



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Representaciones de Arco.

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:  
M. en C. SALOMÓN DOMÍNGUEZ DE LA CRUZ

DIRECTOR DE TESIS  
DR. CHRISTOF GEISS HAHN  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM.

COMITÉ TUTORAL  
DR. RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS.  
DR. OCTAVIO MENDOZA HERNÁNDEZ  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS. UNAM.

23 DE JUNIO DE 2016.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos.

En primer lugar agradezco Dios por la vida y la oportunidad que me dio de estudiar matemáticas en la Universidad Nacional Autónoma de México, además por la vida de mi esposa e hijos.

Hay muchas personas a las cuales quiero expresar mi agradecimiento;

A mi tutor el Dr. Christof Geiss Hahn por su dirección para atacar el problema, por su apoyo y por la paciencia que mostró hacia mi durante los cinco años que estuve bajo su dirección.

Al Dr. Daniel Labardini Fragoso por el tiempo que me dedico en las múltiples sesiones que tuvimos, por su paciencia y consejos que me ayudaron para el desarrollo de este trabajo.

A mis profesores los Doctores Octavio Mendoza Hernández, Raymundo Bautista Ramos, Ernesto Rosales Gonzalez y Jorge Castillo por su apoyo.

Al pastor Crescenciano Martinez Catalan y su esposa Yolanda de la O Valle y al pastor Juan German Ortiz y su esposa Martha Nuñez por su apoyo y sus oraciones en mis flaquezas y dificultades.

A mis amigos Eladio Escobedo Trujillo, Jose Ángel Frias, Sergio Palafox Delgado, Angelito Camacho Calderon, a mis amigo de Filos Beisbol, a todos mi amigos en acapulco.

En especial a mi esposa Irma Anai Ortiz Aranda y a mis padres Rosa Maria de la Cruz Muñoz por su gran apoyo en las dificultades que tuve en mi vida.

Dedico mi trabajo a Dios y a mi familia. Por último agradezco al Conacyt ya que recibí financiamiento de esta dependencia.

# Índice

<b>0. Introducción.</b>	<b>3</b>
<b>1. Antecedentes de Triangulaciones de Superficies y Carcajes con Potencial.</b>	<b>22</b>
1.1. Carcaj. . . . .	22
1.2. Triangulaciones ideales de Superficies y sus Flips. . . . .	23
1.3. Carcajes con Potencial. . . . .	26
1.4. El Potencial de una Triangulación. . . . .	29
1.5. Triángulaciones etiquetadas. . . . .	30
<b>2. Antecedentes de Representaciones de Carcajes con Potencial.</b>	<b>33</b>
<b>3. Representación de Cuerda <math>m(\tau, i)</math>.</b>	<b>36</b>
<b>4. Representación de Arco <math>M(\tau, i)</math>.</b>	<b>79</b>
<b>5. Teorema Principal.</b>	<b>106</b>
Referencias	221

## 0. Introducción.

Las álgebras de conglomerado fueron definidas en el 2002 por Fomin y Zelevinsky en [7] motivados por las bases canónicas en la teoría de Lie. En la actualidad las álgebras de conglomerado se relacionan con distintas áreas de las matemáticas como son: *la geometría algebraica, las representaciones de álgebras, la teoría de Teichmüller* entre otras mas.

Por definición el álgebra de conglomerado  $\mathcal{A}_B$  asociado a una matriz  $B$  anti-simetrizable con coeficientes enteros es una sub-álgebra de un campo de funciones racionales. Dicha sub-álgebra esta generada recursivamente por ciertos conjuntos llamados conglomerados. Empezando con la matriz  $B$  y un conjunto inicial llamado semilla se obtienen otra semilla mediante la mutación de la semilla inicial. A lo largo de esta tesis  $B$  será una matriz anti-simétrica.

El conjunto de matrices anti-simétricas con entradas en los enteros se corresponden biyectivamente con el conjunto de carcajes 2-acíclicos. Denotamos por  $\mathcal{A}_Q := \mathcal{A}_B$  si la matriz  $B$  se corresponde con el carcaj  $Q$ .

Una conexión importante ( para esta tesis ) de las álgebras de conglomerado se da con las representaciones de álgebras en el trabajo de H. Derksen, J. Weyman y A. Zelevinsky [3] el cual se desarrolló para demostrar muchas conjeturas de naturaleza combinatoria. Esté trabajo es acerca de carcajes con potencial  $(Q, S)$  y las representaciones del álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q, S)$ , donde  $S$  denota un potencial no degenerado de un carcaj 2-acíclico  $Q$  y  $\mathcal{P}(Q, S)$  es por definición el cociente del álgebra completa de caminos de  $Q$  módulo la cerradura del ideal generado por las derivadas cíclicas de  $S$ .

Recordamos que un *potencial* ([3, Definición 3.1]) en  $Q$  es un elemento de  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$  (véase [3, Definición 2.2] ó Definición 1.14 de esta tesis) en el que todos sus términos son ciclos de longitud positiva. Al conjunto de todos los potenciales en  $Q$  lo denotamos por  $R\langle\langle Q \rangle\rangle_{cyc}$  el cual es un subespacio cerrado de  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$ .

Para cada flecha  $a$  en  $Q_1$  y cada ciclo  $a_1 \dots a_d$  en  $Q$  definimos la *derivada cíclica* como sigue;

$$\partial_a(a_1 \dots a_d) = \sum_{i=1}^d \delta_{a, a_i} a_{i+1} \dots a_d a_1 \dots a_{i-1},$$

(donde  $\delta_{a, a_i}$  es la delta de Kronecker) se extiende linealmente y continuamente para obtener un morfismo  $\partial_a : R\langle\langle Q \rangle\rangle_{cyc} \rightarrow R\langle\langle Q \rangle\rangle$  ([3, Definición 3.1]).

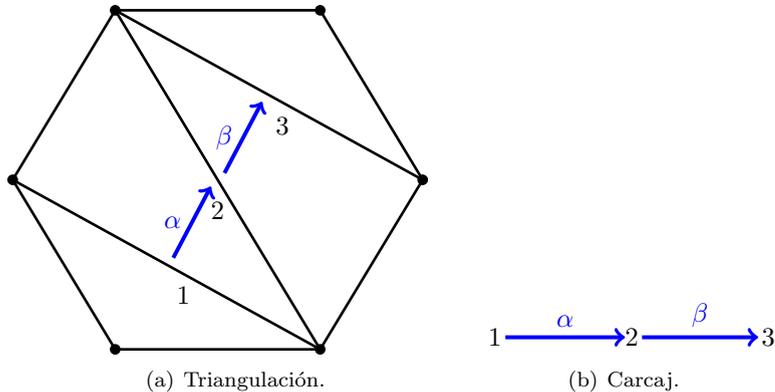
Otra conexión importante (para esta tesis) es el trabajo de S. Fomin, M. Shapiro y D. Thurston

[6] acerca de superficies de Riemann con puntos marcados. En este trabajo se definió el álgebra de conglomerado  $\mathcal{A}_{(\Sigma, M)}$  que proviene de las triangulaciones etiquetadas de una superficie con puntos marcados  $(\Sigma, M)$ . Además se demostró que existe una biyección entre los conglomerados de  $\mathcal{A}_{(\Sigma, M)}$  y las triangulaciones etiquetadas de superficies  $(\Sigma, M)$ .

Consideramos una triangulación ideal  $\tau$  sin triángulos doblados de una superficie con puntos marcados  $(\Sigma, M)$ , combinando los trabajos de H. Derksen, J. Weyman, A. Zelevinsky [3] y S. Fomin, M. Shapiro, D. Thurston [6] Labardini-Fragoso definió un potencial no degenerado  $S(\tau)$  para  $Q(\tau)$ . Siguiendo [6] y [11] se define el carcaj con potencial  $(Q(\tau), S(\tau))$  asociado a  $\tau$  como la parte reducida de  $(\widehat{Q}(\tau), \widehat{S}(\tau))$ , donde  $\widehat{Q}(\tau)$  y  $\widehat{S}(\tau)$  se definen como sigue:

Los vértices de  $Q(\tau)$  son los arcos de  $\tau$ , ahora si  $i$  y  $j$  son vértices de un triángulo  $\Delta$  de  $\tau$  entonces existe una flecha  $\alpha : i \rightarrow j$  en  $\widehat{Q}(\tau)$  si al ordenar los lados del triángulo  $\Delta$  en el sentido de las manecillas del reloj, el arco  $j$  le sigue al arco  $i$ . Por otro lado el potencial  $\widehat{S}(\tau)$  se define como la suma  $\sum_{\Delta} \widehat{S}^{\Delta}$ , donde  $\widehat{S}^{\Delta}$  es el triángulo en  $\widehat{Q}(\tau)$  orientado en el sentido de las manecillas del reloj. En la sección cinco del capítulo 1 (de esta tesis) recordaremos la definición mas general del potencial no degenerado  $S(\tau)$  dada por Labardini-Fragoso para cualquier triangulación etiquetada de  $(\Sigma, M)$ .

Para una superficie  $\Sigma$  sin puntos marcados en el interior y una triangulación ideal  $\tau$  de  $\Sigma$ , se define la representación de un arco  $i$  (que no pertenece a la triangulación  $\tau$ ) de la manera natural siguiendo las ideas de Assem-Brüstle-Charbonneau-Plamondon [1] y Caldero-Chapoton-Schiffler [2]. Es decir, el espacio vectorial asociado a un vértice  $j$  es  $K^{\mathbb{A}(i, j)}$  donde  $\mathbb{A}(i, j)$  es el número de puntos de intersección del arco  $i$  con el arco  $j$ . Las transformaciones lineales asociadas a las flechas de  $Q(\tau)$  se definen siguiendo el arco  $i$  a través de la triangulación  $\tau$ , como se muestra en la Figura 1.



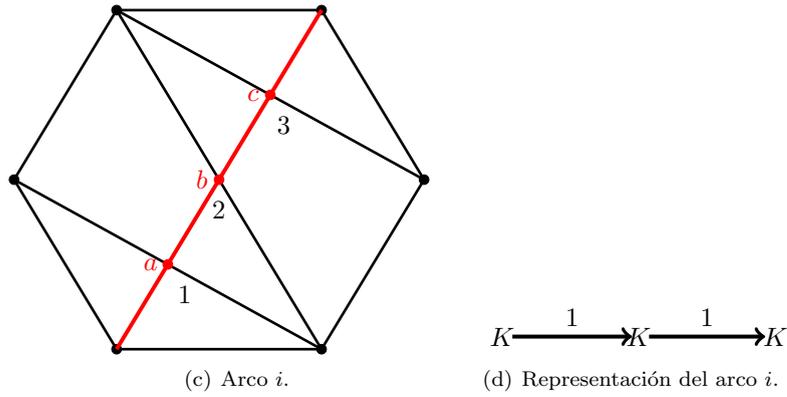


Figura 1: Representación de arco para una superficie  $\Sigma$  sin puntos marcados en el interior.

ahora sea  $(\Sigma, M)$  una superficie con puntos marcados en el interior,  $\tau$  una triangulación ideal (es decir, una triangulación sin etiquetas) de  $(\Sigma, M)$  sin triángulos doblados,  $i$  un arco (sin etiquetas) que no pertenece a la triangulación  $\tau$  y  $(Q(\tau), S(\tau))$  el carcaj con potencial asociado a la triangulación  $\tau$ . En este caso es fácil observar que las pinchaduras causan el siguiente problema. Si se define de la manera natural la representación de  $i$  denotada por  $m(\tau, i)$  entonces  $m(\tau, i)$  no cumple las relaciones Jacobianas de  $(Q(\tau), S(\tau))$ . Véase la Figura 2.

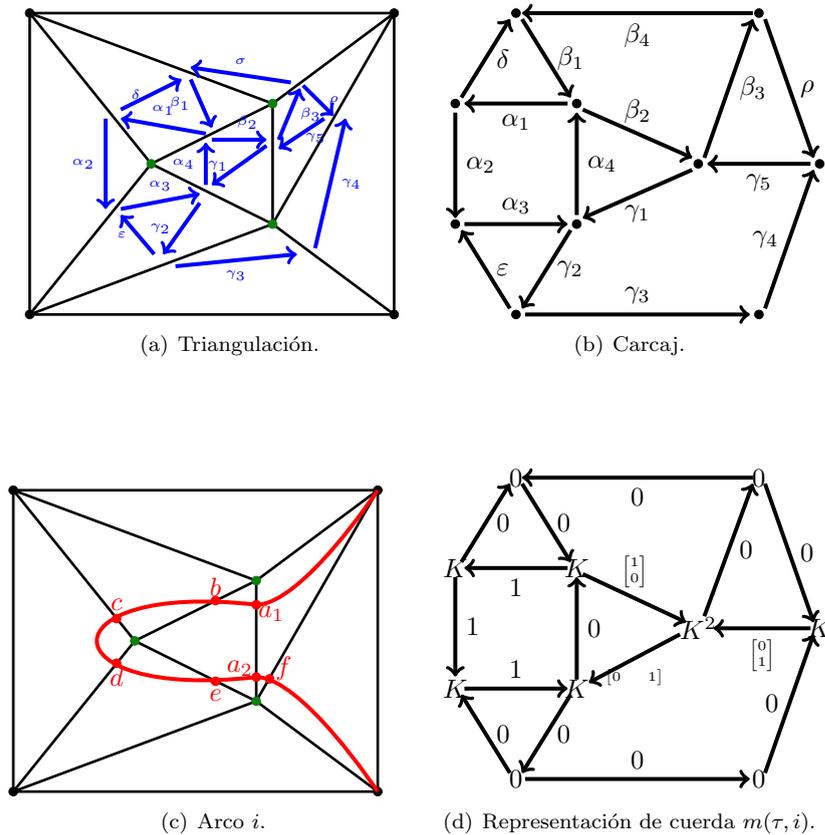


Figura 2:  $(\Sigma, M)$  superficie con puntos marcados.

$$\partial(S(\tau))_{\alpha_4} = -\alpha_3\alpha_2\alpha_1 + \gamma_1\beta_2 = 1 \cdot 1 \cdot 1 + [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1 \neq 0.$$

Dado que la representación  $m(\tau, i)$  no satisface las relaciones Jacobianas, Labardini-Fragoso definió en [10] las curvas de desviación (denotada por  $d_{(a_1, a_2)}^\Delta$ ) y las matrices de desviación (denotada por  $D_{i, j}^{\Delta, \alpha}$ ), donde  $\alpha$  es una flecha de  $Q(\tau)$  tal que  $t(\alpha) = j$ . Para definir la representación de arco  $M(\tau, i)$  se modifican las transformaciones lineales de la representación  $m(\tau, i)$  usando las matrices de desviación. La representación de arco  $M(\tau, i)$  satisface las relaciones Jacobianas. Véase la Figura 3.

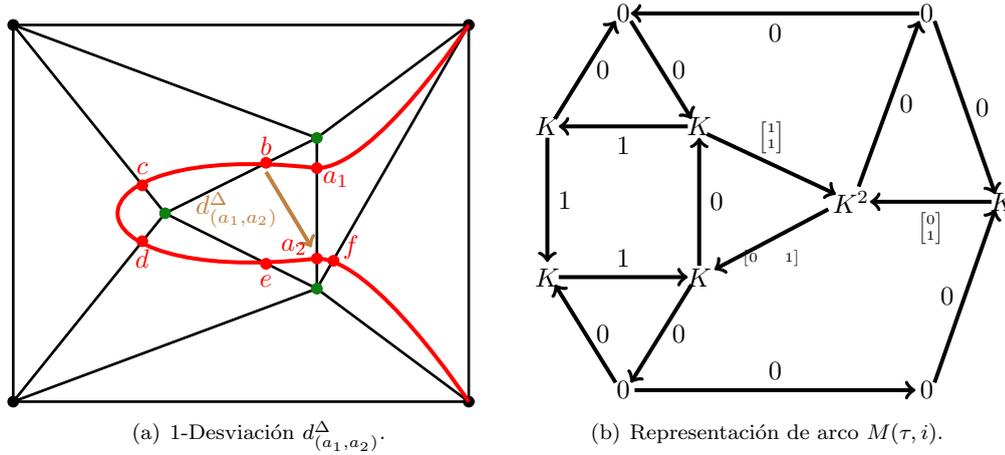


Figura 3:  $(\Sigma, M)$  superficie con puntos marcados.

La matriz asociada a la desviación  $d_{(a_1, a_2)}^\Delta$  es  $D_{i, t(\beta_2)}^\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  y el resto de matrices de desviación para los arcos de  $\tau$  son la identidad. Se modifica la transformación lineal asociada a la flecha  $\beta_2$  como sigue:

$$M(\tau, i)_{\beta_2} := D_{i, t(\beta_2)}^\Delta m(\tau, i)_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A continuación calculamos  $\partial(S(\tau))_{\alpha_4}$  en  $M(\tau, i)$  para verificar que se cumplen las derivadas cíclicas.

$$\partial(S(\tau))_{\alpha_4} = -\alpha_3\alpha_2\alpha_1 + \gamma_1\beta_2 = 1 \cdot 1 \cdot 1 + [0 \quad 1] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = -1 + 1 = 0.$$

La motivación de esta tesis es extender la definición de representación de arco de Labardini-Fragoso a un contexto de triangulaciones etiquetadas. Los conceptos que se utilizarán a lo largo de esta tesis los vamos a definir en una triangulación  $\tau$  con signatura (véase [11, Definición 3.9] o Definición 1.19

de esta tesis) no negativa de una superficie con puntos marcados  $(\Sigma, M)$ , posteriormente se generalizarán a cualquier triangulación etiquetada. Cabe mencionar que la definición de representación de arco (etiquetado) se dedujo a partir de la representación de arco definida por Labardini-Fragoso mediante el proceso de mutación de representaciones.

El primer capítulo está dividido en cinco secciones, en la primera sección recordamos algunas definiciones básicas como; carcaj, caminos en un carcaj y la mutación de un carcaj en un vértice. En la segunda sección recordamos algunos conceptos y resultados de S. Fomin, M. Shapiro y D. Thurston (que aparecen en [6]) acerca de triangulaciones de superficies con puntos marcados. Además recordamos un resultado de L. Mosher [13] que relaciona cualesquiera dos triangulaciones ideales de superficies con puntos marcados mediante flips.

En la tercera sección del primer capítulo recordamos conceptos como son; el álgebra de caminos de un carcaj, la completación del álgebra de caminos y el álgebra Jacobiana. Además recordamos conceptos y resultados de H. Derksen, J. Weyman y A. Zelevinsky (que aparecen en [3]) acerca de carcajes con potencial. En la cuarta sección recordamos el potencial  $(S(\tau))$  para triangulaciones ideales, definido por Labardini-Fragoso (que aparecen en [9]). Por último en la quinta sección recordamos algunos conceptos de S. Fomin, M. Shapiro y D. Thurston (que aparecen en [6]) acerca de triangulaciones etiquetadas de superficies con puntos marcados. Además recordamos el potencial  $S(\tau)$  para triangulaciones etiquetadas de superficies con puntos marcados, definido por Labardini-Fragoso (que aparecen en [11]).

En el segundo capítulo recordamos algunas nociones y resultados de H. Derksen, J. Weyman y A. Zelevinsky (que aparecen en [3]) sobre representaciones de carcajes con potencial.

El tercer capítulo inicia con la siguiente definición:

**Definición 0.1.** Sean  $\tau$  una triangulación etiquetada de  $(\Sigma, M)$  con signatura no negativa y  $\Delta$  un triángulo no doblado en  $\tau^\circ$ . Decimos que  $\Delta$  es un triángulo de;

- a) Tipo 1 si ningún lado de  $\Delta$  es lado de un triángulo doblado.
- b) Tipo 2 si  $\Delta$  comparte sólo un lado con un triángulo doblado  $\Delta'$ .
- c) Tipo 3 si  $\Delta$  comparte dos lados con triángulos doblados distintos  $\Delta'$  y  $\Delta''$ .

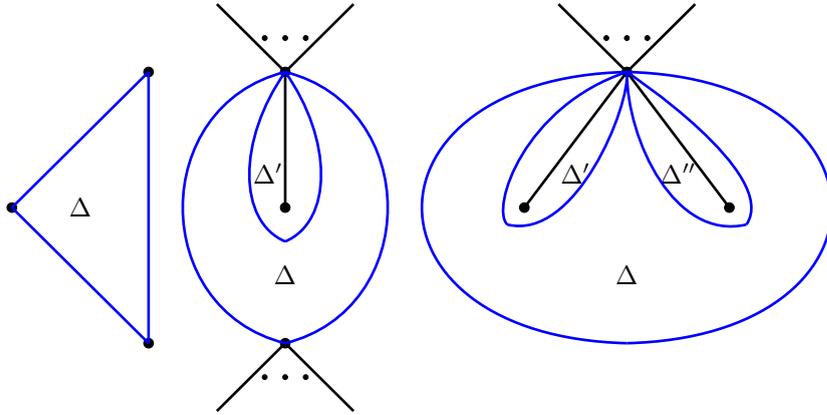


Figura 4: Triángulos de tipo 1,2 y 3.

Ahora vamos a dibujar el carcaj  $\widehat{Q}(\tau^\circ)$  en la superficie  $(\Sigma, M)$ . Dado que cualquier triangulación de  $(\Sigma, M)$  se puede obtener pegando las piezas de la Figura 5 ( véase [6, Sección 4.2] ), es suficiente observar como se dibuja  $\widehat{Q}(\tau^\circ)$  en cada una de dichas piezas.

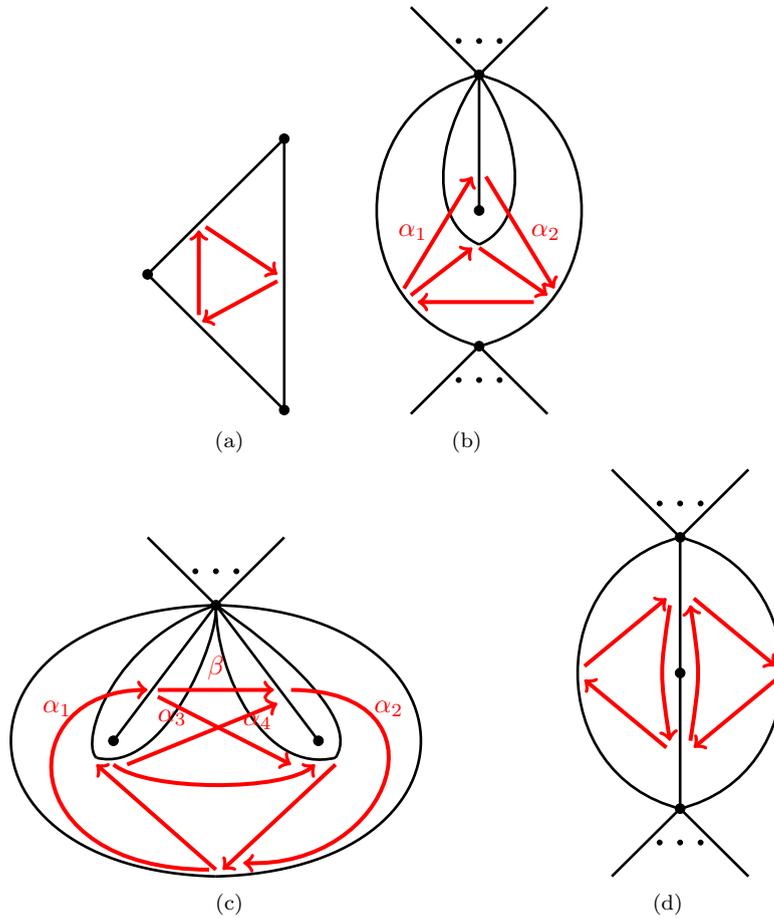


Figura 5: Dibujo de  $Q(\tau^\circ)$  sobre  $(\Sigma, M)$ .

Dado un triángulo  $\Delta$  de tipo 2 ó 3 en  $\tau$  vamos a asignar una etiqueta (asociada al triángulo  $\Delta$ ) en

el conjunto  $\{l_1, l_2, l_3\}$  a los arcos de  $\tau$ .

- a) Sea  $\Delta$  un triángulo de tipo 2. Denotamos por  $m$  al único lado de  $\Delta$  que es lado no doblado del único triángulo doblado  $\Delta'$  que comparte a  $m$  como uno de sus lados.

Asignamos la etiqueta  $l_1$  a  $m$  en  $\Delta$  y recorriendo los lados de  $\Delta$  en el sentido de las manecillas del reloj, asignamos la etiqueta  $l_2$  y  $l_3$  en  $\Delta$  al segundo y tercer lado respectivamente.

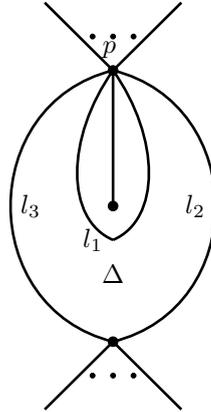


Figura 6: Etiquetas de los lados de un triángulo de tipo 2.

- b) Sea  $\Delta$  un triángulo de tipo 3.

Asignamos la etiqueta  $l_1$  en  $\Delta$  al único lado de  $\Delta$  que no es lado de ningún triángulo doblado. Recorriendo los lados de  $\Delta$  en el sentido de las manecillas del reloj, asociamos la etiqueta  $l_2$  y  $l_3$  en  $\Delta$  al segundo y tercer lado respectivamente.

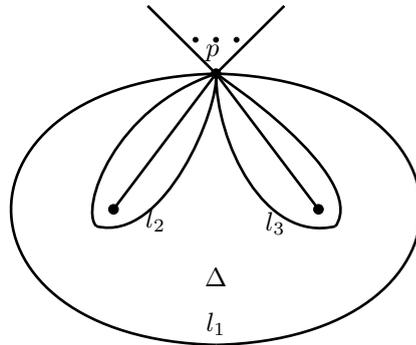


Figura 7: Etiquetas de los lados de un triángulo de tipo 3.

Usando la Definición 0.1, el carcaj dibujado sobre  $(\Sigma, M)$  y las etiquetas de los triángulos de tipo 2 y 3. Para una curva  $\gamma$  en  $\Sigma$  con extremos en un arco  $j$  de  $\tau^\circ$ , se define el concepto de rodear un pinchadura  $p$ . Este concepto nos será muy útil para definir las curvas de desviación y las curvas

auxiliar. Con dichas curvas se definen las matrices de desviación y las matrices auxiliares para modificar la representación de cuerda.

Primero se define el concepto de *rodear a una pinchadura  $p$*  para triangulaciones con signatura no negativa y posteriormente se extiende la definición a cualquier triangulación etiquetada. Para la definición se consideran dos casos, el primer caso es cuando la signatura de  $p$  es 1 y el segundo cuando la signatura de  $p$  es cero. En cada caso consideramos los sub-casos cuando  $j$  es lado de un triángulo doblado o no es lado de ningún triángulo doblado. En el caso que  $j$  sea el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  cuyo lado no doblado es  $m$ , se considera los sub-casos cuando  $m$  es lado de un triángulo de tipo 2 ó 3. Ahora si  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado consideramos los sub-casos cuando  $j$  es lado de un triángulo de tipo 2 o 3.

En la Figura 8 se muestra una curva  $\gamma$  que rodea a una pinchadura  $p$  con signatura 1. En inciso a) se muestra el caso cuando el arco  $j$  es lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  mientras que en el inciso b) se muestra el caso cuando el arco  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado.

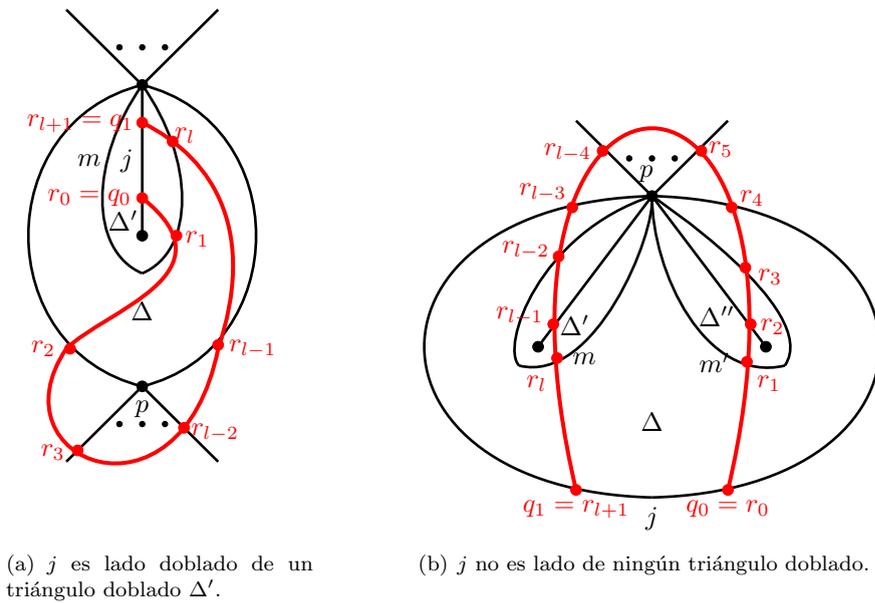


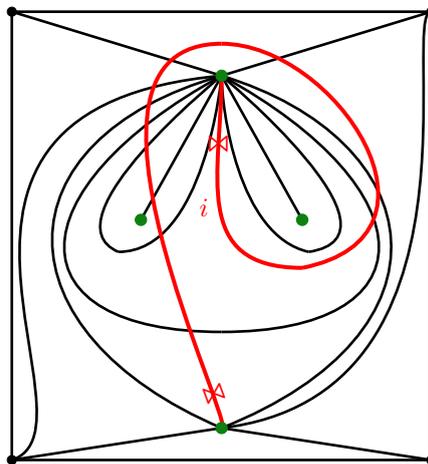
Figura 8: Curva que rodea a una pinchadura  $p$ .

Notemos que en la definición *rodear a una pinchadura  $p$* , para una curva  $\gamma$  con extremos en un arco  $j$  no se considera el caso cuando  $j$  es el lado no doblado de un triángulo doblado. Esto es por el concepto de curva desviación el cual se va a definir en el capítulo cuatro.

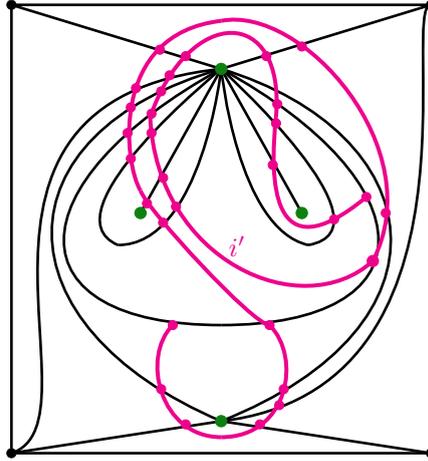
Por otro lado a partir de un arco etiquetado  $i$  cuyos extremos son  $p$  y  $q$ , y que no pertenece a la triangulación  $\tau^\circ$ , se construye una curva etiquetada  $i'$ . Esta curva etiquetada  $i'$  se utilizará para definir representación de cuerda  $m(\tau, i)$  de manera mas gráfica. Se realiza la construcción primero sobre una triangulación etiquetada  $\tau$  con signatura no negativa y después se generaliza para cualquier triangulación etiquetada. Para la construcción de dicha curva  $i'$  primero se construye una curva  $i_0$  (sin etiquetas) y después se asignan etiquetas a los extremos de  $i_0$ .

Si el arco etiquetado  $i$  tiene etiqueta "plain" en ambos extremos entonces la curva  $i_0$  coincide con el arco  $i$ . Por otro lado si algún extremo de  $i$  tiene etiqueta  $\bowtie$  (digamos en el extremo  $p$ ) y la signatura de  $p$  no es cero entonces se modifica el arco  $i$  sólo cerca de la pinchadura  $p$ . Ahora la curva  $i_0$  tiene etiqueta  $\bowtie$  en un extremo (digamos  $p$ ) sólo cuando el arco  $i$  tiene etiqueta  $\bowtie$  en  $p$  y la signatura de  $p$  es cero.

Para construir  $i'$  se consideran los casos cuando  $p$  es igual a  $q$  o  $p$  es distinto de  $q$ . En cada uno de estos dos casos se consideran los sub-casos cuando la signatura en los extremos es 1 ó 0. En cada uno de los sub-casos se considera los sub-casos cuando los extremos de  $i'$  tienen etiqueta "plain" o " $\bowtie$ ". La curva  $i'$  nos ayudara para que la definición de representación de cuerda (esta definición aparece al final de este capítulo) sea más grafica. En la Figura 9 muestra un ejemplo de la curva  $i'$ .



(a) Arco etiquetado  $i$ .

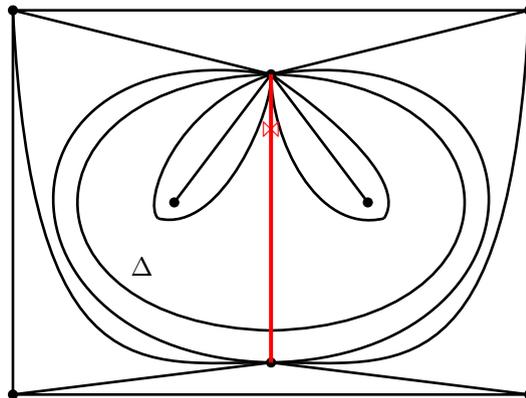


(b) Curva derivada  $i'$  del arco  $i$ .

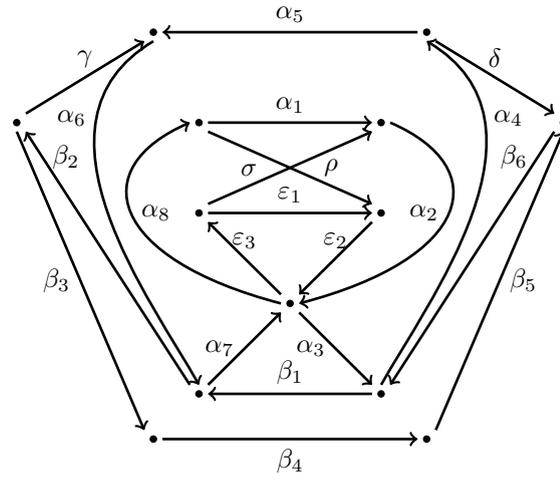
Figura 9: Curva derivada.

Ahora dado un arco  $j$  de  $\tau^\circ$  se define el concepto de punto de cruce de  $i'$  con el arco  $j$ . Para esta definición se consideran los casos cuando el arco  $j$  es el lado de un triángulo doblado  $\Delta'$  o  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado. En el caso que  $j$  sea lado de un triángulo doblado  $\Delta'$  se considera los subcasos cuando la curva etiquetada  $i'$  tiene etiqueta "plain" o "X" en los extremos.

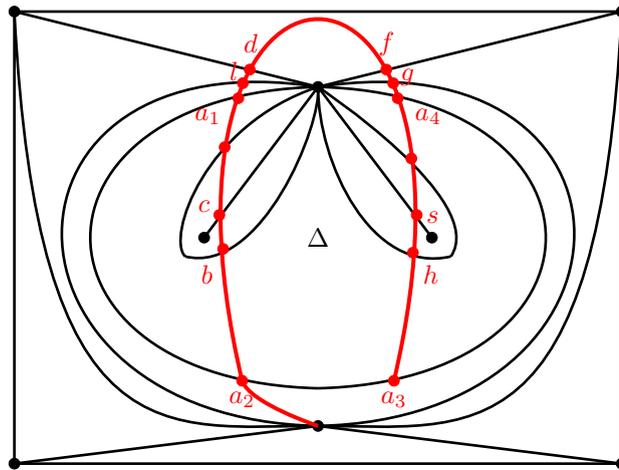
El capítulo tres finaliza con la definición de la representación de cuerda  $m(\tau, i)$  para un arco etiquetado  $i$  que no pertenece a  $\tau$ . La representación de cuerda es la primera aproximación de la representación de arco requerida. Para definir los espacios vectoriales asociados a los vértices se utiliza la curva  $i'$  y el concepto de punto de cruce. Por otro lado para definir la transformación lineal asociada a una flecha  $\alpha : j \rightarrow k$  de  $Q(\tau)$  se utilizan la curva  $i'$ , el concepto rodear una pinchadura y punto de cruce. Además para la definición se consideran los casos cuando  $j$  ó  $k$  (o ambos) son lados de un triángulo doblado o no lo son. Es fácil encontrar ejemplos de representaciones de cuerda que no cumplan las relaciones Jacobianas, como se muestra en la Figura 10.



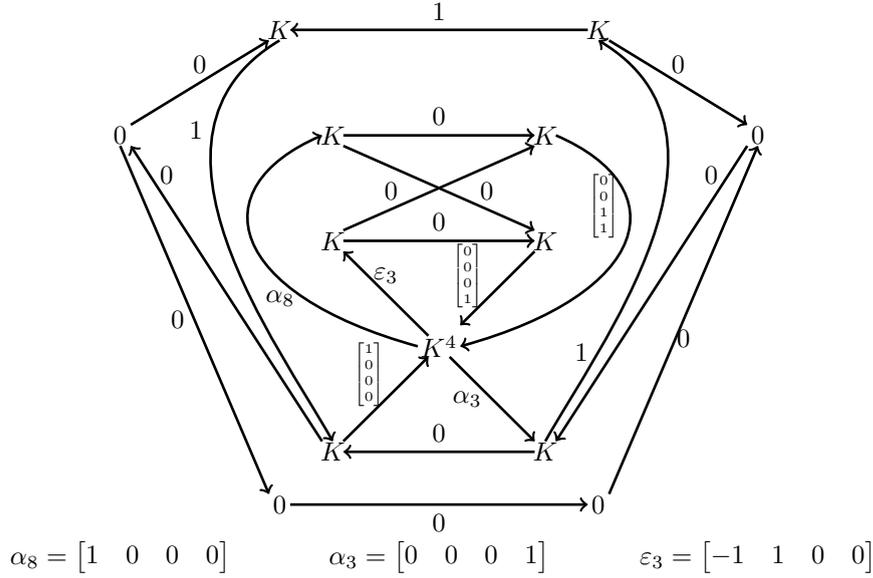
(a) Triangulación y arco etiquetado  $i$ .



(b) Carcaj



(c) Curva derivada  $i'$  del arco  $i$ .



(d) Representación  $m(\tau, i)$

Figura 10: Representación  $m(\tau, i)$ .

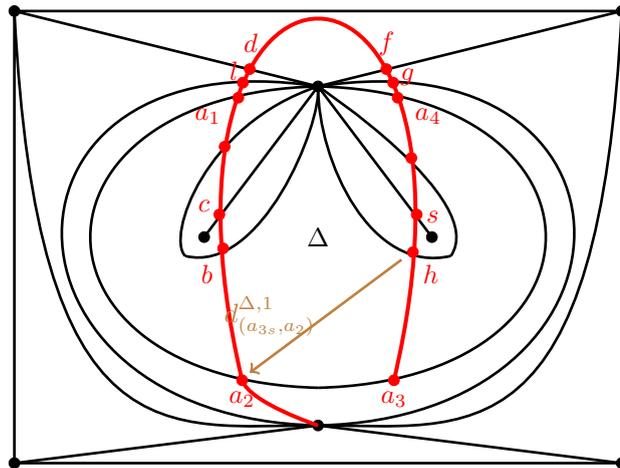
$$\partial(S(\tau))_{\alpha_1} = -\alpha_8 \cdots \alpha_2 + \alpha_8 \alpha_2 = -[1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 1 \cdots 1 \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1 \neq 0.$$

Siguiendo las ideas de Labardini-Fragoso vamos a definir en el capítulo cuatro objetos análogos a los definidos por su trabajo. Iniciamos definiendo de ciertos conjuntos  $\mathcal{B}_{i,j}^{\Delta,1}$  cuyos elementos son de la forma  $(q_0, q_1, r_1, r_2, r_l, p)$  o de la forma  $(q_0, q_1, q_2, r_1, r_2, r_3, r_l, p)$ . En ambos casos  $q_0$  y  $q_1$  (están en un arco  $j$ ) son extremos de una curva  $\gamma$ , dicha curva  $\gamma$  es un segmento de la curva  $i'$ ,  $r_s$  es el  $s$ -ésimo punto de intersección de  $\gamma$  con los arcos de  $\tau^\circ$  y  $p$  es la pinchadura que es rodeada por  $\gamma$ . Para la definición se consideran los casos cuando el arco  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado o el arco  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado.

Después con la ayuda de los conjuntos  $\mathcal{B}_{i,j}^{\Delta,1}$  se dibujan las 1-desviaciones de tipo 1 y de tipo 2, además se dibujan las curvas 1-auxiliares. Estas curvas nos ayudaran a definir (de manera recursiva) los conjuntos  $\mathcal{B}_{i,j}^{\Delta,n}$  y posteriormente las  $n$ -desviaciones de tipo 1 y 2, y las curvas  $n$ -auxiliares. Las  $n$ -desviaciones y  $n$ -auxiliares nos serán útiles para definir las matrices de desviación y las matrices auxiliares.

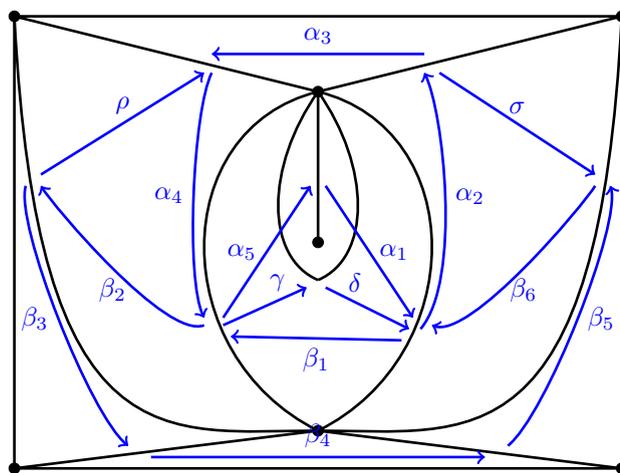
Con las matrices de desviación y matrices auxiliares modificaremos la representación de cuerda para definir la representación de arco requerida. En el inciso  $a$ ) de la Figura 11 se muestra una 1-desviación de tipo 1 (curva café). En el inciso  $c$ ) de la Figura 11 se muestra una 1-desviación

de tipo 2 (curva café) y una curva 1-auxiliar (curva azul). En *a*) de la Figura 12 se muestra una 2-desviación (curva café) y una 2-auxiliar (curva azul) mientras que en el inciso *b*) de la Figura 12 se muestran conjuntos  $\mathcal{B}_{i,j}^{\Delta,2}$ .

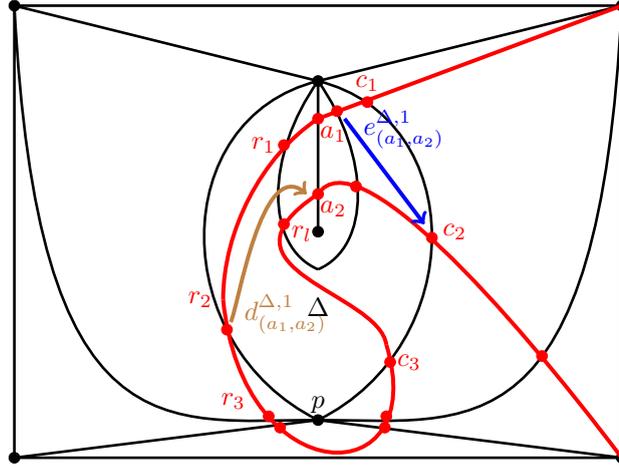


$$\mathcal{B}_{i,j}^{\Delta,1} = \{(a_3, a_2, h, s, b, p)\}$$

(a) 1-desviación de tipo 1.



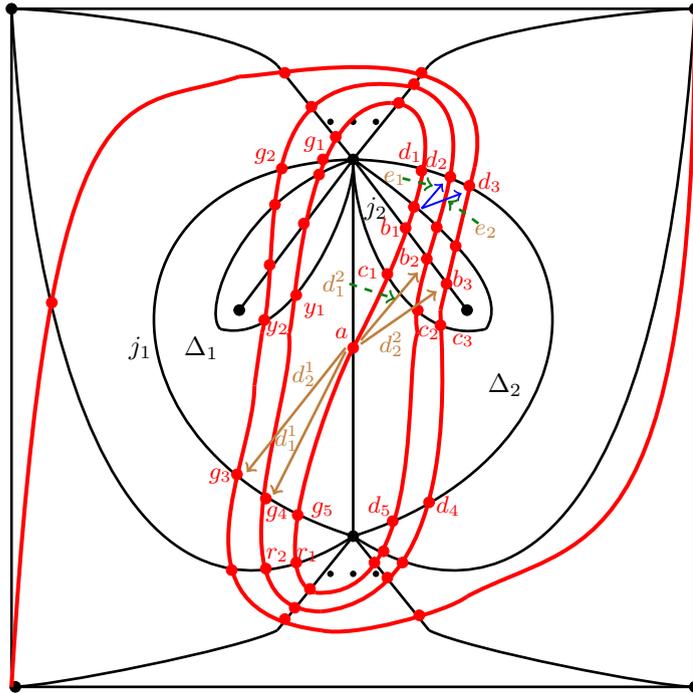
(b) Triangulación y carcaj.



$$\mathcal{B}_{i,j}^{\Delta,1} = \{(a_1, a_2, c_2, r_1, r_2, r_3, r_l, p)\}$$

(c) 1-desviación de tipo 1.

Figura 11: Curvas 1-desviación, 1-auxiliar y conjunto  $\mathcal{B}_{i,j}^{\Delta,1}$ .



$$d_1^1 = d_{(g_5, g_4)}^{\Delta_1, 1} \quad d_2^1 = d_{(g_5, g_3)}^{\Delta_1, 2} \quad d_1^2 = d_{(b_1, b_2)}^{\Delta_2, 1} \quad d_2^2 = d_{(b_1, b_3)}^{\Delta_2, 2} \quad e_1 = d_{(b_1, b_2)}^{\Delta_2, 1} \quad e_2 = d_{(b_1, b_3)}^{\Delta_2, 2}$$

(a) Curvas 2-desviación, 2-auxiliar.

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{i,j_1}^{\Delta_1,1} &= \{(g_5, g_4, a, c_1, y_1, p)\} \\ \mathcal{B}_{i,j_1}^{\Delta_1,2} &= \{(g_5, g_3, a, c, y_2, p)\} \\ \mathcal{B}_{i,j_2}^{\Delta_2,1} &= \{(b_1, b_2, d_2, a, g_5, r_1, c_2, p)\} \\ \mathcal{B}_{i,j_2}^{\Delta_2,2} &= \{(b_1, b_3, d_3, a, g_4, r_2, c_3, p)\} \\ &\text{(b) Conjuntos } \mathcal{B}_{i,j}^{\Delta_1,1} \text{ y } \mathcal{B}_{i,j}^{\Delta_1,2}.\end{aligned}$$

Figura 12: Curvas 2-desviación, 2-auxiliar y conjunto  $\mathcal{B}_{i,j}^{\Delta,2}$ .

Para un arco  $j$  se define una matriz de desviación y una matriz auxiliar para cada flecha  $\alpha : k \rightarrow j$ . Para esta definición se consideran los casos cuando el arco  $j$  es lado de un triángulo doblado o  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado. En caso que  $j$  sea lado de un triángulo doblado  $\Delta'$  consideramos los sub-casos cuando  $j$  es el lado doblado de  $\Delta'$  o  $j$  es el lado no doblado de  $\Delta'$ .

Si el arco  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado entonces  $j$  es lado de exactamente dos triángulos no doblados  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ . Se consideran los casos cuando  $\Delta_1$  o  $\Delta_2$  son triángulos de tipo 1,2 ó 3. En cada uno de los casos se consideran los sub-casos cuando al arco  $j$  se le asignan 2,3 o 4 matrices de desviación y auxiliar.

El capítulo cuatro termina con la definición de representación de arco  $M(\tau, i)$ . Para definir la representación  $M(\tau, i)$  nos basamos en la representación de cuerda  $m(\tau, i)$  y usamos las matrices de desviación y auxiliar para modificar las transformaciones lineales. Sea  $j$  un arco, definimos el espacio vectorial asociado a  $j$  teniendo en cuenta los casos cuando la curva etiquetada  $i'$  tiene algún(o ambos) extremo en el interior relativo del arco  $j$  o ningún extremo de  $i'$  esta en el interior relativo del arco  $j$ .

Sea  $\alpha : j \rightarrow k$  una flecha de  $Q(\tau^\circ)$ , con la ayuda de las matrices de desviación y las matrices auxiliares se define la matriz  $M(\tau, i)_\alpha$  basados en la transformación  $m(\tau, i)_\alpha$ . Se consideran los casos cuando algún(o ambos) extremo(s) de  $i'$  es punto marcado o no lo es. En el caso cuando ambos extremos de  $i'$  sean puntos marcados se consideran los sub-casos cuando la flecha  $\alpha$  (dibujada sobre  $\Sigma$ ) interseca a exactamente un arco de  $\tau^\circ$  o tiene intersección vacía con  $\tau^\circ$  o interseca a exactamente dos arcos de  $\tau^\circ$ .

Denotemos por  $m(\tau, i)^+$  a la matriz que resulta al reemplazar las entradas con signo negativo en  $m(\tau, i)$  por cero. Análogamente denotamos por  $m(\tau, i)^-$  a la matriz que resulta al reemplazar las entradas con signo positivo en  $m(\tau, i)$  por cero. Notemos que  $m(\tau, i)_\alpha = m(\tau, i)_\alpha^+ + m(\tau, i)_\alpha^-$ . Si los

extremos de la curva  $i'$  son puntos marcados se define  $M(\tau, i)_\alpha$  como sigue:

- Si la flecha  $\alpha$  (dibujada sobre  $\Sigma$ ) no interseca a ningún arco de  $\tau^\circ$  o interseca a exactamente dos arcos de  $\tau^\circ$  entonces  $M(\tau, i)_\alpha := E_{i,j}^{\Delta^\alpha} D_{i,j}^{\Delta^\alpha} m(\tau, i)_\alpha$  si  $m(\tau, i)^+ = 0$  o  $m(\tau, i)^- = 0$ . Por otro lado si  $m(\tau, i)^+ \neq 0 \neq m(\tau, i)^-$  entonces  $M(\tau, i)_\alpha := E_{i,j}^{\Delta^\alpha} D_{i,j}^{\Delta^\alpha} m(\tau, i)_\alpha^+ + m(\tau, i)_\alpha^-$ .
- Si la flecha  $\alpha$  (dibujada sobre  $\Sigma$ ) interseca a exactamente un arco de  $\tau^\circ$  entonces  $M(\tau, i)_\alpha := E_{i,j}^{\bar{\Delta}^\alpha} D_{i,j}^{\bar{\Delta}^\alpha} m(\tau, i)_\alpha$  si  $m(\tau, i)^+ = 0$  o  $m(\tau, i)^- = 0$ . Por otro lado si  $m(\tau, i)^+ \neq 0 \neq m(\tau, i)^-$  entonces  $M(\tau, i)_\alpha := E_{i,j}^{\bar{\Delta}^\alpha} D_{i,j}^{\bar{\Delta}^\alpha} m(\tau, i)_\alpha^+ + m(\tau, i)_\alpha^-$ .

Por otro lado si algún extremo de  $i'$  no es punto marcado (es decir, dicho extremo esta en el interior relativo de un arco  $j$ ) se consideran los sub-casos cuando  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado o el arco  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado. En cada uno de los sub-casos se toma en cuenta cuántos arcos de  $\tau^\circ$  son intersecados por la flecha  $\alpha$  dibujada sobre  $\Sigma$ . Este número puede ser 0,1 ó 2.

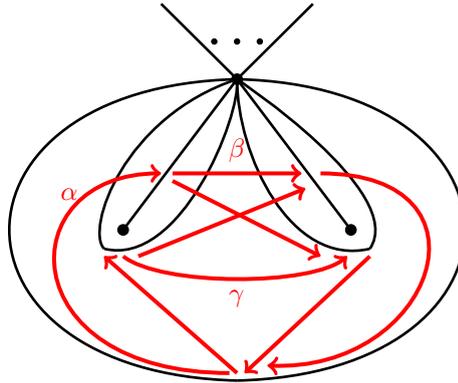


Figura 13: intersección de las flechas de  $Q(\tau)$  con los arcos de  $\tau$ .

En la Figura 13 la flecha  $\alpha$  interseca a exactamente un arco de  $\tau^\circ$ , la flecha  $\beta$  interseca a exactamente dos arcos de  $\tau^\circ$  y la flecha  $\gamma$  no interseca a ningún arco de  $\tau^\circ$ .

En el inciso a) de la Figura 11 la matriz asociada a la desviación  $d_{(a_3, a_2)}^\Delta$  es  $D_{i,j}^{\Delta,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  el resto de matrices de desviación para los arcos de  $\tau^\circ$  son la identidad al igual que las matrices auxiliares. En este caso se modifica la transformación lineal asociada a la flecha  $\alpha_2$  como sigue:

$$M(\tau, i)_{\alpha_2} := \pi E_{i,j}^{\Delta,1} D_{i,j}^{\Delta,1} m(\tau, i)_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A continuación calculamos  $\partial(S(\tau))_{\alpha_1}$  en  $M(\tau, i)$  para verificar que se cumplen las derivadas cíclicas.

$$\begin{aligned} \partial(S(\tau))_{\alpha_1} = & -\alpha_8 \cdots \alpha_2 + \alpha_8 \alpha_2 = -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 1 \cdots 1 \cdot [0 \ 0 \ 1] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \\ & [1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

En el inciso c) de la Figura 11 la matriz asociada a la desviación  $d_{(a_1, a_2)}^\Delta$  es  $D_{i,j}^{\Delta,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  y la matriz  $E_{i,j}^{\Delta,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  el resto de matrices de desviación y matrices auxiliares para los arcos de  $\tau \circ$  son la identidad. En este caso se modifican las transformaciones lineales asociadas a las flechas  $\alpha_5$  y  $\delta$  como sigue:

$$M(\tau, i)_{\alpha_5} := E_{i,j}^{\Delta,1} D_{i,j}^{\Delta,1} m(\tau, i)_{\alpha_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M(\tau, i)_\delta := E_{i,j}^{\Delta,1} D_{i,j}^{\Delta,1} m(\tau, i)_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A continuación calculamos  $\partial(S(\tau))_{\beta_1}$  y  $\partial(S(\tau))_\gamma$  en  $M(\tau, i)$  para verificar que se cumplen las derivadas cíclicas.

$$\begin{aligned} \partial(S(\tau))_{\beta_1} = & -\beta_6 \cdots \beta_2 + \alpha_1 \alpha_5 + \delta \gamma = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 1 \cdots 1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \\ & \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$\partial(S(\tau))_\gamma = \beta_1 \delta = 0$  ya que la flecha  $\beta_1$  actúa como cero en  $M(\tau, i)$ .

El quinto capítulo inicia con una proposición que afirma que si  $x$  es un punto de cruce de  $i'$  con un arco  $j$  y  $x$  no es punto inicial de ninguna desviación entonces  $x \in W_l := \{z \in M(\tau, i) | Jz = 0\}$  siendo  $J$  el ideal Jacobiano: Este resultado nos va a facilitar la prueba del teorema principal de esta tesis ya que con esta proposición basta enfocarse en los puntos iniciales de alguna desviación. Para la demostración se consideran los casos cuando el arco  $j$  es lado de un triángulo doblado o el arco  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado. Cuando el arco  $j$  es lado de un triángulo doblado se consideran los sub-casos cuando  $j$  es el lado doblado o  $j$  es el lado no doblado.

Después se enuncia y demuestra el teorema principal de este trabajo para superficies  $(\Sigma, M)$  con puntos marcados y con frontera no vacía. Dicho teorema consiste en que la representación de arco  $M(\tau, i)$  satisface las relaciones Jacobianas y  $M(\tau, i)$  es nilpotente. Para la demostración se considera una triangulación etiquetada de  $(\Sigma, M)$  y un orden  $(j_1, \dots, j_r)$  de los arcos de  $\tau^\circ$  con la siguiente propiedad:

Si  $\Delta^1, \dots, \Delta^s$  son todos los triángulos de tipo 2 en  $\tau^\circ$  entonces  $j_h = l_1^h$  para  $h \in \{1, \dots, s\}$ , donde  $l_1^h$  es el lado de  $\Delta^h$  con etiqueta  $l_1$  en  $\Delta^h$ .

Después definimos representaciones  $M_0, \dots, M_r$  con las siguientes dos propiedades:

- $M_0 = m(\tau, i)$  y  $M_r = M(\tau, i)$ .
- $\dim \frac{W_{i+1}}{W_i} = n_{j_i}$ , donde  $n_{j_i}$  es el número de puntos iniciales de desviación en el arco  $j_i$  y  $W_i = \{x \in M_i \mid Jx = 0\}$  siendo  $J$  el ideal Jacobiano.

Por la forma de definir las representaciones  $M_0, \dots, M_r$  se verifica fácilmente la primera condición. Para demostrar la segunda condición se demuestra que  $W_i \subseteq W_{i+1}$ , para demostrar que  $W_i \subseteq W_{i+1}$  se consideran los casos cuando el arco  $j_{i+1}$  es el lado de un triángulo doblado o no lo es. En el caso que  $j_{i+1}$  es el lado de un triángulo doblado se consideran los sub-casos cuando  $j_{i+1}$  es el lado doblado o es el lado no doblado. Una vez que se demuestra que  $W_i \subseteq W_{i+1}$  se deduce que  $W_r = M_r$  y por lo tanto la representación satisface las relaciones Jacobianas.

Notemos que ninguna construcción o definición en los capítulos anteriores depende de si la frontera de  $\Sigma$  es vacía o no lo es. Esta hipótesis se usa solamente para demostrar que la representación  $M(\tau, i)$  es nilpotente. Esto se sigue de dos teoremas, el primero es de Labardini-Fragoso y G. Cerulli [11] que afirma que el radical del ideal Jacobiano es admisible. El segundo es de I. Assem, D. Simson y A. Skowronski [16] y afirma que el radical del álgebra de caminos de un carcaj 2-acíclico  $Q$  módulo un ideal admisible  $I$  es igual al ideal generado por las flechas de  $Q$  módulo el ideal  $I$ .

Terminamos con el quinto capítulo conjeturando que mutación en representaciones de arco es compatible con la mutación de representaciones de carcajes con potencial. Más precisamente para triangulaciones etiquetadas  $\tau$  y  $\sigma$  de una superficie con puntos marcados  $(\Sigma, M)$  tal que  $\sigma$  se obtiene haciendo el flip en el arco  $j$  de  $\tau$ , las representaciones  $\mu_j(M(\tau, i))$  y  $M(\tau, i)$  del álgebra Jacobiana  $\mathcal{P}(Q(\tau), S(\tau))$  son equivalentes derechas.

Este resultado se vuelve muy complicado de verificar por la cantidad de casos y sub-casos que se deben de considerar, ya que son catorce las configuraciones diferentes en las que se dibujan al menos una 1-desviación. Además en tres de esas catorce configuraciones se consideran  $n$ -desviaciones. Es posible que se necesite desarrollar un software para poder verificar este resultado.

Para finalizar cabe mencionar que nos interesan las representaciones de arco por lo siguiente:

- Una vez establecida la compatibilidad con mutaciones y usando los resultados de [14, Sección 13], se pueden calcular de forma combinatoria las características de Euler de las Grassmannianas de carcaj de  $M(\tau, i)$ , aún siendo tan complicada la definición.
- Aún cuando las álgebras Jacobianas que provienen de superficies son mansas, es muy complicado escribir explícitamente esta clase de representaciones con  $E$ -invariante igual a 0 y  $-1$ . Además se puede especular sobre las demás representaciones.

# 1. Antecedentes de Triangulaciones de Superficies y Carcajes con Potencial.

## 1.1. Carcaj.

Un *carcaj* es una gráfica dirigida, es decir, es un cuádruple  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ , donde  $Q_0$  es el conjunto de vértices de  $Q$ ,  $Q_1$  es el conjunto de flechas y  $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$  son funciones definidas como sigue;

Dada una flecha  $\alpha : i \rightarrow j$  en  $Q$  definimos  $s(\alpha) := i$  y  $t(\alpha) := j$ . Un carcaj no tiene lazos si no existen flechas  $\alpha : i \rightarrow j$  en  $Q$  con la propiedad que  $i = j$ . Siempre vamos a considerar carcajes  $Q$  sin lazos y cuyo conjunto de vértices y flechas sean finitos.

Un *camino de longitud*  $d > 0$  es una sucesión  $a_d a_{d-1} \cdots a_2 a_1$  que cumple  $t(a_j) = s(a_{j+1})$  para  $j = 1, \dots, d-1$ , un camino  $a_d a_{d-1} \cdots a_2 a_1$  de longitud  $d > 0$  es un  $d$ -ciclo si  $t(a_d) = s(a_1)$ . Decimos que un carcaj  $Q$  es 2-acíclico si en  $Q$  no hay 2-ciclos.

La composición de caminos en  $Q$  está definida como la composición de funciones, es decir, si  $a = a_{d'} a_{d'-1} \cdots a_2 a_1$  y  $b = b_d b_{d-1} \cdots b_2 b_1$  son dos caminos tal que  $t(b_d) = s(a_1)$ , entonces el camino  $ab$  es la concatenación de ambos caminos, es decir,  $ab = a_{d'} a_{d'-1} \cdots a_2 a_1 b_d b_{d-1} \cdots b_2 b_1$ .

$$\bullet \xrightarrow{b_1} \bullet \xrightarrow{b_2} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{b_{d-1}} \bullet \xrightarrow{b_d} \bullet \xrightarrow{a_1} \bullet \xrightarrow{a_2} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{a_{d'-1}} \bullet \xrightarrow{a_{d'}} \bullet$$

Para cada vértice  $i \in Q_0$ , un  *$i$ -gancho* en  $Q$  es un camino  $ab$  de longitud 2 tal que  $t(b) = i = s(a)$ .

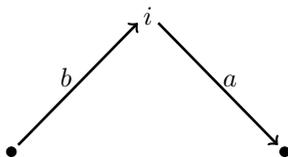


Figura 14:  $i$ -gancho

**Definición 1.1.** Dado un carcaj  $Q$  y un vértice  $i$  de  $Q$  en el que no hay 2-ciclos incidentes, definimos la *mutación de  $Q$  en dirección  $i$*  como el carcaj  $\mu_i(Q)$  cuyo conjunto de vértices es  $Q_0$  y que resulta de aplicar los siguientes tres pasos.

Paso 1. Para cada  $i$ -gancho  $ab$  introducimos una nueva flecha  $[ab] : s(b) \rightarrow t(a)$ .

Paso 2. Reemplazamos cada flecha  $a : i \rightarrow t(a)$  de  $Q$  por una flecha  $a^* : t(a) \rightarrow i$  y cada flecha  $b : s(b) \rightarrow i$  por  $b^* : i \rightarrow s(b)$ .

Paso 3. Elegimos una colección maximal de 2-ciclos disjuntos y los borramos.

Al carcaj obtenido después de los primeros dos pasos lo llamaremos la *Premutación de  $Q$  en dirección  $i$* , y se denotará por  $\tilde{\mu}_i(Q)$ .

### Observación 1.2.

- 1) La mutación está definida aún cuando el carcaj  $Q$  no sea 2-acíclico, pero si se requiere mutar en cada vértice de  $Q$  entonces es necesario que  $Q$  sea 2-acíclico.
- 2) En el tercer paso de la Definición 1.1 el proceso para borrar el conjunto maximal de 2-ciclos no es canonico, sin embargo la mutación  $\mu_i$  es una involución en las clases de isomorfía de carcajes 2-acíclico, es decir,  $\mu_i^2(Q) \simeq Q$  para cada carcaj  $Q$  2-acíclico.

## 1.2. Triangulaciones ideales de Superficies y sus Flips.

Recordemos algunos conceptos de H. Derksen, J. Weyman y A. Zelevinsky en [3] y de S. Fomin, M. Shapiro, D. Thurston en [6].

**Definición 1.3.** Una *superficie con frontera y puntos marcados* es un par  $(\Sigma, M)$ , donde  $\Sigma$  es una superficie de Riemann orientada, compacta, conexa y con frontera no vacía,  $M \neq \emptyset$  es un conjunto finito de puntos en  $\Sigma$  llamados *puntos marcados*. Además la intersección de cada componente conexa de la frontera de  $\Sigma$  con  $M$  es no vacía. Llamaremos pinchaduras a los puntos marcados en el interior de  $\Sigma$  y denotaremos por  $P$  al conjunto de pinchaduras de  $(\Sigma, M)$ .

**Nota 1.4.** Siempre supondremos que  $\Sigma$  no es:

1. Una esfera con menos de 5 pinchaduras.
2. Un monogono, digono, ó un triángulo sin pinchaduras.
3. Un monogono con una pinchadura.

Entenderemos por un monogono (respectivamente digono, triángulo) como un disco con exactamente un (dos, tres) punto(s) marcado(s) en la frontera.

**Definición 1.5.** Definimos una *curva*  $\gamma$  en  $(\Sigma, M)$  como una función continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ . Usualmente denotaremos por  $I$  al intervalo  $[0, 1]$ .

Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos curvas en  $(\Sigma, M)$ , decimos que  $\gamma_1$  es isotópico a  $\gamma_2$  si existe una función continua  $H : I \times \Sigma \rightarrow \Sigma$  que cumple las siguientes propiedades:

- 1)  $H(0, t) : \Sigma \rightarrow \Sigma$  es un homeomorfismo para todo  $t \in I$ ,
- 2)  $H(0, x) = x$  para todo  $x \in \Sigma$ ,
- 3)  $H(1, \gamma_1) = \gamma_2$ ,
- 4)  $H(t, m) = m$  para todo  $m \in M$  y  $t \in I$ .

A la función  $H$  la llamaremos isotopía de ambiente.

**Definición 1.6.** Sea  $(\Sigma, M)$  una superficie con frontera y puntos marcados. Una curva  $\gamma$  en  $\Sigma$  (salvo isotopía) se dice que es un *arco* si cumple las siguientes cuatro condiciones;

- 1) Los puntos finales de  $\gamma$  son puntos en  $M$ ,
- 2) La curva  $\gamma$  no se autointerseca, excepto posiblemente en sus extremos,
- 3) El interior relativo de la curva  $\gamma$  es disjunto de  $M$  y de la frontera de  $\Sigma$ ,
- 4)  $\gamma$  no corta a un monogono sin pinchaduras ó a un digono sin pinchaduras.

Llamaremos *lazos* a los arcos en  $\Sigma$  cuyos extremos coinciden.

**Proposición 1.7.** *Dada cualquier colección de arcos compatibles por pares, siempre es posible encontrar representantes en sus respectivas clases de isotopía de manera que el interior relativo de dichos arcos no se intersecan entre si.*

Para mas detalles de la prueba véase [6, Proposición 2.5].

**Definición 1.8.** Una *triangulación ideal*  $\tau$  de  $(\Sigma, M)$  es cualquier colección maximal de arcos compatibles dos a dos de manera que el interior relativo de dichos arcos no se intersecan entre si.

Si  $\tau$  es una triangulación ideal de  $(\Sigma, M)$  decimos que  $\Delta$  es un *triángulo ideal* en  $\tau$  si es la cerradura de una componente conexa del complemento en  $\Sigma$  de la union de los arcos de  $\tau$ . Un triángulo ideal  $\Delta$  se dice que es interior, si la intersección de  $\Delta$  con la frontera de  $\Sigma$  es vacía, ó consta sólo de puntos en  $M$ , en caso contrario decimos que  $\Delta$  no es interior. Por último  $\Delta$  es un triángulo doblado si es de la siguiente forma;

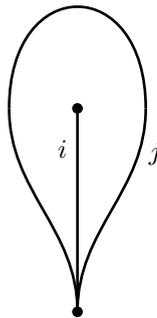


Figura 15: Triángulo doblado.

donde  $i$  es el lado doblado de  $\Delta$ .

El número  $n$  de arcos en una triangulación ideal de  $(\Sigma, M)$  está determinado por el genero  $g$  de  $\Sigma$ , el número  $b$  de componentes de la frontera de  $\Sigma$ , el número  $p$  de pinchaduras y el número  $c$  de puntos marcados en la frontera de  $\Sigma$ , de acuerdo a la fórmula  $n = 6g + 3b + 3p + c - 6$ , que puede ser probada usando la definición y las propiedades básicas de la característica de Euler. Por

lo tanto  $n$  es un invariante de  $(\Sigma, M)$ , llamado el rango de  $(\Sigma, M)$  (ya que coincide con el rango del álgebra de conglomerado asociada a  $(\Sigma, M)$ ).

**Observación 1.9.** En la Nota 1.4 excluimos ciertas superficies con puntos marcados, la razón es que en la esfera con menos de cinco pinchaduras existen triangulaciones en las que aparecen triángulos doblados de una manera no muy agradable. Por otro lado excluimos a los monogonos, digonos y triángulos que se describen en 2) y 3) de la Nota 1.4 pues en estos casos no hay triangulaciones ó existe sólo una triangulación.

Lo siguiente fue observado primeramente por Mosher [13].

Sea  $\tau$  una triangulación ideal de  $(\Sigma, M)$ , consideramos un arco  $i \in \tau$  que no es el lado doblado de ningún triángulo doblado, entonces existe un único arco  $j$  tal que  $\sigma = \{\tau - \{i\}\} \cup \{j\}$  es una triangulación ideal. Al proceso de cambiar el arco  $i$  por el arco  $j$  se le conoce como *flip en el arco  $i$* . Una observación importante es que no es posible hacer el flip en el arco  $i$  de la Figura 15. El caso cuando  $i$  es el lado doblado lo veremos en la sección 5 de este capítulo.

**Proposición 1.10.** *Cualquier par de triangulaciones ideales están relacionadas por una sucesión de flips.*

La siguiente definición es de Fomin-Shapiro-Thurston [6, Definición 4.1].

Dada una triangulación  $\tau$  asociamos una matriz antisimétrica  $B(\tau)$  de  $n \times n$  cuyas filas y columnas corresponden a los arcos de la triangulación  $\tau$ . Sea  $\pi_\tau : \tau \rightarrow \tau$  una función que es la identidad en los arcos que no son lados de ningún triángulo doblado, por otro lado si  $i$  y  $j$  son los únicos dos lados de un triángulo doblado siendo  $i$  el lado doblado, entonces  $\pi_\tau(i) := j$  y  $\pi_\tau(j) := i$ . Para cada triángulo ideal no doblado  $\Delta$  de  $\tau$  sea  $B^\Delta = (b_{i,j}^\Delta)$  la matrix  $n \times n$  definida por:

$$b_{i,j}^\Delta = \begin{cases} 1 & \text{Si } \pi_\tau(i), \pi_\tau(j) \text{ son lados de } \Delta \text{ y } \pi_\tau(j) \text{ le sigue a } \pi_\tau(i) \text{ al recorrer} \\ & \text{los lados de } \Delta \text{ en el sentido de las manecillas del reloj (definida por } \Sigma \text{).} \\ -1 & \text{Si se cumple la afirmación anterior, pero al recorrer los lados de } \Delta \\ & \text{en el sentido contrario de las manecillas del reloj.} \\ 0 & \text{En cualquier otro caso.} \end{cases}$$

La *matriz de adyacencia*  $B(\tau)$  está definida por:

$$B(\tau) = \sum_{\Delta} B^\Delta,$$

donde la suma corre sobre todos los triángulos no doblados de  $\tau$ .

La matriz  $B(\tau)$  nos define un *carcaj de adyacencia*  $Q(\tau)$ , cuyos vértices son los arcos de  $\tau$ ,  $b_{i,j}$  son las flechas de  $i$  a  $j$  siempre que  $b_{i,j} > 0$ . Dado que  $B(\tau)$  es antisimétrica tenemos que  $Q(\tau)$  es 2-acíclico.

El siguiente resultado es una consecuencia directa de los conceptos anteriores y es de S. Fomin, M. Shapiro, y D. Thurston, ver [6, Proposición 4.8].

**Proposición 1.11.** Sean  $\tau$  y  $\sigma$  dos triangulaciones de  $(\Sigma, M)$ . Si  $\sigma$  se obtiene de  $\tau$  mediante el *flip* en un arco  $i$ , entonces  $Q(\sigma) = \mu_i(Q(\tau))$ . Es decir, si  $\tau$  y  $\sigma$  son dos triangulaciones ideales de tal forma que están relacionadas por el *flip* en el arco  $i$ , entonces los carcajes asociados a  $\tau$  y  $\sigma$  están relacionados por la mutación en el vértice  $i$ .

**Definición 1.12.** Si una pinchadura es incidente a exactamente dos arcos  $i_1$  e  $i_2$  (como se muestra en la Figura 16 de una triangulación ideal  $\tau$ , entonces en  $Q(\tau)$  no hay flechas de  $i_1$  a  $i_2$  ni de  $i_2$  a  $i_1$ . Para  $i_1$  e  $i_2$  introducimos una flecha de  $i_1$  a  $i_2$  y una flecha de  $i_2$  a  $i_1$ , al carcaj resultante lo llamaremos *Carcaj de adyacencia no reducido* y lo denotamos por  $\widehat{Q}(\tau)$ .

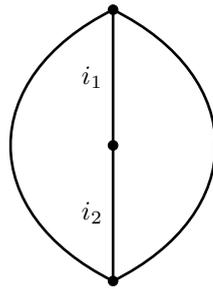


Figura 16: Triángulo doblado.

Es claro que para obtener  $Q(\tau)$  de  $\widehat{Q}(\tau)$  basta eliminar los 2-ciclos.

### 1.3. Carcajes con Potencial.

En esta sección recordaremos algunas definiciones y resultados acerca de carcajes con potencial, para más detalles véase [3].

Dado un carcaj  $Q$  denotamos por  $R$  al  $K$ -espacio vectorial con base  $\{e_i | i \in Q_0\}$ , ahora  $R$  dotada con la operación  $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$  tiene estructura de  $K$ -álgebra conmutativa y la llamaremos *espacio generado por los vértices* de  $Q$ . A cada vértice  $e_i$  lo pensaremos como un camino de longitud cero en  $i$ . Análogamente definimos el *espacio generado por las flechas* de  $Q$  como el  $K$ -espacio vectorial  $A$  con base el conjunto de flechas de  $Q$ . Notemos que  $A$  tiene estructura de  $R$ -bimodulo si definimos  $e_i a = \delta_{i,t(a)} a$  y  $a e_j = a \delta_{s(a),j}$  para  $i \in Q_0$  y  $a \in Q_1$ . Para  $d \geq 0$  denotamos por  $A^d$  al  $K$ -espacio vectorial con base todos los caminos de longitud  $d$  en  $Q$ , este espacio también tiene estructura de  $R$ -bimodulo. Notemos que para  $d = 0$  y  $d = 1$  tenemos que  $A^d$  coincide con  $R$  y  $A$  respectivamente. A continuación recordamos dos definiciones que son muy importantes para este trabajo.

**Definición 1.13.** El *álgebra de caminos* de un carcaj  $Q$  se define como:

$$R\langle\langle Q \rangle\rangle = \bigoplus_{d=0}^{\infty} A^d,$$

donde  $A^d$  es el espacio generado por los caminos en  $Q$  de longitud  $d$ .

Es fácil ver que para los espacios  $A^n$  y  $A^m$  se cumple que  $A^n \cdot A^m \subseteq A^{n+m}$ , con la operación multiplicación inducida por la concatenación de caminos ([3, Definición 2.2]). Esto se debe a que si  $c$  es un camino de longitud  $n$  y  $c'$  es un camino de longitud  $m$  entonces  $c \cdot c'$  es 0 o es un camino de longitud  $m + n$ .

**Definición 1.14.** El *álgebra completa de caminos* de un carcaj  $Q$  se define como:

$$R\langle\langle Q \rangle\rangle = \prod_{d=0}^{\infty} A^d.$$

Es decir, los elementos de  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$  son combinaciones  $K$ -lineales (posiblemente infinitas) de elementos en  $R\langle Q \rangle$ . La multiplicación en  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$  se define extendiendo de manera natural la multiplicación (concatenación) de  $R\langle Q \rangle$ .

Si en  $R\langle\langle Q \rangle\rangle = \prod_{d=0}^{\infty} A^d$  consideramos la topología  $\mathfrak{m}$ -adica cuyo sistema fundamental de vecindades abiertas alrededor del cero está dada por las potencias de  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(A) = \prod_{d \geq 1} A^d$  (el ideal de  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$  generado por las flechas) entonces  $R\langle Q \rangle$  es denso en  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$ .

**Observación 1.15.** Una propiedad muy importante de esta topología es la siguiente.

Una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos en  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$  converge si y sólo si para cada  $d \geq 0$ , la sucesión  $(x_n^{(d)})_{n \in \mathbb{N}}$  se estabiliza cuando  $n \rightarrow \infty$ , en cuyo caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{d \geq 0} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(d)}$  donde  $x_n^{(d)}$  denota la componente de grado  $d$  de  $x_n$ .

Aún cuando la acción de  $R$  en  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$  ( $R\langle Q \rangle$ ) no es central, dicha acción es compatible con la multiplicación de  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$  en el sentido que si  $a$  y  $b$  son caminos en  $Q$  entonces  $e_{t(a)}ab = ae_{s(a)}b = abe_{s(b)}$ . Por consiguiente decimos que  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$  ( $R\langle Q \rangle$ ) es una  $R$ -álgebras. En consecuencia si  $\varphi$  es un homomorfismo de  $K$ -álgebras entre álgebras de caminos (ó álgebras completas de caminos), decimos que  $\varphi$  es un homomorfismo de  $R$ -álgebras si los carcajes subyacentes tienen el mismo conjunto de vértices y  $\varphi(r) = r$  para cada  $r \in R$ . Es fácil verificar que cada homomorfismo de  $R$ -álgebras entre álgebras completas de caminos es continua.

Lo siguiente es una forma eficiente de definir homomorfismos entre álgebras completa de caminos. Cada par  $(\varphi^1, \varphi^2)$  de homomorfismos de  $R$ -bimódulos  $\varphi^1 : A \rightarrow A'$  y  $\varphi^2 : A \rightarrow \mathfrak{m}(A')^2$  se extiende de manera única a un homomorfismo de  $R$ -álgebras  $\varphi : R\langle\langle Q \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle Q' \rangle\rangle$  continua tal que  $\varphi|_A = (\varphi^1, \varphi^2)$ . Además  $\varphi$  es un isomorfismo de  $R$ -álgebras si y sólo si  $\varphi^1$  es un isomorfismo de  $R$ -bimódulos.

Un *potencial* en  $A$  (ó  $Q$ ) es un elemento de  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$  en el que todos sus términos son ciclos de longitud positiva ([3, Definición 3.1]). Al conjunto de todos los potenciales en  $A$  lo denotamos por  $R\langle\langle Q \rangle\rangle_{cyc}$  y es un subespacio vectorial cerrado de  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$ . Dos potenciales  $S$  y  $S'$  en  $R\langle\langle Q \rangle\rangle_{cyc}$  son cíclicamente equivalentes si  $S - S'$  pertenece a la cerradura del subespacio vectorial de  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$

generado por todos los elementos de la forma  $a_1 \dots a_d - a_2 \dots a_d a_1$ , donde  $a_1 \dots a_d$  es un ciclo de longitud positiva ([3, Definición 3.2]).

Un *carcaj con potencial* es un par  $(A, S)$  (ó  $(Q, S)$ ), donde  $S$  es un potencial en  $A$  con la propiedad que dado dos términos distintos de  $S$ , dichos términos no son cíclicamente equivalentes ([3, Definición 3.2]).

Usaremos la notación  $QP$  para abreviar carcaj con potencial. La *suma directa* de dos QPs con potencial  $(A, S)$  y  $(A', S')$  en el mismo conjunto de vértices es el QP  $(A, S) \oplus (A', S') = (A \oplus A', S + S')$ .

Si  $(A, S)$  y  $(A', S')$  son dos  $QPs$  en el mismo conjunto de vértices, decimos que  $(A, S)$  es equivalente derecho a  $(A', S')$  si existe una equivalencia derecha entre  $(A, S)$  y  $(A', S')$ . Es decir existe un isomorfismo de  $R$ -álgebras  $\varphi : R\langle\langle Q \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle Q' \rangle\rangle$  y se cumple que  $\varphi(S)$  es cíclicamente equivalente a  $S'$  ([3, Definición 4.2]).

Para cada flecha  $a$  en  $Q_1$  y cada ciclo en  $Q$  definimos la *derivada cíclica* como sigue;

$$\partial_a(a_1 \dots a_d) = \sum_{i=1}^d \delta_{a, a_i} a_{i+1} \dots a_d a_1 \dots a_{i-1},$$

(donde  $\delta_{a, a_i}$  es la delta de Kronecker) y extendemos linealmente y continuamente para obtener un morfismo  $\partial_a : R\langle\langle Q \rangle\rangle_{cyc} \rightarrow R\langle\langle Q \rangle\rangle$  ([3, Definición 3.1]). Notemos que  $\partial_a(S) = \partial_a(S')$  siempre que los potenciales  $S$  y  $S'$  sean cíclicamente equivalentes.

El *ideal Jacobiano*  $J(S)$  es la cerradura del ideal bilateral de  $R\langle\langle Q \rangle\rangle$  generado por  $\{\partial_a(S) | a \in Q_1\}$  y el *álgebra Jacobiana*  $\mathcal{P}(Q, S)$  es el álgebra cociente  $R\langle\langle Q \rangle\rangle / J(S)$  ([3, Definición 3.1]). El ideal Jacobiano y el álgebra Jacobiana son invariantes bajo equivalencias derechas, en el sentido que si  $\varphi : R\langle\langle Q \rangle\rangle \rightarrow R\langle\langle Q' \rangle\rangle$  es una equivalencia derecha entre  $(A, S)$  y  $(A', S')$ , entonces  $\varphi$  manda a  $J(S)$  en  $J(S')$  y por lo tanto induce un isomorfismo entre  $\mathcal{P}(Q, S)$  y  $\mathcal{P}(Q', S')$  ([3, Proposición 3.7]).

Un  $QP$  es *trivial* si  $S \in A^2$  y  $A$  es generada por  $\{\partial_a(S) | a \in Q_1\}$  ([3, Definición 4.4 y véase Proposición 4.4]). Por otro lado decimos que un  $QP$  es *reducido* si la componente de grado dos de  $S$  es cero, es decir, que en  $S$  no aparecen 2-ciclos. Notemos que el carcaj subyacente de un  $QP$  podría tener 2-ciclos, y decimos que un  $QP$  es 2-acíclico si no tiene 2-ciclos.

**Teorema 1.16.** (*Teorema de Descomposición, [3, Teorema 4.6]*) Para cada  $QP (A, S)$  existe un  $QP$  trivial  $(A_{triv}, S_{triv})$  y un  $QP$  reducido  $(A_{red}, S_{red})$  tal que  $(A, S)$  es equivalente derecho a la suma  $(A_{triv}, S_{triv}) \oplus (A_{red}, S_{red})$ . Además la clase de equivalencia derecha de los  $QPs (A_{triv}, S_{triv})$  y  $(A_{red}, S_{red})$  están determinadas por la clase de equivalencia derecha de  $(A, S)$ .

En la notación del Teorema 1.16 al  $QP (A_{triv}, S_{triv})$  se le conoce como la parte trivial de  $(A, S)$ , respectivamente a  $(A_{red}, S_{red})$  se le conoce como la parte reducida de  $(A, S)$  ([3, Definición 4.13]).

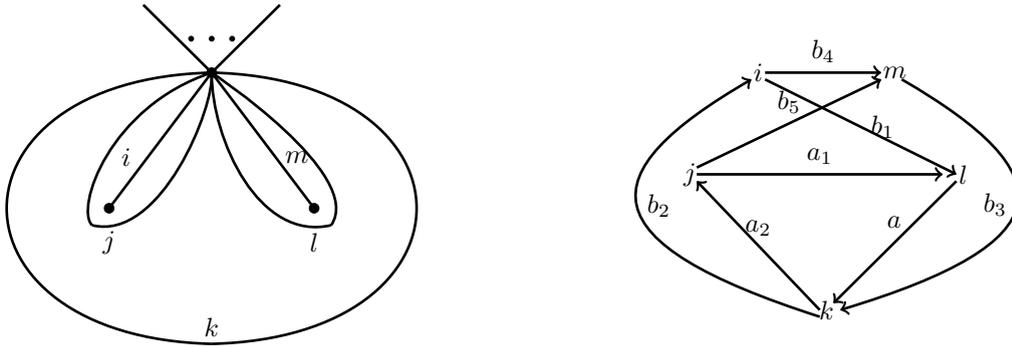
## 1.4. El Potencial de una Triangulación.

En la sección 1.2 asociamos un carcaj a una triangulación, ahora a dicho carcaj le asociamos un potencial. La definición del siguiente potencial aparece en [9, Definición 3.1] y fué introducido por Labardini-Fragoso.

Sean  $(\Sigma, M)$  una superficie con puntos marcados y  $P \subseteq M$  el conjunto de pinchadura de  $(\Sigma, M)$ . Para cada  $p \in P$  elegimos un escalar en  $K$  distinto de cero. Esta elección de escalares quedara fija para cada triangulación de  $(\Sigma, M)$ .

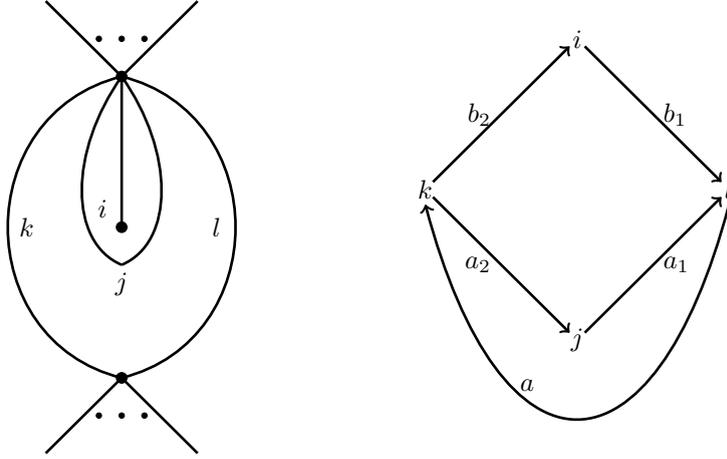
**Definición 1.17.** Sea  $\tau$  una triangulación ideal de  $(\Sigma, M)$ . Basados en la elección de los escalares  $(x_p)_{p \in P}$  asociamos a  $\tau$  un potencial  $S(\tau) \in R\langle\langle Q(\tau) \rangle\rangle$  como sigue. Sea  $\widehat{A}(\tau)$  el espacio generado por las flechas de  $\widehat{Q}(\tau)$ .

1. Para cada triángulo ideal no doblado  $\Delta$  que es interior en  $\tau$ , denotamos por  $\widehat{S}^\Delta$  al triángulo orientado en sentido de las manecillas del reloj en  $\widehat{Q}(\tau)$  (salvo equivalencia cíclica).
2. Si  $\Delta$  es como en 1) y tiene lados  $j, k, l$  de forma que  $\Delta$  es adyacente a dos triángulos doblado, como se muestra en la figura siguiente;



entonces definimos  $\widehat{T}^\Delta = \frac{b_2 b_3 b_4}{x_p x_q}$  (salvo equivalencia cíclica), donde  $p$  y  $q$  son las pinchaduras que son encerradas por los lados no doblados de los triángulos doblados adyacentes a  $\Delta$ . Por otro lado si es adyacente a menos de dos triángulos doblados entonces definimos  $\widehat{T}^\Delta = 0$ .

3. Si una pinchadura  $p$  es adyacente a exactamente un arco  $i$  de  $\tau$  entonces  $i$  es el lado doblado de algún triángulo doblado en  $\tau$  y tenemos la siguiente configuración alrededor de  $i$ ,



en el caso que  $k$  y  $l$  son arcos de  $\tau$  que no pertenecen a la frontera de  $\Sigma$ , entonces definimos  $\widehat{S}^p = -\frac{ab_1b_2}{x_p}$  salvo equivalencia cíclica.

4. Sea una pinchadura  $p$  que es adyacente a mas de un arco, borramos todos los lazos incidentes en  $p$ , las flechas entre los arcos restantes adyacentes a  $p$  forman un único ciclo  $a_1^p, \dots, a_d^p$  (salvo equivalencia cíclica.) alrededor de  $p$  que recorre todos los arcos restantes y está orientado en contra de las manecillas del reloj (la orientación está definida por la orientación de  $\Sigma$ ). En esta situación definimos  $\widehat{S}^p = x_p a_1^p, \dots, a_d^p$ .

El *potencial no reducido*  $\widehat{S}(\tau) \in R\langle\langle\widehat{Q}\rangle\rangle$  de  $\tau$  está definido por:

$$\widehat{S}(\tau) = \sum_{\Delta} (\widehat{S}^{\Delta} + \widehat{T}^{\Delta}) + \sum_{p \in P} \widehat{S}^p$$

donde la primera suma corre sobre todos los triángulos interiores no doblados.

Finalmente definimos  $(Q(\tau), S(\tau))$  como la parte reducida de  $(\widehat{Q}(\tau), \widehat{S}(\tau))$  (salvo equivalencia cíclica).

Ahora de [10, Proposición 10.2] se sigue que podemos considerar los coeficientes  $x_p$  del potencial de la Definición 1.17 como  $-1$ .

## 1.5. Triángulaciones etiquetadas.

En la sección 1.2 de esta tesis vimos lo que es el flip en un arco  $i$  que no es el lado doblado de ningun triángulo doblado en una triangulación ideal  $\tau$ , ahora en el sentido de extender ese concepto a cualquier arco de la triangulación recordemos algunos conceptos de [6, Sección 9.3].

En la siguiente definición pensaremos a cada arco de la triangulación seccionado en tres partes iguales, las cuales son, la parte central que consiste solo de interior del arco y las otras dos partes son las que contiene a los extremos del arco, en estas ultimas secciones del arco colocaremos una etiqueta del conjunto  $\{ "plain", "notched" \}$ .

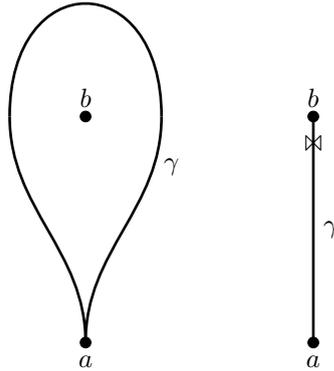
**Definición 1.18.** Sea  $(\Sigma, M)$  una superficie con puntos marcados y  $\tau$  una triangulación ideal de  $(\Sigma, M)$ . Un arco etiquetado es un arco que tiene en cada extremo una etiqueta en el conjunto  $\{ \text{"plain"}, \text{"notched"} \}$  y cumplen las siguientes condiciones;

- i) El arco no es un lazo que encierra sólo a una pinchadura,
- ii) Cada extremo del arco en la frontera de  $\Sigma$  tiene etiqueta "plain",
- iii) Si el arco es un lazo entonces cada extremo del arco tiene la misma etiqueta.

En la representación grafica la etiqueta "plain" será omitida y la etiqueta "notched" la representaremos por  $\bowtie$ .

Notemos que cualquier triangulación ideal de una superficie la podemos ver como una triangulación etiquetada de la siguiente manera;

Si  $\gamma$  no es un lazo que encierra sólo a una pinchadura, entonces  $\gamma$  en la triangulación etiquetada será el mismo arco con etiqueta "plain" en ambos extremos. Por otro lado si  $\gamma$  es un lazo basado en un punto marcado  $a$  y encierra sólo a una pinchadura  $b$ , como se muestra en la figura siguiente;



entonces reemplazamos a  $\gamma$  por el arco etiquetado cuyos extremos son  $a$  y  $b$  y su etiqueta en el extremo  $a$  es "plain" y en el extremo  $b$  es "notched". Sin perdida de generalidad denotaremos por  $\gamma$  a dicho arco y por  $\mathbf{A}^{\bowtie}(\Sigma, M)$  al conjunto de todos los arcos etiquetados.

Los siguientes conceptos los introdujo Labardini-Fragoso en [10, Sección 2].

**Definición 1.19.** Sea  $\varepsilon : P \longrightarrow \{1, -1\}$  una función donde  $P$  es el conjunto de pinchaduras, definimos la función  $t_\varepsilon : \mathbf{A}^o(\Sigma, M) \longrightarrow \mathbf{A}^{\bowtie}(\Sigma, M)$  como sigue;

- i) Si el arco  $i$  no es un lazo que encierra sólo a una pinchadura entonces la versión sin etiquetas de  $t_\varepsilon(i)$  es  $i$  y es etiquetado "notched" en un extremo  $p$  de  $t_\varepsilon(i)$  si y sólo si  $\varepsilon(p)$  es  $-1$ .
- ii) Si  $i$  un lazo basado en un punto marcado  $q$  que encierra sólo a una pinchadura  $p$  entonces  $t_\varepsilon(i)$  es el arco que conecta los puntos  $p$  y  $q$  cuya etiqueta en el extremo  $q$  es "notched" si y sólo si  $\varepsilon(q) = -1$ . Por otro lado el extremo  $p$  tiene etiqueta "notched" si y sólo si  $\varepsilon(p) = 1$ .

Sea  $\tau$  una triangulación etiquetada de  $(\Sigma, M)$ , definimos la *signatura* de  $\tau$  como la función  $\delta_\tau : P \rightarrow \{1, -1, 0\}$  dada por:

$$\delta_\tau(p) = \begin{cases} 1 & \text{Si el extremo de cada arco incidente en } p \text{ tienen etiqueta " "}. \\ -1 & \text{Si el extremo de cada arco incidente en } p \text{ tienen etiqueta } \bowtie. \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

**Definición 1.20.** Sea  $\tau$  una triangulación etiquetada de  $(\Sigma, M)$ , definamos la *signatura débil* de  $\tau$  como la función:

$$\varepsilon_\tau(p) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \delta_\tau(p) \in \{0, 1\} \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Queremos definir el potencial para la triangulación etiquetada, para eso sólo nos falta observar que de una triangulación etiquetada podemos obtener una triangulación ideal (que denotamos por  $\tau^\circ$ ) de la siguiente manera;

- i) Borramos todas las etiquetas en la pinchadura  $p$  con signatura no cero.
- ii) Para cada pinchadura  $p$  con signatura cero, reemplazamos el arco etiquetado  $i \in \tau$  el cual tiene etiqueta  $\bowtie$  en  $p$ , por el lazo que encierra a la pinchadura  $p$  y al arco  $i$ .

**Definición 1.21.** Sea  $\tau$  una *triangulación etiquetada* de  $(\Sigma, M)$ .

- i) Definimos el potencial no reducido  $\widehat{S}(\tau) \in R\langle\langle\widehat{Q}(\tau)\rangle\rangle$  asociado a  $\tau$  como;

$$\widehat{S}(\tau) = t_{\varepsilon_\tau} \left( \sum_{\Delta} (\widehat{S}^\Delta(\tau^\circ) + \widehat{T}^\Delta(\tau^\circ)) + \sum_{p \in P} (\varepsilon_\tau(p) \widehat{S}^p(\tau^\circ)) \right)$$

donde la primera suma corre sobre todos los triángulos interiores no doblados de  $\tau^\circ$ , y  $\varepsilon_\tau$  es la signatura débil de  $\tau$ .

- ii) Definimos  $(Q(\tau), S(\tau))$  como la parte reducida de  $(\widehat{Q}(\tau), \widehat{S}(\tau))$ .

## 2. Antecedentes de Representaciones de Carcajes con Potencial.

Recordemos que  $R$  denota el  $K$ -espacio vectorial con base el conjunto  $\{e_i | i \in Q_0\}$ , dicho espacio vectorial es de echo un anillo conmutativo con la operacion multiplicación  $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ .

**Definición 2.1.** ([3, Definición 10.1]). Sea  $(Q, S)$  un QP, una *representación de carcajes con potencial* es un tercia  $\mathcal{M} = (Q, S, M)$ , donde  $M$  consiste de las siguientes dos familias.

- 1) Una familia  $(M_i)_{i \in Q_0}$  de  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita,
- 2) Una familia de  $(a_M : M_{s(a)} \rightarrow M_{t(a)})_{a \in Q_0}$  de  $K$ -transformaciones lineales tal que  $\partial_{a_M}(S) = 0$  para toda  $a_M$ .

Una representación  $\mathcal{M} = (Q, S, M)$  del carcaj con potencial  $(Q, S)$  es *nilpotente* si existe un entero  $r \geq 1$  tal que cualquier camino de longitud al menos  $r$  es cero.

### Observación 2.2.

Es falso que cualquier representación que es anulada por las derivadas cíclicas de un potencial  $S$  satisface que existe un  $r \geq 1$  tal que cualquier camino de longitud  $r$  se anula. Es decir, es posible construir la representación de un carcaj  $Q$  que satisface las derivadas cíclicas de un potencial  $S$  pero que no exista ningún  $r \geq 1$  tal que todo camino de longitud al menos  $r$  sea anulado. Un ejemplo es esto está dado por la representación de la Figura 17.

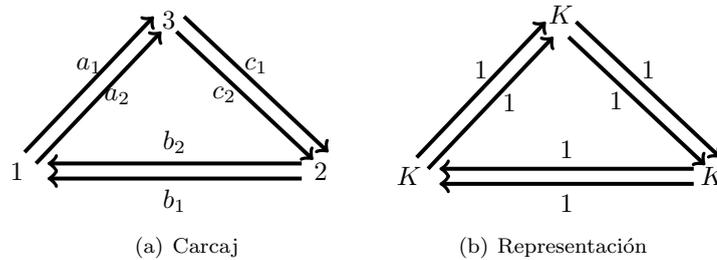
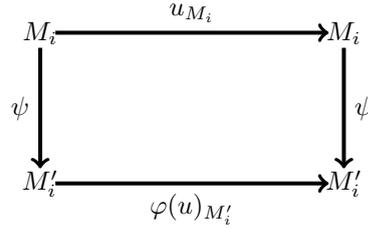


Figura 17: Representación que no es nilpotente

Es fácil ver que la representación de la Figura 17 satisface las derivadas del potencial  $S = a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 - a_1 b_2 c_1 a_2 b_1 c_2$  pero no existe ningún  $r \geq 1$  tal que todo camino de longitud al menos  $r$  se anula.

**Definición 2.3.** ([3, Definición 10.2]) Sean  $(Q, S)$  y  $(Q', S')$  dos carcajes con potencial en el mismo conjunto de vértices y sean  $\mathcal{M} = (Q, S, M)$ ,  $\mathcal{M}' = (Q', S', M')$  representaciones de  $(Q, S)$  y  $(Q', S')$  respectivamente. Definimos una *equivalencia derecha* entre  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}'$  como un par  $(\varphi, \psi)$  que cumple las siguientes dos propiedades:

- $\varphi : R\langle\langle Q \rangle\rangle \longrightarrow R\langle\langle Q' \rangle\rangle$  es una equivalencia derecha de carcajes con potencial entre  $(Q, S)$  y  $(Q', S')$ ,
- $\psi : M_i \longrightarrow M'_i$  es un isomorfismo de espacios vectoriales tal que  $\psi \circ u_M = \varphi(u)_{M'} \circ \psi$  para todo elemento  $u \in R\langle\langle Q \rangle\rangle$ .



Veamos un ejemplo de la Definición 2.3. Consideramos el QP  $(Q, 0)$ , donde  $Q$  es el siguiente carcaj.

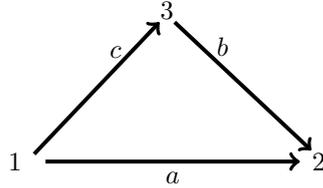


Figura 18: Carcaj

Para cualquier  $\lambda \in K$ , las QP-representaciones de la Figura 19 son equivalentes derechas

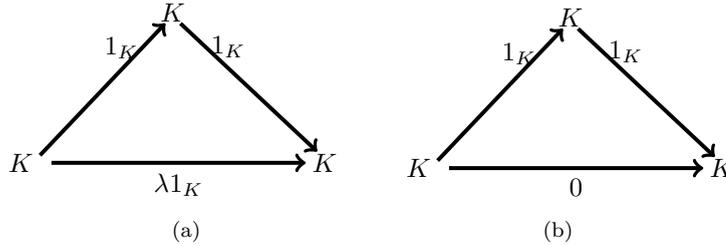


Figura 19: Representaciones equivalentes derechas

mediante el par  $(\varphi, \psi)$ , donde  $\varphi : R\langle\langle Q \rangle\rangle \longrightarrow R\langle\langle Q \rangle\rangle$  es el isomorfismo de  $R$ -álgebras cuya acción en las flechas está dada por  $a \mapsto \lambda bc$ ,  $b \mapsto b$ ,  $c \mapsto c$  y  $\psi$  es la identidad en cada copia de  $K$ . Este ejemplo muestra en particular que existen representaciones que son equivalentes derechas pero no isomorfas.

Recordemos que cada QP es equivalente derecho a la suma directa de su parte reducida y su parte trivial, y que están bien determinadas salvo equivalencia derecha (Teorema 1.16). Sea  $(Q, S)$  un QP y  $\varphi : R\langle\langle (Q_{red} \oplus C) \rangle\rangle \longrightarrow R\langle\langle Q \rangle\rangle$  una equivalencia derecha entre  $(Q_{red}, S_{red}) \oplus (C, T)$  y  $(Q, S)$ , donde  $(Q_{red}, S_{red})$  un QP reducido y  $(C, T)$  es un QP trivial. Sea  $\mathcal{M} = (Q, S, M)$  una

representación y  $M$  visto como  $K$ -espacio vectorial será denotado por  $M^\varphi$ . Definimos una acción de  $R\langle\langle Q_{red}\rangle\rangle$  en  $M^\varphi$  dada por  $u_{M^\varphi} = \varphi(u)_M$  para todo elemento  $u \in R\langle\langle Q_{red}\rangle\rangle$ .

**Proposición 2.4.** ([3, Proposición 4.5]) *Con la acción de  $R\langle\langle Q_{red}\rangle\rangle$  en  $M^\varphi$  definida anteriormente, la terna  $(Q_{red}, S_{red}, M^\varphi)$  es una QP-representación. Mas aún la clase de equivalencia derecha de  $(Q_{red}, S_{red}, M^\varphi)$  está determinada por la clase de equivalencia de  $\mathcal{M}$ .*

**Definición 2.5.** ([3, Definición 10.4]) La QP-representación  $\mathcal{M}_{red} = (Q_{red}, S_{red}, M^\varphi)$  es la parte reducida de  $\mathcal{M}$ .

**Nota 2.6.** La construcción de una equivalencia derecha entre un QP  $(Q, S)$  y la suma directa de su QP reducido con un QP trivial no está determinado por un procedimiento canónico de manera obvia. Es decir, no hay una forma canonica para construir  $(Q_{red}, S_{red})$  ni una equivalencia derecha  $(Q, S) \longrightarrow (Q_{red}, S_{red}) \oplus (Q_{triv}, S_{triv})$  aún cuando la parte reducida sea ya conocida. En [3] se define una equivalencia derecha que satisface la condicion de actuar como la identidad en todas las flechas de  $Q$  que no aparecen en la componente de grado 2 de  $S$ . Usando ésta propiedad de  $\varphi$  es fácil ver que dada una representación  $\mathcal{M} = (Q, S, M)$ , la acción de  $R\langle\langle Q_{red}\rangle\rangle$  en  $M^\varphi$  coincide con la acción en  $M$  inducida por la inclusión de carcajes  $Q_{red} \hookrightarrow Q$ . Es decir, si se restringe la acción de  $R\langle\langle Q\rangle\rangle$  en  $M$  a la sub-álgebra  $R\langle\langle Q_{red}\rangle\rangle$  se obtiene  $\mathcal{M}_{red}$ .

### 3. Representación de Cuerda $m(\tau, i)$ .

**Definición 3.1.** Sean  $\tau$  una triangulación etiquetada de una superficie con frontera y puntos marcados  $(\Sigma, M)$  y  $\Delta$  un triángulo no doblado en  $\tau^\circ$ . Decimos que  $\Delta$  es un triángulo de;

- a) Tipo 1 si ningún lado de  $\Delta$  es lado de un triángulo doblado.
- b) Tipo 2 si  $\Delta$  comparte sólo un lado con un triángulo doblado  $\Delta'$ .
- c) Tipo 3 si  $\Delta$  comparte dos lados con triángulos doblados distintos  $\Delta'$  y  $\Delta''$ .

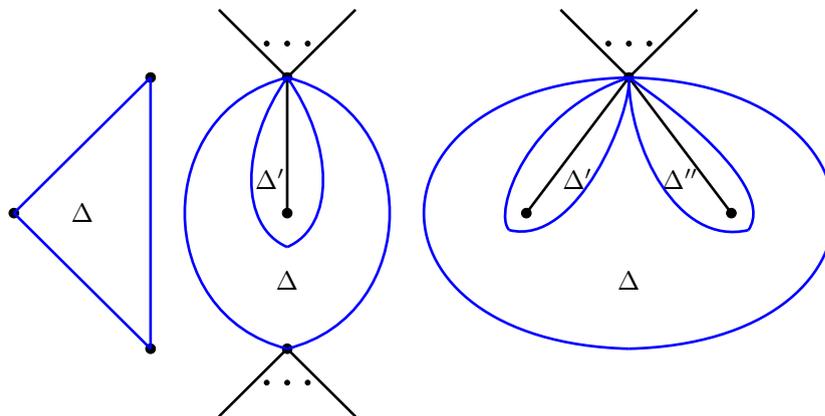
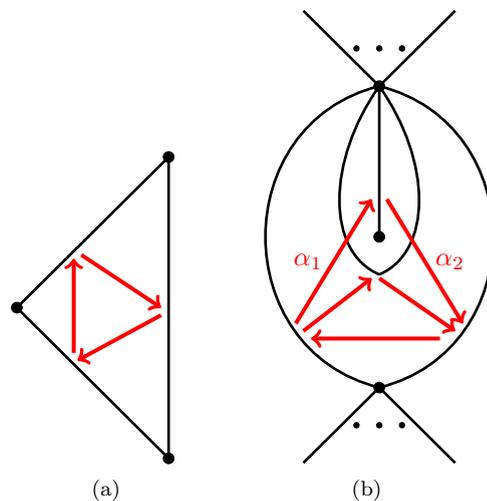


Figura 20: Triángulos de tipo 1,2 y 3.

Ahora vamos a dibujar el carcaj  $\widehat{Q}(\tau^\circ)$  en  $(\Sigma, M)$ . Dado que cualquier triangulación de  $(\Sigma, M)$  la podemos obtener pegando las piezas de la Figura 21 ( véase [6, Nota 4.2] ), es suficiente dibujar el carcaj en cada una de esas piezas.



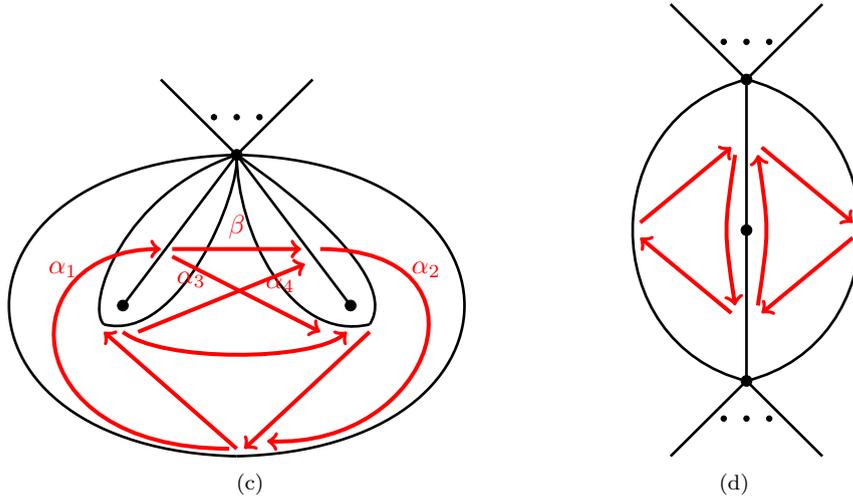


Figura 21: Dibujo de  $Q(\tau^\circ)$  sobre  $(\Sigma, M)$ .

**Observación 3.2.** Las siguientes dos observaciones son acerca de  $\widehat{Q}(\tau^\circ)$  dibujado en  $(\Sigma, M)$ .

- i) Las flechas  $\alpha_i$  de  $\widehat{Q}(\tau^\circ)$  en las configuraciones (b) y (c) de la Figura 21 tienen intersección no vacía con exactamente un arco de  $\tau^\circ$ .
- ii) La flecha  $\beta$  de  $\widehat{Q}(\tau^\circ)$  en la configuración (c) de la Figura 21 tiene intersección no vacía con exactamente dos arcos de  $\tau^\circ$ .

Ahora para definir el concepto de rodear una pinchadura vamos a etiquetar los arcos de los triángulos de tipo 2 y 3.

- a) Sea  $\Delta$  un triángulo de tipo 2. Denotamos por  $m$  al único lado de  $\Delta$  que es lado no doblado del único triángulo doblado  $\Delta'$  que comparte a  $m$  como uno de sus lados.

Asignamos la etiqueta  $l_1$  a  $m$  en  $\Delta$  y recorriendo los lados de  $\Delta$  en el sentido de las manecillas del reloj, asignamos la etiqueta  $l_2$  y  $l_3$  en  $\Delta$  al segundo y tercer lado respectivamente.

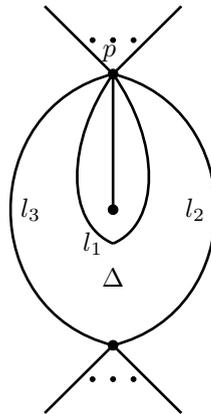


Figura 22: Etiquetas de los lados de un triángulo de tipo 2.

b) Sea  $\Delta$  un triángulo de tipo 3.

Asignamos la etiqueta  $l_1$  en  $\Delta$  al único lado de  $\Delta$  que no es lado de ningún triángulo doblado. Recorriendo los lados de  $\Delta$  en el sentido de las manecillas del reloj, asociamos la etiqueta  $l_2$  y  $l_3$  en  $\Delta$  al segundo y tercer lado respectivamente.

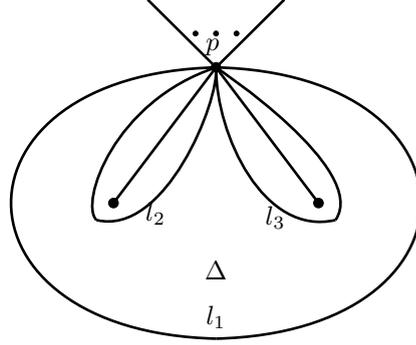


Figura 23: Etiquetas de los lados de un triángulo de tipo 3.

A continuación vamos a definir el concepto de rodear una pinchadura, este concepto nos será muy útil para definir la representación de cuerda  $m(\tau, i)$ .

**Definición 3.3.** Sea  $\gamma$  una curva en  $(\Sigma, M)$  con las siguientes características:

- 1)  $\gamma$  no se auto-intersecta,
- 2) La intersección de  $\gamma$  con  $M$  es vacía,
- 3)  $\gamma$  minimiza en su clase de isotopía los puntos de intersección con los arcos de  $\tau^\circ$ ,
- 4) Los extremos  $q_0$  y  $q_1$  de  $\gamma$  pertenecen a el interior relativo de un arco  $j$  de  $\tau^\circ$ ,
- 5)  $\gamma$  está orientada de  $q_0$  a  $q_1$ .

En este caso dividimos  $\gamma$  en segmentos  $[r_0, r_1]_\gamma, [r_1, r_2]_\gamma, \dots, [r_l, r_{l+1}]_\gamma$  con  $r_0 = q_0$  y  $r_{l+1} = q_1$  de tal forma que  $[r_k, r_{k+1}]_\gamma \cap \tau^\circ = \{r_k, r_{k+1}\}$  para  $k = 0, \dots, l$ . Dada una pinchadura  $p \in M$  decimos que  $\gamma$  rodea a  $p$  con respecto a  $\tau^\circ$  (en sentido contrario de las manecillas del reloj), si  $\gamma \cup [q_0, q_1]_j$  es una curva cerrada, orientada en sentido contrario de las manecillas del reloj, y se cumple una de las condiciones a) ó b) descritas en lo que sigue:

a)  $\delta_\tau(p) \neq 0$ .

Dependiendo si  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado ó no lo es, vamos a considerar los 2 subcasos siguientes  $a_1$ ) y  $a_2$ ):

$a_1$ )  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado.

Si el arco  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado, entonces  $j$  puede ser lado de un triángulo de tipo 1,2 ó 3. Consideremos las tres posibilidades mencionadas:

$a_{11}$ )  $j$  es lado de un triángulo  $\Delta$  de tipo 1 y se cumplen las siguientes condiciones  $i$ )- $iv$ ). Véase Figura 24.

- i)  $p$  es el vértice de  $\Delta$  opuesto a  $j$ ,
- ii) Para  $k = 1, \dots, l-1$  los segmentos  $[r_k, r_{k+1}]_\gamma$  son contráctiles a  $p$ , con la homotopía que preserva los extremos de  $[r_k, r_{k+1}]_\gamma$  en el respectivo arco de  $\tau^\circ$ ,
- iii) Los segmentos  $[q_0, r_1]_\gamma$  y  $[r_l, q_1]_\gamma$  están contenidos en  $\Delta$ ,
- iv)  $\gamma \cup [q_0, q_1]_j$  divide en dos regiones a  $\Sigma$  y una de esas dos regiones es homeomorfa a un disco que contiene sólo a la pinchadura  $p$ .

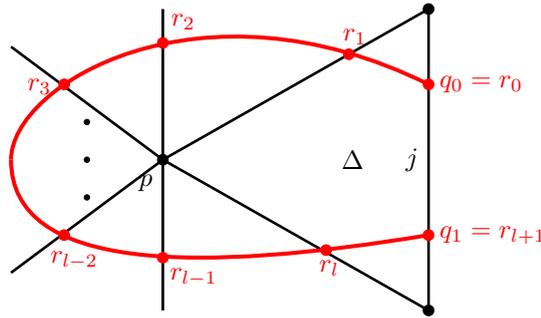


Figura 24: Caso  $a_{11}$ ) de la Definición 3.3.

$a_{12}$ )  $j$  es lado de un triángulo  $\Delta$  de tipo 2. Denotemos con  $m$  al lado de  $\Delta$  que es lado no doblado de  $\Delta'$ , donde  $\Delta'$  es el único triángulo doblado que comparte el lado  $m$  con  $\Delta$ . En este caso se tiene que cumplir las siguientes condiciones  $i$ )- $v$ ). Véase Figura 25.

- i)  $m$  está basado en la pinchadura  $p$ ,
- ii) Si  $r_0$  pertenece al lado con etiqueta  $l_3$  en  $\Delta$  entonces  $r_1$  pertenece al lado con etiqueta  $l_2$  en  $\Delta$ ,  $r_{l-3}$  pertenece al lado con etiqueta  $l_3$ ,  $r_{l-1}$  pertenece al lado doblado de  $\Delta'$ ,  $r_l$  pertenece a  $m$  y el segmento  $[r_{l-3}, r_{l-1}]_\gamma$  es contráctil a  $p$ . Por otro lado si  $r_0$  pertenece al lado con etiqueta  $l_2$  en  $\Delta$  entonces  $r_4$  pertenece al lado con etiqueta  $l_2$  en  $\Delta$ ,  $r_1$  pertenece a  $m$ ,  $r_2$  pertenece al lado doblado de  $\Delta'$ ,  $r_l$  pertenece al lado con etiqueta  $l_3$  en  $\Delta$  y el segmento  $[r_2, r_4]_\gamma$  es contráctil a  $p$ ,
- iii) Los segmentos  $[q_0, r_1]_\gamma$  y  $[r_l, q_1]_\gamma$  están contenidos en  $\Delta$ ,
- iv) Para  $k = 1, \dots, l-1$  los segmentos  $[r_k, r_{k+1}]_\gamma$  son contráctiles a  $p$  con la homotopía que preserva los extremos de  $[r_k, r_{k+1}]_\gamma$  en el respectivo arco de  $\tau^\circ$ ,
- v)  $\gamma \cup [q_0, q_1]_j$  divide en dos regiones a  $\Sigma$  y una de esas dos regiones es homeomorfa a un disco que contiene sólo a la pinchadura  $p$ .

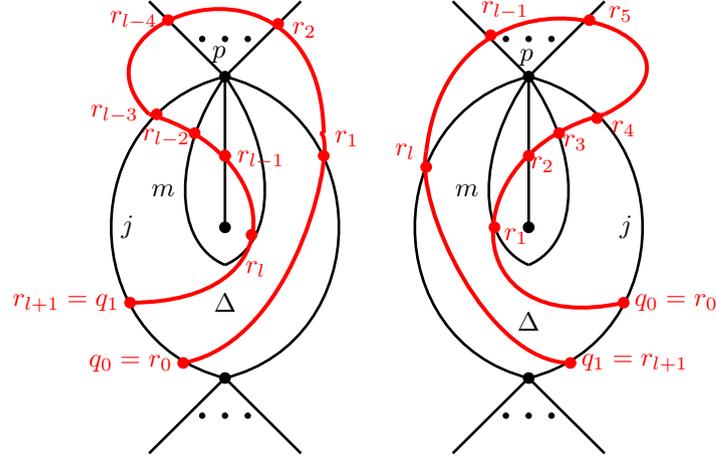


Figura 25: Caso  $a_{12})$  de la Definición 3.3.

$a_{13})$   $j$  el lado de un triángulo  $\Delta$  de tipo 3. Denotemos por  $m$  y  $m'$  a los lados de  $\Delta$  que son los lados no doblados de  $\Delta'$  y  $\Delta''$ , donde  $\Delta'$  y  $\Delta''$  son los dos únicos triángulos doblados que comparten un lado con  $\Delta$ . En este caso se tiene que cumplir las siguientes condiciones  $i)$ - $v)$ . Véase Figura 26.

- i)  $m$  y  $m'$  están basados en la pinchadura  $p$ ,
- ii)  $r_2$  pertenece al lado doblado de  $\Delta''$  y  $r_{l-1}$  pertenece al lado doblado de  $\Delta'$ ,
- iii) Los segmentos  $[q_0, r_1]_\gamma$  y  $[r_l, q_1]_\gamma$  están contenidos en  $\Delta$ .
- iv) Para  $k = 0, \dots, l$  los segmentos  $[r_k, r_{k+1}]_\gamma$  son contráctiles a  $p$  con la homotopía que preserva los extremos de  $[r_k, r_{k+1}]_\gamma$  en el respectivo arco de  $\tau^\circ$ ,
- v)  $\gamma \cup [q_0, q_1]_j$  divide en dos regiones a  $\Sigma$  y una de esas dos regiones es homeomorfa a un disco que contiene sólo a la pinchadura  $p$ .

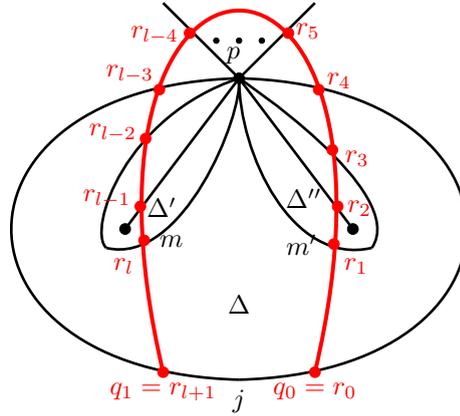


Figura 26: Caso  $a_{13}$ ) de la Definición 3.3.

$a_2$ )  $j$  es el lado doblado de algún triángulo doblado  $\Delta'$ . Denotemos por  $m$  al lado no doblado de dicho triángulo.

En esta situación  $m$  es lado de un triángulo de tipo 2 ó  $m$  es lado de un triángulo de tipo 3. Consideremos estos 2 subcasos:

$a_{21}$ )  $m$  es lado de un triángulo  $\Delta$  de tipo 2, en este caso se tiene que cumplir las siguientes condiciones  $i$ )- $v$ ). Véase Figura 27.

- i)  $p$  es vértice de  $\Delta$  opuesto a  $m$ ,
- ii)  $r_2$  pertenece al lado de  $\Delta$  con etiqueta  $l_3$  y  $r_{l-1}$  pertenece al lado con etiqueta  $l_2$ ,
- iii) Los segmentos  $[r_1, r_2]_\gamma$  y  $[r_{l-1}, r_l]_\gamma$  están contenidos en  $\Delta$ ,
- iv) Para  $k = 2, \dots, l-2$  los segmentos  $[r_k, r_{k+1}]_\gamma$  son contráctiles a  $p$  con la homotopía que preserva los extremos de  $[r_k, r_{k+1}]_\gamma$  en el respectivo arco de  $\tau^\circ$ ,
- v)  $\gamma \cup [q_0, q_1]_j$  divide en dos regiones a  $\Sigma$  y una de esas dos regiones es homeomorfa a un disco que contiene sólo a la pinchadura  $p$ .

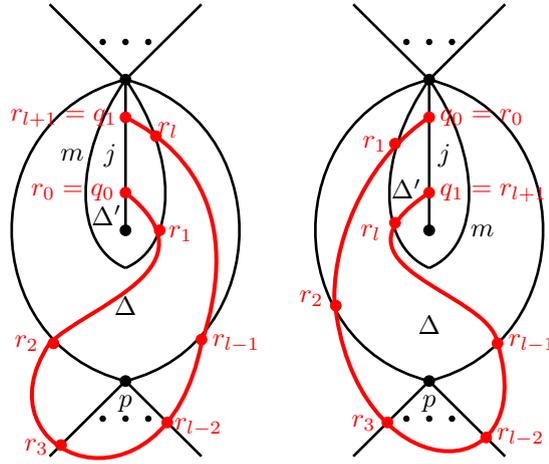


Figura 27: Caso  $a_{21})$  de la Definición 3.3.

$a_{22})$   $m$  es lado de un triángulo  $\Delta$  de tipo 3. Denotemos por  $m'$  al lado de  $\Delta$  distinto de  $m$  que es lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta''$ . En este caso se tiene que cumplir las siguientes condiciones  $i)-xi)$ .

En esta situación tenemos que  $m$  tiene etiqueta  $l_2$  en  $\Delta$  ó tiene etiqueta  $l_3$ . Consideremos primero que  $m$  tiene etiqueta  $l_2$  en  $\Delta$ . Véase Figura 28.

- i)  $m$  y  $m'$  están basados en la pinchadura  $p$ ,
- ii)  $r_2, r_{l-7}$  pertenecen al arco con etiqueta  $l_1$  en  $\Delta$ ,  $r_l, r_{l-4}$   $m$  y  $r_{l-5} \in j$ ,
- iii)  $[p, r_{l-5}]_j \cap [q_0, q_1]_j = \emptyset$ ,
- iv)  $[r_l, r_{l-4}]_\gamma \cup [r_{l-4}, r_l]_m$  es una curva cerrada que sólo corta a  $m'$  en exactamente dos puntos y al lado doblado de  $\Delta''$  en sólo un punto,
- v)  $[r_l, r_{l-4}]_\gamma \cup [r_{l-4}, r_l]_m$  contiene en el interior solo a la única pinchadura que es encerrada por  $m'$ ,
- vi) El segmento  $[r_{l-2}, q_1]_\gamma$  no es contráctil a  $p$ ,
- vii)  $\gamma \cup [q_0, q_1]_j$  divide en dos regiones a  $\Sigma$  y una de esas dos regiones es homeomorfa a un disco que contiene a la pinchadura  $p$  y posiblemente a la única pinchadura que es encerrada por  $m$ ,
- viii) Los segmentos  $[r_1, r_2]_\gamma$  y  $[r_{l-1}, r_l]_\gamma$  están contenidos en  $\Delta$ ,
- ix) Para  $k = 0, \dots, l$  los segmentos  $[r_k, r_{k+1}]_\gamma$  son contráctiles a  $p$  con la homotopía que preserva los extremos de  $[r_k, r_{k+1}]_\gamma$  en el respectivo arco de  $\tau^\circ$ ,
- x) El interior del segmento  $[r_0, r_2]_\gamma$  sólo corta a  $m$  en el punto  $r_1$ ,
- xi) El interior del segmento  $[r_{l-7}, r_{l-4}]_\gamma$  sólo corta a los arcos  $m$  y  $j$  en un sólo punto respectivamente.

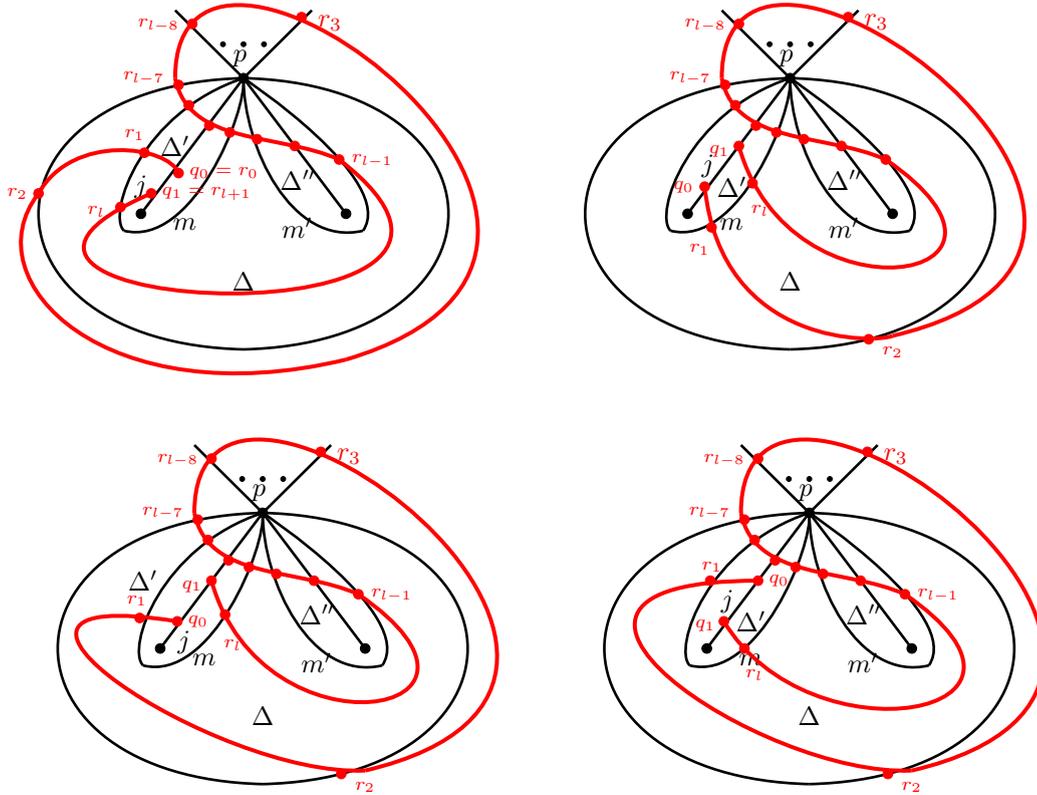


Figura 28: Caso  $a_{22}$ ) de la Definición 3.3.

Por otro lado consideremos el caso cuando  $m$  tiene etiqueta  $l_3$  en  $\Delta$ . Véase Figura 29.

- i)  $m$  y  $m'$  están basados en la pinchadura  $p$ ,
- ii)  $r_8, r_{l-1}$  pertenecen al arco con etiqueta  $l_1$  en  $\Delta$ ,  $r_2, r_4$  pertenecen al arco con etiqueta  $l_2$  en  $\Delta$ ,  $r_1, r_5$  pertenece a  $m$  y  $r_6 \in j$ ,
- iii)  $[p, r_6]_j \cap [q_0, q_1]_j = \emptyset$ ,
- iv)  $[r_1, r_5]_\gamma \cup [r_5, r_1]_m$  es una curva cerrada que sólo corta a  $m'$  en exactamente dos puntos y al lado doblado de  $\Delta''$  en sólo un punto,
- v)  $[r_1, r_5]_\gamma \cup [r_5, r_1]_m$  contiene en el interior sólo a la única pinchadura que es encerrada por  $m'$ ,
- vi)  $\gamma \cup [q_0, q_1]_j$  divide en dos regiones a  $\Sigma$  y una de esas dos regiones es homeomorfa a un disco que contiene a la pinchadura  $p$  y posiblemente a la única pinchadura encerrada por  $m$ ,

- vii) Para  $k = 0, \dots, l$  los segmentos  $[r_k, r_{k+1}]_\gamma$  son contráctiles a  $p$  con la homotopía que preserva los extremos de  $[r_k, r_{k+1}]_\gamma$  en el respectivo arco de  $\tau^\circ$ ,
- viii) Los segmentos  $[r_1, r_2]_\gamma$  y  $[r_{l-1}, r_l]_\gamma$  están contenidos en  $\Delta$ ,
- ix) El segmento  $[r_5, r_8]_\gamma$  es contráctil a  $p$ ,
- x) El interior del segmento  $[q_1, r_{l-1}]_\gamma$  sólo corta a  $m$  en un punto,
- xi) El segmento  $[r_4, r_6]_\gamma$  es contráctil a  $p$ .

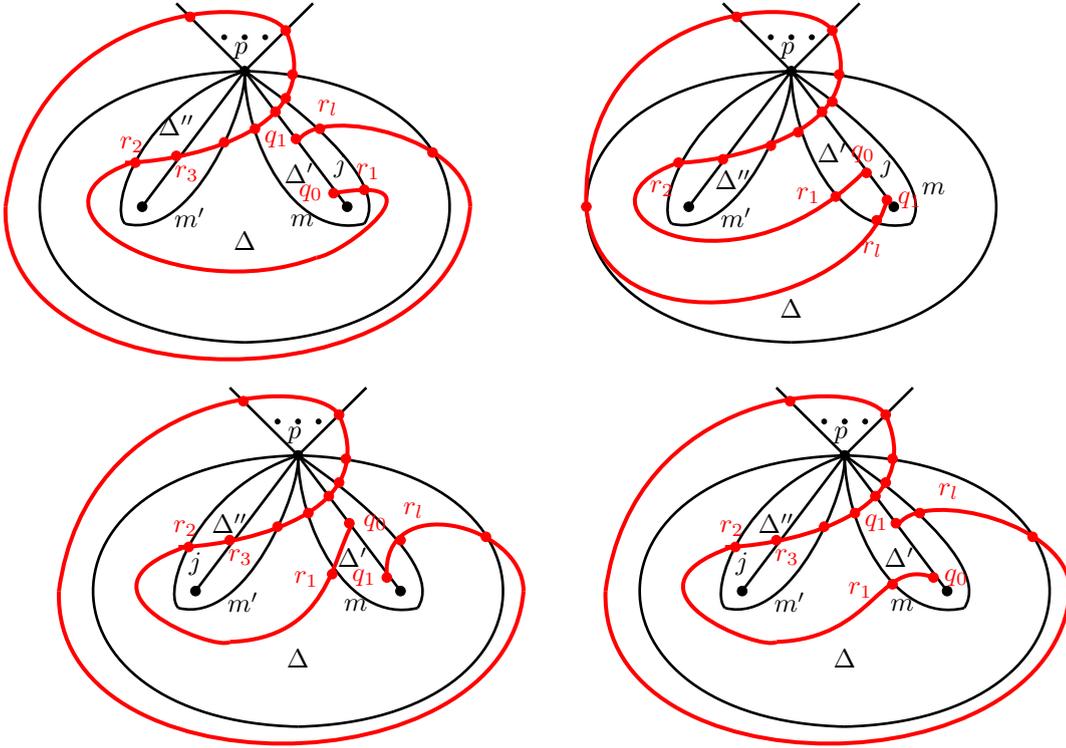


Figura 29: Caso  $a_{22}$ ) de la Definición 3.3.

b)  $\delta_\tau(p) = 0$ .

Dado que la pinchadura  $p$  tiene signatura cero, sólo hay un arco  $j'$  en  $\tau^\circ$  que es adyacente a  $p$  y es lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$ . Denotemos con  $m$  al lado no doblado de  $\Delta'$ . Además, como en el inciso a), para el arco  $j$  tenemos los siguientes dos subcasos:

$b_1)$   $j$  no es lado de ningún triángulo doblado.

La hipótesis  $\delta_\tau(p) = 0$  implica  $l = 3$  y tenemos que considerar dos posibilidades:

$b_{11})$   $j$  es lado de un triángulo  $\Delta$  de tipo 2 que comparte el lado  $m$  con  $\Delta'$ . Véase Figura 30.

i)  $j'$  es adyacente a  $p$ ,

- ii)  $\gamma$  corta sólo en  $r_1$  y  $r_3$  a  $m$ ,
- iii)  $\gamma$  corta sólo en  $r_2$  a  $j'$ ,
- iv)  $\gamma$  no corta a ningún otro arco de  $\tau^0$ , excepto a los mencionados en los puntos anteriores,
- v)  $\gamma \cup [q_0, q_1]_j$  divide en dos regiones a  $\Sigma$  y una de esas dos regiones es homeomorfa a un disco que contiene sólo a la pinchadura  $p$ .

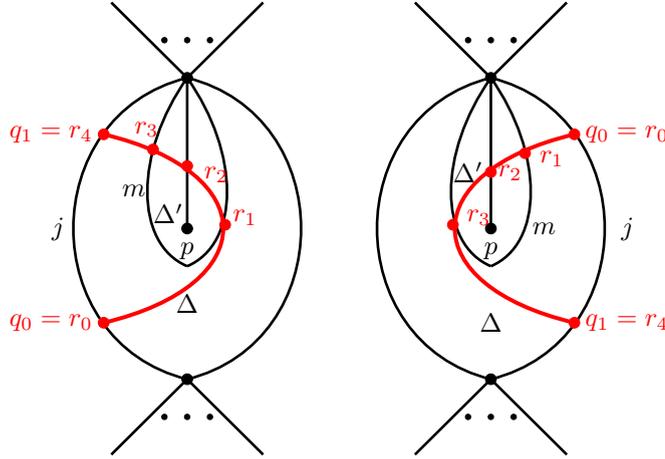


Figura 30: Caso  $b_{11})$  de la Definición 3.3.

$b_{12})$   $j$  tiene etiqueta  $l_1$  en  $\Delta$  y  $\Delta$  es de tipo 3. Consideramos  $\Delta'$  y  $\Delta''$  los únicos triángulos doblado que comparten un lado con  $\Delta$ , donde  $m$  y  $m'$  son dichos lado. Denotemos por  $j'$  y  $j''$  los lado doblado de  $\Delta'$  y  $\Delta''$ . Véase Figura 31.

- i)  $j'$  es adyacente a  $p$ ,
- ii)  $\gamma$  corta sólo en  $r_1$  y  $r_3$  a  $m$ ,
- iii)  $\gamma$  corta sólo en  $r_2$  a  $j'$ ,
- iv)  $\gamma$  no corta a ningún otro arco de  $\tau^0$ , excepto a los mencionados en los puntos anteriores,
- v)  $\gamma \cup [q_0, q_1]_j$  divide en dos regiones a  $\Sigma$  y una de esas dos regiones es homeomorfa a un disco que contiene sólo a la pinchadura  $p$ .

$b_2)$   $j$  es el lado doblado de algún triángulo doblado  $\Delta'$ . Denotemos con  $m$  al lado no doblado de  $\Delta'$ .

En esta situación  $m$  sólo puede ser lado de un triángulo  $\Delta$  de tipo 3. Sean  $m'$  el único lado de  $\Delta$  que es distinto de  $m$  y además es lado no doblados de un triángulos doblados  $\Delta''$ ,  $p'$  la pinchadura adyacente a  $j$  con signature 0 y  $j'$  el lado doblado de  $\Delta''$ . Dado que la pinchadura  $p$  tiene signature cero entonces  $l = 5$ . Véase figura 32.

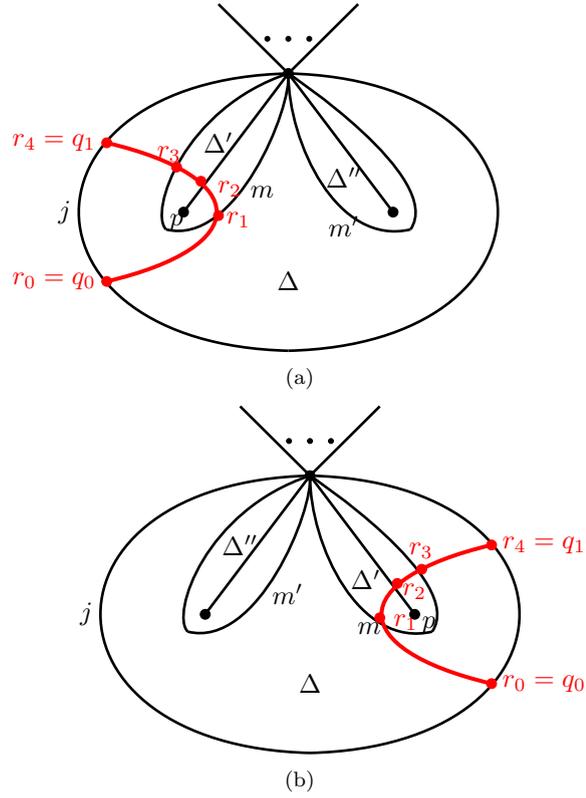


Figura 31: Caso  $b_{12}$ ) de la Definición 3.3.

- i)  $j'$  es adyacente a  $p$ ,
- ii) Si  $m$  tiene etiqueta  $l_2$  en  $\Delta$  entonces  $q_0 \in [p', q_1]_j$ . Por otro lado si  $m$  tiene etiqueta  $l_3$  en  $\Delta$  entonces  $q_1 \in [p', q_0]_j$ ,
- iii)  $\gamma$  corta sólo en  $r_1$  y  $r_5$  a  $m$ ,
- iv)  $\gamma$  corta sólo en  $r_2$  y  $r_4$  a  $m'$ ,
- v)  $\gamma$  corta sólo en  $r_3$  a  $j'$ ,
- vi)  $\gamma \cup [q_0, q_1]_j$  divide en dos regiones a  $\Sigma$  y una de esas dos regiones es homeomorfa a un disco que contiene a la pinchadura  $p$  y posiblemente a la pinchadura  $p'$
- vii) Si  $m$  tiene etiqueta  $l_2$  en  $\Delta$  entonces  $r_0 \notin [q, q_1]_{j'}$  donde  $q$  es la pinchadura opuesta a  $p$  en  $j'$ . Por otro lado si  $m$  tiene etiqueta  $l_3$  en  $\Delta$  entonces  $r_{l+1} \notin [q, r_0]_{j'}$ .

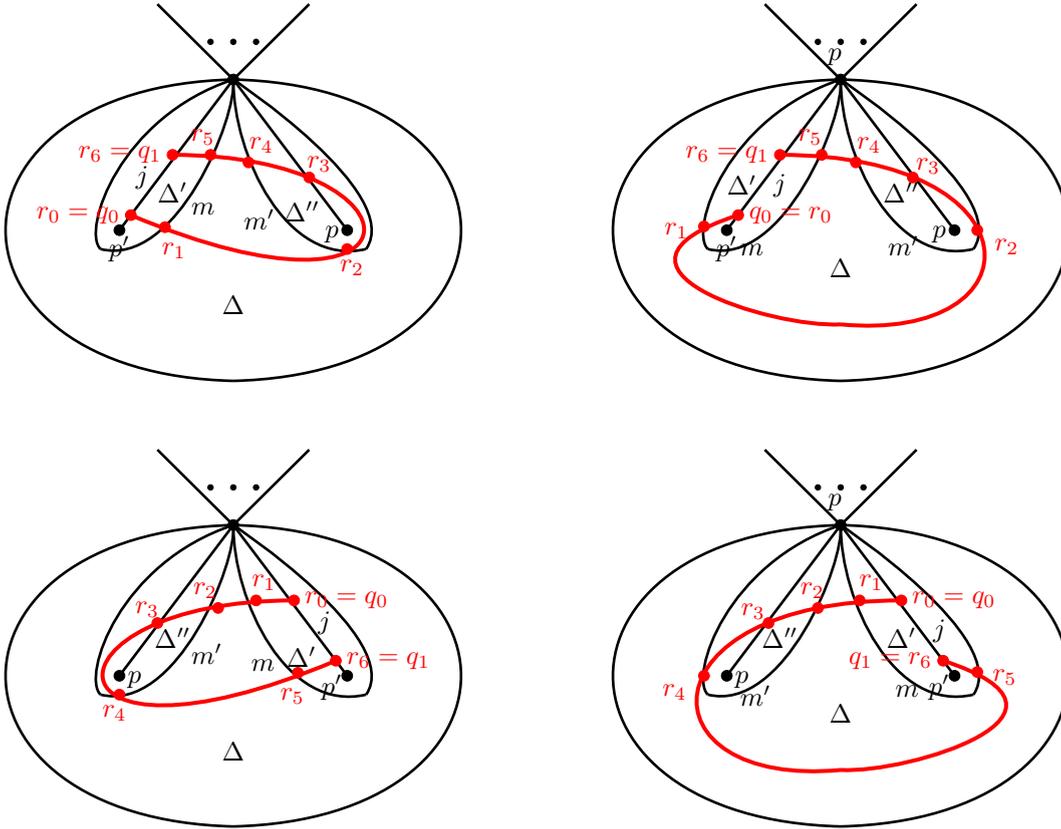


Figura 32: Caso  $b_2$ ) de la Definición 3.3.

**Observación 3.4.** En la Definición 3.3 se pudo haber definido el concepto de rodear a una pinchadura usando el lado no doblado de un triángulo doblado, pero con el fin de hacer la redacción un poco mas simple se usó el lado doblado.

**Definición 3.5.** Sea  $\tau$  una triangulación etiquetada de  $(\Sigma, M)$ , decimos que un lazo  $k$  encierra muy de cerca al arco  $i$  en  $\tau^\circ$  si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- i)  $k$  minimiza la intersección con los arcos de  $\tau^\circ$ ,
- ii)  $i$  y  $k$  son los dos únicos lados de un triángulo doblado  $\Delta'$ , siendo  $i$  el lado doblado.  $\Delta'$  no es necesariamente parte de la triangulación  $\tau^\circ$ .

La siguiente definición es la base para la construcción de la representación  $M(\tau, i)$ .

**Definición 3.6.** (Curva derivada  $i' = i'(\tau^\circ, i)$ ) Sean  $\tau$  una triangulación etiquetada de  $(\Sigma, M)$  con signatura no negativa e  $i$  un arco etiquetado que no pertenece a  $\tau$ . Sea  $\{p, q\} \subseteq M$  el conjunto de los extremos de un arco  $j$  en  $\tau^\circ$ . Definiremos en dos pasos una curva etiquetada  $i' = i'(\tau^\circ, i)$  en  $\Sigma$  a partir de  $i$ . Primeramente definiremos una curva sin etiqueta  $i_0$  y después asignaremos etiquetas a los extremos de  $i_0$ .

La construcción depende de los siguientes tres parámetros:

- a)  $p = q$  ó  $p \neq q$ .
- b) La signatura en los extremos de  $i$ .
- c) La etiqueta en los extremos de  $i$ .

Consideramos los tres parámetros anteriores para construir  $i'$ .

- a)  $p \neq q$ .

$a_1) \delta_\tau(p) \neq 0 \neq \delta_\tau(q)$ .

$a_{11}) i$  tiene etiqueta "plain" en ambos extremos como se muestra en la Figura 33.

Definimos  $i_0 := i$  y asignamos la etiqueta "plain" en ambos extremos de  $i_0$ . En este caso la curva derivada  $i'$  coincide con el arco etiquetado  $i$ .

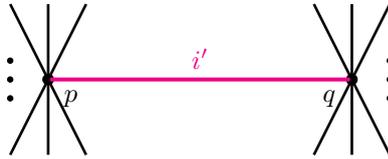
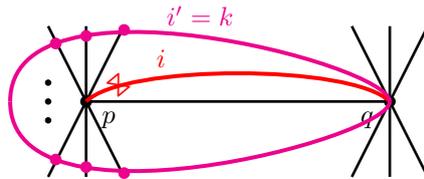
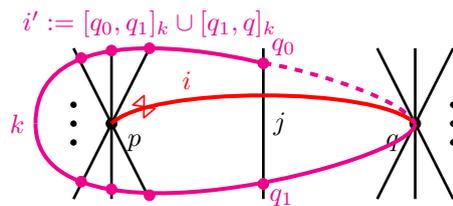


Figura 33: Caso  $a_{11})$  de la Definición 3.6.

$a_{12}) i$  tiene etiqueta "k" en sólo un extremo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el extremo con etiqueta "k" sea  $p$ .



(a) La versión sin etiqueta de  $i$  pertenece a  $\tau^\circ$ .



(b) La versión sin etiqueta de  $i$  no pertenece a  $\tau^\circ$ .

Figura 34: Caso  $a_{12})$  de la Definición 3.6.

Sea  $k$  el único lazo basado en  $q$  que encierra muy de cerca al arco  $i$ . Si la versión sin etiqueta de  $i$  pertenece a  $\tau^\circ$ , entonces definimos  $i_0 := k$  y asignamos la etiqueta "plain" en ambos extremos de  $i_0$  como se muestra en (a) de la Figura 34. En caso contrario denotamos por  $\gamma := [q_0, q_1]_k$  al segmento de  $k$  que rodea a  $p$ , donde los extremos  $q_0$  y  $q_1$  de  $\gamma$  pertenecen a un arco  $j$  de  $\tau^\circ$  (véase Definición 3.3). Definimos  $i_0 := \gamma' \cup \gamma$  donde  $\gamma'$  es el segmento de  $k$  que conecta a  $q$  con  $q_1$  y cumple que  $q_0$  no pertenece a  $\gamma'$  y asignamos la etiqueta "plain" en ambos extremos como se muestra en b) de la Figura 34.

$a_{13}$ )  $i$  tiene etiqueta "X" en ambos extremos.

Sean  $i^1$  el arco obtenido de  $i$  al cambiar la etiqueta en el extremo  $p$  e  $i^2$  el arco obtenido de  $i$  al cambiar la etiqueta en el extremo  $q$ . Denotemos por  $i_0^1$  y  $i_0^2$  a las curvas sin etiquetas asociadas a  $i^1$  y  $i^2$  respectivamente. Si la versión sin etiqueta de  $i$  pertenece a  $\tau^\circ$  entonces definimos  $i_0 := i_0^1 \cup i_0^2$  (véase (a) de la Figura 34) y asignamos la etiqueta "plain" en los extremos de  $i_0^1$  y  $i_0^2$ , como se muestra en la Figura 35. En caso contrario sea  $\gamma' := [q'_0, q'_1]_{i_0^1}$  el segmento de  $i_0^1$  que rodea a  $q$  donde los extremos  $q'_0$  y  $q'_1$  de  $\gamma'$  pertenece a un arco  $j_1$  de  $\tau^\circ$ , análogamente para  $i_0^2$  tenemos el segmento  $\gamma := [q_0, q_1]_{i_0^2}$  que rodea a  $p$  donde los extremos  $q_0$  y  $q_1$  de  $\gamma$  pertenecen a un arco  $j_2$  de  $\tau^\circ$ .

- 1) El arco  $i$  intersecta a  $j_1$  y  $j_2$ . Sean  $c_1$  y  $c_2$  los puntos de intersección de  $i$  con  $j_1$  y  $j_2$  respectivamente.
- 2) Sean  $x$  el punto de intersección de  $i_0^1$  con  $j_2$  y  $z$  el punto de intersección de  $i_0^2$  con  $j_1$  entonces los segmentos  $[c_2, c_1]_i$ ,  $[x, q'_1]_{i_0^1}$  y  $[q_1, z]_{i_0^2}$  son homotópicos con la homotopía que preserva los extremos en los arcos  $j_1$  y  $j_2$ .
- 3) De 1) y 2) se tiene que se puede identificar los puntos  $x, c_2$  con  $q_1$  y  $z, c_1$  con  $q'_1$ .

Como consecuencia de las tres observaciones definimos  $i_0 := \gamma \cup [q_1, q'_1] \cup \gamma'$  y asignamos la etiqueta "plain" en ambos extremos de  $i_0$ . Véase la Figura 36.

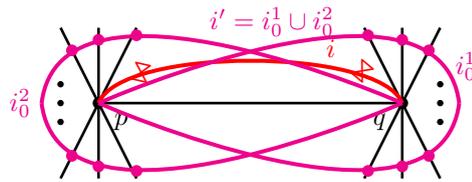


Figura 35: Caso  $a_{13}$ ) de la Definición 3.6.

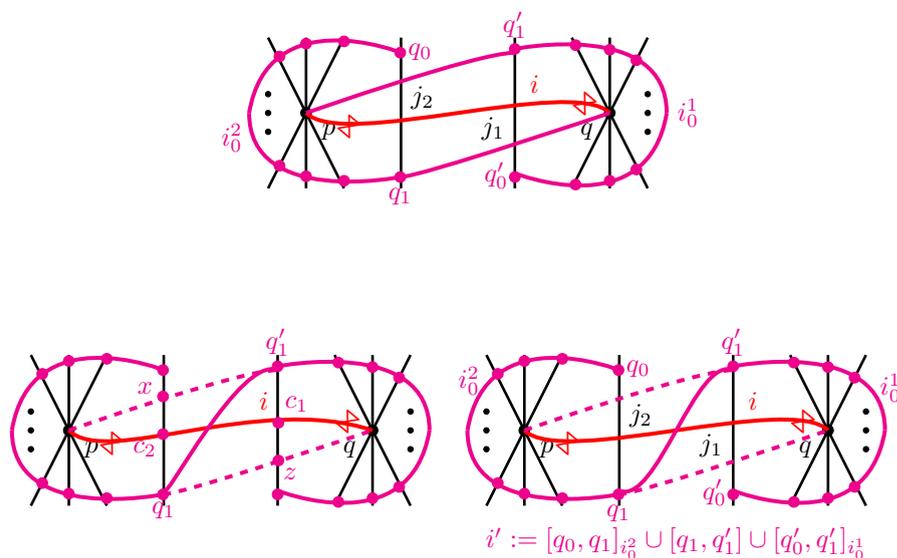


Figura 36: Caso  $a_{13}$ ) de la Definición 3.6.

$a_2$ )  $\delta_\tau(p) = 0$  y  $\delta_\tau(q) \neq 0$  ó  $\delta_\tau(p) \neq 0$  y  $\delta_\tau(q) = 0$ .

Sin pérdida de generalidad basta considerar el caso  $\delta_\tau(p) = 0$  y  $\delta_\tau(q) \neq 0$ , ya que el caso  $\delta_\tau(p) \neq 0$  y  $\delta_\tau(q) = 0$  es simétrico. Denotemos por  $j'$  al único arco de  $\tau^\circ$  que es incidente en  $p$  y por  $m$  al lazo basado en la pinchadura opuesta a  $p$  en  $j'$  y que encierra muy de cerca a  $j'$ .

$a_{21}$ )  $i$  tiene etiqueta "plain" en ambos extremos.

En esta situación definimos la curva  $i_0 := i$  y asignamos la etiqueta "plain" en ambos extremos. Como se muestra en la Figura 37.

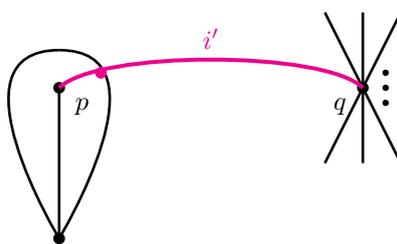


Figura 37: Caso  $a_{21}$ ) de la Definición 3.6.

$a_{22}$ )  $i$  tiene etiqueta "plain" en el extremo  $p$  y etiqueta " $\bowtie$ " en el extremos  $q$ .

Sea  $k$  el lazo basado en  $p$  que encierra muy de cerca a  $i$ , si la versión sin etiquetas de  $i$  pertenece a  $\tau^\circ$  entonces definimos  $i_0 := k$ . En caso contrario consideramos los siguientes dos casos:

$a_{221}$ )  $i$  interseca a mas de un arco de  $\tau^\circ$ .

En este caso definimos  $i_0$  como en  $a_{12}$ ) ya que la signatura en  $p$  no afecta en la construcción de  $i_0$  y asignamos la etiqueta "plain" en ambos extremo. Como se muestra en la Figura 38.

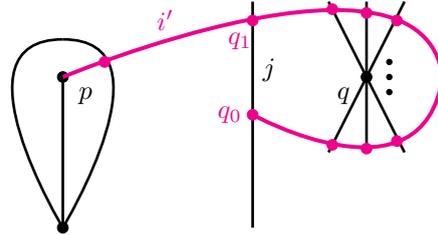


Figura 38: Caso  $a_{221}$ ) de la Definición 3.6.

$a_{222}$ )  $i$  interseca sólo al arco  $m$  de  $\tau^\circ$  en un punto.

Recorriendo  $k$  en sentido de las manecillas del reloj denotamos por  $t_r$  al  $r$ -ésimo punto de intersección de  $k$  con algún arco de  $\tau^\circ$  para  $r \in \{1, \dots, n+1\}$ . Notemos que  $t_1$  y  $t_{n+1}$  son los únicos dos puntos de intersección de  $k$  con  $m$ . Definimos  $i_0 := [p, t_1]_k \cup [t_1, t_{n+1}]_k$  con la propiedad que  $t_{n+1} \notin [p, t_1]_k$ . Vease Figura 39.

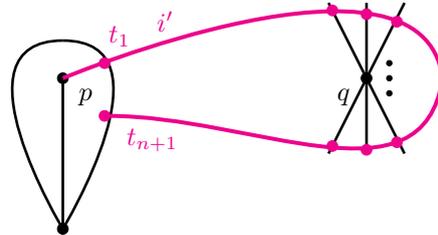


Figura 39: Caso  $a_{221}$ ) de la Definición 3.6.

$a_{23}$ )  $i$  tiene etiqueta "plain" en el extremo  $q$  y etiqueta "⌘" en el extremos  $p$ .

En este caso definimos  $i_0$  como la versión sin etiquetas de  $i$  y asignamos las etiquetas "plain", "⌘" a los extremo  $q$  y  $p$  de  $i_0$ , respectivamente. Como se muestra en la Figura 40.

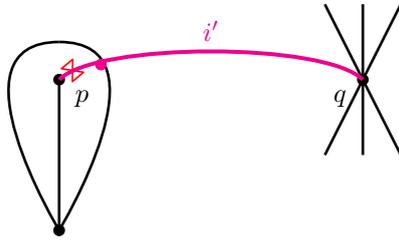


Figura 40: Caso  $a_{23}$ ) de la Definición 3.6.

$a_{24}$ )  $i$  tiene etiqueta " $\bowtie$ " en ambos extremos.

Sea  $i^1$  el arco obtenido de  $i$  al cambiar la etiqueta en el extremo  $p$ . Para  $i^1$  tenemos definida la curva  $i_0^1$  (véase  $a_{22}$ ). Definimos  $i_0 := i_0^1$  y asignamos la etiqueta " $\bowtie$ " en el extremo  $p$  de  $i_0$  y la etiqueta " $plain$ " en el extremo opuesto a  $p$  en  $i_0$ . Como se muestra en la Figura 41.

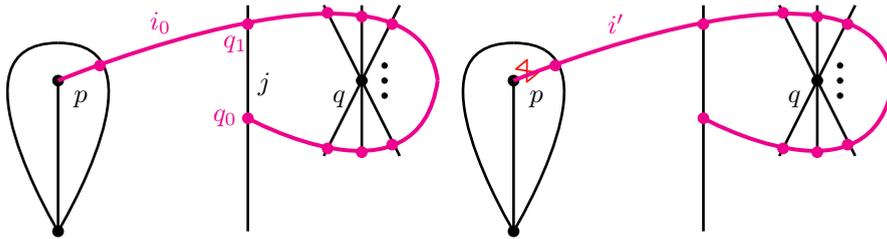


Figura 41: Caso  $a_{24}$ ) de la Definición 3.6.

$a_3$ )  $\delta_\tau(p) = 0 = \delta_\tau(q)$ .

Para este caso definimos la curva  $i_0$  como la versión sin etiquetas de  $i$ . Dependiendo de la etiqueta en los extremos de  $i$  asignamos la etiqueta en los extremos de  $i_0$  de la siguiente manera:

$a_{31}$ ) Si  $i$  tiene etiqueta " $plain$ " en ambos extremos entonces asignamos la etiqueta " $plain$ " en ambos extremos de  $i_0$  como se muestra en la Figura 42.

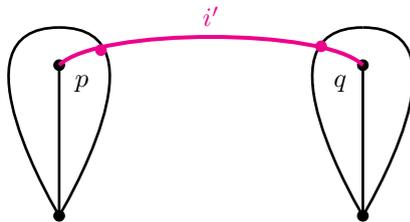


Figura 42: Caso  $a_{31}$ ) de la Definición 3.6.

$a_{32}$ )  $i$  tiene etiqueta "⌘" en sólo un extremo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el extremo con etiqueta "⌘" sea  $q$ . Asignamos las etiquetas "plain" y "⌘" en los extremos  $p$  y  $q$  de  $i_0$  respectivamente. Como se muestra en la Figura 43.

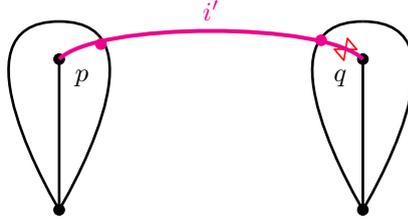


Figura 43: Caso  $a_{32}$ ) de la Definición 3.6.

$a_{33}$ ) Si  $i$  tiene etiqueta "⌘" en ambos extremos entonces asignamos la etiqueta "⌘" en ambos extremos de  $i_0$ . Como se muestra en la Figura 44.

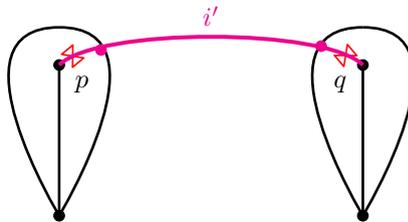


Figura 44: Caso  $a_{33}$ ) de la Definición 3.6.

b)  $p = q$ .

Dado que  $p = q$  e  $i$  es un arco de alguna triangulación entonces las etiquetas en los extremos de  $i$  deben coincidir.

$b_1)$   $\delta_\tau(p) \neq 0$ .

$b_{11})$   $i$  tiene etiqueta "plain" en ambos extremos.

Definimos  $i_0 := i$  y asignamos la etiqueta "plain" en ambos extremos.

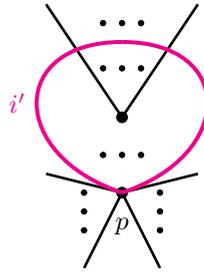


Figura 45: Caso  $b_{11}$ ) de la Definición 3.6.

$b_{12}$ )  $i$  tiene etiqueta "⌘" en ambos extremos.

$b_{121}$ ) La versión sin etiqueta de  $i$  no pertenece a  $\tau^\circ$ . Sean  $i^1$  la curva en  $(\Sigma, M)$  obtenida de  $i$  al intercambiar una etiqueta de  $i$  y  $i^2$  la curva obtenida de  $i$  al intercambiar la etiqueta de  $i$  en el extremo opuesto al que usamos para obtener  $i^1$ . Para  $i^1$  hacemos la misma construcción que en el inciso  $a_{13}$ ) omitiendo la hipótesis que  $i^1$  es un arco. Análogamente para  $i^2$ , como se muestra en la Figura 46.

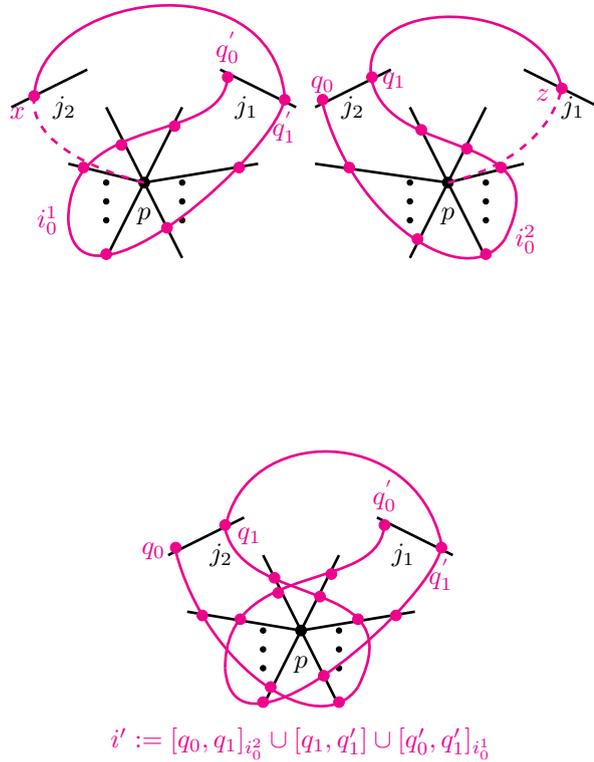


Figura 46: Caso  $b_{12}$ ) de la Definición 3.6.

$b_{122}$ ) La versión sin etiqueta de  $i$  pertenece a  $\tau^\circ$ .

Sean  $\Delta^1$  y  $\Delta^2$  los únicos triángulos no doblados de  $\tau^\circ$  que comparten a la versión sin etiquetas de  $i$  como uno de sus lados, donde  $\Delta^1$  es el triángulo que cumple que la versión sin etiquetas de  $i$  encierra a los otros dos lados. Denotamos por  $i, j, k$  a los lados del triángulo  $\Delta^1$  recorridos en el sentido de las manecillas del reloj y denotamos por  $i, j', k'$  a los lados de  $\Delta^2$  recorridos en el sentido de las manecillas del reloj.

Si el arco  $j$  no es el lado no doblado de ningún triángulo doblado entonces dibujamos una curva en  $\tau^\circ$  denotada por  $\gamma_1$  que rodea a la pinchadura  $p$  y los extremos de  $\gamma_1$  están en el arco  $j$ . Por otro lado si el arco  $j$  es el lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  cuyo lado doblado es  $j''$ , en este caso dibujamos una curva en  $\tau^\circ$  denotada por  $\gamma_1$  que rodea a la pinchadura  $p$  y los extremos de  $\gamma_1$  están en el arco  $j''$  y de manera que el segmento  $[r_{l+1}, r_{l-1}]_{\gamma_1}$  no es contráctil a  $p$ . Véase la Figura 47 y la Figura 48.

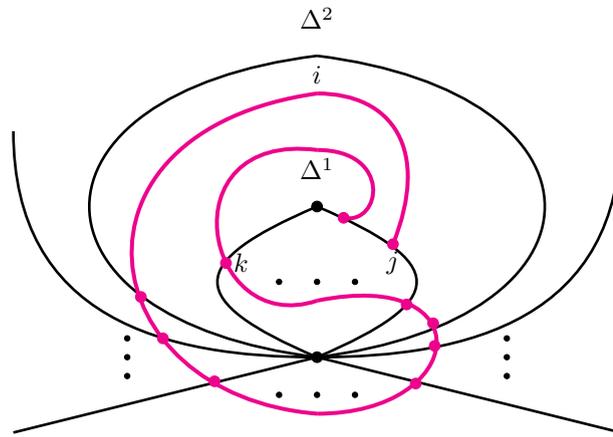


Figura 47:  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado.

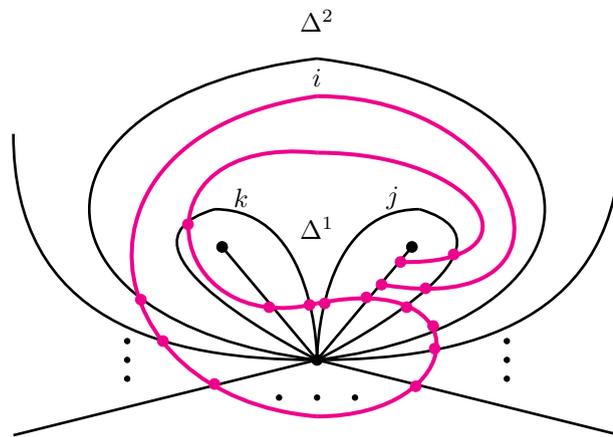


Figura 48:  $j$  es el lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$ .

Una vez dibujada la curva  $\gamma_1$  notamos que el punto de cruce  $r_l$  de  $\gamma_1$  con los arcos  $\tau^\circ$  pertenece al interior relativo de  $k$ . Si el arco  $j$  no es el lado no doblado de ningún triángulo doblado  $\Delta'$  entonces dibujamos un lazo basado en el punto de cruce  $r_l$  que encierra sólo a la pinchadura  $p$  de manera que el punto de cruce  $r'_1$  de  $\gamma_2$  con los arcos de  $\tau^\circ$  pertenece al interior relativo del arco  $j$ . Por otro lado si el arco  $j$  es el lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  entonces dibujamos un lazo basado en el punto de cruce  $r_{l-2}$  que encierra sólo a la pinchadura  $p$  de manera que el segmento  $[r'_0, r'_2]_{\gamma_2}$  no es contráctil a la pinchadura  $p$  con la homotopía que preserva los extremos del segmento  $[r'_0, r'_2]_{\gamma_2}$  en el arco correspondiente.

Notemos que si el arco  $k$  no es lado de ningún triángulo doblado entonces los segmentos  $[r_l, r_{l+1}]_{\gamma_1}$  y  $[r'_0, r'_1]_{\gamma_2}$  son homotópicos con la homotopía que preserva a los extremos de ambos segmentos en los arcos correspondientes. Por otro lado si  $k$  es el lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  entonces los segmentos  $[r_{l-2}, r_{l+1}]_{\gamma_1}$  y  $[r'_0, r'_3]_{\gamma_2}$  son homotópicos con la homotopía que preserva a los extremos de ambos segmentos en los arcos correspondientes. Denotamos por  $\gamma_3$  a la curva que resulta de los siguientes dos pasos;

- Unir las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ .
- Identificar los segmentos  $[r_{l-2}, r_{l+1}]_{\gamma_1}$  y  $[r'_0, r'_3]_{\gamma_2}$  en el caso que  $k$  no sea lado de ningún triángulo doblado y si  $k$  es el lado no doblado de un triángulo doblado entonces identificamos los segmentos  $[r_{l-2}, r_{l+1}]_{\gamma_1}$  y  $[r'_0, r'_3]_{\gamma_2}$ .

Como se muestra en la Figura 49 y la Figura 50.

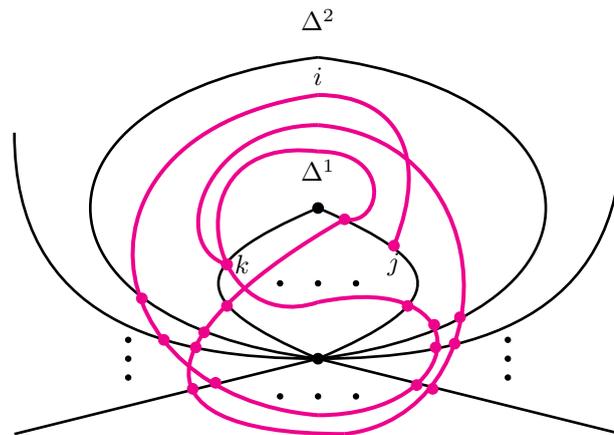


Figura 49:  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado.

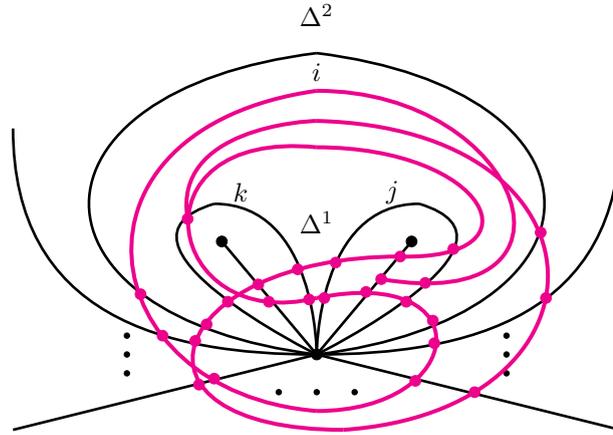


Figura 50:  $j$  es el lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$ .

Ahora si el arco  $j$  no es el lado no doblado de un triángulo doblado entonces dibujamos una curva denotada por  $\gamma_4$  de  $r_2$  a  $r'_{l'-1}$  de manera que el interior relativo de  $\gamma_4$  esta en el interior de  $\Delta_2$  y es disjunto de  $\gamma_3$ . Por otro lado si el arco  $j$  es el lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  entonces dibujamos una curva denotada por  $\gamma_4$  de  $r_3$  a  $r'_{l'-2}$  de manera que el interior relativo de  $\gamma_4$  esta en el interior de  $\Delta_2$  y es disjunto de  $\gamma_3$ .

Definimos la curva  $i_0$  como la union de las curvas  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$  y se define la curva  $i'$  como la curva  $i_0$ , es decir, las etiquetas de  $i'$  con "plain".

$b_2)$   $\delta_\tau(p) = 0$ .

$b_{21})$   $i$  tiene etiqueta "plain" en ambos extremos.

Definimos  $i_0 := i$  y asignamos la etiqueta "plain" en ambos extremos como se muestra en la Figura 51.

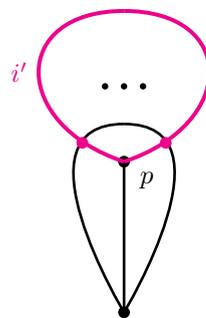


Figura 51: Caso  $b_{21})$  de la Definición 3.6.

$b_{22})$   $i$  tiene etiqueta "∖" en ambos extremos. Denotamos por  $j$  al único arco de  $\tau^\circ$  que es incidente en  $p$  y denotamos por  $m$  al único lazo que encierra a la pinchadura  $p$ . En este caso insertamos un punto  $p'$  en  $j$  tal que  $[p, p']_j \cap \tau^\circ = \emptyset$ .

Por otro lado si recorremos  $i$  a partir de  $p$  en el sentido de las manecilla del reloj denotamos por  $x$  y  $y$  al primer y último punto de intersección de  $i$  con  $m$  respectivamente. Definimos  $i_0 := \gamma' \cup [x, y]_i \cup \gamma''$ , donde  $\gamma'$  es el segmento de  $i$  que conecta a  $p$  con  $x$  tal que  $y \notin \gamma'$  y  $\gamma''$  es el segmento que une a  $y$  con  $p'$  que cumple  $x \notin \gamma''$ . Notemos que  $[y, p']$  es homotópico a  $[y, p]_i$  con la homotopía que preserva los extremos en  $j$  y  $m$ . Asignamos la etiqueta "⋈" en ambos extremos como se muestra en la Figura 52.

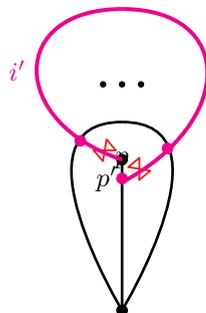


Figura 52: Caso  $b_{22}$ ) de la Definición 3.6.

La siguiente definición es acerca de la Definición 3.6 y es útil para extender la construcción de la curva  $i'$  en cualquier triangulación etiquetada.

**Observación 3.7.** Sean  $\tau$  una triangulación etiquetada de una superficie con frontera y puntos marcados  $(\Sigma, M)$ . Notemos que a partir de un arco etiquetado  $i$  que no pertenece a  $\tau$  cuyos extremos  $p$  y  $q$  tienen signatura no negativa, se puede construir la curva  $i'$  siguiendo la construcción de la Definición 3.6.

Ahora sea  $\tau$  una triangulación etiquetada de una superficie con frontera y puntos marcados  $(\Sigma, M)$ . Se sigue de la observación anterior que para construir la curva  $i'$  en  $\tau$  a partir de un arco etiquetado  $i$  que no pertenece a  $\tau$ , basta considerar los casos cuando un extremo de  $i$  (ó ambos) tiene(n) signatura negativa. A continuación consideramos los tres sub-casos mencionados, en cada sub-caso se considera si la etiqueta del arco  $i$  en los extremos es "plain" o "⋈". Denotamos por  $p$  y  $q$  a los extremos del arco etiquetado  $i$  y denotamos por  $\tau'_p$  a la triangulación etiquetada que difiere de  $\tau$  sólo en la signatura de la pinchadura  $p$ . Es decir, para toda pinchadura distinta de  $p$  la signatura en  $\tau$  y  $\tau'_p$  es igual, por otro lado la signatura de  $p$  en  $\tau$  es negativa y la signatura de  $p$  en  $\tau'_p$  es positiva.

- a) La signatura de  $p$  es negativa y la signatura de  $q$  es positiva.
  - $a_1$ ) La etiqueta del arco  $i$  en  $p$  es "plain".

Denotamos por  $i_1$  al arco etiquetado que se obtiene al cambiar la etiqueta "plain" en el extremo  $p$  del arco  $i$  por la etiqueta "⌘". Para el arco etiquetado  $i_1$  se puede construir la curva  $i'_1$  en la triangulación  $\tau'_p$ . En este caso definimos la curva etiquetada  $i'$  como  $i'_1$ .

a<sub>2</sub>) La etiqueta del arco  $i$  en  $p$  es "⌘".

Denotamos por  $i_1$  al arco etiquetado que se obtiene al cambiar la etiqueta "⌘" en el extremo  $p$  del arco  $i$  por la etiqueta "plain". Para el arco etiquetado  $i_1$  se puede construir la curva  $i'_1$  en la triangulación  $\tau'_p$ . En este caso definimos la curva etiquetada  $i'$  como  $i'_1$ .

b) La signatura de  $q$  es negativa y la signatura de  $p$  es positiva.

b<sub>1</sub>) La etiqueta del arco  $i$  en  $q$  es "plain".

Denotamos por  $i_1$  al arco etiquetado que se obtiene al cambiar la etiqueta "plain" en el extremo  $q$  del arco  $i$  por la etiqueta "⌘". Para el arco etiquetado  $i_1$  se puede construir la curva  $i'_1$  en la triangulación  $\tau'_q$ . En este caso definimos la curva etiquetada  $i'$  como  $i'_1$ .

b<sub>2</sub>) La etiqueta del arco  $i$  en  $q$  es "⌘".

Denotamos por  $i_1$  al arco etiquetado que se obtiene al cambiar la etiqueta "⌘" en el extremo  $q$  del arco  $i$  por la etiqueta "plain". Para el arco etiquetado  $i_1$  se puede construir la curva  $i'_1$  en la triangulación  $\tau'_q$ . En este caso definimos la curva etiquetada  $i'$  como  $i'_1$ .

c) La signatura de  $p$  y  $q$  es negativa.

Denotamos por  $\tau'_{pq}$  a la triangulación resulta al cambiar la signatura en las pinchaduras  $p$  y  $q$  de la triangulación etiquetada  $\tau$  de negativa a positiva.

c<sub>1</sub>) La etiqueta del arco  $i$  en  $p$  y  $q$  es "plain".

Denotamos por  $i_1$  al arco etiquetado que se obtiene al cambiar la etiqueta "plain" en los extremos  $p$  y  $q$  del arco  $i$  por la etiqueta "⌘". Para el arco etiquetado  $i_1$  se puede construir la curva  $i'_1$  en la triangulación  $\tau'_{pq}$ . En este caso definimos la curva etiquetada  $i'$  como  $i'_1$ .

c<sub>2</sub>) La etiqueta del arco  $i$  en  $p$  es "plain" y la etiqueta de  $i$  en  $q$  es "⌘".

Denotamos por  $i_1$  al arco etiquetado que se obtiene al cambiar en el arco  $i$  la etiqueta "plain" en el extremo  $p$  y la etiqueta "⌘" en el extremo  $q$  por la etiqueta  $\bowtie$  y "plain" respectivamente. Para el arco etiquetado  $i_1$  se puede construir la curva  $i'_1$  en la triangulación  $\tau'_{pq}$ . En este caso definimos la curva etiquetada  $i'$  como  $i'_1$ .

c<sub>3</sub>) La etiqueta del arco  $i$  en  $p$  es "⌘" y la etiqueta de  $i$  en  $q$  es "plain".

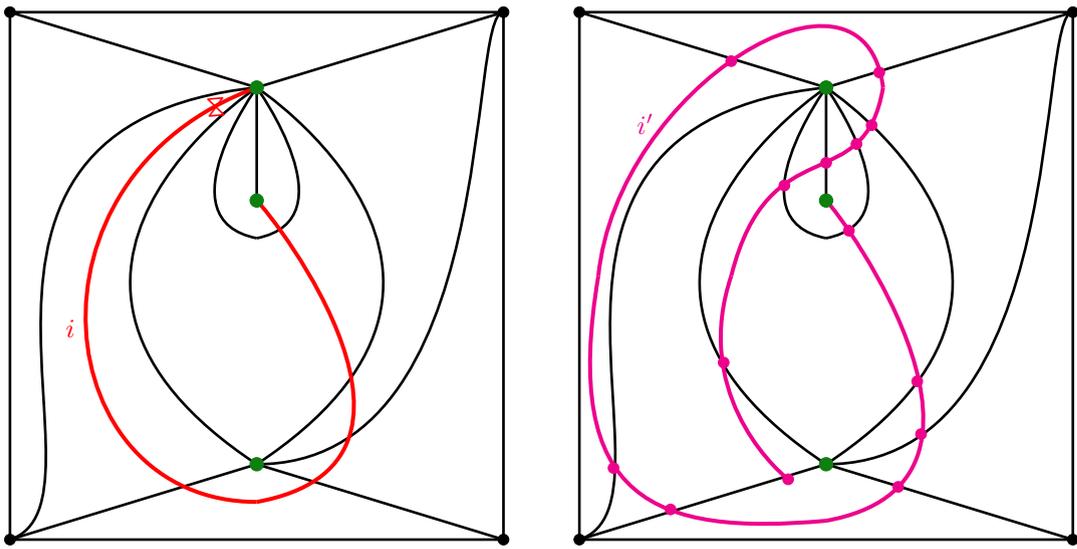
Denotamos por  $i_1$  al arco etiquetado que se obtiene al cambiar en el arco  $i$  la etiqueta "⌘" en el extremo  $p$  y la etiqueta "plain" en el extremo  $q$  por la etiqueta "plain" y "⌘" respectivamente. Para el arco etiquetado  $i_1$  se puede construir la curva  $i'_1$  en la triangulación  $\tau'_{pq}$ . En este caso definimos la curva etiquetada  $i'$  como  $i'_1$ .

$c_4$ ) La etiqueta del arco  $i$  en  $p$  y  $q$  es "⌘".

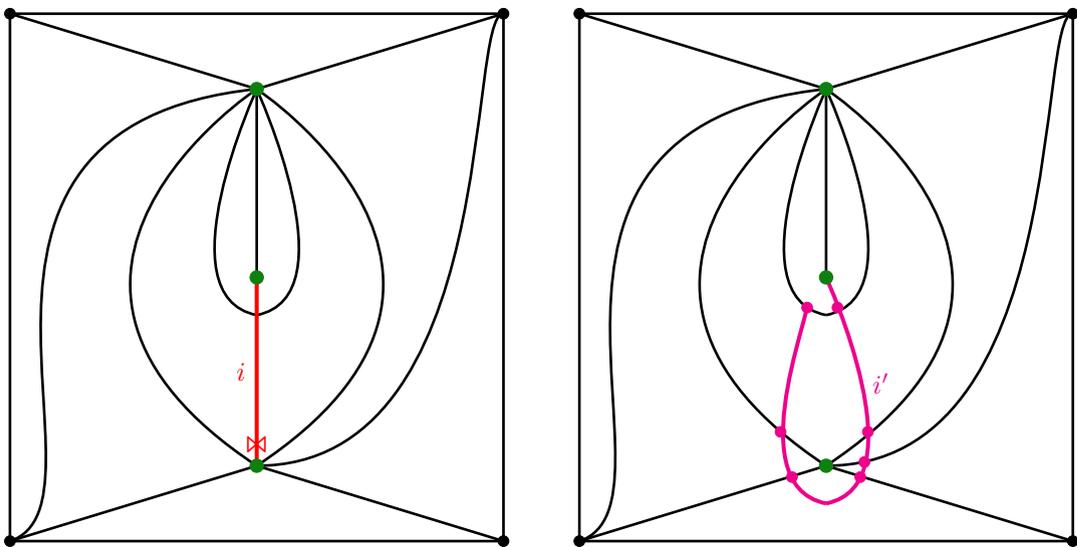
Denotamos por  $i_1$  al arco etiquetado que se obtiene al cambiar la etiqueta "⌘" en los extremos  $p$  y  $q$  del arco  $i$  por la etiqueta "plain". Para el arco etiquetado  $i_1$  se puede construir la curva  $i'_1$  en la triangulación  $\tau'_{pq}$ . En este caso definimos la curva etiquetada  $i'$  como  $i'_1$ .

**EJEMPLOS DE LA CURVA DERIVADA DE UN ARCO, DEFINICIÓN 3.6.**

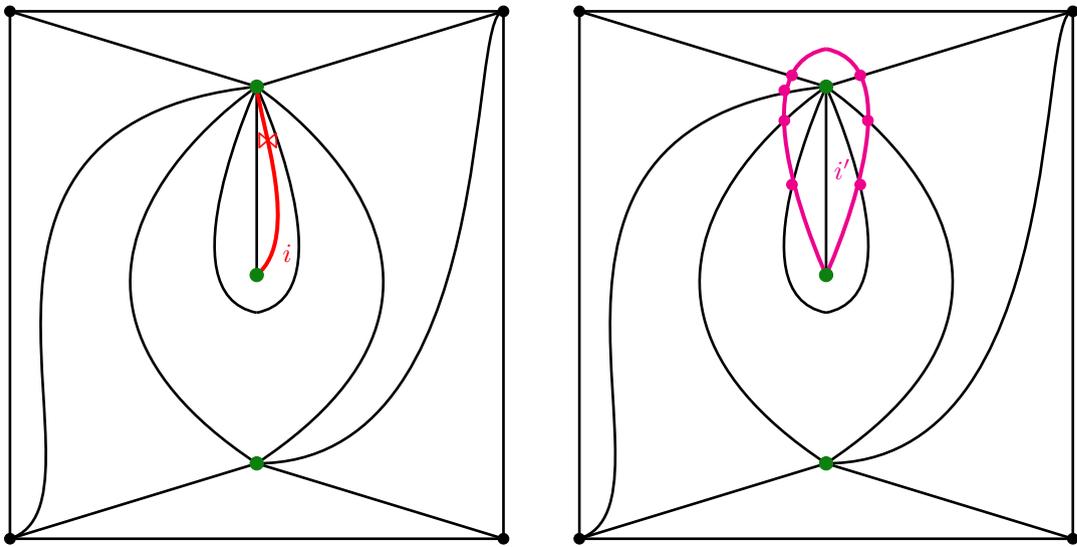
1) Ejemplo 1.



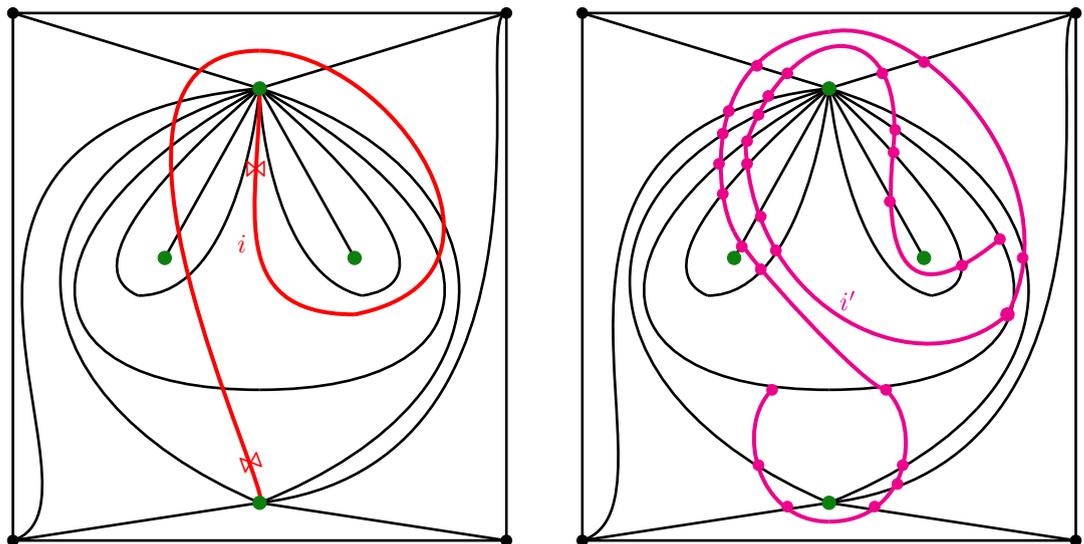
2) Ejemplo 2.



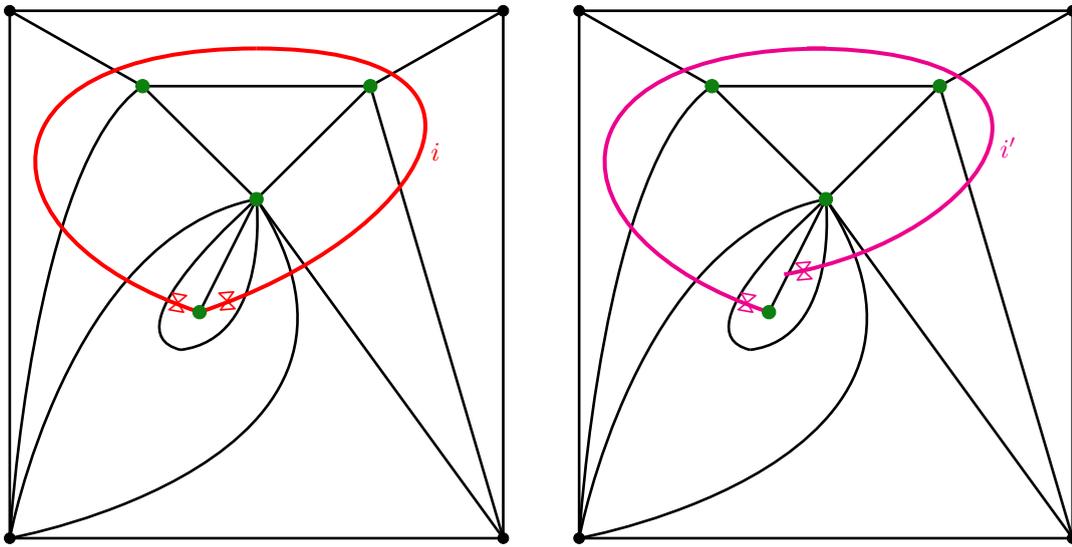
3) Ejemplo 3.



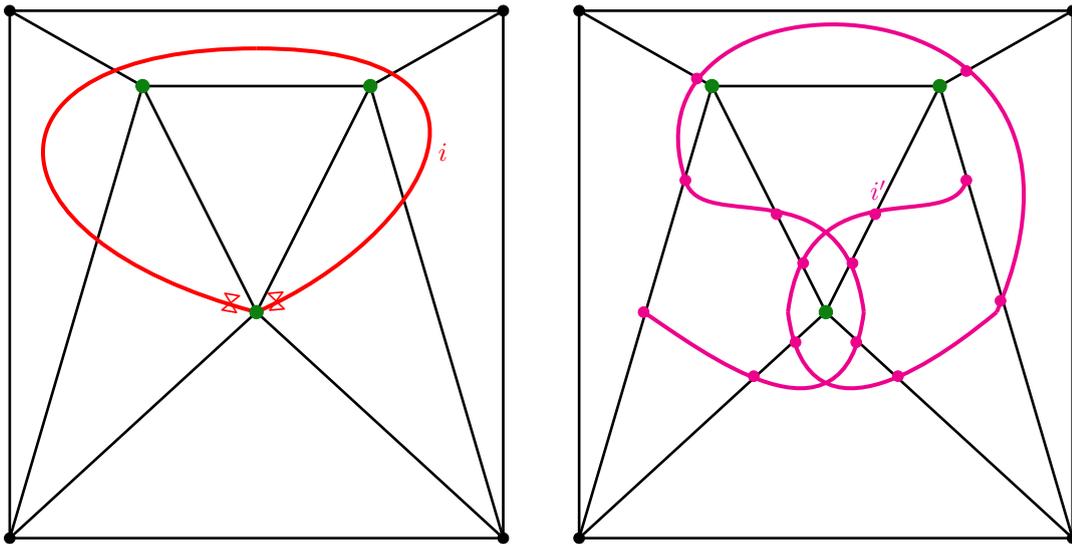
4) Ejemplo 4.



5) Ejemplo 5.



6) Ejemplo 6.



Con la ayuda de la Definición 3.6 vamos a definir los puntos de cruce de la curva etiquetada  $i'$  con un arco  $j$  de  $\tau^\circ$ .

**Definición 3.8.** (puntos de cruce) Sean  $\tau$  una triangulación etiquetada de una superficie con frontera y puntos marcados  $(\Sigma, M)$ ,  $j$  un arco de  $\tau^\circ$  e  $i$  un arco etiquetado que no pertenece a  $\tau$ . Denotamos por  $p$  y  $q$  a los extremos de  $j$ , decimos que  $x \in i' \cap j$  es un punto de cruce de  $i'$  con  $j$  si se cumplen la(s) condición(es) de uno de los tres casos siguientes.

- a)  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado.

$x \neq p$  y  $x \neq q$ .

b)  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\delta_\tau(p) = 0 \neq \delta_\tau(q)$ .

Si  $i'$  tiene un extremo en  $p$  con etiqueta " $\bowtie$ " entonces  $x \neq q$ . En caso contrario  $x \neq p$  y  $x \neq q$ .

c)  $j$  es el lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$ . En este caso  $p = q$ , denotamos por  $p'$  a la única pinchadura que encierra  $j$  y denotamos por  $j'$  al único arco de  $\tau^\circ$  que es incidente a  $p'$ .

Si  $i'$  tiene extremo  $t$  en  $j'$  con etiqueta " $\bowtie$ " entonces la intersección del interior relativo de  $[x, t]_{i'}$  con  $\tau^\circ$  es no vacía. En caso contrario  $x$  pertenece al interior relativo de  $j$ .

**Observación 3.9.** La siguiente observación es acerca de la Definición 3.8.

- 1) Sean  $x$  y  $x'$  dos puntos de cruce como en el inciso c). Si el interior relativo del segmento  $[x, x']_{i'}$  corta sólo a  $j'$  en un punto entonces identificamos a  $x$  con  $x'$ . Es decir podemos denotar por  $x$  a ambos puntos de cruce y lo pensaremos como el mismo.
- 2) Si el extremo de la curva  $i'$  es una pinchadura  $p$  con signatura cero y la etiqueta de  $i'$  en  $p$  es " $\bowtie$ " entonces la pinchadura  $p$  será considerado como punto en el interior relativo del único arco adyacente a  $p$ .

Con la ayuda de la Definición 3.8 y la Observación 3.9 definiremos a continuación la representación de cuerda  $m(\tau, i)$ .

Sean  $j$  un arco de  $\tau^\circ$  y  $q_{j_1}, \dots, q_{j_{\mathbb{A}(i', j)}}$  una enumeración de los puntos de cruce distintos de  $i'$  con  $j$ . Definimos el espacio vectorial asociado a  $j$  en  $m(\tau, i)$  como sigue:

$$(m(\tau, i))_j := K^{\mathbb{A}(i', j)} = \bigoplus_{r=1}^{\mathbb{A}(i', j)} Kq_{j,r},$$

donde  $\mathbb{A}(i', j)$  es el número de puntos de cruce distintos de  $i'$  con  $j$  y  $K$  un campo.

Ahora definiremos la transformación lineal asociada a una flecha de  $\widehat{Q}(\tau^\circ)$ . Dada una flecha  $\alpha : j \rightarrow k$  en  $\widehat{Q}(\tau^\circ)$  existe una única pinchadura  $p$  a la que  $\alpha$  es contráctil con la homotopía que preserva los extremos de  $\alpha$  en  $j$  y  $k$  respectivamente. Sean  $q_{j_1}, \dots, q_{j_{\mathbb{A}(i', j)}}$  y  $q_{k_1}, \dots, q_{k_{\mathbb{A}(i', k)}}$  una enumeración de los puntos de cruce distintos de  $i'$  con  $j$  y  $k$  respectivamente. Denotaremos por  $K_{j,t}$  a la copia del campo  $K$  asociada al punto de cruce  $q_{j,t}$ . Para  $1 \leq s \leq \mathbb{A}(i', j)$  y  $1 \leq r \leq \mathbb{A}(i', k)$ , definimos  $[(m(\tau, i'))_\alpha]_{r,s} : K_{j,s} \rightarrow K_{k,r}$  de la siguiente manera. Vamos a considerar todos los casos posibles para los arcos  $j$  y  $k$ . El segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  es disjunto de  $\tau^\circ$  excepto cuando  $j$  ó  $k$  (ó ambos) es lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  en este caso el segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  interseca al lado no doblado de  $\Delta'$ . Además distinguimos los subcasos cuando el segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  es contráctil a  $p$  ó lo no es.

1)  $j$  y  $k$  no son lados de ningún triángulo doblados.

a) El segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  es contráctil a  $p$ .

$$[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 1.$$

b) El segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  no es contráctil a  $p$ .

$$[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 0.$$

2)  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado y  $k$  es el lado doblado de un triángulo doblado.

a) El segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  es contráctil a  $p$ .

$$[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 1.$$

b) El segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  no es contráctil a  $p$ .

$$[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 0.$$

3)  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado y  $k$  es el lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$ , denotamos por  $k'$  al lado doblado de  $\Delta'$ . Si existen dos puntos de cruce denotados por  $q_{k,r}$  entonces vamos a considerar la copia de  $q_{k,r}$  tal que  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  no interseca al lado doblado de  $\Delta'$ .

En este caso el segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  siempre es contráctil a  $p$ .

Si existe un punto de cruce  $x$  de  $i'$  con  $k'$  tal que el interior relativo del segmento  $[q_{k,r}, x]_{i'}$  es disjunto de  $\tau^{\circ}$  entonces  $[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = -1$  cuando el segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'} \cup [q_{k,r}, x]_{i'}$  sea contráctil a  $p$  y  $[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 1$  cuando el segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'} \cup [q_{k,r}, x]_{i'}$  no sea contráctil a  $p$ .

4)  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado y  $k$  no es lado de ningún triángulo doblado.

a) El segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  es contráctil a  $p$ .

$$[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 1.$$

b) El segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  no es contráctil a  $p$ .

$$[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 1.$$

5)  $j$  es el lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  y  $k$  no es lado de ningún triángulo doblado, denotamos por  $j'$  al lado doblado de  $\Delta'$ . Si existen dos puntos de cruce denotados por  $q_{j,s}$  entonces elegimos la copia de  $q_{j,s}$  tal que el segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  no interseca a  $j'$ .

En este caso el segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  siempre es contráctil a  $p$ .

Si existe un punto de cruce  $x$  de  $i'$  con  $j'$  tal que el interior relativo del segmento  $[x, q_{j,s}]_{i'}$  es disjunto de  $\tau^{\circ}$  entonces  $[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 1$  cuando el segmento  $[x, q_{j,s}]_{i'} \cup [q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  sea contráctil a  $p$  y  $[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 0$  cuando el segmento  $[x, q_{j,s}]_{i'} \cup [q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  no sea contráctil a  $p$ .

6)  $j$  y  $k$  son lados doblados de triángulos doblados  $\Delta'$  y  $\Delta''$  distintos, denotamos por  $p'$  y  $p''$  a los extremos de  $j$  y  $k$  con signatura cero respectivamente.

a) El segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  es contráctil a  $p$ .

$$[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 1.$$

b) El segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  no es contráctil a  $p$ .

$[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 1$  si existe un punto de cruce  $q_{k,r'}$  de  $i'$  con  $k$  tal que el segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r'}]_{i'}$  no contiene  $q_{k,r}$  y es contráctil a  $p$ , la curva  $\gamma := [q_{k,r'}, q_{j,s}]_i \cup [q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  rodea a  $p'$  y  $\gamma \cup [q_{k,r}, q_{k,r'}]_k$  divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una de dichas regiones homeomorfa a un disco con la pinchadura  $p'$ . En caso contrario  $[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 0$ .

7)  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  y  $k$  es el lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta''$ . Denotamos por  $j'$  al lado no doblado de  $\Delta'$ ,  $k'$  al lado doblado de  $\Delta''$ ,  $p'$  el extremo de  $j$  con signatura cero y  $p''$  al extremo de  $k'$  con signatura cero.

Si existen dos puntos de cruce denotados por  $q_{k,r}$  entonces consideramos la copia de  $q_{k,r}$  con la propiedad que el segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  no interseca a  $k'$ .

a) El segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  es contráctil a  $p$ .

Si existe un punto de cruce  $q_{j,s'}$  de  $i'$  con  $j$  tal que  $\gamma := [q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'} \cup [q_{k,r}, q_{j,s'}]_{i'}$  rodea a  $p''$  y  $\gamma \cup [q_{j,s'}, q_{j,s}]_j$  divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una de ellas homeomorfa a un disco con la pinchadura  $p''$  entonces  $[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 1$ . En caso contrario  $[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = -1$ .

b) El segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  no es contráctil a  $p$ .

$[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = -1$  Si se cumple una de las siguientes dos condiciones descritas.

- $p''$  es una extremo de  $i'$ , la etiqueta de  $i'$  en el extremo  $p''$  es "plain" y existe un punto de cruce  $q_{k',r'}$  de  $i'$  con  $k'$  tal que el interior relativo del segmento  $[p'', q_{k,r}]_{i'}$  no interseca a ningún arco de  $\tau^{\circ}$ , la union  $[p'', q_{k,r}]_{i'} \cup [q_{k,r}, q_{j,s}]_{i'} \cup [q_{j,s}, q_{k',r'}]_{i'} \cup [q_{k',r'}, p'']_{k'}$  divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una region homeomorfa a un monogono con la pinchadura  $p'$  y cuyo punto marcado en la frontera es  $p''$ .
- Existen puntos de cruce  $q_{k',r'}$  y  $q_{k',r''}$  de  $i'$  con  $k'$  tal que el interior relativo del segmento  $[q_{k',r'}, q_{k,r}]_{i'}$  es disjunto de  $\tau^{\circ}$ , la union  $\gamma := [q_{k',r'}, q_{k,r}]_{i'} \cup [q_{k,r}, q_{j,s}]_{i'} \cup [q_{j,s}, q_{k',r''}]_{i'}$  rodea a  $p'$  y  $\gamma \cup [q_{k',r''}, q_{k',r'}]_{k'}$  divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una de ellas homeomorfa a un disco con la pinchadura  $p'$ .

$[(m(\tau, i'))_{\alpha}]_{r,s} = 1$  Si se cumple una de las siguientes tres condiciones descritas.

- Existen puntos de cruce  $q_{k',r'}$  y  $q_{k',r''}$  de  $i'$  con  $k'$  tal que el interior relativo del segmento  $[q_{k',r'}, q_{k,r}]_{i'}$  es disjunto de  $\tau^{\circ}$ , la union  $\gamma := [q_{k',r''}, q_{j,s}]_{i'} \cup [q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'} \cup [q_{k,r}, q_{k',r'}]_{i'}$  rodea a  $p'$  y  $\gamma \cup [q_{k',r'}, q_{k',r''}]_{k'}$  divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una de ellas homeomorfa a un disco con las pinchadura  $p'$  y  $p''$ .

- Existe un punto de cruce  $q_{j,s'}$  de  $i'$  con  $j$  tal que  $\gamma := [q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'} \cup [q_{k,r}, q_{j,s'}]_{i'}$  rodea a  $p''$  y  $\gamma \cup [q_{j,s'}, q_{j,s}]_{i'}$  divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una de dichas regiones homeomorfa a un disco con las pinchaduras  $p'$  y  $p''$ .

$[(m(\tau, i'))_\alpha]_{r,s} = 0$  en cualquier otro caso.

8)  $j$  es el lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  y  $k$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta''$ . Denotamos por  $j'$  al lado doblado de  $\Delta'$ .

Si existen dos puntos de cruce denotados por  $q_{j,s}$  entonces consideramos la copia con la propiedad que el segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  no interseca a  $j'$ .

a) El segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  es contráctil a  $p$ .

Sea  $x$  el punto de cruce de  $i'$  con  $j'$  con la propiedad que  $[x, q_{j,s}]_{i'}$  es disjunto de  $\tau^\circ$ .

$[(m(\tau, i'))_\alpha]_{r,s} = 1$  si  $[x, q_{j,s}]_{i'} \cup [q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  es contráctil a  $p$  y  $[(m(\tau, i'))_\alpha]_{r,s} = 0$  en caso contrario.

b) El segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  no es contráctil a  $p$ .

$[(m(\tau, i'))_\alpha]_{r,s} = 0$ .

9)  $j$  y  $k$  son lados no doblados de triángulos doblados  $\Delta'$  y  $\Delta''$  respectivamente, denotamos por  $j'$  y  $k'$  a los lados doblados de  $\Delta'$  y  $\Delta''$  respectivamente, además  $p'$  y  $p''$  denotaran los extremos de  $j'$  y  $k'$  con signatura cero respectivamente.

Si en  $j$  ó  $k$  (ó ambos) existen dos puntos de cruce denotados por  $q_{j,s}$  ó  $q_{k,r}$  (ó ambos) entonces consideramos la(s) copia(s) de  $q_{j,s}$  ó  $q_{k,r}$  (ó ambos) tal que el segmentos  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  no interseca a  $j'$  ni a  $k'$ .

En este caso el segmento  $[q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'}$  siempre es contráctil a  $p$ .

$[(m(\tau, i'))_\alpha]_{r,s} = 1$  si se cumple una de las siguientes dos condiciones descritas.

- Existen puntos de cruce  $q_{j',s'}$  y  $q_{j',s''}$  de  $i'$  con  $j'$  tal que el interior relativo del segmento  $[q_{j',s'}, q_{j',s}]_{i'}$  es disjunto de  $\tau^\circ$ ,  $\gamma := [q_{j',s'}, q_{j',s}]_{i'} \cup [q_{j',s}, q_{k,r}]_{i'} \cup [q_{k,r}, q_{j',s''}]_{i'}$  rodea a  $p''$  y  $\gamma \cup [q_{j',s''}, q_{j',s'}]_{j'}$  divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una de dichas regiones homeomorfa a un disco con la pinchadura  $p''$ .
- $p'$  es un extremo de  $i'$ ,  $i'$  tiene etiqueta "plain" en el extremo  $p'$  y existe un punto de cruce  $q_{j',s'}$  de  $i'$  con  $j'$  tal que el interior relativo del segmento  $[p', q_{j',s}]_{i'}$  es disjunto de  $\tau^\circ$ , la union  $[p', q_{j',s}]_{i'} \cup [q_{j',s}, q_{k,r}]_{i'} \cup [q_{k,r}, q_{j',s'}]_{i'} \cup [q_{j',s'}, p']_{j'}$  divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una de dichas regiones homeomorfa a un monogono con la pinchadura  $p''$  y el punto marcado en la frontera  $p'$ .

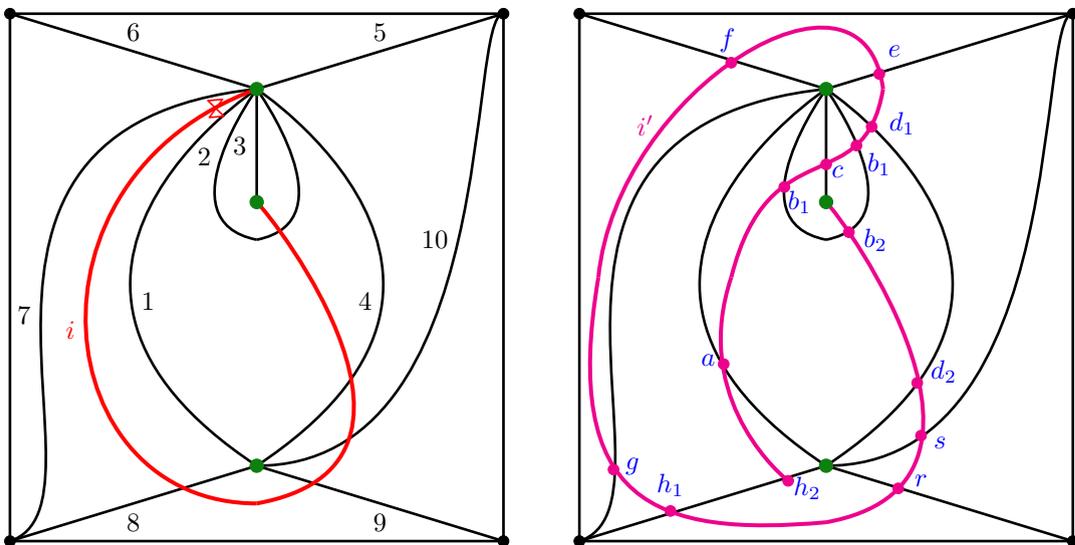
$[(m(\tau, i'))_\alpha]_{r,s} = -1$  si se cumple una de las siguientes tres condiciones descritas.

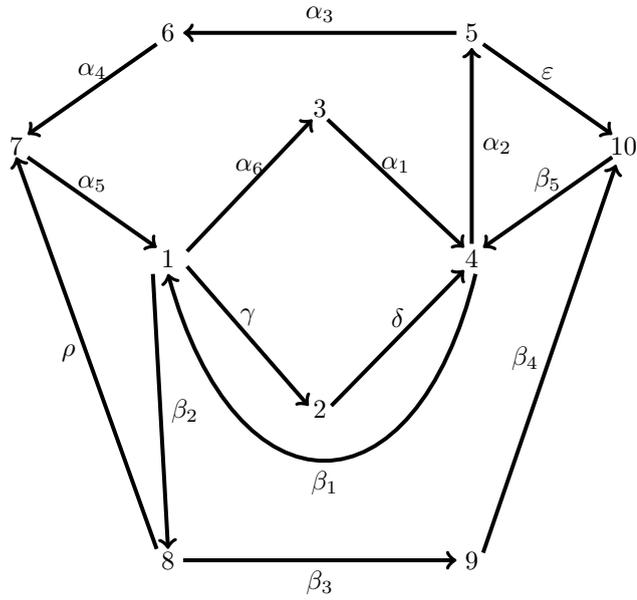
- Existen dos puntos de cruce  $q_{k',r'}, q_{k',r''}$  en  $k'$  y un punto de cruce  $q_{j',s'}$  en  $j'$  tal que el interior relativo de los segmentos  $[q_{j',s'}, q_{j,s}]_{i'}$ ,  $[q_{k,r}, q_{k',r'}]_{i'}$  son disjuntos de  $\tau^\circ$ , la curva  $\gamma := [q_{k',r'}, q_{k,r}]_{i'} \cup [q_{k,r}, q_{j,s}]_{i'} \cup [q_{j,s}, q_{k',r''}]_{i'}$  rodea a  $p'$  y  $\gamma \cup [q_{k',r''}, q_{k',r'}]_{k'}$  divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una region homeomorfa a un disco con la pinchadura  $p'$ .
- Existen dos puntos de cruce  $q_{j',s'}, q_{j',s''}$  en  $j'$  tal que el interior relativo del segment  $[q_{j',s'}, q_{j,s}]_{i'}$  es disjunto de  $\tau^\circ$ , la curva  $\gamma := [q_{j',s''}, q_{k,r}]_{i'} \cup [q_{k,r}, q_{j,s}]_{i'} \cup [q_{j,s}, q_{j',s'}]_{i'}$  rodea a  $p''$  y  $\gamma \cup [q_{j',s'}, q_{j',s''}]_{j'}$  divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una region homeomorfa a un disco con la pinchadura  $p''$ .
- $p'$  es un extremo de  $i'$ ,  $i'$  tiene etiqueta "plain" en el extremo  $p'$ , existe un punto de cruce  $q_{j',s'}$  de  $i'$  con  $j'$  tal que el interior relativo del segmento  $[q_{j',s'}, q_{j,s}]_{i'}$  es disjunto de  $\tau^\circ$  y la union  $[p', q_{k,r}]_{i'} \cup [q_{k,r}, q_{j,s}]_{i'} \cup [q_{j,s}, q_{j',s'}]_{i'} \cup [q_{j',s'}, p']_{j'}$  divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una de dichas regiones homeomorfa a un monogono con la pinchadura  $p''$  y el punto marcado en la frontera  $p'$ .
- $p''$  es un extremo de  $i'$ ,  $i'$  tiene etiqueta "plain" en el extremo  $p''$ , existe un punto de cruce  $q_{k',r'}$  de  $i'$  con  $k'$  tal que el interior relativo del segmento  $[q_{k',r'}, q_{k,r}]_{i'}$  es disjunto de  $\tau^\circ$  y la union  $[p'', q_{j,s}]_{i'} \cup [q_{j,s}, q_{k,r}]_{i'} \cup [q_{k,r}, q_{k',r'}]_{i'} \cup [q_{k',r'}, p'']_{k'}$  divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una de dichas regiones homeomorfa a un monogono con la pinchadura  $p'$  y el punto marcado en la frontera  $p''$ .

$[(m(\tau, i'))_\alpha]_{r,s} = 0$  en cualquier otro caso.

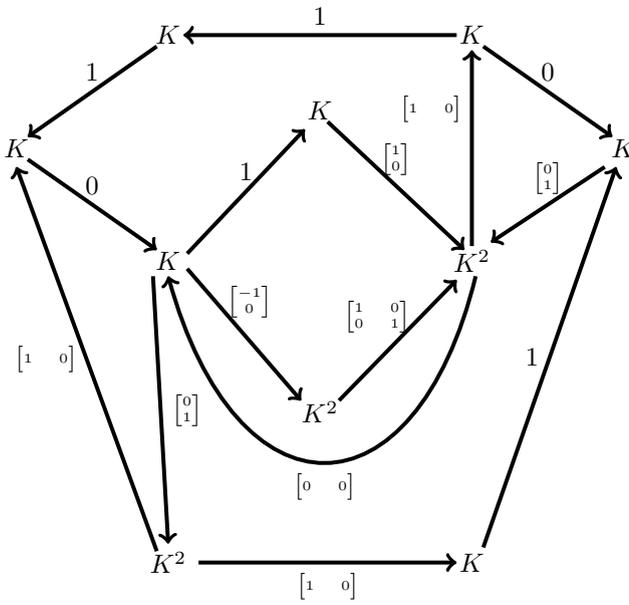
### EJEMPLOS DE LA REPRESENTACIÓN DE CUERDA $m(\tau, i)$ .

1) Ejemplo 1.



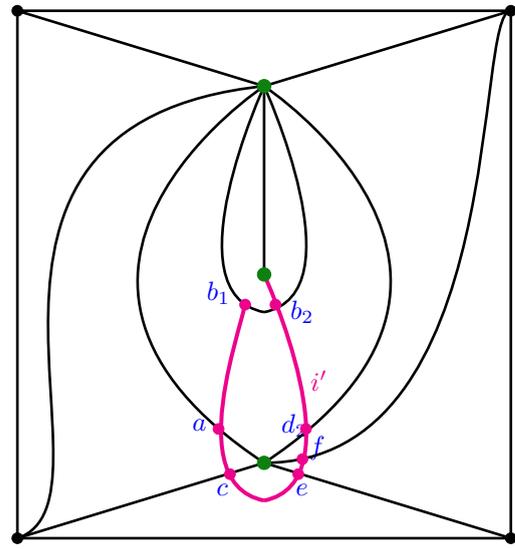
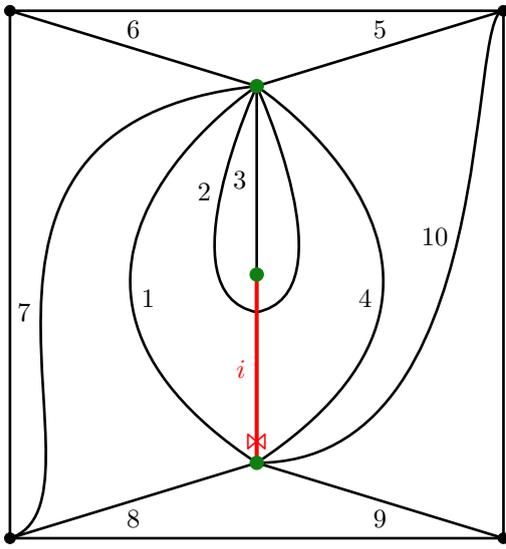


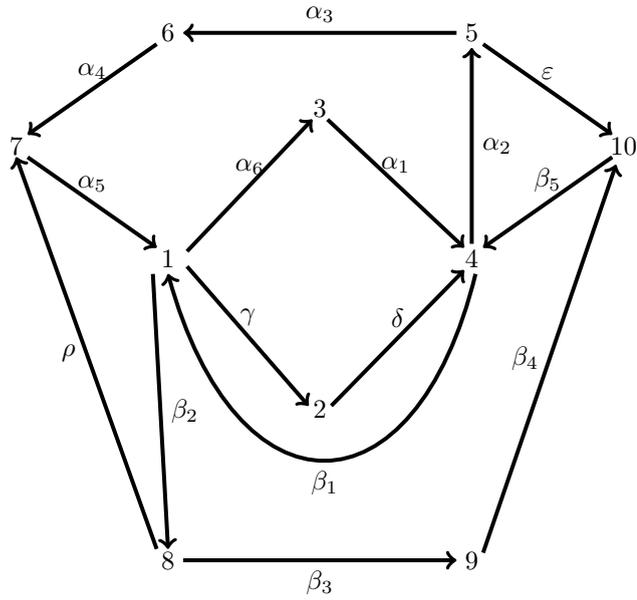
(a) Carcaj



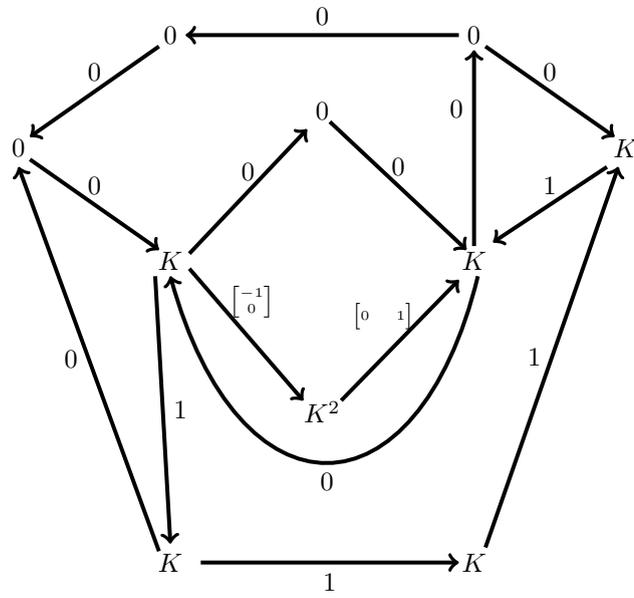
(b) Representación de cuerda

2) Ejemplo 2.



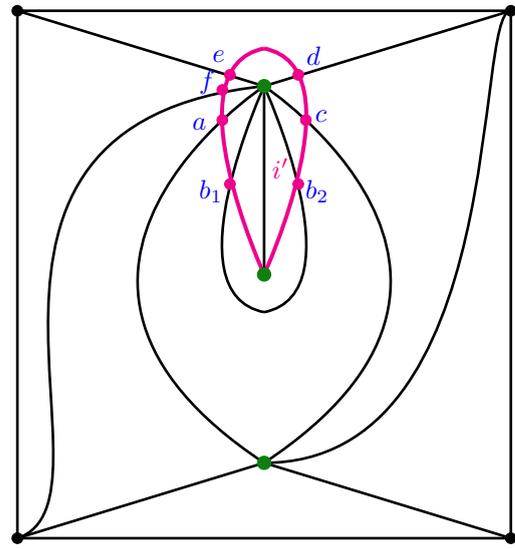
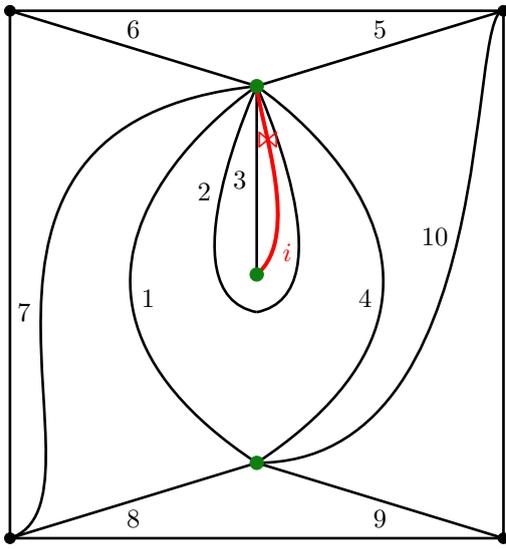


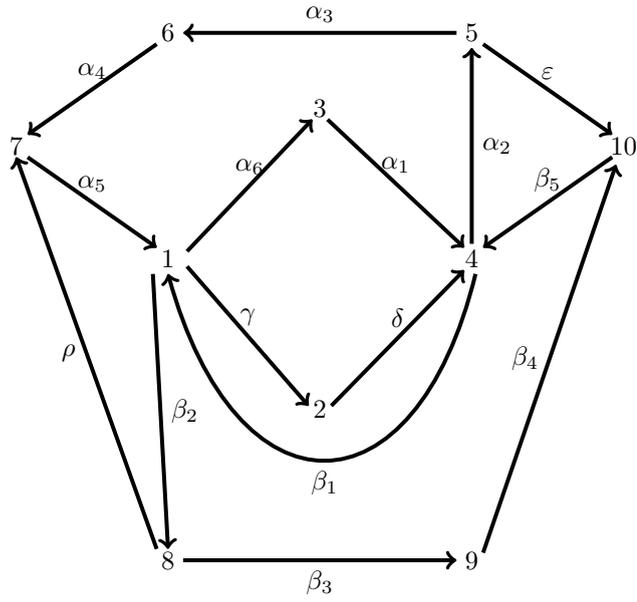
(c) Carcaj



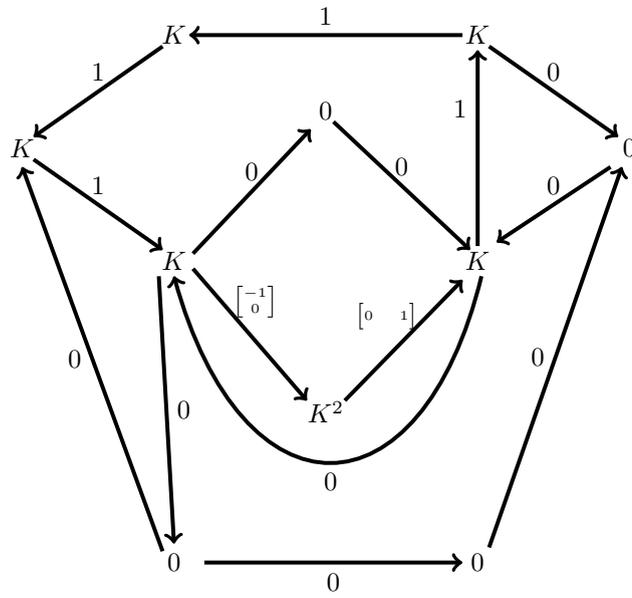
(d) Representación de cuerda

3) Ejemplo 3.



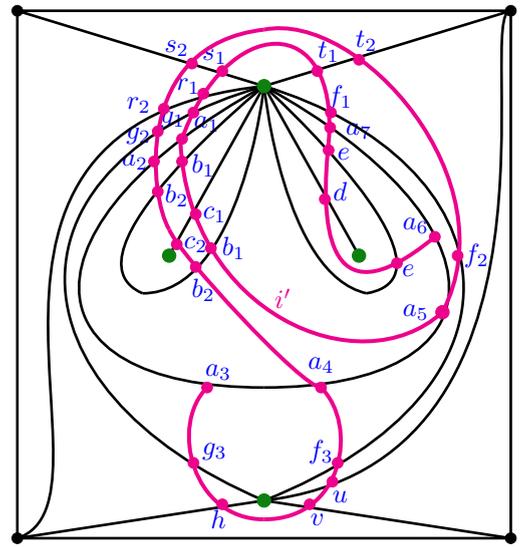
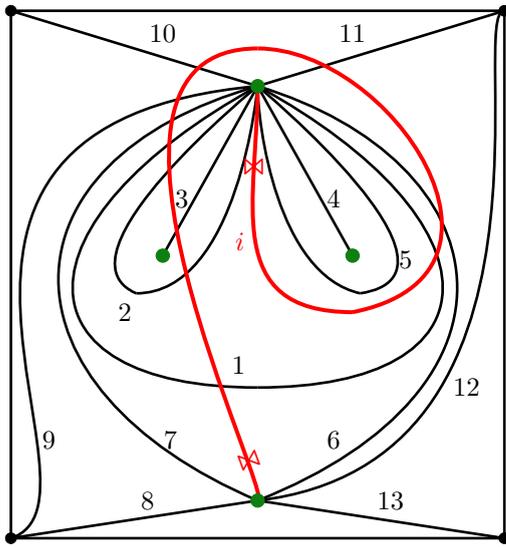


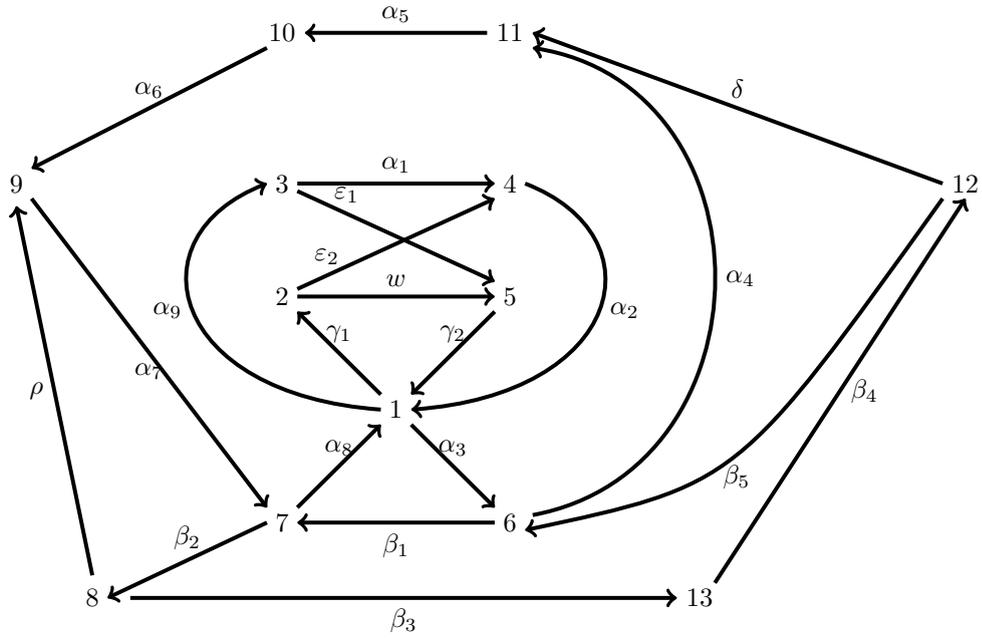
(e) Carcaj



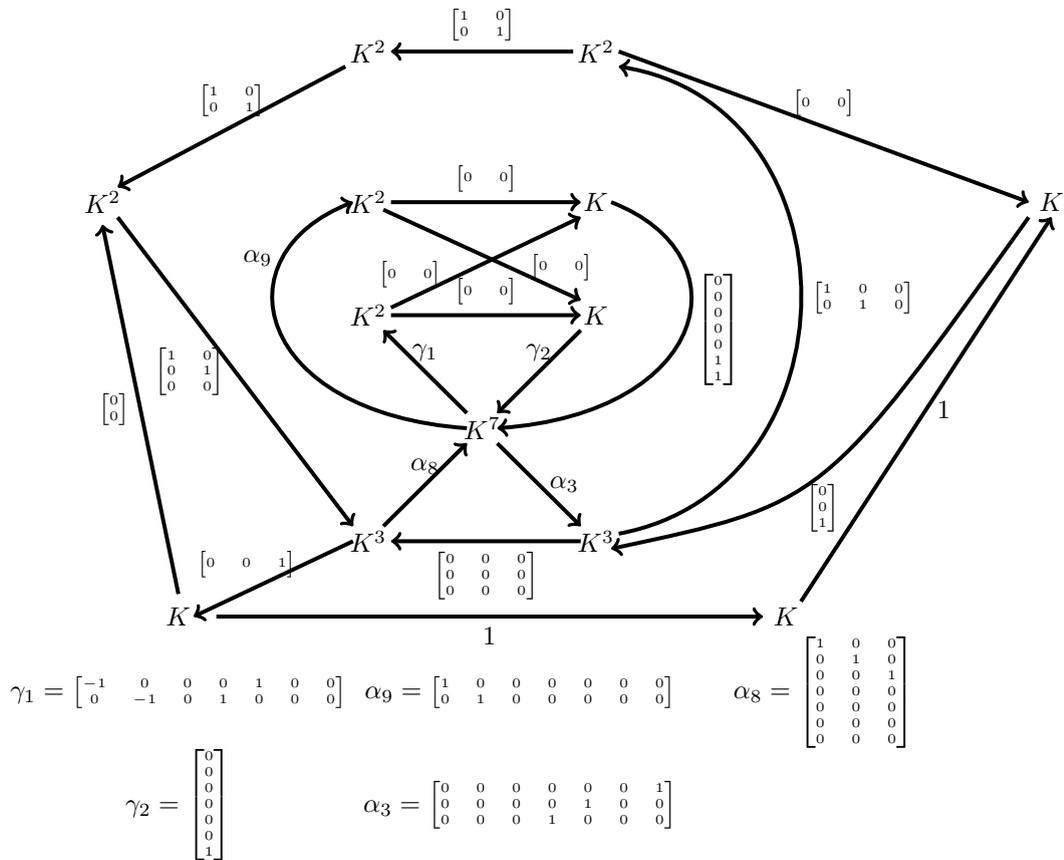
(f) Representación de cuerda

4) Ejemplo 4.





(g) Carcaj

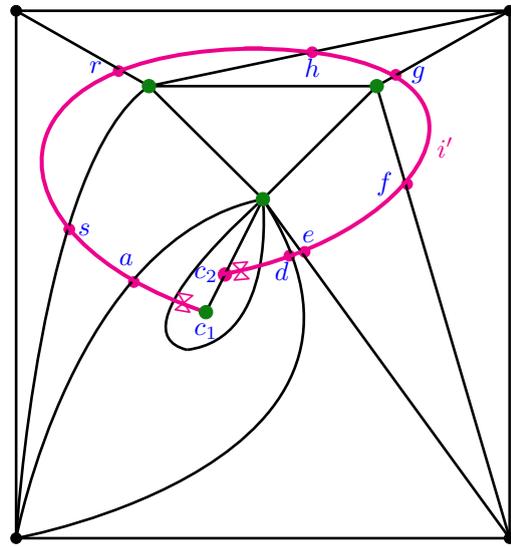
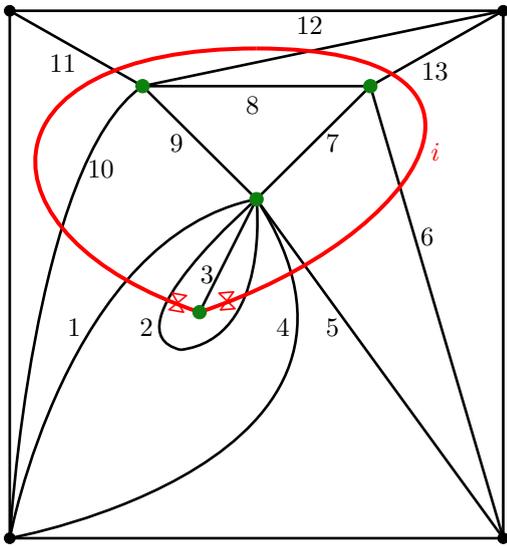


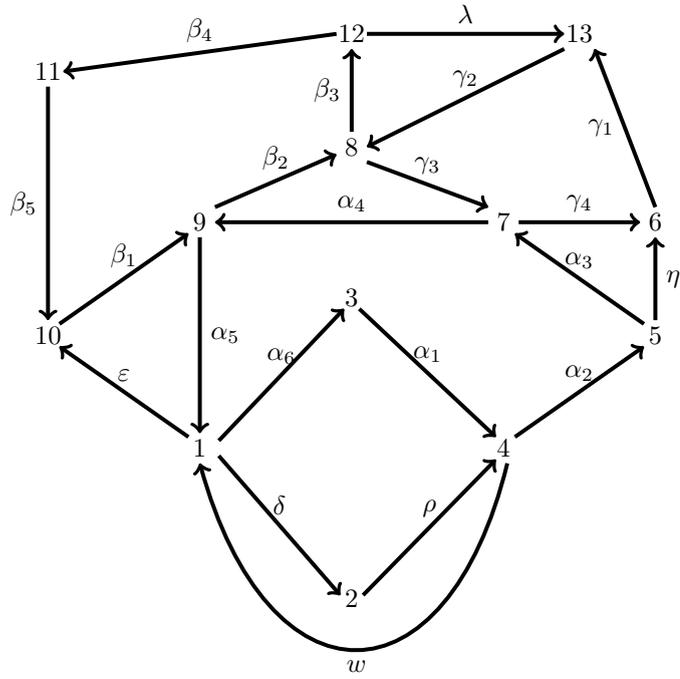
$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

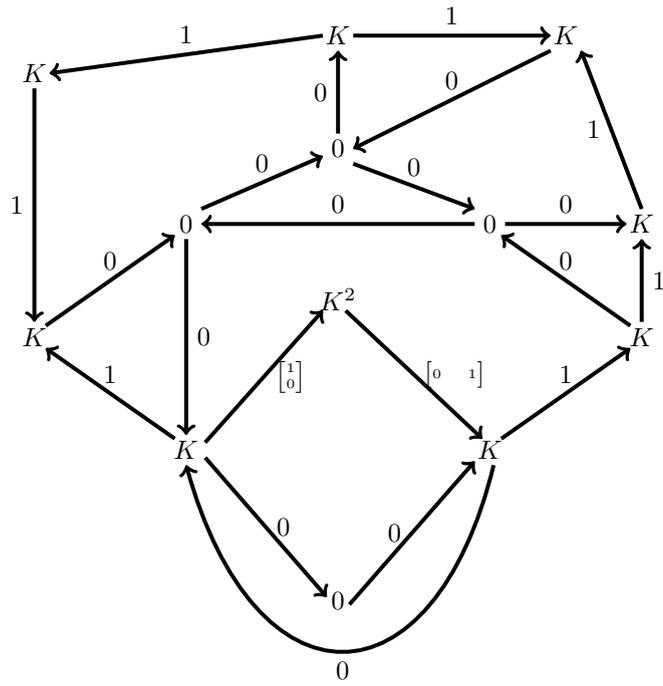
(h) Representación de cuerda

5) Ejemplo 5.



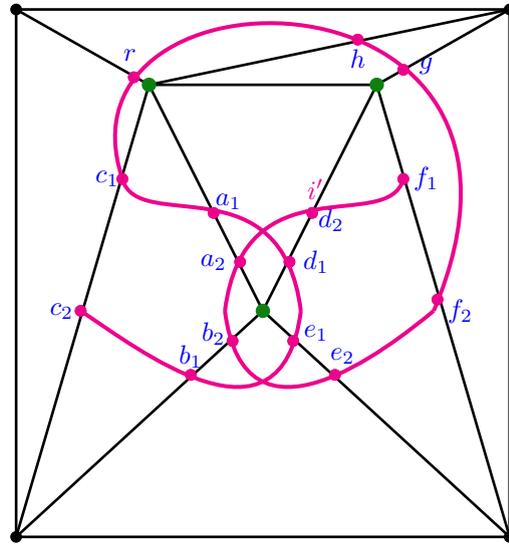
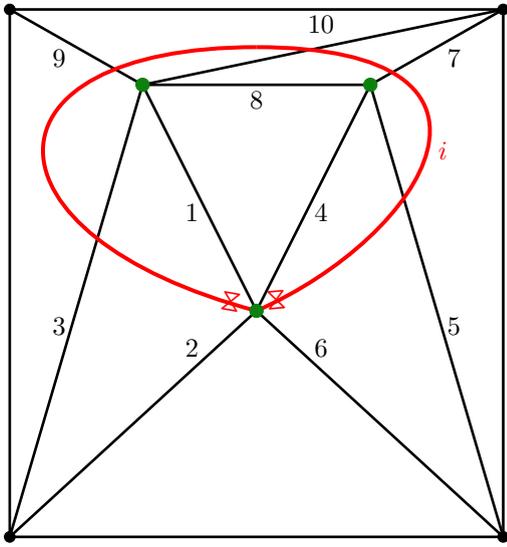


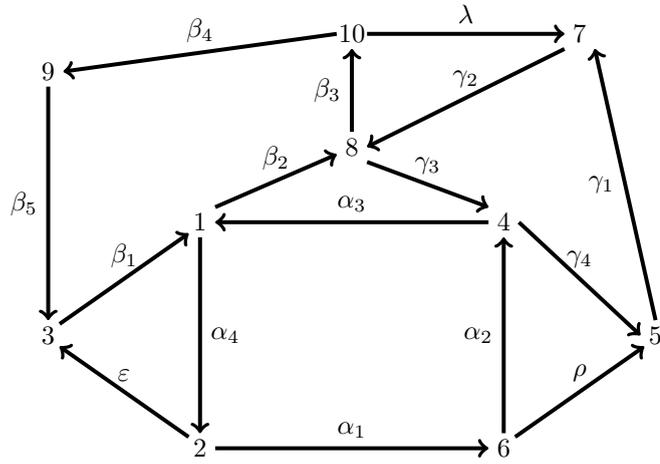
(i) Carcaj



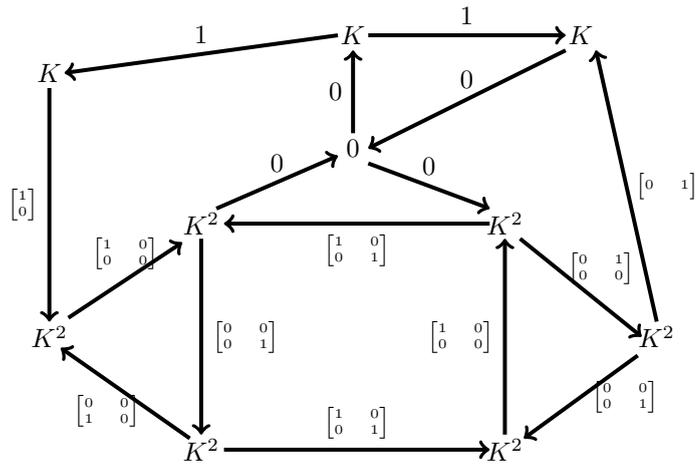
(j) Representación de cuerda

6) Ejemplo 6.





(k) Carcaj



(l) Representación de cuerda

En el siguiente capítulo definiremos ciertos conjuntos  $\mathcal{B}_{i,j}^{\Delta,1}$  que nos servirán para la construcción de las desviaciones ya mencionadas.

## 4. Representación de Arco $M(\tau, i)$ .

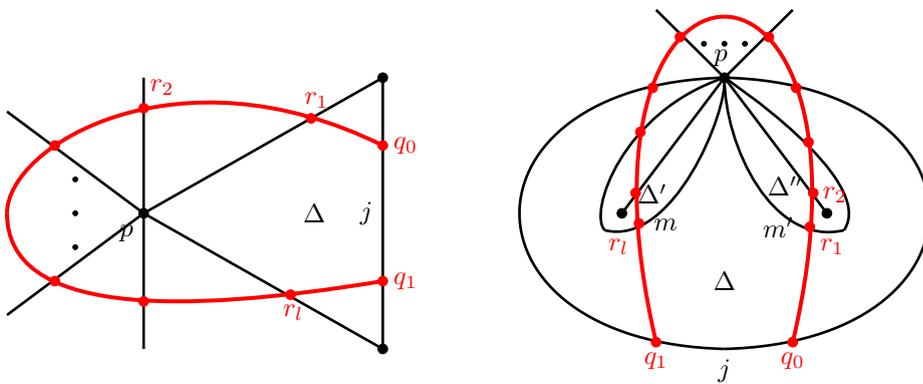
**Definición 4.1.** (Conjunto  $\mathcal{B}_{i',j}^{\Delta,1}$ ) Sea  $\tau$  una triangulación etiquetada de una superficie con frontera y puntos marcados  $(\Sigma, M)$ . Consideremos un triángulo  $\Delta$  no doblado en  $\tau^\circ$ ,  $j$  un arco de  $\tau^\circ$  e  $i \notin \tau$  un arco etiquetado que minimiza los puntos de intersección con los arcos de  $\tau$ . Vamos a definir el conjunto  $\mathcal{B}_{i',j}^{\Delta,1}$  con la ayuda de la curva  $i' = i'(\tau, i)$  (Definición 3.6). La definición depende de si  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado ó no lo es:

a)  $j$  no es el lado doblado de ningún triángulo doblado.

Consideremos la configuración local siguiente;

- i)  $j$  es lado de  $\Delta$ ,
- ii) Sea  $p$  una pinchadura con signatura distinta de cero tal que  $p$  es vértice opuesto a  $j$  en  $\Delta$ ,
- iii) Sean  $q_0, q_1 \in i' \cap j$ , con la propiedad que el segmento  $[q_0, q_1]_{i'}$  rodea a  $p$ ,
- iv)  $l$  es el número de puntos de intersección del interior relativo de  $[q_0, q_1]_{i'}$  con los arcos de  $\tau^\circ$ ,
- v)  $r_s$  con  $s \in \{1, 2, l\}$ , es el  $s$ -ésimo punto de intersección de algún arco de  $\tau^\circ$  con el interior relativo de  $[q_0, q_1]_{i'}$ .

Cada vez que encontramos la situación descrita en los puntos i) – v), definimos la familia de puntos  $(q_0, q_1, r_1, r_2, r_l, p)$  como un elemento del conjunto  $\mathcal{B}_{i',j}^{\Delta,1}$ .



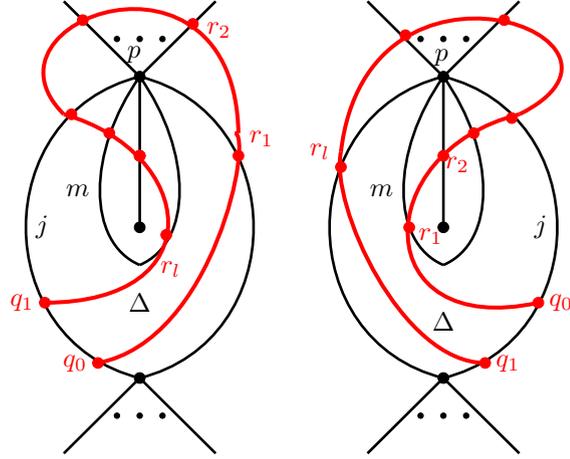


Figura 53: Caso  $a$ ) de la Definición 4.1.

b)  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$ . Denotemos por  $m$  al lado no doblado de dicho triángulo.

- i)  $m$  es lado de  $\Delta$ ,
- ii) Sea  $p$  una pinchadura con signatura distinta de cero tal que  $p$  es vértice opuesto a  $m$  en  $\Delta$ ,
- iii) Sean  $q_0, q_1 \in i' \cap j$ , con la propiedad que el segmento  $[q_0, q_1]_{i'}$  rodea a  $p$ ,
- iv)  $l$  es el número de puntos de intersección del interior relativo de  $[q_0, q_1]_{i'}$  con los arcos de  $\tau^\circ$ , contados con multiplicidad.,
- v)  $r_s$  con  $s \in \{1, 2, 3, l\}$ , es el  $s$ -ésimo punto de intersección de algún arco de  $\tau^\circ$  con el interior relativo de  $[q_0, q_1]_{i'}$ ,
- vi) Sea  $[q_1, *]$  el segmento de  $i'$  que sigue a  $[q_0, q_1]_{i'}$  (y que no contenga a  $q_0$ ). Con esta notación  $q_2$  es el primer punto de intersección de  $[q_1, *]_{i'}$  con algún arco de  $\tau^\circ \setminus \{m\}$ .

Cada vez que encontramos la situación descrita en los puntos i) – vi), definimos la familia de puntos  $(q_0, q_1, q_2, r_1, r_2, r_3, r_l, p)$  como un elemento del conjunto  $\mathcal{B}_{i',j}^{\Delta,1}$ .

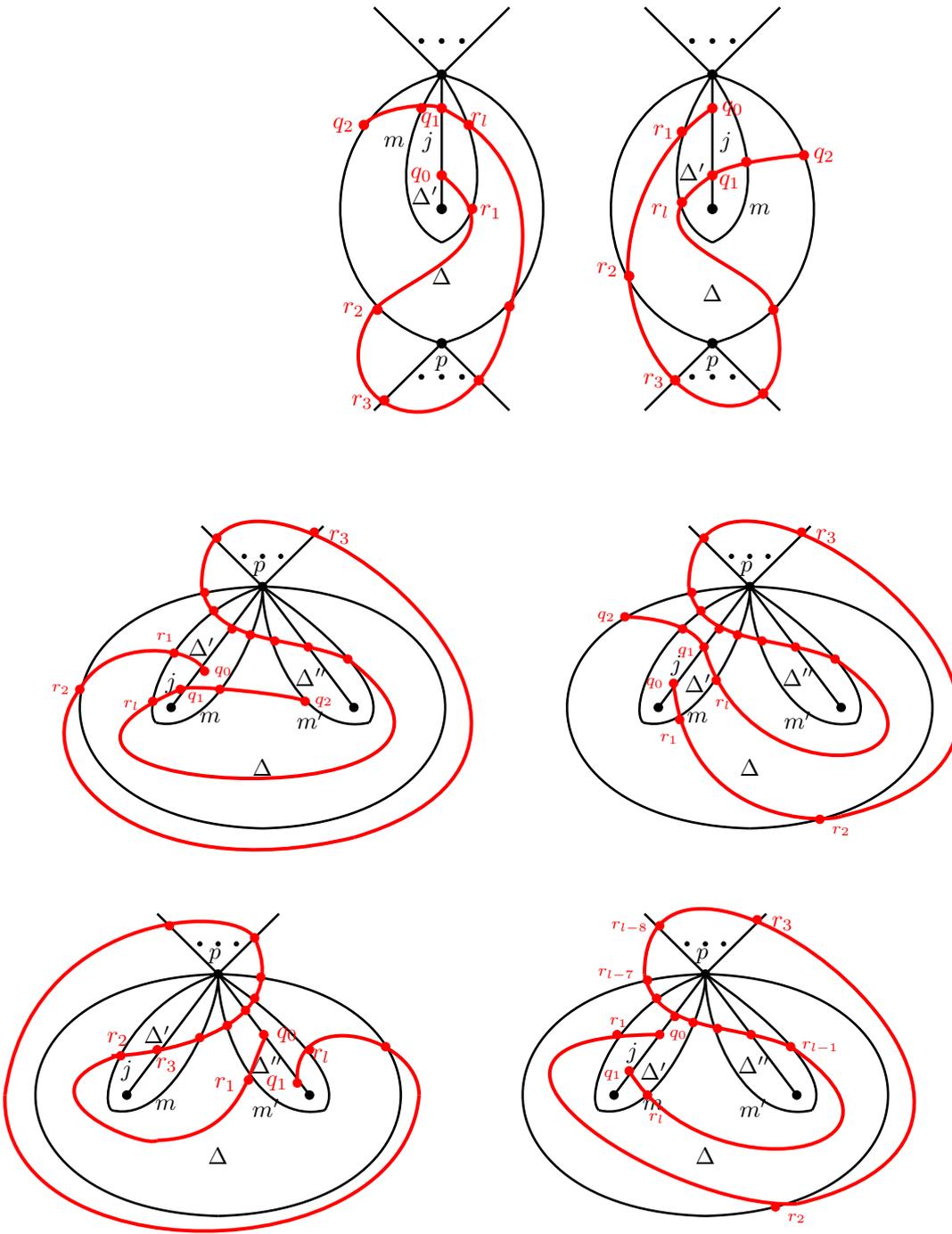


Figura 54: Caso  $b$ ) de la Definición 4.1.

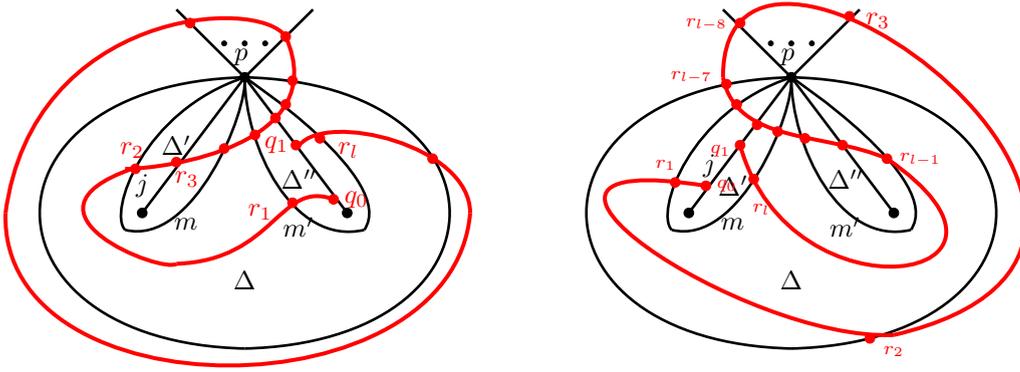


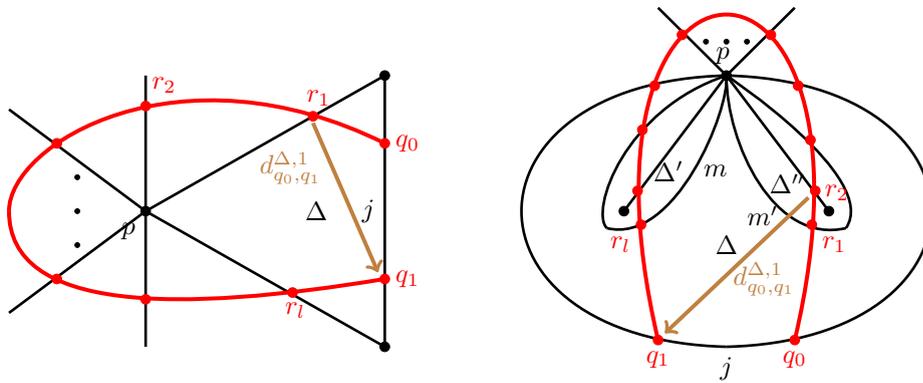
Figura 55: Caso *b*) de la Definición 4.1.

La siguiente definición nos servirá para definir las matrices de desviación y así modificar la representación de cuerda  $m(\tau, i)$  para obtener la representación requerida.

**Definición 4.2.** (1-desviación) Para cada elemento de la forma  $(q_0, q_1, r_1, r_2, r_l, p)$  ó de la forma  $(q_0, q_1, q_2, r_1, r_2, r_3, r_l, p)$  en  $\mathcal{B}_{i,j}^{\Delta,1}$  construimos la 1-desviación  $d_{(q_0, q_1)}^{\Delta,1}$  que consiste de una curva simple y orientada cuyos extremos son  $s(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta,1})$  y  $t(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta,1})$ , principio y final respectivamente. Sólo en el caso *b*) dibujaremos una curva (1-auxiliar)  $e_{(q_0, q_1)}^{\Delta,1}$  con extremos  $s(e_{(q_0, q_1)}^{\Delta,1})$  y  $t(e_{(q_0, q_1)}^{\Delta,1})$ . Distinguimos los casos cuando  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado ó no lo es:

a)  $j$  es un arco en  $\tau^\circ$  que no es el lado doblado de ningún triángulo doblado  $\Delta'$ .

Si  $r_1$  no pertenece a ningún lado de ningún triángulo doblado entonces dibujamos la 1-desviación  $d_{(q_0, q_1)}^{\Delta,1}$  con extremos  $s(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta,1}) = r_1$  y  $t(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta,1}) = q_1$ . En caso contrario dibujamos la 1-desviación  $d_{(q_0, q_1)}^{\Delta,1}$  cuyos extremos son  $s(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta,1}) = r_2$  y  $t(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta,1}) = q_1$ .



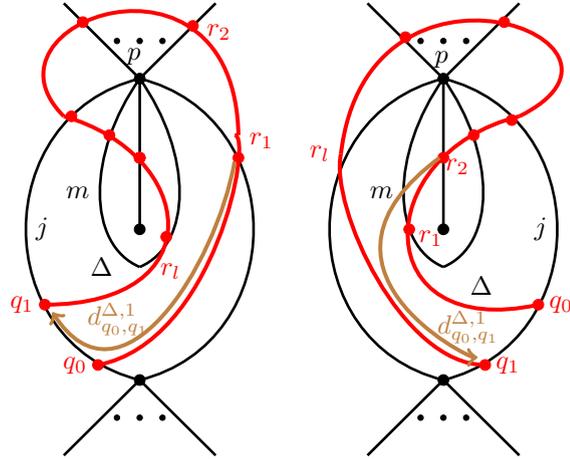


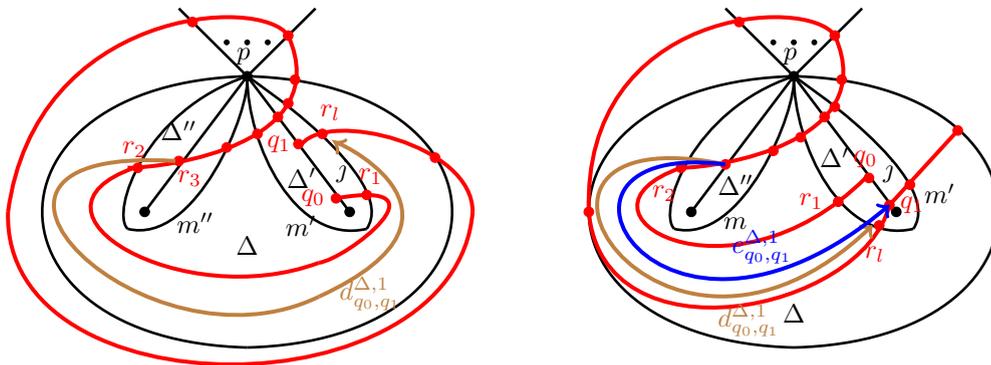
Figura 56: Caso  $a$ ) de la Definición 4.2.

b)  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  en  $\tau^\circ$ . Denotamos con  $m'$  al lado no doblado de  $\Delta'$ .

Consideremos los casos cuando  $r_2$  pertenece al lado no doblado de algún triángulo doblado  $\Delta'' \neq \Delta'$  ó no pertenece a ningún triángulo doblado:

$b_1$ )  $r_2$  pertenece al lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta''$  distinto de  $\Delta'$ . Denotemos con  $m''$  al lado no doblado de  $\Delta''$ .

En esta situación dibujamos la 1-desviación  $d_{(q_0,q_1)}^{\Delta,1}$  con extremos  $s(d_{(q_0,q_1)}^{\Delta,1}) = r_3$  y  $t(d_{(q_0,q_1)}^{\Delta,1}) = r_l$ . Además si el segmento  $[q_0, r_2]_{i'}$  es contráctil a  $p$  con la homotopía que preserva a  $q_0$  en  $j$  y a  $r_2$  en  $m''$ , y el segmento  $[q_1, r_{l-1}]_{i'}$  no es contráctil a  $p$  entonces dibujamos la curva auxiliar  $e_{(q_0,q_1)}^{\Delta,1}$  con extremos  $s(e_{(q_0,q_1)}^{\Delta,1}) = r_3$  y  $t(e_{(q_0,q_1)}^{\Delta,1}) = q_1$ .



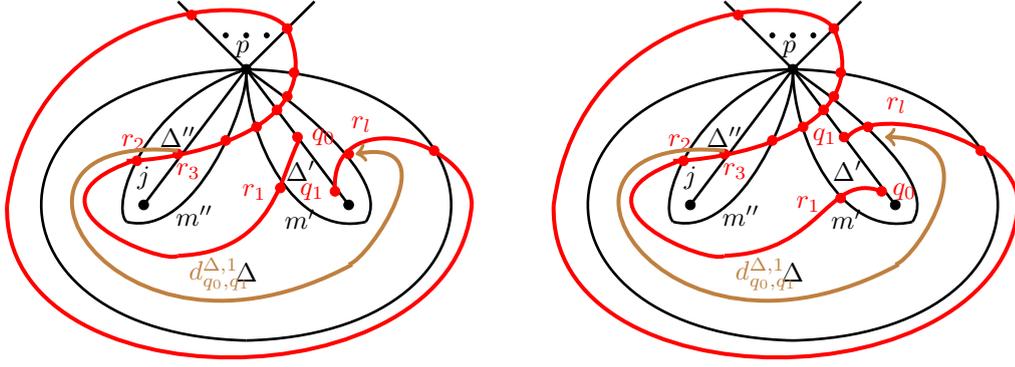


Figura 57: Caso  $b_1)$  de la Definición 4.2.

$b_2)$   $r_2$  no pertenece a ningún lado de ningún triángulo doblado.

Dibujamos la 1-desviación  $d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}$  con extremos  $s(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}) = r_2$  y  $t(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}) = q_1$  si se cumplen las condiciones de uno de los siguientes dos subcasos:

$b_{21})$   $m'$  pertenece a un triángulo de tipo 2.

- i)  $m'$  está basado en una pinchadura  $q$ ,
- ii) El segmento  $[q_0, r_2]_{i'}$  es contráctil a  $q$  con la homotopía que preserva los extremos en el respectivo arco de  $\tau^\circ$ .

$b_{22})$   $m'$  pertenece a un triángulo de tipo 3.

- i)  $m'$  está basado en  $p$ ,
- ii) El segmento  $[q_0, r_2]_{i'}$  es contráctil a  $p$  con la homotopía que preserva los extremos en el respectivo arco de  $\tau^\circ$ ,
- iii) El segmento  $[q_1, r_{l-1}]_{i'}$  no es contráctil a  $p$  con la homotopía que preserva los extremos en el respectivo arco de  $\tau^\circ$ .

En la situación descrita en  $b_{21})$  dibujamos una curva auxiliar  $e_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}$  con extremos  $s(e_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}) = r_1$  y  $t(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}) = q_2$ . Además si  $q_0$  es extremo de la curva  $i'$  dibujamos otra curva auxiliar con extremos  $s(e_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}) = r_2$  y  $t(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}) = r_l$ . Por otro lado en la situación descrita en  $b_{22})$  dibujamos una curva auxiliar  $e_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}$  con extremos  $s(e_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}) = r_2$  y  $t(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}) = r_l$ .

Ahora si no se cumplen  $b_{21})$  y  $b_{22})$ , entonces dibujamos la 1-desviación  $d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}$  con extremos  $s(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}) = r_2$  y  $t(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}) = r_l$ .

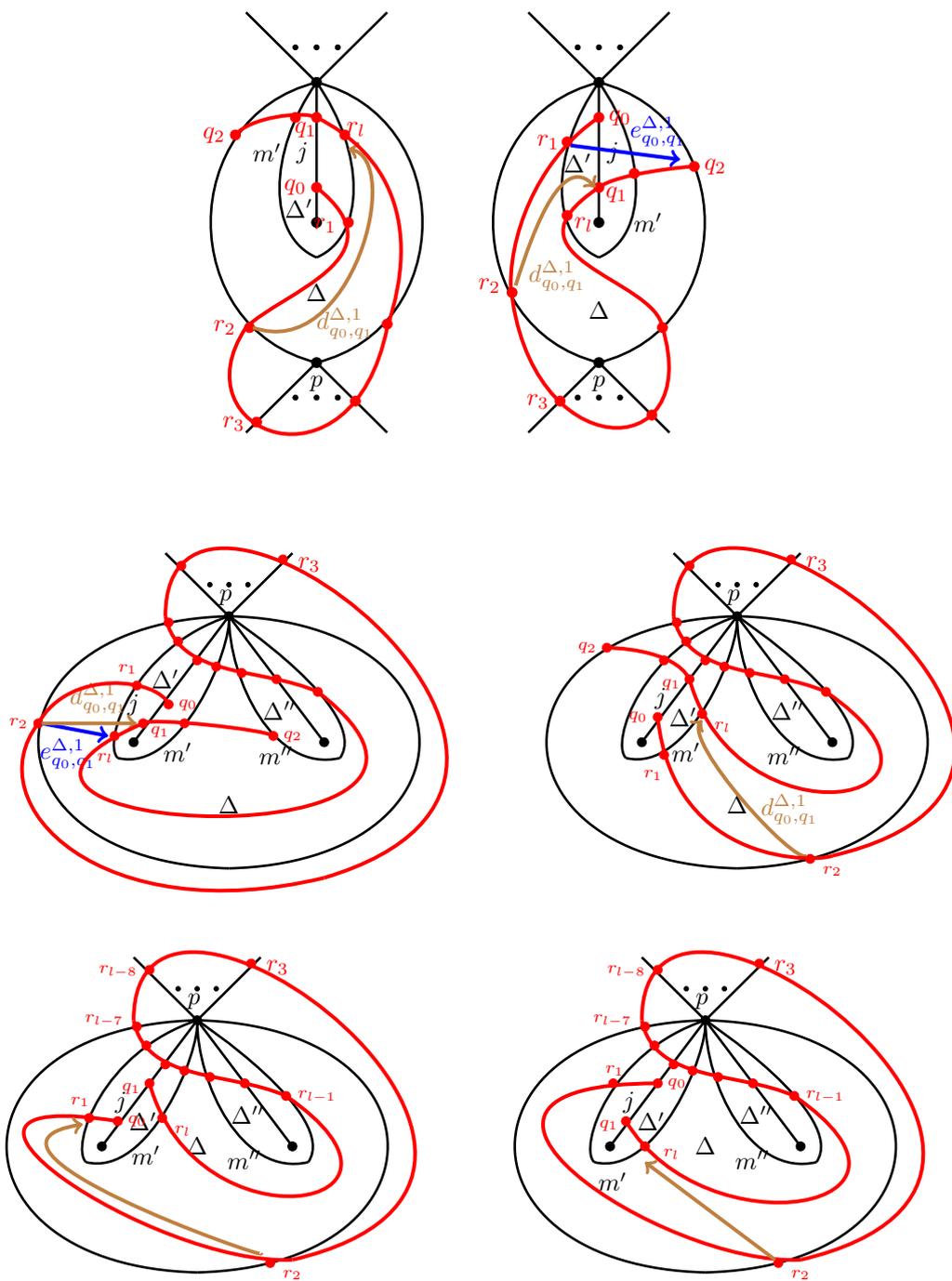


Figura 58: Caso  $b_2$ ) de la Definición 4.2.

En lo siguiente asignaremos una etiqueta en el conjunto  $\{1, 2\}$  a las 1-desviaciones  $d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}$ , lo cual nos servirá para definir la matriz de desviación.

A la 1-desviación  $d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}$  que cumple las condiciones de uno de los dos casos siguientes le asignamos la etiqueta "1".

$a_1$ )  $j$  no es el lado doblado de ningún triángulo doblado.

El arco  $j$  es lado de un triángulo de tipo 3 ó  $\Delta$  es un triángulo de tipo 2 y se cumple que el punto de intersección  $r_l$  de  $\gamma$  con los arcos de  $\tau^\circ$  pertenece al único arco de  $\Delta$  que es lado de un triángulo doblado.

$a_2)$   $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  con lado no doblado  $m$ .

- i)  $\Delta$  es un triángulo de tipo 3. Denotemos por  $m'$  al único lado de  $\Delta$  que no es lado de ningún triángulo doblado.
- ii)  $r_2$  pertenece a  $m'$ .

Si no se cumple las condiciones de  $a_1)$  y  $a_2)$  entonces asignamos a  $d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}$  la etiqueta "2".

Llamaremos desviaciones de tipo 1 a las desviaciones con etiqueta "1". Análogamente llamaremos desviaciones de tipo 2 a las desviaciones con etiqueta "2".

Sea  $n \geq 1$ , después de haber dibujado todas las  $n$ -desviaciones y curvas  $n$ -auxiliares para  $(\tau^\circ, i')$  tomamos un arco  $j$  y fijamos un triángulo  $\Delta$ . A continuación definiremos los conjuntos  $\mathcal{B}_{i', j}^{\Delta, n+1}$ .

**Definición 4.3.** (Conjunto  $\mathcal{B}_{i', j}^{\Delta, n+1}$ ) Sea  $\tau$  una triangulación etiquetada de una superficie con frontera y puntos marcados  $(\Sigma, M)$ . Consideremos un triángulo  $\Delta$  en  $\tau^\circ$ ,  $j$  un arco de  $\tau^\circ$  e  $i \notin \tau$  un arco etiquetado que minimiza los puntos de intersección con los arcos de  $\tau$ . Vamos a definir el conjunto  $\mathcal{B}_{i', j}^{\Delta, n+1}$  con la ayuda de  $i'$  y las  $n$ -desviaciones construidas previamente. La construcción depende de si  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado ó no lo es:

- a)  $j$  no es el lado doblado de ningún triángulo doblado.

En este caso los elementos de  $\mathcal{B}_{i', j}^{\Delta, n+1}$  son de la forma  $(q_0, q_1, s(d^{\Delta', n}), r_2, r_l, p)$  de manera que se cumplen las condiciones del inciso a) de la Definición 4.1 y además  $s(d^{\Delta', n}) = r_1$  no pertenece a ningún triángulo doblado. La curva  $\gamma$  se obtiene como la union de los segmentos  $[q_0, r_1]_{i'}$ ,  $d^{\Delta', n}$  y  $[r_2, q_1]_{i'}$  y está orientada de  $q_0$  a  $q_1$ .

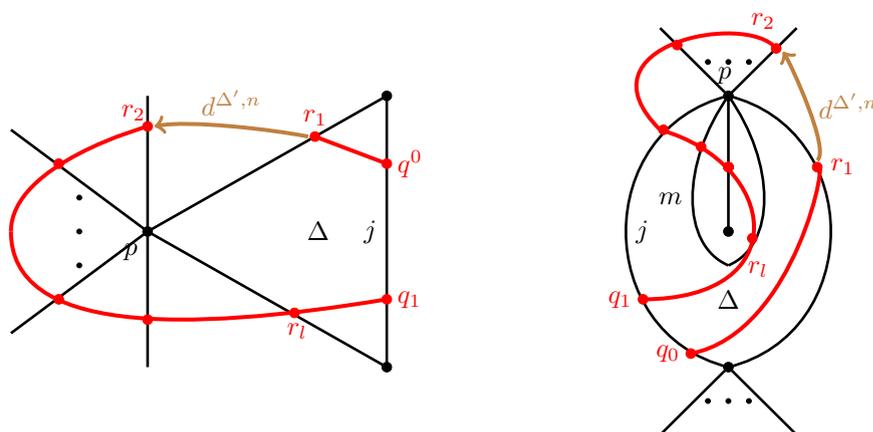


Figura 59: Caso a) de la Definición 4.3.

b)  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$ . Denotemos con  $m$  al lado no doblado de dicho triángulo.

En esta situación los elementos de  $\mathcal{B}_{i',j}^{\Delta,n+1}$  son de la forma  $(q_0, q_1, q_2, r_1, s(d^{\Delta',n}), r_3, r_l, p)$  de manera que cumplen las condiciones de  $b_{21}$ ) en la Definición 4.1. La curva  $\gamma$  se obtiene como la union de los segmentos  $[q_0, r_2]_{i'}$ ,  $d^{\Delta',n}$  y  $[r_3, q_1]_{i'}$  y está orientada de  $q_0$  a  $q_1$ .

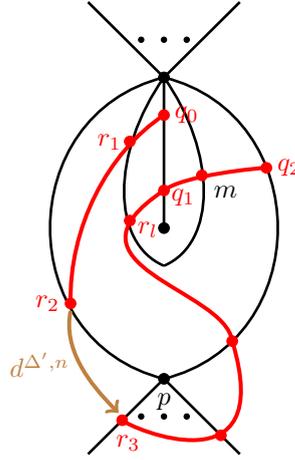


Figura 60: Caso  $b$ ) de la Definición 4.3.

Con la ayuda de los conjuntos  $\mathcal{B}_{i,j}^{\Delta,n+1}$  definiremos ahora las  $(n+1)$ -desviaciones y las curvas  $(n+1)$ -auxiliares.

**Definición 4.4.** ( $(n+1)$ -desviación) Para cada elemento en  $\mathcal{B}_{i',j}^{\Delta,n+1}$  de la forma  $(q_0, q_1, s(d^{\Delta',n}), r_2, r_l, p)$  ó  $(q_0, q_1, q_2, r_1, s(d^{\Delta',n}), r_3, r_l, p)$  contruimos la  $(n+1)$ -desviación  $d_{(q_0,q_1)}^{\Delta,n+1}$  que consiste de una curva simple y orientada cuyos extremos son  $s(d_{(q_0,q_1)}^{\Delta,n+1})$  y  $t(d_{(q_0,q_1)}^{\Delta,n+1})$ , principio y final respectivamente. Sólo en el caso  $b$ ) dibujaremos una curva  $(n+1)$ -auxiliar  $e_{(q_0,q_1)}^{\Delta,n+1}$  con extremos  $s(e_{(q_0,q_1)}^{\Delta,n+1})$  y  $t(e_{(q_0,q_1)}^{\Delta,n+1})$ . Distinguiamos los casos cuando  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado ó no lo es:

a)  $j$  no es el lado doblado de ningún triángulo doblado.

Para cada elemento  $(q_0, q_1, s(d^{\Delta',n}), r_2, r_l, p)$  en  $\mathcal{B}_{i',j}^{\Delta,n+1}$  dibujamos la  $(n+1)$ -desviación  $d_{(q_0,q_1)}^{\Delta,n+1}$  contenida en  $\Delta$ , con extremos  $s(d_{(q_0,q_1)}^{\Delta,n+1}) = s(d_{(q_0,q_1)}^{\Delta',n}) = r_1$  y  $t(d_{(q_0,q_1)}^{\Delta,n+1}) = q_1$ .

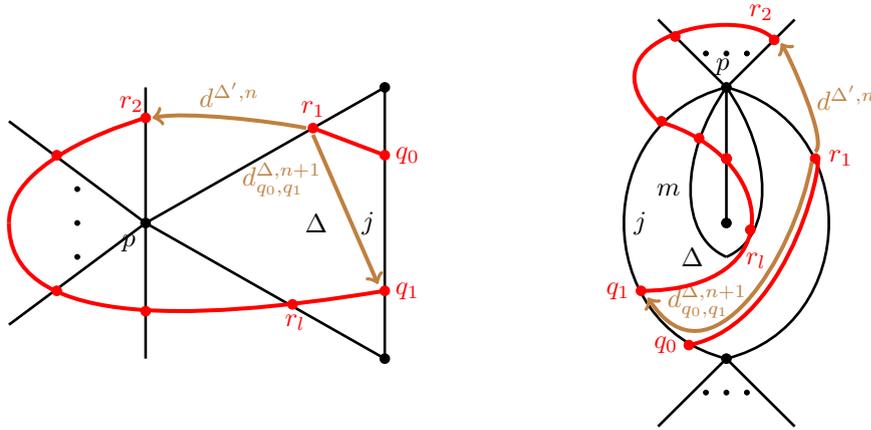


Figura 61: Caso a) de la Definición 4.4.

b)  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$ . Denotemos por  $m$  al lado no doblado de dicho triángulo.

Para cada elemento  $(q_0, q_1, q_2, r_1, s(d^{\Delta', n}), r_3, r_l, p)$  en  $\mathcal{B}_{i', j}^{\Delta, n+1}$  dibujamos la  $(n+1)$ -desviación  $d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, n+1}$ , con extremos  $s(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, n+1}) = s(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta', n})$  y  $t(d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, n+1}) = q_1$ . En este caso dibujamos también la curva auxiliar  $e_{(q_0, q_1)}^{\Delta, n+1}$  cuyos extremos son  $s(e_{(q_0, q_1)}^{\Delta, n+1}) = r_1$  y  $t(e_{(q_0, q_1)}^{\Delta, n+1}) = q_2$ .

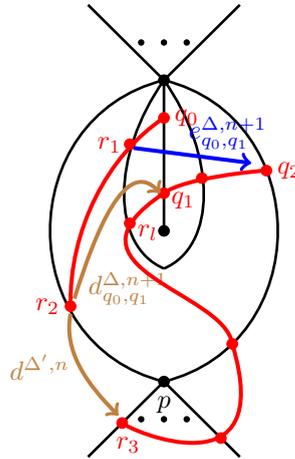


Figura 62: Caso b) de la Definición 4.4.

Sea  $d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, m}$  una  $m$ -desviación con  $1 \leq m \leq n$ , asignamos a  $d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, m}$  la etiqueta "1" si  $d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, 1}$  tiene etiqueta "1". En caso contrario asignamos a  $d_{(q_0, q_1)}^{\Delta, m}$  la etiqueta "2".

Ahora vamos a analizar los arcos  $j$  de  $\tau^\circ$  para determinar cuantas matrices de desviación y matrices auxiliares asignamos a  $j$ .

a)  $j$  es lado de un triángulo doblado  $\Delta'$ . Denotamos por  $m$  al lado no doblado de  $\Delta'$ .

Si  $m$  es lado de un triángulo  $\Delta$  de tipo 3 con etiqueta  $l_3$  asignamos a  $j$  y  $m$  dos matrices de desviación y dos matrices auxiliares. En caso contrario asignamos a  $j$  y  $m$  sólo una matriz de desviación y una auxiliar.

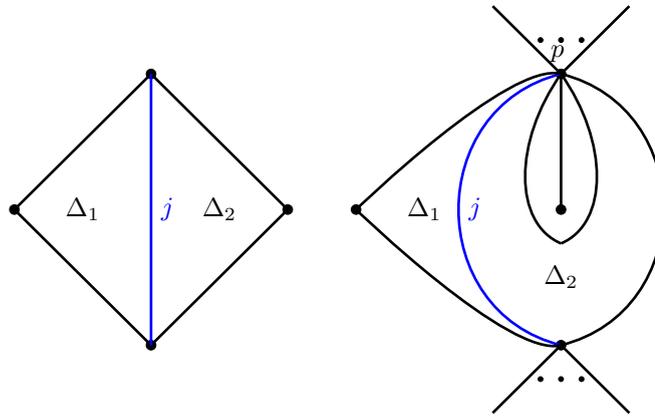
b)  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado.

En este caso como  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado entonces  $j$  es lado de exactamente dos triángulos no doblado. Denotemos por  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  a los triángulos no doblados que comparten a  $j$  como lado.

$b_1)$  Si se cumplen las condiciones de uno de los siguientes dos subcasos asignamos a  $j$  dos matrices de desviación y dos matrices auxiliares.

$b_{11})$   $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son triángulos de tipo 1.

$b_{12})$   $\Delta_1$  es de tipo 1,  $\Delta_2$  es de tipo 2 y  $j$  tiene etiqueta  $l_3$  en  $\Delta_2$ .



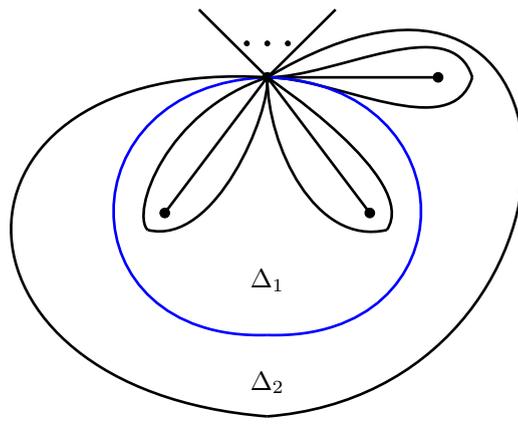
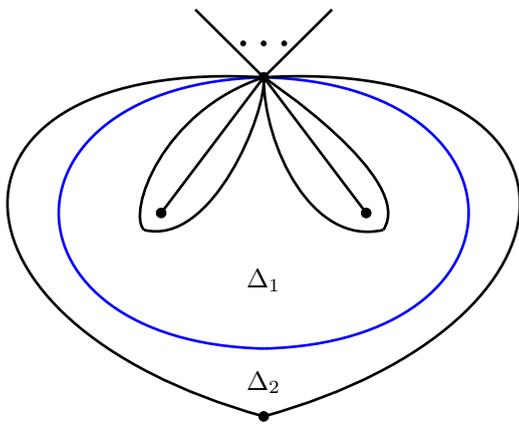
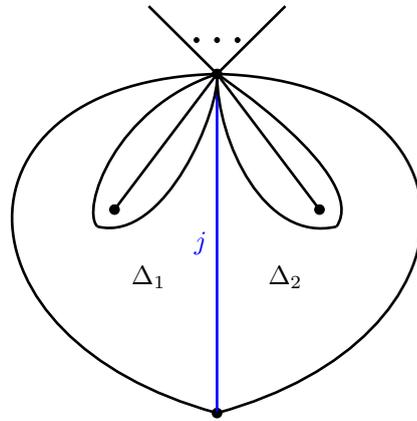
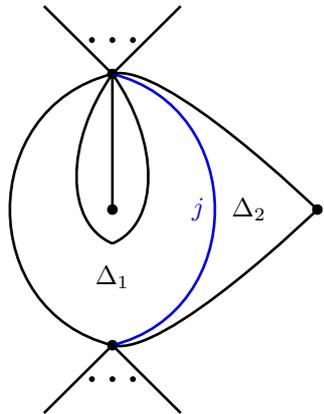
$b_2)$  Si se cumplen las condiciones de uno de los siguientes cuatro subcasos asignamos a  $j$  tres matrices de desviación y tres matrices auxiliares.

$b_{21})$   $\Delta_1$  es de tipo 3 y  $\Delta_2$  es de tipo 1.

$b_{22})$   $\Delta_1$  es de tipo 2,  $\Delta_2$  es de tipo 1 y  $j$  tiene etiqueta  $l_2$  en  $\Delta_1$ .

$b_{23})$   $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son de tipo 2,  $j$  tiene etiqueta  $l_2$  en  $\Delta_1$  y  $l_3$  en  $\Delta_2$ .

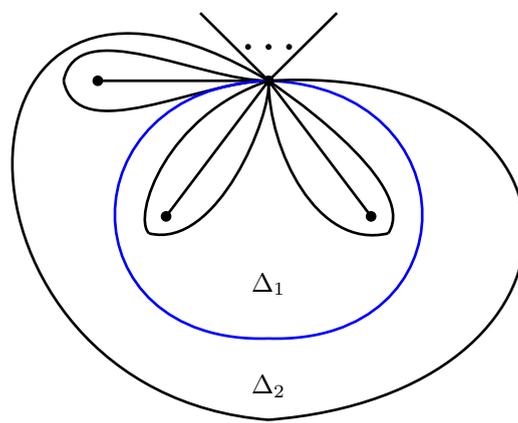
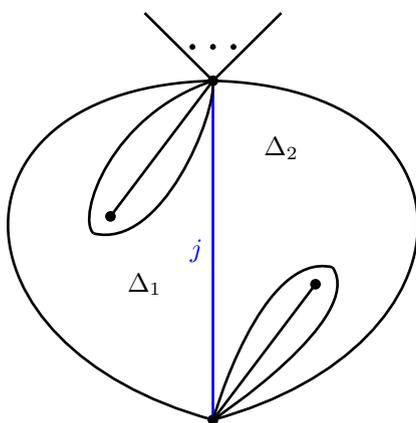
$b_{24})$   $\Delta_1$  es de tipo 3 y  $\Delta_2$  es de tipo 2,  $j$  tiene etiqueta  $l_1$  en  $\Delta_1$  y  $l_3$  en  $\Delta_2$ .



$b_3$ ) Si se cumplen las condiciones de uno de los siguientes dos subcasos asignamos a  $j$  cuatro matrices de desviación y cuatro matrices auxiliares.

$b_{31}$ )  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son de tipo 2, y  $j$  tiene etiqueta  $l_2$  en ambos triángulos.

$b_{32}$ )  $\Delta_1$  es de tipo 3,  $\Delta_2$  es de tipo 2,  $j$  tiene etiqueta  $l_1$  en  $\Delta_1$  y etiqueta  $l_2$  en  $\Delta_2$ .



Acontinuación definiremos las matrices de desviación.

**Definición 4.5.** (Matriz de desviación) Sea  $\tau$  una triangulación etiquetada de una superficie con frontera y puntos marcados  $(\Sigma, M)$ . Usando las desviaciones de  $(\tau^\circ, i')$  y considerando los casos cuando  $j$  es lado de un triángulo doblado ó no lo es. Definimos las matrices de desviación para cada arco  $j \in \tau^\circ$ . Las filas y las columnas de la matriz de desviación están indexadas por los puntos de cruce(distintos) de  $i'$  con  $j$ .

Definimos la  $q$ -ésima columna (asociada al  $q$ -ésimo punto de cruce distinto) de la matriz de desviación mediante las siguientes reglas:

a)  $j$  es lado de un triángulo doblado.

En esta situación consideramos si  $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado ó no lo es:

$a_1)$   $j$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$ . Denotemos por  $\Delta$  al único triángulo no doblado en  $\tau^\circ$  que comparte un lado con  $\Delta'$ .

Consideremos los casos cuando a  $j$  se le asigna una ó dos matrices de desviación.

$a_{11})$  Le asignamos sólo una matriz de desviación a  $j$  denotada por  $D_{i',j}^{\bar{\Delta}}$ .

i) La  $q$ -ésima coordenada es 1.

ii) Si  $\tilde{q}$  es un punto de cruce que es punto final de una desviación  $d_{(q,\tilde{q})}^{\bar{\Delta},n}$  y existe un elemento  $(q, \tilde{q}, r_1, r_2, r_l, p)$  o  $(q, \tilde{q}, q_1, r_1, r_2, r_3, r_l, p)$  en  $\mathcal{B}_{i',j}^{\Delta,n}$  entonces la  $\tilde{q}$ -ésima coordenada es  $\delta_\tau(p)$ . Si además  $d_{(q,\tilde{q})}^{\Delta,n}$  es de tipo 1 entonces la coordenada asociada al punto de cruce  $r_{l-5}$  de  $\gamma$  con  $j$  también es  $\delta_\tau(p)$ .

iii) El resto de las coordenadas de  $q$  son cero.

$a_{12})$  Le asignamos dos matrices a  $j$ . Denotamos por  $D_{i',j}^{\Delta}$  y  $D_{i',j}^{\bar{\Delta}}$  a las matrices de desviación.

La  $q$ -ésima coordenada es  $\delta_\tau(p)$  para ambas matrices.

$a_2)$   $j$  es el lado no doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$ . Denotemos por  $j'$  al lado doblado de  $\Delta'$ .

$a_{21})$  Le asignamos sólo una matriz a  $j$  denotada por  $D_{i',j}^{\Delta}$ .

i) La  $q$ -ésima coordenada es 1.

ii) Si  $\tilde{q}$  es el punto final de una de una desviación  $d_{(q,\tilde{q})}^{\Delta,n}$  y existe un elemento en  $(q_0, q_1, q_2, q, r_2, r_3, \tilde{q}, p)$  en  $\mathcal{B}_{i',j'}^{\Delta,n}$  entonces la  $\tilde{q}$ -ésima coordenada es  $\delta_\tau(p)$  si se cumple una de las dos condiciones siguientes;

- $i)$   $\Delta$  es de tipo 2.
- $ii)$   $\Delta$  es de tipo 3 y  $\gamma \cup [q_1, q_0]_j$  es una curva cerrada que divide a  $\Sigma$  en dos regiones, siendo una región homeomorfa a un disco con sólo la pinchadura  $p$ , donde  $\gamma$  es la curva que corresponde a  $(q_0, q_1, q_2, q, r_2, r_3, \tilde{q}, p)$  y rodea a  $p$ .

Si en *ii*) la curva  $\gamma \cup [q_1, q_0]_j$  divide a  $\Sigma$  en dos regiones, siendo una región homeomorfa a un disco con dos pinchaduras siendo una de ellas  $p$  entonces la  $\tilde{q}$ -ésima coordenada es  $-\delta_\tau(p)$ . Además si  $d^\Delta$  es de tipo 1 entonces la coordenada que corresponde al  $(r - 4)$ -ésimo punto de cruce de  $\gamma$  con los arcos de  $\tau^\circ$  es  $\delta_\tau(p)$  si  $\tilde{q}$  es  $\delta_\tau(p)$  y es  $-\delta_\tau(p)$  si  $\tilde{q}$  es  $-\delta_\tau(p)$ .

iii) El resto de las coordenadas de  $q$  son cero.

*a*<sub>22</sub>) Le asignamos dos matrices a  $j$ . Denotamos por  $D_{i',j}^\Delta$  y  $D_{i',j}^{\bar{\Delta}}$  a las matrices de desviación.

i) La  $q$ -ésima coordenada para ambas matrices es 1.

ii) Si  $\tilde{q}$  es punto de cruce que es punto final de una desviación  $d_{(q,\tilde{q})}^{\Delta,n}$  y existe un elemento  $(q_0, q_1, q_2, q, r_2, r_3, \tilde{q}, p)$  en  $\mathcal{B}_{i',j'}^{\Delta,n}$  entonces;

- La  $\tilde{q}$ -ésima coordenada de la matriz  $D_{i',j}^{\bar{\Delta}}$  es  $\delta_\tau(p)$  si  $\gamma \cup [q_1, q]_{j'}$  es una curva cerrada que divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una region homeomorfa a un disco con la sólo la pinchadura  $p$ .

- La  $\tilde{q}$ -ésima coordenada de la matriz  $D_{i',j}^{\bar{\Delta}}$  es  $-\delta_\tau(p)$  si  $\gamma \cup [q_1, q]_{j'}$  es una curva cerrada que divide a  $\Sigma$  en dos regiones siendo una region homeomorfa a un disco con dos pinchaduras siendo una de ellas  $p$ .

iii) El resto de las coordenadas de  $q$  son cero en ambas matrices.

b)  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado.

Como ya mencionamos anteriormente si  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado entonces  $j$  es lado de exactamente dos triángulos no doblados. Denotemos por  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  a dichos triángulos. Distinguiamos los casos cuando a  $j$  se le asignan 2,3 ó 4 matrices de desviación.

*b*<sub>1</sub>) Le asignamos 2 matrices de desviación a  $j$ .

Asociamos dos matrices  $D_{i',j}^\Delta$  una por cada triángulo  $\Delta_k$  con  $k = 1, 2$ .

i) La  $q$ -ésima coordenada es 1.

ii) Si  $\tilde{q}$  es un punto de cruce que es punto final de una desviación  $d_{(q,\tilde{q})}^{\Delta,n}$  y existe un elemento  $(q, \tilde{q}, r_1, r_2, r_l, p)$  en  $\mathcal{B}_{i',j'}^{\Delta,n}$  entonces la  $\tilde{q}$ -ésima coordenada es  $\delta_\tau(p)$ . Si además  $d_{(q,\tilde{q})}^{\Delta,n}$  es de tipo 1 entonces la coordenada asociada al punto de cruce  $r_{l-3}$  de  $\gamma$  con  $j$  también es  $\delta_\tau(p)$ .

iii) El resto de las coordenadas de  $q$  son cero.

*b*<sub>2</sub>) Le asignamos 3 matrices de desviación a  $j$ .

Asociamos tres matrices dos de ellas denotadas por  $D_{i',j}^\Delta$ , una por cada triángulo  $\Delta_k$  con  $k = 1, 2$ . Además asignamos una tercera matriz denotada por  $D_{i',j}^{\bar{\Delta}}$  donde  $\Delta$  es el triángulo de tipo 3 ó  $\Delta$  es un triángulo de tipo 2.

- i) La  $q$ -ésima coordenada de las tres matrices es 1.
  - ii) Si  $\tilde{q}$  es punto final de una desviación  $d_{(q,\tilde{q})}^{\Delta,n}$  y existe un elemento en  $(q, \tilde{q}, r_1, r_2, r_l, p)$  en  $\mathcal{B}_{i',j}^{\Delta,n}$  entonces la  $\tilde{q}$ -ésima coordenada de  $D_{i',j}^{\Delta}$  es  $\delta_{\tau}(p)$  si el interior relativo de la curva  $d_{(q,\tilde{q})}^{\Delta}$  no interseca a ningún arco de  $\tau^{\circ}$ , en caso contrario la  $\tilde{q}$ -ésima coordenada de  $D^{\overline{\Delta}}$  es  $\delta_{\tau}(p)$ . Además si  $d_{(q,\tilde{q})}^{\Delta}$  es de tipo 1 entonces la coordenada correspondiente al punto de cruce  $r_{l-3}$  de la curva  $\gamma$  con el arco  $j$  también es  $\delta_{\tau}(p)$ .
  - iii) El resto de las coordenadas de  $q$  son cero para las tres matrices.
- b<sub>3</sub>) Le asignamos 4 matrices de desviación a  $j$ .

Asociamos cuatro matrices dos de ellas denotadas por  $D_{i',j}^{\Delta}$  una por cada triángulo  $\Delta_k$  con  $k = 1, 2$  y dos adicionales denotada por  $D_{i',j}^{\overline{\Delta}}$ .

- i) La  $q$ -ésima coordenada de las tres matrices es 1.
- ii) Si  $\tilde{q}$  es punto final de una desviación  $d_{(q,\tilde{q})}^{\Delta,n}$  y existe un elemento en  $(q, \tilde{q}, r_1, r_2, r_l, p)$  en  $\mathcal{B}_{i',j}^{\Delta,n}$  entonces la  $\tilde{q}$ -ésima coordenada de  $D_{i',j}^{\Delta}$  es  $\delta_{\tau}(p)$  si el interior relativo de la curva  $d_{(q,\tilde{q})}^{\Delta}$  no interseca a ningún arco de  $\tau^{\circ}$ , en caso contrario la  $\tilde{q}$ -ésima coordenada de  $D^{\overline{\Delta}}$  es  $\delta_{\tau}(p)$ . Además si  $d_{(q,\tilde{q})}^{\Delta}$  es de tipo 1 entonces la coordenada correspondiente al punto de cruce  $r_{l-3}$  de la curva  $\gamma$  con el arco  $j$  también es  $\delta_{\tau}(p)$ .
- iii) El resto de las coordenadas de  $q$  son cero para las tres matrices.

Ahora definiremos las matrices auxiliares.

**Definición 4.6.** (Matriz auxiliar) Sea  $\tau$  una triangulación etiquetada de una superficie con frontera y puntos marcados  $(\Sigma, M)$ . Usando las curvas auxiliares de  $(\tau^{\circ}, i')$  y considerando los casos cuando  $j$  es lado de un triángulo doblado ó no lo es. Definimos las matrices auxiliares para cada arco  $j \in \tau^{\circ}$ . Las filas y las columnas de la matriz auxiliar están indexadas por los puntos de cruce de  $i'$  con  $j$ . Para cada punto de cruce  $q$  definimos la  $q$ -ésima columna de la matriz auxiliar mediante las siguientes reglas:

- a)  $j$  es lado de un triángulo doblado  $\Delta'$ . Denotemos por  $\Delta$  al único triángulo en  $\tau^{\circ}$  que comparte un lado con  $\Delta'$ .

Dado que  $j$  es lado de un triángulo doblado consideramos los casos cuando  $j$  es el lado doblado ó  $j$  es el lado no doblado.

- a<sub>1</sub>)  $j$  es el lado doblado de  $\Delta'$ .

Distinguimos los casos cuando a  $j$  le asignamos una ó dos matrices.

- a<sub>11</sub>) Le asignamos sólo una matriz a  $j$  denotada por  $E_{i',j}^{\overline{\Delta}}$ .

La  $q$ -ésima coordenada es 1 y el resto son 0.

- a<sub>12</sub>) Le asignamos dos matrices a  $j$ . Denotamos por  $E_{i',j}^{\Delta}$  y  $E_{i',j}^{\overline{\Delta}}$  a las matrices de auxiliares.

- i) La  $q$ -ésima coordenada de ambas matrices es 1.
- ii) Si  $\tilde{q} \in i' \cap j$  es el punto final de una curva auxiliar  $e_{(q,\tilde{q})}^{\Delta,n}$  y existe un elemento  $(q, \tilde{q}, q_2, r_1, r_2, r_3, r_l, p)$  en  $\mathcal{B}_{i',j}^{\Delta,n}$ , entonces la  $\tilde{q}$ -ésima coordenada de  $E_{i',j}^{\Delta}$  es  $\delta_\tau(p)$ .
- ii) Las coordenadas restantes en ambas matrices son 0.
- a<sub>2</sub>)  $j$  es el lado no doblado de  $\Delta'$ , denotamos por  $j'$  al lado doblado de  $\Delta'$ .
- Distinguimos los casos cuando a  $j$  le asignamos una ó dos matrices.
- a<sub>21</sub>) Le asignamos sólo una matriz a  $j$  denotada por  $E_{i',j}^{\Delta}$ .
- i) La  $q$ -ésima coordenada es 1.
- ii) Si  $\tilde{q} \in i' \cap j$  es el punto final de una curva auxiliar  $e_{(q,\tilde{q})}^{\Delta,n}$  y existe  $(q_0, q_1, q_2, q, r_2, r_3, \tilde{q}, p)$  en  $\mathcal{B}_{i',j'}^{\Delta,n}$  entonces la  $\tilde{q}$ -ésima coordenada es  $\delta_\tau(p)$ .
- ii) Las coordenadas restantes son 0.
- a<sub>22</sub>) Le asignamos dos matrices a  $j$ . Denotamos por  $E_{i',j}^{\Delta}$  y  $E_{i',j}^{\overline{\Delta}}$  a las matrices de auxiliares.
- Denotamos a las matrices por  $E_{i',j}^{\Delta}$  y  $E_{i',j}^{\overline{\Delta}}$ .
- La  $q$ -ésima coordenada en ambas matrices 1 y el resto son 0.
- b)  $j$  no es lado de ningún triángulo doblado.
- Distinguimos los casos cuando le asignamos 2,3 ó 4 matrices a  $j$ .
- b<sub>1</sub>) Le asignamos 2 matrices a  $j$ .
- Asignamos una matriz por cada triángulo no doblado que tiene a  $j$  como uno de sus lados. Denotamos por  $E_{i',j}^{\Delta}$  a las matrices auxiliares.
- La  $q$ -ésima coordenada es 1 y el resto son 0.
- b<sub>2</sub>) Le asignamos 3 matrices a  $j$ .
- Asignamos una matriz por cada triángulo no doblado que tiene a  $j$  como uno de sus lados y las denotamos por  $E_{i',j}^{\Delta}$ . Además definimos una matriz adicional que denotaremos por  $E_{i',j}^{\overline{\Delta}}$ , En este caso  $\Delta$  es un triángulo de tipo 2 tal que  $j$  tiene etiqueta  $l_2$  en  $\Delta$ .
- Definamos primero la  $q$ -ésima columna en la matriz  $E_{i',j}^{\overline{\Delta}}$ .
- La  $q$ -ésima coordenada es 1 y el resto son 0.
- Ahora definamos las matrices  $E_{i',j}^{\Delta}$ .
- Denotemos por  $\Delta'$  al único triángulo doblado que comparte un lado con  $\Delta$ , siendo  $m$  y  $m'$  los lados de  $\Delta'$ , donde  $m'$  es el lado doblado de  $\Delta'$ . Distinguimos los casos cuando  $q$  es punto final de una curva auxiliar ó no lo es:
- i)  $q$  no es punto final de ninguna curva auxiliar.

- La  $q$ -ésima coordenada es 1.
- Si  $\tilde{q}$  es punto final de una curva auxiliar  $e_{i',j}^{\Delta,n}$ , existen  $x, x'$  puntos de cruce de  $i'$  con  $m'$ , el interior relativo del segmento  $[q, x]_{i'}$  interseca al arco  $m$  en sólo un punto y existe  $(x, x', \tilde{q}, r_1, r_2, r_3, r_l, p) \in \mathcal{B}_{i',m'}^{\Delta,n}$ , entonces la  $\tilde{q}$ -ésima coordenada es  $\delta_\tau(p)$ .

ii)  $q$  es punto final de una curva auxiliar  $e_{i',j}^{\Delta,n}$ .

- La  $q$ -ésima coordenada es 0.
- Si  $x, x'$  son puntos de cruce de  $i'$  con  $m'$ ,  $q'$  es punto de cruce de  $i'$  con  $j$ , el interior relativo del segmento  $[q', x]_{i'}$  interseca al arco  $m$  en sólo un punto,  $q''$  es el punto final de la curva auxiliar  $e_{i',j}^{\Delta,n-1}$  y existe  $(x, x', q, r_1, r_2, r_3, r_l, p) \in \mathcal{B}_{i',m'}^{\Delta,n}$ , entonces la  $q''$ -ésima coordenada es 1 cuando  $n > 1$  y la  $q'$ -ésima coordenada es 1 cuando  $n = 1$ .

$b_3$ ) Le asignamos 4 matrices a  $j$ .

Asignamos una matriz por cada triángulo no doblado que tiene a  $j$  como uno de sus lados, denotamos por  $E_{i',j}^\Delta$  a las matrices auxiliares. Además definimos dos matrices adicionales que denotaremos por  $E_{i',j}^{\overline{\Delta}}$ .

Definimos primero la  $q$ -ésima columna de  $E_{i',j}^{\overline{\Delta}}$ .

La  $q$ -ésima coordenada es 1 y el resto son 0.

Ahora definamos las matrices  $E_{i',j}^\Delta$ .

Denotemos por  $\Delta'$  al único triángulo doblado que comparte un lado con  $\Delta$ , siendo  $m$  y  $m'$  los lados de  $\Delta'$ , donde  $m'$  es el lado doblado de  $\Delta'$ . Distinguiamos los casos cuando  $q$  es punto final de una curva auxiliar ó no lo es:

i)  $q$  no es punto final de ninguna curva auxiliar.

- La  $q$ -ésima coordenada es 1.
- Si  $\tilde{q}$  es punto final de una curva auxiliar  $e_{i',j}^{\Delta,n}$ , existen  $x, x'$  puntos de cruce de  $i'$  con  $m'$ , el interior relativo del segmento  $[q, x]_{i'}$  interseca al arco  $m$  en sólo un punto y existe  $(x, x', \tilde{q}, r_1, r_2, r_3, r_l, p) \in \mathcal{B}_{i',m'}^{\Delta,n}$ , entonces la  $\tilde{q}$ -ésima coordenada es  $\delta_\tau(p)$ .

ii)  $q$  es punto final de una curva auxiliar  $e_{i',j}^{\Delta,n}$ .

- La  $q$ -ésima coordenada es 0.
- Si  $x, x'$  son puntos de cruce de  $i'$  con  $m'$ ,  $q'$  es punto de cruce de  $i'$  con  $j$ , el interior relativo del segmento  $[q', x]_{i'}$  interseca al arco  $m$  en sólo un punto,  $q''$  es el punto final de la curva auxiliar  $e_{i',j}^{\Delta,n-1}$  y existe  $(x, x', q, r_1, r_2, r_3, r_l, p) \in \mathcal{B}_{i',m'}^{\Delta,n}$ , entonces la  $q''$ -ésima coordenada es 1 cuando  $n > 1$  y la  $q'$ -ésima coordenada es 1 cuando  $n = 1$ .

Ahora con la ayuda de las matrices de desviación, las matrices auxiliares y la representación de cuerda  $m(\tau, i)$  vamos a definir la representación de arco  $M(\tau, i)$ .

**Definición 4.7.** Sea  $\{p, q\}$  el conjunto de extremos de  $j$ , definamos primeramente los vértices de la representación de arco  $M(\tau, i)$ . Sea  $j$  un arco de  $\tau^\circ$  consideramos los casos cuando  $p$  ó  $q$  (ó ambos) son puntos marcados ó no lo son:

a)  $p$  y  $q$  son puntos marcados.

$$(M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j.$$

b) Sólo un extremo de  $i'$  es punto marcado. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $q$  no es punto marcado y pertenece a un arco  $j_1$  de  $\tau^\circ$ .

En esta situación consideramos los siguientes dos subcasos:

$b_1)$   $j_1$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$ . Denotemos por  $m$  al lado no doblado de  $\Delta'$  y por  $q'$  al punto de cruce de  $i'$  con  $m$  tal que el interior relativo del segmento  $[q', q]_{i'}$  no interseca a ningún arco de  $\tau^\circ$ .

$$b_{11}) \text{ Si } j = j_1 \text{ entonces } (M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j / K_{j,q}.$$

$$b_{12}) \text{ } j = m.$$

$$(M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j / K_{j,q'}.$$

$$b_{13}) \text{ Si } m \neq j \neq j_1 \text{ entonces } (M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j.$$

$b_2)$   $j_1$  no es el lado de ningún triángulo doblado.

$$b_{21}) \text{ } j = j_1$$

$$(M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j / K_{j,q}.$$

$$b_{22}) \text{ Si } j \neq j_1 \text{ entonces } (M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j.$$

c) Ningún extremo de  $i'$  es punto marcado. Supongamos que  $p$  pertenece a  $j_1$  y  $q$  pertenece a  $j_2$ , donde  $j_1$  y  $j_2$  son arcos de  $\tau^\circ$ .

Consideramos los siguientes tres subcasos:

$c_1)$   $j_k$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta_k$  para  $k = 1, 2$ . Denotemos por  $m_k$  al lado no doblado de  $\Delta_k$  y por  $q_k$  al punto de cruce de  $i'$  con  $m_k$  tal que el interior relativo de los segmentos  $[q_1, p]_{i'}$   $[q_2, q]_{i'}$  no intersecan a ningún arco de  $\tau^\circ$ .

$$c_{11}) \text{ Si } j = j_1 \text{ entonces } (M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j / K_{j,p}.$$

$$c_{12}) \text{ Si } j = j_2 \text{ entonces } (M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j / K_{j,q}.$$

$$c_{13}) \text{ } j = m_k.$$

$$(M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j / K_{j,q_k}.$$

$$c_{14}) \text{ Si } m_k \neq j \neq j_k \text{ entonces } (M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j.$$

$c_2$ )  $j_1$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  y  $j_2$  no es el lado doblado de ningún triángulo doblado. Denotemos por  $m$  al lado no doblado de  $\Delta'$  y por  $p'$  al punto de cruce de  $i'$  con  $m$  tal que el interior relativo del segmento  $[p', p]_{i'}$  no intersecta a ningún arco de  $\tau^\circ$ .

$$c_{21}) \text{ Si } j = j_1 \text{ entonces } (M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j / K_{j,p}.$$

$$c_{22}) j = m.$$

$$(M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j / K_{j,p'}.$$

$$c_{23}) j = j_2.$$

$$(M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j / K_{j,q}.$$

$$c_{24}) \text{ Si } m \neq j \neq j_r \text{ para } r = 1, 2, \text{ entonces } (M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j.$$

El caso  $j_2$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$  y  $j_1$  no es el lado doblado de ningún triángulo doblado es simétrico.

$c_3$ ) Para  $k = 1, 2$ ,  $j_k$  no es el lado doblado ningún triángulo doblado.

$$c_{31}) j = j_1.$$

$$(M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j / K_{j,p}.$$

$$c_{32}) j = j_2.$$

$$(M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j / K_{j,q}.$$

$$c_{33}) \text{ Si } j \neq j_r \text{ entonces } (M(\tau, i))_j = (m(\tau, i))_j.$$

Ahora definimos las transformaciones lineales asociadas a cada flecha  $\alpha : j \rightarrow k$  en  $\widehat{Q}(\tau^\circ)$ , denotemos por  $\Delta^\alpha$  al único triángulo no doblado que contiene un segmento de  $\alpha$  en el interior. Para cada flecha  $\alpha : j \rightarrow k$  descomponemos la matriz  $m(\tau, i)_\alpha$  como la suma de dos matrices denotadas por  $m(\tau, i)_\alpha^+$  y  $m(\tau, i)_\alpha^-$ , donde  $m(\tau, i)_\alpha^+$  es la matriz con las entradas positivas de  $m(\tau, i)_\alpha$  y  $m(\tau, i)_\alpha^-$  es la matriz con entradas negativas de  $m(\tau, i)_\alpha$ . Consideramos los casos cuando  $p$  ó  $q$  (ó ambos) son puntos marcados ó no lo son:

a)  $p$  y  $q$  son puntos marcados.

Recordando como encajamos  $(\widehat{Q}(\tau^\circ), \widehat{S}(\tau^\circ))$  en  $(\Sigma, M)$  (Véase capítulo 3) distinguimos los siguientes dos casos.

$a_1$ )  $\alpha$  intersecta exactamente un arco de  $\tau^\circ$ .

Si ambas matrices  $m(\tau, i)_\alpha^+$  y  $m(\tau, i)_\alpha^-$  son distintas de la matriz cero entonces,

$$(M(\tau, i))_\alpha = E_{i',k}^{\overline{\Delta}^\alpha} (D_{i',k}^{\overline{\Delta}^\alpha} (m(\tau, i))_\alpha^+ + (m(\tau, i))_\alpha^-).$$

En caso contrario  $(M(\tau, i))_\alpha = E_{i',k}^{\Delta^\alpha} D_{i',k}^{\Delta^\alpha} m(\tau, i)_\alpha$ .

$a_2)$   $\alpha$  no interseca a ningún arco de  $\tau^\circ$  ó  $\alpha$  interseca a exactamente dos arcos de  $\tau^\circ$ .

Si ambas matrices  $m(\tau, i)_\alpha^+$  y  $m(\tau, i)_\alpha^-$  son distintas de la matriz cero entonces,

$$(M(\tau, i))_\alpha = E_{i',k}^{\Delta^\alpha} (D_{i',k}^{\Delta^\alpha} (m(\tau, i))_\alpha^+ + (m(\tau, i))_\alpha^-).$$

En caso contrario  $(M(\tau, i))_\alpha = E_{i',k}^{\Delta^\alpha} D_{i',k}^{\Delta^\alpha} m(\tau, i)_\alpha$ .

b) Sólo un extremo de  $i'$  es punto marcado. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $q$  no es punto marcado y pertenece a un arco  $j_1$  de  $\tau^\circ$ .

Consideramos los casos cuando  $j_1$  es el lado doblado de un triángulo doblado ó no lo es.

$b_1)$   $j_1$  es el lado doblado de un triángulo doblado  $\Delta'$ . Denotemos por  $m$  al lado no doblado de  $\Delta'$ .

Si ningún extremo de  $\alpha$  es  $j_1$  ó  $m$  entonces  $M(\tau, i)_\alpha$  se define como en el inciso  $a$ ). En caso contrario consideramos los siguientes dos subcasos:

$b_{11})$   $j_1 = j$  ó  $j = m$ . Consideramos los dos subcasos siguientes:

$b_{111})$   $\alpha$  interseca exactamente un arco de  $\tau^\circ$ .

Si ambas matrices  $m(\tau, i)_\alpha^+$  y  $m(\tau, i)_\alpha^-$  son distintas de la matriz cero entonces,

$$(M(\tau, i))_\alpha = (E_{i',k}^{\bar{\Delta}^\alpha} (D_{i',k}^{\bar{\Delta}^\alpha} (m(\tau, i))_\alpha^+ + (m(\tau, i))_\alpha^-)) \iota.$$

En caso contrario  $(M(\tau, i))_\alpha = E_{i',k}^{\bar{\Delta}^\alpha} D_{i',k}^{\bar{\Delta}^\alpha} m(\tau, i)_\alpha \iota$ .

Donde  $\iota : M(\tau, i)_j \rightarrow m(\tau, i)_j$  es la inclusión canónica.

$b_{112})$   $\alpha$  no interseca a ningún arco de  $\tau^\circ$  ó  $\alpha$  interseca a exactamente dos arcos de  $\tau^\circ$ .

Si ambas matrices  $m(\tau, i)_\alpha^+$  y  $m(\tau, i)_\alpha^-$  son distintas de la matriz cero entonces

$$(M(\tau, i))_\alpha = (E_{i',k}^{\Delta^\alpha} (D_{i',k}^{\Delta^\alpha} m(\tau, i)_\alpha^+ + m(\tau, i)_\alpha^-)) \iota. \text{ En caso contrario } (M(\tau, i))_\alpha = E_{i',k}^{\Delta^\alpha} D_{i',k}^{\Delta^\alpha} m(\tau, i)_\alpha \iota.$$

Donde  $\iota : M(\tau, i)_j \rightarrow m(\tau, i)_j$  es la inclusión canónica.

$b_{12})$   $j_1 = k$  ó  $m = k$ .

$b_{121})$   $\alpha$  interseca exactamente un arco de  $\tau^\circ$ .

Si ambas matrices  $m(\tau, i)_\alpha^+$  y  $m(\tau, i)_\alpha^-$  son distintas de la matriz cero entonces,

$$(M(\tau, i))_\alpha = \pi (E_{i',k}^{\bar{\Delta}^\alpha} (D_{i',k}^{\bar{\Delta}^\alpha} (m(\tau, i))_\alpha^+ + (m(\tau, i))_\alpha^-)).$$

En caso contrario  $(M(\tau, i))_\alpha = \pi E_{i',k}^{\bar{\Delta}^\alpha} D_{i',k}^{\bar{\Delta}^\alpha} m(\tau, i)_\alpha$ .

Donde  $\pi : m(\tau, i)_{j_1} \rightarrow M(\tau, i)_{j_1}$  es la proyección canónica.

$b_{122}$ )  $\alpha$  no interseca a ningún arco de  $\tau^\circ$  ó  $\alpha$  interseca a exactamente dos arcos de  $\tau^\circ$ .

Si ambas matrices  $m(\tau, i)_\alpha^+$  y  $m(\tau, i)_\alpha^-$  son distintas de la matriz cero entonces  $(M(\tau, i))_\alpha = \pi(E_{i',k}^{\Delta_\alpha}(D_{i',k}^{\Delta_\alpha}(m(\tau, i)_\alpha^+ + m(\tau, i)_\alpha^-)))$ . En caso contrario  $(M(\tau, i))_\alpha = \pi E_{i',k}^{\Delta_\alpha} D_{i',k}^{\Delta_\alpha} m(\tau, i)_\alpha$ .

Donde  $\pi : m(\tau, i)_j \longrightarrow M(\tau, i)_j$  es la proyección canónica.

$b_2$ )  $j_1$  no es el lado doblado de ningún triángulo doblado.

Si ningún extremo de  $\alpha$  es  $j_1$  entonces  $M(\tau, i)_\alpha$  se define como en el inciso  $a$ ). En caso contrario consideramos los siguientes dos subcasos:

$b_{21}$ )  $j_1 = j$ .

En esta situación distinguimos los siguientes dos subcasos:

$b_{211}$ )  $\alpha$  interseca exactamente un arco de  $\tau^\circ$ .

Si ambas matrices  $m(\tau, i)_\alpha^+$  y  $m(\tau, i)_\alpha^-$  son distintas de la matriz cero entonces  $(M(\tau, i))_\alpha = (E_{i',k}^{\bar{\Delta}_\alpha}(D_{i',k}^{\bar{\Delta}_\alpha} m(\tau, i)_\alpha^+ + m(\tau, i)_\alpha^-))\iota$ . En caso contrario  $(M(\tau, i))_\alpha = E_{i',k}^{\bar{\Delta}_\alpha} D_{i',k}^{\bar{\Delta}_\alpha} m(\tau, i)_\alpha \iota$ .

$b_{212}$ )  $\alpha$  no interseca a ningún arco de  $\tau^\circ$  ó  $\alpha$  interseca a exactamente dos arcos de  $\tau^\circ$ .

Si ambas matrices  $m(\tau, i)_\alpha^+$  y  $m(\tau, i)_\alpha^-$  son distintas de la matriz cero entonces  $(M(\tau, i))_\alpha = (E_{i',k}^{\Delta_\alpha}(D_{i',k}^{\Delta_\alpha} m(\tau, i)_\alpha^+ + m(\tau, i)_\alpha^-))\iota$ . En caso contrario  $(M(\tau, i))_\alpha = E_{i',k}^{\Delta_\alpha} D_{i',k}^{\Delta_\alpha} m(\tau, i)_\alpha \iota$ .

Donde  $\iota : M(\tau, i)_j \longrightarrow m(\tau, i)_j$  es la inclusión canónica.

$b_{22}$ )  $j_1 = k$ .

$b_{221}$ )  $\alpha$  interseca exactamente un arco de  $\tau^\circ$ .

Si ambas matrices  $m(\tau, i)_\alpha^+$  y  $m(\tau, i)_\alpha^-$  son distintas de la matriz cero entonces  $(M(\tau, i))_\alpha = \pi(E_{i',k}^{\bar{\Delta}_\alpha}(D_{i',k}^{\bar{\Delta}_\alpha} m(\tau, i)_\alpha^+ + m(\tau, i)_\alpha^-))$ . En caso contrario  $(M(\tau, i))_\alpha = \pi E_{i',k}^{\bar{\Delta}_\alpha} D_{i',k}^{\bar{\Delta}_\alpha} m(\tau, i)_\alpha$ .

$b_{222}$ )  $\alpha$  no interseca a ningún arco de  $\tau^\circ$  ó  $\alpha$  interseca a exactamente dos arcos de  $\tau^\circ$ .

Si ambas matrices  $m(\tau, i)_\alpha^+$  y  $m(\tau, i)_\alpha^-$  son distintas de la matriz cero entonces  $(M(\tau, i))_\alpha = \pi(E_{i',k}^{\Delta_\alpha}(D_{i',k}^{\Delta_\alpha} m(\tau, i)_\alpha^+ + m(\tau, i)_\alpha^-))$ . En caso contrario  $(M(\tau, i))_\alpha = \pi E_{i',k}^{\Delta_\alpha} D_{i',k}^{\Delta_\alpha} m(\tau, i)_\alpha$ .

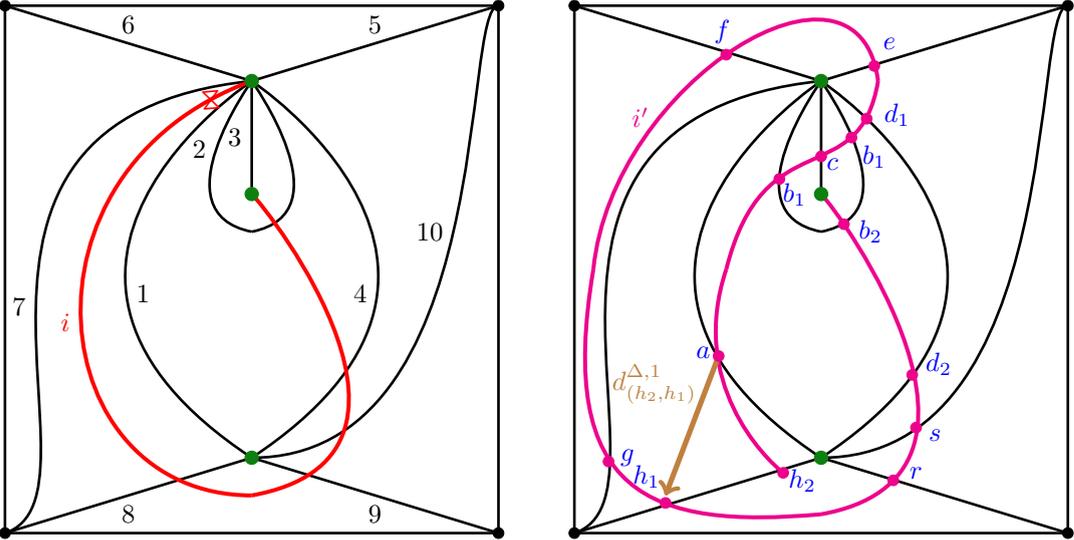
Donde  $\pi : m(\tau, i)_j \longrightarrow M(\tau, i)_j$  es la proyección canónica.

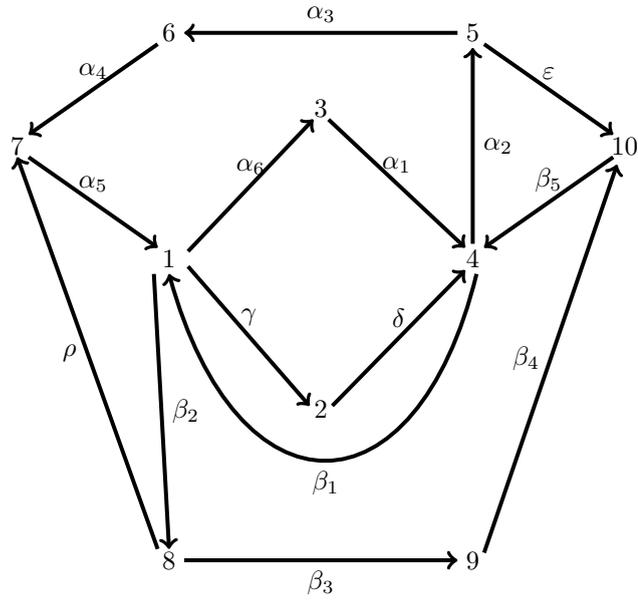
c) Ningún extremo de  $i'$  es punto marcado. Supongamos que  $p$  pertenece a  $j_1$  y  $q$  pertenece a  $j_2$ , donde  $j_1$  y  $j_2$  son arcos de  $\tau^\circ$ .

En esta situación aplicamos las reglas del inciso  $b$ ) en  $j_1$  y  $j_2$  para definir la transformación  $(M(\tau, i))_\alpha$ .

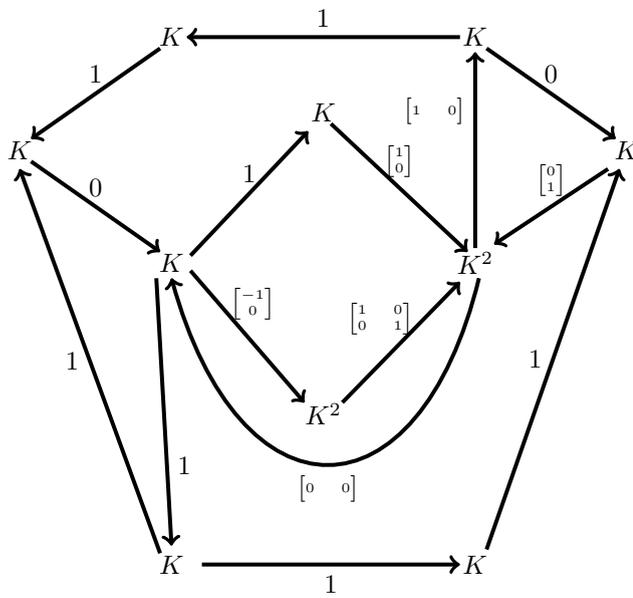
EJEMPLOS DE LA REPRESENTACIÓN DE ARCO  $M(\tau, i)$  (DEFINICIÓN 4.7).

1) Ejemplo 1.





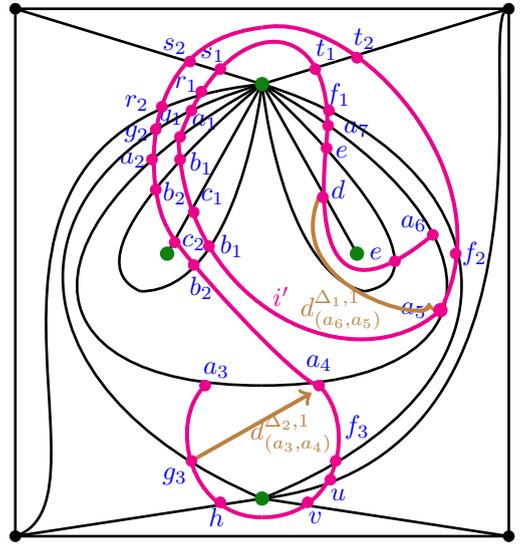
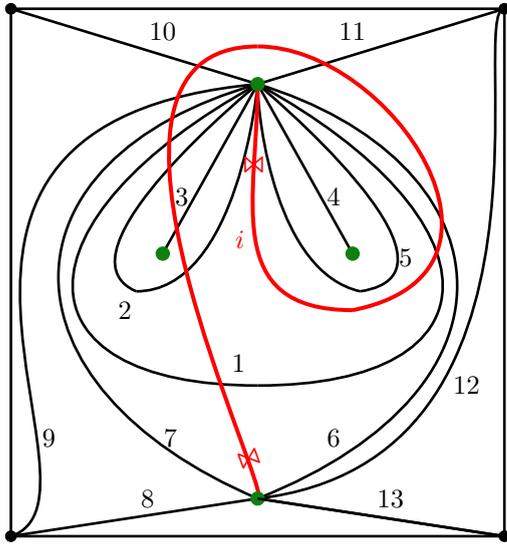
(a) Carcaj

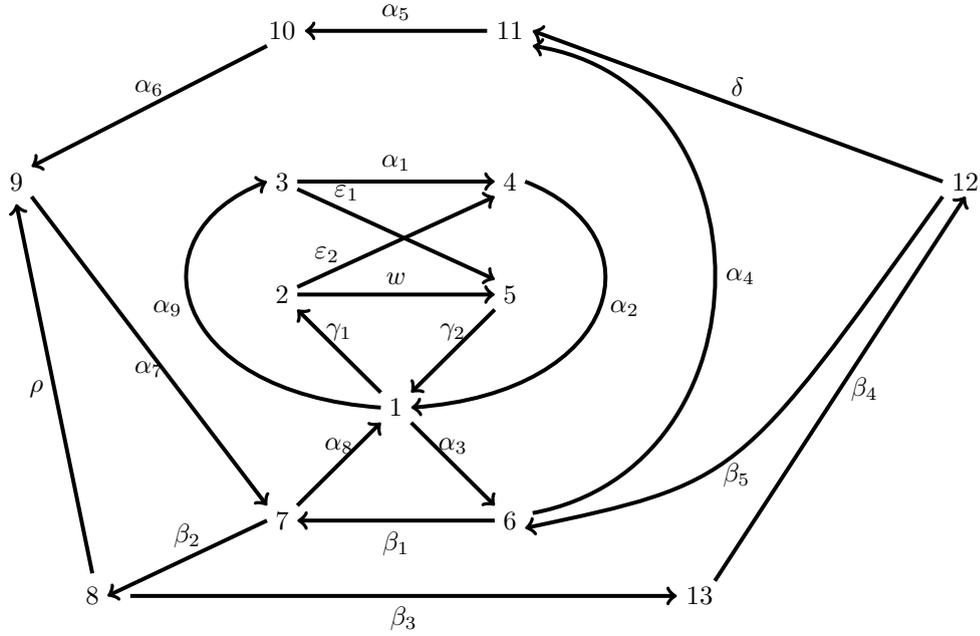


$$\pi E_{i,8}^{\Delta,1} D_{i,8}^{\Delta,1} m(\tau, i)_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

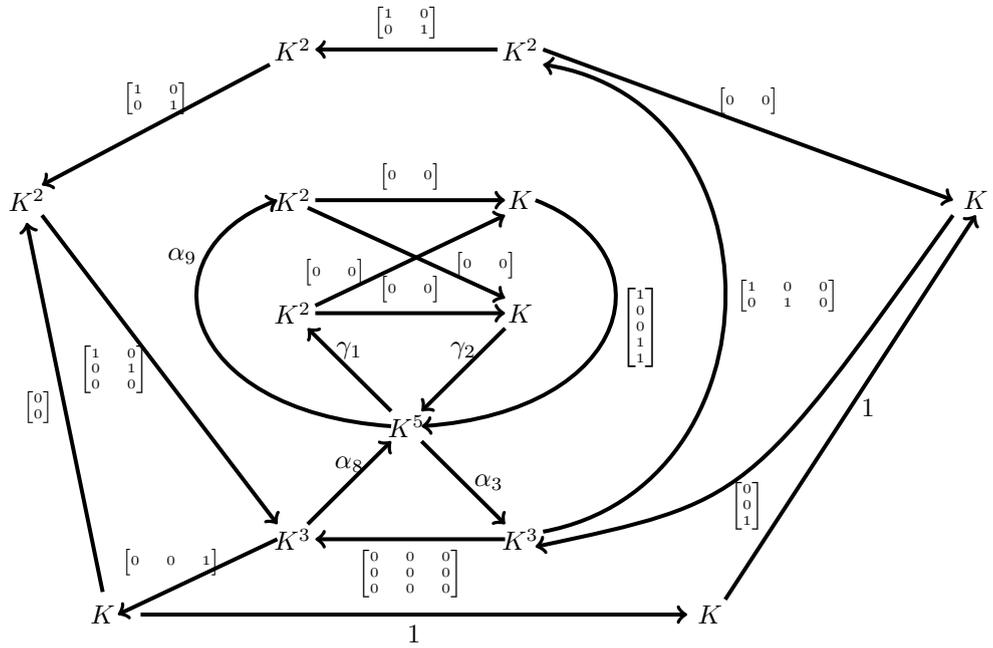
(b) Representación de arco

2) Ejemplo 2.





(c) Carcaj



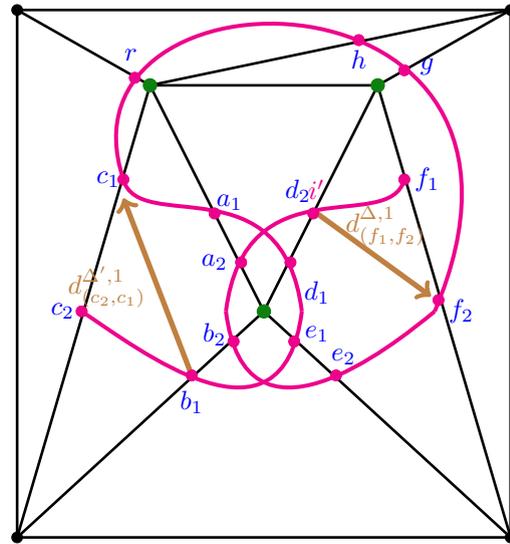
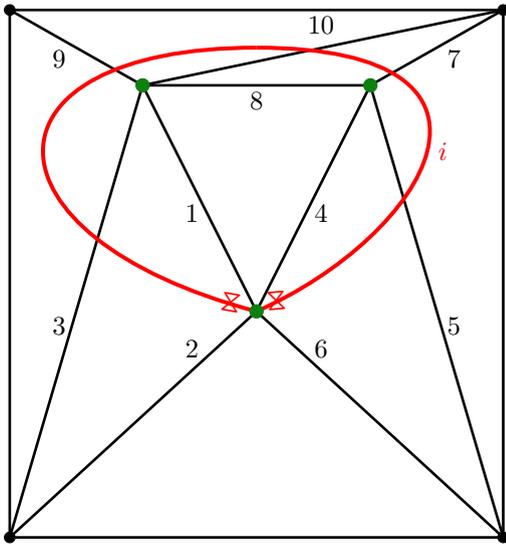
$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

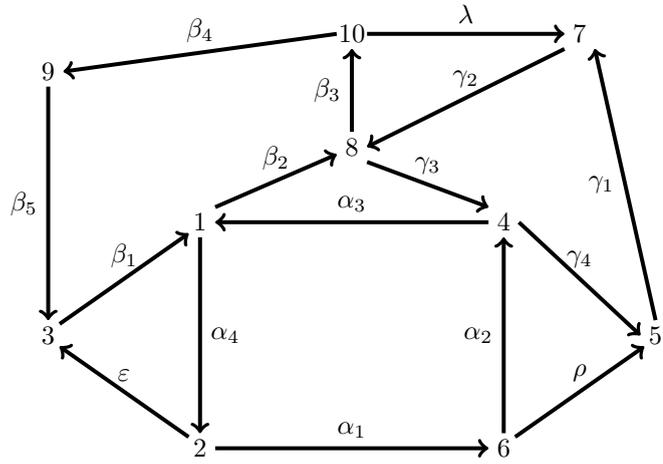
$$\pi E_{i',1}^{\Delta_2} D_{i',1}^{\Delta_2} m(\tau, i)_{\alpha_8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi E_{i',3}^{\Delta_1} D_{i',3}^{\Delta_1} m(\tau, i)_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} I_7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

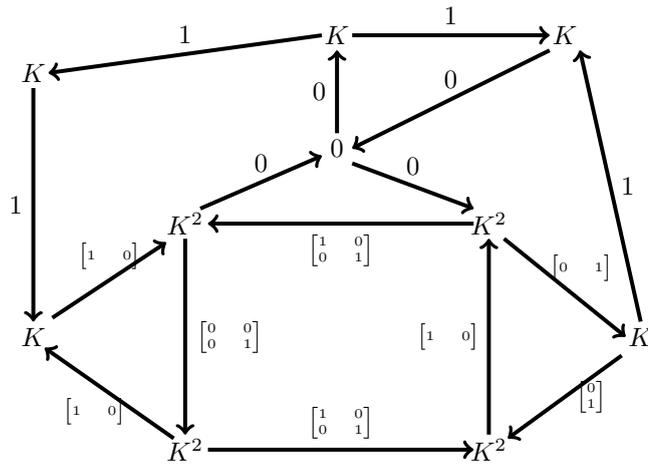
(d) Representación de arco

3) Ejemplo 3.





(e) Carcaj



$$\pi E_{i',5}^{\Delta_1} D_{i',5}^{\Delta_1} m(\tau, i)_{\gamma_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi E_{i',3}^{\Delta_1} D_{i',5}^{\Delta_1} m(\tau, i)_{\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(f) Representación de arco

## 5. Teorema Principal.

**Proposición 5.1.** Sean  $\tau$  una triangulación etiquetada de una superficie con frontera y puntos marcados  $(\Sigma, M)$ ,  $i$  un arco etiquetado que no pertenece a  $\tau$  y  $k$  un arco de  $\tau^\circ$ . Para todo punto de cruce  $x$  de  $i'$  con el arco  $k$  que no es punto inicial de ninguna desviación, se tiene que  $\partial_\alpha(S(\tau)) = 0$  para toda flecha  $\alpha : j \rightarrow k$  en  $Q(\tau)$ .

*Demostración.*

Sean  $k$  un arco de  $\tau^\circ$  y  $x$  un punto de cruce de  $i'$  con  $k$ . Vamos a considerar los casos cuando el arco  $k$  es lado de un triángulo doblado o no lo es.

a) El arco  $k$  es lado de un triángulo doblado  $\Delta'$ .

En este caso vamos a considerar los sub-casos cuando el arco  $k$  es el lado doblado de  $\Delta'$  o es el lado no doblado de  $\Delta'$ .

$a_1)$   $k$  es el lado doblado de  $\Delta'$ , denotemos por  $k'$  al lado no doblado de  $\Delta'$ .

Sea  $\Delta$  el triángulo no doblado que comparte al arco  $k'$  como uno de sus lados, el triángulo  $\Delta$  puede ser de tipo 2 o de tipo 3. Consideramos las dos posibilidades mencionadas.

$a_{11})$  El triángulo  $\Delta$  es de tipo 2, véase la Figura 63.

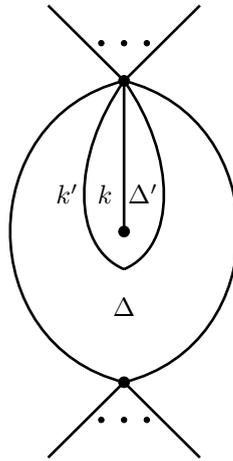
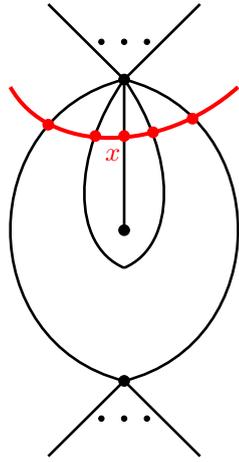
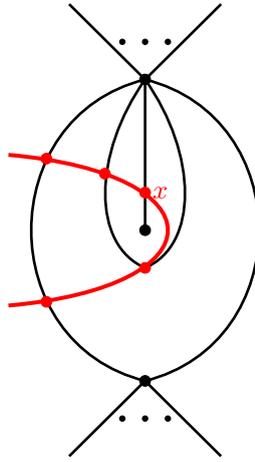


Figura 63: El triángulo  $\Delta$  es de tipo 2.

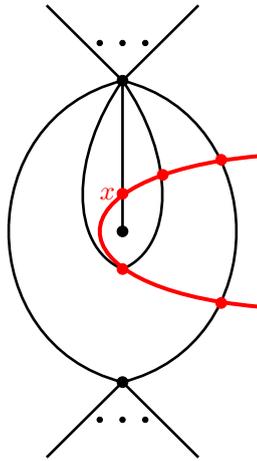
Si  $x$  no es el punto inicial de ninguna desviación entonces la curva  $i'$  localmente se ve como una de las quince configuraciones de la Figura 64.



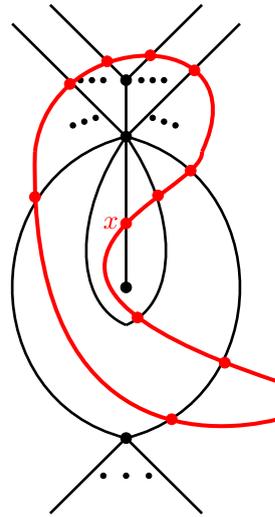
(a)



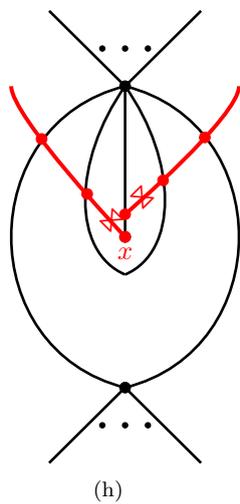
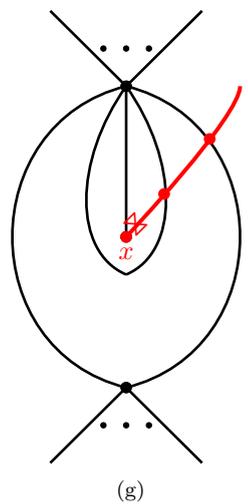
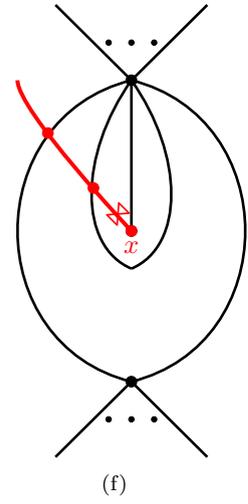
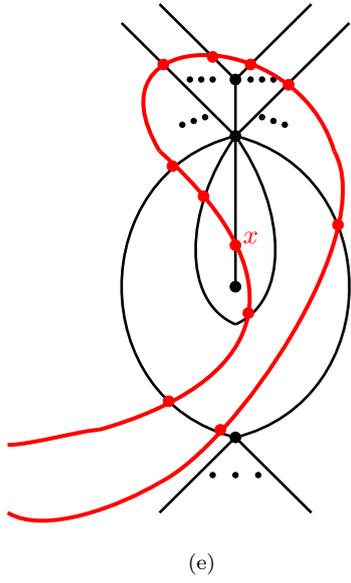
(b)

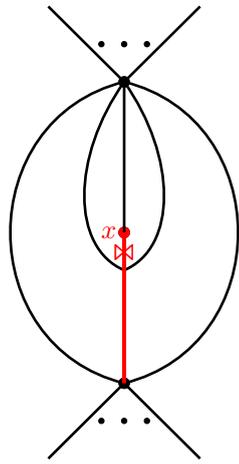


(c)

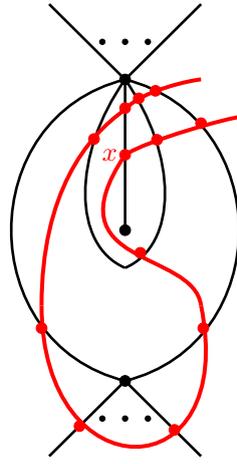


(d)

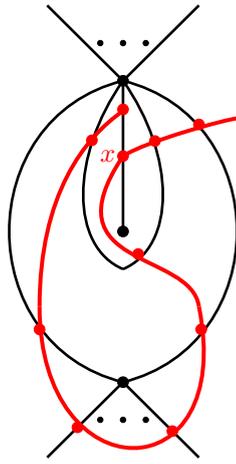




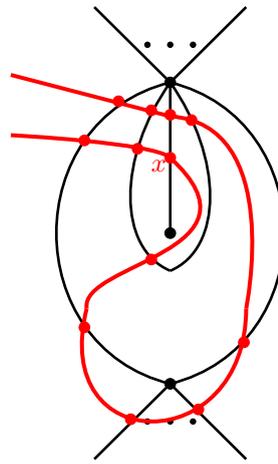
(i)



(j)



(k)



(l)

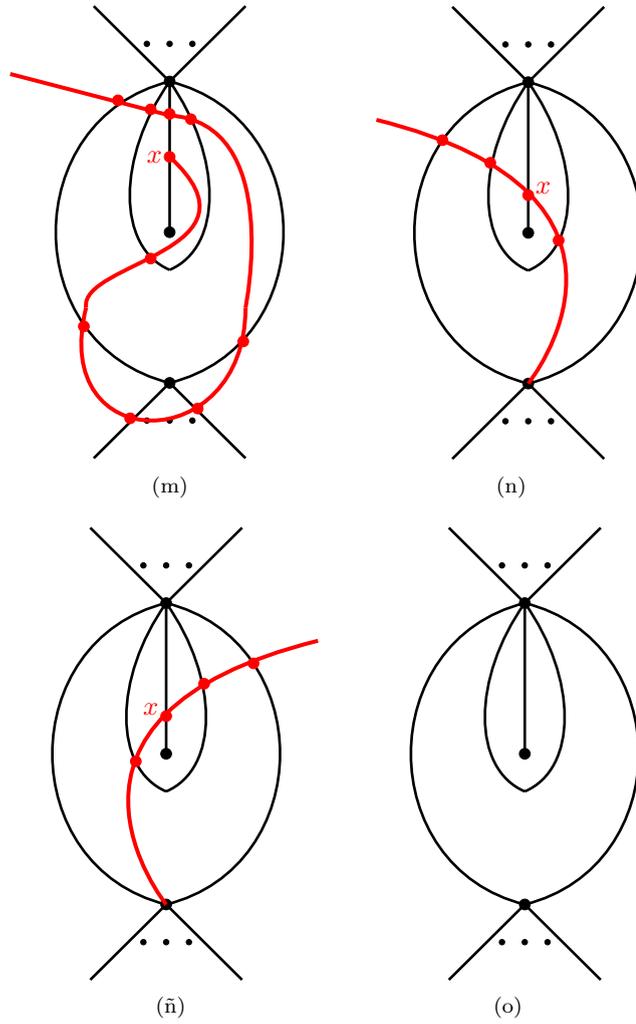


Figura 64:  $v$  no es punto inicial de ninguna desviación y ninguna curva auxiliar. .

Un sencillo cálculo en cada una de las quince configuraciones de la Figura 64 verifica que  $\partial_\alpha(\widehat{S}(\tau)) = 0$ .

$a_{12}$ ) El triángulo  $\Delta$  es de tipo 3.

En esta situación se realiza un análisis (en el arco azul) en el inciso  $a$ ) y  $b$ ) de la Figura 65 similar al del caso anterior.

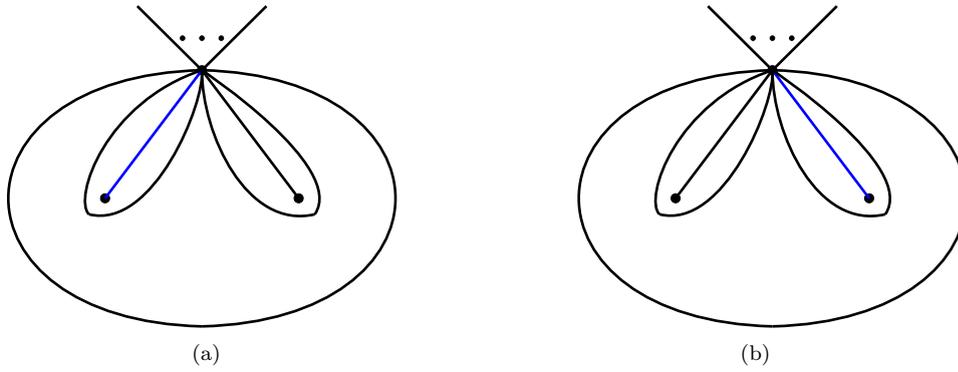


Figura 65:  $\Delta$  es un triángulo de tipo 3.

$a_2$ )  $k$  es el lado no doblado de  $\Delta'$ .

En esta situación se realiza un análisis (en el arco azul) en el inciso  $a), b)$  y  $c)$  de la Figura 66 similar al del caso anterior.

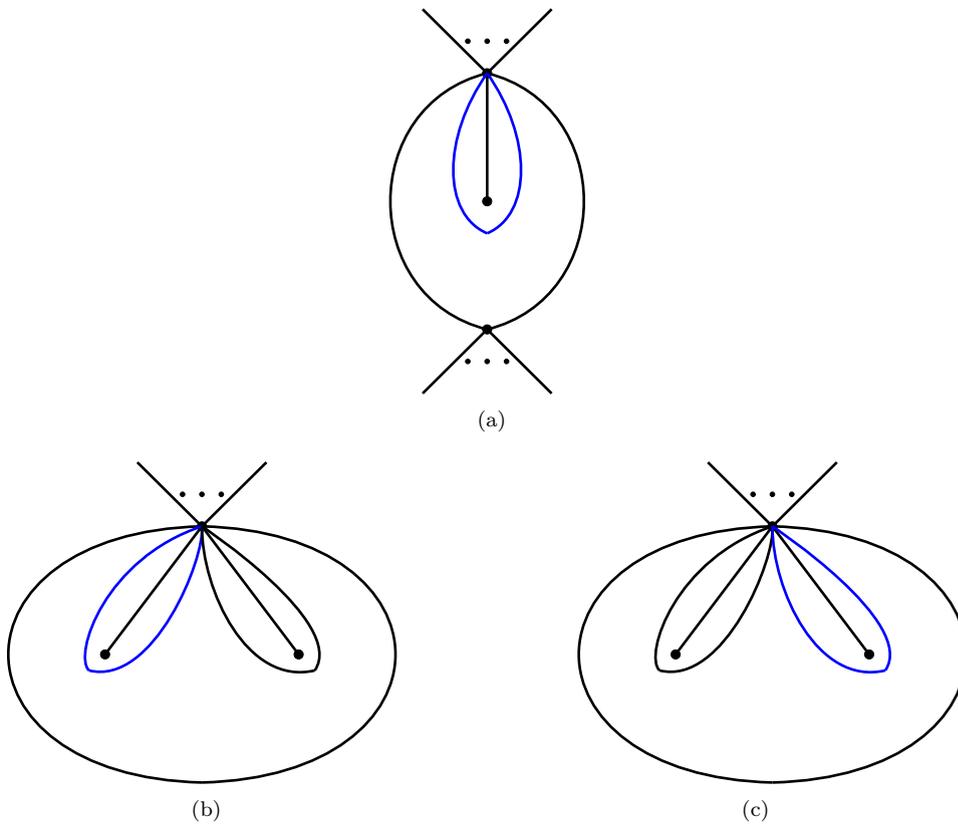
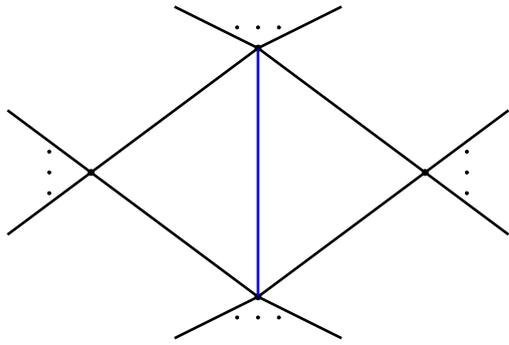


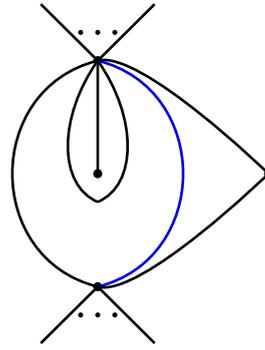
Figura 66: El arco  $k$  es el lado no doblado de  $\Delta'$ .

b) El arco  $k$  no es lado de ningún triángulo doblado.

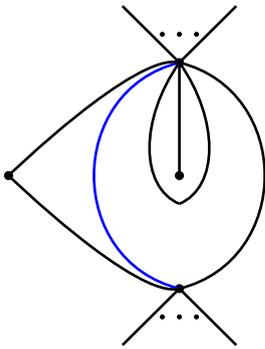
En esta situación se realiza un análisis (en el arco azul) en cada una de las configuraciones de la Figura 67 similar al del caso anterior.



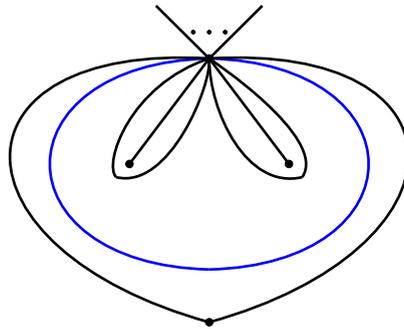
(a)



(b)



(c)



(d)

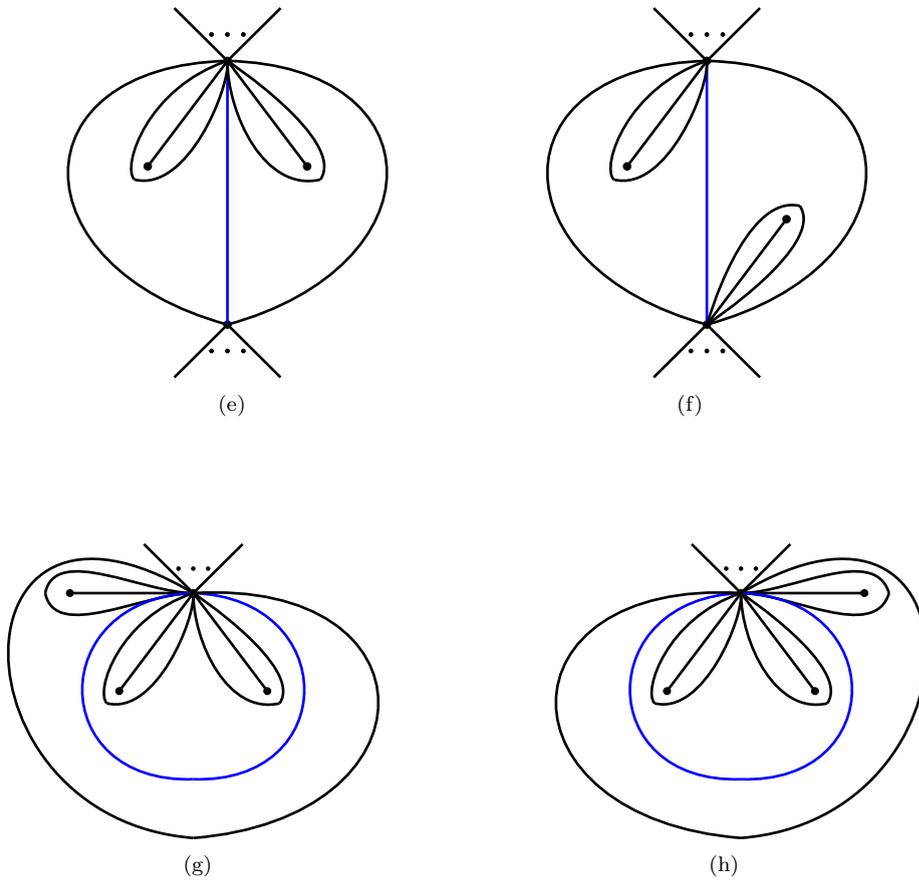


Figura 67: El arco  $k$  no es lado de ningún triángulo doblado.

□

Ahora vamos a probar que la representación de arco  $M(\tau, i)$  cumple las relaciones Jacobianas.

**Teorema 5.2.** *Si  $\tau$  una triangulación etiquetada de una superficie con frontera y puntos marcados e  $i$  un arco etiquetado que no pertenece a  $\tau$ , entonces la representación de arco  $M(\tau, i)$  cumple las relaciones Jacobianas y el módulo  $M(\tau, i)$  es nilpotente.*

*Demostración.* Por la Nota 2.6 es suficiente probar que  $M(\tau, i)$  es una representación nilpotente de  $\widehat{Q}(\tau^\circ)$  y cumple las relaciones jacobianas de  $\widehat{S}(\tau^\circ)$ . Para cada arco  $j$  en  $\tau^\circ$  denotamos por  $n_j$  al número total de 1-desviaciones que tienen punto inicial en  $j$ .

Denotemos por  $\Delta^1, \dots, \Delta^s$  a los triángulos de tipo 2 en  $\tau^\circ$  y sean  $l_1^{\Delta^1}, \dots, l_1^{\Delta^s}$  los lados con etiqueta  $l_1$  en los triángulos  $\Delta^1, \dots, \Delta^s$  respectivamente. Sea  $(j_1, \dots, j_r)$  un orden de los arcos de  $\tau^\circ$  con la propiedad que  $j_h = l_1^{\Delta^h}$  para  $1 \leq h \leq s$ , denotemos por  $J$  al ideal bilateral de  $R\langle\langle\widehat{Q}(\tau^\circ)\rangle\rangle$  generado por las derivadas cíclicas de  $\widehat{S}(\tau^\circ)$  y denotamos por  $J(\widehat{S}(\tau^\circ))$  a la cerradura topológica de  $J$  en  $R\langle\langle\widehat{Q}(\tau^\circ)\rangle\rangle$ . Vamos a definir recursivamente representaciones  $M_0, \dots, M_r$  de  $\widehat{Q}(\tau^\circ)$  con las siguientes propiedades:

$$M_0 = m(\tau, i), M_r = M(\tau, i)$$

$$\dim(W_l) \geq \dim(W_{l-1}) + n_{j_l}. \quad (1)$$

donde  $W_l = \{w \in M_l | Jw = 0\}$  es el subespacio vectorial maximal de  $M_l$  que satisface las derivadas cíclicas.

En todas las representaciones  $M_l$  con  $r \geq l \geq 1$  el espacio vectorial asociado a cada arco  $j$  de  $\tau^\circ$  será  $M(\tau, i)_j$ . Definimos  $M_0$  como  $m(\tau, i)$  y para cada  $r - 1 \geq l \geq 1$  una vez definido  $M_l$  consideramos todas las flechas  $\alpha^{l+1}$  en  $\widehat{Q}(\tau^\circ)$  que tienen como punto inicial a  $j_{l+1}$ . Definimos  $M_{l+1}$  como sigue: Consideramos primero el caso cuando  $\alpha^{l+1}$  tiene intersección no vacía con exactamente un arco de  $\tau^\circ$ .

Si  $D_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}}$  es una matriz de desviaciones especiales entonces

$$M(\tau, i)_{\alpha^{l+1}} := m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}} E_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}} D_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}}$$

en caso que  $t(\alpha^{l+1})$  no sea extremo de  $i'$  y

$$M(\tau, i)_{\alpha^{l+1}} := m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}} E_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}} D_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}}{}^t$$

en caso que  $t(\alpha^{l+1})$  sea extremo de  $i'$ .

Ahora si  $D_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}}$  no es una matriz de desviaciones especiales y  $t(\alpha^{l+1})$  no es extremo de  $i'$  definimos,

$$M(\tau, i)_{\alpha^{l+1}} := E_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}} (D_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}} m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^+ + m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^-)$$

siempre que  $m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^+ \neq 0 \neq m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^-$ . Por otro lado si  $m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^+ = 0$  ó  $m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^- = 0$  entonces,

$$M(\tau, i)_{\alpha^{l+1}} := E_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}} D_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}} m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}$$

(Respectivamente  $M(\tau, i)_{\alpha^{l+1}} := \pi(E_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}} (D_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}} m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^+ + m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^-))$  ó  $M(\tau, i)_{\alpha^{l+1}} := \pi(E_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}} D_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\overline{\Delta}} m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}})$  si  $t(\alpha^{l+1})$  es extremo de  $i'$ .)

Por otro lado consideramos el caso cuando  $\alpha^{l+1}$  tiene intersección vacía con los arcos de  $\tau^\circ$  ó  $\alpha^{l+1}$  tiene intersección no vacía con exactamente dos arcos de  $\tau^\circ$  y  $t(\alpha^{l+1})$  no es extremo de  $i'$ , definimos,

$$M(\tau, i)_{\alpha^{l+1}} := E_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\Delta} (D_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\Delta} m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^+ + m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^-)$$

siempre que  $m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^+ \neq 0 \neq m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^-$ . Ahora si  $m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^+ = 0$  ó  $m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^- = 0$  entonces,

$$M(\tau, i)_{\alpha^{l+1}} := E_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\Delta} D_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\Delta} m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}$$

(Respectivamente  $M(\tau, i)_{\alpha^{l+1}} := \pi(E_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\Delta}(D_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\Delta} m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^+ + m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}}^-))$  ó  $M(\tau, i)_{\alpha^{l+1}} := \pi(E_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\Delta} D_{i', t(\alpha^{l+1})}^{\Delta} m(\tau, i)_{\alpha^{l+1}})$  si  $t(\alpha^{l+1})$  es extremo de  $i'$ .)

Para las flechas  $a$  en  $\widehat{Q}(\tau^\circ)$  que no tiene a  $j_{l+1}$  como punto inicial definimos  $(M_{l+1})_a := (M_l)_a$ .

Notemos que  $M_r = M(\tau, i)$ . Primero probaremos que;

$$\dim(W_l) \geq \dim(W_{l-1}) + n_j.$$

**Lema 5.3.** Para toda  $r - 1 \geq l \geq 0$  se tiene que  $W_l \subseteq W_{l+1}$ .

*Demostración.* Para probar este lema vamos a considerar los casos que cuando  $j_{l+1}$  es lado de un triángulo doblado ó no lo es.

a)  $j_{l+1}$  es lado de un triángulo doblado  $\Delta'$ .

En esta situación tenemos que  $j_{l+1}$  es el lado doblado de  $\Delta'$  ó  $j_{l+1}$  es el lado no doblado de  $\Delta'$ .

$a_1)$   $j_{l+1}$  es el lado doblado de  $\Delta'$ . Denotemos por  $m$  al lado no doblado de  $\Delta'$ .

Dado que  $m$  es el lado no doblado de  $\Delta'$  tenemos que  $m$  es lado de un triángulo de tipo 2 ó  $m$  es lado de un triángulo de tipo 3. Consideramos las dos posibilidades mencionadas.

$a_{11})$   $m$  es lado de un triángulo  $\Delta$  de tipo 2.

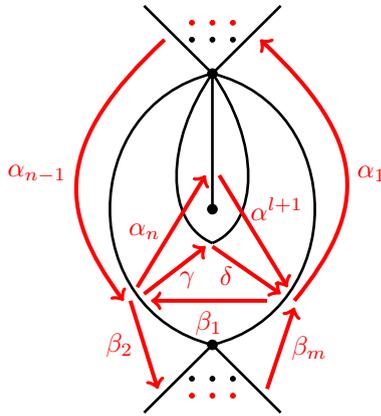


Figura 68:  $m$  es lado de un triángulo de tipo 2.

Con la notación de la Figura 68 la flecha  $\alpha^{l+1}$  aparece como factor sólo en los términos  $-\alpha_n \dots \alpha_1 \alpha^{l+1}$  y  $\alpha_n \beta_1 \alpha^{l+1}$  del potencial  $\widehat{S}(\tau^\circ)$ . Si  $W_l \not\subseteq W_{l+1}$  entonces existen un arco  $k$ , un elemento  $v$  de la base de  $(M_{l+1})_k$  correspondiente a un punto de cruce de  $i'$  con  $k$  y  $\xi \in \{\partial_a(\widehat{S}(\tau^\circ)) | a \in \widehat{Q}(\tau^\circ) \text{ y } t(a) = k\}$  tal que  $\xi_{M_l} v = 0$  pero  $\xi_{M_{l+1}} v \neq 0$ . Ahora dado que  $M_{l+1}$  puede diferir de  $M_l$  sólo en la acción de  $\alpha^{l+1}$  esto implica que  $\xi = \partial_a(\widehat{S}(\tau^\circ))$  para  $a \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1\}$  y existe una desviación con punto inicial en  $j_{l+1}$  y punto final en  $t(\alpha^{l+1})$  (si no existiera dicha desviación

entonces  $M_l$  coincide con  $M_{l+1}$ ). Si probamos que  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$  para  $a \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1\}$  y  $\xi_{M_{l+1}} = 0$  para  $\xi = \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))$  entonces dicho vector base no existe.

**Lema 5.4.**  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$  si  $a \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1\}$ , y  $\xi_{M_{l+1}} = 0$  para  $\xi = \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))$ .

*Demostración.* Empecemos por verificar que  $\xi_{M_{l+1}} = 0$  para  $\xi = \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))$ . Es suficiente verificar que  $\partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))$  actúa como cero en cada punto de cruce de  $i'$  con  $j_{l+1}$ .

Sea  $v$  un elemento de la base de  $j_{l+1}$ , si  $v$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta,1}$  entonces por la Proposición 5.1 se tiene el resultado. Ahora si  $v$  es punto inicial de una 1-desviación ó curva 1-auxiliar consideramos la colección maximal de desviaciones  $d^{\Delta,n}$  ó curvas auxiliares  $e^{\Delta,n}$  que tiene a  $v$  como punto inicial. Véase Figura 69.

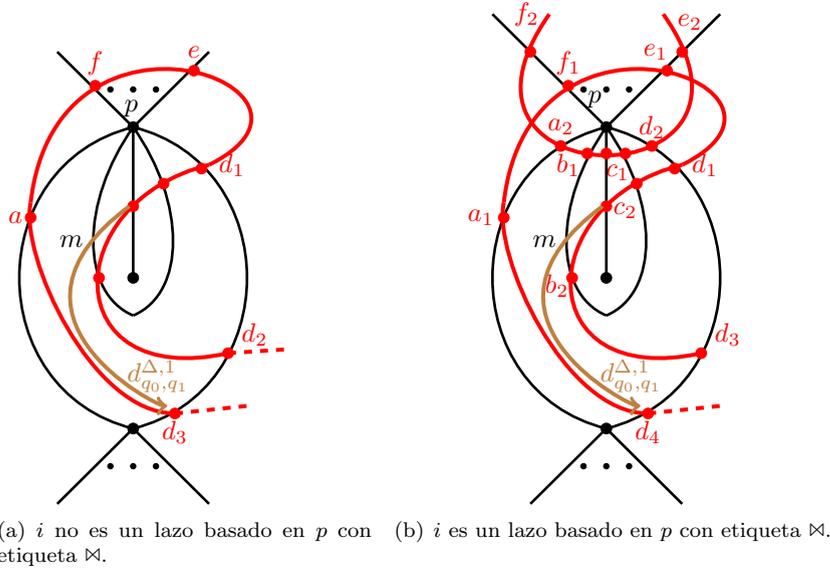


Figura 69: Colección maximal de desviaciones y curvas auxiliares con punto inicial  $v$ .

Analicemos a) de la Figura 69.

$$\begin{aligned} \partial_a(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= -(\alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha^{l+1})_{M_{l+1}} v + (\beta_1 \alpha^{l+1})_{M_{l+1}} v = \\ &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [0 \ 0 \ 1] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0. \\ \partial_a(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -(\alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha^{l+1})_{M_{l+1}} v + (\beta_1 \alpha^{l+1})_{M_{l+1}} v = \\ &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [0 \ 0 \ 1] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $v \in W_{l+1}$  pero  $v \notin W_l$ .

Ahora analicemos el inciso b) de la Figura 69.

$$\partial_a(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = -(\alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha^{l+1})_{M_{l+1}} v + (\beta_1 \alpha^{l+1})_{M_{l+1}} v =$$

$$\begin{aligned}
& -I_2 \dots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \\
\partial_a(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -(\alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha^{l+1})_{M_{l+1}} v + (\beta_1 \alpha^{l+1})_{M_{l+1}} v = -I_2 \dots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $v \in W_{l+1}$  pero  $v \notin W_l$ .

Ahora procedemos a verificar que  $\text{Ker}(\xi_{M_l}) \subseteq \text{Ker}(\xi_{M_{l+1}})$  si  $a \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1\}$ .

Consideramos los casos cuando  $a = \beta_1$  ó  $a \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ .

Caso 1.  $\xi = \partial_{\beta_1}(S(\tau^\circ))$ .

Analicemos *a*) de la Figura 69.

$\partial_{\beta_1}(\widehat{S}(\tau^\circ)) = -\beta_m \dots \beta_2 + \alpha^{l+1} \alpha_n + \delta\gamma$  es fácil verificar que  $\alpha_n$  y  $\gamma$  actúan como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ . Además existe  $s \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $\beta_s$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$  ya que  $i$  no se auto-interseca, por lo tanto se tiene la afirmación requerida.

Ahora para el inciso *b*) de la Figura 69 basta verificar que  $(\alpha^{l+1} \alpha_n + \delta\gamma)_{M_l} = (\alpha^{l+1} \alpha_n + \delta\gamma)_{M_{l+1}}$  ya que existe  $s \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $\beta_s$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$  pues  $i$  no se auto-interseca.

$$\begin{aligned}
(\alpha^{l+1} \alpha_n + \delta\gamma)_{M_l} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \\
(\alpha^{l+1} \alpha_n + \delta\gamma)_{M_{l+1}} &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos la afirmación requerida.

Caso 2.  $\xi = \partial_a(\widehat{S}(\tau^\circ))$  para  $a \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ .

En esta situación tenemos que  $\partial_{\alpha_r}(S(\tau^\circ)) = -\alpha_{r-1} \dots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \dots \alpha_{r+1} + N$ , donde  $N$  es un sumando de  $\widehat{S}(\tau^\circ)$  que contiene a la flecha  $\alpha_r : s \rightarrow t$ . Distinguimos los subcasos cuando algún extremo (ó ambos) de  $\alpha_r$  no es lado de ningún triángulo doblado ó ningún extremo de  $\alpha_r$  es lado de ningún triángulo doblado.

Subcaso 1. Ningún extremo de  $\alpha_r$  es lado de ningún triángulo doblado.

Dado que  $s$  y  $t$  no son lados de ningún triángulo doblado entonces tenemos dos posibilidades para la flecha  $\alpha_r$ . Véase Figura 70.

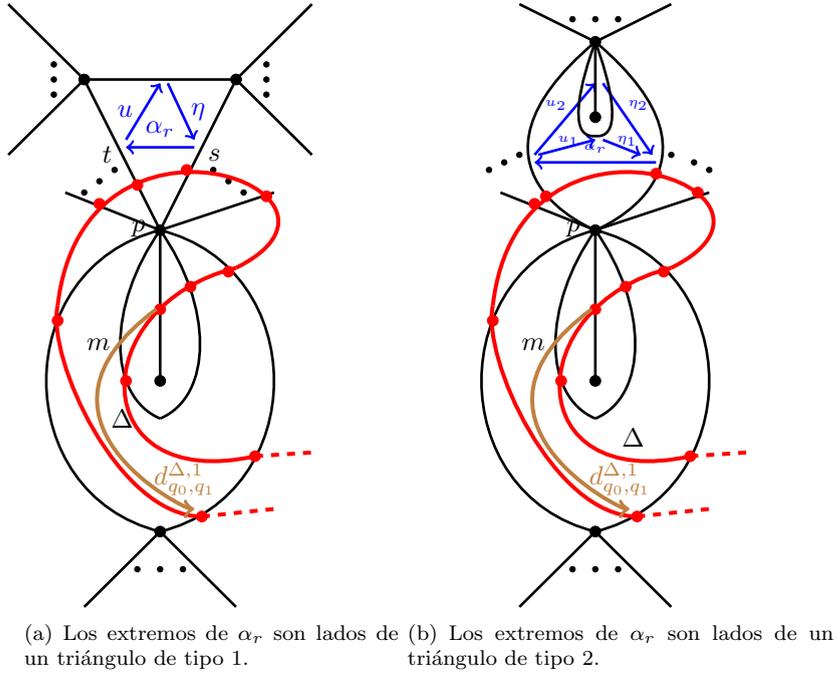


Figura 70: Los extremos de  $\alpha_r$  no son lados de ningún triángulo doblado. .

Si el arco  $i$  no es un lazo basado en la pinchadura  $p$  entonces  $i'$  localmente se ve como una de las dos configuraciones de la Figura 71.

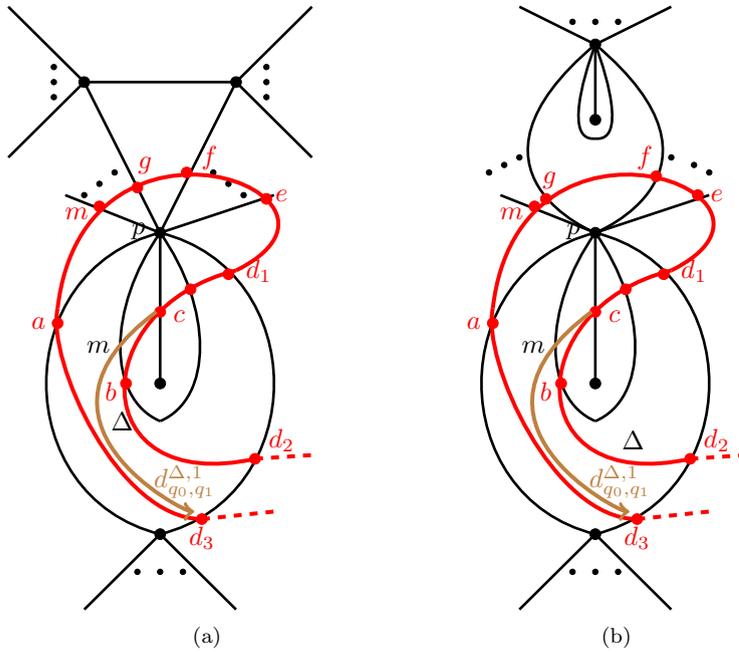


Figura 71: El arco  $i$  no es un lazo basado en  $p$  con etiqueta  $\bowtie$  en  $p$ .

Analicemos primero el inciso a) de la Figura 71. En este caso  $N = \eta u$  entonces  $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ)) = -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta u$ , es fácil observar que la flecha

$\alpha_n$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ . Ahora dado que en  $t$  no hay puntos iniciales de desviaciones  $d^{\Delta',1}$  entonces el sumando  $\eta u$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ . Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

Ahora analicemos el inciso b) de la Figura 71. En este caso  $N = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2$  entonces  $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ)) = -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2$ , análogamente que en el inciso a) de la Figura 71 es fácil ver que las flecha  $\alpha_n$ ,  $u_1$  y  $u_2$  actúan como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ . Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

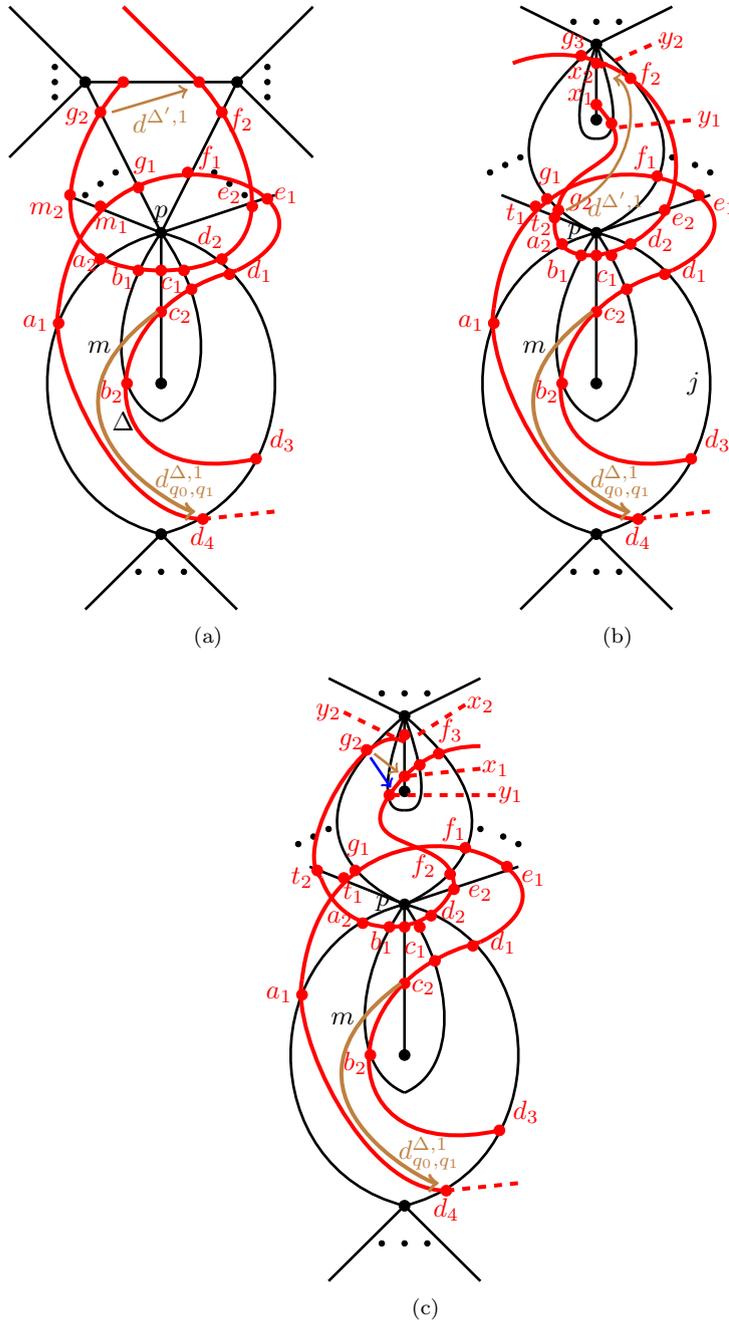


Figura 72: El arco  $i$  es un lazo basado en la pinchadura  $p$  con etiqueta  $\bowtie$  en  $p$ .

Por otro lado si el arco  $i$  es un lazo basado en la pinchadura  $p$  con etiqueta  $\bowtie$  en  $p$  entonces tenemos una de las tres configuraciones de la Figura 72. Vamos a calcular  $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  y  $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}}$  explícitamente en cada una de las tres configuraciones para verificar la afirmación requerida.

a) de la Figura 72.

Supongamos que  $t = j_s$  para  $s \in \{1, \dots, l\}$  entonces;

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta u = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 + \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0. \\ \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta u = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \\ &\cdots I_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado si que  $t = j_s$  para  $s \in \{l+2, \dots, r\}$  entonces;

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta u = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 + \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta u = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \\ &\cdots I_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

b) de la Figura 72.

Supongamos que  $t = j_s$  para  $s \in \{1, \dots, l\}$  entonces;

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0. \\ \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdot \\ &\cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \right) + \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado si que  $t = j_s$  para  $s \in \{l+2, \dots, r\}$  entonces;

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} & = -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 = \\
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdot \\
& \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
& \text{Por lo tanto } Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}}).
\end{aligned}$$

c) de la Figura 72.

Supongamos que  $t = j_s$  para  $s \in \{1, \dots, l\}$  entonces;

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} & = -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 = \\
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 + \\
& \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0. \\
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} & = -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 = \\
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& I_2 \cdots I_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado si que  $t = j_s$  para  $s \in \{l+2, \dots, r\}$  entonces;

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} & = -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 = \\
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \\
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} & = -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 = \\
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \\
& \cdots I_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

Subcaso 2. Algún extremo de  $\alpha_r$  es lado de un triángulo doblado.

En esta situación tenemos que  $\alpha_r \in \{u_1, u_2, u_3, \eta_2\}$  en las configuraciones (a)

ó (b) de la Figura 73.

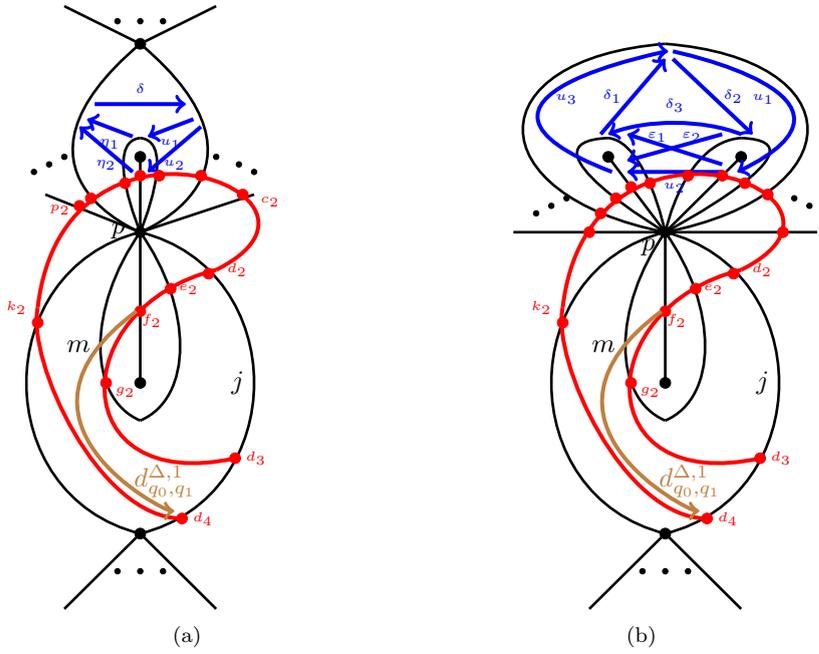


Figura 73: Algún extremo (ó ambos) de  $\alpha_r$  es el lado doblado de un triángulo doblado.

Si  $i$  no es un lazo basado en  $p$  con etiqueta  $\bowtie$  en  $p$  entonces la curva  $i'$  se ve como (a) ó (b) de la Figura 74.

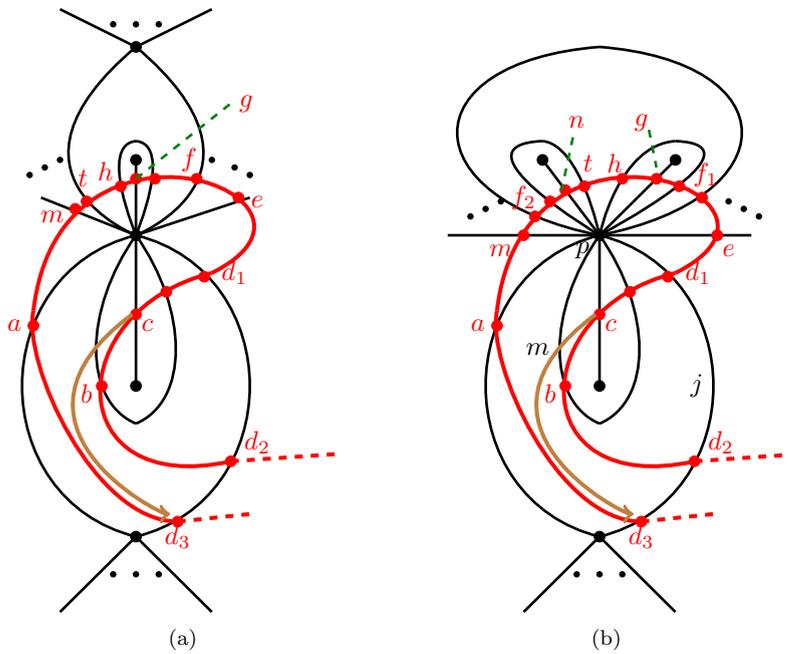


Figura 74: El arco  $i$  no es un lazo basado en la pinchadura  $p$  con etiqueta  $\bowtie$  en  $p$ .

En ambas configuraciones de la Figura 74 para verificar la afirmación vamos a calcular explícitamente  $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  y  $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}}$ . Empezamos con la

configuración (a) de la Figura 74.

- $\alpha_r = u_2$ .

En este caso  $N = \delta\eta_2$  entonces  $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ)) = -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \delta\eta_2$ . Dado que  $\alpha_n$  y  $\delta$  actúan como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$  entonces  $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}}$ .

- $\alpha_r = \eta_2$ .

Como en el caso  $\alpha_r = u_2$  es fácil ver que  $\alpha_n$  y  $\delta$  actúan como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ .

Ahora nos concentramos en el inciso (b) de la Figura 74.

- $\alpha_r = u_1$ .

En este caso  $N = u_3u_2 + \delta_1\varepsilon_1$ , dado que  $\alpha_n$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$  basta verificar que  $N = u_3u_2 + \delta_1\varepsilon_1$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ .

$$(u_3u_2 + \delta_1\varepsilon_1)_{M_l} = (u_3u_2 + \delta_1\varepsilon_1)_{M_{l+1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-1) = 0.$$

- $\alpha_r = u_2$ .

En este caso  $N = u_1u_3$ , dado que  $\alpha_n$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$  basta verificar que  $N = u_1u_3$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ .

$$(u_3u_2)_{M_l} = (u_3u_2)_{M_{l+1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

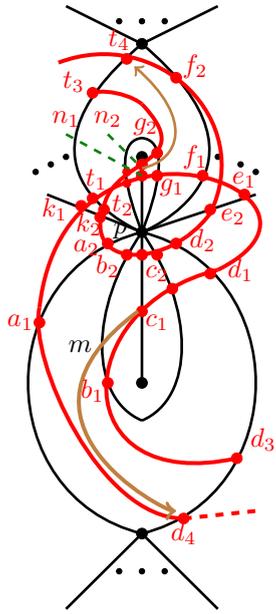
- $\alpha_r = u_3$ .

En este caso  $N = u_2u_1 + \varepsilon_2\delta_2$ , dado que  $\alpha_n$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$  basta verificar que  $N = u_3u_2 + \delta_1\varepsilon_1$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ .

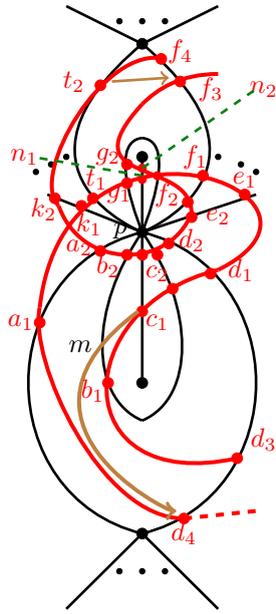
$$(u_2u_1 + \varepsilon_2\delta_2)_{M_l} = (u_2u_1 + \varepsilon_2\delta_2)_{M_{l+1}} = (1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

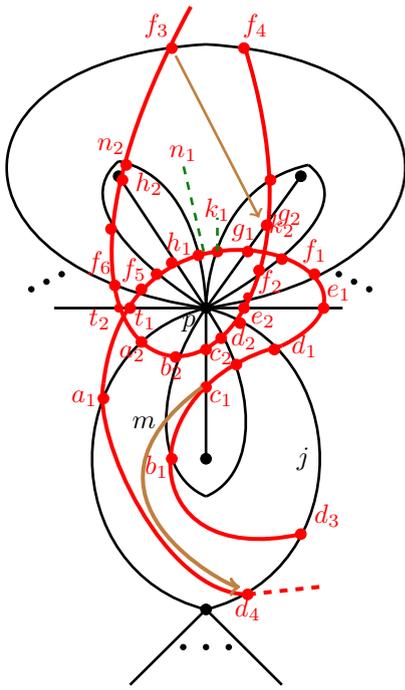
Por otro lado si el arco  $i$  es un lazo basado en  $p$  con etiqueta  $\bowtie$  en  $p$ , entonces tenemos una de las siete configuraciones de la Figura 75.



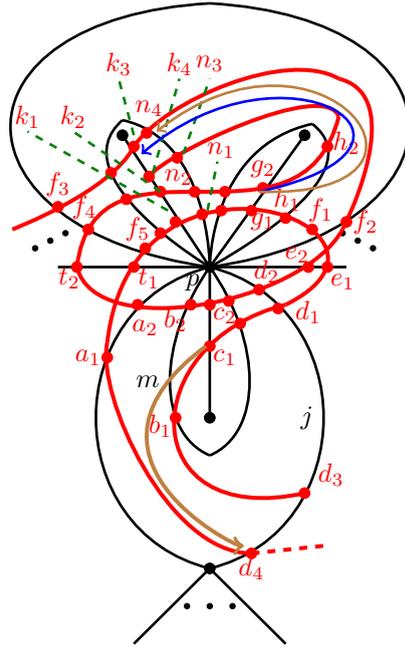
(a)



(b)



(c)



(d)

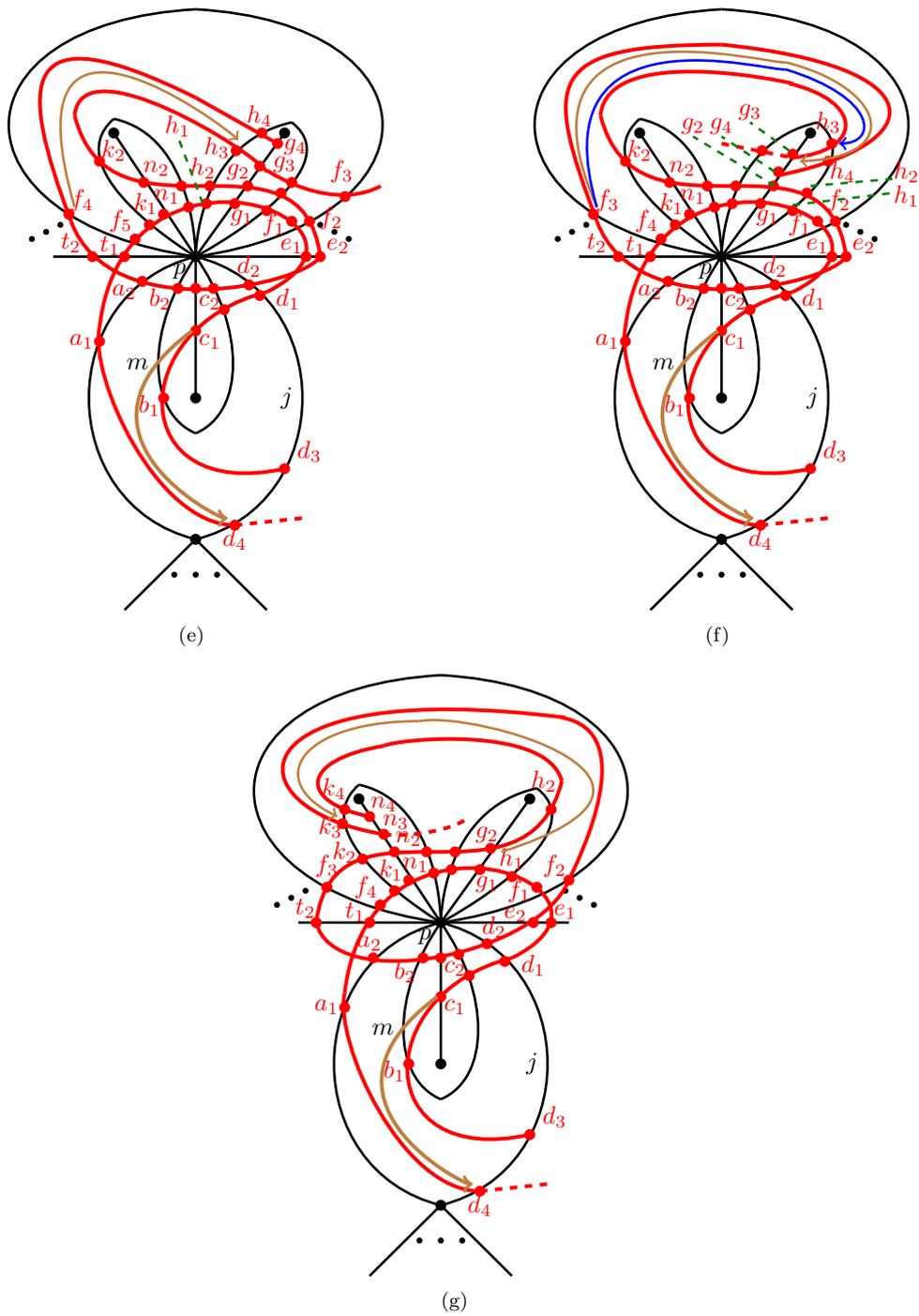


Figura 75: El arco  $i$  es un lazo basado en  $p$  con etiqueta  $\bowtie$  en  $p$ .

En las siete configuraciones de la Figura 75 vamos a calcular explícitamente  $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  y  $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}}$  para verificar la afirmación.

Empezamos con la configuración (a) de la Figura 75.

- $\alpha_r = u_2$ .

En este caso  $N = \delta\eta_2$ , si suponemos que  $t = j_s$  para  $s \in \{1, \dots, l\}$  entonces;

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \delta\eta_2 = \\ &= -I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0. \\ \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \delta\eta_2 = \\ &= -I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0. \end{aligned}$$

Supongamos que  $t = j_s$  para  $s \in \{l+2, \dots, r\}$  entonces;

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \delta\eta_2 = -I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \\ \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + \delta\eta_2 = -I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

■  $\alpha_r = \eta_2$ .

En esta situación  $N = u_2\delta$  y dado que  $(N)$  actúa como cero  $M_l$  y  $M_{l+1}$  entonces basta verificar que  $-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1}$  coinciden en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} - \alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_2\delta &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 = 0. \\ \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} - \alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_2\delta &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

Ahora nos concentramos en (b) de la Figura 75.

■  $\alpha_r = u_2$ .



$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_2 \delta = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \\
&\cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \\
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_2 \delta = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \\
&\cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \\
&+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

Ahora nos concentramos en (c) de la Figura 75.

■  $\alpha_r = u_1$ .

En esta situación  $N = u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1$  entonces;

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_2 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1 = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \\
&\cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_2 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1 = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \\
&\cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \\
&\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

■  $\alpha_r = u_2$ .

En esta situación  $N = u_1 u_3$  y si suponemos que  $s(u_1) = j_s$  para  $s \in \{1, \dots, l\}$  entonces;

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_1 u_3 = \\
&- \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2
\end{aligned}$$









$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \\
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2 = \\
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

Ahora nos concentramos en (e) de la Figura 75.

■  $\alpha_r = u_1$ .

En esta situación  $N = u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1$  entonces;

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1 = \\
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0. \\
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1 = \\
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \\
& \cdots I_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

■  $\alpha_r = u_2$ .

En esta situación  $N = u_1 u_3$  entonces;

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_1 u_3 = \\
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0. \\
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_1 u_3 =
\end{aligned}$$









$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

■  $\alpha_r = u_2$ .

En esta situación  $N = u_1u_3$  entonces;

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_1u_3 = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_1u_3 = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

■  $\alpha_r = u_3$ .

En esta situación  $N = u_2u_1 + \varepsilon_2\delta_2$  entonces;

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_2u_1 + \varepsilon_2\delta_2 = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= -\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + u_2u_1 + \varepsilon_2\delta_2 = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

□

$a_{12}$ )  $m$  es lado de un triángulo de tipo 3.

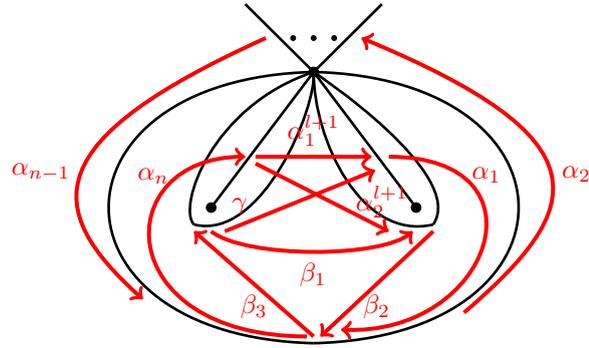


Figura 76:  $m$  es lado de un triángulo de tipo 3.

Por la Definición 4.2 tenemos en esta situación que  $m$  tiene etiqueta  $l_2$  en  $\Delta$  y se tienen las siguientes cuatro configuraciones de la Figura 77. En cada una de las configuraciones de la Figura 77 se hace un análisis análogo al inciso  $a_{11}$ ) para verificar que  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

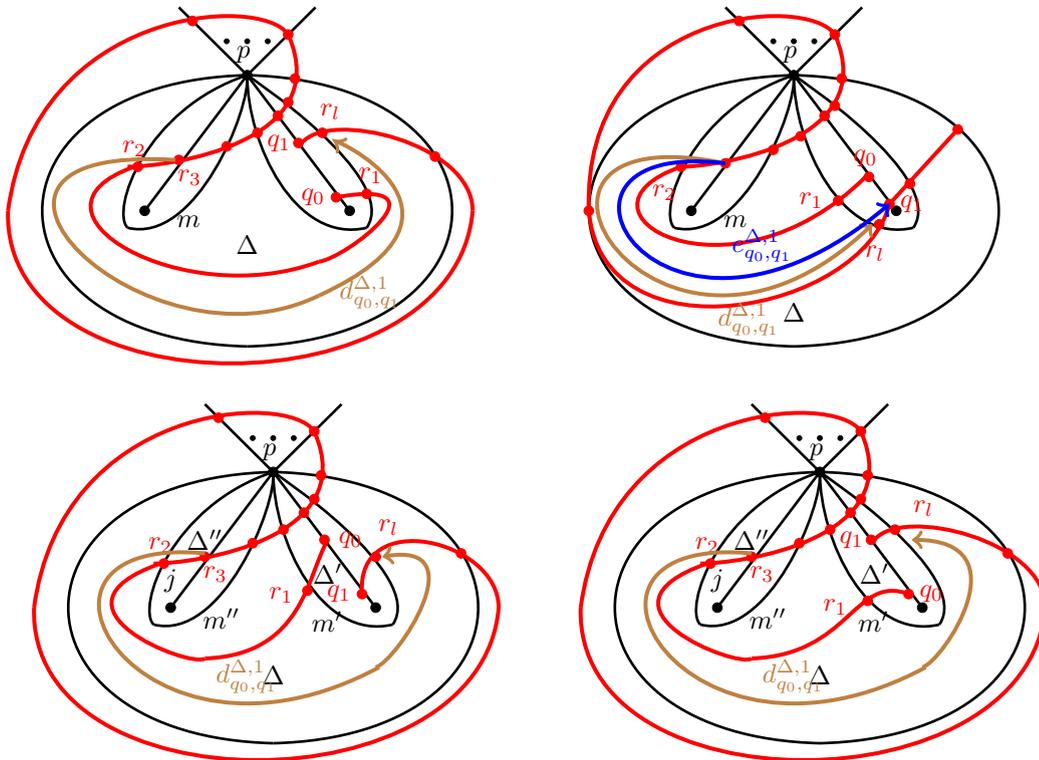
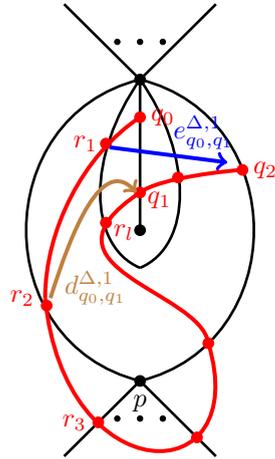


Figura 77:  $m$  tiene etiqueta  $l_2$  en  $\Delta$ .

$a_2$ )  $j_{l+1}$  es el lado no doblado de  $\Delta'$ .

En este caso por la Definición 4.2 no hay 1-desviaciones con punto inicial en el arco  $j_{l+1}$ . Sin embargo si  $j_{l+1}$  es lado de un triángulo  $\Delta$  de tipo 2 entonces si es posible encontrar puntos iniciales en  $j_{l+1}$  de curvas auxiliares. Por lo tanto basta verificar que

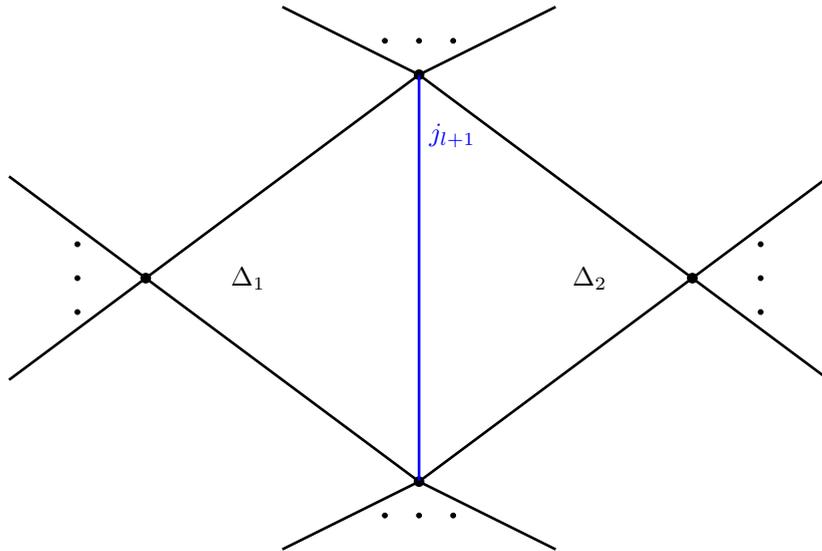
$Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$  para  $a : l_2 \longrightarrow l_3$ .



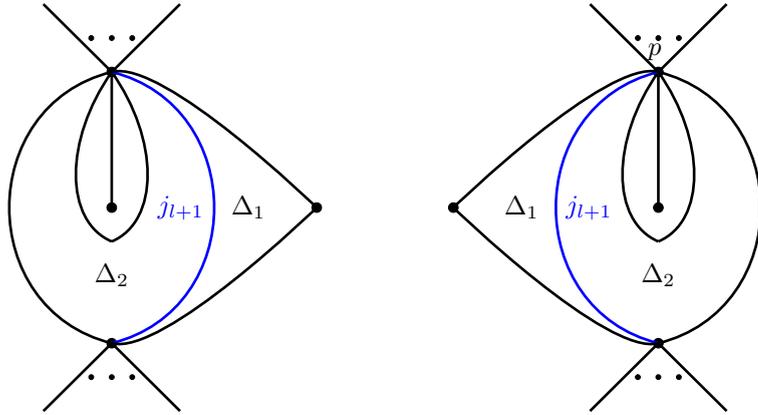
b)  $j_{l+1}$  no es lado de ningún triángulo doblado.

Dado que  $j_{l+1}$  no es lado de ningún triángulo doblado se tiene que  $j_{l+1}$  es lado de exactamente dos triángulos no doblados de  $\tau^\circ$ , denotamos por  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  a dichos triángulos. Sólo se analizará el caso cuando  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son triángulos de tipo 2 ( $b_4$  inciso a)), para los cinco casos restantes ( $b_1, b_2, b_3, b_4$  inciso b)) se hace un análisis similar.

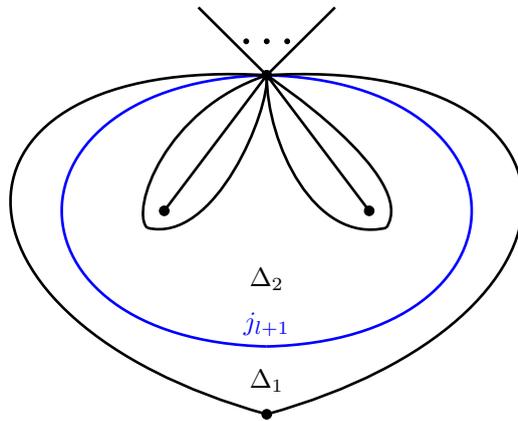
$b_1)$   $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son triángulos de tipo 1.



$b_2)$   $\Delta_1$  es de tipo 1 y  $\Delta_2$  es de tipo 2.



$b_3)$   $\Delta_1$  es de tipo 1 y  $\Delta_2$  es de tipo 3.



$b_4)$   $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son de tipo 2.

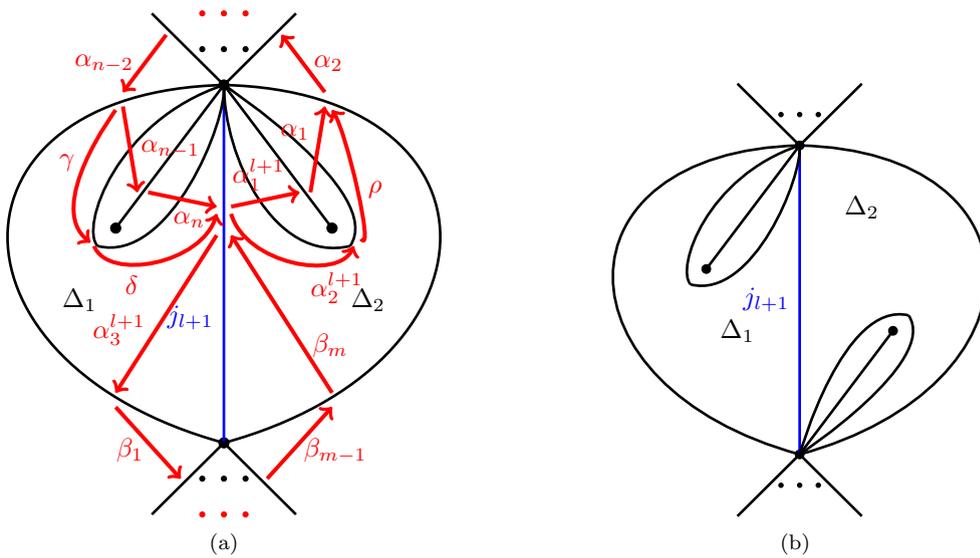


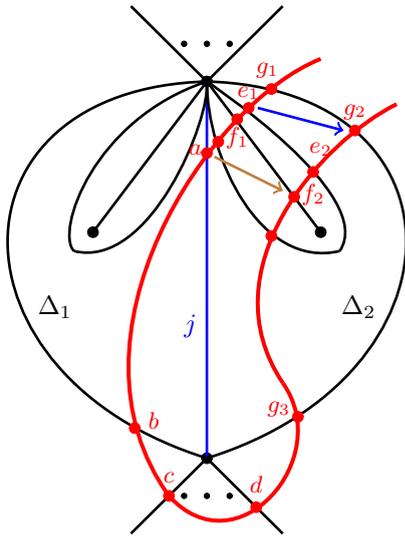
Figura 78: Los triángulos  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son de tipo 2.

Con la notación de la Figura 78 la flecha  $\alpha_1^{l+1}$  aparece sólo en los términos  $-\alpha_n \dots \alpha_1 \alpha_1^{l+1}$  y  $\alpha_1 \alpha_1^{l+1} \beta_m$ , la flecha  $\alpha_2^{l+1}$  aparece sólo en un término  $\rho \alpha_2^{l+1} \beta_m$  y la flecha  $\alpha_3^{l+1}$  aparece sólo en tres términos  $-\beta_m \dots \beta_1 \alpha_3^{l+1}$ ,  $\alpha_3^{l+1} \alpha_{n-1} \alpha_n$  y  $\delta \gamma \alpha_3^{l+1}$  del potencial  $\widehat{S}(\tau^\circ)$ . Si  $W_l \not\subseteq W_{l+1}$  entonces existe un arco  $k$ , un elemento  $v$  de la base de  $(M_{l+1})_k$  que corresponde a un punto de cruce de  $i'$  con  $k$  y  $\{\partial_a(\widehat{S}(\tau^\circ)) | a \in \widehat{Q}(\tau^\circ) \text{ y } t(a) = k\}$  tal que  $\xi_{M_l} v = 0$  pero  $\xi_{M_{l+1}} v \neq 0$ . Dado que  $M_l$  y  $M_{l+1}$  difieren sólo posiblemente en la acción de las flechas  $\alpha_1^{l+1}, \alpha_2^{l+1}$  y  $\alpha_3^{l+1}$  entonces  $\xi = \partial_a(\widehat{S}(\tau^\circ))$  para  $a \in \{\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \beta_m, \dots, \beta_1, \delta, \gamma, \rho\}$  y al menos los extremos de una de las flechas  $\alpha_1^{l+1}, \alpha_2^{l+1}$  y  $\alpha_3^{l+1}$  coincide con los arcos donde se encuentran los extremos de una desviación. Por lo tanto si probamos que  $\xi_{M_{l+1}} = 0$  para  $a \in \{\alpha_n, \delta, \beta_m\}$  y  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$  para  $a \in \{\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \beta_m, \dots, \beta_1, \gamma, \rho\}$  entonces el vector  $v$  no existe.

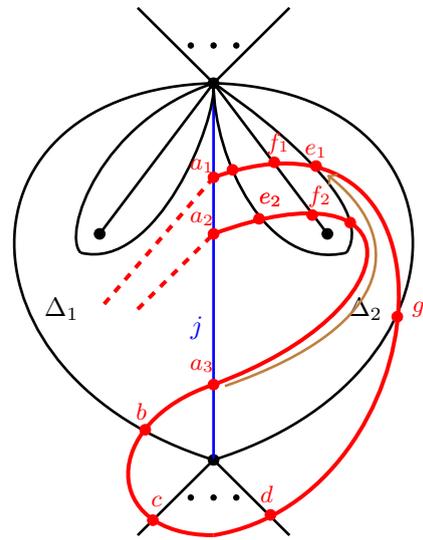
**Lema 5.5.**

- i)  $\xi_{M_{l+1}} = 0$  para  $a \in \{\alpha_n, \beta_m, \delta\}$ .
- ii)  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$  para  $a \in \{\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \beta_{m-1}, \dots, \beta_1, \gamma, \rho\}$ .

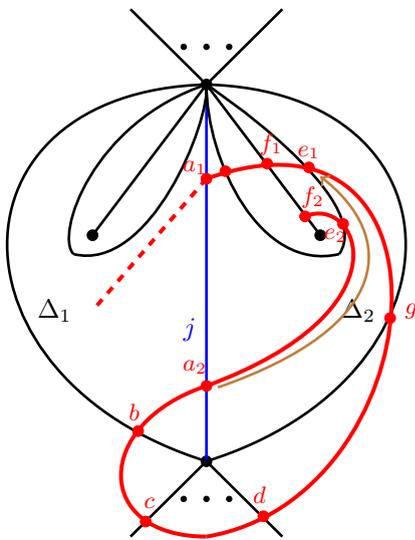
*Demostración.* Empecemos verificando que  $\xi_{M_{l+1}} = 0$  para  $a \in \{\alpha_n, \delta, \beta_m\}$ , es suficiente probar que  $\partial_a(\widehat{S}(\tau^\circ))$  actúa como cero en cada punto de cruce de  $i'$  con  $j_{l+1}$ . Sea  $v$  un elemento de la base de  $M_{j_{l+1}}$ , si  $v$  no es punto inicial de una desviación entonces por la Proposición 5.1 se tiene el resultado. Por otro lado supongamos que  $v$  es punto inicial de una 1-desviación  $d^{\Delta,1}$  entonces consideramos la colección maximal de  $n$ -desviaciones y  $n$ -curva auxiliar que tienen a  $v$  como punto inicial. Si la curva  $i'$  no tiene auto-intersección cerca de la configuración local de la Figura 78 a) entonces tenemos una de las once configuraciones de la Figura 79.



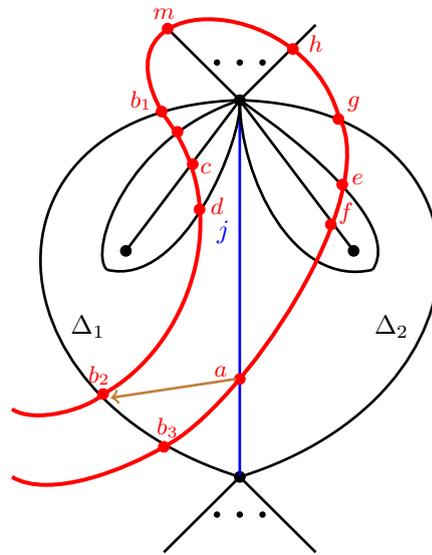
(a)



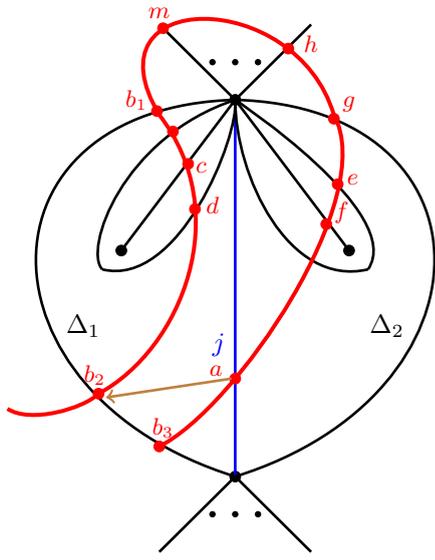
(b)



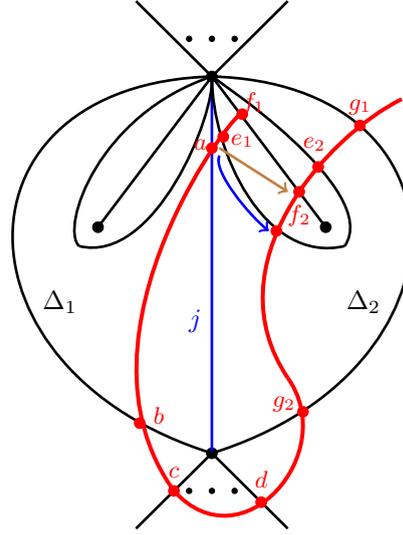
(c)



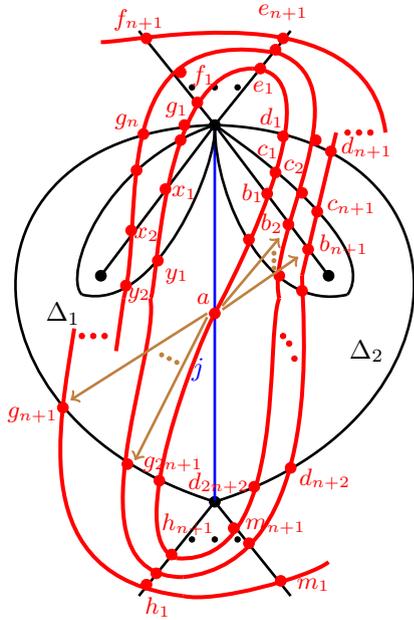
(d)



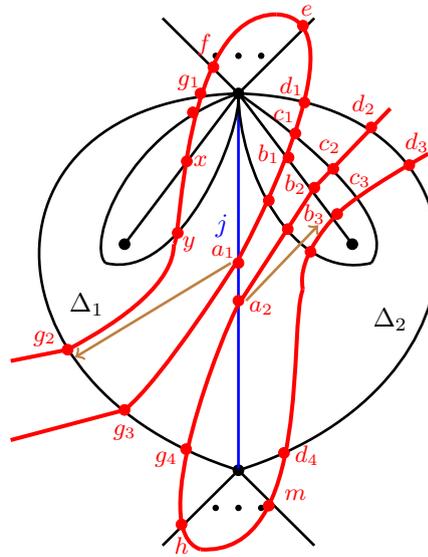
(e)



(f)



(g)



(h)

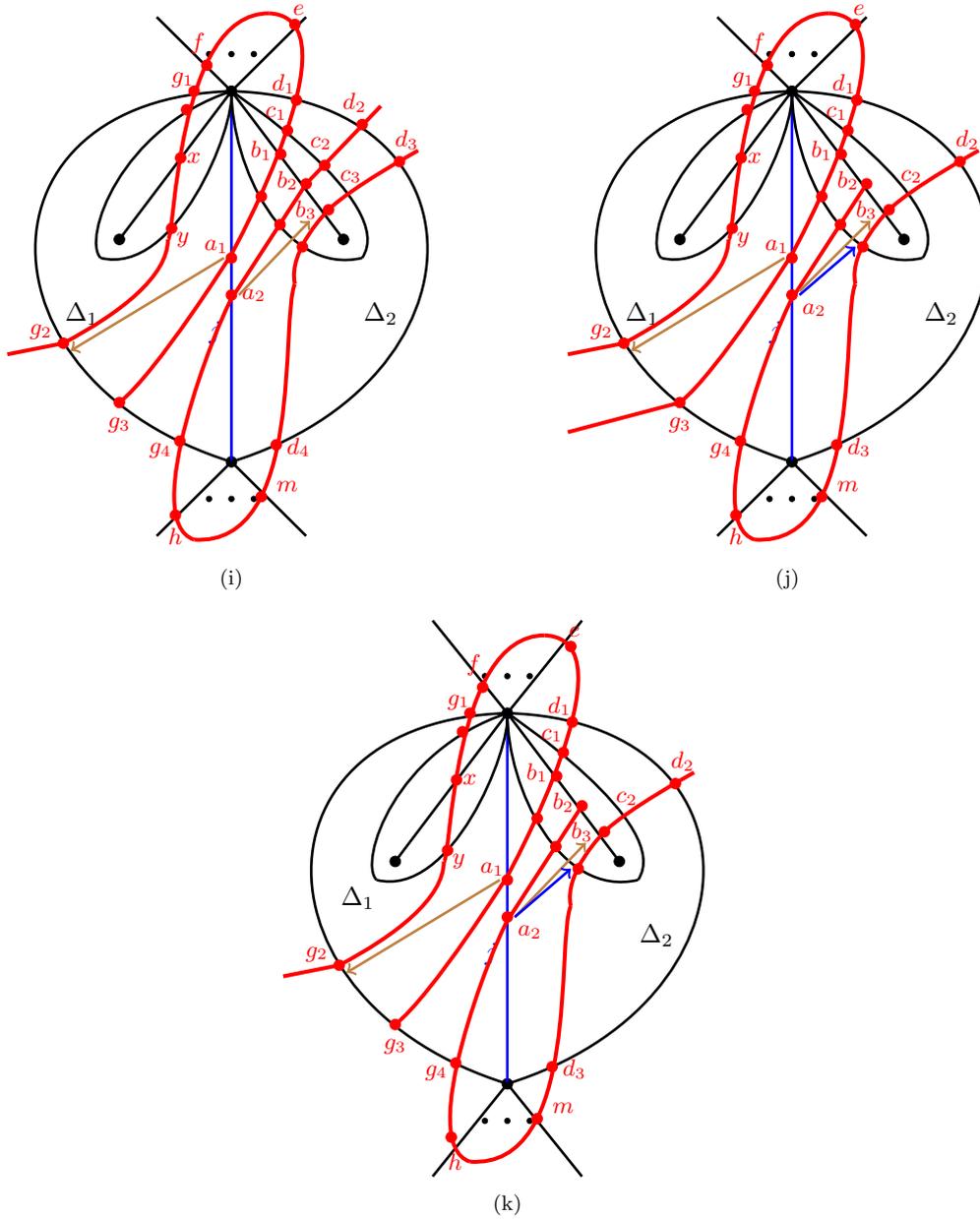


Figura 79: Configuraciones sin auto-intersección local.

Considerando que el potencial  $\widehat{S}(\tau^\circ) = -\alpha_n \dots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} - \beta_m \dots \beta_1 \alpha_3^{l+1} + \delta \gamma \alpha_3^{l+1} + \alpha_n \alpha_{n-1} \alpha_3^{l+1} + \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \beta_m + \rho \alpha_2^{l+1} \beta_m + \widehat{S}'(\tau^\circ)$  vamos a calcular explícitamente  $\xi_{M_l}$  y  $\xi_{M_{l+1}}$  en cada una de las once configuraciones de la Figura 79 para verificar la afirmación *i*) del Lema 5.5.

**Configuración (a) de la Figura 79.**

- $\partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1} \alpha_3^{l+1})v = 0$  ya que existe  $s \in \{2, \dots, n-1\}$  de manera que  $(\alpha_s \dots \alpha_1)$  y  $(\alpha_{n-1} \alpha_3^{l+1})$  actúan como cero en el vector  $v$  en ambas representaciones.
- $\partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\gamma \alpha_3^{l+1})v = 0$  claramente actúa como cero en el vector  $v$  en ambas

representaciones.

- $$\begin{aligned} \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \left(-\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \dots I\right)v + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right)v + \\ &\left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)v = 0. \\ \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \left(-\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \dots I\right)v + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)v + \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)v \neq \\ &0. \end{aligned}$$

por lo tanto  $v \in W_{l+1}$  pero  $v \notin W_l$ .

### Configuración (b) de la Figura 79.

- $$\partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = 0$$
 ya que existe  $s \in \{2, \dots, n-1\}$  de manera que  $(\alpha_s \dots \alpha_1)$  y  $(\alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})$  actúan como cero en el vector  $v$  en ambas representaciones.
  - $$\partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\gamma\alpha_3^{l+1})v = 0$$
 claramente actúa como cero en el vector  $v$  en ambas representaciones.
  - $$\begin{aligned} \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = (-I \dots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix})v + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)v + \\ &\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right)\right)v = 0. \\ \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = (-I \dots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix})v + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)v + \\ &\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)v \neq 0. \end{aligned}$$
- por lo tanto  $v \in W_{l+1}$  pero  $v \notin W_l$ .

### Configuración (c) de la Figura 79.

- $$\partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = 0$$
 ya que existe  $s \in \{2, \dots, n-1\}$  de manera que  $(\alpha_s \dots \alpha_1)$  y  $(\alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})$  actúan como cero en el vector  $v$  en ambas representaciones.
  - $$\partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\gamma\alpha_3^{l+1})v = 0$$
 claramente actúa como cero en el vector  $v$  en ambas representaciones.
  - $$\begin{aligned} \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = (-I \dots I \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix})v + (I \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix})v + \\ &\left(I \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right)\right)v = 0. \\ \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = (-I \dots I \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix})v + (I \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix})v + \\ &(I \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix})v \neq 0. \end{aligned}$$
- por lo tanto  $v \in W_{l+1}$  pero  $v \notin W_l$ .

**Configuración (d) de la Figura 79.**

- $$\begin{aligned} \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = \\ &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v + [1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \\ \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \neq 0. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( [-1 \ 1 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) v = 0. \\ \partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( [-1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &+ (\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = 0 + (I \cdot I)v + (I \cdot (-I))v = 0 \text{ ya que existe} \\ &s \in \{1, \dots, m\} \text{ tal que } (-\beta_s \dots \beta_1\alpha_3^{l+1})v = 0. \\ &\text{por lo tanto } v \in W_{l+1} \text{ pero } v \notin W_l. \end{aligned}$$

**Configuración (e) de la Figura 79.**

- $$\begin{aligned} \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = \\ &= \left( -[1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) v + [1 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \\ \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = \left( -[1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) v \neq 0. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( [-1 \ 1] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) v = 0. \\ \partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( [-1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) v = 0. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &+ (\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = 0 + (I \cdot I)v + (I \cdot (-I))v = 0 \text{ ya que existe} \\ &s \in \{1, \dots, m\} \text{ tal que } (-\beta_s \dots \beta_1\alpha_3^{l+1})v = 0. \\ &\text{por lo tanto } v \in W_{l+1} \text{ pero } v \notin W_l. \end{aligned}$$

**Configuración (f) de la Figura 79.**

- $$\begin{aligned} \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = 0 \text{ ya que existe } s \in \{2, \dots, n-1\} \\ &\text{de manera que } (\alpha_s \dots \alpha_1\alpha_1^{l+1}) \text{ y } (\alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1}) \text{ actúan como cero en el vector } v \text{ en} \\ &\text{ambas representaciones.} \end{aligned}$$
- $$\partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\gamma\alpha_3^{l+1})v = 0 \text{ claramente actúa como cero en el vector } v \text{ en ambas representaciones.}$$
- $$\begin{aligned} \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &+ (\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \left( - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \dots I \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) v = 0. \\ \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &+ (\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \left( - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \dots I \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 0 \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0 \right) v \neq 0. \\ &\text{por lo tanto } v \in W_{l+1} \text{ pero } v \notin W_l. \end{aligned}$$

**Configuración (g) de la Figura 79.**

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = \\
 & - [I_n \quad 0_{n \times (n+1)}] \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times 1} \\ 0_{(n+1) \times n} & 0_{(n+1) \times 1} \end{bmatrix} I_{n+1} \cdots I_{n+1} [I_{n+1} \quad 0_{(n+1) \times n}] \begin{bmatrix} I_{n+1} & \hat{\tau}_n \\ 0_{n \times 1} & \hat{\tau}_n \end{bmatrix} \\
 & \left( \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times n} \\ \vdots & I_n \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) v + [I_n \quad 0_{n \times (n+1)}] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times (2n-1)} & 1 \\ 0_{2n \times 1} & I_{(2n-1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \\
 & \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = \\
 & \left( - [I_n \quad 0_{n \times (n+1)}] \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times 1} \\ 0_{(n+1) \times n} & 0_{(n+1) \times 1} \end{bmatrix} I_{n+1} \cdots I_{n+1} [I_{n+1} \quad 0_{(n+1) \times n}] \begin{bmatrix} I_{n+1} & \hat{\tau}_n \\ 0_{n \times 1} & \hat{\tau}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) v + \\
 & \left( \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times (n+1)} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \\ 1 & \vdots \end{bmatrix} \right) v \neq 0. \\
 & \blacksquare \partial_{\delta}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( [-I_n \quad \hat{\tau}_n \quad 0_{n \times 1}] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times (2n-1)} & 1 \\ 0_{2n \times 1} & I_{(2n-1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) v = 0. \\
 & \partial_{\delta}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( [-I_n \quad \hat{\tau}_n \quad 0_{n \times 1}] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \\
 & \blacksquare \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\
 & (\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \\
 & \left( \begin{bmatrix} 0_{(n+1)} & \hat{\tau}_n \\ 0_{n \times 1} & \hat{\tau}_n \end{bmatrix} I_{(n+1)} \cdots I_{(n+1)} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times (2n-1)} & 1 \\ 0_{2n \times 1} & I_{(2n-1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) v + \\
 & \left( \begin{bmatrix} I_{n+1} & \hat{\tau}_n \\ 0_{n \times 1} & \hat{\tau}_n \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times n} \\ \vdots & I_n \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) v + \\
 & \left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times (n-1)} \\ \vdots & I_n & 0_{(n-1) \times n} \\ 1 & 0_{1 \times n} & 0_{1 \times n} \\ 0 & 0_{1 \times n} & 0_{1 \times n} \\ \vdots & 0_{(n-2) \times n} & 0_{(n-2) \times n} \\ 0 & 0_{1 \times n} & 0_{1 \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(n+1)} \\ 0_{n \times (n+1)} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 0. \\
 & \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\
 & (\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \left( \begin{bmatrix} 0_{(n+1)} & \hat{\tau}_n \\ 0_{n \times 1} & \hat{\tau}_n \end{bmatrix} I_{(n+1)} \cdots I_{(n+1)} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) v + \\
 & \left( \begin{bmatrix} I_{n+1} & \hat{\tau}_n \\ 0_{n \times 1} & \hat{\tau}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) v + \left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times (n-1)} \\ \vdots & I_n & 0_{(n-1) \times n} \\ 1 & 0_{1 \times n} & 0_{1 \times n} \\ 0 & 0_{1 \times n} & 0_{1 \times n} \\ \vdots & 0_{(n-2) \times n} & 0_{(n-2) \times n} \\ 0 & 0_{1 \times n} & 0_{1 \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(n+1)} \\ 0_{n \times (n+1)} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) \neq 0.
 \end{aligned}$$

por lo tanto  $v \in W_{l+1}$  pero  $v \notin W_l$ .

**Configuración (h) de la Figura 79.**

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = \\
 &\left( -[1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) v + \\
 &\left( [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \\
 \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= \left( -[1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v + \\
 &\left( [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v \neq 0. \\
 \blacksquare \partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( [-1 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \\
 \partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( [-1 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \\
 \blacksquare \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\
 &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \left( -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v + \\
 &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v + \left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v = 0. \\
 \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\
 &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \left( -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v + \\
 &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v + \left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v \neq 0. \\
 &\text{por lo tanto } v \in W_{l+1} \text{ pero } v \notin W_l.
 \end{aligned}$$

**Configuración (i) de la Figura 79.**

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = \\
 &\left( -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) v + \\
 &\left( [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \\
 \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= \left( -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v + \\
 &\left( [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v \neq 0. \\
 \blacksquare \partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( [-1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v = 0.
 \end{aligned}$$

$$\partial_{\delta}(\widehat{S}(\tau^{\circ}))_{M_l} = (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v = 0.$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^{\circ}))_{M_{l+1}} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \left( - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \dots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) v + \left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \\ \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^{\circ}))_{M_l} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \left( - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \dots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v + \left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) v \neq 0. \end{aligned}$$

por lo tanto  $v \in W_{l+1}$  pero  $v \notin W_l$ .

### Configuración (j) de la Figura 79.

$$\begin{aligned} \blacksquare \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^{\circ}))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = \\ &\left( - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \dots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) v = 0. \\ \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^{\circ}))_{M_l} &= (- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} I \dots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) v \neq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \partial_{\delta}(\widehat{S}(\tau^{\circ}))_{M_{l+1}} &= (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \\ \partial_{\delta}(\widehat{S}(\tau^{\circ}))_{M_l} &= (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^{\circ}))_{M_{l+1}} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \\ &\left( - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \dots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \right) v = 0. \\ \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^{\circ}))_{M_l} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \left( - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \dots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v + \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v \neq 0.$$

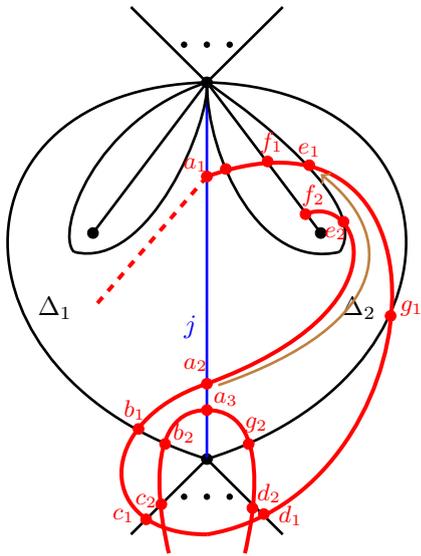
por lo tanto  $v \in W_{l+1}$  pero  $v \notin W_l$ .

**Configuración (k) de la Figura 79.**

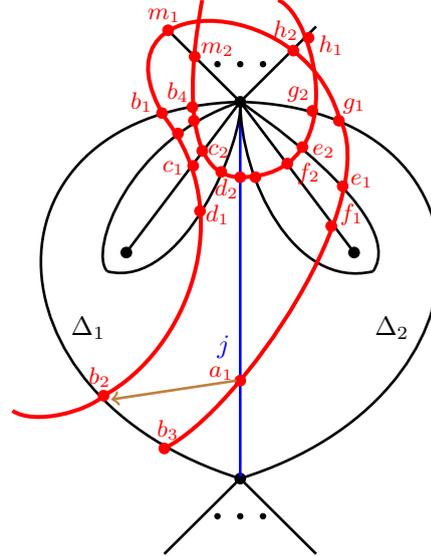
- $$\begin{aligned} \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = \\ &\left( -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right) v = 0. \\ \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= \left( -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v \neq 0. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \\ &\left( \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right) v = 0. \\ \partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \\ &\left( -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right) v = 0. \\ \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + \\ &(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = \left( -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v \neq 0. \end{aligned}$$

por lo tanto  $v \in W_{l+1}$  pero  $v \notin W_l$ .

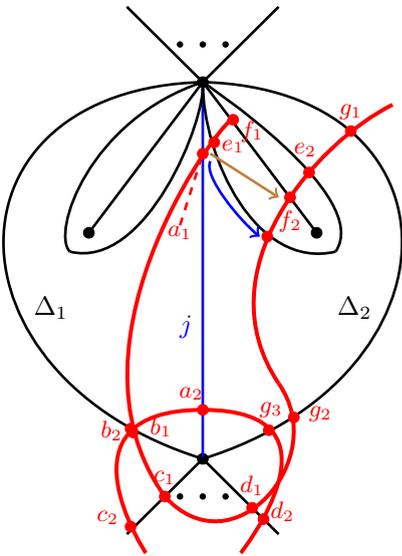
Por otro lado si la curva  $i'$  se auto-interseca cerca de la configuración local de la Figura 78 a) entonces tenemos una de las las siete configuraciones de la Figura 80.



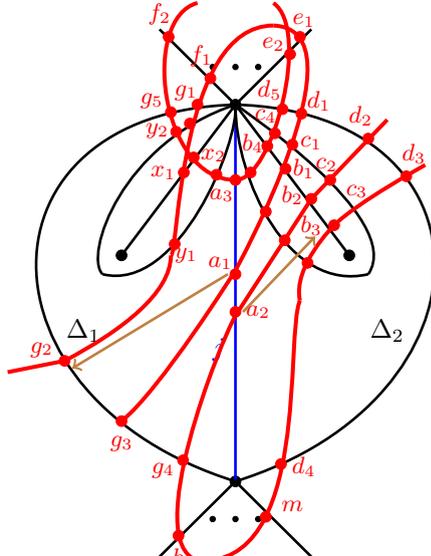
(a)



(b)



(c)



(d)

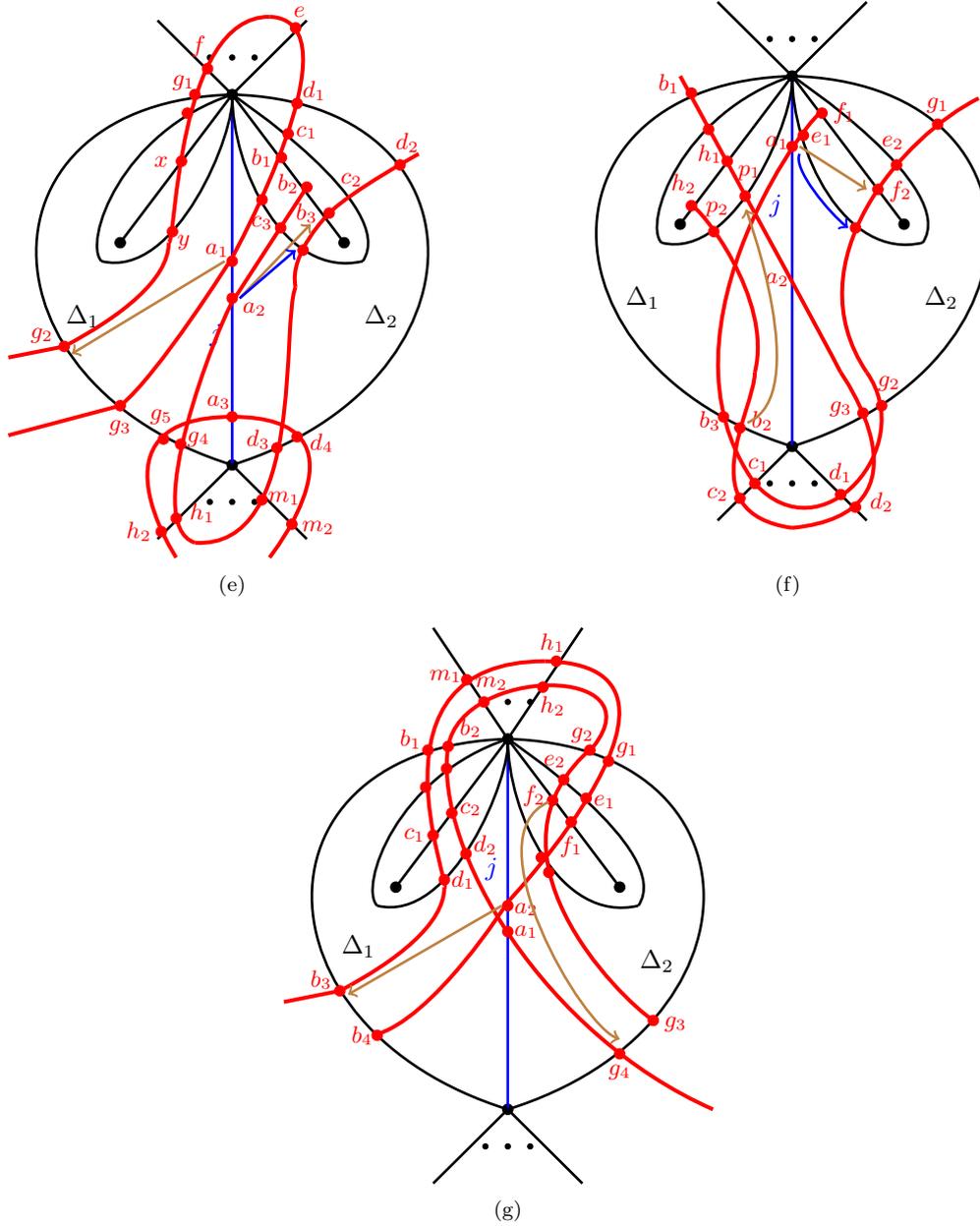


Figura 80: Configuraciones sin auto-intersección local.

**Configuración (a) de la Figura 80.**

- $\partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = 0$  ya que existe  $s \in \{2, \dots, n-1\}$  de manera que  $(\alpha_s \dots \alpha_1)$  y  $(\alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})$  actúan como cero en el vector  $v$  en ambas representaciones.
- $\partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\gamma\alpha_3^{l+1})v = 0$  claramente actúa como cero en el vector  $v$  en ambas representaciones.
- $\partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + (\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v =$

$$\begin{aligned}
& \left( - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right) v + \\
& \left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v = 0. \\
\partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1} + \alpha_1 \alpha_1^{l+1} + \rho \alpha_2^{l+1}) v = (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1}) v + \\
(\alpha_1 \alpha_1^{l+1}) v + (\rho \alpha_2^{l+1}) v &= \left( - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v + \\
\left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v &\neq 0. \\
\text{por lo tanto } v \in W_{l+1} \text{ pero } v \notin W_l.
\end{aligned}$$

**Configuración (b) de la Figura 80.**

- $\partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1} \alpha_3^{l+1}) v = 0$  ya que existe  $s \in \{2, \dots, n-1\}$  de manera que  $(\alpha_s \cdots \alpha_1)$  y  $(\alpha_{n-1} \alpha_3^{l+1})$  actúan como cero en el vector  $v$  en ambas representaciones.
- $\partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\gamma \alpha_3^{l+1}) v = 0$  claramente actúa como cero en el vector  $v$  en ambas representaciones.
- $\partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1} + \alpha_1 \alpha_1^{l+1} + \rho \alpha_2^{l+1}) v = (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1}) v + (\alpha_1 \alpha_1^{l+1}) v + (\rho \alpha_2^{l+1}) v = (-I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) v + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right) v = 0.$   
 $\partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1} + \alpha_1 \alpha_1^{l+1} + \rho \alpha_2^{l+1}) v = (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1}) v + (\alpha_1 \alpha_1^{l+1}) v + (\rho \alpha_2^{l+1}) v = -(I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) v + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) v \neq 0.$   
por lo tanto  $v \in W_{l+1}$  pero  $v \notin W_l$ .

**Configuración (c) de la Figura 80.**

- $\partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1} \alpha_3^{l+1}) v = 0$  ya que existe  $s \in \{2, \dots, n-1\}$  de manera que  $(\alpha_s \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1})$  y  $(\alpha_{n-1} \alpha_3^{l+1})$  actúan como cero en el vector  $v$  en ambas representaciones.
- $\partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\gamma \alpha_3^{l+1}) v = 0$  claramente actúa como cero en el vector  $v$  en ambas representaciones.
- $\partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1} + \alpha_1 \alpha_1^{l+1} + \rho \alpha_2^{l+1}) v = (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1}) v + (\alpha_1 \alpha_1^{l+1}) v + (\rho \alpha_2^{l+1}) v = \left( - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right) v = 0.$   
 $\partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1} + \alpha_1 \alpha_1^{l+1} + \rho \alpha_2^{l+1}) v = (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1}) v + (\alpha_1 \alpha_1^{l+1}) v + (\rho \alpha_2^{l+1}) v = \left( - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v \neq 0.$



$$\left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) v \neq 0.$$

por lo tanto  $v \in W_{i+1}$  pero  $v \notin W_i$ .

### Configuración (e) de la Figura 80.

$$\begin{aligned} \blacksquare \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{i+1}} &= (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = \\ &\left( -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_i} &= \\ &-\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v + \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v \neq 0. \end{aligned}$$

$$\blacksquare \partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{i+1}} = (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v = 0.$$

$$\partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_i} = (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left( \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v = 0.$$

$$\blacksquare \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{i+1}} = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + (\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v =$$

$$-\left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) v +$$

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right) v +$$

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \right) v = 0.$$

$$\partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_i} = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v +$$

$$(\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = -\left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v +$$

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) v \neq 0.$$

por lo tanto  $v \in W_{i+1}$  pero  $v \notin W_i$ .

### Configuración (f) de la Figura 80.

- $\partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = 0 = \partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1}) = 0$  y existe  $s \in \{1, \dots, n-1\}$  tal que  $(\alpha_s\dots\alpha_1) = 0$ .
- Claramente tenemos  $\partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\gamma\alpha_3^{l+1})v = 0 = \partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ .
- $\partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + (\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = -\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)v + \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right)v + \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right)v = 0.$   
 $\partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + (\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = -\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)v + \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\right)v + \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\right)v \neq 0.$   
 por lo tanto  $v \in W_{l+1}$  pero  $v \notin W_l$ .

### Configuración (g) de la Figura 80.

- $\partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)v + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right)v = 0.$   
 $\partial_{\alpha_n}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_1^{l+1} + \alpha_{n-1}\alpha_3^{l+1})v = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)v + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)v \neq 0.$
- $\partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right)v = 0.$   
 $\partial_\delta(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (\gamma\alpha_3^{l+1})v = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)v = 0.$
- $\partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1} + \alpha_1\alpha_1^{l+1} + \rho\alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1}\dots\beta_1\alpha_3^{l+1})v + (\alpha_1\alpha_1^{l+1})v + (\rho\alpha_2^{l+1})v = 0 + \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)v + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)v = 0 = \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}.$   
 Por lo tanto  $v \in W_{l+1}$  pero  $v \notin W_l$ .

Ahora verifiquemos la segunda afirmación del Lema 5.5. Supongamos primero que la curva  $i'$  no se auto-intersecta localmente. Analizamos cada una de las once configuraciones de la Figura 79.

**Configuración (a) de la Figura 79.**

- $$\begin{aligned} \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1} + \alpha_1 \alpha_1^{l+1} + \rho \alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1})v + \\ & (\alpha_1 \alpha_1^{l+1})v + (\rho \alpha_2^{l+1})v = \\ & - \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \\ \partial_{\beta_m}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1} + \alpha_1 \alpha_1^{l+1} + \rho \alpha_2^{l+1})v = (-\beta_{m-1} \cdots \beta_1 \alpha_3^{l+1})v + \\ & (\alpha_1 \alpha_1^{l+1})v + (\rho \alpha_2^{l+1})v \left( - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) v + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1} \delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación.
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1} \beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones y  $(\alpha_n \cdots \alpha_2)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando algún extremo de  $\alpha_r$  es lado de un triángulo doblado ó ningún extremo de  $\alpha_r$  lo es. Además  $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ)) = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)$  donde  $(N)$  es un sumando de  $\widehat{S}(\tau^\circ)$  que involucra a la flecha  $\alpha_r$ .

1) Ningún extremo de  $\alpha_r$  es lado de ningún triángulo doblado.

En esta situación tenemos que ambos extremos de  $\alpha_r$  son lados de un triángulo de tipo 1 ó ambos extremos de  $\alpha_r$  son lado de un triángulo de tipo 2.

Consideramos primero que los extremos de  $\alpha_r$  son los lados de un triángulo de tipo

1. Para esto tenemos las tres configuraciones de la Figura 81.

En las tres configuraciones de la Figura 81 tenemos que  $(N) = (\eta u)$ . Analizamos cada una de las tres configuraciones.

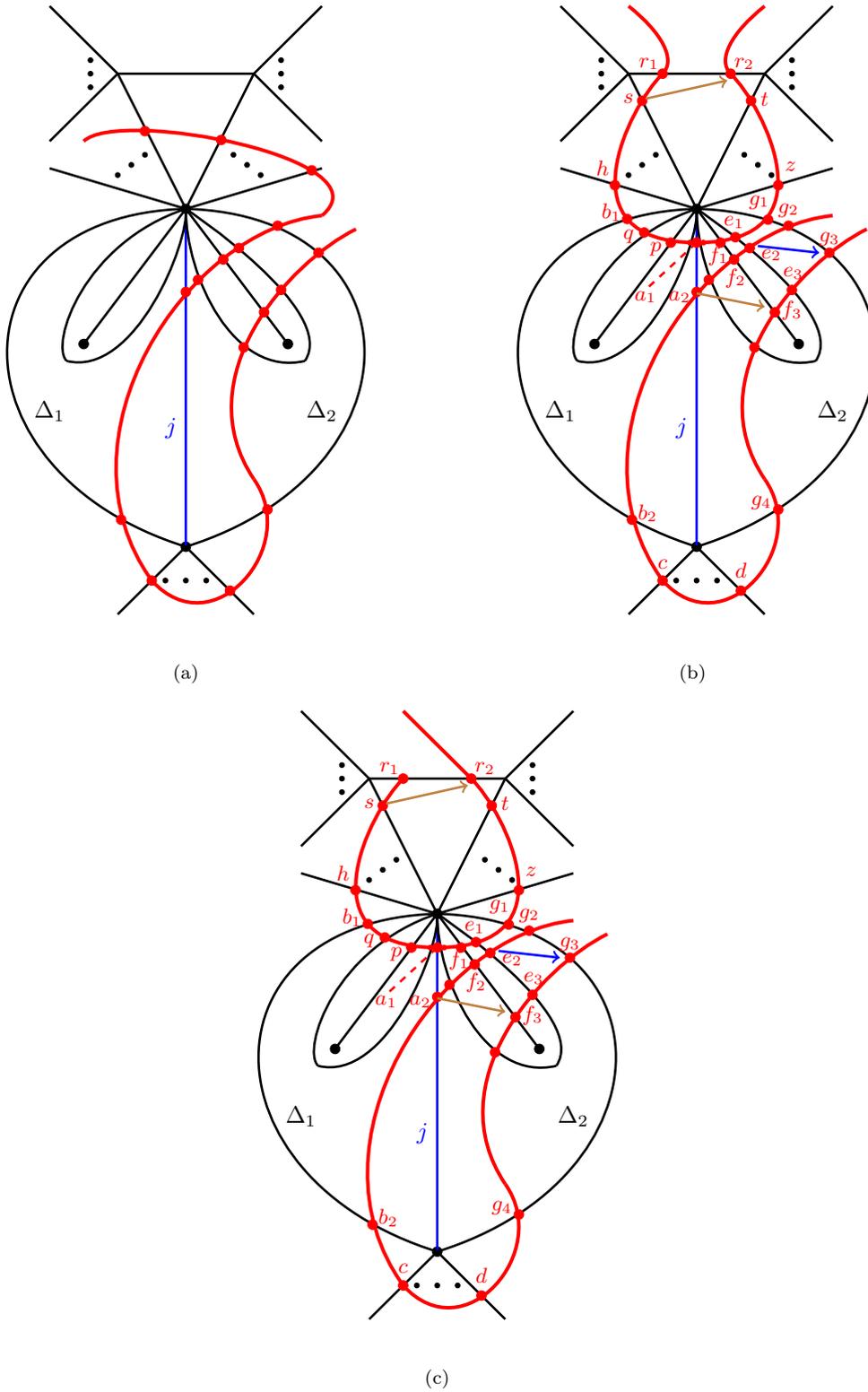


Figura 81: Los extremos de  $\alpha_r$  son lados de un triángulo 1.

**Configuración (a) de la Figura 81.**

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N) = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1}) +$$

$(\eta u) = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que no hay desviaciones  $d^\Delta$  con punto inicial en  $s(u)$  y punto final  $t(u)$ . Ademàs existe  $s \in \{r+1, \dots, n\}$  tal que  $(\alpha_s \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$ .

**Configuraci3n (b) de la Figura 81.**

Supongamos primero que  $s(u) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \\ (\eta u)v &= \left( -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + \\ \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) v &= -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \\ (\eta u)v &= - \left( I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + \\ \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) v &= -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado si  $s(u) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$  entonces:

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \\ (\eta u)v &= - \left( I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + \\ \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) v &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \\ (\eta u)v &= \left( -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + \\ \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) v &= -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$

**Configuraci3n (c) de la Figura 81.**

Supongamos primero que  $s(u) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \\ (\eta u)v &= - \left( I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + \\ \left( I \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) v &= -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \\ (\eta u)v &= - \left( I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + \left( I \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) v = \\ -1 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

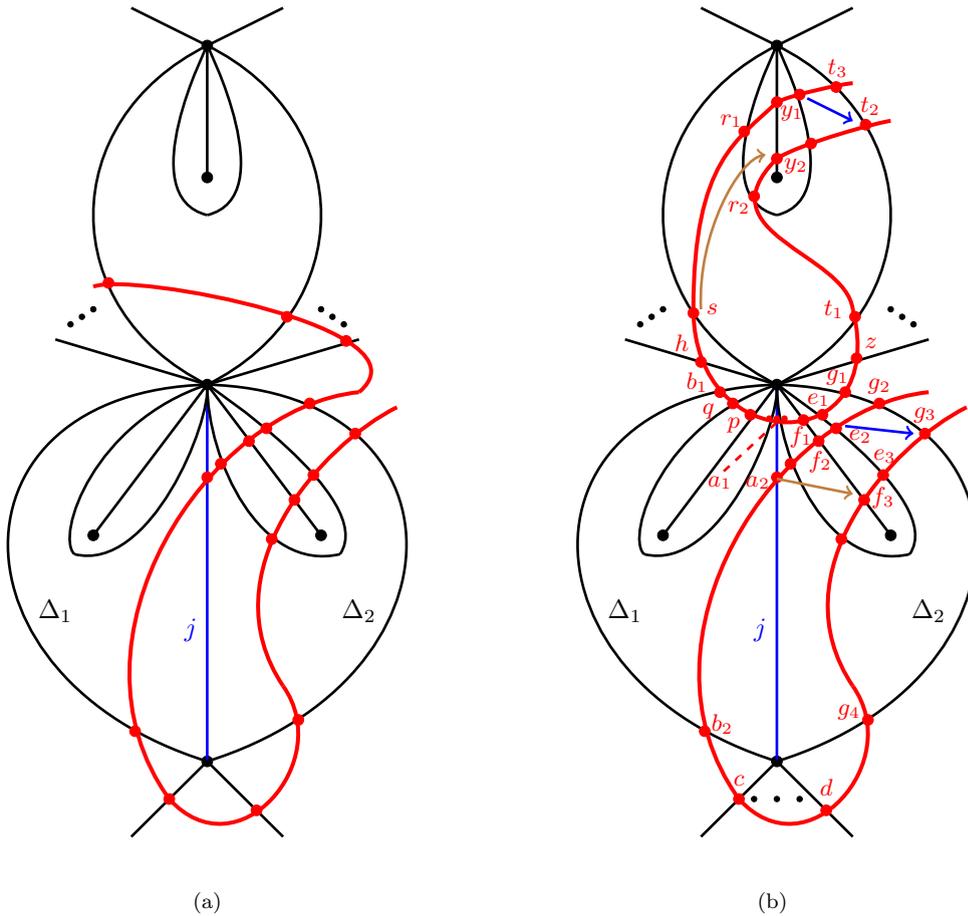
Por otro lado si  $s(u) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$  entonces:

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \\ (\eta u)v &= - \left( I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + (1 \cdot 0)v = -1 \\ \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \end{aligned}$$

$$(\eta u)v = - \left( I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + (1 \cdot 0)v = -1.$$

Por lo tanto  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$ .

Por otro lado consideramos que los extremos de  $\alpha_r$  son los lados de un triángulo de tipo 2. Para esto tenemos las cinco configuraciones de la Figura 82.



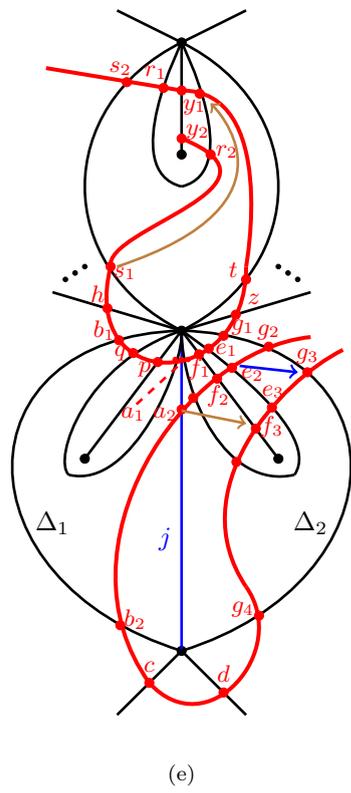
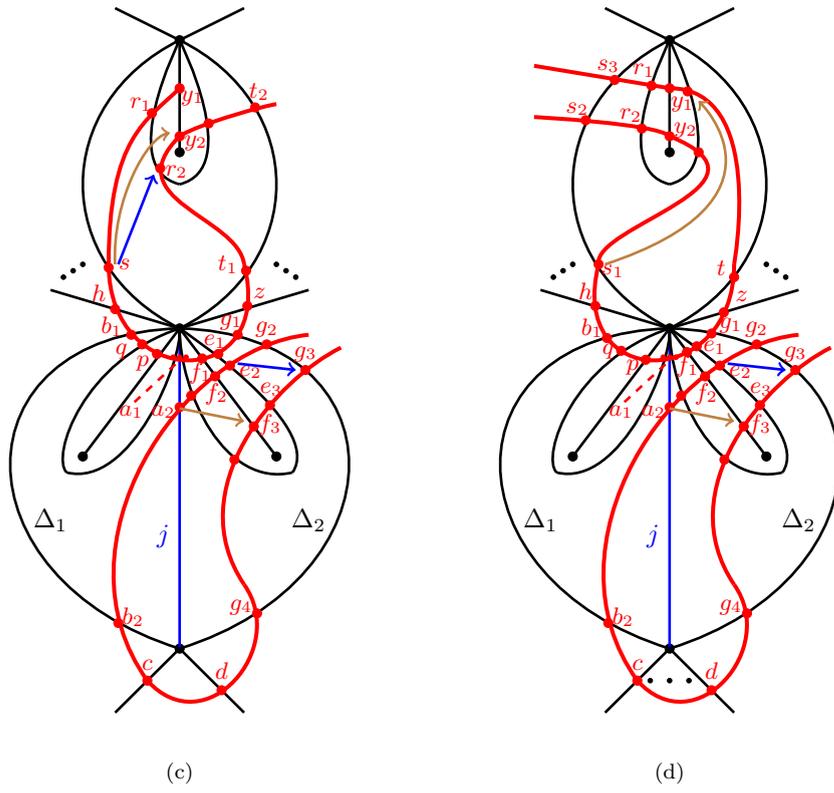


Figura 82: Los extremos de  $\alpha_r$  son lados de tipo 2.

En las cinco configuraciones de la Figura 82 tenemos que  $(N) = (\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2)$ .

Analizamos cada una de las cinco configuraciones.

**Configuración (a) de la Figura 82.**

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N) = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1}) + (\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2) = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que no hay desviaciones  $d^\Delta$  con punto inicial en  $s(u_1)$  y punto final en  $t(u_1)$  ó  $t(u_2)$ . Además existe  $s \in \{r+1, \dots, n\}$  tal que  $(\alpha_s \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$ .

**Configuración (b) de la Figura 82.**

Supongamos que el arco  $s(u_2) = j_p$  con  $p$  en el conjunto  $\{1, \dots, l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \\ &(\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2)v = \\ &-\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + \\ &\left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) v = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \\ &(\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2)v = -\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + \\ &\left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) v = 0. \end{aligned}$$

Supongamos que el arco  $s(u_2) = j_p$  con  $p$  en el conjunto  $\{l+2, \dots, r\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \\ &(\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2)v = \\ &-\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + \\ &\left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) v = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \\ &(\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2)v = -\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \right) v + \\ &\left( \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) v = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \\ & (\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2)v = \\ & - \left( I \cdot I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdot I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) v + \\ & (1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix})v = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v. \end{aligned}$$

2) Algún extremos de  $\alpha_r$  es lado de un triángulo doblado.

En este caso  $\alpha_r \in \{u_1, u_2, u_3, \eta_2\}$  en a) ó b) de la Figura 83.

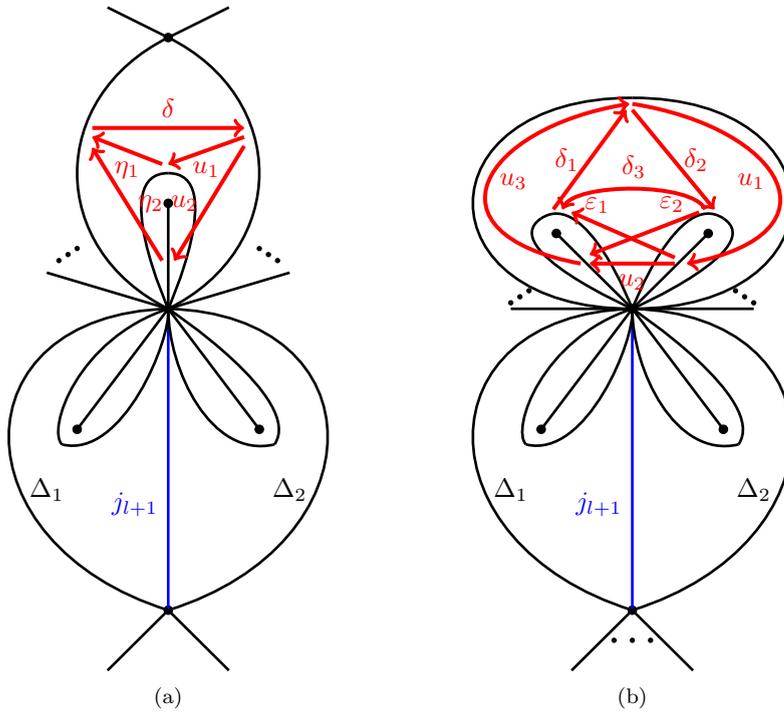
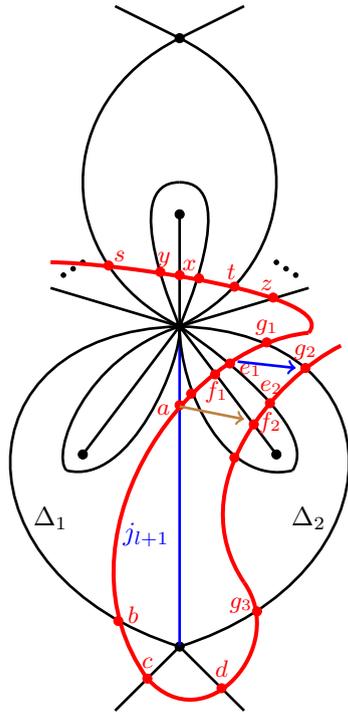
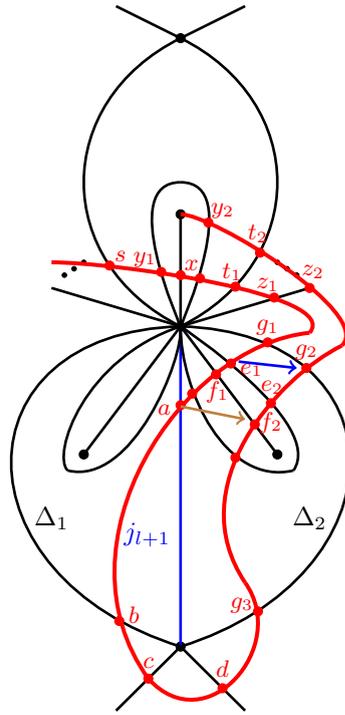


Figura 83: Algún extremo (ó ambos) de  $\alpha_r$  es lado de un triángulo doblado.

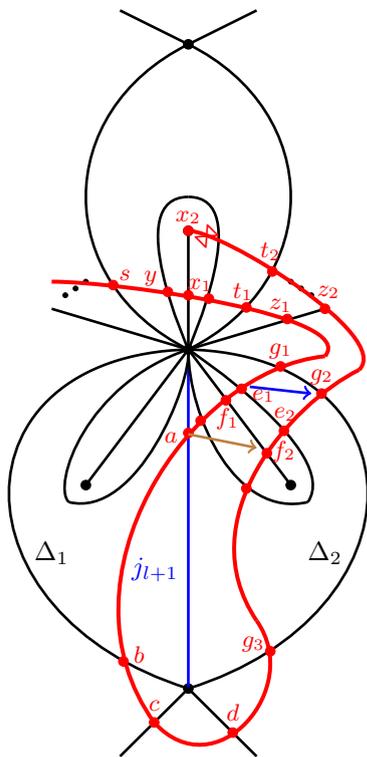
Consideramos el caso cuando un extremo de  $\alpha_r$  es el lado de un triángulo de tipo 2 y el otro extremo es el lado doblado de un triángulo doblado, es decir la curva  $i'$  se ve como una configuración de la Figura 84.



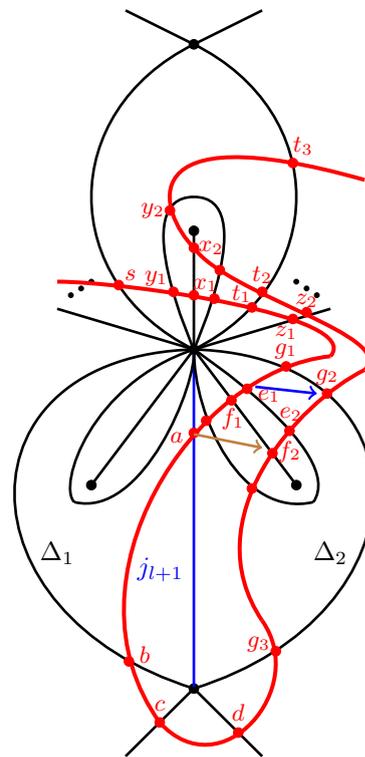
(a)



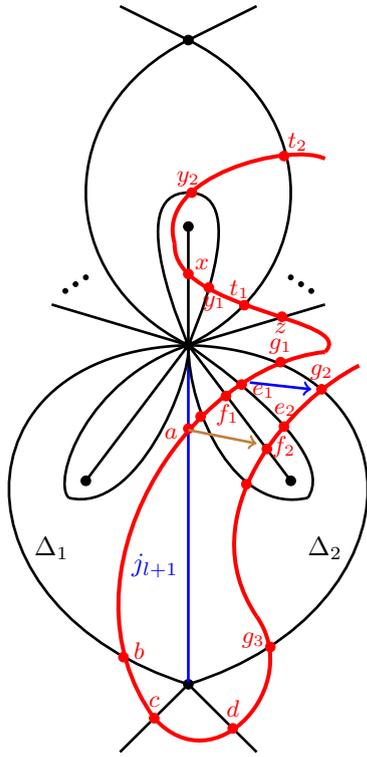
(b)



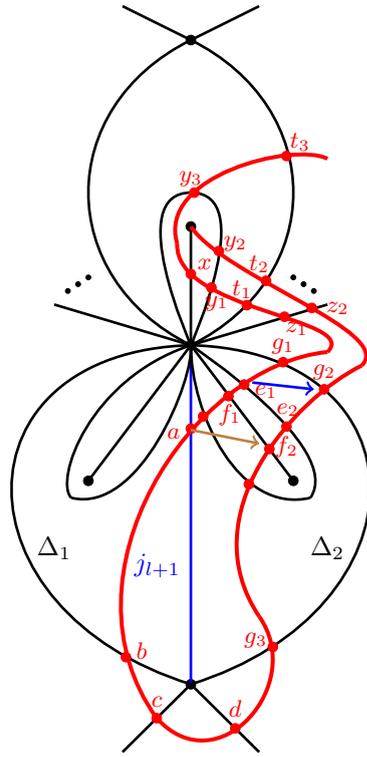
(c)



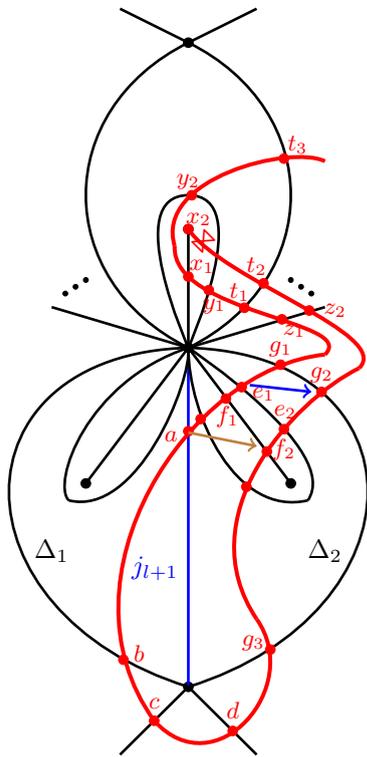
(d)



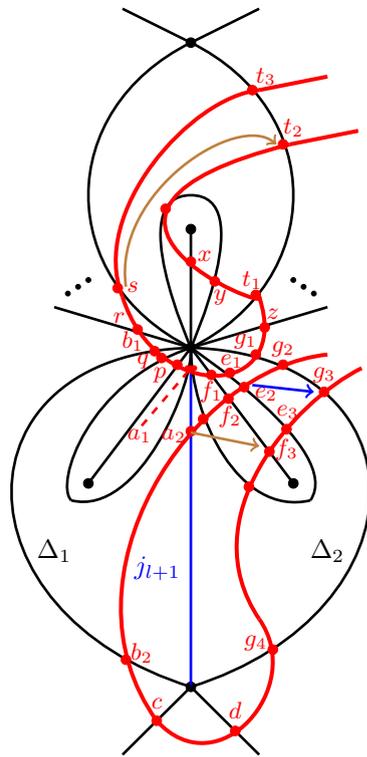
(e)



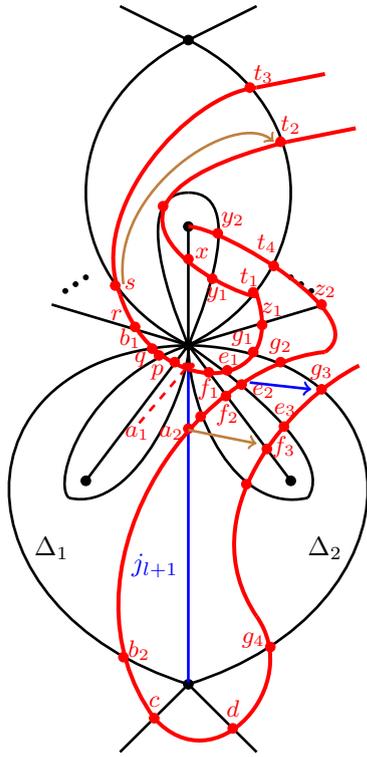
(f)



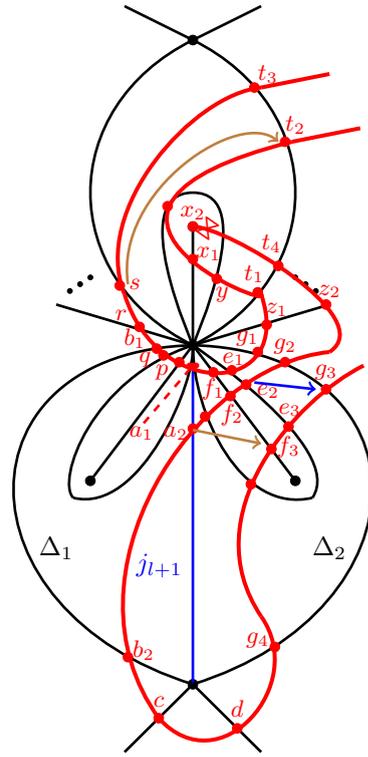
(g)



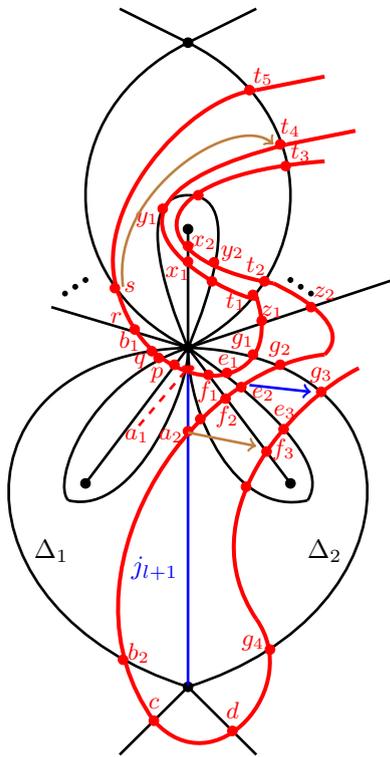
(h)



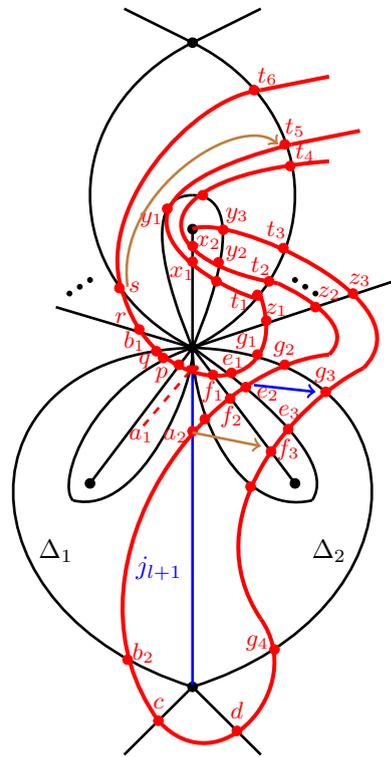
(i)



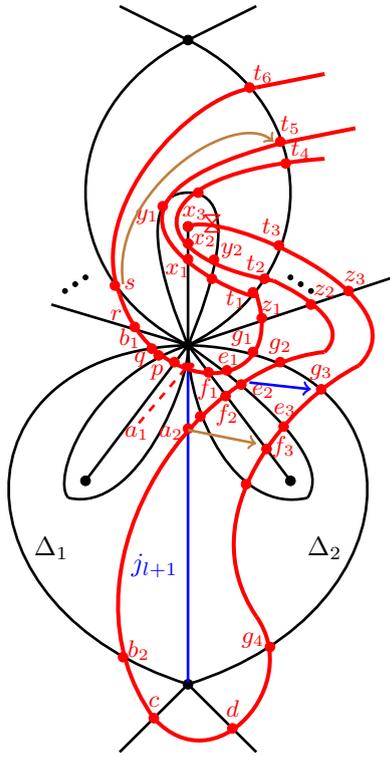
(j)



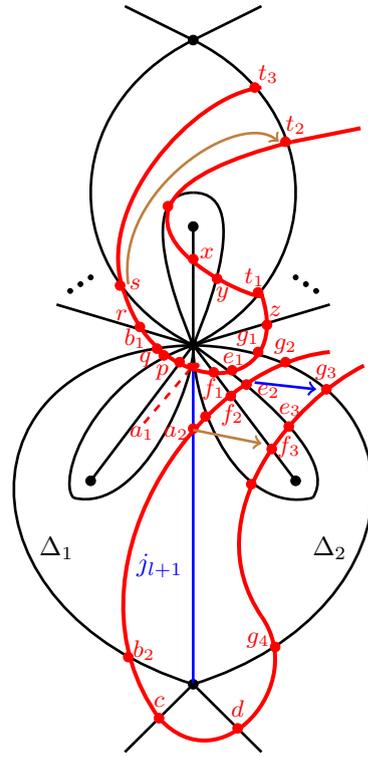
(k)



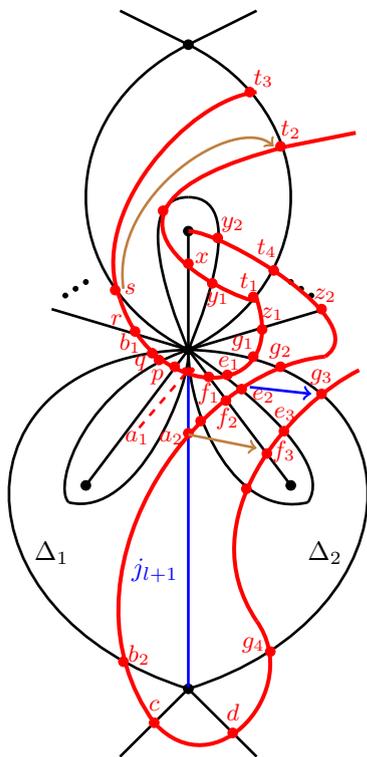
(l)



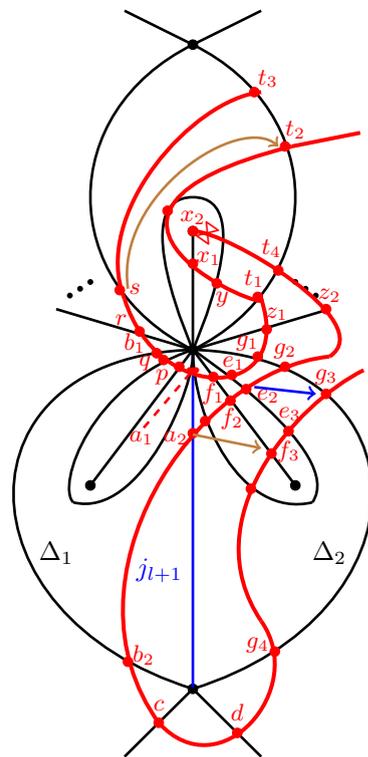
(m)



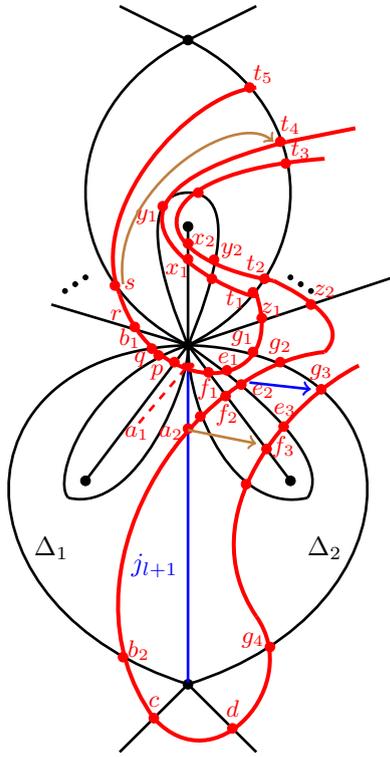
(n)



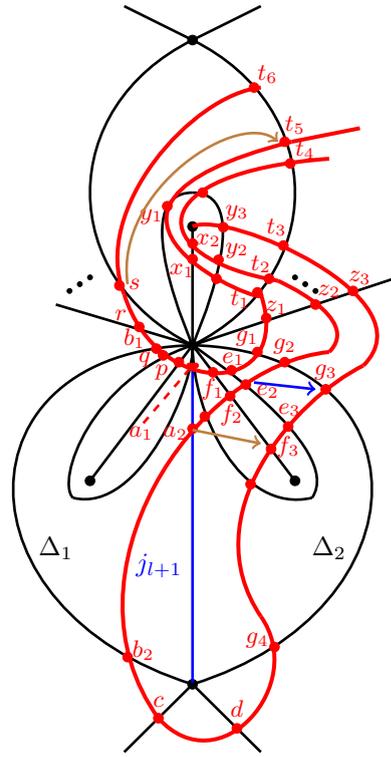
(ñ)



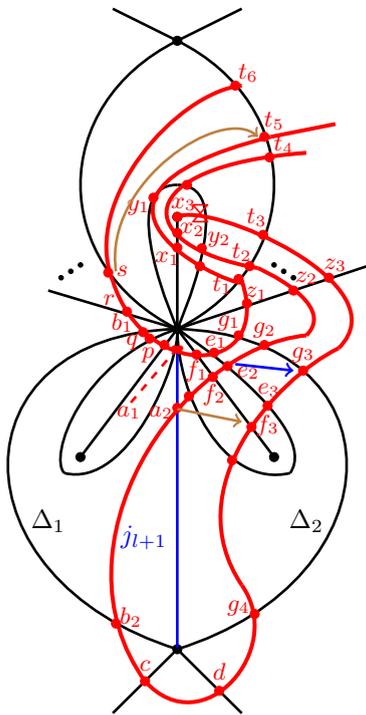
(o)



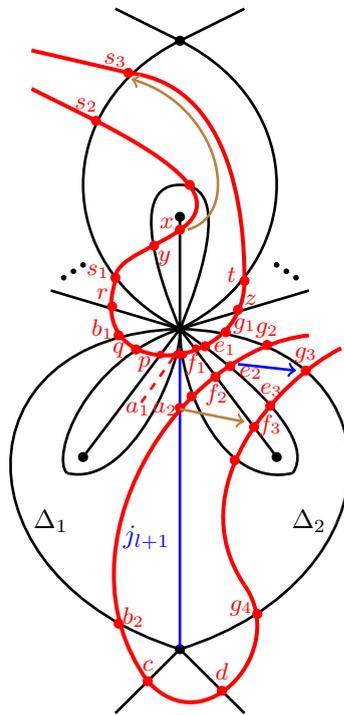
(p)



(q)



(r)



(s)

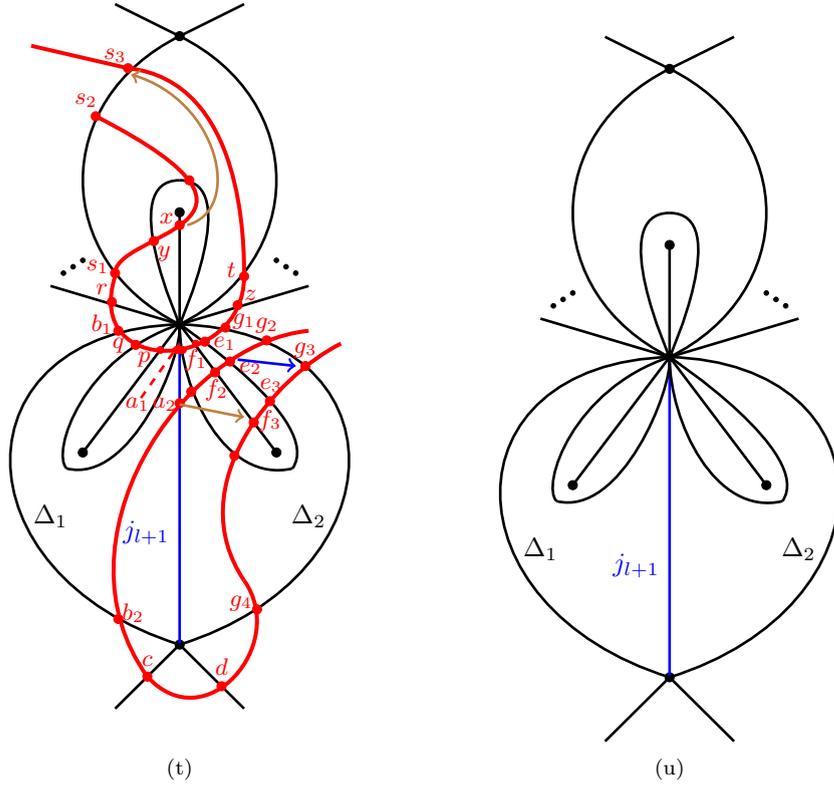


Figura 84: Un extremo de  $\alpha_r$  es lado de un triángulo de tipo 2 y el otro extremo es lado de un triángulo doblado.

**Configuración (a) de la Figura 84.**

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones y existe  $s \in \{2, \dots, n\}$  tal que  $(\alpha_s \cdots \alpha_2)v' = 0$ .
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  o  $d^{\Delta_2}$ .

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta\eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\eta_2)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta'}$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .

- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (u_2\delta)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta'}$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .

**Configuración (b) de la Figura 84.**

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones y existe  $s \in \{2, \dots, n\}$  tal que  $(\alpha_s \cdots \alpha_2)v' = 0$ .
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  o  $d^{\Delta_2}$ .

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta\eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\eta_2)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta'}$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .

- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (u_2\delta)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta'}$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .

**Configuración (c) de la Figura 84.**

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones y existe  $s \in \{2, \dots, n\}$  tal que  $(\alpha_s \cdots \alpha_2)v' = 0$ .
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  o  $d^{\Delta_2}$ .

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta\eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\eta_2)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta'}$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .
- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (u_2\delta)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta'}$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .

**Configuración (d) de la Figura 84.**

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones y existe  $s \in \{2, \dots, n\}$  tal que  $(\alpha_s \cdots \alpha_2)v' = 0$ .
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  o  $d^{\Delta_2}$ .

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta\eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\eta_2)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta'}$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .
- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (u_2\delta)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta'}$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .

**Configuración (e) de la Figura 84.**

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.

- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones y existe  $s \in \{2, \dots, n\}$  tal que  $(\alpha_s \cdots \alpha_2)v' = 0$ .
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  o  $d^{\Delta_2}$ .

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta\eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\eta_2)v' = 0$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .
- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (u_2\delta)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta'}$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .

#### Configuración (f) de la Figura 84.

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones y existe  $s \in \{2, \dots, n\}$  tal que  $(\alpha_s \cdots \alpha_2)v' = 0$ .
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  o  $d^{\Delta_2}$ .

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta\eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\eta_2)v' = 0$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .
- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (u_2\delta)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta'}$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .

**Configuración (g) de la Figura 84.**

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones y existe  $s \in \{2, \dots, n\}$  tal que  $(\alpha_s \cdots \alpha_2)v' = 0$ .
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  o  $d^{\Delta_2}$ .

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta\eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\eta_2)v' = 0$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .
- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (u_2\delta)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta'}$  en ambas las representaciones  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .

**Configuración (h) de la Figura 84.**

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(\eta_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta\eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (u_2\delta)v' &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ &+ [1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (u_2\delta)v' &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ &+ [1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (u_2\delta)v' &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ &+ [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (u_2\delta)v' &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ &+ [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

#### Configuración (i) de la Figura 84.

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(\eta_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + \\ (\delta\eta_2)v &= 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} \text{ ya que } (\eta_2) \text{ actúa como cero en ambas representaciones.} \end{aligned}$$

- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 \delta)v' =$$

$$- [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ [1 \ 0 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = -1 + 1 = 0.$$

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' +$$

$$(u_2 \delta)v' = - [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ [1 \ 0 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = -1 + 1 = 0.$$

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 \delta)v' =$$

$$- [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1.$$

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' +$$

$$(u_2 \delta)v' = - [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1.$$

#### Configuración (j) de la Figura 84.

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1} \delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1} \beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(\eta_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta \eta_2$ .

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta \eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2 \delta$ .

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 \delta)v' = \\ &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 \delta)v' = \\ &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 \delta)v' = \\ &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 \delta)v' = \\ &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

#### Configuración (k) de la Figura 84.

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1} \delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1} \beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(\eta_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta\eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} \text{ ya que } (\eta_2) \text{ actúa como cero en ambas representaciones.}$$

- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2\delta)v' =$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' +$$

$$(u_2\delta)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2\delta)v' =$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' +$$

$$(u_2\delta)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

#### Configuración (1) de la Figura 84.

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en

ambas representaciones.

- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(\eta_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta\eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$$
 ya que  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2\delta)v' =$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' +$$

$$(u_2\delta)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2\delta)v' =$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' +$$

$$\begin{aligned}
& (u_2\delta)v' = \\
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\
& + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

**Configuración (m) de la Figura 84.**

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(\eta_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta\eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\begin{aligned}
& \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\
& (u_2\delta)v' =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\
& + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\
& (u_2\delta)v' =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I
\end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 \delta)v' =$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 \delta)v' =$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

#### Configuración (n) de la Figura 84.

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1} \delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1} \beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(\eta_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta \eta_2$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta \eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2 \delta$ .  
 Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (u_2 \delta)v' &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (u_2 \delta)v' &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (u_2 \delta)v' &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (u_2 \delta)v' &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

#### Configuración (ñ) de la Figura 84.

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1} \delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1} \beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(\eta_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta \eta_2$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta \eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2 \delta$ .  
 Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 \delta)v' =$

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\
& + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 1 = 0. \\
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} & = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\
(u_2 \delta)v' & = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\
& + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 1 = 0. \\
\text{Supongamos que } s(\delta) & = j_p \text{ para } p \in \{l+2, \dots, r\}. \\
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} & = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\
(u_2 \delta)v' & = \\
& - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\
& + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1. \\
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} & = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\
(u_2 \delta)v' & = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\
& + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1.
\end{aligned}$$

#### Configuración (o) de la Figura 84.

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1} \delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1} \beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(\eta_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta \eta_2$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta \eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2 \delta$ .  
 Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\
&(u_2 \delta)v' = \\
&-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\
&+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \\
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\
&(u_2 \delta)v' = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\
&+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$ .

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\
&(u_2 \delta)v' = \\
&-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\
&+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \\
\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\
&(u_2 \delta)v' = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\
&+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

#### Configuración (p) de la Figura 84.

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1} \delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1} \beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(\eta_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta \eta_2$ .  
 $\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta \eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ & (u_2\delta)v' = \\ & - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ & + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ & (u_2\delta)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ & + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ & (u_2\delta)v' = \\ & - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ & + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \\ \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ & (u_2\delta)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ & + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

#### Configuración (q) de la Figura 84.

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(\eta_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta\eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} \text{ ya que } (\eta_2) \text{ actúa como cero en ambas representaciones.}$$

- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2\delta)v' =$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' +$$

$$(u_2\delta)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' +$$

$$(u_2\delta)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' +$$

$$(u_2\delta)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

#### Configuración (r) de la Figura 84.

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en

ambas representaciones.

- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(\eta_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (\delta\eta_2)v = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$$
 ya que  $(\eta_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2\delta)v' =$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' +$$

$$(u_2\delta)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Supongamos que  $s(\delta) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2\delta)v' =$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' +$$

$$(u_2\delta)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Configuración (s) de la Figura 84.**

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1}\delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1}\beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1}\alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1}\beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(u_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(u_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta\eta_2$ .

Supongamos que  $s(\eta_2) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (\delta\eta_2)v' &= -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (\delta\eta_2)v' &= -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Supongamos que  $s(\eta_2) = j_p$  para  $p \in \{l+2, \dots, r\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (\delta\eta_2)v' &= -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (\delta\eta_2)v' &= -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2\delta$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (u_2 \delta)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} \text{ ya que } (u_2) \text{ actúa como cero en ambas representaciones.}$$

**Configuración (t) de la Figura 84.**

- Claramente se cumple que  $\partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_3^{l+1} \delta)v' = 0 = \partial_\gamma(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\delta)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$ .
- $\partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_2^{l+1} \beta_m)v = 0 = \partial_\rho(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\beta_m)$  actúa como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2 + \alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = (-\alpha_1^{l+1} \alpha_n \cdots \alpha_2)v' + (\alpha_1^{l+1} \beta_m)v' = 0 = \partial_{\alpha_1}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(\beta_m)$  y  $(u_2)$  actúan como cero en ambas representaciones.
- $\partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n + \alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = (\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_1^{l+1} \alpha_n)v' + (\alpha_3^{l+1} \alpha_n)v' = 0 = \partial_{\alpha_{n-1}}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  pues  $(\alpha_n)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación  $d^{\Delta_1}$  y  $(u_2)$  actúa como cero en ambas representaciones.

Para  $r \in \{2, \dots, n-2\}$  consideramos los casos cuando  $\alpha_r = u_2$  o  $\alpha_r = \eta_2$ .

- Cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene que  $N = \delta \eta_2$ .

Supongamos que  $s(\eta_2) = j_p$  para  $p \in \{1, \dots, l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (\delta \eta_2)v' &= -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + [0 \quad 1] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (\delta \eta_2)v' &= -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + [0 \quad 1] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Supongamos que  $s(\eta_2) = j_p$  para  $p \in l+2, \dots, r$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (\delta \eta_2)v' &= -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

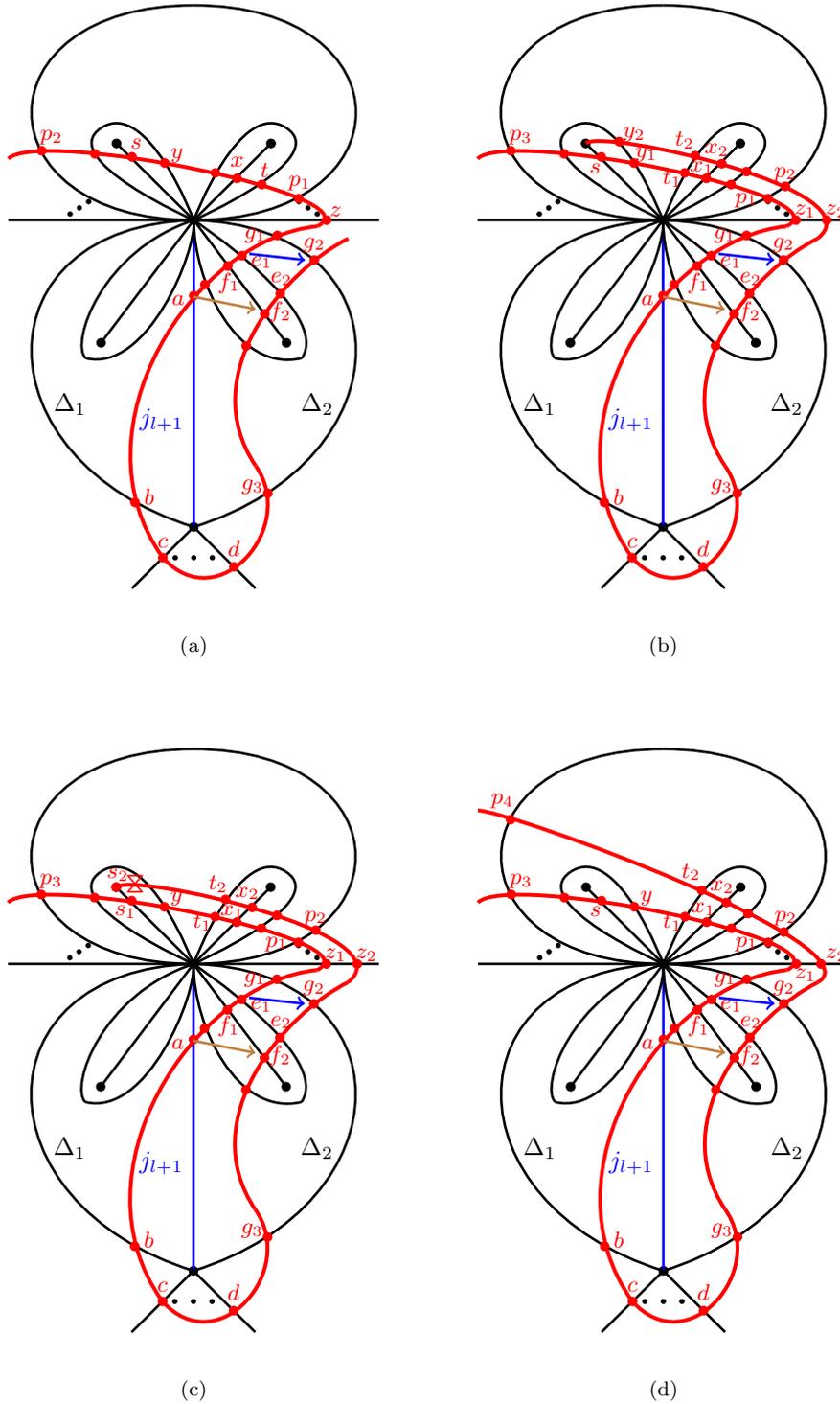
$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + \\ (\delta \eta_2)v' &= -I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

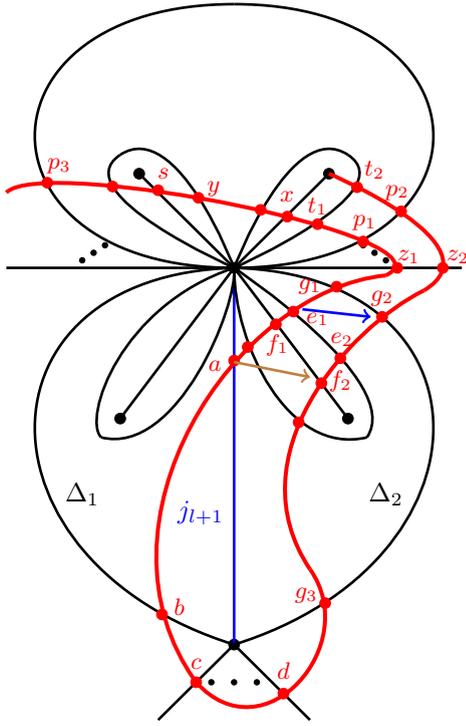
- Cuando  $\alpha_r = \eta_2$  se tiene que  $N = u_2 \delta$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v + (u_2 \delta)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} \text{ ya que } (u_2) \text{ actúa como cero en ambas representaciones.}$$

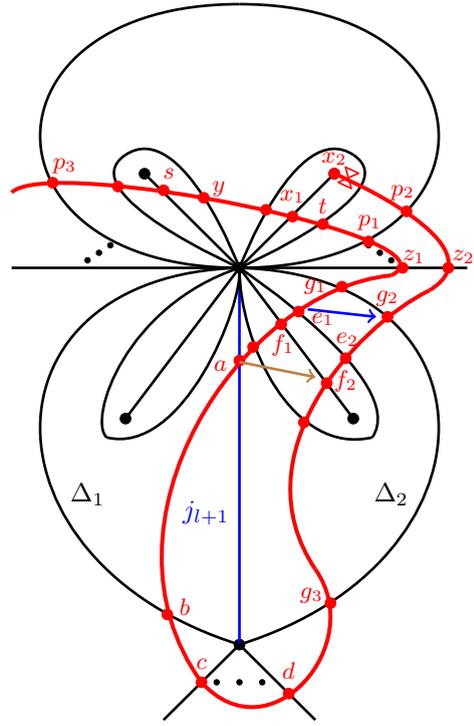
**Configuración (u) de la Figura 84.**

Por otro lado consideramos el caso cuando un extremo de  $\alpha_r$  es el lado doblado de un triángulo doblado y el otro extremo es el lado de un triángulo de tipo 3 ó ambos extremos son lados doblados de triángulos doblados. Como se muestra en la Figura 85.

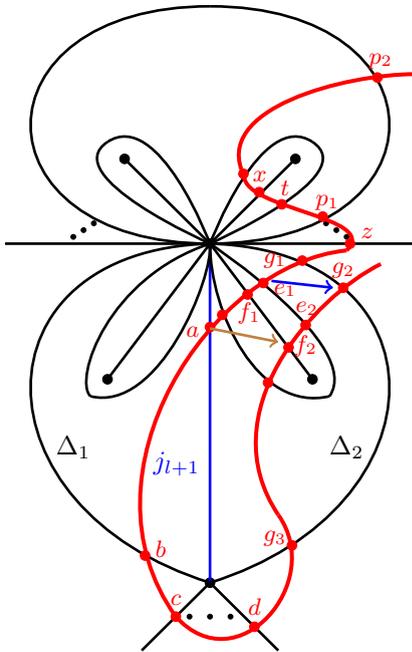




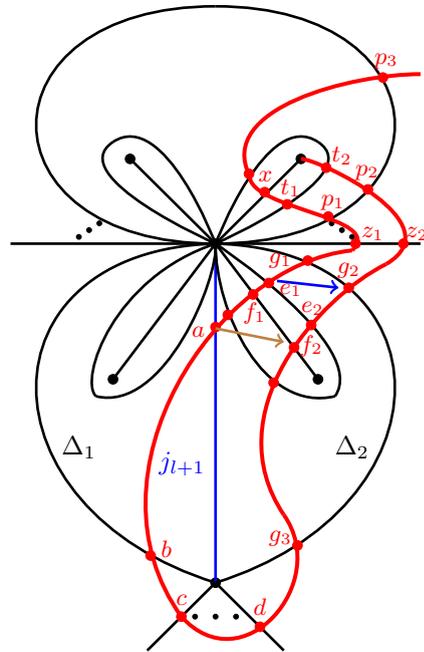
(e)



(f)

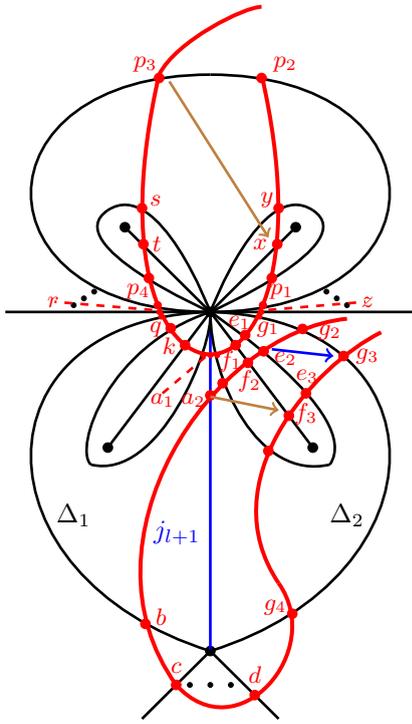


(g)

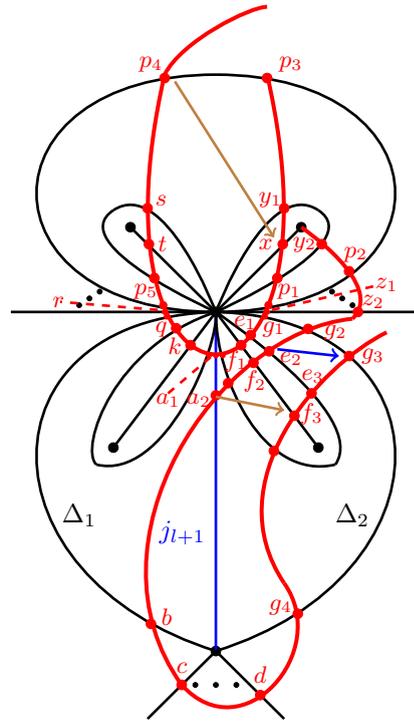


(h)

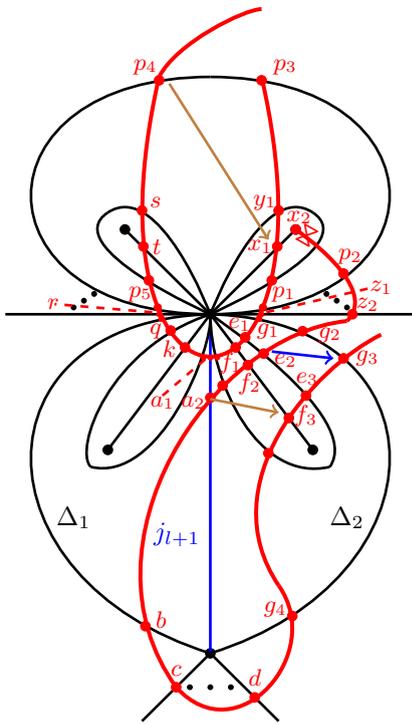




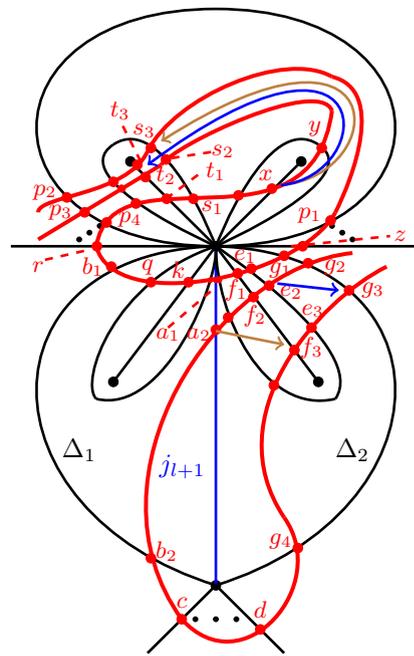
(m)



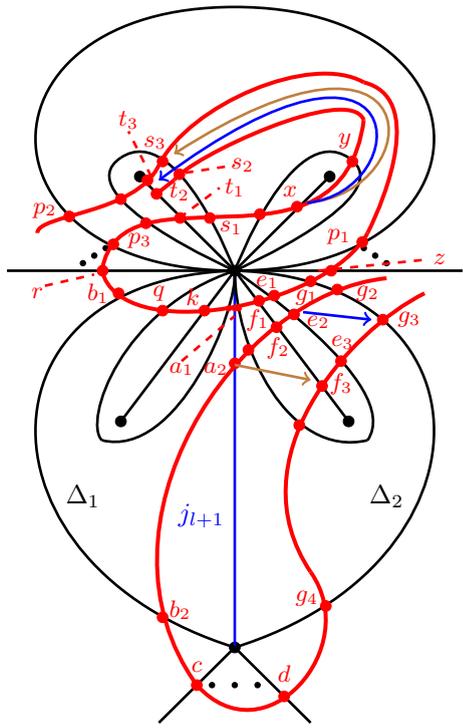
(n)



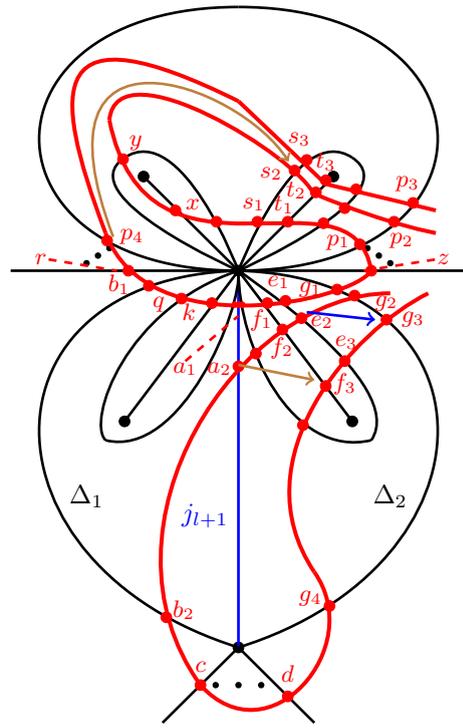
(ñ)



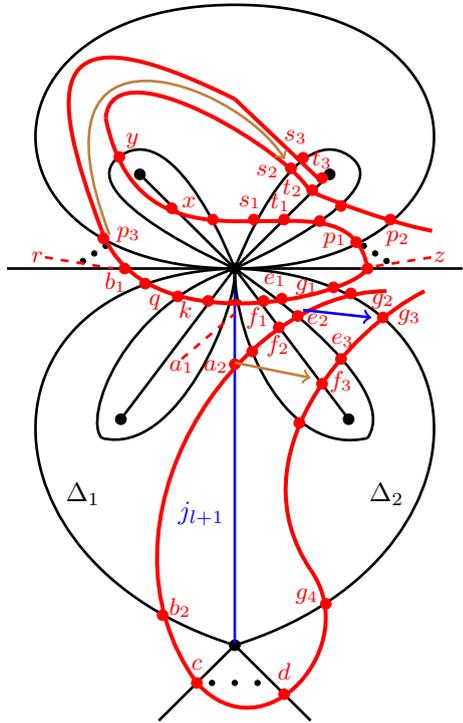
(o)



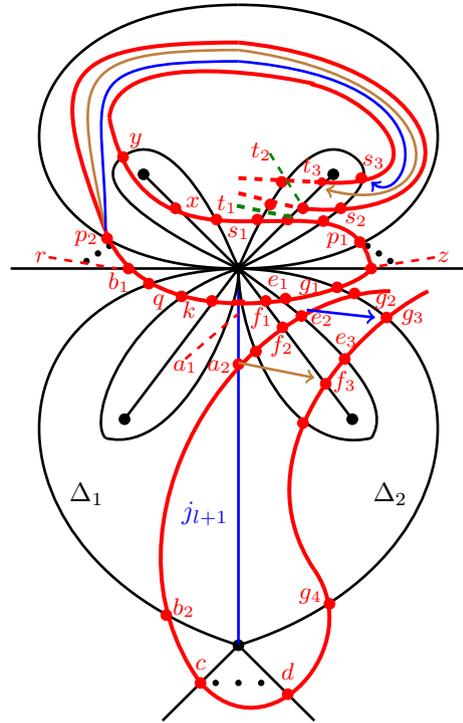
(p)



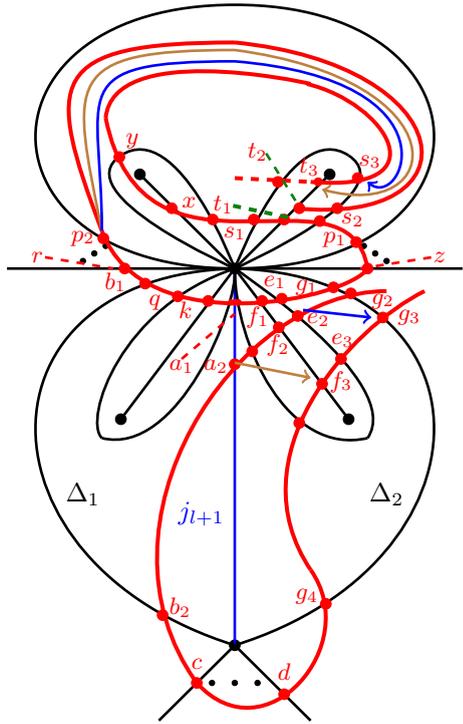
(q)



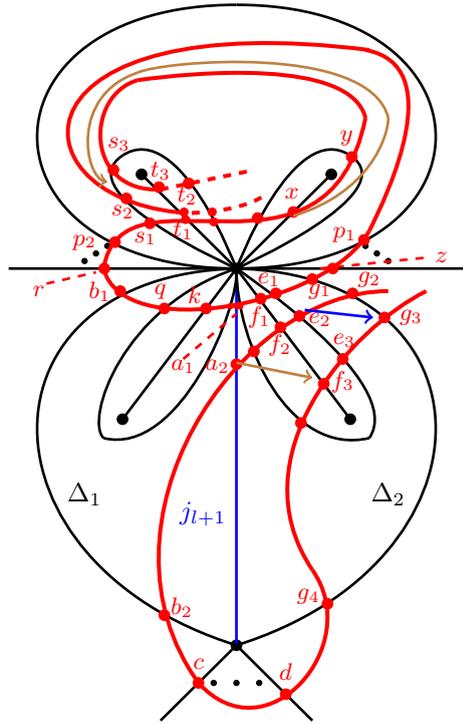
(r)



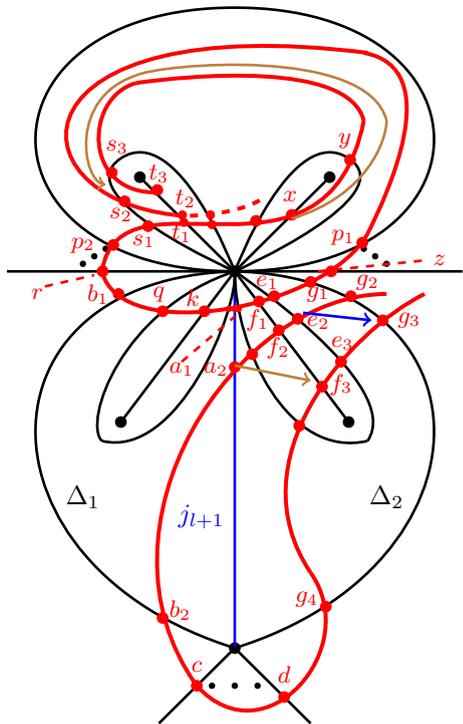
(s)



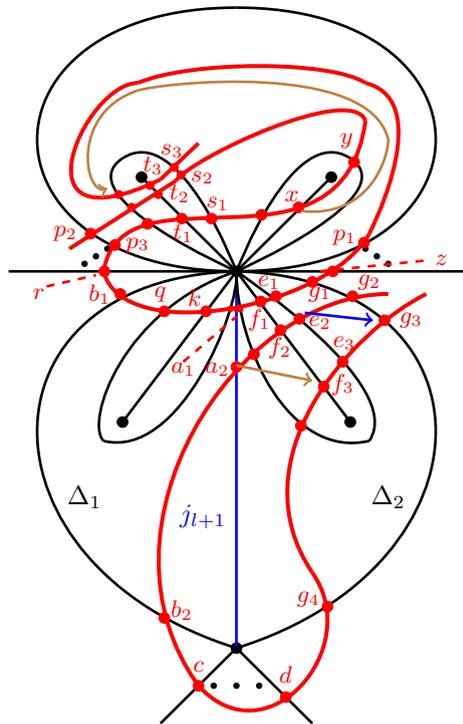
(t)



(u)



(v)



(w)

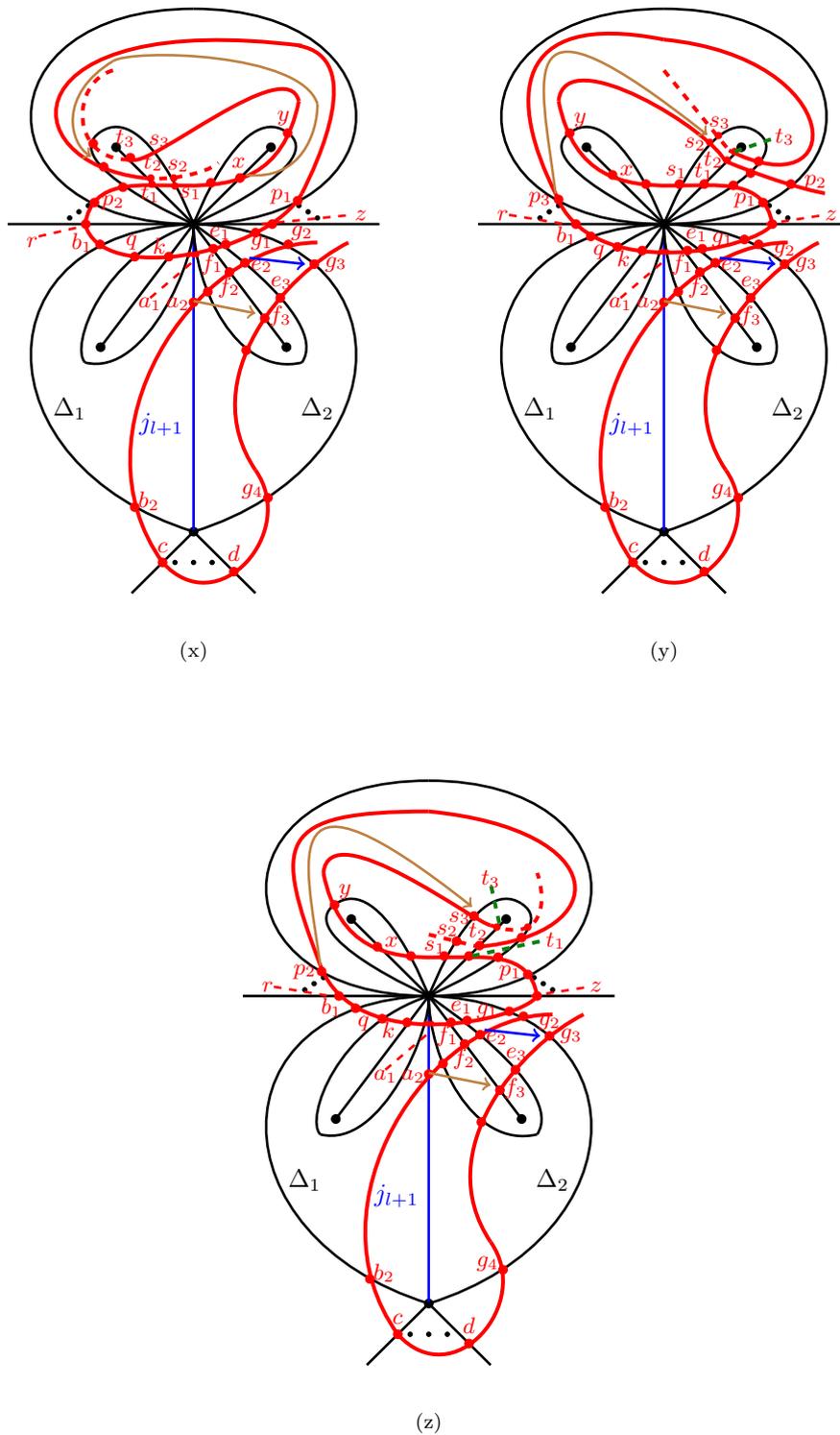


Figura 85: un extremo de  $\alpha_r$  es el lado doblado de un triángulo doblado y el otro extremo es el lado de un triángulo de tipo 1 ó ambos extremos son lados doblados de triángulos doblados.

En cada una de las configuraciones de la Figura 85 se tiene que  $\alpha_r \in \{u_1, u_2, u_3\}$ , en cada uno de los siguientes casos vamos a considerar las tres opciones para  $\alpha_r$ .

**Configuración (a) de la Figura 85.**

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , pues  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y los puntos  $(u_2)v'$ ,  $(\varepsilon_1)v'$  no son puntos iniciales de desviaciones ni curvas auxiliares.

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , pues  $(u_3)v'$  no son punto inicial de ninguna desviación ni curvas auxiliares.

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , pues  $(u_1)v'$ ,  $(\delta_2)v'$  no son puntos iniciales de desviaciones ni curvas auxiliares.

**Configuración (b) de la Figura 85.**

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , pues  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y los puntos  $(u_2)v'$ ,  $(\varepsilon_1)v'$  no son puntos iniciales de desviaciones ni curvas auxiliares.

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , pues  $(u_3)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación ni curva auxiliar.

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , pues  $(u_1)v'$ ,  $(\delta_2)v'$  no son puntos iniciales de desviaciones ni curvas auxiliares.

**Configuración (c) de la Figura 85.**

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , pues  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y los puntos  $(u_2)v'$ ,  $(\varepsilon_1)v'$  no son puntos iniciales de desviaciones ni curvas auxiliares.

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , pues  $(u_3)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación ni curva auxiliar.

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (u_1)v', (\delta_2)v' \text{ no son puntos iniciales de desviaciones ni curvas auxiliares.}$$

**Configuración (d) de la Figura 85.**

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0 \text{ y } (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ en } M_l \text{ y } M_{l+1}.$$

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0 \text{ y } (u_1 u_3)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ en } M_l \text{ y } M_{l+1}.$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0 \text{ y } (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ en } M_l \text{ y } M_{l+1}.$$

**Configuración (e) de la Figura 85.**

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0 \text{ y los puntos } (u_2)v', (\varepsilon_1)v' \text{ no son puntos iniciales de desviaciones ni curvas auxiliares.}$$

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (u_3)v' \text{ no es punto inicial de ninguna desviación ni curva auxiliar.}$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (u_1)v', (\delta_2)v' \text{ no son puntos iniciales de desviaciones ni curvas auxiliares.}$$

**Configuración (f) de la Figura 85.**

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0 \text{ y los puntos } (u_2)v', (\varepsilon_1)v' \text{ no son puntos iniciales de desviaciones ni curvas auxiliares.}$$

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ &= 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (u_3)v' \text{ no es punto inicial de ninguna desviaci3n ni curva auxi-} \\ &\text{liar.} \end{aligned}$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ &\varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (u_1)v', (\delta_2)v' \text{ no son puntos iniciales de desviaciones} \\ &\text{ni curvas auxiliares.} \end{aligned}$$

### **Configuraci3n (g) de la Figura 85.**

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \\ &\delta_1 \varepsilon_1)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0 \text{ y los puntos } (u_2)v', (\varepsilon_1)v' \text{ no son} \\ &\text{puntos iniciales de desviaciones ni curvas auxiliares.} \end{aligned}$$

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ &= 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (u_3)v' \text{ no es punto inicial de ninguna desviaci3n ni curva auxi-} \\ &\text{liar.} \end{aligned}$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ &\varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (u_1)v', (\delta_2)v' \text{ no son puntos iniciales de desviaciones} \\ &\text{ni curvas auxiliares.} \end{aligned}$$

### **Configuraci3n (h) de la Figura 85.**

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \\ &\delta_1 \varepsilon_1)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0 \text{ y los puntos } (u_2)v', (\varepsilon_1)v' \text{ no son} \\ &\text{puntos iniciales de desviaciones ni curvas auxiliares.} \end{aligned}$$

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ &= 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (u_3)v' \text{ no es punto inicial de ninguna desviaci3n ni curva auxi-} \\ &\text{liar.} \end{aligned}$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ &\varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ pues } (u_1)v', (\delta_2)v' \text{ no son puntos iniciales de desviaciones} \\ &\text{ni curvas auxiliares.} \end{aligned}$$

### **Configuraci3n (i) de la Figura 85.**

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , pues  $(\alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' = 0$  y los puntos  $(u_2)v'$ ,  $(\varepsilon_1)v'$  no son puntos iniciales de desviaciones ni curvas auxiliares.

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , pues  $(u_3)v'$  no es punto inicial de ninguna desviación ni curva auxiliar.

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , pues  $(u_1)v'$ ,  $(\delta_2)v'$  no son puntos iniciales de desviaciones ni curvas auxiliares.

### Configuración (j) de la Figura 85.

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0] I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$   
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' = 0 + 0 + 0 = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , ya que  $(u_2)$  y  $(\varepsilon_1)$  actúan como cero en  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  y suponemos que  $s(u_1) \in \{j_1, \dots, j_l\}$  se tiene.

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = - \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$   
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 1 = 0.$

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = - \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$   
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 1 = 0.$

supongamos ahora que  $s(u_1) \in \{j_{l+2}, \dots, j_r\}$  entonces,

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = - [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$   
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 0 = -1.$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ &= -[1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [1] I \cdots I [0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' \\ &+ [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ &\varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} \text{ ya que } (u_2) \text{ y } (\varepsilon_2) \text{ actúan como cero en } M_{l+1} \text{ y } M_l. \end{aligned}$$

### Configuración (k) de la Figura 85.

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \\ &\delta_1 \varepsilon_1)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' = 0 + 0 + 0 = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ ya que } (u_2) \text{ y} \\ &(\varepsilon_1) \text{ actúan como cero en } M_{l+1} \text{ y } M_l. \end{aligned}$$

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  y suponemos que  $s(u_1) \in \{j_1, \dots, j_l\}$  se tiene.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ &= - \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 1 = 0. \\ \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ &= - \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

supongamos ahora que  $s(u_1) \in \{j_{l+2}, \dots, j_r\}$  entonces,

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ &= -[1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 1 = 0. \\ \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \end{aligned}$$



$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$$
 ya que  $(u_2)$  y  $(\varepsilon_2)$  actúan como cero en  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .

### Configuración (m) de la Figura 85.

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' = 0 + 0 + 0 = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$$
, ya que  $(u_2)$  y  $(\varepsilon_1)$  actúan como cero en  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  y suponemos que  $s(u_1) \in \{j_1, \dots, j_l\}$  se tiene.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = - \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 1 = 0.$$

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = - \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 1 = 0.$$

supongamos ahora que  $s(u_1) \in \{j_{l+2}, \dots, j_r\}$  entonces,

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 0 = -1.$$

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 \cdots I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v'$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 0 = -1.$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} \text{ ya que } (u_2) \text{ y } (\varepsilon_2) \text{ actúan como cero en } M_{l+1} \text{ y } M_l.$$

### Configuración (n) de la Figura 85.

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \\ \delta_1 \varepsilon_1)v' &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ [0 & 0 & 0 & 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' = 0 + 0 + 0 = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ ya que } (u_2) \text{ y} \\ (\varepsilon_1) &\text{ actúan como cero en } M_{l+1} \text{ y } M_l. \end{aligned}$$

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  y suponemos que  $s(u_1) \in \{j_1, \dots, j_l\}$  se tiene.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ - \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 1 = 0. \\ \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ - \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

supongamos ahora que  $s(u_1) \in \{j_{l+2}, \dots, j_r\}$  entonces,

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ - [1 & 0 & 0 & 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + [1 & 0 & 0 & 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 0 = -1. \\ \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ - [1 & 0 & 0 & 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + [1 & 0 & 0 & 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 +$$

$\varepsilon_2 \delta_2 v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(u_2)$  y  $(\varepsilon_2)$  actúan como cero en  $M_{l+1}$  y  $M_l$ .

**Configuración (ñ) de la Figura 85.**

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \\ \delta_1 \varepsilon_1)v' &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 0v' &= 0 + 0 + 0 = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ ya que } (u_2) \text{ y} \\ (\varepsilon_1) &\text{ actúan como cero en } M_{l+1} \text{ y } M_l. \end{aligned}$$

Ahora si  $\alpha_r = u_2$  y suponemos que  $s(u_1) \in \{j_1, \dots, j_l\}$  se tiene.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ &- \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v' = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ &- \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v' = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

supongamos ahora que  $s(u_1) \in \{j_{l+2}, \dots, j_r\}$  entonces,

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ &- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I_2 \cdots I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v' = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} \text{ ya que } (u_2) \text{ y } (\varepsilon_2) \text{ actúan como cero en } M_{l+1} \text{ y } M_l. \end{aligned}$$

**Configuración (o) de la Figura 85.**





$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , ya que  $(u_3)$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ .

Ahora consideramos el caso cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , ya que  $(u_3)$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ .

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  y  $s(\delta_2) \in \{j_1, \dots, j_l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 0 \ 0 \ 1]v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v' + \\ & [1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) v' = -[0 \ 0 \ 0 \ 1] + [1 \ 0 \ 0 \ 0] + \\ & [-1 \ 0 \ 0 \ 1] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 0 \ 0 \ 1]v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v' + \\ & [1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) v' = -[0 \ 0 \ 0 \ 1] + [1 \ 0 \ 0 \ 0] + \\ & [-1 \ 0 \ 0 \ 1] = 0. \end{aligned}$$

ahora si  $s(\delta_2) \in \{j_{l+2}, \dots, j_r\}$  tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 0 \ 0 \ 1]v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} v' = \\ & -[0 \ 0 \ 0 \ 1] + [1 \ 0 \ 0 \ 0] + [-1 \ 0 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 0 \ -1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 0 \ 0 \ 1]v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} v' = \\ & -[0 \ 0 \ 0 \ 1] + [1 \ 0 \ 0 \ 0] + [-1 \ 0 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 0 \ -1]. \end{aligned}$$

### Configuración (r) de la Figura 85.

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ ,

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , ya que  $(u_3)$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ .

Ahora consideramos el caso cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ ya que } (u_3) \text{ actúa como cero en } M_l \text{ y } M_{l+1}.$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  y  $s(\delta_2) \in \{j_1, \dots, j_l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= -[1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 0 \ 1]v' + [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} v' + \\ &[1 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right) v' = -[0 \ 0 \ 1] + [1 \ 0 \ 0] + \\ &[-1 \ 0 \ 1] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= -[1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 0 \ 1]v' + [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} v' + \\ &[1 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right) v' = -[0 \ 0 \ 1] + [1 \ 0 \ 0] + \\ &[-1 \ 0 \ 1] = 0. \end{aligned}$$

ahora si  $s(\delta_2) \in \{j_{l+2}, \dots, j_r\}$  tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= -[1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 0 \ 1]v' + [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} v' = \\ &-[0 \ 0 \ 1] + [1 \ 0 \ 0] + [-1 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ -1]. \\ \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= -[1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 0 \ 1]v' + [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} v' = \\ &-[0 \ 0 \ 1] + [1 \ 0 \ 0] + [-1 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ -1]. \end{aligned}$$

### Configuración (s) de la Figura 85.

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ ,

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \delta_1 \varepsilon_1)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ ya que } (u_3) \text{ y } (\delta_1) \text{ actúan como cero en } M_l \text{ y } M_{l+1}.$$

Ahora consideramos el caso cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ ya que } (u_3) \text{ actúa como cero en } M_l \text{ y } M_{l+1}.$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  y  $s(u_1) \in \{j_1, \dots, j_l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= -[1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 1] v' + [1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + \\ [1 \ 0 \ 0] &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = -[0 \ 1] + [1 \ 1] + [-1 \ 0] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= -[1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 1] v' + [1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + \\ [1 \ 0 \ 0] &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = -[0 \ 1] + [1 \ 1] + [-1 \ 0] = 0. \end{aligned}$$

Por último consideramos el caso que  $s(u_1) \in \{j_{l+2}, \dots, j_r\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 1] v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ [1 \ 0 \ 0] &\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -[0 \ 1] + [1 \ 0] + [-1 \ 0] = [0 \ -1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 1] v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ [1 \ 0 \ 0] &\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -[0 \ 1] + [1 \ 0] + [-1 \ 0] = [0 \ -1]. \end{aligned}$$

### Configuración (t) de la Figura 85.

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ ,

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \\ \delta_1 \varepsilon_1)v' &= 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ ya que } (u_3) \text{ y } (\delta_1) \text{ actúan como cero en } M_l \text{ y } M_{l+1}. \end{aligned}$$

Ahora consideramos el caso cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = \\ 0 &= \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ ya que } (u_3) \text{ actúa como cero en } M_l \text{ y } M_{l+1}. \end{aligned}$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  y  $s(u_1) \in \{j_1, \dots, j_l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \\ \varepsilon_2 \delta_2)v' &= -[1 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$







$$-\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora consideramos el caso cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ ya que } (u_1) \text{ actúa como cero en } M_l \text{ y } M_{l+1}.$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ ya que } (u_1) \text{ y } (\delta_2) \text{ actúan como cero en } M_l \text{ y } M_{l+1}.$$

### Configuración (x) de la Figura 85.

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$  y  $s(\varepsilon_1) \in \{j_1, \dots, j_l\}$ ,

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \\ \delta_1 \varepsilon_1)v' &= -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v' + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) v' = \\ -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \\ \delta_1 \varepsilon_1)v' &= -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v' + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) v' = \\ -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado si  $s(\varepsilon_1) \in \{j_{l+2}, \dots, j_r\}$  se tiene,

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \\ \delta_1 \varepsilon_1)v' &= -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v' + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} v' = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \\ \delta_1 \varepsilon_1)v' &= -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v' + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v' + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} v' = \\ -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora consideramos el caso cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ ya que } (u_1) \text{ actúa como cero en } M_l \text{ y } M_{l+1}.$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$ .

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ ya que } (u_1) \text{ y } (\delta_2) \text{ actúan como cero en } M_l \text{ y } M_{l+1}.$$

### Configuración (y) de la Figura 85.

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ ,

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} \text{ ya que } (u_3) \text{ actúa como cero en } M_l \text{ y } M_{l+1}.$$

Ahora consideramos el caso cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}, \text{ ya que } (u_3) \text{ actúa como cero en } M_l \text{ y } M_{l+1}.$$

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  y  $s(\delta_2) \in \{j_1, \dots, j_l\}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' \\ &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 0 \ 1] v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) v' = \\ &-[0 \ 0 \ 1] + [1 \ 0 \ 0] + [-1 \ 0 \ 1] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' \\ &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &I \cdots I [0 \ 0 \ 1] v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) v' = \\ &-[0 \ 0 \ 1] + [1 \ 0 \ 0] + [-1 \ 0 \ 1] = 0. \end{aligned}$$

ahora si  $\alpha_r = u_3$  y  $s(\delta_2) \in \{j_{l+2}, \dots, j_r\}$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' \\ &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 0 \ 1] v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} v' = \\ &-[0 \ 0 \ 1] + [1 \ 0 \ 0] + [-1 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ -1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} &= (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' \\ &= -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &I \cdots I [0 \ 0 \ 1] v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} v' = \\ &-[0 \ 0 \ 1] + [1 \ 0 \ 0] + [-1 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ -1]. \end{aligned}$$

### Configuración (z) de la Figura 85.

Consideramos primero el caso cuando  $\alpha_r = u_1$ ,

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_3 u_2 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$  ya que  $(u_3)$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ .

Ahora consideramos el caso cuando  $\alpha_r = u_2$  se tiene.

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_1 u_3)v' = 0 = \partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l}$ , ya que  $(u_3)$  actúa como cero en  $M_l$  y  $M_{l+1}$ .

Por otro lado si  $\alpha_r = u_3$  y  $s(\delta_2) \in \{j_1, \dots, j_l\}$ .

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 1] v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) v' = \\ -[0 \ 1] + [1 \ 0] + [-1 \ 1] = 0.$

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ I \cdots I [0 \ 1] v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0 \ 0] \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) v' = \\ -[0 \ 1] + [1 \ 0] + [-1 \ 1] = 0.$

Ahora si  $\alpha_r = u_3$  y  $s(\delta_2) \in \{j_{l+2}, \dots, j_r\}$

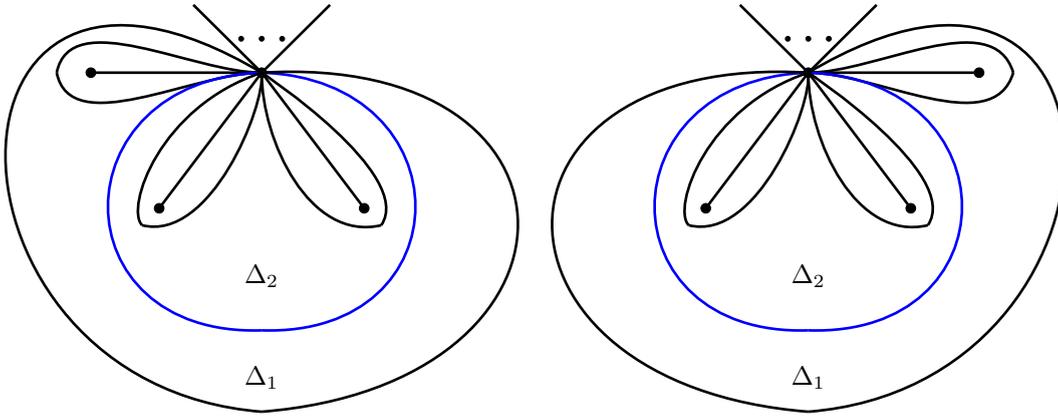
$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_{l+1}} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I \cdots I [0 \ 1] v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v' = \\ -[0 \ 1] + [1 \ 0] + [-1 \ 0] = [0 \ -1].$

$\partial_{\alpha_r}(\widehat{S}(\tau^\circ))_{M_l} = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1} + N)v' = (-\alpha_{r-1} \cdots \alpha_1 \alpha_n \cdots \alpha_{r+1})v' + (u_2 u_1 + \varepsilon_2 \delta_2)v' = -[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ I \cdots I [0 \ 1] v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v' + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v' = \\ -[0 \ 1] + [1 \ 0] + [-1 \ 0] = [0 \ -1].$

Para el caso cuando  $a = \beta_r$  para  $r \in \{1, \dots, m-1\}$  se tiene claramente que  $Ker(\xi_{M_l}) \subseteq Ker(\xi_{M_{l+1}})$  ya que en la configuración (a) de la Figura 79) no hay desviaciones  $d^{\Delta_1, 1}$  con puntos iniciales en el arco  $j_{l+1}$ .

□

$b_5)$   $\Delta_1$  es de tipo 2 y  $\Delta_2$  es de tipo 3.



Para esta configuración se hace un análisis similar al que se hizo en el inciso  $b_4$ ). Con esto terminamos de probar el Lema 5.3.

□

Ahora regresando al Teorema 5.2 para cada 1-desviación  $d^1$  que tiene punto inicial en el arco  $j_{l+1}$ , el elemento base de  $m(\tau, i)$  correspondiente a  $p(d^1)$  pertenece a  $W_{l+1}$  y no a  $W_l$  ó  $p(d^1)$  pertenece a  $W_{l+1} \cap W_l$ . Esto implica que la desigualdad 1. Además tenemos la siguiente desigualdad

$$\dim(W_0) \geq \dim(m(\tau, i)) - \sum_{j \in \tau^\circ} n_j$$

La cual se sigue de observar que si  $v \in m(\tau, i)$  es un elemento de la base correspondiente a un punto que no es punto inicial de una desviación  $d^1$  de  $\tau^\circ$ , entonces  $v \in W_0$ .

Por último vamos a verificar que la representación  $M(\tau, i)$  es nilpotente, dado que  $M(\tau, i)$  satisface las relaciones Jacobianas tenemos que  $JM(\tau, i) = 0$  por tanto basta verificar que existe un entero positivo  $m$  tal que  $\mathfrak{m}^m \subseteq J$ . De [12, Teorema 5.7] y [12, Nota 5.2] tenemos que  $(Q(\tau), S(\tau))$  cumple las condiciones de admisibilidad y  $J$  es un ideal admisible en  $R\langle Q(\tau) \rangle$  entonces  $\text{rad}(R\langle Q(\tau^\circ) \rangle / J) = \mathfrak{m} / J$  por [16, Sección II Lema 2.10] y dado que  $R\langle Q(\tau^\circ) \rangle / J$  es de dimension finita tenemos que existe  $m$  entero positivo tal que  $\text{rad}^m(R\langle Q(\tau^\circ) \rangle / J) = 0$  por lo tanto  $\mathfrak{m}^m \subseteq J$  concluyendo así que  $M(\tau, i)$  es nilpotente.

□

### Conjetura.

La representación de arco  $M(\tau, i)$  es compatible con la mutación de representaciones con potencial, es decir, se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 5.6.** Sean  $\tau$  y  $\sigma$  dos triangulaciones de  $(\Sigma, M)$  relacionadas por un flip, es decir,  $f_i(\sigma) = \tau$ . Si  $i$  es un arco etiquetado entonces las representaciones de arco asociadas al arco  $i$  en cada triangulación son equivalentes derechas, es decir  $\mu_i(M(\sigma, i)) = M(\tau, i)$ .

Una vez que se demuestre el Teorema 5.6 se puede calcular el caracter de conglomero definido por Y. Palu en [15, Teorema 1.4] y los  $F$ -polinomios usando la grasmaniana de carcaj.

## Referencias

- [1] I Assem, T. Brüstle, G. Charbonneau-Jodoin y P. Plamondon . *Gentle algebras arising from surface triangulations*. Algebra Number Theory 4 (2010), No. 2, 201i $\frac{1}{2}$ 229.
- [2] P. Caldero, F. Chapoton y R. Schiffler. *Quivers with relations arising from clusters* Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), No. 3, 1347-1364.
- [3] H. Derksen, J. Weyman y A. Zelevinsky. *Quiver With Potential and Their Representations I: Mutations*. Selecta Math. 14 (2008), No. 1, 59-119. arXiv:0704.0649v4.
- [4] S. Domínguez, C. Geiss. *A Caldero-Chapoton formula for generalized cluster categories*. J. Algebra 399 (2014), 887-893. MR 3144617.
- [5] V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Dual Teichmuler and Lamination Spaces*. Handbook of Teichmuler theory, vol. I, 647-684, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 11, Eur. Math. Soc., 2007. arXiv:math.DG/0510312.
- [6] S. Fomin, M. Shapiro, D. Thurston. *Cluster Algebras and Triangulated Surfaces, Part I: Cluster Complexes*. Acta Mathematica 201 (2008), 83-146. arXiv:mathRa/0608367.
- [7] S. Fomin, A. Zelevinsky. *Cluster Algebras I: Foundation*. J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), 497-529.
- [8] M. Gekhtman, M. Shapiro, A. Vainstein. *Cluster Algebras and Weil-Patersson Forms*. Duke Math. J. 127 (2005) 291311, math.QA/0309138.
- [9] D. Labardini-Fragoso. *Quivers with potentials associated to triangulated surfaces*. Proc. London Mathematical Society (2009) 98 (3): 797-839. arXiv:0803.1328.
- [10] D. Labardini-Fragoso. *Quivers with potentials associated to triangulated surfaces, part II: Arc representations*. arXiv:0909.4100.
- [11] Giovanni Cerulli Irelli and Daniel Labardini-Fragoso (2012). Quivers with potentials associated to triangulated surfaces, Part III: tagged triangulations and cluster monomials. Compositio Mathematica, 148, pp 1833-1866 doi:10.1112/S0010437X12000528.
- [12] D. Labardini-Fragoso. *Quiver With Potentials Associated to Triangulated Surfaces, Part IV: Removing Boundary Assumptions*. arXiv:1206.1798.
- [13] L. Mosher. *Tiling the projective foliation space of a punctured surface*. Trans Amer Math. Phys. 113 (1987), 229 - 339.
- [14] G. Musiker, R. Schiffler and L. Williams. *Positivity for Cluster From Surfaces*. Adv. Math. 227 (2011), 2241 - 2308.

- [15] Y. Palu. *Cluster characters for 2-Calabi-Yau triangulated categories*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58 (6) (2008) 2221 - 2248.
- [16] I. Assem, A. Skowronski y D. Simpson (2006). *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory*. London Mathematical Society Student Texts.s