



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

COSMOLOGÍA Y TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS:
ESTUDIO DEL MODELO DE NAMBU-JONA-LASINIO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
JAVIER LEONARDO QUINTANAR GONZÁLEZ

TUTOR
Dr. Axel Ricardo de la Macorra Pettersson Moriel
(Instituto de Física, UNAM)

COMITÉ TUTOR
Dra. Myriam Mondragón Ceballos
(Instituto de Física, UNAM)
Dr. Darío Núñez Zúñiga
(Instituto de Investigaciones Nucleares, UNAM)

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, Enero de 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
INSTITUTO DE FÍSICA

*Cosmología y Teoría Cuántica de Campos:
Estudio del Modelo de Nambu-Jona-Lasinio*

TESIS

que para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias (Física)

Presenta:

Javier Leonardo Quintanar González

ASESOR: **Dr. Axel de la Macorra**

COMITÉ TUTORAL: **Dra. Myriam Mondragón Ceballos**

COMITÉ TUTORAL: **Dr. Darío Núñez Zúñiga**

Zacatecas, Zac., Diciembre de 2015

A mis padres, Estela y Fco. Javier:
porque me toleraron y apoyaron a lo largo de mi prolongado letargo,
y me proveyeron siempre de una burbuja protectora de los problemas mundanos,
para que yo pudiera darme el lujo de "hablar con los dioses".

A mi hermana Irene: por ignorar mis pretextos,
por su crítica mordaz y divertida, y por animarme
y ser un apoyo emocional.

A mi hermano Ubaldo: por distraerme de mis pensamientos buenos y malos,
y retarme a demostrar, sin él saberlo, que hay cosas más relevantes
en la vida (aunque no siempre más apacibles) que los
bienes materiales y el "prestigio" social.

Sin ellos, esta tesis no hubiera sido concluida.

“La predicción puede llegar a ser algo muy complicado; especialmente cuando se trata del futuro.” Niels Bohr.

“ La composición química de las estrellas es un ejemplo del tipo de conocimiento que la ciencia nunca será capaz de obtener.” A. Comte, filósofo francés.

“ Una vez un filósofo dijo: ‘Para la existencia misma de la ciencia es necesario que las mismas condiciones den siempre los mismos resultados’. Bueno, pues las mismas condiciones no siempre dan los mismos resultados... El futuro es impredecible. En realidad para la existencia misma de la ciencia es necesario que existan cabezas que no acepten que la naturaleza deba cumplir condiciones preconcebidas, como las de nuestro filósofo.”

*R. Feynman, *El carácter de la ley física*.*

*“ Incluso si, como pensó Laplace, el universo es totalmente determinista y el futuro está contenido completamente en su estado actual, no existe en absoluto modo alguno de predecir el futuro... El universo ignora su propio futuro, y es el más rápido de todos sus simuladores”. J. Gribbin, *Deep Simplicity*.*

*“ Al despertarnos cada día, debemos recrear nuevamente nuestro mundo de experiencia. La aniquilación y renovación del estado de consciencia es uno de los milagros ordinarios de la vida” (la ciencia y la filosofía son milagros que vienen mucho después ...a veces). A. Zeman, *La consciencia. Manual de uso* (el paréntesis es mío, JLQG).*

“Un experto es alguien que sabe cada vez más sobre cada vez menos.” Dicho popular.

“ Si algo nos enseña la física cuántica es que cualquier cosa puede pasar en cualquier momento sin razón alguna.” Futurama. TV serie.

Tabla de Contenido

1	Introducción.	1
1.1	Antecedentes. Teorías del Espacio, Tiempo y Materia.	1
1.2	Situación Actual. Teoría y Observación.	3
2	El Modelo Nambu-Jona-Lasinio (NJL).	6
3	Cosmología Básica.	10
4	Cosmología del modelo NJL.	15
4.1	Dinámica de la Fase de Fermiones no-Masivos (Acoplamiento Débil, $g < g_c$).	16
4.2	Dinámica del Condensado Fermiónico (Acoplamiento Fuerte, $g > g_c$).	18
4.3	Fluido NJL con una Constante Cosmológica.	22
4.4	Energía Oscura, NJL y Teorías de Norma Supersimétricas.	25
5	Modelo NJL extendido: Acoplamiento Dinámico.	29
5.1	NJL revisitado.	30
5.2	Acoplamiento Dinámico: dos Campos Escalares.	32
5.2.1	Algunas palabras sobre campos interactuantes.	33
5.3	Análisis del Potencial Total $V = V_I + V_{II}$	34
5.4	Cosmología del modelo NJL extendido $V = V_I + V_{II}$	40
5.5	Apéndice. Sobre el valor Físico (tórico y observado) y el valor Numérico de los Parámetros.	45
6	NJL Extendido. Adición de un término $V_{III} \sim \frac{1}{\phi^2}$ al Potencial.	50
6.1	Análisis del Potencial Total $V = V_I + V_{II} + V_{III}$	50
6.2	Criterio de Aceleración.	53
6.3	Cosmología del Potencial $V = V_I + V_{II} + V_{III}$. Ejemplo de una Solución que incluye Transición de Fase y Aceleración.	56
7	Física de Partículas: Explicando la forma del Potencial Total.	62
7.1	Efectos Cuánticos a 1-loop.	62
7.2	Sobre el valor del corte. Corrimiento del acoplamiento y Escalas de energía.	63
7.3	Sobre el término V_{III} . Pertinencia de la Teoría Cuántica Supersimétrica.	66
8	Resumen de Resultados y Conclusiones.	69

Sinópsis

Revisamos la teoría de Nambu y Jona-Lasinio (NJL) propuesta originalmente en el contexto de la física de hadrones. Es ésta un modelo de interacción para campos fermiónicos con simetría quiral, la cual es rota bajo efectos cuánticos a un lazo (presenta una anomalía). Esta ruptura lleva asociada una transición de fase pasando de fermiones no masivos a un condensado fermiónico que puede describirse de manera efectiva por medio de un campo escalar. Esto puede interpretarse diciendo que el sistema físico ("fluido" NJL) descrito por la teoría incluye dos estados físicos. La presencia del condensado depende además de la fuerza del acoplamiento, y siendo éste una constante en el modelo original, no es posible una transición dinámica. En este trabajo investigamos la dinámica cosmológica de cada fase del fluido NJL. Posteriormente, con el fin de implementar una transición dinámica, y de acuerdo a las argumentaciones de algunos modelos en teoría de Cuerdas, consideramos un acoplamiento dependiente de un segundo campo escalar. La motivación de obtener un potencial total con interpretación física aceptable nos lleva considerar una contribución adicional, la cuál vemos que puede interpretarse como un término de masa para el segundo campo. De esta manera, la teoría original NJL es modificada. Sin embargo encontramos que, debido a la presencia de una barrera de potencial, tampoco en este caso es permitida una transición de fase. Estudiamos nuevamente la dinámica cosmológica de la teoría modificada, y su posible utilidad para modelar los misteriosos fluidos oscuros (Materia Oscura y Energía Oscura), que surgen como resultado de la investigación en la Cosmología Física actual.

Por último argumentamos y estudiamos una modificación adicional a la teoría, incluyendo una contribución al potencial total del tipo que se presenta en algunas teorías supersimétricas. Encontramos que, existe un juego de parámetros para el que la inclusión de dicho término tiene el muy interesante resultado de permitir un universo con 1) transición de fase, 2) aceleración, y 3) que puede terminar posteriormente en un colapso, o "big crunch", incluso habiendo tomado una *geometría plana desde el principio*.

Consideramos únicamente interacciones de tipo gravitacional con la materia ordinaria. Dado que los fluidos oscuros representan alrededor del 95% del contenido total del universo, siendo sólo el 5% restante explicado por el Modelo Estándar de la física de partículas, el estudio de modelos para explicar la Materia y/o Energía Oscuras basados en marco teórico más exitoso del que disponemos para entender la materia, la Teoría Cuántica de Campos, cobra un gran interés.

Capítulo 1

Introducción.

1.1 Antecedentes. Teorías del Espacio, Tiempo y Materia.

La cosmología, entendida como el estudio del universo (su origen, destino, edad, contenido material, etc.), exige actualmente el conocimiento de las más nuevas y mejores teorías físicas de las que disponemos: la Relatividad General (que trata del Espacio y el Tiempo) por un lado, y la Teoría Cuántica de Campos (que ofrece una forma de entender la materia), por otro. Antiguamente y durante mucho tiempo las teorías cosmológicas estuvieron dominadas por los mitos, la filosofía, las creencias religiosas o la especulación, a lo más, basada en la mecánica Newtoniana. A lo largo de la historia ha quedado demostrado que la mejor forma de conocer la realidad, en particular el universo, es a través del método científico. Así, al ver al universo como un sistema físico sujeto a las leyes de la Física, pueden concebirse teorías más fiables (aunque no por eso menos fantásticas), que además pueden ponerse a prueba y contrastarse con las observaciones. De esta manera, el enfoque científico restringe grandemente la amplitud de especulaciones que pueden hacerse.

En la Teoría de la Relatividad General (TGR) se concibe que la realidad física está contenida en un "espacio-tiempo" de cuatro dimensiones, y predice que éste no es estático, sino que puede tener forma y evolucionar. Su dinámica está determinada por la naturaleza de la materia que contiene, y así, desde el punto de vista *teórico*, es muy poco probable que el universo mismo sea estático. Adicionalmente, las *observaciones*¹ muestran un universo en expansión, e incluso en aceleración². La concepción de un universo cambiante extrapolada hacia atrás en el tiempo desemboca en la idea del Big Bang (idea que además ha sido corroborada por diferentes observaciones, como la abundancia de elementos ligeros o la radiación cósmica de fondo).³ La Relatividad General, además de ser una teoría sobre el espacio y el tiempo, nos proporciona una explicación sobre la fuerza de gravedad, al postular que ésta es una manifestación de la curvatura de aquellos. Así pues, puede decirse que la cosmovisión que ofrece la TGR es una unificación de los conceptos de Espacio, Tiempo, Gravedad y Geometría.

Paralelamente a la imagen que la TGR nos proporciona sobre el espacio y el tiempo, nuestras ideas sobre la materia, en cuanto a su naturaleza y cantidad, ha cambiado constantemente. Desde la antigua Grecia, cuando Aristóteles concibió cuatro elementos (tierra, fuego, aire y agua) constitutivos de la materia terrenal, además de un misterioso "éter" (el "quinto elemento") del que

¹Corrimiento al rojo de galaxias lejanas.

²A través del estudio de Supernovas tipo SNIa

³Esto refuta la creación (espontánea o por "alguien") del universo tal como se observa. Todavía podría uno imaginar la existencia de "alguien" o algo que indujera el Big Bang, pero en todo caso las nuevas especulaciones creacionistas más refinadas son posibles sólo gracias a las teorías científicas de las que se trata de prescindir.

estaban formados los cuerpos celestes, en cierto momento histórico se llegó a entender que todas las cosas estaban constituidas finalmente por elementos químicos (átomos de estos elementos), y que la materia hecha por ellos estaba influenciada por las únicas tres fuerzas conocidas hasta entonces: la electricidad, el magnetismo y la gravedad. Además no se sabía lo que era la luz, que también interactúa con la materia. Posteriormente se encontró que los átomos podían ser ionizados, divididos, y configurados de diversas maneras, y por lo tanto no son constituyentes básicos de la materia. A medida que ha evolucionado el conocimiento, el título de *partículas elementales* ha sido asignado a diferentes entidades, pasando de los átomos a los núcleos atómicos, luego a los nucleones (protones y neutrones), junto con los electrones. Actualmente nuestro entendimiento de la materia está enmarcado dentro del llamado Modelo Estándar de partículas elementales (SM por sus siglas en inglés). Es esta una Teoría Cuántica de Campos consistente en *campos de Materia* y *campos de Fuerza*. A cada campo corresponde una clase de partícula: los primeros son fermiones de espín 1/2 integrados por quarks y leptones, mientras que los segundos están formados por bosones de espín 1, resultantes de la imposición de invariancia de norma y que describen las tres fuerzas no gravitacionales conocidas: la interacción electromagnética (de la cual la luz es una manifestación y su partícula es llamada fotón), interacción nuclear débil, e interacción nuclear fuerte (a través de esta última los quarks forman una clase de partículas llamadas *hadrones*,⁴ de los cuales el protón y neutrón son un subconjunto). El Modelo Estándar incluye además un tipo de materia distinto a todos los anteriores conocido como campo escalar, cuya partícula es un bosón de espín *cero* llamado *bosón de Higgs*. Aunque pueden existir partículas de espín cero compuestas, se cree que el Higgs es una partícula elemental. Su existencia respaldaría la postulación de campos escalares en otros contextos de la física, como los que son invocados para causar un suceso cosmológico temprano conocido como *inflación*. El cuadro teórico sin embargo no es completo, ya que persisten diversas cuestiones que carecen de respuesta satisfactoria (véase por ejemplo [6]). Se han investigado muchos enfoques teóricos para complementar al SM, siendo uno de los más populares el de las teorías *Supersimétricas*.

Ahora bien, el estudio de fenómenos astrofísicos a escalas tan diversas como la dinámica de galaxias ($O(10^0 kpc)$ aprox.), dinámica de cúmulos ($O(10^0 Mpc)$ aprox.) y super cúmulos ($O(10^1 Mpc)$ aprox.), y formación de estructura, así como las restricciones impuestas por la nucleosíntesis primordial⁵ a la cantidad de materia ordinaria (esencialmente protones y neutrones, por lo que se conoce también como materia bariónica), arrojan evidencia de la existencia de un tipo de materia desconocida *no bariónica*: Materia Oscura (DM por sus siglas en inglés) [12]. Esta sustancia no interactúa con la luz ni con la materia ordinaria (Modelo Estándar) más que gravitacionalmente, de manera *atractiva*.⁶ Por otro lado, el fenómeno mencionado arriba sobre la aceleración del universo, no puede ser explicado ni con Modelo Estándar ni con Materia Oscura, por lo que es necesario postular un nuevo tipo de sustancia *desconocida* aún más extraña cuyo efecto gravitacional es repulsivo. Es a esta sustancia a la que refiere el término *Energía Oscura* (DE por sus siglas en inglés) [9, 10].

Evidencia independiente de la Materia Oscura y la Energía Oscura es proporcionada por la Radiación Cósmica de Fondo.⁷ Para que las predicciones teóricas de la forma del espectro de anisotropías concuerden con las observaciones, se requiere que el universo sea plano con un alto

⁴A su vez los hadrones se subdividen en mesones, que son bosones (el mesón π o pión de espín cero es un ejemplo), y bariones, que son fermiones (entre los cuales están el protón y neutrón). De aquí viene el nombre de *materia bariónica* que se usa en el contexto cosmológico, y que también usaremos nosotros (ver más adelante).

⁵Modelo explicativo de la proporción de elementos ligeros a escala cósmica (hidrógeno y helio principalmente).

⁶Por esta razón algunos investigadores opinan que el nombre de "Materia Invisible" es más apropiado. Ocasionalmente, el nombre de "estrellas congeladas" fue propuesto alguna vez para los Agujeros Negros. Vemos pues que muchas veces el nombre tiene más que ver con la subjetividad que con una descripción científica.

⁷Datos observacionales han sido recopilados por medio del satélite W.M.A.P. de la N.A.S.A. [21], y más reciente-

grado de precisión y que contenga aproximadamente el 4% de materia bariónica y 23% de materia no bariónica. Dado que la condición de planitud implica que la densidad relativa total $\Omega_{total} = 1$, esto significa que existe alguna sustancia X con $\Omega_X = 1 - (0.23 + 0.04) = 0.73$. Ya que requerimos explicar la aceleración del universo, se *identifica* esta sustancia con la Energía Oscura, es decir $\Omega_X = \Omega_{DE}$. En resumen ¡aproximadamente el 73%(DE) + 23%(DM) = 96% del contenido total del universo es desconocido!

A grandes rasgos, tenemos dos perspectivas teóricas diferentes para tratar de entender las misteriosas Materia y Energía Oscuras: 1.- La Relatividad General es una teoría de la gravedad incompleta o que necesita modificación (en otras palabras, dice la verdad, pero no toda), o bien, 2.- La teoría de la gravedad TGR es verdadera y completa, en cuyo caso deben existir entonces formas de materia extrañas y aún desconocidas.

Nosotros aquí adoptamos la segunda perspectiva. Cabe mencionar que aunque la Relatividad General permite la existencia de una *Constante Cosmológica*, la cual podría identificarse con la Energía Oscura, no es posible determinar su valor usando principios físicos básicos, pudiendo asignarse el valor que mejor se ajuste a las observaciones. Debido a esta arbitrariedad no puede decirse que la Relatividad General en realidad explique a la DE. Por otro lado, la Teoría Cuántica predice un valor para la densidad de energía del *vacío* que depende del número de campos y de la escala de energía a la que es válida la teoría. Sin embargo, las estimaciones de este valor discrepan hasta por 120 ordenes de magnitud. Esta discrepancia puede aliviarse invocando teorías supersimétricas, pero esto requiere ajustes finos, o postular entidades físicas no observadas, y por lo tanto estos intentos no son convincentes. Así las cosas, la física teórica enfrenta los problemas de explicar la constante cosmológica, el valor de la densidad de energía del vacío, y la energía oscura, cada una de ellas por separado, o bien dilucidar si son la misma entidad, o de qué manera están relacionadas.⁸ Por completez mencionamos aquí que persisten muchos otros problemas abiertos en cosmología, algunos de los cuales podrían o no estar relacionados entre sí y con los ya mencionados, entre ellos: la inflación cósmica en el universo temprano (la cual engloba problemas como el de la planitud, del horizonte y formación de estructura), la bariogénesis (o preponderancia de materia sobre antimateria), y la explicación del origen mismo del universo, sobre lo cual se espera tener algún entendimiento una vez que se haya formulado una *Teoría Cuántica de la Gravedad* que sea consistente.

En este trabajo nosotros investigaremos la posibilidad de que la energía oscura pueda ser atribuida a un campo dinámico derivado de la teoría NJL, e ignoraremos el problema de la constante cosmológica y la densidad del vacío, asumiendo para la primera que es nula o tiene el valor apropiado según convenga, y para la segunda asumiremos que siempre es nula.

1.2 Situación Actual. Teoría y Observación.

Aunque la Cosmología pasó a pertenecer al dominio científico hace tiempo, con la medición del corrimiento al rojo de las galaxias alrededor de finales de la segunda década del siglo pasado, el estudio del Universo ha adquirido un interés mucho mayor en años recientes, pues ahora se han podido medir los parámetros cosmológicos con mucha mayor precisión, lo cual nos da la oportunidad de responder algunas de las preguntas más fundamentales de la Cosmología Teórica. La investigación en las últimas décadas ha revelado la presencia de formas de materia y energía desconocidas, llamadas Materia Oscura y Energía Oscura (Dark Matter "DM" y Dark Energy "DE", respectivamente, por sus siglas en inglés), que constituyen hasta un 95% del contenido total de

mente, por el satélite Planck de la ESA (Agencia Espacial Europea) [22].

⁸La incapacidad de determinar el valor de la constante cosmológica (o bien el valor de la energía del vacío en el contexto cosmológico, que a su vez es equivalente a predecir la época en la que empieza el dominio de la energía oscura) es conocida a veces como "el problema de la coincidencia".

materia en el Universo al día de hoy. La existencia de la DE quedó establecida con el estudio de supernovas tipo SNIa, que mostró que el Universo se está acelerando [18, 19]. Para explicar este fenómeno, la DE tendría que responder a la fuerza de Gravedad de manera contraria a todo tipo de materia conocida, reaccionando de manera repulsiva, en lugar de atractiva. Este comportamiento "anti-gravitacional" puede ser reproducido si se supone la presencia de un fluido con la extraña propiedad de poseer una presión negativa. Además de las supernovas, evidencia adicional de la DE y DM es proporcionada a través del análisis de la Radiación Cómica de fondo de Microondas (Cosmic Microwave Background radiation, CMB) [20], la cual fue medida por el satélite WMAP [21], y más recientemente por la misión Planck de la Agencia Espacial Europea [22], y por el estudio de la dinámica de galaxias, cúmulos y super cúmulos, y de la formación de estructura cósmica (Large Scale Structure, LSS)[23] a través de la desviación de la luz por gravedad (weak lensing), lo cual apunta a la existencia de materia que interactúa con la materia ordinaria (Modelo Estándar de partículas, SM) muy débilmente, ya que solo lo hace a través de la gravedad. Pruebas adicionales consisten en la medición de las Oscilaciones Acústicas Bariónicas (Baryon Acoustic Oscillations, BAO) [25, 26]. Se ha establecido que nuestro universo es plano y dominado al momento presente por Energía Oscura (DE) y Materia Oscura (DM) con $\Omega_{DE} \simeq 0.692 \pm 0.02$, $\Omega_m = 0.308 \pm 0.009$, y una constante de Hubble $H_o = (67.27 \pm 0.66) km s^{-1} Mpc^{-1}$ [22]. Sin embargo, la naturaleza y dinámica de DE y DM todavía no ha sido dilucidada y es objeto de intensa investigación [30]. El coeficiente de estado de ecuación barotrópica de estado para la DE al día de hoy es $w_o \simeq -0.93 \pm 0.13$, pero aún no tenemos mediciones precisas de éste $w(z)$ en función del corrimiento al rojo, z [24, 22].

Ya que las propiedades de la DE aún se están investigando, diversas parametrizaciones han sido propuestas para discernir su dinámica [30]-[33]. Aunque algunas de estas parametrizaciones de la DE tienen la ventaja de involucrar un número reducido de parámetros, pueden carecer de motivación física y también pueden ser demasiado restrictivas. Los candidatos mejor motivados físicamente sean quizás los campos escalares, los cuales pueden acoplarse minimalmente, a través de la gravedad, a otros fluidos [31, 32, 33], o pueden interactuar débilmente en modelos de Energía Oscura "IDE" [38, 39]. Los campos escalares han sido ampliamente estudiados en la literatura [31, 32, 33], y han tenido especial interés los llamados "campos rastreadores" (tracker fields) [32], ya que en este caso el comportamiento del campo escalar es *casi* independiente de las condiciones iniciales, yendo desde épocas muy tempranas mucho antes de la época de igualdad radiación-materia. En esta clase de modelos la pregunta fundamental de porqué la DE es relevante hasta ahora, lo cual se conoce como el "problema de la coincidencia", puede ser pormenorizada debido a la insensibilidad de la dinámica tardía ante las condiciones iniciales del campo.

Actualmente hay una gran cantidad de ideas dirigidas a explicar los desconocidos fluidos cósmicos desde el punto de vista teórico, aunque ninguno de ellos tiene aún la última palabra. Esta situación respalda y motiva nuestra investigación. Dado que nuestra teoría más exitosa sobre la materia, el Modelo Estándar de partículas elementales (Standard Model, SM), se enmarca dentro de la Teoría Cuántica de Campos (QFT), es razonable que una teoría sobre la Materia y/o Energía Oscuras sea igualmente una teoría de campos. Ejemplos interesantes basados en teorías de campos para DM y DE han sido propuestos empleando campos de norma (Gauge Fields) de manera similar a la Cromodinámica Cuántica (QCD) en física de partículas, y han sido utilizados para entender tanto la Energía Oscura [36] como a la Materia Oscura [37].

Aquí nosotros investigamos una teoría de campos fermiónicos interactuantes con simetría quiral, conocida como el modelo de Nambu y Jona-Lasinio (NJL). Aunque ésta es una teoría muy estudiada y bien conocida en el contexto de la física de hadrones, es una teoría simple que tiene propiedades muy interesantes, y vale la pena reconsiderarla bajo una perspectiva diferente, e investigar su posible relevancia, en este caso en Cosmología.

Esta tesis está organizada como sigue: en el capítulo 2 presentamos el modelo original de Nambu y Jona-Lasinio (NJL) como una teoría cuántica de campos, y nos limitamos a describir sus propiedades desde el punto de vista de la física de partículas exclusivamente, que fue el contexto en el que fue concebido y ha sido estudiado, sin tener nada que ver con la cosmología. Después, en el capítulo 3 introducimos y explicamos de manera concisa la teoría básica necesaria para entender algunos resultados elementales de la cosmología física moderna. De aquí extraemos el sistema completo de ecuaciones para resolver la dinámica cosmológica en términos del contenido del universo, y que nosotros emplearemos posteriormente para investigar la dinámica del fluido NJL en particular. En el capítulo 4 estudiamos la dinámica cosmológica del fluido NJL, para lo cual resolvemos e interpretamos la solución el sistema de ecuaciones. Por completez, y anticipando la posible utilidad del modelo para ajustarse a la realidad (observaciones), consideramos la presencia de fluidos "barotrópicos" adicionales, además del efecto de la inclusión de una constante cosmológica. Como el modelo original NJL describe dos estados físicos diferentes, pero no contempla una transición de fase dinámica, en el capítulo 5 consideramos un modelo NJL modificado, o "extendido", argumentando para ello la introducción de un acoplamiento variable a través de una dependencia de un campo adicional. Luego procedemos a investigar igualmente la evolución cosmológica de este modelo extendido. Dado que el modelo extendido no permite tampoco la transición de fase, y debido a su desventaja "estética" en comparación con otros modelos cosmológicos que consideran simplemente una constante cosmológica para reproducir la aceleración observada del universo, en el capítulo 6 consideramos una segunda modificación del modelo, a través de la introducción de una contribución adicional al potencial. Como veremos, en este caso nuestro modelo extendido arroja resultados aún más interesantes que los anteriores. Posteriormente, en el capítulo 7 nos ocupamos en llenar algunos vacíos teóricos del modelo, y explicamos algunas cuestiones pendientes. Además tratamos de argumentar o justificar la presencia de los términos adicionales del potencial utilizando las modernas teorías de campos y partículas. Finalmente el capítulo 8 presenta un resumen de nuestros resultados y las conclusiones.

Capítulo 2

El Modelo Nambu-Jona-Lasinio (NJL).

Inspirados por la explicación recientemente encontrada en aquel entonces (años 60's del siglo pasado) del fenómeno de la generación de bandas de energía en el contexto de la física de superconductores, los profesores Nambu y Jona-Lasinio sugirieron una teoría de campos fermiónicos no masivos en la que la masa de los fermiones sería generada como resultado de la interacción. La idea era incluir una simetría bajo transformaciones quirales $exp(i\theta\gamma_5)$, que restringe la forma del funcional lagrangiano. Dicho lagrangiano se postula como

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}g^2 [(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2] \quad (2.1)$$

donde ψ es un espinor de 4 componentes y g es la constante de acoplamiento. Como las dimensiones de dicha constante son $[g] = E^{-2}$ (E denota energía), la teoría no es renormalizable. Sin embargo, a nosotros nos interesará aquí como una *teoría efectiva* debajo de cierta escala de energía. La física implicada por esta interacción 4-fermiónica, como es la ruptura simetría con la consecuente aparición del condensado, es cualitativamente la misma sin la contribución pseudo-escalar $\bar{\psi}\gamma_5\psi$, así que por ahora ignoraremos este término para iniciar nuestro estudio con la teoría más simple posible. Las correcciones cuánticas asociadas al lagrangiano de interacción resultante

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2}g^2\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi, \quad (2.2)$$

pueden expresarse como sumas de las amplitudes de los procesos cuyos diagramas de Feynman contienen cero lazos (nivel árbol), un lazo, etc.

El número infinito de lazos (loops) pueden resumirse a través de un potencial *no perturbativo*, lo cual se facilita introduciendo un campo escalar auxiliar ϕ . De esta forma se puede escribir el lagrangiano de interacción equivalente

$$\mathcal{L}_{int} = \lambda\phi\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.3)$$

donde λ es un parámetro a determinar en función de la constante de acoplamiento, y m es un parámetro con dimensiones de masa. Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, $\partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \right] - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} = 0$ se encuentra que

$$\phi = \frac{1}{m}g\bar{\psi}\psi \quad (2.4)$$

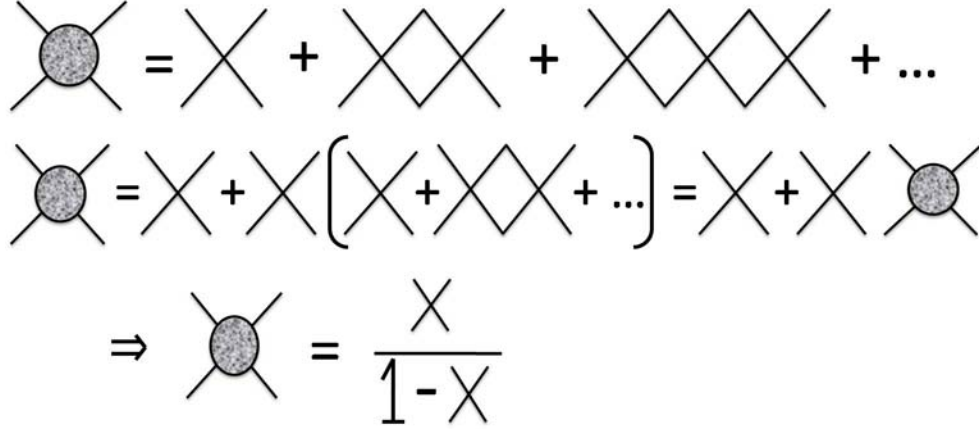


Figura 2.1: Diagramas de Feynman asociados a la interacción de cuatro fermiones.

Al sustituir esta relación en (2.3) y comparar con (2.1) vemos que $\lambda = mg$. Entonces de la expresión (2.3) se puede leer el potencial a nivel árbol y la masa del campo fermiónico respectivamente:

$$V_0^\phi = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad m_\psi^2 = (mg\phi)^2. \quad (2.5)$$

El efecto de los procesos cuánticos resulta en una modificación del potencial, la cual se expresa por medio del potencial efectivo (potencial de Coleman-Weinberg). La contribución al potencial debida a procesos a un lazo $V_1^\phi = -\frac{1}{8\pi} \int d^2pp^2 \log(p^2 + m_\psi^2)$ es divergente en el límite ultravioleta (el signo negativo es debido a las propiedades de partículas fermiónicas), por lo que se hace necesaria la introducción de una cota superior o corte Λ . Es este parámetro el que define la escala de energía en la que la teoría es válida. Al definir la variable conveniente

$$x \equiv \frac{m_\psi^2}{\Lambda^2} = \frac{m^2g^2\phi^2}{\Lambda^2}, \quad (2.6)$$

los términos del potencial se escriben

$$V_0 = \frac{\Lambda^2x}{2g^2}, \quad (2.7)$$

$$V_1 = -\frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \left[x + x^2 \log\left(\frac{x}{1+x}\right) + \log(1+x) \right]. \quad (2.8)$$

Por concisión y claridad conviene hacer las definiciones

$$A = \frac{\Lambda^4}{16\pi^2}, \quad f(x) = x + x^2 \log\left(\frac{x}{1+x}\right) + \log(1+x) \quad (2.9)$$

Al incluir tanto contribuciones a nivel árbol como correcciones cuánticas a 1-lazo se obtiene el potencial efectivo

$$V_I = V_0^\phi + V_1^\phi = \frac{\Lambda^2}{2} \frac{x}{g^2} - Af(x), \quad (2.10)$$

el cual se escribe explícitamente como

$$V_I = V_0 + V_1 = \frac{\Lambda^2x}{2g^2} \left(1 - \frac{g^2\Lambda^2}{8\pi^2} \right) - \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \left[x^2 \log\left(\frac{x}{1+x}\right) + \log(1+x) \right], \quad (2.11)$$

y en función del campo ϕ como

$$V_I(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \left[\left(\frac{mg\phi}{\Lambda} \right)^2 + \left(\frac{mg\phi}{\Lambda} \right)^4 \log \left(\frac{\left(\frac{mg\phi}{\Lambda} \right)^2}{1 + \left(\frac{mg\phi}{\Lambda} \right)^2} \right) + \log \left(1 + \left(\frac{mg\phi}{\Lambda} \right)^2 \right) \right]. \quad (2.12)$$

Para estudiar la forma de este potencial es de importancia conocer los puntos extremos así como los casos límite. Para la derivada de la función $f(x)$ en la ec. (2.9) tenemos

$$\frac{df(x)}{dx} = 2 \left[1 + x \log \left(\frac{x}{1+x} \right) \right], \quad (2.13)$$

y para el potencial V ec. (2.12) tenemos

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{m^2\Lambda^2\phi}{4\pi^2} \left\{ \frac{4\pi^2}{g^2\Lambda^2} - 1 - \left(\frac{mg\phi}{\Lambda} \right)^2 \log \left(\frac{\left(\frac{mg\phi}{\Lambda} \right)^2}{1 + \left(\frac{mg\phi}{\Lambda} \right)^2} \right) \right\}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{m^2\Lambda^2\phi}{4\pi^2} \left\{ \frac{4\pi^2}{g^2\Lambda^2} - 1 - x \log \left(\frac{x}{1+x} \right) \right\}. \quad (2.15)$$

La condición $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$ implica las siguientes ecuaciones:

$$i) \phi = 0, \quad \text{or} \quad ii) \frac{4\pi^2}{g^2\Lambda^2} - 1 = x \log \left(\frac{x}{1+x} \right). \quad (2.16)$$

La primera nos dice que el origen $\phi = 0$ es un punto extremo, y al tomar la segunda derivada $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$ tenemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=0} = \frac{m^2g^2\Lambda^2}{4\pi^2} \left(\frac{4\pi^2}{g^2\Lambda^2} - 1 \right), \quad (2.17)$$

de donde podemos ver que si $\frac{4\pi^2}{g^2\Lambda^2} > 1$ entonces el extremo $\phi = 0$ es de hecho un mínimo, mientras que si $\frac{4\pi^2}{g^2\Lambda^2} < 1$ entonces tenemos un máximo en el origen. Definiendo g_c como

$$g_c^2 \equiv \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} \quad (2.18)$$

vemos que un acoplamiento débil $g < g_c$ da un mínimo en el origen, mientras que uno fuerte $g > g_c$, da un máximo. Así, el tipo de extremo en el origen del potencial está determinado por el acoplamiento.

Pasemos ahora al segundo punto extremo del potencial. Ya que el lado derecho de la segunda ecuación (2.16) es negativo (i.e. $x \log \left(\frac{x}{1+x} \right) \leq 0$), esta ecuación tiene solución solamente para acoplamiento fuerte $g > g_c$. Además, dado que esta es una ecuación trascendental, no es posible resolverla analíticamente para x (o equivalentemente para el campo ϕ); aunque se puede resolver numéricamente. Una forma de visualizar la solución es encontrando la intersección entre la curva de la función $x \log \left(\frac{x}{1+x} \right)$ en el lado derecho de la segunda ecuación (2.16), y la línea recta asociada a la constante en el lado izquierdo. Dicha función en el lado derecho es una monótona decreciente, lo cual significa que, si existe, hay *sólo una* solución para la variable x , lo cual por la definición (2.6) da a su vez una solución no trivial para el campo $\phi = \phi_{min}$ (o más precisamente dos, relacionadas por un cambio de signo por ser x una función cuadrática de ϕ). En este caso el extremo corresponde a un mínimo (ya que no puede haber un máximo junto a otro máximo, el del origen).

Permítasenos introducir un parámetro s escribiendo

$$g = s \cdot g_c = s \cdot \frac{2\pi}{\Lambda}. \quad (2.19)$$

, de esta manera podemos asegurarnos de tener un acoplamiento fuerte tomando $s > 1$. Ahora, dado un valor para g con $g > g_c$ se fija un valor de x , digamos $x = x_0$ que es solución en la ecuación ii) (2.16) y que minimiza al potencial, es decir $V_{min} = V(x_0)$. Entonces, sustituyendo ii) (2.16), y usando (2.19), podemos escribir V_{min} de manera conveniente:

$$V_{min} = \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \left[\frac{x_0}{s^2} - \text{Log}(1 + x_0) \right], \quad (g = s \cdot g_c, s > 1), \quad (2.20)$$

la cual nos da una idea de la magnitud del potencial en términos de Λ , la escala de energía.

Nótese que en todos los casos, tenemos para x grande el límite $V \rightarrow \infty$ para $x \rightarrow \infty$ independientemente del valor del acoplamiento g . Sintetizando, tenemos: si el acoplamiento es débil $g < g_c$,

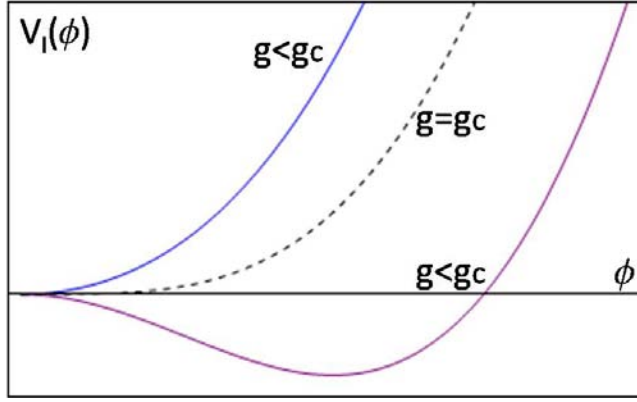


Figura 2.2: Potencial efectivo (2.12) como una función de ϕ . El valor crítico del acoplamiento g_c , separa dos comportamientos cualitativamente diferentes.

el potencial se minimiza en el origen $\phi = 0$; si el acoplamiento es fuerte $g > g_c$, el potencial se minimiza en un valor no trivial $\phi = \phi_{min}$ (figura 2.2). El valor del acoplamiento $g = g_c$ define el valor crítico que separa ambos comportamientos del potencial.

El campo $\phi \sim \bar{\psi}\psi$ en la ecuación (2.4), es un invariante de Lorentz, así que ϕ es un campo escalar. Cuando el campo ϕ se estabiliza, el valor de expectación no-trivial la amplitud del campo escalar es no nula. Ahora, si el campo tiene un valor de expectación $\langle \phi \rangle = 0$, esto significa que el estado de pares de fermiones $\bar{\psi}\psi$ no está presente, y entonces tenemos un sistema que consiste en los fermiones originales sin masa, donde el condensado no es energéticamente favorecido. Esto sucede con un acoplamiento débil. Por otro lado, si el valor de expectación no es cero $\langle \phi \rangle \neq 0$, tenemos un condensado de fermiones representado efectivamente por el campo escalar. Esto sucede con acoplamiento fuerte, donde el condensado fermiónico se forma dinámicamente porque reduce la energía del sistema.

Así pues, vemos que el fluido fermiónico puede encontrarse en dos estados físicos (fases) diferentes, consistentes en fermiones no masivos ó un condensado en forma de campo escalar, donde la fase está determinada por la fuerza del acoplamiento. Señalemos que cada fase se presenta una a la vez, ya que una vez fijado el valor del acoplamiento, éste permanece constante; no hay transiciones de fase y el sistema permanece en su estado. A continuación nos proponemos investigar la dinámica cosmológica de este fluido para cada fase.

Capítulo 3

Cosmología Básica.

El modelo cosmológico estándar actual (la teoría del Big Bang) se basa en la Teoría de la Relatividad General, con la cual se estudia la evolución del universo, pero no nos dice nada sobre la naturaleza de su contenido material. Las ecuaciones del campo gravitacional (ecuaciones de Einstein) relacionan la geometría del espacio y el tiempo con la materia y energía que contienen:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

El tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(\partial^2 g_{\mu\nu})$ está dado en términos de derivadas de segundo orden del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (el cual describe la geometría del espacio-tiempo), y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento de la materia. Si se asumen condiciones de homogeneidad e isotropía del espacio, el tensor métrico tiene la forma¹

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -a(t), -a(t), -a(t)), \quad (3.2)$$

y la métrica $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ en coordenadas esféricas se puede escribir como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.3)$$

donde el coeficiente $a(t)$ es conocido como *factor de escala* (en cierto sentido un *radio* del universo); k es un parámetro que determina la curvatura espacial: si $k = +1$ el universo es cerrado con geometría esférica; si $k = 0$ es abierto con geometría plana, y si $k = -1$ es abierto con geometría hiperbólica. Los números r , θ y ϕ son variables convenientes para un sistema de coordenadas comóvil.

Por consistencia con la homogeneidad e isotropía, la configuración de materia queda restringida. En este caso el universo debe contener fluidos perfectos caracterizados por un tensor de energía-momento de la forma $T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P)$, con densidad de energía ρ , y presión P . Bajo estas suposiciones las ecuaciones de Einstein equivalen a dos ecuaciones independientes; la ecuación de Friedmann²

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (3.4)$$

¹Ya que estas suposiciones están de acuerdo con las observaciones (la CMBR es un baño *uniforme* de radiación, mientras que la estructura a gran escala LSS Structure revela una distribución uniforme de materia a escalas cosmológicas $\gtrsim 100 Mpc$ aprox.), así que las ecuaciones sin perturbaciones que usaremos aquí son válidas con un alto grado de fiabilidad.

²A lo largo de este escrito se trabaja en unidades $c = \hbar = 1$. Cuando se tome la masa de Planck igual a la unidad, $M_p = 1/\sqrt{8\pi G} = 2.44 \times 10^{18} GeV = 1$, se indicará explícitamente.

Es esta una ecuación muy interesante, ya que se puede interpretar diciendo que tanto la razón a la que el universo cambia de tamaño con el tiempo, así como su curvatura (primer miembro de la igualdad), están determinadas por la densidad total de energía que contiene (segundo miembro). También se tiene una ecuación para la aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) = 0. \quad (3.5)$$

En conjunto, ambas son conocidas a veces como ecuaciones FRWL (Friedmann -Robertson -Walker -Lemaitre, quienes contribuyeron a la teoría). Es conveniente introducir el *parámetro de Hubble*

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.6)$$

según esta definición, H en general puede ser variable (aunque a escalas de tiempo cosmológicas puede cambiar muy lentamente), por lo que hay que evitar confusiones cuando se trate de la cantidad al día de hoy H_o conocida como "la constante de Hubble".

A lo largo del presente trabajo, nosotros tomaremos siempre el parámetro de curvatura $k = 0$, es decir, un universo *plano*. Por un lado, este es un resultado obtenido del análisis de la CMB con un alto grado de precisión (ver referencias), es decir de la *observación*; y por otro lado es una predicción *teórica* si se asume la validez de la Inflación Cósmica Temprana. De esta manera, la ecuación (3.4) puede ser reescrita en términos de H sustituyendo la definición (3.6) como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (k = 0, \text{ universo plano}). \quad (3.7)$$

Obsérvese que si se multiplica el primer miembro de (3.4) por un factor $1/G$ entonces cada término adquiere unidades de densidad de energía. Esto sugiere concebir una *densidad de curvatura* ρ_k asociada con el parámetro de curvatura k , y una *densidad crítica* ρ_c para cuando $k = 0$. De esta manera se define

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G}H^2 \quad (\text{densidad crítica}), \quad \rho_k = \frac{3}{8\pi G}\frac{k}{a^2} \quad (\text{densidad de curvatura}), \quad (3.8)$$

así que la ecuación (3.4) puede interpretarse también como una expresión para la densidad de energía *total* ρ :

$$\rho_c + \rho_k = \rho. \quad (3.9)$$

La propiedad de la divergencia $\nabla_\mu G_{\mu\nu} = 0$ del tensor de Einstein implica a su vez $\nabla_\mu T_{\mu\nu} = 0$, de donde se puede extraer una ecuación de continuidad para la densidad de energía, o en otras palabras una ley de conservación de energía:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0. \quad (3.10)$$

Muchas veces es posible escribir para un fluido perfecto " α " una ecuación de estado que relaciona su densidad de energía ρ_α con la presión P_α (llamada por esto ecuación de estado *barotrópica*) de la forma

$$P_\alpha = w_\alpha \rho_\alpha, \quad (3.11)$$

donde w_α , el coeficiente barotrópico de estado, es un parámetro utilizado para caracterizar al fluido. Si este coeficiente es *constante*, entonces la ec. (3.10) puede resolverse analíticamente. Es notable el hecho de que, desde el punto de vista cosmológico, el contenido del universo puede caracterizarse

con muy buena aproximación por sólo un parámetro (1), como es el coeficiente barotrópico w_α . Es también notable que parte de este contenido puede caracterizarse como radiación, con $w_r = 1/3$, o materia (polvo), el cual tiene $w_m = 0$ (la Energía Oscura sería una contribución diferente). Para estas componentes tenemos, respectivamente

$$\rho_r = \rho_{ri} \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-4}, \quad \rho_m = \rho_{mi} \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-3}, \quad (3.12)$$

donde la etiqueta "i" se refiere a un valor inicial.

Como se mencionó antes, uno de los entes más utilizados en los modelos de teorías cosmológicas, ya sea para modelar Materia Oscura o Energía Oscura, son los campos escalares. Un campo escalar, digamos ϕ , con un potencial de auto-interacción $V(\phi)$, tiene una densidad de energía ρ_ϕ y presión P_ϕ dadas por

$$\rho_\phi = E_k + V(\phi), \quad P_\phi = E_k - V(\phi), \quad E_k = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2, \quad (3.13)$$

donde hemos definido de paso la energía cinética E_k , en la tercera ecuación. Es bien conocida ecuación de Klein-Gordon de la física de partículas. Sin embargo, en el contexto cosmológico es necesario tener en cuenta el cambio de métrica, ya que no estamos considerando una métrica plana de Minkowski, sino la métrica FRW dada en la expresión (3.3). Si se desprecian las derivadas espaciales (de acuerdo con las condiciones de homogeneidad e isotropía), se llega a la ecuación de movimiento para un campo escalar:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \partial_\phi V = 0. \quad (3.14)$$

Para un universo que contiene más de un fluido, caracterizado cada uno por una densidad de energía ρ_α , y presión P_α , podemos escribir

$$\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha, \quad P = \sum_\alpha P_\alpha, \quad (3.15)$$

donde ρ y P son la densidad y presión totales. Cuando los fluidos no interactúan entre sí más que gravitacionalmente, la energía de cada uno de ellos debe conservarse por separado, es decir, debe satisfacerse $\dot{\rho}_\alpha + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_\alpha + P_\alpha) = 0$ para cada componente α . Si existe interacción no gravitacional entre los fluidos la ec. (3.10) no necesariamente se satisface para las densidades de cada fluido individualmente. Siempre es posible definir una expresión para la presión en términos de la densidad de energía de la misma forma que la ecuación de estado barotrópica. Así, podemos escribir para el campo escalar la expresión $P_\phi = w_\phi \rho_\phi$, aunque en este caso el coeficiente barotrópico w_ϕ , en general no es constante, y normalmente podrá expresarse como función, ya sea del factor de escala o del tiempo. Exclusivamente a un fluido con coeficiente barotrópico constante, nos referiremos algunas veces con el nombre de "fluido barotrópico".

Es conveniente definir la razón de la densidad de energía de una componente α respecto a la densidad de energía crítica, obteniendo una *densidad relativa* del fluido correspondiente:

$$\Omega_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\rho} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_\alpha. \quad (3.16)$$

A partir de esta definición y la ecuación (3.12) podemos saber cómo cambia la densidad relativa de un fluido barotrópico con el tiempo:

$$\frac{\Omega_\alpha}{\Omega_{\alpha i}} = \left(\frac{H}{H_i} \right)^{-2} \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-3(1+w_\alpha)}, \quad (w_\alpha = cte.) \quad (3.17)$$

Si por ejemplo se considera un universo que contiene materia, radiación y un campo escalar como componentes materiales, la densidad de energía crítica es

$$\rho_c = \rho_r + \rho_m + \rho_\phi, \quad (3.18)$$

con la correspondiente densidad relativa $\Omega_c = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\phi$. Obsérvese que si se toma la ecuación (3.4) y se dividen ambos miembros por la densidad crítica, la densidad relativa total es $\Omega_c + \Omega_k = \Omega$, donde $\Omega_c = 1$. Al ser $k = 0$ para un universo plano, tenemos también para las correspondientes densidades de curvatura $\rho_k = 0$, $\Omega_k = 0$, y en este caso la densidad relativa crítica coincide con la total, $\Omega_c = \Omega = 1$. Vemos pues que las densidades relativas en un universo plano deben satisfacer la condición

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\phi = 1. \quad (3.19)$$

Una ecuación muy útil se obtiene al derivar la ecuación (3.7) y sustituir (3.10) en el resultado, obteniendo

$$\dot{H} = -\frac{8\pi G}{2}(\rho + P), \quad (3.20)$$

que nos dice que el cambio en la velocidad de expansión del espacio (equivalente al parámetro de Hubble) está determinado por la densidad de energía y la presión. Ya que en general H cambia, el factor de escala a lo hace con mayor razón.

De acuerdo a las teorías más plausibles, la evolución del universo debió incluir una etapa de inflación temprana en la que el factor de escala creció tan drásticamente que se hace necesario describir el cambio en términos exponenciales. Por ello se define el número de "e-folds" N comparando los tamaños: $a_f/a_i = e^N$, es decir que $N = \log(a_f/a_i)$. Esta idea puede usarse también para la inflación tardía (energía oscura). Un concepto muy útil, introducido inicialmente en estudios astronómicos, es el llamado "corrimiento al rojo" (*redshift*). Si un objeto cósmico emitió luz de longitud de onda λ cuando el universo tenía tamaño $a(t)$, entonces la longitud de onda observada al día de hoy (a_0) esta dada por $\lambda_0 = \frac{a_0}{a}\lambda$. El corrimiento al rojo z se define por la relación

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a} = e^N. \quad (3.21)$$

Las ecuaciones diferenciales (3.6), (3.14), (3.20), junto con (3.12) constituyen un sistema de ecuaciones completo. Aunque difícilmente puede encontrarse una solución analítica para este sistema, puede sin embargo ser resuelto numéricamente. De cualquier forma, siempre es conveniente tratar de indagar, en la medida de lo posible, el comportamiento general del sistema dinámico, ya que esto puede ayudarnos a entender o interpretar mejor las soluciones. Así pues, antes de pasar a resolver el sistema para nuestro fluido NJL, nos permitimos señalar los siguientes hechos genéricos:

La ecuación de movimiento (3.14) es similar a una ecuación para un oscilador armónico amortiguado ordinario, así que de entrada podemos decir que el comportamiento del campo escalar es análogo al de la amplitud de un oscilador que se mueve bajo un potencial conocido V , es decir, la dinámica del campo es tal que minimiza al potencial. A partir de una condición inicial dada ϕ_i , el campo rueda hacia valores menores del potencial, de tal manera que en el límite de tiempos grandes la amplitud adoptará un valor constante $\phi = \phi_{min}$, donde el potencial tiene el valor mínimo (el campo se estabiliza).

Dado que el factor de escala $a(t)$ es una cantidad positiva definida, las densidades de energía de la materia y radiación ecs. (3.12) son siempre positivas, y nunca llegan a ser cero para valores finitos del factor de escala. Así, la densidad total de energía (3.18) permanece siempre positiva en la medida en que se satisfaga la condición

$$\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\phi > 0. \quad (3.22)$$

Entonces, la ecuación (3.7) dice que $H = 0$, es decir que $\dot{a} = 0$, *nunca* sucede (eq. (3.6)) mientras la densidad no se anule, $\rho \neq 0$. Esto implica que $\dot{a} > 0$ *siempre*. A su vez, esto significa que el factor de escala $a(t)$ nunca alcanza un valor máximo a lo largo de su evolución. Nótese que es importante tomar la condición inicial de la variable de Hubble *positiva* $H_i > 0$, pues de otra forma, si fuera negativa, el universo ya estaría contrayéndose.

Ahora bien, es interesante el hecho de que no hay ningún principio físico que prohíba la existencia de potenciales negativos $V(\phi) < 0$ (el significado de esto está sujeto a interpretaciones). Si este es el caso, bien puede pasar que la ecuación (3.22) se convierta en una igualdad para algunos valores del campo, lo cual implicaría $\rho = 0$ para valores finitos de $a(t)$. Esto a su vez implica $H = 0$, o $\dot{a} = 0$; es decir que el factor de escala alcanza un valor extremo (de hecho un máximo, ya que, como se dijo antes, $a(t)$ se encuentra creciendo inicialmente). Ahora, la ecuación (3.20) dicta que el parámetro de Hubble H decrece *siempre* (porque el lado derecho de esta ecuaciones siempre negativo), así que después de ser $H = 0$, debe suceder $H < 0$, y por lo tanto $\dot{a} < 0$, es decir, el factor de escala ahora debe decrecer. En otras palabras, el universo se debe estar contrayendo después de alcanzar su máximo tamaño. Hay que tener presente que este resultado es una consecuencia solamente de la negatividad del potencial, y es independiente de su forma funcional específica. Obsérvese también que esto tiene lugar aún en un universo plano, ya que hemos conservado en todo momento la condición $k = 0$. Un universo que mantiene su contracción hasta un tamaño nulo se dice que *colapsa*.

Es interesante notar también que, para potenciales que toman valores negativos al ser minimizados, y cuando el campo ha sido estabilizado alrededor del mínimo, donde se ha disipado suficiente energía cinética como para ignorarla, la densidad de energía del campo queda representada casi en su totalidad por el potencial, $\rho_\phi \simeq -|V_{min}|$, así que se convierte en una cantidad negativa. Esto significa que la densidad relativa ya no está restringida a los valores "ordinarios" $0 \leq \Omega_\alpha \leq 1$, como normalmente se espera. Sin embargo, la ecuación (3.19) siga siendo válida. Dirémos más sobre esta extraña situación más adelante, cuando tratemos con el potencial NJL para el caso de acoplamiento fuerte.

Capítulo 4

Cosmología del modelo NJL.

Una de las implicaciones de la Relatividad General es el muy interesante hecho de que la evolución del universo está determinada por su contenido material (especificado por el comportamiento de su densidad de energía y presión) de la cual, ya mencionamos antes (sección Antecedentes), el 96% es desconocido. No menos interesante es el hecho de que, bajo aproximaciones razonables, *a nivel cosmológico* el coeficiente de estado barotrópico w_α sea el único parámetro relevante para distinguir los diferentes tipos de materia (fluidos). De acuerdo a la Física Estadística y la Física de partículas se puede mostrar que la materia (la cual nivel cosmológico se comporta como polvo) tiene $w_m = 0$, mientras que para la radiación $w_r = 1/3$. Resulta que ¡*todas* las partículas del Modelo Estandar (4%) caen dentro de una de estas dos descripciones! Por otro lado, las investigaciones sobre Formación de Estructura (LSS, large scale structure) y dinámica de galaxias sugieren que la Materia Oscura debería consistir en partículas no relativistas, y por lo tanto quedaría descrita también por la ecuación de estado $w_m = 0$. Así pues sabemos que hay $23\% + 4\% = 27\%$ de materia y radiación, más el 73% de Energía Oscura con coeficiente de estado desconocido (pero restringido a ser $w_{DE} \lesssim -4/9$ al día de hoy).

A continuación investigamos la dinámica cosmológica de cada fase derivada del modelo de interacción fermiónica de Nambu y Jona-Lasinio (representadas por el campo escalar ϕ bajo el potencial de auto-interacción (2.10)), en presencia de dos fluidos barotrópicos (materia y radiación), es decir tres fluidos a la vez. Para esto resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales constituido por las expresiones (3.12), (3.6), (3.20) y (3.14), las cuales escribimos agrupadas a continuación para mayor claridad:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= aH, \\ \dot{H} &= -\frac{1}{2M_p^2} \left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_r + \dot{\phi}^2 \right), \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V_I(\phi)}{\partial \phi} &= 0, \\ \rho_r &= \rho_{ri} \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-4}, \quad \rho_m = \rho_{mi} \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-3}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde el potencial efectivo es el definido en la ec. (2.12):

$$V_I(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \left[\frac{m^2g^2\phi^2}{\Lambda^2} + \left(\frac{m^2g^2\phi^2}{\Lambda^2} \right)^2 \log \left(\frac{\frac{m^2g^2\phi^2}{\Lambda^2}}{1 + \frac{m^2g^2\phi^2}{\Lambda^2}} \right) + \log \left(1 + \frac{m^2g^2\phi^2}{\Lambda^2} \right) \right].$$

Anticipando la definición de futuros términos adicionales, hemos etiquetado al potencial con el subíndice "I" para distinguirlo de otras contribuciones a un potencial total y así prevenir la confusión.

4.1 Dinámica de la Fase de Fermiones no-Masivos (Acoplamiento Débil, $g < g_c$).

Hemos visto antes en el capítulo 2 que para un acoplamiento débil, el potencial tiene solamente un mínimo global, el cual está localizado en el origen $\phi_{min} = 0$, con $V(\phi_{min}) = 0$, así que V nunca toma valores negativos. Por lo tanto, la densidad de energía total y la variable de Hubble H no se anulan para ningún valor finito del factor de escala. Esto implica que es siempre $\dot{a} > 0$, debido a la ec. (3.6). Luego, el factor de escala $a(t)$ siempre crece, yendo a un tamaño infinito dada una cantidad infinita de tiempo. Ahora, de la ecuación (3.5) puede verse que, para que la expansión del universo se frene, $\ddot{a} < 0$, debe cumplirse la condición

$$\frac{2}{3}\rho_r + \frac{1}{2}\rho_m + \dot{\phi}^2 > V(\phi). \quad (4.2)$$

lo cual, por supuesto, no siempre es el caso. Por ejemplo, la amplitud inicial del campo ϕ_i puede tener el valor necesario como para hacer que el potencial $V_i = V(\phi_i)$ sea lo suficientemente grande de manera que la desigualdad (4.2) no se cumpla, y se tenga en su lugar $V > \frac{2}{3}\rho_r + \frac{1}{2}\rho_m + \dot{\phi}^2$. En este caso el factor de escala podría estar acelerándose, aunque ésta sería una aceleración "temprana", ya que se presentaría a tiempos iniciales, es decir, antes de que los fluidos involucrados se diluyan (a valores de la época presente) y antes de que el campo evolucione hacia el mínimo. Conforme pasa el tiempo, el campo rodaría hacia el mínimo del potencial y eventualmente adquiriría algún valor $\phi < \phi_i$ tal que la condición (4.2) llegará eventualmente a satisfacerse. Dado que las densidades

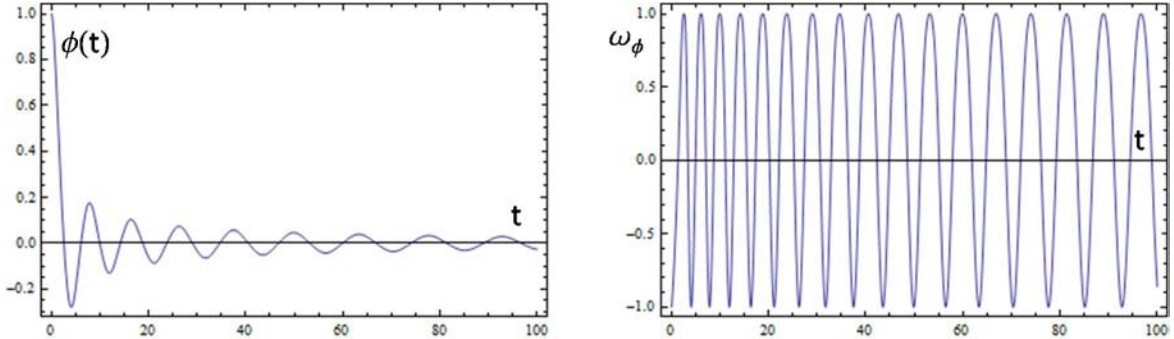


Figura 4.1: *Izquierda:* Evolución del campo escalar ϕ . *Derecha:* Coeficiente de Estado del campo ω_ϕ . Ambas variables son se muestran como funciones del tiempo.

de materia y radiación no alcanzan un valor nulo en tiempo finito, y como la amplitud del campo tiende a estabilizarse alrededor del mínimo (i.e. $\phi \rightarrow 0$), en donde la velocidad y el potencial tienden a desaparecer, $V \sim 0$, $\dot{\phi} \sim 0$, no hay razón para esperar que la condición (4.2) deje de cumplirse en algún momento; por el contrario, ésta se satisface hasta el final.

En las figuras de abajo mostramos una solución numérica. En la figura 4.1 vemos que el campo presenta una oscilación amortiguada alrededor de $\phi = 0$, y en consistencia con esto, su energía cinética (velocidad) disminuye con el tiempo. Simultáneamente, el potencial evaluado en $\phi \sim 0$ toma valores cercanos a cero (de acuerdo con $V(\phi_{min}) = 0$). Podemos ver que, aunque el universo

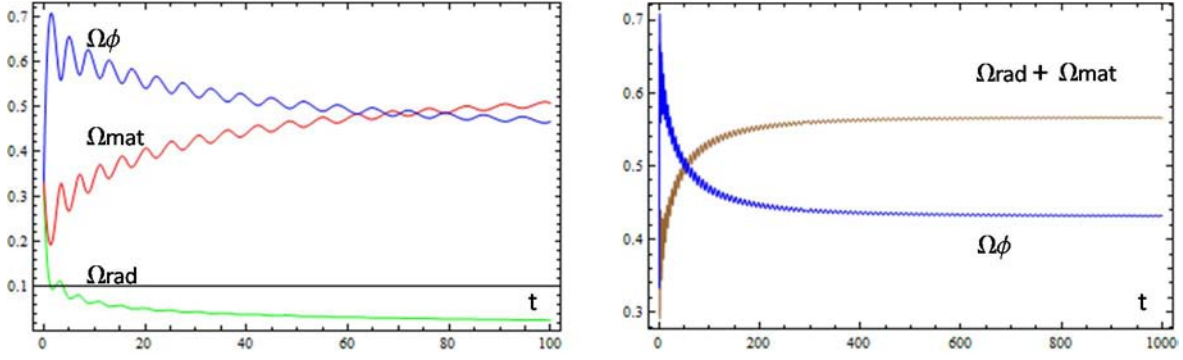


Figura 4.2: *Izquierda:* Densidades Relativas Ω_α de la radiación, materia y el campo. *Derecha:* Densidad relativa del total de fluidos barotrópicos, y del campo ϕ . El eje horizontal en ambas gráficas representa al tiempo. Nótese que se muestran diferentes escalas de tiempo en cada gráfica.

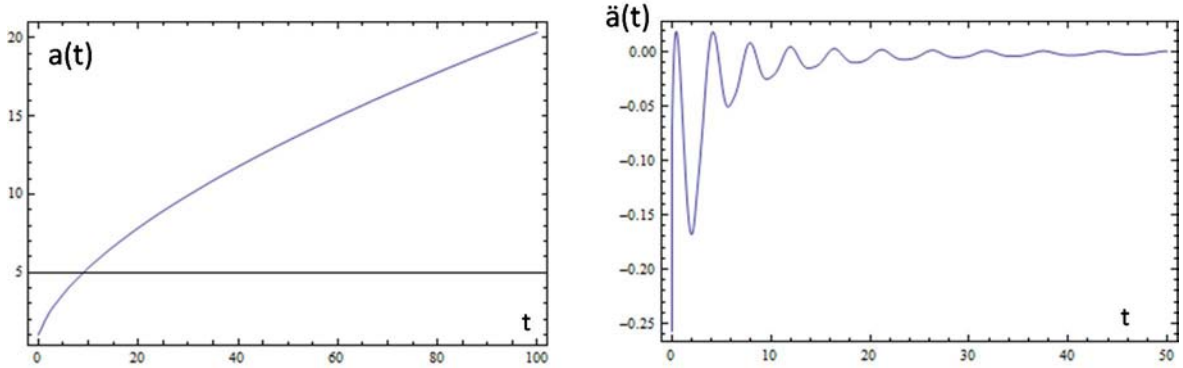


Figura 4.3: *Izquierda:* Factor de escala $a(t)$. *Derecha:* aceleración del factor de escala $\ddot{a}(t)$. Ambas variables se muestran en función del tiempo. Nótese que $\ddot{a}(t)$ inicia siendo negativa y muestra un comportamiento oscilatorio, de manera que puede tener unos "picos" positivos, pero permanece negativa casi todo el tiempo y tiende a cero desde abajo a tiempos grandes.

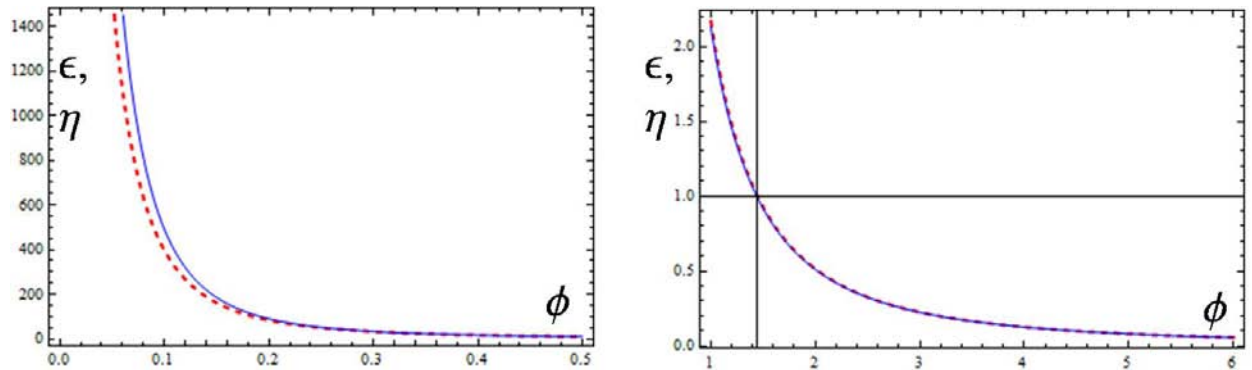


Figura 4.4: Parámetros de rodamiento suave ϵ (curva punteada-roja), y η (curva continua-azúl). *Izquierda:* desde $\phi = 0$ a $\phi = 0.5$. *Derecha:* desde $\phi = 1$ a $\phi = 6$. Solamente en la región $\phi \gtrsim 1.4$ aprox. (y en adelante) se puede esperar que se cumplan las condiciones de aceleración $\epsilon < 1$, $\eta < 1$.

se está expandiendo, siempre termina en un régimen sin aceleración dado el tiempo suficiente (como

explicamos arriba, dependiendo de las condiciones iniciales puede existir un breve tiempo en el que se encuentre una fluctuación de aceleración positiva en época temprana; ver fig. 4.3).

Una expansión del potencial en series de Taylor alrededor del mínimo $\phi = 0$ da

$$V \simeq \frac{1}{2}m^2 \left(1 - \frac{\Lambda^2 g^2}{4\pi^2}\right) \phi^2, \quad (4.3)$$

donde el coeficiente completo que multiplica a ϕ^2 , es una cantidad positiva, ya que es $g^2 < 4\pi^2/\Lambda^2$. El coeficiente de estado ω_ϕ , que definimos en seguida de la ecuación (3.10) para el campo ϕ se escribe explícitamente como

$$\omega_\phi = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{E_k - V}{E_k + V}. \quad (4.4)$$

En la literatura puede encontrarse el resultado bien conocido de que un campo gobernado por un potencial de la forma $V \sim \phi^n$, se estabiliza en un coeficiente de estado $\omega = (n-1)/(n+1)$ [vgr. ref. de la Macorra '99]. Dado que a tiempos tardíos, cuando el campo entra en el régimen de oscilación alrededor del mínimo, el potencial es una función cuadrática del campo, de acuerdo a la ec. (4.3), tenemos el valor medio $\langle \omega_\phi \rangle = 0$, y la densidad del campo ρ_ϕ se diluye igual que la de la materia, con $\rho_\phi \propto a^{-3}$.

Ahora, en el contexto de la teoría de la Inflación Cósmica Temprana, se definen los llamados *parámetros de Rodamiento Suave* (Slow Roll), como sigue:

$$\epsilon = \frac{M_p^2}{2} \left(\frac{V'}{V}\right)^2, \quad \eta = M_p^2 \left(\frac{V''}{V}\right). \quad (4.5)$$

Estos parámetros ayudan a saber cuando un potencial puede causar una aceleración positiva del factor de escala. Para esto se deben cumplir las condiciones $\epsilon < 1$, $|\eta| < 1$. Aún cuando éstas se deducen suponiendo un solo campo escalar, sin fluidos adicionales, siguen siendo útiles para caracterizar al potencial. Por completez, mostramos estos parámetros para nuestro potencial en la fig. 4.4. Si tomamos como referencia valores del potencial tales que $V \sim \Lambda^4$, $V' \sim \Lambda^3$, $V'' \sim \Lambda^2$ entonces $\epsilon \sim (M_p/2\Lambda)^2$, $\eta \sim (M_p/\Lambda)^2$. Hasta ahora no podemos decir nada sobre el valor del corte, y no hay razón de principio para limitar su valor. Si tomamos el máximo valor físicamente razonable $\Lambda = M_p$, entonces los valores del campo son los que se muestran en la figura, en donde se puede apreciar que las condiciones de rodamiento podrían empezarse a cumplir para amplitudes del campo algo mayores a la unidad, que en este caso sería igual a M_p (cuando el potencial posee mínimos no triviales, comunmente dichas amplitudes pueden expresarse en términos de un coeficiente que incluye al corte y otros parámetros que entran en el potencial, multiplicado por el corte). Sin embargo, para valores $\Lambda \ll M_p$ (que serían más razonables), la amplitud del campo para la que se cumplen las condiciones de rodamiento suave serían muchísimo mayores que el corte, lo cual no está permitido y por lo tanto tampoco lo está la aceleración del factor de escala.

4.2 Dinámica del Condensado Fermiónico (Acoplamiento Fuerte, $g > g_c$).

El caso de acoplamiento fuerte lleva a un condensado de fermiones y a un potencial V_I que es negativo en el mínimo. Este potencial en el origen vale $V(\phi = 0) = 0$, y decrece hacia valores negativos a partir de ahí, es decir, para $0 < \phi < \phi_{min}$. A partir del mínimo, para valores mayores $\phi > \phi_{min}$, el potencial crece monótonamente, así que eventualmente pasa de valores negativos

a positivos. Consideremos ahora la sencilla situación de un universo conteniendo solamente un campo escalar (es decir, sin fluidos adicionales, $\rho_r = \rho_m = 0$), que evoluciona bajo un potencial que toma valores negativos al ser minimizado $V_{min} = V(\phi_{min}) < 0$. Si la velocidad inicial es nula $\dot{\phi}_i = 0$, entonces la energía cinética del campo tiene igualmente un valor nulo, así que tenemos para la densidad de energía inicial $\rho_{\phi_i} = V_i$. La amplitud inicial del campo ϕ_i no puede tomarse de manera que $V(\phi_i) < 0$, porque esto llevaría a un valor imaginario para H , por la ecuación (3.7). Luego, debemos tomar siempre ϕ_i tal que $V_i > 0$. Como en el caso anterior de acoplamiento débil, debemos empezar con la condición inicial positiva $H_i = 1 > 0$, de esta forma la ecuación (3.6) dice que $a(t)$ inicialmente aumenta con el tiempo. La ecuación (3.20) se escribe $\dot{H} = -(1/2)\dot{\phi}^2$, así que H siempre disminuye con el tiempo. A medida que el potencial es minimizado, éste pasa de valores positivos a negativos, y por la ecuación (3.7) eventualmente llega a ser $H = 0$, pasando después a $H < 0$, lo cual corresponde respectivamente a $\dot{a} = 0$ and $\dot{a} < 0$. En palabras, esto significa que después de un período inicial de expansión (factor de escala creciente), el universo alcanza un valor máximo, seguido de un período de contracción. Puesto que \dot{H} es siempre negativa, luego $a(t)$ continuará decreciendo, y nada impedirá que tome un valor nulo, de manera que el universo necesariamente colapsa en el futuro en tiempo finito (la evolución es hacia adelante en el tiempo porque el campo se minimiza conforme el tiempo avanza, no viceversa).

Ahora, mientras la expansión tiene lugar, el campo rueda entrando eventualmente en un régimen de oscilación amortiguada, cerca del mínimo, donde el potencial se ha hecho negativo $V_{min} < 0$. Debido al rozamiento, la energía cinética tiende a desvanecerse $E_k \rightarrow 0$. Así, la densidad de energía del campo pasa de valores positivos $\rho_\phi = E_k + V > 0$ (en la cercanía de ϕ_i), valores a negativos $\rho_\phi \simeq -|V_{min}| < 0$ (en la cercanía del mínimo ϕ_{min}), de manera que en algún momento entre las dos situaciones, vale cero $\rho_\phi = 0$. La densidad de energía total, así como las densidades individuales de cada fluido (si hubiera fluidos adicionales), *disminuirían* en el tiempo (como puede verse para la radiación y la materia en las ecuaciones (3.12) con $\rho_\alpha \sim a^{-n}$, y $a(t)$ creciente). Por un razonamiento similar, debido a que $a(t)$ *decrece* en la fase de contracción del universo, las densidades de energía se comportan de manera opuesta, es decir, todas ellas *aumentan* con el tiempo. Por lo tanto, es de esperarse que la situación $\rho_\phi = 0$ suceda dos veces. A la vez, esto implica que el coeficiente de estado ω_ϕ , ec. (4.4) se convierta en una cantidad divergente también en dos ocasiones. Nótese que cerca de estos puntos de divergencia, el parámetro ω_ϕ deja de ser una cantidad útil para caracterizar el fluido representado por el campo ϕ . Más abajo en el texto mostramos un ejemplo de solución numérica (figs. 4.5-4.9).

Como mencionamos antes, al final del capítulo 3, una circunstancia similar de indefinición se presenta para las densidades relativas Ω_α : normalmente se considera que para que esta variable tenga sentido, una densidad relativa debería tomar valores $0 \leq \Omega_\alpha \leq 1$. Sin embargo, de la ecuación (3.16) puede verse que, si en algún momento es $H = 0$, entonces en la cercanía de este valor cada Ω_α se vuelve una cantidad divergente. La situación es aún más extraña para un campo escalar, pues dado que cerca del mínimo es $\rho_\phi \sim V_{min} < 0$, la densidad de energía del campo queda representada casi por completo por el potencial, que es negativo. Esto haría que $\Omega_\alpha \rightarrow -\infty$, es decir, ¡la densidad relativa del campo sería una cantidad divergente y *negativa*! Así, debemos tener cuidado en la interpretación de los parámetros que caracterizan un fluido dependiendo de la situación.

Consideremos ahora un universo que además de contener nuestro fluido NJL, tiene materia y radiación. Una pregunta interesante es, ¿puede la presencia de los fluidos adicionales afectar el colapso del universo? Recuérdese que la condición para que el factor de escala crezca puede reducirse a la desigualdad (3.22). Si el factor de escala debe crecer para siempre, esta condición se debe cumplir siempre. Ahora, de acuerdo a la explicación dada antes, el factor de escala de hecho

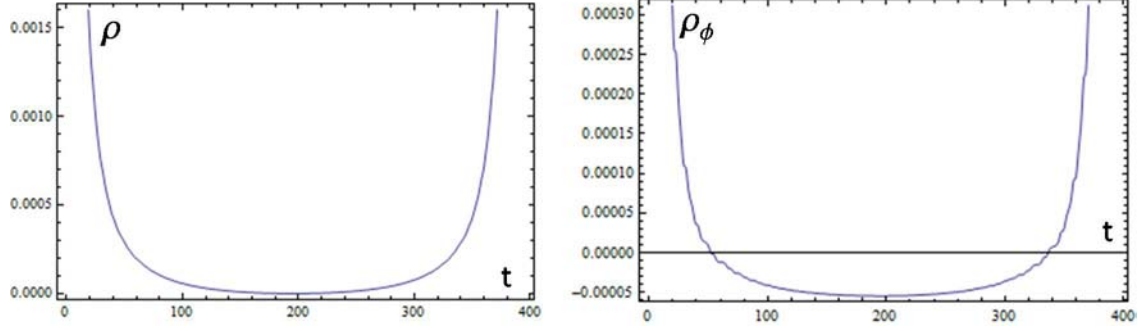


Figura 4.5: *Izquierda:* Densidad de energía total $\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\phi$. Ésta es una cantidad positiva y vale cero en un solo punto, cerca de $t \simeq 200$ aprox. *Derecha:* Densidad de energía del campo. Ésta cantidad se anula (es decir, $\rho_\phi = 0$) en dos ocasiones: una vez en la fase de expansión (cerca de $t = 60$ aprox.), y otra vez en la fase de contracción (alrededor de $t = 340$ aprox.); y se vuelve una cantidad negativa entre ambas.

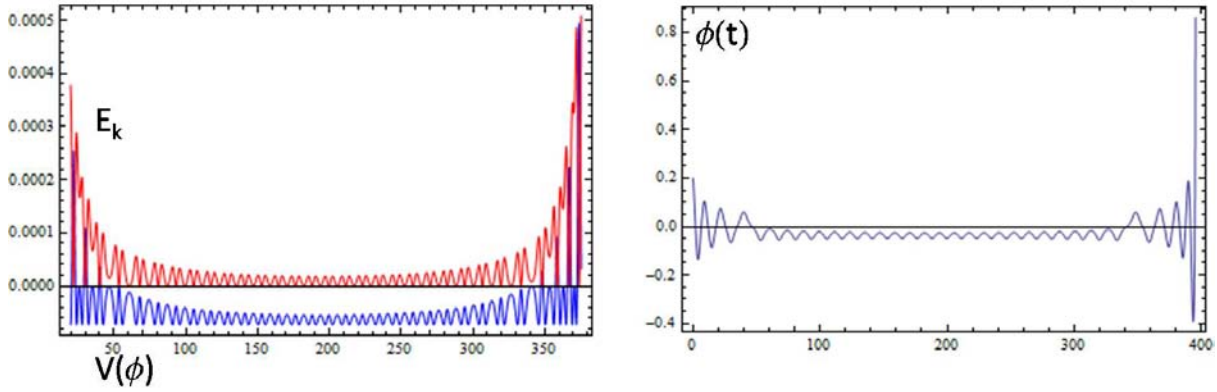


Figura 4.6: *Izquierda:* Aunque la energía cinética (curva roja-superior) es cero inicialmente, eventualmente supera a la energía potencial (curva azul-inferior), y permanece dominante hasta el tiempo de colapso, cuando $a(t) = 0$. *Derecha:* El campo oscila alrededor de ϕ_{min} , y se va haciendo divergente conforme se acerca a $t \simeq 400$, que es el tiempo cuando $a(t) \rightarrow 0$, es decir cuando se acerca el colapso.

debe estar creciendo inicialmente. Por tanto, de la ecuación (3.12) vemos que las densidades de los fluidos barotrópicos (materia y radiación) deben estar disminuyendo. Al mismo tiempo, debido a que el campo se está estabilizando en el mínimo del potencial, la energía cinética del campo $E_k = (1/2)\dot{\phi}^2$ está decreciendo a cero, mientras el potencial tiende al valor constante $V \rightarrow V_{min}$, de tal forma que la condición (3.22) necesariamente se deja de cumplir. Por lo tanto, vemos que aún la presencia de materia y radiación, no evita el colapso del universo.

Hasta ahora hemos realizado un análisis genérico y cualitativo, pero ahora presentamos una solución numérica para nuestro potencial NJL en particular para verificar los resultados (figures 4.5-4.9). Al observar las gráficas encontramos un interesante y no predicho comportamiento del campo: a medida que el factor de escala atraviesa sucesivamente los períodos de expansión y contracción, tiene lugar una fase de oscilación amortiguada del campo alrededor de ϕ_{min} , tal como se espera. Pero luego, en algún punto en el período de contracción, la amplitud del campo comienza

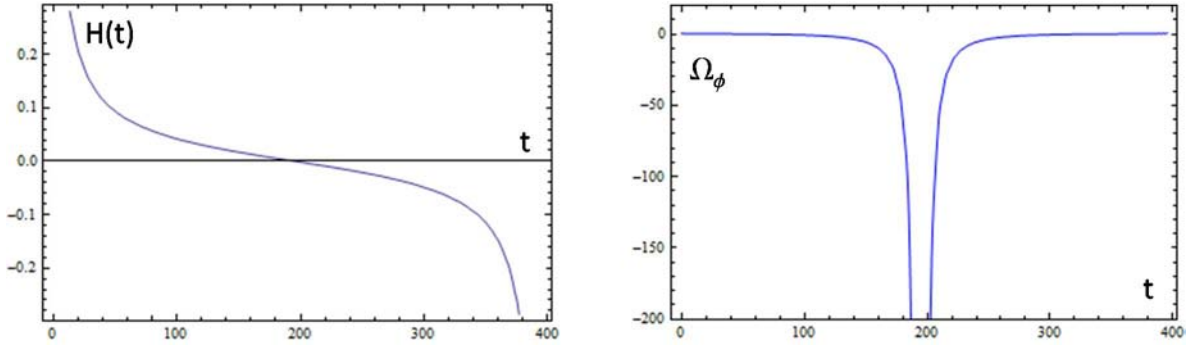


Figura 4.7: *Izquierda*: Parámetro de Hubble. Ese es una cantidad nula cerca de $t \simeq 200$ aprox. *Derecha*: Densidad relativa del campo. Ya que $H(t)$ se anula, Ω_ϕ se vuelve una cantidad divergente cerca del punto nulo.

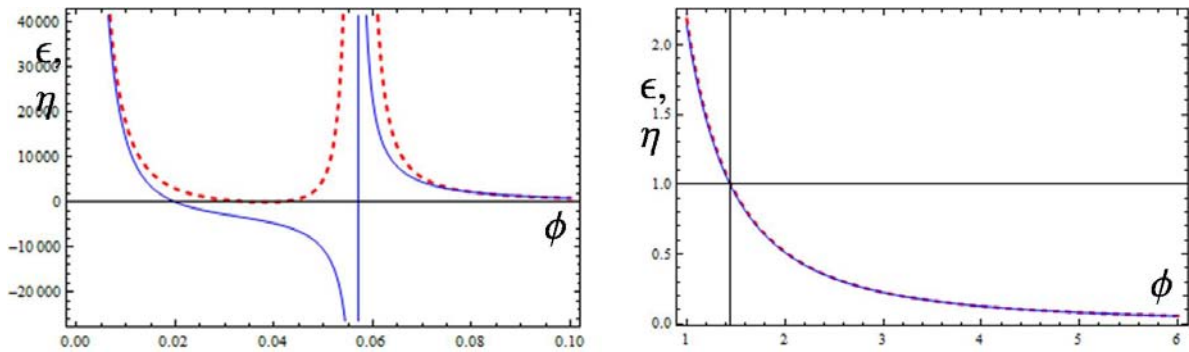


Figura 4.8: Parámetros de "Slow Roll" (rodamiento suave), ϵ (curva roja punteada), y η (curva azul continua). *Izquierda*: Desde 0 a 0.1 en ϕ . *Derecha*: Desde 1 a 6 en ϕ . Sólo en la región $\phi \gtrsim 1.4$ aprox. (y en adelante) puede uno esperar que las condiciones de aceleración $\epsilon \ll 1$, $\eta \ll 1$ sean satisfechas.

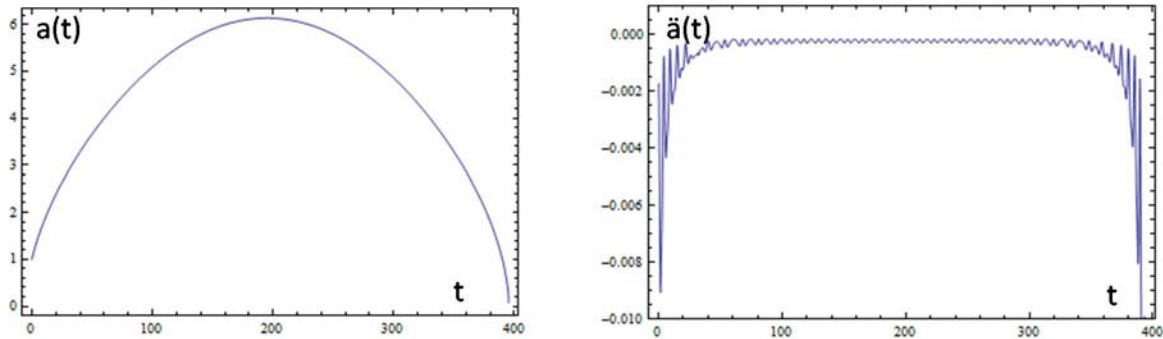


Figura 4.9: *Izquierda*: Factor de escala $a(t)$. *Derecha*: Aceleración $\ddot{a}(t)$. Ambas gráficas se interpretan como la descripción de un universo que se expande sin aceleración (nótese que $\ddot{a}(t)$ nunca es mayor que cero), alcanzando un tamaño máximo alrededor de $t \simeq 200$ aprox., después de lo cual entra en una fase de contracción hasta colapsar.

a adquirir valores mayores, de manera que, a medida que el factor de escala se acerca a $a(t) = 0$, el

campo es expulsado del mínimo para luego ¡crecer monótonamente!¹ ¿Es éste un resultado físico real? Intuitivamente, conforme $a(t)$ decrece, es razonable pensar que las densidades aumentan. En particular, si la densidad del campo $\rho_\phi = E_k + V$ se está haciendo más grande, esto debe ser resultado de un incremento en la velocidad del campo (es decir de que E_k , la energía cinética se hace grande); o de un incremento en la amplitud del campo (es decir el potencial se hace mayor); o ambos. Puede verse que de hecho, este resultado es real en la medida en que es consecuencia de la física. Tomando la ecuación (3.10), tenemos que la evolución de la densidad de energía de un fluido barotrópico ρ_b esta dada por

$$\dot{\rho}_b = -3H(\rho_b + P_b) = -3H\rho_b(1 + w_b), \quad (4.6)$$

y la de un campo escalar $\rho_\phi = E_k + V(\phi)$, con una presión $P_\phi = E_k - V(\phi)$ y energía cinética $E_k = \dot{\phi}^2/2$, es

$$\dot{\rho}_\phi = -3H(\rho_\phi + P_\phi) = -3H\dot{\phi}^2 = -6HE_k. \quad (4.7)$$

Estas ecuaciones (4.6) y (4.7), dicen que en un fluido barotrópico ρ_b con un coeficiente de estado $|w| < 1$, el signo de $\dot{\rho}_b$ y $\dot{\rho}_\phi$ es negativo en tanto que H sea positivo, mientras que el signo es positivo cuando $H < 0$. Por lo tanto, ρ_b , ρ_ϕ son funciones decrecientes del tiempo para $H > 0$, y crecientes para $H < 0$. Hemos visto que \dot{H} es siempre negativo, así que H decrece siempre en todos los casos, y se anula en un tiempo finito si ρ_ϕ se vuelve negativo, es decir, si el potencial V es negativo y $E_k = -V$, digamos en el momento $t = t_c$. Después de este tiempo $H(t > t_c)$ se vuelve negativa y permanecerá así en todo tiempo posterior $t > t_c$. Mientras, ρ_b y ρ_ϕ empezarán a crecer también en el tiempo para $t \geq t_c$.

La figura 4.6 muestra las energías cinética y potencial. Puede observarse que, aunque la energía cinética es cero al inicio, ésta rápidamente supera a la energía potencial y permanece así hasta las cercanías del momento del colapso t_{final} , cuando $a(t) = 0$, a tiempos tardíos. Al mismo tiempo, la energía potencial crece a medida que el tiempo se acerca a t_{final} , de tal manera que la amplitud del campo es eventualmente arrojada de su oscilación alrededor del mínimo.

4.3 Fluido NJL con una Constante Cosmológica.

Debido a sus propiedades teóricas y a requerimientos observacionales, la Constante Cosmológica es un ingrediente muy útil y muy usado en los modelos cosmológicos, por lo que vale la pena considerar los efectos de su presencia en nuestro modelo. Una constante cosmológica,² llamémosla L , está definida por una densidad de energía ρ_L que no cambia en el tiempo, y por un coeficiente de estado $\omega_L = -1$, asociado con una presión $P_L = -\rho_L$. En un universo que contiene *solamente* una Constante Cosmológica, la ecuación (3.5) se escribe $\ddot{a} = (8\pi G/3)a \times \rho_L$, la cual, dado que $\rho_L > 0$ implica $\ddot{a}(t) > 0$, o sea un universo que *siempre* se expande aceleradamente. De hecho, en este caso la ecuación (3.6) se puede resolver analíticamente, sustituyendo la ecuación (3.7). Esto resulta en la bien conocida solución $a(t) = a_i \exp(t\sqrt{8\pi G\rho_L/3})$. Ahora, ¿cómo afecta la presencia de una Constante Cosmológica a nuestras consideraciones previas de un universo conteniendo a nuestro fluido NJL, además de radiación y materia? Vimos antes que en presencia de un campo escalar con potencial negativo $V < 0$, el universo colapsa inevitablemente, así que si se suma una constante cosmológica, el universo ¿acelerará o colapsará; o ambas? Dado que la densidad ρ_L es

¹También podría decrecer en lugar de crecer, dependiendo de las condiciones iniciales. En cualquier caso, el crecimiento monótono de la amplitud en valor absoluto, es un comportamiento inesperado que de hecho sucede.

²Es costumbre emplear la letra Λ para referirse a una Constante Cosmológica. Aquí nosotros cambiamos a L para evitar confusión con la escala de energía Λ .

constante, tenemos que las ecuaciones diferenciales no tienen que modificarse, además de simplemente añadir el término correspondiente en la expresión para H en la ecuación (3.7). En particular, la ecuación de movimiento (3.14) permanece inalterada, por lo que la dinámica del campo no es afectada. Igual que antes, tenemos que tratar dos casos por separado, como veremos a continuación.

a) Fermiones no-masivos ($g < g_c$). Como vimos antes, el potencial en este caso nunca es negativo, $V \geq 0$, y su valor mínimo es $V_{min} = 0$. Conforme pasa el tiempo, tanto la densidad de materia como la de radiación se diluyen y tienden a desvanecerse. De la ecuación (3.5), se puede deducir la condición para que el universo frene su expansión:

$$\rho_L < \rho_r + \frac{1}{2}\rho_m + 2E_k - V(\phi) \quad (\text{para que sea } \ddot{a} < 0). \quad (4.8)$$

Dado que el lado izquierdo de esta desigualdad disminuye con el tiempo, mientras que el lado derecho permanece constante, tenemos que esta desigualdad eventualmente deja de cumplirse y se convierte en una igualdad, lo que significa $\ddot{a} = 0$. Esto señala el inicio de un período de aceleración, es decir, empieza a ser $\ddot{a} > 0$, donde la desigualdad (4.8) se invierte. Si las condiciones iniciales hubieran sido tales que la desigualdad (4.8) fuera en sentido inverso, entonces siempre hubiera habido aceleración, porque el lado izquierdo nunca vuelve a crecer.

Así, vemos que para la fase de fermiones no-masivos del fluido NJL con una constante cosmológica, el universo necesariamente acelera en algún momento, el cual dependerá de las cantidades ρ_m , ρ_r respecto a ρ_L . Esto se especifica en las condiciones iniciales, que a su vez pueden elegirse para concordar con un modelo realista que se ajuste a las observaciones.

b) Condensado Fermiónico ($g > g_c$). En el caso de un acoplamiento fuerte, el potencial es negativo al ser minimizado, $V_{min} < 0$. ¿El universo necesariamente acelera también en este caso? Para que esto suceda, la condición (4.8) eventualmente debe convertirse en una igualdad, de manera que $\ddot{a} = 0$. Esta es la mínima condición a ser satisfecha, porque señala al menos el inicio de una aceleración; resta asegurarse de que esta aceleración se sostenga. Para ser más específicos, etiquetemos con un subíndice "ac" a todas las cantidades evaluadas en el tiempo t_{ac} , cuando es $\ddot{a} = 0$ (vgr. $V(t_{ac}) = V_{ac}$, etc.). De la ecuación (4.2) tenemos:³

$$\rho_L \geq \rho_{rac} + \frac{1}{2}\rho_{mac} + 2E_{kac} - V_{ac} \quad (\text{para } \ddot{a} \geq 0). \quad (4.9)$$

Recuérdese que el potencial toma tanto valores positivos como negativos, así que ambas posibilidades deben ser tomadas en cuenta. Ciertamente uno puede encontrar un conjunto de valores de V dado un ρ_L , en donde se satisfaga la desigualdad (4.9). Sin embargo, si más bien queremos considerar modelos realistas (no deseamos complicarnos la vida estudiando posibilidades de modelos genéricos no realistas), debemos restringirnos a valores compatibles con las observaciones.

De las definiciones (3.17) con $\omega = 0, 1/3$ se puede llegar a la relación $\Omega_r/\Omega_m = (1+z)r$, donde z es el corrimiento al rojo, y $r = \Omega_{r0}/\Omega_{m0}$ es la cantidad relativa de radiación y materia en la época presente (es una convención usual usar el subíndice "0" para denotar los valores "al día de hoy"). Ahora, las estimaciones para el momento en el que comienza la aceleración de nuestro universo son alrededor de $z \sim 1$, y las mediciones actuales dan $r \sim 10^{-4}$ (por simplicidad nos interesaremos aquí en el orden de magnitud solamente). Así que tenemos $\Omega_{rac} \sim 10^{-4} \times \Omega_{mac} \ll \Omega_{mac}$, or

³ ρ_L no necesita una etiqueta porque es una constante.

$\rho_{rac} \ll \rho_{mac}$. Ahora, de acuerdo al modelo cosmológico estándar, en la historia del universo un período de expansión desacelerada dominado por materia debió haber tenido lugar antes de que fuera $\ddot{a} = 0$. Para que esto fuera posible, la condición (4.8) debió haberse cumplido antes que la condición (4.9). Para $z \sim 1$ (se pueden considerar valores incluso tan grandes como $z \sim 10$, y aún así no cambiaría la esencia de los argumentos siguientes), y usando la condición (4.8) tenemos

$$\rho_m > 2(\rho_L + V - 2E_k) \quad (\text{para que sea } \ddot{a} < 0). \quad (4.10)$$

Si una aceleración positiva eventualmente tiene lugar, la expresión anterior debe convertirse en una igualdad con el paso del tiempo.

Supóngase ahora que $V > 0$. Entonces, a menos que E_k decrezca aún más rápido, el lado derecho de la desigualdad debería estar decreciendo en el tiempo, porque el potencial se está minimizando. Pero E_k de hecho no puede crecer más rápido, ya que el campo se encuentra bajo oscilación amortiguada, sin mencionar que E_k nunca es una cantidad negativa, así que la suma algebraica $V - 2E_k$ terminará decreciendo. Si los valores de estos hubieran sido tales que la igualdad se cumpliera en algún momento, de todas formas la aceleración en este caso no podría atribuirse a ρ_L .

Por otra parte, si $V < 0$, la desigualdad se haría aún más fuerte con el tiempo, porque de nuevo, el potencial se minimiza, $V \rightarrow V_{min}$, y $0 > V > V_{min}$. Por lo tanto, si inicialmente la desigualdad (4.10) empieza siendo satisfecha, permanecerá así siempre. En otras palabras, el universo nunca se acelera.

¿Qué hay del colapso en el futuro? ¿Puede la presencia de una constante cosmológica impedir el decrecimiento del factor de escala? Para que el factor de escala aumente debe ser $\dot{a} > 0$, lo cual es de hecho verdadero porque empezamos con un valor inicial $H_i > 0$.⁴ Como explicamos antes, para que el factor de escala alcance un valor máximo $a(t) = a_{max}$, digamos en $t = t_{am}$, debe ser $\dot{a} = 0$. Si asignamos la etiqueta "am" a las diferentes cantidades evaluadas en el tiempo t_{am} , tenemos para la densidad total de energía $\rho_{am} = 0$, así que $\rho_L + \rho_{ram} + \rho_{mam} + E_{kam} + V_{am} = 0$. La única manera en la que esto puede suceder es con $V_{am} < 0$. En este caso $V_{am} = -|V_{am}|$, y la condición que debe satisfacer ρ_L puede escribirse convenientemente como

$$\rho_L = |V_{am}| - E_{kam} - \rho_{mam} - \rho_{ram} \quad (\text{para } \dot{a} = 0). \quad (4.11)$$

Para mantener nuestro análisis tan simple como sea posible, podemos ignorar la contribución de la radiación haciendo $\rho_{ram} = 0$ (obsérvese que, si una aceleración hubiera sido posible, deberíamos haber asumido $t_{ac} < t_{am}$, es decir, aceleración antes de contracción, ya que de otra forma el modelo no sería realista; entonces, si $\rho_{rac} \ll 1$ la aproximación $\rho_{ram} \sim 0$ es aún mejor, porque $\rho_{ram} < \rho_{rac}$).

Ahora, nada impide que el potencial pueda ser lo suficientemente profundo como para que la igualdad (4.11) pueda ser cumplida. El momento exacto en el que esto se logra dependerá de las cantidades relativas E_{kam} , ρ_{mam} , respecto a ρ_L , es decir, de las condiciones iniciales. Sin embargo, podemos estimar un valor límite haciendo $\rho_{mam} \rightarrow 0$, $E_{kam} \rightarrow 0$, y tomando el potencial estabilizado $V \rightarrow V_{min}$. Entonces tenemos

$$\rho_L = |V_{min}| \quad (\text{Valor máximo permitido a } \rho_L \text{ para que el universo colapse}). \quad (4.12)$$

Después del momento en el que $\dot{a} = 0$ (ó $H = 0$, ec. (3.6)), el universo debe entrar en un período de contracción, porque H siempre decrece, ec. (3.20). Esto significa que $H_{am} \rightarrow H < 0$, i.e.

⁴Obsérvese que esta condición inicial debe tomarse como positiva, ya que de otra forma el universo *ya estaría* contrayéndose.

$\dot{a} < 0$. Así que eventualmente el universo colapsará en el futuro en un lapso de tiempo finito. Para $\rho_L > |V_{min}|$, el factor de escala nunca se contraería, porque en este caso la densidad total de energía ρ nunca se desvanece.

Es interesante observar que una Constante Cosmológica puede verse bajo otra perspectiva, como un caso particular de un campo escalar que evoluciona bajo un potencial genérico que es positivo al ser estabilizado. Como hemos visto, el modelo NJL tiene dos comportamientos diferentes dependiendo del valor del acoplamiento g . Permítasenos aproximar al potencial alrededor del mínimo tomando el esquema

$$V(\phi(t)) = V_o + \frac{1}{2}m^2(\phi(t) - \phi_o)^2, \quad (4.13)$$

donde V_o es una constante (que correspondería a $V_o = 0$ para acoplamiento débil, y $V_o < 0$ para acoplamiento fuerte), y ϕ_o otra constante. Podemos ahora preguntarnos en qué condiciones tenemos un universo acelerado. La evolución del campo escalar está determinada por $\ddot{\phi}' + 3H\dot{\phi}' + m^2\phi' = 0$, con $\phi' \equiv \phi - \phi_o$, y para mayor claridad podemos hacer la redefinición

$$\rho_L + \rho_\phi = \rho_L + E_k + V = \rho_L + V_o + E_k + \frac{1}{2}m^2(\phi - \phi_o)^2 = \rho_L + V_o + E_k + \frac{1}{2}m^2\phi'^2, \quad (4.14)$$

lo cual corresponde a un campo escalar masivo con densidad de energía $\rho'_\phi = E_k + \frac{1}{2}m^2\phi'^2$ en presencia de una constante cosmológica $\rho'_L = \rho_L + V_o$. Un campo escalar masivo puede acelerar al universo sólo para valores grandes de ϕ' (mayores que la masa de Planck) cuando los parámetros de rodamiento suave ϵ, η son menores a la unidad; mientras que a tiempos tardíos, cuando el campo escalar oscila alrededor del mínimo, la densidad de energía ρ'_ϕ se diluye como la de materia, es decir, $\rho'_\phi \propto 1/a^3$. Con el fin de que $\ddot{a} > 0$, debemos tener la cantidad $\xi \equiv \rho + 3p < 0$. Si consideramos un campo escalar (con potencial dado en ec. (4.13)), un fluido barotrópico (que por simplicidad y sin pérdida de generalidad podemos tomar como materia), y una constante cosmológica ρ_L , tenemos $\xi = \rho_m + 4E_k - 2(\rho_L + V)$. Cuando el potencial V_o es negativo (y en particular con acoplamiento fuerte para el fluido NJL), hay una cancelación entre las dos constantes ρ_L y V_o , y por lo tanto el campo juega en contra de la aceleración cerca del mínimo del potencial.

4.4 Energía Oscura, NJL y Teorías de Norma Supersimétricas.

Como hemos visto hasta ahora, el modelo NJL tiene implicaciones interesantes en la cosmología. Sin embargo, el modelo por sí mismo no reproduce la observada aceleración del universo, y aunque esta característica podría implementarse introduciendo una constante cosmológica "a mano", no es un procedimiento convincente en la medida en que uno esperaría tener una explicación de principio para hacerlo, siendo preferible contar con una teoría fundamental con la que se pueda argumentar un modelo dado. En nuestros días, los diversos tipos de teorías que pueden etiquetarse bajo el nombre de Teorías de Campos Supersimétricas, son un paradigma de teoría fundamental, ya que permiten englobar muchas de las características de las actuales teorías de partículas. Sin embargo, nos apresuramos a aclarar que las teorías supersimétricas se encuentran todavía bajo investigación, y no se tiene un estudio terminado de sus propiedades generales. En un capítulo posterior en esta tesis, hablaremos más sobre la utilidad de una clase particular de teoría supersimétrica que podría resultar útil en nuestra investigación. Por ahora, nos gustaría estudiar la posibilidad de modificar el modelo NJL de manera que posiblemente origine una aceleración positiva. Para ello

consideramos la adición de un término extra en el potencial, el cual podemos motivar utilizando un resultado precisamente de un tipo de teoría supersimétrica que es una teoría de norma (susy gauge theory) [36], [13], [14]. En el marco de estas teorías el super potencial está restringido por simetrías globales, y es posible derivar un potencial de potencias inversas (Inverse Power Potential) que tiene la forma

$$U = \tilde{\Lambda}^{4+n} \phi^{-n}, \quad (4.15)$$

La energía de condensación $\tilde{\Lambda}$ es la escala de rompimiento de la simetría de norma.⁵ Los potenciales de potencias inversas han sido muy estudiados como modelos de la Energía Oscura. Por otro lado, recordemos que el modelo NJL fue propuesto antes del establecimiento de la actual teoría de la Cromodinámica Cuántica (QCD) de la interacción nuclear fuerte, la cual es una teoría de Norma particular. Hoy día se acepta que el modelo NJL es una buena aproximación a la QCD en ciertas circunstancias. Dicho lo anterior, permítasenos exponer la siguiente especulación: pensemos en un sistema físico descrito por un grupo de Norma en una teoría supersimétrica. Podemos imaginar un proceso de evolución iniciando en alguna energía alta (posiblemente la energía de unificación Λ_{GUT}), y yendo a energías menores hasta llegar a Λ en la cual el campo ϕ NJL desarrolla un potencial (4.15), y en la que la simetría de norma es rota. Después, a un tiempo posterior (¿mismo tiempo?), la energía es suficientemente baja como para que la dinámica del campo sea descrita efectivamente *también* por un término NJL, de tal manera que el campo evoluciona bajo la influencia de ambos potenciales, NJL y (4.15). Quizá valga la pena mencionar que la teoría QCD se encuentra todavía bajo intensa investigación debido a que no es claro cómo derivar directamente ciertas propiedades que se sabe deben tener la fuerza fuerte y partículas hadrónicas, como el confinamiento del color, el cálculo de masas, el rompimiento de simetría quiral y la predicción de transiciones de fase. Por esto existen varios enfoques para investigar las propiedades de la QCD, uno de los cuales consiste en el estudio de teorías supersimétricas. Ahora bien, no hay un principio fundamental para fijar el valor de la potencia n en (4.15), y el criterio fenomenológico podría ser una guía al respecto. Sin embargo, si observamos que el potencial efectivo NJL ec. (2.12) contiene el término cuadrático $\frac{1}{2}m^2\phi^2$, y tomando $n = 2$, entonces se tiene una simetría bajo el intercambio $\phi \rightarrow 1/\phi$, así que tomamos este valor de n como hipótesis de trabajo. Luego, en alguna escala baja Λ , el potencial de auto-interacción del campo ϕ se vuelve más complicado, de manera que debe tomarse en cuenta nuestro potencial efectivo NJL. Al sumar el potencial (2.12) y (4.15), obtenemos el potencial total

$$V = V_{NJL} + U = \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\Lambda^4}{16\pi^2}f(x(\phi)) + \frac{\tilde{\Lambda}^6}{\phi^2}. \quad (4.16)$$

Esta es, por supuesto, una teoría efectiva la cual es plausible en la medida en la cual el modelo NJL, por un lado, y el potencial (4.15), por otro, son válidos. Esta es la misma idea que cuando se utiliza el modelo NJL como una buena aproximación para estudiar la dinámica de hadrones, sin haberlo derivado directamente del lagrangiano QCD. Ya que estamos simplemente sumando un término al potencial NJL que ya estudiamos anteriormente, utilizaremos los resultados que encontramos. Tomando la ec. ii) (2.16), y recordando que escribimos $g = sg_c$, eq. (2.19), la condición que debe satisfacer el mínimo x se escribe ahora como

$$1 - \frac{1}{s^2} = -\frac{2}{x^2} \left(\frac{4\pi^2 m s \tilde{\Lambda}^3}{\Lambda^4} \right)^2 - x \text{Log} \left(\frac{x}{1+x} \right) \equiv \alpha(x), \quad (4.17)$$

donde hemos definido la función $\alpha(x)$, la cual incluye a los parámetros $\tilde{\Lambda}, \Lambda, m$. Esta función tiene valores $-\infty < \alpha < +1$, y es monótona creciente, independientemente de los valores de los

⁵En general $\tilde{\Lambda}$ y Λ no son las mismas y no deben ser confundidas.

parámetros (todos son positivos). Ahora, sabemos que el potencial V_{NJL} es minimizado en un mínimo no-trivial $\phi_{min} \neq 0$ cuando $g > g_c$, ó $s > 1$. En este caso, el miembro izquierdo en la ec. (4.17) es una cantidad positiva, correspondiente a una valor de α con $0 < \alpha < 1$ en el lado derecho, y que determina una solución $x = x_0$. Esto significa que el potencial total (4.16) aún se minimiza en algún x_0 , que a su vez da un valor ϕ_0 no trivial. Dado que el mínimo x_0 satisface (4.17), el potencial minimizado puede escribirse

$$V_{min} = \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \left[\frac{x_0}{s^2} - \text{Log}(1 + x_0) \right] + \frac{6\pi^2}{x_0} \left(\frac{ms\tilde{\Lambda}^3}{\Lambda^2} \right)^2. \quad (4.18)$$

En esta ecuación vemos que es posible obtener $V_{min} > 0$ (que se comportaría como una constante cosmológica), si los parámetros satisfacen

$$\left(\frac{m\tilde{\Lambda}^3}{\Lambda^4} \right)^2 > \frac{1}{6(4\pi^2)^2} \frac{1}{s^2} \left[x_0 \text{Log}(1 + x_0) - \frac{x_0^2}{s^2} \right]. \quad (4.19)$$

Mostremos un ejemplo. Supongámos que $g = \sqrt{2}g_c$, i.e. $s = \sqrt{2} > 1$. Necesitamos decir algo sobre los parametros, así que tomemos $\Lambda^4 = 8\pi^2 m\tilde{\Lambda}^3$. De esta manera, la ecuación (4.17) se escribe

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2} - x \text{Log} \left(\frac{x}{1+x} \right), \quad (4.20)$$

la cual tiene solución $x = x_0 \simeq 1.83$. Entonces, el lado derecho de la ec. (4.19) da el número $x_0 \text{Log}(1 + x_0) - \frac{x_0^2}{2} \simeq 0.23$. Esto significa que, para que el potencial sea positivo en el mínimo, los parámetros deben satisfacer $m\tilde{\Lambda}^3/\Lambda^4 > 1.22 \times 10^{-5}$. Podemos usar la ec. (4.18) para obtener V_{min} . Una estimación del orden de magnitud da $V_{min} \sim 10^{-2}\Lambda^4$. Estimemos ahora algunos valores físicos

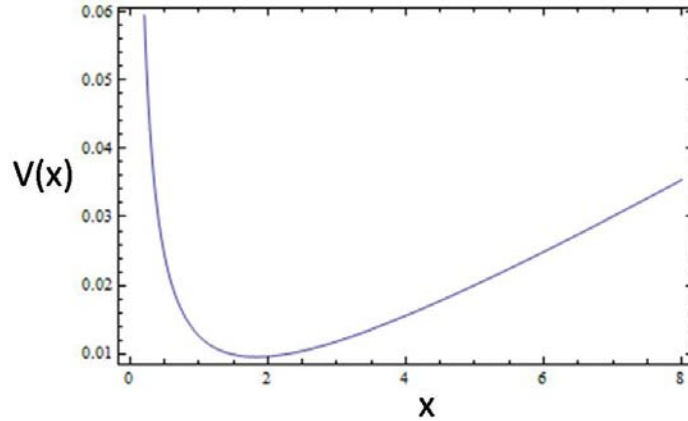


Figura 4.10: Gráfica del potencial total $V = V_{NJL} + U$, como función de la variable x .

reales. La densidad total de energía al día de hoy es $\rho_o = E_o^4 \sim (10^{-3}eV)^4$, donde la contribución de la Energía Oscura es $\rho_{DEo} = \Omega_{DEo}\rho_o$. Si identificamos nuestro fluido NJL con la Energía Oscura, tendríamos que $E_k + V(\phi) = \rho_{DEo}$. Ahora, en el límite en el que los campos se estabilizan en el mínimo,⁶ la densidad de energía del fluido NJL es $E_k + V(\phi) \rightarrow V_{min}$. Entonces, (aproximando $\Omega_{DEo} \simeq 2/3$) podemos escribir $\rho_{DEo} = E_o^4 = V_{min}$, y tenemos

$$\epsilon\Lambda^4 = 10^{-3}eV, \quad (4.21)$$

⁶Debemos tener en mente que, en general, el campo podría estar todavía rodando, así que la energía cinética no sería despreciable. Por eso hay que ser cuidadosos de las condiciones a las que nos estamos refiriendo.

donde el valor preciso del coeficiente ϵ depende del valor V_{min} (para nuestro ejemplo en específico tenemos $\epsilon \sim 10^{-2}$). Así pues, vemos que esta teoría permite un potencial positivo $V_{min} > 0$ como resultado de la dinámica del campo, lo cual imita el comportamiento de una constante cosmológica, y de esta manera tenemos una posible explicación de la aceleración del universo.

Aunque este es un resultado interesante, continuaremos investigando otras modificaciones al modelo NJL así como sus propiedades e implicaciones cosmológicas en los siguientes capítulos.

Capítulo 5

Modelo NJL extendido: Acoplamiento Dinámico.

Desde el punto de vista de la física de partículas, el modelo NJL tiene propiedades muy interesantes: efectos cuánticos causan el rompimiento de la simetría quiral (si el acoplamiento es fuerte), donde es favorecida la condensación de fermiones debido a la minimización de la energía, además de que la teoría es muy económica porque incluye un solo parámetro, el acoplamiento g , aunque sin tomar en cuenta que, ya que la teoría no es renormalizable, un segundo parámetro Λ debe ser incluido en la forma de un corte en la escala de energía para regularizarla. Como en el caso de acoplamiento débil se presenta un estado físico diferente, consistente en partículas fermiónicas no masivas, el modelo da lugar a dos fases diferentes.

En el capítulo anterior hemos estudiado un universo que contiene un fluido NJL que se encuentra en una u otra de las posibles fases físicas, una a la vez, resolviendo la dinámica cosmológica. Además, hemos considerado fluidos barotrópicos adicionales (o sea que tienen un coeficiente de estado $w_b = cte.$ en la ecuación de estado $P_b = w_b \rho_b$), siendo estos materia-polvo ($w_m = 0$) y radiación ($w_r = 1/3$). Encontramos que la fase de fermiones sin masa tiene un coeficiente de estado promediado $w_{NJL} = 0$, y lleva a un universo que se expande indefinidamente sin aceleración. Por otra parte, el condensado fermiónico hace que el universo se colapse en el futuro. Así, vemos que el modelo NJL es igualmente interesante en cosmología.

Sin embargo, no hay nada en la teoría que permita una transición de fase "natural" (es decir, inducida por la dinámica del sistema, no puesta a mano), ya que en el modelo NJL original, el acoplamiento es *constante*.

En investigaciones realizadas por otros autores, el modelo NJL ha sido usado para romper la Super-simetría (SUSY) en el contexto de teorías de Super Cuerdas [29]. El rompimiento de SUSY es una consecuencia de la formación de un condensado gaugino (campo fermiónico) que es favorecido dinámicamente. En teorías de cuerdas el acoplamiento de norma (gauge coupling constant) g_{cc} es dependiente de un campo, conocido como el *dilaton*. Teniendo esto en mente, nuestra motivación es permitir que el acoplamiento g en nuestro modelo NJL sea dependa igualmente de un campo, aunque este acoplamiento g no debe confundirse con el gauge coupling constant g_{cc} .

En este capítulo pretendemos introducir una teoría NJL extendida, considerando para ello un acoplamiento dinámico, a través de la dependencia de un segundo campo escalar (al que llamaremos campo φ), e investigaremos si haciendo esto es posible incluir las dos fases físicas implicadas en el modelo. Por supuesto, nuestro estudio está orientado a buscar si podemos contestar preguntas *realistas* en cosmología.

x	g	$V_I(x, g)$
$x \rightarrow 0$	$g \rightarrow 0$	0 (si $x \ll g$), ∞ (si $x \gg g$)
$x \rightarrow 0$	$0 < g < \infty$	0
$x \rightarrow 0$	$g \rightarrow \infty$	$0(\sim -\frac{\Lambda^4}{8\pi^2}x)$
$0 < x < \infty$	$g \rightarrow 0$	∞
$0 < x < \infty$	$0 < g < \infty$	$V_I(x, g)$
$0 < x < \infty$	$g \rightarrow \infty$	$-\frac{\Lambda^4_\psi}{16\pi^2}f(x)$
$x \rightarrow \infty$	$g \rightarrow 0$	∞
$x \rightarrow \infty$	$0 < g < \infty$	∞
$x \rightarrow \infty$	$g \rightarrow \infty$	∞ (si $\frac{x}{\log x} \gg \Lambda^2 g^2$), $-\infty$ (si $\frac{x}{\log x} \ll \Lambda^2 g^2$)

Tabla 5.1: Comportamiento del potencial $V_I(x, g)$ en los casos límite.

5.1 NJL revisitado.

Como ahora permitiremos que el acoplamiento g sea variable, necesitamos reconsiderar el análisis del potencial total (2.12) que estudiamos anteriormente en el capítulo 2, pero visto como una función de dos variables ϕ , y g (o bien x y g). Recordémos que si el acoplamiento es débil $g < g_c$, el potencial se minimiza en el origen $\phi = 0$ y puede expandirse alrededor de este punto en series de Taylor como $V_I = \frac{1}{2}m^2 \left(1 - \frac{\Lambda^2 g^2}{4\pi^2}\right) \phi^2$. Como el acoplamiento es débil, el coeficiente de ϕ^2 es una cantidad positiva, así que $V_I \geq 0$. El comportamiento del campo es una oscilación amortiguada alrededor del mínimo, así que el apareamiento $\phi \sim \bar{\psi}\psi$ es nulo en promedio, $\langle \phi \rangle \sim 0$, por lo que se tiene un fluido de fermiones no-masivos. Por otra parte, si el acoplamiento es fuerte $g > g_c$, es potencial se minimiza en un valor no-trivial $\phi = \phi_{min}$, con ϕ_{min} relacionado a x_{min} por la ecuación (2.6), y x_{min} es la solución de la ecuación trascendental $\frac{4\pi^2}{g^2\Lambda^2} = 1 + x \log\left(\frac{x}{1+x}\right)$. En este caso, el potencial evaluado en el mínimo es negativo $V_{min} = V_I(\phi_{min}) < 0$, y como la solución es diferente a cero $\phi_{min} \sim \bar{\psi}\psi \neq 0$, el apareamiento de fermiones, es energéticamente favorecido, obteniéndose un condensado en forma de un campo escalar. Esto resume el comportamiento finito del potencial como función sólo de ϕ (ó x).

Puesto que tomaremos a g dependiente de un segundo campo, que llamaremos φ , tendremos un potencial que es función de dos variables, $V = V(\phi, \varphi)$ (o bien $V = V(x, g)$). Por eso será importante conocer el comportamiento en los casos límite. Para la función $f(x)$ definida en la ec. (2.9) tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\log x. \quad (5.1)$$

A partir de estos resultados tenemos que alrededor del punto $x \sim 0$, tenemos $V_I \simeq \frac{\Lambda^2 x}{2} \left(\frac{1}{g^2} - \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}\right)$, si $g \sim 0$; pero $V_I \simeq -\frac{\Lambda^4}{8\pi^2}x$, si $g \rightarrow \infty$. En la siguiente tabla 5.1 resumimos el comportamiento del potencial para los diferentes casos: Podemos ver en la tabla que aunque el potencial puede tomar tanto valores positivos, como negativos, o cero, en regiones *finitas*, hay sin embargo una sola situación en la que no tiene una cota inferior, que es en el siguiente caso límite: si $x \rightarrow \infty$, $g \rightarrow \infty$, entonces podemos escribir la aproximación $V_I \simeq \Lambda^2 \left(\frac{x}{g^2} - \Lambda^2 \log x\right)$, la cual bajo la restricción

$x/\log x \ll \Lambda^2 g^2$, se convierte en

$$V_I \simeq -\Lambda^4 \log x, \quad \text{i.e.} \quad V_I \rightarrow -\infty \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow \infty, \quad g \rightarrow \infty. \quad (5.2)$$

Esto muestra que, al considerar al potencial (2.11) como una función del acoplamiento, de manera que depende de las dos variables $V_I = V_I(x, g)$, existe un camino en el que toma valores indefinidamente negativos. Resulta que esto puede tomarse o no, como un defecto, como explicamos a continuación:

Por un lado, si la evolución dinámica del campo es tal que tiende a minimizar al potencial, es importante verificar que dicho potencial tiene de hecho un mínimo en primer lugar. Si el potencial no tiene cota inferior, el campo al seguir el camino que minimiza la energía, haría que el potencial adopte valores arbitrariamente negativos. En otras palabras, ¡el sistema físico podría entregar una cantidad infinita de energía! Este, por supuesto, es un resultado inaceptable, y en primera instancia uno debería rechazar un potencial que tuviera tal comportamiento.

Por otro lado, como se explicó antes, en la segunda sección del capítulo 4, cuando se considera un potencial negativo pero *acotado* inferiormente con $V(\phi_{min}) = -|V_{min}|$ en el mínimo, la dinámica cosmológica resulta en un eventual colapso futuro del universo en tiempo finito. Esto se debe a que un fluido barotrópico genérico con densidad de energía $\rho_b \sim a^{-n}$ (con $n > 0$) disminuye si $a(t)$ crece con el tiempo, además de que las energías del campo en la vecindad del mínimo $E_k \sim 0$, $V \sim V_{min} < 0$, de manera que la densidad de energía total $\rho = \rho_b + E_k + V$ siendo inicialmente positiva, eventualmente valga cero. De acuerdo a la ecuación $H^2 = (1/3M_p^2)\rho$, esto significa que $H^2 = (\dot{a}/a)^2 \rightarrow 0$, ó $\dot{a} = 0$, es decir, que el factor de escala alcanza un valor máximo. Como además sabemos que H decrece siempre (porque $\dot{H} = -\frac{1}{2}(\rho + P)$), después de $H = 0$ se obtiene $H < 0$, o sea $\dot{a} < 0$, llevando a que $a(t)$ decrezca hasta que eventualmente llegue cero. Esto es una consecuencia del hecho de que la densidad total de energía se anule, y esto no puede evitarse si el potencial ni siquiera está limitado inferiormente. En otras palabras, un universo que contiene un campo escalar gobernado por un potencial "sin fondo", está también (así como con un potencial negativo pero acotado) destinado a colapsar. Todo esto tiene lugar a lo largo de un tiempo finito, y de esta manera la caída del campo se interrumpe, evitando la entrega de una cantidad infinita de energía. Esta circunstancia nos permite entonces reconsiderar el descartar un potencial "mal comportado", al menos en el contexto cosmológico (tenemos aquí un resultado interesante).

Regresando a nuestro caso, de acuerdo a (5.2), el potencial disminuye como $-\log x$, por lo tanto, si añadiéramos un término que crezca más rápido, por ejemplo $V_{II} \sim \log^2 x$, el potencial total $V = V_I + V_{II}$ ya no iría a valores negativos cuando $x \rightarrow \infty, g \rightarrow \infty$, porque en este límite tenemos $V \sim -\log x + \log^2 x \rightarrow \log^2 x \rightarrow \infty$. Ahora, un término $\sqrt{x/\log x}$ crece más rápido que $\log x$, y un término que sea proporcional a g crecería aún con más rapidez, porque habíamos tomado la restricción $x/\log x \ll \Lambda^2 g^2$ para llegar a la ecuación (5.2). Así, vemos que si se añade un término de la forma $V_{II} \sim g^2$, la divergencia negativa del potencial puede ser eliminada. En beneficio de la simplicidad y claridad, será conveniente trabajar con una nueva variable, digamos h , de manera que en lugar de manejar una contribución cuadrática al potencial en la forma $V_{II} \sim g^2$, podamos en su lugar trabajar con un término lineal, en la forma $V_{II} \sim h$. Así pues, nos permitimos definir

$$h = \frac{\Lambda^2 g^2}{8\pi^2} \quad (\text{acoplamiento}), \quad V_{II} = Abh, \quad (b \text{ constante}) \quad (5.3)$$

donde hemos incluido en la definición de V_{II} un coeficiente constante b , cuya expresión algebraica explícita dependerá de la interpretación de V_{II} , a ser discutida más adelante; y la constante A es la de la ec. (2.9). Puede verse que el potencial a nivel árbol ec. (2.5) puede entonces ser escrito como

$V_0 = Ax/h$. De esta manera, usando la variable h para reescribir la ec. (2.11), y de las definiciones (5.3), tenemos para el potencial total en función de x y h :

$$V_I = V_0 + V_1 = A \left[\frac{x}{h} - f(x) \right], \quad (5.4)$$

$$V(x, h) = V_I + V_{II} = A \left[\frac{x}{h} - f(x) + bh \right]. \quad (5.5)$$

Habiendo analizado el comportamiento límite del potencial, argumentaremos ahora cómo implementar un acoplamiento dinámico.

5.2 Acoplamiento Dinámico: dos Campos Escalares.

Dada cualquier teoría, siempre se puede hacer que cualquier parámetro cambie con el tiempo y así "ver qué pasa". Sin embargo, nos gustaría más bien tener una buena razón para hacerlo, en lugar de simplemente introducir tal parámetro variable "a mano", digamos bajo el respaldo de una teoría más fundamental. En nuestro caso, tal respaldo resulta provenir de la Teoría de Super Cuerdas, donde surge la posibilidad de que un campo escalar (conocido como el *dilaton*) pueda jugar el papel de un acoplamiento. De hecho una gran variedad de relaciones funcionales es permitida, dependiendo de la teoría de cuerda específica. Ya que nos gustaría empezar estudiando los casos más sencillos, consideraremos una relación funcional en la forma de una ley de potencias:

$$g = \frac{\varphi^n}{M^{1+n}}, \quad \text{ó} \quad h = \frac{\Lambda^2}{8\pi^2} \frac{\varphi^{2n}}{M^{2(n+1)}}, \quad (5.6)$$

donde hemos introducido el parámetro M con dimensión de masa con el fin de que el acoplamiento g (y h) conserve las unidades físicas correctas. Si φ es un campo dinámico, entonces las expresiones anteriores dicen que el acoplamiento cambia con el tiempo.

Ahora, ¿cómo debemos tomar el valor de la potencia n en la ecuación (5.6)? De acuerdo a la teoría Cuántica de Campos convencional, el potencial más simple para un campo escalar es un potencial cuadrático, el cuál se asocia con la masa del campo (llamémosla m_0 , una constante). Un potencial de este tipo es pues una elección natural. Así pues, escribamos la contribución $V_{II} = \frac{1}{2}m_0^2\varphi^2$. Por la ecuación (5.3) esto implica que $\frac{1}{2}m_0^2\varphi^2 = Abh$. Sustituyendo h , ec. (5.6), encontramos que

$$b = \frac{(8\pi)^2 m_0^2}{\Lambda^6} M^{2(1+n)} \varphi^{2(1-n)}, \quad V_{II} = Abh = \frac{1}{2} m_0 \varphi^2. \quad (5.7)$$

El único valor para el cual el parámetro b es una constante (recuérdese que este parámetro se definió de esta manera) es para $n = 1$. Si se toma este valor, el término V_{II} puede identificarse como un término de masa. De esta forma, las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.3) se convierten en

$$g = \frac{\varphi}{M^2}, \quad h = \frac{\Lambda^2 \varphi^2}{8\pi^2 M^4}, \quad b = (8\pi^2)^2 \frac{m_0^2 M^4}{\Lambda^6}. \quad (5.8)$$

Podemos aprovechar para buscar el valor del campo φ asociado con el valor crítico del acoplamiento. A partir del resultado ec. (2.18), y de la primera ecuación (5.8) encontramos

$$\varphi_c = 2\pi \frac{M^2}{\Lambda}. \quad (5.9)$$

El valor crítico en la ec. (2.18) no es afectado por el la adición del término V_{II} al potencial original V_I , ya que éste no es función del otro campo ϕ . Por lo tanto, la ecuación (5.9) determina el punto en donde ocurre la transición de fase en términos del campo φ , y es válida aún para el potencial total ec. (5.5).

5.2.1 Algunas palabras sobre campos interactuantes.

Al tomar al potencial en la ec. (2.12) como función del acoplamiento g , se convierte en una función de dos variables de la forma $V_I = V_I(\phi, g)$. Además hemos definido el término $V_{II} = V_{II}(g)$. El método que seguimos para implementar un acoplamiento dinámico fue a través de una relación funcional de la forma $g = g(\varphi)$. Entonces el potencial total (5.5), $V = V_I + V_{II}$ puede verse también como una función de dos campos dinámicos $V = V(\phi, \varphi)$. Si se considera la teoría de campos convencional, junto con las condiciones de homogeneidad e isotropía espacial, podemos escribir un funcional lagrangiano en la forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\phi, \varphi) \right]. \quad (5.10)$$

La métrica FRW tiene $g = \det(g_{\mu\nu}) = -a^6$. Entonces se pueden encontrar las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (5.11)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad (5.12)$$

y el tensor de energía-momento puede también calcularse siguiendo el procedimiento estándar. Sin embargo, en general el potencial está constituido por la suma de términos que son productos entre los dos campos, u otras relaciones funcionales que involucran a ambos campos, y no pueden escribirse como la suma de funciones para cada campo individual. En este punto surge la cuestión de cómo definir las densidades de energía y presiones para cada campo, debido a la libertad de agrupar los diferentes términos. Sin embargo, podemos considerar que se puede aislar al menos un término que contenga solamente a uno de los campos, de tal manera que podamos escribir al potencial en la forma

$$V(\phi, \varphi) = U_1(\phi) + U_2(\phi, \varphi). \quad (5.13)$$

Así, podemos definir una densidad de energía que incluya a un campo solamente, y atribuir la interacción completa al otro campo, de manera que podamos escribir

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + U_1(\phi), \quad P_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - U_1(\phi), \quad (5.14)$$

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + U_2(\phi, \varphi), \quad P_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - U_2(\phi, \varphi). \quad (5.15)$$

Una elección conveniente es definir, por ejemplo

$$U_1(\phi) = V_0 = \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (5.16)$$

$$U_2(\phi, \varphi) = V_{II} + V_1 = \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 - \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \left[x + x^2 \log \left(\frac{x}{1+x} \right) + \log(1+x) \right]. \quad (5.17)$$

Al tomar las derivadas de las densidades de energía, y usando las ecuaciones de movimiento (5.11, 5.12), encontramos

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + P_\phi) = \Gamma, \quad (5.18)$$

$$\dot{\rho}_\varphi + 3H(\rho_\varphi + P_\varphi) = -\Gamma, \quad (5.19)$$

donde hemos definido un *término de interacción* Γ como

$$\Gamma = -\frac{\partial U_2}{\partial \phi} \dot{\phi}. \quad (5.20)$$

Nótese que la densidad de energía definida por $\rho = \rho_\phi + \rho_\varphi$, con una presión $P = P_\phi + P_\varphi$, satisface la ecuación de continuidad $\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0$, mientras que, debido a la presencia de la interacción, las densidades de energía individuales ρ_ϕ, ρ_φ , no lo hacen.

Dado un fluido barotrópico "α" con una ecuación de estado $P_\alpha = w_\alpha \rho_\alpha$, el coeficiente de estado w_α muchas veces es un parámetro útil para caracterizar al fluido. En el caso de campos interactuantes, uno puede definir un coeficiente de estado *efectivo* (CEE)

$$(w_{ef})_\phi = w_\phi - \frac{\Gamma}{3H\rho_\phi}, \quad (w_{ef})_\varphi = w_\varphi + \frac{\Gamma}{3H\rho_\varphi}, \quad (5.21)$$

el cual nos permite escribir una "ecuación de continuidad" para la densidad de energía de los campos en la forma

$$\dot{\rho}_\alpha + 3H\rho_\alpha[1 + (w_{ef})_\alpha] = 0. \quad (5.22)$$

Una situación en la que el (CEE) puede considerarse constante, i.e. $(w_{ef})_\alpha \simeq cons.$, la ecuación anterior puede resolverse con una solución aproximada then the equation above could be solved to give the approximate solution

$$\rho_\alpha \propto a^{-3[1+(w_{ef})_\alpha]}, \quad (5.23)$$

por lo que el (CEE) nos puede ayudar a saber cómo se diluye el fluido-campo.

5.3 Análisis del Potencial Total $V = V_I + V_{II}$.

La evolución de los campos, así como de otras variables cosmológicas, está determinada por el potencial (además de las condiciones iniciales), y en general, un amplio espectro de soluciones diferentes se obtienen, dependiendo del conjunto específico de parámetros que definen al potencial. Por lo tanto, necesitamos tener alguna idea del comportamiento del potencial en términos de sus parámetros, de manera que podamos discriminar entre las posibles soluciones realistas (compatibles con las observaciones). El análisis matemático estándar es por supuesto una herramienta pertinente, aunque algunas veces el potencial puede tener una forma complicada cuando se expresa en función de los campos, como es nuestro caso.

Como ya vimos en la sección anterior, con la ayuda de las variables x, h , el potencial adopta una apariencia más sencilla, dada en la ecuación (5.5). Sin embargo, no debemos olvidar que las verdaderas variables importantes son los campos. Tenemos $\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \phi}$. Pero de acuerdo a la ecuación (5.6), h no depende de ϕ , así que $\frac{\partial h}{\partial \phi} = 0$. También, de acuerdo a la ec. (2.6), la derivada $\frac{\partial x}{\partial \phi} \sim \phi$ es lineal en ϕ , y por lo tanto es una función monótona que se anula en el único punto $\phi = 0$. Por lo tanto la condición $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$ equivale a las siguientes dos ecuaciones:

$$\phi = 0, \quad \text{ó} \quad \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{h} - 2 \left[1 + x \log \left(\frac{x}{1+x} \right) \right]. \quad (5.24)$$

Similarmente, la derivada con respecto a φ es $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \varphi}$. De la segunda ecuación en las definiciones (5.6) tenemos que h es una función en potencias de φ , así que $\frac{\partial h}{\partial \varphi} \sim \varphi^{n-1}$ es una función monótona que vale cero en $\varphi = 0$. De las definiciones (2.6) y (5.6) para $n = 1$, podemos ver que $\frac{\partial x}{\partial \varphi} \sim \varphi$, así que la condición $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ tiene $\varphi = 0$ como una solución. Puesto que un punto

extremo debe satisfacer las condiciones $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$, y $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ *simultaneamente*, vemos que el origen $\phi = 0$, $\varphi = 0$ es un punto extremo. Las derivadas de segundo orden evaluadas en el origen dan:

$$D_1 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right|_{(0,0)} = m_0^2, \quad D_2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{(0,0)} = m^2, \quad D_3 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \phi} \right|_{(0,0)} = 0, \quad (5.25)$$

con el determinante $D_1 D_2 - D_3^2 = m_0^2 m^2 > 0$, una cantidad positiva. Por lo tanto, el criterio matemático estándar nos dice que el punto extremo (en este caso el origen) es de hecho un mínimo local.

La segunda ecuación (5.24) da una condición para la solución(es) no-trivial, si existe. Si $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, y $\varphi \neq 0$, entonces la ecuación $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ implica que $\frac{\partial V}{\partial h} = 0$, es decir

$$\frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial h} = -\frac{x}{h^2} + b = 0. \quad (5.26)$$

Al resolver esta ecuación para h , encontramos una restricción que debe cumplir el conjunto de puntos extremos:

$$h_{ex} = \sqrt{\frac{x}{b}}. \quad (5.27)$$

Esta ecuación representa una curva en el espacio x - h sobre la cual el potencial se extremiza (es decir toma valores mínimos o máximos). Cuando se evalúa sobre esta curva, el potencial puede verse como una función de una variable (en x o h). Sustituyendo (5.27) en la ec. (5.5), obtenemos, como una función de x :

$$V(x)|_{h_{ex}} = A \left[2\sqrt{bx} - f(x) \right] \quad (5.28)$$

Vemos pues que, el requisito de que las dos condiciones $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$, y $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ se satisfagan al mismo tiempo (para la solución no trivial), equivale al sistema de ecuaciones simultáneas $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial h} = 0$, el cual a su vez equivale a las ecuaciones (5.27), y a la segunda ecuación (5.24). Para resolver este sistema, sustituimos la primera ecuación en la segunda, igualada a cero. De esta manera, obtenemos la condición global que deben satisfacer los puntos extremos:

$$\frac{\sqrt{b}}{2} = \sqrt{x_{ex}} \left[1 + x_{ex} \log \left(\frac{x_{ex}}{1 + x_{ex}} \right) \right]. \quad (5.29)$$

Esta es una ecuación trascendental en x_{ex} para cualquier valor de b , y por lo tanto no puede ser resuelta analíticamente. Aunque se pueden usar métodos numéricos para encontrar una solución, no se puede escribir una expresión algebraica explícita. Esta circunstancia nos dificulta conocer la naturaleza de los puntos extremos (es decir si son máximos o mínimos) porque el procedimiento matemático estándar, basado en el cálculo de las derivadas de segundo orden, requiere que dichas derivadas sean evaluadas en los presuntos puntos extremos, los cuales se supone haber sido encontrados resolviendo las ecuaciones en derivadas de primer orden. Sin embargo, un método geométrico puede traernos una alternativa útil, como veremos a continuación.

Traduzcamos la ecuación (5.29) a una condición sobre los parámetros de interés, sustituyendo para ello la tercera ecuación (5.8), y definamos al mismo tiempo la función α como sigue:

$$\frac{m_0 M^2}{\Lambda^3} = \alpha(x) \equiv \frac{\sqrt{x}}{4\pi^2} \left[1 + x \log \left(\frac{x}{1+x} \right) \right]. \quad (5.30)$$

Tenemos que $\alpha(x)$ es una función acotada con valores $0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_{max}$. Nombremos x_0 al punto en el cual la función α se maximiza. Esta función tiene

$$\alpha_{max} = \alpha(x_0) \simeq 8.08 \times 10^{-3}, \quad x_0 \simeq 0.55, \quad (5.31)$$

con $\alpha(x=0) = 0$, y se incrementa monótonamente desde $x=0$ hasta $x=x_0$, donde se encuentra el máximo. Luego, empieza a decrecer (también de manera monótona) hacia $\alpha \rightarrow 0$ conforme x crece, pero nunca alcanza $\alpha = 0$ (el eje x es una asíntota para $\alpha(x)$ en el límite $x \rightarrow \infty$; ver figura 5.1, lado izquierdo). Ahora, al asignar valores específicos a los parámetros m_0 , M y Λ , se determina

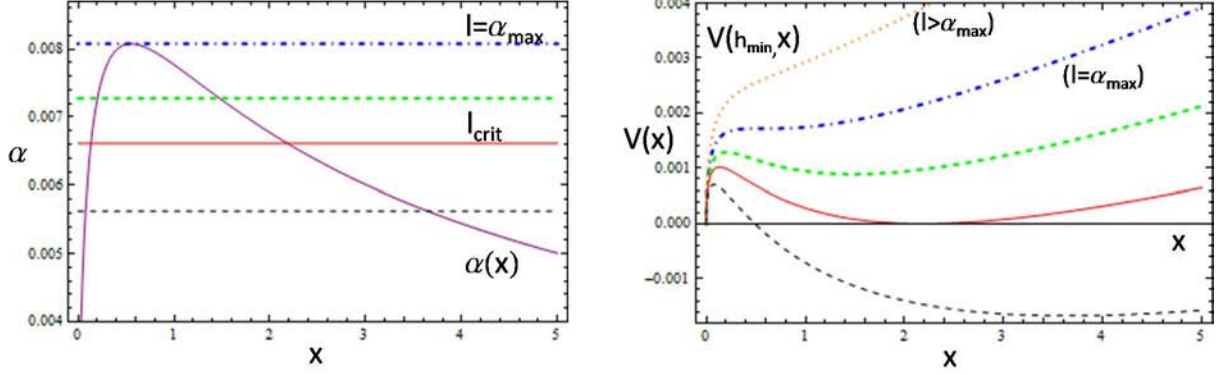


Figura 5.1: *Izquierda:* La cantidad $m_0 M^2 / \Lambda^3$ define una constante $l = m_0 M^2 / \Lambda^3$ cuya gráfica es una línea recta. La figura muestra un conjunto de rectas l que intersectan a la gráfica de la función $\alpha(x)$. *Derecha:* Una colección de gráficas del potencial asociadas con cada línea l . Los estilos de gráfica de cada línea recta en la figura izquierda se corresponden con los estilos de gráfica en la derecha para potencial. La gráfica del potencial con estilo continuo (rojo) corresponde a la línea recta crítica l_c que determina el x_{min} para el cual $V(x_{min}) = 0$.

una constante $l = m_0 M^2 / \Lambda^3$ cuya gráfica es una línea recta horizontal. Se desprenden entonces tres casos:

- 1) Si la recta no intersecta a la gráfica de la función $\alpha(x)$, esto significa que no existe una solución en x , es decir, el potencial no tiene puntos extremos; esto pasa para $l > \alpha_{max}$.
- 2) Si $l = \alpha_{max}$, entonces hay una sola intersección en $x = x_0$.
- 3) Si $l < \alpha_{max}$, hay dos puntos de intersección, localizados uno antes de x_0 , y otro después de x_0 , cada uno representando un extremo del potencial.

Este método geométrico no nos permite saber si los extremos son máximos o mínimos, pero podemos utilizar la información que obtuvimos antes: si de acuerdo a la ecuación (5.25), el punto $x = 0$ es un mínimo local, entonces el siguiente extremo situado junto a aquél, tiene que ser de hecho un *máximo* (local), ya que no puede haber un mínimo al lado de otro mínimo. Así pues tenemos que $x_{max} < x_0 < x_{min}$, y por lo tanto $x_{max} < x_{min}$. Este razonamiento se verifica de hecho en las figuras, donde se muestra el potencial minimizado en h , $V(x)|_{h_{min}}$, como función de x .

Si se sustituye la restricción (5.30), en la ecuación (5.28), podemos escribir una expresión para el potencial evaluado en los puntos extremos:

$$V_{ex} = V(x, h)|_{(x_{ex}, h_{ex})} = \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \left[\frac{12\pi^2 m_0 M^2}{\Lambda^3} \sqrt{x_{ex}} - \log(1 + x_{ex}) \right]. \quad (5.32)$$

En el caso cuando el extremo es un mínimo $x_{ex} = x_{min}$, tenemos que, para que el potencial minimizado sea positivo, es decir $V_{min} = V(x_{min}) \geq 0$, entonces la ecuación (5.32), dice que x_{min}

debe satisfacer

$$\frac{m_0 M^2}{\Lambda^3} \geq \beta(x_{min}) \equiv \frac{1}{12\pi^2} \frac{\log(1+x_{min})}{\sqrt{x_{min}}}, \quad (5.33)$$

donde hemos definido de paso a la función $\beta(x)$. Por lo tanto, el conjunto de valores de x para los que el potencial es minimizado, y al mismo tiempo son tales que $V_{min} \geq 0$, deben satisfacer las ecuaciones (5.30) y (5.33) *simultáneamente*. Esto significa que, para estos x tenemos $\alpha \geq \beta$ (figura 5.2, lado izquierdo). Es conveniente emplear un nombre especial, digamos x_{eq} , para los x específicos en los que la igualdad se satisface, o sea $\alpha(x_{eq}) = \beta(x_{eq})$. Usando procedimientos numéricos se encuentra que

$$x_{eq} = 2.18, \quad \alpha(x_{eq}) = \beta(x_{eq}) = l_c = 6.62 \times 10^{-3}. \quad (5.34)$$

Para ayudarnos a visualizar cómo depende la forma del potencial de los parámetros (recuérdese

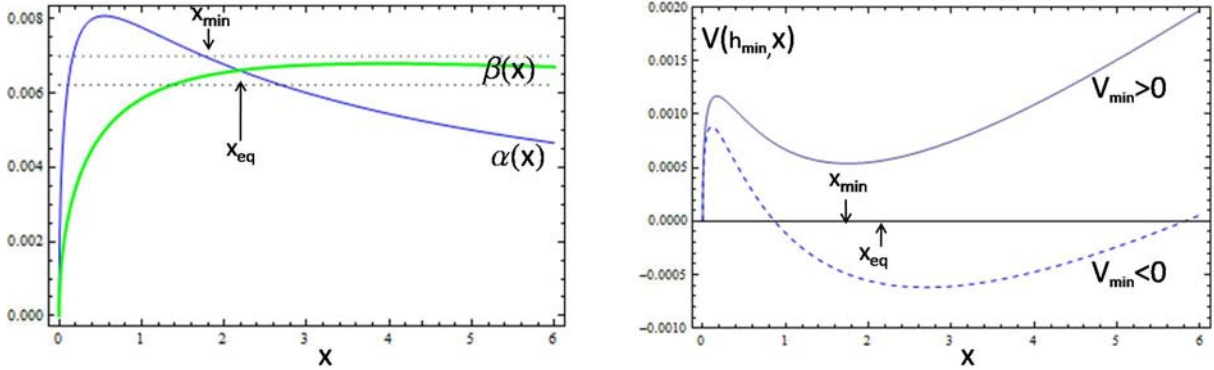


Figura 5.2: *Izquierda:* Las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se intersectan en un punto, $x = x_{eq}$. La recta crítica horizontal l_{crit} se define por $l_{crit} = \alpha = \beta$. El punto x_{min} indica un valor de x en el que el potencial es minimizado con $V_{min} > 0$ (figura de la derecha, estilo de línea continuo). El punto x_{eq} determinado por la recta crítica corresponde a $x_{min} = x_{eq}$ tal que el potencial minimizado vale $V(x_{min}) = 0$.

que $l = m_0 M^2 / \Lambda^3$), podemos imaginar la siguiente descripción: empezando con un conjunto de valores m_0, M, Λ , tales que $l > \alpha_{max}$, el potencial minimizado $V(x)|_{h_{min}}$, como función de x , tiene solamente un mínimo (global) en $x = 0$ (un extremo trivial), y a partir de ahí crece monótonamente (figura 5.1, lado derecho). Valores menores de l corresponden a potenciales que crecen cada vez más lentamente como funciones de x . Disminuyendo l , eventualmente se alcanza la cima de la función $\alpha(x)$, donde ambas curvas (la recta l y la gráfica de α) se intersectan en un solo punto $x = x_0$, donde $l = \alpha_{max} = \alpha(x_0)$ (figura 5.1, lado izquierdo). En este caso el punto x_0 es un punto de inflexión, el potencial tiene una derivada nula, y por decirlo de alguna manera, empieza a "doblarse" hacia arriba, de manera que se hace cóncavo apuntando hacia abajo. De aquí en adelante, para $l < \alpha_{max}$ (el rango de definición es hasta $l = 0$), habrá dos puntos de intersección entre l y $\alpha(x)$, cada uno correspondiente a un máximo $x_{max} < x_0$ y a un mínimo $x_{min} > x_0$. A medida que la altura de l disminuye, el punto de intersección x_{min} se recorre hacia la derecha, así que el mínimo x_{min} crece alejándose del origen (figura 5.1). Al mismo tiempo, puesto que la función (5.32) decrece a incrementar x , el mínimo del potencial V_{min} , el cual inicia siendo una cantidad positiva, va decreciendo, y eventualmente se desvanece (i.e. $V_{min} = 0$) para cierto valor crítico $l = l_{crit} = \alpha(x_{eq})$, que es cuando $\alpha = \beta$. De ahí en más, con l bajando continuamente, el mínimo V_{min} se vuelve negativo, creciendo en valor absoluto conforme l desciende.

$l = m_0 M^2 / \Lambda^3$	x_{min}	x_{max}	V_{min}	V_{max}	ϵ	Λ/E_0
8.08×10^{-3} $= \alpha_{max}$	0.55	$= x_{min}$	$1.72 \times 10^{-3} \Lambda^4$	$= V_{min}$	1.72×10^{-3}	4.5
7.28×10^{-3}	1.47	0.20	$8.90 \times 10^{-4} \Lambda^4$	$1.29 \times 10^{-3} \Lambda^4$	8.90×10^{-4}	5.3
6.95×10^{-3}	1.81	0.16	$4.67 \times 10^{-4} \Lambda^4$	$1.15 \times 10^{-3} \Lambda^4$	4.67×10^{-4}	6.3
6.62×10^{-3}	2.18	0.13	$9.77 \times 10^{-15} \Lambda^4$	$1.02 \times 10^{-3} \Lambda^4$	9.77×10^{-15}	2.90×10^3
6.62×10^{-3} $= \alpha_{eq} = l_c$	2.18 $= x_{eq}$	0.13	0	$1.02 \times 10^{-3} \Lambda^4$	0	∞

Tabla 5.2: Lista de valores numéricos. Tomamos $M = \Lambda$, así que $m_0 = l \times \Lambda$, y el potencial puede parametrizarse en términos de Λ . La densidad de energía cósmica al día de hoy es $E_0 = \sqrt[4]{\rho_0}$. El parámetro ϵ se define más adelante en el texto.

Entonces, con ayuda del análisis matemático estándar, vimos que las ecuaciones de las derivadas de primer orden igualadas a cero, nos llevan a las condiciones (5.30) y (5.33) sobre las variables x, h . Una vez encontrado el punto extremo (x_{ex}, h_{ex}) , podemos usar nuestras definiciones para encontrar los valores correspondientes de los campos ϕ, φ que minimizan el potencial.

El potencial total (5.5) en función de los campos ϕ, φ se escribe explícitamente como

$$V(\phi, \varphi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 - \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \left[x + x^2 \log \left(\frac{x}{1+x} \right) + \log(1+x) \right], \quad x = \frac{m^2 \varphi^2 \phi^2}{\Lambda^2 M^4}. \quad (5.35)$$

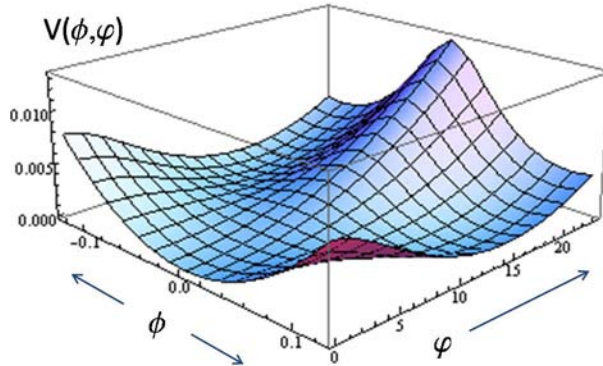


Figura 5.3: Potencial total $V = V(\phi, \varphi)$, ec. (5.35).

Como ya hemos visto, para que el potencial tenga puntos extremos, los valores de los parámetros m_0, M, Λ deben ser tales que $l < \alpha_{max}$. Al hacerlo así, se fija un valor definido para x_{ex} a través de la ecuación (5.30).

Luego, sustituyendo este en ec. (5.27) encontramos h_{ex} , el cual a su vez puede ser usado junto con ec. (5.8) para encontrar el valor extremo para el campo φ . Tenemos

$$\varphi_{ex}^2 = \frac{\Lambda M^2}{m_0} \sqrt{x_{ex}}. \quad (5.36)$$

Si el extremo se refiere al mínimo, entonces la ecuación de arriba nos permite encontrar φ_{min} haciendo $x_{ex} = x_{min}$. Luego se pueden sustituir los valores ahora conocidos x_{min} , φ_{min} en la definición de x , ec. (5.35), para encontrar también el mínimo en el campo ϕ . De esta manera obtenemos

$$\phi_{min} = \frac{M}{m} \sqrt{m_0 \Lambda \sqrt{x_{min}}}, \quad \varphi_{min} = M \sqrt{\frac{\Lambda}{m_0} \sqrt{x_{min}}}. \quad (5.37)$$

En el caso cuando el extremo es un máximo $x_{ex} = x_{max}$, tendríamos expresiones análogas para ϕ_{max} , φ_{max} . Puede ser muy útil notar también la siguiente relación

$$\phi_{min} = \frac{m_0}{m} \varphi_{min}. \quad (5.38)$$

Ahora ya conocemos los puntos relevantes del potencial, y tenemos una idea de cómo depende su forma en función de sus parámetros (figure 5.3). Podemos pasar ahora a estudiar las implicaciones para la dinámica de los campos. No hay que olvidar que estamos interesados en la posibilidad de implementar una transición de fase entre los dos estados físicos que resultan del modelo NJL. Para lograr dicha transición, le pedimos al sistema que pase por los valores sucesivos $g_{initial} \rightarrow g_c \rightarrow g_{final}$, que se traducen a $\varphi_{initial} \rightarrow \varphi_c \rightarrow \varphi_{final}$ para el campo. Dado que los campos evolucionan para hacer que el potencial se minimice, se necesita la condición

$$V(\varphi_{initial}) > V(\varphi_c) > V(\varphi_{final}). \quad (5.39)$$

De esta manera, la transición podría realizarse de manera natural, es decir, con la dinámica del sistema, sin hacer un "ajuste fino" en las condiciones iniciales (por ejemplo en la velocidad inicial de los campos). Sin embargo, la sola condición (5.39) podría no ser suficiente, como veremos en seguida. Usando las ecuaciones (5.9) y (5.36) podemos obtener una relación entre los extremos y

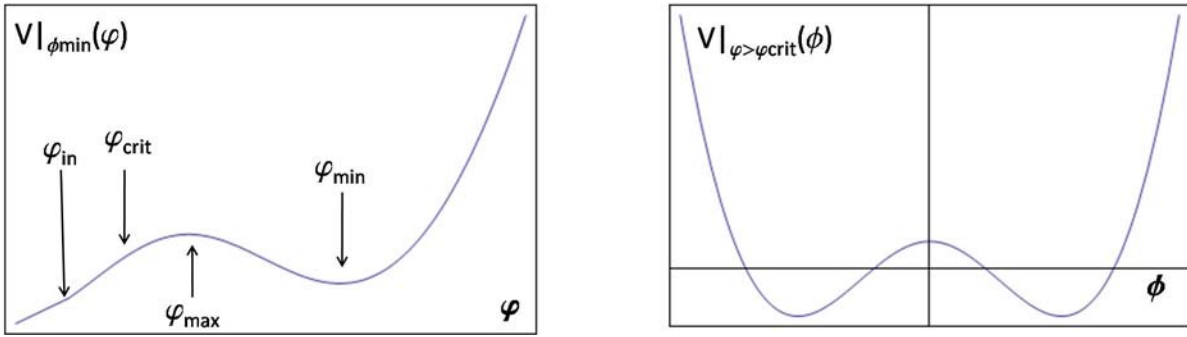


Figura 5.4: *Izquierda:* El potencial como una función de φ , minimizado en ϕ . Se muestra cómo el valor crítico φ_c es menor que el máximo φ_{max} , de acuerdo a la ec. (5.40). *Derecha:* El potencial como una función de ϕ . Se muestra una sección transversal a través de $\varphi > \varphi_c$. Para una sección a través de $\varphi < \varphi_c$, el potencial se comportaría como $V|_{\varphi} \sim \phi^2$.

el punto crítico:

$$\varphi_{ex} = \gamma \varphi_c, \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{1}{1 + x \log\left(\frac{x}{1+x}\right)}. \quad (5.40)$$

Para el coeficiente γ se tiene $1 < \gamma < \infty$, y es una función monótona creciente. Esto lleva a un importante resultado: la ecuación (5.40) nos dice que $\varphi_c < \varphi_{ex}$, es decir, ambos extremos son mayores que el punto crítico, así que tenemos en particular que $\varphi_c < \varphi_{max}$. De hecho, ya sabemos que el máximo se localiza antes que el mínimo (ver el párrafo anterior a la ecuación

(5.32)), es decir, éste es mayor que aquél; por tanto $\varphi_c < \varphi_{max} < \varphi_{min}$. Ahora, para que una transición de fase sea realizada el sistema debe evolucionar desde algún valor inicial $\varphi_i < \varphi_c$, hasta un valor final $\varphi_f > \varphi_c$, con $V(\varphi_i) > V(\varphi_f)$. Pero esto no puede lograrse, porque debería ser $V(\varphi_i) > V(\varphi_c) > V(\varphi_{max})$, pero en lugar de esto tenemos $V(\varphi_{max}) > V(\varphi_{any})$ (¡lógico!). Esto sucede sin importar que $V(\varphi_i) > V(\varphi_{min})$, porque φ_{min} es mayor que φ_{max} .¹ En otras palabras, al ir desde φ_i hacia φ_{min} el sistema enfrenta una *barrera de potencial*, cuyo pico se encuentra en φ_{max} , la cual le impide alcanzar el mínimo no-trivial, y en lugar de esto retrocedería hacia el mínimo trivial, situado en el origen $\varphi = 0$ (figura 5.4).

5.4 Cosmología del modelo NJL extendido $V = V_I + V_{II}$.

El estudio del universo a nivel elemental (sin tomar en cuenta perturbaciones de primer orden o superior) se basa en las ecuaciones FRWL (Friedman -Robertson -Walker -Lemaitre), las cuales rigen la evolución del espacio dadas las diferentes formas de materia contenidas en él. Si los campos escalares son parte del contenido, debemos incluir sus propias ecuaciones de movimiento (5.11, 5.12) en adición a las ecuaciones para el fondo cósmico y las densidades de energía de las diferentes componentes. Si consideramos la contribución de fluidos barotrópicos (definidos por una ecuación de estado $P_b = \omega_b \rho_b$ con ω_b constante), como son la radiación ($\omega_r = 1/3$) y la materia ($\omega_m = 0$), el sistema de ecuaciones completo a resolver es

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= aH, \\
\dot{H} &= -\frac{1}{2M_p^2} \left[H^2(4\Omega_r + 3\Omega_m) + \dot{\phi}^2 + \dot{\varphi}^2 \right], \\
\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0, \\
\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 0, \\
\Omega_r &= \Omega_{ri} \left(\frac{H}{H_i} \right)^{-2} \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-4}, \quad \Omega_m = \Omega_{mi} \left(\frac{H}{H_i} \right)^{-2} \left(\frac{a}{a_i} \right)^{-3}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Para una *geometría plana*, la ecuación de Friedmann, que relaciona el parámetro de Hubble H con la densidad de energía total ρ (que incluye dos campos escalares, materia y radiación), se escribe

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_p^2}, \quad \text{con} \quad \rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\phi + \rho_\varphi, \tag{5.42}$$

donde la masa de Planck $M_p = 1/\sqrt{8\pi G}$, y las densidades de energía de los campos ϕ y φ fueron definidas en las ecuaciones (5.14), (5.15). Definimos la densidad relativa para el fluido α de la forma usual como $\Omega_\alpha = \rho_\alpha/(3M_p^2 H^2)$, y ellas deben satisfacer la condición

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\phi + \Omega_\varphi = 1. \tag{5.43}$$

La bien conocida ecuación para la aceleración del factor de escala se escribe en nuestro caso

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{6M_p^2} \left[\frac{4}{3}\rho_r + \rho_m + 2(\dot{\phi}^2 + \dot{\varphi}^2 - V) \right] = 0. \tag{5.44}$$

¹Téngase en cuenta que, con el paso del tiempo, el sistema se estabiliza en el mínimo, por lo que el mínimo podría ser tomado como el valor final $\varphi_{final} = \varphi_{min}$ (aunque no es necesario).

Ahora, hemos visto que el potencial (5.35) tiene dos mínimos: ² uno de ellos localizado en el origen $\phi = 0$, $\varphi = 0$, donde $V|_{(\phi=0,\varphi=0)} = 0$; y el otro asociado a la solución no trivial $x = x_{min}$, $h = h_{min}$ (de donde podemos obtener ϕ_{min} , φ_{min} , de acuerdo a las ecuaciones (5.37)) donde V_{min} está dado por la ecuación (5.32) como

$$V_{min} = V(x, h)|_{(x_{min}, h_{min})} = \frac{4}{3}\Lambda m_0 M^2 \sqrt{x_{min}} - \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \log(1 + x_{min}). \quad (5.45)$$

Vemos que el mínimo V_{min} puede adoptar valores tanto positivos, como negativos, o cero. Como bien se sabe, y según vimos en el capítulo 4, en el caso de un solo campo escalar y fluidos barotrópicos que evolucionan en un universo FRWL, el potencial se minimiza con el transcurso del tiempo. Este comportamiento no es alterado si se consideran dos campos: éstos llevan también a la minimización del potencial, y su evolución detallada dependerá de la forma del potencial, además de las condiciones iniciales.

Por lo tanto, podemos tomar el análisis hecho para el caso de un solo campo, de manera que en el caso de dos campos tenemos resultados análogos: dependiendo de las condiciones iniciales se pueden resumir tres casos:

1. Si el potencial se estabiliza en un mínimo *negativo* $V_{min} < 0$, entonces tenemos un universo sin aceleración y que se colapsa en el futuro, ya que iniciando con $\rho > 0$, como las densidades de energía individuales de cada fluido disminuyen, el potencial eventualmente las sobrepasa, haciendo $\rho = 0$, y por lo tanto $H = 0$ (ec. (5.42)).³ Esto implica $H = \dot{a}/a = 0$, i.e. $a(t)$ es máximo. Como H disminuye siempre (segunda ecuación del sistema (5.41)) se sigue que H se vuelve negativo, y por lo tanto $\dot{a} < 0$ (primera ec. en (5.41)), es decir $a(t)$ disminuye y eventualmente llega a $a(t) = 0$. De la ec. (6.10) se puede ver que una aceleración en las cercanías del mínimo tampoco es posible, ya que para esto se requiere que $(4/3)\rho_r + \rho_m + 2(\dot{\phi}^2 + \dot{\varphi}^2) < 2V$, lo que claramente nunca sucede porque el lado derecho de la desigualdad permanece siempre positivo, mientras el izquierdo es negativo.

2. Si el potencial se estabiliza en un mínimo nulo $V_{min} = 0$, el universo se expande eternamente sin aceleración, por lo siguiente: iniciando con $H_i > 0$ el factor de escala crece. La densidad total de energía es $\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\phi + \rho_\varphi$, y sabemos que la radiación y la energía se diluyen, porque $\rho_r \sim a^{-4}$, $\rho_m \sim a^{-3}$, pero no llegan a desaparecer completamente para ningún valor finito del factor de escala, y por pequeñas que sean, son siempre positivas. Por otro lado, la contribución de ambos campos a la densidad es $\rho_\phi + \rho_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\phi, \varphi)$, con las energías cinéticas siempre positivas, y aunque el potencial puede estar desvaneciéndose, $V(\phi, \varphi) \rightarrow V_{min} = 0$, la suma $\rho_\phi + \rho_\varphi$ permanece positiva. Por lo tanto, la suma total para dar ρ nunca desaparece (no es cero), y por lo tanto H tampoco lo hace. Esto significa que $\dot{a} \neq 0$, y entonces el factor de escala no tiene un valor máximo, es decir que el universo se expande para siempre.

Para ver la imposibilidad de la aceleración hacemos un razonamiento similar al de antes: de la ec. (6.10), necesitamos $(4/3)\rho_r + \rho_m + 2(\dot{\phi}^2 + \dot{\varphi}^2) < 2V$, pero en las cercanías del mínimo $V \sim 0$, o sea que el potencial tiende a anularse mientras que las densidades ρ_r , ρ_m nunca desaparecen del todo, y así la desigualdad nunca llega a satisfacerse.

²Estrictamente hablando, hay en realidad cinco mínimos: el origen, mas cuatro puntos correspondientes a la solución no trivial $x = x_{min}$, $h = h_{min}$, porque estas variables son funciones cuadráticas de los campos, $x \sim \phi^2 \varphi^2$, $h \sim \varphi^2$. Sin embargo, debido a la simetría bajo cambio de signo $x = x(\pm\phi, \pm\varphi)$, $h = h(\pm\varphi)$, nos referimos al conjunto de estas soluciones simplemente como la "solución no trivial".

³Tenemos que tomar una condición inicial positiva $H_i > 0$, de manera que $\dot{a} > 0$, i.e. un universo que comience expandiéndose; de otra forma, si fuera $H_i < 0$ el universo ya estaría contrayéndose. Además, el caso $H_i > 0$ involucra tanto la fase de expansión como la de contracción con el paso del tiempo, no así el caso $H_i < 0$.

3. Si el potencial se estabiliza en un mínimo *positivo* $V_{min} > 0$, entonces el universo inevitablemente es dominado por el potencial en algún momento, ya que con el paso del tiempo las contribuciones $\rho_r \sim a^{-4}$, $\rho_m \sim a^{-3}$ a la densidad total ρ de la ec. (5.42) están decreciendo siempre (aunque nunca lleguen a desaparecer), y las energías cinéticas tienden a desaparecer, $E_k = \dot{\phi}^2 + \dot{\varphi}^2 \sim 0$ a causa del amortiguamiento de los campos cerca del mínimo. En el límite de largo tiempo, el potencial termina imponiéndose y tendríamos $\rho \sim V_{min}$ con $V_{min} = \text{constante}$, así que el potencial puede ser tomado por una constante cosmológica, la cual ya sabemos que acelera la expansión del universo.

Como hemos dicho, los casos 1 ($V_{min} < 0$), y 2 ($V_{min} = 0$) se estudiaron ya antes en el capítulo 4 para un solo campo escalar, y la dinámica del universo no cambia cualitativamente al considerar en su lugar dos campos. Si pretendemos que nuestra teoría esté de acuerdo con las observaciones, la única posibilidad realista entre las descritas arriba es la tercera, ya que las 1 y 2 no incluyen un período de aceleración.

Así que vamos ahora a mostrar un ejemplo de solución para el tercer caso. Si queremos obtener un potencial con un mínimo positivo $V_{min} > 0$, debemos tomar parámetros tales que $6.62 \times 10^{-3} < m_0 M^2 / \Lambda^3 < 8.08 \times 10^{-3}$ (ecuaciones (5.31, 5.33, 5.34)). Sean por ejemplo $\Lambda = m = M$, $m_0 = 6.95 \times 10^{-3} \Lambda$. Esto define la línea recta $l = m_0 M^2 / \Lambda = 6.95 \times 10^{-3}$, cuyas intersecciones con la función $\alpha(x)$ determinan $x_{max} = 0.16$, y $x_{min} = 1.81$. Entonces las ecuaciones (5.9, 5.32, 5.37) dan

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{min} &= 9.67 \times 10^{-2}, & \bar{\varphi}_{max} &= 7.62, & \bar{\varphi}_{min} &= 13.9 \\ \bar{V}_{min} &= 4.67 \times 10^{-4}, & \bar{\varphi}_c &= 6.28. \end{aligned} \quad (5.46)$$

La barra sobre estas cantidades denotan el valor *numérico*.⁴

Una vez que conocemos el mínimo no-trivial podemos evaluar el Hessiano para comprobar si tenemos en efecto un mínimo. Defínase $\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial V}{\partial \phi} = V_{\phi\phi} \Big|_{min}$, etc. para las derivadas de segundo orden. Tenemos

$$\begin{aligned} V_{\phi\phi} &= 1.49 \Lambda^2, & V_{\varphi\varphi} &= 7.20 \times 10^{-5} \Lambda^2, & V_{\phi\varphi} &= V_{\varphi\phi} = -3.53 \times 10^{-3} \Lambda^2, \\ H(V(\phi, \varphi)) &= \begin{pmatrix} V_{\phi\phi} & V_{\phi\varphi} \\ V_{\varphi\phi} & V_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}; & \det(H) &= 9.49 \times 10^{-5} \Lambda^4. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Ya que $\det(H) > 0$, vemos que de hecho tenemos un punto mínimo, como se esperaba.

Definamos la contribución inicial al contenido del universo como⁵ $\Omega_{nbi} = \Omega_{\phi i} + \Omega_{\varphi i}$, proveniente de los campos ϕ , φ , y consideremos momentáneamente una constante cosmológica L , que tiene una densidad constante ρ_L , además de una componente de materia, para la cual sabemos $\rho_m \sim a^{-3}$. Encontramos que las proporciones son

$$\frac{\rho_{m0}}{\rho_{L0}} = \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{L0}} = \frac{\Omega_{mi}}{\Omega_{Li}} \frac{1}{(1+z)^3}, \quad (5.48)$$

donde el subíndice "0" denota, como es usual, que las cantidades están tomadas en la época presente, o "al día de hoy". Ahora supongámos que dejamos que el universo evolucione hacia adelante en el tiempo, empezando en la época cuando las cantidades de materia y radiación eran iguales. Sabemos

⁴Para obtener el valor físico real necesitamos multiplicar por cierto factor de conversión. Más sobre los valores físico será dicho al final de este capítulo.

⁵Debido a que el coeficiente ω_α de la ecuación de estado $P_\alpha = \omega_\alpha \rho_\alpha$ no constante para los campos, decimos que ellos constituyen una contribución "no barotrópica"; de ahí el subíndice "nb".

que el corrimiento al rojo para esta época es aproximadamente $z_{eq} \simeq 3 \times 10^3$, cuando la densidad de energía en el universo era $\rho_{eq} \sim (1eV)^4$, aprox. (nos interesamos en el orden de magnitud solamente). También sabemos la densidad relativa para la materia $\Omega_{m0} \simeq 1/3$, y $\Omega_{DE0} \simeq 2/3$ para la Energía Oscura, la cual identificaremos momentáneamente con una constante cosmológica para hacer estimaciones. Sustituyendo estos valores junto con z_{eq} en la ecuación (5.48), encontramos que $\Omega_{Li} \simeq 10^{-11}\Omega_{mi}$. Puesto que el fluido no barotrópico se comporta como una constante cosmológica cerca del mínimo del potencial, podemos estimar el valor de Ω_{nbi} identificándolo con Ω_{Li} , de forma que $\Omega_{nbi} \sim 10^{-11}\Omega_{mi}$. Para hacer que el potencial se estabilice en el mínimo no trivial,

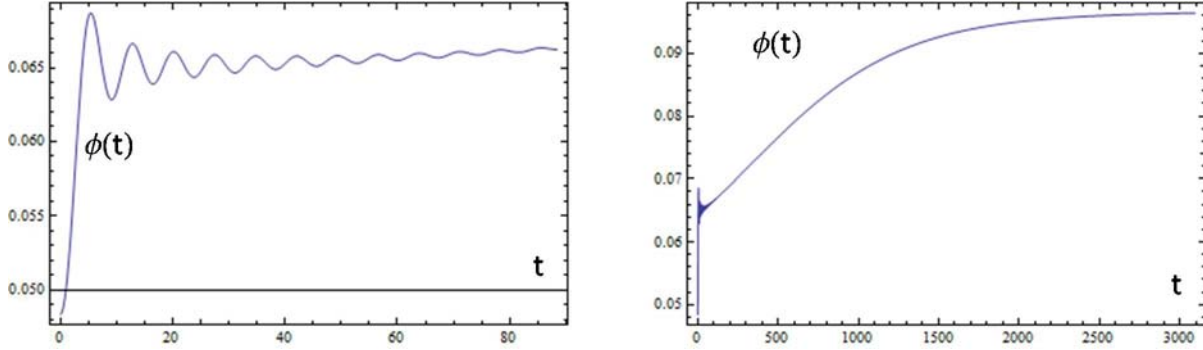


Figura 5.5: Evolución en el tiempo del campo ϕ . Se muestran diferentes escalas temporales en cada gráfica. En la figura izquierda podemos reconocer un comportamiento oscilatorio.

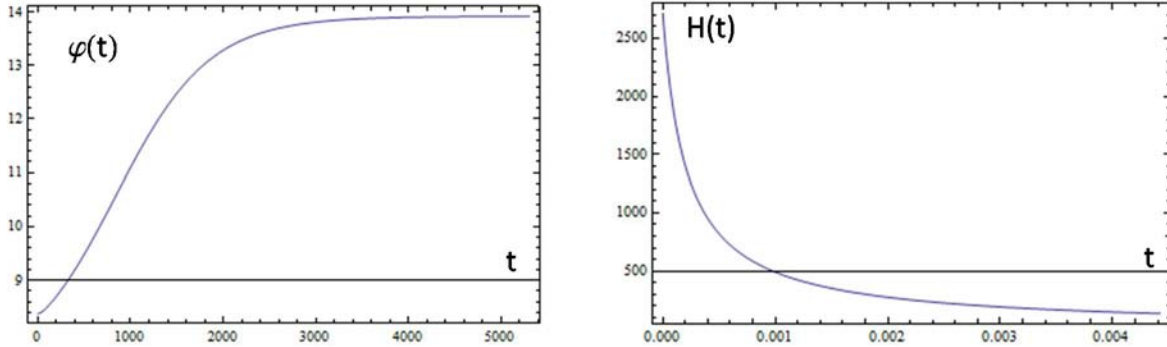


Figura 5.6: *Izquierda*: evolución del campo φ . Este campo rueda sin oscilar hacia su valor mínimo. *Derecha*: parámetro de Hubble $H(t)$, el cual aunque decrece en el tiempo, nunca desaparece.

debemos tomar $\varphi_i > \varphi_{max}$, con cualquier valor razonable para ϕ ; por ejemplo $\varphi_i = 1.1 \times \varphi_{max}$, $\phi_i = 0.5 \times \phi_{min}$. En las figuras 5.5 y 5.6 podemos apreciar que nuestros valores predichos en ec. (5.46) son de hecho corroborados por la solución numérica. Vemos que el campo ϕ se encuentra en régimen oscilatorio (que se aprecia amplificando alrededor de $t = 50$) con una amplitud media yendo hacia el mínimo $\phi_{min} \sim 0.097$, mientras que el campo φ va hacia su propio mínimo $\varphi \sim 13.9$. Debido al hecho de que cada campo tiene su propio término $\frac{\partial V}{\partial \phi}$, o $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ en la ecuación de movimiento, ellos responden al potencial de diferente manera. Por tanto, en este caso específico el campo φ se encuentra sobreamortiguado y no oscila en su camino hacia el mínimo.

Las densidades relativas Ω_α evolucionan como se espera: la radiación se diluye más rápido que la materia, y debido a que hemos tomado una densidad inicial muy pequeña Ω_{nbi} , tenemos que esperar largo tiempo hasta verla dominar (figura 5.7). Debido a este mismo hecho, al factor de escala se le permite crecer sin acelerar hasta un tamaño $a_0/a_i = (1 + z_{eq}) \sim 3000$ (figura 5.8),

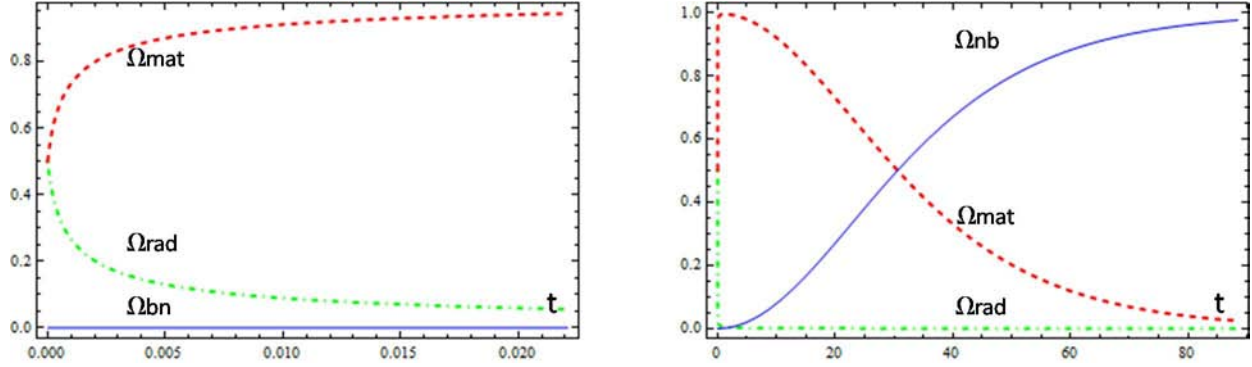


Figura 5.7: Densidades relativas Ω_α para los diferentes fluidos involucrados. La figura de la derecha muestra un lapso de tiempo $t = 2t_0$, el cual es 4,000 veces más grande que el de la figura izquierda.

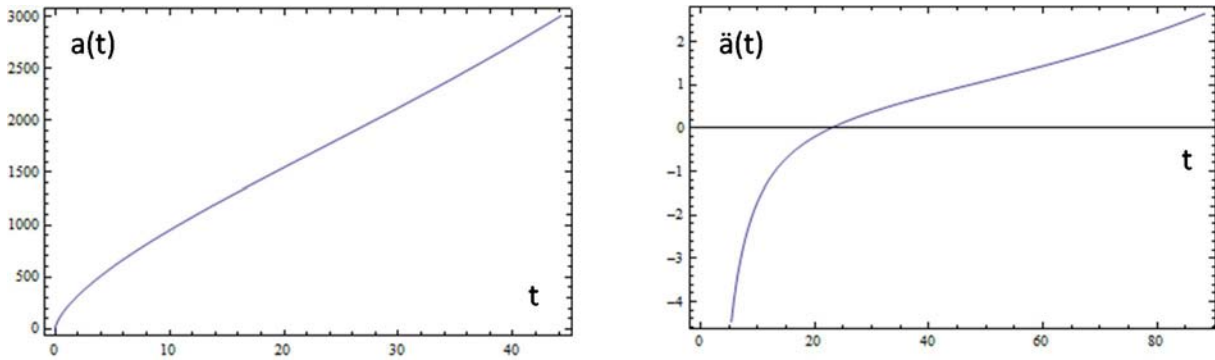


Figura 5.8: *Izquierda:* factor de escala desde $t = 0$ to $t = t_0$, es decir, desde la época de igualdad radiación-materia hasta la época actual. *Derecha:* aceleración del factor de escala desde $t = 0$ hasta $t = 2t_0$. Aquí uno puede observar que el período de aceleración negativa es sucedido por uno de aceleración positiva, con una transición entre ambos alrededor de $t \sim 20$.

que es un número compatible con el que se maneja en el modelo cosmológico estándar, cuando se considera la evolución del universo desde de época de igualdad radiación-materia. En la figura, se ve que un período de aceleración empieza alrededor de $t = t_{ac} = 20$, donde $\ddot{a} = 0$.

Quizás vale la pena aclarar que, el momento t_{ac} en el que la aceleración comienza, no tiene porqué coincidir necesariamente con el momento t_{DE} , en el que la Energía Oscura empieza a dominar $\Omega_{DE}(t_{DE}) = \Omega_m(t_{DE}) + \Omega_r(t_{DE})$. Para nuestra solución en particular obtenemos los siguientes números:

$a_0/a_i = 3006$	$z_0 = 0$	$t_0 = 1$
$a_{DE}/a_i = 2157$	$z_{DE} = 0.39$	$t_{DE} = 0.69 \times t_0$
$a_{ac}/a_i = 1713$	$z_{ac} = 0.76$	$t_{ac} = 0.52 \times t_0$

Nótese que el período de aceleración empieza *antes* del dominio de la Energía Oscura, o sea $t_{ac} < t_{DE}$. Se puede comprobar que lo mismo sucede si se considera una constante cosmológica en lugar de nuestro modelo con campos escalares.

Pasemos ahora a estimar algunos valores físicos. La densidad total de energía en el presente es alrededor de $\rho_0 = E_0^4 \sim (10^{-3}eV)^4$, y la contribución de la Energía Oscura (DE) es $\rho_{DE0} = \Omega_{DE0}\rho_0$. Si identificamos a nuestro fluido no-barotrópico NJL con la DE, tendríamos $\rho_{nb} = \rho_{DE0}$. Ahora, en

el límite cuando los campos se estabilizan cerca del mínimo⁶ la densidad de nuestro fluido NJL es $\rho_{nb} = V_{min}$. Luego, (tomando la aproximación $\Omega_{DE0} \simeq 2/3 \sim 1$ por simplicidad) podemos escribir $\rho_{DE0} = E_0^4 = V_{min}$, y usando el resultado obtenido en la ecuación (5.45), encontramos

$$E_0^4 = \frac{3}{4}\Lambda^4 \left[\sqrt{x} \frac{m_0 M^2}{\Lambda^3} - \frac{1}{12\pi^2} \log(1+x) \right]. \quad (5.49)$$

Esto puede expresarse de forma conveniente con la ayuda de la ecuación (5.30), y definiendo un coeficiente ϵ como sigue

$$E_0^4 = \epsilon \Lambda^4, \quad \epsilon = \frac{3}{4} \sqrt{x} [\alpha(x) - \beta(x)]. \quad (5.50)$$

Cuanto más la cantidad $m_0 M^2 / \Lambda^3$ se acerque a α_{eq} , más pequeño se hará el coeficiente ϵ . Así pues, las ecuaciones (5.30) y (5.50) con $E_0 \simeq 10^{-3} eV$ son restricciones sobre los parámetros Λ , M , m_0 que pueden guiarnos a definir su valor (ver también la tabla 5.2). Para nuestra solución en particular tenemos $\epsilon = 4.67 \times 10^{-4}$, así que $\Lambda/E_0 = 6.3$. Usando este número en la ec. (5.46), con $p = \bar{p}\Lambda$, podemos calcular los correspondientes valores físicos. Debemos aclarar que los valores de los parámetros que nosotros elegimos ($M = \Lambda = m$), fueron para obtener una solución visualmente estética. Sin embargo, obsérvese que podemos asegurarnos de que la amplitud del campo sea menor que el corte, por un lado tomando un valor apropiado del parámetro m en las ecs. (5.37), (5.38); y por otro lado, haciendo el parámetro ϵ en la ecuación (5.50) suficientemente pequeño, a través de la elección de $l = m_0 M^2 / \Lambda^3$.

5.5 Apéndice. Sobre el valor Físico (tórico y observado) y el valor Numérico de los Parámetros.

Esta sección es en cierto sentido independiente tanto del modelo NJL como de la cosmología, y no es necesaria para entender nuestros resultados. Sin embargo, señala una cuestión sutil, que de hecho tuvo que ser resuelta para nuestra investigación, requiriendo tiempo y pensamiento cuidadoso (en nuestro caso fue causa de errores y retrasos), porque cobró importancia en el proceso de resolución numérica y podría ser fuente de malentendidos.

Relación Valor Teórico-Observaciones.

En lo que sigue nos interesa hacer estimaciones de orden de magnitud para hacer comparaciones, así que nos permitiremos redondear algunos coeficientes numéricos. Supongamos que E_{nb} es la energía final del fluido no-barotrópico, es decir, la energía de los campos en el límite cuando son estabilizados. La densidad de energía correspondiente (recuérdese que $\rho_{nb} = \rho_\phi + \rho_\varphi$) es (valor teórico) $\rho_{nb} = V_{min}$, donde $\rho_{nb} = E_{nb}^4$, ya que *en este límite* la energía cinética tiende a cero, aunque no necesariamente.⁷ Ahora, la densidad de energía al día de hoy es (valor observado) $\rho_0 = E_0^4$ con $E_0 \simeq 10^{-3} eV$, y tenemos para la energía oscura al día de hoy $\Omega_{DE0} \simeq 70\%$, así que

⁶Debemos tener en mente que en general, los campos pueden encontrarse en un régimen de rodamiento, así que las energías cinéticas no serían despreciables. Por lo tanto debemos ser cuidadosos de que las condiciones de las que estamos hablando sean verdaderas.

⁷Hay que tener presente que la identificación $\rho_{nb} = V_{min}$ solo es válida en el límite cuando los campos han sido estabilizados. En general podría suceder que algún campo se encontrara en proceso de rodamiento o en régimen oscilatorio, en cuyo caso podría ser importante considerar la proporción con la que energía cinética de los campos contribuye a la densidad de energía total.

$\rho_{DEo} = \Omega_{DEo} \times \rho_0$. Si identificamos nuestro fluido no-barotrópico con la Energía Oscura, ponemos entonces $\rho_{nb} = \rho_{DEo}$, es decir $V_{min} = \Omega_{DEo} \times E_0^4$. Ahora bien, si asumimos que los parámetros del potencial Λ , M , etc. no difieren demasiado entre sí en orden de magnitud, podemos decir, a grandes rasgos que el valor del potencial en términos de Λ es dado como $V(\phi, \varphi) \sim \Lambda^4$ (lo cual generalmente provee una buena estimación). Tendríamos entonces que $\Lambda^4 \sim \Omega_{DEo} \times E_0^4$. Esto nos da la relación entre la teoría y la observación (de hecho podemos ser más precisos para nuestro potencial; tomando en cuenta la relación (5.50) que encontramos antes, la identificación $V_{min} = \rho_{DEo}$ nos lleva a

$$\frac{\Lambda}{E_0} = \left(\frac{\Omega_{DEo}}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}; \quad (5.51)$$

esta es la relación entre el valor *teórico* de la escala de energía Λ , y la densidad de energía total del universo $\rho_0 = E_0^4$ *observada* al día de hoy).

En este punto observamos lo siguiente: si se compara la masa de Planck M_p con la energía actual se tiene que $E_0/M_p \simeq 10^{-30}$ ó $\rho_0 = E_0^4 \simeq (10^{-30} M_p)^4 = 10^{-120} M_p^4$. De acuerdo con las simplificaciones que estamos haciendo tendríamos también $M \sim m_0 \sim \Lambda \sim 10^{-30} M_p$. Es decir, ¡los parámetros de nuestra teoría difieren aproximadamente en treinta ordenes de magnitud de la masa de Planck! Además, suponiendo que las amplitudes de los campos en ningún momento son extremadamente diferentes de los puntos mínimos, tenemos a grandes rasgos $\varphi \sim \phi \sim \Lambda$, así que con un error de pocos ordenes de magnitud tenemos

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} \sim \frac{\partial V}{\partial \varphi} \sim 10^{-90} \quad (5.52)$$

aproximadamente. Las ecuaciones (5.11), (5.12) incluirían entonces números inmensamente pequeños, y esto anticipa una dificultad en el proceso de resolución del sistema.

Hay todavía otro lugar donde incide la gran diferencia entre escalas de energía: una de las condiciones iniciales requerida por nuestro sistema de ecuaciones diferenciales (como veremos más adelante) es el valor de la variable de Hubble, H_i . Como ya sabemos, dicha variable no es independiente, y puede ser especificada consistentemente de cualquiera de las dos siguientes maneras

$$H_i = \frac{1}{M_p} \sqrt{\frac{\rho_{ri} + \rho_{mi} + \rho_{nbi}}{3}}, \quad H_i = \frac{1}{M_p} \sqrt{\frac{V_i}{3\Omega_{nbi}}}. \quad (5.53)$$

Aquí $V_i = V(\phi_i, \varphi_i)$ es el valor inicial del potencial, para el cual hemos supuesto que en orden de magnitud se aproxima por $V_i \sim \Lambda^4$ (nuestras observaciones seguirán siendo válidas si es que esto no es una buena estimación). La primera expresión (5.53) es $H_i = \sqrt{(1/3)\rho_{total}}/M_p$. La densidad de energía total inicial es $\rho_{total} = E_{in}^4$. Por ejemplo, si iniciamos con la energía a la que las densidades de materia y radiación eran iguales, tendríamos $E_{in} \sim 1eV$ aprox., lo cual implicaría $H_i \sim 10^{-54} M_p$. Otro ejemplo: si, siendo muy optimistas, nuestra teoría es válida hasta la escala Electrodébil, $E_{in} = 100GeV$ aprox., entonces $H_i \sim 10^{-32} M_p$. La situación menos útil sería empezar desde energías muy cercanas (pero mayores⁸) a la actual, $E_{in} \sim 10^{-3} eV$, en cuyo caso tendríamos $H_i \sim 10^{-60} M_p$. Por otro lado, si tomamos la segunda expresión (5.53) tenemos $H_i \sim \Lambda^2/M_p$, por lo que si $\Lambda \sim 10^{-30} M_p$, entonces $H_i \sim 10^{-60} M_p$.

Así, vemos que hasta en el mejor de los casos en el que nuestra teoría podría ser válida (escala Electrodébil), el valor H_i es muy pequeño comparado con la masa de Planck.

⁸Estamos suponiendo que la densidad de energía del universo en un momento dado es menor a la densidad en un momento anterior. Una teoría deja de ser válida *por encima* de la escala Λ de energía (y correspondientemente a una densidad de energía) a la cual está definida. Por debajo de dicha escala estas son útiles como *teorías efectivas*. Cuanto menor sea la escala, menor es el rango de validez de la teoría. Así, no tendría sentido definir una teoría a una escala menor que la energía actual.

Sería descuidado efectuar la resolución numérica simplemente introduciendo los valores tal cual, ya que surgen problemas prácticos al manejar números tan extremos en una computadora debido a los errores de cálculo numérico, capacidad de memoria, tiempo de cómputo, etc. Superficialmente, una idea para evadir este problema puede ser una redefinición de variables a través de un reescalamiento, es decir, cambiar los valores de los parámetros, redefinir variables y resolver en términos de las variables redefinidas. Pero ¿en qué medida podemos hacer esto con impunidad?, ¿se alteran las soluciones de las ecuaciones bajo este procedimiento (dinámica de los campos, evolución y valor de las diferentes variables cosmológicas...)? ¿La redefinición de los parámetros Λ , masas, etc., o de los campos alteran la evolución del factor de escala o de los campos mismos?

Debido a la expresión (5.53), $H_i \sim \Lambda^2$ así que el efecto de un reescalamiento $\Lambda \rightarrow s\Lambda$, es a su vez un cambio en la variable de Hubble, $H_i \rightarrow s^2 H_i$, y por lo tanto en la rapidez de cambio del factor $a(t)$ (porque $H \sim \dot{a}$). En consecuencia, se podría causar aceleración tan solo con hacer una redefinición de la escala Λ , lo cual no es aceptable porque no esperamos que cambie la situación física como resultado de dicha redefinición. Podría pensarse, por ejemplo, en definir una nueva variable de Hubble "práctica", $h = H/H_i$, para la cual la condición inicial sería $h_i = 1$, y una escala definida por $s = 1/H_i \sim 10^{60} M_p$. En este caso sin embargo, las ecuaciones dinámicas deberían ser modificadas *consistentemente*. Así, la ecuación de movimiento para un campo escalar $\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + \partial_\chi V = 0$, se tendría que sustituir por la ecuación $s\ddot{\bar{\chi}} + 3h\dot{\bar{\chi}} + s\partial_\chi V = 0$. Si (como se estimó antes en (5.52)) $\frac{\partial V}{\partial \chi} \sim 10^{-90}$, de todos modos el término $s\partial_\chi V \sim 10^{-30} M_p$, así que no se gana mucho. Además la segunda ecuación del sistema (5.41) también tendría que adecuarse. Una alternativa a este procedimiento podría ser la introducción de un potencial "práctico" \bar{V} ("v barra") en lugar del potencial "teórico" V : si el problema es que $V \sim \Lambda^4 = (10^{-30} M_p)^4$, se puede pensar en reescalar por un factor $s = 10^{30}$ para tener $\bar{V} = s^4 V$ del orden de la unidad. Así la nueva ecuación de movimiento se reescribiría en términos prácticos como $\ddot{\bar{\chi}} + 3h\dot{\bar{\chi}} + \partial_\chi \bar{V} = 0$, con variables "prácticas" $\bar{\chi} = s\chi$, etc. En esta forma, el término $\partial_\chi \bar{V}$ equivale a $s^3 \partial_\chi V$, pero también, nuevamente por consistencia deberíamos tener que $h\dot{\bar{\chi}} = (s^2 H)(s\dot{\chi})$. Vemos que el cociente $H/\frac{\partial V}{\partial \chi} = s \times h/\partial_\chi \bar{V}$ no es invariante, así que se presentan dificultades: el factor H representa un coeficiente de fricción, el cual tiene el efecto de disminuir la velocidad, y por lo tanto *su reescalamiento afecta la dinámica del campo*.

Por si esto no fuera suficiente para mostrar la inviabilidad de un simple cambio de escala, *no es cierto* que bajo reescalamiento de los campos $\bar{\chi} = s\chi$, y de los parámetros $\Lambda \rightarrow s\Lambda$, $m \rightarrow sm$, etc., la función $f(x)$ (definida en (2.9), y que entra en (5.5)) satisface $f(s^4 x) = s^4 f(x)$. La situación en nuestro caso incluso es un poco más sutil, pues como veremos en seguida, no se cumple precisamente que $V_{min} \sim \Lambda^4$, ya que nuestra teoría incluye más parámetros y será necesario hacer suposiciones adicionales. No obstante hemos hecho aquella simplificación como primera aproximación para resaltar el hecho de que el reescalamiento del valor de los parámetros (obligado por cuestiones prácticas) no resulta ser una cuestión trivial.

Además de los problemas de índole práctica (numérica) que puede ocasionar la pequeñez de las magnitudes, es necesario considerar la cuestión de los valores de los parámetros desde el punto de vista físico (teórico). No sería deseable que Λ (el corte en nuestro potencial no renormalizable) fuera del orden de E_0 , ya que un valor tan pequeño en la escala de energía restringe extremadamente la validez de la teoría. Por el contrario, cuanto más grande sea el rango de energía, mejor es la teoría. Supongamos pues por un momento que la teoría es válida por lo menos hasta la escala de la igualdad radiación materia, $\Omega_{rad} = \Omega_{mat}$, es decir $\Lambda \sim 1eV$ aprox. En este caso todavía tenemos $\Lambda/M_p \sim 10^{-27}$. Siendo muy optimistas podríamos decir que la teoría es válida hasta energías tan grandes como las de gran unificación $\Lambda = E_{GUT} \sim 10^{15} GeV$, en cuyo caso $\Lambda/M_p \sim 10^{-3}$, pero

esto es esperar demasiado y necesitaríamos justificar que de hecho esto pueda ser así. Es de mayor prudencia (e incluso instructivo) saber qué esperar en el peor de los casos, y de cualquier forma, tener una idea de cómo lidiar con la posibilidad de que $\Lambda \ll E_{GUT} < M_p$.

Incidentalmente, hay otra circunstancia que puede ser importante señalar: en una primera aproximación se podría pensar que el parámetro M puede tomar un valor del orden de la escala de energía relevante, y escribir por ejemplo $M = \Lambda$. Sin embargo, si se hace esto, la ecuación (5.9) nos dice que el punto crítico sería *mayor* que la escala de validez de la teoría: $\varphi_c > \Lambda$. Es más, recuérdese que el punto mínimo φ_{min} se encuentra *después* del punto crítico φ_c , por lo que el mínimo sería aún mayor que la escala Λ .

En resumen: no es conveniente que Λ sea demasiado pequeño, pero hay que saber manejar los problemas que esto ocasionaría en caso de que sea inevitable. Más adelante, en el capítulo 7 consideraremos la posible pequeñez de la escala Λ desde otra perspectiva, tomando en cuenta la teoría del Grupo de Renormalización.

Así pues, ¿qué valores debemos asignar a los parámetros? Recordemos cuáles son todos estos para mayor claridad: Λ (el corte en nuestro potencial no renormalizable), M (de la definición (5.8)), m_0 (la masa del campo φ (5.8)), y m (que puede interpretarse como la masa del condensado ϕ , parámetro necesario para dar consistencia dimensional al lagrangiano efectivo (2.5)). Es decir, tenemos 4 parámetros. El parámetro más importante es el corte en la energía Λ , ya que éste determina la escala de validez de la teoría NJL. La primera simplificación que haremos será asumir que M no difiere mucho de Λ (posiblemente puedan ser iguales), de forma que podamos escribir al menos una relación de proporcionalidad $M = p\Lambda$, con p del orden de la unidad. Debido a la condición (5.30) podemos conocer a m_0 . Así, dado Λ se determina M y m_0 . En principio no hay otra condición para restringir el valor del parámetro restante m , a menos que tenga importancia la discrepancia de la magnitud de los campos entre sí. Gracias a la ecuación (5.38) podríamos tener un control sobre esto, aunque hasta donde podemos ver por ahora, no hay restricción de tipo formal, y la magnitud relativa sería más bien una cuestión estética. Dicho esto, nos permitiremos tomar $m = \Lambda$, favoreciendo la simplicidad sobre la estética. Así las cosas, tendríamos a Λ como único parámetro libre. Debe quedar claro que el coeficiente numérico ϵ está determinado por la proporción relativa entre Λ , M y m_0 (definiciones (5.30), (5.33), (5.50)), mientras que el valor absoluto de Λ está dado por (5.51). Decíamos antes que no es conveniente desde el punto de vista teórico que Λ sea tan pequeño. Si queremos que el rango de validez de la teoría efectiva NJL sea muy amplio, deberíamos tener $\Lambda/E_0 \gg 1$ (que implica $\Lambda \gg E_0$). Debido a la presencia de la raíz cuarta en (5.51), esto exige tomar un ϵ muy pequeño. En la siguiente tabla mostramos la correlación entre las variables para algunos valores.

$m_0(\times M^2/\Lambda^3)$	ϵ	x_{min}	Λ/E_0
6.61×10^{-3}	0	2.18	∞
6.62×10^{-3}	7.3×10^{-13}	2.18	10^3
6.95×10^{-3}	4.67×10^{-4}	1.81	6.29
8.08×10^{-3}	1.72×10^{-3}	0.55	4.54

El grado de precisión en ese puede atenuar a cambio de reducir la escala de validez de la teoría. En las secciones anteriores al resolver las ecuaciones para mostrar un ejemplo de nuestra teoría, nosotros tomamos un ϵ muy poco fino, causando que Λ no fuera muy diferente de E_0 ; esto para evitar complicaciones numéricas.

Relación Valores Numéricos-Físicos.

Aún tomando Λ cercano a E_0 (lo cual atenúa el grado de precisión), falta resolver el problema *jerárquico* Λ/M_p para poder llevar a cabo la resolución numérica. Para esto nos parece pertinente revisar el procedimiento de la elección del sistema de unidades. Las leyes físicas establecen relaciones (ecuaciones) entre magnitudes físicas (de hecho aquellas sugieren su definición misma) de tal forma que una de ellas deja de ser independiente. Partiendo de magnitudes físicas básicas dimensionalmente independientes (por ejemplo masa, longitud y tiempo, o energía, volumen y momento angular, etc.) se pueden definir magnitudes compuestas (por ejemplo $p = h\lambda$, $E = mc^2$, $E = G\frac{m^2}{r}$). La dimensión de las constantes de proporcionalidad G , c , h puede expresarse en función de dichas magnitudes físicas básicas. Así, si por ejemplo se toma al tiempo t , distancia d y energía E como magnitudes básicas, la dimensión de la constante física c se puede escribir en la forma $[c] = t^p \times d^q \times E^r$, con expresiones análogas para G y h . La definición dimensional usual para cada constante se obtiene eligiendo las potencias p , q y r correctas. Al hacer dicha elección se definen sistemas de unidades, y se asigna la dimensión de las constantes de proporcionalidad (es decir, constantes físicas G , c , h). La constante de proporcionalidad más sencilla es la unidad. Así, tendríamos una restricción de la forma $t^p \times d^q \times E^r = 1$, de donde se ve que sólo un par de magnitudes es independiente. Por ejemplo, si $c = 1$ (para la cual es $p = -1$, $q = 1$, $r = 0$), entonces $t^{-1} \times d = 1$, por lo que sólo una magnitud (tiempo o distancia), es independiente, y el trío de magnitudes se reduce a un par (digamos la energía y el tiempo). La imposición de una segunda restricción reduce el par a una sola magnitud. Por ejemplo, ya que $[h] = E \cdot t$, la elección $h = 1$ dejaría solamente a la energía, digamos, como única magnitud física independiente. Dado que todavía resta una constante (G), nada nos impide la imposición de una *tercera* restricción $G = 1$. Esto llevaría a un sistema de unidades adimensional. En realidad, el sistema que se utiliza normalmente en textos sobre cosmología y que nosotros tomamos en este reporte (y que explicamos en el capítulo introducción) consiste en tomar la llamada *masa reducida de Planck* $M_p = 1/\sqrt{8\pi G} = 1$. Ahora bien, cuando tenemos solamente $h = c = 1$ (antes de imponer la restricción sobre G), la masa de Plank es $M_p \simeq 10^{18} Gev$, y es un asunto de convencionalismo el hacer $M_p = 1$. De igual manera podríamos tomar cualquier otra escala de energía Λ e igualarla a la unidad (o a cualquier otra constante). Esto determinará un sistema de unidades diferente igualmente válido, aunque habrá que poner cuidado en hacer la conversión correcta.

Sea $\bar{\Lambda}$ un cierto valor numérico, elegido de manera conveniente para efectuar la resolución numérica (en una computadora), y Λ (sin barra) el valor físico de la escala de energía. Tomando por ejemplo $\Lambda = 10^{-3} eV$, como $\bar{\Lambda} = \Lambda$ tendríamos

$$1eV = 10^3 \bar{\Lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{10^{-3}}{\bar{\Lambda}} eV = 1. \quad (5.54)$$

Esta ecuación definiría el sistema de unidades. Así, nuestros resultados en realidad *no estarán dados en unidades* $M_p = 1$, *sino en unidades* (5.54), donde $\bar{\Lambda}$ puede ser cualquier número, definido según convenga. Aunque la definición del sistema de unidades no altera la jerarquía entre Λ y M_p , esto ya no tendría que representar una dificultad. Lo que importaría sería la aparición explícita del cociente Λ/M_p . En vista de estos argumentos, vemos que hay que distinguir entre un reescalamiento y una redefinición o *reinterpretación* de cantidades. En un reescalamiento se cambia el valor de algunas cantidades *respecto* a otras, afectando en general la dinámica de las variables. Por otro lado, una *reinterpretación* tiene más que ver con la elección de las unidades, que es lo que a nosotros nos interesa para resolver nuestro problema de resolución numérica.

En la resolución de nuestro sistema utilizamos los valores numéricos, los cuales distinguiremos de los valores físicos reales en este escrito, por medio de una barra.

Capítulo 6

NJL Extendido. Adición de un término $V_{III} \sim \frac{1}{\varphi^2}$ al Potencial.

Los parámetros básicos para la descripción de la Energía Oscura son la ecuación de estado $w_{DE} \simeq -1$ y la densidad de energía al día de hoy $\Omega_{DEo} \simeq 0.70$. En los capítulos anteriores hemos mostrado cómo, en base a la teoría de Nambu y Jona-Lasinio, en la sección anterior fuimos capaces de obtener un ejemplo de modelo que satisface este criterio y permite una época de dominio de la materia (con una duración acorde con la teoría cosmológica estándar), seguida de un período de aceleración (como lo exigen las observaciones recientes). No obstante, según se explicó en la misma sección, las características del potencial no permitían pasar de manera dinámica desde un acoplamiento débil ($g < g_c$) a uno fuerte ($g > g_c$), teniendo esto como consecuencia la ausencia de la transición de fase correspondiente. Nos gustaría insistir en la posibilidad de incluir dicha transición, ya que si no lo hacemos así, tendríamos solamente un modelo complicado que reproduce (pero no explica) el comportamiento de una constante cosmológica.¹ Es razonable pensar que para lograr la transición necesitaríamos "levantar" el potencial en la región $g < g_c$, de manera que $V(g_{final}) < V(g_c) < V(g_{inicial})$. Dado que la relación entre g y h es de proporcionalidad directa, un término, por ejemplo de la forma $1/h$, cumple el requisito.

6.1 Análisis del Potencial Total $V = V_I + V_{II} + V_{III}$.

Nos apegamos a las definiciones que establecen la relación entre las cantidades φ , g y h hechas anteriormente (ecs. (5.8), capítulo 5), y que reescribimos a continuación para mayor claridad:

$$x = \frac{m^2 \varphi^2 \phi^2}{\Lambda^2 M^4}, \quad h = \frac{\Lambda^2 \varphi^2}{8\pi^2 M^4}, \quad b = \frac{(8\pi^2)^2 m_0^2 M^4}{\Lambda^6}. \quad (6.1)$$

Definimos ahora la siguiente contribución al potencial

$$V_{III} = A \frac{c}{h}, \quad \text{equivalente a} \quad V_{III} = \frac{c \Lambda^2 M^4}{2 \varphi^2}, \quad (c > 0), \quad (6.2)$$

La discusión del significado de la constante c , así como el origen de la forma funcional de V_{III} se dejará para un capítulo posterior. El nuevo potencial total en términos de x y h se escribe entonces

¹No lo explica en la medida en que, hasta donde hemos investigado, no hay forma de determinar por primeros principios los valores de los parámetros, de la misma manera en que ningún principio físico dicta el valor de una constante cosmológica, sino que éste debe ajustarse a las observaciones.

como

$$V = V_I + V_{II} + V_{III}, \quad \text{es decir} \quad V = A \left[\frac{x}{h} - f(x) + bh + \frac{c}{h} \right]. \quad (6.3)$$

Empleando las relaciones (5.8), éste se puede expresar en términos de los campos:

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}m_0^2\varphi^2 + \frac{c}{2}\frac{\Lambda^2 M^4}{\varphi^2} - \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} \left[x + x^2 \log\left(\frac{x}{1+x}\right) + \log(1+x) \right], \quad (6.4)$$

Para el análisis de este nuevo potencial aprovechamos los resultados de la sección 5.3 del capítulo anterior, y las definiciones para el potencial dadas ahí mismo, ya que que éste sólo se diferencia de aquél por la suma del término V_{III} . El punto crítico en φ sigue estando dado por la ecuación (5.9), es decir $\varphi_c = 2\pi M^2/\Lambda$. A partir de las condiciones de minimización (es decir, la anulación de las derivadas), se obtiene, a partir de (6.3) que

$$h_{min} = \sqrt{\frac{x+c}{b}}. \quad (6.5)$$

Similarmente al caso $V = V_I + V_{II}$, la existencia de los puntos extremos se traduce en la igualdad

$$\frac{m_0 M^2}{\Lambda^3} = \alpha(c, x) \equiv \frac{\sqrt{x+c}}{4\pi^2} \left[1 + x \log\left(\frac{x}{1+x}\right) \right], \quad (6.6)$$

mientras que la condición $V_{min} \geq 0$ exige que

$$\frac{m_0 M^2}{\Lambda^3} \geq \beta(c, x) \equiv \frac{\sqrt{x+c} \log(1+x)}{4\pi^2 (3x+4c)}. \quad (6.7)$$

De manera análoga a como sucedía con el caso $V = V_I + V_{II}$, la fijación de los parámetros Λ , M y m_0 define una constante $l = m_0 M^2/\Lambda^3$ que corta a la gráfica de la función $\alpha(c, x)$ en los que serán los puntos extremos x_{ex} del potencial total $V(x, h)$ (6.6); en el presente caso, el efecto de la inclusión del término V_{III} es la parametrización de la función alpha (y beta) a través de la constante c (figura 6.1). Dado un valor de c fijo, el cumplimiento simultáneo tanto de la condición (6.6), como de

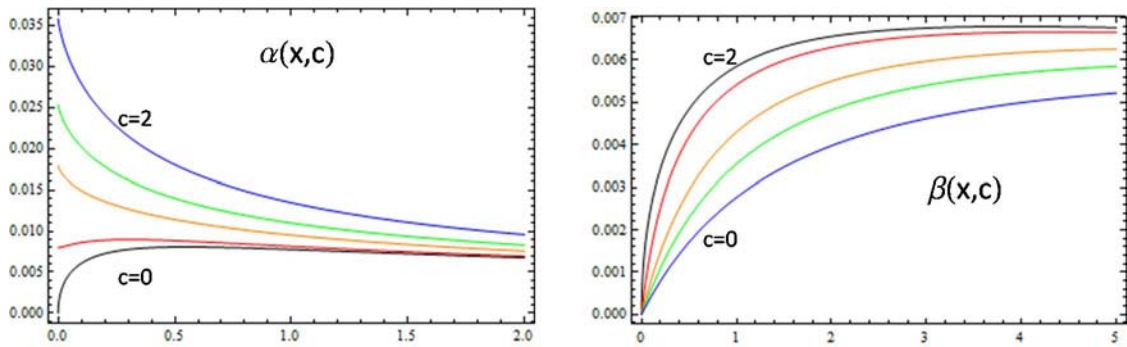


Figura 6.1: Colección de funciones $\alpha(x, c)$, $\beta(x, c)$ para varios valores del parámetro c . Mostramos desde $c = 0$ hasta $c = 2$.

(6.7) cuando en esta última se cumple la igualdad, implica que las gráficas de las funciones $\alpha(c, x)$ y $\beta(c, x)$ se intersectan en un valor específico, digamos α_{eq} (es decir, $\alpha(c, x) = \beta(c, x) = l_{crit}$). Cuando esto se cumple, el mínimo del potencial se anula: $V_{min} = 0$. Un juego de valores de los parámetros tal que l es mayor que $l_{crit} = \alpha_{eq}$ causa un mínimo positivo, $V_{min} > 0$; en caso contrario se obtiene uno negativo. No hay que olvidar que las funciones mismas alpha y beta no dependen

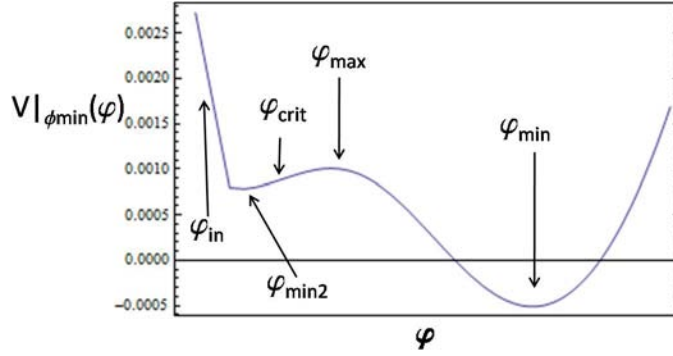


Figura 6.2: Sección transversal del Potencial total $V = V_I + V_{II} + V_{III}$ para un $c < c'$. Debido al término $V_{III} \sim 1/\phi^2$, ec. (6.2) el potencial total $V \rightarrow \infty$ cuando $\phi \rightarrow 0$, de manera que aparece un mínimo local ϕ_{min2} antes de ϕ_c . Este mínimo desaparecería para un V_{III} suficientemente grande, a través del parámetro c , con $c > c'$.

de los parámetros y están bien definidas; únicamente dependen de la constante c . Hay sin embargo una diferencia muy importante respecto al caso $V = V_I + V_{II}$, el cual tiende a cero cerca del origen, es decir $V = V_I + V_{II} \rightarrow 0$, cuando $\phi \rightarrow 0$: tenemos a que el término $V_{III} \sim c/\phi^2$ es divergente con valores positivos cerca del origen, es decir $V_{III} \rightarrow \infty$ cuando $\phi \rightarrow 0$; al sumarlo al potencial para dar el nuevo potencial $V = V_I + V_{II} + V_{III}$, tenemos que éste toma también valores grandes positivos cerca del origen. Ahora, si el parámetro c es muy pequeño, el término V_{III} decae lo suficientemente rápido para permitir que sobresalga el punto máximo de $V_I + V_{II}$, y en este caso, a medida que nos movemos hacia el origen existiría un mínimo menor que el máximo antes de que el potencial se haga arbitrariamente grande (ver figura 6.2); por otra parte, si c es demasiado grande, el término V_{III} puede ser su vez lo suficientemente grande para "opacar" al máximo de la parte $V_I + V_{II}$, haciendo que el potencial total posea solamente un mínimo global. De acuerdo con nuestra

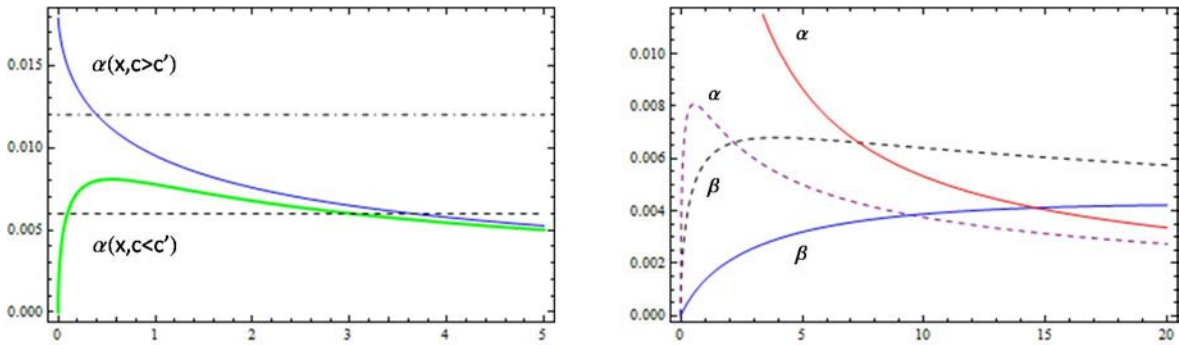


Figura 6.3: *Gráfica izquierda:* Ejemplos de funciones $\alpha(c, x)$, las cuales se dividen en dos conjuntos: 1) si $c < c'$ (curva verde gruesa) hay dos intersecciones con alguna recta horizontal l (líneas discontinuas); 2) si $c > c'$ (curva azul delgada) hay solo una intersección. *Gráfica derecha:* Par de funciones alpha-beta para $c = 0$ (curvas punteadas) y $c = 10$ (curvas continuas). Para el rango delimitado por estos valores del parámetro c , la intersección entre α y β existe.

investigación numérica, se encuentra que para ciertos valores de c , en el rango $0 < c < c'$, para algún número c' , las funciones alpha poseen un máximo por debajo del cual son intersectadas en dos puntos por la constante l (es decir hay dos extremos *para el potencial*, el mínimo y el máximo. No confundir los extremos del potencial con los extremos de la función alpha). El punto ϕ_{max} en

el que el potencial tiene el máximo (este resulta ser un máximo local), es menor que el punto φ_{min} donde se encuentra el mínimo (este resulta ser un mínimo global), es decir $\varphi_{max} < \varphi_{min}$. Esto está en correspondencia con el hecho de que $x_{max} < x_{min}$ (análogo al caso anterior $V = V_I + V_{II}$ ya estudiado. Recordar figura 5.2). A medida que c aumenta, la intersección asociada con el punto máximo x_{max} se va "levantando" y la función alpha se modifica hasta que eventualmente la doble intersección se convierte en una sola para algún $c = c'$: la intersección del máximo deja de estar presente. La ausencia de este punto de intersección significa que el máximo (local) del potencial deja de existir. Esto sucede aproximadamente para $c' \simeq 0.15$ (este valor se obtiene numéricamente). Por otro lado, la intersección asociada al punto mínimo sigue estando ahí, de forma que éste todavía existe (figura 6.3). Para el rango de valores $c > c'$, las funciones alpha son monótonas decrecientes y solamente hay un punto de intersección, correspondiente al mínimo.

Ahora bien, ya que queremos iniciar con valores del campo que sean menores que el valor crítico,² donde ocurre la transición de fase, y dado que $V(\varphi_i) < V(\varphi_{max})$ (porque φ_{max} es un punto máximo), esto significa que el campo φ en el curso de su evolución se encontraría eventualmente con una barrera de potencial que no le permitiría alcanzar el mínimo global (y tendríamos una situación indeseada similar al modelo anterior $V = V_I + V_{II}$). Para evitar esto, necesitamos entonces un valor de c en el rango que causa que la función $\alpha(c, x)$ sea intersectada sólo una vez, es decir, necesitamos $c > c'$; así el potencial no poseería máximo local, sino solo un mínimo (global).

No hay que olvidar sin embargo que todavía existen tres posibilidades para el valor del potencial en el mínimo: que sea mayor, menor o igual a cero. No profundizaremos aquí en el estudio del último caso, es decir $V_{min} = 0$ por corresponder a un comportamiento que no causa aceleración. Por otro lado, el caso $V_{min} > 0$ implica que el potencial es siempre positivo, por lo que si las condiciones iniciales favorecen la desaceleración inicial, eventualmente se obtiene aceleración positiva con el paso del tiempo. Esto no supondría ninguna diferencia importante respecto al caso con mínimo positivo $V = V_I + V_{II}$ (es decir sin considerar el término V_{III}), siendo el camino seguido por los campos la única novedad; por tanto esto representaría una complicación que no vale la pena ser tomada en cuenta. Por último, el caso $V_{min} < 0$ puede ofrecer un modelo interesante, si es que se presenta la siguiente circunstancia: la existencia de condiciones iniciales en las que el potencial sea positivo y la aceleración sea negativa (o sea, que haya desaceleración) durante un tiempo suficiente para concordar con el modelo cosmológico estándar. Con un potencial que se vuelve negativo, la densidad total de energía tendría que anularse en algún momento y el factor de escala llegaría a un valor máximo, después de lo cual retrocedería hacia cero: el universo se colapsaría. Si en el tiempo anterior a la negatividad del potencial, conforme se da la evolución dinámica, el potencial permanece positivo el tiempo suficiente para que la aceleración se vuelva positiva durante un lapso de tiempo finito, entonces ¿se obtendría un universo acelerado *y cerrado*? ¿Se puede de hecho lograr esta situación en nuestra teoría? Veremos esto en lo que sigue.

6.2 Criterio de Aceleración.

En la teoría de la Inflación Cósmica Temprana, se estudian las características de debería tener un potencial para que cause la aceleración del factor de escala, y en este contexto son bien conocidas las condiciones de rodamiento suave. Sin embargo, una de las suposiciones que ahí se hacen es la existencia de únicamente un campo escalar cuya dinámica está regida por el potencial (véase por

²Si se tiene un potencial en el que c es tal que existen los dos extremos $\varphi_{max}, \varphi_{min}$, debemos tomar $\varphi_i < \varphi_{max}$ para que ocurra la transición de fase, ya que si $\varphi_{max} > \varphi_{crit}$, con mayor razón $\varphi_{max} > \varphi_i$.

ejemplo []). Así, estas condiciones no son aplicables para una teoría que pretenda modelar a la Energía Oscura, ya que en este caso no se puede despreciar la presencia de fluidos adicionales, como son radiación y materia (polvo). Además, no hay que olvidar que en nuestro modelo en particular, hemos considerado dos campos escalares, y no sólo uno. No obstante, sería conveniente tener al menos una idea de las condiciones bajo las cuales podemos esperar aceleración positiva, si es que se presenta, en términos de los parámetros de nuestra teoría.

Un campo escalar genérico χ con potencial U se encuentra bajo régimen de "rodamiento suave" si cambia muy lentamente por estar sometido a una fricción muy grande. En base a la ecuación de movimiento y la definición de la densidad de energía, esto se traduce en las condiciones

$$\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 \ll U, \quad \ddot{\chi} \ll 3H\dot{\chi}. \quad (6.8)$$

La primera expresión nos permite decir que, de manera aproximada $\Omega_\chi \simeq \frac{U}{3H^2}$. Por medio de la segunda expresión, la ecuación de movimiento para el campo escalar puede simplificarse a $3H\dot{\phi} = -U'$. Así, tenemos para cualquier otro fluido (barotrópico) $\Omega_b = \frac{\rho_b}{3H^2} \simeq \rho_b \frac{\Omega_\chi}{U}$. Con estas aproximaciones podemos obtener que

$$\rho_b = \frac{\Omega_b}{\Omega_\chi} U, \quad \dot{\phi}^2 = \frac{U'^2}{3(3H^2)} = \Omega_\chi \frac{U'^2}{3U} \quad (6.9)$$

Por otro lado, la expresión para la aceleración (recordar ecuación (??)) en presencia de materia, radiación y dos campos escalares, como es nuestro caso, es

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4\pi G}{3} \left[\frac{4}{3}\rho_r + \rho_m + 2(\dot{\phi}^2 + \dot{\varphi}^2 - V) \right] = 0, \quad (6.10)$$

con el potencial V dado por (6.3). Como tenemos que las variables x , h como función de los campos son $h \sim \varphi^2$, $x \sim \varphi^2 \phi^2$ (ecuaciones (6.1)), podemos comprobar la dependencia de los términos del potencial en función de los campos:

$$\frac{x}{h} \sim \phi^2, \quad bh + \frac{c}{h} \sim b_1 \varphi^2 + \frac{b_2}{\varphi^2}, \quad (6.11)$$

para algunas constantes b_1 , b_2 (ver la expresión explícita (6.4) para el potencial en función de los campos ϕ , φ). Además, para condiciones iniciales tales que $\phi_i < \phi_{min}$, $\varphi_i < \varphi_{min}$, tenemos $x \sim \varphi_i^2 \phi_i^2 \ll 1$, así que $f(x) \sim x \sim 0$ y podemos despreciar a $f(x)$. De acuerdo con esto, en la región de valores iniciales $\phi_i \lesssim \phi_{min}$, $\varphi_i < \varphi_c$, el campo ϕ presenta un comportamiento oscilatorio que promedia cero, mientras el campo φ rueda sin oscilar hacia su valor mínimo (estos valores iniciales están motivados por el hecho de que queremos incluir la transición de fase).

Ahora bien, inicialmente la contribución a la densidad de energía debida a los campos (o fluido no barotrópico, como lo llamamos aquí) es despreciable, estando por otro lado la materia y radiación presentes en cantidades comparables. En esta etapa la expansión del universo no es acelerada, es decir $\ddot{a} < 0$. Según la ecuación anterior (6.10), para que esto suceda se requiere que

$$\frac{4}{3}\rho_r + \rho_m + 2(\dot{\phi}^2 + \dot{\varphi}^2 - V) > 0. \quad (6.12)$$

A medida que transcurre el tiempo las densidades de radiación y materia disminuyen, permitiendo que el potencial sea predominante y por lo tanto la densidad del fluido no-barotrópico (es decir, de los campos) aumenta. A la vez, el campo φ rueda *sin oscilar* minimizando el potencial, dirigiéndose hacia φ_c , en tanto que ϕ oscila alrededor de cero, es decir, los campos inicialmente *se comportan*

de maneras totalmente diferentes. Debido a esto, φ es el único campo al que le pedimos cumplir las condiciones de rodamiento suave. Exclusivamente *mientras los campos se encuentran en este régimen* (es decir antes de que φ llegue al valor crítico φ_c , y mientras ϕ oscila alrededor de cero), podemos despreciar el término $\dot{\phi}^2$ en la ecuación para la aceleración. Sustituyendo en (6.12) nuestras aproximaciones anteriores (6.9), se llega a la condición equivalente para desaceleración:

$$\frac{1}{\Omega_\varphi} \left(\Omega_r + \frac{1}{2} \Omega_m \right) + \frac{M_p^2 \Omega_\varphi V'^2}{3 V^2} > 1. \quad (6.13)$$

Es importante tener en mente que aquí la derivada se calcula respecto al campo φ , es decir $V' = \frac{\partial V}{\partial \varphi}$. A medida que transcurre el tiempo la densidad de radiación se va haciendo pequeña comparada con la materia, a la vez que la densidad del campo aumenta desde su valor inicial $\Omega_\varphi \ll 1$ hasta hacerse comparable con la materia.

Asumiendo que en la época en que inicia la aceleración ha pasado el tiempo suficiente como para que la densidad de radiación sea mucho menor comparada con la materia,³ podemos despreciar Ω_r , siendo $\Omega_m \gtrsim \Omega_\varphi$. Bajo esta aproximación la condición (6.13) equivale a

$$\frac{1}{\Omega_\varphi} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Omega_m}{\Omega_\varphi} \right) < \frac{M_p^2 V'^2}{3 V^2}. \quad (6.14)$$

Para que esta desigualdad sea válida se exige como condición que al menos se cumpla $\Omega_\varphi > (1/2)\Omega_m$. Para proseguir, en este punto necesitamos proporcionar más información sobre el potencial. Supóngase que c es elegido de manera conveniente según se ha explicado arriba, y que los parámetros Λ , M , m_0 son dados. La función $\alpha(c, x)$, así como la constante l quedan definidas y las abscisas de los puntos de intersección se identifican con x_{ex} . Si en la ecuación (6.5) empleamos las expresiones (5.8) ya conocidas, y simplificamos algebraicamente podemos obtener los puntos extremos φ_{ex} . Teniendo estas cantidades, usamos la definición de la variable x (ecuación (5.35), que escribimos nuevamente a continuación) para despejar a ϕ_{ex} . De aquí resulta que:

$$x = \frac{m^2 \varphi^2 \phi^2}{\Lambda^2 M^4}, \quad \varphi_c = 2\pi \frac{M^2}{\Lambda}, \quad \varphi_{ex}^2 = \frac{\Lambda M^2}{m_0} \sqrt{x_{ex} + c}, \quad \phi_{ex}^2 = \frac{m_0^2}{m^2} \cdot \frac{x_{ex}}{x_{ex} + c} \varphi_{ex}^2. \quad (6.15)$$

El parámetro m_0 queda restringido por la relación (6.6), y el parámetro m no altera la forma del potencial. Así, restan sólo tres parámetros libres: Λ , M y c . Por lo demás siempre podemos parametrizar las amplitudes de los campos en función de los puntos mínimos:

$$\varphi = q_\varphi \varphi_{min}, \quad \phi = q_\phi \phi_{min}. \quad (6.16)$$

Si reescribimos el potencial utilizando esta información y las ecuaciones (6.15) obtenemos

$$V = \Lambda^4 \left[\frac{q_\phi^2 \alpha(c, x) x}{2 \sqrt{x + c}} - \frac{1}{16\pi^2} f(x) + \frac{q_\varphi^2}{2} \alpha(c, x) \sqrt{x + c} + \frac{c}{2} \frac{\alpha(c, x)}{q_\varphi^2 \sqrt{x + c}} \right] \quad (6.17)$$

De la misma manera, el cálculo de la derivada nos lleva a la siguiente expresión

$$V' = \frac{\Lambda^5}{M^2} \left[q_\varphi \sqrt{\alpha(c, x)^3 \sqrt{x + c}} + \frac{c}{q_\varphi^3} \sqrt{\left(\frac{\alpha(c, x)}{\sqrt{x + c}} \right)^3} - \frac{q_\varphi q_\phi^2 x^2 \sqrt{\alpha(c, x)}}{4\pi^2 (x + c)^{5/4}} \left[1 + x \log \left(\frac{x}{1 + x} \right) \right] \right] \quad (6.18)$$

³En un modelo con constante cosmológica (en lugar de campos escalares) se puede mostrar que al momento de iniciar la aceleración se tiene $\Omega_r/\Omega_m \sim 10^{-4}$.

Recuérdese que la fijación de Λ , M y m_0 determina a la variable x . Además no nos interesa el término V_{III} (con el cual está asociado el parámetro c) como causa de la aceleración, sino solo para inducir la transición de fase. Más bien nos interesa una aceleración originada por el juego de parámetros Λ y M . Así, por muy complicada que parezca la ecuación (6.18), lo importante es que, dada una c y calculada una x (definida por Λ , M y m_0 según (6.6)), la derivada tiene la forma $V' \sim \Lambda^5/M^2$.

Con base en las expresiones (6.17), (6.18) podemos escribir la expresión

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{J(x)} \frac{\Lambda}{M^2} \quad (6.19)$$

para algún número $J(x)$, donde x depende de la amplitud de los campos en el momento en que $\ddot{a} = 0$ (primera ecuación (6.15)). La dificultad radica en el cálculo de x , ya que el conocimiento de las amplitudes de los campos requiere la especificación del potencial, especificar las condiciones iniciales, y la resolución misma del sistema. Sin embargo podríamos estimar su valor haciendo algunas suposiciones generales. Si se presenta la aceleración, ésta debe iniciar mientras el potencial es positivo, digamos en $t = t_{ac}$, lo cual con seguridad es verdadero al menos hasta el momento en que $\varphi = \varphi_c$, es decir $\varphi(t_{ac}) \leq \varphi_c$. Ahora, tenemos que $\varphi_c < \varphi_{min}$, así que la primera expresión en (6.16) implica $q_\varphi < 1$. Por otro lado, como el campo ϕ se encuentra en régimen oscilatorio con amplitud decreciente, su promedio es cero, por lo que nos permitiremos aproximar a q_ϕ en las relaciones (6.16) por $q_\phi \sim 0$. Con esto tenemos $x \sim 0$.

Ahora podemos regresar a la condición (6.14). Si el momento en que inicia la aceleración no difiere demasiado del momento en que inicia el dominio de los campos (es decir, de la Energía Oscura) tenemos $\Omega_m = \Omega_\varphi$ aproximadamente. Sustituyendo aquí la igualdad (6.19) obtenemos

$$\frac{3}{J(x)^2} \leq \frac{M_p^2 \Lambda^2}{M^4}, \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow 0} J(x) = 3.14. \quad (6.20)$$

Evaluando el límite de la función $J(x)$ tenemos que si $\ddot{a} \leq 0$, entonces

$$0.3 \leq \frac{M_p^2 \Lambda^2}{M^4}. \quad (6.21)$$

La inversión de esta desigualdad o su conversión en igualdad corresponden respectivamente a las situaciones $\ddot{a} > 0$, $\ddot{a} = 0$. Vemos que se puede obtener aceleración si el cociente Λ/M^2 (en unidades $M_p = 1$) sobrepasa *cierto* valor. Decimos "cierto valor" debido a la generalidad de las suposiciones que hemos hecho: este resultado tiene igualmente caracter general y debe tomarse en sentido cualitativo más que cuantitativo. Simplemente queremos entender a aparición de un régimen de aceleración positiva en función de los valores de los parámetros Λ y M , que son en los que estamos interesados por ahora.

6.3 Cosmología del Potencial $V = V_I + V_{II} + V_{III}$. Ejemplo de una Solución que incluye Transición de Fase y Aceleración.

La investigación de la cosmología del potencial (6.4) requiere la resolución del sistema de ecuaciones (5.41). Las explicaciones sobre las condiciones iniciales hechas para el modelo $V = V_I + V_{II}$

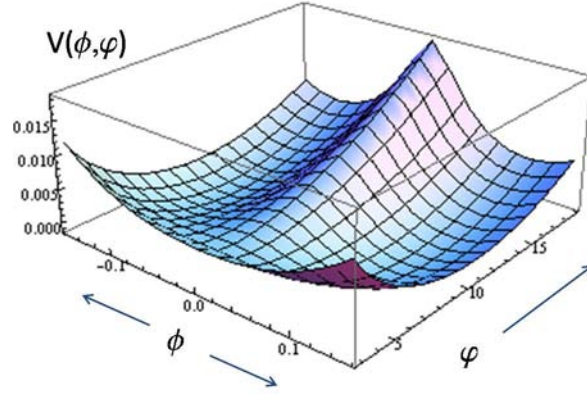


Figura 6.4: Potencial $V = V(\phi, \varphi)$, (ecuación (5.35)). Como éste es una función de dos campos, la gráfica es una superficie bidimensional.

que estudiamos anteriormente (capítulo 5), serán válidas también para el análisis presente. Para trabajar con un caso en concreto tomaremos $c = 0.2$ (que satisface $c > c'$). La única restricción sobre el parámetro M es que el valor máximo permitido, según hemos explicado antes, es la escala de energía Λ . Aunque lo más sencillo es hacer $M = \Lambda$, en realidad no hay una razón de principio para fijar su valor. En este ejemplo tomaremos $M = (3/4)\Lambda$ para añadir estética a la solución que ya es ilustrativa.

Como aquí estamos interesados en el caso de mínimo negativo, tomaremos el valor $m_0 = 0.9 \times \alpha_{eq}\Lambda^3/M^2$, para el cual se satisface que $V_{min} < 0$, según se explicó al inicio de la presente sección. Para el parámetro restante m haremos $m = \Lambda$.

La elección de Λ , M y m_0 define la recta l que intersecta a la función $\alpha(c, x)$ en el punto extremo (mínimo) del potencial. En este caso encontramos

$$x_{min} = 3.73, \quad h_{min} = 4.38 \quad (6.22)$$

(una vez conocido x_{min} se encuentra h_{min} con ayuda de (6.5)). Con esto se calculan las cantidades (6.15), y esto nos permite obtener la apariencia gráfica del potencial en torno a los puntos importantes (figura 6.4). Tenemos

$$\bar{\phi}_{min} = 0.10, \quad \bar{\varphi}_c = 3.53, \quad \bar{\varphi}_{min} = 10.46, \quad \bar{V}_{min} = -1.18 \times 10^{-3}, \quad (6.23)$$

Al igual que como hicimos con el modelo $V = V_I + V_{II}$ (capítulo anterior), en la resolución de las ecuaciones se utilizan los valores numéricos de los parámetros y los campos, en lugar de los valores físicos reales. Por esta razón *las amplitudes de los campos que aparecen en las gráficas que se muestran, se refieren en realidad a los valores numéricos y habrá que interpretarlas correctamente.* Tenemos ya una idea sobre el comportamiento del factor de escala cuando el potencial toma valores negativos (recordar explicación del caso de potencial negativo en el capítulo ??), en cuyo caso, una aceleración positiva no es posible. En cambio, sabemos que una aceleración positiva puede realizarse cuando el potencial es positivo. Por esta razón, en nuestro presente modelo esperaríamos obtener una aceleración positiva mientras el potencial permanece positivo, lo cual debe suceder a lo más cuando $\varphi = \varphi_c$ (puede suceder antes). Si no se consigue la aceleración en este punto, entonces no se dará nunca, ya que después de este valor del campo, el potencial "se dobla" siguiendo la tendencia de llegar al mínimo, que es negativo.

Por otra parte, si deseamos incluir las dos fases físicas de los campos fermiónicos del modelo NJL,

se debería imponer $\varphi_i < \varphi_c$ como condición inicial, de acuerdo a las explicaciones dadas antes. Nosotros tomamos para este ejemplo $\varphi_i = (1/2)\varphi_c$, $\phi_i = (1/2)\phi_{min}$, con velocidades iniciales para ambos campos iguales a cero. El valor inicial H_i de la variable de Hubble está definido por los valores iniciales del potencial y la densidad relativa Ω_{nbi} , de la misma manera que como se indicó en el capítulo anterior (ecuación ??).

Tomamos como tiempo inicial la época de igualdad radiación-materia $\Omega_{mi} = \Omega_{ri}$, es decir, $t_i = t_{eq} = 0$, donde la energía es $E \sim 1eV$, con factor de escala $a_i = 1$. Al día de hoy $a = a_0$. Con el fin de permitir un período de dominio de materia acorde con el modelo cosmológico estándar, pedimos que $a_0/a_i = 1 + z \simeq 3000$ (z es el "redshift"). Para que esto se cumpla requerimos como condición inicial $\Omega_{bni} = 1.45 \times 10^{-10}\Omega_{mi}$ (estamos asociando a la Energía Oscura con la contribución total de ambos campos. Recuérdese que Ω_{nb} es la densidad relativa del fluido no-barotrópico, es decir, de los campos en conjunto. Más abajo explicamos la razón de esto).

Es importante tener en mente que, debido a que hemos tomado a t_{eq} como tiempo inicial, **el tiempo t_0 no coincide exactamente con la edad del universo, sino que es el tiempo transcurrido desde $\Omega_m = \Omega_r$, hasta $\Omega_{nb} = \Omega_{DEo}$.**⁴

Según el criterio de aceleración que desarrollamos más arriba, mediante la manipulación de los parámetros a través de la relación (6.21), tenemos algún control sobre el potencial para buscar que se dé una aceleración positiva. Las figuras muestran la solución de nuestro sistema cosmológico con los parámetros que elegimos. Las gráficas de las diferentes variables se construyen desde el tiempo inicial $t_i = 0$. En ellas se puede apreciar que de hecho obtenemos una aceleración positiva. Como el potencial toma un valor negativo al ser minimizado, eventualmente el factor de escala alcanza un valor máximo al final de una etapa inicial de crecimiento, después del cual entra en una etapa de contracción hasta un tamaño nulo. La evolución de todo el sistema tiene lugar durante un tiempo total t_{tot} que es finito debido al colapso del factor de escala en tiempo finito.

En la figura 6.5, la gráfica izquierda es el factor de escala hasta $t = t_0$, y la gráfica derecha es el mismo factor de escala durante el tiempo total, que en este caso es $t_{tot} = 24.3 \times t_0$. El valor máximo del factor de escala es $a_{max} = 1.53 \times 10^7$, el cual se presenta en $t_{max} = 22.0 \times t_0$. La figura 6.6 muestra la aceleración del factor de escala en diferentes escalas de tiempo. La gráfica izquierda muestra desde t_i hasta $t = 2t_0$, donde se puede apreciar que el punto en el que $\ddot{a}(t) = 0$ (que es el momento t_{ac} en el que inicia la aceleración) se encuentra alrededor de $t \sim 8$. Numéricamente se calcula $t_{ac} = 0.5 \times t_0 = 8.19$.

Las figuras 6.7, 6.8 muestran las evolución de los campos rodando hacia el mínimo. El valor

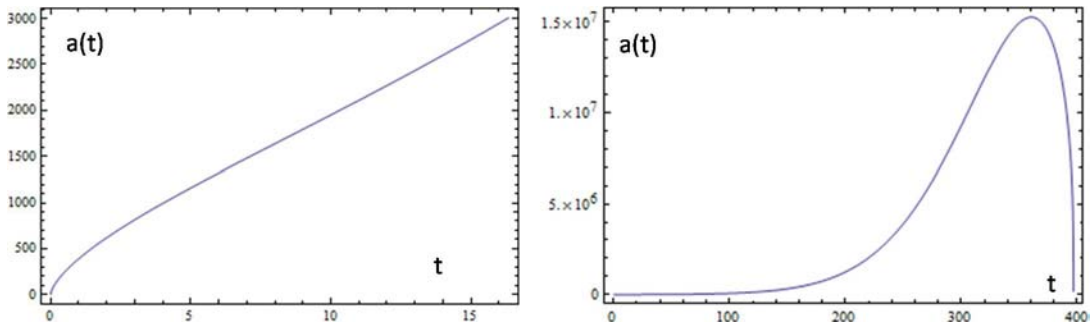


Figura 6.5: Factor de escala a diferentes lapsos de tiempo. *Izquierda:* hasta $t = t_0$. *Derecha:* hasta $t = t_{tot}$.

⁴El tiempo transcurrido desde el inicio del universo hasta $\Omega_m = \Omega_r$ se estima en 10^4 años, mientras que su edad es 1.3×10^{10} años.

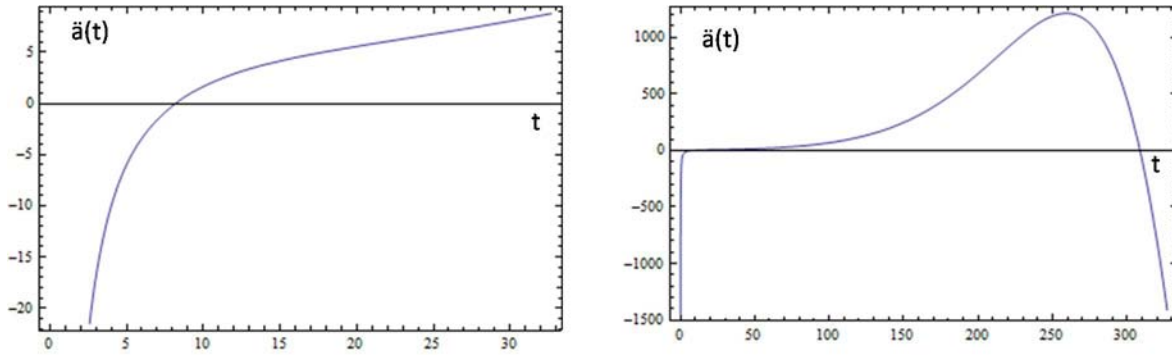


Figura 6.6: Aceleración a diferentes lapsos de tiempo. *Derecha:* hasta $t = 2t_0$. Puede apreciarse un período de aceleración negativa seguido de uno de aceleración positiva, y la transición entre ambos alrededor de $t \sim 8$. *Izquierda:* hasta $t = 20t_0$. Este número se tomó por estética gráfica.

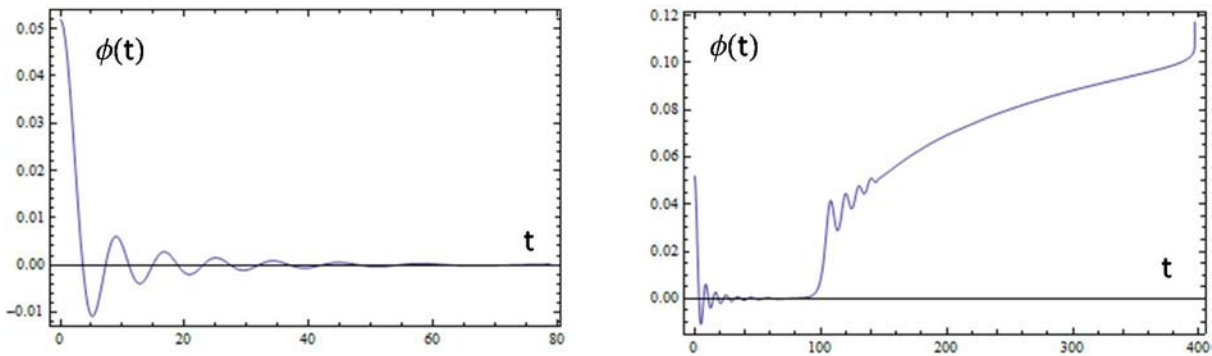


Figura 6.7: Evolución del campo ϕ . Nótese que se muestran distintos lapsos temporales en cada gráfica.

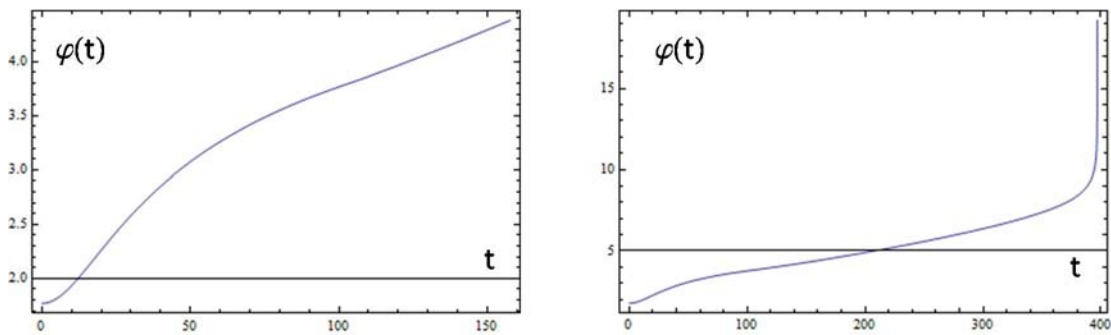


Figura 6.8: Evolución del campo φ . Nótese que se muestran distintos lapsos temporales en cada gráfica.

que se aprecia en las gráficas coincide aproximadamente con el valor de la predicción que hicimos (6.23), aunque después de cierto punto van hacia valores divergentes debido al colapso del factor de escala (recordar nuevamente el capítulo ??).

La existencia de un valor máximo para el factor de escala implica que su tasa de cambio se anula, $\dot{a} = 0$. Esto tiene como consecuencia que la variable de Hubble también debe tomar un valor nulo,

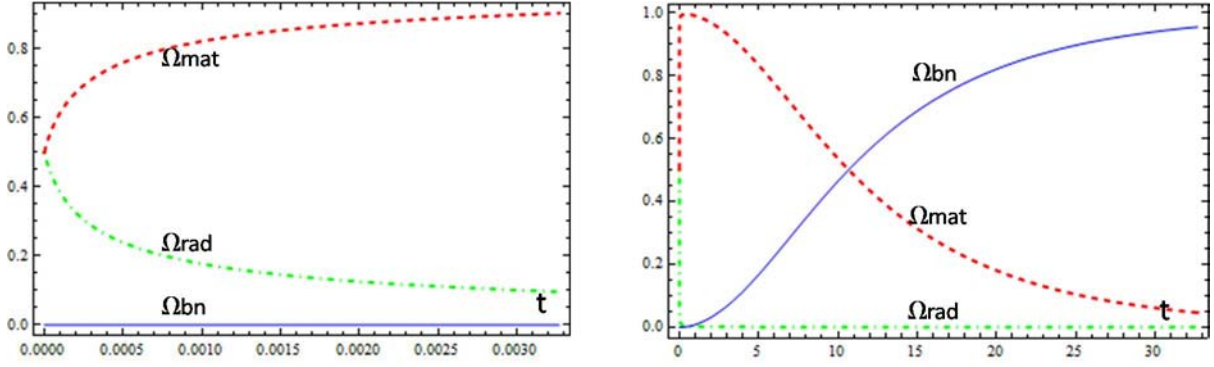


Figura 6.9: Densidades relativas de cada fluido a diferentes lapsos de tiempo. Derecha: $t = 2 \times 10^{-4}t_0$. Izquierda: $t = 2t_0$.

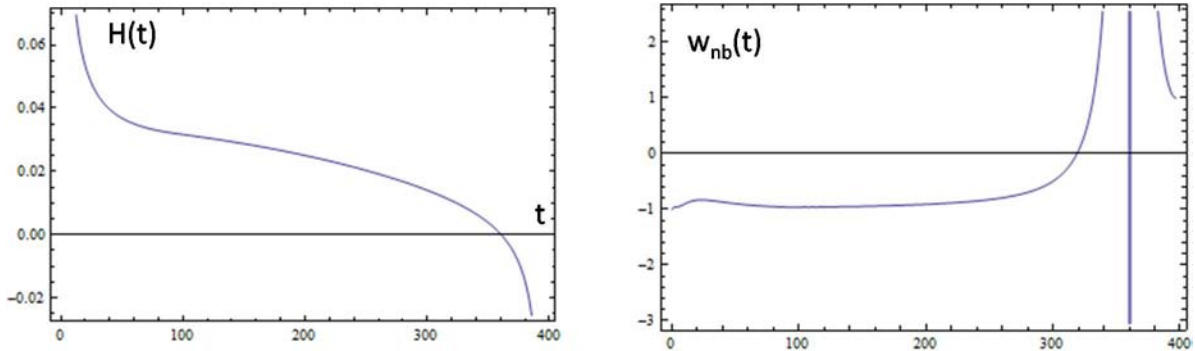


Figura 6.10: Izquierda: Parámetro de Hubble se anula en $t = t_{max}$. Derecha: Coeficiente de Estado con valor aproximado $\omega_{nb} \simeq -1$. Esta cantidad no está bien definida cuando la densidad $\rho_{nb} = 0$.

ya que $H = \dot{a}/a$. (figura 6.10).

Es importante percatarse de una diferencia importante entre el caso $V = V_I + V_{II}$ y el presente modelo. Definimos (como antes) el tiempo actual t_0 , "día de hoy", como el momento en el que $\Omega_{DE} = 0.73$. Para que se pueda alcanzar en algún momento esta proporción (requerida por las observaciones), la densidad de energía ρ_{DE} (todavía no precisamos cual de los campos, o si los dos, han de identificarse con la DE) debe continuar creciendo aún después de haberse conseguido $\ddot{a}(t) \geq 0$, lo cual requiere que el potencial siga siendo positivo en este momento. Como el potencial toma valores negativos en el mínimo, la situación $\Omega_{DE} = 0.73$ debe alcanzarse antes de que los campos tomen valores en los que el potencial se vuelve negativo, es decir *antes de la transición de fase*. Dado que en este momento ya debería haber una aceleración positiva, esto significa que dicha aceleración se origina en la fase de fermiones libres, de los cuales esperábamos un comportamiento como materia. Concluimos que la aceleración no puede asociarse con la presencia de ninguna fase en particular, sino simplemente con el dominio de la densidad de energía $\rho_{nb} = \rho_\phi + \rho_\varphi$ de los campos como un solo fluido debido a la forma del potencial total. Por esta razón asumimos la igualdad $\rho_{DE} = \rho_{nb}$.

Como el valor preciso de la amplitud de los campos en el momento en que $\Omega_{nb} = \Omega_{DEo}$, depende del punto de inicio de los mismos, el valor del potencial $V(t_0)$ será a su vez diferente para diferentes condiciones iniciales. Ya que en este momento los campos no han minimizado el potencial, ellos se encontrarán en rodamiento con energía cinética no despreciable, así que *no será válido* hacer la

identificación

$$\rho_{DEo} = V_{min} \quad (\text{no correcto}). \quad (6.24)$$

En lugar de esto, lo correcto es identificar la densidad de energía de los campos al día de hoy, con la densidad de energía de la Energía Oscura, $\rho_{DEo} = \rho_\phi(t_0) + \rho_\varphi(t_0)$.

Para encontrar la relación entre el valor físico y el valor numérico de los parámetros de nuestra teoría, escribamos la densidad de energía cinética total $E_k = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$ como una proporción de la energía potencial total $E_k = rV$, donde el factor r es del orden de la unidad si la energía cinética es del mismo orden de magnitud que la energía potencial (no esperamos que sean demasiado diferentes entre sí, pero en cualquier caso, sólo queremos hacer una estimación). Si $\rho_{DEo} = \Omega_{DEo}E_0^4$, entonces $\Omega_{DEo}E_0^4 = (1+r)V(t_0)$. Conviene expresar el potencial en términos de la escala Λ en la forma $V = \epsilon'\Lambda^4$ (recordar argumentación en torno a la ecuación (6.17)). Juntando esta información llegamos a

$$\frac{\Lambda}{E_0} = \left[\frac{\Omega_{DEo}}{\epsilon'(1+r)} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad \text{donde} \quad r = \frac{\rho_{nb} - V}{V} \quad (6.25)$$

(comparar con el resultado anterior (5.50)). En nuestro caso, tenemos $\bar{V}(t_0) = 7.17 \times 10^{-3}$, y $r = 8 \times 10^{-2}$ aproximadamente, así que la ecuación anterior da $\Lambda/E_0 = 3.12$. Con $E_0 = 10^{-3}eV$, tendríamos $\Lambda = 3.12 \times 10^{-3}eV$. Los valores físicos de las cantidades (6.23) serían entonces:

$$\begin{aligned} \phi_{min} &= 0.32eV, & \varphi_c &= 11.01eV, & \varphi_{min} &= 32.60eV, \\ V_0 &= 6.75 \times 10^{-13}eV^4, & V_{min} &= -1.11 \times 10^{-13}eV^4. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Para ser claros, el cálculo de r se hace *a posteriori*, de manera numérica. Esto tiene que ser así, puesto que *no se puede decir el valor exacto* de r hasta después de resolver el sistema, ya que tanto la energía potencial y la cinética dependerán de las condiciones iniciales.

¿Cuánta libertad tenemos manipular el valor de Λ ?, o en otras palabras, ¿qué tanto podría variar la razón Λ/E_0 ? Podemos tratar de estimar una cota sobre ϵ' . Sin embargo, veamos otra perspectiva. En la región de valores $\phi \sim 0$, $\varphi \lesssim \varphi_c$, tenemos $x \sim 0$, $f(x) \sim 2x \sim 0$, así que, despreciando los términos que no son relevantes en el potencial, tenemos aproximadamente $V \simeq \frac{1}{2}m_0^2\varphi^2 + \frac{c\Lambda^2M^4}{2\varphi^2}$. Pero $\varphi_c = 2\pi M^2/\Lambda$ (ecuación (6.15)), y $m_0 \sim \alpha \sim 10^{-2}$, implica $m_0^2 \sim 10^{-4}$, así que con un error de una parte en 10^4 nos permitimos simplificar el potencial a $V \simeq \frac{c\Lambda^2M^4}{2\varphi^2}$. De esta manera, si $\rho_{DEo} = (1+r)V(t_0)$ entonces tendríamos que $(1+r)\frac{c\Lambda^2M^4}{2\varphi^2} = \Omega_{DEo}E_0^4$, o bien, si $\varphi \sim \varphi_c$, e ignorando factores numéricos:

$$\frac{\Lambda^4}{E_0^4} = \frac{1}{c} \frac{\Omega_{DEo}}{(1+r)}. \quad (6.27)$$

¡Pero ya teníamos la restricción $c > c' = 0.15$! Así, la ecuación anterior dice que el corte y la energía al día de hoy tienen que ser muy parecidas.

Capítulo 7

Física de Partículas: Explicando la forma del Potencial Total.

A lo largo de nuestra investigación, nos hemos visto en la necesidad de añadir términos adicionales al potencial efectivo derivado de la teoría NJL, si es que éste ha de ser útil como una posible explicación de la energía oscura. El potencial de la teoría original NJL, que nosotros nombramos aquí $V_I = V_0^\phi + V_1^\phi$, y que se obtiene de considerar efectos cuánticos a 1-loop, resulta que no es acotado inferiormente. Para resolver esta divergencia agregamos un término V_{II} , pero el potencial total obtenido $V = V_I + V_{II}$ no hace posible que se dé la transición de fase con la evolución dinámica. Además, la simple adición de este término, no necesariamente implica la aceleración del factor de escala (para que esto sea posible, es necesario considerar condiciones adicionales).

Posteriormente, con el fin de incluir una transición de fase "natural", sumamos un tercer término V_{III} obteniendo de esta manera un potencial total $V = V_I + V_{II} + V_{III}$. En la sección anterior hemos mostrado que al hacer esto, es posible obtener un modelo que funciona y además es interesante por permitir la posibilidad de un universo cerrado que incluye aceleración. Sin embargo allá nos limitamos a investigar las implicaciones del potencial sin preocuparnos por explicar el tercer término, es decir su origen físico.

En el presente capítulo trataremos de explicar y/o justificar la construcción del potencial como lo hemos presentado, de acuerdo a la física de partículas y la teoría cuántica de campos.

7.1 Efectos Cuánticos a 1-loop.

Recordemos que la teoría NJL original involucra exclusivamente campos fermiónicos con una interacción puntual (no a distancia) entre ellos. Una característica importante de esta teoría es la aparición de estados diferentes de las partículas, asociados con la presencia de dos fases físicas, las cuales surgen como resultado de tomar en cuenta efectos cuánticos. Además hemos visto la conveniencia de introducir un nuevo campo escalar φ con sus respectivas contribuciones al potencial a nivel clásico. Para obtener el potencial $V = V_I + V_{II} + V_{III}$ que hemos investigado, hubimos que postular un funcional lagrangiano de la forma (obviando los términos cinéticos)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{M^2} \varphi \phi \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 - \frac{1}{2} \frac{c M^4 \Lambda^2}{\varphi^2}. \quad (7.1)$$

Ya que hemos considerado posibles contribuciones al potencial para obtener modelos más interesantes desde el punto de vista cosmológico, una pregunta natural sería, ¿porqué no tomar las correcciones cuánticas asociadas al campo φ ?

La contribución al potencial debida a procesos a 1-loop está dada por

$$V_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \log \left(\frac{m_\varphi^2 + p^2}{p^2} \right) d^4p \quad (7.2)$$

donde $m_\varphi^2 = \left. \frac{\partial^2 V_0^\varphi}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi_0}$ es la masa del campo φ (la derivada segunda está evaluada en el mínimo φ_0), y V_0^φ es el potencial a nivel árbol del campo φ .

Si

$$V_0^\varphi = \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{c M^4 \Lambda^2}{\varphi^2}, \quad (7.3)$$

entonces

$$\varphi_0 = M \sqrt{\frac{\sqrt{c} \Lambda}{m_0}}, \quad V_0^\varphi|_{\varphi_0} = \Lambda m_0 M^2, \quad m_\varphi^2 = 4m_0^2. \quad (7.4)$$

Calculando la ecuación (7.2) con límites de integración entre 0 y un corte, Λ' digamos, se encuentra¹

$$V_1^\varphi = \frac{\Lambda'^4}{64\pi^2} \left[y + y^2 \log \left(\frac{y}{1+y} \right) + \log(1+y) \right], \quad (7.5)$$

donde se ha definido la variable $y = m_\varphi^2/\Lambda'^2$, por concisión.

Como estamos considerando la adición de esta contribución al potencial que ya teníamos, debería cumplirse al menos que $\Lambda' \geq \Lambda$. Una situación donde se cumpliera la igualdad significaría que los términos (6.4), (7.5), (y por lo tanto el potencial efectivo que resulta al sumarlos) se vuelven válidos al mismo tiempo, es decir, a una misma energía.

Si tomamos las estimaciones que habíamos hecho ya para los valores de m_0 tenemos que, a lo más, $m_0/\Lambda \simeq 10^{-2}$ en orden de magnitud, lo cual implica que, de manera aproximada $y \simeq m_0^2/\Lambda^2 \simeq 10^{-4}$. *Esto nos permitiría despreciar las correcciones cuánticas para el campo φ .*

Nótese por otro lado que, puesto que m_0 es una constante, la variable y también lo es, y por lo tanto la contribución completa (7.5) es constante. Así, este término solamente tendría el efecto de redefinir el mínimo del potencial "levantándolo" (es decir, sería como sumar una constante cosmológica), y por lo tanto no resultaría de mucha utilidad en cuanto no modifica la dinámica de los campos. Por esta razón nos permitimos ignorarlo.

7.2 Sobre el valor del corte. Corrimiento del acoplamiento y Escalas de energía.

Uno de los resultados más importantes y bien conocidos de la Teoría Cuántica de Campos es el cambio de valor de los acoplamientos a diferentes escalas de energía debido a efectos cuánticos. Este cambio o "corrimiento" del acoplamiento (en inglés *running coupling*) está gobernado por la llamada *función beta*,

$$\beta = \Lambda \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \Lambda}, \quad \beta(\tilde{g}) = -b_0 \tilde{g}^3 - b_1 \tilde{g}^5 - \dots \quad (7.6)$$

Cada teoría de campos define una función beta diferente, pero desafortunadamente no podemos decir su forma de manera exacta porque esto supone conocer la física bajo cualquier circunstancia

¹Se presenta aquí una sutileza que tal vez sea necesario mencionar: la evaluación directa de la función $x^2 \log \left(\frac{c+x}{x} \right)$ (c constante) en $x = 0$ es indeterminada. Sin embargo, esta función tiende a cero en el límite $x \rightarrow 0$, y es éste el resultado que hemos tomado.

(energía). Cuando es posible una expansión perturbativa, la solución a 1-loop para una teoría con N_c colores y N_f sabores resulta en

$$\frac{1}{\tilde{g}^2} - \frac{1}{\tilde{g}_i^2} = 2b_0 \log\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_i}\right), \quad b_0 = \frac{3N_c - N_f}{16\pi^2}. \quad (7.7)$$

Si el acoplamiento es suficientemente fuerte, los campos elementales libres se condensan en forma de partículas compuestas. La descripción de los procesos físicos que se suscitan puede tomarse de la Cromodinámica Cuántica (QCD). Esta teoría describe la interacción entre campos elementales fermiónicos (quarks) como un proceso de intercambio *a distancia* de bosones de norma (gluones). Cuando la energía es mucho mayor que cierto valor crítico, el acoplamiento es débil, y en estas condiciones se tiene un plasma de quarks y gluones (campos libres); en la situación opuesta, cuando la energía es baja, el acoplamiento es fuerte, y esto ocasiona una condensación que da origen a bariones y mesones (hadrones), habiendo ocurrido la transición en algún punto intermedio entre estos extremos. El valor actual para la escala a la que el acoplamiento se hace débil es alrededor de $\Lambda_{QCD} \simeq 200 MeV$.²

Es bien conocido el funcional lagrangiano para campos de norma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\tilde{g}^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (7.8)$$

En la Cromodinámica Cuántica en particular, un término de este tipo se relaciona con la parte cinética de los campos gluónicos. Si tomamos $\tilde{g} \gg 1$, la ecuación (7.7) implica que

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_i} = e^{-\frac{8\pi^2}{(3N_c - N_f)\tilde{g}_i^2}}. \quad (7.9)$$

Esto nos permitiría estimar la cantidad $(3N_c - N_f)\tilde{g}_i$ a una energía Λ_i , dado que, el acoplamiento es fuerte ($\tilde{g} \gg 1$) cuando la energía es Λ . El valor más extremo de \tilde{g}_i se obtiene a la energía más grande, $\Lambda_i = M_p \sim 10^{18} GeV$. Ahora bien, en capítulos anteriores hemos encontrado el rango de validez para nuestra teoría modificada NJL. Obtuvimos que $\Lambda \sim 10^{-3} eV$, así que $\Lambda/\Lambda_i \sim 10^{30}$. Con ayuda de la ecuación anterior se encuentra $(3N_c - N_f)\tilde{g}_i^2 = \frac{8\pi^2}{30 \log(10)} \simeq 1.14$.

La ecuación (7.9) podría interpretarse en sentido opuesto. Por ejemplo, de acuerdo a las teorías de Gran Unificación, los acoplamientos asociados a cada interacción deberían converger hacia un único valor. En la literatura se estima tal valor en $g_{GUT}^2 = 4\pi/25.7$, a una energía $E_{GUT} \sim 10^{16} GeV$. En este caso

$$\Lambda = e^{-\frac{8\pi^2}{(3N_c - N_f)g_{GUT}^2}} E_{GUT} \simeq e^{-\frac{161.47}{3N_c - N_f}} E_{GUT}. \quad (7.10)$$

Con $3N_c - N_f = 5.8$ resultaría $\Lambda \simeq e^{-28} \cdot E_{GUT}$, lo cual *proporciona una explicación para la pequeñez* de nuestro parámetro Λ , es decir para su discrepancia respecto a la escala de unificación, que es más "natural". En otras palabras tendríamos una solución a nuestro problema jerárquico.

En nuestra teoría, el término correspondiente a la parte NJL tiene

$$\mathcal{L}_{NJL} = \frac{1}{2} \frac{\varphi^2}{M^2} (\bar{\psi}\psi)^2 = \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi}\psi)^2. \quad (7.11)$$

²Esta estimación se basa en la investigación experimental [15].

Nótese que el acoplamiento g que aparece aquí, tiene dimensiones $[g] = E^{-2}$, y no es el mismo que el parámetro \tilde{g} que aparece en la ecuación (7.7), el cual no tiene dimensión: $[\tilde{g}] = E^0 = 1$. ¿Es posible hallar una relación entre g y \tilde{g} ? Observemos que nuestra variable $h = \Lambda^2 g^2 / 8\pi^2$ definida en (5.3), tiene $[h] = 1$, es decir, también es adimensional. Podríamos escribir

$$\tilde{g}^2 = f \cdot h = f \cdot \frac{\Lambda^2 g^2}{8\pi^2}, \quad (7.12)$$

donde f es un coeficiente constante. Recordando nuestro resultado (6.22) $h_{min} = 4.38$. Pero este valor se alcanza en un momento posterior al valor h_i que tenía inicialmente, en donde la densidad de energía es mayor. Si la energía inicial es la energía de condensación Λ que hay cuando el acoplamiento se vuelve fuerte, entonces para cuando se alcanza h_{min} debe cumplirse con mayor razón la condición $\tilde{g} \gg 1$. De esta manera, el valor exacto de f dependerá de qué tan fuerte sea al acoplamiento en este momento, y no profundizaremos en su búsqueda por no ser importante para nuestros fines presentes.

En la teoría QCD los cálculos son muy complicados, y es deseable encontrar esquemas de simplificación o medios de investigación alternativos. En ciertas circunstancias, es conveniente emplear modelos "sustitutos" de la QCD en los que los cálculos tienen una dificultad más accesible. Bajo condiciones de baja energía y acoplamiento fuerte, es posible ignorar el proceso de intercambio de bosones (fuerza de *acción a distancia*) y considerar en su lugar una interacción *puntual* entre los campos fermiónicos.

Muchos avances en la investigación de las propiedades QCD se han hecho gracias al empleo del modelo NJL, y de hecho éste es una buena aproximación a aquella debido a que tienen propiedades de simetría similares.³ Aunque no se ha demostrado explícitamente, en general se cree que el modelo NJL podría ser "deducido" a partir de la teoría QCD en el límite de acoplamiento fuerte (baja energía). Pictóricamente:

$$\mathcal{L}_{QCD} \longrightarrow \mathcal{L}_{NJL} \quad (\Lambda_{QCD} \simeq 200 MeV)$$

Así como el modelo original NJL puede verse como una teoría efectiva proveniente de la QCD, nosotros podemos suponer de igual forma que nuestro modelo NJL modificado que estudiamos aquí, está relacionado con una teoría de norma más fundamental. Esta imagen de la relación de nuestro modelo con una teoría más fundamental no es inverosímil, ya que en general se asumen simplificaciones similares en otras situaciones en la física de partículas. Por ejemplo, la teoría de Fermi para la interacción débil entre neutrinos (elementales) y nucleones (partículas compuestas) se entiende actualmente como una aproximación a la teoría de interacción Electrodébil entre partículas elementales para energías debajo de (aproximadamente) la masa del bosón mediador W :

$$\mathcal{L}_{Fermi} \longrightarrow \mathcal{L}_{EW} \quad (\Lambda_{EW} \sim M_W \simeq 80 GeV)$$

Para dar idea de las escalas de energía involucradas en la física de partículas, y a la vez poner en perspectiva las escalas que intervienen en la cosmología, nos permitimos recopilar los datos más recientes [?] en las siguientes tablas.

Masa de Partículas (MeV)

³Sin embargo hay que tener presente que en algunas ocasiones este modelo puede no ser apropiado, por ejemplo si se está interesado en fenómenos sutiles como el llamado *confinamiento*.

$m_u = 2.3$	$m_s = 95$	$m_b = 4.18 \times 10^3$
$m_d = 4.8$	$m_c = 1.28 \times 10^3$	$m_t = 1.7321 \times 10^5$
$m_e = 0.5$	$m_\mu = 1.057 \times 10^2$	$m_\tau = 1.7768 \times 10^3$
$m_{\nu_e} < 2 \times 10^{-6}$	$m_{\nu_\mu} < 0.19$	$m_{\nu_\tau} < 18.2$
$m_W = 8.0385 \times 10^4$	$m_Z = 9.11876 \times 10^4$	$m_{H^0} = 1.257 \times 10^5$

Algunas Escalas de Energía (Cosmología y Partículas)

$M_p = 2.44 \times 10^{18} GeV$	Masa reducida de Planck
$E_{GUT} \sim 10^{16} GeV$	Energía de Gran Unificación
$E_{EW} \sim 10^3 GeV$	Rompimiento de Simetría Electrodébil
$m_{p^+} \sim 1 GeV$	Masa del protón
$E_{QCD} \sim 10^2 MeV$	Condensación de quarks en bariones y mesones (transición de fase hadrónica)
$E_{NS} \sim 10^{-1} MeV$	Nucleosíntesis de Elementos Ligeros
$E_H = 13.6 eV$	Energía de ionización del átomo H Inicio de Recombinación Cosmológica
$E_{eq} \sim 1 eV$	Igualdad cósmica Radiación-Materia
$E_{dec} \sim 10^{-1} eV$	Desacoplamiento de fotones Origen del fondo cósmico de microondas (CMBR)
$E_0 = \rho_0^{\frac{1}{4}} \simeq 10^{-3} eV$	Temperatura actual del Universo

7.3 Sobre el término V_{III} . Pertinencia de la Teoría Cuántica Supersimétrica.

El papel del campo escalar φ era originalmente, simplemente inducir la evolución del acoplamiento g en la teoría NJL para así permitir una transición de fase. Sin embargo en retrospectiva, su introducción resultó ser de mayor utilidad cuando nos vimos en la necesidad de modificar la forma del potencial total, porque nos permite interpretar los términos adicionales como pertenecientes a una teoría independiente para el campo φ , en la que éste evoluciona bajo un potencial propio. Para este campo escalar considerado aisladamente, el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V_0^\varphi, \quad (7.13)$$

donde, como es sabido, el término cinético $\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$ se ve simplificado a $\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2$ bajo las asunciones de homogeneidad espacial; y donde el potencial de auto-interacción, está dado por (7.3). El término φ^2 es un término bien conocido de las teorías con campos escalares: al estar relacionado con la masa (en ausencia de otras contribuciones), es "natural". Por otro lado, el término $1/\varphi^2$ es más difícil de justificar y requiere mayor explicación. Sin embargo, resulta que existen áreas de la física teórica donde aparecen potenciales con forma de potencias inversas (Inverse Power Law potentials) de los campos [14, ?]. Muchas investigaciones con este tipo de potenciales han sido hechas antes [13, 36, 8]. A continuación mencionamos una clase de teorías que podría vincularse con el modelo que hemos estado estudiando en este trabajo.

Una clase especial de Teorías de Campos son la teorías de Norma basadas en un grupo de simetría no abeliano $SU(N_c)$, con N_c "colores" y N_f "sabores" (se usan estos nombres debido a que la Cromodinámica Cuántica es el paradigma de este tipo de teorías). Las versiones super simétricas⁴ son atractivas por sus propiedades útiles e interesantes, y se han desarrollado muchas técnicas para estudiarlas. En particular, en [36] se investigan modelos cosmológicos basados en un grupo de norma al que se le da el nombre de "Grupo Oscuro" (DG por "Dark Group". Ver las referencias para una descripción más detallada). La analogía con la Cromodinámica permite una descripción cualitativa. La imagen que ofrece este modelo es la siguiente: por encima de cierta escala de energía Λ_c las partículas fundamentales ("quarks") del Grupo Oscuro se diluyen como radiación, y no interactúan con las partículas del Modelo Estándar, más que gravitacionalmente. A medida que transcurre el tiempo la energía disminuye, el acoplamiento se hace fuerte, y los campos libres oscuros se condensan en "bariones" oscuros y "mesones" oscuros. Esto sucede cuando se alcanza la energía de condensación Λ_c . Los bariones oscuros adquieren una masa no perturbativa (igual que en la QCD ordinaria ocurre una transición de fase hadrónica), y ya sea que se vuelvan partículas relativistas o no-relativistas, podrían jugar el papel de Materia Oscura.⁵ Por otro lado, los mesones oscuros evolucionan bajo un potencial de la forma

$$V = (\tilde{N}\Lambda_c)^{4+n}\varphi^{-n}, \quad (7.14)$$

el cual se obtiene a partir de un superpotencial no perturbativo en una teoría de norma supersimétrica⁶ (el coeficiente constante \tilde{N} depende de la teoría de Norma supersimétrica específica, y nosotros lo tomaremos como un "factor de normalización" al que no daremos importancia por ahora, pues esto nos alejaría demasiado del tema).

Es pertinente mencionar la siguiente diferencia entre el estudio hecho en [36] y el nuestro: además de tener un campo gobernado por el potencial (7.14), nosotros hemos considerado en este trabajo un término de masa adicional, obteniendo en su lugar (7.3), que es la suma de los términos.⁷ Esto daría cuenta del potencial para nuestro campo φ .

Por lo demás, es sabido que el Modelo NJL es una buena aproximación a la Cromodinámica en el límite de acoplamiento fuerte y bajas energías [15], y es muy útil como teoría efectiva. Por lo tanto, podemos pensar que nuestro modelo sería igualmente derivable de una teoría más fundamental. Esto daría cuenta del resto de los campos ($\phi \sim \bar{\psi}\psi$) en nuestro modelo.

Basándonos en las argumentaciones anteriores, en resumen nos permitimos construir la siguiente imagen completa: partiendo de una teoría de Norma no abeliana (Grupo Oscuro) tenemos campos elementales que se diluyen como radiación encima de cierta escala Λ_c . Para energías inferiores a ésta, los campos elementales se condensan en lo que podríamos llamar "hadrones oscuros". Por un lado, los "bariones oscuros" pueden diluirse como radiación o como materia, dependiendo de si son partículas relativistas o no-relativistas. Por supuesto, las condiciones precisas bajo las que puede realizarse cualquiera de estas posibilidades (o si pueden presentarse ambas y en qué proporciones) exige análisis más detallados (tomando en cuenta restricciones de nucleosíntesis, formación de estructura, etc.). Sin profundizar en la investigación, proponemos que la mayor parte de la densidad de energía Ω_m que utilizamos nosotros en nuestro modelo, es debida precisamente a estos bariones oscuros (la otra parte puede atribuirse al Modelo Estándar), por lo tanto pueden interpretarse como Materia Oscura. Por otro lado, podemos pensar que los "mesones oscuros" evolucionan bajo el potencial de dos términos (7.3). Podemos interpretar el término cuadrático $\sim \varphi^2$ como debido a

⁴En inglés: supersymmetric QCD theories

⁵En [37] se hace una investigación interesante en este sentido. Nosotros no profundizaremos en ello aquí.

⁶El cálculo explícito, así como explicaciones más detalladas son hechas en la referencias.

⁷Para conservar la seriedad, es pertinente decir que no sabemos decir aquí si hay algún impedimento teórico para hacer esto. Simplemente estamos asumiendo que esto es posible como teoría efectiva.

la masa, mientras que el término de potencia inversa $\sim \varphi^{-2}$ (7.14) se deriva de un superpotencial no-perturbativo, que se explica si la teoría es Supersimétrica. Comparando las expresiones para cada potencial (tomando $n = 2$ en el último) encontramos la relación

$$\Lambda_c^3 = \frac{cM^2\Lambda}{2\tilde{N}^3}. \quad (7.15)$$

La materialización del campo φ evolucionando bajo el potencial (7.3) se realiza cuando la energía desciende por debajo de la escala Λ_c . Esta explicación correspondería solamente a una porción del total de las partículas del Grupo Oscuro. Otra porción correspondería a las partículas cuya dinámica está dictada por la teoría efectiva NJL,⁸ la cual empieza a ser válida debajo de la escala Λ . La plausibilidad de la realización de las ideas que hemos descrito, es algo que exige mayor investigación. Si suponemos por ahora que así es, la teoría resultante al considerar *estas hipótesis* junto con *nuestra investigación*, sería una teoría muy interesante y atractiva, ya que nos permitiría dar cuenta de la Materia Oscura y la Energía Oscura, junto con una propuesta para el destino del universo (su colapso futuro y una transición de fase, con un período de aceleración incluido), todo en el marco de nuestro paradigma actual de una teoría fundamental: una teoría de Norma no-conmutativa Supersimétrica.

Concluimos este capítulo mencionando una posible interpretación alternativa que quizá valga la pena tener en mente. Para poner las ideas en perspectiva enumeramos cada una:

1.- Tanto los campos fermiónicos NJL, como el campo escalar φ de nuestro modelo son campos efectivos derivados de una teoría más fundamental, que es una Teoría de Norma Supersimétrica (Grupo Oscuro).

2.- Hemos visto que si el modelo NJL ampliado que estudiamos en este trabajo ha de estar relacionado con la Energía Oscura, se impone la restricción $\rho_{DE_0} = V(t_0) \simeq (10^{-3}eV)^4$ para la densidad de energía. Como esto se encuentra dentro de las cotas establecidas para la masa de los neutrinos ($0.24eV < \sum m_\nu < 2.0eV$) [16], cabe hacerse la pregunta ¿podrían los campos NJL jugar el papel de un neutrino? Ya en otros lugares se ha estudiado la posibilidad de relacionar a la Energía Oscura con los neutrinos [17]. Lo nuevo aquí sería que tendríamos neutrinos interactuantes! Esta posibilidad es muy interesante, pero no ahondaremos más en ella aquí.

⁸No hay razón por la que la teoría efectiva NJL deba aplicarse a campos elementales, y no a las partículas compuestas (que pueden corresponder a nuestros bariones oscuros). En principio, cualquiera de estas posibilidades es válida.

Capítulo 8

Resumen de Resultados y Conclusiones.

En cualquier área de la ciencia, la explicación de fenómenos desconocidos debe primeramente ser agotada en el marco de las mejores teorías existentes, antes de recurrir a nuevas teorías. Una vez que esto sucede, un criterio universalmente aceptado para seleccionar las *mejores* teorías dentro del repertorio de nuevas teorías *propuestas*, es que estas sean lo menos arbitrarias posible, o bien que consideren el menor número posible de suposiciones básicas. En particular dentro de las ciencias físicas, si existe un conjunto de modelos pretendiendo explicar un fenómeno determinado, se prefiere aquél con el menor número posible de parámetros. Como hemos dicho antes, en el contexto de la Cosmología actual los fenómenos inexplicados toman la forma de tipos de materia (o energía), que son desconocidos, y la búsqueda del entendimiento de estas nuevas entidades es nuestra motivación principal para repasar modelos basados en la Teoría de Campos, aunque sean modelos bien estudiados, pero en un contexto diferente, como es el caso del modelo NJL que tratamos aquí. El modelo NJL tiene precisamente esta cualidad de "economía", ya que sin tomar en cuenta la no-renormalizabilidad de la teoría (razón por la cual hay que definir un parámetro "artificial", el corte Λ), contendría al acoplamiento g como único parámetro. El modelo tiene además el atractivo de que se basa en una simetría fundamental, la simetría quiral, que es inherente a la naturaleza de los campos fermiónicos, y "no impuesta a mano". Esto hace que el modelo NJL sea una elección interesante para empezar la investigación de nuevos tipos de materia, en este caso la Materia y/o Energía Oscuras.

Aunque el modelo NJL no es renormalizable debido a la forma de la interacción, puede tomarse como una teoría *efectiva* por debajo de cierta escala de energía Λ . Debido a efectos cuánticos, el modelo da lugar a dos fases físicas: fermiones sin masa para acoplamiento débil $g < g_c$, y un condensado fermiónico masivo para acoplamiento fuerte $g > g_c$. Una forma conveniente de representar este sistema es a través de un campo escalar $\phi \sim \bar{\psi}\psi$, evolucionando bajo el potencial efectivo de auto-interacción $V_I = V_0^\phi + V_1^\phi$. Esto describe de manera general el modelo NJL, desde el punto de vista de la *Física de Partículas*. Nuestra investigación presentada en esta tesis, consistió en las implicaciones en *Cosmología*, y podemos sintetizar los resultados en tres etapas:

En una **primera etapa**, hemos estudiado la dinámica cosmológica de cada fase en el modelo NJL. Para esto resolvimos el sistema de ecuaciones derivado de las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General, para un universo homogéneo e isotrópico (métrica de Friedmann-Robertson-Walker). Cada fase se caracteriza por variables convenientes, como son la densidad de energía ρ_α , las densidades reativas Ω_α y el coeficiente barotrópico de estado ω_α . Las variables cosmológicas como el factor de escala $a(t)$, la aceleración $\ddot{a}(t)$ y la variable de Hubble $H(t)$, tienen comportamientos

cualitativamente diferentes para cada fase. Además del fluido NJL, consideramos la presencia de fluidos barotrópicos (radiación y materia-polvo). Obtuvimos los siguientes resultados:

1.1) Para un acoplamiento débil, encontramos un coeficiente de estado ω_ϕ que oscila alrededor de cero, de tal manera podemos escribir el promedio temporal $\langle \omega_\phi \rangle = 0$. Además, debido a que el potencial se comporta como $V \sim \phi^2$ cerca del mínimo, en este caso el fluido NJL (fermiones sin masa), se diluyen como materia, $\rho_{NJL} \sim a^{-3}$. Un universo conteniendo este fluido (con o sin materia y/o radiación) se expandirá eternamente sin acelerarse. Por otro lado, si se añade una constante cosmológica a esta fase de fluido NJL, entonces el universo eventualmente se acelerará necesariamente, expandiéndose para siempre.

1.2) El caso de acoplamiento fuerte (sin cte. cosmológica) siempre conlleva a la anulación de la densidad total de energía, debido a que el potencial adquiere valores negativos, y esto es inevitable aún con la presencia de fluidos barotrópicos adicionales. El desvanecimiento de la energía total se corresponde con que el factor de escala ha alcanzado un valor máximo, después de lo cual empieza a decrecer hasta un valor nulo. En otras palabras, el condensado de fermiones hace que el universo se contraiga hasta el colapso. La densidad de energía del campo ρ_ϕ se anula un par de veces (una en la fase de expansión y otra en la de contracción) debido a que la negatividad del potencial contrarresta a la energía cinética. Debido a esto, algunas cantidades (Ω_ϕ, ω_ϕ) se vuelven inadecuadas para caracterizar a fluido.

1.3) Señalamos el siguiente hecho interesante: la ecuación de Friedmann (3.4) ha sido bien conocida y estudiada desde hace tiempo. Si el parámetro de curvatura es $k = +1$, se dice que el universo tiene una geometría *esférica*, y el factor de escala adquiere eventualmente un valor nulo, así que tenemos un universo colapsante. Como un universo esférico es finito o cerrado, se dice que un universo colapsante es también cerrado. Por otro lado, si $k = 0$, el universo tiene una geometría *plana*. Si tal universo contiene materia ordinaria, la densidad de energía, aunque siempre disminuya, nunca desaparece del todo en tiempo finito, así que el factor de escala crecerá para siempre. Ya que en un plano, líneas geodésicas que inician divergentes entre sí nunca se juntan de nuevo, se dice que un universo plano es abierto. Así que se pensaba que un universo plano era también infinito (aunque no necesariamente, pero en cualquier caso creciente). Sin embargo, hemos mostrado que aún con curvatura $k = 0$, si el universo contiene un campo escalar con potencial que se minimiza en un valor negativo, entonces la anulación futura del factor de escala es *inevitable*, ¡por lo que tendríamos un universo *plano que colapsa!* En particular, como un potencial negativo surge de manera natural (no postulamos un potencial con tal característica) para el modelo NJL, un universo plano colapsante es también una *consecuencia natural*.

1.4) Hemos estudiado también una variante del caso de acoplamiento fuerte, añadiendo una constante cosmológica L . Encontramos que si como límite, la densidad de energía ρ_L sobrepasa al mínimo del potencial V_{min} , entonces el universo se acelera y se evita el colapso.

Vale la pena aclarar que en ambos casos de acoplamiento débil y fuerte (sin cte. cosmológica), es posible inducir la aceleración del factor de escala por medio de la manipulación de la amplitud inicial ϕ_i . Sin embargo, esta situación no es de interés porque, i) se basa en el ajuste de la condición inicial, y ii) no es un modelo realista donde se permita un período de desaceleración previa bajo el dominio de la materia, y no permite evolución de los campos hacia el mínimo del potencial.

Hasta aquí la investigación no consideró la inclusión de una transición de fase, ya que en el modelo original NJL, el acoplamiento es constante, de manera que una vez dado un valor, el fluido NJL permanece en el correspondiente estado físico a lo largo de toda la evolución cosmológica.

En una **segunda etapa**, argumentamos la introducción de un acoplamiento dependiente de un segundo campo dinámico φ (como sucede en algunas teorías de cuerdas, donde el campo escalar-acoplamiento es conocido como el "ditatón"), para ver si de esta manera se podría explotar la

característica del modelo de implicar más de un estado físico, y estudiar la correspondiente posible transición de fase. Sin embargo, al hacer esto el potencial, visto como una función de dos variables, se convierte en un "pozo sin fondo", es decir, no es acotado inferiormente. Aunque argumentamos que esto no necesariamente es motivo para rechazar a un potencial en el contexto cosmológico (un resultado interesante), encontramos que nuestro potencial puede acotarse si se suma una contribución adicional V_{II} que resulta que puede interpretarse como un término de masa para el nuevo campo φ , para dar un potencial total $V = V_I + V_{II}$. Así pues, la teoría original NJL es modificada y en su lugar tratamos con una nueva teoría NJL *extendida*. Obtuvimos así un nuevo sistema físico con dos campos, y analizamos el potencial bidimensional correspondiente eq. (5.35), para lo cual definimos las funciones auxiliares α ec. (5.30), y β ec. (5.33). Vimos que el potencial siempre tiene un mínimo en el origen (i.e. el mínimo trivial $triv = (\phi = 0, \varphi = 0)$ con $V_{min}(triv) = 0$), y puede o no tener un mínimo no trivial dependiendo del juego de parámetros m_0, M, Λ , con $l = m_0 M^2 / \Lambda^3$: si $l > \alpha_{max}$, el potencial tiene solo un mínimo en el origen; si $\alpha = \beta = l_c < l < \alpha_{max}$, el potencial tiene un mínimo no trivial (además del origen, i.e. dos mínimos en total), relacionado con la solución x_{min} , con $V_{min} > 0$; finalmente, si $0 < l < \alpha = \beta = l_c$, el potencial tiene dos mínimos también (el origen y el no trivial), con $V_{min} < 0$ (figuras 5.2, 5.3). Ahora, para que la transición pueda realizarse, el campo debería atravesar el valor crítico φ_c en el curso de su evolución. Nuestros resultados son:

2.1) Para un juego de parámetros $l > \alpha_{max}$, es decir, si el potencial no tiene otros mínimos más que el origen, ciertamente se puede realizar una transición de fase. Bastaría con tomar un valor inicial $\varphi_i > \varphi_c$. De esta forma, el sistema evolucionaría desde un acoplamiento fuerte ($g > g_c$, condensado fermiónico $\phi \neq 0$), hasta uno débil ($g < g_c$, fermiones sin masa $\phi = 0$), para finalmente estabilizarse en el origen. Sin embargo, en este caso no habría aceleración, a menos que se eligiera un valor inicial φ_i suficientemente grande como para hacer que se cumpliera $(4/3)\rho_{ri} + \rho_{mi} + 2(\dot{\phi}_i^2 + \dot{\varphi}_i^2) < 2V_i$. Esto causaría una aceleración "temprana", la cual, como se explicó antes, se da antes de permitir un previo dominio de materia, y antes de que los campos se acerquen al mínimo del potencial. Así que esta situación no es de interés (al menos si se pretendemos relacionar al modelo con la Energía Oscura).¹

2.2) Un juego de parámetros con $l < \alpha_{max}$, es decir, si el potencial tiene dos mínimos, el origen y el no trivial, encontramos que los valores clave se distribuyen como sigue: $\varphi_c < \varphi_{max} < \varphi_{min}$. Por lo tanto, si la condición inicial es $\varphi_i < \varphi_c$, el campo no puede ir hacia el valor "esperado" $\varphi_e > \varphi_c$, porque $V(\varphi_i) < V(\varphi_e)$, y los campos minimizan al potencial. En otras palabras, este potencial tiene la desventaja de que no permite el tránsito desde un acoplamiento fuerte ($g > g_c$) a uno débil ($g < g_c$) de manera natural (impide la transición de fase). Esto es debido a la presencia de una barrera de potencial que se interpone entre las regiones delimitadas por φ_c y φ_{min} . Por esta razón, la región en la que se estabilizan los campos (y por lo tanto la fase en la que se encontrará el fluido NJL) depende de las condiciones iniciales (hay dos atractores).

Aún si se eligiera un valor inicial en la forma $\varphi_c < \varphi_i < \varphi_{max}$, de tal manera que una transición de fase pudiera realizarse (aunque en la dirección "opuesta", desde acoplamiento fuerte a débil), este procedimiento sin embargo no sería aceptable, porque implica un ajuste fino en la condición inicial φ_i , además de no incluir un período de aceleración.

La única alternativa restante es que la amplitud inicial se tome en una región que haga que el campo se estabilice en el mínimo no trivial. Esto requiere $\varphi_{max} < \varphi_i$, pero entonces el campo no sería capaz de rodar hacia φ_c . Si se hace de esta forma, con el paso del tiempo las densidades de los fluidos barotrópicos (materia y radiación) disminuyen y los campos se estabilizan. Con

¹Surge aquí la pregunta de la viabilidad del modelo en el contexto de la Inflación Cósmica temprana. Sin embargo, esto requiere otra clase de análisis que no emprendemos aquí.

$V_{min} > 0$ el potencial termina dominando la densidad total de energía y se comporta como una constante cosmológica, haciendo que el universo se acelere. Así pues, si se toma la amplitud inicial de φ adecuadamente, y eligiendo los parámetros adecuados para obtener $V_{min} > 0$, es posible obtener un modelo viable de Energía Oscura, pero a expensas de quitar la transición de fase. Para evitar posibles confusiones, señalamos la diferencia entre las expresiones "período de aceleración" y "período de dominio de la Energía Oscura". Aunque en este caso el modelo resulta útil, el hecho de tener que elegir el juego de parámetros apropiado podría ser visto como un defecto. Sin embargo, esto estaría al mismo nivel que en otras teorías físicas, donde uno tiene que elegir los parámetros "correctos" para ajustar las observaciones. Por otro lado, desde el punto de vista filosófico es quizás preferible postular una partícula en el marco de la Teoría de Cuántica de Campos, que una energía constante de valor no explicado, cuya naturaleza no entendemos.

2.3) Con l tal que $0 < l < \alpha = \beta = l_c$, el potencial en mínimo no trivial es $V_{min} < 0$. La situación es análoga al caso de un solo campo: como la densidad total de energía eventualmente se anula, se sigue un tamaño máximo del factor de escala y la posterior contracción hasta un valor nulo, es decir, en este caso tenemos un universo que se colapsa y sin aceleración. Al igual que antes, una posible aceleración forzada no es de interés.

Ahora bien, tanto en el caso 2.2) como en el 2.3) el potencial tiene el mínimo en el origen $V_{min} = 0$, donde el potencial puede aproximarse como una dependencia cuadrática de los campos, de manera que cada campo se diluye como $\rho_\alpha \sim a^{-3}$. Siendo así, el modelo describe materia y es interesante profundizar la investigación para ver una posible relación con la Materia Oscura. Esto no se hizo aquí y se dejará para trabajos futuros. Por otro lado, en general, un modelo que pretenda describir a la energía oscura debería poder reproducir al menos parámetros básicos, como son la proporción adecuada $\Omega_{DEo} = 0.73$, y el coeficiente de estado $\omega_{DEo} \simeq -1$, además de permitir un período de aceleración positiva.

Vemos pues que nuestro modelo NJL extendido con acoplamiento dinámico y un término adicional V_{II} , para dar el potencial total $V = V_I + V_{II}$, es compatible con el comportamiento general esperado tanto de la Materia como Energía Oscuras, por lo que se refiere a la evolución cosmológica *sin perturbaciones*. Puede valer la pena profundizar la investigación del modelo para incluir perturbaciones; esto se dejará como trabajo futuro.

En la **tercera** etapa, con la finalidad de investigar la plausibilidad de un modelo que incluya una transición de fase, definimos y estudiamos un nuevo potencial $V = V_I + V_{II} + V_{III}$. Como la eventual aceleración del factor de escala es un requisito indispensable, si es que el modelo debe dar cuenta de la Energía Oscura, hemos establecido un criterio de aceleración que, si bien no es preciso debido a la generalidad de suposiciones, sí proporciona una estimación útil. El nuevo potencial también puede ser positivo o negativo al ser minimizado, según los valores de los parámetros. Sin embargo, el caso negativo es el que proporciona resultados nuevos e interesantes. Encontramos que se pueden obtener universos en los que existe la requerida etapa de expansión con aceleración positiva, con un factor de escala que alcanza un valor máximo, después de lo cual sigue una etapa de contracción hasta un valor nulo, es decir universos cerrados (que se colapsan).

Una característica interesante de este modelo es que la etapa de aceleración debe iniciarse antes de la transición de fase, lo que significa que dicha etapa se presenta en la fase de fermiones no masivos. Como la existencia del máximo del factor de escala está relacionada con la negatividad del potencial, y en este momento ya debió haberse dado la transición de fase, la etapa de contracción puede asociarse con (¿debe ser causada por?) el fluido NJL en fase de condensado.

Si queremos ajustar este modelo con la densidad de energía actual que se observa, encontramos que el corte Λ no debe diferir demasiado de la energía al día de hoy E_0 (en el mejor de los casos, son al menos del mismo orden de magnitud). Aunque las ecuaciones del Grupo de Renormalización

ofrecen una explicación de la pequeñez de la escala Λ , esto no significa que dicha pequeñez sea aceptable, ya que de todas formas la teoría NJL tendría un rango de validez muy reducido.

i) Las conclusiones para este modelo extendido son: si se añade un campo escalar con término de masa y una potencia inversa al modelo original NJL (es decir, se considera una teoría de fermiones NJL más un campo escalar) con potencial total $V = V_I + V_{II} + V_{III}$, es posible una interpretación de Energía oscura con $\omega_{DE} \simeq -1$, $\Omega_{DE} \simeq 0.73$. Se puede obtener un universo con aceleración positiva, en el que se realizan *ambas* fases físicas del fluido NJL, y que además es cerrado. No sabemos decir en este trabajo hasta qué punto el bajo valor de la escala de energía $\Lambda \simeq E_0$ representa una seria limitación para esta teoría o si, por el contrario, esto es aceptable y es motivo para profundizar la investigación. Esto se deja para estudios futuros.

Obtuvimos resultados que podrían ser ya conocidos de manera general, pero que confirmamos en el estudio de nuestro modelo en particular, y que vale la pena recordar:

ii) Normalmente se asocia un universo que se contrae hasta el colapso (universo cerrado) con una geometría esférica (curvatura positiva). Sin embargo, hemos comprobado que si se consideran campos escalares con potencial de auto interacción negativo, es posible tener universos cerrados pero *con geometría plana*.

iii) En otras áreas de estudio en las ciencias físicas, los potenciales que no son acotados inferiormente no son aceptables, debido a que esto puede llevar a una interpretación de un sistema físico del cual se podría extraer una cantidad indefinida de energía. Sin embargo en el contexto de la cosmología, la ausencia de una cota inferior no necesariamente es inaceptable, debido a que el factor de escala colapsa en tiempo finito. Esto podría ser importante para reconsiderar los criterios para descartar modelos cosmológicos.

iv) En general, el tiempo t_{ac} en el que inicia la aceleración ($\ddot{a}(t) = 0$) no coincide con el momento t_{DE} en el que la cantidad de energía oscura se vuelve comparable con las otras formas de materia, $\Omega_{DE} = \Omega_m + \Omega_r$. Esto es cierto en particular para un modelo con constante cosmológica y para el modelo asociado a la teoría NJL que estudiamos aquí, en los cuales $t_{ac} < t_{DE}$ (es decir, la aceleración se presenta *antes* que la igualdad). Para evitar malos entendidos, es importante tener esto presente al utilizar una expresión como "época de dominio de la Energía Oscura".

v) Encontramos y resolvimos los problemas que surgen en el proceso de resolución numérica debido a la gran discrepancia entre la masa de Planck y la energía al día de hoy. Comentamos la necesidad de distinguir entre valores numéricos y valores físicos de los parámetros y variables físicas.

Finalmente Revisamos algunos aspectos de la moderna Teoría de la Física de Partículas para tratar de argumentar nuestro modelo desde el punto de vista de la Física fundamental. Nuestro modelo extendido $V = V_I + V_{II} + V_{III}$ puede enmarcarse dentro de una clase de teoría de Norma Supersimétrica (Grupo Oscuro), ya estudiada por otros autores.² Con base en analogías con la (bien) conocida teoría de la Cromodinámica Cuántica, y en las investigaciones de las teorías supersimétricas, esbozamos la hipótesis de que los diferentes tipos de condensados ("hadrones oscuros") podrían explicar posiblemente a la Materia Oscura y Energía Oscura. Bajo esta perspectiva, nuestra investigación consistió en el estudio de la porción de partículas que puede describirse de manera efectiva por el modelo NJL, encontrando los resultados que resumimos en los puntos anteriores (de los cuales el más interesante es el punto i)).

La teoría completa resultante sería una teoría muy interesante porque se basa en el paradigma actual de teoría fundamental (una Teoría Cuántica Supersimétrica de Campos de Norma), que por

²A lo largo del texto principal se dan la referencias.

sí sola tiene el potencial de incluir en su marco explicativo a la Energía Oscura, Materia Oscura, y que además, de acuerdo con la investigación que hicimos en este trabajo, incluye un universo plano, con aceleración, transición de fase, y con un colapso futuro. Es conveniente tener en mente que, debido al parecido que hay entre la densidad de energía actual y las cotas actuales para la masa de los neutrinos, cabe todavía una interpretación alternativa igualmente interesante, en la que dichas partículas tendrían una interacción adicional a la que se cree normalmente (fuerza nuclear débil).

Concluimos remarcando que, independientemente de nuestras modificaciones al considerar modelos extendidos (de los cuales, de acuerdo a nuestros resultados vale la pena profundizar la investigación), el modelo NJL original es atractivo porque: 1) Se basa en una simetría "fundamental" (i.e. la simetría quiral), 2) Implica un potencial negativo de manera natural (no se postula con esta característica), lo cual se debe a la naturaleza fermiónica de los campos, y 3) tiene un número reducido de parámetros. Es decir, el modelo es muy simple y tiene implicaciones tan diversas e interesantes como el rompimiento de simetría,³ resultando en la presencia de más de una fase física, fermiones sin masa y un condensado en forma de campo escalar,⁴ cada una de las cuales tiene diferentes consecuencias para el universo, incluyendo un colapso con geometría plana. Dada la negatividad de uno de los términos del potencial, es posible obtener un potencial total sumando términos adicionales (provenientes de otras teorías, y de los que consideramos algunos ejemplos en esta tesis) lo cual permitiría explicar el valor observado de una constante cosmológica como resultado de una competencia de términos que rigen la dinámica de un campo o campos, en lugar de introducir dicho valor "a mano". Este resultado por sí mismo es muy interesante.

³Para poner esto en perspectiva, piénsese que otros modelos que pretenden incluir un rompimiento de simetría, son más complicados o "artificiales". Por ejemplo, en el bien conocido y utilizado potencial "tipo Higgs" $V = m^2\varphi^2 - \lambda\varphi^4$, los parámetros " m " y " λ " deben elegirse de la manera "correcta" para romper la simetría, además de que en este caso, no hay un principio básico que dicte la forma del potencial (i.e. no se *deduce*), sino que que pone "a mano".

⁴Por ejemplo, para "justificar" la presencia de campos escalares o nuevas formas de materia, muchos modelos se basan en teorías más sofisticadas, como Cuerdas, Kaluza-Klein, GUT's, etc., las cuales demandan una especialización mucho mayor para argumentar premisas útiles, y además implican física exótica no observada.

Referencias

- [1] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122** (1961)345
- [2] W. Buchmuller, S.T. Love, *Nucl. Phys. B* **204**(1982)
- [3] Hinshaw, G.F., et.al., 2013, *ApJS.*, **208**, 19H
- [4] Planck Collab.: P.A.R. Ade, et. al., arXiv:1502.01589v2 [astro-ph.CO]
- [5] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, 1990)
- [6] J.A. Peacock, *Cosmological Physics* (Cambridge University Press, 1999)
- [7] S. Dodelson, *Modern Cosmology* (Elsevier, 2003)
- [8] A. de la Macorra, *Phys. Rev. D* **72**, 043508 (2005) [arXiv:astro-ph/0409523].
- [9] E.J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D***15** 1753, (2006).
- [10] P.J.E. Peebles, B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003)
- [11] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999); A. G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004) [astro-ph/0402512]
- [12] G. Bertone, D. Hooper and J. Silk, *Phys. Rept.* **405**, 279 (2005) [hep-ph/0404175].
- [13] P. Binetruy, *Phys. Rev. D*60 (1999) 063502; A. Masiero, M. Pietroni, F. Rosati, *Phys. Rev. D*61 (2000) 023509
- [14] D. H. Lyth, A. Riotto, *Phys. Rep.* 314, 1-146 (1999)
- [15] M. Buballa, *Phys. Rept.* 407 (2005) 205-376
- [16] K. A. Olive, et al. (PDG), *Phys. Chin.* C38 090001 (2014) (<http://pdg.lbl.gov>)
- [17] D. B. Kaplan, A. E. Nelson and N. Weiner, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 091801 (2004) doi:10.1103/PhysRevLett.93.091801 [hep-ph/0401099];
R. Fardon, A. E. Nelson and N. Weiner, *JCAP* **0410**, 005 (2004) doi:10.1088/1475-7516/2004/10/005 [astro-ph/0309800];
A. de la Macorra, A. Melchiorri, P. Serra, R. Bean, *Astropart.Phys.*27:406-410,2007;
- [18] Perlmutter et al., *Astrophys. J.* 517, 565 (1999); A. G. Riess et al., *Astron. J.* 116, 1009 (1998); R. Amanullah et al., *Astrophys. J.* 716, 712 (2010), BV RI light curves for 22 type Ia supernovae - Riess, Adam G. et al. *Astron.J.* 117 (1999) 707-724 astro-ph/9810291,
- [19] The Carnegie Supernova Project: First Photometry Data Release of Low-Redshift Type Ia Supernovae - Contreras, Carlos et al. *Astron.J.* 139 (2010) 519-539 arXiv:0910.3330, CfA3: 185 Type Ia Supernova Light Curves from the CfA - Hicken, Malcolm et al. *Astrophys.J.* 700 (2009) 331-357 arXiv:0901.4787, Uvri light curves of 44 type ia supernovae - Jha, Saurabh et al. *Astron.J.* 131 (2006) 527-554 astro-ph/0509234, New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at $z_i=1$: Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy - Riess, Adam G. et al. *Astrophys.J.* 659 (2007) 98-121 astro-ph/0611572 46455850950, The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: V. Improving the Dark Energy Constraints Above $z_i 1$ and Building an Early-Type-Hosted Supernova Sample - Suzuki, N. et al. *Astrophys.J.* 746 (2012) 85 arXiv:1105.3470,

- [20] A. D. Sakharov. 1966. Sov.Phys.JETP,22,241, Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe - Peebles, P.J.E. et al. Astrophys.J. 162 (1970) 815-836, Small scale fluctuations of relic radiation - Sunyaev, R.A. et al. Astrophys.Space Sci. 7 (1970) 3-19, Probing dark energy using baryonic oscillations in the galaxy power spectrum as a cosmological ruler - Blake, Chris et al. Astrophys.J. 594 (2003) 665-673 astro-ph/0301632
- [21] Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results - WMAP Collaboration (Bennett, C.L. et al.) Astrophys.J.Suppl. 208 (2013) 20 arXiv:1212.5225 [astro-ph.CO]
- [22] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO], P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], arXiv:1502.01590 [astro-ph.CO]. P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO].
- [23] B. A. Reid et al., Mon. Not. R. Astron. Soc. 404, 60 (2010); W. J. Percival et al., Mon. Not. R. Astron. Soc. 327, 1297 (2001); M.Tegmark *et al.* 2DFGRS Collaboration (Colless, Matthew et al.) Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 328 (2001) 1039 , SDSS Collaboration (York, Donald G. et al.) Astron.J. 120 (2000) 1579-1587
- [24] Padmanabhan, Nikhil et al. Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 427 (2012) 3, 2132-2145 arXiv:1202.0090, Michael J. et al. Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 401 (2010) 1429-1452, Jones, D.Heath et al. Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 399 (2009) 683 arXiv:0903.5451, SDSS-III - BOSS Collaboration (Dawson, Kyle S. et al.) Astron.J. 145 (2013) 10 arXiv:1208.0022, BOSS Collaboration (Anderson, Lauren et al.) Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 441 (2014) 24-62 arXiv:1312.4877, BOSS Collaboration (Delubac, Timothee et al.) Astron.Astrophys. 574 (2015) A59 arXiv:1404.1801
- [25] SDSS Collaboration (Eisenstein, Daniel J. et al.) Astrophys.J. 633 (2005) 560-574
- [26] BOSS DR11 - Tojeiro, Rita et al. Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 440 (2014) 2222 arXiv:1401.1768, SDSS DR10Isabelle et al. Astron.Astrophys. 563 (2014) A54 arXiv:1311.4870,
- [27] J. Bock et al. (EPIC Collaboration), arXiv:0906.1188, BigBOSS Experiment Collaboration [arXiv: 1106.1706]; "Euclid Definition Study Report" arXiv:1110.3193 [astro-ph.CO]; B. M. Rossetto *et al.* [Dark Energy Survey Collaboration], arXiv:1104.4718 [astro-ph.GA].
- [28] L. Quintanar, A. de la Macorra XXXXXX
- [29] A. de la Macorra and G. G. Ross, Nucl. Phys. B **404**, 321 (1993); A. de la Macorra and G. G. Ross, Nucl. Phys. B **443**, 127 (1995).
- [30] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D 15, 1753 (2006).
- [31] B. Ratra and P. J. E. Peebles, Phys. Rev. D **37**, 3406 (1988), C. Wetterich, Astron. Astrophys. **301**, 321 (1995) [arXiv:hep-th/9408025].
- [32] Steinhardt, P.J. Wang, L. Zlatev I. Phys.Rev.Lett. 82 (1999) 896, arXiv:astro-ph/9807002; Phys.Rev.D 59(1999) 123504, arXiv:astro-ph/9812313 9.
- [33] A. de la Macorra and G. Piccinelli, Phys. Rev. D **61**, 123503 (2000) [arXiv:hep-ph/9909459]; A. de la Macorra and C. Stephan-Otto, Phys. Rev. D **65**, 083520 (2002) [arXiv:astro-ph/0110460].
- [34] M. Doran and G. Robbers, J. Cosmol. Astropart. Phys. 06 (2006) 026; E.V. Linder, Astropart. Phys. 26, 16 (2006); D. Rubin et al. , Astrophys. J. 695, 391 (2009) [arXiv:0807.1108]; J. Sollerman et al. , Astrophys. J. 703, 1374 (2009)[arXiv:0908.4276]; M.J. Mortonson, W. Hu, D. Huterer, Phys. Rev. D 81, 063007 (2010) [arXiv:0912.3816]; S. Hannestad, E. Mortsell JCAP 0409 (2004) 001 [astro-ph/0407259]; H.K.Jassal, J.S.Bagla, T.Padmanabhan, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 356, L11-L16 (2005); S. Lee, Phys.Rev.D71, 123528 (2005)
- [35] "Dark Energy Parametrization motivated by Scalar Field Dynamics" A. de la Macorra (arXiv: 1511.04439)
- [36] A. de la Macorra, Phys. Rev. D **72**, 043508 (2005) [arXiv:astro-ph/0409523]; A. De la Macorra, JHEP **0301**, 033 (2003) [arXiv:hep-ph/0111292]; A. de la Macorra and C. Stephan-Otto, Phys. Rev. Lett. **87**, 271301 (2001) [arXiv:astro-ph/0106316];
- [37] A. de la Macorra, Phys. Lett. B **585**, 17 (2004) [arXiv:astro-ph/0212275], A. de la Macorra, Astropart. Phys. **33**, 195 (2010) [arXiv:0908.0571 [astro-ph.CO]].
- [38] S. Das, P. S. Corasaniti and J. Khoury, Phys. Rev. D **73**, 083509 (2006), arXiv:astro-ph/0510628; A. de la Macorra, Phys.Rev.D76, 027301 (2007), arXiv:astro-ph/0701635
- [39] A. de la Macorra, JCAP **0801**, 030 (2008) [arXiv:astro-ph/0703702]; A. de la Macorra, Astropart. Phys. **28**, 196 (2007) [arXiv:astro-ph/0702239].