicas de la sangre en función del hematocrito, fue necesario obtener 100 mL de una persona. Esto asegura que la cantidad de colesterol sea constante debido a que fue extraído en un mismo momento. Se procede a centrifugar completamente la muestra obtenida a 4500 rpm durante 10 min. La separación del paquete celular y el plasma permite posteriormente realizar las alícuotas necesarias para generar 5 mL de sangre con diferente hematocrito, desde 0 % hasta 100 %. A estas muestras se les realizaron también las pruebas reológicas a continuación descritas.

5.3.1. Pruebas oscilatorias de baja amplitud de deformación

SAOS

El régimen viscoelástico lineal fue identificado al realizar un barrido de deformación (1-100 %) a valores de esfuerzo constante; su presencia se confirmó en cuanto los módulos elástico y viscoso permanecieron independientes de la deformación. La caracterización reométrica constó en pruebas oscilatorias de baja amplitud en el régimen viscoelástico lineal en un intervalo de 1 a 300 *Rad/s*.

5.3.2. Pruebas de corte simple en estado estacionario

Pruebas de corte simple en estado estacionario se realizaron en un intervalo de análisis de 1 a 300 1/s, aplicando un precorte $\dot{\gamma} = 5s^{-1}$, con la finalidad de homogeneizar las células, proteínas y plasma de la muestra a analizar [50] [34].

5.4. Simulaciones

Para realizar las simulaciones correspondientes, se utilizó un algoritmo escrito para Wolfram Mathematica 10.

- Mediante las simulaciones con el modelo multimodal BMP es posible obtener los parámetros materiales de la sangre y relacionarlos con los parámetros que el propio modelo utiliza para describir una cinética de desestructuración de un fluido por acción de un esfuerzo cortante.
- Simulaciones a orden uno con el modelo BMP, revelan la presencia de un extra de energía al fluido, obligándolo a manifestar un comportamiento adelgazante más pronunciado que para el orden cero.

Capítulo 6

Resultados

6.1. Resultados bioquímicos y biométricos

En las tablas siguientes 6.1, 6.2 se muestran los resultados bioquímicos y físicos obtenidos de los 50 pacientes convocados para el estudio. Sin embargo, debido a los criterios de eliminación, solamente se reportaron 47 resultados. Los pacientes eliminados padecían sin tener el conocimiento, antecedentes de enfermedades isquémicas, se desmayaron al momento de extraer las muestras, debido a su edad no realizaron las pruebas físicas tal como es el caso del paciente 1, 49 y 50.

Tabla 6.1: Resultados bioquímicos y físicos para los 50 pacientes convocados al estudio. P denota al número de la persona, CT colesterol total (mg/dL), TG triglicéridos (mg/dL), H% hematocrito (porcentaje), PS presión sistólica, PD presión diastólica y RC ritmo cardíaco.

Paciente	Datos bioquímicos					Resultados físicos																	
	CT	TG	Hct%	1		2		3		4		5		1		2		3		4		5	
				PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	185	161	45.4	142	93	147	104	1436	97	139	103	133	91	69	75	92	73	68					
3	194	207	46.6	133	94	138	100	137	100	142	96	154	94	68	68	115	81	79					
4	162	213	50	115	83	107	72	121	75	112	74	126	87	85	79	96	72	81					
5	123	64	47.4	126	84	174	136	162	165	168	119	141	95	75	71	91	79	73					
6	137	70	45.1	121	86	106	71	110	57	105	58	126	87	65	63	84	65	59					
7	249	92	40.3	152	86	160	104	162	99	152	95	144	95	44	53	51	55	46					
8	233	97	41.6	131	86	138	99	146	94	136	101	123	87	51	53	76	50	51					
9	114	47	50	114	75	90	54	108	60	102	56	102	65	54	52	67	49	62					
10	148	57.5	41.8	115	81	95	74	110	85	123	88	114	84	71	78	108	84	73					
11	177	166.7	51.1	96	62	92	59	102	56	100	64	103	70	69	59	77	64	59					
12	154	126.5	42	105	70	93	56	102	56	109	61	114	81	69	63	79	68	67					
13	180	144	55.2	135	103	126	91	138	86	141	95	132	91	75	74	93	68	76					
14	160	161	45	140	92	128	86	143	86	135	88	142	97	65	63	84	65	59					
15	171	123	50	120	86	128	80	157	89	146	89	126	86	65	77	110	76	82					
16	150	100	45	125	82	119	76	109	69	112	68	128	84	65	77	110	76	82					
17	237	289	45.7	121	82	98	64	112	65	109	66	121	82	66	52	66	56	50					
18	149	93	39.3	99	64	86	53	95	54	92	53	91	58	72	60	64	61	62					
19	184	186.6	45.1	125	88	108	65	109	55	107	52	110	74	63	60	85	63	55					
20	150	65.5	37.2	128	92	134	103	130	94	138	107	129	97	98	95	132	107	84					
21	174	70	41.3	126	87	109	78	116	71	104	69	123	83	78	74	97	72	71					
22	245	308	41.4	140	92	128	86	143	86	135	88	142	97	61	64	87	70	70					
23	148	52	39.5	111	70	113	82	123	82	109	76	115	84	68	68	115	81	79					
24	171	102.7	42.5	107	72	117	81	117	82	127	81	110	67	82	54	83	67	55					

Tabla 6.2: Resultados bioquímicos y físicos para los 50 pacientes convocados al estudio. P denota al número de la persona, CT colesterol total (mg/dL), TG triglicéridos (mg/dL), H% hematocrito (porcentaje), PS presión sistólica, PD presión diastólica y RC ritmo cardiaco.

Paciente	Datos bioquímicos					Resultados físicos																		
	CT	TG	Hct %	1		2		3		4		5		1		2		3		4		5		
				PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS	PD	PS
25	213	565	40.6	125	88	108	65	109	55	107	52	110	74	69	59	77	64	59						
26	187	349	47.5	126	84	174	136	162	165	168	119	141	95	72	72	91	77	70						
27	183	197	46.3	121	86	106	71	110	57	105	58	126	87	65	67	68	65	71						
28	170	145	49	94	68	96	58	110	67	106	68	127	175	61	64	87	70	70						
29	223	112	50.1	128	97	118	72	127	77	125	81	112	79	70	65	80	61	64						
30	101	84	38.9	112	80	131	100	1436	98	140	96	123	77	72	82	112	75	67						
31	161	198	50	157	110	90	70	87	54	189	112	136	162	81	89	64	88							
32	166	203	53	169	94	141	99	142	100	160	114	150	124	69	47	93	66	70						
33	195	118	45.2	111	76	106	70	104	67	107	67	107	73	62	62	83	62	55						
34	158	71	45.5	111	70	113	82	123	82	109	76	115	84	65	77	110	76	82						
35	135	73	40.9	104	67	114	64	105	74	112	65	115	82	60	62	68		58						
36	190	290	48.6	120	86	128	80	157	89	146	89	126	86	75	71	91	79	73						
37	196	77	44	94	68	96	58	110	67	106	68	127	175	87	80	90	77	73						
38	173	131	40.9	121	82	98	64	112	65	109	66	121	82	80	87	128	91	59						
39	158	137	43.9	126	83	112	69	121	79	117	77	122	92	66	69	78	82	84						
40	197	112	50.5	146	97	127	86	135	95	139	85	141	88	65	67	68	65	71						
41	177	242	47.3	127	86	135	100	131	96	141	108	136	162	71	80	103	73	56						
42	185	212	50.7	139	92	142	99	143	95	152	109	97	65	80	87	128	91	59						
43	164	408	43.1	125	82	119	76	109	69	112	68	128	84	66	66	80	73	67						
44	156	52.3	46	136	89	158	112	176	115	166	112	140	62	48	44	60	98	46						
45	185	520	47.4	145	88	134	82	140	82	146	84	152	94	65	64	75	74	69						
46	274	386	52.2	148	91	133	82	132	83	144	82	158	102	61	61	71	62	61						
47	274	280	50	120	85	143	93	150	99	167	99	143	89	71	81	83	75	72						
48	300	214	52	120	80	129	82	139	90	145	95	124	85	79	80	85	88	78						
49	370	270	43	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-						
50	391	144	42	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-						

6.2. Reometría y modelado matemático

6.2.1. Pruebas de corte simple en estado estacionario

Se realizó una simulación para tres muestras con diferente concentración colesterol total con la versión multimodal del modelo BMP. Esta es una generalización plausible para incluir las contribuciones de los esfuerzos del solvente (plasma) y varios modos correspondientes a la formación de diferentes estructuras por acción del flujo. Este concepto puede ser expresado de la siguiente forma (Ec.6.2.1).

$$\sigma = \sum_{i=1}^N \sigma_i + 2\eta_s D \quad (6.2.1)$$

Donde η_s representa la viscosidad del plasma y las contribuciones del esfuerzo refleja la presencia de estructuras transitorias en la sangre. Entonces, esta viscosidad puede ser expresada (Ec. 6.2.2).

$$\eta(\dot{\gamma}) = \sum_{i=1}^N \eta_i(\dot{\gamma}) = \frac{\left(\eta_{0i} k_i \lambda_i \dot{\gamma}^2 - 1\right) + \sqrt{\left(\eta_{0i} k_i \lambda_i \dot{\gamma}^2 - 1\right) + 4k_i \lambda_i \dot{\gamma}^2 \left(\frac{\eta_{0i}^2}{\eta_{\infty i}}\right)}}{2k_i \lambda_i \left(\frac{\eta_{0i}}{\eta_{\infty i}}\right) \dot{\gamma}^2} \quad (6.2.2)$$

La ecuación expresada previamente es reescrita considerando que la multiplicación de k y λ , se denomina β . La ecuación quedará definida de la siguiente manera (Ec.6.2.3).

$$\eta(\dot{\gamma}) = \sum_{i=1}^N \eta_i(\dot{\gamma}) = \frac{\left(\eta_{0i} \beta_i \dot{\gamma}^2 - 1\right) + \sqrt{\left(\eta_{0i} \beta_i \dot{\gamma}^2 - 1\right) + 4\beta_i \dot{\gamma}^2 \left(\frac{\eta_{0i}^2}{\eta_{\infty i}}\right)}}{2\beta_i \left(\frac{\eta_{0i}}{\eta_{\infty i}}\right) \dot{\gamma}^2} \quad (6.2.3)$$

En esta sección se presentan los resultados de la simulación con el modelo multimodal BMP de 3 grupos principales de muestras de sangre (10 muestras) a la par de los resultados experimentales de las muestras antes citadas. Se reitera el comportamiento adelgazante al corte de la sangre y la viabilidad del modelo BMP para describir tanto su comportamiento como una cinética de des-estructuración en función del esfuerzo cortante aplicado.

En la figura 6.1, se muestra el comportamiento reológico de 3 muestras representativas de sangre de diferentes niveles de colesterol total y la simulación con el modelo BMP en su versión multimodal.

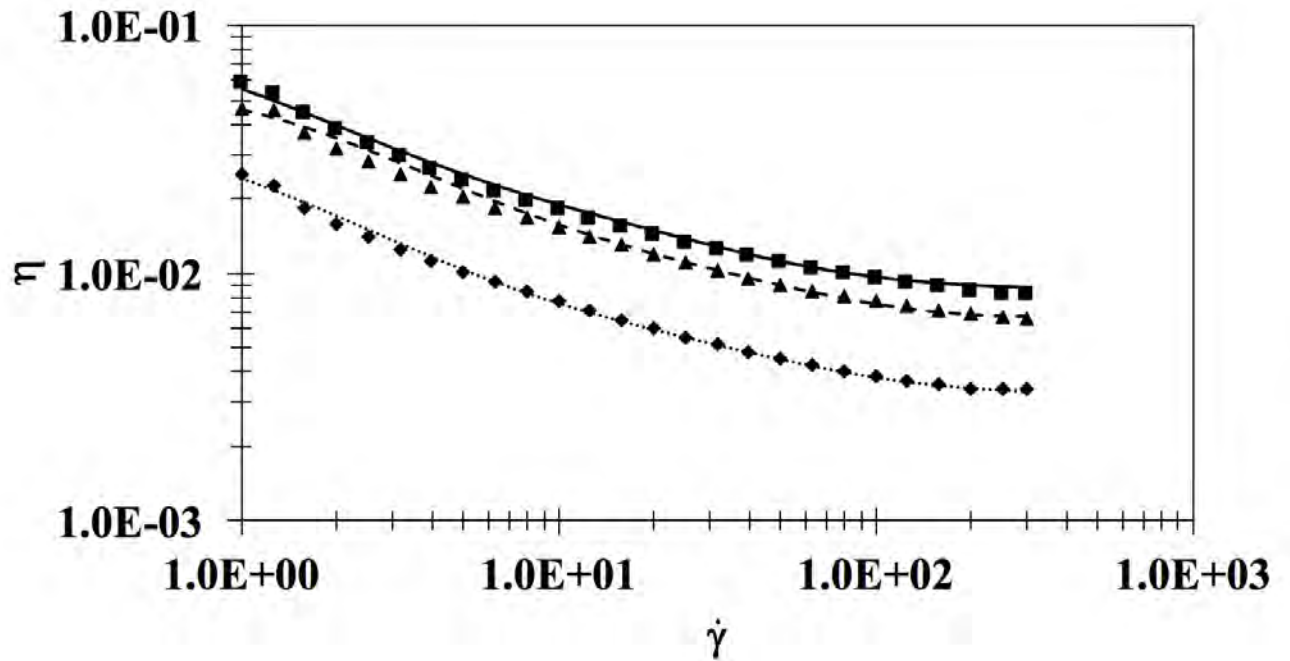


Figura 6.1: 3 principales muestras de pacientes modeladas con la versión multimodal del modelo BMP. Colesterol total elevado (cuadros llenos, paciente 49), colesterol total moderado (triángulos llenos, paciente 25) y colesterol total bajo (rombos llenos, paciente 9).

Tabla 6.3: Datos para el modelado teórico con el modelo BMP multimodal para 3 muestras de sangre con niveles elevados de colesterol total promedio 370 mg/dL.

η_i (Pa s)	β_i (s/Pa)	η_∞ (Pa s)
0.067	0.69	0.00265
0.0079	0.056	
0.00285	0.0047	

Tabla 6.4: Datos para el modelado teórico de 3 muestras de sangre con niveles medios de colesterol total promedio 213 mg/dL.

η_i (Pa s)	β_i (s/Pa)	η_∞ (Pa s)
0.0496	0.405	0.00077
0.00615	0.028	
0.00273	0.005	

Tabla 6.5: Datos para el modelado teórico de 3 muestras de sangre con niveles bajos de colesterol total promedio 114 mg/dL.

η_i (Pa s)	β_i (s/Pa)	$\eta_{\infty i}$ (Pa s)
0.0322	1.5	0.00243
0.0037	0.0663	

En las tablas Tab.6.3, 6.4 y 6.5 se plasman los resultados de las simulaciones con el modelo BMP multimodal para tres grupos principales de muestras de sangre completa con diferentes concentraciones de colesterol.

Además se modeló el comportamiento reológico de la sangre humana en pruebas de corte simple en estado estacionario con varios modelos que ya han sido reportados para tal efecto. Se utilizaron modelos tales como el de Quemada (Ec.6.2.4) y Carreau (Ec.6.2.5) para ser comparados con el modelo constitutivo BMP.

$$\sigma(\dot{\gamma}) = \eta_p \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_0 + k_\infty \sqrt{\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c}}}{1 + \sqrt{\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c}}} \right) Hct \right)^{-2} \dot{\gamma} \quad (6.2.4)$$

donde η_p es la viscosidad del plasma, k_0 y k_∞ son la fracción del volumen celular a alta y baja rapidez cortante, finalmente $\dot{\gamma}_c$ es la rapidez cortante característica donde se

presenta el fenómeno de agregación-desagregación de las estructuras tipo Rouleaux.

$$\eta(\dot{\gamma}) = (\eta_0 - \eta_\infty) \left(1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right)^{\frac{n-1}{n}} + \eta_\infty \quad (6.2.5)$$

Aquí η_0 y η_∞ con la viscosidad a baja y alta rapidez de corte, λ es un tiempo característico asociado a un cambio estructural y n es un índice de fluidez, el valor de este parámetro permite al modelo describir el comportamiento reológico de fluidos adelgazantes y engrosantes al corte. Se presenta en la figura 6.2 una simulación para la muestra L3 (bajo contenido de colesterol-109 mg/dL), donde se hace notar que el modelo de Carreau aparenta un esfuerzo de cedencia que es inexistente desde el punto de vista experimental, además de que tal modelo no lo describe teóricamente tal como el BMP lo hace [9].

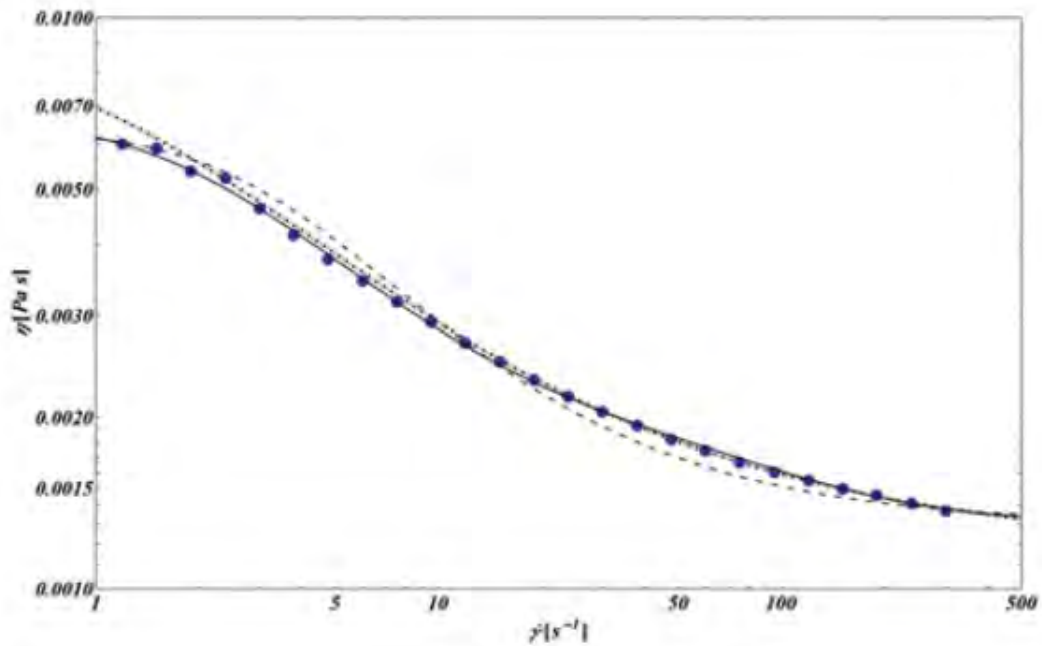


Figura 6.2: Modelo BMP (línea sólida), modelo de Carreau (línea punteada), Modelo de Quemada (línea discontinua), datos experimentales puntos azules.

En la tabla Tab.6.6 se muestran los resultados de la simulación que permite reproducir el comportamiento reológico de la sangre humana. Si bien se han utilizado modelos empíricos [31] para tal efecto, se demuestra que el modelo BMP multimodal describe satisfactoriamente tal comportamiento y se propone su utilización para descripciones reológicas de fluidos biológicos.

Tabla 6.6: Parámetros del modelo BMP β (s/Pa), η_0 y η_∞ (Pa s). Parámetros para el modelo de Carreau η_0 and η_∞ (Pa s), λ (s) y n son adimensionales. Parámetros para el modelo de Quemada η_p (Pa s), $\dot{\gamma}_c$ (1/s), k_0 and k_∞ son adimensionales

Quemada		Carreau		BMP			
η_p	0.00108	η_0	0.00638	η_i	i=1	i=2	i=3
k_0	8	η_∞	0.0013		0.00534	0.001	0.000994
k_∞	0.13	λ	0.338	β	2.23	0.062	0.001
$\dot{\gamma}$	2.44	n	0.1	$\eta_{\infty i}$	2.3×10^4	2.3×10^4	2.3×10^4

6.2.2. Pruebas oscilatorias de baja amplitud SAOS

En un régimen de pequeñas deformaciones, el modelo BMP se reduce al modelo lineal de Maxwell, este a su vez está caracterizado por dos componentes, llamadas módulo de almacenamiento (G') y módulo de pérdida (G'') (Ec.6.2.6, 6.2.7):

$$G'(\omega) = \sum_{i=1}^N G_i \frac{\omega^2 \lambda_i^2}{1 + \omega^2 \lambda_i^2} \quad (6.2.6)$$

$$G''(\omega) = \sum_{i=1}^N G_i \frac{\omega \lambda_i}{1 + \omega^2 \lambda_i^2} \quad (6.2.7)$$

Es importante recalcar que para este modelo, la viscosidad a baja rapidez de deformación será la suma de las contribuciones del tiempo o tiempo de relajación y el modulo o módulos elásticos (Ec.6.2.8).

$$\eta_0 = \sum_{i=1}^N G_i \lambda_i \quad (6.2.8)$$

En la tabla Tab.6.7 se presentan los datos para realizar la simulación de los datos experimentales oscilatorios en el régimen viscoelástico lineal para una muestra representativa L3 (bajo contenido de colesterol-109 mg/dL).

Tabla 6.7: Datos experimentales para la simulación con el modelo Multimodal de Maxwell

Modelo multimodal de Maxwell			
G_i	i=1	i=2	i=3
	28.5	0.37	0.01
λ_i	0.0052	0.03	0.79

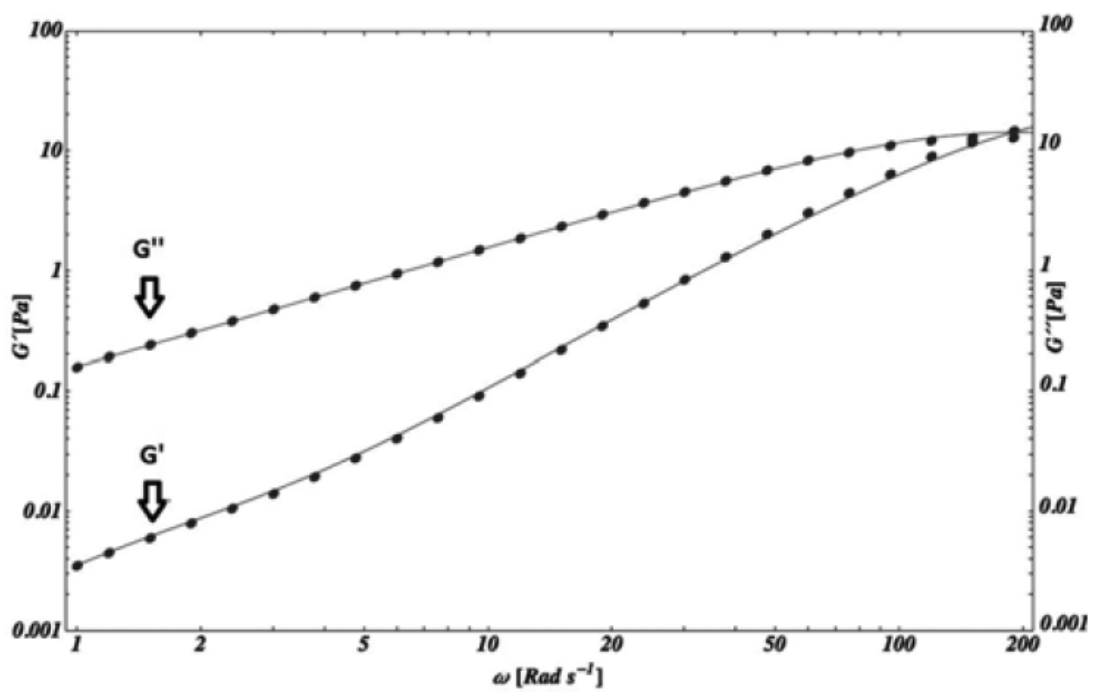


Figura 6.3: Módulos viscoso y elástico (G'' y G') de una muestra de sangre con baja concentración de colesterol total (114 mg/dL)

Las pruebas oscilatorias de baja amplitud de deformación, al ser presentadas con la parte real e imaginaria de la viscosidad compleja, muestran información asociada a los procesos de relajación presentes en el fluido sanguíneo. Para las muestras L1-L4 (muestras de baja concentración de colesterol total) la gráfica tipo Cole-Cole Fig.6.4, muestra que éstas tienen dos procesos de relajación dominantes que comúnmente se atribuyen a mezclas no homogéneas. Por otro lado las muestras con concentraciones de colesterol más elevado (H1-H4) no se hace evidente la presencia de dos procesos de relajación, sino solamente de uno. La concentración elevada de colesterol total, genera un nivel mayor de estructuración transitoria y rigidez entre las células sanguíneas. Este tipo de análisis se ha aplicado para otro tipo de sistemas complejos como lo son las mezclas poliméricas [17, 26].

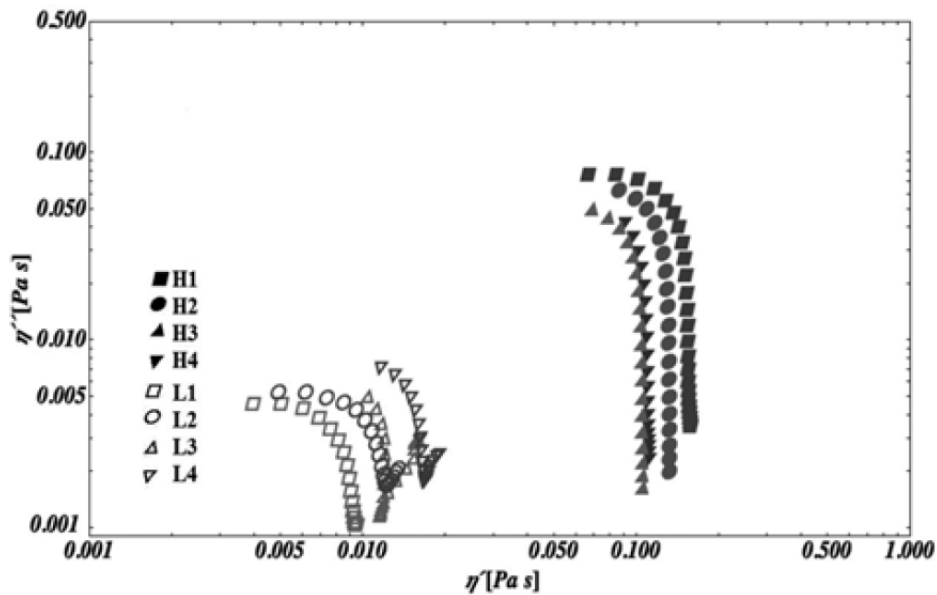


Figura 6.4: Parte imaginaria η'' y real η' de la viscosidad compleja

6.2.3. Microscopía

Para confirmar que las concentraciones elevadas de colesterol total modifican el comportamiento reológico de la sangre, todo debido al crecimiento en la magnitud de las interacciones entre las células. En una serie de frotis, se reveló que la formación de estructuras se ve modificada por la concentración plasmática de colesterol total. En la figura 6.5 se presentan micrografías de un par de muestras realizadas, una con alto nivel de colesterol A y otra con bajo nivel de colesterol B. Las flechas denotan los cúmulos celulares y sus diferencias debido a la concentración de colesterol total. Se evidencia el efecto de la presencia elevada de colesterol, los cúmulos se vuelven más compactos. Cabe resaltar que estas estructuras en la literatura se denominan *rouleaux*, que si bien forman este tipo de arquitectura celulares, en este caso se atribuye a la concentración elevas de colesterol. Esto obedece a que los pacientes donadores sólo padecían de trastornos metabólicos (dislipidemia) pero no patologías tales como hipergammaglobulinemia o hiperproteinemia que afectan directamente los patrones de agregación celular [16].

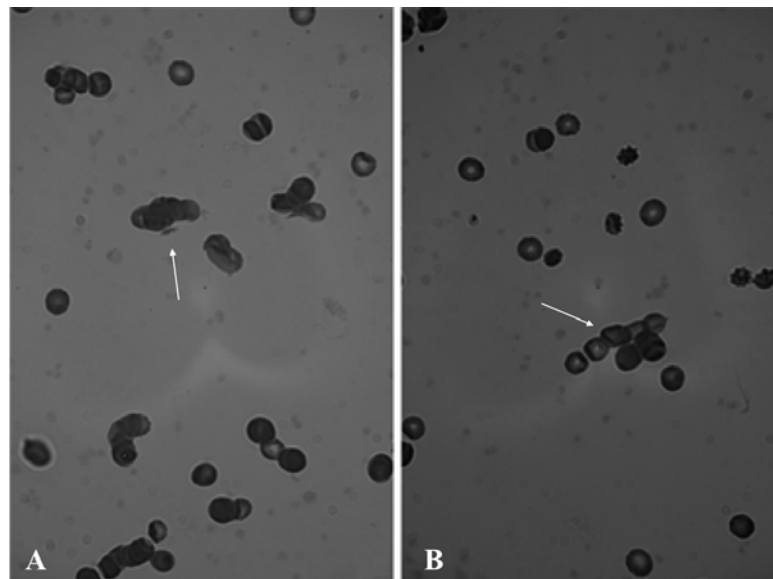


Figura 6.5: Figura A alto colesterol, figura B bajo colesterol. Magnificación de 1000x

6.2.4. Regla de Cox-Merz

La figura 6.6 se muestra la superposición de la viscosidades dinámicas y complejas para 10 muestras de sangre representativas. Aplicando la regla de Cox-Merz, es notorio que la concentración de colesterol tiene una relación directa con tal regla. En cada una de las muestras analizadas $\eta^*(\omega) > \eta(\dot{\gamma})$

La relación empírica llamada Cox-Merz considera la superposición de la viscosidad compleja $\eta^*(\omega)$ y cortante $\eta(\dot{\gamma})$ de un fluido complejo [14]. En cierto intervalo, dicha coincidencia numérica se debe a que la viscosidad compleja a frecuencias bajas, se asemeja a un régimen cortante. A altas frecuencias, el comportamiento diverge. Se puede observar que dicha diferencia está íntimamente relacionada con la concentración de colesterol total, no así para el hematocrito. De manera categórica, la regla de Cox-Merz no se cumple para este sistema.

Tabla 6.8: Datos asociados a las muestras presentadas en la figura 6.6. El valor de hematocrito se considera como la cantidad de células por unidad de volumen expresado como un porcentaje.

CT (mg/dL)	Hct %	Identificador
161	50	a
160	45	b
171	50	c
187	47	d
205	48	e
223	50	f
245	41	g
274	52	h
274	50	i
300	52	j

Como se ha demostrado previamente [34], la molécula de colesterol presente en la sangre, genera un efecto de estabilización de estructuras transitorias (no coagulación). Dicha estabilización se ve reflejada al comparar la viscosidad dinámica con la viscosidad compleja. A pesar de que los análisis con esta regla se han centrado con soluciones poliméricas [21] y soluciones micelares, la dinámica del sistema puede ser comparable [30].

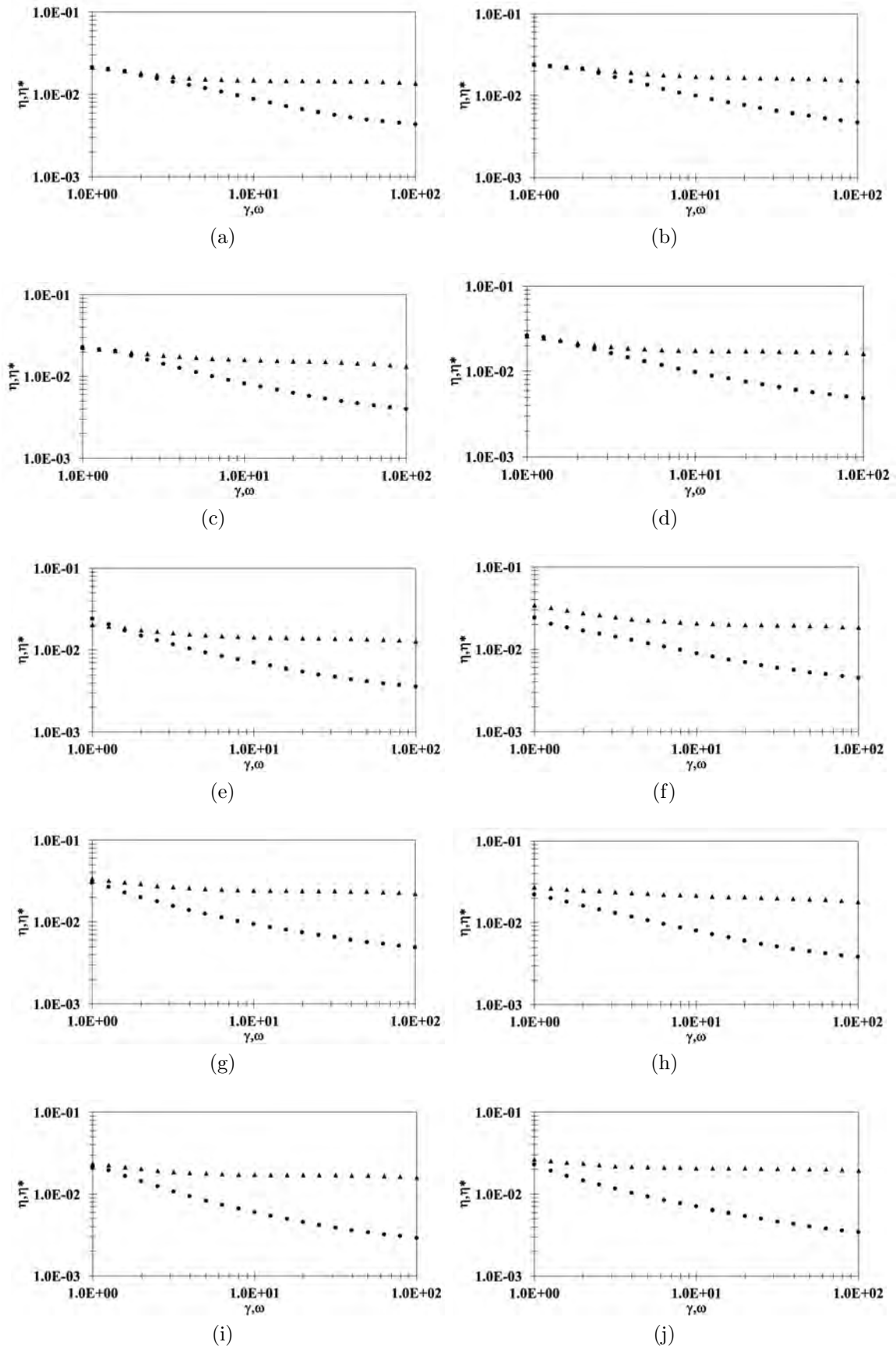


Figura 6.6: Comparación de la viscosidad compleja (triángulos) y dinámica (círculos) para 10 muestras representativas.

6.2.5. Viscosidad como función del hematocrito

La figura 6.7 presenta una curva maestra para diferentes concentraciones de células (hematocrito); al realizar una curva maestra permite extra e interpolar el comportamiento reológico de la sangre humana al aplicar el factor de corrimiento horizontal mostrado en la figura 6.8. La realización de esta mediciones se realizó con una única muestra con una concentración de colesterol total constante (215 mg/dL). Se extrajo aproximadamente 50 mL de sangre de un paciente y se midió el colesterol total. Este volumen de sangre se centrifuga con la finalidad de separar las fases y lograr preparar artificialmente muestras con diferentes valores de hematocrito. Estas muestras fueron caracterizadas reologicamente mediante una prueba cortante simple en estado estacionario. Posteriormente se estima el valor de la viscosidad a baja rapidez de deformación η_0 y se encuentra una relación entre este parámetro material y el hematocrito de la muestra en cuestión.

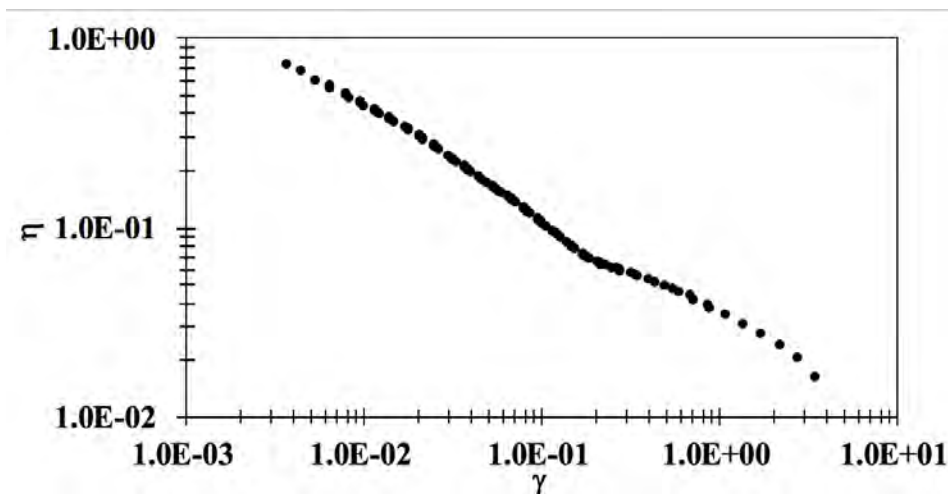


Figura 6.7: Curva maestra en función del hematocrito con colesterol constante (215 mg/dL).

El hematocrito es el parámetro físico (biométrico) de la sangre que indica la proporción de células (paquete celular) con respecto al plasma (líquido). Las variaciones fisiológicas de este pueden ir desde 40-55%. Se han reportado relaciones constitutivas entre la viscosidad sanguínea, el hematocrito y la temperatura. Dicha relación se muestra en ecuación de Charm-Kurland Ec.6.2.9, que tiene limitaciones para cuando $\% Hct > 0.6$ [46]. La relación

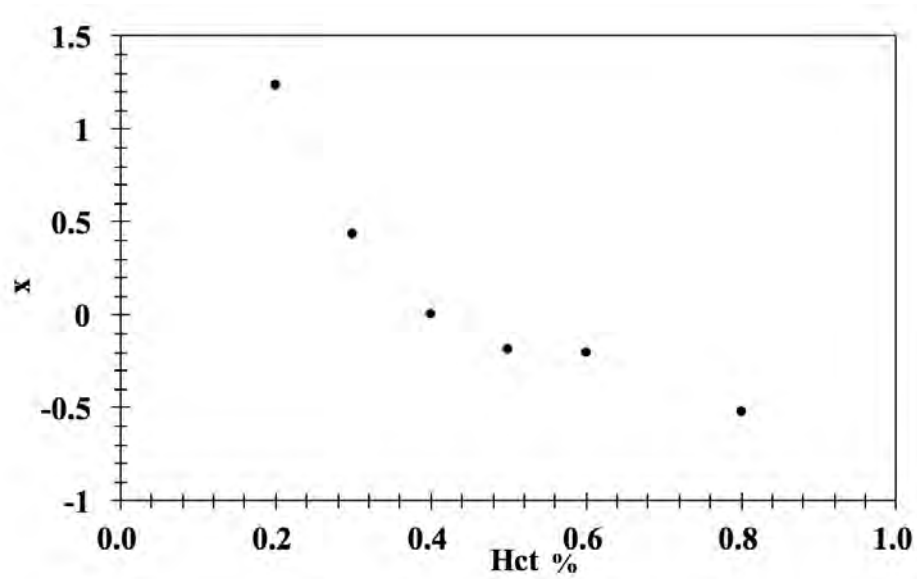


Figura 6.8: Factor de desplazamiento para la realización de la curva maestra

es construida a través de un ajuste numérico.

$$\mu = \mu_p \left(\frac{1}{1 - \alpha H} \right) \quad (6.2.9)$$

donde α

$$\alpha = 0.007 e^{2.49H + \frac{1107}{T}} e^{-1.69H} \quad (6.2.10)$$

En la figura 6.9, se muestran datos experimentales de viscosidad a baja rapidez de deformación, un ajuste mediante un modelo exponencial $\eta_0 = a e^{Hctb}$. Dicho ajuste no considera el efecto de la temperatura puesto que todas las mediciones fueron realizadas en condiciones isotérmicas de 37°C (temperatura corporal promedio).

La relación existente entre la viscosidad y el valor de hematocrito queda satisfecha mediante la ecuación de Charm-Kurland Ec.6.2.9 y 6.2.10.

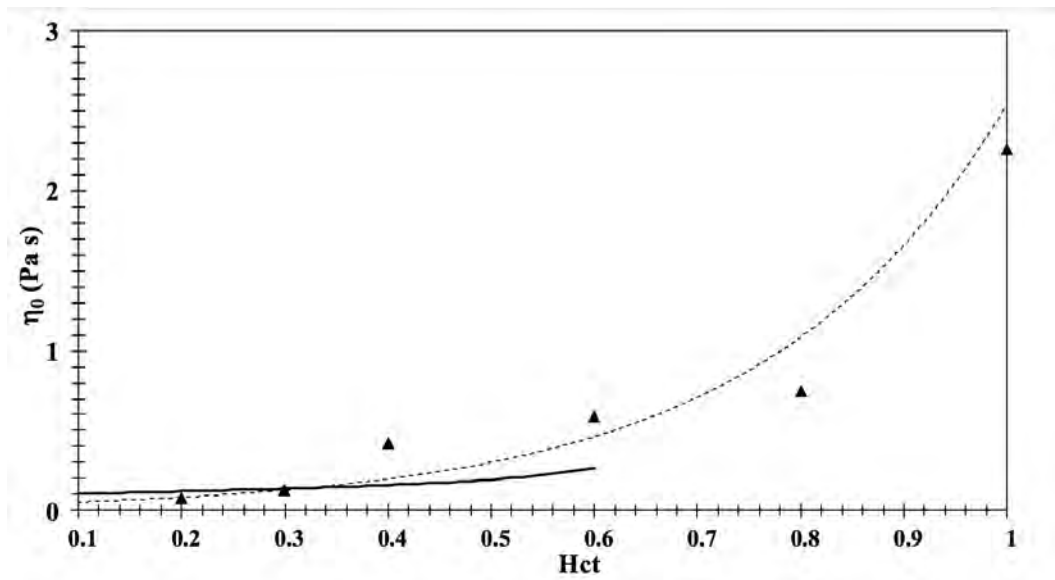


Figura 6.9: Datos experimentales (triángulos llenos), predicción con un modelo exponencial (línea punteada), simulación con la ecuación Charm-Kurland (línea continua)

6.2.6. Esfuerzo de cedencia

El esfuerzo de cedencia se observa asociado a fluidos complejos tales como mezclas de arcilla con agua [9], chocolate [32] y sangre humana [52]. Particularmente con la sangre humana, existe una relación directa del esfuerzo de cedencia y la concentración elevada de colesterol total y fibrinógeno. Se estudió el efecto que tiene el colesterol total en la sangre humana ya que los pacientes que donaron la muestra para este estudio, no padecían de ninguna afectación cardiaca que indicara que sus niveles de fibrinógeno fueran elevados o anormales.

Para demostrar que el colesterol total tiene un efecto directo sobre el esfuerzo de cedencia, las pruebas de corte simple en estado estacionario a baja rapidez cortante fueron simuladas mediante dos modelos, Casson y el BMP. Ambos modelos incluyen de manera explícita el esfuerzo de cedencia.

$$\sigma^{\frac{1}{2}} = \sigma_y^{\frac{1}{2}} + (k_0 \dot{\gamma})^{\frac{1}{2}} \quad (6.2.11)$$

donde σ_y es el esfuerzo de cedencia del material y k_0 es la viscosidad llamada de Casson.

Por otro lado, la simulación de resultados se realizó además con el modelo BMP con la finalidad de comparar las predicciones y validar su utilización para tales fines. El esfuerzo de cedencia puede ser calculado con el modelo BMP considerando que la fluencia a baja rapidez de corte es cero ($\varphi_0 = 0$), la predicción quedará descrita de la siguiente forma:

$$\sigma_y = (k\lambda\varphi_\infty)^{-\frac{1}{2}} = (\beta\varphi_\infty)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.2.12)$$

Tabla 6.9: Unidades de los parámetros del modelo de Casson σ (Pa), K_0 (Pa s). Unidades del modelo BMP β (s/Pa), φ_∞ (1/Pa s), y σ_y (Pa).

	Modelo					
	Casson		BMP			
Muestra	σ_0	k_0	β	η_∞	φ_∞	σ_0
H1	0.0396	0.01158	0.845	0.001	1000	0.034
H2	0.0134	0.00217	1.75	0.001	1111.11	0.0223
H3	0.0134	0.00144	0.9	0.0016	1666.7	0.026
H4	0.00376	0.00143	1.65	0.0015	666.7	0.003

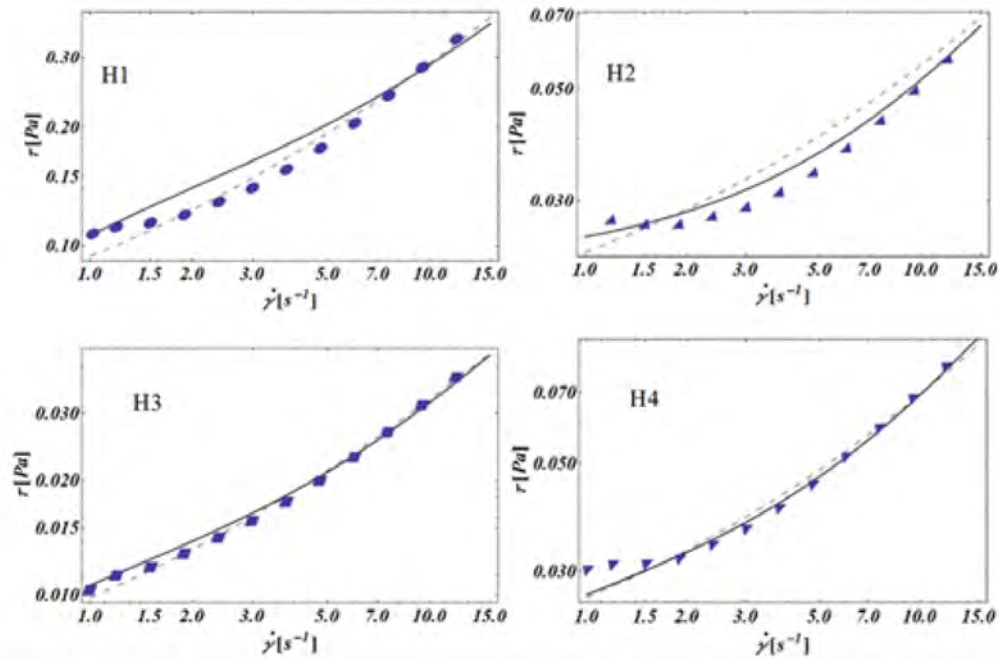


Figura 6.10: Simulación con el modelo BMP (Linea continua) y Casson (Linea discontinua) para el esfuerzo de cedencia de ciertas muestras con altos niveles de colesterol total y datos experimentales puntos llenos

6.3. Aplicaciones para sangre humana con el orden cero del modelo BMP

En la figura 6.11 se muestran datos experimentales y simulaciones para muestras de sangre con alto (300 mg/dL), moderado (174 mg/dL) y bajo colesterol (114 mg/dL). La adimensionalización de los datos experimentales fue realizada con un valor aparente de viscosidad a bajo corte η_0 . Se confirma que los elevados niveles de colesterol total provocan que la viscosidad cortante aumente [34].

Para realizar las simulaciones teóricas y que éstas permanecieran con un número de Reynolds que permita que las fuerzas inerciales pudieran ser despreciadas y cumplir la premisa planteada, se debió escoger valores para el diámetro promedio como el de la vena porta (5 mm de radio) o la vena subclavia con (3.5 a 5 mm de radio.) El escoger dichos valores, asegura que las posibles variaciones del sistema se encuentran dentro de parámetros fisiológicos reales. Con respecto a la velocidad promedio y densidad de la sangre fueron elegidas como valores fisiológicos (0.1 m/s y 1007 Kg/m^3 , respectivamente) [3]. Como

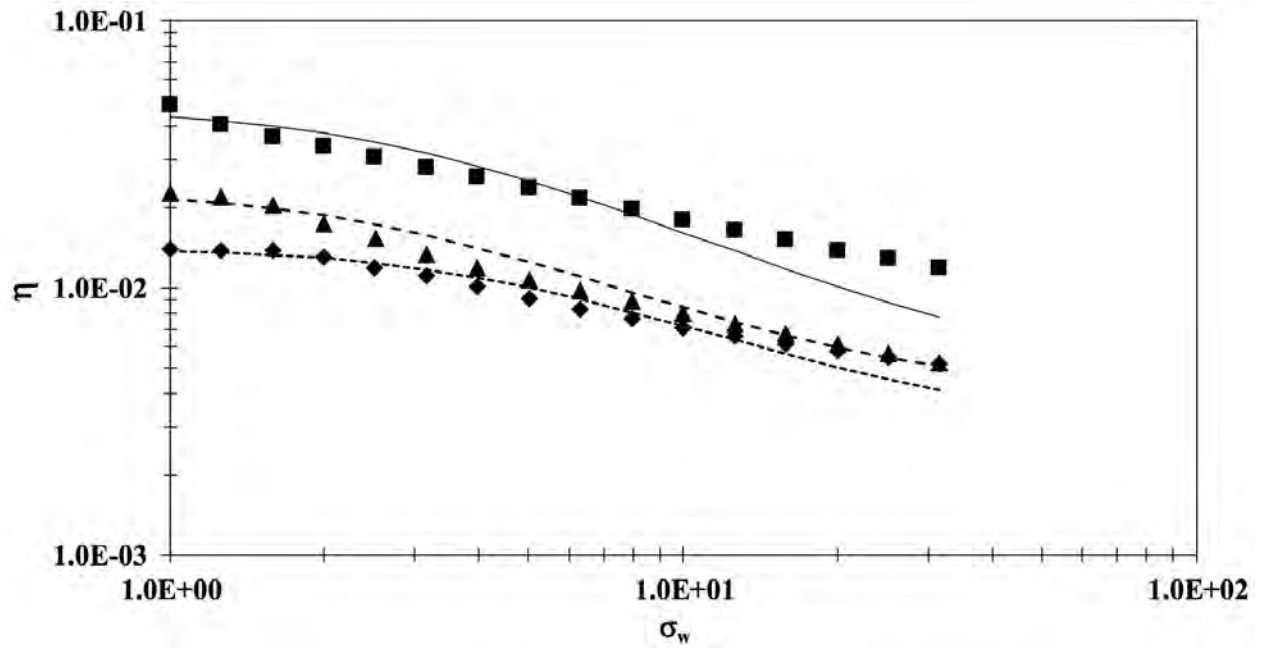


Figura 6.11: Datos experimentales representados por cuadrados (colesterol total elevado, 300 mg/dL), triángulos (colesterol total moderado, 174 mg/dL) y rombos (colesterol total bajo, 114mg/dL), predicciones teóricas con líneas continua, segmentada y punteada respectivamente.

condición de la ecuación de continuidad, el fluido se consideró con densidad constante (fluido incompresible $\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$) e isotérmico.

En la tabla 6.10, se encuentra un resumen de los valores numéricos que se obtienen al modelar el comportamiento reológico en orden cero de las 10 muestras seleccionadas.

Tabla 6.10: Datos encontrados a través de la simulación en orden cero para 10 muestras de sangre con diferentes niveles de colesterol y hematocrito constante (42%). Unidades de cada parámetro β (s/Pa) y B es adimensional

CT	Parámetro	
	β	B
114	0.023	1.55
120	0.028	1.41
146	0.038	2.11
174	0.04	2.45
192	0.05	3.05
225	0.052	3.02
274	0.049	2.77
300	0.046	4.13
370	0.043	4.54
391	0.028	0.93

El parámetro cinético-estructural fue propuesto como una función del tiempo de relajación, una constante cinética, la velocidad promedio del fluido, la coordenada radial y la viscosidad a baja rapidez de deformación ($A_0(k, \lambda, \langle v_z \rangle, a, \eta_0)$). Salvo el parámetro de velocidad promedio, la magnitud de la coordenada radial, las variables pueden ser estimadas a través de una prueba reométrica y la simulación con el modelo BMP. Considerando que $\langle v_z \rangle$, a y η_0 son constantes para cada muestra, la simulación solo dependerá de k y λ . En la 6.12 se muestra la relación encontrada y descrita previamente. Para estas muestras las variaciones del valor de hematocrito son mínimas (2%), asegurando que los resultados solo sean función de la concentración de colesterol total.

Dada la ecuación de Fredrickson, la cual es necesaria en el modelo BMP, la contribución k y λ están presentes compensando el doble producto punto entre el tensor de esfuerzos y el tensor rapidez de deformación ($\underline{\sigma} : \underline{D}$); dicho término representa la disipación viscosa del sistema. Por ende, el parámetro $k\lambda$ que de ahora en adelante se manejará como β tendrá unidades del inverso de dicha relación. En la figura 6.12, el valor máximo de una función que logre describir tal comportamiento ($aTC^2 + bTC + c$), se encuentra aparentemente alrededor de 250 mg/dL de colesterol total.

Dicho valor máximo, corresponde a un mínimo en la disipación y como se aclaró previamente, se presenta en una zona donde la concentración de colesterol total está dentro de los parámetros que aún se consideran normales para la población mexicana [42].

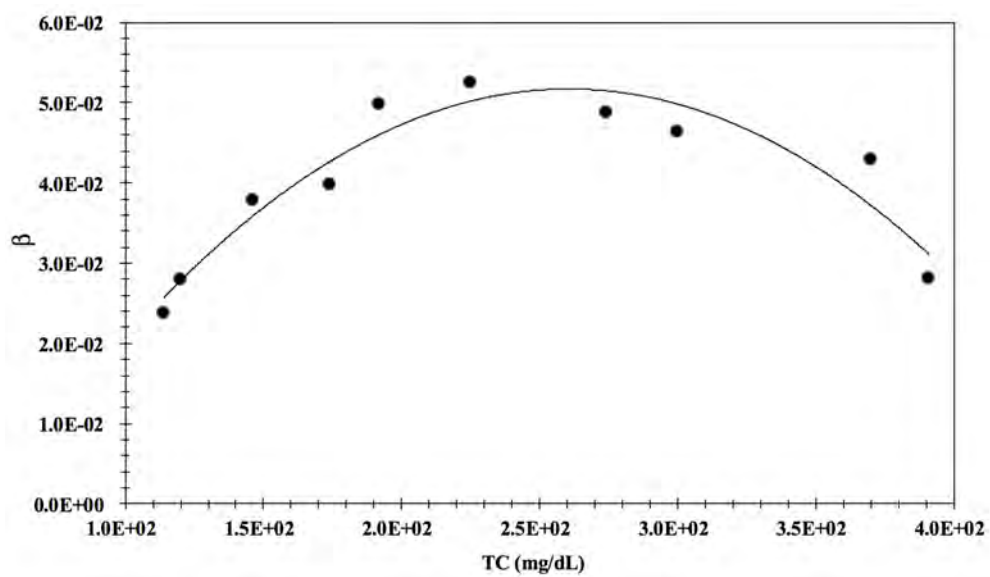


Figura 6.12: Parámetros del modelo BMP en función de la concentración de colesterol total. La función que se ajusta al comportamiento de los datos $aTC^2 + bTC + c$

6.4. Funciones estocásticas

El fenómeno mecánico cardíaco representa la evolución de la presión sanguínea con respecto al tiempo. La determinación de este perfil se realiza mediante la inserción de una sonda intracardiaca. Los resultados experimentales de esta técnica se presentan en la figura 6.13, en la misma figura antes citada, se presentan simulaciones realizadas mediante un algoritmo de minimización de error para la función diente de sierra (Ec.6.4.1) y función general estocástica (Ec.6.4.2) [3]:

$$n(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{Sen(2\pi kft)}{k} \quad (6.4.1)$$

$$n(t) = A_n + \sum_{i=1}^n B_n Cos(\pi C_n t + D_n) \quad (6.4.2)$$

Además en la figura 6.13 se muestran los datos que pueden obtenerse a través de la utilización de un baumanómetro digital, que es capaz de registrar la presión sistólica, diastólica y el ritmo cardíaco asociado. Considerando las opciones presentadas, la función tipo diente de sierra con 8 contribuciones, no representa satisfactoriamente la evolución mecánica, a diferencia de la función estocástica general (Ec.6.4.2) propuesta, que sí representa el fenómeno con mayor eficacia. Es importante hacer hincapié en que los datos experimentales [24] y los determinados mediante un baumanómetro digital corresponde a 75 pulsaciones por minuto.

6.4.1. Predicciones para el orden combinado uno y cero

Debido a que el orden uno del modelo BMP requiere la presencia de la función de perturbación, es imperante definir el tipo de función se va a considerar, ya que en secciones previas no se habían realizado comparaciones con datos experimentales y se consideraba una función trigonométrica simple ($Sen(t)$). Con la finalidad de acotar el fenómeno analizado, se propondrá una función con características para emular perturbaciones particulares. En la tabla 6.11, se muestra un resumen de las principales referencias sobre flujo pulsátil y las funciones aplicadas. La mayoría de las funciones introducidas en los esquemas de

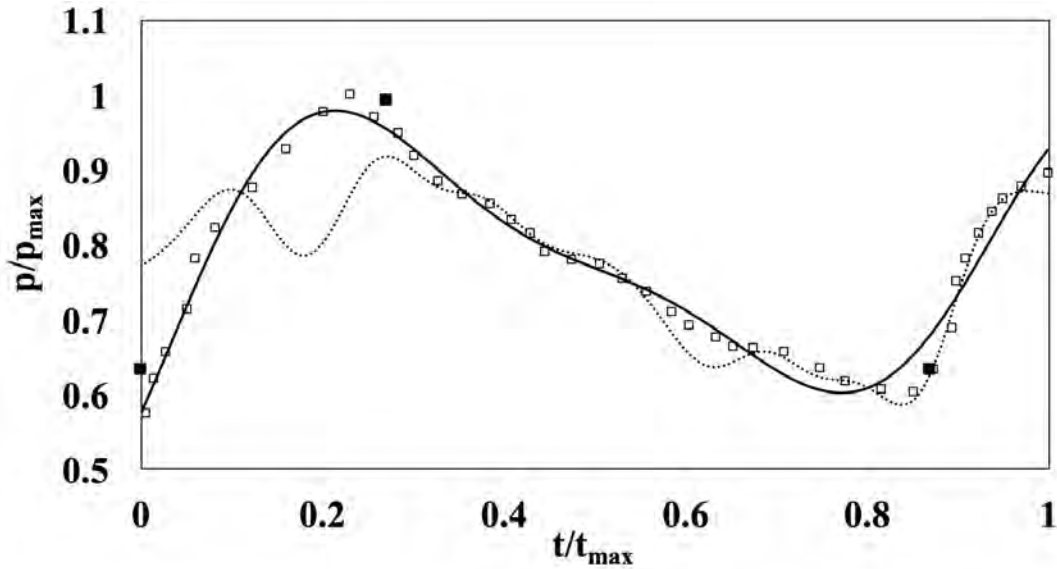


Figura 6.13: Función tipo diente de sierra [33] para 6 términos (línea discontinua), general estocástica (línea continua) para 6 términos, comparadas con datos experimentales [24] obtenidos a través de sonda intracardiaca (cuadros vacíos) y datos de baumanómetro digital (cuadros llenos).

perturbación no representan adecuadamente evolución mecánica de la presión sanguínea con respecto al tiempo, siendo este fenómeno el que se quiere reproducir y considerar como perturbación.

Tabla 6.11: La función gradiente presión modificado $\frac{\partial p}{\partial z} = p_0 p(t)$ donde $p(t)$ representa la función de perturbación.

Función de perturbación	Modelo constitutivo	Autor
$p(t) = 1 + A \text{Sen}(t)$	Casson	D.S. Sankar et al 2006
$p(t) = 1 + M \text{Sen}(t)$	BMP	Herrera et al. 2009
$p(t) = 1 + A \text{Cos}(t)$	Sisko	N. Ali et al, 2014
$p(t) = 1 + A \text{Sen}(t)$	Casson	K. Rohlf et al, 2001
$p(t) = 1 + A \text{Cos}(t)$	Moyers Gonzalez	Moyers-Gonzalez et al, 2009

El perfil de la presión sanguínea, puede ser representada con una suma de funciones trigonométricas. Se asumirá que tal descripción es adecuadamente representada con la función Coseno y se expresará esa perturbación con la siguiente ecuación:

$$n(t) = A + \sum_{i=1}^n B_n \text{Cos}(\pi C_n t + D_n)$$

Ajustando los parámetros A, B_n, C_n, D_n de la ecuación Ec.6.4.2 a los datos experimentales mediante un algoritmo de minimización de errores escrito en lenguaje de *Mathematica*,

para los 5 casos (un paciente en diferentes presiones y ritmos cardiacos), permite expresar 5 valores diferentes de $\langle n(t) \rangle$ que al ser introducidos en el esquema de perturbación a orden uno, permite calcular un valor particular de viscosidad sanguínea.

Es vital recalcar que las funciones mostradas en la figura 6.14 muestran el comportamiento de las funciones estocásticas ajustadas a los datos experimentales medidos con un baumanómetro digital, que si bien caracteriza 3 puntos por cada periodo (la medición completa de la evolución de la presión se realiza con una sonda intracardiaca y esta permite la caracterización de los puntos experimentales), no hay razón alguna por la cual la forma de la función sea diferente a lo presentado. Las simulaciones presentadas representan las funciones generales para cada condición y estas pueden ser ajustadas a la frecuencia y magnitud que se desee con el algoritmo de minimización de errores citado previamente. En las tablas 6.12, 6.13, 6.14, 6.15 y 6.16 se muestran los valores numéricos para los ajustes en los 5 casos estudiados (una persona con 5 modificaciones de ritmo cardiaco y presión). Este ajuste se realizará para cada una de las predicciones, adicional al ello, se muestra también el promedio de la función ajustada.

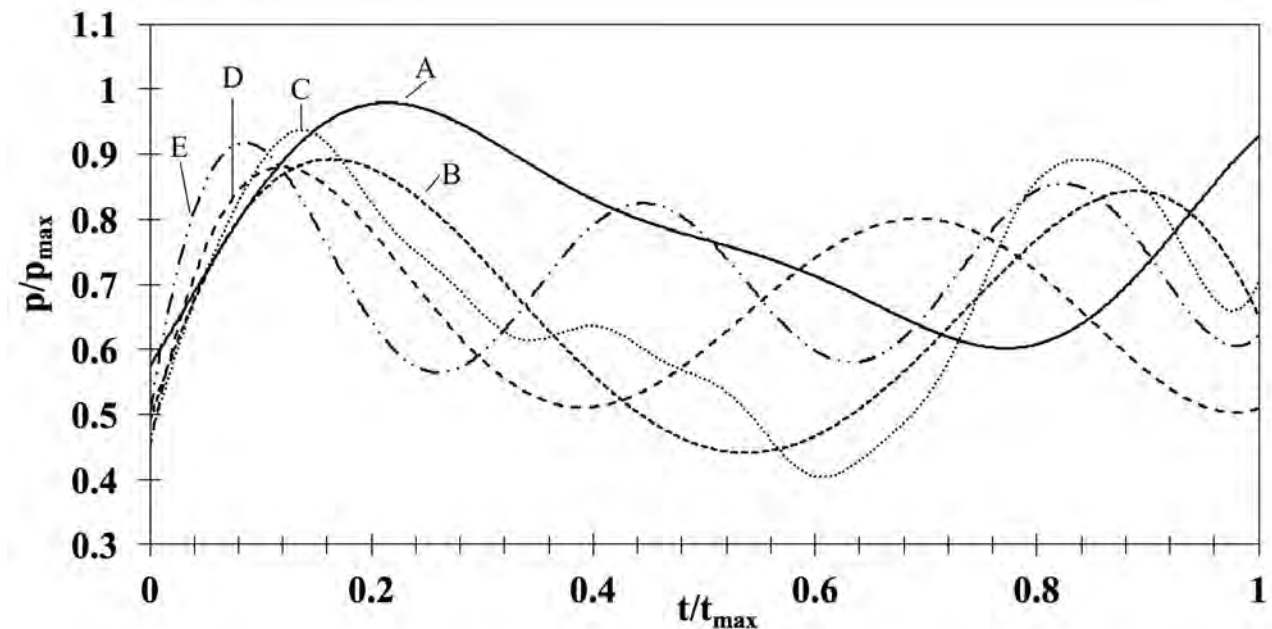


Figura 6.14: Simulación para 75 pulsaciones/min (A), para 90 pulsaciones /min (B), para 95 pulsaciones /min (C), para 120 pulsaciones/min (D), para 180 pulsaciones /min (E). Se adimensionalizó con una presión máxima.

Tabla 6.12: Valores numéricos para el ajuste de la función propuesta para 75 latidos por minuto. $\langle n(t) \rangle = 0.64$.

A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
-0.24	0.089	0.084	0.084	-1.03	0.15
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
	-9.05	-9.04	-9.04	-0.73	5.16
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
	2.78	2.78	2.78	3.44	11.89

Tabla 6.13: Valores numéricos para el ajuste de la función propuesta para 90 latidos por minuto. $\langle n(t) \rangle = 0.67$

A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
-2.7	0.59	2.34	-6,46	1.82	1.6
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
	4.62	1	1.92	0.25	0.11
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
	11.39	-4.84	1.34	4	8.34

Tabla 6.14: Valores numéricos para el ajuste de la función propuesta para 95 latidos por minuto. $\langle n(t) \rangle = 0.71$

A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
-2.8	0.9	2.5	-6,46	1.2	1.6
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
	4.72	1	1.82	0.2	0.1
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
	11.79	-4.84	1.38	4	8.74

Tabla 6.15: Valores numéricos para el ajuste de la función propuesta para 120 latidos por minuto. $\langle n(t) \rangle = 0.76$

A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
-2.8	-6.9	2.5	4	2	1.3
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
	1.3	4.8	5	6.2	6.6
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
	2.6	0.04	2.7	2.3	1.3

Tabla 6.16: Valores numéricos para el ajuste de la función propuesta para 180 latidos por minuto. $\langle n(t) \rangle = 0.77$

A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
-0.3	2.1	-4.4	-1.3	1.7	0.3
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
	-5.04	1.2	6.2	7.7	14.2
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
	0.7	1.2	0.7	0.47	0.2

Una vez definida el tipo de función de perturbación que se va a utilizar, (en la ecuación 4.4.44 deducida en secciones previas) se hizo evidente que el promedio de la función estocástica $n(t)$ se debe considerar. Para calcular el flujo volumétrico y consecuentemente la viscosidad, la integral fue resuelta de manera numérica mediante el método de Simpson. Para cada muestra realizada existe un valor de A y B particulares para cada una. Cabe aclarar que en valor promedio de $\langle n(t) \rangle$ es un valor constante y su derivada es cero $\langle \dot{n}(t) \rangle$. Por ende, la contribución elástica en el sistema se desprecia.

$$\langle Q_1 \rangle = \int_0^1 \left\langle \frac{\dot{\gamma}_0}{1 + A \dot{\gamma}_0^2} \left(2AB \dot{\gamma}_0 \sigma_0 - \left(A \dot{\gamma}_0^2 - 1 \right) \right) \left(n(t^*) + De\eta_0 \dot{n}(t^*) \right) \right\rangle r^{*2} dr^*$$

Con la finalidad de acotar las predicciones, es imperante conocer el valor particular para el esfuerzo en la pared σ_w que es generado por el gradiente de presión y en el cual será evaluada tal integral. Para conocer este valor se requiere la siguiente relación:

$$\sigma_w = \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \quad (6.4.3)$$

Donde a (0.005 m) representa el radio del sistema en cuestión, L (0.002 m) la longitud en la cual se va a considerar la caída de presión y ΔP la presión en cuestión medida a partir de las 5 actividades descritas en la sección experimental. Al obtener el valor particular para el esfuerzo en la pared se ingresará este en la integral de flujo volumétrico a orden cero y uno. Considerando que el esquema perturbativo propuesto, se considerará la siguiente relación para calcular la viscosidad total:

$$\eta_{tot} = \eta_{ordencero,i} + \epsilon \eta_{ordenuno,i} \quad (6.4.4)$$

Donde η_{tot} corresponde a la función viscosidad asociado a las 5 situaciones, ϵ , será relacionado con el número de Reynolds. Este será estimado con cada uno de los parámetros materiales calculados y medidos de las muestras sanguíneas en cuestión.

$$Re = \frac{\rho a \langle v_z \rangle}{\eta_0}$$

Donde ρ para la sangre se considera como un valor constante, al igual que la velocidad promedio $\langle v_z \rangle$ y la magnitud de la coordenada radial a . Sin embargo la viscosidad a baja rapidez de deformación η_0 , a partir de los parámetros materiales y la simulación con el modelo BMP se puede conocer.

Además de $\eta_{1,i}$ la función viscosidad a orden uno asociado a las mismas 5 situaciones citadas previamente. En la figura 6.16 se muestran las predicciones realizadas con la ecuación 6.4.4. En la figura 6.16 se muestran datos experimentales de viscosidad sanguínea en función de la rapidez cortante y predicciones realizadas mediante el algoritmo generado para este propósito. La magnitud y la pendiente que generan las predicciones permiten estimar la viscosidad de la sangre en flujo pulsátil y por ende el contenido de colesterol. La ecuación 6.4.5 genera un solo punto denominado viscosidad total (η_{tot}), para los 5 casos analizados, habrá 5 viscosidades que finalmente general una predicción en un pequeño intervalo ($0.01 < \sigma_w < 1$)

$$\eta_{tot} = \eta_{ordencero,i} + Re\eta_{ordenuno,i} \quad (6.4.5)$$

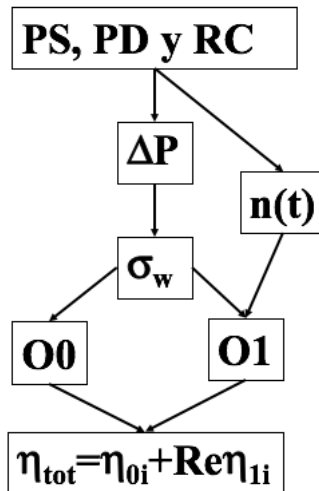


Figura 6.15: Estructura lógica del algoritmo desarrollado. O0 representa el flujo volumétrico a orden cero (ecuación 4.4.34), O1 a orden uno (ecuación 4.4.44), σ_w el esfuerzo en la pared (ecuación 6.4.3) y $n(t)$ es la función de perturbación en cuestión (ecuación 6.4.1)

En la figura 6.15, se denota la estructura lógica del algoritmo desarrollado para estimar la viscosidad sanguínea aplicando flujo pulsátil. PS representa la presión sistólica, PD, la presión diastólica, RC el ritmo cardiaco, σ_w es esfuerzo en la pared, $n(t)$ la función estocástica asociada 6.4.1, O0 orden cero y O1 orden uno; siendo la última parte el orden total que da pie a la predicción. Las muestras consideradas para este análisis tienen concentraciones de colesterol total diferentes, pero con valores de hematocrito muy similares ($Hct \approx 50$)

A partir de 5 mediciones de presión sistólica, diastólica y ritmo cardiaco, se calculan 5 diferencias de presión Δp que permiten a su vez estimar 5 valores diferentes de esfuerzo en la pared. Dichos esfuerzos son evaluados en para obtener el flujo volumétrico y consecuentemente la viscosidad (5 puntos). Las mismas 5 determinaciones tienen como finalidad ajustar este comportamiento a una función que describa satisfactoriamente su comportamiento (Ecuación 6.4.2). Este ajuste tiene como único objetivo emular la perturbación aplicada al sistema. En la siguiente ecuación 6.4.6, se demuestra que el flujo volumétrico a orden n , se puede expresar como un combinación del esfuerzo en la pared y una función fluencia. A partir de esta fluencia es posible estimar un valor de viscosidad.

$$Q_n = \frac{\sigma_{rz}^*}{4} \varphi_n^* [A, B, \sigma_{wn}^*] \quad (6.4.6)$$

En la figura 6.16 se muestra la superposición de los resultados experimentales (reométricos) con las predicciones realizadas (a partir del algoritmo de flujo pulsátil realizado), marcadores llenos y vacíos, respectivamente. Es importante recalcar que la predicción es cualitativamente representativa, la magnitud de la serie de puntos obtenidos de la predicción son cercanos a los experimentales en los tres casos de análisis. Por otro lado, la pendiente entre ambos casos se muestran en la siguiente tabla 6.17.

Tabla 6.17: Pendientes calculadas para una sección representativa de los datos experimentales y para las predicciones realizadas.

Muestra	Datos experimentales	Predicciones
Colesterol alto	-0.395	-0.458
Colesterol moderado	-0.470	-0.526
Colesterol bajo	-0.342	-0.56

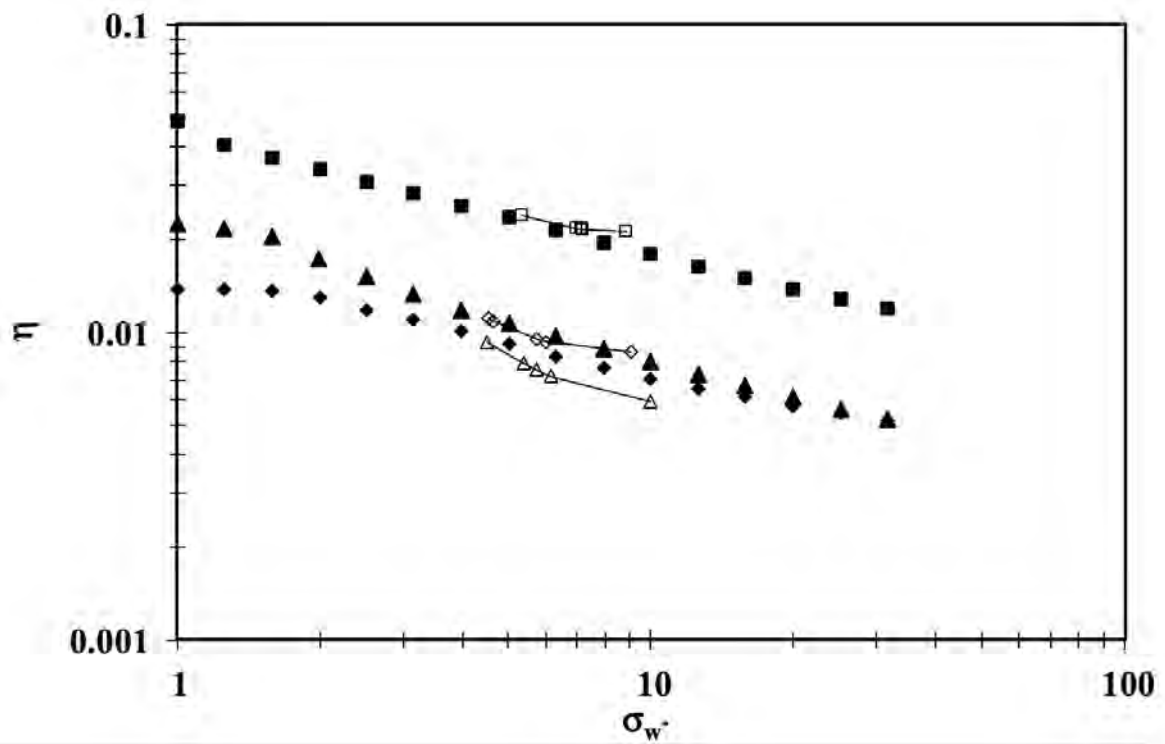


Figura 6.16: Predicciones para tres diferentes niveles de colesterol. Colesterol elevado 300 mg/dL (cuadros llenos y vacíos), colesterol moderado 177 mg/dL (rombos llenos y vacíos), colesterol bajo 114 mg/dL (triángulos llenos y vacíos).

En la tabla 6.18 se plasman los valores de esfuerzo en la pared calculados para cada gradiente de presión asociado (5 valores) por cada muestra analizada.

Tabla 6.18: Orden combinado para 5 esfuerzos en la pared calculados mediante el algoritmo propuesto.

Colesterol elevado (300 mg/dL)								
Orden 1			Re	Orden cero			Orden combinado	
σ_w	Q_1	η_1	0.35	σ_w	Q_0	η_0	σ_w	η_{tot}
5.34	11.90	0.0150		5.34	6.84	0.0260	5.34	0.0241
7.00	15.84	0.0147		7.00	11.72	0.0199	7.00	0.0217
7.15	16.14	0.0148		7.15	12.16	0.0196	7.15	0.0216
7.20	16.24	0.0148		7.20	12.30	0.0195	7.20	0.0216
8.90	19.46	0.0152		8.90	17.21	0.0172	8.90	0.0213
Colesterol Moderado (174 mg/dL)								
Orden 1			Re	Orden cero			Orden combinado	
σ_w	Q_1	η_1	0.51	σ_w	Q_0	η_0	σ_w	η_{tot}
4.55	5.02	0.00604		4.55	3.06	0.0099	4.55	0.0111
4.65	5.20	0.00596		4.65	3.21	0.0097	4.65	0.0109
5.75	6.97	0.00550		5.75	4.89	0.0078	5.75	0.0095
6.00	7.31	0.00547		6.00	5.28	0.0076	6.00	0.0093
9.10	10.87	0.00558		9.10	10.17	0.0060	9.10	0.0086
Colesterol bajo (114 mg/dL)								
Orden 1			Re	Orden cero			Orden combinado	
σ_w	Q_1	η_1	0.54	σ_w	Q_0	η_0	σ_w	η_{tot}
4.50	2.31	0.00542		4.50	1.73	0.0072	4.50	0.009
5.40	3.31	0.00454		5.40	2.39	0.0063	5.40	0.008
5.75	3.70	0.00432		5.75	2.68	0.0060	5.75	0.008
6.15	4.13	0.00413		6.15	3.02	0.0057	6.15	0.007
10.00	7.51	0.00370		10.00	6.68	0.0042	10.00	0.006

6.4.2. Aumento de flujo en función de los parámetros bioquímicos de la sangre

En las figuras 6.17, 6.18, y 6.19, se muestra el flujo volumétrico para las muestras de 300, 174 y 114 mg/dL de colesterol, respectivamente. El crecimiento del flujo volumétrico es debido al decremento en la viscosidad de la sangre. Este crecimiento en el flujo volumétrico se maximiza cuando el fluido tiene las características más adelgazantes, situación que para la sangre humana, se relaciona con el contenido elevado de colesterol total.

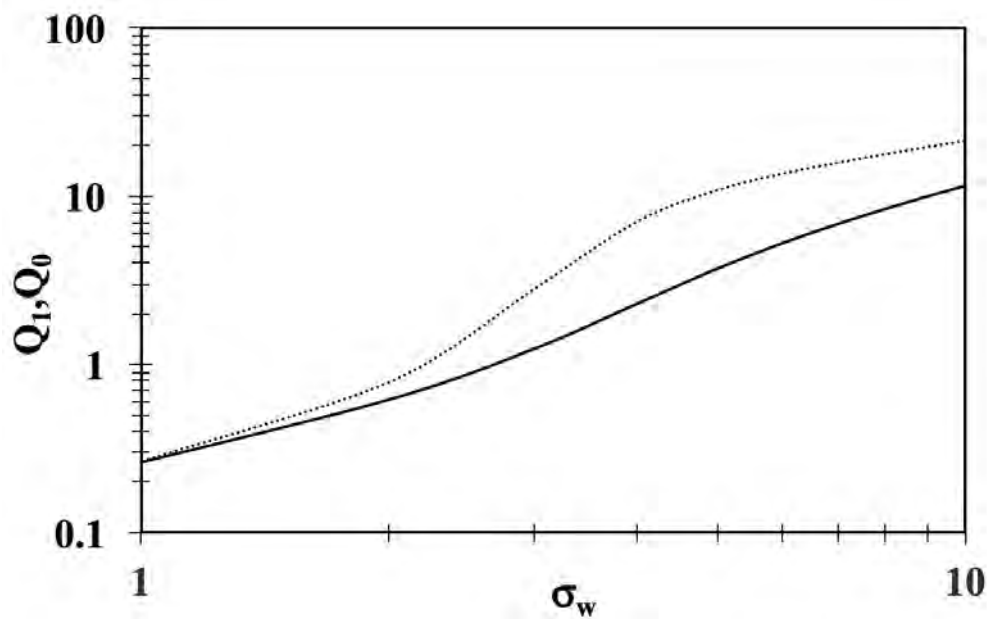


Figura 6.17: Flujo volumétrico a orden cero y uno (línea continua y discontinua respectivamente) para la muestra con contenido de colesterol de 300 mg/dL

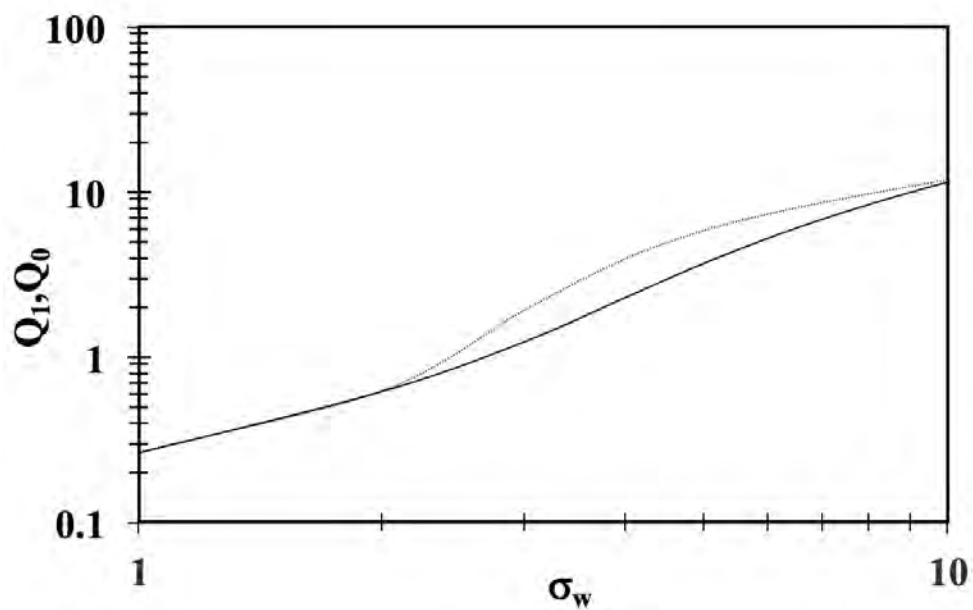


Figura 6.18: Flujo volumétrico a orden cero y uno (línea continua y discontinua respectivamente) para la muestra con contenido de colesterol de 174 mg/dL

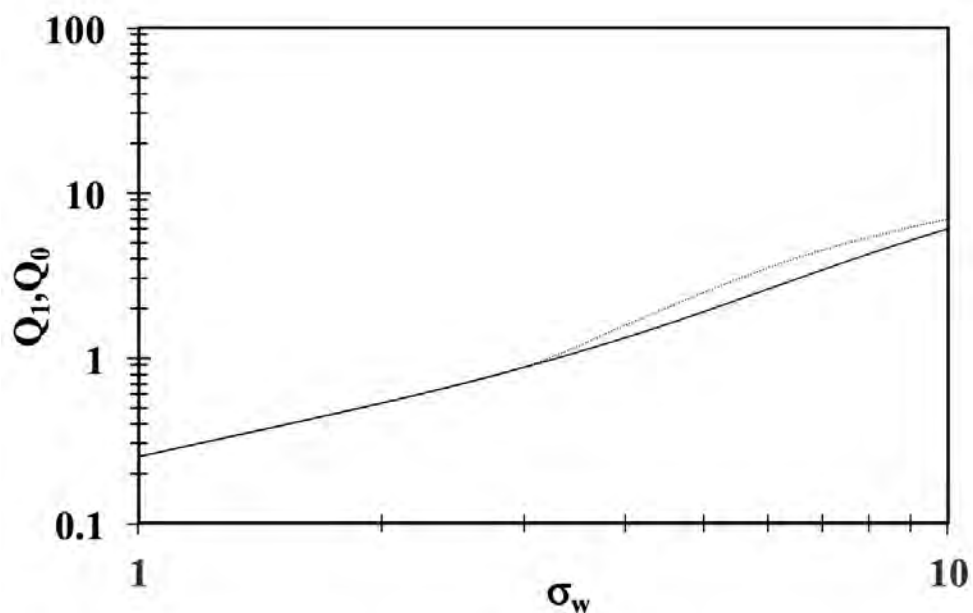


Figura 6.19: Flujo volumétrico a orden cero y uno (línea continua y discontinua respectivamente) para la muestra con contenido de colesterol de 114 mg/dL

Por otro lado, en las figuras 6.20, 6.21 y 6.22 se muestra la diferencia entre la viscosidad a orden cero y uno, donde se hace patente el efecto de la perturbación se observa en la zona de adelgazamiento y esta tiene una estrecha relación con el contenido de colesterol.

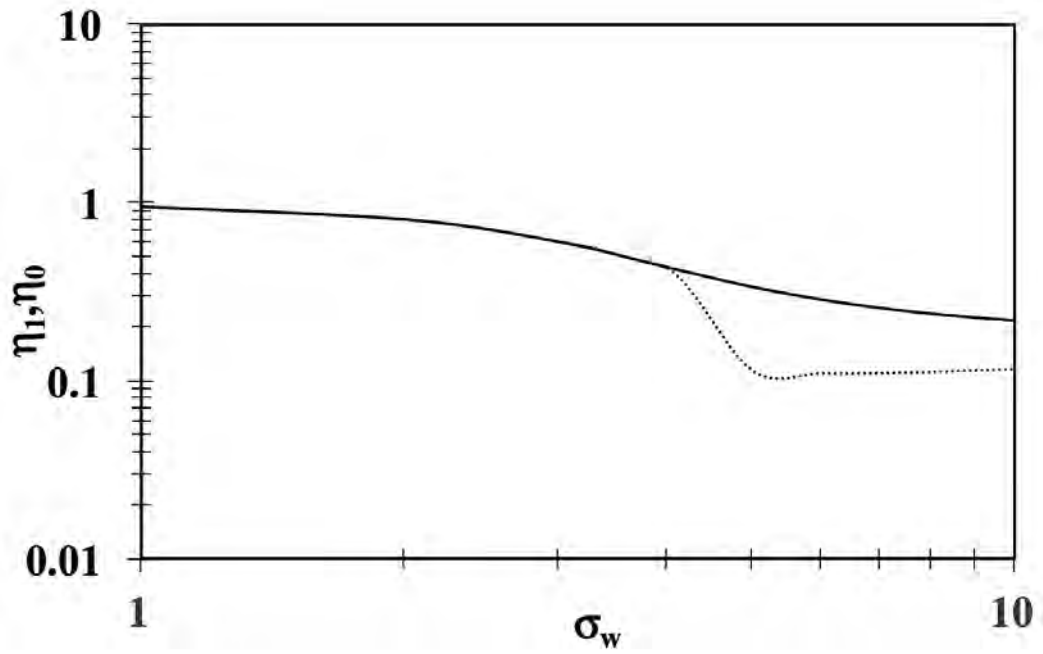


Figura 6.20: Viscosidad a orden cero y uno (línea continua y discontinua respectivamente) para la muestra con contenido de colesterol de 300 mg/dL

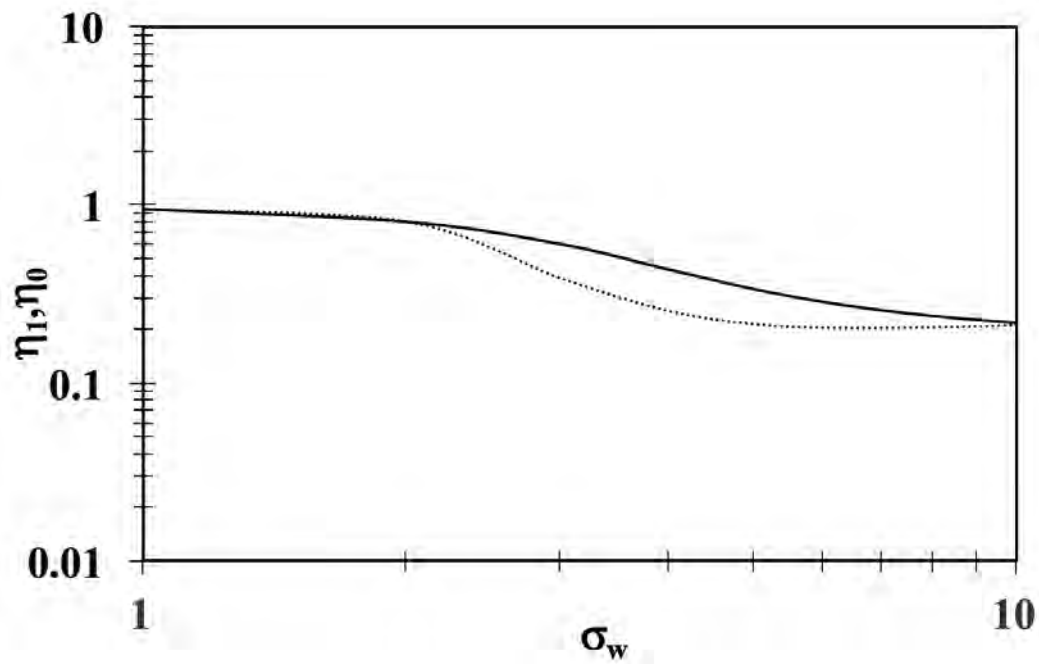


Figura 6.21: Viscosidad a orden cero y uno (línea continua y discontinua respectivamente) para la muestra con contenido de colesterol de 174 mg/dL

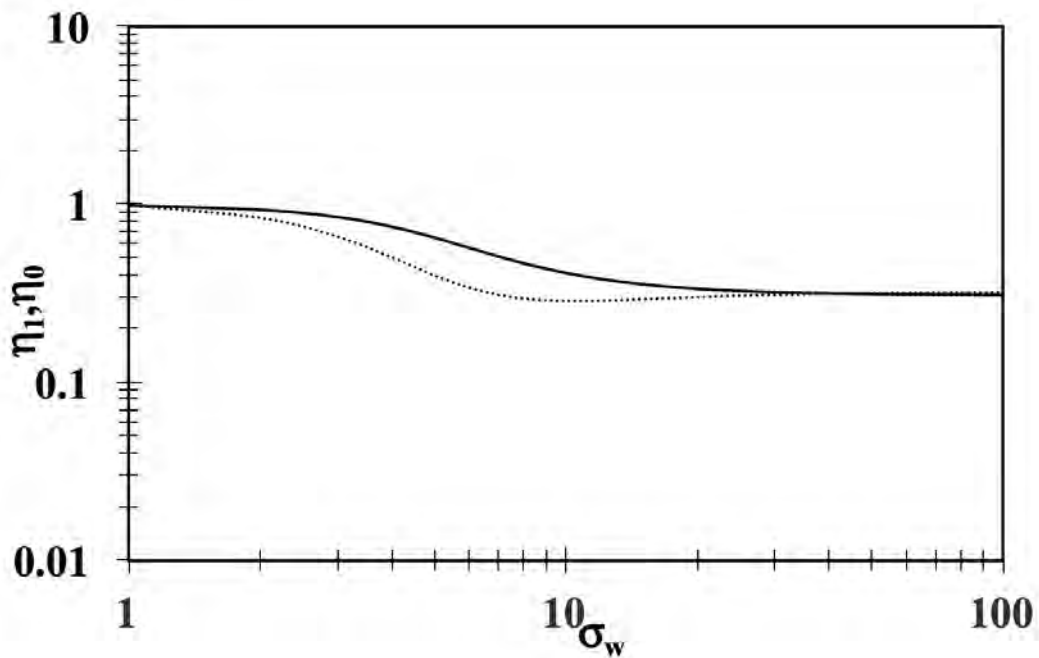


Figura 6.22: Viscosidad a orden cero y uno (línea continua y discontinua respectivamente) para la muestra con contenido de colesterol de 114 mg/dL

En la figuras 6.23, 6.24 y 6.25, se analiza efecto que tiene la concentración de colesterol sobre el aumento de flujo. El aumento de flujo se maximiza cuando el fluido presenta el adelgazamiento es más grande que en este caso corresponde a la muestra con colesterol más elevado (300 mg/dl). Siendo mínimo para la muestra con la concentración de colesterol es más bajo.

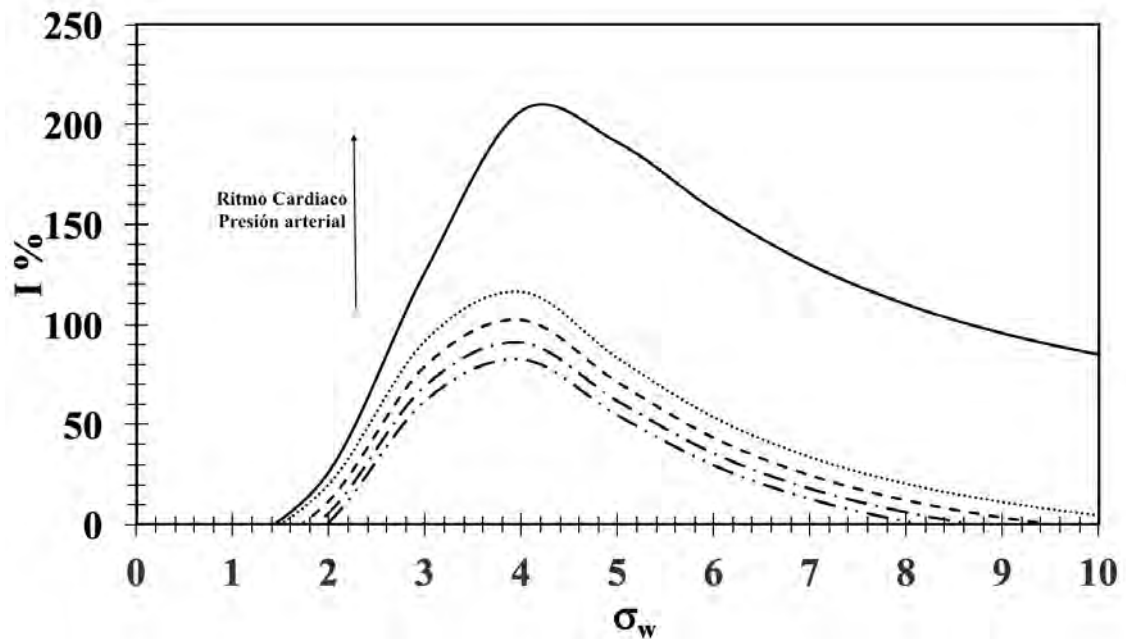


Figura 6.23: Aumento de flujo para una muestra de sangre con 300 mg/dL de colesterol total para 5 diferentes perfiles de presión y ritmo cardíaco.

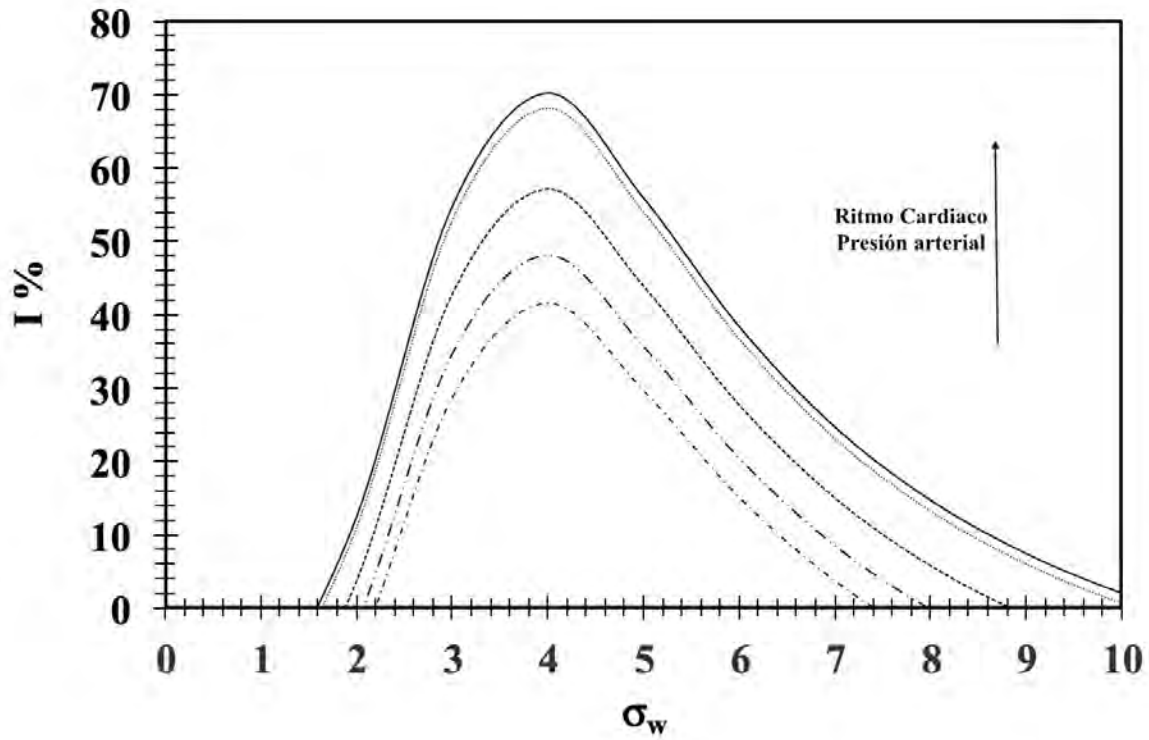


Figura 6.24: Aumento de flujo para una muestra de sangre con 174 mg/dL de colesterol total para 5 diferentes perfiles de presión y ritmo cardiaco.

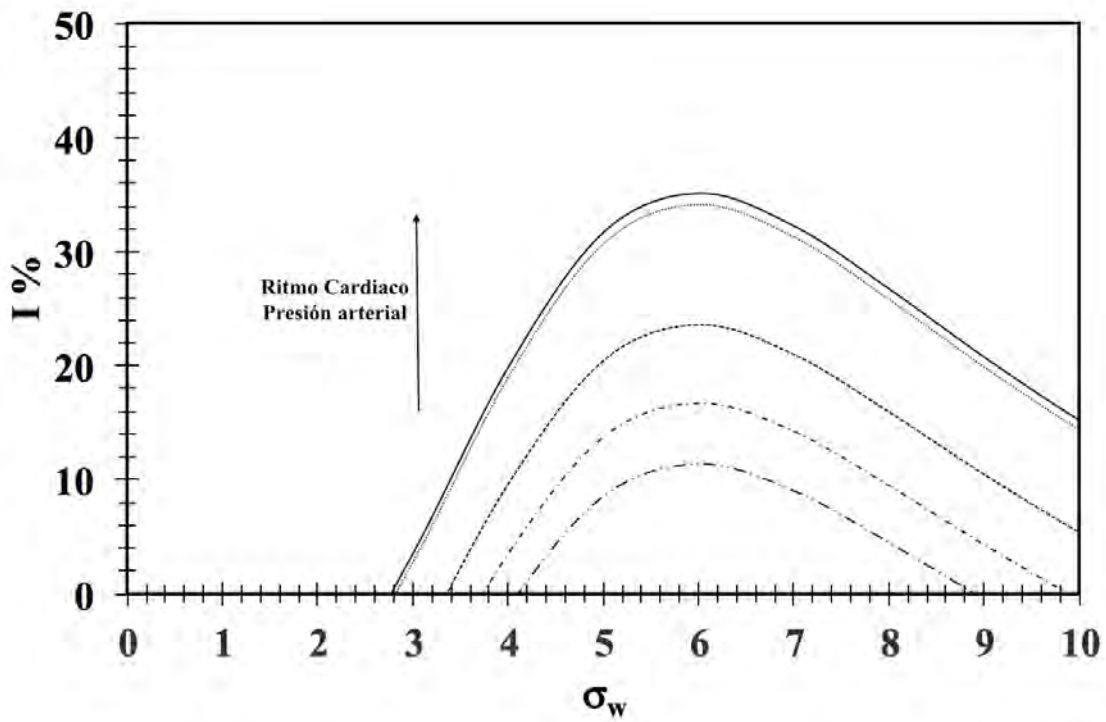


Figura 6.25: Aumento de flujo para una muestra de sangre con 114 mg/dL de colesterol total para 5 diferentes perfiles de presión y ritmo cardiaco.

El la tabla 6.19, se muestran los valores numéricos de las constantes para realizar las simulaciones. Para ello, se consideró para la simulación una velocidad promedio $\langle v_z \rangle = 0.1m/s$, densidad $\rho = 1.05g/cm^3$ y un radio aproximado de $a = 0.005m$.

Tabla 6.19: Datos para la simulación del aumento de flujo y viscosidad a orden cero y uno en función de parámetros del modelo BMP.

CT	k	λ	G_0	η_0	η_∞	A_0	B
mg/dL	Pa^{-1}	s	Pa	Pa s	Pa s	-	-
114	0.9	0.81	1.487	0.0113	0.009	0.0125	1.25
174	0.74	1	1.472	0.023	0.0042	0.017	5.47
300	0.19	0.884	1.832	0.046	0.0047	0.0098	9.78

6.4.3. Parámetro cinético estructural en función del hematocrito

En la figura 6.26 se presentan las simulaciones para diferentes niveles de hematocrito en función del parámetro cinético-estructural β . Tal como se explicó en secciones previas A_0 tiene un valor constante para cada muestra. El comportamiento de β sigue una tendencia cuadrática, la predicción estará acodada para valores de hematocrito entre 20 y 80 %, aunque los valores fisiológicamente existentes sólo pueden variar entre 38-50 % dependiendo de las condiciones del paciente en cuestión. El valor máximo de los datos experimentales modelados, revela que la disipación de energía se vuelve mínima a los valores que se consideran normales. Cabe aclarar que la concentración de colesterol se mantuvo constante (231 mg/dL).

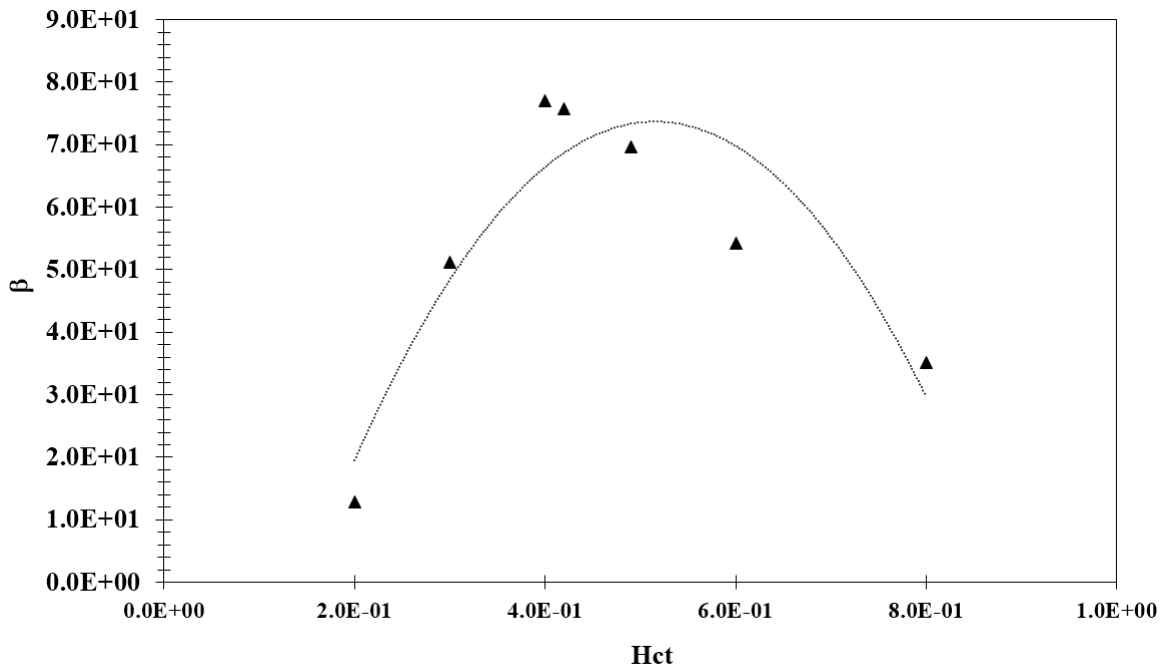


Figura 6.26: Parámetro cinético-estructural en función del hematocrito, manteniendo la concentración de colesterol constante (231 mg/dL).

6.4.4. Aumento de flujo en función de los parámetros biométricos de la sangre

Una segunda aplicación estudiada, es el aumento de flujo y la concentración de células presentes en una muestra sanguínea (Hematocrito). Se presentan dos gráficas en las cuales se hace notorio el efecto que tiene este parámetro sobre el aumento de flujo. En la figura 6.27 se muestra una simulación donde los parámetros η_0 , $\langle v_z \rangle$, a permanecieron constantes mientras que k y λ se utilizaron como parámetros de ajuste.

En la figura siguiente (6.27), se calculó el aumento de flujo para 7 muestras con concentración de colesterol constante (231 mg/dL). Para ello, se mantuvo constante el parámetro B constante y se analiza el efecto de la constante cinético estructural.

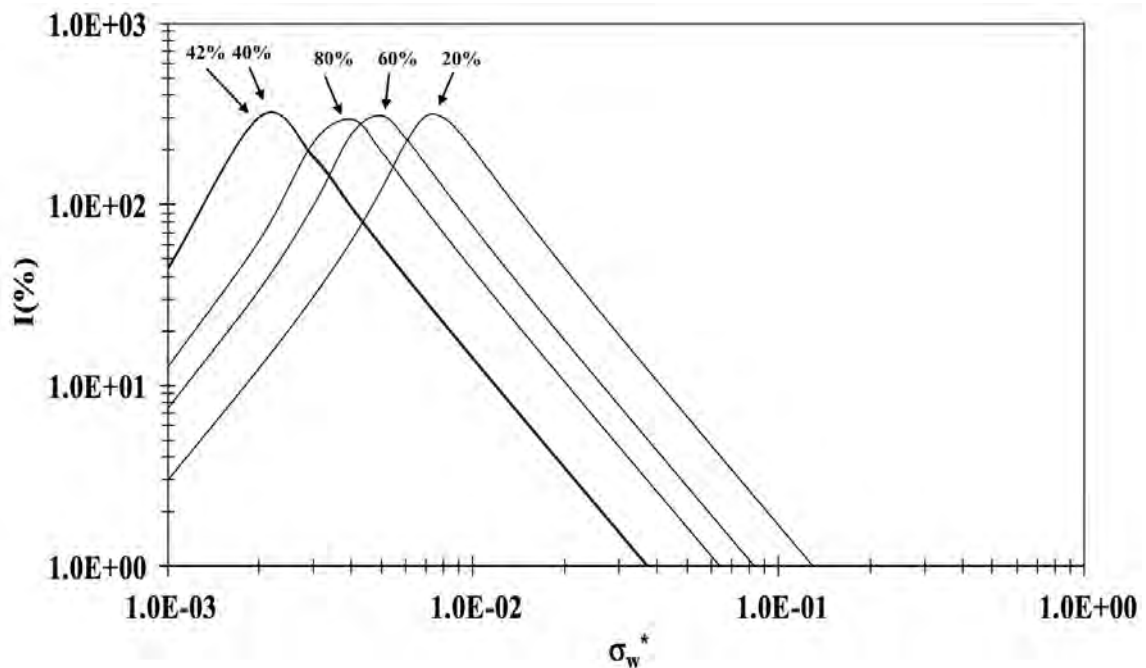


Figura 6.27: Aumento de flujo característico para diferentes valores de hematocrito, manteniendo el parámetro cinético estructural constante. Concentración de colesterol 231 mg/dL

En la figura ??, la simulación se realizó manteniendo el parámetro β constante, estudiando así el efecto del adelgazamiento de la muestra. Este análisis revela que la muestras de mayor concentración de células (hematocrito) se vuelven mas adelgazantes y por ende el efecto del aumento de flujo se ve más pronunciado cuando se presentan tales características. El máximo en el aumento de flujo, se presenta en la menor disipación y al igual que con el

colesterol total, se presenta en el valor fisiológicamente normal, el cual ronda el 40 %. El máximo del aumento de flujo se encuentra cuando el valor del hematocrito es lo que se considera normal.

6.4.5. Simulaciones mediante la versión multimodal

Con la finalidad de analizar el total de las contribuciones del modelo BMP en su versión multimodal, se alimentó al algoritmo desarrollado los datos completos. Para ello se consideró que la suma de η_i se aproxima al η_0 del grupo en cuestión, así como también para los valores de β_i . Tales consideraciones llevan a un valor característico para los grupos cuyo nivel de colesterol total sea alto, medio y bajo. Cabe mencionar que el parámetro B se calculó con el cociente de la suma de η_i y η_∞ . En la siguiente tabla se resumen los parámetros utilizados:

Tabla 6.20: Datos obtenidos del modelado con la versión multimodal del modelo BMP para tres grupos principales. 4 Muestras de colesterol total bajo, 3 de colesterol total medio y 3 de colesterol total elevado.

Grupo (CT(mg/dL))	$\eta_i(Pas)$			$\beta_i(s/Pa)$			$\eta_\infty(Pas)$
138.5	0.0322	0.0037	-	1.5	0.0662	-	0.00162
230.3	0.049	0.00615	0.0027	0.405	0.028	0.005	0.0017
352.7	0.067	0.0079	0.00265	0.69	0.056	0.0047	0.00258

A continuación se muestra una gráfica en la cual se encuentra una simulación con los datos de la versión multimodal del modelo BMP 6.28 asociada los valores plasmados en la tabla 6.20.

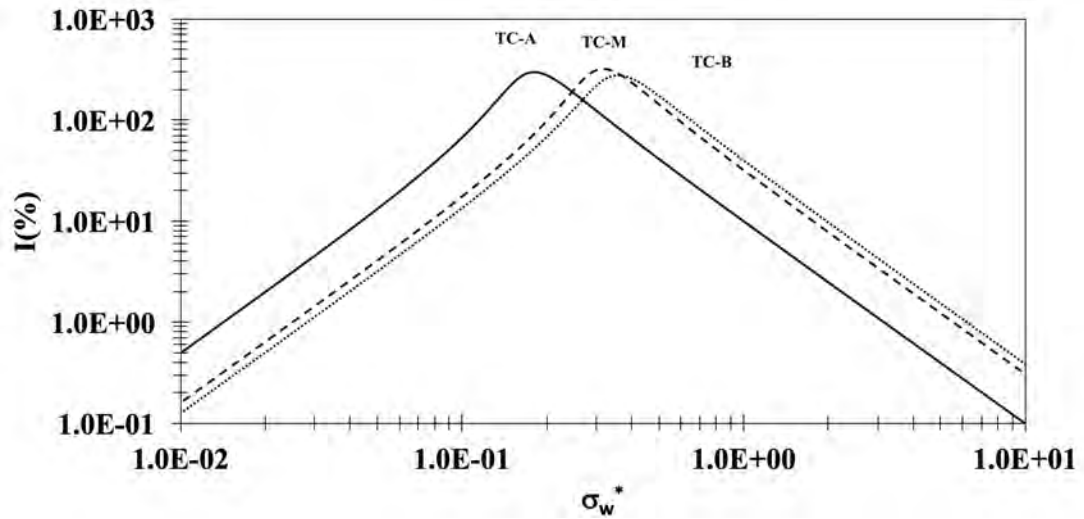


Figura 6.28: Aumento de flujo para 3 grupos principales. Línea punteada colesterol total bajo, línea discontinua colesterol total medio y línea continua colesterol total elevado

Conclusiones

- Se logró describir el efecto que tiene la concentración de colesterol total en la sangre, a través del análisis de los valores de el parámetro β (inverso de la disipación viscosa). Este valor se ve minimizado cercano a las concentraciones consideradas normales para la población mexicana. Es decir, la concentración no patológica de colesterol no tiene solamente una razón bioquímica, sino también mecánica.
- La mínima disipación se presentó no solamente en valores cercanos al nivel normal de colesterol total, también se presentó al analizar las muestras con diferentes hematocrito cuando el colesterol total permanece constante. Se reitera con este resultado que la mínima disipación se presenta en los valores normales de colesterol total y hematocrito.
- Se propone un esquema perturbativo en cual el orden cero representa el estado estacionario y homogéneo del modelo utilizado y el orden uno representa la primera perturbación del sistema por parte de una función estocástica. El fenómeno de flujo pulsátil describió más eficazmente el comportamiento de la sangre dentro del cuerpo humano.
- El flujo pulsátil es una aproximación considerablemente más cercana a la realidad debido a la forma en la que el corazón impulsa la sangre a través del cuerpo humano.
- Se logró estimar la viscosidad sanguínea mediante mediciones de gradiente de presión y el algoritmo desarrollado que considera la contribución del orden cero y uno.

- Se encontró una funcionalidad de entre el parámetro cinético estructural del modelo BMP con la concentración de colesterol total y hematocrito. Además de encontrar una relación exponencial entre el hematocrito y la viscosidad a baja rapidez de deformación η_0 .

Bibliografía

- [1] N. Antonova. Methods in blood rheology—from theoretical and experimental approach to clinical applications. Series on Biomechanics, 27(1-2):44–50, 2012.
- [2] H.-R. Arntz and H. Leonhardt. Die therapeutische beeinflussbarkeit von pathologischem blutfließverhalten bei verschiedenen hyperlipoproteinämie-typen. Rheologica Acta, 18(1):129–133, 1979.
- [3] M. K. Banerjee, R. Ganguly, and A. Datta. Effect of pulsatile flow waveform and womersley number on the flow in stenosed arterial geometry. ISRN Biomathematics, 2012, 2012.
- [4] H. Barnes, P. Townsend, and K. Walters. On pulsatile flow of non-newtonian liquids. Rheologica Acta, 10:517–527, 1971.
- [5] O. K. Baskurt and H. J. Meiselman. Erythrocyte aggregation: basic aspects and clinical importance. Clinical hemorheology and microcirculation, 53(1-2):23–37, 2012.
- [6] F. Bautista, J. De Santos, J. Puig, and O. Manero. Understanding thixotropic and antithixotropic behavior of viscoelastic micellar solutions and liquid crystalline dispersions. i. the model. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 80(2):93–113, 1999.
- [7] W. M. Brondani, H. T. Coradin, A. T. Franco, R. E. Morales, and A. L. Martins. Numerical study of a ptt visco elastic fluid flow through a concentric annular. Proceedings of COBEM (Brasillia), 2007.

- [8] M. Brust, C. Schaefer, R. Doerr, L. Pan, M. Garcia, P. Arratia, and C. Wagner. Rheology of human blood plasma: Viscoelastic versus newtonian behavior. Physical review letters, 110(7):078305, 2013.
- [9] F. Calderas, E. Herrera-Valencia, A. Sanchez-Solis, O. Manero, L. Medina-Torres, A. Renteria, and G. Sanchez-Olivares. On the yield stress of complex materials. Korea-Australia Rheology Journal, 25(4):233–242, 2013.
- [10] L. Campo-Deaño, R. P. Dullens, D. G. Aarts, F. T. Pinho, and M. S. Oliveira. Viscoelasticity of blood and viscoelastic blood analogues for use in polydymethylsiloxane in vitro models of the circulatory system. Biomicrofluidics, 7(3):034102, 2013.
- [11] Y. Caram, F. Bautista, J. E. Puig, and O. Manero. On the rheological modeling of associative polymers. Rheologica acta, 46(1):45–57, 2006.
- [12] S. E. Charm and G. S. Kurland. Static method for determining blood yield stress. Nature, 216(5120):1121–3, Dec 1967.
- [13] C. Chauvière and R. G. Owens. A robust spectral element method for simulations of time-dependent viscoelastic flows, derived from the brownian configuration field method. Journal of scientific computing, 17(1-4):191–199, 2002.
- [14] W. Cox and E. Merz. Correlation of dynamic and steady flow viscosities. Journal of Polymer Science, 28(118):619–622, 1958.
- [15] B. H. Estridge, A. P. Reynolds, and N. J. Walters. Basic medical laboratory techniques. Cengage Learning, 2000.
- [16] J. Ford. Red blood cell morphology. International journal of laboratory hematology, 35(3):351–357, 2013.
- [17] H. Giesekus. Die elastizität von flüssigkeiten. Rheologica Acta, 5(1):29–35, 1966.
- [18] H. Giesekus. A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 11(1):69–109, 1982.

- [19] H. Giesekus. Constitutive equations for polymer fluids based on the concept of configuration-dependent molecular mobility: A generalized mean-configuration model. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 17(3):349–372, 1985.
- [20] A. C. Guyton, J. E. Hall, and A. C. Guyton. Tratado de fisiologia médica. Elsevier Brasil, 2006.
- [21] W. Han, T. Zhao, and X. Wang. Steady shear viscosity and oscillatory complex viscosity of poly (p-phenylene terephthalamide) solutions in sulfuric acid. Rheologica Acta, 55(3):257–266, 2016.
- [22] E. E. Herrera, F. Calderas, A. Chávez, and O. Manero. Study on the pulsating flow of a worm-like micellar solution. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 165(3):174–183, 2010.
- [23] C. F. Högman and H. T. Meryman. Storage parameters affecting red blood cell survival and function after transfusion. Transfus Med Rev, 13(4):275–96, Oct 1999.
- [24] Y. Huo and G. S. Kassab. Pulsatile blood flow in the entire coronary arterial tree: theory and experiment. American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology, 291(3):H1074–H1087, 2006.
- [25] J. Jung, B.-K. Lee, and S. Shin. Yield shear stress and disaggregating shear stress of human blood. Korea-Australia Rheology Journal, 26(2):191–198, 2014.
- [26] R. Li, W. Yu, and C. Zhou. Rheological characterization of droplet-matrix versus co-continuous morphology. Journal of Macromolecular Science, Part B, 45(5):889–898, 2006.
- [27] Y. Liu and W. K. Liu. Rheology of red blood cell aggregation by computer simulation. Journal of Computational Physics, 220(1):139–154, 2006.
- [28] G. Longster, T. Buckley, J. Sikorski, and L. Tovey. Scanning electron microscope studies of red cell morphology. Vox sanguinis, 22(2):161–170, 1972.

- [29] H. Maders, B. Vergnes, Y. Demay, and J. Agassant. Steady flow of a white-metzner fluid in a 2-d abrupt contraction: computation and experiments. Journal of non-newtonian fluid mechanics, 45(1):63–80, 1992.
- [30] O. Manero, F. Bautista, J. Soltero, and J. Puig. Dynamics of worm-like micelles: the cox–merz rule. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 106(1):1–15, 2002.
- [31] A. Marcinkowska-Gapińska, J. Gapinski, W. Elikowski, F. Jaroszyk, and L. Kubisz. Comparison of three rheological models of shear flow behavior studied on blood samples from post-infarction patients. Medical & biological engineering & computing, 45(9):837–844, 2007.
- [32] L. Medina-Torres, G. Sanchez-Olivares, D. M. Nuñez-Ramirez, L. Moreno, and F. Calderas. Rheological of chocolate-flavored, reduced-calories coating as a function of conching process. Journal of food science and technology, 51(7):1421–1427, 2014.
- [33] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. Multiplicative number theory I: Classical theory, volume 97. Cambridge University Press, 2006.
- [34] L. Moreno. Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood. Korea-Australia Rheology Journal, 27(1):1–10, 2015.
- [35] M. Moyers-Gonzalez, R. G. Owens, and J. Fang. A non-homogeneous constitutive model for human blood. part 1. model derivation and steady flow. Journal of Fluid Mechanics, 617:327–354, 2008.
- [36] M. A. Moyers-Gonzalez and R. G. Owens. A non-homogeneous constitutive model for human blood: Part ii. asymptotic solution for large pécelet numbers. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 155(3):146–160, 2008.
- [37] M. A. Moyers-Gonzalez, R. G. Owens, and J. Fang. A non-homogeneous constitutive model for human blood: Part iii. oscillatory flow. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 155(3):161–173, 2008.

- [38] P. Oliveira. Alternative derivation of differential constitutive equations of the oldroyd-b type. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 160(1):40–46, 2009.
- [39] N. Phan-Thien. A nonlinear network viscoelastic model. Journal of Rheology (1978-present), 22(3):259–283, 1978.
- [40] N. Phan-Thien. On pulsating flow of polymeric fluids. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 4(3):167–176, 1978.
- [41] N. Phan-Thien and J. Dudek. Pulsating flow revisited. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 11(1):147–161, 1982.
- [42] C. Posadas-Romero, R. Tapia-Conyer, I. Lerman-Garber, J. Zamora-González, G. Cardoso-Saldaña, B. Salvatierra-Izaba, and J. Sepulveda-Amor. Cholesterol levels and prevalence of hypercholesterolemia in a mexican adult population. Atherosclerosis, 118(2):275–284, 1995.
- [43] K. Rohlf and G. Tenti. The role of the womersley number in pulsatile blood flow: a theoretical study of the casson model. Journal of Biomechanics, 34(1):141–148, 2001.
- [44] D. Sankar and K. Hemalatha. Pulsatile flow of herschel-bulkley fluid through stenosed arteries a mathematical model. International Journal of Non-Linear Mechanics, 41(8):979–990, 2006.
- [45] C. Schmitt, A. Hadj Henni, and G. Cloutier. Characterization of blood clot viscoelasticity by dynamic ultrasound elastography and modeling of the rheological behavior. Journal of Biomechanics, 44(4):622–9, Feb 2011.
- [46] K. Sharma. Transport Phenomena in Biomedical Engineering: Artificial organ Design and Development, and Tissue Engineering. McGraw Hill Professional, 2010.
- [47] S. Siddiqui, N. Verma, S. Mishra, and R. Gupta. Mathematical modelling of pulsatile flow of casson’s fluid in arterial stenosis. Applied Mathematics and Computation, 210(1):1–10, 2009.

- [48] N. P. Thien and R. I. Tanner. A new constitutive equation derived from network theory. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2(4):353–365, 1977.
- [49] G. B. Thurston. Viscoelasticity of human blood. Biophysical journal, 12(9):1205, 1972.
- [50] G. Tomaiuolo, A. Carciati, S. Caserta, and S. Guido. Blood linear viscoelasticity by small amplitude oscillatory flow. Rheologica Acta, pages 1–11, 2015.
- [51] P. Townsend. Numerical solutions of some unsteady flows of elastico-viscous liquids. Rheologica Acta, 12(1):13–18, 1973.
- [52] J. Venkatesan, D. Sankar, K. Hemalatha, and Y. Yatim. Mathematical analysis of casson fluid model for blood rheology in stenosed narrow arteries. Journal of Applied Mathematics, 2013, 2013.
- [53] G. Vlastos, D. Lerche, B. Koch, O. Samba, and M. Pohl. The effect of parallel combined steady and oscillatory shear flows on blood and polymer solutions. Rheologica Acta, 36(2):160–172, 1997.
- [54] M. Zamir. Mechanics of blood supply to the heart: wave reflection effects in a right coronary artery. Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences, 265(1394):439–444, 1998.

Apéndice A

Glosario

Densidad, ρ .

Derivada codeformacional del tensor de esfuerzos, $\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla}$.

Flujo volumétrico, Q .

Flujo volumétrico promedio, $\langle Q \rangle$.

Función de correlación, $R(s)$.

Función estocástica, $n(t)$.

Función fluencia, φ .

Función viscosidad, η .

Grupos adimensionales, A_0, B .

Hematocrito, Hct . Proporción entre las células y el volumen de plasma presente en una muestra. Puede haber variaciones normales de este parámetro entre 40 a 55 % dependiendo del género de la persona.

Modelo Bautista Manero Puig, BMP . El modelo constitutivo BMP describe el estado reológico de un fluido complejo por acción de un esfuerzo

Módulo elástico, G_0 . El módulo elástico de un material

Número de Deborah, De . Es un número adimensional que relaciona el tiempo característico de un material y el tiempo de observación.

Número de Reynolds, Re . Es un número adimensional que relaciona los mecanismos inerciales y los viscosos en un sistema que fluye por acción de una fuerza que lo deforma continua e irreversiblemente.

Operador diferencial Nabla, ∇ .

Parámetro estructural, ζ .

Parámetro cinético-estructural, β . Este parámetro resulta del ensamble de las constantes cinética k y estructural λ ; $\beta = k\lambda$.

Presión, p .

Primera y segunda derivada del esfuerzo a orden cero, $\dot{\sigma}_0, \ddot{\sigma}_0$.

Primera y segunda derivada de la función viscosidad a orden cero, $\dot{\eta}_0, \ddot{\eta}_0$.

Tensor de esfuerzos, $\underline{\underline{\sigma}}$.

Tensor de rapidez de deformación, $\underline{\underline{D}}$.

Tensor gradiente de velocidad, $\nabla \underline{v}$.

Tensor gradiente de velocidad transpuesto, $\nabla \underline{v}^T$.

Tiempo característico, λ . Es el tiempo que tarda un material en reestructurarse luego de un periodo de deformación

Tiempo de reestructuración, k . Es el tiempo que tarda un material en evolucionar estructuralmente tras un periodo de deformación.

Apéndice B

Productividad

Korea-Australia Rheology Journal, Vol.27, No.1, pp.1-10 (February 2015)
DOI: 10.1007/s13367-015-0001-4

www.springer.com/13367

Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood

**Leonardo Moreno¹, Fausto Calderas^{1*}, Guadalupe Sanchez-Olivares², Luis Medina-Torres³,
Antonio Sanchez-Solis¹ and Octavio Manero¹**

¹*Instituto de Investigaciones en Materiales, Universidad Nacional Autónoma de México, A.P. 70-360, México, D.F., 04510*

²*CIATEC, A.C. Omega 201, Industrial Delta, CP 37545, León, Gto, Mexico*

³*Departamento de Ingeniería Química, Facultad de Química, UNAM*

(Received May 29, 2014; final revision received January 5, 2015; accepted January 8, 2015)

Figura B.1: Moreno, L., Calderas, F., Sanchez-Olivares, G., Medina-Torres, L., Sanchez-Solis, A., and Manero, O. (2015). Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood. Korea-Australia Rheology Journal, 27(1) 1-10

Resumen

Important public health problems worldwide such as obesity, diabetes, hyperlipidemia and coronary diseases are quite common. These problems arise from numerous factors, such as hyper-caloric diets, sedentary habits and other epigenetic factors. With respect to Mexico, the population reference values of total cholesterol in plasma are around 200 mg/dL. However, a large proportion has higher levels than this reference value. In this work, we analyze the rheological properties of human blood obtained from 20 donors, as a function of cholesterol and triglyceride levels, upon a protocol previously approved by the health authorities. Samples with high and low cholesterol and triglyceride levels were selected and analyzed by simplecontinuous

and linear-oscillatory shear flow. Rheometric properties were measured and related to the structure and composition of human blood. In addition, rheometric data were modeled by using several constitutive equations: Bautista-Manero-Puig (BMP) and the multimodal Maxwell equations to predict the flow behavior of human blood. Finally, a comparison was made among various models, namely, the BMP, Carreau and Quemada equations for simple shear rate flow. An important relationship was found between cholesterol, triglycerides and the structure of human blood. Results show that blood with high cholesterol levels (400 mg/dL) has flow properties fully different (higher viscosity and a more pseudo-plastic behavior) than blood with lower levels of cholesterol (tendency to Newtonian behavior or viscosity plateau at low shear rates).



Figura B.2: Ortega, M., Medina-Torres, L., Calderas, F., Moreno, L., Bernad-Bernad MJ., Sanchez-Olivares, G., Sanchez-Solis, A., and Manero, O. (2015). La reología aplicada en sistemas biológicos con diferentes niveles de colesterol, (26), 26-34.

Resumen

Sabías que el colesterol modifica el comportamiento reológico y que la reología es la ciencia que estudia la relación entre el esfuerzo y la deformación de los materiales. El estudio reológico de la sangre se denomina hemorreología. Comencemos con la definición formal de la reología, que es la ciencia que estudia las relaciones constitutivas entre el esfuerzo y la deformación en los fluidos. El colesterol en el cuerpo humano tiene funciones vitales, entre ellas, la síntesis de hormonas y la estabilización de las membranas celulares. En un organismo, esta molécula se divide en colesterol bueno y malo, clasificación basada en la densidad de las lipoproteínas que lo arrastran, de manera que el colesterol "malo" es el de baja densidad y el "bueno" es el de alta

densidad. Si vemos la sangre como un fluido, las células que la constituyen tienden a generar estructuras transitorias complejas. La sangre se compone principalmente de dos fracciones, la parte soluble formada por el colesterol total, los triglicéridos y las proteínas, los niveles elevados de estas moléculas modifican el comportamiento del flujo de la sangre (comportamiento reológico). En cualquier mamífero se presenta el mismo fenómeno. En este trabajo se demuestra que la sangre tiende a estructurarse más fuertemente y para realizar el estudio se dispuso de 21 ratas macho que se dividieron en tres grupos de siete ratas cada uno, éstas tuvieron una dieta que consistió en alimento con diferente contenido de grasa: el blanco con 3%, el medio con 4.5% y el alto con 6.5%, a este último se le adicionó grasa vegetal mixta. De cada grupo se obtuvo periódicamente una "muestra representativa" de sangre por vía retrocular con un espacio de 15 días entre cada toma de muestra. Se realizaron las siguientes pruebas a las muestras: a) bioquímicas, en las que se observaron cambios en el nivel de colesterol en la población de estudio, que se atribuyen a tres diferentes factores: el metabolismo de las ratas, la formación de tejido adiposo y la competencia por el alimento; b) hemorreológicas, éstas consistieron en pruebas oscilatorias de baja amplitud de deformación y de corte simple en estado estacionario. Al realizar dichas pruebas hemorreológicas se encontró lo siguiente: en las pruebas oscilatorias de baja amplitud de deformación el módulo viscoso predomina sobre el módulo elástico ($G'' > G'$) y en las pruebas de corte simple la sangre tiene un comportamiento adelgazante al flujo ($n < 1$). Cabe resaltar que los resultados muestran que el grupo "alto" tiene un comportamiento pseudosólido y con esfuerzo de cedencia al día 30 posterior al inicio de la dieta. Esto se atribuye a las posibles interacciones existentes entre el colesterol y las células de la sangre, por lo cual el comportamiento mostrado está directamente asociado con la correlación colesterol total-hematocrito.

Resumen

La reología es la ciencia que estudia la respuesta de los fluidos complejos en términos de dos parámetros principales: esfuerzo y deformación (flujo). La sangre humana es un fluido de reología muy compleja, porque la viscosidad de la sangre no es proporcional al esfuerzo aplicado, es decir, es un fluido no newtoniano que cuenta

La sangre humana desde el punto de vista de la reología

Leonardo Moreno* y Fausto Calderas, Departamento de Reología y Mecánica de Materiales, IIM- UNAM; Guadalupe Sánchez-Olivares, CIATEC; Luis Medina-Torres, Departamento de Ingeniería Química, UNAM, Antonio Sánchez-Solis y Octavio Manero, Departamento de Reología y Mecánica de Materiales, IIM- UNAM.

Figura B.3: Moreno, L., Calderas, F., Sanchez-Olivares, G., Medina-Torres, L., Sanchez-Solis, A., and Manero, O. (2013). La sangre desde el punto de vista de la reología. *Materiales*, (20), 33-37.

con características pseudoplásticas (cuanto mayor sea el esfuerzo aplicado, menor es su viscosidad). Esto se debe en parte a la formación de estructuras transitorias (que se destruyen por el flujo) de muy corta duración, cuyo tamaño e intensidad dependen de la concentración de colesterol total, entre otros factores. En el Instituto de Investigaciones en Materiales, en el grupo multidisciplinario bajo la supervisión del doctor Octavio Manero, se estudia la sangre humana y su respuesta reológica.

Agradecimientos y Dedicatorias

C.1. Agradecimientos

Agradecimiento al programa de posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales Agradecimiento al proyecto PAPIIT. Técnicas reométricas para la determinación de colesterol y triglicéridos de la sangre en diferentes muestras biológicas. IN118414/26. Investigación realizada gracias al Apoyo a proyectos de investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN115615. Fenómenos de Transporte y reología de fluidos complejos aplicados a sistemas biológicos. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida. Proyectos para la innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM PE112716. Material didáctico teórico, protocolos experimentales y aula virtual de las materias de Fenómenos de Transporte (Cuarto Semestre) y Transferencia de Masa (Séptimo semestre) correspondiente a los ciclos intermedio y terminal de la carrera de Ingeniera Química. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

- **Dr. Manero**, usted confió en mi, me apoyó en momentos difíciles de mi vida y de mi desarrollo profesional, espero no haberlo decepcionado. A usted solo puedo decirle, gracias por hacerme mejor persona.
- **Dr. Edtson**, me enseñó a no abrir la boca de más, a ser alguien serio y lo más importante a ser humilde y aceptar mis errores (que por cierto eran muchos), me dio su tiempo y su amistad, algo invaluable de lo cual siempre le estaré agradecido

- Al **Dr. Fausto**, de quien aprendí a usar el reómetro, de quien aprendí a leer críticamente, a escribir y a saber responder.
- **Dr. Antonio**, también agradecimiento y mucho aprecio, usted me apoyó también en momentos difíciles de mi vida y desarrollo profesional, gracias por darme una perspectiva diferente de las cosas en todo momento.
- En este largo camino encontré mucho apoyo, **Dr. Luis**, fue el primero el confiar en mi reológicamente hablando, aprendí tanto de él, personal y profesionalmente.
- **Dra. Guadalupe**, estuvo conmigo en momentos difíciles, me aconsejó hacer lo mejor para mi, me escuchó en los momentos más difíciles, tantas veces que no supe que hacer, me guió a un mejor camino.
- **Dr. Esteban**, ánimo y buenos consejos de un colega, gracias por todo ese tiempo que se dió para ayudarme.

C.2. Dedicatorias

No se como pueda dedicarle una tesis doctoral a alguien o alguienas. Simplemente escribiré lo que me evocó hacer este trabajo. Empecé ya hace 4 años aproximadamente luego de una tortuosa maestría. Tuve que presentar exámenes disciplinarios, 4 en realidad, Matemáticas aplicadas, Propiedades mecánicas, Química de materiales y Termodinámica. Esta última la reprobé muy feamente, yo solo sabía que $PV = nRT$ y me salen con que solo es una ecuación de estado, que no da toda la información de un sistema; válgame dios. Queridos lectores fue un proceso traumatizante pero logré aprobarla, me gustaría decir que con honores, pero mejor dicho fue por horrores. Pasando ya a la etapa de candidatura; luego de la ~~arrastrada~~ recomendación de cada jurado, uno se siente del otro lado. Pero nooooooooo!!!. Luego de eso viene un examen postexamen. En fin los que me conocen ya sabrán a lo que me refiero. Algo que todavía no saben mis queridos lectores; es quienes han estado a lo largo de este periodo de mi vida. Mi familia, ósea mi santa y celestial madre que me ha aguantado ya por 30 largos y tortuosos años de mi vida, bueno de su

vida...pobre de ella, la compadezco... A sí, también mi hermana que encontramos tirada por ahí-Mariana-. Mis amigotes como ~~Rubén~~ Dr. Santiago, César, Beto, Lidia, Javier, el amigo John, Armando ~~el slán~~, ~~Brunilda~~ Úrsula, El Alodro (yo si le agradezco, aunque sea por hacerme reír) El estado Islámico Isis, Alondra, Ricardo (El Richie), el Hans; una bola de personas que han estado conmigo haciendo que este tiempo en el instituto sea más divertido. Todos estos personajes me han dejado algo sobre todo un tiradero en el laboratorio cuando van a trabajar. Ya en serio, son personas que me han dejado muchas enseñanzas. Mis predicciones son que quien lea esto será en tres posibles momentos, antes del examen de grado, después del examen de grado, habiéndolo aprobado o reprobando lastimosamente. Eso quiere decir que hay un 33% de probabilidades en cada uno. Por favor si el primer escenario sucede, solo digan "te va a ir". Si pasa el segundo escenario felicítenme y si pasa el tercero ayudenme. Luego de esta disertación sean tan amables de acordarse de mí por lo menos.

Atentamente

M en C e I, QFB. Leonardo Moreno (escenario 1)

Dr. Leonardo Moreno (escenario 2)

RIP. Leonardo Moreno (escenario 3)