



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUÍMICA

**RESOLUCIÓN DETALLADA DE PROBLEMAS DE
TRANSFERENCIA DE MOMENTUM**

TESIS

**PARA OBTENER EL TÍTULO
INGENIERA QUÍMICA**

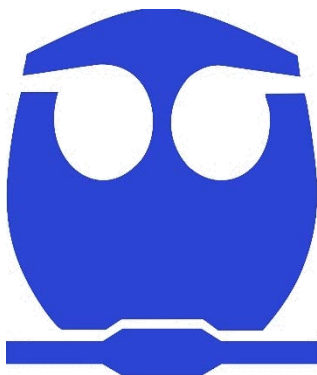
PRESENTA

ELY ANIRA BRAVO TAPIA

DIRECTOR DE TESIS

Dr. JUAN PABLO AGUAYO VALLEJO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2016





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

PRESIDENTE:	Profesor: M. en C. Manuel Vázquez Islas
VOCAL:	Profesor: M. en I. Leticia Valle Arizmendi
SECRETARIO:	Profesor: Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo
1er. SUPLENTE:	Profesor: M. en I. Alberto Castellanos Campillo
2° SUPLENTE:	Profesor: M. en I. Leonardo Damián Soria Rodríguez

SITIO DONDE SE DESARROLLÓ EL TEMA:

**Departamento de Ingeniería Química, Facultad de Química, Universidad
Autónoma de México**

CCADET, Universidad Autónoma de México

NOMENCLATURA

ρ = Densidad

μ = Viscosidad dinámica

t = Tiempo

g = Aceleración de la gravedad

$k_{0,1,2,\dots}$ = Constante 0,1,2, ...

H = Altura

D = Diámetro

π = Número Pi = 3.14159 ...

L = Longitud característica

R = Radio característico

S = Área superficial

V = Volúmen

P = Presión

\wp = Presión Modificada = $(P + \rho gh)$

Re = Número de Reynolds = $\left(\frac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu}\right)$

Q = Flujo Volumétrico

$\langle v_i \rangle$ = Velocidad promedio

\underline{v} = Vector velocidad

$\underline{\underline{v}}$ = Tensor de velocidad

v_x = Componente de velocidad dirección x

v_y = Componente de velocidad dirección y

v_z = Componente de velocidad dirección z

v_r = Componente de velocidad dirección r

v_θ = Componente de velocidad dirección θ

$\underline{\underline{D}}$ = Parte simétrica del tensor de velocidades

$\underline{\underline{\omega}}$ = Parte antisimétrica del tensor de velocidades

$\underline{\underline{\pi}}$ = Tensor de esfuerzos totales

\mathcal{D} = Derivada direccional

δ_{ij} = Delta de Kronecker

$\underline{\underline{I}}$ = Matriz identidad

$\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ = Tensor de velocidad de deformación

$\underline{\underline{\tau}}$ = Tensor de esfuerzos viscosos

τ_{xy} = Esfuerzo cortante con componentes xy

INDICE

1. INTRODUCCIÓN	5
1.1 PLANTAMIENTO DEL PROBLEMA.....	5
1.2 OBJETIVOS.....	10
2. FLUIDOS NEWTONIANOS	12
2.1 ANTECEDENTES DE FLUIDOS NEWTONIANOS.....	12
2.1.1 La Ley de Conservación de Materia.....	14
2.1.2 Conservación de Cantidad de Momentum.....	19
2.1.3 Fluidos Newtonianos.....	27
2.1.4 Deducción de la ecuación de Navier-Stokes.....	29
2.2 FLUJO EN UN TUBO DE SECCIÓN TRANSVERSAL CIRCULAR.....	32
2.2.1 Postulados y suposiciones.....	32
2.2.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes por postulados.....	33
2.2.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad.....	36
2.2.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades.....	40
2.3 FLUJO ENTRE DOS PAREDES PARALELAS PLANAS.....	49
2.3.1 Postulados y suposiciones.....	49
2.3.2 Reducción de términos de las ecuaciones continuidad y Navier-Stokes por postulados.....	50
2.3.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad.....	53
2.3.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades.....	56
2.4 FLUJO AXIAL EN UNA REGIÓN ANULAR ENTRE DOS CILINDROS COAXIALES.....	62
2.4.1 Postulados y suposiciones.....	62
2.4.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes por postulados.....	63
2.4.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad.....	66
2.4.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades.....	73
2.5 FLUJO EN UN TUBO DE SECCIÓN TRANSVERSAL LIGERAMENTE CÓNICA.....	85
2.5.1 Postulados y suposiciones.....	86
2.5.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes por postulados.....	86
2.5.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad.....	88
2.5.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades:.....	107

3. FLUIDOS NO NEWTONIANOS.....	119
3.1 ANTECEDENTES DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS	119
3.1.1 Ecuación constitutiva de fluidos no newtonianos con viscosidad generalizada	124
3.1.2 Modelo de ley de potencia o de Ostwald de Waele:	125
3.2 FLUJO EN UN TUBO DE SECCIÓN TRANSVERSAL CIRCULAR.....	127
3.2.1 Postulados y suposiciones	127
3.2.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y de momentum para fluidos incompresibles no-newtonianos por postulados	128
3.2.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad	132
3.2.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades.....	136
3.3 FLUJO ENTRE DOS PAREDES PARALELAS PLANAS	141
3.3.1 Postulados y suposiciones	141
3.3.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y de momentum para fluidos incompresibles no-newtonianos por postulados	142
3.3.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad	145
3.3.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades.....	149
3.4 FLUJO AXIAL EN UNA REGIÓN ANULAR ENTRE DOS CILINDROS COAXIALES	153
3.4.1 Postulados y suposiciones	153
3.4.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y de momentum para fluidos incompresibles no-newtonianos por postulados	154
3.4.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad	156
3.4.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades.....	161
3.5 FLUJO EN UN TUBO DE SECCIÓN TRANSVERSAL LIGERAMENTE CÓNICA	177
3.5.1 Postulados y suposiciones	177
3.5.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y de momentum para fluidos incompresibles no-newtonianos por postulados	178
3.5.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad	180
3.5.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades:	182
4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	191
5. BIBLIOGRAFIA.....	204

ACLARACIÓN:

Este trabajo tiene como objetivo el ayudar a estudiantes e investigadores interesados en la resolución detallada de problemas típicos en cursos de “Transferencia de Momentum” o en “Fenómenos de Transporte” e incluso en “Reología”. Es muy común que estos cursos utilicen como referencia al libro “*Fenómenos de Transporte*” de R.B. Bird, W.E Stewart y E.W. Lightfoot; es por esto, que este trabajo está basado en problemas presentados en el texto mencionado, siendo la *referencia principal* de esta tesis y por tanto, se tome información del libro. También es importante mencionar que la deducción de ecuaciones también está basado en el procedimiento expuesto en “*Understanding Rheology*” de F.A. Morrison, por lo que también se presentarán un número de referencias ha dicho trabajo.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 PLANTAMIENTO DEL PROBLEMA

Investigadores en el mundo han dedicado su tiempo a obtener la solución completa de las ecuaciones de balance general de continuidad, momentum, energía y masa. Sin embargo, esto no es un trabajo sencillo, debido a que la estructura de las ecuaciones son no lineales con gran número de variables, pero gracias al arduo trabajo de estos investigadores, se han logrado realizar varias simplificaciones para obtener su solución.

Por lo que la tarea de esta tesis es aportar a estudiantes e investigadores una parte de la búsqueda de las soluciones de las ecuaciones de variación. En específico, se dará solución de la ecuación de continuidad y de las ecuaciones de momentum por método de simplificación, eliminación de términos e integración de la ecuación resultante. Se dará solución de las ecuaciones para fluidos newtonianos y no newtonianos en cuatro geometrías:

- En un tubo de sección transversal circular
- Entre dos paredes planas
- En una región anular entre dos cilindros coaxiales
- En un tubo de sección transversal ligeramente cónica

Debido a la solución de las ecuaciones se obtiene principalmente:

- El perfil de velocidades.

Además, se obtienen propiedades derivadas de este perfil de velocidades:

- Velocidad máxima
- Velocidad promedio
- Flujo volumétrico
- Componente del esfuerzo cortante
- Coeficiente de fricción

El método a seguir para la resolución de los balances generales es:

- a) Establecer una lista de restricciones que delimitan el fenómeno de estudio (ej. Estado estacionario, transitorio o no estacionario, fluido compresible o incompresible, propiedades físicas variables o constantes, etc.). Además, incluir postulados, que por experiencia pronostican el fenómeno y simplifican la solución (ej. Distribución de la presión y velocidad, condición de adherencia, medio continuo, etc.).
- b) Posteriormente se prosigue con la eliminación de los términos en las ecuaciones de continuidad y momentum que sean insignificantes o que sean cero a partir de los postulados propuestos
- c) En seguida de haber realizado la eliminación, resulta una expresión con menor número de términos, la cual es resuelta de forma analítica, numérica o por aproximaciones, para así obtener el perfil de velocidades.

A continuación se presentan las ecuaciones de balance general.

(Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001)

Ecuación de continuidad en forma vectorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \underline{v}) = 0 \quad \text{Ecuación 1.1-1}$$

Ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad \text{Ecuación 1.1-2}$$

Ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad \text{Ecuación 1.1-3}$$

Ecuación de Navier-Stokes en forma vectorial:

$$\rho \left(\frac{D\underline{v}}{Dt} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho \underline{g} \quad \text{Ecuación 1.1-4}$$

Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas en dirección "x":

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x \quad \text{Ecuación 1.1-5}$$

Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas en dirección "y":

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y \quad \text{Ecuación 1.1-6}$$

Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas en dirección "z":

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad \text{Ecuación 1.1-7}$$

Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas en dirección "r":

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r \quad \text{Ecuación 1.1-8}$$

Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas en dirección " θ ":

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) =$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta$$

Ecuación 1.1-9

Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas dirección " z ":

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Ecuación 1.1-10

Ecuación de momentum en forma vectorial:

$$\rho \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) = -\nabla p - [\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}] + \rho \underline{\underline{g}}$$

Ecuación 1.1-11

Ecuación de momentum en término del esfuerzo cortante en dirección " x ":

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right] + \rho g_x$$

Ecuación 1.1-12

Ecuación de momentum en término del esfuerzo cortante en dirección " y ":

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right] + \rho g_y$$

Ecuación 1.1-13

Ecuación de momentum en término del esfuerzo cortante en dirección " z ":

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right] + \rho g_z$$

Ecuación 1.1-14

Ecuación de momentum en término del esfuerzo cortante en dirección "r":

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) =$$

Ecuación 1.1-15

$$-\frac{\partial p}{\partial r} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zr} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] + \rho g_r$$

Ecuación de momentum en término del esfuerzo cortante en dirección "θ":

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) =$$

Ecuación 1.1-161

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} - \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] + \rho g_\theta$$

Ecuación de momentum en término del esfuerzo cortante en dirección "z":

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) =$$

Ecuación 1.1-172

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z$$

1.2 OBJETIVOS

- I. Resolver a detalle problemas de transferencia de momentum para fluidos newtonianos incomprensibles y estacionarios, usando las ecuaciones de Navier-Stokes, para cuatro geometrías diferentes típicas de la industria.
- II. Resolver a detalle problemas de transferencia de momentum para fluidos no newtonianos, incomprensibles y estacionarios, utilizando el modelo de la ley de Potencia que caracteriza al fluido, para cuatro geometrías diferentes típicas de la industria.
- III. Analizar la definición, la validez y los beneficios de los métodos de simplificación de órdenes de magnitud y lubricación, que son empleados continuamente para desarrollar alternativas de solución de los problemas de transferencia.
- IV. Comparar las diferencias de los perfiles de los fluidos newtonianos y no newtonianos y la dependencia del exponente en el modelo de Ley de Potencia.
- V. Por experiencia los libros que desarrollan temas de fenómenos de transporte o mecánica de fluidos no detallan, ni aclaran completamente los procesos matemáticos en la solución de problemas, provocando poca comprensión o dificultad en el rápido aprendizaje de una ciencia en continua actualización. Por esta razón, esta tesis está diseñada como si fuera un libro de solución de problemas de transferencia en forma detallada y minuciosa con el objetivo de apoyar al estudiante que desea comenzar a enfrentarse a esta disciplina de la ingeniería química.



F L U I D O S
N E W T O N I A N O S

2. FLUIDOS NEWTONIANOS

2.1 ANTECEDENTES DE FLUIDOS NEWTONIANOS

Los principales movimientos que experimenta un fluido al sufrir algún gradiente de velocidad o de presión son:

- 1.-Tres movimientos asociados a las deformaciones volumétricas
- 2.-Tres movimientos asociados a deformaciones tangenciales
- 3.-Un movimiento de rotación
- 4.-Un movimiento de traslación

En un flujo donde el vector de velocidad es igual en todos los puntos (uniforme), solo existe movimiento de traslación. En los no uniformes (los demás movimientos) además existen cambios lineales, de forma, de ángulo o de dimensión.

Todos estos movimientos se interpretan con el tensor de gradiente de velocidad ($\nabla \underline{v}$), este muestra cómo cambia la velocidad en cada dirección del espacio y se representa como:

$$\nabla \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 21-1}$$

Donde la forma de su transpuesta está determinada como:

$$(\nabla \underline{v})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.1-2}$$

El tensor de velocidad, además se puede descomponer en una parte simétrica $\underline{\underline{D}}$ y una antisimétrica $\underline{\underline{\omega}}$, las cuales son:

$$\nabla \underline{v} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T) + \frac{1}{2}(\nabla \underline{v} - \nabla \underline{v}^T) \quad \text{Ecuación 2.1-3}$$

La ecuación de arriba puede ser escrita usando la notación de índices que es una convención utilizada para abreviar las sumatorias, pero que representa lo mismo transformándose como:

$$\nabla \underline{v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{Ecuación 2.1-4}$$

La parte simétrica del tensor de velocidad, expresa el tensor de rapidez de deformación. Donde la traza de este tensor de rapidez de deformación, proporciona información de los cambios volumétricos (si el elemento de volumen se expande o se comprime). Pero si la suma de la traza da como resultado cero, se habla de un fluido incomprensible:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 2 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.1-5}$$

La parte antisimétrica que está asociado con la descripción de los vórtices o remolinos: (Heras Jiménez, 2012, pág. 34)

$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.1-6}$$

La ley de viscosidad de Newton únicamente utiliza la parte simétrica del tensor de deformación, por lo que en este trabajo únicamente se encontrará movimientos asociados a deformaciones tangenciales y de traslación.

A continuación se presentan dos ecuaciones físicas muy importantes que gobiernan y caracterizan la deformación isotérmica: la ley de conservación de materia y la ley de conservación de momentum

2.1.1 La Ley de Conservación de Materia

(Buena parte de la deducción de esta sección es de: (Morrison, 2001, pág. 59))

La ley de conservación de materia es válido exclusivamente para balances globales y unidades másicas, ya que en balances por componentes en presencia de alguna reacción química, no cumple con el principio de conservación y el número de componentes o el número de moles puede aumentar o disminuir.

Para aplicar la ley de conservación de materia se realiza un balance de materia dentro de un sistema, en el cual se debe de cumplir que

$$(\text{Rapidez de acumulación}) = (\text{Flujo de entrada}) - (\text{Flujo de Salida}) \quad \textit{Ecuación 2.1-7}$$

Para la deducción matemática del balance de materia se procede a realizar inicialmente un balance microscópico sobre un elemento de volumen arbitrario y fijo (V), localizado arbitrariamente en el sistema de flujo. Este volumen tiene un área superficial total (S) y ambos son constantes.

El flujo de materia que pasa a través de este elemento de volumen fijo se supone como medio continuo (que es considerar al flujo como una porción de materia formada por un conjunto casi infinito de partículas, sin considerar espacios o discontinuidades a nivel atómico o molecular).

El flujo que existe en el elemento de volumen, puede sufrir aumento o disminución de la cantidad de materia, de la densidad o puede haber una acumulación. Para medir estos cambios se utilizarán las diferenciales.

Por lo tanto, considérese un vector de velocidad local (\underline{v}) que indica la velocidad del flujo y que pasa a través de un elemento diferencial de superficie (dS), en el elemento de volumen fijo (V) propuesto. Sin embargo, el vector de velocidad que pasa a través de la diferencial de superficie (dS), no necesariamente apunta perpendicularmente a dicha superficie, pudiendo llegar a ser paralelo, con lo cual no contribuiría al flujo. Por esta razón, se introduce la componente normal de superficie, para saber la contribución del vector de velocidad. Donde el vector normal de superficie tiene tres características:

1. Es perpendicular del punto de superficie de donde sale
2. Es que es unitario
3. Apunta “hacia afuera” del elemento de volumen

Entonces, la contribución de la velocidad es positiva si el vector de velocidad y la normal apuntan en sentido contrario (entrada de materia) y es negativa si el vector de velocidad y la normal apuntan en la misma dirección (salida de materia).

Con lo anterior se tiene que el flujo volumétrico local (volumen de fluido que pasa por una superficie en un determinado tiempo) se puede calcular como el producto punto del vector de velocidad que pasa a través de una diferencial de superficie ($\hat{n}dS$), donde (\hat{n}) es un vector normal ha (dS) y se escribe:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Flujo volumétrico} \\ \text{que pasa a través} \\ \text{de } dS \text{ debido al} \\ \text{vector de velocidad } \underline{v} \end{array} \right) = \hat{n} \cdot \underline{v} dS \qquad \text{Ecuación 1.1-8}$$

Se introduce a la expresión la densidad (ρ) multiplicando, para pasar de flujo volumétrico a flujo másico local. En seguida se integra toda la expresión para encontrar el flujo másico neto total que pasa sobre la superficie que rodea el elemento de volumen fijo.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Flujo másico} \\ \text{neto que pasa a} \\ \text{través de } dS \end{array} \right) = - \int_S \rho(\hat{n} \cdot \underline{v}) dS = - \int_S \hat{n} \cdot (\rho \underline{v}) dS \quad \text{Ecuación 2.1-9}$$

La expresión ($\rho \underline{v}$), se le conoce también como el flux másico, donde flux puede representar cualquier propiedad (masa, energía, momentum, etc.) entre el área-tiempo ($\rho \underline{v} [=] \frac{M}{L^3} \frac{L}{T} = \frac{M}{L^2 T}$). La [Ecuación 2.1-9] es negativa, ya que debido a la normal esta cambia a positiva cuando se quiere indicar entrada del fluido y negativa salida del fluido del elemento de volumen fijo.

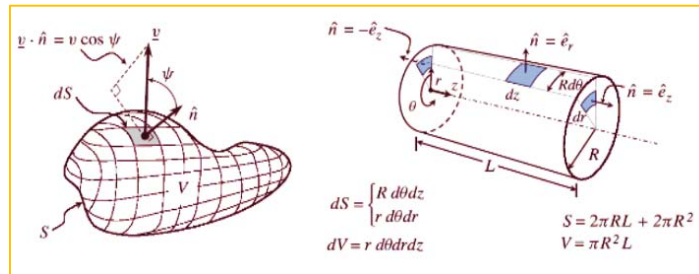


Figura 2.1-1 Esquema de un volumen arbitrario y cilíndrico usado para visualizar la derivación de las ecuaciones de variación (Morrison, 2001, pág. 60)

Si el sistema está en condiciones transitorias, esto es, si existe un cambio de la cantidad de masa con respecto al tiempo dentro del elemento de volumen fijo, se modela como la derivada con respecto al tiempo de la integral de la masa contenida en una diferencial de volumen.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Rapidez de} \\ \text{acumulación} \end{array} \right) = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad \text{Ecuación 2.1-10}$$

Introduciendo los términos de la [Ecuación 2.1-9 y Ecuación 2.1-10] como se indica en el balance de materia [Ecuación 2.1-7], se obtiene:

$$(\text{Rapidez de acumulación}) = (\text{Flujo de entrada}) - (\text{Flujo de salida})$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \hat{n} \cdot (\rho \underline{v}) dS \quad \text{Ecuación 2.1-11}$$

Los siguientes pasos es para obtener ambas expresiones simplificadas e integradas sobre el mismo elemento de volumen fijo:

Al término derecho se aplica el teorema de divergencia de Gauss–Ostrogradskii, en el cual una integral de superficie puede ser modificada por una diferencial de volumen como sigue:

$$- \int_S \hat{n} \cdot (\rho \underline{v}) dS = - \int_V \nabla \cdot (\rho \underline{v}) dV \quad \text{Ecuación 2.1-12}$$

Remplazando el término derecho de la ecuacion anterior en la [Ecuación 2.1-11]

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \underline{v}) dV \quad \text{Ecuación 2.1-13}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \underline{v}) dV = 0 \quad \text{Ecuación 2.1-14}$$

Para poder reducir más la ecuación anterior, se utiliza la regla de Leibnitz, para derivar una integral triple, dada por:

$$\frac{d \int_{V(t)} f(x, y, z, t) dV}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S(t)} f(\underline{v}_{surface} \cdot \hat{n}) dS \quad \text{Ecuación 2.1-15}$$

Donde:

$$\frac{d \int_{V(t)} f(x, y, z, t) dV}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad \text{Ecuación 2.1-16}$$

Aplicando la regla y dado que el elemento de volumen es fijo y la velocidad de la superficie es cero, el segundo término de la regla de Leibnitz es cero. Entonces el primer término de la [Ecuación 2.1-14] se expresa como

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad \text{Ecuación 2.1-17}$$

Se sustituye la expresión anterior en la [Ecuación 2.1-14] y despejando todo al lado izquierdo resulta

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \underline{v}) dV = 0 \quad \text{Ecuación 2.1-18}$$

Se agrupan los dos términos en una sola integral

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) \right] dV = 0 \quad \text{Ecuación 2.1-19}$$

Del resultado anterior, si la integral de una función es cero para una región completamente arbitraria de integración, entonces la función debe ser cero. Por lo que finalmente se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad \text{Ecuación 2.1-20}$$

Esta [Ecuación 2.1-20] es una ley física que expresa la conservación de materia y que comúnmente se conoce como la ecuación de continuidad y debe cumplirse sobre cualquier volumen que se escoja en el sistema.

2.1.2 Conservación de Cantidad de Momentum

La segunda ley de Newton conocida como

$$\underline{F} = m \underline{a} = \frac{d}{dt}(m \underline{v}) \quad \text{Ecuación 2.1-21}$$

Es el cimiento a partir del cual se empieza a derivar la ley de conservación lineal de cantidad de movimiento o momentum, donde señala que el cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz.

Así, el principio de conservación de momentum, donde el efecto neto de todas las fuerzas será únicamente cambiar el estado de momentum total en el sistema, se expresa como:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Rapidez de incremento} \\ \text{de momentum} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Rapidez de entrada} \\ \text{de momentum} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Rapidez de salida} \\ \text{de momentum} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Fuerzas externas} \\ \text{sobre el fluido} \end{array} \right) \quad \text{Ecuación 2.1-22}$$

La ecuación anterior indica que la rapidez de incremento de momentum neto en el sistema es igual a la velocidad de entrada y salida de momentum causada por dos mecanismos (por convección y por fuerzas moleculares) y además de la fuerza externa (típicamente la gravedad o las fuerzas electromagnéticas).

Enseguida, se expresa matemáticamente el balance de momentum por partes:

a) Rapidez de incremento de momentum de la [Ecuación 2.1-22].

Para deducir la rapidez de incremento de momentum primeramente se procede a ejecutar el análisis dimensional de la expresión $(\rho \underline{v})$, el cual significa dos cosas dependiendo del problema y lo que se desea obtener.

Flux másico: $(\rho \underline{v} [=] \frac{M}{L^3} \frac{L}{T} = \frac{M}{L^2 T})$

Momentum existente en un volumen determinado: $(\rho \underline{v} = \frac{M}{L^3} \frac{L}{T} = \frac{M}{L^2 T})$

En este caso se utilizará la cantidad de momentum específico en un determinado volumen $(\rho \underline{v})$ y de nuevo se aplicará el análisis sobre un elemento de volumen fijo en un sistema. Por lo tanto, la rapidez del incremento de la cantidad de momentum en todo el elemento de volumen fijo se puede expresar como:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Rapidez de incremento} \\ \text{de momentum en un} \\ \text{volumen fijo } V \end{array} \right) = \frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV = \int_V \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV \quad \text{Ecuación 2.1-23}$$

Se puede observar que en la expresión anterior se usó de nuevo la regla de Leibnitz para diferenciar la integral.

b) Rapidez entrada y salida de cantidad de momentum causado por dos mecanismos convección y fuerzas moleculares

b.1) Cantidad de momentum por convección

Es el momentum que se transfiere por el medio del movimiento del fluido. Para explicar esta transferencia de movimiento se recurre al flux de momentum contenido en un volumen, el cual al atravesar una diferencial de superficie en el elemento de volumen fijo, lo hace con una velocidad \underline{v} . Para saber la contribución de la velocidad del flux de momentum, se requiere el producto punto de la velocidad con el vector normal por la diferencial de superficie.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Rapidez de incremento del} \\ \text{flux de momentum por} \\ \text{convección a través de una } dS \end{array} \right) = (-\rho \underline{v}) (\hat{n} \cdot \underline{v} dS) \quad \text{Ecuación 2.1-24}$$

Se analiza en la ecuación anterior que $(-\rho \underline{v})$ es la propiedad flux de momentum contenido en un volumen y $(\hat{n} \cdot \underline{v} dS)$ es el flujo volumétrico, con ello estamos indicando el flujo volumétrico de la propiedad que entra al sistema.

De la [Ecuación 2.1-24] tanto la densidad (ρ), como el vector velocidad producto punto con la normal $(\hat{n} \cdot \underline{v})$ son magnitudes escalares, entonces estas se pueden reorganizar, para después poder ejecutar el teorema de la divergencia.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Rapidez de incremento del} \\ \text{flux de momentum por} \\ \text{convección a través de una } dS \end{array} \right) = -(\hat{n} \cdot \rho \underline{v} \underline{v} dS) \quad \text{Ecuación 2.1-25}$$

Donde ahora la propiedad flux de momentum está dado como $(\rho \underline{v} \underline{v})$ y el análisis dimensional es $\left(\rho \underline{v} \underline{v} [=] \frac{M}{L^3} \frac{L}{T} \frac{L}{T} = \frac{ML}{L^2 T} \right)$.

A continuación, se integra esta expresión sobre toda la superficie que rodea al elemento de volumen fijo y después se aplica el teorema de la divergencia, para cambiar de integral superficial a la integral de la divergencia del flux de momentum sobre el elemento de volumen fijo y con este procedimiento se obtiene el flux convectivo de momentum neto que atraviesa en un elemento de volumen fijo. (Morrison, 2001, pág. 64)

$$\left(\begin{array}{l} \text{Flux de momentum convectivo} \\ \text{neto que atraviesa un} \\ \text{elemento de volumen fijo} \end{array} \right) = - \int_V (\nabla \cdot \rho \underline{v} \underline{v} dV) \quad \text{Ecuación 2.1-26}$$

b.2) Flux de momentum por fuerzas moleculares

La segunda contribución a la cantidad de movimiento ocurre por interacciones o colisiones entre moléculas. Se comenzará este balance imaginando un elemento arbitrario de volumen fijo en forma de cubo, por la cual cruce una corriente. La tarea será averiguar las fuerzas que existen o que se ejercen en el punto (x, y, z) en el

centro del volumen del cubo, si de repente, se eliminara la mitad del fluido en este volumen realizándose esto para cada una de las tres direcciones. De esta tarea se hallaron dos contribuciones importantes en el punto (x, y, z) : La presión termodinámica (P) normal al plano y la asociada con las fuerzas viscosas o de deformación del fluido. Una representación gráfica se presenta a continuación.

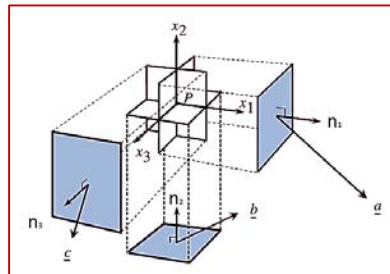


Figura 2.1-2 Esquema del esfuerzo existente en el punto “P” en un sistema de flujo. Los tres vectores muestran al esfuerzo en planos mutuamente perpendiculares que pasan a través de “P” (Morrison, 2001, pág. 65)

La presión termodinámica es un escalar de característica isotrópica, (que actúa sobre el elemento de volumen, con igual intensidad en todas las direcciones). Otra característica a considerar de la presión, es que solo ejerce fuerzas normales a la superficie, por tanto, el efecto de la presión hidrostática o termodinámica, está representado por $(p \underline{I})$, donde (\underline{I}) es el tensor identidad, equivalente a una matriz de (3×3) donde la diagonal es unitaria y los demás elementos son cero.

Las fuerzas viscosas son elementales ya que estas hacen que se transfiera el movimiento entre las capas del fluido y se generan únicamente al existir gradientes de velocidad. En general, estas fuerzas no son ni perpendiculares, ni paralelas al plano, más bien forman un ángulo con respecto a este. La fuerza por área unitaria en cada uno de los planos de las tres superficies (τ_x, τ_y, τ_z) son vectores que a su vez están formados de componentes (escalares), como por ejemplo, el vector (τ_x) tiene componentes $(\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz})$. El conjunto de los componentes representan el

tensor de esfuerzos viscosos ($\underline{\underline{\tau}}$), con componentes (τ_{xy}) que representa la fuerza en dirección “y” sobre un área unitaria perpendicular a la dirección “x”.

Las ecuaciones constitutivas son una relación entre variables termodinámicas y mecánicas en un sistema, las cuales especifican el material. En transferencia de momentum, las ecuaciones constitutivas relacionan el esfuerzo, con la deformación, especificando la resistencia de un material específico. Se han obtenido varias de estas ecuaciones constitutivas para especificar ($\underline{\underline{\tau}}$), el cual describe los particulares esfuerzos dependiendo del tipo del fluido al cual se esté estudiando. Actualmente se realizan un número de trabajos de investigación enfocados en obtener ecuaciones constitutivas que representen apropiadamente el mayor número de características no newtonianas.

Al conocer estas dos fuerzas: la presión termodinámica y los esfuerzos viscosos que actúan en las tres áreas unitarias dentro de un fluido. El símbolo que representa la contribución de estos efectos es el tensor ($\underline{\underline{\pi}}$) y se conoce como en la siguiente tabla:

x	$\pi_x = p\delta_x + \tau_x$	$\pi_{xx} = p + \tau_{xx}$	$\pi_{xy} = \tau_{xy}$	$\pi_{xz} = \tau_{xz}$
y	$\pi_y = p\delta_y + \tau_y$	$\pi_{yx} = \tau_{yx}$	$\pi_{yy} = p + \tau_{yy}$	$\pi_{yz} = \tau_{yz}$
z	$\pi_z = p\delta_z + \tau_z$	$\pi_{zx} = \tau_{zx}$	$\pi_{zy} = \tau_{zy}$	$\pi_{zz} = p + \tau_{zz}$

TABLA.1: Resumen del tensor de esfuerzos molecular o de esfuerzos totales y sus componentes

Los esfuerzos ($\pi_{xx} = p + \tau_{xx}$), ($\pi_{yy} = p + \tau_{yy}$) y ($\pi_{zz} = p + \tau_{zz}$) se denominan esfuerzos normales y los sobrantes ($\pi_{yx} = \tau_{yx}$), ($\pi_{zy} = \tau_{zy}$) esfuerzos cortantes.

Retomando el objetivo principal de deducir matemáticamente el flux de momentum debido a los esfuerzos moleculares, se realizan los mismos pasos de la deducción del flux de momentum convectivo. Por tanto, se multiplica el tensor de esfuerzos

totales por la diferencial de superficie producto punto con la normal. Se integra para obtener la superficie total del elemento de volumen fijo. Después se aplica el teorema de divergencia para transformar la integral de superficie a integral de volumen.

Matemáticamente los pasos anteriores se resume así: (Morrison, 2001)

$$\left(\begin{array}{l} \text{Fuerza molecular} \\ \text{actuando en una } dS \end{array} \right) = -(\hat{n} \cdot \underline{\pi}) dS \quad \text{Ecuación 2.1-27}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Fuerza molecular} \\ \text{neta actuando en } e \\ \text{la superficie total} \end{array} \right) = - \int_S (\hat{n} \cdot \underline{\pi}) dS \quad \text{Ecuación 2.1-28}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Fuerza molecular} \\ \text{neta actuando en el} \\ \text{V fijo} \end{array} \right) = - \int_V (\nabla \cdot \underline{\pi}) dV \quad \text{Ecuación 2.1-29}$$

c) Fuerzas externas sobre el fluido

La última expresión del balance de momentum proviene de las fuerzas de volumen (*body forces*, en inglés) debido a campos externos, típicamente la gravedad (\underline{g}). Existen otros tipos de campos que no se manejarán en esta tesis, como la fuerza eléctrica y magnética, que llegan a tener influencia en fluidos polares o suspensiones cargadas. Entonces, la aceleración de una masa contenida en un volumen (densidad) debido a la gravedad, sobre una diferencial de volumen es:

$$\left(\begin{array}{l} \text{La gravedad que actúa} \\ \text{sobre la masa en una } dV \end{array} \right) = \rho \underline{g} dV \quad \text{Ecuación 2.1-30}$$

Se integra para obtener el efecto total de la gravedad hacia el elemento de volumen fijo de la corriente.

$$\left(\begin{array}{l} \text{La fuerza total que actúa} \\ \text{sobre el elemento de } V \end{array} \right) = \int_V \rho \underline{g} dV \quad \text{Ecuación 2.1-31}$$

Finalmente solo queda incorporar todas las expresiones matemáticas deducidas [Ecuación 2.1-23], [Ecuación 2.1-26], [Ecuación 2.1-29], [Ecuación 2.1-24] siguiendo el balance de momentum [Ecuación 2.1-22] y simplificar lo más posible, para utilizar fácilmente en futuros problemas.

$$\int_V \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV = - \int_V (\nabla \cdot \rho \underline{v} \underline{v}) dV - \int_V (\nabla \cdot \underline{\pi}) dV + \int_V \rho \underline{g} dV \quad \text{Ecuación 2.1-32}$$

$$\underline{0} = \int_V \left[-\frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) - \nabla \cdot \underline{\pi} + \rho \underline{g} \right] dV \quad \text{Ecuación 2.1-33}$$

De manera similar al procedimiento de la obtención de la ecuación de continuidad, si la integral de una función es cero para cualquier región de integración, entonces la función debe ser cero. Por lo que finalmente se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) - \nabla \cdot \underline{\pi} + \rho \underline{g} \quad \text{Ecuación 2.1-34}$$

Esta ecuación es válida para fluidos compresibles e incompresibles, flujos estacionarios o no estacionarios y fluidos de tipo newtoniano o no.

Para simplificar la ecuación de momentum [Ecuación 2.1-34], lo que se hace es desarrollar dos términos de esta ecuación: la parcial con respecto al tiempo del término del lado izquierdo de la igualdad (rapidez de incremento de la cantidad de momentum) y el gradiente del primer término del lado derecho de la igualdad (flux de momentum convectivo). Hecho esto se puede eliminar términos usando la ecuación de continuidad, quedando así la ecuación simplificada:

Con notación de índices, se empieza la expansión de la parcial de la [Ecuación 2.1-34]

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{Ecuación 2.1-35}$$

Expandiendo ahora, con notación de índices, el primer término del lado derecho de la igualdad de la [Ecuación 2.1-34], se tiene que:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i v_j) = -(\rho v_i) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - (\rho v_j) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - (v_j v_i) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad \text{Ecuación 2.1-36}$$

Se introducen las expresiones desarrolladas [Ecuación 2.1-35] y [Ecuación 2.1-36] a la ecuación de momentum y se factoriza

$$\left[\frac{\rho \partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{\underline{v} \partial \rho}{\partial t} \right] = [-\rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} - \rho \underline{v}(\nabla \cdot \underline{v}) - \underline{v}(\underline{v} \cdot \nabla \rho)] - \nabla \cdot \underline{\pi} + \rho \underline{g} \quad \text{Ecuación 2.1-37}$$

$$\frac{\rho \partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\frac{\underline{v} \partial \rho}{\partial t} - \rho \underline{v}(\nabla \cdot \underline{v}) - \underline{v}(\underline{v} \cdot \nabla \rho) - \nabla \cdot \underline{\pi} + \rho \underline{g} \quad \text{Ecuación 2.1-38}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\underline{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \underline{v}) + (\underline{v} \cdot \nabla \rho) \right) - \nabla \cdot \underline{\pi} + \rho \underline{g} \quad \text{Ecuación 2.1-39}$$

Si la ecuación de continuidad [Ecuación 2.1-20] se desarrollada como sigue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \underline{v}) + (\underline{v} \cdot \nabla \rho) = 0 \quad \text{Ecuación 2.1-40}$$

Se advierte que la ecuación anterior está igualada a cero y dado que es mismo término del lado derecho de la ecuación de momentum [Ecuación 2.1-39], por tanto el término se elimina simplificándose así:

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla \cdot \underline{\pi} + \rho \underline{g} \quad \text{Ecuación 2.1-41}$$

Se inserta la definición de la derivada material, para finalmente obtener la ecuación de conservación de la cantidad de momentum.

$$\rho \left(\frac{D \underline{v}}{Dt} \right) = -\nabla \cdot \underline{\pi} + \rho \underline{g} \quad \text{Ecuación 2.1-42}$$

2.1.3 Fluidos Newtonianos

Se le conoce como fluido newtoniano a todo aquel fluido cuya viscosidad puede considerarse como constante en el tiempo, manteniéndose fijas la temperatura y la presión. Son uno de los fluidos más sencillos de describir frente a alteraciones de gradientes de presión o de velocidad. Numerosos fluidos se comportan como newtonianos, como por ejemplo: aire, agua, gasolina, vino y algunos aceites minerales, por mencionar algunos. El modelo que describe a estos fluidos, lo hace con gran precisión en todos los gases y líquidos compuestos de pesos moleculares bajos.

La ecuación constitutiva de fluidos newtonianos ahora derivada de principios fundamentales, fue originalmente una ecuación empíricamente descrita por Newton en 1687. Newton hizo experimentos de deslizamiento de fluido incomprensibles y observo que el esfuerzo contante era directamente proporcional al gradiente de velocidad. (Newton, 1687)

La ley de viscosidad de Newton se escribe matemáticamente como

$$\tau_{21} = -\mu \left(\frac{dv_1}{dx_2} \right) \quad \text{Ecuación 2.1-43}$$

Sin embargo, para ser una ecuación constitutiva se debe de generalizar a una expresión que prediga el comportamiento de varios fluidos tipo newtoniano en cualquier flujo. En consecuencia, se realizó más tarde un modelo molecular que se extiende a más fluidos newtonianos y que proporciona el mismo resultado de la [Ecuación 2.1-43]. Así, la generalización es llamada la ecuación constitutiva de Newton y es un conjunto de nueve relaciones de las cuales seis son independientes. (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001, pág. 19)

$$\underline{\underline{\tau}} = -\mu \left(\nabla \underline{\underline{v}} + (\nabla \underline{\underline{v}})^T \right) + \left(\frac{2}{3} \mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{\delta}} \quad \text{Ecuación 2.1-44}$$

Donde $(\nabla \underline{v})$ es el tensor de gradientes de velocidades y $((\nabla \underline{v})^T)$ su transpuesta. En seguida, están dos coeficientes, la viscosidad (μ) la cual describe la resistencia de un fluido a deslizarse y la viscosidad dilatacional (κ) que describe la contribución isotrópica al esfuerzo que es generado cuando la densidad de un fluido cambia tras la deformación. Este coeficiente se considera principalmente en suspensiones o gases poliatómicos, pero por lo general cuando el fluido es un gas, a menudo se supone que actúa como un gas ideal monoatómico para que ($\kappa = 0$). Luego, aparece la divergencia del vector de velocidad ($\nabla \cdot \underline{v}$) la cual afecta la diagonal del tensor e indica la compresión o expansión del fluido, si ($\nabla \cdot \underline{v} = 0$) entonces el fluido es incompresible. Finalmente está la delta de Kronecker ($\underline{\delta}$) con componentes (δ_{ij}), indica si el componente ($i = j$) este es = 1 y si ($i \neq j$) este será = 0.

Cabe notar, que la ecuación constitutiva newtoniana, es una ecuación tensorial donde ambos términos dependen del vector (\underline{v}). La mayoría de los fluidos conocidos generan un tensor de esfuerzos simétrico. No obstante, existen algunos fluidos no newtonianos especiales, los cuales son no simétricos. (Scriven, J. S. Dahler and L. E., 1961)

En este trabajo, se estudiarán los fluidos newtonianos incompresibles. Donde, la expresión que los caracteriza es el tensor de esfuerzos, que es:

$$\underline{\underline{\tau}} = -\mu (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) = -\mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \quad \text{Ecuación 2.1-45}$$

donde el símbolo $(\underline{\underline{\dot{\gamma}}})$, se le conoce como el tensor de velocidad de deformación. (Sámano Tirado & Mihir, 2009)

2.1.4 Deducción de la ecuación de Navier-Stokes

La ecuación del balance de cantidad de momentum [Ecuación 2.1-42], se puede particularizar para fluidos newtonianos compresibles e incompresibles, con la expresión de los esfuerzos newtonianos [Ecuación 2.1-45] y con ello simplificar la resolución de problemas.

Por lo tanto, el término a desarrollar y simplificar, donde se incluyen los esfuerzos en el balance de momentum, es el gradiente del tensor de esfuerzos totales $(\nabla \cdot \underline{\underline{\pi}})$.

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\pi}} = \nabla \cdot (p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}) = \nabla \cdot p\underline{\underline{I}} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \quad \text{Ecuación 2.1-46}$$

El término $(\underline{\underline{\tau}})$ es sustituido por la ley de viscosidad newtoniana $(\underline{\underline{\tau}} = -\mu\underline{\underline{\dot{\gamma}}})$, para después aplicar el operador gradiente. Pero dado que se están describiendo fluidos newtonianos que no dependen de la velocidad de deformación, la viscosidad se considera constante, en consecuencia resulta:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = -\mu(\nabla \cdot \underline{\underline{\dot{\gamma}}}) \quad \text{Ecuación 2.1-47}$$

Se sustituye la definición del tensor de velocidad de deformación como:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = -\mu\nabla \cdot (\nabla \underline{\underline{v}} + (\nabla \underline{\underline{v}})^T) = -\mu\nabla^2 \underline{\underline{v}} - \mu\nabla \cdot (\nabla \underline{\underline{v}})^T \quad \text{Ecuación 2.1-48}$$

Desarrollando el segundo término del gradiente del tensor de esfuerzos como:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^T = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \cdot \underline{\underline{v}}) = 0_i \quad \text{Ecuación 2.1-49}$$

El desarrollo se realizó únicamente para demostrar que se vuelve cero por la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles ($\nabla \cdot \underline{v} = 0$). Por lo tanto el tensor de esfuerzos tiene ahora la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \underline{\pi} = \nabla p + \nabla \cdot \underline{\tau} = \nabla p - \mu \nabla^2 \underline{v} \quad \text{Ecuación 2.1-50}$$

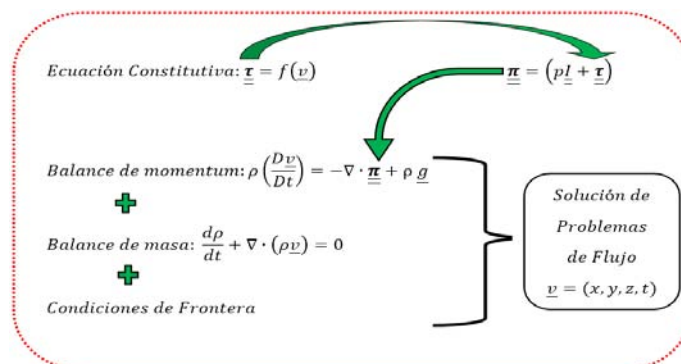
Se incorpora la simplificación anterior a la ecuación de la cantidad de momentum [Ecuación 2.1-42] y se obtiene con ello la ecuación de Navier-Stokes, como:

$$\rho \left(\frac{D\underline{v}}{Dt} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho \underline{g} \quad \text{Ecuación 2.1-51}$$

Esta ecuación es un balance microscópico de momentum restringido a fluidos incompresibles newtonianos. Se utiliza para la obtención de distribuciones de velocidad, distribuciones del tensor de esfuerzos generado por gradientes de presiones o por resultado de la aceleración de la gravedad, así como otros resultados de interés.

La ley de conservación de la materia (Ecuación de continuidad) y la ley de conservación de la cantidad de momentum (Ecuación de cantidad de momentum). Son dos leyes físicas que gobiernan la mecánica de fluidos newtonianos y no newtonianos, que en conjunto, predicen patrones de flujo de los fluidos.

A continuación, un esbozo de cómo utilizar estas ecuaciones y resolver problemas, tomado de (Morrison, 2001, pág. 73):



En resumen, primeramente se debe encontrar el modelo a utilizar de la ecuación constitutiva del tensor de esfuerzos viscosos, específica para el tipo de material que se está estudiando, el cual relaciona variables cinéticas como gradientes de presión, deformaciones, vorticidades, etc. Al obtener esta ecuación constitutiva $\left(\underline{\underline{\tau}}(\underline{v}, \nabla \underline{v}, \dots)\right)$, se sustituye al tensor de esfuerzos totales $\left(\underline{\underline{\pi}}\right)$, para después obtener la ecuación de cantidad de momentum [Ecuación 2.1-42] y junto con la ecuación de continuidad se resuelven, por medio de las condiciones de frontera y ciertas aproximaciones. Para fluidos newtonianos se utiliza la ecuación de Navier-Stokes [Ecuación 2.1-51] al mismo tiempo que la ecuación de continuidad y se resuelven a través de las condiciones de frontera y las aproximaciones. (Morrison, 2001, pág. 77)

En las siguientes secciones se plantean problemas de transferencia de momentum clásicos, que si bien pueden ser encontrados en varias referencias del tema, las soluciones presentadas en dichos textos, omiten muchas etapas intermedias en el procedimiento de resolución. El objetivo de este escrito es presentar un procedimiento de solución mucho más detallado, que pueda servir de referencia a los lectores.

2.2 FLUJO EN UN TUBO DE SECCIÓN TRANSVERSAL CIRCULAR

Considérese un fluido, que se mueve a través de un tubo de sección transversal circular, que viaja en la dirección de “ z ” por la influencia de una diferencia de presión con una longitud (L) y radio (R). Para la solución del problema, se utilizan las ecuaciones en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) por el tipo de geometría. (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001, pág. 88)

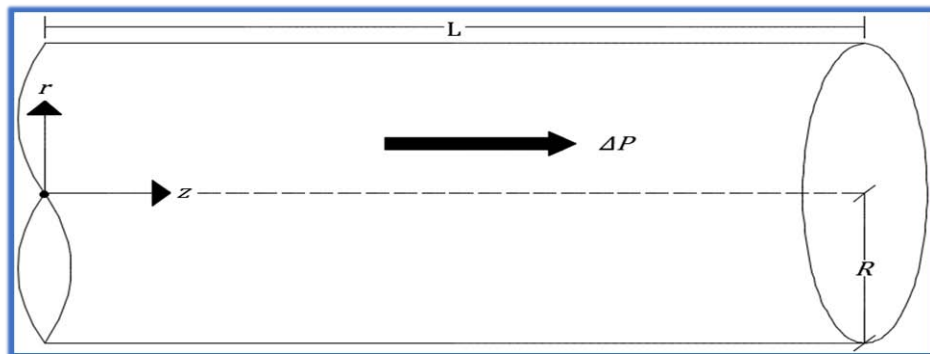


Figura 2.2-1 Flujo en un tubo de sección transversal circular bajo el efecto de un gradiente de presión en dirección “ z ”

2.2.1 Postulados y suposiciones

Se presentan aquí las premisas que simplifican las ecuaciones, para poder obtener los diferentes perfiles que se encuentran en el flujo de sección transversal circular.

- 1) Flujo estacionario: Se da cuando las variables que caracterizan al flujo son constantes con respecto al tiempo.
- 2) Flujo laminar: Movimiento de un fluido ordenado, estratificado, suave y que se mueve en láminas paralelas sin entremezclarse. El cual se caracteriza en esta geometría de tener aproximadamente un ($Re < 2100$). (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001, pág. 46)
- 3) Fluido newtoniano.
- 4) Fluido incomprensible.
- 5) Se ignoran los efectos finales del tubo.

- 6) El fluido se trabaja como si fuera un medio continuo.
- 7) Condición de adherencia en las paredes: Implica, que si la pared no se mueve la velocidad del fluido en ella es cero y si esta se mueve el fluido se desplazará a la velocidad de esta superficie.
- 8) La consideración física que se realiza es que la velocidad únicamente se va a desarrollar en la dirección axial “z”, no rota ni existe una velocidad radial, por lo que ($\underline{v} = (v_r, v_\theta, v_z) = (0,0, v_z)$).

2.2.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes por postulados

A continuación, de la lista de ecuaciones retomamos la [Ecuación 1.1-3] la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas, la cual contiene flechas rojas con el número de postulado específico de simplificación que provoca la eliminación del término.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad \text{Ecuación 2.2-1}$$

Debido a las proposiciones, la ecuación de continuidad se reduce a un solo término. Pero, dado que el fluido es incomprensible, la densidad es constante y no depende del cambio de posición en la dirección “z”, por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad \text{Ecuación 2.2-2}$$

La ecuación final es:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{Ecuación 2.2-3}$$

Este resultado final, revela que la velocidad no depende de la dirección “z”, ya que está es igual a cero, por tanto ($v_z \neq v_z(z)$), pero si no depende de “z” tiene que depender o de la dirección “r” o de la dirección “θ”.

$$v_z = v_z(r, \theta) \qquad \text{Ecuación 2.2-4}$$

Dado que no hay vorticidad, ni gradientes de presión en la dirección “θ”, en consecuencia, la velocidad va a depender únicamente de la dirección “r”. En pocas palabras, existe una sola velocidad para cada punto que se tome sobre “z” y esta permanece constante, pero al moverse en las direcciones “r”, la velocidad va ir cambiando, es decir, depende de “r”.

$$v_z = v_z(r) \qquad \text{Ecuación 2.2-5}$$

El resultado de la ecuación de continuidad [*Ecuación 2.2-3*], proporciona un nuevo supuesto, que se utilizará más adelante para simplificar y eliminar términos y es:

- 9) La velocidad axial (v_z), no depende de las coordenadas “θ” y “z”. Entonces, la derivada de la velocidad axial (v_z), con respecto a cualquiera de estas dos coordenadas “θ” ó “z”, es igual a cero ($\frac{\partial v_z}{\partial \theta} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$).

Se prosigue con aclarar el concepto de la presión y las modificaciones que se hacen en las ecuaciones cantidad de momentum.

La presión total en realidad es la suma de una presión hidrostática (la presión que existiría si estuviera estancado el fluido) y la presión dinámica (la que mueve el fluido), en consecuencia, un fluido en reposo la presión dinámica es cero. Para un conducto horizontal, la presión en el fondo del canal es ligeramente mayor que la parte superior. Sin embargo, no hay gradiente de presión dinámica, ni en el fondo, ni en la superficie del tubo y despreciando la presión hidrostática el resultado final llega a ser casi exacto.

Un cambio para evitar la necesidad de calcular las componentes de la aceleración de la gravedad (g) en coordenadas cilíndricas, es presentar a la ecuación de momentum con la presión modificada y así obtenemos una solución válida para cualquier orientación del eje del tubo. Esta presión modificada es ($\phi = P + \rho gh$) donde (h) es la altura de algún plano arbitrario dado. (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001, pág. 56)

Se procede con la eliminación de términos en la ecuación de momentum en cada una de las direcciones, por las suposiciones establecidos al comienzo. Iniciando la eliminación de la ecuación en dirección “r”:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) =$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right]$$

Ecuación 2.2-6

Ecuación de momentum con dirección “r” resultante:

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

Ecuación 2.2-7

Esta última ecuación muestra que la presión modificada no varía ni depende de la posición en “r”.

Eliminación de términos de la ecuación de momentum en la dirección “ θ ” por postulados establecidos:

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) =$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

Ecuación 2.2-8

Ecuación de momentum en la dirección “ θ ” resultante:

$$0 = \frac{\partial \wp}{\partial \theta} \quad \text{Ecuación 2.2-9}$$

Esta última ecuación muestra que la presión modificada no varía ni depende de la posición en “ θ ”

Eliminación de términos de la ecuación de movimiento en dirección “ z ” por postulados establecidos

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}^{(1)} + v_r \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial r}}^{(8)} + v_\theta \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}}^{(8)} + v_z \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}^{(9)} \right) =$$

$$-\frac{\partial \wp}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.2-10}$$

Ecuación de momentum en dirección “ z ” resultante de la eliminación por postulados

$$-\frac{\partial \wp}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad \text{Ecuación 2.2-11}$$

La [Ecuación 2.2-11] de momentum en la dirección “ z ” sería la ecuación a resolver, para obtener $v_z(r)$.

2.2.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad

La [Ecuación 2.2-11] señala que la presión modificada (\wp) es una función que solo depende de (z) y por el postulado (9) la velocidad (v_z) es una función que solo depende de (r), por lo tanto, esta ecuación puede ser sustituida por derivadas ordinarias.

Así mismo, en la [Ecuación 2.2-11], la única forma en que la función de la presión más la función de la velocidad sea igual a cero es que cada función individual sea una constante (k_0) y por consiguiente esta se reduce a:

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = \frac{\partial \wp}{\partial z} = k_0 \quad \text{Ecuación 2.2-12}$$

Y con ello, cada término puede ser separado en dos ecuaciones:

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = k_0 \quad \text{Ecuación 2.2-13}$$

$$\frac{d\wp}{dz} = k_0$$

Se integra la presión de la [Ecuación 2.2-13] por separación de variables, como:

$$\int d\wp = k_0 \int dz \quad \text{Ecuación 2.2-14}$$

$$\wp = k_0 \cdot z + k_1 \quad \text{Ecuación 2.2-15}$$

Las dos constantes de integración pueden determinarse a partir de las condiciones de frontera, las cuales se indican a continuación:

$$\text{C.F.1:} \quad \text{En } z = 0 \quad \wp = \wp_0 \quad \text{Ecuación 2.2-16}$$

$$\text{C.F.2:} \quad \text{En } z = L \quad \wp = \wp_L \quad \text{Ecuación 2.2-17}$$

A partir de la C.F.1:

$$\wp_0 = k_0 \cdot (0) + k_1 \rightarrow k_1 = \wp_0 \quad \text{Ecuación 2.2-18}$$

A partir de C.F.2:

$$\wp_L = k_0 \cdot (L) + \wp_0 \rightarrow k_0 = \frac{\wp_L - \wp_0}{L} \quad \text{Ecuación 2.2-19}$$

Con el resultado de la ecuación anterior, la [Ecuación 2.2-12] puede ser escrita como:

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] = k_0 = \frac{\rho_L - \rho_0}{L} \quad \text{Ecuación 2.2-20}$$

Se ordenan los términos:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{L} \right) r \quad \text{Ecuación 2.2-21}$$

Se separan variables y se integra (Teorema de variables separables):

$$\int d \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{L} \right) \int r \, dr \quad \text{Ecuación 2.2-22}$$

$$r \frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{L} \right) \frac{1}{2} r^2 + k_2 \quad \text{Ecuación 2.2-23}$$

Se ordenan los términos:

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{L} \right) \frac{1}{2} r + \frac{k_2}{r} \quad \text{Ecuación 2.2-24}$$

Se separan variables y se integra (Teorema de variables separables)

$$\int dv_z = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{L} \right) \int r \, dr + k_2 \int \frac{1}{r} \, dr \quad \text{Ecuación 2.2-25}$$

$$v_z = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{L} \right) \frac{1}{2} r^2 + k_2 \ln(r) + k_3 \quad \text{Ecuación 2.2-26}$$

Las dos constantes de integración pueden determinarse a partir de las condiciones de frontera, aplicando la suposición de adherencia.

$$\text{C.F.3:} \quad \text{En } r = R \quad v_z = 0 \quad \text{Ecuación 2.2-27}$$

$$\text{C.F.4:} \quad \text{En } r = 0 \quad v_z = \text{Finita (que es medible)} \quad \text{Ecuación 2.2-28}$$

A partir de C.F.3:

$$0 = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{L} \right) R^2 + k_2 \ln R + k_3 \quad \text{Ecuación 2.2-29}$$

A partir de C.F.4:

$$v_z(\text{Finita}) = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{L} \right) (0)^2 + k_2 \ln(0) + k_3 \quad \text{Ecuación 2.2-30}$$

El logaritmo natural de "0" no existe, entonces, para que no exista esta indeterminación la constante (k_2) debe valer "cero", de esta manera resulta la [Ecuación 2.2-29] de la forma:

$$0 = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{L} \right) R^2 + (0) \ln R + k_3 \quad \rightarrow \quad k_3 = - \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{L} \right) R^2 \quad \text{Ecuación 2.2-31}$$

La constante (k_3) se introducen en la ecuación [Ecuación 2.2-26] y (k_2) se elimina:

$$v_z = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{L} \right) (r)^2 - \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{L} \right) R^2 \quad \text{Ecuación 2.2-32}$$

Se simplifica y queda como:

$$v_z = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{L} \right) [r^2 - R^2] \quad \text{Ecuación 2.2-33}$$

Se multiplica por $\left(\frac{R^2}{R^2}\right)$

$$v_z = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{4\mu L}\right) R^2 \left[\frac{r^2}{R^2} - 1\right] \quad \text{Ecuación 2.2-34}$$

La diferencial de presión se abrevia mediante $(\Delta\rho = \rho_L - \rho_0)$ resultando:

$$v_z = \left(\frac{\Delta\rho}{L}\right) R^2 \left[\frac{r^2}{R^2} - 1\right] \quad \text{Ecuación 2.2-35}$$

Se multiplica por $\left(\frac{-1}{-1}\right)$

$$v_z = \frac{(-\Delta\rho)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad \text{Ecuación 2.2-36}$$

Se observa que para un fluido newtoniano incomprensible, flujo laminar y en un tubo de sección transversal circular, la distribución de velocidad cambia con el cuadrado del radio, por tanto es parabólico. Se percibe además, que la velocidad en la dirección axial "z", existe debido a un gradiente de presiones $\left(\frac{\Delta\rho}{L}\right)$. Además, la relación entre los radios se encuentra acotada entre cero y uno $\left(\frac{r}{R} \in [0,1]\right)$.

2.2.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades

Una vez que se ha establecido el perfil de velocidad, es posible obtener varias cantidades derivadas de este. Se presentan cinco propiedades derivadas, las cuales son muy utilizadas en el ámbito industrial.

A) La velocidad máxima

La velocidad máxima en un flujo dentro de un tubo ocurre para $r = 0$, sustituyéndolo resulta:

$$v_{z(\max)} = \frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \left[1 - \frac{0^2}{R^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.2-37}$$

$$v_{z(\max)} = \frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \quad \text{Ecuación 2.2-38}$$

Donde el perfil de velocidades se puede representar como:

$$v_z = v_{z(\max)} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \text{Ecuación 2.2-39}$$

B) El flujo volumétrico

El flujo volumétrico (Q) se define como la integral de superficie total de la velocidad.

$$Q = \int_s \underline{v} \cdot \underline{n} \, ds \quad \text{Ecuación 2.2-40}$$

Sustituyendo la velocidad de la [Ecuación 2.2-26]

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^R (v_z) r \, dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^R (v_z) r \, dr = 2\pi \int_0^R \frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r \, dr \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2.2-41}$$

La manera de resolver la integral es haciendo un cambio de variable donde la variable (r) y la longitud característica (R) es intercambiada por la variable adimensional (ξ) como sigue

$$\xi = \frac{r}{R} \quad \rightarrow \quad r = R\xi \quad \rightarrow \quad dr = Rd\xi \quad \text{Ecuación 2.2-42}$$

Los límites de integración van desde cero a uno y se transforman como:

$$\xi = \frac{r}{R}; \quad \text{Si } r = 0 \rightarrow \xi = 0, \quad \text{Si } r = R \rightarrow \xi = 1 \quad \text{Ecuación 2.2-43}$$

La sustitución en la integral de la [Ecuación 2.2-41] es:

$$Q = 2\pi \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r \, dr = \left(\frac{\pi(-\Delta\phi)R^2}{2\mu L} \right) \int_0^1 [1 - \xi^2] R\xi \, Rd\xi \quad \text{Ecuación 2.2-44}$$

Se ordena, se integra y se sustituyen los límites, para obtener el flujo volumétrico

$$Q = \left(\frac{\pi(-\Delta\phi)R^2}{2\mu L} \right) \int_0^1 [\xi - \xi^3] R^2 d\xi = \frac{\pi(-\Delta\phi)R^4}{2\mu L} \left[\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi^4 \right]_0^1 \quad \text{Ecuación 2.2-45}$$

$$Q = \frac{\pi(-\Delta\phi)R^4}{2\mu L} \left[\left(\frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{4}1^4 \right) - \left(\frac{1}{2}0^2 - \frac{1}{4}0^4 \right) \right] \quad \text{Ecuación 2.2-46}$$

$$Q = \frac{\pi(-\Delta\phi)R^4}{8\mu L} \quad \text{Ecuación 2.2-47}$$

Esta ecuación es conocida como la ley de Hagen-Poiseuille

C) La velocidad promedio

La velocidad promedio se define como el cociente del flujo volumétrico entre el área. Una vez que se tiene el flujo volumétrico [Ecuación 2.2-47], solo es cuestión de integrar el radio sobre toda la circunferencia del tubo, para obtener el área y dividir como:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z \cdot r \, dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr d\theta} = \frac{\left(\frac{\pi(-\Delta\phi)R^4}{8\mu L}\right)}{2\pi \int_0^R r \, dr d\theta} = \frac{\left(\frac{\pi(-\Delta\phi)R^4}{8\mu L}\right)}{2\pi \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R} = \frac{\left(\frac{\pi(-\Delta\phi)R^4}{8\mu L}\right)}{\pi R^2}$$

Ecuación 2.2-48

$$\langle v_z \rangle = \frac{(-\Delta\phi)R^2}{8\mu L}$$

La relación entre la velocidad promedio y la velocidad máxima, es que es dos veces más grande la velocidad máxima que la velocidad promedio

$$\frac{\langle v_z \rangle}{v_{z(max)}} = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{8\mu L}\right) \frac{4\mu L}{(\Delta\phi)R^2} = \frac{4}{8}$$

Ecuación 2.2-49

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{2} v_{z(max)}$$

Ecuación 2.2-50

También el flujo volumétrico puede obtenerse como:

$$Q = (\langle v_z \rangle)(\text{Área}) = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{8\mu L}\right) (\pi R^2) = \frac{(-\Delta\phi)\pi R^4}{L8\mu}$$

Ecuación 2.2-51

D) Flujo másico

Si se realiza el producto de la densidad por el flujo volumétrico, se obtiene el flujo másico:

$$W = \rho * Q = \frac{\rho(-\Delta\phi)\pi R^4}{8\mu L}$$

Ecuación 2.2-52

E) La magnitud del esfuerzo cortante

El esfuerzo cortante es una variable reológica de un fluido, que muestra la relación que existe entre el sistema de fuerzas externas y las respuestas a la aplicación de estas fuerzas sobre un área. Describiendo consigo la distribución de tensiones y los esfuerzos internos del medio continuo. Además, de ser uno de los criterios esenciales en el ámbito industrial, en el desarrollo de productos, así como en el control de calidad, tratamientos de comportamientos mecánicos (bombeo, mezclado, embazado), etc. Se representa por medio del tensor de esfuerzos ($\underline{\tau}$) (con componentes (τ_{ij}) que simboliza la fuerza en dirección "j" sobre un área unitaria perpendicular a la dirección "i").

Debido al perfil de velocidades ($v_z(r)$) de la [Ecuación 2.2-36], y a la ecuación constitutiva para fluidos newtonianos [Ecuación 2.1-45] se puede obtener el tensor de esfuerzos ($\underline{\tau}$).

Retomando el perfil de velocidades, dado por la [Ecuación 2.2-36]

$$v_z = \frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \quad \text{Ecuación 2.2-53}$$

Los componentes del vector de velocidades están expresados como:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.2-54}$$

Debido a los postulados (8 y 9) el gradiente de velocidades se transforma en:

$$\nabla \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{r,\theta,z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{r,\theta,z} \quad \text{Ecuación 2.2-55}$$

Se resuelve y se presenta el gradiente de velocidad con respecto a “r”:

$$v_z = \frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] = \left[\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} - \frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \left(\frac{1}{R^2}\right) (r^2) \right] \quad \text{Ecuación 2.2-56}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\Delta\phi r}{2\mu L} \quad \text{Ecuación 2.2-57}$$

Se procede a insertar la expresión obtenida [Ecuación 2.2-57] en el tensor de rapidez de deformación simétrico, de la siguiente manera: (Sámano Tirado & Mihir, 2009)

$$\underline{\dot{\gamma}} = (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\Delta\phi r}{2\mu L} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta\phi r}{2\mu L} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.2-58}$$

Tal que finalmente el esfuerzo cortante o ecuación constitutiva para fluidos newtonianos [Ecuación 2.1-45] es de la forma:

$$\underline{\tau} = -\mu (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) = -\mu \underline{\dot{\gamma}} = -\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\Delta\phi r}{2\mu L} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta\phi r}{2\mu L} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.2-59}$$

Finalmente:

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-\Delta\phi r}{2L} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\Delta\phi r}{2L} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.2-60}$$

El único término diferente de cero es cortante, dado por la siguiente expresión ($\tau_{rz} = \tau_{zr} = \frac{(-\Delta\phi)r}{2L}$), que indica que el flux de momentum se mueve bajo un gradiente de presión. Además cabe notar, que el esfuerzo varía linealmente a medida que cambia "r".

Experimentalmente la cantidad que se mide es la magnitud del esfuerzo cortante en la pared y la expresión en ese punto está dado por:

$$\tau_{rz}(R) = \tau_{wall,w} = \frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \quad \text{Ecuación 2.2-61}$$

Cabe notar, que en la pared, es donde se encuentra el valor máximo de esfuerzo cortante y va disminuyendo conforme el radio disminuye, contrario al comportamiento del esfuerzo cortante, el perfil de velocidades es un máximo en un radio igual a cero y mínimo en la pared.

El perfil de velocidades y el flujo volumétrico pueden ser calculados con un simple balance de fuerzas, en un elemento definido del fluido y tomando ventaja de la simetría. Pero en la presente discusión, el método de balances de fuerzas de las ecuaciones de Navier-Stokes, exhibe varios detalles teóricos, con ello una mejor comprensión del problema. Además de obtener un método, en el cual disminuyen las probabilidades de errores.

F) Coeficiente de fricción

En un flujo de fluido, la pérdida por fricción, es la pérdida de presión o cabeza que ocurre en un ducto debido a la viscosidad del fluido que ocasiona choques moleculares, que se encuentran en movimiento cerca de la superficie del ducto. Esta pérdida por fricción es de significativo interés económico, debido naturalmente a la pérdida de presión del fluido que está en movimiento. Depende de las propiedades físicas del sistema (rugosidad del ducto, viscosidad, velocidad del fluido, temperatura, etc.), donde el esfuerzo cortante juega un papel importante para determinar la fricción.

La ecuación fenomenológica de Darcy-Weisbach, la cual relaciona la pérdida de presión, debido al coeficiente o factor de fricción a lo largo de una longitud dada de tubería por la velocidad promedio del flujo de un fluido incompresible. Se quiere, por tanto, en este presente trabajo encontrar el factor de fricción derivado de esta ecuación.

La ecuación de Darcy-Weisbach:

$$\frac{\Delta\phi}{L} = \frac{f \rho v^2}{D \cdot 2} \quad \text{Ecuación 2.2-62}$$

Se despeja el factor de fricción y se realiza el álgebra correspondiente, con lo cual se encontrarán términos analizados con anterioridad como sigue:

$$f = \frac{\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right)}{\left(\frac{1}{D}\right)\left(\frac{\rho \langle v \rangle^2}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right) D}{\left(\frac{\rho \langle v \rangle^2}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{\Delta\phi}{L}\right) (2R)}{\left(\frac{\rho \langle v \rangle^2}{2}\right)} \quad \text{Ecuación 2.2-63}$$

Al multiplicar numerador y denominador por $\left(\frac{1}{4}\right)$ se obtiene:

$$f = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\Delta\phi 2R}{L}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\rho < v >^2}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{\Delta\phi R}{2L}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)(\rho < v >^2)} \quad \text{Ecuación 2.1-64}$$

Finalmente se obtiene el factor de fricción, el cual físicamente indica:

$$f = \frac{\tau_w}{\left(\frac{1}{8}\right)\rho < v >^2} = \frac{\text{Flux difusivo en la pared}}{\text{flux convectivo}} \quad \text{Ecuación 2.1-65}$$

A continuación, la representación gráfica del perfil parabólico de velocidades y lineal del esfuerzo cortante.

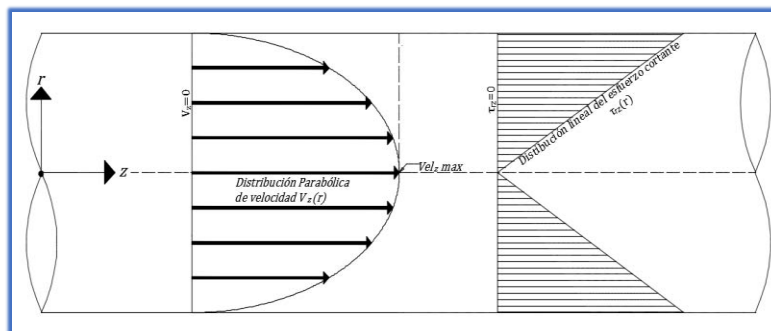


Figura 2.2-2 Distribución de velocidad y del esfuerzo cortante para el flujo que circula en dirección axial “z” en un tubo de sección transversal circular

2.3 FLUJO ENTRE DOS PAREDES PARALELAS PLANAS

Considere un fluido que se mueve en la dirección “ x ”, entre dos placas planas, horizontales y paralelas por la influencia de una diferencia de presión, con una longitud (L) y altura de ($2y_0$). Dada la geometría, la resolución de las ecuaciones se realiza en coordenadas cartesianas (x, y, z). (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001)

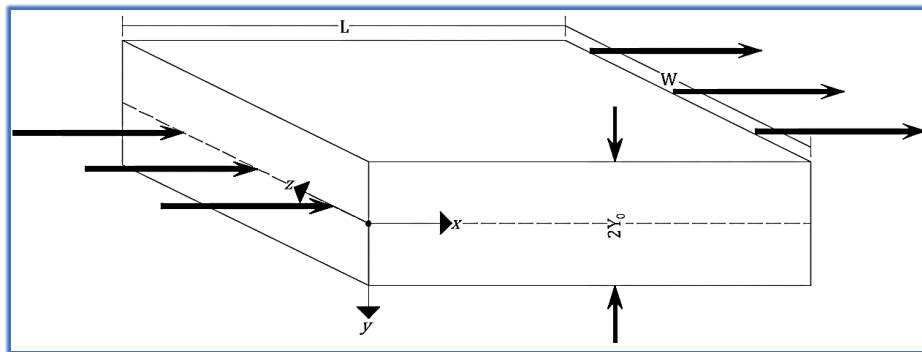


Figura 3.3-1 Flujo entre dos paredes planas en dirección “ x ” bajo el efecto de un gradiente de presión

2.3.1 Postulados y suposiciones

Se presentan aquí las premisas que simplifican las ecuaciones, para poder obtener los diferentes perfiles, que se encuentran en el flujo entre dos paredes planas.

- 1) Flujo estacionario.
- 2) Flujo laminar: con un Reynolds lo suficientemente bajo para conservar su carácter laminar.
- 3) Fluido newtoniano.
- 4) Fluido incompresible.
- 5) Se ignoran los efectos finales.
- 6) La longitud del ancho de las dos paredes se considera como infinito.
- 7) El fluido se trabaja como si fuera un medio continuo.

- 8) Condición de adherencia en la pared.
- 9) La velocidad únicamente se va a desarrollar en la dirección “x” las demás son cero $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v_x, 0, 0)$.

2.3.2 Reducción de términos de las ecuaciones continuidad y Navier-Stokes por postulados

A continuación se presenta la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas, la cual contiene flechas rojas con el número de postulado específico de simplificación que provoca la eliminación del término. Algunos de los postulados vienen implícitos en la ecuación a resolver que se escoja.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad \text{Ecuación 2.3-1}$$

Debido a las proposiciones, la ecuación de continuidad se reduce a un solo término. Pero, dado que el fluido es incomprensible, la densidad es constante y no depende del cambio de posición en la dirección “x”, por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = 0 \quad \text{Ecuación 2.3-2}$$

La ecuación final es:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \text{Ecuación 2.3-3}$$

Este resultado final, muestra que la velocidad no depende de la dirección “x”, ya que está es igual a cero, por tanto $(v_x \neq v_x(x))$, pero si no depende de “x” tiene que depender o de la dirección “y” o de la dirección “z”.

$$v_x = v_x(y, z) \quad \text{Ecuación 2.3-4}$$

Por física del problema, no hay movimiento en “z” . Entonces, la velocidad depende de la dirección “y”.

$$v_x = v_x(y) \quad \text{Ecuación 2.3-5}$$

El resultado de la ecuación de continuidad [Ecuación 2.3-3], proporciona un nuevo supuesto, que se utilizará más adelante para simplificar y eliminar términos y es:

- 10) La velocidad axial (v_x), no depende de las coordenadas “x” y “z”. Así que la derivada de la velocidad en dirección “x” con respecto a cualquiera de estas dos coordenadas “x” ó “z”, es igual a cero ($\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$).

Se procede con la eliminación de términos en la ecuación de momentum en cada una de las direcciones, por las suposiciones establecidos al comienzo. Iniciando la eliminación en la ecuación de momentum con dirección “x”.

Como se explicó con anterioridad, se presentan las ecuaciones de cantidad de momentum con la presión modificada ($\phi = P + \rho gh$) y así obtener la solución de la presión hidrostática válida para cualquier orientación. (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001, pág. 56)

Se iniciará con la eliminación de términos de la ecuación de momentum en la dirección “x” por postulados establecidos:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.3-6}$$

Ecuación de momentum en dirección “x” resultante:

$$0 = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.3-7}$$

Eliminación de términos en la ecuación de momentum en dirección “y” por postulados establecidos:

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.3-8}$$

Ecuación de momentum en dirección “y” resultante:

$$0 = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{Ecuación 2.3-9}$$

Esta última ecuación muestra que la presión modificada no varía ni depende de la posición en “y”. Aunque si existe presión hidrostática, esta no varía al estar incluida en la presión modificada.

Eliminación de términos en la ecuación de momentum en dirección “z” por postulados establecidos:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \phi}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.3-10}$$

Ecuación de momentum en dirección “z” resultante:

$$0 = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{Ecuación 2.3-11}$$

La presión modificada no varía ni depende la dirección "z".

La ecuación de momentum en dirección “x” [Ecuación 2.3-7], es la ecuación que se resuelve para obtener el perfil de velocidades $v_x(y)$.

2.3.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad

De la misma forma que se resuelve el problema para un tubo de sección transversal circular, la [Ecuación 2.3-7] se transforma en una ecuación diferencial ordinaria, donde cada término depende de una variable diferente.

Así mismo, en la [Ecuación 2.3-7], la única forma en que la función de la presión más la función de la velocidad sea igual a cero es que cada función individual sea una constante como por ejemplo (k_0) y por consiguiente esta se reduce a:

$$\mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right] = \frac{\partial \wp}{\partial x} = k_0 \quad \text{Ecuación 2.3-12}$$

Y con ello, cada término puede ser separado en dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right] &= k_0 \\ \frac{d\wp}{dx} &= k_0 \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2.3-13}$$

Se integra la presión modificada de la [Ecuación 2.3-13] por separación de variables:

$$\int \partial \wp = k_0 \int dx \quad \text{Ecuación 2.3-14}$$

$$\wp = k_0 \cdot x + k_1 \quad \text{Ecuación 2.3-15}$$

Las dos constantes de integración pueden determinarse a partir de las condiciones de frontera, las cuales se indican a continuación

$$\text{C.F.1:} \quad \text{En } x = 0 \quad \wp = \wp_0 \quad \text{Ecuación 2.3-16}$$

$$\text{C.F.2:} \quad \text{En } x = L \quad \wp = \wp_L \quad \text{Ecuación 2.3-17}$$

A partir de C.F.1:

$$\varphi_0 = k_0 \cdot (0) + k_1 \quad \rightarrow \quad k_1 = \varphi_0 \quad \text{Ecuación 2.3-18}$$

A partir de C.F.2:

$$\varphi_L = k_0 \cdot (L) + \varphi_0 \quad \rightarrow \quad k_0 = \frac{\varphi_L - \varphi_0}{L} \quad \text{Ecuación 2.3-19}$$

Con el resultado de la ecuación anterior, la [Ecuación 2.3-12] puede ser escrita como:

$$\mu \left[\frac{d^2 v_x}{dy^2} \right] = \frac{\varphi_L - \varphi_0}{L} = k_0 \quad \text{Ecuación 2.3-20}$$

Se ordena los términos:

$$\left[\frac{d^2 v_x}{dy^2} \right] = \left(\frac{\varphi_L - \varphi_0}{\mu L} \right) \quad \text{Ecuación 2.3-21}$$

Y se integra:

$$\int d \left(\frac{dv_x}{dy} \right) = \int \left(\frac{\varphi_L - \varphi_0}{\mu L} \right) dy \quad \text{Ecuación 2.3-22}$$

$$\frac{dv_x}{dy} = \left(\frac{\varphi_L - \varphi_0}{\mu L} \right) y + k_1 \quad \text{Ecuación 2.3-23}$$

La constante de integración puede determinarse debido a la existencia de un máximo:

$$\text{C.F.3:} \quad \text{En } y = 0 \quad \frac{dv_x}{dy} = 0 \quad \text{Ecuación 2.3-24}$$

A partir de la C.F.3:

$$0 = \left(\frac{\varrho_L - \varrho_0}{\mu L} \right) (0) + k_1 \quad \rightarrow \quad k_1 = 0 \quad \text{Ecuación 2.3-25}$$

$$\frac{dv_x}{dy} = \left(\frac{\varrho_L - \varrho_0}{\mu L} \right) y \quad \text{Ecuación 2.3-26}$$

Se integra la [Ecuación 2.3-26]:

$$\int dv_x = \left(\frac{\varrho_L - \varrho_0}{\mu L} \right) \int y dy \quad \text{Ecuación 2.3-27}$$

$$v_x = \left(\frac{\varrho_L - \varrho_0}{\mu L} \right) \frac{1}{2} y^2 + k_2 \quad \text{Ecuación 2.3-28}$$

La constante de integración puede determinarse a partir de la condición de frontera, donde la condición de adherencia es:

$$\text{C.F.4:} \quad \text{En } y = y_0 \quad v_x = 0 \quad \text{Ecuación 2.3-29}$$

A partir de la C.F.4:

$$0 = \left(\frac{\varrho_L - \varrho_0}{2\mu L} \right) y_0^2 + k_2 \quad k_2 = - \left(\frac{\varrho_L - \varrho_0}{2\mu L} \right) y_0^2 \quad \text{Ecuación 2.3-30}$$

Se sustituye la constante de integración (k_2) a la ecuación [Ecuación 2.3-28] como:

$$v_x = \left(\frac{\varrho_L - \varrho_0}{2\mu L} \right) (y)^2 - \left(\frac{\varrho_L - \varrho_0}{2\mu L} \right) y_0^2 \quad \text{Ecuación 2.3-31}$$

Se ordenan los términos:

$$v_x = \left(\frac{\varrho_L - \varrho_0}{2\mu L} \right) [y^2 - y_0^2] \quad \text{Ecuación 2.3-32}$$

Se multiplica por $\left(\frac{y_0^2}{y_0^2}\right)$

$$v_x = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{2\mu L}\right) y_0^2 \left[\frac{y^2}{y_0^2} - 1\right] \quad \text{Ecuación 2.3-33}$$

Y por $\left(\frac{-1}{-1}\right)$

$$v_x = \left(\frac{\rho_0 - \rho_L}{2\mu L}\right) y_0^2 \left[1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right] \quad \text{Ecuación 2.3-34}$$

Se ordenan y se simplifican términos:

$$v_x = \frac{(-\Delta\rho)y_0^2}{2\mu L} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] \quad \text{Ecuación 2.3-35}$$

Se observa, que la distribución de la velocidad para un flujo laminar incompresible y newtoniano entre dos paredes paralelas planas, es parabólico.

2.3.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades

Una vez que se ha establecido el perfil de velocidad, es posible obtener varias cantidades derivadas de éste, de las cuales se van a presentar cinco y que son muy utilizadas en el ámbito industrial.

A) La velocidad máxima

La velocidad máxima ocurre para $y = 0$:

$$v_{x(\max)} = \left(\frac{\rho_0 - \rho_L}{2\mu L}\right) y_0^2 \left[1 - \frac{0^2}{y_0^2}\right] \quad \text{Ecuación 2.3-36}$$

$$v_{x(\max)} = \frac{(-\Delta\rho)y_0^2}{2\mu L} \quad \text{Ecuación 2.3-37}$$

Donde el perfil de velocidades se puede representar como:

$$v_x = v_{x(max)} \left[1 - \frac{y^2}{y_0^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.3-38}$$

B) La velocidad promedio

La velocidad promedio se define como el cociente del flujo volumétrico y el área que existe entre las paredes, el desarrollo de las integrales de los dividendos es:

$$\langle v_x \rangle = \frac{Q}{(\text{Área})} = \frac{\int_0^w \int_0^{y_0} (v_x) dy dz}{\int_0^w \int_0^{y_0} dy dz} = \frac{\int_0^w \int_0^{y_0} v_{x(max)} \left[1 - \frac{y^2}{y_0^2} \right] dy dz}{\int_0^w \int_0^{y_0} dy dz} \quad \text{Ecuación 2.3-39}$$

$$= \frac{w \cdot v_{x(max)} \int_0^{y_0} \left[1 - \frac{y^2}{y_0^2} \right] dy}{w \int_0^{y_0} dy} = \frac{v_{x(max)} \left[y - \frac{y^3}{3y_0^2} \right]_0^{y_0}}{[y]_0^{y_0}} = \frac{v_{x(max)} \left[y_0 - \frac{y_0^3}{3y_0^2} \right]_0^{y_0}}{y_0} \quad \text{Ecuación 2.3-40}$$

$$= \frac{v_{x(max)} \left[y_0 - \frac{1}{3} y_0 \right]}{y_0} = \frac{v_{x(max)} \left[\frac{2}{3} y_0 \right]}{y_0} \quad \text{Ecuación 2.3-41}$$

La expresión de la velocidad promedio es:

$$\langle v_x \rangle = \frac{2}{3} v_{x(max)} = \frac{(-\Delta\phi) y_0^2}{3\mu L} \quad \text{Ecuación 2.3-42}$$

La relación entre la velocidad promedio y la velocidad máxima, es dos tercios.

$$\frac{\langle v_x \rangle}{v_{x(max)}} = \frac{2}{3} \quad \text{Ecuación 2.3-43}$$

C) El flujo volumétrico

El flujo volumétrico se define como la integral de superficie de la velocidad, pero también se puede obtener del despeje de la [Ecuación 2.3-39], como a continuación:

$$Q = (\text{Área})(\langle v_x \rangle) \quad \text{Ecuación 2.3-44}$$

$$Q = \left(2 \int_0^w \int_0^{y_0} dydz\right) \langle v_x \rangle = \left(2w \int_0^{y_0} dy\right) \langle v_x \rangle = (2wy_0) \langle v_x \rangle \quad \text{Ecuación 2.3-45}$$

Se sustituye la velocidad promedio:

$$Q = (2wy_0) \left(\frac{(-\Delta\phi)y_0^2}{3\mu L}\right) \quad \text{Ecuación 2.3-46}$$

El flujo volumétrico es:

$$Q = \frac{2w(-\Delta\phi)y_0^3}{3\mu L} \quad \text{Ecuación 2.3-47}$$

D) Flujo másico

Si se realiza el producto de la densidad por el flujo volumétrico, se obtiene el flujo másico:

$$W = \rho * Q = \frac{\rho 2w\Delta\phi y_0^3}{3\mu L} \quad \text{Ecuación 2.3-48}$$

E) La magnitud del esfuerzo cortante

Con la [Ecuación 2.3-35] del perfil de velocidades y la ecuación constitutiva para fluidos newtonianos [Ecuación 2.1-45] es posible calcular la magnitud del tensor de esfuerzos.

Recordando el perfil de velocidades [Ecuación 2.3-35]:

$$v_x = \frac{(-\Delta\phi)y_0^2}{2\mu L} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] \quad \text{Ecuación 2.3-49}$$

Los componentes del vector de velocidades están expresados como:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-\Delta\phi)y_0^2}{2\mu L} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.3-50}$$

Dados los postulados (9 y 10) al comienzo del problema, el gradiente de velocidades toma forma de:

$$\underline{\nabla v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{x,y,z} \quad \text{Ecuación 2.3-51}$$

Entonces, gradiente de velocidad con respecto a “y” es:

$$v_x = \frac{(-\Delta\phi)y_0^2}{2\mu L} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] = \left[\frac{(-\Delta\phi)y_0^2}{2\mu L} - \frac{(-\Delta\phi)y_0^2}{2\mu L} \left(\frac{1}{y_0^2} \right) (y^2) \right] \quad \text{Ecuación 2.3-52}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \left(\frac{(\Delta\phi) y}{\mu L} \right) \quad \text{Ecuación 2.3-53}$$

Se procede a sustituir el resultado obtenido en el tensor de velocidades de deformación simétrico, el cual se representa de la siguiente manera:

$$\underline{\dot{\gamma}} = (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta\phi y}{\mu L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta\phi y}{\mu L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta\phi y}{\mu L} & 0 \\ \frac{\Delta\phi y}{\mu L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.3-54}$$

Donde la forma del tensor de esfuerzos o ecuación constitutiva para fluidos newtonianos [Ecuación 2.1-45] tiene la forma de:

$$\underline{\tau} = -\mu (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) = -\mu \underline{\dot{\gamma}} = -\mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{(\Delta\phi) y}{\mu L} & 0 \\ \frac{(\Delta\phi) y}{\mu L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.3-55}$$

Finalmente:

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(-\Delta\phi) y}{L} & 0 \\ \frac{(-\Delta\phi) y}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.3-56}$$

El único término diferente de cero es cortante, dado por la siguiente expresión ($\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{(-\Delta\phi) y}{L}$) e indica que el flux de momentum se mueve bajo un gradiente de presión de manera lineal a medida que cambia "y".

Experimentalmente la cantidad que se mide es la magnitud del esfuerzo cortante en la pared y la expresión en ese punto está dado por:

$$\tau_{yx}(y_0) = \tau_{wall,w} = \frac{(-\Delta\phi) y_0}{L} \quad \text{Ecuación 2.3-57}$$

F) Coeficiente de fricción

Partiendo de que el coeficiente de fricción está relacionado con la pérdida de presión que ocurre debido a la viscosidad y fricción cerca de la superficie del ducto. Entonces, el esfuerzo cortante en la pared tiene un papel importante para determinar el coeficiente de fricción y se determina como:

$$f = \frac{\tau_w}{\rho \langle v \rangle^2} = \frac{\text{Flux difusivo en la pared}}{\text{Flux convectivo}} \quad \text{Ecuación 2.3-58}$$

$$f = \frac{\frac{(-\Delta\phi)y_0}{L}}{\rho} = \frac{\frac{(-\Delta\phi)y_0}{L}}{\rho \left(\frac{(-\Delta\phi)y_0^2}{3\mu L} \right)^2} = \frac{(3\mu)^2 L}{\rho(-\Delta\phi)y_0^3} \quad \text{Ecuación 2.3-58}$$

Habiendo obtenido las cinco propiedades derivadas del perfil de velocidad. A continuación, la representación gráfica del perfil parabólico de velocidades y el perfil del esfuerzo cortante lineal en un flujo entre dos paredes planas.

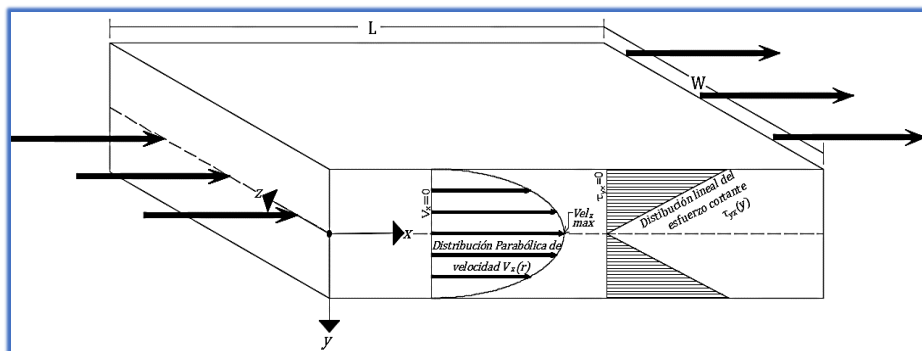


Figura 2.3-2 Distribución de velocidad y esfuerzo cortante para un flujo que circula en dirección “x” entre dos paredes paralelas planas

2.4 FLUJO AXIAL EN UNA REGIÓN ANULAR ENTRE DOS CILINDROS COAXIALES

Considere un fluido que se mueve entre dos cilindros coaxiales verticales, con una longitud (L), de radio interno (kR) y de radio externo (R). El líquido fluye hacia arriba en la dirección “ z ”, en contra de la acción de la gravedad, por la influencia de una diferencia de presión. Dado el tipo de geometría, la resolución de las ecuaciones se realiza en coordenadas cilíndricas (r, θ, z). (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001, pág. 54)

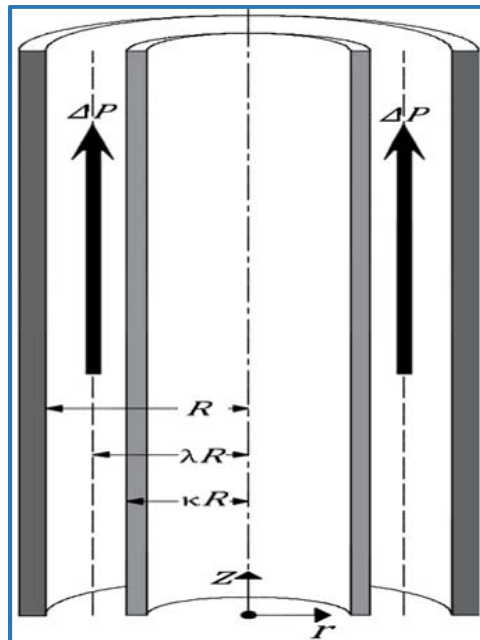


Figura 2.4-1 Flujo axial en una región anular entre dos cilindros coaxiales que circula por efecto de un gradiente de presión

2.4.1 Postulados y suposiciones

Se presentan aquí las premisas que simplifican las ecuaciones, para poder obtener los diferentes perfiles, que se encuentran en el flujo axial en una región anular entre dos cilindros coaxiales.

- 1) Flujo estacionario.
- 2) Flujo laminar: con un Reynolds lo suficientemente bajo para conservar su carácter laminar
- 3) Fluido newtoniano.
- 4) Fluido incompresible.
- 5) Se ignoran los efectos finales.
- 6) El fluido se trabaja como si fuera un medio continuo.
- 7) Condición de adherencia.
- 8) La velocidad únicamente se va a desarrollar en la dirección "z", las demás son cero ($v = (v_r, v_\theta, v_z) = (0,0, v_z)$).

2.4.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes por postulados

A continuación, la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas, la cual contiene flechas rojas con el número de postulado específico de simplificación que provoca la eliminación del término. Algunos de los postulados vienen implícitos en la ecuación a resolver que se escoja.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad \text{Ecuación 2.4-1}$$

Debido a las proposiciones, la ecuación de continuidad se reduce a un solo término. Pero, dado que el fluido es incompresible, la densidad es constante y por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad \text{Ecuación 2.4-2}$$

Se obtiene entonces:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{Ecuación 2.4-3}$$

Como se expuso para la [Ecuación 2.3-4] y [Ecuación 2.2-4], la velocidad ($v_z \neq v_z(z)$), pero si no depende de “z” depende o de la dirección “r” o de la dirección “θ”.

$$v_z = v_z(r, \theta) \quad \text{Ecuación 2.4-4}$$

Pero por física, la velocidad va a depender únicamente de la dirección “r”.

$$v_z = v_z(r) \quad \text{Ecuación 2.4-5}$$

El resultado de la ecuación de continuidad [Ecuación 2.4-3], proporciona un nuevo supuesto, que se utilizará más adelante para simplificar y eliminar términos y es:

- 9) La velocidad axial (v_z), no depende de las coordenadas “θ” y “z”. Así que la derivada de la velocidad en dirección “z” con respecto a cualquiera de estas dos coordenadas “θ” ó “z”, es igual a cero. ($\frac{dv_z}{d\theta} = \frac{dv_z}{dz} = 0$).

Se procede con la eliminación de términos en la ecuación de momentum en cada una de las direcciones, por las suposiciones establecidos al comienzo. Iniciando la eliminación en la ecuación de momentum con dirección “r”.

Como se explicó con anterioridad, se presentan las ecuaciones de cantidad de momentum con la presión modificada ($\wp = P + \rho gh$). (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001, pág. 56)

Se inicia con la eliminación de términos de la ecuación de momentum en la dirección “r” por postulados establecidos:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \quad \text{Ecuación 2.4-6}$$

$$-\frac{\partial \wp}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right]$$

Ecuación de momentum en dirección “r”:

$$0 = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \text{Ecuación 2.4-7}$$

Esta ecuación muestra que la presión modificada no varía ni depende de la posición en “r”.

Eliminación de términos de la ecuación de momentum en dirección “θ” por postulados establecidos:

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) =$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad \text{Ecuación 2.4-84}$$

Ecuación de momentum en dirección “θ” resultante

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad \text{Ecuación 2.4-9}$$

Esta última ecuación muestra que la presión modificada no varía ni depende de la posición en “θ”.

Eliminación de términos de la ecuación de momentum en dirección “z” por postulados establecidos:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) =$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.4-105}$$

Ecuación de momentum en dirección “z” resultante de la eliminación por postulados:

$$-\frac{\partial \wp}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad \text{Ecuación 2.4-11}$$

La ecuación de momentum en dirección “z” [Ecuación 2.4-11], es la que se resuelve para obtener el perfil ($v_z = v_z(r)$).

2.4.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad

De la misma forma que se resuelve el problema para el flujo un tubo de sección transversal circular, la [Ecuación 2.4 -11] se transforma en una ecuación diferencial ordinaria, donde cada término depende de una variable diferente y para que se cumpla que la suma de dos funciones sean cero cada función individual es una constante (k_0) y por consiguiente esta se reduce a:

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] = \frac{d\wp}{dz} = k_0 \quad \text{Ecuación 2.4-12}$$

Y con ello, cada término puede ser separado en dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] &= k_0 \\ \frac{d\wp}{dz} &= k_0 \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2.4-13}$$

Se integra la presión modificada de la [Ecuación 2.4-13], como:

$$\int \partial \wp = k_0 \int dz \quad \text{Ecuación 2.4-14}$$

$$\wp = k_0 \cdot z + k_1 \quad \text{Ecuación 2.4-15}$$

Las dos constantes de integración pueden determinarse a partir de las condiciones de frontera, las cuales se indican a continuación:

$$\text{C.F.1:} \quad \text{En } z = 0 \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{Ecuación 2.4-16}$$

$$\text{C.F.2:} \quad \text{En } z = L \quad \varphi = \varphi_L \quad \text{Ecuación 2.4-17}$$

A partir de la C.F.1:

$$\varphi_0 = k_0 \cdot (0) + k_1 \quad \rightarrow \quad k_1 = \varphi_0 \quad \text{Ecuación 2.4-18}$$

A partir de la C.F.2:

$$\varphi_L = k_0 \cdot (L) + \varphi_0 \quad \rightarrow \quad k_0 = \frac{\varphi_L - \varphi_0}{L} \quad \text{Ecuación 2.4-19}$$

Con el resultado de la ecuación anterior, la [Ecuación 2.4-12] puede ser escrita como:

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] = k_0 = \frac{\varphi_L - \varphi_0}{L} \quad \text{Ecuación 2.4-20}$$

Se ordenan los términos:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \left(\frac{\varphi_L - \varphi_0}{\mu L} \right) r \quad \text{Ecuación 2.4-21}$$

Se integra:

$$\int d \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \left(\frac{\varphi_L - \varphi_0}{\mu L} \right) \int r \, dr \quad \text{Ecuación 2.4-22}$$

$$r \frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{\varphi_L - \varphi_0}{\mu L} \right) \frac{1}{2} r^2 + k_2 \quad \text{Ecuación 2.4-23}$$

Se simplifica:

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{\mu L}\right) \frac{1}{2} r + \frac{k_2}{r} \quad \text{Ecuación 2.4-24}$$

La constante (k_2) no puede determinarse inmediatamente, ya que no se cuenta con información de cómo cambia la velocidad con respecto a "r". Todo lo que se sabe es que habrá un máximo en la curva de velocidad en algún plano ($r = \lambda R$) (constante por el momento desconocida).

La derivada de una función en un punto máximo es siempre cero ($\frac{dv_z}{dr} = 0$). Por lo tanto, la constante de integración puede determinarse a través de la condición de este máximo en algún plano entre los dos tubos como:

$$\text{C.F.3:} \quad \text{En } \frac{dv_z}{dr} = 0 \quad r = \lambda R \quad \text{Ecuación 2.4-25}$$

A partir de C.F.3:

$$0 = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{2\mu L}\right) \lambda R + \frac{k_2}{\lambda R} \rightarrow k_2 = -\left(\frac{\rho_L - \rho_0}{2\mu L}\right) (\lambda R)^2 \quad \text{Ecuación 2.4-26}$$

Se sustituye la constante (k_2) en la [Ecuación 2.4-26]:

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{2\mu L}\right) r + \frac{\left[-\left(\frac{\rho_L - \rho_0}{2\mu L}\right) (\lambda R)^2\right]}{r} \quad \text{Ecuación 2.4-27}$$

Se ordenan los términos:

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{2\mu L}\right) r - \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{2\mu L}\right) \frac{(\lambda R)^2}{r} = \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{2\mu L}\right) \left[r - \frac{(\lambda R)^2}{r}\right] \quad \text{Ecuación 2.4-28}$$

Se multiplica por $\left(\frac{R}{R}\right)$:

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{\varphi_L - \varphi_0}{2\mu L}\right) \left(\frac{R}{R}\right) \left[r - \frac{(\lambda R)^2}{r}\right] \quad \text{Ecuación 2.4-29}$$

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R}{2\mu L}\right) \left[\frac{r}{R} - \frac{\lambda^2 R}{r}\right] \quad \text{Ecuación 2.4-30}$$

La diferencia entre la [Ecuación 2.4-30] y la [Ecuación 2.4-24], es que la constante de integración (k_2) se ha eliminado a favor de una constante diferente (λ). La ventaja sería conocer el significado geométrico de (λ).

Al integrar por variables separadas se obtiene:

$$\int dv_z = \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R}{2\mu L}\right) \int \left[\frac{r}{R} - \frac{\lambda^2 R}{r}\right] dr = \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R}{2\mu L}\right) \left[\int \frac{r}{R} dr - \int \frac{\lambda^2 R}{r} dr\right] \quad \text{Ecuación 2.4-31}$$

Resulta:

$$v_z = \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R}{2\mu L}\right) \left[\left(\frac{1}{R}\right) \frac{r^2}{2} - \lambda^2 R \ln(r) + k\right] \quad \text{Ecuación 2.4-32}$$

Se multiplica por $\left(\frac{2}{2}\right)$ y por $\left(\frac{R}{R}\right)$:

$$v_z = \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R}{2\mu L}\right) \left(\frac{2}{2}\right) \left(\frac{R}{R}\right) \left[\left(\frac{1}{R}\right) \frac{r^2}{2} - \lambda^2 R \ln(r) + k\right] \quad \text{Ecuación 2.4-33}$$

Se ordenan términos:

$$v_z = \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R^2}{4\mu L}\right) \left[\left(\frac{2}{R}\right) \left(\frac{1}{R}\right) \frac{r^2}{2} - \left(\frac{2}{R}\right) \lambda^2 R \ln(r) + \left(\frac{2}{R}\right) k\right] \quad \text{Ecuación 2.4-34}$$

Donde $\left(\left(\frac{2}{R}\right)k = cte = k\right)$, por lo tanto:

$$v_z = \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R^2}{4\mu L}\right) \left[\frac{r^2}{R^2} - 2\lambda^2 \ln(r) + k\right] \quad \text{Ecuación 2.4-35}$$

Se suma y se resta $(2\lambda^2 \ln(R))$, como estrategia para reducir términos:

$$v_z = \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R^2}{4\mu L}\right) \left[\frac{r^2}{R^2} - 2\lambda^2 \ln(r) + (2\lambda^2 \ln(R) - 2\lambda^2 \ln(R)) + k\right] \quad \text{Ecuación 2.4-36}$$

Se ordenan términos:

$$v_z = \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R^2}{4\mu L}\right) \left[\frac{r^2}{R^2} - 2\lambda^2 \ln(r) - 2\lambda^2 \ln(R) + 2\lambda^2 \ln(R) + k\right] \quad \text{Ecuación 2.4-37}$$

Se aplica la propiedad de la resta en los logaritmos y se simplifica en una sola constante (k_3) los términos que son constantes, como sigue:

$$2\lambda^2 \ln(r) - 2\lambda^2 \ln(R) = 2\lambda^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) \quad 2\lambda^2 \ln(R) + k = cte = k_3 \quad \text{Ecuación 2.4-38}$$

$$v_z = \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R^2}{4\mu L}\right) \left[\frac{r^2}{R^2} - 2\lambda^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) + k_3\right] \quad \text{Ecuación 2.4-39}$$

Ahora se procede con la evaluación de las dos constantes de integración (λ) y (k_3) , se utiliza la condición de adherencia sobre el límite de cada sólido:

$$\text{C.F.4:} \quad \text{En } r = \kappa R \quad v_z = 0 \quad \text{Ecuación 2.4-40}$$

$$\text{C.F.5:} \quad \text{En } r = R \quad v_z = 0 \quad \text{Ecuación 2.4-41}$$

A partir de C.F.4:

$$0 = \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R^2}{4\mu L} \right) \left[\frac{(\kappa R)^2}{R^2} - 2\lambda^2 \ln \left(\frac{\kappa R}{R} \right) + k_3 \right] \quad \text{Ecuación 2.4-42}$$

$$0 = \kappa^2 - 2\lambda^2 \ln(\kappa) + k_3 \quad \text{Ecuación 2.4-43}$$

A partir de C.F.5:

$$0 = \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R^2}{4\mu L} \right) \left[\frac{R^2}{R^2} - 2\lambda^2 \ln \left(\frac{R}{R} \right) + k_3 \right] \quad \text{Ecuación 2.4-44}$$

$$0 = 1 - 2\lambda^2 \ln(1) + k_3 \quad \text{Ecuación 2.4-45}$$

La [Ecuación 2.4-43] y [Ecuación 2.4-45] conforman un sistema de ecuaciones, se resuelve la última ecuación y la constante resulta:

$$k_3 = -1 \quad \text{Ecuación 2.4-46}$$

Se sustituye (k_3) en la [Ecuación 2.4-43] y se encuentra el valor de la otra constante:

$$2\lambda^2 = \frac{-1 + \kappa^2}{\ln(\kappa)} \quad \text{Ecuación 2.4-47}$$

Se multiplica por $\left(\frac{-1}{-1}\right)$ a la [Ecuación 2.3.3-41] para simplificar como:

$$2\lambda^2 = \frac{(-1)(-1 + \kappa^2)}{(-1)\ln(\kappa)} = \frac{(+1 - \kappa^2)}{\ln(\kappa^{-1})} = \frac{(+1 - \kappa^2)}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \quad \text{Ecuación 2.4-48}$$

Se obtiene como resultado:

$$2\lambda^2 = \frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \quad \text{Ecuación 2.4-49}$$

Se sustituye las constantes (k_3) y $(2\lambda^2)$ y se obtiene el perfil de velocidades:

$$v_z = \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R^2}{4\mu L} \right) \left[\frac{r^2}{R^2} - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \ln\left(\frac{r}{R}\right) - 1 \right] \quad \text{Ecuación 2.4-50}$$

Se multiplica por $\left(\frac{-1}{-1}\right)$ y se desarrolla el álgebra correspondiente:

$$\begin{aligned} v_z &= \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)R^2}{4\mu L} \right) \left(\frac{-1}{-1} \right) \left[\frac{r^2}{R^2} - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \ln\left(\frac{r}{R}\right) - 1 \right] \\ &= \left(\frac{(\varphi_0 - \varphi_L)R^2}{4\mu L} \right) \left[-\frac{r^2}{R^2} - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) (-1) \ln\left(\frac{r}{R}\right) + 1 \right] \\ &= \left(\frac{(-\Delta\varphi)R^2}{4\mu L} \right) \left[-\frac{r^2}{R^2} - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \ln\left(\frac{r}{R}\right)^{-1} + 1 \right] \\ &= \left(\frac{(-\Delta\varphi)R^2}{4\mu L} \right) \left[1 - \frac{r^2}{R^2} - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \ln\left(\frac{r^{-1}}{R^{-1}}\right) \right] \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2.4-51}$$

Se obtiene el perfil de velocidades:

$$v_z = \left(\frac{(-\Delta\varphi)R^2}{4\mu L} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right] \quad \text{Ecuación 2.4-52}$$

Debe recordarse, que siempre se deben comprobar “casos límites”.

Por lo tanto, cuando el flujo del anillo se vuelve muy delgado, es decir, cuando (κ) es solo ligeramente menor que la unidad, los resultados se simplifican a los correspondientes para una rendija plana. Por el contrario, cuando $(\kappa \rightarrow 0)$ no es tan simple, porque la razón $\left[\frac{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right]$ se indeterminaría, en consecuencia, la [Ecuación 2.4-52]

no se simplifica a la distribución parabólica de Hagen-Poiseuille, cuando el cilindro

interno desaparece y se reduce a un tubo de sección transversal circular. Sin embargo, para la velocidad de flujo másico [Ecuación 2.4-85], esta si se simplifica a la ecuación de Hagen-Poiseuille si $(\kappa \rightarrow 0)$. (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001)

2.4.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades

A) La velocidad máxima

La velocidad máxima ocurre cuando $(r = \lambda R)$, se sustituye este término en la [Ecuación 2.4-52] y se obtiene:

$$v_z = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left[1 - \left(\frac{\lambda R}{R} \right)^2 - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \ln\left(\frac{R}{\lambda R}\right) \right]$$

Ecuación 2.4-53

$$= \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left[1 - \lambda^2 - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]$$

El término $\left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} = 2\lambda^2 \right)$ de la constante de integración de la [Ecuación 2.4-49] se sustituye, para abreviar la ecuación anterior y resulta:

$$v_z = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left[1 - \lambda^2 - 2\lambda^2 \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]$$

Ecuación 2.4-54

Se aplican las propiedades de los logaritmos para los exponentes. Después, se escribe $\left(\frac{1^{-2}}{\lambda^{-2}}\right)$ como $\left(\frac{\lambda^2}{1^2}\right)$ y finalmente se factoriza (λ^2) :

$$v_z = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left[1 - \lambda^2 + \lambda^2 \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-2} \right] = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left[1 - \lambda^2 + \lambda^2 \ln\left(\frac{1^{-2}}{\lambda^{-2}}\right) \right]$$

Ecuación 2.4-55

$$= \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left[1 - \lambda^2 + \lambda^2 \ln\left(\frac{\lambda^2}{1^2}\right) \right] = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left[1 - \lambda^2(1 + \ln(\lambda^2)) \right]$$

Se sustituye el valor del $\left(\lambda^2 = \frac{1-\kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right)$, para obtener la velocidad máxima por términos con significado geométrico como sigue:

$$v_z = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L}\right) \left[1 - \frac{1-\kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \left(1 - \ln\left(\frac{1-\kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right)\right)\right] \quad \text{Ecuación 2.4-56}$$

B) La velocidad promedio

La velocidad promedio se define como el cociente del flujo volumétrico y el área anular que existe entre los dos tubos, el desarrollo de los dividendos es:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\kappa R}^R v_z \cdot r \, dr \, d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{\kappa R}^R r \, dr \, d\theta} = \frac{2\pi \int_{\kappa R}^R v_z \cdot r \, dr}{2\pi \int_{\kappa R}^R r \, dr} = \frac{\int_{\kappa R}^R v_z \cdot r \, dr}{\int_{\kappa R}^R r \, dr} \quad \text{Ecuación 2.4-57}$$

Se reemplaza el perfil de velocidades [Ecuación 2.4-52] al numerador de la velocidad promedio y se integra, donde la integral de una suma es la suma de sus integrales:

$$\begin{aligned} \int_{\kappa R}^R v_z \cdot r \, dr &= \int_{\kappa R}^R \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L}\right) \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{1-\kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) \ln\left(\frac{R}{r}\right)\right] \cdot r \, dr \\ &= \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L}\right) \int_{\kappa R}^R \left[r - \frac{r^3}{R^2} - \left(\frac{1-\kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) \ln\left(\frac{R}{r}\right) (r)\right] \, dr \\ &= \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L}\right) \left[\int_{\kappa R}^R r \, dr - \int_{\kappa R}^R \frac{r^3}{R^2} \, dr - \int_{\kappa R}^R \left(\frac{1-\kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) r \ln\left(\frac{R}{r}\right) \, dr\right] \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2.4-58}$$

Se resuelven las integrales por separado y se realiza el álgebra correspondiente:

$$\int_{\kappa R}^R v_z \cdot r \, dr = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L}\right) \left[\int_{\kappa R}^R r \, dr - \int_{\kappa R}^R \frac{r^3}{R^2} \, dr - \left(\frac{1-\kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) \int_{\kappa R}^R r \ln\left(\frac{R}{r}\right) \, dr\right] \quad \text{Ecuación 2.4-59}$$

El primer término, se resuelve como:

$$\int_{\kappa R}^R r \, dr = \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\kappa R}^R = \left[\frac{R^2}{2} - \frac{(\kappa R)^2}{2} \right] \quad \text{Ecuación 2.4-60}$$

En el segundo término (R^2) es una constante y resulta:

$$\int_{\kappa R}^R \frac{r^3}{R^2} \, dr = \left[\frac{r^4}{4R^2} \right]_{\kappa R}^R = \frac{R^4}{4R^2} - \frac{(\kappa R)^4}{4R^2} = \left[\frac{R^2}{4} - \frac{\kappa^4 R^2}{4} \right] \quad \text{Ecuación 2.4-61}$$

En el tercer término se utilizan las propiedades logarítmicas del cociente como:

$$\left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \int_{\kappa R}^R r \ln\left(\frac{R}{r}\right) \, dr = \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left[\int_{\kappa R}^R r \ln(R) \, dr - \int_{\kappa R}^R r \ln(r) \, dr \right] \quad \text{Ecuación 2.4-62}$$

Se procede a resolver las integrales por separado de la ecuación anterior.

El término uno de la [Ecuación 2.4-62] se integra como:

$$\begin{aligned} \int_{\kappa R}^R r \ln(R) \, dr &= \ln(R) \int_{\kappa R}^R r \, dr = \ln(R) \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\kappa R}^R = \ln(R) \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\kappa R}^R = \ln(R) \left[\frac{R^2}{2} - \frac{(\kappa R)^2}{2} \right] \\ &= \left[\frac{R^2}{2} \ln(R) - \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(R) \right] \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2.4-63}$$

El término dos de la [Ecuación 2.4-62] es:

$$\int_{\kappa R}^R r \ln(r) \, dr \quad \text{Ecuación 2.4-64}$$

Esta ecuación se resuelve por el método de la integral por partes, como sigue:

$$\begin{array}{ll} u = \ln(r) & du = \frac{1}{r} dr \\ dv = r & v = \frac{r^2}{2} dr \end{array} \quad \left[u v - \int v du \right] \quad \text{Ecuación 2.4-65}$$

Aplicando la [Ecuación 2.4-65] se obtiene:

$$\ln(r) \left(\frac{r^2}{2} \right) - \int \left(\frac{r^2}{2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) dr = \frac{r^2}{2} \ln(r) - \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{2} \right) \quad \text{Ecuación 2.4-66}$$

Evaluando los límites de integración:

$$\begin{aligned} \left[\frac{r^2}{2} \ln(r) - \left(\frac{r^2}{4} \right) \right]_{\kappa R}^R &= \left(\frac{R^2}{2} \ln(R) - \left(\frac{R^2}{4} \right) \right) - \left(\frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(\kappa R) - \left(\frac{(\kappa R)^2}{4} \right) \right) \\ &= \left[\left(\frac{R^2}{2} \ln(R) - \left(\frac{R^2}{4} \right) \right) - \left(\frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(\kappa) + \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(R) - \left(\frac{(\kappa R)^2}{4} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2.4-67}$$

Donde la solución tiene la siguiente forma:

$$\int_{\kappa R}^R r \ln(r) dr = \left[\frac{R^2}{2} \ln(R) - \left(\frac{R^2}{4} \right) - \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(\kappa) - \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(R) + \left(\frac{(\kappa R)^2}{4} \right) \right] \quad \text{Ecuación 2.4-68}$$

Se unen los resultados de las integrales [Ecuación 2.4-63] y [Ecuación 2.4-69], en la [Ecuación 2.4-62], de forma que la expresión tiene la siguiente forma:

$$\left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \int_{\kappa R}^R r \ln\left(\frac{R}{r}\right) dr = \quad \text{Ecuación 2.4-69}$$

$$\left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left\{ \left[\frac{R^2}{2} \ln(R) - \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(R) \right] - \left[\frac{R^2}{2} \ln(R) - \left(\frac{R^2}{4} \right) - \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(\kappa) - \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(R) + \left(\frac{(\kappa R)^2}{4} \right) \right] \right\}$$

Se sustituyen en la [Ecuación 2.4-59] los resultados que se obtuvieron al resolver las integrales [Ecuación 2.4-60], [Ecuación 2.4-61] y [Ecuación 2.4-69].

$$\int_{\kappa R}^R v_z \cdot r \, dr = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left\{ \left[\frac{R^2}{2} - \frac{(\kappa R)^2}{2} \right] - \left[\frac{R^2}{4} - \frac{\kappa^4 R^2}{4} \right] \right. \\ \left. - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left(\left[\frac{R^2}{2} \ln(R) - \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(R) \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \left[\frac{R^2}{2} \ln(R) - \left(\frac{R^2}{4} \right) - \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(\kappa) - \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(R) + \left(\frac{(\kappa R)^2}{4} \right) \right] \right) \right\} \quad \text{Ecuación 2.4-70}$$

Se realiza el álgebra correspondiente y se eliminan algunos términos:

$$\int_{\kappa R}^R v_z \cdot r \, dr = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left\{ \frac{R^2}{2} - \frac{(\kappa R)^2}{2} - \frac{R^2}{4} + \frac{\kappa^4 R^2}{4} \right. \\ \left. - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left[\frac{R^2}{2} \ln(R) - \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(R) - \frac{R^2}{2} \ln(R) + \left(\frac{R^2}{4} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(\kappa) + \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(R) - \left(\frac{(\kappa R)^2}{4} \right) \right] \right\} \quad \text{Ecuación 2.4-71}$$

La expresión resultante tiene la siguiente forma:

$$\int_{\kappa R}^R v_z \cdot r \, dr = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \\ \left\{ \frac{R^2}{2} - \frac{(\kappa R)^2}{2} - \frac{R^2}{4} + \frac{\kappa^4 R^2}{4} - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left[\left(\frac{R^2}{4} \right) + \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(\kappa) - \left(\frac{(\kappa R)^2}{4} \right) \right] \right\} \quad \text{Ecuación 2.4-72}$$

La ecuación anterior se ordena y se factoriza como:

$$\left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L}\right) =$$

Ecuación 2.4-73

$$\left\{ \frac{1}{2}(R^2 - (\kappa R)^2) - \frac{R^2}{4}(1 - \kappa^4) - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) \left[\frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(\kappa) + \frac{R^2}{4}(1 - \kappa^2) \right] \right\}$$

Se distribuye a $\left(-\left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right)\right)$:

$$\left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L}\right) =$$

Ecuación 2.4-74

$$\left\{ \frac{1}{2}(R^2 - (\kappa R)^2) - \frac{R^2}{4}(1 - \kappa^4) + \left[-\left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln(\kappa) - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) \frac{R^2}{4}(1 - \kappa^2) \right] \right\}$$

Se aplica la propiedad de logarítmica $\left(-\ln(\kappa) = \ln(\kappa^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)$ y se simplifica:

$$= \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L}\right)$$

Ecuación 2.4-75

$$\left\{ \frac{1}{2}(R^2 - (\kappa R)^2) - \frac{R^2}{4}(1 - \kappa^4) + \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) \frac{(\kappa R)^2}{2} \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right) - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) \frac{R^2}{4}(1 - \kappa^2) \right\}$$

Finalmente, la solución del numerador de la velocidad promedio [Ecuación 2.4-57], reducido a su mínima expresión es:

$$\int_{\kappa R}^R v_z \cdot r \, dr = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L}\right)$$

Ecuación 2.4-76

$$\left\{ \frac{1}{2}(R^2 - (\kappa R)^2) - \frac{R^2}{4}(1 - \kappa^4) + (1 - \kappa^2) \frac{(\kappa R)^2}{2} - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) \frac{R^2}{4}(1 - \kappa^2) \right\}$$

La expresión para el denominador de la velocidad promedio [Ecuación 2.4-57] es:

$$\int_{\kappa R}^R r dr = \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\kappa R}^R = \frac{R^2}{2} - \frac{(\kappa R)^2}{2} = \frac{1}{2}(R^2 - (\kappa R)^2) = \frac{R^2}{2}(1 - \kappa^2) \quad \text{Ecuación 2.4-77}$$

Se realiza el cociente del flujo volumétrico entre el área, es decir la [Ecuación 2.4-76] entre la [Ecuación 2.4-77]:

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle &= \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left\{ 1 - \frac{1(1 - \kappa^4)}{2(1 - \kappa^2)} + \kappa^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \right\} \\ \langle v_z \rangle &= \left(\frac{\Delta\phi R^2}{4\mu L} \right) \left\{ (1 + \kappa^2) - \frac{1(1 - \kappa^4)}{2(1 - \kappa^2)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \right\} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2.4-78}$$

En la [Ecuación 2.4-78], el término común denominador es $(2(1 - \kappa^2))$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle &= \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left\{ \frac{2(1 - \kappa^2)(1 + \kappa^2) - 1(1 - \kappa^4)}{2(1 - \kappa^2)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \right\} \\ \langle v_z \rangle &= \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left\{ \frac{2 + 2\kappa^2 - 2\kappa^2 - 2\kappa^4 - 1 + \kappa^4}{2(1 - \kappa^2)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \right\} \\ \langle v_z \rangle &= \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left\{ \frac{(1 - \kappa^4)}{2(1 - \kappa^2)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \right\} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2.4-79}$$

Se factoriza el término común y se obtiene con ello la velocidad promedio:

$$\langle v_z \rangle = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{8\mu L} \right) \left\{ \frac{1 - \kappa^4}{1 - \kappa^2} - \frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right\} \quad \text{Ecuación 2.4-80}$$

C) El flujo volumétrico

Con la expresión de la velocidad promedio [Ecuación 2.4-80], lo que resta por hacer es multiplicar por el área, para calcular el flujo volumétrico:

$$Q = (\text{Área})(\langle v_z \rangle) \quad \text{Ecuación 2.4-81}$$

El cálculo del área está dada por:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\kappa R}^R r \, dr d\theta = 2\pi \int_{\kappa R}^R r \, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\kappa R}^R = \pi[R^2 - (\kappa R)^2] = \pi R^2[1 - \kappa^2] \quad \text{Ecuación 2.4-82}$$

Se multiplica la [Ecuación 2.4-80] y la [Ecuación 2.4-82]:

$$Q = \pi R^2[1 - \kappa^2] * \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{8\mu L} \right) \left\{ \frac{1 - \kappa^4}{1 - \kappa^2} - \frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right\} \quad \text{Ecuación 2.4-83}$$

Finalmente, el flujo volumétrico es:

$$Q = \left(\frac{\pi(-\Delta\phi)R^4}{8\mu L} \right) \left\{ 1 - \kappa^4 - \frac{(1 - \kappa^2)^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right\} \quad \text{Ecuación 2.4-84}$$

D) Flujo másico

Si se realiza el producto de la densidad por el flujo volumétrico, se obtiene el flujo másico:

$$W = \rho * Q = \frac{\rho\pi(-\Delta\phi)R^4}{8\mu L} \left(1 - \kappa^4 - \frac{(1 - \kappa^2)^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \quad \text{Ecuación 2.4-85}$$

E) La magnitud del esfuerzo cortante

Con el perfil de velocidades ($v_z(r)$) de la [Ecuación 2.4-52], y a la ecuación constitutiva para fluidos newtonianos [Ecuación 2.1-45], es posible obtener los componentes del tensor de esfuerzos ($\underline{\tau}$)

A partir del perfil de velocidades:

$$v_z = \frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{1-\kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right] \quad \text{Ecuación 2.4-86}$$

Se expresan los componentes del vector de velocidades como:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{1-\kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right] \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.4-87}$$

A partir de los postulados (8 y 9), la forma que tiene el gradiente de velocidades es:

$$\nabla \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{r,\theta,z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{r,\theta,z} \quad \text{Ecuación 2.4-88}$$

Se calcula el componente del gradiente de velocidad como:

$$v_z = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L}\right) - \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L}\right) \left(\frac{1}{R^2}\right) (r^2) - \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L}\right) \left(\frac{1-\kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) [\ln(R) - \ln(r)] \quad \text{Ecuación 2.4-89}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 + \left(\frac{2(\Delta\phi)}{4\mu L}\right) (r) + 0 + \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L}\right) \left(\frac{1-\kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\right) \left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{Ecuación 2.4-90}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{(\Delta\phi)}{2\mu L} \left[r - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left(\frac{R^2}{2r} \right) \right] \quad \text{Ecuación 2.4-91}$$

Se multiplica por $\left(\frac{R}{R}\right)$ y se ordena:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{(\Delta\phi)R}{2\mu L} \left[\frac{r}{R} - \left(\frac{1 - \kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left(\frac{R}{r} \right) \right] \quad \text{Ecuación 2.4-92}$$

Se procede a sustituir el resultado que se obtuvo, en la parte simétrica del tensor de gradientes de velocidad, como:

$$\underline{\dot{\gamma}} = (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{(\Delta\phi)R}{2\mu L} \left[\frac{r}{R} - \left(\frac{1 - \kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left(\frac{R}{r} \right) \right] \\ \frac{(\Delta\phi)R}{2\mu L} \left[\frac{r}{R} - \left(\frac{1 - \kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left(\frac{R}{r} \right) \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.4-93}$$

Se tiene la expresión del el esfuerzo cortante o ecuación constitutiva para fluidos newtonianos [Ecuación 2.1-45], que tiene la forma:

$$\underline{\tau} = -\mu (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) = -\mu \underline{\dot{\gamma}}$$

$$\underline{\tau} = -\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{(\Delta\phi)R}{2\mu L} \left[\frac{r}{R} - \left(\frac{1 - \kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left(\frac{R}{r} \right) \right] \\ \frac{(\Delta\phi)R}{2\mu L} \left[\frac{r}{R} - \left(\frac{1 - \kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left(\frac{R}{r} \right) \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.4-94}$$

Finalmente la expresión del tensor de esfuerzo es:

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \left[\frac{r}{R} - \left(\frac{1-\kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left(\frac{R}{r} \right) \right] \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \left[\frac{r}{R} - \left(\frac{1-\kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left(\frac{R}{r} \right) \right] & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 2.4-95}$$

El componente cortante $\left(\tau_{rz} = \tau_{zr} = \frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \left[\frac{r}{R} - \left(\frac{1-\kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left(\frac{R}{r} \right) \right] \right)$, se mueve bajo la influencia de un gradiente de presiones y no es lineal.

Experimentalmente la cantidad que se mide es la magnitud del esfuerzo cortante en la pared y la expresión en ese punto está dado por:

$$\tau_{rz}(R) = \tau_{wall,w} = \frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \left[1 - \left(\frac{1-\kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \right] \quad \text{Ecuación 2.4-96}$$

F) Coeficiente de fricción

El coeficiente de fricción se relaciona con la pérdida de presión y se calcula como el cociente del esfuerzo cortante en la pared entre el flux convectivo, tiene la forma:

$$f = \frac{\tau_w}{\rho \langle v \rangle^2} = \frac{\frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \left[1 - \left(\frac{1-\kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \right]}{\rho \left(\left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{8\mu L} \right) \left[\frac{1-\kappa^4}{1-\kappa^2} - \frac{1-\kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right] \right)^2} \quad \text{Ecuación 2.4-97}$$

$$f = \frac{32(\mu)^2 L}{\rho(-\Delta\phi)R^3} \left[\frac{1 - \left(\frac{1-\kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right)}{\left(\frac{1-\kappa^4}{1-\kappa^2} - \frac{1-\kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right)^2} \right]$$

A continuación, la representación gráfica del perfil parabólico de velocidades y el esfuerzo cortante en un flujo axial en una región anular entre dos cilindros coaxiales.

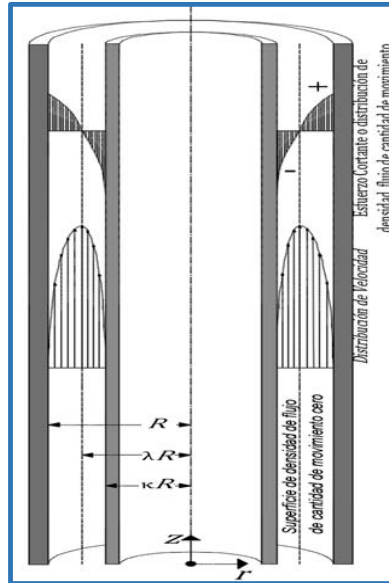


Figura 2.4-2 Distribución de la velocidad y el esfuerzo cortante para un flujo en dirección axial en una región anular entre dos cilindros coaxiales

(Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001, pág. 54)

2.5 FLUJO EN UN TUBO DE SECCIÓN TRANSVERSAL LIGERAMENTE CÓNICA

Se examina un fluido que se mueve en un tubo horizontal ligeramente cónico de longitud (L) con radio inicial (R_0) y radio final (R_L). El líquido fluye en dirección “ z ” por la influencia de una diferencia de presión y en dirección “ r ” por la geometría cónica. Se utilizan coordenadas cilíndricas (r, θ, z) en las ecuaciones.

El análisis de este problema, se puede aplicar localmente, como si fuera un problema de flujo en un tubo de sección transversal circular y a través del resultado, encontrar la relación entre el flujo volumétrico y la caída de presión total.

Existe un flujo de dirección radial y dirección axial debido a la conicidad del tubo, existe una aceleración de la velocidad en la dirección axial, pero se mantiene constante el flujo volumétrico. (Byron Bird, C. Armstrong, & Hassager, Dynamics of Polymeric Liquids, 1987, pág. 16)

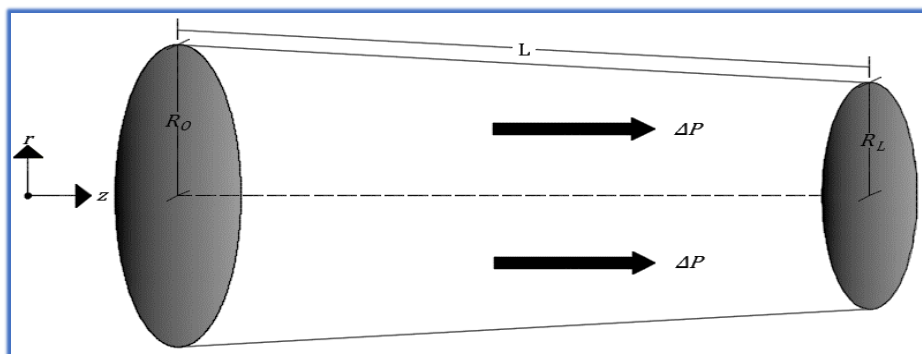


Figura 2.5-1 Flujo axial en un tubo de sección transversal ligeramente cónica bajo el efecto de un gradiente de presión

2.5.1 Postulados y suposiciones

A continuación, las premisas que simplifican las ecuaciones, para obtener los diferentes perfiles del flujo en un tubo de sección transversal ligeramente cónica

- 1) Flujo estacionario
- 2) Flujo laminar: con un Reynolds lo suficientemente bajo para conservar su carácter laminar.
- 3) Fluido newtoniano.
- 4) Fluido incompresible.
- 5) Se ignoran los efectos finales.
- 6) El fluido se trabaja como si fuera un medio continuo.
- 7) Condición de adherencia.
- 8) Las velocidades que se van a desarrollar en este flujo se dan en la dirección "z" y en la dirección "r", por lo tanto $(v = (v_r, v_\theta, v_z) = (v_r, 0, v_z))$.

2.5.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes por postulados

La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas, la cual contiene flechas rojas con el número de postulado específico de simplificación.

$$\overset{(4)}{\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad \text{Ecuación 2.5-1}$$

$$\overset{(4)}{\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right)} = 0 \quad \text{Ecuación 2.5-2}$$

La ecuación de continuidad para el flujo en un tubo de sección transversal ligeramente cónico es:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{Ecuación 2.5-3}$$

Se concluye con la ecuación anterior lo siguiente:

$$v_z = v_z(r, 0, z)$$

$$v_r = v_r(r, 0, z)$$

$$v_\theta = 0$$

Ecuación 2.5-4

Entonces, el resultado de la ecuación de continuidad [*Ecuación 2.5-3*] proporciona un nuevo postulado:

- 9) Existe velocidad en dirección “z” y “r” y ambas dependen tanto de “r” como de “z”, pero la velocidad en dirección “θ” vale cero.

Se sustituye la presión modificada ($\wp = P + \rho gh$), en las ecuaciones de momentum. (En problemas anteriores se explica la razón).

Eliminación de términos en la ecuación de momentum en dirección “r” por postulados establecidos:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\cancel{\frac{\partial v_r}{\partial t}}^{(4)} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}}^{(9)} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \cancel{\frac{v_\theta^2}{r}}^{(8)} \right) \\ & = -\frac{\partial \wp}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \cancel{\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}}^{(9)} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}^{(8)} \right] \end{aligned}$$

Ecuación 2.5-5

Ecuación de momentum en dirección “r” resultante de la eliminación por postulados:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \wp}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right]$$

Ecuación 2.5-6

Eliminación de términos en la ecuación de momentum en dirección “ θ ” por postulados establecidos:

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \wp}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad \text{Ecuación 2.5-7}$$

Ecuación de momentum en dirección “ θ ” resultante de la eliminación por postulados:

$$0 = \frac{\partial \wp}{\partial \theta} \quad \text{Ecuación 2.5-8}$$

Eliminación de términos en la ecuación de momentum en dirección “ z ” por postulados establecidos:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \wp}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.5-9}$$

Ecuación de momentum en dirección “ z ” resultante de la eliminación por postulados:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \wp}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.5-10}$$

Las ecuaciones que se resuelven son [Ecuación 2.6] y [10 Ecuación 2.5-10] y se obtienen los perfiles de velocidades para (v_r y v_z).

2.5.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad

La geometría no uniforme ha cambiado un problema lineal como lo es el flujo en un tubo con sección transversal fija a uno no lineal. Por lo que las matemáticas de [Ecuación 2.5-3] [Ecuación 2.5-6] y [Ecuación 2.5-10] son difíciles de resolver. Sin embargo, se puede tomar ventaja del hecho de que la geometría varía lentamente, despreciar

con ello términos pequeños y reducir las ecuaciones a pocos términos que dominan en el flujo, para facilitar la solución.

Para ver cuáles términos se conservan y cuáles se desprecian, se desarrolla el análisis de orden de magnitud en [Ecuación 2.5-3] [Ecuación 2.5-56] y [Ecuación 2.5-10]. Por lo que se da una breve descripción teórica, el significado y los beneficios de utilizar el análisis del orden de magnitud. (YouTube, 2013)

❖ *El análisis de orden de magnitud o también llamada análisis de escala*

Es una herramienta útil, usada para la simplificación de ecuaciones o procesos con abundantes términos, reteniendo las variables esenciales e ignorando términos que no influyen cuantiosamente, revelando información esencial que sintetiza el problema a resolver. El análisis del orden de magnitud, tiene la intención de estimar el promedio del valor de una función sobre la región de interés.

Los beneficios principalmente se encuentran en:

- 1) Entender qué es lo importante en una ecuación, pero más importante lo que no.
- 2) Se utiliza como primer método para obtener información o una percepción, incluso sin necesidad de llegar a un resultado final, sobre el tamaño de las variables desconocidas, como la velocidad, presión, esfuerzos, etc.
- 3) Se anticipa a los costosos resultados de un análisis exacto y lo hace dentro de un factor de aproximación de uno cuando se hace correctamente.
- 4) Simplifica los procesos de solución (variables adimensionales sencillas, que se expresan en el intervalo de cero y uno).
- 5) Permite una mejor calidad en la solución numérica, dado que al realizar este método, las variables se encuentran en el mismo rango y con ello estas mantienen un mayor grado de exactitud en la solución. (Wikipedia®, 2015)

Debe destacarse que el análisis de orden de magnitud es más impulsado por el sentido común, más que por ser un método sistemático. Aunque existen algunas pautas a seguir. (Wikibooks, 2013)

- 1) Definir el dominio y el alcance en el cual se aplicará el análisis de orden de magnitud.
- 2) Se debe tener alguna idea de cómo la función se comporta antes de que se pueda hacer un buen estimado.
- 3) Debe haber equivalencia entre las magnitudes dominantes de los términos que aparecen en la ecuación. Por lo que el lado izquierdo de la ecuación debería ser del mismo orden de magnitud que del lado derecho.
- 4) Existe una clara diferencia entre orden de magnitud de una función a un estimado de orden de magnitud, en el cual el primero es una cantidad definida y el segundo es una suposición.
- 5) Un simple estimado empieza con la mejor suposición del valor absoluto del promedio.
- 6) Si el orden de magnitud de uno de los dos términos es mayor que el orden de magnitud del otro término, entonces el orden de magnitud de la suma es dictada por el término dominante.

$$c = a + b \rightarrow O(a) > O(b) \rightarrow O(c) = O(a) \qquad \textit{Ecuación 2.5-11}$$

- 7) La misma conclusión se mantiene si tenemos diferencia de los dos términos.

$$c = a - b \rightarrow O(c) = O(a) \qquad \textit{Ecuación 2.5-12}$$

- 8) En la suma de los dos términos ($c = a + b$), si los dos términos son del mismo orden de magnitud, entonces la suma también es del mismo orden de magnitud.

$$O(a) = O(b) \rightarrow O(a) \sim O(b) \sim O(c) \quad \text{Ecuación 2.5-13}$$

- 9) En caso del producto de dos términos, el orden de magnitud del producto es igual al producto de los órdenes de magnitud de los factores.

$$p = ab \rightarrow O(p) = O(a)O(b) \quad \text{Ecuación 2.5-14}$$

- 10) En caso del cociente entre dos términos, el orden de magnitud es igual al cociente de los órdenes de magnitud de los dos factores.

$$r = \frac{a}{b} \rightarrow O(r) = \frac{O(a)}{O(b)} \quad \text{Ecuación 2.5-15}$$

Matemáticamente, se define el estimado del orden de magnitud de alguna función como el promedio del valor absoluto de la función.

Para la región ($0 \leq x \leq L$) el estimado de orden de magnitud de $f(x)$ es:

$$\{OdeM \text{ de } f(x)\} \equiv \frac{1}{L} \int_0^L |f(x)| dx \quad \text{Ecuación 2.5-16}$$

Para una función de dos variables ($g(x, y)$) en la región ($0 \leq x \leq L$) y ($0 \leq y \leq \ell$), el estimado de orden de magnitud es:

$$\{OdeM \text{ de } g(x, y)\} = \frac{1}{\ell L} \int_0^\ell \int_0^L |g(x, y)| dx dy \quad \text{Ecuación 2.5-17}$$

Y para una función derivada en la región ($0 \leq x \leq L$), el estimado del orden de magnitud de $\left(\frac{df}{dx}\right)$ es:

$$\left\{OdeM \text{ de } \frac{df}{dx}\right\} = \frac{1}{L} \int_0^L \left|\frac{df}{dx}\right| dx \quad \text{Ecuación 2.5-18}$$

Para el caso de la derivada, se simplifica el problema asumiendo que (f) es una función monótona de (x) (Se conserva el orden). Entonces, si (f) crece o decrece con (x) no es de interés el signo, solo el orden de magnitud, de forma que:

$$\left\{OdeM \text{ de } \frac{df}{dx}\right\} = \frac{1}{L} \int_0^L \left| \frac{df}{dx} \right| dx = \frac{1}{L} [f(L) - f(0)] \quad \text{Ecuación 2.5-19}$$

Se simplifica la ecuación anterior con el teorema del valor principal expresando la integral evaluado en algún punto $(x = \xi)$:

$$\{OdeM \text{ de } f(x)\} = \frac{1}{L} \int_0^L |f(x)| dx = f(\xi) \quad \rightarrow \quad (0 \leq \xi \leq L) \quad \text{Ecuación 2.5-20}$$

Por lo que si $f(x)$ es una función suave se sostiene que $f(L)$ y $f(0)$ están en el mismo orden de magnitud como $f(\xi)$ entonces:

$$f(L) = O(f(\xi)) = O(f) \quad y \quad f(0) = O(f(\xi)) = O(f) \quad \therefore \quad [f(L) - f(0)] = O(f) \quad \text{Ecuación 2.5-21}$$

Con esto se concluye que el estimado del orden de magnitud de la derivada se representa como:

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = O\left(\frac{f}{L}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-22}$$

Se extiende la definición dada por [Ecuación 2.5-18] hasta la [Ecuación 2.5-22], podemos definir el orden de magnitud de la segunda derivada como:

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = O\left(\frac{f}{L^2}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-23}$$

Generalizado el resultado anterior se obtiene:

$$\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = O\left(\frac{f}{L^n}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-24}$$

Con el fin de usar efectivamente el estimado del orden de magnitud, para simplificar un análisis debemos ser osados, suertudos y rápidos en retirarse en la cara de la adversidad. (Whitaker, Elementary Heat Transfer Analysis, 1976)_ó (Whitaker, Elementary Heat Transfer Analysis, 2014)

Analizado el alcance del orden de magnitud, se prosigue con utilizar esta herramienta para las aproximaciones del problema principal, encontrar los diferentes perfiles del flujo en un tubo de sección transversal ligeramente cónica.

Primeramente, se obtiene la velocidad por medio del flujo volumétrico, como:

$$v = \left(\frac{Q}{\pi R_L^2} \right) \quad \text{Ecuación 2.5-25}$$

Dada la ecuación anterior, la velocidad axial en el tubo ligeramente cónico debe ser aproximadamente del orden de magnitud de la [Ecuación 2.5-25], esto se escribe como:

$$v_z \sim O(v) = O\left(\frac{Q}{\pi R_L^2}\right) = \frac{\frac{m^3}{s}}{m^2} = \frac{m}{s} \quad \text{Ecuación 2.5-26}$$

Asimismo, las velocidades en el radio de origen (R_O) y en radio final (R_L) son:

$$v|_{r=R_O} = \left(\frac{Q}{\pi R_O^2} \right) \quad y \quad v|_{r=R_L} = \left(\frac{Q}{\pi R_L^2} \right) \quad \text{Ecuación 2.5-27}$$

Con lo anterior, se puede encontrar el cambio de velocidad axial, que servirá para aproximar el segundo término de la ecuación de continuidad [Ecuación 2.5-3]:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \sim O\left(\frac{\text{Velocidad de Salida} - \text{Velocidad de entrada}}{L}\right) \sim \frac{\text{Gradiente de velocidad}}{\text{velocidad}} \quad \text{Ecuación 2.5-28}$$

Entonces, el cambio de velocidad en dirección "z", se simplifica con ayuda del análisis de orden de magnitud de la [Ecuación 2.5-27], como sigue:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \sim O\left(\frac{\frac{Q}{\pi R_L^2} - \frac{Q}{\pi R_0^2}}{L}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-29}$$

Se multiplica por $\left(\frac{R_L^2}{R_0^2}\right)$:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \sim O\left(\frac{\left(\frac{R_L^2}{R_0^2}\right)\left(\frac{Q}{\pi R_L^2} - \frac{Q}{\pi R_0^2}\right)}{L}\right) \sim O\left(\frac{\left(\frac{1}{R_0^2}\right)\left(\frac{Q}{\pi} - \frac{Q R_L^2}{\pi R_0^2}\right)}{L}\right) \sim O\left(\frac{\left(\frac{Q}{\pi R_0^2}\right)\left(1 - \frac{R_L^2}{R_0^2}\right)}{L}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-30}$$

Y debido a la [Ecuación 2.5-25], se simplifica aún más la ecuación anterior como:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \sim O\left(\frac{V}{L}\left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right) \quad \text{Ecuación 2.5-31}$$

Si geoméricamente se caracteriza por $\left(\frac{R_0 - R_L}{L} \ll 1\right)$ o lo que es igual $\left(\frac{1}{L}\left(1 - \frac{R_L^2}{R_0^2}\right) \ll 1\right)$, se espera que la derivada en este flujo sea pequeña, dada la geometría ligeramente cónica en comparación de su longitud. (Byron Bird, C. Armstrong, & Hassager, Dynamics of Polymeric Liquids, 1987, pág. 16)

La otra contribución de la ecuación de continuidad [Ecuación 2.5-3], es el cambio en la velocidad radial (v_r), primero se desarrolla el producto de la derivada parcial:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = \frac{1}{r} \left[r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{\partial r}{\partial r} \right] = \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right] \quad \text{Ecuación 2.5-32}$$

Donde la velocidad radial (v_r) puede variar de cero a una velocidad característica promedio (u) sobre una distancia de (R_L) (como si se tratara de un tubo de sección transversal circular). Por lo que el estimado de orden de magnitud de (v_r) es (u). Y de la distancia (r) es (R_L). Para la derivada de la velocidad radial se extrapola la

definición de orden de magnitud para una función derivada [Ecuación 2.5-22], por lo que $\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) = O\left(\frac{u}{R_L}\right)$, entonces el estimado de la [Ecuación 2.5-33] es del orden de:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = \left[O\left(\frac{u}{R_L}\right) + O\left(\frac{u}{R_L}\right)\right] = 2O\left(\frac{u}{R_L}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-33}$$

Pero la constante dos no afecta el orden, entonces se desprecia. De tal manera que el primer término de la ecuación de continuidad [Ecuación 2.5-3] se aproxima como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = O\left(\frac{u}{R_L}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-34}$$

Dada las aproximaciones [Ecuación 2.5-31] y [Ecuación 2.5-34] de la ecuación de continuidad, se puede encontrar los relativos tamaños de la velocidad radial y axial.

$$O\left(\frac{u}{R_L}\right) + O\left(\frac{v}{L}\left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right) \sim 0 \quad \text{Ecuación 2.5-35}$$

$$O\left(\frac{u}{R_L}\right) \sim -O\left(\frac{v}{L}\left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right) \quad \text{Ecuación 2.5-36}$$

Dado la descripción del orden de magnitud donde únicamente es de interés la dimensión de la magnitud y además teóricamente se expresa en valores absolutos, el negativo en consecuencia se elimina. Por lo que la ecuación anterior se expresa:

$$O\left(\frac{u}{R_L}\right) \sim O\left(\frac{v}{L}\left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right) \quad \text{Ecuación 2.5-37}$$

Al ordenar la ecuación anterior, se obtienen los principales términos que influyen la velocidad radial.

$$u = v\left(\frac{R_L}{L}\right)\left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right] \quad \text{Ecuación 2.5-38}$$

La ecuación anterior es importante, ya que da una idea de qué variables se atribuyen a la velocidad radial, contiene el término $\left(\frac{1}{L}\left(1 - \frac{R_L^2}{R_0^2}\right) \ll 1\right)$, por lo tanto la velocidad radial es pequeña, pero la [Ecuación 2.5-37] y la [Ecuación 2.5-38], contribuirán a realizar varias simplificaciones.

De la misma manera se estima el orden de magnitud de cada término de las ecuaciones de momentum [Ecuación 2.5-6] y [Ecuación 2.5-10], comenzando con los términos viscosos.

El término $\left(\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r}\right)\right]\right)$ de la [Ecuación 2.5-6], donde la parte $\left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r}\right)$ es también el primer término de la ecuación de continuidad [Ecuación 2.5-3], entonces es igual al cambio de velocidad en la dirección "z", como sigue:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = -\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{Ecuación 2.5-39}$$

Pero, la parcial de la velocidad en dirección "z" ya había sido aproximada con la [Ecuación 2.5-31], por consiguiente es remplazada con esta aproximación y dado que solo nos interesa el orden de magnitud, el signo se elimina.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \sim O\left(\frac{v}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right) \quad \text{Ecuación 2.5-40}$$

Se introduce la aproximación anterior al término viscoso:

$$\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r)\right)\right] \sim \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} (O) \left(\frac{v}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right)\right] \quad \text{Ecuación 2.5-41}$$

Nuevamente con la definición de la derivada, dad por la [Ecuación 2.5-22], la expresión $\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)$ es del orden de $\left(\frac{f}{R_L}\right)$ y resulta:

$$\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) \right] \sim \mu \left[O \left(\frac{\left(\frac{v}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o} \right)^2 \right] \right)}{R_L} \right) \right] \quad \text{Ecuación 2.5-42}$$

Se reacomoda la ecuación anterior, para lograr la aproximación del primer término viscoso de la [Ecuación 2.5-6]:

$$\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) \right] \sim O \left(\mu \frac{v}{R_L L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o} \right)^2 \right] \right) \quad \text{Ecuación 2.5-43}$$

El segundo término viscoso $\left(\mu \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \right)$ de la [Ecuación 2.5-6], se aproxima con la [Ecuación 2.5-23] de la definición del estimado del orden de magnitud de las segundas derivadas. Así, la $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$ es del orden de $\left(\frac{f}{L^2} \right)$ y (v_r) del orden de (u) .

$$\left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \sim O \left(\frac{\partial^2 u}{\partial L^2} \right) \quad \text{Ecuación 2.5-44}$$

Pero el orden de (u) anteriormente se determinó como:

$$u = v \left(\frac{R_L}{L} \right) \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o} \right)^2 \right] = v R_L \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o} \right)^2 \right] L^{-1} \quad \text{Ecuación 2.5-45}$$

Después, se realiza la primera y segunda derivada con respecto a (L) , como:

$$\frac{\partial u}{\partial L} \sim O \left(-v R_L \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o} \right)^2 \right] L^{-2} \right) \quad \text{Ecuación 2.5-46}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial L^2} \sim O \left(2v R_L \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o} \right)^2 \right] L^{-3} \right) \quad \text{Ecuación 2.5-47}$$

De la ecuación anterior, se reacomodan términos, se multiplica (μ) por ambos lados y se elimina la constante dos, dado que no afecta el orden de magnitud.

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial L^2} \sim O\left(\mu \frac{v R_L}{L^3} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o}\right)^2\right]\right) \quad \text{Ecuación 2.5-48}$$

El segundo término viscoso de la [Ecuación 2.5-6], es aproximado como:

$$\mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \sim O\left(\mu \frac{v R_L}{L^3} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o}\right)^2\right]\right) \quad \text{Ecuación 2.5-49}$$

Ahora el tercer término viscoso $\left(\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right)$, de la ecuación de momentum [Ecuación 2.5-10], es aproximado primero desarrollando la derivada:

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \mu \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r}\right) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-50}$$

Después, dada la definición del estimado del orden de magnitud de las segundas derivadas [Ecuación 2.5-23] y además que la variable (v_z) es del orden de (v):

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} = O\left(\frac{v}{R_L^2}\right) \quad y \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = O\left(\frac{1}{R_L}\right) \left(\frac{v}{R_L}\right) = O\left(\frac{v}{R_L^2}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-51}$$

La suma de las derivadas parciales resulta:

$$\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = O\left(\frac{v}{R_L^2}\right) + O\left(\frac{v}{R_L^2}\right) = 2O\left(\frac{v}{R_L^2}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-52}$$

De la ecuación anterior la constante dos no afecta el orden y es eliminada. De tal manera que la aproximación del tercer término viscoso de la [Ecuación 2.5-10] es:

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \sim O\left(\mu \frac{v}{R_L^2}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-53}$$

Por último se calcula la aproximación del cuarto término viscoso $\left(\mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\right)$ de la [Ecuación 2.5-10], donde el orden de la primera derivada parcial $\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$ que se obtuvo en la [Ecuación 2.5-31] y que a continuación se presenta:

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \sim O\left(\frac{v}{L}\left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o}\right)^2\right]\right) \sim O\left(v\left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o}\right)^2\right]L^{-1}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-54}$$

Para después calcular la segunda derivada:

$$\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \sim O\left(-v\left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o}\right)^2\right]L^{-2}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-55}$$

Por último a la ecuación anterior se multiplica (μ) , se elimina el negativo (solo nos interesa el orden de magnitud). Finalmente, el cuarto término viscoso es:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \sim O\left(\mu \left(\frac{v}{L^2}\right)\left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o}\right)^2\right]\right) \quad \text{Ecuación 2.5-56}$$

Una vez que se obtienen los cuatro términos viscosos de las ecuaciones de momentum, del mismo modo se aproximará el orden de magnitud de los términos inerciales.

Se comienza con el término inercial $\left(\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\right)$ de la ecuación de momentum [Ecuación 2.5-6], donde (v_r) es del orden de (u) y con la definición del estimado de orden de magnitud de la derivada [Ecuación 2.5-22], $\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)$ es del orden de $\left(\frac{f}{R_L}\right)$ resulta

$$\left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}\right) = O\left(u \left(\frac{u}{R_L}\right)\right) \quad \text{Ecuación 2.5-57}$$

Pero (u) tiene el tamaño de $\left(u = \frac{vR_L}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right)$ en la [Ecuación 2.5-38] entonces:

$$O\left(u \left(\frac{u}{R_L}\right)\right) \sim O\left(\left(\frac{vR_L}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right) \left(\frac{vR_L}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right) \frac{1}{R_L}\right) \quad \text{Ecuación 2.5-58}$$

Se simplifica y se obtiene el primer término inercial de la [Ecuación 2.5-6]:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}\right) \sim O\left(\rho \left(\frac{v^2 R_L}{L^2}\right) \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]^2\right) \quad \text{Ecuación 2.5-59}$$

El segundo término inercial $\left(\rho \left(v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\right)$ de la [Ecuación 2.5-6], la variable (v_z) es del orden de (v) , la variable (v_r) del orden de (u) y dada la definición del estimado de orden de magnitud de la derivada [Ecuación 2.5-22], $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$ es del orden de $\left(\frac{f}{L}\right)$ resulta:

$$\left(v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) \sim O\left(v \left(\frac{u}{L}\right)\right) \quad \text{Ecuación 2.5-60}$$

Pero (u) tiene el tamaño de $\left(u = \frac{vR_L}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right)$, dado por [Ecuación 2.5-38] entonces

$$O\left(v \left(\frac{u}{L}\right)\right) \sim O\left(v \left(\frac{vR_L}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right)\right) \quad \text{Ecuación 2.5-61}$$

Se simplifica y se multiplica por la densidad. Así, se obtiene el segundo término inercial de la [Ecuación 2.5-6]:

$$\rho \left(v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) \sim O\left(\rho \left(\frac{v^2 R_L}{L^2}\right) \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right) \quad \text{Ecuación 2.5-62}$$

El tercer término inercial $\left(\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right)$ de la ecuación de momentum [Ecuación 2.5-10], se aproxima la variable (v_r) por el orden (u) , (v_z) por el orden (v) y la parcial $\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)$ por el orden de $\left(\frac{f}{R_L}\right)$ resulta:

$$\left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \sim O\left(u \left(\frac{v}{R_L}\right)\right) \quad \text{Ecuación 2.5-63}$$

Se sustituye el orden de (u) de la [Ecuación 2.5-38] como:

$$O\left(u \left(\frac{v}{R_L}\right)\right) = O\left(\left(\frac{v R_L}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right) \left(\frac{v}{R_L}\right)\right) \quad \text{Ecuación 2.5-64}$$

Se simplifica y después se multiplica la densidad, se obtienen así, el tercer término inercial de la [Ecuación 2.5-10]:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \sim O\left(\rho \left(\frac{v^2}{L}\right) \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right) \quad \text{Ecuación 2.5-65}$$

El cuarto término inercial $\left(\rho \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right)$ de la [Ecuación 2.5-10], se aproxima (v_z) por el orden (v) y se sustituye el orden de la derivada parcial $\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$ desarrollado anteriormente en la [Ecuación 2.5-31], como:

$$\left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \sim O\left(v \left(\frac{v}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right)\right) \quad \text{Ecuación 2.5-66}$$

Se simplifica y después se multiplica por la densidad. Finalmente se obtiene la aproximación del cuarto término inercial de la [Ecuación 2.5-10], como:

$$\rho \left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \sim O\left(\rho \left(\frac{v^2}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right)\right) \quad \text{Ecuación 2.5-67}$$

Se sustituyen todos los estimados de orden de magnitud de los términos viscosos deducidos [Ecuación 2.5-43], [Ecuación 2.5-49], [Ecuación 2.5-53], [Ecuación 2.5-56] y de los términos inerciales [Ecuación 2.5-59], [Ecuación 2.5-62], [Ecuación 2.5-65], [Ecuación 2.5-67] a las ecuaciones de momentum [Ecuación 2.5-6] y [Ecuación 2.5-10], se obtiene:

$$\underbrace{\left(\rho \left(\frac{v^2 R_L}{L^2}\right) \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]^2\right)}_{\text{(Término aprox. "1" inercial)}} + \underbrace{\left(\rho \left(\frac{v^2 R_L}{L^2}\right) \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right)}_{\text{(Término aprox. "2" inercial)}} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} + \underbrace{\left(\mu \left(\frac{v}{R_L L}\right) \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right)}_{\text{(Término aprox. "1" viscoso)}} + \underbrace{\left(\mu \left(\frac{v R_L}{L^3}\right) \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right)}_{\text{(Término aprox. "2" viscoso)}} \quad \text{Ecuación 2.5-68}$$

$$\underbrace{\left(\rho \left(\frac{v^2}{L}\right) \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right)}_{\text{(Término aprox. "3" inercial)}} + \underbrace{\left(\rho \left(\frac{v^2}{L}\right) \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right)}_{\text{(Término aprox. "4" inercial)}} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} + \underbrace{\left(\mu \left(\frac{v}{R_L^2}\right)\right)}_{\text{(Término aprox. "3" viscoso)}} + \underbrace{\left(\mu \left(\frac{v}{L^2}\right) \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right)}_{\text{(Término aprox. "4" viscoso)}} \quad \text{Ecuación 2.5-69}$$

De los resultados viscosos el (Término aprox. "1" viscoso), (Término aprox. "2" viscoso) y (Término aprox. "4" viscoso) tienen incluido en su expresión el factor $\left(\frac{1}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right) \ll 1$, de ahí que todos estos términos sean despreciados. El (Término aprox. "4" viscoso) es el único término viscoso más grande y que sobrevive.

De los resultados inerciales, la expresión $\left(\frac{1}{L^2} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right) \ll 1$ es aún más pequeña que la expresión $\left(\frac{1}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right) \ll 1$, en consecuencia el (Término aprox. "1" inercial) y (Término aprox. "2" inercial) son despreciados, además cabe recordar que debe haber equivalencia entre los órdenes de magnitud de los términos que aparecen en la ecuación, por lo que el lado izquierdo de la ecuación debe ser del mismo orden de magnitud que del lado derecho.

Uno de los términos iguales (Término aprox. "3" inercial) y (Término aprox. "4" inercial), es comparado con el (Término aprox. "4" viscoso) más grande que no se anuló, como:

$$\frac{\left(\rho \left(\frac{v^2}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right)\right)}{\left(\mu \frac{v}{R_L^2}\right)} = \frac{\rho v R_L}{\mu} \left(\frac{R_L}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O}\right)^2\right]\right) \quad \text{Ecuación 2.5-70}$$

Se observa en la ecuación anterior el número adimensional siguiente:

$$\frac{\rho v^2 R_L}{L} = \frac{\rho v^2 \left(\frac{D_L}{2}\right)}{L} = \frac{1}{2} Re \quad \text{Ecuación 2.5-71}$$

Por consiguiente, la [Ecuación 2.5-70] toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{2} Re \left(\frac{R_L}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o} \right)^2 \right] \right) \quad \text{Ecuación 2.5-72}$$

Se percibe en la ecuación anterior que no es necesario que el Reynolds sea lo suficientemente pequeño para ser despreciado, ya que al estar multiplicado el número de Reynolds por factor geométrico $\left(\frac{1}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o} \right)^2 \right] \right) \ll 1$ asociado a la sección transversal ligeramente cónica, entonces automáticamente la ecuación anterior es insignificante y con ello todos los términos inerciales.

Los últimos términos a ser aproximados son los gradientes de presión. Con el fin de que el gradiente de cada componente "r" y "z" en las ecuaciones de Navier-Stokes sean equivalentes, el gradiente de presión debe ser del mismo tamaño del término viscoso más grande.

Entonces, de la [Ecuación 2.5-68] el gradiente de presión es proporcional al término viscosos más grande el cual es (Término aprox. "1" viscoso):

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \sim 0 \left(\mu \left(\frac{v}{R_L L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_o} \right)^2 \right] \right) \right) \quad \text{Ecuación 2.5-73}$$

Y de la [Ecuación 2.5-69] es el (Término aprox. "3" viscoso):

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \sim 0 \left(\mu \left(\frac{v}{R_L^2} \right) \right) \quad \text{Ecuación 2.5-74}$$

Si se comparan los gradientes de presión de las dos ecuaciones anteriores como

$$\frac{\frac{\partial \phi}{\partial r}}{\frac{\partial \phi}{\partial z}} \sim 0 \left(\frac{\left(\mu \frac{v}{R_L L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O} \right)^2 \right] \right)}{\left(\mu \frac{v}{R_L^2} \right)} \right) \sim 0 \left(\frac{R_L}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O} \right)^2 \right] \right) \quad \text{Ecuación 2.5-75}$$

Pero como se sabe

$$\left(\frac{1}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_O} \right)^2 \right] \right) \ll 1 \quad \text{Ecuación 2.5-76}$$

Se advierte que el gradiente de presión de la componente "r" es insignificante comparado al gradiente de presión de la componente "z", en consecuencia los términos que permanecen y que bien aproximan y resuelven el problema es el gradiente de presión de la componente "z" y el (Término aprox. "3" viscoso) de la [Ecuación 2.5-69]

Entonces, dado que solo el gradiente y el término viscoso son significativos, la ecuación que se aproxima al problema, es la ecuación de un flujo en un tubo de sección transversal circular [Ecuación 3.2-11], que se presenta nuevamente:

$$\frac{d\phi}{dz} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \quad \text{Ecuación 2.5-77}$$

Todo el análisis anterior sirvió para organizar y reducir a los órdenes de magnitud significativos, así como obtener el límite de validez [Ecuación 2.5-76], el cual debe de cumplirse para ser aplicada esta aproximación.

El proceso que se ha ilustrado aquí, de la adaptación local de una geometría pausadamente variante, es conocido, como la aproximación de lubricación.

Una breve explicación teórica y ejemplificada de lo que es la teoría de aproximación de lubricación, es pensar en un flujo dinámico (líquido o gas), en una geometría en la cual una dimensión es mucho más pequeña que las otras dimensiones. Un ejemplo, es el fluido sobre un tablero de aire de Hockey, donde el espesor de aire debajo del disco es mucho más pequeño que las dimensiones en sí del disco. Por consiguiente, se dará a este problema un enfoque cuasi unidimensional, donde el requerimiento clave para uso de esta teoría es que la proporción $\left(\varepsilon = \frac{H}{L}\right)$, donde la relación del espesor de la capa (H) y la longitud del disco (L) debe ser mucho menor a uno ($\varepsilon \ll 1$). Matemáticamente la teoría de lubricación puede ser vista como explotando la disparidad entre los órdenes de magnitud de la longitud.

Las referencias usuales para hacer aproximaciones de lubricación en las ecuaciones de Navier-Stokes, viene del hecho que estos problemas involucran una geometría en la cual sean válidos $(v_r \ll v_z)$ y $\left(\frac{\partial f}{\partial z} \ll \frac{\partial f}{\partial r}\right)$. (Wikipedia®, 2014)

Siguiendo con la ecuación aproximada [Ecuación 2.5-77], esta se reacomoda para dar la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{r}{\mu} \frac{d\phi}{dz} \quad \text{Ecuación 2.5-78}$$

Integrado con respecto a "r":

$$\int d \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{d\phi}{dz} \frac{1}{\mu} \int r dr \quad \text{Ecuación 2.5-79}$$

Se obtiene:

$$\left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{d\phi}{dz} \frac{r^2}{2\mu} + k_0 \quad \text{Ecuación 2.5-80}$$

Se despeja la (r):

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{d\phi}{dz} \frac{r}{2\mu} + \frac{k_0}{r} \quad \text{Ecuación 2.5-81}$$

Pero la constante de integración debe ser cero en la ecuación anterior, ya que si ($r = 0$) la ecuación se indeterminaría, entonces con ($k_0 = 0$) se elimina la indeterminación y resulta:

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{d\phi}{dz} \frac{r}{2\mu} \quad \text{Ecuación 2.5-82}$$

Se integra nuevamente:

$$\int dv_z = \frac{d\phi}{dz} \frac{1}{2\mu} \int r dr \quad \text{Ecuación 2.5-83}$$

Se obtiene:

$$v_z = \frac{d\phi}{dz} \frac{r^2}{4\mu} + k_1 \quad \text{Ecuación 2.5-84}$$

La constante de integración se determina a partir de la primera condición de frontera, que es la condición de adherencia en la pared, pero ya que la distancia del radio varía conforme "z" aumenta, se debe obtener una ecuación de como varia éste radio conforme cambia la longitud en el cono y se indica como $R(z)$.

$$\text{C.F.1:} \quad v_z = 0 \quad \text{En } r = R(z) \quad \text{Ecuación 2.5-85}$$

A partir de la C.F.1:

$$0 = \frac{d\phi}{dz} \frac{R(z)^2}{4\mu} + k_1 \quad \rightarrow \quad k_1 = -\frac{d\phi}{dz} \frac{R(z)^2}{4\mu} \quad \text{Ecuación 2.5-86}$$

Se sustituye la condición de frontera (k_1) a la [Ecuación 2.5-84]:

$$v_z = \frac{d\phi}{dz} \frac{r^2}{4\mu} - \frac{d\phi}{dz} \frac{R(z)^2}{4\mu} \quad \text{Ecuación 2.5-87}$$

Se factorizan términos semejantes:

$$v_z = \frac{d\phi}{dz} \frac{1}{4\mu} [r^2 - R(z)^2] \quad \text{Ecuación 2.5-88}$$

Se multiplica por $\left(\frac{R(z)^2}{R(z)^2}\right)$:

$$v_z = \frac{d\phi}{dz} \frac{R(z)^2}{4\mu} \left[\frac{r^2}{R(z)^2} - 1 \right] \quad \text{Ecuación 2.5-89}$$

Se multiplica por $\left(\frac{-1}{-1}\right)$:

$$v_z = -\frac{d\phi}{dz} \frac{R(z)^2}{4\mu} \left[1 - \frac{r^2}{R(z)^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.5-90}$$

Nótese que se ha mantenido constante durante la integración la variable "z". Sin embargo, la ecuación anterior será fácilmente adaptada conociendo el flujo volumétrico.

2.5.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades:

Una vez que se ha establecido el perfil de velocidad, es posible obtener varias cantidades derivadas que a continuación se enuncian.

A) La velocidad máxima

La velocidad máxima ocurre para ($r = 0$):

$$v_{z(\max)} = -\frac{d\phi}{dz} \frac{R(z)^2}{4\mu} \left[1 - \frac{0^2}{R(z)^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.5-91}$$

$$v_{z(\max)} = -\frac{d\phi}{dz} \frac{R(z)^2}{4\mu} \quad \text{Ecuación 2.5-92}$$

La velocidad máxima se da en el plano horizontal del centro del cono, aunque como se observa esta no es constante ya que la velocidad incrementa a medida que se avanza en la dirección "z", debido que al disminuir el área del tubo, se debe conservar el flujo volumétrico y se compensa con el incremento de la velocidad.

B) El flujo volumétrico

El flujo volumétrico (Q) se define como la integral de superficie de la velocidad:

$$Q = \int_s \underline{v} \cdot \underline{n} \, ds \quad \text{Ecuación 2.5-93}$$

Se sustituye la velocidad [Ecuación 2.5-90] en la expresión anterior, como:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(z)} v_z \, r \, dr \, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^R v_z \, r \, dr = 2\pi \int_0^{R(z)} -\frac{d\phi}{dz} \frac{R(z)^2}{4\mu} \left[1 - \frac{r^2}{R(z)^2} \right] r \, dr \quad \text{Ecuación 2.5-94}$$

$$Q = -2\pi \frac{d\phi}{dz} \frac{R(z)^2}{4\mu} \int_0^{R(z)} \left[1 - \frac{r^2}{R(z)^2} \right] r \, dr \quad \text{Ecuación 2.5-95}$$

Se ordena la ecuación anterior:

$$Q = -2\pi \frac{d\phi R(z)^2}{dz 4\mu} \left[\int_0^{R(z)} r dr - \frac{1}{R(z)^2} \int_0^{R(z)} r^3 dr \right] \quad \text{Ecuación 2.5-96}$$

$$Q = \left(-\frac{d\phi \pi R(z)^2}{dz 2\mu} \right) \left(\left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{R(z)} - \left[\frac{1}{R(z)^2} \frac{r^4}{4} \right]_0^{R(z)} \right) \quad \text{Ecuación 2.5-97}$$

Se aplican los límites de integración:

$$Q = \left(-\frac{d\phi \pi R(z)^2}{dz 2\mu} \right) \left(\left[\frac{R(z)^2}{2} - 0 \right] - \left[\frac{1}{R(z)^2} \frac{R(z)^4}{4} - 0 \right] \right) \quad \text{Ecuación 2.5-98}$$

Se ordena, se factoriza y se simplifica la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} Q &= \left(-\frac{d\phi \pi R(z)^2}{dz 2\mu} \right) \left[\frac{R(z)^2}{2} - \frac{R(z)^2}{4} \right] = \left(-\frac{d\phi \pi R(z)^2}{dz 2\mu} \right) \frac{R(z)^2}{1} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] \\ &= \left(-\frac{d\phi \pi R(z)^4}{dz 2\mu} \right) \left[\frac{1}{4} \right] \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2.5-99}$$

Se obtiene el flujo volumétrico como:

$$Q = \frac{\pi R(z)^4}{8\mu} \left(-\frac{d\phi}{dz} \right) \quad \text{Ecuación 2.5-100}$$

Finalmente para obtener la relación entre la caída de presión y el flujo volumétrico, se realiza un cambio de variable, en el cual, en lugar de usar “z” como una variable independiente se usa la **[Ecuación 2.5-101]**, esto con la intención de usar como variable independiente al radio y así facilitar la integración eliminando el problema del cambio de la caída de presión con respecto a “z”.

$$R(z) = R_0 + (R_L - R_0)(z/L) \quad \text{Ecuación 2.5-101}$$

Se despeja “z”

$$L \left(\frac{R - R_0}{R_L - R_0} \right) = z \quad \text{Ecuación 2.5-102}$$

Se desarrolla la ecuación, de la forma que sigue:

$$\left(\frac{LR}{R_L - R_0} \right) - \left(\frac{LR_0}{R_L - R_0} \right) = z \quad \text{Ecuación 2.5-103}$$

Después, se desarrolla la derivada de (z) con respecto a (R)

$$\frac{dz}{dR} = \left(\frac{L}{R_L - R_0} \right) - 0 = \quad \text{Ecuación 2.5-104}$$

De tal manera, que se obtiene la diferencial (dz), como:

$$dz = \left(\frac{L}{R_L - R_0} \right) dR \quad \text{Ecuación 2.5-105}$$

Se sustituye en la [Ecuación 2.5-100], la (dz) de la expresión [Ecuación 2.5-105].

$$Q = \frac{\pi R(z)^4}{8\mu} \left(- \frac{d\phi}{\left(\frac{L}{R_L - R_0} \right) dR} \right) \quad \text{Ecuación 2.5-106}$$

Reacomodando términos, se obtiene:

$$Q = \frac{\pi R(z)^4}{8\mu} \left(- \frac{d\phi}{dR} \right) \left(\frac{R_L - R_0}{L} \right) \quad \text{Ecuación 2.5-107}$$

Pero el flujo volumétrico (Q), es una constante en toda la longitud del cono en dirección "z". Entonces, se separan variables y se integra la [Ecuación 2.5-107], como:

$$\int_{R_O}^{R_L} R(z)^{-4} dR = \frac{\pi}{8\mu Q} \left(\frac{R_L - R_O}{L} \right) - \int_{\varphi_O}^{\varphi_L} d\varphi \quad \text{Ecuación 2.5-108}$$

Se introduce el signo en la diferencia del radio inicial y final, después se integral:

$$\left[\frac{R(z)^{-3}}{-3} \right]_{R_O}^{R_L} = \frac{\pi}{8\mu Q} \left(\frac{R_O - R_L}{L} \right) [\varphi]_{\varphi_O}^{\varphi_L} \quad \text{Ecuación 2.5-109}$$

Se evalúan los límites de integración de la ecuación anterior:

$$\frac{(R_L^{-3} - R_O^{-3})}{-3} = \frac{\pi}{8\mu Q} \left(\frac{R_O - R_L}{L} \right) (\varphi_L - \varphi_O) \quad \text{Ecuación 2.5-110}$$

Se introduce el signo en la diferencia de presiones y se reacomodan los términos:

$$(R_L^{-3} - R_O^{-3}) = \frac{-3\pi}{8\mu Q} \left(\frac{R_O - R_L}{L} \right) (\varphi_L - \varphi_O) = \frac{3\pi}{8\mu Q} \left(\frac{R_O - R_L}{L} \right) (\varphi_O - \varphi_L) \quad \text{Ecuación 2.5-111}$$

Se despeja para finalmente obtener la expresión del flujo volumétrico como:

$$Q = \frac{3\pi(\varphi_O - \varphi_L)}{8\mu L} \frac{(R_O - R_L)}{(R_L^{-3} - R_O^{-3})} \quad \text{Ecuación 2.5-112}$$

Si se desea obtener la ecuación anterior expresada como la ecuación de Hagen-Poiseuille, donde el resultado final es multiplicado por un factor de corrección. Entonces, se realiza el álgebra correspondiente, empezando por multiplicar en el denominador por $\left(\frac{-R_L^{-3}}{-R_L^{-3}} \right)$ a la [Ecuación 2.5-112]:

$$Q = \frac{3\pi(\varphi_O - \varphi_L)}{8\mu L} \frac{(R_O - R_L)}{-R_L^{-3} \left(-1 + \frac{R_L^3}{R_O^3} \right)} \quad \text{Ecuación 2.5-113}$$

El término $(-R_L^{-3})$ pasa el numerador como $(-R_L^3)$ y se reacomodan términos:

$$Q = \frac{3\pi(\rho_o - \rho_L) - R_L^3(R_o - R_L)}{8\mu L \left(\frac{R_L^3}{R_o^3} - 1 \right)} \quad \text{Ecuación 2.5-114}$$

Se introduce el signo y la constante tres a la diferencia de radios.

$$Q = \frac{\pi(\rho_o - \rho_L) 3R_L^3(R_L - R_o)}{8\mu L \left(\frac{R_L^3}{R_o^3} - 1 \right)} \quad \text{Ecuación 2.5-115}$$

Se multiplica por $\left(\frac{R_o}{R_o}\right)$ al numerador:

$$Q = \frac{\pi(\rho_o - \rho_L) 3R_o R_L^3 \left(\frac{R_L}{R_o} - 1\right)}{8\mu L \left(\frac{R_L^3}{R_o^3} - 1 \right)} \quad \text{Ecuación 2.5-116}$$

Se desarrolla el binomio cúbico $\left(\frac{R_L}{R_o} - 1\right)$ y se sustituye en la [Ecuación 2.5-116]:

$$\left(\frac{R_L}{R_o} - 1\right) = \frac{R_L^3}{R_o^3} + \frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} - \frac{R_L^2}{R_o^2} - \frac{R_L}{R_o} - 1 = \left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right) \left(\frac{R_L}{R_o} - 1\right) \quad \text{Ecuación 2.5-117}$$

$$Q = \frac{\pi(\rho_o - \rho_L) 3R_o R_L^3 \cancel{\left(\frac{R_L}{R_o} - 1\right)}}{8\mu L \left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right) \cancel{\left(\frac{R_L}{R_o} - 1\right)}} \quad \text{Ecuación 2.5-118}$$

Se eliminan términos semejantes:

$$Q = \frac{\pi(\rho_o - \rho_L) 3R_o R_L^3}{8\mu L \left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right)} \quad \text{Ecuación 2.5-119}$$

Se multiplica por $\left(\frac{R_o^3}{R_o^3}\right)$ al numerador:

$$Q = \frac{\pi(\varphi_o - \varphi_L)}{8\mu L} \frac{3R_o^4 \left(\frac{R_L^3}{R_o^3}\right)}{\left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right)} = \frac{\pi(\varphi_o - \varphi_L)R_o^4}{8\mu L} \frac{3\left(\frac{R_L^3}{R_o^3}\right)}{\left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right)} \quad \text{Ecuación 2.5-120}$$

Se suma y se resta el término $\left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right)$:

$$Q = \frac{\pi(\varphi_o - \varphi_L)R_o^4}{8\mu L} \frac{\left[\left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right) + \left(-\frac{R_L^2}{R_o^2} - \frac{R_L}{R_o} - 1\right) + 3\left(\frac{R_L^3}{R_o^3}\right)\right]}{\left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right)} \quad \text{Ecuación 2.5-121}$$

Se desarrollan términos y se realiza el álgebra correspondiente como:

$$Q = \frac{\pi(\varphi_o - \varphi_L)R_o^4}{8\mu L} \left[\frac{\left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right)}{\left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right)} + \frac{\left(-\frac{R_L^2}{R_o^2} - \frac{R_L}{R_o} - 1\right) + 3\left(\frac{R_L^3}{R_o^3}\right)}{\left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right)} \right] \quad \text{Ecuación 2.5-122}$$

Se factoriza el signo negativo del término $\left(\left(-1 - \frac{R_L}{R_o} - \frac{R_L^2}{R_o^2}\right) + 3\left(\frac{R_L^3}{R_o^3}\right)\right)$ y se obtiene la siguiente expresión del flujo volumétrico:

$$Q = \frac{\pi(\varphi_o - \varphi_L)R_o^4}{8\mu L} \left[1 - \frac{\left(1 + \frac{R_L}{R_o} + \frac{R_L^2}{R_o^2} - 3\frac{R_L^3}{R_o^3}\right)}{\left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right)} \right] \quad \text{Ecuación 2.5-123}$$

Finalmente, para obtener la relación entre la velocidad y el flujo volumétrico, de la [Ecuación 2.5-90] se sustituye $\left(-\frac{d\varphi}{dz}\right)$ de la [Ecuación 2.5-100] como:

$$v_z = \left(\frac{8\mu Q}{\pi R(z)^4}\right) \frac{R(z)^2}{4\mu} \left[1 - \frac{r^2}{R(z)^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.5-124}$$

Se simplifica con lo que se obtiene:

$$v_z = \left(\frac{2Q}{\pi R(z)^2} \right) \left[1 - \frac{r^2}{R(z)^2} \right] \quad \text{Ecuación 2.5-125}$$

C) La velocidad promedio

La velocidad promedio se define como el cociente del flujo volumétrico (constante a lo largo del cono) entre el área, pero debido a que el área va cambiando conforme se avanza en la dirección "z", únicamente se va a calcular la velocidad promedio al inicio y al final, como una aproximación.

Por tanto, la velocidad promedio en el radio inicial (R_o) es:

$$v_{R_o} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_o} v_z \cdot r \, dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_o} r \, dr d\theta} = \frac{Q}{\pi R_o^2} = \frac{\frac{\pi(\varphi_o - \varphi_L)R_o^4}{8\mu L} \left[1 - \frac{\left(1 + \frac{R_L}{R_o} + \frac{R_L^2}{R_o^2} - 3\frac{R_L^3}{R_o^3}\right)}{\left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right)} \right]}{\pi R_o^2} \quad \text{Ecuación 2.5-126}$$

$$v_{R_o} = \frac{(\varphi_o - \varphi_L)R_o^2}{8\mu L} \left[1 - \frac{\left(1 + \frac{R_L}{R_o} + \frac{R_L^2}{R_o^2} - 3\frac{R_L^3}{R_o^3}\right)}{\left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right)} \right] \quad \text{Ecuación 2.5-127}$$

Y la velocidad promedio en el radio final (R_L) es:

$$v_{R_L} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_L} v_z \cdot r \, dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_L} r \, dr d\theta} = \frac{Q}{\pi R_L^2} = \frac{\frac{\pi(\varphi_o - \varphi_L)R_o^4}{8\mu L} \left[1 - \frac{\left(1 + \frac{R_L}{R_o} + \frac{R_L^2}{R_o^2} - 3\frac{R_L^3}{R_o^3}\right)}{\left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right)} \right]}{\pi R_L^2} \quad \text{Ecuación 2.5-128}$$

$$v_{R_L} = \frac{(\varphi_o - \varphi_L)R_o^4}{8\mu L R_L^2} \left[1 - \frac{\left(1 + \frac{R_L}{R_o} + \frac{R_L^2}{R_o^2} - 3\frac{R_L^3}{R_o^3}\right)}{\left(\frac{R_L^2}{R_o^2} + \frac{R_L}{R_o} + 1\right)} \right] \quad \text{Ecuación 2.5-129}$$

Comparando ambos resultados [Ecuación 2.5-127] y [Ecuación 2.5-129], la [Ecuación 2.5-129] no elimina dos órdenes del radio (R_0) y dado que ($R_0 > R_L$), entonces se concluye que la velocidad es mayor en el final del cono que al inicio.

D) Flujo másico

Si se realiza el producto de la densidad por el flujo volumétrico, se obtiene el flujo másico:

$$W = \rho * Q = \frac{\rho\pi(\rho_0 - \rho_L)R_0^4}{8\mu L} \left[1 - \frac{\left(1 + \frac{R_L}{R_0} + \frac{R_L^2}{R_0^2} - 3\frac{R_L^3}{R_0^3}\right)}{\left(\frac{R_L^2}{R_0^2} + \frac{R_L}{R_0} + 1\right)} \right] \quad \text{Ecuación 2.5-130}$$

E) La magnitud del esfuerzo cortante

Con el perfil de velocidades ($v_z(r, z)$) y la ecuación constitutiva para fluidos newtonianos, se puede obtener el tensor de esfuerzos ($\underline{\underline{\tau}}$).

Se retoma el perfil de velocidades [Ecuación 2.5-90]:

$$v_z = \left(\frac{2Q}{\pi R(z)^2}\right) \left[1 - \frac{r^2}{R(z)^2}\right] \quad \text{Ecuación 2.5-131}$$

Se desarrolla la ecuación anterior como:

$$v_z(r, z) = \left[\left(\frac{2Q}{\pi R(z)^2}\right) - \left(\frac{2Q}{\pi R(z)^2}\right)\frac{r^2}{R(z)^2}\right] = \left[\left(\frac{2Q}{\pi R(z)^2}\right) - \frac{2Q r^2}{\pi R(z)^4}\right] \quad \text{Ecuación 2.5-132}$$

La derivada parcial de la velocidad con respecto al radio es:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{4Q r}{\pi R(z)^4} \quad \text{Ecuación 2.5-133}$$

Debido a las simplificaciones que se realizó en el análisis de orden de magnitud, el gradiente de la velocidad con respecto a “z”, es muy pequeña en comparación con respecto al gradiente de la velocidad con respecto a “r”. Por lo tanto, el tensor de rapidez de deformación es:

$$\underline{\dot{\gamma}} = (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuación 2.5-134

$$\underline{\dot{\gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{4 Q r}{\pi R(z)^4} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4 Q r}{\pi R(z)^4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El esfuerzo cortante o ecuación constitutiva para fluidos newtonianos [Ecuación 2.1-45] es de la forma:

$$\underline{\tau} = -\mu (\underline{\dot{\gamma}})$$

$$= -\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{4 Q r}{\pi R(z)^4} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4 Q r}{\pi R(z)^4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuación 2.5-135

El componente cortante que no se anula es $(\tau_{rz} = \tau_{zr} = \frac{\mu 4 Q r}{\pi R(z)^4})$.

Experimentalmente la cantidad que se mide es la magnitud del esfuerzo cortante en la pared y la expresión en ese punto está dado por:

$$1: \tau_{rz} = \tau_{zr} = \frac{\mu 4 Q R(z)}{\pi R(z)^4} = \frac{\mu 4 Q}{\pi R(z)^3}$$

Ecuación 2.5-136

F) El coeficiente de fricción

El coeficiente de fricción se relaciona con la pérdida de presión y se calcula como el cociente del esfuerzo cortante en la pared entre el flux convectivo.

Se retoma que debido a las simplificaciones del análisis de orden de magnitud, el componente cortante que no se anula es (τ_{rz}) , por lo tanto el coeficiente de fricción se calcula sólo con (τ_{rz}) en la pared. La expresión tiene la forma:

$$f = \frac{\tau_w}{\rho \langle v \rangle^2} = \frac{\frac{\mu 4Q}{\pi R(z)^3}}{\rho \left(\frac{(\rho_0 - \rho_L) R_0^4}{8\mu L R_L^2} \left[1 - \frac{\left(1 + \frac{R_L}{R_0} + \frac{R_L^2}{R_0^2} - 3 \frac{R_L^3}{R_0^3} \right)}{\left(\frac{R_L^2}{R_0^2} + \frac{R_L}{R_0} + 1 \right)} \right] \right)^2} \quad \text{Ecuación 2.5-137}$$



F L U I D O S
N O N E W T O N I A N O S

3. FLUIDOS NO NEWTONIANOS

3.1 ANTECEDENTES DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS

En el capítulo dos, se analizó diferentes procesos utilizando los fluidos newtonianos, pero existen muchos otros fluidos que no se describen con la ecuación constitutiva de Newton y que da origen a las ecuaciones de Navier-Stokes [Ecuación 2.1-51]. Los fluidos que cuantitativa y cualitativamente difieren de estos, son llamados fluidos no newtonianos. La principal diferencia de los fluidos no newtonianos es que su viscosidad depende del gradiente de velocidad, pero pueden exhibir fenómenos adicionales, como efectos elásticos y esfuerzo de cedencia. Para describir los fluidos no newtoniano se mide la viscosidad variable, esfuerzos normales y respuestas viscoelásticas.

Ejemplo de fluidos no newtonianos son los polímeros fundidos o polímeros en solución con alto peso molecular, emulsiones, suspensiones, soluciones jabonosas, pastas, etc.

Se presentan a continuación experimentos que presentan diferencias entre los comportamientos newtonianos y los no newtonianos

El primer experimento muestra que el perfil de velocidad típico para flujo laminar presenta diferencias para la misma velocidad máxima.

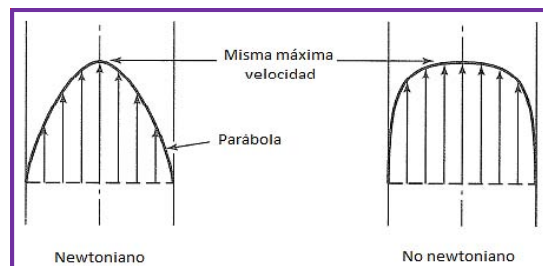


Figura 3.1-1 Comparación de un flujo laminar entre newtoniano y no newtoniano (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001, pág. 273)

Un segundo experimento muestra diferencias en la deformación de un pigmento inyectado con una jeringa a un fluido que se está bombeando dentro de un tubo. Si se apaga la bomba, el pigmento del fluido newtoniano permanece en su forma parabólica, mientras que para un líquido polimérico, el fluido comienza a “recuperarse”, es decir, se contrae de esta forma alargada y tratar de conseguir su estado original. (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001, pág. 274)

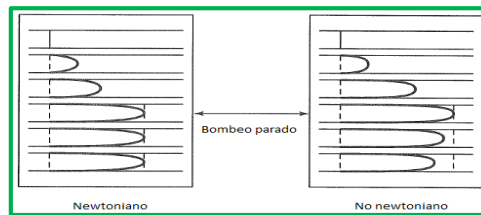


Figura 3.1-2 Recuperación solo de fluidos newtoniano después de suspender el flujo en un tubo (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001, pág. 274)

Se puede decir que los fluidos poliméricos se comportan como una banda elástica que regresan a su estado original, pero poco a poco empieza a perder elasticidad y fuerza, es decir, su “memoria se desvanece” y gradualmente “olvida” su estado inicial, por lo que a medida que se recupera, su memoria cada vez es más débil.

Un tercer experimento es el efecto de Weissenberg. El fenómeno presenta al fluido dentro de un vaso con una varilla girando en estado estacionario. El fluido no newtoniano asciende por la varilla, mientras, que los fluidos newtonianos responden a la fuerza centrífuga que provoca que se mueva radialmente hacia la pared del recipiente y cerca de la varilla la superficie se encuentra más bajo.

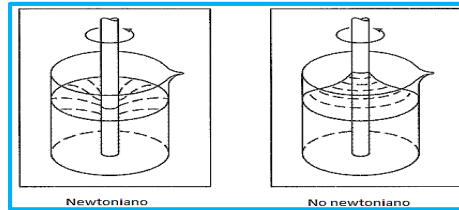


Figura 3.1-3 Efecto de Weissenberg de ascenso en una varilla

(Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001, pág. 275)

Se encuentran muchísimos otros ejemplos como: El sifón sin tubo, donde la acción de la aspiración puede continuar incluso si el sifón se eleva a varios centímetros por arriba de la superficie del líquido o la reducción de resistencia con pequeñas cantidades de polímeros, donde la pérdida por fricción en un flujo turbulento puede reducirse hasta de un 30% y 50% (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001, pág. 276)

I. Coeficientes en función de la rapidez de deformación de fluidos no newtonianos

- La viscosidad dinámica definida como ($\eta = \mu(\dot{\gamma})$), es una medida que indica la resistencia a la rapidez de deformación, es el coeficiente más extensamente usado, siempre es positivo y de fácil medición. (Morrison, 2001, pág. 170)
- El primer coeficiente del esfuerzo normal (Ψ_1), interpreta el comportamiento del fluido como si este estuviera en tensión en la dirección del flujo y proporciona una correlación a esta tensión, es positivo y de fácil medición. (Morrison, 2001, pág. 170)
- El segundo coeficiente de esfuerzo normal (Ψ_2) representa y atribuye una medida cuando el fluido está en tensión transversal a la dirección del fluido, casi siempre es negativo y con dificultad para su medición. (Morrison, 2001, pág. 170)

En una gráfica de solución concentrada de poli-butadieno, se muestra a la viscosidad y el primer coeficiente normal contra la rapidez de deformación ($\dot{\gamma}$).

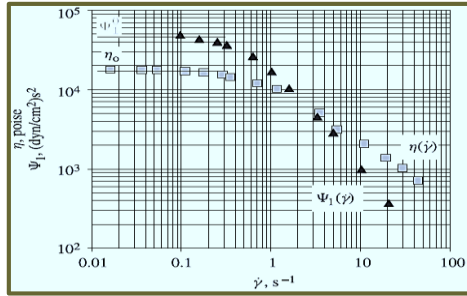


Figura 3.1-4 Viscosidad dinámica y primer coeficiente de esfuerzo normal contra la rapidez de deformación (Morrison, 2001, pág. 170)

Se observa en la gráfica que a cantidades bajas de rapidez de deformación, la viscosidad es constante, pero a medida que aumenta la rapidez de deformación, la viscosidad dinámica decrece y continua cayendo hasta por un factor de (10^4) . Los coeficientes del esfuerzo normal también disminuyen hasta por un factor de (10^7) . Éste comportamiento es casi universalmente observado en pesos moleculares grandes.

Además de estos tres coeficientes, existe una amplia variedad de propiedades que están en función de los parámetros cinemáticos como la rapidez de deformación $\left(\dot{\gamma} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$, por lo que para caracterizar estas propiedades se utilizan las funciones del material. Estas funciones del material, están basados en la medición de los esfuerzos con la intención de describir su respuesta mecánica. Las funciones se miden a través al uso de tensores cinemáticos, por ecuaciones constitutivas que predicen los componentes del esfuerzo o experimentalmente.

Se define a continuación las tres funciones de materia, que generalmente se utilizan para describir el comportamiento de fluidos no newtonianos incompresibles. Una de las variables es el esfuerzo cortante y las otras dos funciones son diferencias entre los esfuerzos normales. (Morrison, 2001, pág. 131)

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= -\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial x_y} \right) \\ \tau_{xx} - \tau_{yy} &= -\Psi_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x_y} \right)^2 \\ \tau_{yy} - \tau_{zz} &= -\Psi_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x_y} \right)^2\end{aligned}\quad \text{Ecuación 3-1}$$

Los esfuerzos normales en un flujo de corte, son los componentes de la diagonal principal del tensor de esfuerzos, los cuales son cero para fluidos newtonianos y distintos de cero para fluidos elásticos.

La diferencia entre los esfuerzos normales se explica debido a que no se puede separar independientemente el cálculo de la presión en el tensor de esfuerzos normales moleculares (π_{ii}), pero gracias a esta diferencia se elimina la necesidad de calcular la presión. Sin embargo para los gases no es necesario realizar la diferencia ya que la presión puede calcularse a través de alguna relación termodinámica. (Morrison, 2001, pág. 132)

II. Modelos de ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas son ecuaciones empíricas que fueron propuestos por investigadores con base a hipótesis del comportamiento observado y fundamentada por la mecánica continua para después obtener las funciones del material.

La validez de una ecuación constitutiva es juzgada por su habilidad de predecir los comportamientos del fluido, en especial la curva de la viscosidad contra la rapidez

de deformación. En ocasiones, el resultado de las ecuaciones constitutivas no es el deseado, ya que se necesita información adicional de estructura y movimiento molecular, pero este acercamiento es muy complejo matemáticamente. Por ello, es conveniente utilizar las ecuaciones constitutivas empíricas, tener conciencia del origen de la ecuación, sus predicciones y su alcance.

Los modelos de ecuaciones constitutivas más comunes son:

- Modelos para fluidos no newtonianos con viscosidad generalizada sin memoria, el cual es el modelo más simple para fluidos no newtonianos.
- Modelos viscoelásticos lineales con memoria que proporciona la descripción a las respuestas viscoelásticas pero solo funcionan con gradientes de desplazamiento muy pequeños.
- Modelos viscoelásticos no lineales con memoria, que resuelven a cualquier situación de flujo. Sin embargo, este modelo contiene un grado de dificultad matemática más alta. (Byron Bird, E. Stewart, & N. Lightfo, Fenómenos de Transporte, 2001)

3.1.1 Ecuación constitutiva de fluidos no newtonianos con viscosidad generalizada

La ecuación constitutiva para fluidos no newtonianos con viscosidad generalizada fue desarrollada a través de la ecuación constitutiva newtoniana para fluidos incompresibles [Ecuación 2.1-43], pero a diferencia de que la viscosidad no es constante y depende de la rapidez de deformación de corte, es decir ($\eta = \eta(\dot{\gamma})$).

$$\underline{\underline{\tau}} = -\eta(\dot{\gamma}) \left(\underline{\underline{\dot{\gamma}}} \right) \quad \text{Ecuación 3.1-1}$$

La función escalar $\eta(\dot{\gamma})$ es bastante general. Se debe de ajustar los datos, a fin de que esta función escalar sea introducida a la ecuación constitutiva de fluidos no

newtonianos de viscosidad variable y predecir con ello las propiedades del flujo. La restricción de esta ecuación es que no predice esfuerzos normales diferentes de cero.

Los principales modelos para obtener la ecuación constitutiva para fluidos no newtonianos con viscosidad generalizada sin memoria son: (Morrison, 2001, pág. 228)

- Modelo de ley de potencia o de Ostwald de Waele
- Modelo de Carreau-Yasuda
- Modelo de Bingham

En esta tesis se trabajará y se calcularán los diferentes perfiles de los fluidos no newtonianos, por medio del modelo de la ley de potencia o de Ostwald de Waele.

3.1.2 Modelo de ley de potencia o de Ostwald de Waele:

Este modelo describe la viscosidad a través de una función proporcional a alguna potencia de la velocidad de deformación de corte ($\dot{\gamma}$).

$$\eta(\dot{\gamma}) = m(\dot{\gamma})^{n-1} \qquad \text{Ecuación 3.2-1}$$

El modelo tiene dos parámetros que caracterizan al flujo y que deben encajar en los datos experimentales. Estos parámetros describen la forma de la curva en la gráfica (doblemente logarítmica) de la viscosidad no newtoniana (η) contra la rapidez de corte ($\dot{\gamma}$), donde el parámetro $(n - 1)$ es la pendiente de la curva y el segundo parámetro (m) llamado índice de consistencia es la intercepción del eje de las abscisas. Donde ($m [=] Pa \cdot seg^n$ y $n [=] adimensional$)

Este modelo se puede simplificar a el caso newtoniano si ($m = \mu$) y ($n = 0$). Si el parámetro es ($n > 1$) se observa una curva con pendiente positiva y el material es llamado dilatante o corte-espesante, donde el fluido se hace más grueso al estar

sometido a una rapidez de deformación. Si el parámetro es ($n < 1$) se observa que la curva tiene pendiente negativa y el material es llamado pseudoplástico.

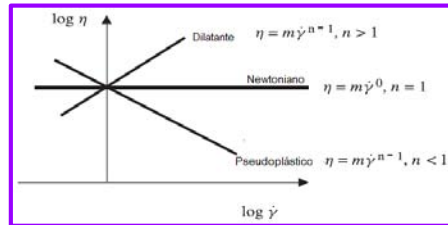


Figura 3.1.-5 Comportamiento de la viscosidad predicha por el Modelo de Ley de Potencia (Morrison, 2001, pág. 230)

La ley de la potencia se ha utilizado ampliamente en la industria de procesos de fabricación de polímeros, procesos de extrusión a rapidez de deformación de corte altas. Además, realiza un buen trabajo prediciendo datos de flujo volumétrico contra caída de presión.

Ventajas del modelo de la ley de la potencia:

- Un vistazo rápido de cómo se comporta el fluido.
- Sin gran dificultad los cálculos matemáticos.
- El éxito prediciendo datos del flujo volumétrico contra la caída de presión.

Desventajas del modelo de ley de la potencia:

- Este modelo no puede describir la viscosidad de un material que tiene una meseta en rapidez de corte pequeñas y que después cambia a rapidez de corte altas.
- No se puede obtener percepción molecular de este modelo.
- No predice comportamientos que dependan del tiempo: como el parámetro de tiempo de relajación (que es la rapidez en la que un fluido tarda en regresar a su estado original después de que cese el flujo).
- No se puede obtener los esfuerzos normales y por tanto pierde importante información de efectos no lineales. (Morrison, 2001, pág. 231)

3.2 FLUJO EN UN TUBO DE SECCIÓN TRANSVERSAL CIRCULAR

Considérese un fluido no newtoniano, que se mueve a través de un tubo de sección transversal circular, que viaja en la dirección de “ z ” por la influencia de una diferencia de presión con una longitud (L) y radio (R). Para la solución del problema, se utilizan las ecuaciones en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) por el tipo de geometría. (Morrison, 2001, pág. 236)

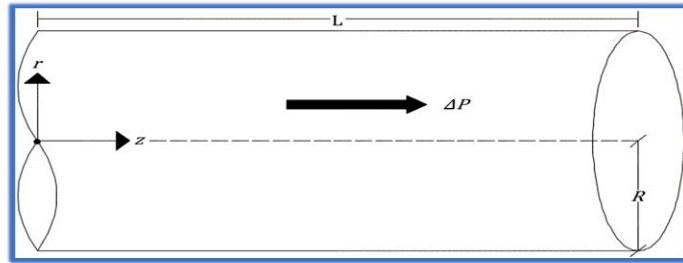


Figura 3.2-1 Flujo en un tubo de sección transversal circular bajo el efecto de un gradiente de presión en dirección “ z ”

3.2.1 Postulados y suposiciones

Se presentan aquí las premisas que simplifican las ecuaciones, para poder obtener los diferentes perfiles que se encuentran en el flujo de sección transversal circular.

- 1) Flujo estacionario.
- 2) Flujo laminar.
- 3) Fluido no newtoniano.
- 4) Fluido incomprensible.
- 5) Se ignoran los efectos finales.
- 6) El fluido se trabaja como si fuera un medio continuo.
- 7) Condición de adherencia en las paredes.
- 8) La velocidad únicamente se va a desarrollar en la dirección “ z ”, las demás son cero ($\underline{v} = (v_r, v_\theta, v_z) = (0, 0, v_z)$).

3.2.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y de momentum para fluidos incompresibles no-newtonianos por postulados

La ecuación de continuidad se resuelve como en el capítulo dos, sección “2.2”. La solución viene dada por la [Ecuación 2.2-1] y [Ecuación 2.2-5]. Ambos resultados proporcionan un nuevo postulado, que es usado para simplificar términos futuros:

- 10) La velocidad axial (v_z), no depende de las coordenadas “ θ ” y “ z ”. Entonces, la derivada de la velocidad axial (v_z), con respecto a cualquiera de estas dos coordenadas “ θ ” ó “ z ”, es igual a cero ($\frac{\partial v_z}{\partial \theta} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$).

Se prosigue con obtener la relación entre el tensor de esfuerzos ($\underline{\tau}$) y los componentes del tensor de la rapidez de deformación.

$$\underline{\tau} = -\eta (\underline{\dot{\gamma}}) = -\eta (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) \quad \text{Ecuación 3.2-1}$$

$$\nabla \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 3.2-2}$$

Debido al postulado (9) el gradiente de velocidades toma la forma de:

$$\nabla \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 3.2-3}$$

El tensor de rapidez de deformación es:

$$\underline{\dot{\gamma}} = (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 3.2-4}$$

Entonces, los componentes del tensor de esfuerzos son:

$$\underline{(\underline{\tau})} = -\eta \underline{(\underline{\dot{\gamma}})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\eta \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\eta \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 3.2-5}$$

Pero la función $(\eta(\dot{\gamma}))$, que proviene del modelo de la Ley de Potencia es:

$$\eta = m(\dot{\gamma})^{n-1} \quad \text{Ecuación 3.2-6}$$

Para evaluar la ecuación anterior debemos calcular $(\dot{\gamma})$ del tensor $(\underline{\dot{\gamma}})$ como sigue:

$$\dot{\gamma} = \underline{|\underline{\dot{\gamma}}|} = + \sqrt{\frac{\underline{\dot{\gamma}} : \underline{\dot{\gamma}}^T}{2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2} = \pm \left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \quad \text{Ecuación 3.2-7}$$

Por la definición de magnitud, el resultado siempre debe ser positivo. Por tanto, para escoger el signo que precede a $\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$ en la [Ecuación 3.2-7], depende de si la derivada es positiva o negativa. En un problema de flujo en un tubo de sección transversal circular, se observa que al incrementar (r) la velocidad decrece, en consecuencia la derivada $\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$ es negativa, por esta razón, para que la expresión completa sea positiva, el correcto signo de la [Ecuación 3.2-7] es negativo y tiene la forma: (Morrison, 2001, pág. 240)

$$(\dot{\gamma}) = \underline{|\underline{\dot{\gamma}}|} = \left(-\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) > 0 \quad \text{Ecuación 3.2-8}$$

Así, el modelo de la Ley de Potencia, tiene la forma:

$$\eta = m \left(-\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^{n-1} = m \left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^{n-1} \quad \text{Ecuación 3.2-9}$$

Por el inciso (9) cambia de derivadas parciales a derivadas totales, con ello, el componente cortante del tensor de esfuerzos es:

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = -\eta \left(\frac{dv_z}{dr} \right) = -m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^{n-1} \left(\frac{dv_z}{dr} \right) = m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^{n-1} \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) = m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \quad \text{Ecuación 3.2-10}$$

Debido a la [Ecuación 3.2-5] y la [Ecuación 3.2-10], se crea un nuevo postulado:

- 11) El único componente del tensor de esfuerzos que no se anula es ($\tau_{rz} = \tau_{zr}$) y este componente solo depende de "r".

Se procede con la eliminación de términos en las ecuaciones de momentum por los postulados y suposiciones establecidas.

Se inicia con la reducción de términos en la dirección "r":

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \quad \text{Ecuación 3.2-11}$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zr} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right]$$

Ecuación de momentum en dirección "r" resultante:

$$0 = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \text{Ecuación 3.2-12}$$

La [Ecuación 3.2-12] señala que la presión modificada no depende de la posición "r".

Simplificación de términos de la ecuación de momentum en la dirección “θ”:

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) =$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \wp}{\partial \theta} + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} - \frac{\tau_{\theta r}}{r} - \frac{\tau_{r\theta}}{r} \right]$$

Ecuación 3.2-13

Ecuación de momentum en dirección “θ” resultante:

$$0 = \frac{\partial \wp}{\partial \theta}$$

Ecuación 3.2-14

Esta última ecuación muestra que la presión modificada no varía ni depende de la posición en “θ”.

Eliminación de términos de la ecuación de momentum en dirección “z”:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) =$$

$$-\frac{\partial \wp}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right]$$

Ecuación 3.2-15

Ecuación de momentum en dirección “z” resultante:

$$-\frac{\partial \wp}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = 0$$

Ecuación 3.2-16

A esta última ecuación resultante, se sustituye la [Ecuación 3.2-10] del modelo de la Ley de la potencia, como a continuación:

$$-\frac{\partial \wp}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) \right) = 0$$

Ecuación 3.2-17

Ya que el parámetro (m) es una constante, sale de la derivada parcial, como sigue:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) = 0 \quad \text{Ecuación 3.2-18}$$

La ecuación de momentum en dirección "z" [Ecuación 3.2-18], es la que se resuelve, para obtener el perfil ($v_z = v_z(r)$).

3.2.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad

La [Ecuación 3.2-18], señala que la presión modificada (ϕ) es una función que solo depende de (z) y por el postulado (9) la velocidad (v_z) es una función que solo depende de (r), por lo tanto, esta ecuación puede ser sustituida por derivadas ordinarias.

Así mismo, en la [Ecuación 3.2-18], la única forma en que la función de la presión más la función de la velocidad sea igual a cero, es que cada función individual sea una constante como por ejemplo (k_0) y por consiguiente esta se reduce a:

$$-\frac{m}{r} \frac{d}{dr} \left(r \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) = \frac{d\phi}{dz} = k_0 \quad \text{Ecuación 3.2-19}$$

Y con ello, cada término puede ser separado en dos ecuaciones:

$$-\frac{m}{r} \frac{d}{dr} \left(r \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) = k_0$$

$$\frac{d\phi}{dz} = k_0 \quad \text{Ecuación 3.2-20}$$

Se integra la presión modificada de la [Ecuación 3.2-20] separando variable y se obtiene:

$$\int d\wp = k_0 \int dz \quad \text{Ecuación 3.2-21}$$

$$\wp = k_0 \cdot z + k_1 \quad \text{Ecuación 3.2-22}$$

Con las condiciones de frontera, las dos constantes de integración se determinan:

$$\text{C.F.1:} \quad \text{En } z = 0 \quad \wp = \wp_0 \quad \text{Ecuación 3.2-23}$$

$$\text{C.F.2:} \quad \text{En } z = L \quad \wp = \wp_L \quad \text{Ecuación 3.2-24}$$

A partir de la C.F.1:

$$\wp_0 = k_0 \cdot (0) + k_1 \quad \rightarrow \quad k_1 = \wp_0 \quad \text{Ecuación 3.2-25}$$

A partir de la C.F.2:

$$\wp_L = k_0 \cdot (L) + \wp_0 \quad \rightarrow \quad k_0 = \frac{\wp_L - \wp_0}{L} \quad \text{Ecuación 3.2-26}$$

Con el resultado de la ecuación anterior, la [Ecuación 3.2-19] puede ser escrita como:

$$-\frac{m}{r} \frac{d}{dr} \left(r \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) = k_0 = \frac{\wp_L - \wp_0}{L} \quad \text{Ecuación 3.2-27}$$

Se reorganizan términos:

$$\frac{d}{dr} \left(r \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) = - \left(\frac{\wp_L - \wp_0}{mL} \right) r \quad \text{Ecuación 3.2-28}$$

Se integra, separando variables:

$$\int d\left(r\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n\right) = -\left(\frac{\rho_L - \rho_0}{mL}\right) \int r dr \quad \text{Ecuación 3.2-29}$$

$$r\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n = -\left(\frac{\rho_L - \rho_0}{mL}\right) \frac{1}{2} r^2 + k_2 \quad \text{Ecuación 3.2-30}$$

Se acomodan los términos, $(\rho_L - \rho_0 = \Delta\rho)$ y se despeja (n) como sigue:

$$\frac{dv_z}{dr} = -\left(\left(\frac{-\Delta\rho}{2mL}\right)(r) + \frac{k_2}{r}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.2-31}$$

Debido a que "r" se encuentra en el denominador, si esta forma el valor de "cero" se indetermina la ecuación, para resolver esta indeterminación, la constante (k_2) toma el valor de "cero" y de esta manera la [Ecuación 3.2-31] es de la forma:

$$\frac{dv_z}{dr} = -\left(\left(\frac{-\Delta\rho}{2mL}\right)(r)\right)^{\frac{1}{n}} = -\left(\frac{-\Delta\rho}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} (r)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.2-32}$$

Se integra nuevamente, separando variables:

$$\int dv_z = -\left(\frac{-\Delta\rho}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \int (r)^{\frac{1}{n}} dr \quad \text{Ecuación 3.2-33}$$

$$v_z = -\left(\frac{-\Delta\rho}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{r^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \right] + k_3 \quad \text{Ecuación 3.2-34}$$

La constante de integración de la ecuación anterior, se determina a partir de las condiciones de frontera, aplicando la suposición de adherencia, como sigue:

$$\text{C.F.3:} \quad \text{En } r = R \quad v_z = 0 \quad \text{Ecuación 3.2-35}$$

A partir de C.F.3:

$$0 = -\left(\frac{-\Delta\phi}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \right] + k_3 \quad \text{Ecuación 3.2-36}$$

$$k_3 = \left(\frac{-\Delta\phi}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \right] \quad \text{Ecuación 3.2-37}$$

El resultado de la constante anterior se sustituye en la ecuación [Ecuación 3.2-34]:

$$v_z = -\left(\frac{-\Delta\phi}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{r^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \right] + \left(\frac{-\Delta\phi}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \right] \quad \text{Ecuación 3.2-38}$$

Se factoriza y se obtiene:

$$v_z = \left(\frac{-\Delta\phi}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[-r^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} + R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \right] \quad \text{Ecuación 3.2-39}$$

Se multiplica por $\left(\frac{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}\right)$:

$$v_z = \left(\frac{-\Delta\phi}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \left[-\frac{r^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}} + \frac{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}} \right] \quad \text{Ecuación 3.2-40}$$

Se ordena términos:

$$v_z = \left(\frac{-\Delta\phi}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \right] \quad \text{Ecuación 3.2-41}$$

Se observa en el resultado del perfil de velocidades de la ecuación anterior, que si ($n = 1$), se reduce a un caso newtoniano de la [Ecuación 2.2-36].

$$v_z = \left(\frac{(-\Delta\phi)}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1 \cdot R^{\left(\frac{1+1}{1}\right)}}{1+1}\right) \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\left(\frac{1+1}{1}\right)}\right] = \left(\frac{(-\Delta\phi) R^2}{4mL}\right) \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad \text{Ecuación 3.2-42}$$

Se observa en el resultado del perfil de velocidades de la ecuación anterior, que si ($n = 1$), se reduce a un caso newtoniano de la [Ecuación 2.2-36].

3.2.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades

Se presentan cinco propiedades derivadas del perfil de velocidades [Ecuación 3.2-41], las cuales son muy utilizadas en el ámbito industrial.

A) La velocidad máxima

La velocidad máxima en un flujo dentro de un tubo ocurre para ($r = 0$), entonces:

$$v_{z(\max)} = \left(\frac{(-\Delta\phi)}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \left[1 - \frac{(0)^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}\right] \quad \text{Ecuación 3.2-43}$$

Se obtiene:

$$v_{z(\max)} = \left(\frac{(-\Delta\phi)}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \quad \text{Ecuación 3.2-44}$$

Donde el perfil de velocidades de la [Ecuación 3.2-42], se representa por:

$$v_z = v_{z(\max)} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right] \quad \text{Ecuación 3.2-45}$$

B) El flujo volumétrico

Con la definición del flujo volumétrico, se sustituye el perfil de velocidades de la [Ecuación 3.2-42], como a continuación:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R (v_z) r \, dr \, d\theta$$

Ecuación 3.2-46

$$Q = 2\pi \int_0^R (v_z) r \, dr = 2\pi \int_0^R v_{z(max)} \left[1 - \frac{r^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}} \right] r \, dr$$

Los términos constantes salen de la integral y se integra cada sumando:

$$Q = 2\pi v_{z(max)} \int_0^R \left[r - \frac{r^{\left(\frac{2n+1}{n}\right)}}{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}} \right] dr = 2\pi v_{z(max)} \int_0^R r \, dr - \frac{1}{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}} \int_0^R r^{\left(\frac{2n+1}{n}\right)} dr \quad \text{Ecuación 3.2-47}$$

Se calcula la integral:

$$Q = 2\pi v_{z(max)} \left(\left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R - \frac{1}{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}} \left[\frac{r^{\left(\frac{3n+1}{n}\right)}}{\left(\frac{3n+1}{n}\right)} \right]_0^R \right) \quad \text{Ecuación 3.2-48}$$

Se evalúan en los límites de integración:

$$Q = 2\pi v_{z(max)} \left(\left[\frac{R^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] - \frac{1}{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}} \left[\frac{R^{\left(\frac{3n+1}{n}\right)}}{\left(\frac{3n+1}{n}\right)} - \frac{0^{\left(\frac{3n+1}{n}\right)}}{\left(\frac{3n+1}{n}\right)} \right] \right) \quad \text{Ecuación 3.2-49}$$

$$Q = 2\pi v_{z(max)} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}} \left[\frac{R^{\left(\frac{3n+1}{n}\right)}}{\left(\frac{3n+1}{n}\right)} \right] \right) = \pi v_{z(max)} \left(\frac{2R^2}{2} - \frac{2R^2}{\left(\frac{3n+1}{n}\right)} \right) \quad \text{Ecuación 3.2-50}$$

Se simplifican términos semejantes:

$$Q = \pi v_{z(max)} \left(R^2 - \frac{2nR^2}{(3n+1)} \right) = \pi v_{z(max)} \left(\frac{(3n+1)R^2 - 2nR^2}{(3n+1)} \right) \quad \text{Ecuación 3.2-51}$$

$$Q = \pi v_{z(max)} \left(\frac{3nR^2 + R^2 - 2nR^2}{(3n+1)} \right) = \pi v_{z(max)} \left(\frac{nR^2 + R^2}{3n+1} \right) = \pi v_{z(max)} R^2 \left(\frac{n+1}{3n+1} \right) \quad \text{Ecuación 3.2-52}$$

El flujo volumétrico tiene entonces la siguiente estructura:

$$Q = \left(\frac{n+1}{3n+1} \right) \pi R^2 v_{z(max)} \quad \text{Ecuación 3.2-53}$$

C) La velocidad promedio

La velocidad promedio se define como el cociente del flujo volumétrico entre el área.

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z \cdot r \, dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr d\theta} = \frac{\left(\frac{n+1}{3n+1} \right) \pi R^2 v_{z(max)}}{\pi R^2} \quad \text{Ecuación 3.2-54}$$

$$\langle v_z \rangle = \left(\frac{n+1}{3n+1} \right) v_{z(max)}$$

La relación entre la velocidad promedio y la velocidad máxima, es

$$\frac{\langle v_z \rangle}{v_{z(max)}} = \left(\frac{n+1}{3n+1} \right) \quad \text{Ecuación 3.2-55}$$

D) Flujo másico

Si se realiza el producto de la densidad por el flujo volumétrico, se obtiene el flujo másico:

$$W = \rho * Q = \left(\frac{n+1}{3n+1} \right) \rho \pi R^2 v_{z(max)} \quad \text{Ecuación 3.2-56}$$

E) La magnitud del esfuerzo cortante

Con el perfil de velocidades ($v_z(r, z)$) y la ecuación constitutiva para fluidos newtonianos, se puede obtener el tensor de esfuerzos ($\underline{\tau}$).

Se retoma el perfil de velocidades [Ecuación 2.5-90]:

Se retoma la expresión del el esfuerzo cortante del modelo de ley de potencia:

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \quad \text{Ecuación 3.2-57}$$

Se calcula la derivada del perfil de velocidades [Ecuación 3.2-41]:

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{(-\Delta\phi)}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} (r)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.2-58}$$

Al sustituir la ecuación anterior en la [Ecuación 3.2-57] la expresión del esfuerzo cortante toma la siguiente forma:

$$\tau_{rz} = m \left(-\left(\left(\frac{(-\Delta\phi)}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} (-r)^{\frac{1}{n}} \right) \right)^n \quad \text{Ecuación 3.2-59}$$

$$\tau_{rz} = \frac{r(-\Delta\phi)}{2L} \quad \text{Ecuación 3.2-60}$$

De forma experimental la cantidad que se mide es el esfuerzo cortante en la pared y la expresión en ese punto tiene la forma:

$$\tau_{rz}(R) = \tau_{wall,w} = \frac{R(-\Delta\phi)}{2L} \quad \text{Ecuación 3.2-61}$$

F) El coeficiente de fricción

El coeficiente de fricción, relacionado con la pérdida de presión, se calcula como el cociente del esfuerzo cortante en la pared entre el flux convectivo:

$$f = \frac{\tau_w}{\rho \langle v \rangle^2} = \frac{\frac{R(-\Delta\phi)}{2L}}{\rho \left(v_{z(max)} \left(\frac{n+1}{3n+1} \right) \right)^2} \quad \text{Ecuación 3.2-62}$$

Se reacomodan los términos de la ecuación anterior, para obtener el coeficiente de fricción, como:

$$f = \frac{R(-\Delta\phi)}{\rho 2L (v_{z(max)})^2} \left(\frac{3n+1}{n+1} \right)^2 \quad \text{Ecuación 3.2-63}$$

3.3 FLUJO ENTRE DOS PAREDES PARALELAS PLANAS

Considere un fluido que se mueve en la dirección “ x ”, entre dos placas planas, horizontales y paralelas por la influencia de una diferencia de presión, con longitud (L) y altura de ($2y_0$). (Morrison, 2001, pág. 242)

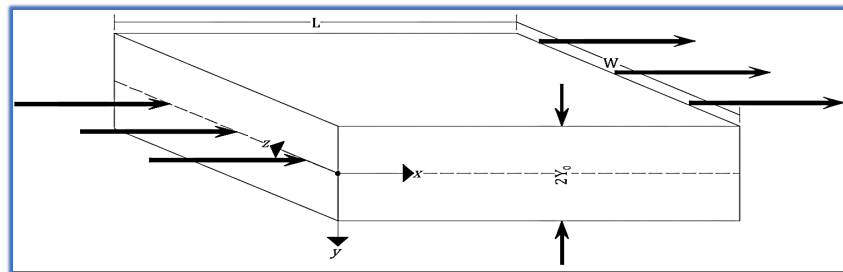


Figura 3.3-1 Flujo entre dos paredes planas en dirección “ x ” bajo el efecto de un gradiente de presión

3.3.1 Postulados y suposiciones

Se presentan aquí las premisas que simplifican las ecuaciones, para poder obtener los diferentes perfiles, que se encuentran en el flujo entre dos paredes planas.

- 1) Flujo estacionario
- 2) Flujo laminar: Con un Reynolds lo suficientemente bajo para conservar su carácter laminar.
- 3) Fluido no newtoniano.
- 4) Fluido incompresible.
- 5) Se ignoran los efectos finales.
- 6) La longitud del ancho de las dos paredes se considera como infinito.
- 7) El fluido se trabaja como si fuera un medio continuo.
- 8) Condición de adherencia en la pared.
- 9) La velocidad únicamente se va a desarrollar en la dirección “ x ” las demás son cero $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v_x, 0, 0)$.

3.3.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y de momentum para fluidos incompresibles no-newtonianos por postulados

La ecuación de continuidad se resuelve como en el capítulo dos, sección “2.3”. La solución viene dada por la [Ecuación 2.3-1] y [Ecuación 2.3-5]. Ambos resultados proporcionan un nuevo postulado, que se usa para simplificar términos futuros:

- 10) La velocidad (v_x), no depende de las coordenadas “x” y “z”. Entonces, la derivada de la velocidad (v_x), con respecto a cualquiera de estas dos coordenadas “ θ ” ó “z”, es igual a cero ($\frac{\partial v_x}{\partial \theta} = \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$).

Se prosigue con obtener la relación entre el tensor de esfuerzos ($\underline{\tau}$) y los componentes del tensor de la rapidez de deformación.

$$\underline{\tau} = -\eta \underline{\dot{\gamma}} = -\eta (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) \quad \text{Ecuación 3.3-1}$$

Debido al postulado (9) el gradiente de velocidades toma la forma de:

$$\nabla \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 3.3-2}$$

El tensor de rapidez de deformación es:

$$\underline{\dot{\gamma}} = (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 3.3-3}$$

Entonces, los componentes del tensor de esfuerzos son:

$$\underline{(\underline{\tau})} = -\eta \underline{(\underline{\dot{\gamma}})} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 \\ -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 3.3-4}$$

Pero la función $(\eta(\dot{\gamma}))$, que proviene del modelo de la Ley de Potencia es:

$$\eta = m(\dot{\gamma})^{n-1} \quad \text{Ecuación 3.3-5}$$

Para evaluar la ecuación anterior debemos calcular $(\dot{\gamma})$ del tensor $(\underline{\dot{\gamma}})$ como sigue:

$$\dot{\gamma} = \underline{|\underline{\dot{\gamma}}|} = + \sqrt{\frac{\underline{\dot{\gamma}} : \underline{\dot{\gamma}}^T}{2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2} = \pm \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \quad \text{Ecuación 3.3-6}$$

Por la definición de magnitud, siempre el resultado es positivo. Por tanto, para escoger el signo que precede a $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$ en la [Ecuación 3.3-6], depende de si la derivada es positiva o negativa. En este problema de flujo entre dos paredes paralelas planas, se observa que al incrementar (y) la velocidad decrece, en consecuencia la derivada $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$ es negativa, por esta razón, para que la expresión completa sea positiva, el correcto signo de la [Ecuación 3.3-6] es negativo y tiene la forma: (Morrison, 2001, pág. 240)

$$(\dot{\gamma}) = \underline{|\underline{\dot{\gamma}}|} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) > 0 \quad \text{Ecuación 3.3-7}$$

Así, el modelo de la Ley de Potencia, tiene la forma:

$$\eta = m \left(-\frac{dv_x}{dy}\right)^{n-1} \quad \text{Ecuación 3.3-8}$$

Entonces, el componente cortante del tensor de esfuerzos es:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = -\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -m \left(-\frac{dv_x}{dy} \right)^{n-1} \left(\frac{dv_x}{dy} \right) = m \left(-\frac{dv_x}{dy} \right)^{n-1} \left(-\frac{dv_x}{dy} \right) = m \left(-\frac{dv_x}{dy} \right)^n \quad \text{Ecuación 3.3-9}$$

Debido a la [Ecuación 3.3-4] y la [Ecuación 3.3-9], se crea un nuevo postulado

- 11) El único componente del tensor de esfuerzos que no se anula es $(\tau_{yx} = \tau_{xy})$ y este componente solo depende de "y".

Se procede con la eliminación de términos en las ecuaciones de momentum por los postulados y suposiciones establecidas.

Se inicia la reducción de términos en la dirección "x":

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right] \quad \text{Ecuación 3.3-10}$$

Ecuación de momentum en dirección "x" la resultante:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}) = 0 \quad \text{Ecuación 3.3-11}$$

Reducción de términos en dirección "y":

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right] \quad \text{Ecuación 3.3-12}$$

Ecuación de momentum en dirección "y" resultante:

$$0 = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{Ecuación 3.3-13}$$

Esta última ecuación revela que la presión modificada no varía ni depende de la posición en “y”.

Reducción de términos en la ecuación de momentum en dirección “z”:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \phi}{\partial z} - \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] \quad \text{Ecuación 3.3-14}$$

Ecuación de momentum en dirección “z” resultante:

$$0 = - \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{Ecuación 3.3-15}$$

Esta última ecuación revela que la presión modificada no varía ni depende de la posición en “z”.

Del resultado de la ecuación de momentum en dirección “x” [Ecuación 3.3-11], se sustituye el modelo de la ley de potencia [Ecuación 3.3-9]

$$- \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(m \left(- \frac{dv_x}{dy} \right)^n \right) = 0 \quad \text{Ecuación 3.3-16}$$

Al resolver la ecuación anterior, se obtiene el perfil de velocidades $v_x(y)$.

3.3.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad

De la misma forma que se resuelve el problema para un tubo de sección transversal circular, la [Ecuación 3.3-16] se transforma en una ecuación diferencial ordinaria, donde cada término depende de una variable diferente.

Así mismo, en la [Ecuación 3.3-16], la única forma en que la función de la presión más la función de la velocidad sea igual a cero es que cada función individual sea una constante como por ejemplo (k_0) y por consiguiente esta se reduce a:

$$-\frac{d}{dy} \left(m \left(-\frac{dv_x}{dy} \right)^n \right) = \frac{\partial \wp}{\partial x} = k_0 \quad \text{Ecuación 3.3-17}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(m \left(-\frac{dv_x}{dy} \right)^n \right) = k_0 \quad \text{Ecuación 3.3-18}$$

$$\frac{d\wp}{dx} = k_0$$

Se integra la presión modificada de la [Ecuación 3.3-18], separando variables:

$$\int d\wp = k_0 \int dx \quad \text{Ecuación 3.3-19}$$

$$\wp = k_0 \cdot x + k_1 \quad \text{Ecuación 3.3-20}$$

Las dos constantes de integración de la ecuación anterior, se determinan a partir de las condiciones de frontera, las cuales se indican a continuación:

$$\text{C.F.1:} \quad \text{En } x = 0 \quad \wp = \wp_0 \quad \text{Ecuación 3.3-21}$$

$$\text{C.F.2:} \quad \text{En } x = L \quad \wp = \wp_L \quad \text{Ecuación 3.3-22}$$

A partir de C.F.1:

$$\wp_0 = k_0 \cdot (0) + k_1 \quad \rightarrow \quad k_1 = \wp_0 \quad \text{Ecuación 3.3-23}$$

A partir de C.F.2:

$$\wp_L = k_0 \cdot (L) + \wp_0 \quad \rightarrow \quad k_0 = \frac{\wp_L - \wp_0}{L} \quad \text{Ecuación 3.3-24}$$

Se sustituye la ecuación anterior en la [Ecuación 3.3-17] y esta puede ser escrita como:

$$-\frac{d}{dy} \left(m \left(-\frac{dv_x}{dy} \right)^n \right) = \frac{\rho_L - \rho_0}{L} = k_0 \quad \text{Ecuación 3.3-25}$$

La constante (m) no depende de la derivada. Se separan las variables de forma:

$$d \left(-\frac{dv_x}{dy} \right)^n = - \left(\frac{\rho_L - \rho_0}{mL} \right) dy \quad \text{Ecuación 3.3-26}$$

Se integra y ($\rho_L - \rho_0 = \Delta\rho$):

$$\int d \left(-\frac{dv_x}{dy} \right)^n = \int \left(\frac{-\Delta\rho}{mL} \right) dy \quad \text{Ecuación 3.3-27}$$

$$\left(-\frac{dv_x}{dy} \right)^n = \left(\frac{-\Delta\rho}{mL} \right) y + k_1$$

Ecuación 3.3-28

$$-\frac{dv_x}{dy} = \left(\left(\frac{-\Delta\rho}{mL} \right) y + k_1 \right)^{\frac{1}{n}}$$

La constante de integración de la ecuación anterior se determina con la siguiente condición de frontera:

$$\text{C.F.3:} \quad \text{En } y = 0 \quad \frac{dv_x}{dy} = 0 \quad \text{Ecuación 3.3-29}$$

A partir de la C.F.3:

$$0 = \left(\left(\frac{-\Delta\rho}{mL} \right) (0) + k_1 \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow k_1 = 0 \quad \text{Ecuación 3.3-30}$$

$$-\frac{dv_x}{dy} = \left(\frac{-\Delta\rho}{mL} \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.3-31}$$

Se integra separan las variables de la [Ecuación 3.3-31] y se integra:

$$\int dv_x = -\left(\frac{-\Delta\phi}{mL}\right)^{\frac{1}{n}} \int y^{\frac{1}{n}} dy \quad \text{Ecuación 3.3-32}$$

$$v_x = -\left(\frac{-\Delta\phi}{mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right) y^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} + k_2 \quad \text{Ecuación 3.3-33}$$

La constante de integración de la ecuación anterior, se determina a partir de la siguiente condición de frontera:

$$\text{C.F.4:} \quad \text{En } y = y_0 \quad v_x = 0 \quad \text{Ecuación 3.3-34}$$

A partir de la C.F.4:

$$0 = -\left(\frac{-\Delta\phi}{mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) y_0^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} + k_2 \quad k_2 = \left(\frac{-\Delta\phi}{mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) y_0^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \quad \text{Ecuación 3.3-35}$$

Se sustituye la constante anterior en la [Ecuación 3.3-33] y tiene la siguiente forma:

$$v_x = -\left(\frac{-\Delta\phi}{mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) y^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} + \left(\frac{-\Delta\phi}{mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) y_0^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \quad \text{Ecuación 3.3-36}$$

Se factoriza:

$$v_x = \left(\frac{-\Delta\phi}{mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[-y^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} + y_0^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right] \quad \text{Ecuación 3.3-37}$$

Se multiplica por $\left(\frac{y_0^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{y_0^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}\right)$:

$$v_x = \left(\frac{-\Delta\phi}{mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) y_0^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \left[-\frac{y^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{y_0^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}} + 1 \right] \quad \text{Ecuación 3.3-38}$$

Se reacomodan los términos:

$$v_x = \left(\frac{-\Delta\phi}{mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) y_0^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \left[1 - \frac{y^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{y_0^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}} \right] \quad \text{Ecuación 3.3-39}$$

Si ($n = 0$), se simplifica a un perfil de fluido newtoniano

$$v_x = \left(\frac{(-\Delta\phi)}{mL}\right)^{\frac{1}{1}} \left(\frac{1}{1+1}\right) y_0^{\left(\frac{1+1}{1}\right)} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\left(\frac{1+1}{1}\right)} \right] = \left(\frac{(-\Delta\phi)}{2mL}\right) y_0^2 \left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 \right] \quad \text{Ecuación 3.3-40}$$

3.3.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades

Se presentan cinco propiedades derivadas del perfil de velocidades [Ecuación 3.3-39], las cuales son muy utilizadas en el ámbito industrial.

A) La velocidad máxima

La velocidad máxima ocurre cuando el perfil de velocidades la ($y = 0$) como:

$$v_{x(\max)} = \left(\frac{(-\Delta\phi)}{mL}\right) \left(\frac{n}{n+1}\right) y_0^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \left[1 - \left(\frac{0}{y_0}\right)^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \right] \quad \text{Ecuación 3.3-41}$$

$$v_{x(\max)} = \left(\frac{(-\Delta\phi)}{mL}\right) \left(\frac{n}{n+1}\right) y_0^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \quad \text{Ecuación 3.3-42}$$

Donde el perfil de velocidades de la [Ecuación 3.3-39], se representa por:

$$v_x = v_{x(max)} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0} \right)^{\left(\frac{n+1}{n} \right)} \right] \quad \text{Ecuación 3.3-43}$$

B) El flujo volumétrico

Con la definición del flujo volumétrico:

$$Q = \int_0^w \int_0^{y_0} v_x dy dz \quad \text{Ecuación 3.3-44}$$

Se sustituye el perfil de velocidades de la [Ecuación 3.3-43], como a continuación:

$$Q = \int_0^w \int_0^{y_0} v_{x(max)} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0} \right)^{\left(\frac{n+1}{n} \right)} \right] dy dz \quad \text{Ecuación 3.3-45}$$

Se integra separando variables y se evalúan en los límites de integración:

$$Q = w v_{x(max)} \int_0^{y_0} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0} \right)^{\left(\frac{n+1}{n} \right)} \right] dy = w v_{x(max)} \left[y - \left(\frac{n}{2n+1} \right) \frac{y^{\left(\frac{2n+1}{n} \right)}}{y_0^{\left(\frac{n+1}{n} \right)}} \right]_0^{y_0} \quad \text{Ecuación 3.3-46}$$

$$w v_{x(max)} \left[y_0 - \left(\frac{n}{2n+1} \right) \frac{y_0^{\left(\frac{2n+1}{n} \right)}}{y_0^{\left(\frac{n+1}{n} \right)}} \right]$$

Se simplifican términos:

$$Q = w v_{x(max)} \left[y_0 - \left(\frac{n}{2n+1} \right) y_0 \right] = w v_{x(max)} \left[\frac{(2n+1)y_0 - ny_0}{(2n+1)} \right] \quad \text{Ecuación 3.3-47}$$

La expresión del flujo volumétrico es:

$$Q = \left(\frac{n+1}{2n+1} \right) w v_{x(max)} y_0 \quad \text{Ecuación 3.3-48}$$

C) La velocidad promedio

La velocidad promedio se calcula como:

$$\begin{aligned} \langle v_x \rangle &= \frac{\int_0^w \int_0^{y_0} (v_x) dy dz}{\int_0^w \int_0^{y_0} dy dz} = \frac{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) w v_{x(max)} y_0}{w \int_0^{y_0} dy} = \frac{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) v_{x(max)} y_0}{[y]_0^{y_0}} \\ &= \frac{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) v_{x(max)} y_0}{y_0} \end{aligned}$$

Ecuación 3.3-49

Se simplifica y la expresión de la velocidad promedio es:

$$\langle v_x \rangle = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) v_{x(max)}$$

Ecuación 3.3-50

La relación entre la velocidad promedio y la velocidad máxima es:

$$\frac{\langle v_x \rangle}{v_{x(max)}} = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)$$

Ecuación 3.3-51

D) Flujo másico

El flujo másico tiene la forma:

$$W = \rho * Q = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) w \rho v_{x(max)} y_0$$

Ecuación 3.3-52

E) La magnitud del esfuerzo cortante

Retomando el esfuerzo cortante del modelo de la ley de potencias:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = m \left(-\frac{dv_x}{dy}\right)^n$$

Ecuación 3.3-53

La derivada del perfil de velocidades [Ecuación 3.3-40]:

$$\frac{dv_x}{dy} = - \left(\frac{-\Delta\phi}{mL} \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.3-54}$$

Se sustituye la ecuación anterior en la [Ecuación 3.3-53], como a continuación:

$$\tau_{yx} = m \left(\left(\frac{-\Delta\phi}{mL} \right)^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} \right)^n \quad \text{Ecuación 3.3-55}$$

$$\tau_{yx} = \left(\frac{-\Delta\phi}{L} \right) y \quad \text{Ecuación 3.3-56}$$

La expresión del esfuerzo cortante en la pared, tiene la forma:

$$\tau_{rz}(y_0) = \tau_{wall,w} = \left(\frac{-\Delta\phi}{L} \right) y_0 \quad \text{Ecuación 3.3-57}$$

F) El coeficiente de fricción

El coeficiente de fricción tiene la forma:

$$f = \frac{\tau_w}{\rho \langle v \rangle^2} = \frac{\left(\frac{-\Delta\phi}{L} \right) y_0}{\rho \left(\left(\frac{n+1}{2n+1} \right) v_{x(max)} \right)^2} \quad \text{Ecuación 3.3-58}$$

Se simplifica y se obtiene:

$$f = \frac{y_0(-\Delta\phi)}{\rho L (v_{x(max)})^2} \left(\frac{2n+1}{n+1} \right)^2 \quad \text{Ecuación 3.3-59}$$

3.4 FLUJO AXIAL EN UNA REGIÓN ANULAR ENTRE DOS CILINDROS COAXIALES

Considere un fluido que se mueve en un tubo vertical de longitud (L), de radio interno (kR) y de radio externo (R). El líquido fluye en la dirección “ z ”, en contra de la acción de la gravedad por la influencia de una diferencia de presión. (W. Hanks & M. Larsen, 1979)

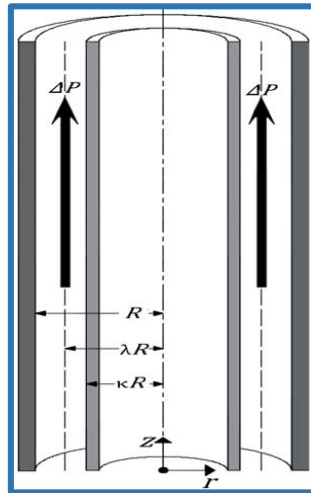


Figura 3.4-1 Flujo axial en una región anular entre dos cilindros coaxiales que circula por efecto de un gradiente de presión

3.4.1 Postulados y suposiciones

Se presentan aquí las premisas que simplifican las ecuaciones, para poder obtener los diferentes perfiles, que se encuentran en el flujo axial en una región anular entre dos cilindros coaxiales.

- 1) Flujo estacionario
- 2) Flujo laminar: Con un Reynolds lo suficientemente bajo para conservar su carácter laminar
- 3) Fluido no newtoniano.

- 4) Fluido incompresible.
- 5) Se ignoran los efectos finales.
- 6) El fluido se trabaja como si fuera un medio continuo.
- 7) Condición de adherencia.
- 8) La velocidad únicamente se va a desarrollar en la dirección “z” las demás son cero ($v = (v_r, v_\theta, v_z) = (0, 0, v_z)$).

3.4.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y de momentum para fluidos incompresibles no-newtonianos por postulados

La ecuación de continuidad se resuelve como en el capítulo dos, sección “2.2”. La solución viene dada por la [Ecuación 2.2-1] y [Ecuación 2.2-5]. Ambos resultados proporcionan un nuevo postulado que a continuación se anuncia:

- 9) La velocidad axial (v_z), no depende de las coordenadas “ θ ” y “z”. Entonces, la derivada de la velocidad axial (v_z), con respecto a cualquiera de estas dos coordenadas “ θ ” ó “z”, es igual a cero ($\frac{\partial v_z}{\partial \theta} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$).

La deducción para obtener la relación del tensor de esfuerzos ($\underline{\underline{\tau}}$) y los componentes de velocidad, se encuentra en la sección “3.2” con la [Ecuación 3.2-5] y se representa nuevamente a continuación:

$$\underline{\underline{\tau}} = -\eta \underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\eta \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\eta \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 3.4-1}$$

Se observa que el tensor de esfuerzos de solo depende de la coordenada “r”, en consecuencia, se crea un nuevo postulado:

- 10) El único componente del tensor de esfuerzos que no se anula es ($\tau_{rz} = \tau_{zr}$) y este componente solo depende de “r”.

Pero la función ($\eta(\dot{\gamma})$), que proviene del modelo de la Ley de Potencia es:

$$\eta = m(\dot{\gamma})^{n-1} \quad \text{Ecuación 3.4-2}$$

Para evaluar la ecuación anterior debemos calcular ($\dot{\gamma}$) del tensor ($\underline{\dot{\gamma}}$) como sigue:

$$\dot{\gamma} = \underline{\underline{|\dot{\gamma}|}} = + \sqrt{\frac{\dot{\gamma} : \dot{\gamma}^T}{2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2} = \pm \left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \quad \text{Ecuación 3.4-3}$$

Por la definición de magnitud, siempre el resultado es positivo. Por tanto, para escoger el signo que precede a $\pm \left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$ en la [Ecuación 3.4-3], depende de si la derivada es positiva o negativa. En este problema, se observa que al incrementar (r) la velocidad crece hasta llegar a un máximo (λR), por lo que se escoge el signo positivo y así la magnitud permanece positiva. Pero al seguir incrementando (r), después del máximo (λR), la velocidad empieza a decrecer, por lo que se escoge el signo negativo y con el producto del signo negativo decreciente de la velocidad la magnitud permanece positiva. En consecuencia, se dividirá el flujo en dos regiones con respecto al signo de cada velocidad. (W. Hanks & M. Larsen, 1979)

En consecuencia, a partir del tensor de esfuerzos, se sustituye la definición del modelo de la ley de potencia en cada una de las dos regiones. El eje en el cual se separan estas dos regiones es el punto donde ($\tau_{rz} = 0$) y la velocidad es un máximo, de esta manera el modelo de la ley de potencia resulta:

$$\tau_{rz} = -\eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = -m \left(\frac{dv_z}{dr}\right)^{n-1} \left(\frac{dv_z}{dr}\right) = -m \left(\frac{dv_z}{dr}\right)^n \quad \rightarrow \quad (\kappa R \leq r \leq \lambda R) \quad \text{Ecuación 3.4-4}$$

$$\tau_{rz} = -\eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = -m \left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^{n-1} \left(\frac{dv_z}{dr}\right) = m \left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^{n-1} \left(-\frac{dv_z}{dr}\right)$$

$$\tau_{rz} = m \left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n \quad \rightarrow \quad (\lambda R \leq r \leq R) \quad \text{Ecuación 3.4-5}$$

Se procede con la eliminación de términos en las ecuaciones de momentum por los postulados y suposiciones establecidas. Pero, el procedimiento de solución de las ecuaciones de momentum, se encuentran en la sección “3.2” (Flujo en un tubo de sección transversal circular) y los resultados son: *[Ecuación 3.2-12]*, *[Ecuación 3.2-14]* y *[Ecuación 3.2-16]*.

Entonces, la ecuación de momentum, con la que se obtiene el perfil de velocidades es la *[Ecuación 3.2-16]* en dirección “z” y se retoma a continuación:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = 0 \quad \text{Ecuación 3.4-6}$$

3.4.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad

Al igual, la *[Ecuación 3.4-6]* se divide en dos regiones, para después introducir la ley de potencia, *[Ecuación 3.4-4]* y *[Ecuación 3.4-4]*, como sigue:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(-m \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) \right) = 0 \quad \rightarrow \quad (\kappa R \leq r \leq \lambda R) \quad \text{Ecuación 3.4-7}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) \right) = 0 \quad \rightarrow \quad (\lambda R \leq r \leq R) \quad \text{Ecuación 3.4-8}$$

De la misma forma que se resuelve el problema para un tubo de sección transversal circular, la *[Ecuación 3.4-7]* y la *[Ecuación 3.4-8]*, se transforma en una ecuación diferencial ordinaria, donde cada término depende de una variable diferente.

Así mismo, para resolver las dos ecuaciones, la única forma en que la función de la presión más la función de la velocidad sea igual a cero es que cada función individual sea una constante como por ejemplo (k_0) y por consiguiente estas se reducen.

Comenzando a simplificar primero la [Ecuación 3.4-7], se tiene:

$$\frac{d\wp}{dz} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \left(-m \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) \right) = k_0 \quad \text{Ecuación 3.4-9}$$

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \left(-m \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) \right) = k_0 \quad \text{Ecuación 3.4-10}$$

$$\frac{d\wp}{dz} = k_0$$

Se separan variables y se integra la presión modificada de la [Ecuación 3.4-10]

$$\int d\wp = k_0 \int dz \quad \rightarrow \quad \wp = k_0 \cdot z + k_1 \quad \text{Ecuación 3.4-11}$$

Las dos constantes de integración de la ecuación anterior, se determinan a partir de las condiciones de frontera, las cuales se indican a continuación:

$$\text{C.F.1:} \quad \text{En } z = 0 \quad \wp = \wp_0 \quad \text{Ecuación 3.4-12}$$

$$\text{C.F.2:} \quad \text{En } z = L \quad \wp = \wp_L \quad \text{Ecuación 3.4-13}$$

A partir de la C.F.1:

$$\wp_0 = k_0 \cdot (0) + k_1 \quad \rightarrow \quad k_1 = \wp_0 \quad \text{Ecuación 3.4-14}$$

A partir de la C.F.2:

$$\wp_L = k_0 \cdot (L) + \wp_0 \quad \rightarrow \quad k_0 = \frac{\wp_L - \wp_0}{L} \quad \text{Ecuación 3.4-15}$$

La expresión de la constante (k_0), se sustituye en la [Ecuación 3.4-9], como:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \left(-m \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) \right) = k_0 = \frac{\wp_L - \wp_0}{L} \quad \text{Ecuación 3.4-16}$$

Se ordenan los términos y se sustituye la diferencia de presiones por $(\Delta\phi)$:

$$d\left(r\left(-m\left(\frac{dv_z}{dr}\right)^n\right)\right) = \left(\frac{-\Delta\phi}{L}\right) r dr \quad \text{Ecuación 3.4-17}$$

Se agrupan las constantes y se integra:

$$\int d\left(r\left(\frac{dv_z}{dr}\right)^n\right) = -\left(\frac{-\Delta\phi}{mL}\right) \int r dr \quad \text{Ecuación 3.4-18}$$

Resulta:

$$r\left(\frac{dv_z}{dr}\right)^n = -\left(\frac{-\Delta\phi}{mL}\right) \frac{r^2}{2} + k_1 \quad \text{Ecuación 3.4-19}$$

Se ordenan términos y se despeja (n) , como a continuación:

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(-\left(\frac{-\Delta\phi}{2mL}\right)r + \frac{k_1}{r}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.4-20}$$

La constante de integración puede determinarse a través de la condición donde se localiza el máximo de la velocidad, como sigue:

$$\text{C.F.3:} \quad \text{En } \frac{dv_z}{dr} = 0 \quad r = \lambda R \quad \text{Ecuación 3.4-21}$$

A partir de C.F.3:

$$0 = \left(-\left(\frac{-\Delta\phi}{2mL}\right)(\lambda R) + \frac{k_1}{(\lambda R)}\right)^{\frac{1}{n}} = -\left(\frac{-\Delta\phi}{2mL}\right)(\lambda R) + \frac{k_1}{(\lambda R)} \quad \text{Ecuación 3.4-22}$$

$$k_1 = \left(\frac{-\Delta\phi}{2mL}\right)(\lambda R)^2$$

Se sustituye la constante (k_1) de la [Ecuación 3.4-22] en la [Ecuación 3.4-20]:

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(-\left(\frac{(-\Delta\phi)}{2mL}\right)r + \frac{\left(\frac{(-\Delta\phi)}{2mL}\right)(\lambda R)^2}{r} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Ecuación 3.4-23

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(-\left(\frac{(-\Delta\phi)}{2mL}\right)r + \left(\frac{(-\Delta\phi)}{2mL}\right)\frac{(\lambda R)^2}{r} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Se reacomodan los términos y el signo negativo:

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\left(\frac{(-\Delta\phi)}{2mL}\right)\left(-r + \frac{(\lambda R)^2}{r}\right) \right)^{\frac{1}{n}}$$

Ecuación 3.4-24

Se multiplica por $\left(\frac{R}{R}\right)$, se reacomoda y se factoriza:

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\left(\frac{(-\Delta\phi)}{2mL}\right)\left(\frac{R}{R}\right)\left(\frac{(\lambda R)^2}{r} - r\right) \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL}\right)\left(\frac{(\lambda)^2 R}{r} - \frac{r}{R}\right) \right)^{\frac{1}{n}}$$

Ecuación 3.4-25

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL}\right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{(\lambda)^2 R}{r} - \frac{r}{R}\right]^{\frac{1}{n}}$$

Se realiza un cambio de variable donde $\left(\xi = \frac{r}{R}\right)$ y por consecuente los límites cambian de $(\kappa R \leq r \leq \lambda R)$ a $(\kappa \leq \xi \leq \lambda)$. Y además, se simplifica con $\left(\frac{1}{n} = F\right)$:

$$\frac{dv_z}{d\xi} = R \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL}\right)^F \left[\frac{\lambda^2}{\xi} - \xi\right]^F \quad \rightarrow \quad (\kappa \leq \xi \leq \lambda)$$

Ecuación 3.4-26

Se resuelve con el mismo procedimiento desde la [Ecuación 3.4-9] a la [Ecuación 3.4-26], pero ahora para la segunda región ($\lambda R \leq r \leq R$) con la [Ecuación 3.4-8]. La cual resulta de la siguiente la forma:

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{r}{R} - \frac{(\lambda)^2 R}{r} \right]^{\frac{1}{n}}$$

Ecuación 3.4-27

$$\frac{dv_z}{d\xi} = R \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \left[\xi - \frac{\lambda^2}{\xi} \right]^F \rightarrow (\lambda \leq \xi \leq 1)$$

Se integran [Ecuación 3.4-26] y [Ecuación 3.4-27], que por formalidad matemática, se realiza el cambio de la variable de integración (ξ) por (x), de la siguiente forma:

$$v_{z(1)} = R \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \int_{\kappa}^{\xi} \left[\frac{\lambda^2}{x} - x \right]^F dx \rightarrow (\kappa \leq \xi \leq \lambda) \quad \text{Ecuación 3.4-28}$$

$$v_{z(2)} = R \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \int_{\xi}^1 \left[x - \frac{\lambda^2}{x} \right]^F dx \rightarrow (\lambda \leq \xi \leq 1) \quad \text{Ecuación 3.4-29}$$

Pero para obtener la solución de estas velocidades, se necesita el valor numérico de la constante (λ) en la que la velocidad se hace máxima, por lo que primero se determina este valor, para después obtener el flujo volumétrico

3.4.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades

A) La velocidad máxima

El valor de la velocidad máxima es determinada por la condición en la cual la velocidad de la región uno [Ecuación 3.4-28] es igual a la región dos [Ecuación 3.4-29], es decir ($v_{z(1)} = v_{z(2)}$). En consecuencia:

$$R \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \int_{\kappa}^{\lambda} \left[\frac{\lambda^2}{x} - x \right]^F dx = R \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \int_{\lambda}^1 \left[x - \frac{\lambda^2}{x} \right]^F dx$$

Ecuación 3.4-30

$$R \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \left[\int_{\kappa}^{\lambda} \left[\frac{\lambda^2}{x} - x \right]^F dx - \int_{\lambda}^1 \left[x - \frac{\lambda^2}{x} \right]^F dx \right] = 0$$

$$\int_{\kappa}^{\lambda} \left[\frac{\lambda^2}{x} - x \right]^F dx - \int_{\lambda}^1 \left[x - \frac{\lambda^2}{x} \right]^F dx = 0$$

Ecuación 3.4-31

La solución de la ecuación anterior, se resuelve en forma numérica con ayuda del programa “Wolfram Mathematica 10”. El código del programa para obtener el valor de la constante (λ), cambiando valores de (n) y (κ), es:

```

Numerical Differential Equation Analysis

In[1]= Fun1[x_, λ_] := (λ^2/x - x)^(1/n)

      Fun2[x_, λ_] := (x - λ^2/x)^(1/n)

In[3]= Clear[λ]
      n = 0.1;
      κ = 0.05;
      FindRoot[NIntegrate[Fun1[x, λ], {x, κ, λ}] - NIntegrate[Fun2[x, λ], {x, λ, 1}] = 0, {λ, 0.5}]

Out[6]= {λ -> 0.253339}

```

A continuación se muestra una tabla que muestra los diferentes valores de la velocidad máxima para diferentes índices (n) y radio interior (κ).

TABLA A.2

$n \backslash \kappa$	0.05	0.08	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.10	0.2534	0.3118	0.3442	0.4687	0.5632	0.6431	0.7140	0.7788	0.8389	0.8954	0.9489
0.15	0.2675	0.3251	0.3567	0.4776	0.5694	0.6473	0.7167	0.7804	0.8397	0.8957	0.9490
0.20	0.2811	0.3374	0.3682	0.4856	0.5749	0.6509	0.7191	0.7818	0.8404	0.8960	0.9491
0.25	0.2939	0.3488	0.3787	0.4927	0.5797	0.6541	0.7211	0.7830	0.8411	0.8963	0.9491
0.30	0.3060	0.3593	0.3884	0.4991	0.5840	0.6570	0.7299	0.7840	0.8416	0.8965	0.9492
0.35	0.3173	0.3690	0.3972	0.5048	0.5878	0.6595	0.7245	0.7850	0.8421	0.8967	0.9492
0.40	0.3278	0.3779	0.4052	0.5100	0.5912	0.6617	0.7259	0.7858	0.8426	0.8969	0.9493
0.45	0.3376	0.3861	0.4126	0.5146	0.5943	0.6637	0.7271	0.7865	0.8430	0.8971	0.9493
0.50	0.3466	0.3936	0.4193	0.5189	0.5970	0.6655	0.7283	0.7872	0.8433	0.8972	0.9493
0.55	0.3550	0.4005	0.4255	0.5227	0.5995	0.6671	0.7293	0.7878	0.8436	0.8973	0.9494
0.60	0.3628	0.4069	0.4312	0.5262	0.6018	0.6686	0.7303	0.7884	0.8439	0.8975	0.9494
0.65	0.3700	0.4128	0.4364	0.5294	0.6039	0.6700	0.7311	0.7889	0.8442	0.8976	0.9494
0.70	0.3767	0.4182	0.4412	0.5324	0.6059	0.6713	0.7319	0.7893	0.8444	0.8977	0.9495
0.75	0.3829	0.4232	0.4457	0.5351	0.6076	0.6724	0.7326	0.7898	0.8446	0.8978	0.9495
0.80	0.3887	0.4279	0.4498	0.5377	0.6093	0.6735	0.7333	0.7902	0.8449	0.8979	0.9495
0.85	0.3940	0.4322	0.4537	0.5400	0.6108	0.6745	0.7339	0.7905	0.8450	0.8979	0.9495
0.90	0.3990	0.4362	0.4572	0.5422	0.6122	0.6754	0.7345	0.7909	0.8452	0.8980	0.9495
0.95	0.4037	0.4400	0.4605	0.5442	0.6135	0.6762	0.7350	0.7912	0.8454	0.8981	0.9495
1.00	0.4080	0.4435	0.4637	0.5461	0.6147	0.6770	0.7355	0.7915	0.8455	0.8981	0.9496

B) El flujo volumétrico

Con la definición de flujo volumétrico y el cambio de variable ($\xi = \frac{r}{R}$) se define el flujo volumétrico como:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{\kappa R}^R v_z \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\kappa}^1 v_z \cdot R \xi d(R \xi) d\theta = 2\pi R^2 \int_{\kappa}^1 v_z \cdot \xi d\xi \quad \text{Ecuación 3.4-32}$$

Se sustituye las velocidades de la región uno y dos que constituyen el flujo volumétrico, es decir [Ecuación 3.4-28] y [Ecuación 3.4-29] en la ecuación anterior, como:

$$Q = 2\pi R^2 \int_{\kappa}^1 v_z \cdot \xi \, d\xi$$

Ecuación 3.4-33

$$Q = 2\pi R^2 \int_{\kappa}^1 \left[R \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \int_{\kappa}^{\xi} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx + R \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \int_{\xi}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x} \right)^F dx \right] \xi \, d\xi$$

Se reacomoda la ecuación anterior:

$$Q = 2\pi R^2 \int_{\kappa}^1 R \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \left[\int_{\kappa}^{\xi} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx + \int_{\xi}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x} \right)^F dx \right] \xi \, d\xi$$

Ecuación 3.4-34

$$Q = 2\pi R^3 \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \left[\int_{\kappa}^{\lambda} \xi \, d\xi \int_{\kappa}^{\xi} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx + \int_{\lambda}^1 \xi \, d\xi \int_{\xi}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x} \right)^F dx \right]$$

El flujo volumétrico entonces es:

$$\frac{Q}{\pi R^3} = 2 \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \left[\underbrace{\int_{\kappa}^{\lambda} \xi \, d\xi \int_{\kappa}^{\xi} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx}_{(1)} + \underbrace{\int_{\lambda}^1 \xi \, d\xi \int_{\xi}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x} \right)^F dx}_{(2)} \right]$$

Ecuación 3.4-35

Para obtener la solución de, se intercambia el orden de integración de la ecuación anterior en las dos integrales iteradas, donde los cambios de límites de integración son:

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \kappa \rightarrow \lambda \{Integral Exterior\} & \rightarrow \quad (1) \quad \kappa \rightarrow \lambda \{Integral Exterior\} \\ \quad \kappa \rightarrow \xi \{Integral Interior\} & \quad x \rightarrow \lambda \{Integral Interior\} \\ (2) \quad \lambda \rightarrow 1 \{Integral Exterior\} & \rightarrow \quad (2) \quad \lambda \rightarrow 1 \{Integral Exterior\} \\ \quad \xi \rightarrow 1 \{Integral Interior\} & \quad \lambda \rightarrow x \{Integral Interior\} \end{array}$$

Ecuación 3.4-36

Por lo que las integrales de la [Ecuación 3.4-34] se transforman como sigue:

$$I = \left[\int_{\kappa}^{\lambda} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx \int_x^{\lambda} \xi \, d\xi + \int_{\lambda}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x} \right)^F dx \int_{\lambda}^x \xi \, d\xi \right]$$

Ecuación 3.4-37

Se desarrolla la integral interior:

$$I = \left[\int_{\kappa}^{\lambda} \left(\frac{\lambda^2 - x^2}{x} \right)^F dx \left[\frac{\xi^2}{2} \right]_{\kappa}^{\lambda} + \int_{\lambda}^1 \left(\frac{x^2 - \lambda^2}{x} \right)^F dx \left[\frac{\xi^2}{2} \right]_{\lambda}^x \right] \quad \text{Ecuación 3.4-38}$$

Se sustituyen límites de integración y se acomodan los términos:

$$I = \left[\frac{1}{2} \right] \left[\int_{\kappa}^{\lambda} \frac{(\lambda^2 - x^2)^F}{x^F} dx (\lambda^2 - x^2) + \int_{\lambda}^1 \frac{(x^2 - \lambda^2)^F}{x^F} dx (x^2 - \lambda^2) \right] \quad \text{Ecuación 3.4-39}$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\int_{\kappa}^{\lambda} (\lambda^2 - x^2)^F (\lambda^2 - x^2) x^{-F} dx + \int_{\lambda}^1 (x^2 - \lambda^2)^F (x^2 - \lambda^2) x^{-F} dx \right]$$

Se simplifica

$$I = \frac{1}{2} \left[\int_{\kappa}^{\lambda} (\lambda^2 - x^2)^{F+1} x^{-F} dx + \int_{\lambda}^1 (x^2 - \lambda^2)^{F+1} x^{-F} dx \right] \quad \text{Ecuación 3.4-40}$$

Dado que los términos de la izquierda son los mismos que la de la derecha, solo con la diferencia del signo negativo, se simplifican ambas integrales en una sola, por medio del valor absoluto y resulta:

$$I = \frac{1}{2} \int_{\kappa}^1 |\lambda^2 - x^2|^{F+1} x^{-F} dx \quad \text{Ecuación 3.4-41}$$

Se incorpora la [Ecuación 3.4-40] en [Ecuación 3.4-34] y entonces el resultado de Fredrickson y Bird (1958) es:

$$\frac{Q}{\pi R^3} = 2 \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \frac{1}{2} \int_{\kappa}^1 |\lambda^2 - x^2|^{F+1} x^{-F} dx \quad \text{Ecuación 3.4-42}$$

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \int_{\kappa}^1 |\lambda^2 - x^2|^{F+1} x^{-F} dx$$

Estos autores no pudieron reducir la integral del flujo volumétrico más allá de la [Ecuación 3.4-42] y estos la resolvieron presentando curvas y valores numéricos por expansiones de series de potencias, pero que son muy difíciles de manejar. En consecuencia, más tarde los autores Richard W. Hanks y Kenneth M. Larsen, lograron obtener la solución analítica con el método de integración por partes de la [Ecuación 3.4-35]. Entonces, a continuación se muestra el desarrollo de cómo estos autores obtuvieron la solución analítica comenzando con el termino (1).

$$\int_{\kappa}^{\lambda} \xi d\xi \int_{\kappa}^{\xi} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx \quad \text{Ecuación 3.4-43}$$

Donde el método de integración por partes, viene dado como:

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx \quad \text{Ecuación 3.4-44}$$

$$u = \int_{\kappa=cte}^{\xi} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx \quad dv = \xi d\xi$$

$$du = \frac{du}{d\xi} \int_{\kappa}^{\xi} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx = \left(\frac{\lambda^2}{\xi} - \xi \right)^F d\xi \quad v = \frac{\xi^2}{2}$$

Ecuación 3.4-45

La derivada de (u) se obtiene por medio del primer teorema fundamental del cálculo el cual es:

Sea f una función integrable en $[a, b]$ y sea la función F definida por:

$$F(x) = \int_{a=cte}^x f(t) dt, \quad \text{para toda } x \in [a, b] \quad \text{Ecuación 3.4-46}$$

Entonces $f(x)$ es la derivada de $F(x)$ en el intervalo $[a, b]$, esto es:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{a=cte}^x f(t) dt = f(x) \quad \text{Ecuación 3.4-47}$$

Como pequeño ejemplo para demostrar el teorema, es la siguiente integral:

$$\frac{d}{dx} \int_5^x t^2 dt = \frac{d}{dx} \left[\frac{t^3}{3} \right]_5^x = \frac{d}{dx} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5^3}{3} \right] = x^2 \quad \text{Ecuación 3.4-48}$$

Retomando la solución de la [Ecuación 3.4-43] por el método de integración por partes de la [Ecuación 3.4-44] y [Ecuación 3.4-45], se obtiene como resultado:

$$\int_{\kappa}^{\lambda} \left\{ \int_{\kappa}^{\xi} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx \xi d\xi \right\} = \left[\int_{\kappa}^{\xi} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx \cdot \frac{\xi^2}{2} \right]_{\kappa}^{\lambda} - \int_{\kappa}^{\lambda} \left(\left(\frac{\lambda^2}{\xi} - \xi \right)^F d\xi \right) \left(\frac{\xi^2}{2} \right) \quad \text{Ecuación 3.4-49}$$

Se sustituyen límites y se acomodan términos:

$$\int_{\kappa}^{\lambda} \left\{ \int_{\kappa}^{\xi} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx \xi d\xi \right\} = \left[\frac{\lambda^2}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx - \frac{\kappa^2}{2} \int_{\kappa}^{\kappa} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx \right] - \frac{1}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \xi^2 \left(\frac{(\lambda^2 - \xi^2)^F}{\xi^F} \right) d\xi \quad \text{Ecuación 3.4-50}$$

Entonces la solución del término (1) de la [Ecuación 3.4-35] es:

$$\int_{\kappa}^{\lambda} \xi d\xi \int_{\kappa}^{\xi} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx = \frac{\lambda^2}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx - \frac{1}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \xi^{2-F} (\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi \quad \text{Ecuación 3.4-51}$$

Continuando con el desarrollo de la solución de las integrales de la [Ecuación 3.4-35].

Se muestra a continuación ahora el término (2):

$$\int_{\lambda}^1 \xi d\xi \int_{\xi}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x} \right)^F dx \quad \text{Ecuación 3.4-52}$$

Por el método de integración por partes [Ecuación 3.4-44] y la definición de sus funciones [Ecuación 3.4-53]

$$u = \int_{\xi}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x}\right)^F dx \qquad dv = \xi d\xi$$

$$du = \frac{du}{d\xi} \int_{\xi}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x}\right)^F dx = -\left(\xi - \frac{\lambda^2}{\xi}\right)^F d\xi \qquad v = \frac{\xi^2}{2}$$

Ecuación 3.4-53

Se obtiene como resultado:

$$\int_{\lambda}^1 \left\{ \int_{\xi}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x}\right)^F dx \xi d\xi \right\} = \left[\int_{\xi}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x}\right)^F dx \cdot \frac{\xi^2}{2} \right]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 \left(-\left(\xi - \frac{\lambda^2}{\xi}\right)^F d\xi \right) \left(\frac{\xi^2}{2} \right)$$

Ecuación 3.4-54

Se sustituyen límites y se reacomodan términos:

$$\int_{\lambda}^1 \left\{ \int_{\xi}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x}\right)^F dx \xi d\xi \right\} =$$

$$\left[\cancel{\frac{1^2}{2} \int_1^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x}\right)^F dx} - \frac{\lambda^2}{2} \int_{\lambda}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x}\right)^F dx \right] + \frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \xi^2 \left(\frac{(\xi^2 - \lambda^2)^F}{\xi^F} \right) d\xi$$

Ecuación 3.4-55

Entonces la solución del término (2) de la [Ecuación 3.4-35] es:

$$\int_{\lambda}^1 \xi d\xi \int_{\xi}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x}\right)^F dx = -\frac{\lambda^2}{2} \int_{\lambda}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x}\right)^F dx + \frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \xi^{2-F} (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi$$

Ecuación 3.4-56

Si se combinan las soluciones de la [Ecuación 3.4-51] y [Ecuación 3.4-56]. Además se factoriza, se obtiene:

$$I = \left[\frac{\lambda^2}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx - \frac{1}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \xi^{2-F} (\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi \right] + \left[-\frac{\lambda^2}{2} \int_{\lambda}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x} \right)^F dx + \frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \xi^{2-F} (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi \right]$$

$$I = \frac{\lambda^2}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx - \frac{\lambda^2}{2} \int_{\lambda}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x} \right)^F dx - \frac{1}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \xi^{2-F} (\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi + \frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \xi^{2-F} (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi \quad \text{Ecuación 3.4-57}$$

$$I = \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \int_{\kappa}^{\lambda} \left(\frac{\lambda^2}{x} - x \right)^F dx - \int_{\lambda}^1 \left(x - \frac{\lambda^2}{x} \right)^F dx \right\} - \frac{1}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \xi^{2-F} (\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi + \frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \xi^{2-F} (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi$$

Pero la parte entre llaves de la ecuación anterior es la misma que la [Ecuación 3.4-31] y por lo tanto vale cero. Entonces la [Ecuación 3.4-57] se reduce como:

$$I = -\frac{1}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \xi^{2-F} (\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi + \frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \xi^{2-F} (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi \quad \text{Ecuación 3.4-58}$$

Nuevamente, se resuelven las integrales de la ecuación anterior, comenzando con la primera integral:

$$-\frac{1}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \xi^{2-F} (\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi = -\frac{1}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \xi^{1-F} \xi (\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi \quad \text{Ecuación 3.4-59}$$

Se resuelve la ecuación anterior por el método de integración por partes, es decir la [Ecuación 3.4-44] y la definición de sus funciones [Ecuación 3.4-53]

$$u = \xi^{1-F} \quad dv = \xi (\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi$$

$$du = (1-F)\xi^{-F} d\xi \quad v = -\frac{1}{2} \left(\frac{(\lambda^2 - \xi^2)^{F+1}}{F+1} \right) \quad \text{Ecuación 3.4-60}$$

Donde, para obtener la integral (dv), se realizó un cambio de variable:

$$\int \xi(\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi \rightarrow u = \lambda^2 - \xi^2 \quad y \quad du = -2\xi d\xi$$

$$\text{Entonces: } \int \xi(\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi = \frac{-1}{2} \int (u)^F du = \frac{-1}{2} \left(\frac{(u)^{F+1}}{F+1} \right) \quad \text{Ecuación 3.4-61}$$

$$\text{Por lo tanto: } \int \xi(\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi = -\frac{1}{2} \left(\frac{(\lambda^2 - \xi^2)^{F+1}}{F+1} \right)$$

Se obtiene la solución de la [Ecuación 3.4-59], como sigue:

$$-\frac{1}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \xi^{2-F} (\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi =$$

$$-\frac{1}{2} \left\{ \left[\xi^{1-F} \cdot \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(\lambda^2 - \xi^2)^{F+1}}{F+1} \right) \right) \right]_{\kappa}^{\lambda} - \int_{\kappa}^{\lambda} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(\lambda^2 - \xi^2)^{F+1}}{F+1} \right) \right) \cdot (1-F) \xi^{-F} d\xi \right\} = \quad \text{Ecuación 3.4-62}$$

$$-\frac{1}{2} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) (\lambda^2 - \xi^2)^{F+1} \xi^{1-F} \right]_{\kappa}^{\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{(1-F)}{F+1} \right) \int_{\kappa}^{\lambda} (\lambda^2 - \xi^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi \right\}$$

Se sustituyen límites y se reacomodan términos:

$$-\frac{1}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \xi^{2-F} (\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi =$$

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{F+1} \right) \left\{ \left[(-\lambda^2 - \lambda^2)^{F+1} \lambda^{1-F} \right] - (-\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \right\} + (1-F) \int_{\kappa}^{\lambda} (\lambda^2 - \xi^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi \quad \text{Ecuación 3.4-63}$$

Entonces la solución de la primera integral de la [Ecuación 3.4-58] es:

$$-\frac{1}{2} \int_{\kappa}^{\lambda} \xi^{2-F} (\lambda^2 - \xi^2)^F d\xi =$$

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{F+1} \right) \left\{ \left[(\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \right] + (1-F) \int_{\kappa}^{\lambda} (\lambda^2 - \xi^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi \right\} \quad \text{Ecuación 3.4-64}$$

Se resuelve a continuación la segunda integral de la [Ecuación 3.4-58], como:

$$\frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \xi^{2-F} (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi = \frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \xi^{1-F} \xi (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi \quad \text{Ecuación 3.4-65}$$

Se resuelve la ecuación anterior por el método de integración por partes, es decir la [Ecuación 3.4-44] y la definición de sus funciones [Ecuación 3.4-66]

$$\begin{aligned} u &= \xi^{1-F} & dv &= \xi (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi \\ du &= (1-F)\xi^{-F} d\xi & v &= \frac{1}{2} \left(\frac{(\xi^2 - \lambda^2)^{F+1}}{F+1} \right) \end{aligned} \quad \text{Ecuación 3.4-66}$$

Donde, para obtener la integral (dv), se realizó un cambio de variable:

$$\begin{aligned} \int \xi (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi &\rightarrow u = \xi^2 - \lambda^2 \quad y \quad du = 2\xi d\xi \\ \text{Entonces: } \int \xi (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi &= \frac{1}{2} \int (u)^F du = \frac{1}{2} \left(\frac{(u)^{F+1}}{F+1} \right) \\ \text{Por lo tanto: } \int \xi (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi &= \frac{1}{2} \left(\frac{(\xi^2 - \lambda^2)^{F+1}}{F+1} \right) \end{aligned} \quad \text{Ecuación 3.4-67}$$

Se obtiene la solución de la [Ecuación 3.4-65], como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \xi^{2-F} (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi &= \\ \frac{1}{2} \left\{ \left[\xi^{1-F} \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\frac{(\xi^2 - \lambda^2)^{F+1}}{F+1} \right) \right) \right]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{(\xi^2 - \lambda^2)^{F+1}}{F+1} \right) \right) \cdot (1-F)\xi^{-F} d\xi \right\} &= \quad \text{Ecuación 3.4-68} \\ \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) (\xi^2 - \lambda^2)^{F+1} \xi^{1-F} \right]_{\lambda}^1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1-F}{F+1} \right) \int_{\lambda}^1 (\xi^2 - \lambda^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi \right\} \end{aligned}$$

Se sustituyen límites y se reacomodan términos:

$$\frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \xi^{2-F} (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi =$$

*Ecuación
3.4-69*

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{F+1} \right) \left\{ \left[\left((1^2 - \lambda^2)^{F+1} 1^{1-F} \right) - \left((\lambda^2 - \lambda^2)^{F+1} \lambda^{1-F} \right) \right] - (1-F) \int_{\lambda}^1 (\xi^2 - \lambda^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi \right\}$$

Entonces la solución de la segunda integral de la [Ecuación 3.4-58] es:

$$\frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \xi^{2-F} (\xi^2 - \lambda^2)^F d\xi =$$

Ecuación 3.4-70

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{F+1} \right) \left\{ (1^2 - \lambda^2)^{F+1} - (1-F) \int_{\lambda}^1 (\xi^2 - \lambda^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi \right\}$$

De la [Ecuación 3.4-58], se combinan las soluciones de las integrales [Ecuación 3.4-64] y [Ecuación 3.4-70], se factoriza, se reacomodan términos y se obtiene entonces:

$$I = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{F+1} \right) \left\{ [(\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F}] + (1-F) \int_{\kappa}^{\lambda} (\lambda^2 - \xi^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi \right\} \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{F+1} \right) \left\{ (1^2 - \lambda^2)^{F+1} - (1-F) \int_{\lambda}^1 (\xi^2 - \lambda^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi \right\}$$

*Ecuación
3.4-71*

$$I = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{F+1} \right) \left\{ -[(\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F}] + (1^2 - \lambda^2)^{F+1} \right. \\ \left. + (1-F) \left[- \int_{\kappa}^{\lambda} (\lambda^2 - \xi^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi - \int_{\lambda}^1 (\xi^2 - \lambda^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi \right] \right\}$$

Dado que los términos integrables de la ecuación anterior son los mismos, solo con signos opuestos, se simplifican ambas integrales en una sola, por medio del valor absoluto y resulta:

$$I = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{F+1} \right) \left\{ (1^2 - \lambda^2)^{F+1} - (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} - (1-F) \int_{\kappa}^1 |(\lambda^2 - \xi^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi| \right\}$$

Ecuación 3.4-72

Se introduce la solución analítica [Ecuación 3.4-72] en la [Ecuación 3.4-35], como se muestra a continuación:

$$\frac{Q}{\pi R^3} = 2 \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{F+1} \right) \left\{ (1-\lambda^2)^{F+1} - (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \right. \right. \\ \left. \left. - (1-F) \int_{\kappa}^1 |(\lambda^2 - \xi^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi| \right\} \right]$$

Ecuación 3.4-73

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) \left\{ (1-\lambda^2)^{F+1} - (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \right. \\ \left. - (1-F) \int_{\kappa}^1 |(\lambda^2 - \xi^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi| \right\}$$

Claramente la [Ecuación 3.4-73] y la [Ecuación 3.4-42] son equivalentes, por lo tanto si se reemplaza $\left(\frac{Q}{\pi R^3} \right)$ de la [Ecuación 3.4-42] en la [Ecuación 3.4-73], se obtiene:

$$\left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \int_{\kappa}^1 |\lambda^2 - x^2|^{F+1} x^{-F} dx =$$

Ecuación 3.4-74

$$\left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) \left\{ (1-\lambda^2)^{F+1} - (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} - (1-F) \int_{\kappa}^1 |(\lambda^2 - \xi^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi| \right\}$$

Se realiza el producto de $\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) \right)$ en cada uno de los términos, en la ecuación anterior:

$$\int_{\kappa}^1 |\lambda^2 - x^2|^{F+1} x^{-F} dx =$$

Ecuación 3.4-75

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) (1-\lambda^2)^{F+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} - \frac{1}{2} \left(\frac{1-F}{F+1} \right) \int_{\kappa}^1 |(\lambda^2 - \xi^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi| \right\}$$

Se despeja la integral de valor absoluto de la ecuación anterior, como:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\kappa}^1 |\lambda^2 - x^2|^{F+1} x^{-F} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{1-F}{F+1} \right) \int_{\kappa}^1 |(\lambda^2 - \xi^2)^{F+1} \cdot \xi^{-F} d\xi| = \\
 & \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) (1 - \lambda^2)^{F+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \right\} \\
 & \int_{\kappa}^1 |\lambda^2 - x^2|^{F+1} x^{-F} dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1-F}{F+1} \right) \right) = \\
 & \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) (1 - \lambda^2)^{F+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \right\} \quad \text{Ecuación 3.4-76} \\
 & \int_{\kappa}^1 |\lambda^2 - x^2|^{F+1} x^{-F} dx = \\
 & \left(\frac{1}{\left[\frac{2(F+1) + 1 - F}{2(F+1)} \right]} \right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) (1 - \lambda^2)^{F+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \right\}
 \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene la solución analítica de la integral de valor absoluto y tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \int_{\kappa}^1 |\lambda^2 - x^2|^{F+1} x^{-F} dx &= \left(\frac{2(F+1)}{F+3} \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{F+1} \right) \right) \{ (1 - \lambda^2)^{F+1} - (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \} \\
 \int_{\kappa}^1 |\lambda^2 - x^2|^{F+1} x^{-F} dx &= \left(\frac{1}{3+F} \right) \{ (1 - \lambda^2)^{F+1} - (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \} \quad \text{Ecuación 3.4-77}
 \end{aligned}$$

En la expresión del flujo volumétrico [Ecuación 3.4-42], se sustituye la solución de la ecuación anterior y se obtiene:

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^F \left[\left(\frac{1}{3+F} \right) \{ (1 - \lambda^2)^{F+1} - (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \} \right] \quad \text{Ecuación 3.4-78}$$

Se sustituye el valor de $(F = 1/n)$, se simplifica y la expresión de la solución analítica del flujo volumétrico [Ecuación 3.4-42], toma la forma como: (W. Hanks & M. Larsen, 1979)

$$Q = \left(\frac{n\pi R^3}{3n+1} \right) \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^{1/n} \left[\left(\frac{1}{3+F} \right) \{ (1-\lambda^2)^{F+1} - (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \} \right] \quad \text{Ecuación 3.4-79}$$

EL valor de (λ) que se utiliza en la ecuación anterior se obtiene dada la solución de la [Ecuación 3.4-31] o por medio de la (TABLA A.2) que contiene valores de (λ) , por los definidos valores de $(n \text{ y } \kappa)$. Para valores diferentes en la tabla de $(n \text{ y } \kappa)$ una simple interpolación y con ellos así obtener el valor de (λ) .

C) La velocidad promedio

Dada la definición de velocidad promedio cociente del flujo volumétrico entre el área, entonces, el área se calcula como sigue:

$$\text{Área} = \int_0^{2\pi} \int_{\kappa R}^R r \, dr d\theta = 2\pi \int_{\kappa R}^R r \, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\kappa R}^R = \pi [R^2 - (\kappa R)^2] = \pi R^2 [1 - \kappa^2] \quad \text{Ecuación 3.4-80}$$

El flujo volumétrico [Ecuación 3.4-79] entre el área [Ecuación 3.4-80] es:

$$\langle v_z \rangle = \frac{Q}{\pi R^2 [1 - \kappa^2]} = \left(\frac{1}{\pi R^2 [1 - \kappa^2]} \right) \left(\frac{n\pi R^3}{3n+1} \right) \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{1}{3+F} \right) \{ (1-\lambda^2)^{F+1} - (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \} \right] \quad \text{Ecuación 3.4-81}$$

Se simplifica la ecuación anterior y se obtiene la velocidad promedio:

$$\langle v_z \rangle = \left(\frac{nR}{[3n+1][1-\kappa^2]} \right) \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{1}{3+F} \right) \{ (1-\lambda^2)^{F+1} - (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \} \right] \quad \text{Ecuación 3.4-82}$$

D) Flujo másico

El flujo másico tiene la forma:

$$W = \rho * Q = \left(\frac{\rho n \pi R^3}{3n + 1} \right) \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^{1/n} \left[\left(\frac{1}{3 + F} \right) \{ (1 - \lambda^2)^{F+1} - (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \} \right] \quad \text{Ecuación 3.4-83}$$

E) La magnitud del esfuerzo cortante

La magnitud del esfuerzo cortante con el modelo de la ley de potencias, viene dado por la [Ecuación 3.4-4] y la [Ecuación 3.4-5]

Dado que se dividió en dos regiones uno positivo y otro negativo, con lo cual resultó dos derivadas del perfil de velocidades [Ecuación 3.4-25] y [Ecuación 3.4-27], se presentan nuevamente a continuación:

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{(\lambda)^2 R}{r} - \frac{r}{R} \right]^{\frac{1}{n}} \rightarrow (\kappa R \leq r \leq \lambda R) \quad \text{Ecuación 3.4-85}$$

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{r}{R} - \frac{(\lambda)^2 R}{r} \right]^{\frac{1}{n}} \rightarrow (\lambda R \leq r \leq R)$$

De la [Ecuación 3.4-85], se sustituye la derivada del perfil de velocidades del rango $(\kappa R \leq r \leq \lambda R)$ en la [Ecuación 3.4-4], como sigue:

$$\tau_{rz} = -m \left(\left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{(\lambda)^2 R}{r} - \frac{r}{R} \right]^{\frac{1}{n}} \right)^n \rightarrow (\kappa R \leq r \leq \lambda R) \quad \text{Ecuación 3.4-86}$$

$$\tau_{rz} = - \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \right) \left[\frac{(\lambda)^2 R}{r} - \frac{r}{R} \right] \rightarrow (\kappa R \leq r \leq \lambda R)$$

De la [Ecuación 3.4-85], se sustituye la derivada del perfil de velocidades del rango $(\lambda R \leq r \leq R)$ en la [Ecuación 3.4-4], como sigue:

$$\tau_{rz} = m \left(- \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{r}{R} - \frac{(\lambda)^2 R}{r} \right]^{\frac{1}{n}} \right) \rightarrow (\lambda R \leq r \leq R)$$

Ecuación 3.4-88

$$\tau_{rz} = - \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \right) \left[\frac{r}{R} - \frac{(\lambda)^2 R}{r} \right] \rightarrow (\lambda R \leq r \leq R)$$

El esfuerzo cortante en la pared, está dado como:

$$\tau_{w=\kappa} = - \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \right) \left[\frac{(\lambda)^2 R}{\kappa} - \frac{\kappa}{R} \right]$$

Ecuación 3.4-89

$$\tau_{w=R} = - \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \right) \left[\frac{R}{R} - \frac{(\lambda)^2 R}{R} \right] = - \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \right) [1 - (\lambda)^2]$$

Ecuación 3.4-90

F) El coeficiente de fricción

El coeficiente de fricción en el radio menor (κ), tiene la forma:

$$f = \frac{\tau_w}{\rho < v >^2} = \frac{- \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \right) \left[\frac{(\lambda)^2 R}{\kappa} - \frac{\kappa}{R} \right]}{\rho \left[\left(\frac{1}{\pi R^2 [1 - \kappa^2]} \right) \left(\frac{n\pi R^3}{3n + 1} \right) \left(\frac{(\Delta\phi)R}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{1}{3 + F} \right) \{ (1 - \lambda^2)^{F+1} - (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \} \right] \right]^2}$$

Ecuación 3.4-91

El coeficiente de fricción en el radio mayor (R), tiene la forma:

$$f = \frac{\tau_w}{\rho < v >^2} = \frac{- \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \right) [1 - (\lambda)^2]}{\rho \left[\left(\frac{1}{\pi R^2 [1 - \kappa^2]} \right) \left(\frac{n\pi R^3}{3n + 1} \right) \left(\frac{(\Delta\phi)R}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{1}{3 + F} \right) \{ (1 - \lambda^2)^{F+1} - (\lambda^2 - \kappa^2)^{F+1} \kappa^{1-F} \} \right] \right]^2}$$

Ecuación 3.4-92

3.5 FLUJO EN UN TUBO DE SECCIÓN TRANSVERSAL LIGERAMENTE CÓNICA

Se examina un fluido que se mueve en un tubo horizontal ligeramente cónico de longitud (L) con radio inicial (R_0) y radio final (R_L). El líquido fluye en dirección “ z ” por la influencia de una diferencia de presión y en dirección “ r ” por la geometría cónica. Se utilizan coordenadas cilíndricas (r, θ, z) en las ecuaciones.

El análisis de este problema, se aplica localmente, como en la sección “2.5”. Con un flujo en dirección radial y otro en dirección axial.

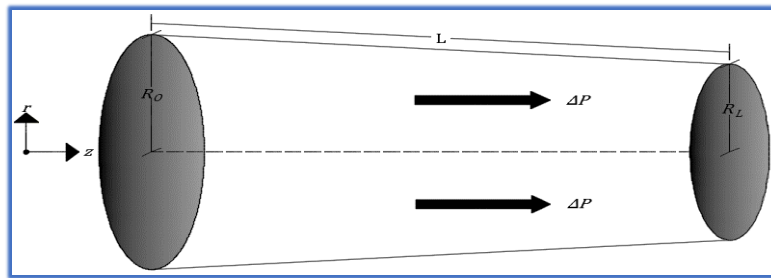


Figura 3.5-1 Flujo axial en un tubo de sección transversal ligeramente cónica bajo el efecto de un gradiente de presión

3.5.1 Postulados y suposiciones

Se presentan aquí las premisas que simplifican las ecuaciones, para poder obtener los diferentes perfiles, que se encuentran en el flujo en un tubo de sección transversal ligeramente cónica

- 1) Flujo estacionario
- 2) Flujo laminar: con un Reynolds lo suficientemente bajo para conservar su carácter laminar.
- 3) Fluido no newtoniano.
- 4) Fluido incompresible.

- 5) Se ignoran los efectos finales.
- 6) El fluido se trabaja como si fuera un medio continuo.
- 7) Condición de adherencia.
- 8) Las velocidades que se van a desarrollar en este flujo se dan en la dirección “z” y en la dirección “r”, por lo tanto $(v = (v_r, v_\theta, v_z) = (v_r, 0, v_z))$.

3.5.2 Reducción de términos de las ecuaciones de continuidad y de momentum para fluidos incompresibles no-newtonianos por postulados

La ecuación de continuidad se resuelve como en el capítulo dos, sección “2.5”. La solución viene dada por la [Ecuación 2.5-3] y [Ecuación 2.5-4]. Sin embargo, si se retoma el problema “2.5” (Flujo en un tubo de sección transversal ligeramente cónica para fluidos newtonianos), se demostró geoméricamente que si se cumple:

$$\left(\frac{1}{L} \left[1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2\right]\right) \ll 1 \quad \text{Ecuación 3.5-1}$$

Entonces, es válido hacer uso de la aproximación de lubricación y dado que este problema es igual a la geometría del problema “2.5”, entonces, es permitido aseverar que $(v_r \ll v_z)$ y $\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \ll \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$. Con lo que se proporciona una nueva suposición:

- 9) La velocidad en dirección “z” es la velocidad que caracteriza y que más contribuye al problema, depende mucho más de la dirección “r” que de la dirección “z”. Por lo tanto se concluye que solo $v_z = v_z(r)$ será diferente de cero.

Se prosigue con obtener la relación entre el tensor de esfuerzos $\left(\underline{\underline{T}}\right)$ y los componentes del tensor de la rapidez de deformación. Esta relación es la misma que para el flujo en un tubo de sección transversal circular.

Por lo tanto, retomando la expresión del tensor de esfuerzos [Ecuación 3.2-10], es:

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = -\eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = -m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^{n-1} \left(\frac{dv_z}{dr} \right) = m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^{n-1} \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) = m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \quad \text{Ecuación 3.5-2}$$

Con la ecuación anterior se crea un nuevo postulado:

- 10) El único componente del tensor de esfuerzos que no se anula es ($\tau_{rz} = \tau_{zr}$) y este componente solo depende de "r".

Se procede con la eliminación de términos en las ecuaciones de momentum por los postulados y suposiciones establecidas. Sin embargo, el procedimiento y resultado de estas son la misma que las que se encuentran en la sección "3.2" (flujo en un tubo de sección transversal circular). [Ecuación 3.2-12], [Ecuación 3.2-14] y [Ecuación 3.2-16].

Entonces, la ecuación de momentum en dirección "z" la [Ecuación 3.2-16], es la que resuelve y se retoma a continuación:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = 0 \quad \text{Ecuación 3.5-3}$$

A esta última ecuación, se sustituye la [Ecuación 3.5-2] del modelo de la ley de potencia, como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) \right) = 0 \quad \text{Ecuación 3.5-4}$$

Ya que el parámetro (m) es una constante, la expresión tiene la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) = 0 \quad \text{Ecuación 3.5-5}$$

La ecuación anterior se integra, para obtener el perfil ($v_z = v_z(r)$).

3.5.3 Uso de las ecuaciones de variación reducidas para obtener perfil de velocidad

De la [Ecuación 3.5-5] se separan de variables y se reordenan términos:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{r}{m} \quad \text{Ecuación 3.5-6}$$

Se integra:

$$\int d \left(r \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \right) = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{m} \int r \, dr \quad \text{Ecuación 3.5-7}$$

$$r \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) + k_2 \quad \text{Ecuación 3.5-8}$$

Se reordenan los términos:

$$\left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m} r + \frac{k_2}{r} \quad \text{Ecuación 3.5-9}$$
$$\frac{dv_z}{dr} = - \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m} r + \frac{k_2}{r} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Pero dado que "r" se encuentra en el denominador, si toma el valor de cero se indetermina, para evitar la indeterminación, (k_2) debe tomar el valor de cero:

$$\frac{dv_z}{dr} = - \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m} r \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-10}$$

Se separan variables:

$$\int dv_z = - \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m} \right)^{\frac{1}{n}} \int r^{\frac{1}{n}} \, dr \quad \text{Ecuación 3.5-11}$$

Se integra:

$$v_z = -\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{r^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} + k_3 \quad \text{Ecuación 3.5-12}$$

La constante de integración se determina a partir de la condición de adherencia en la pared, pero ya que el radio varía conforme "z" aumenta, esta variación se expresa con una ecuación que se expresa por $R(z)$, por lo tanto:

$$\text{C.F.3:} \quad \text{En } r = R(z) \quad v_z = 0 \quad \text{Ecuación 3.5-13}$$

A partir de C.F.3:

$$0 = -\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} + k_3 \rightarrow k_3 = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-14}$$

La constante (k_3) de la ecuación anterior se sustituye en la [Ecuación 3.5-12]:

$$v_z = -\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) r^{\frac{n+1}{n}} + \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-15}$$

Se simplifica como:

$$v_z = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[-r^{\frac{n+1}{n}} + R(z)^{\frac{n+1}{n}}\right] \quad \text{Ecuación 3.5-16}$$

Se multiplica por $\left(\frac{R(z)^{\frac{n+1}{n}}}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}}\right)$:

$$v_z = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) \frac{R(z)^{\frac{n+1}{n}}}{1} \left[\frac{R(z)^{\frac{n+1}{n}}}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}} - \frac{r^{\frac{n+1}{n}}}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}}\right] \quad \text{Ecuación 3.5-17}$$

Se obtiene el perfil de velocidades:

$$v_z = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \frac{r^{\frac{n+1}{n}}}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}}\right] \quad \text{Ecuación 3.5-18}$$

A pesar de que las condiciones de frontera varían con "z", se ha mantenido constante durante su integración. Sin embargo, la variación de "z" de la ecuación anterior, es fácilmente adaptada posteriormente conociendo el flujo volumétrico.

3.5.4 Propiedades derivadas del perfil de velocidades:

Una vez que se ha establecido el perfil de velocidad, es posible obtener varias cantidades derivadas

A) La velocidad máxima

La velocidad máxima ocurre para $r = 0$:

$$v_{z(\max)} = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \frac{0^{\frac{n+1}{n}}}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}}\right] \quad \text{Ecuación 3.5-19}$$

$$v_{z(\max)} = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-20}$$

La velocidad máxima se da en el plano horizontal del centro del cono, aunque como se observa esta no es constante ya que la velocidad incrementa a medida que se avanza en la dirección "z", debido que al disminuir el área del tubo, se debe conservar el flujo volumétrico y se compensa con el incremento de la velocidad.

B) El flujo volumétrico

De la definición en las secciones anteriores, se sustituye el perfil de velocidades [Ecuación 2.5-18], como a continuación:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(z)} v_z r dr d\theta$$

$$Q = 2\pi \int_0^R v_z r dr = 2\pi \int_0^{R(z)} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \frac{r^{\frac{n+1}{n}}}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}}\right] r dr \quad \text{Ecuación 3.5-21}$$

$$Q = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2\pi n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \int_0^{R(z)} \left[1 - \frac{r^{\frac{n+1}{n}}}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}}\right] r dr \quad \text{Ecuación 3.5-22}$$

Se realiza el álgebra correspondiente, para realizar la integración:

$$Q = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2\pi n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \left[\int_0^{R(z)} r dr - \frac{1}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}} \int_0^{R(z)} r^{\frac{2n+1}{n}} dr \right] \quad \text{Ecuación 3.5-23}$$

$$Q = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2\pi n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \left(\left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{R(z)} - \left[\left(\frac{1}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}} \right) \frac{r^{\frac{3n+1}{n}}}{\frac{3n+1}{n}} \right]_0^{R(z)} \right) \quad \text{Ecuación 3.5-24}$$

Se evalúan los límites de integración:

$$Q = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2\pi n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \left(\left[\frac{R(z)^2}{2} - 0 \right] - \left[\left(\frac{1}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}} \right) \frac{R(z)^{\frac{3n+1}{n}}}{\frac{3n+1}{n}} - 0 \right] \right) \quad \text{Ecuación 3.5-25}$$

Se ordena, se factoriza y se simplifica la ecuación anterior:

$$Q = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2\pi n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{R(z)^2}{2} - \frac{R(z)^2}{\frac{3n+1}{n}}\right]$$

$$Q = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2\pi n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{(3n+1)R(z)^2 - 2nR(z)^2}{2(3n+1)}\right]$$

$$Q = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2\pi n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{nR(z)^2 + R(z)^2}{2(3n+1)}\right] \quad \text{Ecuación 3.5-26}$$

$$Q = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2\pi n}{n+1}\right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{R(z)^2(n+1)}{2(3n+1)}\right]$$

$$Q = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \pi R(z)^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{R(z)^2 n}{(3n+1)}\right]$$

Se obtiene el flujo volumétrico como:

$$Q = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\pi n}{3n+1}\right) R(z)^{\frac{3n+1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-27}$$

Para obtener la relación entre la caída de presión y el flujo volumétrico, se aplica un cambio de variable, donde en lugar de utilizar “z” como una variable independiente, se emplea la [Ecuación 3.5-28], con la intención facilitar la integración, eliminando con ello, el cálculo de la caída de presión con respecto a “z”.

$$R(z) = R_o + (R_L - R_o)(z/L) \quad \text{Ecuación 3.5-28}$$

Se despeja “z”:

$$L \left(\frac{R - R_o}{R_L - R_o}\right) = z \quad \text{Ecuación 3.5-29}$$

Se expande la ecuación:

$$\left(\frac{LR}{R_L - R_O}\right) - \left(\frac{LR_O}{R_L - R_O}\right) = z \quad \text{Ecuación 3.5-30}$$

Se calcula la derivada de (z) con respecto a (R):

$$\frac{dz}{dR} = \left(\frac{L}{R_L - R_O}\right) - 0 = \quad \text{Ecuación 3.5-31}$$

De tal manera, que se obtiene la diferencial (dz):

$$dz = \left(\frac{L}{R_L - R_O}\right) dR \quad \text{Ecuación 3.5-32}$$

Se sustituye la diferencial (dz) de la ecuación anterior en la [Ecuación 3.5-27]:

$$Q = \left(-\frac{d\phi}{\left(\frac{L}{R_L - R_O}\right) dR}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\pi n}{3n + 1}\right) R^{\frac{3n+1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-33}$$

Se arreglan términos:

$$Q = \left(-\frac{d\phi}{dR}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{R_L - R_O}{L}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\pi n}{3n + 1}\right) R^{\frac{3n+1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-34}$$

$$Q = \left(-\frac{d\phi}{dR}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{R_L - R_O}{L}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\pi n}{3n + 1}\right) R^{\frac{3n+1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-35}$$

Pero el flujo volumétrico (Q), es una constante a través del cono en dirección "z", por lo tanto se reordena la [Ecuación 3.5-35], para realizar la integración:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{dR}{d\phi}\right)^{\frac{1}{n}} &= \left(\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{R_L - R_O}{L}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\pi n}{3n+1}\right)R^{\frac{3n+1}{n}} \\ \left(\left(-\frac{dR}{d\phi}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n &= \left(\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{R_L - R_O}{L}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\pi n}{3n+1}\right)^n R^{\frac{3n+1}{n}} \\ \left(\frac{dR}{d\phi}\right) &= -\left(\frac{R_L - R_O}{L}\right)\left(\frac{1}{2m}\right)\left(\frac{\pi n}{Q(3n+1)}\right)^n R^{\frac{n^2+3n+1}{n}} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 3.5-36}$$

Se separan variables de la última expresión y se realiza el álgebra correspondiente:

$$\begin{aligned} \int_{R_O}^{R_L} \frac{dR}{R^{\frac{n^2+3n+1}{n}}} &= -\left(\frac{R_L - R_O}{2mL}\right)\left(\frac{\pi n}{Q(3n+1)}\right)^n \int_{\phi_O}^{\phi_L} d\phi \\ \int_{R_O}^{R_L} R^{\frac{-n^2-3n-1}{n}} dR &= -\left(\frac{R_L - R_O}{2mL}\right)\left(\frac{\pi n}{Q(3n+1)}\right)^n \int_{\phi_O}^{\phi_L} d\phi \end{aligned} \quad \text{Ecuación 3.5-37}$$

Se resuelve la integral como:

$$\left[\frac{R^{\frac{-n^2-2n-1}{n}}}{\frac{-n^2-2n-1}{n}}\right]_{R_O}^{R_L} = -\left(\frac{R_L - R_O}{2mL}\right)\left(\frac{\pi n}{Q(3n+1)}\right)^n [\phi]_{\phi_O}^{\phi_L} \quad \text{Ecuación 3.5-38}$$

Se evalúan los límites de integración:

$$\frac{\left(R_L^{\frac{-n^2-2n-1}{n}} - R_O^{\frac{-n^2-2n-1}{n}}\right)}{\frac{-n^2-2n-1}{n}} = -\left(\frac{R_L - R_O}{2mL}\right)\left(\frac{\pi n}{Q(3n+1)}\right)^n (\phi_L - \phi_O) \quad \text{Ecuación 3.5-39}$$

Se multiplica la ecuación anterior por $\left(\frac{-n^2-2n-1}{n}\right)$ y se introduce el signo negativo en la diferencia de presiones:

$$\left(R_L^{\frac{-n^2-2n-1}{n}} - R_O^{\frac{-n^2-2n-1}{n}}\right) = \left(\frac{R_L - R_O}{2mL}\right)\left(\frac{\pi n}{Q(3n+1)}\right)^n \left(\frac{-n^2-2n-1}{n}\right)(\phi_O - \phi_L) \quad \text{Ecuación 3.5-40}$$

Se despeja el flujo volumétrico:

$$Q^n = \left(\frac{R_L - R_O}{\left(R_L \frac{-n^2-2n-1}{n} - R_O \frac{-n^2-2n-1}{n} \right)} \right) \left(\frac{(\pi n)^n (-n^2 - 2n - 1)}{2 m n (3n + 1)^n} \right) \left(\frac{\rho_O - \rho_L}{L} \right) \quad \text{Ecuación 3.5-41}$$

$$\left(Q^n = \left(\frac{R_L - R_O}{\left(R_L \frac{-n^2-2n-1}{n} - R_O \frac{-n^2-2n-1}{n} \right)} \right) \left(\frac{(\pi n)^n (-n^2 - 2n - 1)}{2 m n (3n + 1)^n} \right) \left(\frac{\rho_O - \rho_L}{L} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-42}$$

$$Q = \left(\frac{R_L - R_O}{\left(R_L \frac{-(n^2+2n+1)}{n} - R_O \frac{-(n^2+2n+1)}{n} \right)} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{(\pi n) (-n^2 - 2n - 1)^{\frac{1}{n}}}{(2 m n)^{\frac{1}{n}} (3n + 1)} \right) \left(\frac{\rho_O - \rho_L}{L} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-43}$$

El flujo volumétrico tiene la siguiente expresión:

$$Q = \left(\frac{\rho_O - \rho_L}{L} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\pi \left(\frac{n-1}{n} \right) (-n^2 - 2n - 1)^{\frac{1}{n}}}{(2 m)^{\frac{1}{n}} (3n + 1)} \right) \left(\frac{R_L - R_O}{\left(R_L \frac{-(n^2+2n+1)}{n} - R_O \frac{-(n^2+2n+1)}{n} \right)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-44}$$

Para obtener la relación entre la velocidad y el flujo volumétrico, a la [Ecuación 3.5-18]

se sustituye el término $\left(-\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{1}{2m} \right)^{\frac{1}{n}}$ de la [Ecuación 3.5-27], para obtener:

$$v_z = \left(\frac{3n + 1}{\pi n} \right) \left(\frac{Q}{R(z)^{\frac{3n+1}{n}}} \right) \left(\frac{n}{n + 1} \right) R(z)^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \frac{r^{\frac{n+1}{n}}}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}} \right] \quad \text{Ecuación 3.5-45}$$

Se simplifica:

$$v_z = \left(\frac{3n + 1}{n + 1} \right) \left(\frac{Q}{\pi R(z)^2} \right) \left[1 - \frac{r^{\frac{n+1}{n}}}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}} \right] \quad \text{Ecuación 3.5-46}$$

C) La velocidad promedio

La velocidad promedio se define como el cociente del flujo volumétrico entre el área, pero debido a que el área va cambiando conforme se avanza en la dirección "z", únicamente se va a calcular la velocidad promedio al inicio y al final, como una aproximación.

La velocidad promedio en el radio inicial (R_O):

$$v_{R_O} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z \cdot r \, dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_O} r \, dr d\theta} = \frac{Q}{\pi R_O^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\varphi_O - \varphi_L}{L}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\pi \left(\frac{n-1}{n}\right) (-n^2 - 2n - 1)^{\frac{1}{n}}}{(2m)^{\frac{1}{n}} (3n+1)} \right) \left(\frac{R_L - R_O}{\left(R_L^{\frac{-(n^2+2n+1)}{n}} - R_O^{\frac{-(n^2+2n+1)}{n}} \right)} \right)^{\frac{1}{n}}}{\pi R_O^2} \quad \text{Ecuación 3.5-47}$$

$$v_{R_O} = \left(\frac{\varphi_O - \varphi_L}{L}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\pi \left(\frac{n-1}{n}\right) (-n^2 - 2n - 1)^{\frac{1}{n}}}{(2m)^{\frac{1}{n}} (3n+1) R_O^2} \right) \left(\frac{R_L - R_O}{\left(R_L^{\frac{-(n^2+2n+1)}{n}} - R_O^{\frac{-(n^2+2n+1)}{n}} \right)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-48}$$

La velocidad promedio en el radio final (R_L):

$$v_{R_L} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z \cdot r \, dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_L} r \, dr d\theta} = \frac{Q}{\pi R_L^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\varphi_O - \varphi_L}{L}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\pi \left(\frac{n-1}{n}\right) (-n^2 - 2n - 1)^{\frac{1}{n}}}{(2m)^{\frac{1}{n}} (3n+1)} \right) \left(\frac{R_L - R_O}{\left(R_L^{\frac{-(n^2+2n+1)}{n}} - R_O^{\frac{-(n^2+2n+1)}{n}} \right)} \right)^{\frac{1}{n}}}{\pi R_L^2} \quad \text{Ecuación 3.5-49}$$

$$v_{R_L} = \left(\frac{\varphi_O - \varphi_L}{L}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\pi \left(\frac{n-1}{n}\right) (-n^2 - 2n - 1)^{\frac{1}{n}}}{(2m)^{\frac{1}{n}} (3n+1) R_L^2} \right) \left(\frac{R_L - R_O}{\left(R_L^{\frac{-(n^2+2n+1)}{n}} - R_O^{\frac{-(n^2+2n+1)}{n}} \right)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-50}$$

D) Flujo másico

El flujo másico tiene la forma:

$$W = \rho * Q = \left(\frac{\rho_o - \rho_L}{L} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\pi \rho (n^{\frac{n-1}{n}}) (-n^2 - 2n - 1)^{\frac{1}{n}}}{(2m)^{\frac{1}{n}} (3n + 1)} \right) \left(\frac{R_L - R_o}{\left(R_L^{\frac{-(n^2+2n+1)}{n}} - R_o^{\frac{-(n^2+2n+1)}{n}} \right)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Ecuación 3.5-51}$$

E) La magnitud del esfuerzo cortante

Retomando el perfil de velocidades [Ecuación 3.5-46]:

$$v_z = \left(\frac{3n + 1}{n + 1} \right) \left(\frac{Q}{\pi R(z)^2} \right) \left[1 - \frac{r^{\frac{n+1}{n}}}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}} \right] \quad \text{Ecuación 3.5-52}$$

Se deriva la ecuación con respecto a "r":

$$\left(\frac{dv_z}{dr} \right) = \left(\frac{3n + 1}{n + 1} \right) \left(\frac{Q}{\pi R(z)^2} \right) \left(\frac{n + 1}{n} \right) \left[\frac{r^{\frac{1}{n}}}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}} \right] \quad \text{Ecuación 3.5-53}$$

$$\left(\frac{dv_z}{dr} \right) = \left(\frac{3n + 1}{n} \right) \left(\frac{Q}{\pi} \right) \left[\frac{r^{\frac{1}{n}}}{R(z)^{\frac{3n+1}{n}}} \right]$$

Debido a las simplificaciones que se realizó en el análisis de orden de magnitud, el gradiente de la velocidad con respecto a "z", es muy pequeña en comparación con respecto al gradiente de la velocidad con respecto a "r". Por lo tanto, el tensor de rapidez de deformación es:

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{3n + 1}{n} \right) \left(\frac{Q}{\pi} \right) \left[\frac{r^{\frac{1}{n}}}{R(z)^{\frac{3n+1}{n}}} \right] \\ 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{3n + 1}{n} \right) \left(\frac{Q}{\pi} \right) \left[\frac{r^{\frac{1}{n}}}{R(z)^{\frac{3n+1}{n}}} \right] & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ecuación 3.5-54}$$

Entonces del modelo de la ley de potencia [Ecuación 3.2-2], el esfuerzo cortante que no se anula es:

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n = m \left(-\left(\frac{3n+1}{n} \right) \left(\frac{Q}{\pi} \right) \left[\frac{r^{\frac{1}{n}}}{R(z)^{\frac{3n+1}{n}}} \right] \right)^n \quad \text{Ecuación 3.5-55}$$

La magnitud del esfuerzo cortante en la pared tiene la forma:

$$\tau_{rz} = m \left(\left(\frac{-3n-1}{n} \right) \left(\frac{Q}{\pi} \right) \left[\frac{R(z)^{\frac{1}{n}}}{R(z)^{\frac{3n+1}{n}}} \right] \right)^n = m \left(\left(\frac{-3n-1}{n} \right) \left(\frac{Q}{\pi} \right) [R(z)^{-3}] \right)^n \quad \text{Ecuación 3.5-56}$$

F) El coeficiente de fricción

El coeficiente de fricción se calcula en la sección del cono donde la velocidad promedio es la mayor, es decir en radio final (R_L). Por lo tanto, por la definición se realiza el cociente del esfuerzo cortante en la pared [Ecuación 3.5-56] entre la velocidad promedio del radio final (R_L) [Ecuación 3.5-50] y tiene la siguiente forma:

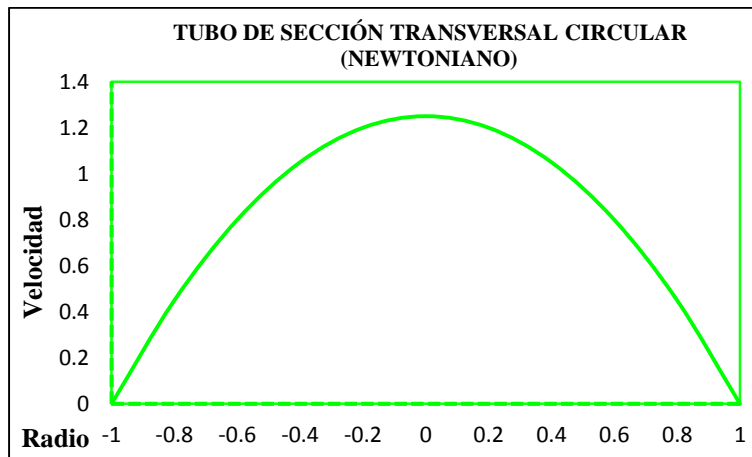
$$f = \frac{\tau_w}{\rho \langle v \rangle^2} = \frac{m \left(\left(\frac{-3n-1}{n} \right) \left(\frac{Q}{\pi} \right) [R(z)^{-3}] \right)^n}{\rho \left(\left(\frac{\rho_0 - \rho_L}{L} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\left(\frac{n-1}{n} \right) (-n^2 - 2n - 1)^{\frac{1}{n}}}{(2m)^{\frac{1}{n}} (3n+1) R_L^2} \right) \left(\frac{R_L - R_0}{\left(R_L^{\frac{-(n^2+2n+1)}{n}} - R_0^{\frac{-(n^2+2n+1)}{n}} \right)} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^2} \quad \text{Ecuación 3.5-57}$$

4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Perfil de velocidades de un fluido newtoniano que fluye en un tubo de sección transversal circular:

$$v_z = \frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

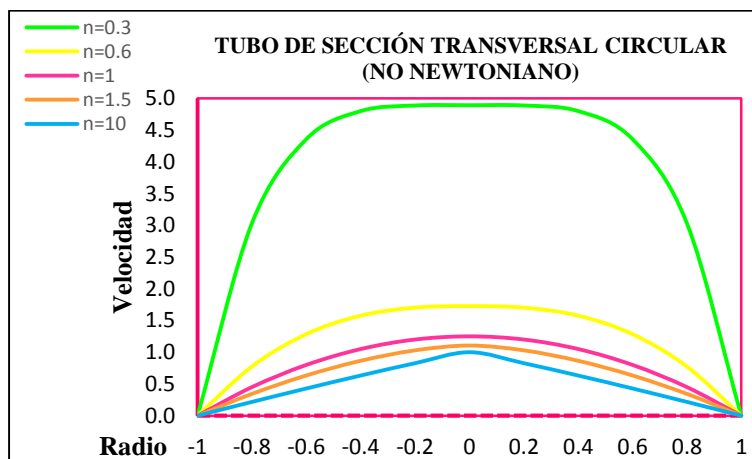
Ecuación 4.0-1



Perfil de velocidades de un fluido no newtoniano que fluye en un tubo de sección transversal circular:

$$v_z = \left(\frac{(-\Delta\phi)}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) R^{\left(\frac{n+1}{n} \right)} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\left(\frac{n+1}{n} \right)} \right]$$

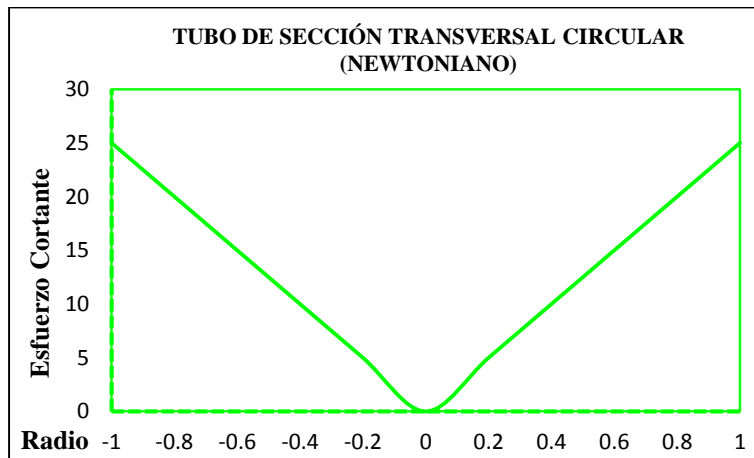
Ecuación 4.0-2



Perfil del esfuerzo cortante de un fluido newtoniano, que fluye en un tubo de sección transversal circular:

$$\left(\tau_{rz} = \tau_{zr} = \frac{(-\Delta\phi) r}{2L} \right)$$

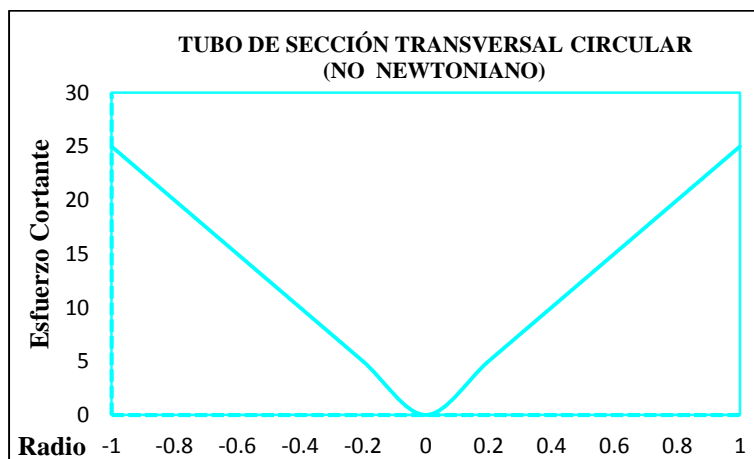
Ecuación 4.0-3



Perfil del esfuerzo cortante de un fluido no newtoniano, que fluye en un tubo de sección transversal circular:

$$\left(\tau_{rz} = \tau_{zr} = \frac{(-\Delta\phi) r}{2L} \right)$$

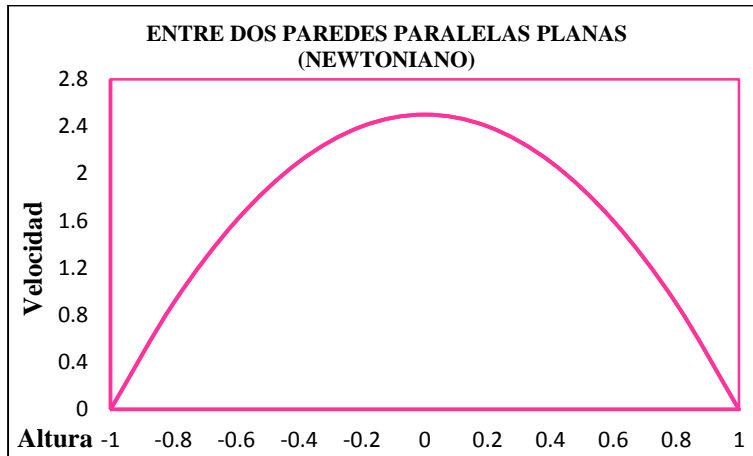
Ecuación 4.0-4



Perfil de velocidades de un fluido newtoniano, que fluye entre dos paredes paralelas planas:

$$v_x = \frac{(-\Delta\phi)y_0^2}{2\mu L} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right]$$

Ecuación 4.0-5

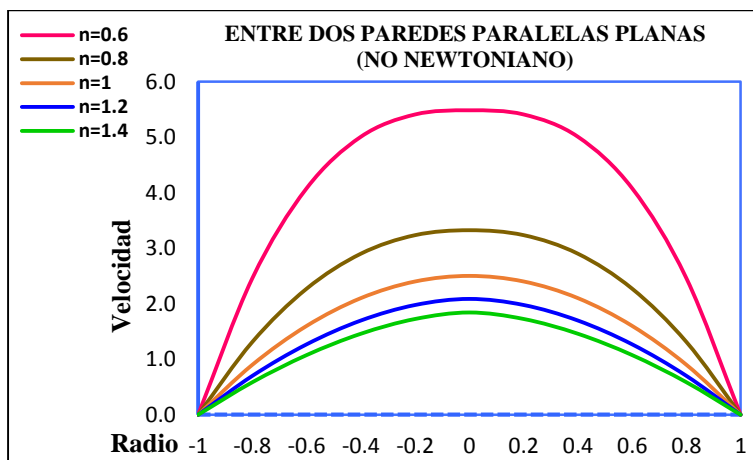


$\Delta\phi = -50$
$\mu = 10$
$L = 1$
$y_0 = 1$

Perfil de velocidades de un fluido no newtoniano, que fluye entre dos paredes paralelas planas:

$$v_x = \left(\frac{(-\Delta\phi)}{mL} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) y_0^{\left(\frac{n+1}{n} \right)} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0} \right)^{\left(\frac{n+1}{n} \right)} \right]$$

Ecuación 4.0-6

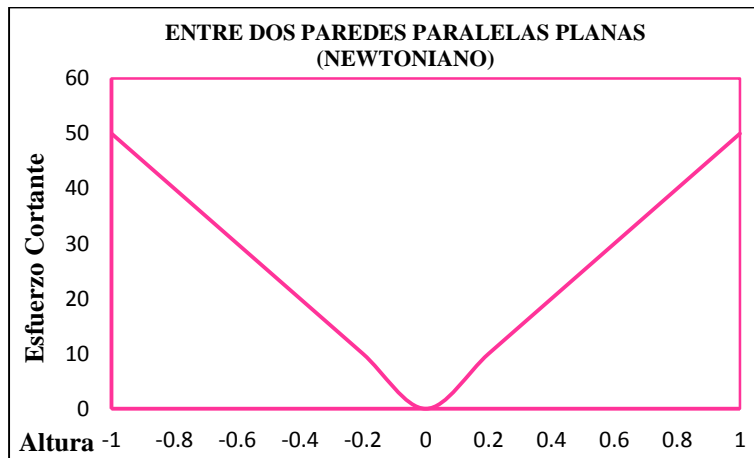


$\Delta\phi = -50$
$m = 10$
$L = 1$
$y_0 = 1$

Perfil del esfuerzo cortante de un fluido no newtoniano, que fluye entre dos paredes planas:

$$\left(\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{(-\Delta\phi)y}{L} \right)$$

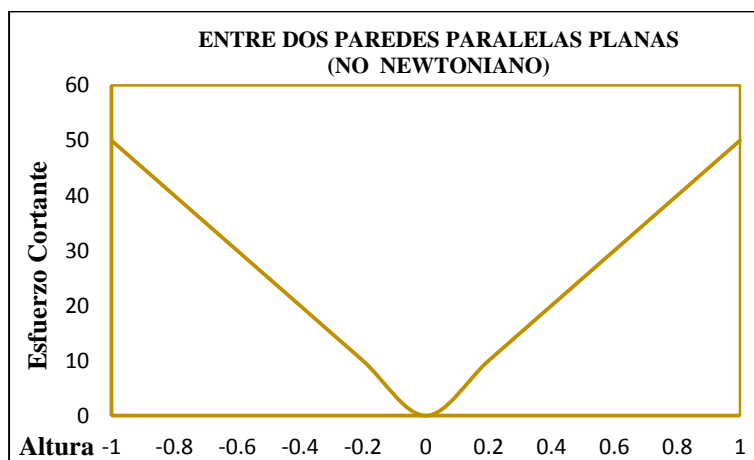
Ecuación 4.0-7



Perfil del esfuerzo cortante de un fluido no newtoniano, que fluye entre dos paredes planas:

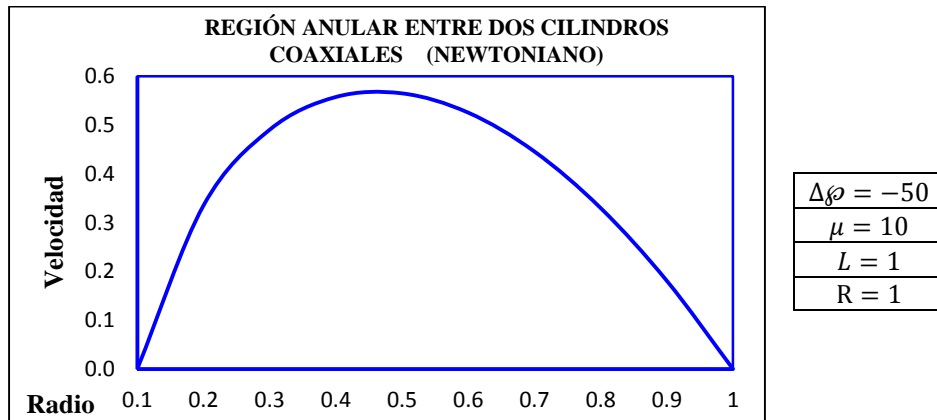
$$\left(\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{(-\Delta\phi)y}{L} \right)$$

Ecuación 4.0-8



Perfil de velocidades de un fluido newtoniano, que fluye en una región anular entre dos cilindros coaxiales:

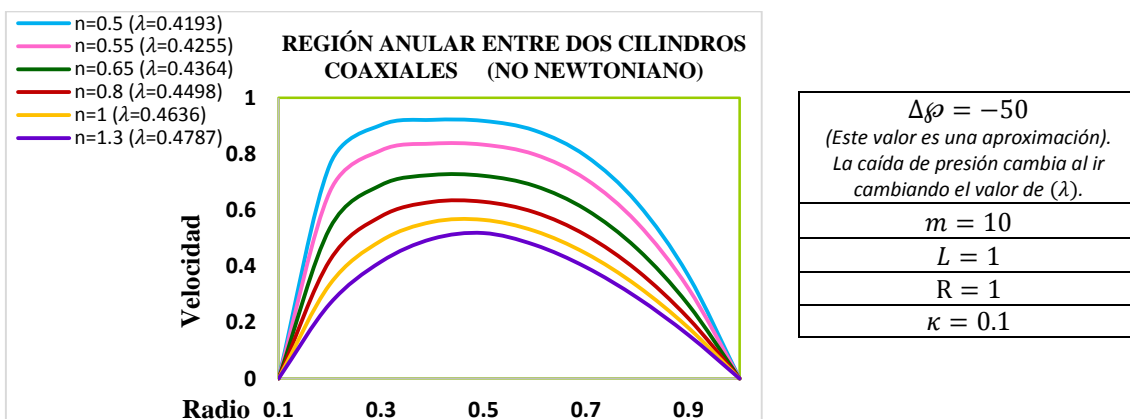
$$v_z = \left(\frac{(-\Delta\phi)R^2}{4\mu L} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \left(\frac{1 - \kappa^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right] \quad \text{Ecuación 4.0-9}$$



Perfil de velocidades de un fluido no newtoniano, que fluye en una región anular entre dos cilindros coaxiales: (Se hace una aproximación del (Se realiza la gráfica cambiando de ecuación de $(v_{z(1)})$ a $(v_{z(2)})$), cuando el valor de radio (r) es mayor de $(\lambda R = (0.4193)(1) = 0.4193)$, por ejemplo para $(n = 0.5)$.

$$v_{z(1)} = R \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^{1/n} \int_{\kappa}^{\xi} \left[\frac{\lambda^2}{x} - x \right]^{1/n} dx \quad \rightarrow \quad (\kappa \leq \xi \leq \lambda)$$

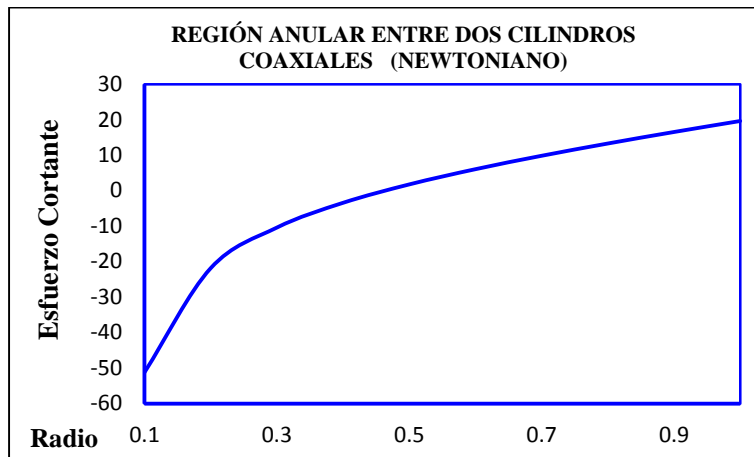
$$v_{z(2)} = R \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2mL} \right)^{1/n} \int_{\xi}^1 \left[x - \frac{\lambda^2}{x} \right]^{1/n} dx \quad \rightarrow \quad (\lambda \leq \xi \leq 1) \quad \text{Ecuación 4.0-10}$$



Perfil del esfuerzo cortante de un fluido newtoniano, que fluye en una región anular entre dos cilindros coaxiales:

$$\left(\tau_{rz} = \frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \left[\frac{r}{R} - \left(\frac{1 - \kappa^2}{2 \ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right) \left(\frac{R}{r} \right) \right] \right)$$

Ecuación 4.0-11

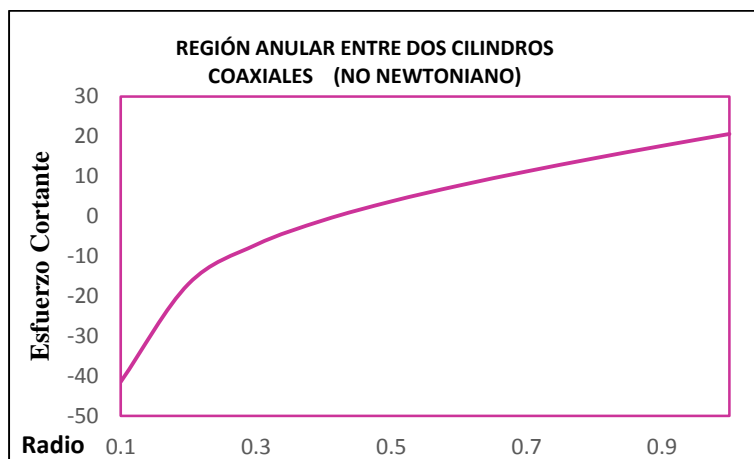


$\Delta\phi = -50$
$L = 1$
$R = 1$
$\kappa = 0.1$

Perfil del esfuerzo cortante de un fluido no newtoniano, que fluye en una región anular entre dos cilindros coaxiales:

$$\tau_{rz} = \left(\frac{(-\Delta\phi)R}{2L} \right) \left[\frac{(\lambda)^2 R}{r} - \frac{r}{R} \right] \rightarrow (\kappa R \leq r \leq \lambda R)$$

Ecuación 4.0-12



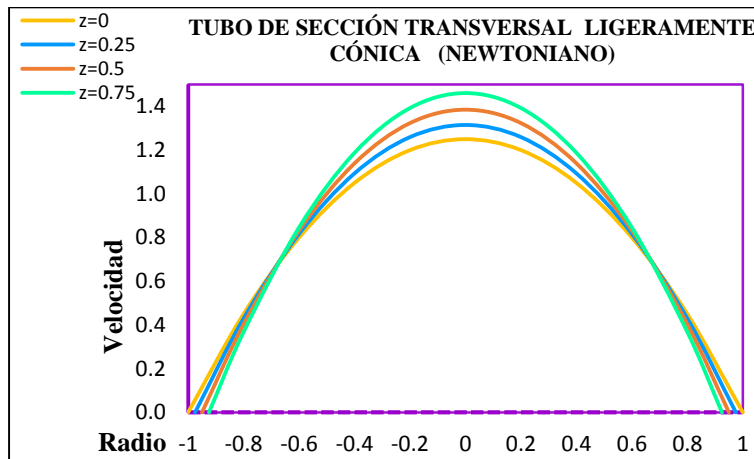
$\Delta\phi = 50$
$L = 1$
$R = 1$
$\kappa = 0.1$
$\lambda = 0.4193$

Perfil de velocidades de un fluido newtoniano, que fluye en un tubo de sección transversal ligeramente cónica:

$$v_z = \left(\frac{2Q}{\pi R(z)^2} \right) \left[1 - \frac{r^2}{R(z)^2} \right]$$

Ecuación 4.0-13

Donde: $R(z) = R_0 + (R_L - R_0)(z/L)$



$\Delta\phi = -50$
$\mu = 10$
$L = 1$
$Q = 1.96$
$R_0 = 1$
$R_L = 0.9$

Perfil de velocidades de un fluido no newtoniano, que fluye en un tubo de sección transversal ligeramente cónica:

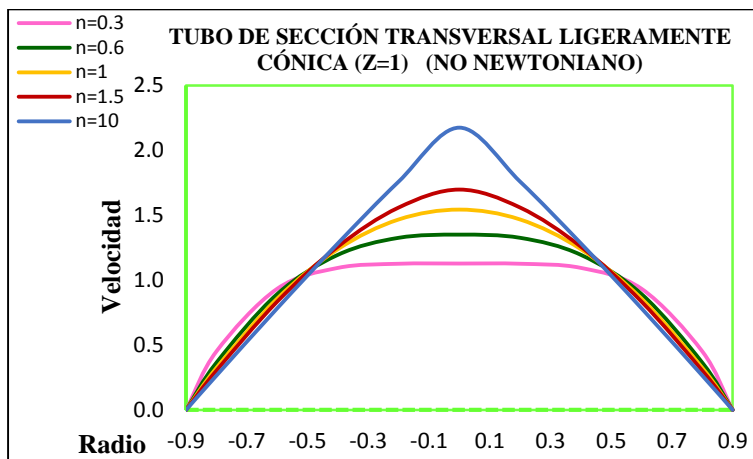
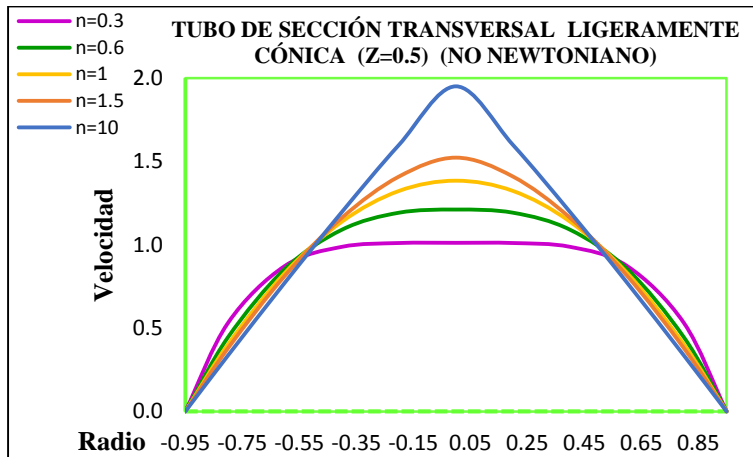
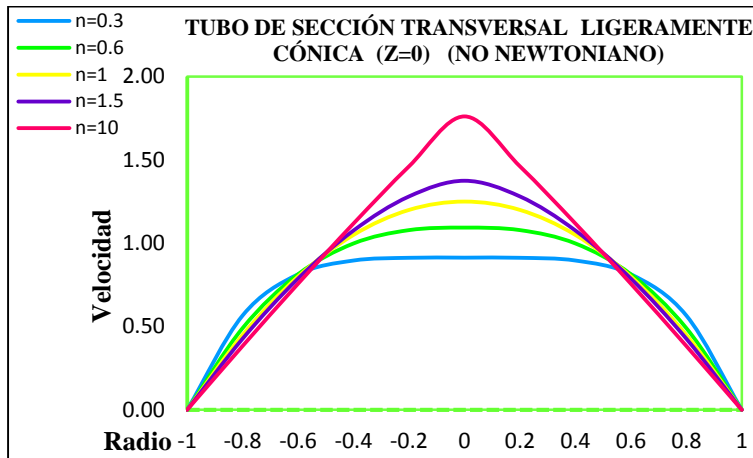
$$v_z = \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \left(\frac{Q}{\pi R(z)^2} \right) \left[1 - \frac{r^{\frac{n+1}{n}}}{R(z)^{\frac{n+1}{n}}} \right]$$

Ecuación 4.0-14

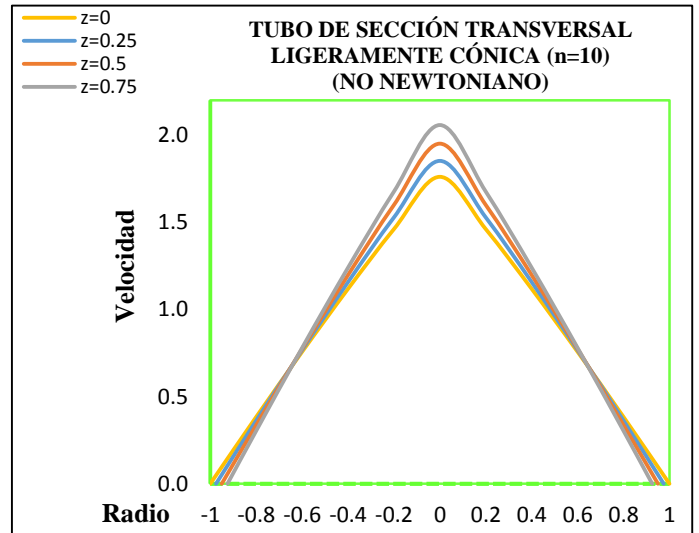
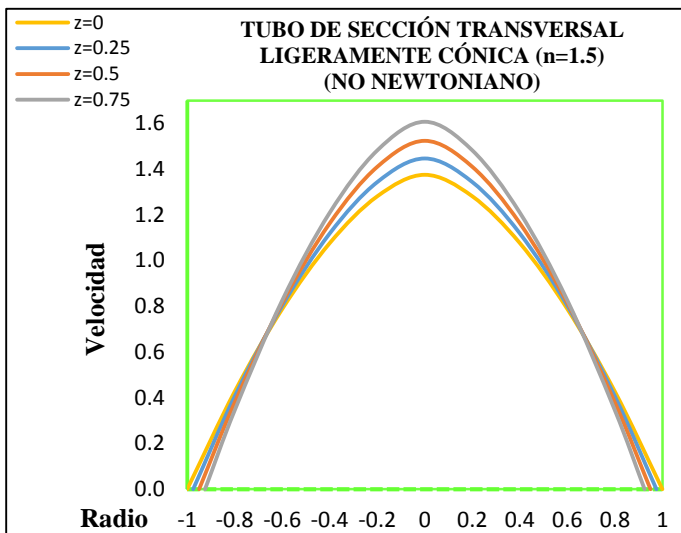
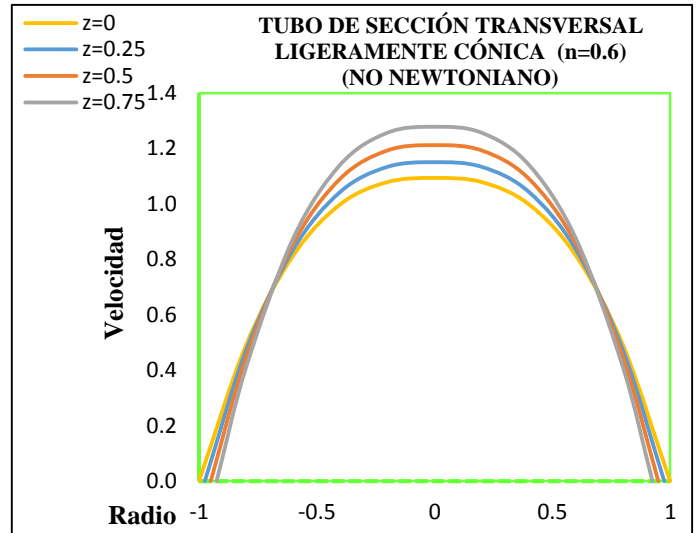
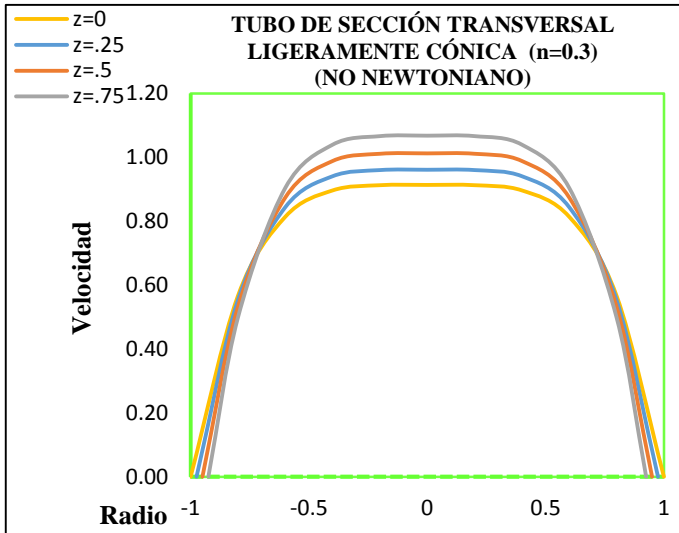
Donde: $R(z) = R_0 + (R_L - R_0)(z/L)$

$\Delta\phi = -50$
$m = 10$
$L = 1$
$Q = 1.96$
$R_0 = 1$
$R_L = 0.9$

Se modifica el valor del índice de la ley de potencia (n), pero la longitud (Z) del cono en la que se mide es constante:



Se modifica el valor de longitud axial (Z) del cono, pero el índice de la ley de potencia (n) es constante:



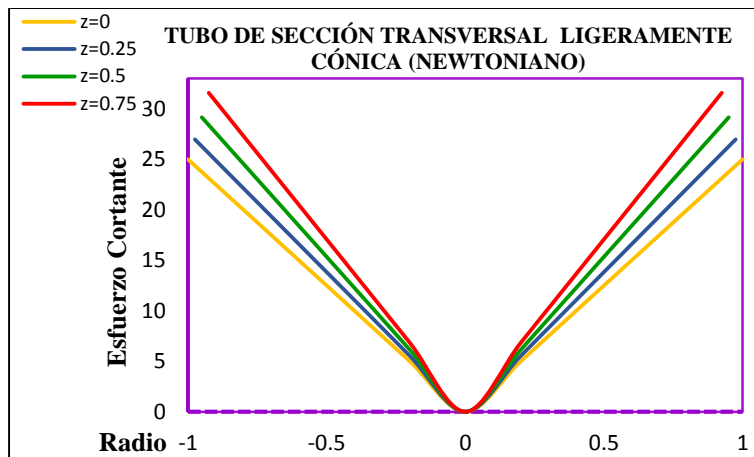
Perfil del esfuerzo cortante de un fluido newtoniano, que fluye en un tubo de sección transversal ligeramente cónica:

$$\tau_{rz} = \frac{\mu 4Q}{\pi R(z)^3}$$

Ecuación 4.0-15

Donde: $R(z) = R_0 + (R_L - R_0)(z/L)$

$\mu = 10$
$L = 1$
$Q = 1.96$
$R_0 = 1$
$R_L = 0.9$

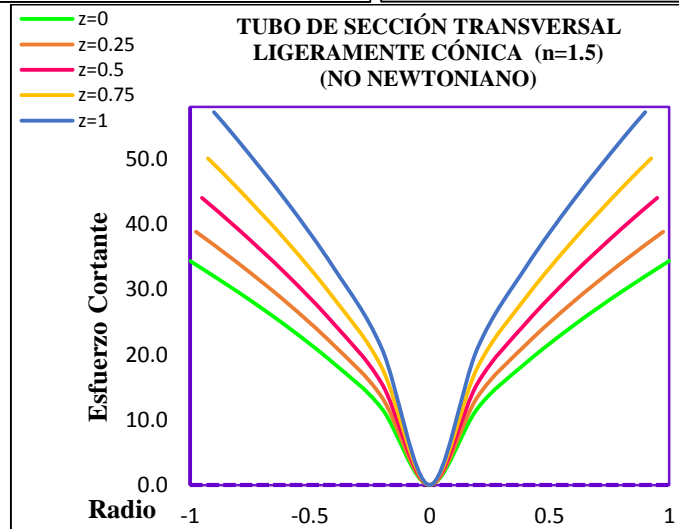
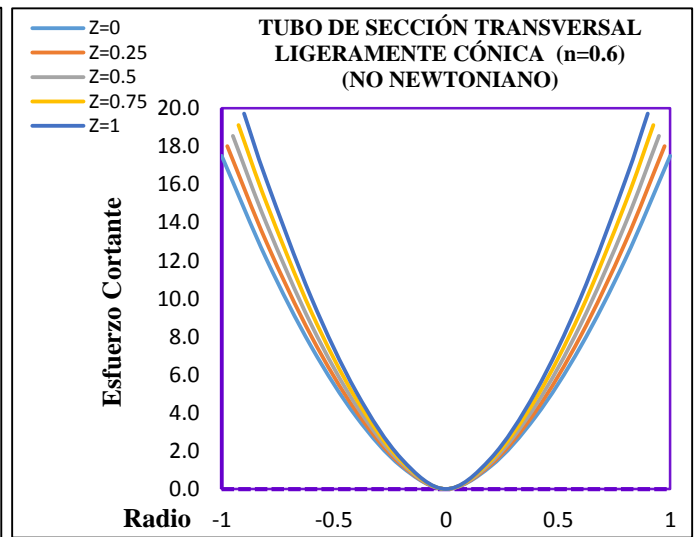
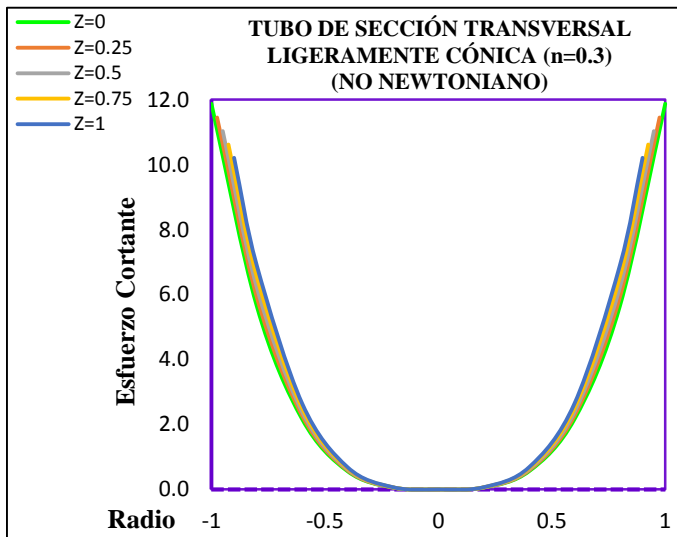


Perfil del esfuerzo cortante de un fluido no newtoniano, que fluye en un tubo de sección transversal ligeramente cónica:

$$\tau_{rz} = m \left(\left(\frac{-3n-1}{n} \right) \left(\frac{Q}{\pi} \right) \left[\frac{r^{\frac{1}{n}}}{R(z)^{\frac{3n+1}{n}}} \right] \right)^n \rightarrow \text{Donde: } R(z) = R_0 + (R_L - R_0)(z/L) \quad \text{Ecuación 4.0-16}$$

Se modifica el valor de la longitud (z), pero con el índice (n) constante. Se realiza con fluidos Pseudoplástico y fluidos dilatantes.

$m = 10$
$Q = 1.96$
$R_0 = 1$
$R_L = 0.9$
$L = 1$



Se observa en los fluidos newtonianos para todas las geometrías analizadas, que el perfil de velocidades, toma una forma parabólica positiva, donde existe un máximo y el cual representa el valor de la velocidad máxima.

Para los perfiles de velocidades del modelo de ley de potencia, en las geometrías de sección transversal circular, dos paredes planas y región anular, se comprueba que:

1. En fluidos pseudoplásticos ($n < 1$), se achata el perfil parabólico y aumenta la velocidad, es decir disminuye su viscosidad.
2. En fluidos dilatantes ($n > 1$), se afila el perfil parabólico y disminuye la velocidad, es decir aumenta su viscosidad.

Los esfuerzos cortantes entre el modelo newtoniano y el modelo de la ley de potencia, para las geometrías de sección transversal circular, dos paredes planas y región anular, no influye en el índice (n) de la ley de potencia y por tanto no existe cambio en los perfiles.

La geometría de sección transversal ligeramente cónica, se comporta un tanto diferente a las demás geometrías y se advierten los siguientes cambios:

1. Existe un aumento de velocidad al avanzar en dirección axial y reducirse el radio del cono, esto sucede debido que al mantener constante el flujo volumétrico, se debe compensar con un aumento de la velocidad del fluido.
2. Al contrario de las demás geometrías, la velocidad para pseudoplásticos disminuye y para dilatantes aumenta. Sin embargo, sigue manteniendo la forma, donde los pseudoplásticos son perfiles achatados y los dilatantes afilados.
3. En los esfuerzos cortantes para fluidos newtonianos conservan la linealidad como si fuera un tubo de sección transversal circular y aumenta conforme

avanza en la región axial. El esfuerzo cortante (τ_{rz}) dejan de ser lineal y tiene comportamiento cuadrático, donde para fluidos pseudoplásticos tiene un perfil achatado y para dilatantes un perfil afilado.

Para concluir, el modelo newtoniano y de la ley de potencia son modelos simples que pueden resultar útiles para un primer estimado del movimiento de los fluidos que se encuentran en diversas geometrías. Además, se debe tener en mente que al analizar un fluido existen muchos métodos de simplificación muy efectivos, como lo fueron en este caso los órdenes de magnitud y de lubricación, las cuales reducen tiempo y esfuerzo, factores relevantes en la industria.

Espero que este trabajo sea de gran ayuda a los estudiantes que van comenzando a enfrentarse con problemas de flujo de momentum que además tienen un símil muy parecido a los de energía y masa. Así mismo, los procesos matemáticos realizados en este trabajo se expresan más a detalle, en comparación de las referencias clásicas disponibles.

5. BIBLIOGRAFIA

- Byron Bird, R., E. Stewart, W., & N. Lightfo, E. (2001). *Fenómenos de Transporte* (2a. ed.). México: Limusa Wiley.
- Byron Bird, R., C. Armstrong, R., & Hassager, O. (1987). *Dynamics of Polymeric Liquids* (Vol. Volumen 1).
- Heras Jiménez, S. (2012). *Mecánica de Fluidos en Ingeniería*.
- Morrison, F. A. (2001). *Understanding Rheology*. New York: Oxford University Press.
- Newton, I. S. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Londin.
- Sámano Tirado, D. A., & Mihir, S. (15 de July de 2009). *MecFI MECÁNICA DE FLUIDOS*. Obtenido de Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame: <http://www3.nd.edu/~msen/MecFI.pdf>
- Scriven, J. S. Dahler and L. E. (1961). Angular momentum of continua. *Nature*, 192, 36–37.
- W. Hanks, R., & M. Larsen, K. (1979). The Flow of Power-Law Non Newtonian Fluids in Concentric Annuli. *Ind. Eng. Chem. Fundamen.*, 18, 33-35.
- Whitaker, S. (18 de May de 2014). *Elementary Heat Transfer Analysis*. Obtenido de Google Book Search:
<https://books.google.com.mx/books?id=oh2jBQAAQBAJ&pg=PA57&dq=order+of+magnitud+de+analysis+definition&hl=es-419&sa=X&ved=0ahUKEwih-LqSutTJAhUDSSYKHcTtAK8Q6AEIGjAA#v=onepage&q=order%20of%20magnitud%20analysis%20definition&f=false>
- Whitaker, S. (1976). *Elementary Heat Transfer Analysis*. United States of America: Pergamon Press Inc.
- Wikibooks. (26 de November de 2013). *Advanced Mathematics for Engineers and Scientists/Scale Analysis*. Obtenido de Wikibooks:
https://en.wikibooks.org/wiki/Advanced_Mathematics_for_Engineers_and_Scientists/Scale_Analysis
- Wikipedia®. (17 de May de 2014). *Lubrication theory*. Obtenido de Wikipedia, The Free Encyclopedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Lubrication_theory
- Wikipedia®. (31 de December de 2015). *Scale analysis (mathematics)*. Obtenido de Wikipedia, The Free Encyclopedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Scale_analysis_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Scale_analysis_(mathematics))
- YouTube. (5 de June de 2013). *C J Chen Lecture on Turbulent Flows Order of Magnitude Analysis*. Obtenido de YouTube: <https://www.youtube.com/watch?v=OUMunqQVMi4>