UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y LÓGICA DE LA CIENCIA

LOS TEOREMAS DE PAPPUS Y DESARGUES EN *LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA* DE DAVID HILBERT Y SU ORIGEN EN LA DOCTRINA DE *LOS PORISMAS*

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

PRESENTA:

ANABEL JÁUREGUI HERNÁNDEZ

TUTOR

DR. CARLOS ÁLVAREZ JIMÉNEZ

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., ENERO DE 2017

Agradecimientos:

Agradezco al CONACYT por la beca otorgada de agosto 2014 a agosto 2016, sin la cual no habría sido posible este proyecto.

Esta tesis es una investigación realizada gracias al Programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IN403816 La comprensión matemática.

Agradezco a mi familia por el apoyo y libertad incondicionales, que me han permitido estar aquí. A mis grandes amigos de todas las épocas, quienes han confiado en mí.

Agradezco al Posgrado en Filosofía de la Ciencia por estos dos años, en los que he modificado -constantemente- mi modo de ver, entender e interesarme; en especial agradezco la apertura con la que nos permiten formarnos para consolidar nuestros intereses. Agradezco también a muchos de mis compañeros, en quienes he encontrado personas admirables.

Agradezco a mi tutor el Dr. Carlos Álvarez Jiménez, por sus valiosas ideas y orientación para la realización de esta tesis; también por su confianza, dedicación y paciencia, por impulsarme a *comprender* un poco mejor y a salir de mis propios esquemas de pensamiento. De igual forma, y en el mismo sentido, agradezco a los integrantes del Seminario de Comprensión Matemática, por permitirme ser parte de este proyecto, por su tiempo y comentarios, y por lo que he podido aprender de ellos.

Índice general

I. Introducción

La problemática general. El problema que me ocupa en esta tesis se inscribe en el ámbito de la pregunta general por el fundamento de las matemáticas, más concretamente, el *fundamento de la geometría* (entiéndase geometría euclidiana)[1].

En esta tesis partimos de la idea de que es posible repensar el problema del fundamento de la geometría[2], pero no buscando un fundamento único e inamovible de la misma, sino bajo la premisa de que el modo de reconstruir la geometría, influye en qué proposiciones desempeñan el papel de principios fundamentales.

Esta tesis constituye un ejemplo de lo afirmado en el párrafo previo, pues veremos que en *Los Fundamentos de la Geometría*, David Hilbert reconstruye la geometría de forma tal que los teoremas de Pappus y Desargues devienen elementos fundamentales, esto en función de las posibilidades que tales teoremas conllevan para el desarrollo de la misma[3].

De lo anterior, es válido afirmar que el trabajo de Hilbert abre la perspectiva de pensar el fundamento de la geometría a partir de algunos teoremas fundamentales, pero esto, claro está, en el entendido de que no estamos pensando en *el fundamento* en términos absolutos, sino acorde a un modo de reconstruir la geometría.

[1] Esta tesis trata esencialmente sobre geometría euclidiana; sin embargo, el problema sobre el fundamento de la misma, guarda estrecha relación con algunas investigaciones en la fundación de la geometría proyectiva (por lo menos así ocurre en el trabajo de David Hilbert), entonces, en esta tesis frecuentemente haré alusión a la geometría proyectiva. Cuando utilice el término "geometría" me estaré refiriendo a la euclidiana, y en los casos en que haga alusión a la proyectiva, escribiré explícitamente "geometría proyectiva".

[2] Resulta aquí de suma importancia aclarar que entendemos que la noción de fundamento en matemáticas y lógica está bien establecida, y refiere a un conjunto de principios básicos (los axiomas) a partir de los cuáles puede derivarse lógicamente una teoría (todos sus teoremas). Sin embargo, creemos que es posible pensar el fundamento de otro modo, en concreto, a partir de algunos teoremas que conllevan posibilidades importantes en el desarrollo de la geometría, en el entendido de que en esta perspectiva, que podemos calificar como "nueva", *el fundamento* no es pensado en términos absolutos, sino de acuerdo a un modo de reconstrucción de la geometría.

[3] En [Torres, 2012] se sugiere la expresión "posibilidades que encierra un teorema" para hacer referencia a la comprensión de un teorema, he adaptado esa frase a mis fines como "posibilidades que conllevan los teoremas".

Es en tal perspectiva en la que podemos ubicar esta tesis; no obstante, debo aclarar que el objetivo central de la misma no es desarrollar una noción de fundamento acorde a lo que he mencionado en los párrafos previos, si bien tal cosa podría ser motivo de trabajos posteriores, por ahora, como punto de partida, de lo que se trata es de dos cosas: (1) comprender cuál es el tipo de reconstrucción de la geometría que hizo Hilbert, y mostrar que los teoremas de Pappus y Desargues devinieron fundamentales en relación a sus fines, y (2) mostrar que el papel de estos dos teoremas en el trabajo de Hilbert está relacionado con el tipo de proposiciones que eran desde su origen en la doctrina griega de los porismas.

Los aspectos señalados en (1) y (2) constituyen los objetivos centrales de esta tesis, y los explicaré con cuidado en las páginas siguientes, pero antes es preciso enfatizar un aspecto propio de esta investigación: en este trabajo se reconoce el valor de la historia para la comprensión matemática. En relación al caso que me ocupa aquí, la historia no solo es descriptiva, sino que ayuda a comprender de forma mucho más certera el libro de Hilbert *Los Fundamentos de la Geometría*, veamos como ejemplo un suceso ocurrido en 1891.

En tal año Hilbert asistió a una conferencia en la Universidad de Halle dictada por Hermann Wiener; ahí este último introdujo la noción de *dominios autosustentables de la ciencia* (in sich begründet)[4], y expuso el caso de la geometría proyectiva plana. Según Wiener, en tal geometría hay dos objetos, puntos y líneas, y dos operaciones, unir y cortar; Wiener dijo que para que la geometría proyectiva plana constituyese un *dominio autosustentable de la ciencia*, debía poder desarrollar todas sus proposiciones a partir únicamente de tales objetos y operaciones, es decir, sin suposiciones adicionales. Wiener concluyó que tal cosa es posible con ayuda de los teoremas de Pappus y Desargues,

[4]Segun Wiener, constituyen un dominio autosustentable de la ciencia, las proposiciones de una teoría o disciplina que pueden desarrollarse únicamente al postular la existencia de ciertos objetos geométricos, y aceptar algunas operaciones que conectan esos objetos, es decir, sin suposiciones adicionales, cf.[Wiener, 1891].

siempre que sean postulados como axiomas, pues tales teoremas no pueden demostrarse únicamente con recurso a los elementos de la geometría proyectiva plana; sin embargo, una vez asumida su validez, evitan el uso de suposiciones adicionales en el desarrollo completo de tal geometría, cf.[Wiener, 1891].

Lo que he narrado en el párrafo previo sobre la conferencia de Wiener, es uno de los sucesos históricos, no el único, que ayudan a comprender qué tipo de reconstrucción de la geometría buscó Hilbert en *Los Fundamentos de la Geometría*, y al mismo tiempo contribuye a comprender por qué los teoremas de Pappus[5] y Desargues devinieron fundamentales en su trabajo. La conferencia de Wiener constituye la primera vez en la que Hilbert escuchó sobre la importancia fundacional de estos dos teoremas[6], pero además, tal como veremos, Hilbert buscó una reconstrucción de la geometría sin introducir a la misma una teoría numérica externa, lo cual guarda estrecha relación con la noción de dominio autosustentable de la ciencia presentada por Wiener. En general, en esta época había un interés especial por fundar la geometría -proyectiva- de modo "puramente geométrico".

Como el ejemplo previamente expuesto, a lo largo de esta tesis retomaré algunos sucesos históricos al margen de los cuáles resulta difícil comprender adecuadamente el trabajo de Hilbert. Dicho esto, pasemos a los objetivos concretos de esta tesis.

Los objetivos concretos de esta investigación. Esta tesis se divide en dos partes entrelazadas; en la primera el tema central son los teoremas de Pappus y Desargues en las investigaciones de Hilbert, y en la segunda parte, el tema principal es el origen de

[5]Hilbert se refiere en su libro a un caso especial del teorema de Pascal y por simplicidad decide llamarle siempre teorema de Pascal, pero éste en realidad es el teorema de Pappus en versión afín. Yo utilizaré el nombre "teorema de Pappus" todo el tiempo, incluso en los títulos y citas en las que Hilbert usó teorema Pascal, para así evitar confusiones.

[6]Cabe aquí mencionar que, como veremos después, en un principio Hilbert dudó de las aseveraciones de Wiener, sería sólo en 1898, después de algunos descubrimientos de Schur, que retomaría ésta idea con gran interés.

estos dos teoremas en la doctrina griega de los porismas. A continuación explicaré el objetivo general y contenido de cada parte, así como el modo en que serán enlazadas.

Primera parte: Del libro de David Hilbert *Los Fundamentos de la Geometría* se ha conferido gran atención a los capítulos I y II, en donde Hilbert presenta un conjunto de axiomas para la geometría; la lectura centrada en estos dos capítulos sobreenfatiza el "formalismo" de Hilbert, y oscurece otros resultados de gran importancia, a saber, aquellos de los capítulos III-VI del libro, los cuales están estrechamente vinculados a los teoremas de Pappus y Desargues. Dado esto, mi objetivo en la primera parte de la tesis es:

> Mostrar que el resultado más importante de Hilbert en *Los Fundamentos de la Geometría* son los cálculos de segmentos[7] construidos con base en los teoremas de Pappus y Desargues; y mostrar que estos conllevan consecuencias importantes para la geometría.

La expresión "cálculo de segmentos" se refiere a un método para calcular con segmentos en donde están definidas geométricamente las operaciones básicas entre segmentos: la suma y la multiplicación (y sus operaciones inversas), y tales operaciones satisfacen las leyes de operaciones con números reales[8].

Me acercaré al objetivo enunciado de la siguiente manera (en cuatro secciones):

1. En la sección 1 ofreceré razones que sustentan: 1) Que Hilbert no era un *formalista* en su concepción de la geometría (en el sentido en que será definido el término), y 2) Que el formalismo de Hilbert era esencialmente metodológico (en el sentido en

[7]Hilbert usa el término "álgebra de segmentos"; en la bibliografía sobre el tema, se utilizan indistintamente los términos "álgebra", "aritmética" o "cálculo" de segmentos, yo optaré por usar "cálculo de segmentos".

[8]Sin embargo, en el contexto del trabajo de Hilbert, no es un requisito que se satisfagan todas las leyes de operaciones con números reales para hablar propiamente de un "cálculo de segmentos"; esto es evidente en el capítulo V, en donde Hilbert desarrolla un método de cálculo con segmentos en donde la multiplicación no es conmutativa.

que será explicado). Esta sección constituye un punto de partida hacia el objetivo antes enunciado, pues nos aleja de la lectura del libro centrada en el conjunto de axiomas, y nos dirige a una lectura atenta al papel de los teoremas de Pappus y Desargues.

2. En la sección 2, presentaré *grosso modo* el contexto en que surgieron las investigaciones geométricas de Hilbert, y retomaré algunos puntos de sus manuscritos de clase de 1891 a 1899, relevantes a los fines de esta tesis. El objetivo en esta sección es mostrar que su trabajo estuvo estrechamente vinculado con el problema introducir números a la geometría proyectiva por medios "puramente geométricos", y que los teoremas de Pappus y Desargues se convirtieron en el elemento clave en relación a esta tarea (entre otras).

3. En la sección 3 presentaré lo que considero son los resultados más importantes del libro. En los primeros apartados explicaré en qué consisten los "cálculos de segmentos" construidos con ayuda de los teoremas de Pappus y Desargues, y diré el porqué de que constituyan resultados importantes para la geometría; aquí enfatizaré el papel de los teoremas de Desargues y Pappus en la demostración de la conmutatividad de la suma y multiplicación de segmentos. Concluiré esta sección con algunas ideas en torno a las posibilidades que los teoremas de Pappus y Desargues conllevan para la geometría.

4. En la sección 4, como idea adicional, veremos que los teoremas de Pappus y Desargues tenían ya un papel fundamental en el trabajo de algunos geómetras proyectivos que anteceden a Hilbert. La idea en esta sección es mostrar que las motivaciones de Hilbert, así como la importancia conferida a los teoremas de Pappus y Desargues, están estrechamente relacionada con el tipo de problemas que se discutían en la época.

Segunda parte: En la segunda parte de la tesis trataré la doctrina griega de los porismas, en donde bajo cierta interpretación, se encuentra el origen de los teoremas de Pappus y Desargues. El objetivo en la segunda parte de la tesis es:

> Mostrar que desde su origen en la doctrina de *Los Porismas*, los teoremas de Pappus y Desargues estaban vinculados a un tipo de cálculo con segmentos, lo cual contribuye a entender su papel en la introducción de la suma y multiplicación en los cálculos de segmentos de Hilbert.

La expresión "tipo de cálculo con segmentos" (usada en el objetivo antes enunciado) no denota exactamente misma idea que la expresión "cálculo de segmentos" que utilicé para referirme a los métodos desarrollados por Hilbert en *Los Fundamentos de la Geometría*; sin embargo, hay una relación que no es trivial. Las expresiones no denotan lo mismo porque, a diferencia de lo que hace Hilbert, en la doctrina de los porimas no se trata explícitamente de definir las operaciones aritméticas básicas entre segmentos, y mucho menos de demostrar sus propiedades; no obstante, ya desde entonces, los teoremas de Pappus y Desargues aparecen vinculados a proporciones de rectángulos y/o segmentos que conllevan la posibilidad de encontrar la suma o la multiplicación de dos segmentos, a esto me refiero con que aparecen ya vinculados a un "tipo de cálculo con segmentos".

Me acercaré al objetivo enunciado de la siguiente manera (en tres secciones):

1. En la sección 1 explicaré qué son los porismas y qué son los lemas de Pappus a *Los Porismas* de Euclides; también veremos la interpretación según la cual el origen de las propiedades proyectivas modernas de las figuras, incluidos los teoremas de Pappus y Desargues en versión proyectiva, se encuentra en la doctrina griega de los porismas.

2. En sección 2 veremos que el teorema de Desargues corresponde a un porisma conocido como el Porisma de Pappus. Veremos también que su demostración depende

de la posibilidad de encontrar un punto a partir de una proporción de rectángulos establecida en el lema IV de Pappus, el cual admite una lectura proyectiva; en una de las variantes del lema IV, tal punto constituye la suma de dos segmentos y es posible mostrar su conmutatividad. Finalmente, veremos que tal variante subyace a la configuración con la que Hilbert demostró la conmutatividad de la suma de segmentos con ayuda del teorema de Desargues.

3. En la sección 3 veremos que el teorema de Pappus corresponde al lema XIII de Pappus, y también que su demostración consiste esencialmente en el uso del lema III de Pappus, que puede escribirse como una proporción de rectángulos y que admite una lectura proyectiva. La conmutatividad de la multiplicación de Hilbert, que equivale al teorema de Pappus en versión afín, puede verse como una transformación proyectiva que conserva el producto constante, y a la que subyace también la propiedad establecida en el lema III de Pappus.

Si bien en la primera parte de la tesis el esfuerzo estará en mostrar que el resultado más importante de Hilbert son los cálculos de segmentos basados en los teoremas de Pappus y Desargues (lo cual tiene consecuencias importantes para la geometría); en la segunda parte veremos que no es fortuito que hayan sido precisamente estos teoremas la clave en la construcción de tales cálculos de segmentos.

Ambas secciones apoyan la idea de que los teoremas de Pappus y Desargues están vinculados a la posibilidad de construir un cálculo de segmentos al interior de la geometría (sin recurso a teorías numéricas), y como tal, devienen fundamentales en relación el tipo de reconstrucción de la geometría que hizo Hilbert.

Notas sobre ediciones, sistema de citas, etc. Utilizo la primera edición de *Los Fundamentos de la Geometría* (que he abreviado *FG*), traducida al inglés por E.J. Towsend y publicada por primera vez en 1902. La reimpresión que uso tiene incorporados los cambios que Hilbert introdujo en la traducción francesa, publicada poco tiempo después de la primera edición. El más importante de esos cambios fue la incorporación de un segundo axioma de continuidad llamado axioma de completud.

Este trabajo también está sustentado en algunas investigaciones sobre los manuscritos de las clases de Hilbert entre 1891 y 1899. Tales manuscritos se encuentran físicamente en la *Niedersächsische Staats und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung*, y en la *Bibliothek des mathematischen Seminars, Lesesaal, Georg-August-Universität Göttingen*[Giovannini, 2015, p. 13].

Los manuscritos fueron parcialmente publicados en 2004 en el libro *David Hilbert Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902*. Los autores, Michael Hallett y Ulrich Majer, además de los manuscritos en alemán, incluyen la descripción en inglés de los mismos; me basaré ampliamente en tales descripciones, lo cual complementaré con investigaciones de Michaell Toepell, Leo Corry, Victor Pammbuccian, Andrew Arana y Paolo Mancosu, y Nicolas Giovannini, citaré sus traducciones de Hilbert así:

[Hilbert0, página] Para las citas de Hilbert en [Hallett and Majer, 2004]

[Hilbert1, página] Para las citas de Hilbert en [Corry, 2001]

[Hilbert2, página] Para las citas de Hilbert en [Corry, 2006]

[Hilbert3, página] Para las citas de Hilbert en [Pambuccian, 2013]

[Hilbert4, página] Para las citas de Hilbert en [Toepell, 1985]

[Hilbert5, página] Para las citas de Hilbert en [Arana and Mancosu, 2012]

[Hilbert6, página] Para las citas de Hilbert en [Giovannini, 2015]

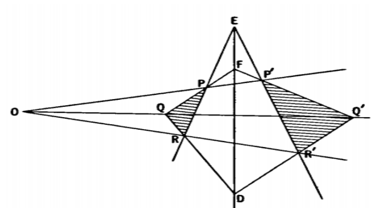
Es pertinente aclarar que las citas que tomo de fuentes en inglés las dejo en ingles, mientras que las citas que tomo de fuentes en francés las traduzco al español.

CONCEPTOS NECESARIOS; LOS TEOREMAS DE PAPPUS Y DESARGUES EN LA GEOMETRÍA PROYECTIVA Y AFÍN

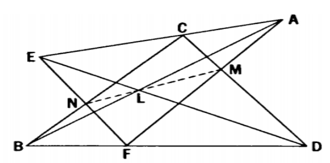
Geometría proyectiva: Puede definirse como el estudio de las propiedades descriptivas de las figuras, entendidas como aquellas propiedades que sólo conciernen a la conexión posicional relativa de unos elementos geométricos con respecto a otros, cf.[Eves, 1972, p. 240]. En otras palabras, la geometría proyectiva se ocupa únicamente de las relaciones de incidencia entre objetos geométricos, lo cual significa que excluye todo tipo de relaciones o propiedades métricas como distancias, magnitudes de ángulos, o paralelismo. En la geometría proyectiva todas las rectas se intersecan (incluidas las paralelas), el plano proyectivo puede verse como la extensión del plano euclidiano mediante la incorporación de puntos al infinito, cada uno de los cuales representa el punto de concurrencia de una familia de rectas paralelas, cf.[Coxeter, 1993, pp. 1-4].

Teorema de Desargues (versión proyectiva): "Si las tres rectas que unen los vértices correspondientes de dos triángulos (PP', QQ', RR') concurren en un punto (O), al intersecar sus lados correspondientes, los tres puntos de intersección (D, F, E) son conlineales" (Modificación de definición en [Coxeter and Greitzer, 1967, pp. 70-71]).

Teorema de Pappus (versión proyectiva): "Si A, C, E son tres puntos sobre una línea, y B, D, F son tres puntos en otra, y si las tres líneas AB, CD, EF, se intersecan con DE, FA, BC respectivamente, entonces los tres puntos de intersección L, M, N son colineales" [Coxeter and Greitzer, 1967, pp. 67-68].



Teorema de Desargues (proyectivo)

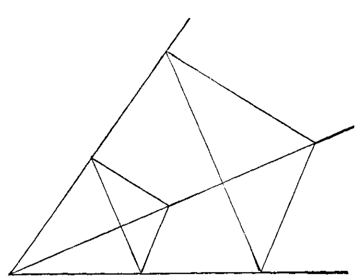


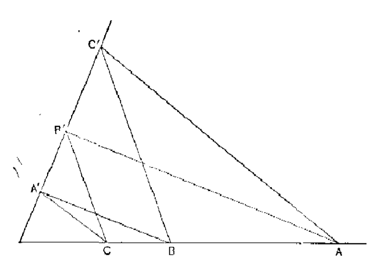
Teorema de Pappus (proyectivo)

Geometría afín: En la geometría afín tampoco se hace uso de nociones métricas; sin embargo, sí de la noción de líneas paralelas. Un plano afín es aquel en el que dos puntos determinan una única línea y el axioma de paralelas es válido, cf.[Bennett, 2011, p. 10]. La versión de los teoremas de Pappus y Desargues utilizada por Hilbert es la versión afín.

Teorema de Desargues (versión afín): "When two triangles are so situated in a plane that their homologous sides are respectively parallel, then the lines joining the homologous vertices pass through one and the same point, or are parallel to one another"[Hilbert, 1902, p. 46].

Teorema de Pappus (versión afín): "Given the two sets of points A, B, C and A', B', C' so situated respectively upon two intersecting straight lines that none of them fall at the intersection of these lines. If CB' is parallel to BC' and CA' is also parallel to AC', then BA' is parallel to AB"'[Hilbert, 1902, p. 25].


Teorema de Desargues (afín)



Teorema de Pappus (afín)

ALGUNOS DATOS CRONOLÓGICOS SOBRE LOS TEOREMAS DE PAPPUS Y DESARGUES

La génesis de los teoremas se remota a la matemática griega (s. IV a.C), en donde se originaron como proposiciones matemáticas llamadas *porismas*. Euclides escribió tres libros titulados *Los Porismas* que están perdidos, y la única fuente de información escrita sobre los mismos es el libro VII de la Colección Matemática de Pappus de Alejandría (IV d.C), en tal libro, bajo la interpretación adecuada, es posible hallar ambos teoremas.

Más comúnmente, el origen del teorema de Desargues se atribuye a Gerard Desargues en un tratado sobre perspectiva escrito en 1636, el cual fue publicado como *Perspective de Mr. Desargues (1648)* por Abraham Bosse. En el mismo siglo, Blaise Pascal escribió su *Essai pour les Coniques (1640)* en donde estableció bajo el nombre de hexagrama místico el teorema de Pascal, que no es sino una generalización del teorema de Pappus a una cónica.

Ambos teoremas experimentaron un renovado interés en el siglo XIX, principalmente en algunas obras con las que se intentó fundar la geometría proyectiva como una disciplina independiente de la noción de medida (propia de la geometría euclidiana), y sin el uso de métodos algebraicos (propios geometría analítica). Por ejemplo, Victor Poncelet, en su *Traité des Propiétés Projectives des Figures (1822),* clasificó a ambos teoremas como propiedades fundamentales de las lineas rectas, e hizo del teorema de Desargues el fundamento de su teoría de figuras homológicas, cf. [Eves, 1972, p. 70]. Por su lado, Christian Von Staudt en *Geometrie der Lage (1847)* colocó al teorema de Desargues como el elemento clave en la introducción de coordenadas al plano proyectivo.

Del trabajo de Von Staudt se originó una discusión, que duró más de tres décadas, sobre el papel de los principios de continuidad en la fundación de la geometría proyectiva. Esta discusión impulsó a geómetras como Hermann Wiener y Friedrich Schur a estudiar el papel de los teoremas de Pappus y Desargues en la fundación de la geometría proyectiva. Las aseveraciones de Wiener y Schur influyeron directamente en las investigaciones geométricas de Hilbert, las cuales culminaron con la publicación de *Los Fundamentos de la Geometría* en 1899, que es un libro cuyos resultados centrales penden de la validez de estos dos teoremas.

Primera Parte. Los teoremas de Pappus y Desargues en *Los Fundamentos de la Geometría* de David Hilbert

Comúnmente se ha caracterizado al libro de Hilbert *Los Fundamentos de la Geometría* (*FG* de ahora en adelante) como una reconstrucción axiomática moderna de la geometría euclidiana, con la cual Hilbert corrigió los huecos del enfoque deductivo de Euclides. En el ámbito de tal interpretación, pareciera que para Hilbert la axiomatización de la geometría era un fin en sí mismo y no un método de investigación que le ayudó a tratar los problemas, de naturaleza geométrica e incluso filosófica, que le ocupaban (de los que luego hablaré). En consonancia con tal interpretación, a la que me referiré como "tradicional", no resulta extraña la conclusión de que el resultado más importante de *FG*, o el único relevante, es el conjunto de axiomas descrito y analizado en los capítulos I y II.

La interpretación tradicional ha sido cuestionadas en trabajos relativamente recientes[9], en los que se intenta mostrar cuáles fueron las discusiones que motivaron las

[9] Quien primero presentó una perspectiva distinta sobre *FG* fue Michael Toepell en *Über die Entstehung von David Hilberts Grundlagen der Geometrie* publicado en 1986, cf.[Hendricks et al., 2000, p. 63]. La publicación parcial de las notas de clase de Hilbert en *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry, 1891–1902*, por Michael Hallett and Ulrich Majer en 2004, también ha contribuido a una mejor comprensión de sus investigaciones.

investigaciones de Hilbert durante casi una década, y que están estrechamente vinculadas a los teoremas de Pappus y Desargues. Tales discusiones están reflejadas en los capítulos III, IV, V y VI de *FG*.

La caracterización tradicional de *FG* lleva consigo consecuencias negativas, tanto en lo que respecta a la comprensión del libro y del enfoque axiomático de investigación, como en lo que concierne al debate fundacional de la geometría. En relación a lo primero, la axiomatización de la geometría pensada como un fin en sí mismo, hace que el libro se convierta, en palabras de Victor Pambuccian, en un “clásico de museo” y en el mejor de los casos en una “herramienta pedagógica” para enseñar geometría elemental; después de todo, el trabajo de axiomatización ha sido exitosamente completado, y no hay mucho más que decir.

En lo tocante al debate fundacional, que es lo que resulta de interés en esta tesis, la caracterización tradicional trae consigo la idea de que hablar de fundamentos es hablar exclusivamente de axiomas, y que el conjunto de axiomas para la geometría euclidiana es único resultado importante del libro. Por su puesto, en esta tesis de lo que se trata es de alejarnos de tal interpretación y dirigir la atención hacia la problemática que encierran los teoremas de Pappus y Desargues, y al modo en que estos devienen fundamentales para la reconstrucción de la geometría hecha por Hilbert.

Antes de comenzar con la exposición de las cuatro secciones que conforman esta primera parte (que no repetiré porque acabo de exponer en la introducción), y cuya finalidad es justamente enfatizar el papel de los teoremas de Pappus y Desargues, señalaré un aspecto que, aunque no constituye un argumento central en mi tesis, resulta adecuado como punto de partida.

Tal aspecto tiene que ver con el uso que hace Hilbert de las palabras “fundamental” y/o “fundamento”. En el primer párrafo de la introducción a *FG* Hilbert escribe: “Geometry, like arithmetic, requires for its logical development only a small number of simple fundamental principles. These fundamental principles are called de axioms of geometry"[Hilbert, 1902, p. 1]. En esta cita resulta claro que Hilbert usa el término "fundamental" para describir a los axiomas de la geometría, lo cual de inmediato haría pensar a cualquier lector que Hilbert asociaba "lo fundamental" únicamente con los axiomas para la geometría.

Sin embargo, es interesante que en los manuscritos de clase de Hilbert, incluso en 1899 que es el año de la publicación de FG, hay citas en las que se refiere a los axiomas como "hechos simples", "hechos básicos", o "hechos originales" de la intuición, dejando expresiones tales como "hechos esenciales", "fundamentos experimentales", o simplemente "fundamentos" a los teoremas de la geometría (véanse ejemplos en [10]). Dado esto, parecería que Hilbert asociaba "lo fundamental" no únicamente a los axiomas, sino a algunos teoremas de la geometría.

Lo que he hecho notar en los últimos dos párrafos puede corresponder simplemente a un uso ambiguo del término "fundamento/fundamental", o a una ambivalencia en el modo en que Hilbert entendía "lo fundamental". En cualquier caso, éste no corresponde a un argumento central en mi tesis; no obstante, es una primera razón por la que resulta relevante preguntarnos en qué sentido o cómo los teoremas tienen un papel fundamental

[10] Lo que señalo tiene fundamento en las siguientes citas:

1) Cita de Hilbert en los manuscritos en su primer curso de física en 1899: "Como la mecánica, la geometría también emerge de la observación, de la experiencia. En este sentido ella es una ciencia experimental . . . Pero sus ***fundamentos experimentales*** han sido tan irrefutablemente, y tan generalmente reconocidos– ellos han sido confirmados a tal grado, que ya no se considera necesario dar pruebas adicionales de ellos. Es más, todo lo que se necesita es derivar estos ***fundamentos*** de una ***colección mínima de axiomas independientes*** y así construir el edificio todo de la geometría por medios puramente lógicos"[Hilbert1, p. 37] (Nota: Del contexto de la cita resulta evidente que con ***fundamentos experimentales*** y ***fundamentos*** se refiere a teoremas).

2) Cita de Toepell en la que se refiere al contenido de Elemente der Euklidischen Geometrie de 1899 preparado por Von Schaper: "But Hilbert, still sees in the axioms "***very simple ... original facts***", whose validity is experimentally provable in nature"[Toepell, 1985, p. 340].

3) Cita de Hilbert en su curso de Geometría Proyectiva de 1894: "La geometría es una ciencia cuyos ***factores esenciales*** están a tal punto desarrollados, que todos sus hechos pueden ya ser deducidos de ***otros más básicos***. El caso de la electricidad o el de la óptica son muy diferentes, pues muchos nuevos hechos están siendo continuamente descubiertos en ellas. Sin embargo, en lo que respecta a su origen, la geometría es una ciencia natural". (Nota: Del contexto de la cita resulta evidente que con ***factores esenciales*** se refiere a teoremas)"[Hilbert1, p. 37].

en su trabajo.

Dicho esto, comenzaré con las cuatro secciones que conforman la primera parte de esta tesis, y cuyo objetivo, como lo escribí antes es:

> Mostrar que el resultado más importante de Hilbert en *Los Fundamentos de la Geometría* son los cálculos de segmentos construidos con base en los teoremas de Pappus y Desargues; y mostrar que estos conllevan consecuencias importantes para la geometría.

1. Sobre el formalismo de Hilbert y su sistema formal para la geometría.

En esta sección ofreceré razones que apoyan las siguientes dos ideas:

I) Hilbert no era un *formalista* en su concepción de la geometría

II) El formalismo de Hilbert era esencialmente metodológico

Como parte de la sección, expondré *grosso modo* algunos aspectos de los capítulos I y II de *FG*, en donde Hilbert presenta y estudia su "sistema formal"[11] para la geometría.

El objetivo en esta sección es distanciarnos de la interpretación tradicional de *FG* y acercarnos a una lectura centrada en el papel de los teoremas de Pappus y Desargues; en tal sentido, esta sección constituye un punto de partida hacia el objetivo general antes enunciado.

[11] Escribo "sistema formal" entre comillas porque como veremos en las siguientes páginas, la idea de que el sistema construido por Hilbert en *FG* es un sistema formal en sentido estricto, es debatible. Tal cosa merece un análisis mucho más amplio de lo que diré aquí; sin embargo, por lo menos se esbozarán un par de argumentos al respecto.

I) Hilbert no es un *formalista* en su concepción de la geometría.

Utilizaré el término *formalismo (en cursivas)* para denotar la idea, bien recibida en el siglo XX, de que las matemáticas no son sino sistemas de reglas deductivas, formales, abstractas, arbitrariamente elegidas y carentes de significado, en donde el único requisito del sistema es la consistencia; el nombre de Hilbert ha sido frecuentemente asociado a tal *formalismo,* cf. [Corry, 2001, p. 30][12].

Hay varias razones que dificultan aceptar que la concepción de Hilbert de las matemáticas era *formalista.* Presentaré algunas razones, principalmente en lo tocante a la geometría:

1.-Una primera razón es que en sus manuscritos de clase insistió abiertamente en que la geometría es una disciplina de naturaleza empírica.

Hay citas al respecto no sólo en los manuscritos de sus primeras investigaciones en 1891, también en estadios muchos más avanzados de su trabajo. Escribo algunos ejemplos:

- "Geometry is the science that deals with the properties of space. (...) I can never penetrate the properties of space by pure reflection, much as I can never recognize the basic laws of mechanics, the law of gravitation or any other physical law in this way. Space is not a product of my reflections. Rather, it is given to me through the senses. I thus need my senses in order to fathom its properties. I need intuition and experiment, just as I need them in order to figure out physical laws, where also matter is added as given through the senses." [Hilbert2, p. 139] (La cita es de 1891 en su manuscrito de la clase de Geometría proyectiva)

- "Entre las apariencias o hechos de la experiencia que se nos manifiestan al observar la naturaleza, hay un tipo peculiar, es decir, aquellos hechos que corresponden a la forma externa de las cosas. La geometría se ocupa de este tipo de hechos" [Hilbert1, p. 36] (La cita original ocurre alrededor de 1894).

- "Como la mecánica, la geometría también emerge de la observación, de la experiencia. En este sentido ella es una ciencia experimental . . . Pero sus fundamentos experimentales

[12]Es muy importante aclarar aquí, que el modo en que defino *formalismo* corresponde a una concepción radical del término, y es en relación a ésta que se argumentará que Hilbert no era un *formalista.* Sin embargo, en sentidos más laxos, por ejemplo el formalismo metodológico del cual hablaré en el siguiente apartado, resulta evidente que Hilbert era un formalista.

han sido tan irrefutablemente, y tan generalmente reconocidos– ellos han sido confirmados a tal grado, que ya no se considera necesario dar pruebas adicionales de ellos. Es más, todo lo que se necesita es derivar estos fundamentos de una colección mínima de axiomas independientes y así construir el edificio todo de la geometría por medios puramente lógicos. De esta manera la geometría se vuelve una ciencia matemática pura.[Hilbert1, pp. 37-38] (La cita original ocurre en 1899, año de la publicación de *FG,* en su primer curso sobre fundamentos de la mecánica).

- En *FG* Hilbert escribe que el problema de su libro es "The logical analysis of our intuition of space"[Hilbert, 1902]; tal cosa no corresponde a un cambio sustancial en su concepción de la geometría, después de todo, Hilbert entendía la intuición espacial como ligada a los sentidos y la experiencia. En 1905 escribiría abiertamente en su curso introductorio "The Logical Principles of Mathematical Thinking" que la geometría euclidiana es la única que encaja en nuestra experiencia espacial, cf. [Corry, 2006, p. 160].

De lo anterior, es posible afirmar que la concepción de Hilbert de la geometría -tipo empirista- no cambió sustancialmente desde el comienzo de sus investigaciones hasta la publicación de *FG*. Es cierto que en la cita correspondiente al tercer punto, Hilbert afirmó que por medios lógicos la geometría podía convertirse en una ciencia matemática pura; sin embargo, esto dista de la idea de que su concepción de la geometría era *formalista.* Tal como lo ha expresado adecuadamente Leo Corry, la axiomatización de la geometría de Hilbert consiste en construir un sistema adecuado para una teoría existente, y no tomar un sistema arbitrario de axiomas y ver a dónde nos lleva, cf. [Corry, 2001, p. 39].

2.- Una segunda razón para rechazar que la concepción de Hilbert de la geometría era *formalista*, es que sus *sistemas de cosas* y su conjunto de axiomas no son arbitrarios en el sentido requerido por el *formalismo.* Veamos por qué.

Al comienzo del capítulo I de *FG* Hilbert nombra tres *sistemas de cosas* para su geometría, sus nombres son: *puntos*, *líneas rectas* y *planos.* Los puntos son los elementos de la geometría lineal, los puntos y las rectas son los elementos de la geometría plana, y los puntos, rectas y planos son los elementos de la geometría espacial.

Las palabras *puntos*, *rectas* y *planos* no tienen significado en sí mismas, su definición está dada por sus relaciones mutuas, descritas por los axiomas de la geometría, que

Hilbert agrupa y ordena de la siguiente manera:

- Grupo I: Son los axiomas de incidencia o conexión, que expresan cómo se conectan los elementos de la geometría; éste es el único grupo en donde hay axiomas espaciales. Ejemplo de axioma: "Two distinct points A and B always completely determine a straigt line *a*"[Hilbert, 1902, p. 2]

- Grupo II: Son los axiomas de orden, que expresan la posición de los objetos geométricos, de unos en relación a otros, o la idea tras la palabra "betweenness". Ejemplo de axioma: "If A, B, C, are points of a straight line and B lies between A and C, then B lies also between C and A"[Hilbert, 1902, p. 3]

- Grupo III: Sólo incluye al axioma de las paralelas, que corresponde al quinto postulado de Euclides, éste dice: "In a plane α there can be drawn through any point A, lying outside of a straight line *a*, one and only one straight line which does not intersect the line *a*. This straight line is called the parallel to a through the given point A"[Hilbert, 1902, p. 7]

- Grupo IV: Son los axiomas de congruencia, y expresan la idea de objetos que se desplazan y coinciden. Ejemplo de axioma: "If A, B are two points on a straight line *a*, and if A' is a point upon the same or another straight line *a'*, then, upon a given side of A' on the straight line *a'*, we can always find one and only one point B' so that the segment AB (or BA) is congruent to the segment A'B"'[Hilbert, 1902, p. 8]

- El grupo V: Este grupo introduce la idea de continuidad a la geometría, en principio incluía sólo al axioma de Arquímedes, posteriormente Hilbert incorporó un segundo axioma de continuidad al que llamó axioma de completud. Diré más sobre estos dos axiomas posteriormente.

Es importante tener en mente estos cinco grupos de axiomas, pues los nombraré constantemente a lo largo de la tesis.

En las primeras páginas de *FG* Hilbert hace algunas afirmaciones sobre sus *sistemas de cosas* y su conjunto de axiomas, las cuales analizaré a continuación.

En la introducción a *FG* escribió: "The following investigation is a new attempt to choose for geometry a simple and complete set of independent axioms..."[Hilbert, 1902, p. 1]. Esta cita indica que Hilbert consideraba a su conjunto de axiomas como un nuevo -buen- intento de elegir los axiomas para la geometría, pero no la única opción posible; sin embargo, también escribió: "Each of these groups (los grupos de axiomas) expresses, by itself, certain related fundamental facts of our intuition" [Hilbert, 1902, p. 2]. Entonces, aunque Hilbert no creía que su conjunto de axiomas era el único posible, de la segunda cita resulta evidente que tampoco consideraba que la elección podía ser arbitraria, por lo menos no en el sentido de que estuviese constreñida únicamente por el requisito de consistencia (que es como lo requiere el *formalismo*); Hilbert es muy claro en que los axiomas deben corresponder a nuestras intuiciones espaciales.

Basta preguntar por qué Hilbert relaciona los tres sistemas de cosas del modo en que lo hace, i.e. por qué los axiomas de incidencia establecen que dos cosas de un primer *sistema de cosas* determinan a una cosa de un segundo *sistema de cosas* (dos puntos determinan una línea recta), o por qué tres cosas de un primer *sistema de cosas* determinan a una cosa de un tercer *sistema de cosas* (tres puntos no colineales determinan un plano), es decir, por qué no 5 o 10; la respuesta es que los axiomas expresan nuestra intuición de cómo se relacionan los objetos geométricos.

En cuanto a los *puntos*, *rectas* y *planos*, como antes dije, sus definiciones están dadas por sus relaciones mutuas, y no por lo que comúnmente denotan esas palabras. Entonces es evidente que podemos cambiarles el nombre, pero eso no significa que objetos cualesquiera, como las sillas, mesas y tarros de cerveza -tal como los conocemos- satisfacen los axiomas de la geometría[13]. Sin embargo, este punto requiere mayor análisis.

Es cierto que Hilbert hablaba sobre un tipo de arbitrariedad en la elección de los sistemas de cosas, dictada por cuestiones de simplicidad, pero debe entenderse en qué sentido. La siguiente cita de Corry referente a un comentario que Hilbert hizo en 1905 clarifica la idea: "Thus, Hilbert said, instead of the three chosen, basic kinds of elements, one could likewise start with [no... not with "chairs, tables, and beer-mugs," but rather with] circles and spheres, and formulate the adequate axioms that are still in agreement with the usual, intuitive geometry"[Corry, 2006, p. 162][14].

Entonces, en conclusión, la arbitrariedad de los axiomas no es la requerida por el *formalismo* y la arbitrariedad de los sistemas de cosas debe interpretarse con el debido cuidado.

3.- Una tercera razón para rechazar el *formalismo* de Hilbert, es que el modo en que presenta su conjunto de axiomas, así como el tipo de propiedades del sistema que analiza en los capítulos I y II, indican que estaba primordialmente interesado en los problemas que vienen después en el libro (capítulos III-VI), y no en las propiedades de su sistema formal, es decir, no es que este último no le interesara, pero no era un fin en sí mismo, lo cual introduce la idea de que su formalismo es esencialmente metodológico. Veamos.

En la introducción a *FG* Hilbert menciona que los axiomas deben ser independientes, y habla sobre la simplicidad y completud del conjunto de axiomas; sin embargo, no hace un análisis detallado de tales propiedades. En el capítulo II, que es muy breve, esboza una demostración de la consistencia del sistema[15], pero tal prueba es indirecta

[13]Aquí hago alusión a la anécdota comúnmente contada, según la cual en 1891 Hilbert dijo, tras una conferencia de Hermann Wiener en Halle, que si en vez de puntos, rectas y planos, usamos sillas, mesas y tarros de cervezas, los axiomas de la geometría seguirían siendo válidos.

[14]He escrito la cita de Corry tal como aparece en su texto; sin embargo, hay que notar que debería haber un tercer objeto además de círculos y esferas, pues lo que sí es importante es que haya tres tipos de cosas, ya que las relaciones descritas por los axiomas ocurren entre tres tipos de objetos.

[15]La demostración de que del sistema de axiomas no puede deducirse una proposición contradictoria a alguno de los axiomas.

y está incompleta, en realidad es una reducción de la consistencia de la geometría a la consistencia de la aritmética[16], de la cual no tenía una prueba.

En cuanto a las pruebas de independencia[17], es evidente que no todas son igual de importantes; en el libro no hay ninguna prueba para un axioma individual, y se incluyen únicamente las pruebas de independencia de tres grupos: el grupo III (axioma de paralelas), el grupo IV (axiomas de congruencia) y el grupo V (axioma de Arquímedes). Esto no es fortuito, los grupos de axiomas expresan relaciones geométricas, y como veremos ampliamente en secciones posteriores, las relaciones de paralelismo, congruencia y continuidad (expresadas por los grupos III, IV y V) tienen un sitio importante en la investigación en torno a los teoremas de Pappus y Desargues.

En el caso del axioma de paralelas, éste es importante para que funcione la versión afín de los teoremas de Pappus y Desargues, que requiere afirmar la existencia de rectas paralelas y su unicidad (dada una recta y un punto, solo hay una paralela a tal recta que pasa por el punto dado).

En cuanto a los grupos de congruencia y continuidad, a Hilbert le interesaba saber si los teoremas de Pappus y Desargues dependen o son independientes de las relaciones de congruencia y continuidad, lo cual a su vez era importante para abordar algunos de los problemas que le interesaban (que luego veremos). En relación a este tema, resulta pertinente la siguiente cita:

> "...lo que a Hilbert le interesa es el aspecto geométrico de esta independencia. Su libro no es un estudio abstracto de las relaciones lógicas entre los axiomas (...) Es esto lo que interesa directamente a Hilbert: cuáles de los teoremas fundamentales de la geometría proyectiva se derivan de cuáles, y cuáles son independientes. (...) Hilbert discutió en detalle el rol de cada uno de los grupos de axiomas en las demostraciones de los resultados cruciales que motivaron su investigación: el teorema de Desargues y el de Pappus. En particular esto le permitió clarificar las premisas necesarias para la coordenación de la geometría proyectiva, tarea que ya muchos habían emprendido antes de él."[Corry, 2001, pp. 33, 38].

[16]Hilbert primero construyó una geometría sobre un dominio de números algebraicos (que pertenecen a los números reales), al que llamó Ω; luego, demostró que sus cinco grupos de axiomas son válidos en esa geometría, de modo que cualquier contradicción debería expresarse en la aritmética del dominio Ω.

[17]Es decir, para mostrar que ningún axioma en su sistema puede deducirse del resto.

También es importante enfatizar que Hilbert estaba interesado en estudiar relaciones geométricas y no principios simples, por eso organizó los axiomas en grupos y no los presentó como una sola colección. Los grupos I y II expresan relaciones fundamentales o básicas (incidencia y orden) existentes en la geometría proyectiva, y los grupos III y IV (paralelismo y congruencia) expresan relaciones menos elementales propias de la geometría euclidiana. En cuanto al grupo de continuidad, la situación es distinta y en su momento explicaré qué pasaba con este axioma y por qué constituye el último grupo en *FG*.

La necesidad de presentar los axiomas en grupos estaba por encima del requisito de simplicidad y economía, de hecho pronto se notó la existencia de algunas redundancia en conjunto de axiomas visto como un todo, cf.[Corry, 2006, p. 148]. En esa misma dirección, Pambuccian escribe: "There is no doubt that Hilbert's axiom system, with three types of variables, and a large number of predicates, was not meant to be presented as a formal system"[Pambuccian, 2013, p. 269].

Leo Corry es un arduo crítico del *formalismo* de Hilbert, y ha argumentado que en realidad Hilbert nunca se interesó en estudiar conjuntos de axiomas realmente arbitrarios, sus investigaciones se centraron en teorías lo suficientemente corroboradas, no sólo la geometría, también la mecánica y la física:

> "Más aún, en los años inmediatamente posteriores a la publicación del libro de Hilbert (*FG*), encontramos un gran número de trabajos matemáticos, especialmente en los Estados Unidos, en los cuales se realizan análisis de sistemas de postulados abstractos, para conceptos algebraicos tales como grupos, cuerpos, álgebras booleanas, etc., basados en la aplicación de los conceptos y las técnicas introducidas por Hilbert. No existe ninguna evidencia que Hilbert mostró interés alguno en estos trabajos, y de hecho existen muchas razones para pensar que Hilbert nunca contempló que su propio trabajo implicaría esta dirección de investigación"[Corry, 2001, p. 40].

Lo que he expuesto hasta ahora, evoca ya la idea de que el formalismo de Hilbert era sobre todo metodológico y no una concepción de la geometría, que es una idea que complementaré brevemente en los siguientes párrafos.

II) El formalismo de Hilbert era esencialmente metodológico

La forma más adecuada de caracterizar el formalismo de Hilbert es como "metodológico", con lo cual me refiero a que su tratamiento formal de la geometría le ayudó a entender la estructura lógica de la misma, y así aclarar las premisas necesarias para resolver algunos problemas fundacionales de la geometría que le interesaban (que luego veremos). En particular, el tratamiento formal de la geometría permitió a Hilbert estudiar los teoremas de Pappus y Desargues en relación a tales problemas. Intentaré aclarar.

El contar con un conjunto de axiomas agrupados de modo tal que representasen relaciones geométricas, así como el conocimiento de la independencia de esas relaciones, unido al carácter riguroso de la derivación de proposiciones a partir de axiomas, ayudó a Hilbert a establecer de qué tipo de relaciones depende la demostración de los teoremas de Pappus y Desargues, y con ello aclaró cómo estos teoremas podían ser introducidos a la geometría para solucionar ciertos problemas; por ejemplo, como veremos posteriormente, Hilbert estudió la relación entre el teorema de Desargues y los axiomas espaciales de incidencia, y luego pudo resolver la pregunta sobre si el teorema de Desargues es condición necesaria y suficiente para que una geometría plana sea vista como parte de una geometría espacial.

Lo señalado en el párrafo previo será desarrollado con mucha más precisión a lo largo de la tesis, por ahora lo importante es enfatizar que es tal el sentido en que creemos que el formalismo de Hilbert era principalmente metodológico y no un fin en sí mismo, como tampoco una concepción sobre la geometría. Esto está fuertemente vinculado con la afirmación de que si bien el conjunto de axiomas es metodológicamente crucial, los resultados más importantes del libro recaen en la validez de los teoremas de Pappus y Desargues (lo cual será mostrado posteriormente).

Para finalizar esta sección, presentaré la postura de Arana y Mancosu, que es afín a las ideas previamente expuestas. Los autores escriben:

> "But we claim that for Hilbert the formalism is only methodological. In other words, while it is useful for certain methodological aims to treat the formalism as having no meaning (and therefore subject it to radical reinterpretation) this does not mean that the intimate connection between the intuitive truths of geometry and the formalism is abandoned."[Arana and Mancosu, 2012, p. 42].

Los autores también señalan que el enfoque más adecuado para pensar el formalismo de Hilbert, es estableciendo un paralelismo en todos los niveles entre contenido intuitivo y tratamiento formal. Tal paralelismo fue enunciado en forma explícita por Hilbert en relación a la aritmética en su curso introductorio *The Logical Principles of Mathematical Thinking* en 1905 en Göttingen:

> "The numbers have become for us only a framework of concepts to which we are led of course only by means of intuition; we can nonetheless operate with this framework without having recourse to intuition. However, to insure the applicability to the objects surrounding us, this conceptual system is constructed in such a way that it forms everywhere a complete analogy with the most trivial intuitions and with it to the facts of experience"[Hilbert5, pp. 42-43]

Traducida a la geometría, tal cita significaría que hemos sido guiados a los conceptos geométricos mediante la intuición, y aunque podemos operar con estos como si fuesen un marco ajeno a la misma (lo cual es metodológicamente ventajoso), si queremos que nuestro sistema encaje en el espacio, éste ha de construirse de modo tal que en todo nivel constituya una analogía con las intuiciones o hechos de la experiencia espacial.

Con esto concluyo la sección 1.1, cuyo objetivo ha sido alejar al lector de la idea "tradicional" sobre FG y dirigirnos a una lectura centrada en los teoremas de Pappus y Desargues y la problemática que encierran. Tal problemática será tratada en la siguiente sección; veremos el contexto en que se originaron las investigaciones geométricas de Hilbert y cómo los teoremas de Pappus y Desargues cobraron relevancia en las mismas.

2. Los teoremas de Pappus y Desargues en las investigaciones geométricas de Hilbert

Esta sección está parcialmente sustentada en la descripción en inglés de los manuscritos de Hilbert, publicada por Michael Hallet y Ulrich Majer en [Hallett and Majer, 2004]. También en las investigaciones que sobre los manuscritos y correspondencia de Hilbert hacen Leo Corry en [Corry, 2001, Corry, 2006], Paolo Mancosu y Andrew Arana en [Arana and Mancosu, 2012], Victor Pambuccian en [Pambuccian, 2013], Michael Toepell en [Toepell, 1985] y Nicolas Giovaninni en [Giovannini, 2015].

Podemos distinguir dos etapas en las investigaciones geométricas de Hilbert; la primera transcurrió en Königsberg durante la primera mitad de la década de 1890, y la segunda en Göttingen a finales de la misma década.

La primera etapa se originó en el contexto de las discusiones sobre la fundación de la geometría proyectiva por métodos "puramente geométricos", y Hilbert estuvo desde entonces interesado en el problema de cómo introducir geométricamente números y un sistema de coordenadas al plano proyectivo. Tal problema (la introducción del número por métodos "puramente geométricos") fue central también durante la segunda etapa de sus investigaciones en Göttingen; sin embargo, en ese entonces Hilbert se ocupó principalmente de la geometría euclidiana. Es durante la segunda etapa de las investigaciones de Hilbert, 1898-99, que los teoremas de Pappus y Desargues cobrarían verdadera relevancia; no obstante, hay que decir que Hilbert los conocía mucho antes y que aparecen en sus manuscritos desde 1891.

Lo que he expuesto en el párrafo previo será desarrollado en los siguientes dos apartados:

2.1 La investigación en el marco de la geometría proyectiva, 1891-94

2.2 La investigación en torno a los teoremas de Pappus y Desargues, 1898-99

2.1. La investigación en el marco de la geometría proyectiva, 1891-94

Las investigaciones geométricas de Hilbert comenzaron en el contexto de la discusión sobre la fundación de la geometría proyectiva por métodos "puramente geométricos". La complejidad y extensión de tal problema rebasa los fines de esta tesis; sin embargo, la comprensión del trabajo de Hilbert requiere al menos proporcionar una idea general en relación a este asunto (cabe señalar que en la sección 4 de esta tesis presentaré con mayor detalle tres puntos de esta discusión directamente relacionados con los teoremas de Pappus y Desargues).

El origen de la geometría proyectiva moderna se atribuye a Victor Poncelet en su *Traité des propriétés projectives des figures (1822)*. La disciplina experimentó un rápido desarrollo con el trabajo de August Möbius sobre colineaciones en *Der barycentrische Calcul (1827)*; el trabajo de Michael Chasles sobre figuras homográficas en *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie (1837),* y el trabajo Jacob Steiner sobre figuras proyectivas en *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander (1832),* cf.[Voelke, 2008, pp. 244-251].

El primer geómetra al que he mencionado, Victor Poncelet, consideraba que la geometría proyectiva (llamada "descriptiva" en ese entonces) podía desarrollarse autónomamente, esto es, con independencia del álgebra, escribió al respecto:

> "Poco a poco también el conocimiento algebraico devendrá menos indispensable, y la ciencia, se reducirá a eso que debe ser, a eso que ella debería ser ya (...). Hemos probado que la geometría descriptiva, 'el lenguaje del artista y del hombre de genio', puede ser suficiente a sí misma, y lograr toda la altura de las concepciones del análisis algebraico (...). Sin embargo faltan aún algunas cosas por hacer; todas las lagunas, todos los vacíos no están aún llenos"[Poncelet, 1866, p. IX]

Grosso modo, el rechazo al uso del álgebra constituía un intento por revertir la reducción de la geometría a la aritmética, en otros términos, se quería evitar que una teoría numérica externa fuera impuesta a la geometría proyectiva, tal como ocurre con la geometría analítica.

Otros dos geómetras que he nombrado, Michael Chasles y Jakob Steiner, también intentaban fundar la geometría proyectiva como una disciplina autónoma; sin embargo, aunque no empleaban los métodos de la geometría analítica, la demostración de sus resultados requería de una noción métrica conocida como razón doble, la cual mantenía a la geometría proyectiva anclada a la euclidiana (la noción de medida es propia de la geometría euclidiana).

Christian Von Staudt fue quien primero prestó atención a tal hecho, e intentó fundar la geometría proyectiva como una disciplina no sólo independiente de los métodos algebraicos sino de la noción de medida; lo hizo en *Geometrie der Lage* (1847), cf.[Voelke, 2008, p. 250]. Von Staudt consideraba que la geometría proyectiva constituía la base de cualquier geometría, y que estudiar una geometría en la que hay asunciones métricas, significaba limitarse a un caso especial de la geometría proyectiva, cf.[Arana and Mancosu, 2012, p. 22].

Debido a lo anterior, Von Staudt encontró la forma de sustituir la razón doble por una noción de naturaleza puramente geométrica (este tema está desarrollado con mayor detalle en la sección 4.1 de esta tesis), a partir de lo cual demostró el teorema que luego se conocería como "teorema fundamental de la geometría proyectiva". Tal teorema le permitió la introducción de números y de un sistema de coordenadas al plano proyectivo por métodos estrictamente geométricos; en esto consistió el trabajo de fundación de la geometría proyectiva de Von Staudt por métodos puramente geométricos.

El trabajo de Von Staudt encerraba un problema cuya naturaleza no fue inmediatamente comprendida, y su esclarecimiento dio origen a una discusión que duró cerca de tres décadas[18]. Como producto de tal debate, en 1873 Felix Klein elucidó que en

[18] Tal discusión ha sido desarrollada con amplio detalle técnico en [Voelke, 2008]

la demostración de Von Staudt del teorema fundamental de la geometría proyectiva había implícito un principio de continuidad; luego de eso, geómetras como Hermann Wiener y Friedrich Shcur, desde un marco propiamente axiomático de investigación, pusieron atención en el papel de los teoremas de Pappus y Desargues en la fundación de la geometría proyectiva sin principios de continuidad. En este contexto comenzaron las investigaciones geométricas de Hilbert.

No he explicado por qué la asunción de un principio de continuidad era problemática; hay varias ideas al respecto. En primer lugar, la aceptación de un principio de continuidad en geometría significa pensar en una línea como un conjunto infinito de puntos, lo cual era inaceptable para los geómetras con fuerte inclinación empírica, pero además prevalecía el problema de cómo pegar los puntos para que constituyan una línea. En segundo lugar, los principios de continuidad (por lo menos los principios fuertes) de una forma u otra involucran la noción de medida, que justamente quería evitarse en la fundación de la geometría proyectiva. Finalmente, los axiomas de continuidad fueron aclarados en análisis de los números reales, no eran principios surgidos en la geometría, así que se veían como algo externo que no debía ocupar un papel central en la fundación de la geometría proyectiva.

Como antes he dicho, las investigaciones de Hilbert se originaron en el contexto de la problemática que he introducido en los párrafos previos, y su trabajo no puede comprenderse al margen de la misma. Como veremos en los siguientes apartados, desde el comienzo de sus investigaciones Hilbert se interesó por el problema de cómo introducir números y un sistema de coordenadas al plano proyectivo por métodos puramente geométricos, y también buscó comprender el fundamento geométrico que justifica la coordenación de los puntos del plano mediante números reales.

La influencia de los geómetras de esta tradición es notoria desde el comienzo hasta el final de sus investigaciones; por ejemplo, veremos que en sus primeros manuscritos utilizó los métodos de Von Staudt, de quien expresó lo siguiente:

> "Contrariamente a todos sus antecesores, quienes siempre necesitaron del cálculo, él [von Staudt] consiguió hacer de la geometría proyectiva "un ciencia autónoma, que no requiere de la medida" – como él mismo lo afirma en el prólogo. Él [von Staudt] logró una geometría en la que no se calcula ni se mide, sino que se construye, en la que no se utiliza el compás ni el transportador, sino sólo la regla. De este modo aquel requerimiento científico fue cumplido de manera satisfactoria, puesto que en la deducción de los teoremas sobre las relaciones de posición, el cálculo debe aparecer como algo extraño" [Hilbert6, p.16]

En secciones posteriores veremos también que las aseveraciones de Wiener en torno a los teoremas de Pappus y Desargues en 1891, y los resultados de Schur en torno al teorema de Pappus en 1898, influyeron notablemente en los resultados de Hilbert en *FG*.

Expuesto este panorama general, a continuación presentaré algunos aspectos relevantes de los manuscritos de Hilbert, principalmente en lo tocante al problema de la introducción del número, y al sitio que los teoremas de Pappus y Desargues tienen en los manuscritos.

El curso de 1891 sobre geometría proyectiva en Königsberg

El primer curso de geometría de Hilbert fue en 1891 en Königsbert, y se titula *Geometría Proyectiva*. En el manuscrito del curso, Hilbert se ocupa del desarrollo de la geometría proyectiva siguiendo el libro de Theodor Reye *Geometrie der Lage (1886)*, el cual a su vez estaba basado en el libro de Von Staudt *Geometrie der Lage (1847)*, cf.[Hallett and Majer, 2004, pp. 18-19]. Es decir, en esta época Hilbert utilizaba métodos sintéticos (métodos de la geometría descriptiva o de posición como le llamó Von Staudt).

Al comienzo de este manuscrito, Hilbert clasifica a la geometría en *geometría de la intuición*, *geometría axiomática* y *geometría analítica o cartesiana*, y define a esta última como la reducción de la geometría al análisis a través de la coordenación de los puntos de una línea mediante números reales, cf.[Hallett and Majer, 2004, p. 16].

Esto merece mención porque uno de sus principales intereses desde el comienzo de sus investigaciones, fue comprender el fundamento geométrico que justifica la coordenación de los puntos del plano mediante números reales en la geometría analítica.

Aunque he dicho que en este manuscrito Hilbert utiliza los métodos de Von Staudt, comienza ya a enfatizar que la combinación de métodos sintéticos y axiomáticos es el mejor camino para comprender el puente entre la geometría proyectiva (sintética o de posición) y la analítica; su inclinación por el método axiomático sería más evidente en el siguiente manuscrito. Por ahora veamos algunos aspectos relevantes sobre éste primer manuscrito.

En las primeras tres secciones del manuscrito introduce los conceptos y teoremas necesarios para el desarrollo de la geometría proyectiva. En particular, en la segunda sección demuestra una configuración plana y una configuración espacial del teorema de Desargues, y prueba que el concepto de *conjunto armónico* de cuatro puntos en una linea está bien definido. Posteriormente demuestra el teorema fundamental de la geometría proyectiva y da por concluido el desarrollo de la misma, cf.[Hallett and Majer, 2004, p. 17].

De acuerdo con los fines de esta tesis, requiere atención el concepto de *conjunto armónico* mencionado en el párrafo previo, pues el teorema de Desargues tiene una función relevante en relación al mismo. La demostración de que un conjunto armónico está bien definido comienza con la construcción del cuarto elemento armónico según el procedimiento de Von Staud; por ahora es pertinente mencionar sólo algunas generalidades sobre tal construcción (está explicada con mayor cuidado en la sección 4.1 de esta tesis).

La construcción del cuarto elemento armónico corresponde a la Fig. 1, el objetivo es construir, a partir de tres puntos de la base de la figura, el cuarto punto; por ejemplo, dados los puntos A, B, C, podemos dibujar un cuadrángulo completo[19] HEFG, cuyo lado HF corta a la base de la figura en el punto D, es así como se construye el cuarto punto D a partir de A, B, C. Se dice que D es el conjugado armónico de A con respecto a los puntos B y C, o que los cuatro puntos constituyen una cuaterna armónica o conjunto armónico.

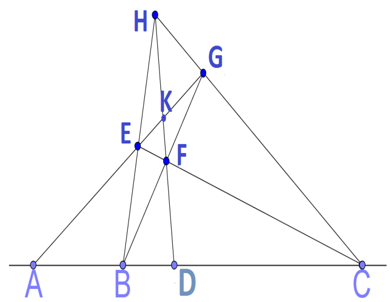


Fig. 1[20]

He indicado el procedimiento para construir el cuarto punto, pero lo más importante es mostrar que está bien definido, es decir, que el cuarto punto es único; esto es, hay que mostrar que una vez dados tres puntos, la posición del cuarto punto queda determinada de forma única sin importar la magnitud de los segmentos o los ángulos del cuadrángulo que dibujemos (solo conservando las relaciones de incidencia entre puntos y lineas). La demostración de tal cosas, i.e. del carácter único del cuarto punto, depende del teorema de Desargues, éste es la clave de la demostración (la demostración completa está en la sección 4.1 de esta tesis).

Lo que he expuesto en los párrafos previos es relevante porque nos muestra cuál era el papel del teorema de Desargues en este manuscrito temprano. En cuanto al teorema de Pappus, en la sección cuatro del manuscrito, Hilbert demuestra el teorema de Pascal, del cual el teorema de Pappus es un caso particular, cf.[Hallett and Majer, 2004, p. 18], y no hay más mención.

[19]Cuadrángulo completo: Se define como cuatro puntos, llamados vértices, en un plano, unidos en pares por seis rectas distintas que son sus lados, cf.[Coxeter and Greitzer, 1967, p. 7].

[20]Figura de elaboración propia.

Dicho esto, parece claro que en esta época Hilbert aún no se percataba del todo de la importancia de los teoremas de Pappus y Desargues, pues aunque este último ya tenía un rol fundamental, parece que Hilbert aún no era consciente de sus consecuencias. Veamos ahora qué sucede en el siguiente manuscrito.

El curso de 1893-94 sobre Fundamentos de la Geometría en Königsberg

El siguiente curso de Hilbert fue también en Königsberg, estaba originalmente planeado para 1893, pero fue suspendido por falta de alumnos; se llevó a cabo en 1894 bajo el nombre de *Fundamentos de la Geometría.*

En el manuscrito de este curso ya resulta evidente la inclinación de Hilbert al tratamiento axiomático de la geometría, pues lo consideraba el más adecuado para entender su estructura lógica, pero aún discutía sobre cómo implementarlo. En 1893 en una carta a Felix Klein afirmó que la tarea de la geometría no euclidiana era construir todas las geometrías posibles añadiendo axiomas elementales hasta llegar a la geometría euclidiana, cf.[Corry, 2006, p. 140]. Tal como quedará manifiesto en secciones posteriores, no es tal tipo de investigación axiomática, que consiste en añadir axiomas sucesivamente y ver qué pasa, la que lo conduciría a resultados importantes, sino aquella guiada por preguntas y problemas específicos en la fundación de la geometría.

Uno de los aspectos más relevantes de este manuscrito es que por primera vez Hilbert trabaja con grupos de axiomas, presenta cinco grupos ordenados así: axiomas de existencia (incidencia), axiomas de posición (orden), axioma de continuidad, axiomas de congruencia y axioma de paralelas, cf.[Hallett and Majer, 2004, p. 67]. Tal orden refleja que Hilbert compartía con otros geómetras la idea de que la geometría proyectiva, cuyas relaciones son las incidencia y orden, constituye la base de la geometría, y que la geometría euclidiana, con sus relaciones de congruencia y paralelismo, es un caso especial de la proyectiva, al igual que lo son otras geometrías como la hiperbólica, la elíptica y la parabólica.

En la sección que trata sobre los axiomas de orden, Hilbert desarrolla dos subsecciones tituladas: 'Die harmonische Lage' (la red armónica) y 'Die Einführung der Zahl (la introducción del número), cf. [Hallett and Majer, 2004, p. 67]. Como antes señalé, una de las principales preocupaciones de Hilbert era justificar la coordenación de los puntos del plano mediante números reales, y quería hacerlo sólo sobre la base de los axiomas de existencia y posición; sin embargo, pronto se dio cuenta de que requería de un principio de continuidad. Veamos.

Para la introducción del número utilizó como principal herramienta la construcción del cuarto elemento armónico, que como dije en el apartado previo, depende del teorema de Desargues. Esta construcción permite establecer una correspondencia entre los puntos construidos armónicamente y los números racionales. Explicaré la idea intuitivamente con la Fig. 2, que es una reconstrucción de los dibujos de Hilbert.

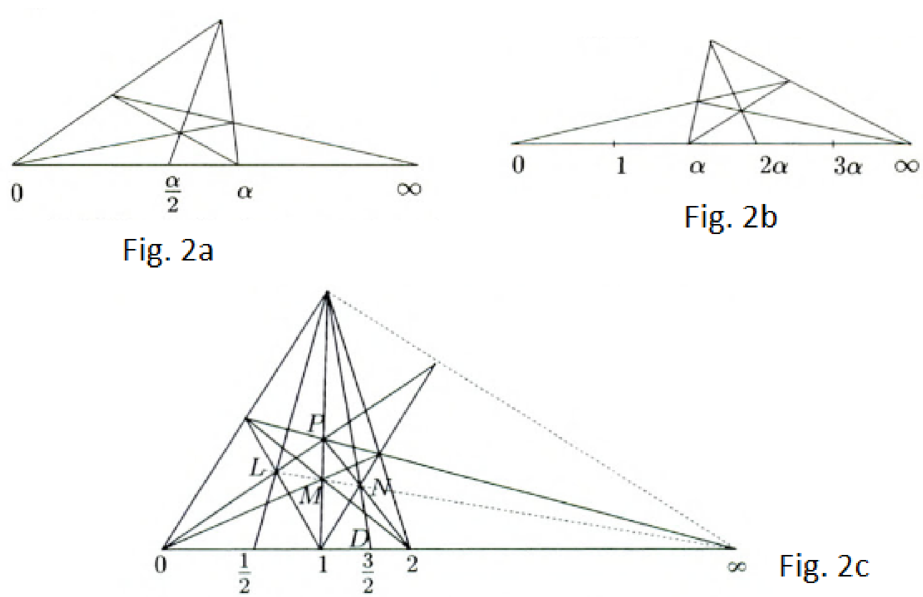


Fig. 2[21]

[21]Imagen tomada de [Hallett and Majer, 2004]

En la construcción del cuarto elemento armónico, si uno de los puntos dados es el punto infinito (∞), podemos construir el punto medio de los otros dos. En la Fig. 2a, dados los puntos 0, α, ∞, construimos el conjugado armónico de ∞ con respecto a 0 y α, que es el punto $\frac{\alpha}{2}$, o al revés, dados 0, $\frac{\alpha}{2}$, ∞, podemos construir α. Este procedimiento puede repetirse infinitamente; en la Fig. 2b, a partir de 0, α, ∞ podemos construir 2α, luego, a partir de α, 2α, ∞ construimos 3α y así sucesivamente. En la Fig. 2c, vemos que mediante este procedimiento pomos hacer corresponder los puntos armónicamente construidos con los números racionales.

Sin embargo, el procedimiento ilustrado en la Fig. 2 no asegura la correspondencia uno a uno entre los puntos de la recta y los números reales; es decir, queda un hueco en el paso de los números racionales a los reales. Para solucionar esto, y finalizar la introducción del número, Hilbert añade, después de los axiomas de existencia y posición, un principio de continuidad, el cual asegura la existencia de un punto límite para cualquier secuencia infinita de puntos acotada. En otros términos, Hilbert añade un axioma que permite poner en la recta los puntos que hacen falta, correspondientes a los números irracionales.

Es muy importante notar que, en tanto construcción del cuarto elemento armónico está asegurada por el teorema de Desargues, en este manuscrito tal teorema ya tiene un rol fundamental en la introducción de números a la geometría por métodos puramente geométrico. Podemos decir, que el teorema de Desargues era la herramienta de construcción de los números, uno a uno, sucesivamente. Pese a eso, al igual que en al manuscrito de 1891, Hilbert aún no se percataba del todo de su importancia.

En esta época, la preocupación de Hilbert era introducir números lo más rápido posible, solamente sobre la base de relaciones de incidencia y orden, pero como hemos visto, tuvo que incluir un axioma de continuidad. En las investigaciones posteriores cambiaría su método para la introducción de números, y también cambiaría el papel del teorema de Desargues, éste ya no sería un elemento para “construir” sino un elemento “estructural” de su sistema de números; este tema será desarrollado en el siguiente apartado.

En 1895 Hilbert se trasladó a Göttingen, en donde se ocupó esencialmente de estudiar teoría de números algebraicos. Tiempo después retomaría sus investigaciones geométricas, y aunque se centraría en la geometría euclidiana, resulta evidente que la discusión en torno a la introducción de números a la geometría proyectiva, marcó sus intereses.

2.2. La investigación en torno a los teoremas de Pappus y Desargues, 1898-99

La segunda etapa de las investigaciones geométricas de Hilbert transcurrió en Göttingen, y en gran medida estuvo orientada al estudio de los teoremas de Pappus y Desargues. Explicaré por qué en lo siguientes dos incisos.

a) Un cambio de estrategia en la introducción del número. Aunque en 1891, en una conferencia ofrecida por Hermann Wiener en Halle, Hilbert había escuchado que los teoremas de Pappus y Desargues permitirían derivar el teorema fundamental de la geometría proyectiva sin principios de continuidad, no creyó que fuera posible. En su manuscrito de ese año hay un pasaje, eventualmente tachado, en el que expresa dudas respecto al resultado de Wiener, cf.[Corry, 2006, p. 142].

Su opinión cambió cuando en 1898 Friedrich Schur anunció que había demostrado el teorema de Pappus sin principios de continuidad. Entonces, Hilbert escribió en una carta:

> "Schur has recently shown in a letter to Klein, that with the aid of congruence axioms in space, Pappus theorem can be proved in the plane for a pair of lines, i.e. without recourse to the Archimedean axiom. This letter, which Schönflies introduced to us in a lecture to the mathematical society, has given me the inspiration to take up again my old ideas about the foundations of Euclidean geometry"[Hilbert4, p. 338]

Recordemos que en 1894, en su curso sobre fundamentos de la geometría, después de presentar los axiomas de existencia (incidencia) y posición (orden), Hilbert tuvo que introducir un principio de continuidad para lograr la correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales. No obstante, con el resultado de Schur se inauguraba la posibilidad de desarrollar la geometría sin axiomas de continuidad (esta vez Hilbert se ocuparía principalmente de la geometría euclidiana).

Lo anterior significaba un cambio en la estrategia para la introducción de números a la geometría; ya no se trataba de establecer de inmediato, sobre la base de relaciones de incidencia y orden, una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales (lo cual presuponía un principio de continuidad), sino de construir al interior de la geometría un "cálculo de segmentos" con ayuda del teorema de Pappus (cuya demostración no requería de continuidad según el resultado de Schur) y del teorema de Desargues.

Con "cálculo de segmentos" hago alusión a un método para calcular con segmentos en el que están definidas las operaciones aritméticas básicas, y tales operaciones satisfacen las mismas leyes que las operaciones con números reales. En la nueva estrategia se trataba entonces de no asumir que los segmentos poseen magnitudes numéricas o que se comportan como números, sino demostrarlo con recursos propiamente geométricos. Intentaré aclarar la idea.

En 1894 Hilbert había estado interesado únicamente en lograr una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales (después podía asumir que tales puntos se comportan como números), es decir, no examinó las propiedades algebraicas de los puntos que constituyen los análogos geométricos de los números reales; no obstante, son tales propiedades -de campo- las que permiten medir y describir los objetos geométricos, cf.[Hallett and Majer, 2004, p. 195]. Esta vez, la estrategia sería construir al interior de la geometría un sistema de segmentos con los que es posible calcular, es decir, para los cuales están definidas las operaciones aritméticas básicas, y demostrar que tales operaciones satisfacen las mismas leyes que las operaciones que los números reales, esto es, que la estructura algebraica de los segmentos es equivalente a la de los números reales. Es en relación a esta nueva estrategia que los teoremas de Pappus y Desargues mostrarían su carácter fundamental. Hallet y Majer lo describen así:

> "If full Euclidean geometry is correctly represented by analytic geometry, then the algebraic structure of the reals must be represented in the line and its segments. Hence, unless synthetic Euclidean geometry falls woefully short of its Cartesian reconstruction, there must be certain theorems of synthetic geometry which are responsible for this, and behind these theorems certain axioms (...)"[Hallett and Majer, 2004, p. 195].

b) La investigación de los teoremas de Pappus y Desargues. Dicho lo anterior, no resulta extraño que en los manuscritos de 1898-99 la investigación estuviese en gran medida orientada a los teoremas de Pappus y Desargues, que son los que a final de cuentas permitieron a Hilbert demostrar las propiedades de operaciones con segmentos.

Para una mejor comprensión, me parece adecuado decir que la investigación en torno a los teoremas ocurrió en dos direcciones, pero en realidad éstas no pueden escindirse. Veamos esas direcciones.

1) Relaciones lógicas: Hilbert estudió la relación lógica entre el teorema de Pappus y el teorema de Desargues, es decir la interdependencia lógica entre estos dos teoremas; también estudió la relación lógica de ambos teoremas con los grupos de axiomas de congruencia y continuidad, pues Hilbert quería saber en qué medida la congruencia y la continuidad eran necesarias para el desarrollo de la geometría, y en qué medida o bajo que condiciones podía sustituirlas con los teoremas de Pappus y Desargues.

Además estudió la relación lógica entre el teorema de Desargues y los axiomas espaciales de incidencia, pues ya sabía que el teorema de Desargues encierra algo interesante en relación a la geometría espacial. Estos temas serán abordados con cuidado en la siguiente sección.

Victor Pambuccian ha organizado en la siguiente forma lo que considera son "las principales preguntas que Hilbert planteó en sus notas de clase", y las describe como las que "dominaron la investigación en la fundación axiomática de la geometría", cf.[Pambuccian, 2013, p. 259].

- ¿Es el teorema de Desargues demostrable sólo con axiomas de congruencia?
- ¿El teorema de Pappus se sigue de los axiomas de congruencia junto con el teorema de Desargues?
- ¿El teorema de Desargues se sigue de los axiomas de congruencia junto con el teorema de Pappus?
- ¿Pappus surge por la eliminación de los axiomas de congruencia, es decir, es condición suficiente que asegura que una definición de congruencia es posible?
- ¿El teorema de Desargues debe ser válido si un plano es parte del espacio? ¿Es condición suficiente para que esto pase?
- ¿Es el teorema de Desargues el resultado de la eliminación de los axiomas espaciales?

Pambuccian no escribe preguntas sobre la relación entre los teoremas de Pappus y Desargues y el axioma de continuidad; sin embargo, como veremos en la siguiente sección, tal discusión ocupa un lugar importante en los resultados de Hilbert.

En cuanto al axioma de paralelas, más que estudiar su relación con los teoremas de Pappus y Desargues, Hilbert usa el axioma como una asunción simplificadora de los teoremas, cf.[Hallett and Majer, 2004, p. 70]. Esto es, el axioma de paralelas permite a Hilbert presentar una versión afín los teoremas de Pappus y Desargues, si el axioma no fuera válido, Hilbert habría tenido que usar la versión proyectiva e introducir el punto al infinito al plano.

2) Problemas fundacionales de la geometría: Hilbert no solo estudió las relaciones lógicas entre los grupos de axiomas y los teoremas de Pappus y Desargues, sino el significado de tales relaciones en el desarrollo de la geometría. Tal como argumenté al comienzo de esta tesis, Hilbert no estaba interesado en estudiar las relaciones lógicas entre los axiomas como un fin en sí mismo, sino en relación a los problemas fundacionales de la geometría que le ocupaban. Veamos un par de ejemplos.

En 1898 ofreció en Göttingen un curso de vacaciones para profesores: el *Ferienkurs* (el segundo). En el manuscrito de este curso uno de los temas centrales es la relación entre el teorema de Pappus y la teoría de proporciones euclidiana, en particular, Hilbert ensayó distintas formas en las que la multiplicación de segmentos puede ser introducida a partir del teorema de Pappus, cf.[Hallett and Majer, 2004, p. 149]. En *FG* presentaría sus resultados en torno a este asunto en el capítulo III titulado "The Theory of Proportions".

En 1898-99, también en Göttingen, Hilbert dio un curso titulado *Fundamentos de la Geometría Euclidiana*, que es el que precede inmediatamente a la publicación de *FG*. En los manuscritos aborda la relación entre la validez del teorema de Desargues en un plano y la pertenencia de ese plano al espacio, dicho de otro modo, se pregunta si la validez del teorema en un plano es condición suficiente y necesaria para que ese plano pertenezca al espacio, cf. [Hallett and Majer, 2004, p. 190]. La solución a este problema la presentaría en el capítulo V de *FG* titulado "Desargues's Theorem".

Para terminar, es pertinente decir que en el manuscrito de este curso, Hilbert ya había desarrollado el cálculo de segmentos con ayuda del teorema de Pappus que presentaría en el capítulo III de FG y al cual se refiere como "el resultado más importante"[Hilbert4 p. 340]. Asimismo, en este manuscrito Hilbert señaló que un cálculo de segmentos basado en el teorema de Desargues podría permitir la introducción de coordenadas a la geometría proyectiva sin nociones métricas (tal como lo requería Von Stadut), cf. [Toepell, 1985, p. 340].

Con esto finalizo la sección 2, en ésta hemos visto el contexto en que se originaron las investigaciones de Hilbert y la importancia que confirió al problema de la introducción del número por métodos puramente geométricos. También señalé que Hilbert modificó su estrategia para introducir números; en la nueva estrategia, se trataba de construir "cálculos de segmentos", y es en relación a este asunto que los teoremas de Pappus y Desargues cobraron mayor relevancia. He dicho también que Hilbert no estaba interesado en estudiar las relaciones lógicas como un fin en sí mismo, sino en conexión con algunos problemas relevantes en la fundación de la geometría euclidiana. En la siguiente sección retomaré los cálculos de segmentos basados en los teoremas de Pappus y Desargues, y veremos con más detalle tales problemas.

3. Los teoremas de Pappus y Desargues en los capítulos centrales de *Los Fundamentos de la Geometría*

En esta sección presentaré algunos de los resultados más importantes de Hilbert en FG; básicamente hablaré sobre sus cálculos con segmentes basados en los teoremas de Pappus y Desargues y explicaré cuál es su relevancia para la geometría.

Esta sección se conforma así:

1) Primero veremos que en el capítulo III Hilbert construyó un cálculo de segmentos

con ayuda del teorema de Pappus y los axiomas de congruencia, pero sin axiomas de continuidad, en el que son válidas todas las leyes de operaciones de los números reales.

2) Luego veremos que en el capítulo V Hilbert construyó un nuevo cálculo de segmentos basado en el teorema de Desargues, esta vez sin axiomas de congruencia ni continuidad, y en donde la única propiedad de operaciones que no se satisface es la conmutatividad de la multiplicación.

3) Después abordaré la relación entre el teorema de Pappus y el axioma de Arquímedes, que es un resultado del capítulo VI. Tal resultado en cierto modo "redondea" las investigaciones de Hilbert, pues hace posible pensar en un cálculo de segmentos en donde todas las propiedades de operaciones con números reales son válidas, y en donde no se requieren axiomas de congruencia.

4) En la última parte presentaré algunas conclusiones en torno a las posibilidades que conllevan los teoremas de Pappus y Desargues para la geometría.

3.1. Un cálculo de segmentos con ayuda del teorema de Pappus

En el capitulo III de *FG* Hilbert desarrolla un cálculo de segmentos con ayuda del teorema de Pappus, antes de explicar en qué consiste tal cálculo, veamos en qué radica su importancia.

Sobre la importancia del capítulo III.

El capítulo III es interesante en más de un sentido, lo cual expondré en los puntos 1) y 2), que en realidad no deberían ser escindidos, pero resulta más fácil exponerlos así:

1) Teoría de proporciones: El capítulo III de *FG* se titula "The Theory of Proportions". El objetivo de Hilbert en éste, es justamente desarrollar la teoría de proporciones euclidiana; sin embargo, quiere hacerlo sin asumir desde el comienzo que los segmentos

(o los puntos extremos de en segmento) poseen magnitudes numéricas, o se comportan como números. En otros términos, quiere evitar el uso del axioma de Arquímedes (continuidad), el cual permite la asignación de un único número real a cualquier punto en la recta (véase [22]).

El problema de desarrollar la teoría de proporciones sin principios de continuidad es relevante porque al parecer, en el libro V de los *Elementos*, en donde Euclides introduce la teoría de las proporciones de Eudoxio, hay un principio de continuidad implícito[23], el cual Hilbert quiere evitar.

Pero hay otro punto muy importante; los *Elementos* de Euclides puede interpretarse de modo tal que el libro V (teoría de proporciones de Eudoxio), constituye el paso de la geometría de la congruencia de figuras (libros I-IV), a la geometría de la semejanza de figuras (libro VI), es así porque la propiedad más importante de las figuras semejantes es la proporcionalidad de sus lados[24].

---

[22]Axioma de Arquímedes: "Let A_1 be any point upon a straight line between the arbitrarily chosen points A and B. Take the points A_2, A_3, A_4, ...so that A_1 lies between A and A_2, A_2 between A_1 y A_3, A_3 between A_2 y A_4 etc. Moreover, let the segments AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4... be equal to one another. Then, among this series of points, there always exists a certain point A_n sucha that B lies between A and A_n"[Hilbert, 1902, p. 15].

Este axioma permite asignar a cualquier punto arbitrario en la recta un único número real; si quiere verse así, el axioma de Arquímedes permite "medir" cualquier segmento. Hilbert lo explica del siguiente modo: tomamos dos puntos y les asignamos los números 0 y 1, luego bisectamos el segmento (0, 1) y al punto de bisección le asignamos el número real $\frac{1}{2}$; luego de aplicar el proceso n veces obtenemos el punto correspondiente a $\frac{1}{2^n}$; luego, desde el punto O (correspondiente al cero) desplazamos m veces el segmento (O, $\frac{1}{2^n}$) en ambas direcciones, y así obtenemos un punto correspondiente a los números $\frac{m}{2^n}$ y $\frac{-m}{2^n}$. Bajo esta asociación, siguiendo el axioma de Arquímedes a cada punto arbitrario de una recta le corresponde un único número real.

[23]Debo señalar que la existencia o no de un principio de continuidad en el libro V es un tema polémico y complejo del que no me ocuparé, pero mencionaré un par de cosas. Por un lado, dado que la definición 4 del libro V dice: "Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra"[Euclides, 1994, p. 10], se ha sugerido que esta definición corresponde al axioma de Arquímedes, más al respecto puede verse en [Euclides, 1994, pp. 10-11, pie 3.]. Por otro lado, lo que el el libro V incluye es una teoría general de las proporciones, la cual es independiente de la conmensurabilidad de las magnitudes geométricas, es decir, a diferencia de la teoría de proporciones del libro VII, que es sólo para números y "conmensurables", la del libro V es una definición general; sin embargo, en el libro V no hay una referencia explícita a las magnitudes inconmensurables. Tal definición sólo aparece después en el libro X, en donde también hay un uso más explícito del axioma de Arquímedes, cf.[Fine, 1917, pp. 70-71].

[24]Es necesario aclarar que la interpretación o clasificación que estoy utilizando para describir la estructura de los *Elementos*, a saber, geometría de la congruencia (libros I-IV), teoría de proporcio-

Euclides podría haber pasado de la geometría de la congruencia a la geometría de la semejanza mediante la definición de una nueva operación geométrica, la multiplicación de segmentos (inexistente en los libros I-V), pues la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ no expresa sino el siguiente producto de segmentos $ad = bc$[25]. Sin embargo, optó por introducir la teoría de proporciones de Eudoxio, cuya naturaleza (¿geométrica?, ¿aritmética?) no es del todo clara, y a decir de algunos, lleva un principio de continuidad implícito.

Entonces, en el fondo la importancia del capítulo III (del cual hablaré a continuación), es que en éste Hilbert introduce de modo geométrico, vía el teorema de Pappus, la operación de multiplicación de segmentos y demuestra sus propiedades. Con esto, Hilbert no sólo desarrolla la teoría de las proporciones de Euclides sin usar axiomas de continuidad, también da el paso de la geometría de la congruencia a la geometría de la semejanza por medios geométricos[26].

2) Introducción de números: Al mismo tiempo, en el capítulo III Hilbert aborda el

---

nes (libro V) y geometría de la semejanza de figuras (libro VI), no corresponde a una clasificación explícita ni es la única forma de hacerlo. De hecho, en el índice de los elementos, los libros I-IV son denominados "Teoría elemental de la geometría plana" y los libros V-VI "teoría generalizada de la proporción"cf.[Euclides, 1994, p. 367]. La clasificación que he usado obedece a que las relaciones de congruencia de segmentos, ángulos y figuras son fundamentales en los libros I-IV; no obstante, Euclides no habla sobre semejanza de figuras antes de contar con una teoría de proporciones, es después de introducir la teoría de Eudoxio en el libro V, que comienza el sexto libro con la siguiente definición: "Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales"[Euclides, 1991, p. 55].

[25]De hecho, Euclides define proporción en términos de producto en la proposición 19 del libro VII; sin embargo, lo hace para proporciones entre números y no para proporciones entre magnitudes geométricas, esto es, lo hace únicamente en el contexto de los libros aritméticos y no del libro V, cf.[Euclides, 1991, p. 141]. Jean Louis Gardies escribe: "Las proposiciones 19 y 20 del libro VII , que anuncian la igualdad del producto de los extremos con el producto de los términos medios de una proporción, no pueden tener correspondiente en el libro V, que no vislumbra jamás el producto de una magnitud por una magnitud"[Gardies, 1984, p. 116].

[26]Nótese que en este párrafo, a diferencia de la narrativa previa, no estoy usando la frase "puramente geométrico" sino simplemente "geométrico". Esto obedece a que en el capítulo III, Hilbert utiliza axiomas de congruencia, los cuales no serían admitidos por Von Staudt como parte de lo "puramente geométrico"; Von Staudt admitiría solo las relaciones proyectivas o de incidencia. Pese a esto, lo que resulta claro es que Hilbert en el capítulo III busca no imponer una teoría numérica externa a la geometría, sino construirla al interior, en tal sentido su método puede calificarse por lo menos como "geométrico". Además, tal como luego veremos, existe la posibilidad de construir un cálculo de segmentos sin axiomas de congruencia, si los teoremas de Pappus y Desargues son tomados como axiomas, en tal caso hablaríamos propiamente de un modo "puramente geométrico".

problema que desde el comienzo de sus investigaciones le interesó y el cual he mencionado muchas veces en apartados previos, a saber, la introducción de números a la geometría por métodos geométricos y la definición de un sistema de coordenadas. En otros términos, en este capítulo Hilbert explica en buena medida el fundamento geométrico que permite la coordenación de los puntos del plano mediante números reales.

El cálculo de segmentos desarrollado en el capítulo III: El papel del teorema de Pappus

Lo que subyace a los incisos 1) y 2) previamente expuestos, es la construcción de un cálculo de segmentos con ayuda del teorema de Pappus, en donde todas las leyes de operaciones con números reales son válidas. A continuación presentaré parcialmente el desarrollo de tal cálculo de segmentos, principalmente en lo que concierne al papel del teorema de Pappus.

Lo primero que Hilbert necesita es sistematizar las propiedades de los números reales, pues en pasos posteriores requerirá comparar las propiedades de su sistema de segmentos (los que conformarán su cálculo de segmentos), con las propiedades del sistema de los números reales; dicho de otro modo, requerirá comparar la estructura algebraica de los segmentos con la estructura algebraica de los números reales.

Entonces, en el primer apartado del capítulo III Hilbert define al sistema de los números reales como un *sistema de cosas* que satisface 17 propiedades: 12 teoremas de conexión (6 de los cuales establecen las leyes de operaciones con números reales), 4 teoremas de orden, y el teorema de Arquímedes (continuidad)[27].

Después define como *sistemas de números* a aquellos *sistemas de cosas* (por ejemplo, segmentos) que poseen algunas de las 17 propiedades de los números reales. En

[27]Esta propiedad dice: "If a, b are any two arbitrary numbers, such that a $>$ 0 and b $>$ 0, it is always possible to add a to itself a sufficient number of times so that the resulting sum shall have the property that: $a + a + a + ... + a >$ b" [Hilbert, 1902, p. 24].

el libro no específica qué propiedades son esenciales para hablar propiamente de un *sistema de números*; pero la idea es clara, no es necesario que que se satisfagan absolutamente todas, por ejemplo, un *sistema de números* puede o no satisfacer el teorema de Arquímedes, en caso de que no, hablaríamos de *sistema de números no arquimediano*; también es notorio que Hilbert construye posteriormente un *sistema de números* en donde la multiplicación no es conmutativa, pese a ello, lo deseable es poder generar una estructura isomorfa a la de los números reales.

El siguiente pasó de Hilbert consiste en demostrar el teorema de Pappus en el plano sin usar el axioma de Arquímedes, tal resultado es crucial porque le permite introducir, sin principios de continuidad, un cálculo de segmentos en el que todas las leyes de operaciones con números reales son válidas. En la construcción de tal cálculo están involucrados el resto de los axiomas planos (incidencia, orden, congruencia y paralelas) y no se requieren axiomas espaciales.

La construcción de este cálculo comienza con definiciones básicas: segmento como sistemas de dos puntos, igualdad y desigualdad, suma de segmentos, multiplicación de segmentos, etc. El desarrollo paso a paso es muy conciso y puede seguirse directamente en el capítulo III del libro, yo me ocuparé de lo que concierne al papel del teorema de Pappus en la construcción de tal cálculo.

A diferencia de la leyes de la suma de segmentos, las leyes de la multiplicación de segmentos no se siguen inmediatamente de los axiomas de congruencia, es el teorema de Pappus el que permite demostrarlas, en particular la conmutatividad, y con base en ésta, la asociatividad de la multiplicación de segmentos. Obsérvense las figuras a continuación[28].

[28]Todas las figuras de este cuadro son tomadas directamente de [Hilbert, 1902].

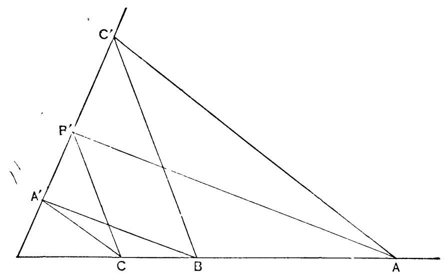


Fig. 3

Teorema de Pappus

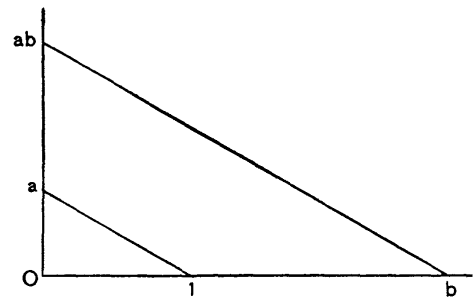
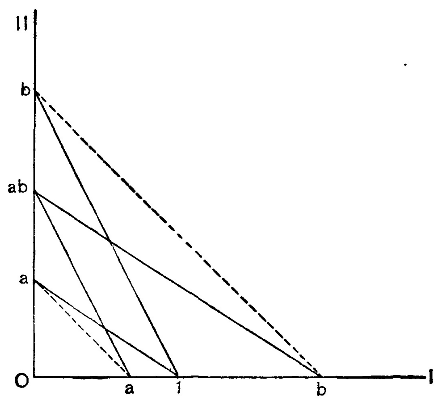


Fig. 4

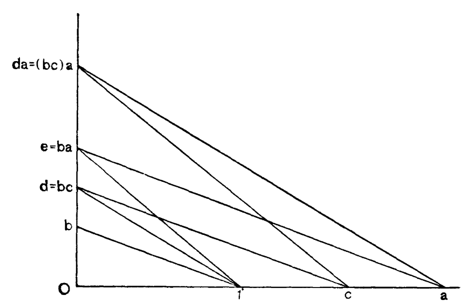
Definición de la multiplicación



$ab = ba.$

Fig. 5

Conmutatividad de la multiplicación



$a(bc) = (ab)c$

Fig. 6

Asociatividad de la multiplicación

La Fig. 3 es el teorema de Pappus en versión afín, el cual dice: “Given the two sets of points A, B, C and A’, B’, C’ so situated respectively upon two intersecting straight lines that none of them fall at the intersection of these lines. If CB’ is parallel to BC’ and CA’ is also parallel to AC’, then BA’ is parallel to AB”’[Hilbert, 1902, p. 25].

La Fig. 4 corresponde a la definición geométrica de la multiplicación; para definir el producto de dos segmentos a y b, primero se elige un segmento constante al que se denota 1. Luego, se toma un ángulo recto, y sobre un lado, desde el vértice O, se dibujan el segmento 1 y el segmento b. Después, desde O, se dibuja sobre el otro lado el segmento a, a continuación, se unen los extremos de los segmentos 1 y a mediante una línea recta, y desde el extremo de b se dibuja una paralela a esta recta, la cual corta un segmento c al otro lado del ángulo recto, c es el producto de los segmentos a y b, tal relación se indica escribiendo $c=ab$.

La Fig. 5 representa la propiedad conmutativa de la multiplicación, cuya demostración depende del teorema de Pappus. Para demostrarla primero se construye el producto ab (como lo indica la definición), luego se dibuja desde O sobre el primer lado del ángulo recto (I) el segmento a y sobre el otro lado (II) el segmento b. Se traza una línea desde el extremo del segmento 1 hasta el del segmento b situado en II, y a través del extremo de a en I, se dibuja una paralela a esa línea. Esta paralela determinará mediante su intersección con el lado II, el segmento ba. Como las dos líneas punteadas también son paralelas, *por el teorema de Pappus*, el segmento ba encontrado, coincide con el segmento ab previamente construido. Así, $ab=ba$ y la conmutatividad de la multiplicación queda establecida geométricamente.

La Fig. 6 representa la propiedad asociativa de la multiplicación, cuya demostración depende del teorema de Pappus y de la propiedad conmutativa antes demostrada.

Entonces, la importancia del teorema de Pappus radica que permite demostrar geométricamente la conmutatividad de la multiplicación de segmentos, de hecho, como puede notarse en las figuras, el teorema de Pappus y la conmutatividad de la multiplicación son prácticamente equivalentes. La operación inversa, el cociente de segmentos, queda definida a partir de la multiplicación: "If b and c are any two arbitrary segments, there is always a segment a to be found such that $c = ab$. This segment a is denoted by c/b and is called the quotient of c by b"[Hilbert, 1902, p. 32].

A continuación, Hilbert define *proporción* en términos del producto de segmentos: "If a, b, a', b' are any four segments whatever, the proportion a:b=a':b' expresses nothing else than the validity of equation *ab'=ba*'"[Hilbert, 1902, p. 32]. Posteriormente, con ayuda de la ley conmutativa de la multiplicación, demuestra el siguiente teorema de semejanza de triángulos: "Teorema 22. If *a*, *b* and *a'*, *b'* are homologous sides of two similar triangles, we have the proportion *a*:*b*=*a'*:*b'*"[Hilbert, 1902, p. 33]. Este teorema le permite demostrar el teorema fundamental de la teoría de proporciones, que comúnmente conocemos como el teorema de Tales y que dice: "If two parallel lines cut from the sides of an arbitrary angle the segments *a*, *b* and *a'*, *b'* respectively, then we have always the proportion *a*:*b* = *a'*:*b'*"[Hilbert, 1902, p. 33].

Lo que he presentado hasta ahora corresponde a lo que expliqué al comienzo, a saber, que con ayuda del teorema de Pappus, Hilbert establece la teoría de proporciones sin recurso a principios de continuidad, lo cual he dicho constituye el paso de la geometría de la congruencia a la geometría de la semejanza por medios geométricos.

Hilbert estaba interesado en saber hasta dónde podía desarrollar la geometría euclidiana sin principios de continuidad, por eso en el capítulo IV, del cual no me ocuparé, desarrolla la teoría de las áreas de Euclides también sin axiomas de continuidad; vale la pena citar su primer párrafo, en el que enfatiza el papel del teorema de Pappus: " (...) the theory of proportion was made to depend essentially upon Pappus theorem, the same may then be said here of the theory of areas. This manner of establishing the theory of areas seems to me a very remarkable application of Pappus theorem to elementary geometry."[Hilbert, 1902, p. 37].

Volvamos al capítulo III. Cuando Hilbert ya tiene la teoría de las proporciones, introduce un sistema de coordenadas en el que cada punto P de un plano α queda determinado por un par de segmentos x y y (las coordenadas de P). Con ayuda del teorema 22 sobre semejanza de triángulos, muestra que cada línea recta de un plano puede ser representada por una ecuación lineal en las coordenadas x y y. Por último, señala que por el mismo procedimiento puede construirse la geometría espacial.

Al comienzo de este apartado, señalé que en el capítulo III Hilbert no sólo se ocupa de lo que concierne al desarrollo de la teoría de proporciones euclidiana, sino que al mismo tiempo, avanza en la tarea de comprender el fundamento geométrico que justifica la coordenación de los puntos del plano mediante números reales. Veamos un par de puntos respecto a esto.

En todo lo que he descrito hasta ahora sobre el capítulo III, no hay intervención del axioma de Arquímedes; sin embargo, al final del capítulo Hilbert explica que una correspondencia determinada entre los puntos de una recta y los números reales requiere: 1) incluir el axioma de Arquímedes, el cual permite asignar un único número real de la forma $\frac{m}{2^n}$ a cualquier punto de la recta, y 2) completar el sistema de la geometría con elementos ideales (correspondientes a los números irracionales).

Para lograr lo enunciado en el inciso 2, Hilbert introduce poco después de la primera publicación de *FG* (en la traducción francesa), el llamado axioma de completud, que si bien no afirma la existencia de puntos límite, constituye un modo indirecto de demostrar su existencia[29]. La geometría generalizada con la inclusión de elementos ideales, en la que son válidos los cinco grupos de axiomas, no es sino la geometría analítica ordinaria del espacio.

Entonces, a final de cuentas, lo que tenemos es que el puente completo hacia la geometría analítica requiere necesariamente de principios de continuidad (Arquímedes

[29]Hilbert añadió este axioma en la primera traducción francesa de *FG*, el axioma de completud dice: "To a system of points, straight lines, and planes, it is impossible to add other elements in such a manner that the system thus generalized shall form a new geometry obeying all of the five groups of axioms. In other words, the elements of geometry form a system which is not susceptible of extension, if we regard the five groups of axioms as valid"[Hilbert, 1902, p. 15].

Hilbert aclaró que la naturaleza de este axioma no es puramente geométrica. Su importancia es que por un lado constituye un modo indirecto de introducir puntos límites, si bien, tal como Hilbert lo afirma, el axioma no postula la existencia de tales puntos, posibilita demostrar el teorema de Bolzano, el cual afirma la existencia de puntos de condensación para todo conjunto de puntos sobre la recta situados entre dos puntos de la misma. Por otro lado, el axioma asegura que hay un sólo modelo que satisface todos los axiomas de la geometría euclidiana: el modelo de la geometría analítica cartesiana, el cual involucra el campo completo de los números reales, es decir, hay muchos otros modelos "incompletos" basados en sub-campos contables, que satisfacen el resto de los axiomas, pero no el axioma de completud.

y Completud); no obstante, antes de introducirlos, Hilbert construye con ayuda del teorema de Pappus un *sistema de números* (segmentos) cuyas operaciones satisfacen todas las leyes de operaciones con números reales, y en buena medida esto constituye ya una justificación a la coordenación de los puntos del plano mediante números reales, y también es un modo geométrico de introducir números y un sistema de coordenadas a la geometría.

Por último quiero hacer notar que en todo el desarrollo del capítulo III intervienen los axiomas de congruencia. Si entendiésemos lo "puramente geométrico" como Von Staudt lo hacía, estos no deberían ser admitidos. En el capítulo V Hilbert desarrolla otro cálculo de segmentos, esta vez sin axiomas de congruencia, tal como lo requeriría Von Staudt, y es esto de lo que me ocuparé a continuación.

3.2. Un cálculo de segmentos basado en el teorema de Desargues

En el capítulo V titulado "Desargues's Theorem", Hilbert desarrolla un "nuevo cálculo de segmentos", esta vez basado en el teorema de Desargues y en el que no se requieren axiomas de congruencia. Hay dos motivos por los que este resultado es interesante:

1) Hilbert introduce a la geometría un sistema de números sin usar axiomas de congruencia: el *sistema de números arguiano D.*

2) Hilbert esclarece la relación entre el teorema de Desargues y la geometría espacial.

Estos resultados no pueden escindirse, y ambos están mediados por la construcción del "nuevo cálculo de segmentos"; sin embargo, es importante señalar que el resultado del inciso 1) tiene consecuencias importantes de las que Hilbert no se ocupa en este capítulo (volveré a ellas en el siguiente apartado). En el capítulo V Hilbert se concentra en 2), que es de lo que hablaré a continuación.

El cálculo de segmentos desarrollado en el capítulo V: El teorema de Desargues

Los únicos axiomas espaciales en el sistema de Hilbert son los axiomas 3-7 del grupo I de incidencia. En el capítulo V, con la finalidad de comprender el significado de los axiomas espaciales, Hilbert se propone investigar las *condiciones* por las que una geometría plana puede ser vista como parte de una geometría del espacio. El teorema de Desargues en versión afín, correspondiente a la siguiente figura[30], es fundamental en su respuesta.

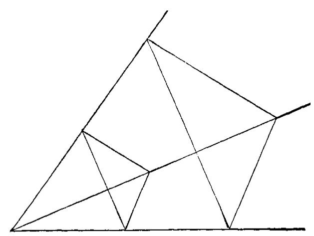


Fig. 7

Teorema de Desargues: “When two triangles are so situated in a plane that their homologous sides are respectively parallel, then the lines joining the homologous vertices pass through one and the same point, or are parallel to one another”[Hilbert, 1902, p. 46].

Previo a las investigaciones de Hilbert, era bien conocido que el teorema de Desargues puede demostrarse fácilmente en el espacio, es decir, cuando los dos triángulos a los que hace referencia el teorema no se encuentran en el mismo plano (en la sección 4.3 esbozo una demostración del teorema de Desargues de este tipo). En otros términos, era sabido que el teorema de Desargues es consecuencia de los axiomas de incidencia (incluyendo los espaciales), de los axiomas de orden y del axioma de paralelas (necesario solo para demostrar la versión afín del teorema), que son los grupos I-III de axiomas.

[30]Esta figura está tomada directamente de [Hilbert, 1902].

De acuerdo con lo anterior, lo primero que Hilbert concluye en el capítulo V es que la validez del teorema de Desargues en el plano es *condición necesaria* para que ese plano sea parte de una geometría espacial en la que son válidos los grupos I-III. Lo anterior resulta evidente; si tenemos un plano que es parte de una geometría espacial en la que son válidos los grupos I-III, entonces en ese plano son válidos los grupos I-III, y como sabemos que el teorema Desargues es consecuencia de los grupos I-III, entonces necesariamente el teorema de Desargues es válido en ese plano.

Posteriormente, Hilbert plantea lo que puede considerarse la pregunta central del capítulo ¿El teorema de Desargues es también *condición suficiente* para que una geometría plana esté inserta en una geometría espacial en la que son válidos los grupos I-III?

La estrategia para responder es como sigue; Hilbert parte de una una geometría plana en la que son válidos los axiomas de incidencia planos, los axiomas de orden y el axioma de paralelas, a lo cual añade la validez del teorema de Desargues (como axioma). Al igual que había ocurrido con el teorema de Pappus, la importancia del teorema de Desargues radica en que permite la introducción de un cálculo con segmentos a esta geometría, esta vez en ausencia de axiomas de congruencia.

En el cálculo de segmentos construido con ayuda del teorema de Pappus (del cual hablé en la sección previa), las propiedades de la suma son consecuencia inmediata de los axiomas de congruencia; en este nuevo cálculo de segmentos, es el teorema de Desargues el que cumple tal función: sustituye a los axiomas de congruencia.

En el nuevo cálculo de segmentos, la multiplicación es definida prácticamente igual que en el cálculo de segmentos basado en el teorema de Pappus, excepto porque en ausencia de axiomas de congruencia, ni la multiplicación ni la suma pueden definirse sobre los lados de un ángulo recto, de modo que se hace sobre dos rectas cualesquiera que se intersecan en un punto O (los ejes), O representa al segmento 0. Como se muestra en la Fig. 8 en la siguiente página[31], para definir la igualdad cuando no hay axiomas de congruencia, sobre ambos ejes se elige un segmento unidad, OE=OE'=1 (OE y OE' no están obligados a ser congruentes, son arbitrarios), EE' es llamada la recta unidad. Si tomamos un par de puntos A, A', uno sobre cada eje, y si la recta AA' es paralela a EE', decimos que el segmento OA y el segmento OA' son iguales.

La Fig. 8 corresponde a la definición geométrica de la suma. Para sumar los segmentos $a=OA$ y $b=OB$, primero se construye *AA'* paralela a *EE'* y se dibuja a través de *A'* una paralela a *OE* y a través de *B* una paralela a *OE'*. Se nombra *A"* a la intersección de esas paralelas, y finalmente se dibuja a través de *A"* una línea recta paralela a *EE'*, tal línea corta a *OE* y a *OE'* en *C* y *C'* respectivamente; el segmentos $c=OC=OC'$ es nombrado la suma de los segmentos $a=OA$ y $b=OB$, lo cual se escribe así: $c=a+b$ *o* $a+b=c$.

La Fig. 9 representa la propiedad conmutativa de la suma, que depende del teorema de Desargues. Sean $a=OA=OA'$ y $b=OB=OB'$ demostraremos que $a+b=b+a$. Primero construimos $a+b$ y $b+a$ sobre el mismo par de ejes; para eso se trazan *AA' y BB'* paralelas al segmento unidad *EE'* (que no está en la imagen), luego se construyen los puntos *A"* y *B"* trazando a través de *A'* y *B'* rectas paralelas a *OA,* y a través de *A* y *B* rectas paralelas a *OA'.*

[31] Las figuras de este cuadro son tomadas directamente de [Hilbert, 1902].

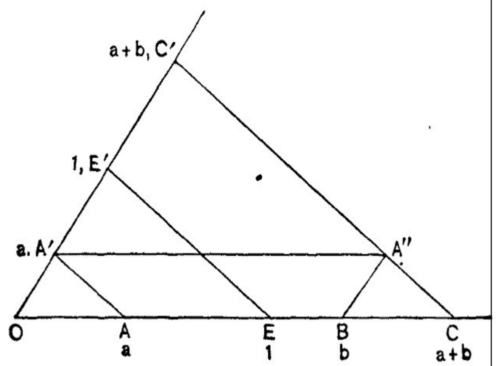


Fig. 8

Definición geométrica de la suma

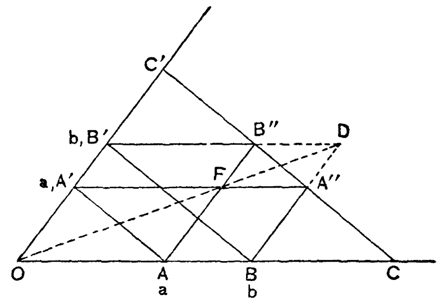
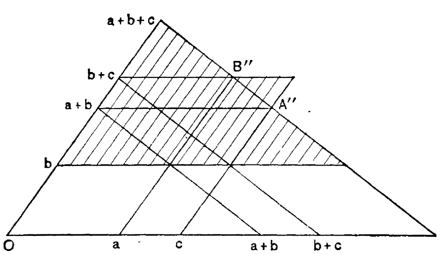


Fig. 9

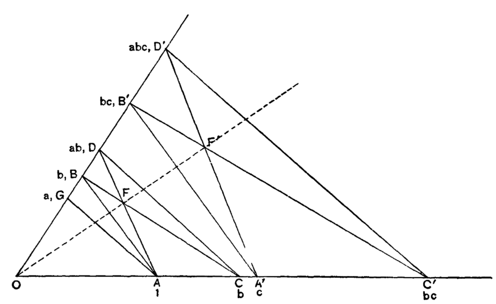
Propiedad conmutativa de la suma



$a+(b+c)=(a+b)+c$

Fig. 10

Propiedad asociativa de la suma



$a(bc)=(ab)c$

Fig. 11

Propiedad asociativa de la multiplicación

La demostración de la conmutatividad de la suma consiste en probar que *A”B”* es paralela a *AA’*, y esto puede hacerse mediante el *teorema de Desargues*; primero denotamos como *F* al punto de intersección de *AB”* y *A’A”*, y como *D* al punto de intersección de *BA”* y *B’B”*, después, dado que en los triángulos *AA’F* y *BB’D* los lados correspondientes son paralelos, por el *teorema de Desargues*, los puntos *O*, *F*, *D* son colineales; dado esto, tenemos que los triángulos *OAA'* y *DB"A"* se sitúan de modo tal que las líneas que unen sus vértices correspondientes concurren en *F,* y como los pares de lados correspondientes *OA*, *DB",* y *OA', DA"* son paralelos, por el *teorema de Desargues* (inverso), el tercer par de lados correspondientes *AA'* y *B"A"* también son paralelos, que es lo que se requería para demostrar que $a+b=b+a$.

Las Fig. 10 y 11 corresponden respectivamente a la asociatividad de la suma y de la multiplicación; tales propiedades se demuestran básicamente de la misma forma que la conmutatividad de la suma. Hilbert demuestra además las leyes distributivas $a(b+c)=ab+ac$ y $(a+b)c=ac+bc$, cuyas pruebas son más elaboradas pero también penden esencialmente de la validez del teorema de Desargues. Sin embargo, no le es posible probar la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Así, la importancia del teorema de Desargues radica en que, en sustitución de los axiomas de congruencia, permite demostrar que las operaciones con segmentos tienen las mismas propiedades que las operaciones con números reales, excepto por la conmutatividad de la multiplicación.

Hilbert luego muestra que en su "nuevo cálculo de segmentos", aún cuando la multiplicación no es conmutativa, es posible la representación analítica del punto y de la línea recta (usando reiteradamente el teorema de Desargues), i.e. es posible introducir un sistema de coordenadas. Llama a la totalidad de los segmentos de este cálculo, sistema de números arguiano (D), y construye sobre (D) una geometría del espacio en la que se satisfacen los axiomas de los *grupos I-III.* Con base en este resultado escribe el siguiente teorema que resume la investigación del capítulo V: "If, in a plane geometry, axioms I, 1–2 (axiomas de incidencia planos), II (orden), III (paralelas) are all fulfilled, then the existence of Desargues's theorem is the necessary and sufficient condition that this plane geometry may be regarded as a part of a geometry of space in which all of the axioms I, II, III are fulfilled."[Hilbert, 1902, p. 64].

Tal como señalé al comienzo, en este capítulo Hilbert esclarece la relación entre el teorema de Desargues y la geometría espacial. Como producto de su investigación, el teorema de Desargues puede caracterizarse para la geometría plana, como el resultado de la eliminación de axiomas espaciales, es decir, en ausencia de axiomas espaciales la validez del teorema de Desargues asegura que una geometría plana es parte de una geometría espacial, como tal, puede remplazar a dichos axiomas.

Las condiciones de demostrabilidad del teorema de Desargues.

Nótese que todo lo que he presentado hasta ahora respecto al capítulo V ocurre sin axiomas de congruencia, y el teorema de Desargues es introducido como axioma. Sin embargo, a lo largo del capítulo V, Hilbert estudia también las condiciones de demostrabilidad del teorema de Desargues, con lo cual deja ver su relación con los axiomas de congruencia, veamos:

1) El teorema de Desargues puede demostrarse a partir de I-III (axiomas de incidencia incluyendo espaciales, axiomas de orden y axioma de paralelas).

2) El teorema de Desargues puede demostrarse a partir de I 1-2, II-IV (axiomas de incidencia planos, axiomas de orden, axioma de paralelas, axiomas de congruencia).

Respecto a 1) y 2), la observación es la siguiente: para demostrar el teorema de Desargues, si se excluyen los axiomas espaciales de incidencia, deben introducirse axiomas de congruencia.

Pero aún más, posteriormente Hilbert elabora un modelo con el que prueba que el teorema de Desargues no puede demostrarse si omitimos simultáneamente los axiomas espaciales de incidencia y los axiomas de congruencia, incluso si todos los demás axiomas son válidos; es decir, la demostración del teorema de Desargues requiere o bien de axiomas espaciales de incidencia o bien del grupo de axiomas de congruencia. Tal resultado no es trivial, pues para demostrarlo, Hilbert construye el primer plano no arguiano, con lo cual queda establecido que el teorema de Desargues no puede ser demostrado en el plano únicamente mediante relaciones proyectivas de incidencia y orden (un tema cuya importancia veremos en la sección 4.2 de esta tesis).

Dicho esto, el asunto de la relación entre el teorema de Desargues y la geometría espacial puede resumirse así:

a) En una geometría plana en donde hay axiomas de congruencia (entiéndase donde son válidos I, 1-2, II-IV), el teorema de Desargues necesariamente es válido, lo cual asegura que ese plano es parte de una geometría espacial. Digamos que los axiomas de congruencia permiten prescindir de los espaciales, vía de que aseguran la validez del teorema de Desargues.

b) En una geometría plana en donde no hay axiomas de congruencia ni espaciales (entiéndase en donde son válidos I, 1-2, II-III), la validez del teorema de Desargues (como axioma) asegura la pertenencia del plano al espacio, es decir, el teorema de Desargues sustituye a los axiomas espaciales.

Para finalizar este apartado, resulta adecuado decir nuevamente que Hilbert no utiliza axiomas de congruencia para la construcción de su "nuevo cálculo de segmentos", y tales segmentos constituyen un sistema de números en donde la multiplicación no es conmutativa; sin embargo, también es posible pensar en un cálculo de segmentos en donde son válidas la totalidad de las leyes de operaciones, y en donde no se utilizan axiomas de congruencia, lo cual es el siguiente tema.

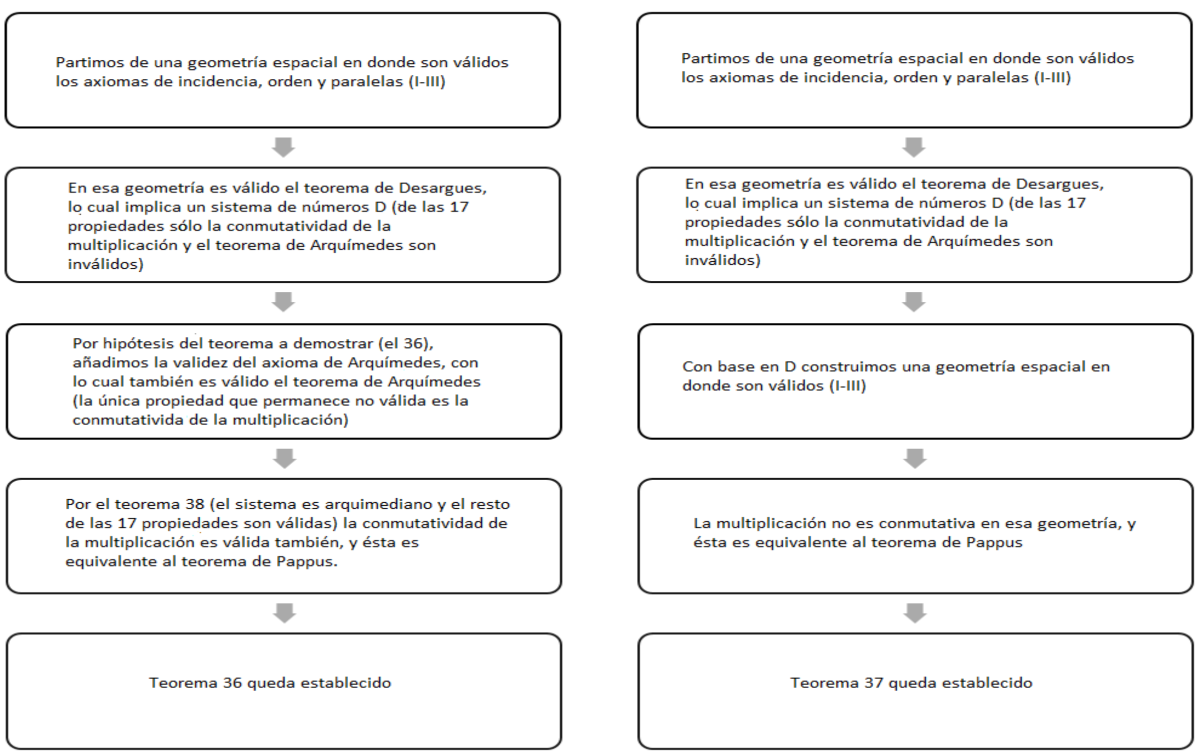
3.3. Un cálculo de segmentos sin axiomas de congruencia.

Las condiciones de demostrabilidad del teorema de Pappus.

Al igual que Hilbert dilucidó las condiciones de demostrabilidad del teorema de Desargues, en el capítulo VI se pregunta cuáles son las condiciones de demostrabilidad del teorema de Pappus: ¿Son las mismas que las del teorema de Desargues? La respuesta es que no y queda establecido en los siguientes dos teoremas:

> "Theorem 36. Pappus's theorem may be demonstrated by means of the axioms I, II, III, V; that is to say, without the assistance of the axioms of congruence and with the aid of the axiom of Archimedes."[Hilbert, 1902, p. 65]
>
> "Theorem 37. Pappus's theorem cannot be demonstrated by means of the axioms I, II, III alone; that is to say, by exclusion of the axioms of congruence and also the axiom of Archimedes."[Hilbert, 1902, p. 65]

La demostración de los teoremas 36 y 37 es compleja e involucra muchos de los resultados previos, particularmente la investigación del capítulo V sobre las propiedades del sistema de números arguiano (D). Además, requiere el establecimiento de un nuevo teorema (teorema 38), que dice que en un sistema de números arquimediano, la ley conmutativa de la multiplicación es una consecuencia necesaria del resto de las propiedades definidas para el sistema de los números reales. Con la siguiente tabla intento explicar intuitivamente el sentido de la demostración de los teoremas 36 y 37.



Un aspecto interesante en relación a los teoremas 36 y 37, es que Hilbert demuestra que, en ausencia de axiomas de congruencia, el teorema de Pappus no depende de los axiomas espaciales de incidencia, es decir, en el caso del teorema de Desargues, si no hay axiomas de congruencia, la inclusión de axiomas espaciales de incidencia permite su demostración, pero no ocurre así con el teorema de Pappus. Lo que Hilbert muestra con los teoremas 36 y 37 es que en el caso del teorema de Pappus, cuando no hay axiomas de congruencia, el axioma que juega el rol crucial es el de Arquímedes, es decir, una geometría arquimediana es una geometría pappusiana, incluso si no hay axiomas de congruencia, pero una geometría no arquimediana, a menos que haya axiomas de congruencia, es una geometría no pappusiana.

Lo anterior significa que en ésta época Hilbert ya sabía que el teorema de Pappus no es consecuencia del de Desargues, pero no sabía nada sobre la implicación inversa, es decir, no sabía si el teorema de Desargues era consecuencia del de Pappus. En 1905 Gerhard Hessenberg demostró que el teorema de Desargues efectivamente se sigue del de Pappus (Hessenberg tuvo un error corregido en 1953 por otra persona), cf. [Pambuccian, 2013, p. 261].

El esclarecimiento de las condiciones de demostrabilidad de los teoremas de Pappus y Desargues permiten vislumbrar un cálculo de segmentos sin axiomas de congruencia, en donde todas las propiedades de operaciones con números reales son válidas.

Un cálculo de segmentos sin axiomas de congruencia

En el capítulo III, como vimos, Hilbert construye un cálculo de segmentos con ayuda del teorema de Pappus en donde hay axiomas de congruencia; la totalidad de segmentos que conforman ese cálculo constituyen un *sistema de números* en donde todas las leyes de operaciones con números reales son válidas ¿Qué pasa si quitamos los axiomas de congruencia e incorporamos el teorema de Desargues?

En el capítulo V, como vimos, Hilbert construye un “nuevo cálculo de segmentos” basado en el teorema de Desargues y sin axiomas de congruencia; en tal cálculo, la única ley de operación que no se satisface es la conmutatividad de la multiplicación, lo cual constituye un *sistema de números arguiano D.* ¿Qué pasa si incorporamos el teorema de Pappus?

La pregunta global entonces es ¿Qué pasa si construimos un cálculo de segmentos sin axiomas de congruencia, pero asumiendo la validez de los teoremas de Pappus y Desargues? Tendríamos el siguiente escenario:

1) La validez del teorema de Desargues requiere, o bien incluir axiomas espaciales (para demostrarlo), o bien introducir el teorema de Desargues como axioma. En cualquier caso, de su validez obtenemos un *sistema de números arguiano* (D), sobre el cual puede construirse una geometría espacial.

2) La validez del teorema de Pappus requiere o bien introducir el axioma arquimediano (para demostrarlo), o bien añadir el teorema de Pappus como axioma. En cualquier caso, su validez complementa al *sistema de números arguiano (D)*, es decir, asegura la conmutatividad de la multiplicación, y con esto obtenemos un *sistema de números* (recordemos que son segmentos) en el que son válidas todas las leyes de operaciones con números reales.

Dicho de otro modo, si no tenemos axiomas de congruencia, podemos construir un cálculo de segmentos en donde la conmutatividad de la multiplicación es asegurada por el teorema de Pappus, y le resto de las leyes de operaciones son establecidas mediante el teorema de Desargues.

Aunque lo que he expuesto en esta parte no corresponde explícitamente a un capítulo de *FG,* parecería que es el resultado que “redondea” la investigación de Hilbert, pues significa la posibilidad de introducir números y reconstruir parte de la geometría euclidiana elemental sin axiomas de congruencia.

Se objetará con razón, que tal ambición corresponde más propiamente a la fundación de la geometría proyectiva (tal como lo requería Von Staudt); de hecho, Hilbert escribió lo siguiente refiriéndose a un cálculo de segmentos sin axiomas de congruencia basado en el teorema de Desargues: "Therefore it is suitable for the derivation of pure projective geometry in yon Staudt's sense of the word, i.e. geometry which makes no use of metric in the ordinary sense." [Hilbert4, p. 340] (Nota: en esta cita entiéndase que Von Staudt no aceptaría el uso de axiomas de congruencia).

Se puede objetar también que si el teorema de Pappus no es introducido como axioma, entonces se necesita aceptar el axioma arquimediano para su demostración, y Hilbert evita tal axioma en el capítulo III. Hallet y Majer dicen al respecto: "The use of the Arquimedian axiom would indeed allow one to make the same 'numerical assumptions' about segment that Euclid did, *but while avoiding the congruence axioms*"[Hallett and Majer, 2004, p. 199].

Mi opinión es que en cualquier caso (sea para la fundación de la geometría proyectiva o la euclidiana, con o sin el uso del axioma arquimediano) no deja de ser un resultado interesante que sea posible introducir un cálculo de segmentos, construir un sistema de números y un sistema de coordenadas, y desarrollar buena parte de la geometría euclidiana elemental, a partir de los teoremas de Pappus y Desargues, sin axiomas de congruencia.

Lo anterior constituye, de acuerdo con el marco general en que se inscribe esta tesis, un punto a favor respecto a la idea de que podemos pensar el fundamento de la geometría a partir de estos dos teoremas, acotado a un modo específico de reconstruir la geometría, i.e, sin axiomas de congruencia.

3.4. Resultados y posibilidades en torno a los teoremas de Pappus y Desargues

En este apartado sistematizare los resultados en torno a los teoremas de Pappus y Desargues, así como las posibilidades que conllevan para la geometría, presentados en los apartados previos.

Teorema de Pappus (versión afín):

Condiciones de demostrabilidad:

Opción 1: Axiomas de incidencia planos, axiomas de orden, axiomas de paralelas, axiomas de congruencia.

Opción 2: Axiomas de incidencia (planos y espaciales), axiomas de orden, axioma de paralelas, axioma de Arquímedes.

Conclusión (de su relación con los axiomas de congruencia y continuidad): El teorema de Pappus es independiente de los principios de continuidad (siempre que haya axiomas de congruencia), y es independiente de las relaciones de congruencia (siempre que haya axiomas de continuidad y espaciales). El teorema de Pappus no es independiente de las relaciones de congruencia y continuidad al mismo tiempo.

¿Qué posibilidades conlleva el teorema de Pappus para la geometría? (todas están ligadas)

- La construcción, sin principios de continuidad, de un cálculo de segmentos que satisface todas las leyes de operaciones con números reales, en otros términos, de un sistema de segmentos cuya estructura algebraica es equivalente a la de los números reales.

- El desarrollo de la teoría de las proporciones y la teoría de las áreas planas de

Euclides sin principios de continuidad; esto constituye el paso de la geometría de la congruencia a la geometría de la semejanza mediante la introducción de una nueva operación, la multiplicación de segmentos, por métodos geométricos.

- La introducción de un *sistema de números* y la introducción de un sistema de coordenadas sin recurso a teorías numéricas externas.
- La comprensión -en buena medida- del fundamento geométrico que justifica la coordenación de los puntos del plano mediante números reales.

Teorema de Desargues (versión afín):

Condiciones de demostrabilidad:

Opción 1: Axiomas de incidencia (incluyendo espaciales), axiomas de orden, axioma de paralelas.

Opción 2: Axiomas de incidencia planos, axiomas de orden, axioma de paralelas, axiomas de congruencia.

Conclusión (de su relación con los axiomas espaciales, de congruencia y continuidad): El teorema de Desargues es independiente de las relaciones de congruencia y del principio de continuidad simultáneamente (siempre que haya axiomas espaciales). El teorema de Desargues es independiente de los axiomas espaciales y del principio de continuidad (siempre que haya axiomas de congruencia).

¿Qué posibilidades conlleva el teorema de Desargues para la geometría? (todas están ligadas)

- La construcción de un cálculo de segmentos, sin axiomas de congruencia, en donde la única ley de operaciones con números reales que no se satisface es la conmutatividad de la multiplicación, i.e. el teorema de Desargues sustituye a los axiomas de congruencia en la demostración de las propiedades de la suma de segmentos.

- La introducción, sin axiomas de congruencia, de un *sistema de números arguiano (D)*, que permite la representación analítica del punto y la recta.

- La construcción, sin axiomas espaciales, de una geometría espacial en la que son válidos los axiomas de incidencia, orden y paralelas, i.e. el teorema de Desargues reemplaza a los axiomas espaciales de incidencia.

- La comprensión -en buena medida- del fundamento geométrico que justifica la coordenación de los puntos del plano mediante números reales.

Ambos teoremas representan la posibilidad de aritmetizar la geometría sin recurso a una teoría numérica externa:

> "Given the Desargues and the Pappus Theorems, there is a rich underlying analytic geometry over an associative and commutative field (...) In effect what is shown is that the segments can form the basis of fields of the right kind suitable for proper coordinatisatioon, and thus that, to a large extent, analytic geometry is possible without the imposition of number fields from 'outside'. This goes a long way toward explaining how it is that synthetic geometry can match analytic geometry, and to settling Hilbert's long standing occupation with the Einführung der Zaht (introducción del número). The Deargues and Pascal Theorems obviously play a central role in this"[Hallett and Majer, 2004, pp. 199-200]

Finalmente, los teoremas de Pappus y Desargues constituyen la posibilidad de reconstruir buena parte de la geometría euclidiana elemental sin axiomas de congruencia.

Con este apartado concluyo la sección 3, en donde he presentado los resultados más importantes de FG, a saber, los cálculos de segmentos basados en los teoremas de Pappus y Desargues, y también he explicado su importancia para la geometría.

En la siguiente sección, como idea adicional, veremos que la relevancia de estos dos teoremas no se acota al trabajo de Hilbert.

4. Los teoremas de Pappus y Desargues en las discusiones de la geometría proyectiva

Antes de las investigaciones de Hilbert, los teoremas de Pappus y Desargues ya tenían un papel notable en las discusiones sobre la fundación de la geometría proyectiva por métodos puramente geométricos, a lo largo de las secciones previas de algún modo lo he hecho saber. En esta sección presentaré *grosso modo* tres ejemplos al respecto:

1) El papel del teorema de Desargues en la definición del invariante proyectivo fundamental.

2) El teorema de Desargues como caso ejemplar de la distinción entre geometría plana y sólida.

3) El teorema de Pappus en la demostración del teorema fundamental de la geometría proyectiva.

Cabe adelantar que 1), 2) y 3) están estrechamente relacionados con los resultados que Hilbert obtendría posteriormente en *FG*. Entonces, estos puntos nos permitirán ver que no es fortuito que los teoremas de Pappus y Desargues hayan sido clave en el trabajo de Hilbert; ya las discusiones previas, en el marco de la geometría proyectiva, sugieren que estos dos teoremas encierran algo importante.

4.1. El teorema de Desargues en la definición del invariante proyectivo fundamental

Al comienzo de la sección 2.1 expuse brevemente la problemática que a mediados del siglo XIX rodeaba la fundación de la geometría proyectiva por métodos puramente geométricos. Señalé que geómetras como Chasles y Steiner prescindían del uso del álgebra; no obstante, sus resultados dependían de la noción métrica conocida como razón doble, ésta no solo era requerida, de hecho era el invariante proyectivo fundamental.

La razón doble (AB, CD) para cuatro puntos A, C, B, D en ese orden se calcula como $\frac{AC/CB}{AD/DB}$, y corresponde a la razón en que el punto C corta internamente al segmento AB, dividida por la razón en que el punto D corta externamente al mismo segmento. Cuando la razón doble es -1, es decir, cuando C y D dividen a AB en la misma razón, pero uno interna y otro externamente, se dice que conforman una hilera o cuaterna armónica, o que D es el conjugado armónico de C con respecto a A y B.

¿Qué significa que la razón doble era el invariante proyectivo fundamental? Que, por ejemplo, dados cuatro puntos sobre una linea *l*, estos pueden transformarse proyectivamente[32] en otros cuatro puntos sobre una recta *l'* syss la razón doble de esos cuatro puntos se conserva.

Como antes vimos, fue Christian Von Staudt en *Geometrie der Lage (1847)* quien primero quiso remediar esta situación, es decir, evitar que el invariante proyectivo fundamental dependiera de una noción métrica, cf.[Voelke, 2008, p. 1]. El problema sobre si era o no necesario utilizar nociones métricas en la fundación de la geometría proyectiva equivalía al problema de responder si las propiedades proyectivas de las figuras tienen un fundamento independiente de la métrica o están subordinadas a ésta.

En respuesta, Von Staudt definió como nuevo invariante proyectivo a la cuaterna armónica, pero no entendida como cuatro puntos cuya razón doble es -1, sino definida geométricamente. Es decir, definió una transformación proyectiva ya no como una correspondencia en la que se conserva la razón doble, sino como una correspondencia en la que se conservan las cuaternas armónicas geométricamente definidas, cf.[Voelke, 2008, p. 250]. Con esto, evitó el recurso a la única noción métrica que mantenía a la geometría proyectiva anclada a la euclidiana.

Para definir una cuaterna armónica de modo geométrico, Von Staudt utilizó una

[32]**Transformación proyectiva (proyectividad)**: es una composición de correspondencias elementales, estas últimas entendidas como correspondencias uno a uno entre formas unidimensionales, por ejemplo haces de rectas y rangos de puntos, cf. [Coxeter and Greitzer, 1967, pp. 8-10].

construcción consistente en un cuadrángulo completo, la cual era conocida desde la matemática griega; es en relación a esta construcción que el teorema de Desargues juega un papel clave. Veamos.

Dados tres puntos A, C, B, mediante la construcción de un cuadrángulo completo es posible encontrar el conjugado armónico D, del punto C con respecto a A y B; sin embargo, lo más importante es demostrar el carácter único de D, y el teorema de Desargues permite hacerlo. Ha de notarse que ésta es la construcción que utilizó Hilbert en sus manuscritos de 1891 y 1894 (de lo cual hablé en la sección 2.1).

En lo que sigue explicaré la construcción del cuarto elemento armónico y la forma en que el teorema de Desargues permite demostrar el carácter único del mismo, en esta ocasión utilizaré la versión proyectiva del teorema, que puede consultarse en la tabla que incluí en la página 13 de esta tesis.

En la Fig. 12[33] consideremos primero únicamente la construcción que está arriba de la línea l (la mitad superior de la figura). Dados tres puntos colineales A, C, B, trazamos tres líneas que pasen a través de esos puntos, y obtenemos el triángulo EFG, luego trazamos las líneas AG y BE que se intersecan en H, finalmente trazamos la línea FH que cortará la recta AB en el punto D. D es el conjugado armónico de C en relación a A y B.

Como podemos observar, la construcción corresponde al cuadrángulo EFGH cuyo par de lados opuestos en verde se intersecan en A, el par de lados opuestos en rojo se intersecan en B, y sus diagonales en azul cortan a AB en los puntos C y D. El cuadrángulo EFGH podría construirse de muchas formas, esto es, con distintas magnitudes de segmentos y ángulos; no obstante, dados A, C, B, mientras conservemos las relaciones de incidencia de puntos y rectas, la posición de D será siempre la misma, y esto se demuestra con base en el teorema de Desargues.

[33] Figura de elaboración propia.

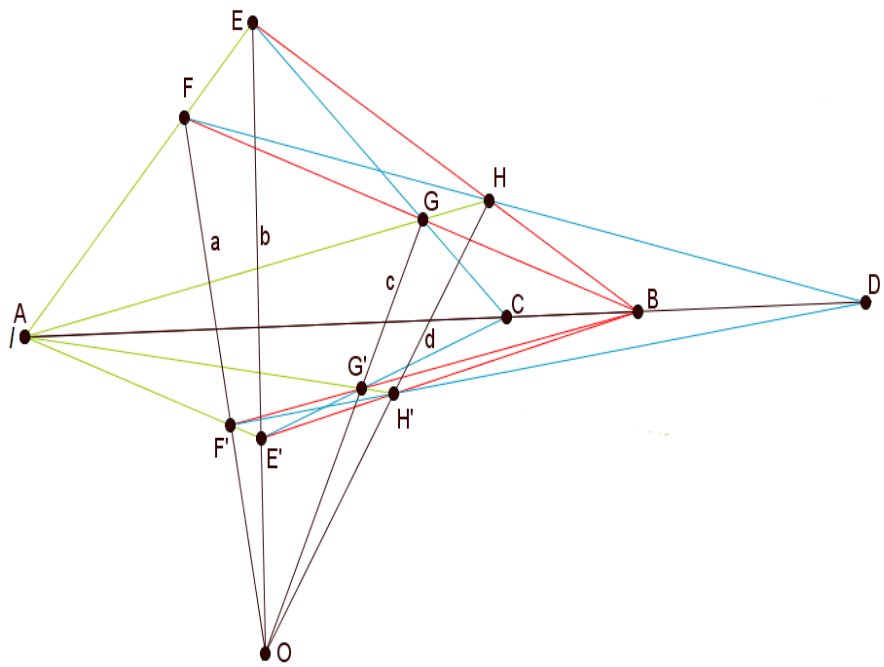


Fig. 12

Consideremos ahora la figura completa. Los lados correspondientes de los triángulos EFG y E'F'G' se intersecan dos a dos en la recta l (se dice que los triángulos están en perspectiva desde l). Entonces, por el teorema de Desargues, las rectas a, b, c, que están determinadas por sus pares de vértices correspondientes, concurren en un punto, le llamamos O (se dice que los triángulos están en perspectiva desde el punto O). Los triángulos EGH y E'G'H' también están en perspectiva desde l, y por el teorema de Desargues lo están desde algún punto; como b, c concurren en O, sabemos que b, c, d concurren en O, y entonces los triángulos mencionados están en perspectiva desde O. De lo anterior a, b, d, concurren en O, es decir, los triángulos EFH y E'F'H' están en perspectiva desde O, y por el teorema de Desargues, están en perspectiva desde alguna línea; sus lados correspondientes EF, E'F' concurren en A, los lados EH, E'H' concurren en B, como FH, F'H' deben inersecarse sobre AB, y como FH corta a AB en D, F'H' también corta a AB en D. Con esto queda demostrado el carácter único del punto D.

Es decir, no importa el cuadrángulo que dibujemos, mientras se conserven las relaciones de incidencia, la posición de D está únicamente determinada. Éste no es un hecho trivial, a partir del mismo Von Staudt obtuvo inmediatamente el resultado que posteriormente se conocería como el teorema fundamental de la geometría proyectiva (T.F.G.P en adelante, y que es una versión del teorema de Pappus), y pudo introducir un sistema de coordenadas al plano proyectivo.

Con esto concluyo el primer caso de un problema en la fundación de la geometría proyectiva en la cual el teorema de Desargues tenía ya un rol central.

4.2. El teorema de Desargues como caso ejemplar de la distinción entre geometría plana y geometría espacial

Dado que Von Staudt quería evitar nociones métricas en la fundación de la geometría proyectiva, optó por una demostración espacial del teorema de Desargues, es decir, demostró una configuración del teorema en la que los triángulos están en planos distintos. La demostración espacial no requiere de la noción de medida, y a partir de ésta puede establecerse proyectivamente la validez del teorema en el plano.

La demostración espacial era conocida por su carácter obvio. Poncelet se refirió a ésta como "evidente" o "a priori", c.f.[Arana and Mancosu, 2012, p. 25]. Con ayuda de la Fig. 13 escribo informalmente un ejemplo de demostración espacial.

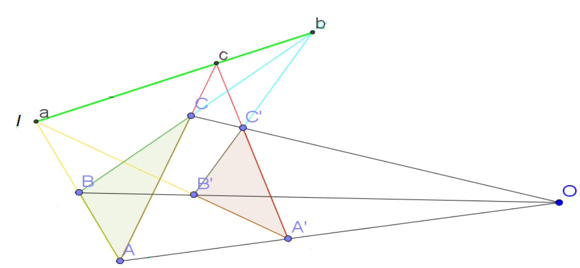


Fig. 13[34]

[34]Figura de elaboración propia.

Los triángulos ABC y A'B'C' están en planos distintos que se intersecan en una recta l. Partimos de que los triángulos están perspectiva desde el punto O, el teorema de Desargues dice que entonces están en perspectiva desde una línea, que es lo que debemos demostrar. Como las rectas AA' y BB' se intersecan en O, están en el mismo plano que los lados correspondientes AB y A'B', cuyo punto de intersección a está l. Aplicando el mismo razonamiento a los otros pares de lados, concluimos que sus intersecciones b y c están en l, así que los triángulos están en perspectiva desde l. Con lo cual queda demostrado el teorema de Desargues para una configuración espacial.

Hay una pregunta detrás de esto ¿Por qué el teorema de Desargues puede demostrarse sólo con relaciones de incidencia en el espacio, pero necesita de relaciones métricas en el plano? Esta pregunta es parte de una discusión mucho más amplia con la que se intentó esclarecer la distinción entre geometría plana y espacial; tal problemática ha sido desarrollada con gran detalle en [Arana and Mancosu, 2012], de donde retomaré algunos aspectos directamente relacionados con el resultado de Hilbert[35].

De acuerdo con Arana y Mancosu, ya en 1825 Joseph Gergonne había señalado que la eliminación de la métrica, es decir, el estudio únicamente de relaciones de incidencia o proyectivas en el plano, podría requerir la inclusión de consideraciones espaciales; sin embargo, señalan los autores: "It will be only with the foundational work of Hilbert, foreshadowed by Peano and Pieri, that some of these claims would be put on a solid footing"[Arana and Mancosu, 2012, p. 12].

Los autores se refieren al resultado de Hilbert, presentado en la sección 3.2 de esta tesis, según el cual la demostración del teorema de Desargues requiere o bien axiomas espaciales de incidencia o bien axiomas de congruencia; Hilbert demuestra tal hecho mediante la construcción de un modelo de plano que se conoce como plano no arguiano (se conoce así porque el teorema de Desargues no es válido en ese plano). Hilbert concluye

[35]Los autores utilizan la expresión *geometría sólida* y no *geometría espacial*; sin embargo, en aras de facilitar la comprensión utilizaré el término *geometría espacial.*

que el teorema de Desargues no puede demostrarse si omitimos simultáneamente los axiomas espaciales de incidencia y los axiomas de congruencia, tal resultado conlleva la imposibilidad de derivar el teorema de Desargues sobre la base de únicamente axiomas de incidencia planos y axiomas de orden. Entonces, el resultado de Hilbert coloca al teorema de Desargues como un caso ejemplar respecto al señalamiento de Gergonne, i.e. la eliminación de nociones métricas, es decir, si nos quedamos únicamente con relaciones de incidencia o proyectivas, la demostración del teorema de Desargues requiere incluir consideraciones espaciales.

El resultado de Hilbert no es un resultado aislado, antes de la publicación de *FG*, ya había indicios sobre la pertinencia de estudiar el teorema de Desargues para comprender la distinción entre geometría plana y espacial. Veamos un par de sucesos al respecto que pueden pensarse como antecedentes al trabajo de Hilbert.

El elemento clave en la coordenación del plano proyectivo de Von Staudt fue el teorema de Desargues, del cual Von Staudt demostró una configuración espacial, lo cual significa que Von Staudt asumía que su plano estaba inserto en el espacio. En 1873 Felix Klein se propuso investigar si con el método de Von Staudt era posible construir coordenadas para un plano visto como independiente del espacio; tras su investigación concluyó que no era posible y que el tratamiento de la geometría de Von Staudt era correcto, escribió al respecto:

> "Thus, one must not, as it has happened since, regard it as a trick [Kunstgriff] by von Staudt when he also considered the stereometric relationships of the plane for the foundation [Begr¨undung] of projective geometry. His starting point corresponds completely to the nature of the matter. If, following von Staudt, one excludes the consideration of metric relations, then projective geometry holds for the straight lines in a plane because plane and line can be conceived as elements of a spatial system" (Klein citado en [Arana and Mancosu, 2012, p. 28]).

Arana y Mancosu sostienen que, en tanto el elemento clave en la coordenación de la geometría proyectiva de Von Staudt es el teorema de Desargues, la conclusión de Klein sugería que éste podría fallar en algún plano proyectivo (entiéndase no inserto en el espacio y en donde no hay relaciones de congruencia), cf.[Arana and Mancosu, 2012, p. 29]. En 1891 Wiener, a quien ya he citado antes como influyente en los resultados de Hilbert, dijo explícitamente pero sin probarlo, que el teorema de Desargues no podía ser demostrado en el plano usando solamente relaciones de incidencia.

Después de eso vinieron algunos trabajos de Peano[36], y finalmente Hilbert presento su modelo de plano no arguiano en *FG*. El modelo de Hilbert es concluyente: el teorema de Desargues no puede demostrarse únicamente mediante relaciones de incidencia para el plano y relaciones de orden.

El plano no arguiano, junto con el otro resultado importante de Hilbert en el capítulo V, a saber, que el teorema de Desargues es condición necesaria y suficiente para que un plano sea visto como parte del espacio, dan cabida a nuevas preguntas que denotan la importancia del teorema de Desargues, Arana y Mancosu cuestionan ¿Por qué un hecho algebraico como el cálculo de segmentos construido con base en el teorema de Desargues tiene las consecuencias geométricas que tiene? o ¿Por qué espacios proyectivos son suficientemente regulares para ser coordenados mediante un anillo de división (en donde la multiplicación no es conmutativa), mientras que existen planos proyectivos no arguianos que no pueden ser coordenados?[37] ¿Por qué el plano y el espacio difieren en esta forma fundamental?

Con esto concluye el segundo ejemplo que muestra la relevancia del teorema de Desargues en discusiones previas al trabajo de Hilbert, pero estrechamente relacionadas con el mismo.

[36]En [Arana and Mancosu, 2012, pp. 29-33] se defiende ampliamente, bajo ciertas restricciones, que fue Peano quien primero construyo un plano no arguiano.

[37]Aquí Mancosu cita a Marshall Hall en Projective planes. *Transactions of the American Mathematical Society,* 1943 [Arana and Mancosu, 2012, p. 54].

4.3. El teorema de Pappus en la demostración del teorema fundamental de la geometría proyectiva

En este apartado abordaré un último problema, esta vez relacionado con el teorema de Pappus.

Después de la definición del invariante proyectivo fundamental mediante la construcción del cuarto elemento armónico, Von Staudt demostró el resultado que se conocería como teorema fundamental de la geometría proyectiva (T.F.G.P. de ahora en adelante), el cual es una versión del teorema de Pappus.

El T.F.G.P dice: "Toda correspondencia proyectiva de una forma fundamental de primera especie sobre ella misma, que admite tres elementos fijos/invariantes es igual a la identidad[38]"[Voelke, 2008, p. 244].

Un ejemplo de forma fundamental de primera especie es la recta (considerada como un rango de puntos). Los elementos fijos/invariantes son aquellos que en una correspondencia, se corresponden consigo mismos, y la identidad es una transformación en la que cada elemento es fijo.

Explicaré el T.F.G.P tomando el caso de una correspondencia entre rectas (entendidas como un rango de puntos). El teorema dice que en una correspondencia proyectiva entre una recta y sí misma, si tenemos tres puntos fijos, entonces un cuarto punto es fijo, y un quinto, y así sucesivamente hasta alcanzar la totalidad del rango de puntos, esto es, cada elemento es fijo, de modo que la correspondencia no es sino la identidad.

Von Staudt demostró el teorema bajo el argumento de que dados tres puntos fijos, la construcción del cuarto elemento armónico (que no olvidemos depende del teorema de Desargues) asegura que un cuarto punto es fijo, luego un quinto, y así sucesivamente se construye una "red armónica"[39] que cubre toda la recta; sin embargo, en realidad la

[38]Una transformación de un conjunto A en sí mismo, en la cual cada elemento es un elemento invariante, es llamada transformación identidad, cf. [Eves, 1972, p. 101]

[39]El concepto de "red" fue introducido a la discusión por Theodor Reye un poco después, pero ya

demostración de Von Staudt sólo asegura esto para los elementos racionales en la recta. Entonces, la demostración de Von Staudt conlleva un problema.

La discusión en torno a esto duró cerca de tres décadas, y es tratada con gran detalle técnico en [Voelke, 2008]. En lo que sigue retomaré algunos puntos relevantes, y enfatizaré que esta discusión condujo directamente a las aseveraciones de Wiener y Schur que tanto influyeron en el trabajo de Hilbert (que es un tema que ya he tocado antes).

La naturaleza del problema en la demostración de Von Staudt no fue inmediatamente comprendida; fue Felix Klein, hasta 1873 (el trabajo de Von Staudt es de 1847), quien primero se dio cuenta que en la demostración de Von Staudt había implícito un principio de continuidad, y que era era necesario incluirlo. No obstante, no todos los geómetras proyectivos aceptaban que la continuidad fuera una propiedad esencial del espacio. Es en tal contexto que cobró relevancia la investigación axiomática de la geometría; algunos geómetras, como Wiener y Schur, comenzaron a investigar por métodos axiomáticos qué hipótesis subyacen o están implícitas en los teoremas fundamentales de la geometría proyectiva.

En 1891 Wiener afirmó, sin demostración, ideas muy similares a los resultados que Hilbert obtendría casi 10 años después, a saber, que la demostración del teorema de Desargues requiere un paso por el espacio, y que la demostración del teorema de Pappus requiere de una hipótesis de continuidad, pero que si se aceptan estos dos teoremas, el T.F.G.P puede demostrarse sin hipótesis suplementarias.

En cuanto a Schur, como antes dije, fue quien primero demostró el teorema de Pappus sin principios de continuidad (aunque con consideraciones espaciales), y a partir de éste derivó el T.F.G.P. Pero no sólo eso, en *Lehrbuch der analytischen Geometrie*

estaba tácito en la propuesta de Von Staudt. Tiempo antes Möbius había ya usado el concepto de red para demostrar que la colineación entre dos planos/espacios quedaba determinada por cuatro puntos y sus correspondientes. En su demostración también había un axioma de continuidad implícito, cf. [Voelke, 2008].

(1898) estudió la teoría de las proporciones euclidiana y hablaba ya sobre un cálculo de segmentos; en su libro aparece la idea de que el teorema de Pappus es equivalente a la multiplicación de segmentos, y observa que en tanto el teorema de Pappus no requiere del axioma de Arquímedes para su demostración, es posible construir un cálculo de segmentos sin principios de continuidad. Esos son resultados que Hilbert demostraría en *FG*, cf.[Voelke, 2008, pp. 278-284]. Schur escribió:

> "No me arriesgo a decidir si el teorema de Pascal para dos rectas (que es el teorema de Pappus) puede ser también demostrado sin los axiomas de congruencia y al mismo tiempo sin la forma proyectiva del postulado de Arquímedes (...) La prueba certera hasta ahora es que el cálculo habitual con segmentos puede también ser establecida por un camino independiente a la medida y el postulado de Arquímedes" (Schur, citado en [Voelke, 2008, p. 283])

El asunto que Schur no se arriesgó a decidir, como hemos visto, fue resuelto por Hilbert en el capítulo VI de *FG*. El trabajo de Schur, junto con el de Von Staudt son quizá de los que más se benefició Hilbert.

Con esto concluyo el tercer punto con el que muestro la relevancia del teorema de Pappus en discusiones previas al trabajo de Hilbert, pero estrechamente relacionadas con el mismo. Aquí concluye la primera parte de esta tesis.

Segunda parte. El origen de los teoremas de Pappus y Desargues en la doctrina de *Los Porismas,* y su relación con el cálculo de segmentos de Hilbert

En esta segunda parte de la tesis, iré hasta la doctrina griega de los *porismas*, en donde, bajo la interpretación adecuada, está el origen de los teoremas de Pappus y Desargues. Veremos que el papel fundamental de estos teoremas en el trabajo de Hilbert (e incluso su papel en los trabajos de geómetras como de Von Staudt, Wiener y Schur) tiene que ver con el tipo de proposiciones que estos teoremas eran desde su origen. Entonces el objetivo general es:

> Mostrar que desde su origen en la doctrina de *Los Porismas*, los teoremas de Pappus y Desargues estaban vinculados a un tipo de cálculo con segmentos, lo cual contribuye a entender su papel en la introducción de la suma y multiplicación en los cálculos de segmentos de Hilbert.

La expresión "tipo de cálculo con segmentos", no denota exactamente lo mismo que los "cálculos de segmentos" de Hilbert; sin embargo, existe una relación no trivial. Veremos que los teoremas de Pappus y Desargues están vinculados desde sus orígenes a proporciones de segmentos/rectángulos, las cuales conllevan la posibilidad implícita de encontrar la suma o la multiplicación de dos segmentos y de demostrar su conmutatividad.

Es en tal sentido que sostengo que desde su origen estos teoremas están vinculados a un tipo de cálculo con segmentos, y que esto contribuye a comprender su papel en la construcción de los cálculos de segmentos de Hilbert; sin embargo, debe quedar claro, que no estamos afirmando que en la doctrina de los porismas hubiese una finalidad explícita de definir las operaciones básicas entre segmentos y mucho menos de demostrar sus propiedades, tal como Hilbert lo hace.

Aclarado esto, queda decir que esta segunda parte de la tesis está conformada por tres secciones cuya descripción no repetiré, pues puede leerse en la introducción de esta tesis (páginas 10 y 11).

5. Aspectos esenciales de los porismas

En esta sección explicaré qué son los porismas, qué son los lemas de Pappus y señalaré bajo qué interpretación los teoremas de Pappus y Desargues tienen su origen en la doctrina de los porismas.

I) Porismas. Los porismas son proposiciones matemáticas griegas en las que de lo que se trata, es de encontrar la magnitud y/o posición de una cosa enunciada en la proposición, tal magnitud y/o posición está dada desde el comienzo pero implícitamente.

Para entender mejor lo anterior, partiremos de una definición correspondiente sólo a un tipo de porisma, los *lugares,* que abundaban en el análisis griego; tal definición es la que más ha contribuido a comprender la naturaleza de los porismas, y dice: "Un porisma es aquello a lo que le falta una hipótesis para ser un teorema de lugar"[Jones, 1986, p. 96][Eecke, 1933, p. 487]. En términos más simples, la definición dice que los porismas (en sentido estricto los *lugares*) son *teoremas de lugar incompletos.*

Las frase "teorema de lugar incompleto" conlleva los dos aspectos esenciales que permiten comprender los porismas: *generalidad* e *indeterminación.*

1) Generalidad: Los porismas son *teorema de lugar*, los teoremas de lugar en la matemática griega involucran dos tipos de cosas, las que están dadas por completo (tipo 1), y las que están dadas en términos *generales* (tipo 2), éstas últimas están dadas en términos de su relación con las cosas del tipo 1. (Nota: con fines didácticos podemos pensar en las cosas del tipo 1 como fijas o constantes, y en las cosas del tipo 2 como móviles o variables sujetas a una lay común que involucra las cosas del tipo 1). Éste es el sentido que los porismas poseían generalidad.

2) Indeterminación: Los porismas son teoremas de lugar *incompletos/indeterminados,* lo son en el sentido de que describen un lugar geométrico, entiéndase una línea, cuya forma esta explícitamente dada desde el inicio, pero su magnitud y/o posición sólo esta dada en sentido "implícito".

Entonces, en los porismas de lo que se trata es de encontrar, a partir de lo que está explícitamente dado, la magnitud y/o posición implícitamente dada.

La siguiente definición y ejemplo de Michael Chasles ayudará a comprender mejor en qué consistían los porismas (en el pie de página escribo un teorema de lugar completo por si se quiere hacer la comparación[40]):

Porisma (*lugar*-teorema de lugar incompleto)**:** Es una proposición que dice que los puntos que cumplen una ley común conocida, están sobre una línea de forma determinada pero hace falta encontrar la magnitud y/o la posición de la misma, por ejemplo: "Dados dos puntos A y B, y una razón λ, el lugar de los puntos x tales que sus distancia

[40]**Teorema de lugar (completo):** es una proposición que expresa una propiedad común a todos los puntos de una misma línea, ya sea recta o curva, la cual está completamente definida/determinada en forma, tamaño y posición. Ejemplo: "Tomados sobre el diámetro AB de un círculo dos puntos C, D, tales que tenemos la relación $\frac{CA}{CB}=\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}}$, las distancias de cada punto m de la circunferencia a esos dos puntos están entre ellas en la razón constante $\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{DA}}$"[Chasles, 1860, p. 33].

a esos dos puntos son entre ellas como la razón dada, es una circunferencia de círculo que está dada en magnitud y posición"[Chasles, 1860, p. 33][41].

Como es notorio, el lenguaje de los porismas forma parte del lenguaje de lo "dado". Una mejor comprensión del ejemplo, y de los porismas en general, requiere observar que lo "dado" era utilizado en distintas formas; considero que la mejor manera de clasificar sus usos es como sigue. Primero está a lo que llamaré *D-dado,* que en el ejemplo son los puntos A, B, y la razón λ (con fines didácticos podríamos pensar que lo D-dado es fijo/constante). Luego está lo que llamaré *G-Dado*, que es lo dado en términos generales, en el ejemplo son los puntos x, los cuales están dados en el sentido de que deben cumplir una ley común que involucra a las cosas *D-dadas* (con fines didácticos podríamos pensar lo *G-Dado* como cosas móviles/variables). Finalmente está lo que llamaré *P-dado* que es lo que está implícitamente dado, y que en el ejemplo es la magnitud y posición de la circunferencia, en otros términos lo *P-dado* es lo que hay que encontrar (usaré esta clasificación en lo que sigue, por lo cual es importante recordarla).

Entonces, en relación al ejemplo, en los porismas de lo que se trata es de encontrar la magnitud y/o posición del lugar geométrico de los puntos x, la cual está implícitamente dada.

Pasemos ahora a los lemas.

II) Lemas. Los *lemas de Pappus* son 38 proposiciones escritas por Pappus de Alejandría (290-350 a.C) a los tres libros de *Los Porismas* de Euclides, que son libros perdidos. Los lemas están en el libro VII de la Colección Matemática de Pappus (VII-CM de ahora en adelante), y Pappus se refiere a estos como proposiciones auxiliares para la demostración de los porismas.

Como luego veremos, los lemas pueden escribirse en términos de proporciones de

[41]Nota: Chasles no escribe A y B, λ, ni x, dado que no va a expresar ninguna relación entre esos elementos no es necesario designarlos con nombres; sin embargo, lo he hecho así con el fin de facilitar el análisis del siguiente párrafo.

segmentos y/o rectángulos; tales proporciones son la clave para encontrar la magnitud y/o posición buscada en un porisma, es por eso que los lemas son esenciales en la demostración de los porismas.

Los distintas aspectos que he mencionado quedarán claros en la siguiente sección, en donde se estudiará el Porisma de Pappus, que puede interpretarse como una versión del teorema de Desargues.

Ahora veamos bajo qué interpretación los teoremas de Pappus y Desargues tienen su origen en la doctrina de los porismas.

III) Interpretación de la doctrina de los porismas. Los porismas eran particularmente útiles en la solución de problemas geométricos [Jones, 1986, pp. 66-70]. La peculiaridad de su forma propició muchos trabajos en los que se indagó su conexión con la geometría superior, el análisis geométrico y algebraico; por ejemplo, Chasles estableció una analogía entre estos y el método general para la solución de problemas en la geometría cartesiana, y también mostró que muchas de sus proposiciones eran muy similares a los enunciados de la geometría moderna[Chasles, 1860, p. 76].

En particular, Poncelet reconoció los primeros trazos de la geometría proyectiva en la doctrina de los porismas. Él pertenecía a los geómetras del siglo XIX que creían que la geometría podía alcanzar generalidad sin ayuda del álgebra, y vio tal posibilidad en el estudio de las propiedades proyectivas de las figuras, que al ser de las más generales, podían pensarse como independiente de cualquier determinación de magnitud.

Poncelet afirmó que las propiedades proyectivas de las figuras eran el verdadero objeto de estudio de los porismas euclidianos, y concluyó: "Nos inclinaremos fuertemente a creer que el tratado de Los Porismas de Euclides no tenía más objeto que estas propiedades generales y abstractas de las figuras, cuyo carácter no podía más que difícilmente estar definido en el lenguaje de la geometría antigua; en una palabra, que los porismas eran verdaderas propiedades proyectivas (...)"[Poncelet, 1866, p. XXV].

Bajo tal interpretación, luego ampliada por Chasles (quien de hecho hizo una reconstrucción de los libros de Euclides bajo una lectura proyectiva), el origen de los teoremas de Pappus y Desargues está en la doctrina de los porismas, en particular en los 38 lemas de Pappus, lo cual veremos a continuación.

6. El Porisma de Pappus y la conmutatividad de la suma de segmentos de Hilbert

En esta sección se estudiará el Porisma de Pappus, que puede interpretarse como una versión del teorema de Desargues; veremos que para demostrarlo se requiere el lema IV de Pappus, que establece una proporción de rectángulos, y que conlleva la posibilidad de encontrar la suma de dos segmentos, y demostrar su conmutatividad. Finalmente, mostraremos de qué modo todo esto guarda relación con la conmutatividad de la suma de segmentos de Hilbert.

6.1. El Porisma de Pappus como el teorema de Desargues

El porisma de Pappus (PP de ahora en adelante) es una proposición escrita por Pappus con la que sintetizó diez porismas (*lugares*) desarrollados por Euclides al comienzo de su primer libro. PP dice: “Si tres puntos situados sobre la misma recta de una figura convexa o no convexa (o dos puntos en caso de paralelismo) son dados, y si los puntos restantes, con excepción de uno, permanecen sobre rectas dadas en posición, entonces el último punto también permanece sobre una recta dada en posición”[Eecke, 1933, p. 88][42].

En la cita, la palabra *figuras* se refiere a sistemas de cuatro líneas que se cortan dos

[42]Cita en francés: “Si trois points situés sur une seule droite d’une figure convexe ou non convexe [ou deux points en cas de parallélisme] sont donnés, et si les points restants, à l’exception d’un seul, sont liés à des droites données de position, ce seul point est aussi lié à une droite donnée de position”.

a dos en seis puntos[Eecke, 1933, p. 488, nota 2]. Dicho de otro modo, a “cuadriláteros completos”, definidos como cuatro líneas en un plano que se intersecan por pares en seis puntos distintos llamados vértices, cf.[Coxeter and Greitzer, 1967, p. 7].

Entonces, lo que dice PP es que en un cuadrilátero completo, si tres de los puntos de intersección están dados sobre uno de los lados, y otros dos puntos de intersección permanecen sobre rectas cuya posición está dada, entonces el último punto de intersección también permanecerá sobre una recta cuya posición está -implícitamente- dada (hay que encontrarla).

En PP podemos reconocer los aspectos de los porismas de los que hablé en la sección previa. PP es un teorema de lugar incompleto, en PP se enuncia que el último punto de intersección permanece sobre una recta dada en posición, entonces, de lo que se trata es de encontrarla (de encontrar el lugar geométrico del último punto).

La Fig. 14 ayudará a identificar los tipos de cosas dadas en PP y a comprender el sentido del enunciado. Las cosas en verde están D-dadas (fijas), las cosas en rojo están G-dadas (móviles), y la recta en gris está P-dada (implícitamente dada), lo mismo que el punto en gris (Nota: Los puntos azules están D-dados porque son puntos de intersección de rectas D-dadas, aunque los puntos en azul no son parte de la proposición, son esenciales en su demostración).

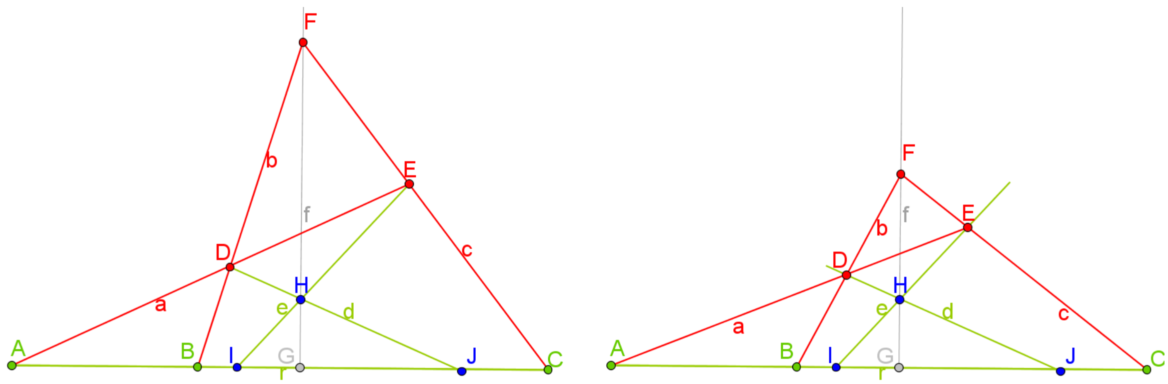


Fig. 14[43]

En la fig. 14 tenemos un cuadrilátero completo cuyos lados son r, a, b, c; sobre el lado r están D-dados los puntos A, B y C, que son tres de los seis puntos de intersección de la figura. Otros dos de los puntos de intersección están G-dados (D y E), pues deben permanecer sobre rectas cuya posición está D-dada (d y e). Entonces, tal como lo enuncia PP, el último punto de intersección F, que también está G-dado, permanecerá sobre una recta cuya posición está P-dada, la recta f.

Con fines didácticos pensemos en términos movilidad[44]. Las cosas D-dadas están fijas y las cosas G dadas son móviles, a medida que las cosas G dadas se mueven, el punto P que también está G-dado, se mueve sobre la recta f. Por ejemplo, veamos la Fig. 14 a la izquierda; si cambiamos la inclinación de las rectas a y b, girándolas en torno a los puntos fijos A y B, de modo que su punto de intersección D se desplace hacia abajo sobre la línea d; y si también cambiamos la inclinación de la recta c, girándola en torno al punto fijo C, de modo que su intersección con a permanezca sobre la línea e, es decir, si desplazamos el punto E hacia abajo sobre e; entonces, tal como lo enuncia PP, F tendrá que desplazarse hacia abajo sobre f, pues ahí estará la nueva intersección de b y c.

[43]Figuras de elaboración propia.

[44]No es correcto pensar en términos de movilidad o variabilidad, ya que no son nociones propias de la doctrina de los porismas; sin embargo, introduzco tal modo de interpretar con el único fin de facilitar la comprensión de la proposición.

En este punto cabe notar que lo que se conserva en un porisma son las relaciones de incidencia. Es decir, lo G-dado da cabida a infinidad de configuraciones, pero las relaciones de incidencia no cambian. Ahora bien, PP puede interpretarse como la versión proyectiva del teorema de Desargues; si sobreponemos dos de las muchas configuraciones posibles de las cosas G-dadas, obtenemos la representación del teorema de Desargues, tal como se muestra en la siguiente figura :

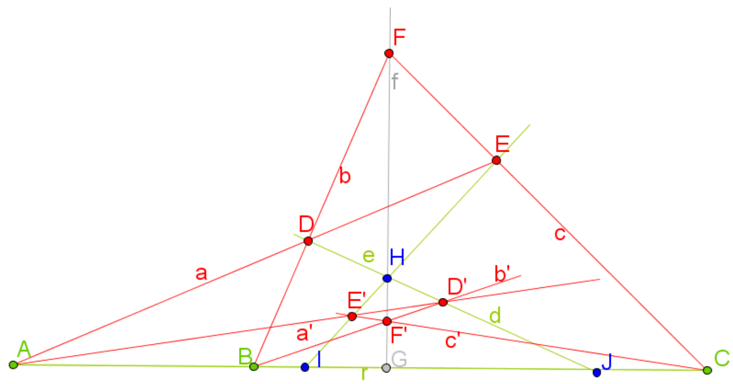


Fig. 15[45]

Los puntos G-dados D, E, F y D', E', F', son vistos como los vértices de dos triángulos cuyos lados correspondientes se intersecan en puntos que están sobre la recta r, y sus pares de vértices correspondientes determinan líneas que concurren en el punto H, lo cual es la versión proyectiva del teorema de Desargues; dicho de otro modo, tenemos dos triángulos que están en perspectiva desde un punto y desde una recta.

Por último, hay que notar que las distintas posiciones de las cosas G-dadas, dan origen a distintos cuadrángulos completos. Un cuadrángulo completo se define como cuatro puntos (vértices) en un plano, unidos en pares por seis rectas distintas que son sus lados, cf.[Coxeter and Greitzer, 1967, p. 7]. Entonces, en la Fig. 15 tenemos el cuadrángulo DHEF y el cuadrángulo D'HE'F'. En la siguiente sección, que trata sobre la demostración de PP, haré alusión a este hecho.

[45]Figura de elaboración propia.

6.2. El lema IV de Pappus en la demostración del Porisma de Pappus

La demostración de PP consiste en encontrar el lugar geométrico del punto P. Como antes dije, los lemas son fundamentales en la demostración de los porismas; particularmente, PP se demuestra con el lema IV-Proposición 130 en VII-CM. Examinemos primero qué dice el lema IV.

Lema IV-proposición 130: "Sea la figura ABCGHFED, y que el rectángulo comprendido por las rectas AG, JI sea al rectángulo comprendido por las rectas AJ, IG, como el rectángulo comprendido por las rectas AG, BC es al rectángulo comprendido por las rectas AB, CG; yo digo que la línea que pasa por los puntos F, H, G es recta"[Eecke, 1933].

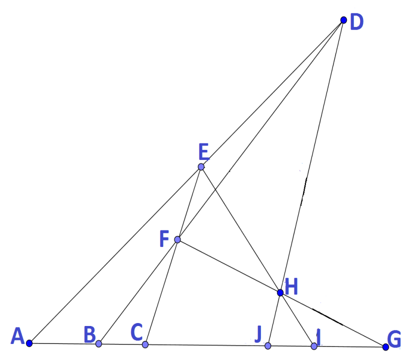


Fig. 16[46]

Es importante enfatizar algunos aspectos en relación al lema IV:

1) Este lema está asociado a la configuración de PP, es decir, también es un cuadrángulo completo (el cuadrángulo FHDE).

2) El lema puede escribirse en términos de una proporción de rectángulos; en tal caso diríamos, sea la figura ABCGHFED, y sea que $\frac{AG \cdot JI}{AJ \cdot IG} = \frac{AG \cdot BC}{AB \cdot CG}$, entonces la línea que pasa por F, H, G es recta, o son puntos colineales.

[46]Figura de elaboración propia con base en [Eecke, 1933].

3) El lema encierra la posibilidad de encontrar un punto a partir del resto; esto es, a partir de cinco puntos fijos, mediante la proporción de rectángulos establecida, puede encontrarse la posición de un sexto punto. Es decir, si los puntos A, B, C, J, I de la base de Fig. 16 están dados, mediante $\frac{AG \cdot JI}{AJ \cdot IG} = \frac{AG \cdot BC}{AB \cdot CG}$ se puede encontrar la posición del punto G (que es colineal con F y H o que está en un lado del cuadrángulo). Como luego veremos, esto constituye la posibilidad de demostrar PP.

4) Por último, la Fig. 16 corresponde a un cuadrángulo completo cuyos seis lados son cortados por una transversal en los puntos A, B, C, J, I, G (la transversal es la base de la figura). En una lectura proyectiva, decimos los puntos A, J, I, G se transforman en los puntos A, B, C, G; dado que la razón doble es un invariante proyectivo, tenemos la siguiente igualdad de razones dobles: $\frac{AG \cdot JI}{AJ \cdot IG} = \frac{AG \cdot BC}{AB \cdot CG}$, que es exactamente la proporción de rectángulos obtenida por Pappus.

Dicho todo esto, veamos cómo el lema IV permite demostrar PP.

Al igual que los puntos A, B, C, los puntos H, I, J en Fig. 15 están D-dados (pues son la intersección de rectas D-dadas). Entonces tenemos 5 puntos D-dados colineales: A, B, I, J, C. Como el lema IV está asociado a PP, mediante la proporción de rectángulos $\frac{AG \cdot BC}{AB \cdot GC} = \frac{AG \cdot JI}{AJ \cdot GI}$ establecida en el lema IV, podemos encontrar un sexto punto G, el cual es colineal con los puntos F, H, pero como el lema IV está asociado a cualquiera de los cuadrángulos de PP (al cuadrángulo DHEF, lo mismo que al cuadrángulo D'HE'F), el punto G también es colineal con F'.

Entonces, al encontrar el punto G, lo que encontramos es la recta GH, que es el lugar geométrico del punto F, con lo cual el porisma queda demostrado[47]. Hemos encontrado la posición del lugar geométrico del punto F.

Este mismo hecho permite la demostración del teorema de Desargues. Observemos los triángulos FDE y F'D'E' en Fig. 15; sus lados correspondientes se intersecan en la

[47]La demostración que esbozo está ampliamente desarrollada en [Alvarez Jiménez, 1991] y [Fernández, 2012].

recta r, lo que hay que demostrar es que sus vértices correspondientes determinan tres rectas que concurren. DD' y EE' se intersecan en H, y el lema IV asegura que F, F', G, H son colineales, es decir, que la recta FF' también pasa por H. Con lo cual el teorema queda demostrado.

Entonces, en resumen, en este apartado he hecho dos cosas:

1) Presentar una interpretación según la cual el origen del teorema de Desargues está en la doctrina de los porismas.

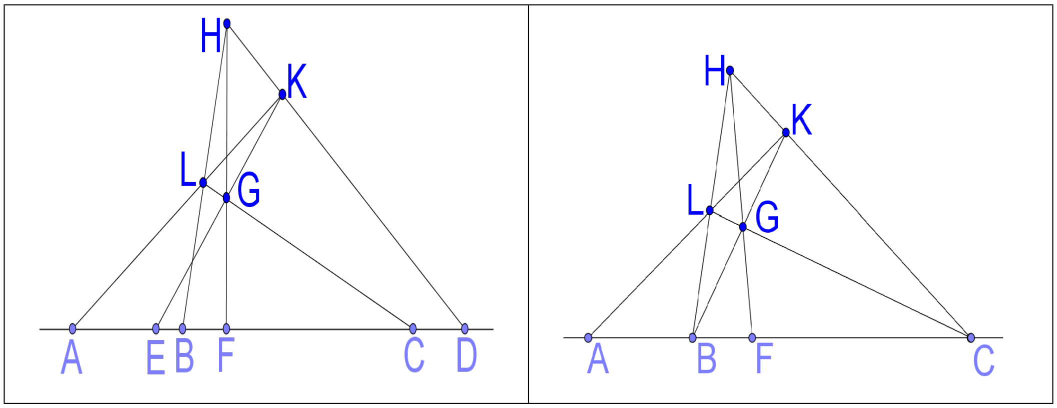
2) Enfatizar que su demostración depende de la posibilidad de encontrar un punto a partir de cinco puntos dados, mediante la proporción de rectángulos establecida en el lema IV.

6.3. El lema IV de Pappus y la conmutatividad de la suma de segmentos de Hilbert

El lema IV corresponde a una propiedad importante entre los lemas de Pappus; otros lemas como el I, II, V, VI son variantes de éste, cf.[Chasles, 1860, p. 74].

Dicho en términos modernos, el lema IV corresponde al caso general de un cuadrángulo cortado por una transversal; los otros lemas corresponden a casos en los que, por ejemplo, la transversal es paralela a uno de los lados del cuadrángulo, o la transversal pasa por los puntos diagonales del cuadrángulo (puntos en los que se intersecan los lados opuestos del cuadrángulo), etc. En cada caso, el enunciado del lema puede escribirse en términos de una proporción de segmentos o rectángulos.

Con fines de simplicidad, en Fig. 17a presento una nueva figura del lema IV. Junto a ésta, en Fig. 17b, muestro una variante (el lema V de Pappus), la cual merece mención porque es análoga a la construcción utilizada por Von Staudt para encontrar el cuarto elemento armónico (este tema fue desarrollado en la sección 4.1 de esta tesis).



a) Lema IV $\frac{AF \cdot BC}{AB \cdot FC} = \frac{AF \cdot DE}{AD \cdot EF}$	b) Lema V $\frac{AF}{AB} = \frac{FC}{BC}$
(Cuad. cortado por transveral)	(Variante utilizada por V. Staudt)

Fig. 17[48]

El caso más interesante a los fines de esta tesis lo constituye la variante del lema IV correspondiente a la siguiente Fig 18. En Fig. 18a observamos un cuadrángulo en el que un par de lados HK y LG son cortados por la recta de la base AF en el punto al infinito (∞); si se argumenta que en la geometría euclidiana no existen los puntos al infinito, podemos tomar Fig. 18b, en donde los lados HK y LG son paralelos a la recta de la base AF. Para esta variante del lema, a partir del caso general, obtenemos la siguiente proporción de segmentos: $\frac{AF}{AB} = \frac{AF}{EF}$, la cual implica la igualdad $AB = EF$[49]. Al igual que ocurría en el caso general del lema, dados tres puntos A, E, B, mediante la proporción de segmentos establecida, es posible encontrar el cuarto punto F colineal con H y con G.

[48]Figuras de elaboración propia con base en [Chasles, 1860].

[49]Este caso particular no aparece como tal en los lemas de Pappus a los porismas de Euclides; sin embargo, para obtenerlo únicamente hay que poner como requisito que dos lados del cuadrángulo son paralelos a la base de la figura (o que la cortan en el punto al infinito en una versión proyectiva). Asumido eso, a partir de la proporción de rectángulos del caso general, puede obtenerse la asociada a esta variante, para ello basta eliminar del caso general los segmentos que involucran los puntos C y D (que no existen porque las rectas que los determinaban son paralelas a la base). Si en vez de eso pensamos en la versión proyectiva, en donde dos de los lados del cuadrángulo se intersecan con la base de la figura en el punto al infinito, obtenemos la igualdad establecida si asumimos como definición que el cociente de dos segmentos que involucran el punto al infinito es 1, tal definición es común en los libros de geometría proyectiva, cf.[Eves, 1972, p. 60]. Este teorema puede establecerse también mediante semejanza de triángulos.

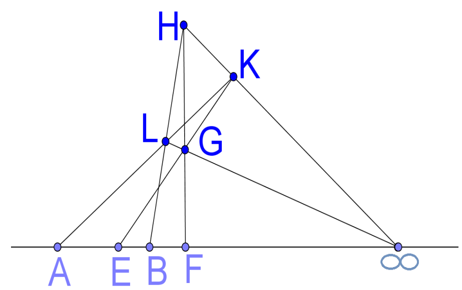
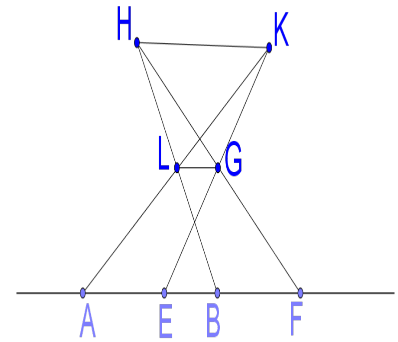
	
a) $\frac{AF}{AB} = \frac{AF}{EF}$ que es AB=EF (Conmutatividad de la suma con punto al infinito)	b) $\frac{AF}{AB} = \frac{AF}{EF}$ que es AB=EF (Conmutatividad de la suma con paralelas)

Fig. 18[50]

Ahora bien, lo interesante de este caso es que F determina un segmento AF, tal que $AF = AE + AB = AB + AE$. La demostración de esto a partir de la igualdad AB=EF es muy sencilla:

Del la base de la figura son válidas las siguientes premisas:

$$AF = AE + EB + BF \tag{6.1}$$

$$AF = AE + EF \tag{6.2}$$

$$AB = AE + EB \tag{6.3}$$

$$EF = EB + BF \tag{6.4}$$

Además sabemos que:

$$AB = EF \tag{6.5}$$

De (2) y (5) podemos concluir que:

$$AF = AE + AB \tag{6.6}$$

[50] Figuras de elaboración propia.

De (3),(4),(5) podemos concluir que:

$$AE + EB = EB + BF \tag{6.7}$$

Lo cual implica que:

$$AE = BF \tag{6.8}$$

De (1) y (8) tenemos que:

$$AF = AE + EB + AE \tag{6.9}$$

De (3) y (9) obtenemos que:

$$AF = AB + AE \tag{6.10}$$

De (6) y (10) tenemos que:

$$AF = AE + AB = AB + AE \tag{6.11}$$

Ahora bien, el hecho de que la variante del lema IV que presento en Fig. 18 constituye una definición geométrica de la suma y también la demostración de su conmutatividad, puede corroborarse al comparar la Fig. 18a con la Fig. 19 que presento a continuación; tal figura es utilizada en el libro de Oswald Veblen sobre geometría proyectiva[Veblen, 2007] para definir geométricamente la adición de puntos[51].

Al igual que en Fig. 18a, lo que tenemos en Fig. 19 es un cuadrángulo completo AXA'Y, tal que dos de sus lados XA' y AY son cortados por la base de la figura en el punto al infinito P_∞. A partir de esto, Veblen presenta un teorema según el cual un conjunto cuadrangular[52] Q ($P_\infty P_x P_0$, $P_\infty P_y P_{x+y}$) determinado por el cuadrángulo AXA'Y

[51] Definición de suma geométrica de puntos: "In any plane through l let l_∞ and l'_∞ be any two lines through P_∞, and let l_0 be any line through P_0 meeting l_∞ and l'_∞ in points A and A' respectively. Let P_x and P_y be any two points of l, and let the lines P_xA and P_yA' meet l'_∞ and l_∞ in the points X and Y respectively. The point P_{x+y}, in which the line XY meets l, is called the sum of the points P_x and P_y (in symbols $P_x+P_y=P_{x+y}$) in the scale P_0, P_1, P_∞. The operation of obtaining the sum of two points is called addition"[Veblen, 2007, p. 142]

[52] Cualesquiera tres lados de un cuadrángulo forman o bien un triángulo o coinciden en un punto, en el primer caso se dice que los puntos en los que esos lados cortan a una transversal forman un trío de líneas y en el segundo caso forman un trio de puntos. Un conjunto cuadrangular de puntos, se denota Q(ABC, DEF), en donde ABC es un trio de puntos y DEF un trio de líneas, cf. [Veblen, 2007, p. 49]

es condición suficiente y necesaria para la igualdad $P_x+P_y=P_{x+y}$. En un teorema posterior, Veblen demuestra la conmutatividad de la suma, para lo cual basta considerar que el cuadrángulo AXA'Y determina también el conjunto cuadrangular Q ($P_\infty P_y P_0$, $P_\infty P_x P_{x+y}$), lo cual, según el teorema previamente establecido, es condición suficiente y necesaria para concluir que $P_y+ P_x= P_{x+y}$. Considerando lo anterior tenemos que $P_x+P_y=P_y+P_x$, lo cual constituye la conmutatividad de la suma de puntos (para una comprensión completa consúltese [Veblen, 2007, pp. 140-144]).

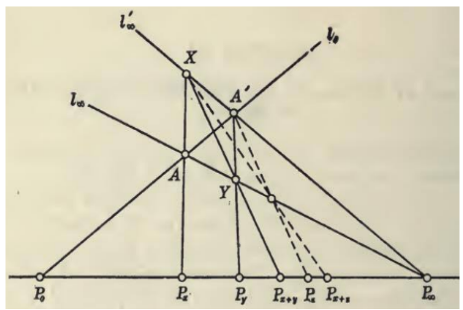


Fig. 19[53]

Lo importante es enfatizar que la definición de Veblen, nos permite corroborar que la variante del lema IV en Fig. 18a encierra la posibilidad de encontrar geométricamente la suma de dos segmentos y demostrar su conmutatividad.

¿Que tiene que ver Hilbert con todo esto?

La configuración utilizada por Hilbert para definir la suma de segmentos y demostrar su conmutatividad, la cual presento nuevamente a continuación (Fig. 20), también es análoga a la variante del lema IV de la que he estado hablando; sin embargo, dado que Hilbert no trabaja en un plano proyectivo, su construcción no involucra puntos al infinito, es decir, no es análoga a Fig.18a sino a Fig.18b. Veamos.

Obsérvese Fig. 20, la definición geométrica de la suma dada por Hilbert (cuando no tiene axiomas de congruencia), es tal que al sobreponer $a+b$ y $b+a$ en la misma figura,

[53]Imagen obtenida de [Veblen, 2007, p. 143].

obtenemos un cuadrángulo completo B"DFA" (marcado en anaranjado), tal que un par de sus lados B"D y FA" son paralelos a la base de la figura, la cual es una transversal que corta el resto de sus lado en los puntos O, A, B, C.

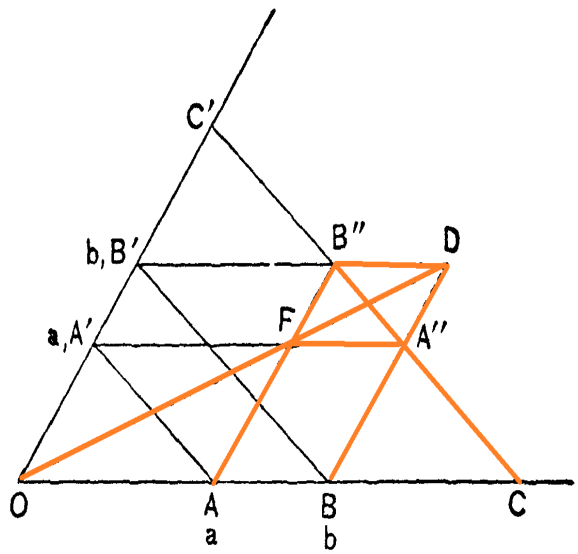


Fig. 20[54]

Hilbert procede a la inversa que en los porismas, lo explicaré en relación a Fig. 20. En la doctrina de los porismas, dados tres puntos O, A, B, mediante la proporción de segmentos $\frac{OC}{OA} = \frac{OC}{BC}$, que implica $OA = BC$, podía ser encontrado un cuarto punto C (colineal con A" y B", que es un lado del cuadrángulo), el punto C es tal que $OC = OA + OB = OB + OA$, tenemos entonces que la proporción de segmentos aludida conlleva la posibilidad de encontrar la suma de dos segmentos y demostrar su conmutatividad. En la doctrina de los porismas, encontrar el punto C es la condición de posibilidad para demostrar PP y el teorema de Desargues (esto último lo expliqué previamente en relación al caso general del lema IV y ocurre igual para esta variante).

Hilbert lo hace al revés, no usa una proporción de segmentos para encontrar el punto C colineal con A" y B", y luego demostrar el teorema de Desargues; Hilbert asume la

[54]Esta figura es una modificación de la figura que aparece en [Hilbert, 1902].

validez del teorema de Desargues, y con su ayuda demuestra que A"B" es paralela a AA', lo cual, dada su definición de suma de segmentos, significa que el punto C, (en donde A"B" corta la base de la figura), es tal que $OC = OA + OB = OB + OA$, además el teorema de Desargues le permite afirmar el carácter único del punto C[55].

Al proceder a al inversa, Hilbert obtiene un modo geométrico de definir la suma de dos segmentos y de demostrar su conmutatividad. Lo que hay que subrayar es que en ambos casos (la doctrina de los porismas y el trabajo de Hilbert) lo que subyace es: un cuadrángulo completo con dos lados paralelos a la transversal que corta el resto de sus lados, el teorema de Desargues asociado a tal configuración, y la posibilidad de encontrar la suma de dos segmentos y demostrar su conmutatividad.

Es en este sentido que sostengo que el teorema de Desargues, desde su origen, está vinculado a un tipo de cálculo con segmentos que contribuye a explicar su papel en la introducción de la suma al cálculos de segmentos desarrollado por Hilbert en *FG*.

Nota sobre la multiplicación de segmentos y el lema IV de Pappus El caso de la multiplicación de segmentos será abordado en la siguiente sección; sin embargo, resulta pertinente mostrar que otra variante del lema IV permite la definición geométrica de la multiplicación de segmentos, pero no la demostración de su conmutatividad. Tal variante corresponde al caso en que uno de los lados del cuadrángulo es paralelo a la transversal, o en versión proyectiva, se interseca con ésta en el punto al infinito.

A continuación presento la figura correspondiente a la definición[56] geométrica de la

[55] Antes expliqué que encontrar el punto C es la condición de posibilidad para demostrar el teorema de Desargues en la doctrina de los porismas. Es de interés notar que a la inversa (aunque Hilbert no lo hace explícito), en el procedimiento usado por Hilbert, tras asumir la validez del teorema de Desargues, el carácter único del punto C queda asegurado. Recordemos que para definir la igualdad de segmentos en ausencia de axiomas de congruencia, Hilbert elige un segmento unidad EE' de modo arbitrario, y luego define que si una recta AA' es paralela a tal segmento, entonces OA=OA'; sin embargo, en tanto EE' es arbitrario, podrían elegirse otros puntos E"E"', en tal caso, siguiendo el procedimiento de definición de la suma de dos segmentos, al sobreponer $a+b$ y $b+a$ en el mismo dibujo, obtendríamos otro cuadrángulo distinto al de Fig. 20, pero el teorema de Desargues asegura que para cualquier cuadrángulo la recta A"B" corta a la base de la figura en el mismo punto C.

[56] Definición de la multiplicación de puntos: "In any plane through l let l_0, l_1, l_∞ be any three lines

multiplicación de puntos en el libro de Veblen; lo que observamos es el cuadrángulo completo XBAY, tal que el lado XB se interseca con la base en el punto al infinito; en un plano no proyectivo XB sería paralelo a la base de la figura. A partir de esto Veblen establece en un teorema posterior que el conjunto cuadrangular $Q(P_0P_xP_1, P_\infty P_yP_{xy})$ determinado por el cuadrángulo XBAY es condición suficiente y necesaria para la igualdad P_x. P_y=P_{xy} (para una explicación completa consultar [Veblen, 2007, pp.144-149]).

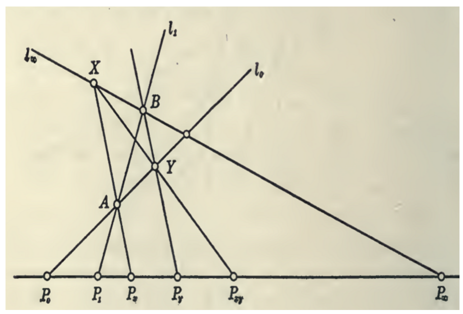


Fig. 21[57]

Lo interesante de todo esto, es notar que el lema IV conlleva también la posibilidad de definir geométricamente la multiplicación de segmentos, pero no la posibilidad de demostrar su conmutatividad.

Recapitulación: En esta sección he mostrado que bajo cierta interpretación, el origen del teorema de Desargues se encuentra en la doctrina de los porismas; asimismo, he explicado que su demostración depende del lema IV, que establece una proporción de rectángulos. Una variante del lema IV conlleva la posibilidad de encontrar la suma de dos segmentos y de demostrar su conmutatividad, y ésta guarda estrecha relación con

through P_0, P_1, P_∞ respectively, and let l_1 meet l_0 and l_∞ in points A and B respectively. Let P_x, P_y, be any two points of l, and let the line P_xA and P_yB meet l_∞ and l_0 in the points X and Y respectively. The point P_{xy} in which the line XY meets l is called the product of P_x by P_y (in simbols P_x. P_y=P_{xy}) in the scale P_0, P_1, P_∞ on l. The operation of obtaining the product of two points is called multiplication. Each of the points is called a factor of the product P_x. P_y"[Veblen, 2007, pp. 144-145].

[57]Imagen obtenida de [Veblen, 2007, p. 144].

el modo en que Hilbert definió la suma de segmentos y demostró su conmutatividad. Hemos visto también que otra variante del lema IV permite una definición geométrica de la multiplicación de segmentos, pero no la demostración de su conmutatividad.

Si bien las relaciones que aquí planteo entre el origen del teorema de Desargues en la doctrina de los porismas, y el modo en que Hilbert lo usó en la construcción de su cálculo de segmentos, podrían elucidarse aún más; en principio, lo aquí expuesto, sugiere que el teorema de Desargues encierra algo importante para la geometría, algo que tiene que ver con la posibilidad de establecer un cálculo de segmentos, en particular de introducir la suma cuando no hay axiomas de congruencia.

Dicho esto, pasemos al siguiente tema, que es el estudio del origen del teorema de Pappus en la doctrina de los porismas.

7. El lema III de Pappus y la conmutatividad de la multiplicación de segmentos de Hilbert

En esta sección identificaré el origen del teorema de Pappus en la doctrina de los porismas; veremos que su demostración depende del lema III de Pappus, y finalmente mostraré que la conmutatividad de la multiplicación de segmentos de Hilbert puede interpretarse como una transformación proyectiva que conserva el producto constante, y a la cual también subyace la propiedad expresada en el lema III.

7.1. El lema III de Pappus en la demostración del teorema de Pappus

El teorema de Pappus, a diferencia del de Desargues, aparece en VII-CM como un lema y no como un porisma, es el lema XIII-proposición 139. La demostración del lema

XIII constituye un caso distinto a la demostración de PP; sin embargo, al igual que ocurre con PP, el teorema de Pappus se demuestra con ayuda de otros dos lemas, los cuales pueden escribirse como proporciones de rectángulos.

Comenzaré por reproducir el lema XIII correspondiente al teorema de Pappus.

Lema XIII: "Si tenemos las rectas AB, ΓΔ, si dibujamos las rectas AΔ, AZ, BΓ, BZ y si uno dibuja las rectas de enlace EΔ, EΓ, la línea que pasa por los puntos H, M, K es recta"[Eecke, 1933, pp. 685-686][58].

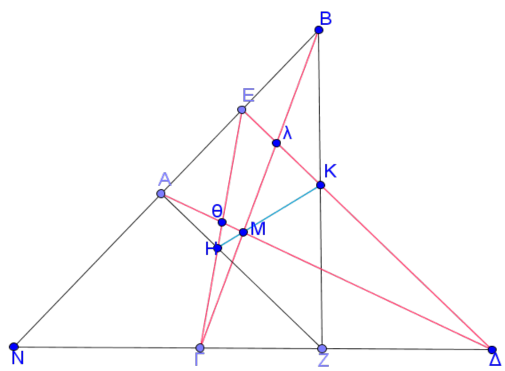


Fig. 22[59]

La demostración del lema XIII requiere del lema III, y de su inverso que es el lema X. Veamos estos dos lemas.

Lema III:"Tracemos transversalmente, sobre tres rectas AB, ΓA, ΔA, las rectas ΘE, ΘΔ; yo digo que el rectángulo comprendido por las rectas ΘB, ΔΓ es al rectángulo comprendido por las rectas ΘΔ, BΓ, como el rectángulo comprendido por las rectas ΘE, HZ es al rectángulo comprendido por la rectas ΘH, ZE"[Eecke, 1933, p. 672].

[58]Dado que Pappus enuncia el lema XIII como una continuación del XII (en donde trata el caso en que hay rectas paralelas), he tenido que adaptar la redacción conservando el sentido del enunciado. Los lemas XII y XIII pueden consultarse en [Eecke, 1933, pp. 685-687].

[59]Figura de elaboración propia con base en [Eecke, 1933].

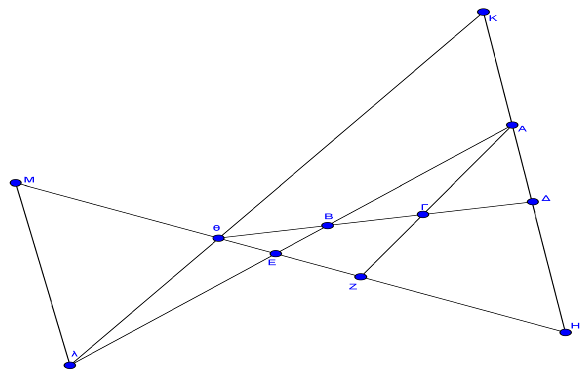


Fig. 23[60]

Lema X (inverso del lema III): "Tracemos de un punto Θ, sobre las dos rectas BA, ΔA, las dos rectas ΔΘ, ΘE, y que el rectángulo comprendido por las rectas ΘH, ZE sea al rectángulo comprendido por las rectas ΘE, ZH, como el rectángulo comprendido por las rectas ΔΘ, BΓ es al rectángulo comprendido por las rectas ΔΓ, BΘ; yo digo que la línea que pasa por los puntos Γ, A, Z es recta"[Eecke, 1933, pp. 682-683].

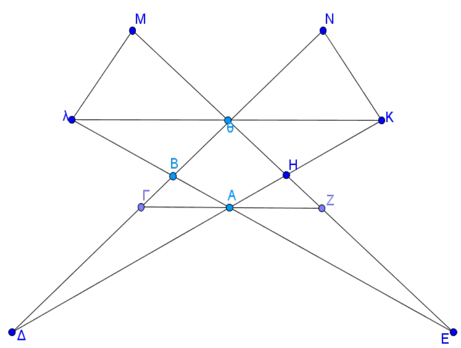


Fig. 24[61]

Hay que notar que al igual que ocurre con el lema IV, estudiado en la sección previa, los lemas III y X pueden escribirse en términos de proporciones de rectángulos. Veamos.

[60]Figura de elaboración propia con base en [Eecke, 1933].
[61]Figura de elaboración propia con base en [Eecke, 1933].

Lema III: Si se satisfacen las condiciones que requiere el lema (dos rectas concurrentes que cortan a tres rectas concurrentes), entonces $\frac{\Theta B \cdot \Delta\Gamma}{\Theta\Delta \cdot B\Gamma} = \frac{\Theta E \cdot HZ}{\Theta H \cdot ZE}$.

Lema X: Si se satisfacen las condiciones que impone el lemas (un par de rectas concurrentes cortadas por otro par de rectas concurrentes) y además ocurre que $\frac{\Theta H \cdot ZE}{\Theta E \cdot ZH} = \frac{\Delta\Theta \cdot B\Gamma}{\Delta\Gamma \cdot B\Theta}$, entonces Γ, A, Z son colineales.

Demostración del lema XIII-Teorema de Pappus

En este momento tenemos todos los recursos necesarios para la demostración del lema XIII correspondiente al teorema de Pappus.

En la Fig. 22 correspondiente al teorema de Pappus, las dos rectas concurrentes ΓE, ΓΔ cortan a las tres rectas concurrentes AN, AZ, AΔ, entonces por el lema III, tenemos la siguiente proporción de rectángulos:

$$\frac{\Gamma N \cdot Z\Delta}{N\Delta \cdot \Gamma Z} = \frac{\Gamma E \cdot H\Theta}{\Gamma H \cdot \Theta E} \tag{1}$$

del mismo modo, el par de rectas concurrentes ΔE, ΔN cortan a las tres rectas concurrentes BN, BΓ, BZ, entonces por el lema III, tenemos la siguiente proporción de rectángulos:

$$\frac{\Delta K \cdot E\lambda}{\Delta E \cdot K\lambda} = \frac{N\Gamma \cdot Z\Delta}{N\Delta \cdot Z\Gamma} \tag{2}$$

de las igualdades en (1) y (2) tenemos las siguiente proporción de rectángulos:

$$\frac{\Delta K \cdot E\lambda}{\Delta E \cdot K\lambda} = \frac{\Gamma E \cdot H\Theta}{\Gamma H \cdot \Theta E} \tag{3}$$

ahora, observemos las líneas en rojo y azul en la Fig. 22, en virtud del lema X, concluimos que la línea que pasa por los puntos H, M, K es recta, que es lo que se quería demostrar.

Hay que enfatizar que mientras en los primeros dos pasos de la demostración, la configuración (dos rectas concurrentes cortadas por tres rectas concurrentes) permite concluir una proporción de rectángulos, en el último paso ocurre lo inverso; es la proporción de rectángulos lo que asegura la colinealidad de los puntos H, M, K (por eso en el último paso se usa el lema inverso al III, que es el lema X).

En resumen, en esta parte:

1) Identifiqué el origen del teorema de Pappus en los lemas de Pappus.

2) Vimos que su demostración depende esencialmente de la propiedad establecida en el lema III (y su inverso el X).

7.2. El lema III de Pappus y la conmutatividad de la multiplicación de segmentos de Hilbert

El lema III (al igual que el lema IV) corresponde a una propiedad notoria entre los lemas de Pappus; los lemas X, XI, XIV, XVI y XIX son variantes del mismo, cf.[Chasles, 1860, p. 75]. Con fines de simplicidad, en lo que sigue haré referencia a la siguiente figura del lema III.

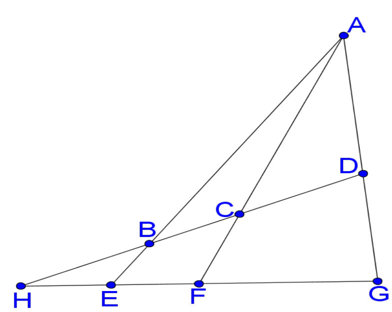


Fig. 25[62]

El lema III corresponde a una propiedad proyectiva moderna conocida como invarianza de la razón doble bajo proyección (en el caso particular en que tres rectas

[62]Figura de elaboración propia con base en [Chasles, 1860].

concurrente son cortados por dos transversales concurrentes). Bajo una lectura proyectiva los puntos H, B, C, D en Fig. 25 son proyectado desde A a los puntos H, E, F, G, entonces, la propiedad de invarianza establece que las razones dobles de las cuartetas de puntos son iguales, así que tenemos $\frac{\mathrm{HE \cdot FG}}{\mathrm{EF \cdot HG}} = \frac{\mathrm{HB \cdot CD}}{\mathrm{BC \cdot HD}}$, que es igual a la proporción de rectángulos establecida por Pappus en el lema III.

Como antes vimos, la conmutatividad de la multiplicación de Hilbert es equivalente al teorema de Pappus (solo que en versión afín), como tal, es de esperarse que la propiedad expresada por el lema III de Pappus (que subyace a la demostración del teorema de Pappus en los porismas) tenga un papel importante en relación a la misma, y así ocurre; la conmutatividad de la multiplicación puede verse como una transformación proyectiva que mantiene el producto constante, y a la que subyace el principio de invarianza de la razón doble expresado en el lema III. Explicaré a continuación.

Obsérvese la Fig. 26 (izquierda), esta corresponde a la construcción con la que Hilbert demuestra la conmutatividad de la multiplicación; si tenemos la propiedad conmutativa a∙b=b∙a, podemos pensar en la figura como una transformación proyectiva de los puntos **a, 1, b, x** en I, a los puntos **b**, **ab**, **a**, **y** en II (he marcado con líneas en rojo esta correspondencia), la cual mantiene el producto constante: a∙b=1∙ab=b∙a=x∙y.

A la derecha de la Fig. 26 ilustro cómo ocurre tal transformación, lo cual permite ver la relevancia de la propiedad establecida en el lema III. Veamos.

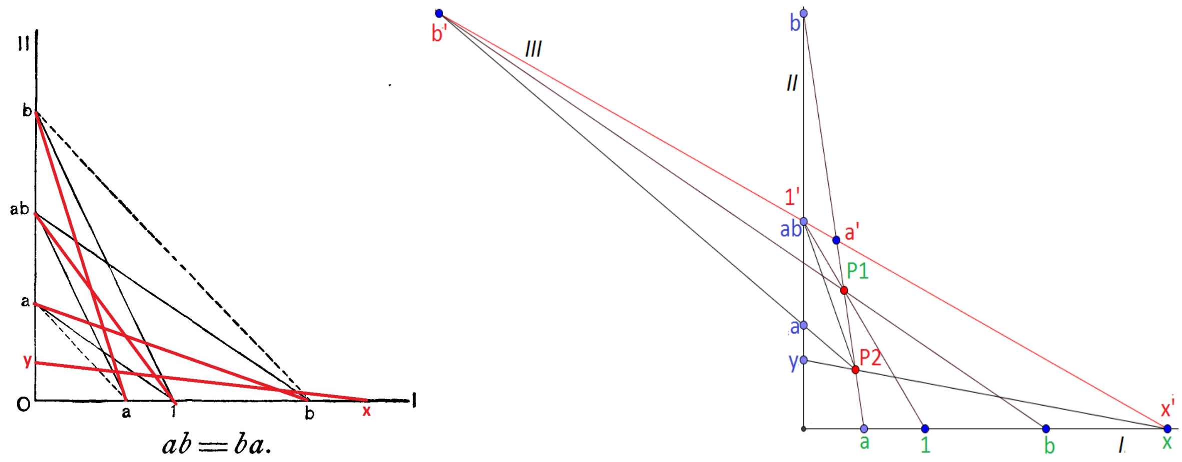


Fig. 26[63]

1) Tomamos primero las rectas I y III concurrentes en x=x', que son cortadas por tres rectas concurrentes en P1; los puntos **a**, **1**, **b**, **x** en I, son transformados proyectivamente en los puntos **a'**, **1'**, **b'**, **x'** en III, como la razón doble es un invariante proyectivo o por el lema III de Pappus, tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{\text{(1-a)(x-b)}}{\text{(b-1)(x-a)}} = \frac{\text{(a'-1')(x'-b')}}{\text{(1'-b')(x'-a')}} \tag{4}$$

2) Tomemos ahora las rectas III y II concurrentes **ab**=**1'**, que son cortadas por tres rectas concurrentes en P2; los puntos **a'**, **1'**, **b'**, **x'** en III, son transformados proyectivamente en los puntos **b**, **ab**, **a**, **y** en II, de lo cual tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{\text{(a'-1')(x'-b')}}{\text{(1'-b')(x'-a')}} = \frac{\text{(b-ab)(a-y)}}{\text{(ab-a)(b-y)}} \tag{5}$$

3) De (4) y (5) obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{\text{(1-a)(x-b)}}{\text{(b-1)(x-a)}} = \frac{\text{(b-ab)(a-y)}}{\text{(ab-a)(b-y)}} \tag{6}$$

[63] A la izquierda figura modificad de [Hilbert, 1902], a la derecha figura de elaboración propia.

La ecuación (6), asegura que los puntos **a**, **1**, **b**, **x** en I, se transforman proyectivamente en los puntos **b**, **ab**, **a**, **y** en II, y ésta ecuación nos permite corroborar que el producto se mantiene constante a.b=1.ab=b.a=x.y[64].

Entonces, en conclusión, en la doctrina de los porismas, la demostración del lema de Pappus depende de la proporción de rectángulos establecida en el lema III; por su lado, Hilbert asume la validez del teorema de Pappus y a partir de éste demuestra geométricamente la conmutatividad de la multiplicación, pero ésta puede verse como una transformación proyectiva que conserva el producto constante, y a la que también subyace la propiedad establecida en el lema III.

Con esto concluyo la segunda parte de la tesis.

****

El recorrido que he hecho en esta segunda parte de la tesis, ha tenido por objeto mostrar que los teoremas de Pappus y Desargues se originaron en la doctrina de los porismas (bajo cierta interpretación), pero además, que desde entonces están vinculados a la posibilidad encontrar la suma y multiplicación de segmentos, y demostrar su conmutatividad; es en tal sentido que el estudio de los teoremas en la doctrina de los porismas, ayuda a comprender su papel en el cálculo de segmentos de Hilbert.

Las relaciones que aquí he presentado, podrían elucidarse aún más, pero en principio no son triviales y fortalecen la idea, ampliamente tratada en la primera parte de la tesis, de que estos teoremas están ligados a la posibilidad de desarrollar un cálculo de

[64] Si partimos de la hipótesis de que el producto es constante, y por lo tanto ab=xy, entonces la igualdad se satisface:

$$\frac{(1\text{-a})(\text{x-b})}{(\text{b-}1)(\text{x-a})}=\frac{(\text{b-ab})(\text{a-y})}{(\text{ab-a})(\text{b-y})}$$
$$\frac{\text{x-b-ax+ab}}{\text{bx-ab-x+a}}=\frac{\text{ab-by-aab+aby}}{\text{abb-aby-ab+ay}}$$
$$\frac{\text{x-b-ax+xy}}{\text{bx-xy-x+a}}=\frac{\text{xy-by-axy+xyy}}{\text{xyb-xyy-xy+ay}}$$
$$\frac{\text{x-b-ax+xy}}{\text{bx-xy-x+a}}=\frac{\text{y(x-b-ax+xy)}}{\text{y(bx-xy-x+a)}}$$
$$\frac{\text{x-b-ax+xy}}{\text{bx-xy-x+a}}=\frac{\text{x-b-ax+xy}}{\text{bx-xy-x+a}}$$

segmentos al interior de la geometría, y como tal, no resulta extraño que hayan devenido fundamentales en relación al modo en que Hilbert reconstruyó la geometría.

Conclusión.

En esta tesis he tratado distintos temas, el elemento común han sido los teoremas de Pappus y Desargues.

En la primera parte he presentado un panorama amplio del trabajo de Hilbert en la fundamentación de la geometría; uno en el cual el conjunto de axiomas y el "sistema formal" son esencialmente el recurso metodológico a través del cual Hilbert estudió los teoremas de Pappus y Desargues en relación a problemas fundacionales concretos, particularmente la introducción de números a la geometría sin recurso a una teoría numérica externa. Esto se tradujo en la construcción de cálculos de segmentos basados en los teoremas de Pappus y Desargues, los cuales tienen implicaciones importantes para la geometría, a mencionar:

1) la introducción geométrica de la multiplicación de segmentos, que puede verse como el paso de la geometría de la congruencia a la geometría de la semejanza sin el uso de teorías externas; también representa el desarrollo de la teoría de proporciones euclidiana sin el axioma de Arquímedes.

2) la posibilidad de reconstruir buena parte de la geometría euclidiana elemental sin principios de congruencia, sobre la base de los teoremas de Pappus y Desargues; esto apoya la idea de que es posible comprender el fundamento de la geometría a partir de estos dos teoremas, acotado a un modo particular de reconstruirla.

3) en todo esto, vimos que el teorema de Pappus es equivalente a la multiplicación

de segmentos, y el teorema de Desargues puede sustituir a los axiomas espaciales de incidencia, y también a los axiomas de congruencia.

Al final de la primera parte, como idea adicional, he señalado que el papel de estos teoremas era notorio ya en algunas discusiones previas en torno a la fundación de la geometría proyectiva, las cuales están estrechamente relacionadas con los resultados de Hilbert; en concreto, vimos que el teorema de Desargues fue el elemento clave en la definición geométrica del invariante proyectivo fundamental de Von Staud; también he señalado que el teorema de Desargues es un caso ejemplar de la distinción entre geometría plana y sólida, y que el teorema de Pappus dio salida a una larga discusión sobre cómo demostrar el T.F.G.P sin principios de continuidad.

En la segunda parte de esta tesis, he tratadp la doctrina de los porismas, en donde, bajo cierta interpretación, está el origen de los teoremas de Pappus y Desargues; he mostrado que desde su origen estaban vinculados a un tipo de cálculo con segmentos, aunque claro está, en sentido más restringido que el "cálculo de segmentos" de Hilbert; pese a ello, hemos visto que la relación no es trivial.

El Porisma de Pappus (PP) puede interpretarse como la versión proyectiva del teorema de Desargues. Su demostración requiere del lema IV de Pappus que establece una proporción de rectángulos, tal proporción constituye la posibilidad de encontrar un punto que es la condición para demostrar PP. Una variante del lema IV permite encontrar el punto que determina la suma de dos segmentos y demostrar su conmutatividad, y tal variante guarda estrecha relación con la demostración de la conmutatividad de la suma de segmentos de Hilbert.

En cuanto al teorema de Pappus, éste corresponde al lema XIII de Pappus, y su demostración depende de otro lema, el III, que puede escribirse como una proporción de rectángulos. La conmutatividad de la multiplicación de segmentos de Hilbert puede verse como una transformación proyectiva que conserva el producto constante, y a la que también subyace la propiedad establecida en el lema III de Pappus.

Los dos párrafos previos sintetizan el modo en que se han enlazado las partes I y II de esta tesis. Si bien es preciso decir que la naturaleza de tal relación podría elucidarse aún más, lo aquí tratado deja ver que estos dos teoremas están ligados a la posibilidad de establecer un cálculo con segmentos, lo cual, como hemos visto a lo largo de la tesis, conlleva para la geometría posibilidades importantes.

Como he señalado al principio, en el modo de reconstrucción de la geometría que le interesaba a Hilbert, los teoremas de Pappus y Desargues devienen fundamentales, pero su carácter fundamental puede comprenderse desde una perspectiva más amplia, en este caso lo hemos hecho desde su origen en la doctrina de los porismas.

Bibliografía

[Acerbi, 2011] Acerbi, F. (2011). The language of the "Givens": its forms and it use as a deductive tool in Greek mathematics. *Arch. Hist. Exact. Sci.*, (65):119–153.

[Alvarez Jiménez, 1991] Alvarez Jiménez, C. (1991). El continuo lineal. Intuición geométrica o construcción aritmética. *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 23(69):83–99.

[Alvarez Jiménez, 2012] Alvarez Jiménez, C. (2012). El Papel de un Porisma Euclidiano en la Comprensión de las Propiedades Proyectivas: Algunas Ideas Acerca de la Génesis de Nueva Práctica Matemática. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, 1.

[Arana and Mancosu, 2012] Arana, A. and Mancosu, P. (2012). On the relationship between plane and solid geometry. *Kansas State University and University of California-Berkeley.*

[Bennett, 2011] Bennett, M. (2011). *Affine and Projective Geometry.* Wiley.

[Blanchette, 2014] Blanchette, P. (2014). The Frege-Hilbert Controversy. *Stanford Enciclopedy of Philosophy.*

[Bogomolny, 2016] Bogomolny, A. (2016). Desargues' Theorem. *Cut-the-knot.org.*

[Chasles, 1860] Chasles, M. (1860). *Les trois livres de porismes d'Euclide: retablis pour la premiere fois, d'apres la notice et les lemmes de Pappus, et conformement au sentiment de R. Simson sur la forme des enonces de ces propositions.* Mallet-Bachelier.

[Coolidge, 1934] Coolidge, J. (1934). The Rise and Fall of Projective Geometry. *The American Mathematical Monthly*, 41(4):217–228.

[Corry, 2001] Corry, L. (2001). Hilbert y su Filosofía Empiricista de la Geometría. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, IX(1):27–43.

[Corry, 2006] Corry, L. (2006). The Origin of Hilber's Axiomatic Method. *Springer.*

[Coxeter, 1993] Coxeter, H. (1993). *The Real Projective Plane.* Springer-Verlag.

[Coxeter and Greitzer, 1967] Coxeter, H. and Greitzer, S. (1967). *Geometry Revisited.* Number v. 19 in Anneli Lax New Mathematical Library. Mathematical Association of America.

[Dedeking, 1872] Dedeking, R. (1872). Continuidad y Números Irracionales.

[Eecke, 1933] Eecke, P. V. (1933). *Pappus d'Alexandrie: la collection mathèmatique.* Desclée de Brouwer et. C.

[Euclides, 1991] Euclides (1991). *Elementos: Libros I-IV.* Number v. 1 in Biblioteca clásica Gredos. Gredos.

[Euclides, 1994] Euclides (1994). *Elementos: Libros V-IX.* Number v. 2 in Biblioteca clásica Gredos. Gredos.

[Eves, 1972] Eves, H. (1972). *A Survey of Geometry.* Allyn and Bacon, Inc.

[Fernández, 2012] Fernández, Diego, e. A. (2012). Sobre un porisma de Euclides y su dualización. *Miscelánea Matemática*, 54:81–98.

[Fine, 1917] Fine, Henry, B. (1917). Ratio, Proportion and Measurement in the Elements of Euclid. *Annals of Mathematics*, 19(1).

[Gardies, 1984] Gardies, J.-L. (1984). Eudoxe et Dedekind. *Revue d'histoire des sciences*, 37(2):111–125.

[Giovannini, 2013] Giovannini, E. N. (2013). Completitud y continuidad en Fundamentos de la Geometría de Hilbert: acerca del Vollständigkeitsaxiom. *Theoria*, (76):139–163.

[Giovannini, 2015] Giovannini, E. N. (2015). Aritmetizando la geometría desde dentro: el cálculo de segmentos de David Hilbert. *Scientiae Studia*, 13(1):11–48.

[Gray, 2011] Gray, J. (2011). *Worlds Out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London.

[Hallett and Majer, 2004] Hallett, M. and Majer, U. (2004). *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891–1902*. David Hilbert's Foundational lectures. Springer Berlin Heidelberg.

[Hartshorne, 1967] Hartshorne, R. (1967). *Foundations of projective geometry*. Harvard University. Lecture notes. W. A. Benjamin.

[Heath, 1981] Heath, T. L. (1981). *A History of Greek Mathematics: From Aristarchus to Diophantus*. A History of Greek Mathematics. Dover Publications.

[Hendricks et al., 2000] Hendricks, V., Pedersen, S., and Jörgensen, K. (2000). *Proof Theory: History and Philosophical Significance*. Synthese Library. Springer Netherlands.

[Hilbert, 1902] Hilbert, D. (1902). *The Foundations of Geometry.* Open court publishing Company.

[Hogendijk, 1987] Hogendijk, J. P. (1987). On Euclid's Lost Porisms and Its Arabic Traces. *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 7.

[Jones, 1986] Jones, A. (1986). *Pappus of Alexandría, Book 7 of the Collection.* Number v. 1 in Sources in the history of mathematics and physical sciences. Springer-Verlag.

[Pambuccian, 2013] Pambuccian, V. (2013). Critical Studies/Book review: David Hilbert lectures on the foundations of geometry. *Philosophia Mathematica (III)*, 21(2).

[Poncelet, 1866] Poncelet, J. V. (1866). *Traité des proprietés projectives des figures.* Traité des propriétés projectives des figures: ouvrage utile à qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain. Gauthier-Villars.

[Rosenfeld et al., 1988] Rosenfeld, B., Shenitzer, A., and Grant, H. (1988). *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space.* Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer New York.

[Stillwell, 2004] Stillwell, J. (2004). *Mathematics and its History.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York.

[Stillwell, 2005] Stillwell, J. (2005). *The Four Pillars of Geometry.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York.

[Toepell, 1985] Toepell, M. (1985). On the Origins of David Hilbert's Grundlagen der Geometrie. *Communicated by C. J. SCRIBA.*

[Torres, 2012] Torres, C. (2012). ¿Qué significa comprender el teorema de Desargues? *Miscelánea Matemática*, 54:3–23.

[Tweddle, 2013] Tweddle, I. (2013). *Simson on Porisms: An Annotated Translation of Robert Simson's Posthumous Treatise on Porisms and Other Items on this Subject.* Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer London.

[Van Der Waerden, 2012] Van Der Waerden, B. (2012). *Science Awakening I.* Springer Netherlands.

[Veblen, 2007] Veblen, O. (2007). *Projective Geometry.* Projective Geometry. Read Books.

[Vincent, 1859] Vincent, A. J. H. (1859). Considérations sur les Porismes en général et sur ceux d'Euclide en particulier. Examen et réfutation de l'interprétation donnée par M. Breton (de Champ) aux textes de Pappus et de Proclus relatifs. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4.

[Voelke, 2008] Voelke, J.-D. (2008). Le théorème fondamental de la géométrie projective: évolution de sa preuve entre 1847 et 1900. *Arch. Hist. Exact Sci.*, pages pp. 243–296.

[Wiener, 1891] Wiener, H. (1891). Acerca de los fundamentos y la construcción de la geometría. In Torres Alcaraz, C., editor, *Reunión anual de matemáticos alemanes 1891, 21-25 de septiembre.*

[Zach, 2006] Zach, R. (2006). Hilbert's Program Then and Now. *Handbook of the Philosophy of Science*, 5:411–447.