



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**Modelo estándar electrodébil en espacio de espín extendido en
7+1 dimensiones, jerarquía y formalización**

T E S I S

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**PRESENTA:
RICARDO ROMERO OCHOA**

**Director de Tesis:
Dr. Jaime Besposvany Fridzon
Instituto de Física**

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. Diciembre 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

Se desarrolla una extensión del modelo estándar basada en dimensiones extras en el espacio de espín (espacio de espín extendido). Se muestra la equivalencia entre la formulación Lagrangiana tradicional y la del modelo de espín extendido, y en particular, para los elementos fermión-escalar, fermión-vector y escalar-vector. En $7+1$ dimensiones se permite la descripción de las quiralidades derechas e izquierda de los fermiones y, específicamente, se reproduce el sector de quarks del modelo estándar, obteniéndose cuatro generaciones a lo más, dos dobletes de Higgs y efectos de jerarquía de masas de los fermiones, a nivel horizontal (entre generaciones) y vertical (entre elementos de dobletes de quarks).

Abstract

A standard model extension is developed based on extra dimensions in spin space (extended spin space). The equivalence between the standard Lagrangian formulation and the one in the extended spin model is shown and, in particular, for fermion-scalar, fermion-vector, and scalar-vector elements. In $7+1$ dimensions, it is shown that both left- and right-handed chiral fermions are allowed and, specifically, that the standard model electroweak quark sector is reproduced, obtaining at most four quark generations, two Higgs doublets, and fermion mass hierarchy effects, both horizontal (between generations) and vertical (between quark-doublet elements).

Índice general

Índice de figuras	7
Índice de tablas	9
1 Introducción	11
2 Modelo estándar electrodébil	19
2.1 Grupo de norma	19
2.2 Sector de quarks	22
3 Espacio de espín extendido	27
3.1 Motivación	27
3.2 Definición del espacio vectorial	29
3.3 Descripción en términos del álgebra de Clifford	32
3.4 Operadores y transformaciones de simetría	34
4 Campos y simetrías en el espacio matricial	39
4.1 Construcción de los campos	41
4.2 Transformaciones de simetría	42
4.3 Ejemplos de transformación en $5 + 1$ dimensiones	43
5 Conexión Lagrangiana	45
5.1 Fermiones	45
5.2 Bosón escalar	48
5.3 Bosón vectorial	48
5.4 Lagrangiano electrodébil fermión - \mathbf{W}	49
6 Modelo electrodébil de quarks en $7 + 1$ dimensiones	53
6.1 Generadores y operadores	53

6.2	Operadores de sabor	57
6.3	Quarks sin masa	58
6.4	Sector de Higgs	61
6.5	Jerarquía de masas para una generación	65
6.6	Extensión a cuatro generaciones	67
6.7	Efectos de jerarquías de masas	68
7	Conclusiones	71
	Apéndices	73
A	Teorema de Coleman - Mandula	74
B	Álgebra de Lie de los campos	76
C	Representación de las matrices gamma	78
	Referencias	80

Índice de figuras

3.1. Ideas de unificación y simetría que conectan elementos físicos.	28
3.2. Representación esquemática de los generadores de simetrías en el espacio matricial de espín extendido.	34
3.3. Representación esquemática de los estados en el espacio de espín extendido.	35
6.1. Representación esquemática de la base de Cartan en el espacio matricial de espín extendido de $7 + 1$ dimensiones.	55
6.2. Representación esquemática de operadores, grados de libertad de quarks sin masa y Higgses en el espacio matricial de espín extendido de $7 + 1$ dimensiones.	60

Índice de tablas

2.1. Números cuánticos electrodébiles de los quarks.	22
4.1. Estados de fermiones sin masa y bosones en la extensión de $5 + 1$ dimensiones. 40	
6.1. Dobletes de isospín débil de quarks izquierdos sin masa.	61
6.2. Quarks derechos sin masa.	62
6.3. Dobletes de escalares tipo Higgs	63
6.4. Dobletes de escalares tipo Higgs conjugados	63
6.5. Quarks masivos eigenestados de H_ν	66
6.6. Operadores de masa Hamiltonianos.	68
6.7. Estados de quarks masivos	69

1 Introducción

En la física moderna, el cuerpo teórico que describe de manera correcta a las partículas fundamentales (quarks y leptones hasta donde sabemos) y sus interacciones se conoce como modelo estándar. El modelo abarca tres de las cuatro fuerzas conocidas: la fuerza electromagnética, la interacción débil y la interacción fuerte. Esta última es responsable de las interacciones entre los quarks y gluones que constituyen a los hadrones, mientras que la segunda actúa en procesos de decaimiento en los cuales las partículas finales son leptones y hadrones estables, siendo el decaimiento beta un proceso característico. Las interacciones son mediadas por el intercambio de partículas vectoriales: fotones en el electromagnetismo, bosones W^\pm y Z^0 en la interacción débil y gluones en la fuerte. Para la gravedad se postuló el gravitón, aunque la interacción gravitacional no se incluye propiamente dentro de la teoría. Dentro del modelo estándar las interacciones electromagnética y débil son tratadas de manera unificada, mediante la teoría electro-débil de Glashow-Weinberg-Salam[35, 60], la cual explica la simetría abeliana $U(1)$ del electromagnetismo como una consecuencia del rompimiento de la simetría no-abeliana de isospín e hipercarga débiles $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Esta simetría permanece exacta hasta un límite inferior de energía que es del orden de 100 GeV, pero se rompe para energías por debajo de ese valor.

La parte restante del modelo describe a la interacción fuerte mediante la cromodinámica cuántica (QCD), que es una teoría de campo con simetría de norma no-abeliana $SU(3)_C$ de color. Los gluones encargados de mediar las interacciones, así como los quarks, tienen carga de color, por lo que existen acoplamientos de este tipo entre ellos. La constante de acoplamiento de QCD varía asintóticamente con la energía, siendo pequeña (del orden de 0.2 y comparada con la unidad que corresponde a un acoplamiento fuerte) para energías de alrededor de 10 GeV. En esta región, quarks y gluones se comportan como partículas libres, y la pequeñez de la constante de acoplamiento permite un tratamiento perturbativo de la teoría. En cambio, para energías del orden de 1 GeV, donde los quarks se encuentran confinados dentro de los hadrones, el valor de la constante de acoplamiento es aproximadamente la unidad y los cálculos perturbativos dejan de tener sentido.

La descripción de las interacciones fundamentales y predicción de las partículas asociadas correspondientes, constituyen uno de los grandes éxitos del modelo estándar. Para el electromagnetismo, la invariancia de norma implica que debe existir el fotón e interactuar tal como lo hace, lo que lleva al entendimiento de la naturaleza de la luz. Razonamientos similares conducen a predecir la existencia de los gluones y de los bosones W^\pm y Z^0 , así como sus propiedades. Por ejemplo, para estos últimos el modelo predice que sus masas deberían ser de aproximadamente 80 GeV para los W^\pm y de 90 GeV para el Z^0 , propiedades que fueron confirmadas experimentalmente. El modelo predice también la existencia del bosón de Higgs, y el descubrimiento reciente de una partícula tipo Higgs en el LHC valida aún más el modelo[2, 19].

A pesar de sus grandes logros, el modelo estándar tiene limitaciones, pues existen fenómenos que no puede explicar o, en ciertos casos, ni siquiera admitir, algunos de los cuales se mencionan a continuación:

- El modelo no puede explicar el origen del rompimiento de la simetría por el campo de Higgs para que las partículas adquieran masa.
- No abarca la gravedad, pues ésta no tiene la misma estructura que las otras fuerzas (no es renormalizable).
- Los valores de las masas de quarks y leptones no pueden explicarse con el modelo estándar.
- Aunque las describe, el modelo no explica el número de generaciones, ni sus jerarquías.
- El modelo no proporciona el valor de las constantes de acoplamiento.

Gran parte de la investigación en partículas elementales, durante los últimos cincuenta años, se ha dedicado a la búsqueda de soluciones para las cuestiones pendientes del modelo estándar, mediante la propuesta de modelos y teorías que lo complementan o extienden. Como ejemplos representativos de estas extensiones al modelo, y en las que se centra la mayoría de la investigación actual, se encuentran la supersimetría (SUSY)[49, 42, 51], las teorías de gran unificación (GUT)[15] y la teoría de cuerdas[55, 44], cada una con distinto grado de aplicabilidad. Así, las teorías de gran unificación suponen la existencia de un grupo que contiene a los grupos de norma del modelo estándar, produciendo información adicional respecto a las constantes de acoplamiento y las representaciones de las partículas.

Una de las primeras propuestas de unificación es la idea de Kaluza-Klein, que propone dimensiones espaciales extras (una en la formulación original) asociadas con simetrías de norma. Las teorías de gran unificación[34] ejemplifican estructuras matemáticas dentro de la física de partículas que abarcan simetrías de norma. En concreto, imponen restricciones sobre el grupo de norma del modelo estándar $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, limitando las representaciones y los valores de las constantes de acoplamiento[33]. Sin embargo, las GUTs no incluyen a la gravedad e introducen nuevos parámetros para bosones de Higgs, bosones de norma y sus interacciones dentro de la teoría. Tampoco aportan información sobre el número de generaciones.

La teoría de cuerdas, por otro lado, permite relacionar la teoría cuántica de campos con la relatividad general. Sin embargo, dada su gran complejidad y a pesar del esfuerzo invertido, no ha sido posible aún obtener un esquema único de compactificación que reproduzca el modelo estándar a bajas energías, e incluso algunas vertientes de la teoría se han separado cada vez más de las suposiciones y motivaciones físicas originales, con lo que el interés de la investigación se ha vuelto puramente matemático. Las teorías supersimétricas relacionan bosones y fermiones transformando a las partículas fundamentales en otras llamadas *supercompañeras*, que difieren de las partículas originales por media unidad de espín. La implementación de SUSY contiene una conexión fundamental entre simetrías internas y simetrías del espacio-tiempo, por lo que, en la versión local, provee un marco natural para una descripción unificada de la gravedad con el resto de las interacciones. Si SUSY fuera una simetría exacta, una partícula y su supercompañera deberían tener la misma masa y, puesto que no se han observado supercompañeros para las partículas del modelo estándar, SUSY debe ser una simetría rota, siendo el por qué y el cómo de dicho rompimiento los problemas principales por resolver de la teoría. También, los resultados negativos en la búsqueda de partículas supersimétricas en el LHC[24, 1, 3] restringen aún más los modelos propuestos de SUSY.

Dos elementos que se usan frecuentemente en la construcción de extensiones al modelo estándar, y que son susceptibles de ser comprobados experimentalmente en el LHC en los siguientes años, son extensiones al sector de Higgs, como en los modelos de dos dobletes de Higgs (2HDM)[17], y la inclusión de simetrías de sabor[52, 29, 54, 4]. Estas últimas pueden ser globales o de norma, y el grupo de sabor puede ser discreto o un grupo de Lie continuo. Una característica común de estos modelos es que la estructura adicional de Higgses y/o las simetrías de sabor se proponen inicialmente, en lugar de derivarse del

modelo. Para mencionar dos ejemplos recientes, en la Ref. [28] se considera una extensión 2HDM en el contexto del modelo de axiones invisibles DFSZ (Dine-Fischler-Srednicki-Zhitnitsky)[26, 61], mientras que en [25] se emplean 2HD y singuletes escalares adicionales, en conjunto con una simetría horizontal de norma $U(1)$, para explicar las desviaciones al modelo estándar encontradas en los decaimientos de mesones B por el LHCb.

En cuanto a la descripción real de las partículas elementales, nos centramos en sus grados de libertad. Las partículas e interacciones obedecen simetrías globales y locales, que les añaden números cuánticos discretos no triviales, además de los de Lorentz. Si bien el grado de libertad asociado al espacio es común a todas las partículas elementales, los grados de libertad discretos asociados a las representaciones fundamentales son más elementales, en el sentido de que pueden ser usados para construir los otros. El espín es una manifestación física de la representación fundamental del grupo de Lorentz, y en relación con el espacio desempeña este papel elemental, pues el espacio utiliza la representación vectorial, que se puede construir en términos del espín.

El hecho que los fermiones conocidos participan en la representación fundamental de los grupos de Lorentz y de norma, mientras que los bosones, las partículas que transportan las interacciones, participan en la representación adjunta de los grupos de Lorentz y de norma, sugiere una construcción compuesta[9]. Tales similitudes y la presencia de simetrías sugieren un esquema unificado, a saber, un espacio elemental para los grados de libertad discretos: de Lorentz y escalares. De hecho, existen requisitos de coherencia análogos en la mecánica cuántica para la descripción y cuantificación de las partículas e interacciones, como son las restricciones a las representaciones requeridas por unitariedad.

De manera similar a la idea de Kaluza-Klein, suponemos un espacio común para los grados de libertad de espín y escalares. Si bien es tentador mezclarlos, el teorema de Coleman-Mandula[23](Apéndice A) prohíbe una mezcla directa. Obedecer esta restricción significa que los generadores escalares resultantes deben conmutar con los de Lorentz; equivalentemente, uno exige que estos dos conjuntos aparezcan como un producto directo. Sin embargo, como se verá, se permite una simple clasificación de los espacios, y esto conduce a limitaciones en el tipo de elementos que se pueden obtener, que es lo que en última instancia proporcionará información, por ejemplo, sobre las representaciones e interacciones. En lugar de añadir más dimensiones espaciales, como en Kaluza-Klein, proponemos en su lugar agrandar las dimensiones del espacio vectorial abstracto en que viven los objetos de es-

pín $1/2$, al que asignamos el nombre de espacio de espín, pero manteniendo la simetría de Lorentz en el espacio de $3 + 1$ dimensiones estándar. Como consecuencia, las dimensiones extras son relevantes únicamente en el espacio de espín, mientras que en el espacio-tiempo (el espacio de configuración) carecen de dinámica y permanecen inertes, por lo que no es necesario compactificarlas. Una de las motivaciones para elegir los grados de libertad de espín $1/2$ como base es que las representaciones tensoriales del grupo de Poincaré pueden obtenerse a partir de la representación espinorial, pero no al revés, y en este sentido la representación espinorial es la más básica. En otra interpretación, uno procede verificando espacios discretos adicionales, descritos a partir de un álgebra de Clifford e independientemente de la descripción en el espacio de configuración, que permita la inclusión de los estados y operadores relevantes[12]. En este sentido, un espacio discreto de $7 + 1$ dimensiones es el mínimo que permite una descripción de quarks de distinto sabor y los operadores que los clasifican, pues se han estudiado espacios de menores dimensiones, encontrándose que no son lo suficientemente grandes para ese propósito[7, 8, 11, 12].

El espacio de espín extendido[7, 8, 10, 11, 12], como hemos llamado a nuestra propuesta, se construye en términos de ket-bra que incluyen espinores, lo que resulta en un espacio vectorial matricial dotado de una métrica, y que puede ser descrito en términos de un álgebra de Clifford. Manteniendo la simetría de Lorentz en 4-d, como se mencionó, trae como resultado la inclusión de operadores adicionales en el mismo espacio, los cuales se asocian a simetrías de norma y de sabor. Puesto que los generadores de estas simetrías conmutan con los del grupo de Lorentz, se satisface el teorema de Coleman-Mandula. Esto hace posible que los operadores de simetría, tanto de norma como de Lorentz, sean elementos del mismo espacio matricial, junto con los campos físicos que clasifican.

Otras investigaciones enfatizan de manera similar el grado de libertad de espín en las extensiones del modelo estándar[56, 21], para tratar de entender sus cuestiones aún sin resolver. Estas extensiones utilizan, por lo general, un espinor algebraico representado por una matriz, y la característica común de este tipo de construcción de modelos es el uso de la estructura del espacio de álgebra de Clifford asociado. En cuatro dimensiones, una matriz de 4×4 se conecta al álgebra de Clifford de $3 + 1$ dimensiones \mathcal{C}_4 . Cada columna de la matriz es un ideal izquierdo del álgebra. Esto permite que los operadores actúen también por la derecha, y tales transformaciones se asocian generalmente a grupos de norma. Para tener en cuenta los multipletes de partículas y grupos de norma del modelo estándar, se hace uso de dimensiones extras en el espacio-tiempo. Elecciones distintas sobre la naturaleza de los

ideales izquierdos, las dimensiones del espacio-tiempo y las transformaciones de simetría, conducen a modelos diferentes con distintos grados de aplicabilidad y consecuencias fenomenológicas. En las Refs. [16, 18] se proponen modelos basados en objetos de Clifford en $13 + 1$ dimensiones, que pretenden explicar el origen de las familias de quarks y leptones. En la Ref. [58] se emplea un espinor algebraico de \mathcal{C}_7 para representar una familia de quarks y leptones, con las transformaciones de Poincaré y de norma restringidas a actuar desde la izquierda y derecha, respectivamente.

Otros modelos del mismo tipo incluyen a la gravedad y son geométricos por naturaleza. En ellos, la relación fundamental del álgebra de Clifford, que usualmente se toma como un álgebra real, se da en términos de una base vectorial abstracta $\{e_\mu\}$ como

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

sin mayor referencia a las matrices gamma. Para citar algunos ejemplos recientes (de ninguna manera una lista exhaustiva), en las Refs. [40] y [46] se proponen modelos que incluyen los grupos de norma del modelo estándar y la gravedad. El primer modelo está basado en \mathcal{C}_6 , y el segundo en \mathcal{C}_{3+1} , el cual supone un espinor columna dentro de una matriz algebraica. La Ref. [48] también propone un modelo que incluye campos de norma y de gravedad, motivado por cuerdas y modelos de branas, y está situado en un espacio de Clifford de 16 dimensiones.

En la presente tesis se presenta el modelo estándar electrodébil en el espacio de espín extendido en $7 + 1$ dimensiones [13, 14]. Se muestra una comparación formal entre los campos y Lagrangianos, en el espacio extendido, y la formulación convencional del modelo estándar, lo que permite una interpretación directa del modelo en términos de una teoría de campos. Como se mencionó, se escoge esta dimensión por ser la mínima donde se puede tener quarks izquierdos y derechos con los números cuánticos del modelo estándar. Se obtienen generaciones de quarks sin masa y con ella, a lo más dos dobletes de Higgs, y una simetría horizontal (entre familias y misma carga) de sabor. También se proporciona una jerarquía de masas vertical (entre estados de distinta carga) después del rompimiento de la simetría. Estos resultados constituyen una base hacia el objetivo último de explicar el número de generaciones de quarks y sus jerarquías de masa.

La organización es la siguiente: En el capítulo 2 se presenta un breve resumen del sector electrodébil de quarks del modelo estándar. En los capítulos 3 y 4 se presenta la construcción del espacio de espín extendido, mostrando su descripción en términos del álgebra de Clifford y las construcciones generales de operadores y transformaciones de simetría, así como de los campos sobre los que actúan. En el capítulo 5 se construyen, secuencialmente, términos de norma e invariantes de Lorentz a partir de campos que se encuentran dentro de las representaciones y simetrías que se derivan del espacio de espín extendido, lo que se traduce en una teoría Lagrangiana invariante de Poincaré. En particular, se muestra la equivalencia de una teoría de campo invariante de norma, escrita en el espacio extendido, y la formulación estándar, con características propias para cada tipo de vértice. En el capítulo 6 se presenta el modelo electrodébil de quarks en $7 + 1$ dimensiones en el espacio de espín extendido. Se muestra la construcción de operadores y estados, obteniéndose cuatro familias de quarks y dos dobletes de Higgs, así como efectos de jerarquías horizontal y vertical. Se muestra primero un efecto de jerarquía para una sola generación, extendiéndose posteriormente a cuatro generaciones. Finalmente se establecen las conclusiones.

2 Modelo estándar electrodébil

En este capítulo presentamos un breve resumen de los sectores de leptones y quarks del modelo estándar, sin ahondar en detalles teóricos ni mencionar el desarrollo histórico. Para un tratamiento completo véanse las Refs. [20, 39, 50], mientras que los resultados experimentales pueden consultarse en [47].

2.1. Grupo de norma

En procesos débiles tales como $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ y $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ solamente participan leptones izquierdos y antileptones derechos. Las amplitudes de dichos procesos se pueden escribir en términos de corrientes cargadas

$$J_\mu^+(x) = \frac{1}{2} \bar{\nu}_e(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e(x), \quad (2.1)$$

$$J_\mu^-(x) = \frac{1}{2} \bar{e}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e(x), \quad (2.2)$$

donde $e(x)$ y $\nu(x)$ son los campos del electrón y su neutrino, respectivamente, y la barra denota el adjunto de Dirac $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$. Lo anterior sugiere que los campos izquierdos se pueden acomodar en un doblete asociado a un grupo SU(2). Definiendo el doblete de leptones (el subíndice L es para enfatizar el hecho de que involucran a fermiones izquierdos)

$$L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad (2.3)$$

y los operadores de escalera de isospín débil

$$\tau^+ = \frac{\tau^1 + i\tau^2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\tau^- = \frac{\tau^1 - i\tau^2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

con τ^i , $i = 1, 2, 3$, las matrices de Pauli, las corrientes cargadas en las ecuaciones (2.1) y (2.2) se pueden reescribir como

$$J_\mu^+ = \bar{L}\gamma_\mu\tau^+L, \quad (2.6)$$

$$J_\mu^- = \bar{L}\gamma_\mu\tau^-L, \quad (2.7)$$

lo que sugiere que las corrientes débiles forman un grupo $SU(2)_L$ si se introduce la corriente neutra

$$\begin{aligned} J_\mu^3 &= \bar{L}\gamma_\mu\frac{\tau^3}{2}L \\ &= \frac{1}{2}\bar{\nu}_e\gamma_\mu\nu_e - \frac{1}{2}\bar{e}_L\gamma_\mu e_L, \end{aligned} \quad (2.8)$$

de manera que las tres corrientes J_μ^\pm , J_μ^3 formen un triplete de isospín débil $SU(2)_L$ en la representación adjunta

$$J_\mu^i(x) = \bar{L}\gamma_\mu T^i L = \bar{L}\gamma_\mu\frac{\tau^i}{2}L, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.9)$$

donde las cargas definidas por

$$T^i = \int J_0^i(x)d^3x, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.10)$$

satisfacen el álgebra del grupo $SU(2)_L$

$$[T^i, T^j] = i\varepsilon^{ijk}T^k. \quad (2.11)$$

La parte derecha del electrón $e_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)e$ (el neutrino se asume sin masa y por lo tanto sin parte derecha) no aparece en las corrientes, por lo que es un singulete bajo una

transformación de $SU(2)_L$. Las corrientes J_μ^\pm, J_μ^3 se acoplan a los bosones W_μ^\pm y A_μ^3 , respectivamente, y en principio podría pensarse en asociar la corriente neutra J_μ^3 con la corriente electromagnética J_μ^{em} . Sin embargo, dado que $\text{tr}\tau^3 = 0$, de la ecuación (2.8) se deduce que la suma de las cargas del neutrino y del electrón es cero, lo que es incorrecto, además de que J_μ^3 no conserva paridad y no contiene a e_R , como sí sucede con la corriente electromagnética. En consecuencia no es posible asociar la corriente neutra con la electromagnética. No obstante, la ecuación (2.8) sí proporciona la diferencia correcta de las cargas eléctricas del neutrino y del electrón: $\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1 = 0 - (-1)$, lo que implica que J_μ^{em} debería contener una parte generada por una matriz de 2×2 con traza distinta de cero. Estos argumentos sugieren que el grupo de norma debe agrandarse para contener una nueva simetría $U(1)$, con otro campo de norma B_μ asociado a ella. Esta nueva simetría es independiente de $SU(2)_L$, por lo que su generador debe conmutar con los generadores T^i en la ecuación (2.10). Para obtenerla partimos de la corriente electromagnética

$$J_\mu^{em}(x) = q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad (2.12)$$

donde q es la carga del fermión ψ . Para el electrón $q = -1$ y el operador de carga Q está dado por

$$Q = \int J_0^{em}(x)d^3x = - \int \left(e_L^\dagger e_L + e_R^\dagger e_R \right) d^3x. \quad (2.13)$$

Las cargas T^i en la ecuación (2.10) no conmutan con Q , pero tomando la combinación lineal

$$Q - T^3 = \int d^3x \left(-\frac{1}{2}\nu_{eL}^\dagger\nu_{eL} - \frac{1}{2}e_L^\dagger e_L - e_R^\dagger e_R \right), \quad (2.14)$$

entonces sí se cumple que $[Q - T^3, T^i] = 0$, $i = 1, 2, 3$, y la nueva simetría, denotada por $U(1)_Y$ y conocida como hipercarga, se escoge como $Y = 2(Q - T^3)$. El factor de 2 es convencional y se escoge para cumplir la relación de Gell-Mann - Nishijima[32, 45]

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}. \quad (2.15)$$

	Q	(T, T^3)	Y
U_{Li}	$\frac{2}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{3}$
D_{Li}	$-\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{1}{3}$
U_{Ri}	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
D_{Ri}	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$

Tabla 2.1: Números cuánticos electrodébiles de los quarks. Los subíndices L y R corresponden a quiralidad izquierda y derecha respectivamente, y el índice $i = 1, 2, 3$ etiqueta la generación: $U_1 = u$, $U_2 = c$, $U_3 = t$, $D_1 = d$, $D_2 = s$ y $D_3 = b$.

conocida con anterioridad a la formulación de la teoría de norma electrodébil para describir la clasificación de hadrones.

Resumiendo, el grupo de norma del modelo estándar electrodébil es $SU(2)_L \times U(1)_Y$. El grupo $SU(2)_L$ corresponde al isospín débil y $U(1)_Y$ a la hipercarga. Los generadores de isospín son $T^i = \frac{\tau^i}{2}$, $i = 1, 2, 3$, con τ^i las matrices de Pauli, y en términos de las corrientes están dados por la ecuación (2.24). El generador de $U(1)_Y$ se escoge de forma que se cumpla la relación en la ecuación (2.15), con Q la carga eléctrica. Los quarks y leptones se arreglan en dobletes izquierdos y singuletes derechos de $SU(2)_L$. En la siguiente sección nos enfocaremos en el sector de quarks.

2.2. Sector de quarks

Los quarks se arreglan en los multipletes del grupo de norma mostrados en la tabla 2.1. Para escribir el Lagrangiano en forma compacta empleamos la notación

$$Q_{Li} = \begin{pmatrix} U_{Li} \\ D_{Li} \end{pmatrix}, \quad U_{Ri}, \quad D_{Ri} . \quad (2.16)$$

El Lagrangiano del sector de quarks del modelo estándar electrodébil es entonces

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{quarks} + \mathcal{L}_{norma} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa} + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_{ghosts},$$

donde \mathcal{L}_{quarks} es el término de quarks libres más la interacción con el grupo de norma, \mathcal{L}_{norma} contiene la parte correspondiente a los generadores del grupo de norma, \mathcal{L}_{Higgs} es el Lagrangiano del campo escalar de Higgs que rompe la simetría, \mathcal{L}_{Yukawa} es el término de interacción de los quarks con el campo de Higgs y \mathcal{L}_{FP} y \mathcal{L}_{ghosts} contiene a los términos que fijan la norma (Fadeev - Popov) y a los términos que eliminan a los campos *fantasma* que aparecen en la teoría como resultado de fijar la norma. Estos dos últimos Lagrangianos no son relevantes para el presente trabajo y no serán considerados. Explícitamente

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{quarks} &= i \sum_{i=1}^3 \bar{Q}_{Li} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{A}_\mu - \frac{i}{6} g' B_\mu \right) Q_{Li} \\
&+ i \sum_{i=1}^3 \bar{U}_{Ri} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i \frac{2}{3} g' B_\mu \right) U_{Ri} \\
&+ i \sum_{i=1}^3 \bar{D}_{Ri} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{i}{3} g' B_\mu \right) D_{Ri},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

donde \mathbf{A}^μ y B^μ son los campos de norma de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ respectivamente, con constantes de acoplamiento g y g' . El término cinético de los campos de norma es

$$\mathcal{L}_{norma} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \tag{2.18}$$

con los tensores de intensidad de campo $F_{\mu\nu}^i$ ($i = 1, 2, 3$) y $B_{\mu\nu}$ de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ dados por

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \varepsilon_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \\
B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

con ε_{ijk} el tensor de Levi - Civita en tres dimensiones. El campo escalar de Higgs está formado por un campo con carga positiva y uno neutro, ambos complejos y con $Y = 1$, arreglados en el doblete de $SU(2)_L$

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

El Lagrangiano del campo de Higgs es entonces

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi), \quad (2.21)$$

con

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{A}_\mu - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \phi. \quad (2.22)$$

Finalmente el término de interacción de los quarks con el campo de Higgs es

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = - \sum_{i,j} \left(\Gamma_{i,j}^{(D)} \bar{Q}_{Li} \phi D_{Rj} + \Gamma_{i,j}^{(U)} \bar{Q}_{Li} \tilde{\phi} U_{Rj} + h.c. \right) \quad (2.23)$$

donde $\Gamma_{i,j}^{(D)}$ y $\Gamma_{i,j}^{(U)}$ son acoplamientos de Yukawa que en general son parámetros complejos arbitrarios, y *h.c.* corresponde a términos Hermitianos conjugados. El campo de Higgs conjugado $\tilde{\phi}$, con hipercarga -1 , se obtiene a partir de ϕ como

$$\tilde{\phi} = i\tau^2 \phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

La inclusión de $\tilde{\phi}$ en (2.23) no altera la invariancia de norma ya que para $SU(2)$, y únicamente para este caso, la representación conjugada es la única que puede obtenerse a partir de la fundamental mediante una transformación de similitud.

Después del rompimiento espontáneo de la simetría por el campo de Higgs, el Lagrangiano de Yukawa (en la norma unitaria) es

$$\mathcal{L}_m = - \sum_{i,j} \bar{D}_{Li} \mathcal{M}_{ij}^{(D)} D_{Rj} - \sum_{i,j} \bar{U}_{Li} \mathcal{M}_{ij}^{(U)} U_{Rj} + h.c., \quad (2.25)$$

donde \mathcal{M}_{ij} son en general matrices complejas, dadas a su vez por

$$\mathcal{M}_{ij}^{(D)} = \Gamma_{ij}^{(D)} \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{M}_{ij}^{(U)} = \Gamma_{ij}^{(U)} \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (2.26)$$

con v el valor de expectación para el vacío del campo escalar que rompe la simetría. Aplicando una transformación biunitaria a cada término de (2.25) se pueden diagonalizar por separado las matrices de masa $\mathcal{M}^{(U)}$ y $\mathcal{M}^{(D)}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_D^\dagger \mathcal{M}^{(D)} \mathcal{V}_D &= M^{(D)}, \\ \mathcal{U}_U^\dagger \mathcal{M}^{(U)} \mathcal{V}_U &= M^{(U)},\end{aligned}\tag{2.27}$$

con $\mathcal{U}_{D,U}$ y $\mathcal{V}_{D,U}$ matrices unitarias, y $M^{(D,U)}$ matrices diagonales. Empleando estas transformaciones, se pueden escribir los eigenestados de masa (denotados por una prima) en términos de los eigenestados de la interacción débil (sin prima), como

$$\begin{aligned}D'_L &= \mathcal{U}_D^\dagger D_L, \\ D'_R &= \mathcal{V}_D^\dagger D_R,\end{aligned}\tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}U'_L &= \mathcal{U}_U^\dagger U_L, \\ U'_R &= \mathcal{V}_U^\dagger U_R,\end{aligned}\tag{2.29}$$

donde se ha empleado la notación matricial

$$D_L = \begin{pmatrix} D_{L1} \\ D_{L2} \\ D_{L3} \end{pmatrix}, \quad D'_L = \begin{pmatrix} D'_{L1} \\ D'_{L2} \\ D'_{L3} \end{pmatrix}.\tag{2.30}$$

La matriz de mezcla V , que es unitaria, se construye de la forma

$$V = \mathcal{U}_U^\dagger \mathcal{U}_D,\tag{2.31}$$

y sus valores experimentales actuales pueden consultarse en la Ref. [47]. Después de este breve recuento del modelo estándar electrodébil pasamos a la descripción del modelo de espacio de espín extendido.

3 Espacio de espín extendido

3.1. Motivación

La fenomenología de partículas no sólo incentiva la búsqueda de un espacio común para su descripción, sino que también sugiere cómo construirlo. De hecho, al igual que el grado de libertad de espín puede ser utilizado para construir la representación vectorial de los grados de libertad que son escalares de Lorentz, tomando pares de componentes, también la representación adjunta se puede construir en términos de la representación fundamental. Las partículas de espín $1/2$ del modelo estándar, quarks y leptones, pertenecen a la representación fundamental de los grupos de norma o son singuletes de los mismos, mientras que los vectores del modelo estándar pertenecen a la representación adjunta, tanto para los grupos de norma como para el grupo de Lorentz.

Tomar pares de componentes es un mecanismo válido para describir la representación vectorial o adjunta, y estos pares están conectados a los grados de libertad elementales. Estas conexiones sugieren examinar dichos grados de libertad elementales, y sus posibles combinaciones. De hecho, en modelos compuestos, que generalmente requieren abordar dinámicas adicionales, se tiene un camino para entender estas características. A diferencia de estos modelos, en el presente trabajo utilizamos números cuánticos de partículas asintóticamente libres, por lo que se espera que la dinámica sea la misma del modelo estándar. La conexión del espacio físico, considerado como un fenómeno emergente, con los grados de libertad discretos no es obvia y su origen no será considerado.

Teóricamente, consideramos los objetos más elementales dentro de la mecánica cuántica. El objeto más simple, el vector de estado de un grado de libertad, contiene una fase global. Como por lo general es inobservable, dicha fase es irrelevante. Para generalizar estos espacios hay que recordar que existen dos mecanismos para la creación de más estados a partir de estados individuales: la suma directa o "vertical", y el producto directo u "horizontal". La

elección de la primera es necesaria para crear un estado de dos grados de libertad, pues la segunda únicamente conduce a un objeto cuyo grado de libertad es una fase.

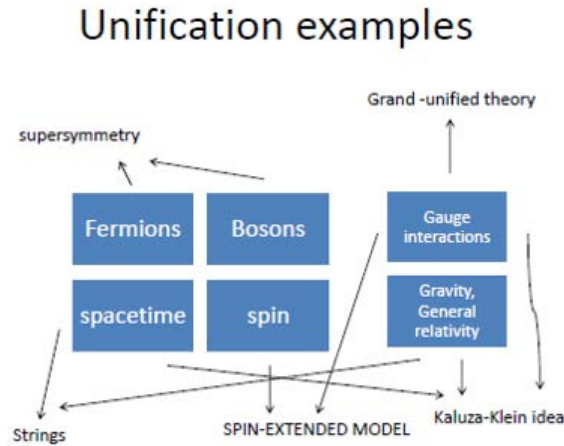


Figura 3.1: Ideas de unificación y simetría que conectan elementos físicos[12]: espín y espacio; bosones y fermiones y su interacción: interacción de norma (en la teoría cuántica de campos) y gravedad (en relatividad general). Por ejemplo, en la esquina superior izquierda supersimetría extiende el espacio de partículas original y asocia un compañero bosónico a los fermiones, y viceversa. En la esquina inferior derecha la idea de Kaluza-Klein asocia interacciones de norma a dimensiones adicionales dentro de la relatividad general. El modelo de espín extendido conecta grados de libertad escalares y de espín, dentro de un único espacio de Hilbert matricial.

El bloque de construcción más simple que le sigue es un objeto de dos grados de libertad o qubit. En su versión más general, dicho objeto transforma bajo el grupo de transformaciones lineales generales $Gl(2)$, con restricciones unitarias requeridas por la mecánica cuántica. Estas restricciones están presentes cuando el objeto forma una representación del grupo de Lorentz (en cuyo caso se llama espinor), o de los grupos de Lorentz escalares. En la figura 3.1 se muestra esquemáticamente el concepto de espacio de espín extendido en el contexto de ejemplos de de unificación.

3.2. Definición del espacio vectorial

Nuestro objetivo es construir el espacio más general con grados de libertad discretos, que describa términos de Lorentz y escalares. El supuesto subyacente es que tanto los escalares unitarios de Lorentz como los espinores provienen del mismo origen. Como una suma directa está asociada con el incremento de la dimensión de un determinado grado de libertad, y el producto directo con el aumento del número de grados de libertad, elegimos este último como procedimiento general para construir el espacio, incluso si es posible obtener un mapeo lineal de los espacios resultantes, después de su aplicación. En el caso de los estados de dos grados de libertad, la suma directa no sirve para la construcción de algunos estados compuestos: por ejemplo, no se puede construir un estado de vector de Lorentz a partir de objetos de espín $1/2$ de esta manera. Para ello es necesario emplear el producto directo. Más aún, un estado de suma directa puede obtenerse a partir de un estado de producto directo, pero no al revés, de modo que un producto directo es la operación más general. Por lo tanto preferimos emplear el producto directo, que también se asocia con composición.

Así pues, para generar estados a partir de los más elementales, estudiamos los que resultan de considerar objetos de dos grados de libertad. Para el grupo de Lorentz hay cuatro clases de espinores, dependiendo de cómo transforman bajo el grupo: si el espinor ξ^{a_i} transforma con el elemento M del grupo de Lorentz¹, el espinor dual ξ^{a_i} transforma con M^{-1} , el espinor conjugado $\xi^{\dot{a}_i}$ transforma con la representación conjugada M^* , y el espinor conjugado dual $\xi_{\dot{a}_i}$ transforma con la matriz conjugada dual M^{*-1} . En otra notación, las representaciones de espín se clasifican por el número cuántico de quiralidad, que describe los diferentes estados complejos. La ecuación de Dirac define la suma directa de espinores que forman los estados

¹o del grupo $SL(2)$, pues ambos grupos son equivalentes localmente.

masivos. El estado escalar de dos grados de libertad se clasifica en dos clases: un objeto y su complejo conjugado, que en la física de partículas se asocian esencialmente a grados de libertad de partícula y antipartícula, respectivamente.

El siguiente paso para extender el espacio vectorial consiste en aplicar el producto directo entre objetos de dos grados de libertad. Un producto directo de espinores forma el espacio de matrices de dos dimensiones, que puede ser parametrizado por la matriz unidad ($i = 0$) y las matrices de Pauli σ_i ($i = 1, 2, 3$)[59]. Objetos de dos espinores describen escalares, vectores y tensores antisimétricos (del grupo de Lorentz). En otra aplicación elemental, el producto directo combina los dos tipos de espinores masivos, y conduce al espacio de matrices de 4×4 , cuyos componentes se pueden clasificar de acuerdo con el álgebra de Clifford, y forman las matrices de Dirac.

Para generalizar a los espacios de mayor dimensión, continuamos empleando el grupo de Lorentz como paradigma. La construcción espinorial más general que contiene l espinores ξ^{a_i} , k espinores $\xi^{\dot{a}_i}$, n espinores ξ_{a_i} , y m espinores $\xi_{\dot{a}_i}$, tiene la forma

$$\xi^{a_1} \dots \xi^{a_l} \xi^{\dot{a}_1} \dots \xi^{\dot{a}_k} \xi_{a_1} \dots \xi_{a_l} \xi_{\dot{a}_n} \dots \xi_{\dot{a}_m}. \quad (3.1)$$

La construcción de dos espinores sugiere un procedimiento físicamente relevante para proyectar el espacio en (3.1), y extenderlo usando un algoritmo simple para obtener los estados de producto directo más generales, incluyendo escalares. Generalizar la ecuación (3.1) para contener objetos de dos grados de libertad generales implica usar representaciones escalares de dos estados y sus conjugados. Para espinores individuales éstos forman una matriz de 2×2 , y los objetos resultantes consisten de combinaciones de espinores escalares, lineales y hasta bilineales. Repitiendo el procedimiento, los nuevos elementos del álgebra se generan a partir de la anterior con

$$\Gamma_{n+2} = \Gamma_n \otimes \sigma_i \quad i = 0, \dots, 3. \quad (3.2)$$

En realidad, la construcción anterior proyecta el tensor general en la ecuación (3.1) sobre un espacio de Hilbert matricial, que contiene elementos complejos y duales, asociados físicamente a la inversión temporal y transformaciones de anti-partícula. En la notación

comunmente usada en la mecánica cuántica², el espacio dual se asocia a los bras, y los estados restantes a kets. Se pueden formar productos distintos entre un conjunto de bras $\{\langle b|\}$ y un conjunto de kets $\{|a\rangle\}$. Entre ellos, el producto escalar $\langle b|a\rangle$ conduce a un conjunto de números, mientras que el producto directo $|a\rangle\langle b|$ representa sus posibles combinaciones, y mantiene la información. Los objetos que resultan de esto último viven en un espacio dual, no-dual combinado. De esta forma se genera un álgebra, constituida por el conjunto de matrices u operadores Γ

$$\Gamma = \sum c_{ab}|a\rangle\langle b|, \quad (3.3)$$

donde c_{ab} es un número c . El producto escalar entre los elementos Γ_a, Γ_b se define como

$$\text{Tr}(\Gamma_a^\dagger \Gamma_b). \quad (3.4)$$

Suponiendo Γ unitaria en la ecuación (3.3) obtenemos la condición sobre los valores de c_{ab}

$$\Gamma^\dagger \Gamma = \sum c_{ba}^* c_{bc} = \delta_{ac}. \quad (3.5)$$

Los fermiones son representados de esta forma en el espacio matricial a través de una combinación esquemática de grados de libertad espinoriales y escalares, con el elemento espinorial $|a\rangle$ representando los grados de libertad de Lorentz, y el elemento escalar $\langle b|$ que contiene a grados de libertad de sabor, los cuales se pueden resumir formalmente como

$$|a\rangle\langle b|. \quad (3.6)$$

La idea de una doble descripción dentro de un modelo matricial que incluye fermiones es apoyada por la presencia de un grado de libertad escalar, que siempre acompaña a los estados físicos espinoriales en el modelo estándar.

Otra forma de interpretar los espacios generados en la ecuación (3.2) es que se genera un álgebra de Clifford de N dimensiones. Como se verá en las siguientes secciones, los índices de la matriz de la subálgebra de cuatro dimensiones se pueden utilizar para describir

²El uso de kets y bras para describir elementos de un espacio vectorial, y sus correspondiente dual, no es, por supuesto, privativo de la mecánica cuántica, aunque es en este contexto donde su uso es más común.

combinaciones escalares, lineales y hasta bilineales de espinores, lo que implica que una subálgebra de Clifford de cuatro dimensiones se reserva para este esquema; esto también significa que se incluyen espinores, vectores y campos escalares.

3.3. Descripción en términos del álgebra de Clifford

Consideremos un álgebra de Clifford \mathcal{C}_N en N dimensiones con N par³, generada por un conjunto de N matrices gamma ortonormales de dimensión $2^{N/2} \times 2^{N/2}$, que cumplen con la propiedad definitoria del álgebra

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta}, \quad (3.7)$$

donde g es el tensor métrico con signatura $(+, -, \dots, -)$ y $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 3, 5, \dots, N$.⁴ Las matrices gamma se toman con las propiedades de Hermiticidad estándares

$$\begin{aligned} \gamma_0^\dagger &= \gamma_0, \\ \gamma_i^\dagger &= -\gamma_i \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tomando todos los productos posibles de las N matrices gamma se tiene un conjunto de 2^N matrices linealmente independientes, lo que define un álgebra de Clifford *universal*.⁵ Este conjunto forma una base para las matrices complejas cuadradas de la misma dimensión, por lo que \mathcal{C}_N es isomorfa a $Mat(2^{N/2}, \mathbb{C})$, donde $Mat(2^{N/2}, \mathbb{C})$ designa el álgebra de matrices complejas de $2^{N/2} \times 2^{N/2}$.

Los generadores espinoriales del grupo de Lorentz y las transformaciones de Lorentz finitas que actúan sobre espinores son las estándares del álgebra de Clifford de 4 dimensiones

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad \text{con} \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3, \quad (3.9)$$

que generan la transformación.

³Si n es impar, el álgebra de Clifford compleja es isomorfa a la suma de álgebras de matrices complejas de la dimensión par anterior, esto es $\mathbf{C}_{2m+1} \cong Mat(2^m, \mathbb{C}) \oplus Mat(2^m, \mathbb{C})$, por lo que espacios con dimensiones impares no son considerados.

⁴Siguiendo una práctica estándar se ha omitido la etiqueta 4.

⁵Si N es impar ésta propiedad no se mantiene, y de hecho el álgebra de Clifford resultante es isomorfa a un álgebra de Clifford universal de dimensión $N - 1$

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}. \quad (3.10)$$

En consecuencia, el espacio-tiempo se mantiene en 4 dimensiones, una temporal y tres espaciales, es decir, las dimensiones espaciales adicionales tienen relevancia únicamente en el espacio de espín, como se mencionó previamente. Por lo tanto, las matrices gamma $3 + 1$ transforman de la forma usual bajo $S(\Lambda)$

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \quad (3.11)$$

con $\mu, \nu = 0, \dots, 3$, mientras que las restantes $N - 4$ matrices gamma γ_a , $a = 5, \dots, N$, y sus productos, conmutan con $\sigma_{\mu\nu}$, e.g.: $[\gamma_6, \sigma_{01}] = i\gamma_6\gamma_0\gamma_1 - i\gamma_0\gamma_1\gamma_6 = 0$, por lo que son escalares de Lorentz

$$S(\Lambda)\gamma^a S(\Lambda)^{-1} = \gamma^a. \quad (3.12)$$

Estos escalares pueden identificarse con generadores de simetrías continuas, ya sea globales o de norma, que automáticamente cumplen con el teorema de Coleman-Mandula, pues conmutan con los generadores de Lorentz. Esta última característica permite la inclusión de generadores de grupos de norma y del espacio-tiempo en el mismo espacio, y constituye una alternativa al uso de un álgebra de Lie graduada, como se usa en SUSY, para evadir el teorema de Coleman-Mandula. Más aún, los estados sobre los que actúan los operadores también son elementos del espacio, por lo que se tiene un espacio matricial donde el número de simetrías escalares permitidas queda restringido por la dimensión del espacio. En la figura 3.2 se muestran esquemáticamente los operadores de simetría en el espacio matricial, y en la Fig. 3.3 los estados en el mismo espacio.

Los elementos escalares forman el conjunto

$$\mathcal{S}_{N-4} = \frac{1}{2}(I + \tilde{\gamma}_5)U\left(2^{(N-4)/2}\right) \oplus \frac{1}{2}(I - \tilde{\gamma}_5)U\left(2^{(N-4)/2}\right), \quad (3.13)$$

donde I representa la matriz identidad de $N \times N$ y $\tilde{\gamma}_5$ es la matriz de quiralidad, definida como

$$\tilde{\gamma}_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad (3.14)$$

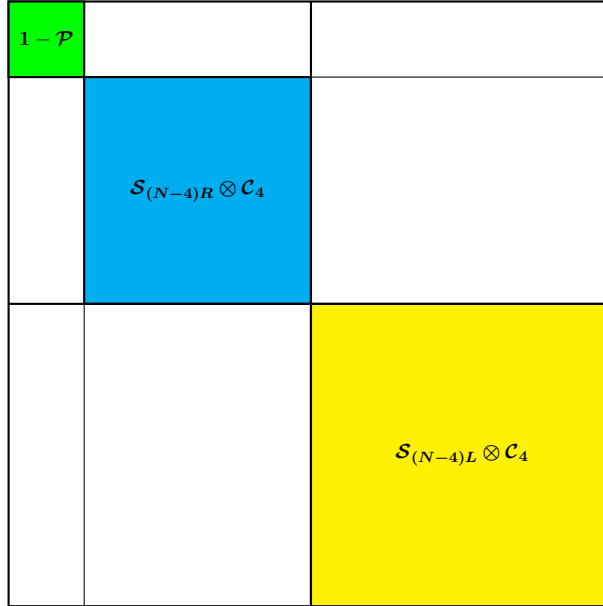


Figura 3.2: Representación esquemática de los generadores de simetrías, tanto escalares como de Lorentz, en el espacio matricial de espín extendido. El operador \mathcal{P} , relevante para la forma como se divide el espacio, se define en la siguiente sección 3.4.

Puesto que el grupo $U(2^{(N-4)/2})$ posee 2^{N-4} generadores, la cardinalidad de \mathcal{S}_{N-4} es 2^{N-3} .

3.4. Operadores y transformaciones de simetría

De acuerdo con la discusión de la sección 2.2, todos los campos $\Psi(x)$ están conformados por grados de libertad de Lorentz y escalares, con los índices respectivos α y a contraídos con los índices de la matriz del elemento del espacio M_a^α , de manera que

$$\Psi(x) = \Psi_a^\alpha(x) M_a^\alpha. \quad (3.15)$$

En términos del álgebra de Clifford los campos físicos se asocian con elementos de \mathcal{C}_N , clasificados por operadores de $\mathcal{C}_4 \otimes \mathcal{S}_{n-4}$, por lo que en general un campo Ψ tiene la estructura

$1 - \mathcal{P}$	$\bar{\mathbf{F}}$	$\bar{\mathbf{F}}$
\mathbf{F}	\mathbf{V}	$\mathbf{S,A}$
\mathbf{F}	$\mathbf{S,A}$	\mathbf{V}

Figura 3.3: Representación esquemática de los estados en el espacio de espín extendido, clasificados de acuerdo a sus propiedades de transformación de Lorentz: fermiones (\mathbf{F}), vectores (\mathbf{V}), escalares (\mathbf{S}) y tensores antisimétricos (\mathbf{A}). Los antifermiones ($\bar{\mathbf{F}}$) corresponden a los conjugados Hermitianos de los fermiones, y los bloques para \mathbf{V} , \mathbf{S} , y \mathbf{A} también contienen soluciones de antipartícula.

$$(\text{elementos del espacio } 3+1) \times \left(\begin{array}{c} \text{combinación de productos} \\ \text{de elementos de } \mathcal{S}_{N-4} \end{array} \right). \quad (3.16)$$

Las transformaciones de simetría actúan sobre los campos como

$$\Psi \rightarrow U\Psi U^\dagger, \quad (3.17)$$

y se emplean conmutadores para evaluar la acción de los operadores⁶

$$[\mathcal{O}, \Psi] = \lambda\Psi. \quad (3.18)$$

⁶En el apéndice B se proporciona un argumento más formal, en términos de álgebras de Lie, para el uso del conmutador en la ecuación de eigenvalores.

Esta última ecuación se interpreta como una ecuación de eigenvalores, esto es, Ψ es un eigenestado del operador \mathcal{O} , con eigenvalor λ . El producto interno de dos campos se define de acuerdo con la ecuación (3.4)

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \text{Tr} \left(\Phi^\dagger \Psi \right). \quad (3.19)$$

Los campos escalares y vectoriales transforman respectivamente bajo la representación (2.17) como las matrices γ^μ , $\mu = 0, \dots, 3$ y γ^a , $a = 5, \dots, N$, en las ecuaciones (3.11) y (3.12). Para la representación de fermiones se emplea un operador de proyección \mathcal{P} , obtenido de los elementos de \mathcal{S} , tal que actúe sobre los generadores de Poincaré $\mathcal{J}_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu}$, y sobre el espacio de operadores de simetría \mathcal{S}_{N-4}

$$\mathcal{J}'_{\mu\nu} = \mathcal{P} \mathcal{J}_{\mu\nu} = \mathcal{P} \left[i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \right], \quad (3.20)$$

$$\mathcal{S}'_{N-4} = \mathcal{P} \mathcal{S}_{N-4}.$$

Se requiere entonces que los campos fermiónicos incluyan $1 - \mathcal{P}$ en la estructura general de la ecuación (3.16), de forma que los generadores de Poincaré y de norma actúen trivialmente por el lado derecho al evaluar los conmutadores en la ecuación de eigenvalores (3.18), puesto que $(1 - \mathcal{P}_i) \mathcal{P} = 0$. Esto lleva a que los fermiones transformen en la representación fundamental, tanto del grupo de Poincaré como de los grupos de norma

$$\Psi \rightarrow U \Psi, \quad (3.21)$$

donde Ψ representa un campo fermiónico. Por el contrario, los operadores de sabor actúan por la derecha y trivialmente por la izquierda. Esto se entiende describiendo a Ψ como la matriz $\Psi \sim |\psi\rangle \langle a|$, donde el ket $|\psi\rangle$ lleva la información de Lorentz y de los grupos de norma, mientras que el bra $\langle a|$ lleva la información del sabor.

En resumen, el modelo de espacio de espín extendido en N dimensiones está basado en el álgebra de Clifford generada por N matrices gamma. Las N matrices, junto con sus productos, constituyen la base de un espacio vectorial. Manteniendo los generadores espinoriales del grupo de Lorentz en cuatro dimensiones, las restantes $N - 4$ matrices y sus productos actúan como generadores de simetrías adicionales, los cuales permiten clasificar

a los elementos del espacio vectorial de manera consistente con los grupos de norma del modelo estándar. La utilidad del modelo reside en que la dimensión del espacio, junto con el requerimiento de invariancia de Lorentz, restringen las representaciones posibles y las simetrías permitidas para clasificar a los elementos del mismo. Se tiene entonces un modelo donde los generadores de simetrías de norma y de espacio-tiempo, y los campos sobre los que actúan, son elementos del mismo espacio matricial.

4 Campos y simetrías en el espacio matricial

Para construir campos interactuantes, empezamos con campos libres para el caso de un espacio en $(5 + 1)$ dimensiones[11], como un ejemplo para el que resaltamos características físicas predichas. En este espacio, de entre pocas opciones, escogemos $\mathcal{P} = L$, donde

$$L = \frac{3}{4} - \frac{i}{4}(1 + \tilde{\gamma}_5)\gamma^5\gamma^6 - \frac{1}{4}\tilde{\gamma}_5 \quad (4.1)$$

es el operador asociado al número leptónico, y los generadores de simetrías y el espectro de partículas resultantes se ajustan al sector electrodébil del modelo estándar. Específicamente, el espacio de simetría proyectado incluye a los grupos de norma $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, con sus respectivos generadores de isospín I_i e hipercarga Y

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{i}{4}(1 - \tilde{\gamma}_5)\gamma^5, \\ I_2 &= -\frac{i}{4}(1 - \tilde{\gamma}_5)\gamma^6, \\ I_3 &= -\frac{i}{4}(1 - \tilde{\gamma}_5)\gamma^5\gamma^6, \\ Y &= -1 + \frac{i}{2}(1 + \tilde{\gamma}_5)\gamma^5\gamma^6. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Es de notar que los generadores de $SU(2)$ correctamente contienen el operador de proyección $\frac{1}{2}(1 - \tilde{\gamma}_5)$, lo que confirma la naturaleza quirral de la interacción, y que también lleva a tener representaciones quirales, una característica que resulta de la naturaleza del espacio matricial bajo el proyector L y el grupo de Lorentz. En la Tabla 4.1 se muestran estados representativos Ψ de partícula libre, junto con sus números cuánticos, obtenidos usando la ecuación (3.18) para los operadores relevantes. Los componentes de W y Z requieren, en su normalización, factores de constantes de acoplamiento relativas g y $\frac{g'}{2}$, respectivamente. Para fermiones y vectores, el segundo componente de espín puede obtenerse a partir del primero volteando el espín; e. g., $\nu_L^2 = [L(\gamma_2\gamma_3 - i\gamma_3\gamma_1), \nu_L^1]$.

Multipletos electrodébiles	Estados Ψ	I_3	Y	Q	L	$\frac{i}{2}L\gamma^1\gamma^2$	$L\tilde{\gamma}_5$
Dobletes de fermiones	$\nu_L^1 = \frac{1}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)(\gamma^0 + \gamma^3)(\gamma^5 - i\gamma^6)$	1/2	-1	0	1	1/2	-1
	$\nu_L^2 = \frac{1}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)(\gamma^1 - i\gamma^2)(\gamma^5 - i\gamma^6)$	1/2	-1	0	1	-1/2	-1
	$e_L^1 = \frac{1}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)(\gamma^0 + \gamma^3)(1 + i\gamma^5\gamma^6)$	-1/2	-1	-1	1	1/2	-1
	$e_L^2 = \frac{1}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)(\gamma^1 - i\gamma^2)(1 + i\gamma^5\gamma^6)$	-1/2	-1	-1	1	-1/2	-1
Singuletes de fermiones	$e_R^1 = \frac{1}{8}(1 + \tilde{\gamma}_5)\gamma^0(\gamma^0 + \gamma^3)(\gamma^5 - i\gamma^6)$	0	-2	-1	1	1/2	1
	$e_R^2 = \frac{1}{8}(1 + \tilde{\gamma}_5)\gamma^0(\gamma^1 - i\gamma^2)(\gamma^5 - i\gamma^6)$	0	-2	-1	1	-1/2	1
Doblete de escalares	$\varphi^+ = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - \tilde{\gamma}_5)\gamma^0(1 - i\gamma^5\gamma^6)$	1/2	1	1	0	0	-2
	$\varphi^0 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - \tilde{\gamma}_5)\gamma^0(\gamma^5 + i\gamma^6)$	-1/2	1	0	0	0	-2
Singuletes vectoriales	$\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^0(\gamma^1 + i\gamma^2)Y$	0	0	0	0	1	0
	$\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^3Y$	0	0	0	0	0	0
	$\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^0(\gamma^1 - i\gamma^2)Y$	0	0	0	0	-1	0
Triplete vectorial	$\frac{1}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)\gamma^0(\gamma^1 + i\gamma^2)(\gamma^5 - i\gamma^6)$	1	0	1	0	1	0
	$\frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - \tilde{\gamma}_5)\gamma^0(\gamma^1 + i\gamma^2)\gamma^5\gamma^6$	0	0	0	0	1	0
	$\frac{1}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)\gamma^0(\gamma^1 + i\gamma^2)(\gamma^5 + i\gamma^6)$	-1	0	-1	0	1	0

Tabla 4.1: Estados de fermiones sin masa y bosones en la extensión de 5 + 1 dimensiones.

El momento se toma en $\pm\hat{\mathbf{z}}$, con proyección dada por el operador de número leptónico L . Los números cuánticos corresponden a la acción de los operadores componente I_3 de isospín, hipercarga Y , carga $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$, número leptónico L , proyección de espín $\frac{i}{2}L\gamma^1\gamma^2$ y quiralidad $L\tilde{\gamma}_5$. La dependencia en las coordenadas se omite.

La cuestión de lo que fija la dimensión de esta extensión para derivar grupos del modelo estándar y representaciones, se aplica de manera similar a las teorías de gran unificación, ya que también existe un número infinito de grupos posibles que contienen al modelo estándar. La respuesta para ambas extensiones tiene que ver con que se obtiene información relevante desde las dimensiones más bajas, y en la predictibilidad de características, como son las representaciones y el $SU(2)$ quiral para el presente caso.

Mediante la identificación de elementos entre el espacio de espín extendido y términos Lagrangianos estándares, la Ref. [11] fija reglas básicas para derivar algunos términos invariantes de norma. En términos de rigor, y para poner a prueba el alcance del modelo, es deseable obtener tales términos dentro del álgebra del modelo. A continuación, traducimos la información de campo que emerge del espacio de espín extendido, para derivar una teoría

interactiva invariante de norma. En primer lugar, escribimos los campos en la base de espín extendido, y del mismo modo los generadores de simetría se escriben en una representación estándar, para finalmente construir términos invariantes y mostrar su equivalencia con las contribuciones Lagrangianas de teoría de campos.

Como se mostró en el capítulo 3, y se ejemplifica arriba, es posible escribir campos fundamentales utilizando como base productos de matrices conformadas por representaciones de Lorentz y grupos escalares. De hecho, la propiedad de conmutación de los respectivos grados de libertad permite que los estados y los operadores puedan ser escritos en la forma $\mathcal{C}_4 \otimes \mathcal{S}_{N-4}$. Explícitamente $\Psi = M_1 M_2$, donde

$$M_1 \in \mathcal{C}_4 \text{ y } M_2 \in \mathcal{S}_{N-4}. \quad (4.3)$$

Es posible tener una expresión con elementos de cada conjunto a través de su paso a cada lado, usando reglas de conmutación o anticonmutación.

4.1. Construcción de los campos

En la presencia de interacciones se tienen expresiones más generales de campos bosónicos y fermiónicos, a partir de aquellas de campos libres, que mantienen sus propiedades de transformación.

Campo Vectorial

$$A_\mu^a(x) \gamma_0 \gamma^\mu I_a, \quad (4.4)$$

donde $\gamma_0 \gamma_\mu \in \mathcal{C}_4$, $I_a \in \mathcal{S}'_{N-4}$ con \mathcal{S}'_{N-4} definido en la ecuación (3.20), y $\gamma_0 \gamma_\mu I_a$ es un generador de un grupo unitario dado.

Campo escalar

$$\phi^a(x) \gamma_0 M_a^S. \quad (4.5)$$

Campo fermiónico

$$\psi_\alpha^a(x)L^\alpha P_F M_a^F, \quad (4.6)$$

donde $M_a^S, M_a^F \in \mathcal{S}_{N-4}$ son, respectivamente, componentes escalares y fermiónicos, y L^α representa una componente de espín, por ejemplo $L^1 = (\gamma_1 + i\gamma_2)$. P_F es un operador de proyección del tipo dado en la ecuación (3.20), tal que

$$P_F \gamma_\mu = \gamma_\mu P_F^c, \quad (4.7)$$

y usamos el complemento $P_F^c = 1 - P_F$, de manera que una transformación de Lorentz con $P_F \sigma_{\mu\nu}$ describa fermiones, como se argumentó en la sección 2.4. El ejemplo más simple de un operador con tales características[7, 8] es $P_F = (1 - \tilde{\gamma}_5)/2$, usado para el doblete de fermiones en la Tabla 4.1. De esta forma, se deriva un estado en la representación fundamental, pues el operador de Lorentz actúa trivialmente por la derecha al usar la regla de transformación de la ecuación (4.7). Esto significa que la matriz posee estados de kets espurios, contenidos en el término escalar de Lorentz M_2 en la ecuación (4.3). También se obtienen tensores anti-simétricos, pero como llevan a interacciones no renormalizables no serán considerados.

4.2. Transformaciones de simetría

Describimos aquí dos tipos de transformaciones que actúan como en la ecuación (3.20):

Transformación de Lorentz

$$U = \exp\left(-\frac{i}{4}\mathcal{P}w^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right), \quad (4.8)$$

donde $\sigma_{\mu\nu}$ está dada por la ecuación (3.9), $w^{\mu\nu}$ son parámetros y \mathcal{P} es el proyector escalar en la ecuación (3.20).

Transformación de norma

$$U = \exp[-iI_a\alpha_a(x)], \quad (4.9)$$

donde $I_a \in \mathcal{S}'_{N-4}$, y las $\alpha_a(x)$ son funciones arbitrarias. Las representaciones de grupos unitarios $\bar{N} \otimes N$, basadas en elementos de la representación fundamental y su conjugada, denotadas por N y \bar{N} respectivamente, quedan implícitos a partir de la construcción matricial $|a\rangle\langle b|$ de la ecuación (3.3). Estas incluyen las representaciones de singulete y la fundamental (expresada en I_a), y de manera similar aquellas obtenidas por $N \otimes N$ (ver, por ejemplo, la Ref. [10]).

4.3. Ejemplos de transformación en 5 + 1 dimensiones

Empleando elementos de la Tabla 4.1 se pueden mostrar ejemplos específicos de transformaciones de Lorentz de los campos. Consideramos únicamente los casos de escalar y fermión tomando un elemento, respectivamente, de los multipletes en la Tabla 4.1. Los índices matriciales, que mezclan de manera no trivial índices escalares y de espín, no se muestran, y se consideran brevemente en la sección 5.1. Así pues, tomando el elemento superior del doblete de escalares

$$\varphi^+ = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - \tilde{\gamma}_5)\gamma^0(1 - i\gamma^5\gamma^6), \quad (4.10)$$

y comparándolo con la Ec. (4.5) tenemos que (omitiendo la dependencia en las coordenadas) la parte $(1 - \tilde{\gamma}_5)(1 - i\gamma^5\gamma^6)$ de φ^+ pertenece al conjunto \mathcal{S}_2 , dado por

$$\mathcal{S}_2 = \{1, \gamma^5, \gamma^6, \gamma^5\gamma^6, \tilde{\gamma}^5, \tilde{\gamma}^5\gamma^5, \tilde{\gamma}^5\gamma^6, \tilde{\gamma}^5\gamma^5\gamma^6\}, \quad (4.11)$$

el cual puede escribirse de manera equivalente como en la Ec. (3.13). De acuerdo con las Ecs. (3.9), (3.20) y (4.1) los generadores del grupo de Lorentz son

$$\begin{aligned} iL\gamma^0\gamma^j, \quad j = 1, 2, 3, \\ iL\gamma^j\gamma^k, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (4.12)$$

respectivamente para rotaciones espacio-temporales (boosts) y rotaciones espaciales. Entonces para el escalar en la Ec. (4.10) se cumple que

$$\{iL\gamma^0\gamma^j, \varphi^+\} = [iL\gamma^j\gamma^k, \varphi^+] = 0. \quad (4.13)$$

La transformación en la Ec. (3.10) cumple con

$$S^{-1} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0, \quad (4.14)$$

lo que asegura que la combinación bilineal, en la formulación estándar, $\psi^\dagger \gamma^0 \psi$ transforme como un escalar de Lorentz, donde ψ es un espinor columna. En particular, para los boosts S es anti-unitaria debido a que los generadores σ^{0i} son anti-Hermitianos, y la Ec. (4.14) implica que

$$\{\sigma^{0i}, \gamma^0\} = 0, \quad (4.15)$$

propiedad que también se verifica rápidamente a partir de la definición en la Ec. (3.9). En el espacio de espín extendido, la generalización del escalar estándar $\psi^\dagger \gamma^0 \psi$ se representa por una matriz del tipo $M\gamma^0$ con $M \in \mathcal{S}_{N-4}$. Puesto que $[M, \sigma^{\mu\nu}] = 0, \forall M \in \mathcal{S}_{N-4}$, la Ec. (4.15) conduce a que los generadores de boosts anticonmuten con los estados escalares, lo que justifica el anticonmutador en la Ec. (4.13).

Para el fermión sin masa $e_L^1 = \frac{1}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)(\gamma^0 + \gamma^3)(1 + i\gamma^5\gamma^6)$ de la Tabla 4.1, los generadores en la Ec. (4.12) actúan de acuerdo con la Ec. (3.21) y producen

$$\begin{aligned} iL\gamma^0\gamma^1 e_L^1 &= iL\gamma^1\gamma^3 e_L^1 = -ie_L^2, \\ iL\gamma^0\gamma^2 e_L^1 &= iL\gamma^2\gamma^3 e_L^1 = e_L^2, \\ iL\gamma^0\gamma^3 e_L^1 &= -ie_L^1, \\ iL\gamma^1\gamma^2 e_L^1 &= e_L^1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

El generador $iL\gamma^1\gamma^2$ es, salvo un factor numérico, el operador de proyección de espín en la Tabla 4.1, y el generador $iL\gamma^0\gamma^3$ produce el mismo estado salvo una fase. El resto de los generadores tienen el efecto de cambiar la polarización $\gamma^0 + \gamma^3 \rightarrow \gamma^1 - i\gamma^2$.

5 Conexión Lagrangiana

Históricamente, es sabido que las ecuaciones de Maxwell pueden formularse en términos de una base de Dirac. En nuestro caso, los campos dentro de la base de espín extendido se pueden utilizar para construir un Lagrangiano estándar¹. Esto equivale a usar elementos con una estructura de grupo bien definida, para obtener combinaciones escalares de Lorentz e invariantes de norma. Escogiendo elementos escalares que resultan del producto interno en la ecuación (3.19), se obtiene una teoría interactiva, pues se mantiene el mismo contenido de partículas. De esta manera, las opciones de Lagrangianos se ven limitadas por las mismas condiciones que en la teoría cuántica de campos, como son renormalizabilidad y cuantización.

Procedemos construyendo primeramente elementos de matriz que contienen el campo vectorial, junto con los campos ya sea de fermiones o de bosones, para después convertirlos a expresiones en términos de los bras o kets asociados de los estados. Al tomar la traza se obtienen elementos invariantes bajo transformaciones de Lorentz y de los grupos de norma del espacio de espín extendido. Este procedimiento extrae el coeficiente de la matriz identidad, lo que lleva a los componentes Lagrangianos habituales. La invariancia bajo transformaciones como en la ecuación (3.20) puede ser verificada de forma independiente, empleando la separación en Lorentz y simetrías escalares de la ecuación (4.3). Se mostrará la invariancia para los objetos lineales (vector-fermión) o bilineales (vector-escalar), con el aporte de las ecuaciones (4.4) a (4.6).

5.1. Fermiones

Añadiendo al Lagrangiano libre fermiónico (que implica la ecuación de Dirac) la contribución vectorial en la ecuación (4.4) resulta en el término de interacción

¹Alternativamente, el Lagrangiano estándar puede ser reinterpretado en términos de esta base.

$$\frac{1}{N_f} \text{tr} \Psi^\dagger \{ [i\partial_\mu I_{den} + gA_\mu^a(x)I_a] \gamma_0 \gamma^\mu - M\gamma_0 \} \Psi P_f, \quad (5.1)$$

donde Ψ es un campo que en este caso representa partículas de espín 1/2. El operador I_a es el generador de grupo en una representación dada, g es la constante de acoplamiento, el término N_f contiene la normalización (y términos similares más abajo), e I_{den} es el operador de identidad del grupo escalar en la misma representación (que se omite en adelante). M es un operador de masa general, cuyas restricciones proporcionan información sobre las masas de fermiones [11, 13]. El operador P_f se introduce para evitar la cancelación de elementos fermiónicos no diagonales. Dicho operador es necesario debido a componentes espurios en el ket izquierdo de fermiones en Ψ . Por ejemplo

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\gamma}^5 - \gamma^0 \gamma^1), \quad (5.2)$$

como $[P_f, L] = [P_f, (1 - \tilde{\gamma}_5)L] = 0$, provee una combinación no trivial con los números cuánticos correctos para el bilineal $\Psi_a P_f \Psi_b^\dagger$ (con Ψ_a, Ψ_b ya sea fermiones de singlete o doblete de la Tabla 4.1), y mantiene su normalización y su representación de espín, leptón y electrodébil.

Como se explicó en el capítulo 3 y después de la ecuación (4.6), los operadores escalares y de Lorentz actúan trivialmente del lado derecho de la ecuación (5.1), por lo que el campo fermiónico transforma de acuerdo con la ecuación (3.21). La ecuación (5.1) es invariante bajo transformaciones de Lorentz, siempre que el campo vectorial transforme como

$$A_\mu^a(x) I_a \rightarrow \Lambda_\mu^\nu A_\nu^a(x) I_a, \quad (5.3)$$

donde se ha usado la ecuación (3.11). La ecuación (5.1) también es invariante bajo la transformación local (4.9) si el campo vectorial transforma de acuerdo con

$$A_\mu^a(x) I_a \rightarrow U A_\mu^a(x) I_a U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger. \quad (5.4)$$

La traza en la ecuación (5.1) puede ser expresada en términos de estados, pues nos apoyamos en la expansión de la ecuación (3.3) para los campos Ψ . El campo fermiónico en la ecuación (4.6), con elementos de matriz $\gamma\delta$, se expresa como

$$[\psi_\alpha^a(x)L^\alpha P_F M_a^F]_{\gamma\delta} = \sum_\eta (L^\alpha P_F)_{\gamma\eta} (M_a^F)_{\eta\delta} \langle \alpha a x | \Psi \rangle, \quad (5.5)$$

donde $(L^\alpha P_F)_{\gamma\eta} = \langle \gamma | \alpha \rangle \sum_\beta d_{\alpha\beta} \langle \beta | \eta \rangle$, $(M_a^F)_{\eta\delta} = \langle \eta | a \rangle \sum_b f_{ab} \langle b | \delta \rangle$, con $d_{\alpha\beta}$, f_{ab} números c, y donde el campo fermiónico $\psi_\alpha^a(x) = \langle \alpha a x | \Psi \rangle$ tiene en cuenta grados de libertad escalares y de espín. Escogemos matrices escalares y de espín que conmutan como elementos de la base, como el singulete fermiónico en la Tabla 3.1; utilizamos la propiedad de separabilidad de los generadores[22] (tanto para matrices que anti-conmutan, como para los dobletes, cada término bilineal se separa), ya que la condición de normalización, en la ecuación (3.5), cancela el ket-bra: para la componente de espín $L_\alpha P_F \tilde{L}_f (L_\beta P_F)^\dagger = (L_\alpha P_F)_{\gamma\delta} (\tilde{L}_f)_{\delta\gamma} (L_\beta P_F)_{\epsilon\gamma}^* = \langle \gamma | \alpha \rangle \langle \beta | \epsilon \rangle$, y un cálculo similar con los estados electrodébiles (aquí \tilde{L}_f es un operador reducido L_f que actúa sobre los grados de libertad de espín y el operador P_f). Esto implica que la ecuación (5.1) puede escribirse como

$$\psi_\beta^{b\dagger}(x) \{ [i\partial_\mu I_{bc} + gA_\mu^a(x)(I_a)_{bc}] (\gamma_0 \gamma^\mu)_{\beta\alpha} - MI_{bc} (\gamma_0)_{\beta\alpha} \} \psi_\alpha^c(x). \quad (5.6)$$

Así pues, el Lagrangiano fermión-vector de la ecuación (5.1), junto con los campos de la Tabla 4.1, lleva a la contribución de fermiones al Lagrangiano electrodébil del modelo estándar[35, 60]

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_l [i\partial_\mu + \frac{1}{2}g\tau^a W_\mu^a(x) - \frac{1}{2}g' B_\mu(x)] \gamma^\mu \Psi_l + \\ \bar{\psi}_r [i\partial_\mu - g' B_\mu(x)] \gamma^\mu \psi_r, \end{aligned} \quad (5.7)$$

que también se deriva heurísticamente en las Refs. [11] y [13]. El Lagrangiano en la ecuación (5.7) contiene un doblete izquierdo de SU(2) con hypercarga $Y_l = -1$

$$\Psi_l(x) = \begin{pmatrix} \nu_L(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

con dos componentes de polarización, e.g.,

$$\nu_L(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\nu L}^1(x) e^{ip_{\nu L 1}(x)} \\ \psi_{\nu L}^2(x) e^{ip_{\nu L 2}(x)} \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

dadas en coordenadas polares; un singulete derecho ψ_r con $Y = -2$ con notación similar, y los bosones vectoriales del grupo de norma y constantes de acoplamiento correspondientes, $B_\mu(x)$, $W_\mu^a(x)$, g y g' , respectivamente.

5.2. Bosón escalar

Un término de interacción invariante de Lorentz, entre campos escalares y vectoriales, se construye aplicando dos veces el operador contenido en la ecuación (5.1) dentro del estado escalar Ψ en la ecuación (4.5), quitando la matriz γ_0 y siguiendo la ecuación de Klein-Gordon:

$$\text{tr} \frac{1}{N_B} \Psi^\dagger [i\partial_\nu I_{den} + gA_\nu^b(x)I_b] \gamma^\nu \gamma^\mu [i\partial_\mu I_{den} + gA_\mu^a(x)I_a] \Psi, \quad (5.10)$$

donde la transformación en la ecuación (3.17) se usa ahora en la forma $\Psi \rightarrow U\Psi U^{-1}$, y las matrices γ_μ de cuatro dimensiones se posicionan en pares para mantener las relaciones de los generadores I_a (ver también el término vectorial en la Ec. (4.4)). Esta expresión se aplica a la transformación de Lorentz de la Ec. (4.8). La expresión final se obtiene aplicando la igualdad $\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} - i\sigma_{\mu\nu}$, dado que en el producto $[i\partial_\nu I_{den} + A_\nu^b(x)I_b][i\partial_\mu I_{den} + A_\mu^a(x)I_a]$ solamente el término simétrico $\frac{1}{2}\{i\partial_\nu I_{den} + A_\nu^b(x)I_b, i\partial_\mu I_{den} + A_\mu^a(x)I_a\}$ sobrevive a la condición de ser renormalizable.² Se puede realizar una expansión similar a la del campo fermiónico en la ecuación (5.1). Las dos matrices γ_0 contenidas en $\Psi\Psi^\dagger$, que provienen de los términos del campo de la ecuación (4.5), llevan a la matriz identidad dentro de la traza. En la Ref. [11] el término de masa vectorial que resulta del mecanismo de Higgs se relacionó con operadores de masa dentro de el espacio de espín extendido, y se usó para conectar dicho espacio con el modelo estándar.

5.3. Bosón vectorial

Usamos componentes invariantes para el campo vectorial contenido en la ecuación (4.4) para construir su término de energía cinética, y extraemos la parte anti-simétrica

²Usando la igualdad $AB = \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{2}\{A, B\}$, y el hecho de que el término anti-simétrico se cancela al tomar la traza sobre los índices espinoriales en $3 + 1$ dimensiones.

$$[i\partial_\nu I_{den} + gA_\nu^b(x)I_b][i\partial_\mu I_{den} + gA_\mu^a(x)I_a]\frac{i}{2}[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = F_{\mu\nu}^a I_a \frac{i}{2}[\gamma^\nu, \gamma^\mu], \quad (5.11)$$

por lo cual tomando el tensor anti-simétrico $[\gamma^\nu, \gamma^\mu]$ obtenemos $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g c^{abd} A_\nu^b A_\mu^d$, con c^{abd} las constantes de estructura del grupo, $[I_b, I_d] = i c^{abd} I_a$.

Mostramos un término particular que reproduce la contribución vectorial cinética, el cual elimina términos de derivadas superiores no renormalizables. Una contribución escalar se construye a partir de la contracción de los dos términos

$$\frac{1}{N_A} \text{tr} F_{\mu\nu}^a I_a \frac{i}{2}[\gamma^\nu, \gamma^\mu] F_{\rho\sigma}^b I_b \frac{i}{2}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma]. \quad (5.12)$$

Usando la relación de traza en cuatro dimensiones (y su extensión a más dimensiones)

$$\text{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}), \quad (5.13)$$

la traza se reduce a la combinación anti-simetrizada $-g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}$. Sumando todos los términos finalmente se obtiene la expresión conocida para el término cinético $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$. La expresión en la ecuación (5.11) también puede derivarse partiendo del Lagrangiano estándar correspondiente[11].

5.4. Lagrangiano electrodébil fermión - **W**

En esta sección justificamos[14] el proyector P_F en la ecuación (5.2), mostrando la equivalencia del vértice W -fermión de espín extendido, que contiene el operador $W_\mu^i(x) \gamma_0 \gamma^\mu$ (con el factor $\frac{1}{2}g$ omitido) en la ecuación (5.1), con la expresión convencional.

El espacio de $(5 + 1)$ dimensiones permite componentes de carga 0 y -1 , asociados a campos leptónicos (neutrino y electrón)

$$\Psi_L^l(x) = \sum_\alpha \begin{pmatrix} \psi_{\nu L}^\alpha(x) e^{ip_{\nu L\alpha}(x)} \nu_L^\alpha \\ \psi_{eL}^\alpha(x) e^{ip_{eL\alpha}(x)} e_L^\alpha \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

$$\Psi_R^e(x) = \sum_\alpha \psi_{eR}^\alpha(x) e^{ip_{eR\alpha}(x)} e_R^\alpha, \quad (5.15)$$

y los componentes espinor-leptón mostrados en la Tabla 4.1. Los estados convencionales se suponen reales y se obtienen dentro de la representación de Dirac de γ^μ . Asimismo escogemos coordenadas polares para los componentes para localizar efectos de fase.

Los términos de proyección relevantes en $(5 + 1)$ dimensiones son

$$\begin{aligned}
 P_f = & \tilde{g}_5 \tilde{\gamma}_5 + g_I I + g_{01} \gamma^0 \gamma^1 + g_{02} \gamma^0 \gamma^2 + \\
 & g_{03} \gamma^0 \gamma^3 + g_{12} \gamma^1 \gamma^2 + g_{13} \gamma^1 \gamma^3 + g_{23} \gamma^2 \gamma^3 + \\
 & (g_{556} \tilde{\gamma}_5 + g_{I56} I + g_{0156} \gamma^0 \gamma^1 + g_{0256} \gamma^0 \gamma^2 + g_{0356} \gamma^0 \gamma^3 + \\
 & g_{1256} \gamma^1 \gamma^2 + g_{1356} \gamma^1 \gamma^3 + g_{2356} \gamma^2 \gamma^3) \gamma^5 \gamma^6. \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Para el modelo de espín extendido con $\Psi_L^l(x)$, el coeficiente del término $(\psi_L^1(x))^2$ asociado a e_L^1 es

$$(A - B)[W_0^3(x) - W_3^3(x)]$$

$$A = \frac{1}{2}(g_I + g_{\tilde{5}} - ig_{\tilde{5}56} - ig_{56})$$

$$B = -\frac{1}{2}(g_{03} - ig_{12} - ig_{0356} - g_{1256}).$$

Para el término convencional con $\Psi_I(x)$, el coeficiente de e_L^1 es

$$\frac{1}{2}[W_0^3(x) - W_3^3(x)].$$

Para el modelo de espín extendido con $\Psi_L^l(x)$, el coeficiente del término $(\psi_{eL}^2(x))^2$ asociado a e_L^2 es

$$(A + B)[W_0^3(x) + W_3^3(x)].$$

Para el término convencional con $\Psi_I(x)$, el coeficiente de e_L^2 es

$$\frac{1}{2}[W_0^3(x) + W_3^3(x)].$$

Concluimos que la elección $A = 1/2, B = 0$ iguala las dos expresiones. Dadas las expresiones para A y B hay cierta libertad en la elección de los coeficientes g_i . Estos términos no proveen información sobre las fases, a diferencia de los términos cruzados:

Para el modelo de espín extendido con $\Psi_L^l(x)$, los coeficientes ν_L^1 , e_L^2 del término asociado $\psi_{\nu L}^1(x)\psi_{eL}^2(x)$ se presentan para cada $W_\mu^i(x)$:

$$W_1^1(x) : \\ -\frac{1}{2}ie^{-i(p_{eL2}(x)+p_{\nu L1}(x))} \left[C \left(e^{2ip_{eL2}(x)} + e^{2ip_{\nu L1}(x)} \right) + \right. \\ \left. D \left(e^{2ip_{\nu L1}(x)} - e^{2ip_{eL2}(x)} \right) \right]$$

$$W_2^2(x) : \\ -\frac{1}{2}ie^{-i(p_{eL2}(x)+p_{\nu L1}(x))} \left[C \left(e^{2ip_{eL2}(x)} + e^{2ip_{\nu L1}(x)} \right) + \right. \\ \left. D \left(e^{2ip_{\nu L1}(x)} - e^{2ip_{eL2}(x)} \right) \right]$$

$$W_1^2(x) : \\ \frac{1}{2}e^{-i(p_{eL2}(x)+p_{\nu L1}(x))} \left[C \left(e^{2ip_{eL2}(x)} - e^{2ip_{\nu L1}(x)} \right) - \right. \\ \left. D \left(e^{2ip_{\nu L1}(x)} + e^{2ip_{eL2}(x)} \right) \right]$$

$$W_2^1(x) : \\ \frac{1}{2}e^{-i(p_{eL2}(x)+p_{\nu L1}(x))} \left[-C \left(e^{2ip_{eL2}(x)} - e^{2ip_{\nu L1}(x)} \right) + \right. \\ \left. D \left(e^{2ip_{\nu L1}(x)} + e^{2ip_{eL2}(x)} \right) \right],$$

donde $C = g_{01} - ig_{23} - ig_{0156} - g_{2356}$ y $D = -ig_{02} + g_{13} - g_{0256} - ig_{1356}$. Para el término convencional con $\Psi_l(x)$, el coeficiente de ν_L^1 , e_L^2 es

$$\frac{1}{2}e^{-i(p_{eL2}(x)+p_{\nu L1}(x))} \left[i \left(e^{2ip_{eL2}(x)} + e^{2ip_{\nu L1}(x)} \right) (W_1^1(x) + W_2^2(x)) + \right. \\ \left. \left(e^{2ip_{eL2}(x)} - e^{2ip_{\nu L1}(x)} \right) (W_2^1(x) - W_1^2(x)) \right].$$

Concluimos que la elección $C = -1$, $D = 0$ empata ambos términos.

Mientras que la expresión en la ecuación (5.2) es consistente con los valores de arriba para A , B , C y D (con un factor general vinculado a la normalización N_f en la ecuación (5.1)), destacamos que existe una libertad para otras elecciones de P_f .

Finalmente, esta comparación se realizó con una elección de las matrices γ que lleva a una base como en las ecuaciones (5.8) y (5.9), lo que requiere fijar las fases para completar la identificación de los estados. Las fases están dadas por (para ponerse en los estados de la Tabla 4.1): $e_L^1 \rightarrow -ie_L^1$ y $e_L^2 \rightarrow -ie_L^2$. Se puede verificar que esta solución se ajusta a todos los demás términos.

6 Modelo electrodébil de quarks en 7 + 1 dimensiones

Se presenta ahora un modelo de los sectores de quarks y Higgs del modelo estándar electrodébil, en el espacio de espín extendido en 7 + 1 dimensiones[53].

6.1. Generadores y operadores

El álgebra de Clifford en 7 + 1 dimensiones es generada por las ocho matrices gamma¹ de 16×16

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8. \quad (6.1)$$

Las matrices $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ y γ_3 constituyen los generadores del grupo de Lorentz de acuerdo con (3.9), y la matriz quirial $\tilde{\gamma}_5$ se define como en la ecuación (3.14). El conjunto \mathcal{S} contiene 32 escalares que generan el grupo $\frac{1}{2}(1 + \tilde{\gamma}_5)U(4) \oplus \frac{1}{2}(1 - \tilde{\gamma}_5)U(4)$ y son: cuatro matrices γ_a , $a = 5, \dots, 8$, seis pares $\gamma_{ab} \equiv \gamma_a \gamma_b$, $a < b$, cuatro tripletes $\gamma_{abc} \equiv \gamma_a \gamma_b \gamma_c$ y un tetraplete $\gamma_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8$. Multiplicando estas quince matrices por $\tilde{\gamma}_5$, más la misma $\tilde{\gamma}_5$ y la matriz identidad I se tienen los 32 elementos de \mathcal{S} .

El número máximo de elementos de \mathcal{S} que conmutan entre sí es ocho, y estos elementos definen el álgebra de Cartan \mathfrak{h} de \mathcal{S} de dimensión 8, para la cual escogemos la base

$$1, \tilde{\gamma}_5, \gamma_5 \gamma_6, \gamma_7 \gamma_8, \gamma_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8, \gamma_5 \gamma_6 \tilde{\gamma}_5, \gamma_7 \gamma_8 \tilde{\gamma}_5, \gamma_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8 \tilde{\gamma}_5. \quad (6.2)$$

Esta base se emplea para construir operadores que clasifiquen a las partículas de acuerdo a sus números cuánticos. Un grado de libertad en \mathfrak{h} se asigna al proyector \mathcal{P} empleado en la caracterización de fermiones, dos más forman los generadores diagonales del grupo de norma electrodébil $SU(2)_L \times U(1)_y$, a saber la tercera componente del isospín I_3 y la hipercarga

¹En el apéndice C se proporciona una representación explícita de las matrices gamma.

Y . De los cinco restantes, tres se asocian al sabor, que será descrito más adelante, y los restantes son la identidad y la quiralidad.

Para obtener los operadores diagonales es útil reescribir la base en la ecuación (6.2) en términos de los operadores de proyección

$$\begin{aligned}
 P_{R1} &= \frac{1}{8}(1 + \tilde{\gamma}_5)(1 + i\gamma_5\gamma_6)(1 + i\gamma_7\gamma_8), \\
 P_{R2} &= \frac{1}{8}(1 + \tilde{\gamma}_5)(1 + i\gamma_5\gamma_6)(1 - i\gamma_7\gamma_8), \\
 P_{R3} &= \frac{1}{8}(1 + \tilde{\gamma}_5)(1 - i\gamma_5\gamma_6)(1 + i\gamma_7\gamma_8), \\
 P_{R4} &= \frac{1}{8}(1 + \tilde{\gamma}_5)(1 - i\gamma_5\gamma_6)(1 - i\gamma_7\gamma_8), \\
 P_{L1} &= \frac{1}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)(1 + i\gamma_5\gamma_6)(1 + i\gamma_7\gamma_8), \\
 P_{L2} &= \frac{1}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)(1 + i\gamma_5\gamma_6)(1 - i\gamma_7\gamma_8), \\
 P_{L3} &= \frac{1}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)(1 - i\gamma_5\gamma_6)(1 + i\gamma_7\gamma_8), \\
 P_{L4} &= \frac{1}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)(1 - i\gamma_5\gamma_6)(1 - i\gamma_7\gamma_8),
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

los cuales se muestran esquemáticamente en la diagonal del espacio matricial en la Fig. 6.1. Cada uno de estos proyectores tiene dos valores propios no nulos degenerados, fijados a uno, y todos los operadores diagonales pueden escribirse como una combinación lineal de ellos. Para la descripción de los quarks derechos se requieren dos asignaciones diferentes de hipercarga, a saber, $4/3$ y $-2/3$, para quarks del tipo up y del tipo down, respectivamente, por lo que la parte derecha del operador de hipercarga debe ser una combinación lineal de los primeros cuatro operadores en la Ec. (6.3), con los pesos dados por los dos posibles valores propios. Los operadores P_{R1} y P_{R2} se eliminan para hacer espacio para el sabor y $1 - \mathcal{P}$, necesarios para la descripción de las diferentes familias de fermiones. Esto deja P_{R3} y P_{R4} como los únicos candidatos y asignamos

$$\frac{1}{2}(1 + \tilde{\gamma}_5)Y = \frac{4}{3}P_{R3} - \frac{2}{3}P_{R4}, \tag{6.4}$$

para la parte derecha del operador de hipercarga. La elección de los dos operadores en la Ec. (6.4) es arbitraria y solamente requiere que tengan el mismo rango, con representaciones distintas de operadores y estados resultando en la misma física.

La parte izquierda del operador de hipercarga se escoge de manera simétrica

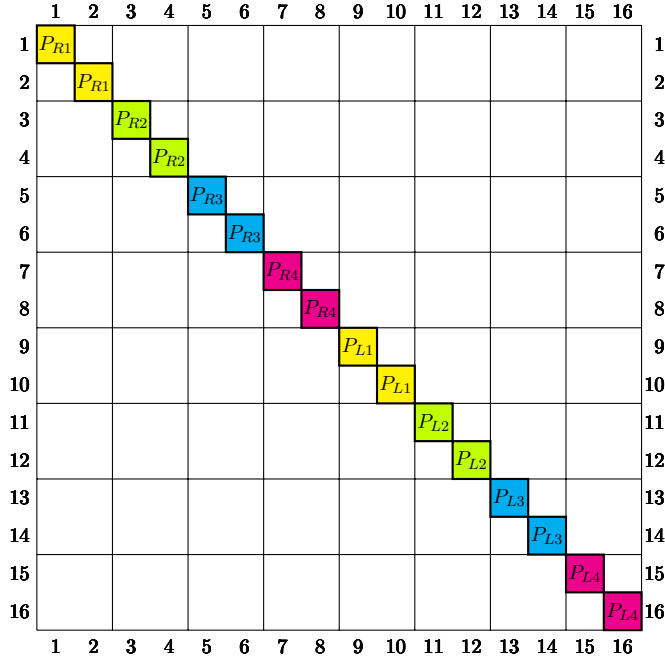


Figura 6.1: Representación esquemática de la base de Cartan (ecuación 6.3) en el espacio matricial de espín extendido de $7 + 1$ dimensiones. La base de ocho elementos se representa aquí en términos de operadores de proyección $P_{Ri, Li}$, $i = 1, \dots, 4$, que se obtienen de la base. Los subíndices R , L indican la quiralidad: R para operadores que contienen $1 + \tilde{\gamma}_5$ (derechos), y L para operadores que contienen $1 - \tilde{\gamma}_5$ (izquierdos).

$$\frac{1}{2}(1 - \tilde{\gamma}_5)Y = \frac{1}{3}(P_{L3} + P_{L4}), \quad (6.5)$$

con ambos coeficientes igual a $1/3$, que el eigenvalor de la hipercarga para quarks izquierdos de ambos tipos de carga. El operador completo es entonces

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{3}(4P_{R3} - 2P_{R4} + P_{L3} + P_{L4}), \\ &= \frac{1}{6}(1 - i\gamma_5\gamma_6) \left(1 + i\frac{3}{2}(1 + \tilde{\gamma}_5)\gamma_7\gamma_8 \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

La construcción del operador \mathcal{P} descrito en la sección 3.4 es ahora directa, pues debe estar dado por una combinación lineal de los mismos operadores que aparecen en la hipercarga, en este caso todos multiplicados por el mismo peso ω , lo que da

$$\mathcal{P} = \omega(P_{R3} + P_{R4} + P_{L3} + P_{L4}). \quad (6.7)$$

Este operador le da a los fermiones propiedades de transformación estándares, actuando trivialmente por la derecha, de acuerdo con las ecuaciones (3.20) y (3.21) y da cero para todos los estado no fermiónicos. Es decir, si Φ representa un campo escalar, vectorial o, en general, tensorial, se tiene

$$[\mathcal{P}, \Phi] = 0, \quad (6.8)$$

mientras que para un campo fermiónico Ψ , con o sin masa, se tiene

$$[\mathcal{P}, \Psi] = \mathcal{P}\Psi = \lambda\Psi, \quad (6.9)$$

por lo que asociamos \mathcal{P} con el número bariónico, esto es, con el generador de una simetría U(1) para fermiones con o sin masa. En lo que sigue \mathcal{P} será referido como el operador de número bariónico B , con $\lambda = 1/3$. En términos de las matrices gamma, este operador es

$$B = \frac{1}{6}(1 - i\gamma_5\gamma_6) = \frac{1}{3}(P_{R3} + P_{R4} + P_{L3} + P_{L4}). \quad (6.10)$$

También es posible determinar la estructura del operador B desde el principio, al exigir que el espectro contenga fermiones con propiedades estándares de transformación bajo los grupos de Lorentz y de norma. Esto lleva a la conclusión de que B debe estar dado por una combinación lineal de cuatro operadores de la ecuación (6.3), dos derechos y dos izquierdos. Una vez más, diferentes opciones cambian la estructura de la matriz pero no cambian la física. Es de notar que esta definición para el número bariónico no está relacionada con la simetría U(1) remanente en QCD después del rompimiento de la simetría quiral, sino más bien se desprende de la elección del proyector B . En otras palabras, una vez que se elige el proyector para permitir la existencia de fermiones con propiedades estándar de transformación, la definición del número bariónico se sigue naturalmente.

Puesto que los generadores de isospín deben conmutar con Y , el generador diagonal I_3 se puede formar con los mismos proyectores izquierdos utilizados en Y , ecuación (6.5), así que elegimos

$$I_3 = \frac{1}{2}(P_{L3} - P_{L4}) = \frac{i}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)(1 - i\gamma_5\gamma_6)\gamma_7\gamma_8. \quad (6.11)$$

El resto de los generadores de $SU(2)_L$ se obtienen de los elementos no diagonales de \mathcal{S} , al requerir que cumplan con el álgebra de Lie del grupo $[I_k, I_l] = i\varepsilon_{klm}I_m$ y que también conmuten con Y . Estos son

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{i}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)(1 - i\gamma_5\gamma_6)\gamma^7, \\ I_2 &= \frac{i}{8}(1 - \tilde{\gamma}_5)(1 - i\gamma_5\gamma_6)\gamma^8, \end{aligned} \quad (6.12)$$

Finalmente, el operador de carga Q está dado por la relación de Gell-Mann - Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (6.13)$$

6.2. Operadores de sabor

De los elementos de \mathcal{S} se pueden obtener cuatro grupos adicionales que conmutan entre sí, y con $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, tales que sus generadores dan cero al actuar sobre estados no fermiónicos, por lo que son interpretados como grupos de sabor. Hay dos grupos $SU(2)$ de sabor, denotados por $SU(2)_f$ y $SU(2)_{\hat{f}}$ respectivamente, y dos $U(1)$, denotados $U(1)_f$ y $U(1)_{\hat{f}}$. Los generadores respectivos son

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{i}{8}(1 + \tilde{\gamma}_5)(1 + i\gamma^5\gamma^6)\gamma^7, \\ f_2 &= \frac{i}{8}(1 + \tilde{\gamma}_5)(1 + i\gamma^5\gamma^6)\gamma^8, \\ f_3 &= \frac{i}{8}(1 + \tilde{\gamma}_5)(1 + i\gamma^5\gamma^6)\gamma^7\gamma^8, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_1 &= \frac{i}{8} (1 - \tilde{\gamma}_5) (1 + i\gamma^5\gamma^6) \gamma^7, \\
 \hat{f}_2 &= \frac{i}{8} (1 - \tilde{\gamma}_5) (1 + i\gamma^5\gamma^6) \gamma^8, \\
 \hat{f}_3 &= \frac{i}{8} (1 - \tilde{\gamma}_5) (1 + i\gamma^5\gamma^6) \gamma^7\gamma^8,
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

para $SU(2)_f$ y $SU(2)_{\hat{f}}$ y

$$f_0 = i\gamma^5\gamma^6\tilde{\gamma}_5. \tag{6.16}$$

$$\hat{f}_0 = i\gamma^5\gamma^6, \tag{6.17}$$

para $U(1)_f$ y $U(1)_{\hat{f}}$. En términos de los operadores de proyección en la ecuación (6.3) los operadores f_3 y \hat{f}_3 son

$$f_3 = \frac{1}{2} (P_{R1} - P_{R2}), \tag{6.18}$$

$$\hat{f}_3 = \frac{1}{2} (P_{L1} - P_{L2}). \tag{6.19}$$

6.3. Quarks sin masa

Consideremos primero estados con la estructura de la ecuación (3.16), y con los números cuánticos de quarks sin masa en el modelo estándar cuando se clasifican con los operadores pertinentes. La dimensión del espacio matricial da lugar a cuatro generaciones de quarks sin masa². En la figura 6.2 se representan esquemáticamente los operadores y los estados sobre los actúan en el espacio matricial de 7 + 1. Las proyecciones quirales de los operadores diagonales B , I_3 y Y , de acuerdo con las ecuaciones (6.10), (6.11), (6.6) y la Fig. 6.1, están agrupadas en los conjuntos $\mathbf{Q}_R = \frac{1}{2} (1 + \tilde{\gamma}_5) (B, I_3, Y)$ y $\mathbf{Q}_L = \frac{1}{2} (1 - \tilde{\gamma}_5) (B, I_3, Y)$.

²La dimensión del espacio no es lo suficientemente grande para acomodar el grupo de color $SU(3)$ de QCD, pero esto se puede hacer en 9+1 dimensiones[10].

Los elementos de matriz no diagonales de la figura 6.2 representan a los estados, y siguiendo la regla de multiplicación de matrices, son multiplicados por la izquierda por los operadores en la diagonal que están en la misma fila, y por la derecha por los operadores en la diagonal que están en la misma columna, proporcionando los valores propios correspondientes. Entonces, por ejemplo, los elementos etiquetados U_L^i , $i = 1, \dots, 4$ en las filas 13 y 14 representan todos los posibles grados de libertad con los números cuánticos $(1/3, 1/2, 1/3)$ para el número bariónico, el isospín y la hipercarga, respectivamente, con el sabor correspondiente. En consecuencia, tienen los números cuánticos de quarks izquierdos del tipo up. Hay 4 grados de libertad para cada u_L^i , que representan las dos posibles polarizaciones de espín y los dos signos de la energía (válido para estados con o sin masa), por lo que en este sentido, aunque estén representados por matrices de 16×16 , los fermiones en el espacio de espín extendido tienen los mismos grados de libertad que un espinor de Dirac en cuatro dimensiones. Esta última característica es una consecuencia de mantener la simetría de Lorentz en $3 + 1$ dimensiones. Se tienen resultados análogos para quarks derechos de tipo up, que se muestran en las filas 5 y 6 en la figura 6.2, y para quarks de tipo down, tanto izquierdos como derechos, los cuales se muestran en las filas 15 y 16, y las filas 7 y 8, respectivamente, en la figura 6.2. Por lo anterior, hay un total de ocho quarks izquierdos arreglados en cuatro dobletes de $SU(2)_L$, con los elementos conectados verticalmente por los operadores de escalera $\frac{1}{\sqrt{2}}(I_1 \pm iI_2)$, y ocho quarks derechos que son singuletes de $SU(2)_L$. Los estados de quarks se dan en las tablas I y II, junto con sus números cuánticos.

Los operadores de sabor clasifican aún más los estados de quarks, proporcionando una simetría horizontal: los miembros de las dos primeras familias con la misma carga son dobletes horizontales de $SU(2)_{f_1}$ cuando se clasifican con los operadores de escalera $\frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \pm if_2)$, y lo mismo es cierto para las dos últimas familias cuando clasifican con $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{f}_1 \pm i\hat{f}_2)$ de $SU(2)_{f_2}$, por ejemplo

$$\begin{aligned}
 U_L^1 \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 - if_2) &= \frac{i}{\sqrt{2}} U_L^2, & U_L^2 \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 - if_2) &= 0, \\
 U_L^2 \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 + if_2) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} U_L^1, & U_L^1 \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 + if_2) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{6.20}$$

donde, de acuerdo con la discusión después de la Ec. (3.21), los operadores de sabor actúan de manera no trivial solamente por el lado derecho. Esta simetría también se aplica a los quarks derechos.

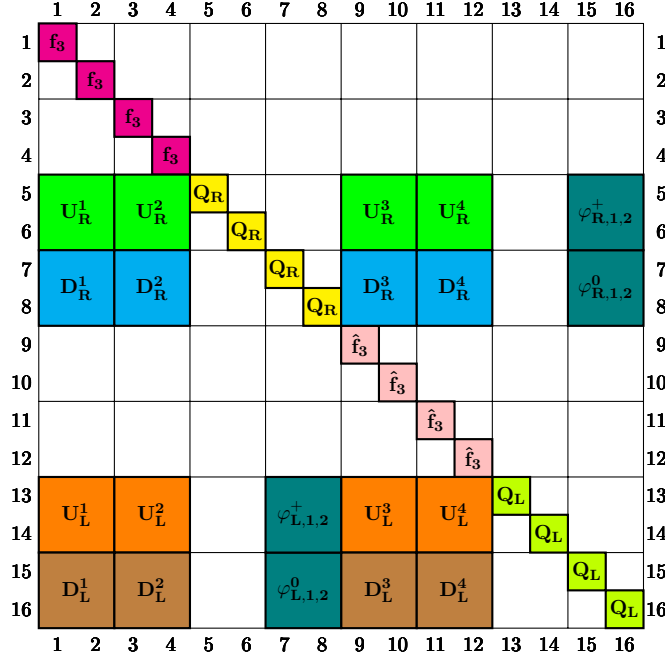


Figura 6.2: Representación esquemática de operadores, grados de libertad de quarks sin masa $(U_{L,R}^i, D_{L,R}^i, i = 1, \dots, 4)$ y Higgses $(\phi_{1,2}^+, \phi_{1,2}^0)$ en el espacio matricial de espín extendido de 7 + 1 dimensiones. Las proyecciones quirales de los operadores diagonales B , I_3 y Y están agrupadas y representadas por los conjuntos $\mathbf{Q}_R = \frac{1}{2}(1 + \tilde{\gamma}_5)(B, I_3, Y)$ y $\mathbf{Q}_L = \frac{1}{2}(1 - \tilde{\gamma}_5)(B, I_3, Y)$. Los operadores actúan por la izquierda sobre los estados en la misma fila, y por la derecha sobre los estados en la misma columna, de acuerdo con la regla de multiplicación de matrices.

Los campos de quarks en términos de dobletes izquierdos y singuletes derechos de $SU(2)$ se definen, respectivamente, como

$$\Psi_L^Q(x) = \begin{pmatrix} \psi_{UL}^\alpha(x) U_L^\alpha \\ \psi_{DL}^\alpha(x) D_L^\alpha \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \Psi_R^U(x) &= \sum_\alpha \psi_{UR}^\alpha(x) U_R^\alpha, \\ \Psi_R^D(x) &= \sum_\alpha \psi_{DR}^\alpha(x) D_R^\alpha. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Dobletes izquierdos de quarks con número bariónico 1/3, hipercarga 1/3 y polarización 1/2 (operador $\frac{3}{2}iB\gamma^1\gamma^2$)	I_3	Q	f_3	\hat{f}_3	F
$\mathbf{Q}_L^1 = \begin{pmatrix} U_L^1 \\ D_L^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16}(1-\tilde{\gamma}_5)(\gamma^5-i\gamma^6)(\gamma^7+i\gamma^8)(\gamma^0+\gamma^3) \\ \frac{1}{16}(1-\tilde{\gamma}_5)(\gamma^5-i\gamma^6)(1-i\gamma^7\gamma^8)(\gamma^0+\gamma^3) \end{pmatrix}$	1/2 -1/2	2/3 -1/3	-1/2 -1/2	0	3/2 3/2
$\mathbf{Q}_L^2 = \begin{pmatrix} U_L^2 \\ D_L^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16}(1-\tilde{\gamma}_5)(\gamma^5-i\gamma^6)(1+i\gamma^7\gamma^8)(\gamma^0+\gamma^3) \\ \frac{1}{16}(1-\tilde{\gamma}_5)(\gamma^5-i\gamma^6)(\gamma^7-i\gamma^8)(\gamma^0+\gamma^3) \end{pmatrix}$	1/2 -1/2	2/3 -1/3	1/2 1/2	0	-1/2 -1/2
$\mathbf{Q}_L^3 = \begin{pmatrix} U_L^3 \\ D_L^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16}(1-\tilde{\gamma}_5)(\gamma^5-i\gamma^6)(\gamma^7+i\gamma^8)\gamma^0(\gamma^0-\gamma^3) \\ \frac{1}{16}(1-\tilde{\gamma}_5)(\gamma^5-i\gamma^6)(1-i\gamma^7\gamma^8)\gamma^0(\gamma^0-\gamma^3) \end{pmatrix}$	1/2 -1/2	2/3 -1/3	0	-1/2 -1/2	1 1
$\mathbf{Q}_L^4 = \begin{pmatrix} U_L^4 \\ D_L^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16}(1-\tilde{\gamma}_5)(\gamma^5-i\gamma^6)(1+i\gamma^7\gamma^8)\gamma^0(\gamma^0-\gamma^3) \\ \frac{1}{16}(1-\tilde{\gamma}_5)(\gamma^5-i\gamma^6)(\gamma^7-i\gamma^8)\gamma^0(\gamma^0-\gamma^3) \end{pmatrix}$	1/2 -1/2	2/3 -1/3	0	1/2 1/2	0

Tabla 6.1: Dobletes de isospín débil de quarks izquierdos sin masa. Los operadores de norma y de Lorentz actúan por la izquierda y trivialmente por la derecha, y al revés para los operadores de sabor. Para obtener estados de polarización -1/2 debe hacerse el reemplazo $(\gamma^0 + \gamma^3) \rightarrow (\gamma^1 - i\gamma^2)$, para $\mathbf{Q}_L^1, \mathbf{Q}_L^2$, y $(\gamma^0 - \gamma^3) \rightarrow (\gamma^1 - i\gamma^2)$, para $\mathbf{Q}_L^3, \mathbf{Q}_L^4$. en el último término.

donde los ψ^α se definen como en la ecuación (4.6).

6.4. Sector de Higgs

A partir de elementos de \mathcal{S} multiplicados por γ_0 podemos obtener operadores que transforman como escalares de Lorentz³, y con ellos se obtienen dos dobletes de $SU(2)_L$ con los números cuánticos del campo de Higgs. Para ver esto consideremos los elementos de matriz en las filas 13 y 14 y las columnas 7 y 8 en la figura 6.2, etiquetados $\varphi_{L,1,2}^+$, pertenecientes a la proyección quirral izquierda del espacio matricial. Desde la izquierda son clasificados por Q_1 y desde la derecha por Q_4 , y la ecuación (3.18) proporciona los valores propios $(1/3, 1/2, 1/3) - (1/3, 0, -2/3) = (0, 1/2, 1)$ para número bariónico, proyección de isospín e hipercarga, respectivamente. Es decir, tienen los números cuánticos del componente superior de un doblete de $SU(2)_L$ de un campo escalar cargado. Consideremos ahora los elementos de matriz en las filas 5 y 6 y las columnas 15 y 16, etiquetados $\varphi_{R,1,2}^+$ y que pertenecen a

³Esta propiedad depende también de la estructura de los operadores y no sólo de la multiplicación por γ_0 , por lo que esto último es una condición necesaria pero no suficiente.

Quarks derechos con número bariónico 1/3 y polarización 1/2 (operador $\frac{3}{2}iB\gamma^1\gamma^2$)	Y	Q	f_3	\hat{f}_3	F
$U_R^1 = \frac{1}{16} (1 + \tilde{\gamma}_5) (\gamma^5 - i\gamma^6) (\gamma^7 + i\gamma^8) \gamma^0 (\gamma^0 + \gamma^3)$	4/3	2/3	-1/2	0	3/2
$D_R^1 = \frac{1}{16} (1 + \tilde{\gamma}_5) (\gamma^5 - i\gamma^6) (1 - i\gamma^7\gamma^8) \gamma^0 (\gamma^0 + \gamma^3)$	-2/3	-1/3	-1/2	0	3/2
$U_R^2 = \frac{1}{16} (1 + \tilde{\gamma}_5) (\gamma^5 - i\gamma^6) (1 + i\gamma^7\gamma^8) \gamma^0 (\gamma^0 + \gamma^3)$	4/3	2/3	1/2	0	-1/2
$D_R^2 = \frac{1}{16} (1 + \tilde{\gamma}_5) (\gamma^5 - i\gamma^6) (\gamma^7 - i\gamma^8) \gamma^0 (\gamma^0 + \gamma^3)$	-2/3	-1/3	1/2	0	-1/2
$U_R^3 = \frac{1}{16} (1 + \tilde{\gamma}_5) (\gamma^5 - i\gamma^6) (\gamma^7 + i\gamma^8) (\gamma^0 - \gamma^3)$	4/3	2/3	0	-1/2	1
$D_R^3 = \frac{1}{16} (1 + \tilde{\gamma}_5) (\gamma^5 - i\gamma^6) (1 - i\gamma^7\gamma^8) (\gamma^0 - \gamma^3)$	-2/3	-1/3	0	-1/2	1
$U_R^4 = \frac{1}{16} (1 + \tilde{\gamma}_5) (\gamma^5 - i\gamma^6) (1 + i\gamma^7\gamma^8) (\gamma^0 - \gamma^3)$	4/3	2/3	0	1/2	0
$D_R^4 = \frac{1}{16} (1 + \tilde{\gamma}_5) (\gamma^5 - i\gamma^6) (\gamma^7 - i\gamma^8) (\gamma^0 - \gamma^3)$	-2/3	-1/3	0	1/2	0

Tabla 6.2: Quarks derechos sin masa. Los operadores de norma y de Lorentz actúan por la izquierda y trivialmente por la derecha, y al revés para los operadores de sabor. Para obtener estados de polarización -1/2 debe hacerse el reemplazo $(\gamma^0 + \gamma^3) \rightarrow (\gamma^1 - i\gamma^2)$, para $U_R^1, U_R^2, D_R^1, D_R^2$, y $(\gamma^0 - \gamma^3) \rightarrow (\gamma^1 - i\gamma^2)$, para $U_R^3, U_R^4, D_R^3, D_R^4$ en el último término.

la proyección quirál derecha del espacio matricial. Estos se clasifican desde la izquierda por Q_3 y desde la derecha por Q_2 , pero tienen los mismos números cuánticos que los anteriores, pues $(1/3, 0, 4/3) - (1/3, 0 - 1/2, 1/3) = (0, 1/2, 1)$. Sin embargo, estos dos bloques de elementos de matriz tienen distinta quiralidad por lo que, si queremos obtener un campo de Higgs sin proyección de quiralidad como en el modelo estándar, debe estar dado por una combinación de ellos. Entonces con los ocho grados reales de libertad de los dos bloques se obtienen 4 elementos complejos, con los que se pueden construir dos campos escalares cargados y no quirales, linealmente independientes, ϕ_1^+ y ϕ_2^+ . Una construcción análoga produce los campos de Higgs neutros ϕ_1^0 y ϕ_2^0 , conectados a los cargados por los operadores de escalera de $SU(2)_L$. Los dobletes escalares de Higgs y sus conjugados Hermitianos se dan en las tablas 6.3 y 6.4, respectivamente.

La combinación $a\phi_1 + b\phi_2$ de los estados tipo Higgs en la tabla 6.3, para a, b reales, se clasifica con los operadores de proyección quirales $L = \frac{1}{2}(1 - \tilde{\gamma}_5)$, $R = \frac{1}{2}(1 + \tilde{\gamma}_5)$, obteniéndose las relaciones

Escalares tipo Higgs con número bariónico cero	I_3	Y	Q	$\frac{3i}{2}B\gamma^1\gamma^2$
$\phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(1 - i\gamma^5\gamma^6)(\gamma^7 + i\gamma^8)\gamma_0 \\ \frac{1}{8}(1 - i\gamma^5\gamma^6)(1 + i\gamma^7\gamma^8\tilde{\gamma}_5)\gamma_0 \end{pmatrix}$	1/2	1	1	0
$\phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(1 - i\gamma^5\gamma^6)(\gamma^7 + i\gamma^8)\tilde{\gamma}_5\gamma_0 \\ \frac{i}{8}(1 - i\gamma^5\gamma^6)(1 + i\gamma^7\gamma^8\tilde{\gamma}_5)\gamma^7\gamma^8\gamma_0 \end{pmatrix}$	1/2	1	1	0

Tabla 6.3: Dobletes de escalares tipo Higgs

Escalares tipo Higgs conjugados con número bariónico cero	I_3	Y	Q	$\frac{3i}{2}B\gamma^1\gamma^2$
$\tilde{\phi}_1 = \begin{pmatrix} (\phi_1^0)^\dagger \\ (\phi_1^+)^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(1 - i\gamma^5\gamma^6)(1 - i\gamma^7\gamma^8\tilde{\gamma}_5)\gamma_0 \\ \frac{1}{8}(1 - i\gamma^5\gamma^6)(\gamma^7 - i\gamma^8)\gamma_0 \end{pmatrix}$	1/2	-1	0	0
$\tilde{\phi}_2 = \begin{pmatrix} (\phi_2^0)^\dagger \\ (\phi_2^+)^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{8}(1 - i\gamma^5\gamma^6)(1 - i\gamma^7\gamma^8\tilde{\gamma}_5)\gamma^7\gamma^8\gamma_0 \\ -\frac{1}{8}(1 - i\gamma^5\gamma^6)(\gamma^7 - i\gamma^8)\tilde{\gamma}_5\gamma_0 \end{pmatrix}$	1/2	-1	0	0

Tabla 6.4: Dobletes de escalares tipo Higgs conjugados

$$\begin{aligned}
 R(\phi_1 + \phi_2)L &= \phi_1 + \phi_2, \\
 L(\phi_1 + \phi_2)R &= 0, \\
 L(\phi_1 - \phi_2)R &= \phi_1 - \phi_2, \\
 R(\phi_1 - \phi_2)L &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Definiendo los campos escalares

$$\phi_1(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^+(x)\phi_1^+ \\ \psi_1^0(x)\phi_1^0 \end{pmatrix}, \tag{6.24}$$

$$\phi_2(x) = \begin{pmatrix} \psi_2^+(x)\phi_2^+ \\ \psi_2^0(x)\phi_2^0 \end{pmatrix}, \tag{6.25}$$

y junto con los campos de quarks definidos en las ecuaciones (6.21) y (6.22), las relaciones (6.23) llevan al Lagrangiano invariante de norma

$$\frac{1}{N_f} \text{tr} \{ [m_U \Psi_R^{U\dagger}(x) [\phi_1(x) + \phi_2(x)] \Psi_L^Q(x) + m_D \Psi_L^{Q\dagger}(x) [\phi_1(x) - \phi_2(x)] \Psi_R^D(x)] P_f \} + \{cc\}, \quad (6.26)$$

donde P_f es un operador de proyección, α es un índice de espín, y en retrospectiva asignamos las masas

$$m_U = (a + b)/2, \quad m_D = (a - b)/2, \quad (6.27)$$

para considerar inicialmente un efecto de jerarquía con solo dos sabores para cada carga de quarks. La configuración del Lagrangiano en la ecuación (6.26) pone de manifiesto las simetrías de norma requeridas: $SU(2)_L$ para el campo $\Psi(x)$

$$\Psi(x) \rightarrow e^{-i \sum_c \alpha_c(x) I_c} \Psi(x) e^{i \sum_d \alpha_d(x) I_d}, \quad (6.28)$$

lo que conduce a las transformaciones no triviales

$$\begin{aligned} \phi_1(x) - \phi_2(x) &\rightarrow e^{-i \sum_c \alpha_c(x) I_c} [\phi_1(x) - \phi_2(x)], \\ \phi_1(x) + \phi_2(x) &\rightarrow [\phi_1(x) + \phi_2(x)] e^{i \sum_d \alpha_d(x) I_d}, \\ \Psi_L^Q(x) &\rightarrow e^{-i \sum_c \alpha_c(x) I_c} \Psi_L^Q(x), \end{aligned} \quad (6.29)$$

mientras que la transformación $U(1)_Y$

$$\Psi(x) \rightarrow e^{-i \alpha_Y(x) Y} \Psi(x) e^{i \alpha_Y(x) Y}, \quad (6.30)$$

implica que

$$\begin{aligned} \phi_1(x) - \phi_2(x) &\rightarrow e^{-i \alpha_Y(x) 1/3} [\phi_1(x) - \phi_2(x)] e^{-i \alpha_Y(x) 2/3}, \\ \phi_1(x) + \phi_2(x) &\rightarrow e^{-i \alpha_Y(x) 1/3} [\phi_1(x) - \phi_2(x)] e^{-i \alpha_Y(x) 2/3}, \\ \Psi_L^Q(x) &\rightarrow e^{-i \alpha_Y(x) 1/3} \Psi_L^Q(x), \\ \Psi_R^U(x) &\rightarrow e^{-i \alpha_Y(x) 4/3} \Psi_R^U(x), \\ \Psi_R^D(x) &\rightarrow e^{i \alpha_Y(x) 2/3} \Psi_R^D(x). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Estas transformaciones implican que los componentes escalares están conectados al Higgs \mathbf{H} del modelo estándar mediante las asignaciones

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) \sim \phi_1(x) - \phi_2(x), \quad (6.32)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}^\dagger(x) \sim \phi_1(x) + \phi_2(x), \quad (6.33)$$

donde la representación conjugada corresponde a $\tilde{\mathbf{H}}(x) = iI_2\mathbf{H}^*(x)$. Una transformación unitaria los conecta a sus conjugados, e.g.

$$(\phi_1^+)^\dagger + (\phi_2^+)^\dagger = -2I_2\gamma_2(\phi_1^0 + \phi_2^0)^*\gamma_2, \quad (6.34)$$

y la representación de las matrices γ_μ fija la conjugación de carga.

Existe también la posibilidad de proyectar fuera una generación, mediante una combinación de los generadores de sabor. Como un ejemplo consideremos el operador

$$F = -\frac{1}{4} \left(\hat{f}_0 - 4\hat{f}_3 - 8f_3 \right), \quad (6.35)$$

el cual produce $[F, U_L^i] = \lambda_i U_L^i$, $[F, D_L^i] = \lambda_i D_L^i$, $[F, U_R^i] = \lambda_i U_R^i$, $[F, D_R^i] = \lambda_i D_R^i$, $i = 1, \dots, 4$, con $\lambda_1 = 3/2$, $\lambda_2 = -1/2$, $\lambda_3 = 1$ y $\lambda_4 = 0$. Por lo tanto, este operador provee una simetría horizontal U(1) con eigenvalor cero para una generación, que se puede interpretar como una proyección de una familia de quarks fuera del espacio de sabor. Lo anterior produce tres generaciones efectivas, con la masa de la cuarta sin fijar por el modelo.

6.5. Jerarquía de masas para una generación

Después del rompimiento de la simetría electrodébil[27, 37], solamente los campos neutros sobreviven (o los escalares más ligeros[36, 33]) y se usa la misma base en las Tablas 6.3 y 6.4 para los valores de expectación del vacío, lo que lleva al Hamiltoniano de masas

$$H_v = a\phi_1^0 + b\phi_2^0 + a\phi_1^{0\dagger} + b\phi_2^{0\dagger}. \quad (6.36)$$

Quarks masivos	H_v	Q	$\frac{3i}{2}B\gamma^1\gamma^2$
$U_M^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_L^1 + U_R^1)$	m_U	2/3	1/2
$D_M^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(D_L^1 - D_R^1)$	m_D	-1/3	1/2
$U_M^{c1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_L^1 - U_R^1)$	$-m_U$	2/3	1/2
$D_M^{c1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(D_L^1 + D_R^1)$	$-m_D$	-1/3	1/2

Tabla 6.5: Quarks masivos eigenestados de H_v

Este término produce eigenestados fermiónicos y masas a partir de los parámetros de acoplamiento de Yukawa, mediante las relaciones

$$\begin{aligned} H_v U_M^1 &= m_U U_M^1, & H_v U_M^{c1} &= -m_U U_M^{c1}, \\ H_v D_M^1 &= m_D D_M^1, & H_v D_M^{c1} &= -m_D D_M^{c1}, \end{aligned} \quad (6.37)$$

donde U_M^{c1} , D_M^{c1} corresponden a estados de soluciones de energía negativa (y similarmente para componentes de espín opuestas). Estos estados se muestran en la Tabla 6.5 (solamente se muestran dos sabores) con sus números cuánticos.

El papel que juegan m_U y m_D en la ecuación (6.37) confirma su interpretación como masas en la ecuación (6.27). Además, la dependencia particular en los parámetros a y b implica un efecto de jerarquía de masa de doblete de sabor, si representan una escala grande comparable $O(a) \simeq O(b)$. Esta interpretación se apoya en las conexiones entre los componentes de Higgs en la Tabla 6.3, $\phi_2 = \gamma_5 \phi_1$, y en que ϕ_2 puede ser generado a partir de ϕ_1 mediante la transformación

$$\phi_2 = -ie^{i\beta\gamma_5} \phi_1 e^{-i\beta\gamma_5}, \quad (6.38)$$

para $\beta = \pi/4$. Más aún, se basa en una propiedad de composición, pues se puede construir la función de onda del Higgs a partir de los fermiones. Esto último se muestra en las relaciones

$$\begin{aligned} \phi_1^{0\dagger} + \phi_2^{0\dagger} &= U_L^1 U_R^{1\dagger} + U_L^2 U_R^{2\dagger}, \\ \phi_1^{0\dagger} - \phi_2^{0\dagger} &= -D_L^1 D_R^{1\dagger} - D_L^2 D_R^{2\dagger}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

y se puede obtener otra componente volteando el espín, por ejemplo $\tilde{D}_L^1 = \frac{3i}{2}B(\gamma_2\gamma_3 - i\gamma_3\gamma_1)D_L^1$.

6.6. Extensión a cuatro generaciones

En una descripción Hamiltoniana se pueden obtener operadores escalares de masa de la forma $M\gamma_0$, con $M \in \mathcal{S}$, al exigir que conmuten con los operadores de carga y de número bariónico. Hay ocho de estos operadores, mostrados en la Tabla 6.6, con una base máxima de operadores que conmutan dada ya sea por M_1 a M_4 o M_5 a M_8 . Los estados de Higgs neutros pueden entonces ser escritos como combinaciones de estos operadores de masa

$$\begin{aligned}\phi_1^0 &= \frac{1}{8}(M_1 - M_2) + \frac{i}{8}(M_7 - M_8), \\ \phi_2^0 &= \frac{1}{8}(M_3 + M_4) - \frac{i}{8}(M_5 + M_6),\end{aligned}\tag{6.40}$$

y los operadores de masa en términos de los Higgses neutros. Sin embargo, existen combinaciones de los operadores de masa que no corresponden a ninguna combinación de los estados de Higgs neutros, y que actúan de manera análoga a los campos de *flavones*[30, 6]. En consecuencia, después del rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil, cuando solamente sobreviven los campos de Higgs neutros, consideramos las siguientes combinaciones de campos de Higgs neutros y sus conjugados Hermitianos, y de operadores de masa (escogiendo el primer conjunto de la Tabla 6.5)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= a_1(\phi_1^0 + \phi_1^{0\dagger}) + b_1(\phi_2^0 + \phi_2^{0\dagger}), \\ \mathcal{M}_2 &= \frac{a_2}{4}(M_1 + M_2) + \frac{b_2}{4}(M_3 - M_4),\end{aligned}\tag{6.41}$$

donde $a_{1,2}$ y $b_{1,2}$ son parámetros reales, \mathcal{M}_2 es del tipo no Higgs y el factor de $1/4$ es solamente por conveniencia de normalización.

Se tiene entonces una base de operadores de masa, cuyos eigenestados son estados de quarks masivos. Por ejemplo, las combinaciones

$M_1 = \gamma^0$	$M_5 = i\tilde{\gamma}_5\gamma^0$
$M_2 = i\gamma^5\gamma^6\gamma^0$	$M_6 = \gamma^5\gamma^6\tilde{\gamma}_5\gamma^0$
$M_3 = i\gamma^7\gamma^8\gamma^0$	$M_7 = \gamma^7\gamma^8\tilde{\gamma}_5\gamma^0$
$M_4 = \gamma^5\gamma^6\gamma^7\gamma^8\gamma^0$	$M_8 = i\gamma^5\gamma^6\gamma^7\gamma^8\tilde{\gamma}_5\gamma^0$

Tabla 6.6: Operadores de masa Hamiltonianos de la forma $S\gamma_0$, con $S \in \mathcal{S}$. Los operadores M_1 a M_4 constituyen un conjunto máximo de operadores que conmutan, y lo mismo para M_5 a M_8 . Ambos grupos están relacionados mediante una transformación con $\tilde{\gamma}_5$.

$$\begin{aligned}
 U_M^1 &= \frac{1}{2} (-U_L^1 - U_R^1 + U_L^3 + U_R^3) \\
 D_M^1 &= \frac{1}{2} (-D_L^1 + D_R^1 + D_L^3 - D_R^3)
 \end{aligned}
 \tag{6.42}$$

son eigenestados del operador

$$\Omega \equiv \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2,
 \tag{6.43}$$

con \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 dados en la Ec. (6.41), y constituyen una familia de quarks masivos del tipo up y down, respectivamente. Los estados de quarks masivos se muestran en la Tabla 6.7.

6.7. Efectos de jerarquías de masas

Considerando únicamente el operador \mathcal{M}_1 en la Ec. (6.43), esto es, tomando $a_2 = b_2 = 0$ se tienen los eigenvalores

$$\begin{aligned}
 &\frac{a_1 + b_1}{2}, \\
 &\frac{a_1 - b_1}{2},
 \end{aligned}
 \tag{6.44}$$

Quarks masivos con número bariónico 1/3 y polarización -1/2 (operador $3iB\gamma^1\gamma^2$)	Q	\mathcal{M}_1	\mathcal{M}_2	Ω
$U_M^1 = \frac{1}{2} (-U_L^1 - U_R^1 + U_L^3 + U_R^3)$	2/3	$\frac{a_1+b_1}{2}$	$\frac{a_2-b_2}{2}$	$\frac{a_1+b_1+a_2-b_2}{2}$
$U_M^2 = \frac{1}{2} (U_L^2 - U_R^2 - U_L^4 + U_R^4)$	2/3	$\frac{a_1+b_1}{2}$	$\frac{a_2+b_2}{2}$	$\frac{a_1+b_1+a_2+b_2}{2}$
$U_M^3 = -\frac{1}{2} (U_L^1 - U_R^1 + U_L^3 + U_R^3)$	2/3	$\frac{a_1+b_1}{2}$	$-\frac{a_2-b_2}{2}$	$\frac{a_1+b_1-a_2+b_2}{2}$
$U_M^4 = \frac{1}{2} (U_L^2 - U_R^2 + U_L^4 - U_R^4)$	2/3	$\frac{a_1+b_1}{2}$	$-\frac{a_2+b_2}{2}$	$\frac{a_1+b_1-a_2-b_2}{2}$
$D_M^1 = \frac{1}{2} (-D_L^1 + D_R^1 + D_L^3 - D_R^3)$	-1/3	$\frac{a_1-b_1}{2}$	$\frac{a_2-b_2}{2}$	$\frac{a_1-b_1+a_2-b_2}{2}$
$D_M^2 = \frac{1}{2} (D_L^2 - D_R^2 - D_L^4 + D_R^4)$	-1/3	$\frac{a_1-b_1}{2}$	$\frac{a_2+b_2}{2}$	$\frac{a_1-b_1+a_2+b_2}{2}$
$D_M^3 = \frac{1}{2} (-D_L^1 + D_R^1 - D_L^3 + D_R^3)$	-1/3	$\frac{a_1-b_1}{2}$	$-\frac{a_2-b_2}{2}$	$\frac{a_1-b_1-a_2+b_2}{2}$
$D_M^4 = \frac{1}{2} (D_L^2 + D_R^2 - D_L^4 + D_R^4)$	-1/3	$\frac{a_1-b_1}{2}$	$-\frac{a_2+b_2}{2}$	$\frac{a_1-b_1-a_2-b_2}{2}$

Tabla 6.7: Estados de quarks masivos

respectivamente para quarks U_M^i y D_M^i , $i = 1, \dots, 4$, lo que constituye una jerarquía de masas vertical dependiente del orden de los parámetros involucrados, con las identificaciones

$$\begin{aligned} a_1 &= m_u + m_d, \\ b_1 &= m_u - m_d, \end{aligned} \tag{6.45}$$

donde m_u y m_d son masas corrientes de quarks del tipo up y down, respectivamente, para una familia dada.

Por otro lado, considerando solamente la parte \mathcal{M}_2 en la Ec. (6.43) con $a_1 = b_1 = 0$, y los estados en la Ec. (6.42) junto con otra generación

$$\begin{aligned} U_M^2 &= \frac{1}{2} (U_L^2 - U_R^2 - U_L^4 + U_R^4), \\ D_M^2 &= \frac{1}{2} (D_L^2 + D_R^2 - D_L^4 - D_R^4), \end{aligned} \tag{6.46}$$

se obtienen los eigenvalores

$$\begin{aligned} & \frac{a_2 - b_2}{2}, \\ & \frac{a_2 + b_2}{2}, \end{aligned} \tag{6.47}$$

respectivamente para las generaciones en las Ecs. (6.42) y (6.47). Por lo tanto, el operador \mathcal{M}_2 produce una jerarquía de masas horizontal (entre familias).

Modelos con cuatro generaciones de quarks y dos dobletes de Higgs se han estudiado en el contexto del rompimiento dinámico de la simetría y de composición[5, 38, 31]. En esos modelos se proponen estas características *ab initio*, mientras que en el presente caso surgen naturalmente de un mínimo de supuestos físicos. Esto también es cierto para el aspecto de composición, que está incluido de forma natural en el presente modelo por su propia construcción.

7 Conclusiones

El presente trabajo está basado en una extensión al modelo estándar previamente propuesta, llamada modelo de espín extendido, y se presentaron dos aspectos importantes del modelo: Uno formal, que trata con traducir el modelo a un formalismo Lagrangiano, y el otro fenomenológico, con la construcción de un modelo electrodébil de quarks en 7+1 dimensiones. Se explicaron las medidas encaminadas a la formalización del modelo, proporcionando una formulación de teoría de campo, con el objetivo final de utilizar las restricciones para obtener información sobre el modelo estándar. A la inversa, una teoría de campo se puede formular en la base del modelo, lo que puede proporcionar más información sobre las simetrías y representaciones usadas.

Se emplea un espacio matricial en el que se formulan tanto generadores de simetría como campos. Para una dimensión dada, la elección de un operador de proyección no trivial \mathcal{P} restringe el espacio matricial, determinando los grupos de simetría y la disposición de representaciones de fermiones y bosones. En particular, se obtienen estados de espín 1/2 y 0 en la representación fundamental de grupos escalares, y estados de espín 1 en la representación adjunta. Después de expresar los campos dentro de esta base, se construye una teoría de campo invariante de norma, basada en las simetrías de Lorentz y en las simetrías escalares obtenidas.

Las características obtenidas en la extensión de 5 + 1 dimensiones se formulan a través de un Lagrangiano: los grupos de simetría de norma $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ y número leptónico global $U_{Le}(1)$ con sus bosones vectoriales asociados, actuando únicamente en las representaciones predichas por el modelo: fermiones y un doblete escalar asociado a una partícula de Higgs; todo lo anterior lleva a vértices escalares, vectoriales y fermiónicos. En la construcción Lagrangiana surgen características especiales, como la necesidad de un operador de proyección y reglas de matrices de Dirac para mantener la invariancia de Lorentz. Con la presentación Lagrangiana del modelo se pueden aplicar las condiciones de cuantización y renormalización, lo que lleva a una formulación de teoría cuántica de campos.

Para el caso de $7 + 1$ dimensiones se presentó un modelo de quarks electrodébil con las características principales de producir a lo más cuatro generaciones de quarks, dos dobletes de Higgs, y efectos de jerarquía de masas horizontal y vertical. Estas características pueden servir de base para modelos con rompimiento dinámico de la simetría, donde se postulan en lugar de derivarse, mientras que las predicciones propias del modelo en este sentido es un tema para futuras investigaciones. El modelo también restringe la forma como actúan los campos escalares, mediante los valores de expectación del vacío después del rompimiento espontáneo de la simetría, sobre los distintos sabores de fermiones, a través de la existencia de campos /operadores que no son del tipo Higgs para la generación de masas, y que actúan de manera similar a los flavones.

Como extensión del modelo estándar, el modelo de espín extendido satisface los requerimientos básicos de tener las simetrías correctas, incluyendo las de Lorentz y de norma, describir las partículas del modelo estándar, y formularse en términos de una teoría de campo, además de sus predicciones propias.

El modelo proporciona una descripción unificada de campos y simetrías, tanto de norma como de espacio-tiempo, en un único espacio matricial. Esta última característica contrasta con el caso de SUSY donde, para el mismo propósito, el teorema de Coleman-Mandula se evade en lugar de cumplirse como en el presente caso, mediante el uso de un álgebra de Lie graduada. Por lo tanto, una línea de investigación interesante es investigar en qué medida el modelo de espín extendido puede servir como una alternativa, o complemento, a SUSY; una comparación que se ve favorecida por el hecho de que ambos modelos comparten representaciones de espín extendidas clasificadas por un álgebra de Clifford con indexación de Lorentz[43]. Dado que los espacios matriciales restringidos proporcionan información sobre las interacciones fundamentales, y representaciones físicas de partículas, vale la pena investigar si esta información se puede obtener en la supersimetría, con el objetivo final de explicar el origen de las interacciones.

Apéndices

A continuación se presentan tres apéndices. En el apéndice A se establece el teorema de Coleman-Mandula y las condiciones requeridas para su cumplimiento, sin proporcionar una prueba del mismo. En el apéndice B se presenta el formalismo, en términos de un álgebra de Lie, para el uso de conmutadores en la ecuación de eigenvalores para un espacio vectorial matricial. Finalmente, en el apéndice C se proporciona la representación de las matrices gamma usada en el modelo de 7+1 dimensiones.

A Teorema de Coleman - Mandula

El teorema de Coleman-Mandula[23, 41] establece que las únicas simetrías posibles, descritas mediante un grupo de Lie, de una teoría de interacción de partículas relativistas dada por la matriz de dispersión S , son productos directos del grupo de Poincaré y el grupo de simetrías internas.

El teorema se establece de la siguiente manera: Sea G un grupo de simetría conecado de la matriz de dispersión S y P el grupo de Poincaré, si se satisfacen las siguientes cinco condiciones

1. G contiene un subgrupo localmente isomórfico a P (Invariancia de Lorentz).
2. Todos los tipos de partículas corresponden a representaciones de energía positiva de P . Para cualquier masa finita M , solamente hay un número finito de tipos partículas con masa menor a M . (Finitud de partículas).
3. Las amplitudes de dispersión elásticas son funciones analíticas de la energía del centro de masa s y la transferencia de momento invariante t , en alguna vecindad de la región física, excepto en los umbrales normales. (Analicidad de la elasticidad débil).
4. La teoría admite dispersión no trivial. La matriz T , definida como $S - 1$, no se anula, excepto posiblemente en un conjunto discreto de valores excepcionales de s y t . (Ocurrencia de la dispersión).
5. Los elementos de matriz de los generadores del grupo son distribuciones en el espacio de momento. (Requerimiento técnico).

Entonces G es localmente isomórfico al producto directo de un grupo de simetría interno con el grupo de Poincaré. Dicho de otra forma, para todo generador de simetría g que no esté en el álgebra de Poincaré, y dadas las condiciones de arriba, g conmuta con todos los generadores del álgebra de Poincaré

$$[g, P] = 0, \tag{A.1}$$

donde, abusando de la notación, hemos usado el mismo símbolo P para el grupo y para el álgebra. La prueba rigurosa del teorema puede encontrarse en las referencias dadas arriba.

B Álgebra de Lie de los campos

Sea G un grupo de Lie matricial con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Los elementos de \mathfrak{g} son los generadores de G . El mapeo $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ definido por

$$\text{Ad}_A(X) = AXA^{-1}, \quad (\text{B.1})$$

con $A \in G$ y $X \in \mathfrak{g}$, constituye la representación adjunta de G . De manera análoga el mapeo $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$ definido por

$$\text{ad}_X(Y) = [X, Y], \quad (\text{B.2})$$

con $X, Y \in \mathfrak{g}$, constituye la representación adjunta de \mathfrak{g} . Ambas representaciones están relacionadas por

$$\text{Ad}_{e^x} = e^{\text{ad}_x}. \quad (\text{B.3})$$

En el modelo de espín extendido los campos Ψ pertenecen a la representación adjunta del álgebra de Lie, pues están formados por elementos de \mathcal{S} y $\sigma_{\mu\nu}$ (generadores) como en (3.16), y transforman de acuerdo con (3.17), que es equivalente a (B.1).

Una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} es un subespacio \mathfrak{h} de \mathfrak{g} que cumple con lo siguiente

1. Para todo H_1 y H_2 en \mathfrak{h} , $[H_1, H_2] = 0$.
2. Para todo X en \mathfrak{g} y H en \mathfrak{h} , si $[H, X] = 0$ entonces X está en \mathfrak{h} .
3. Para todo H en \mathfrak{h} , ad_H es diagonalizable.

Estas condiciones proporcionan el máximo número de operadores simultáneamente diagonalizables. Una raíz α_i de \mathfrak{g} con respecto de \mathfrak{h} se define por la ecuación

$$[H_i, X] = \alpha_i X, \quad (\text{B.4})$$

para todo H_i en \mathfrak{h} , con α_i distinto de cero y X en \mathfrak{g} . La ecuación (B.4) define una ecuación de eigenvalores en el espacio matricial de \mathfrak{g} . Por ejemplo para $\mathfrak{su}(2)$ los elementos del álgebra son las tres matrices de Pauli σ^1 , σ^2 y σ^3 . El álgebra de Cartan en este caso consta de un solo elemento que generalmente se toma como σ^3 . Los operadores de escalera $\sigma_{\pm} = \sigma^1 \pm i\sigma^2$ son combinaciones de los generadores y por lo tanto pertenecen a $\mathfrak{su}(2)$. Entonces se tiene

$$[\sigma^3, \sigma_{\pm}] = \pm 2\sigma_{\pm}. \quad (\text{B.5})$$

Es decir, las matrices σ_{\pm} son eigenvectores de σ^3 . En el modelo de espín extendido tanto los elementos de la subálgebra de Cartan como los campos Ψ pertenecen al álgebra de Lie, por lo que se emplea la definición (3.18) para la ecuación de eigenvalores, que es formalmente igual a (B.4).

C Representación de las matrices gamma

Los resultados mostrados son independientes de la representación usada para las matrices gamma, pero para realizar cálculos específicos, así como para mostrar explícitamente los estados, es conveniente escoger una representación. A continuación se muestra la representación empleada en 7+1 dimensiones, construida mediante un proceso iterativo[57] partiendo de las matrices de Pauli para obtener representaciones en 3+1, 5+1 y finalmente en 7+1 dimensiones. I_n representa la matriz identidad de la dimensión correspondiente.

Empleando las matrices

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

y el producto tensorial (de Kronecker) \otimes , se obtiene una representación en 3+1

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= \sigma^1 \otimes \sigma^3, \\ \alpha^1 &= -i\sigma^2 \otimes \sigma^3, \\ \alpha^2 &= I_2 \otimes i\sigma^1, \\ \alpha^3 &= I_2 \otimes i\sigma^2. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Con estas matrices se obtiene la representación de 5+1

$$\begin{aligned} \beta^0 &= \alpha^0 \otimes \sigma^3, \\ \beta^1 &= \alpha^3 \otimes \sigma^3, \\ \beta^2 &= \alpha^2 \otimes \sigma^3, \\ \beta^3 &= \alpha^1 \otimes \sigma^3, \\ \beta^5 &= I_4 \otimes i\sigma^1, \\ \beta^6 &= I_4 \otimes i\sigma^2, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

y finalmente la representación de $7 + 1$

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \beta^0 \otimes \sigma^3, \\ \gamma^1 &= \beta^3 \otimes \sigma^3, \\ \gamma^2 &= \beta^2 \otimes \sigma^3, \\ \gamma^3 &= \beta^1 \otimes \sigma^3, \\ \gamma^5 &= \beta^5 \otimes \sigma^3, \\ \gamma^6 &= \beta^6 \otimes \sigma^3, \\ \gamma^7 &= I_8 \otimes i\sigma^1, \\ \gamma^8 &= I_8 \otimes i\sigma^2.\end{aligned}\tag{C.4}$$

Referencias

- [1] AABOUD, M. *et al.* Search for squarks and gluinos in final states with jets and missing transverse momentum at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector. *Eur. Phys. J. C* **76**(7):392 (2016). 1605.03814
- [2] AAD, G. *et al.* Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett. B* **716**(1):1 – 29 (2012)
- [3] AAD, G. *et al.* Search for pair production of gluinos decaying via stop and sbottom in events with b -jets and large missing transverse momentum in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector. *Phys. Rev. D* **94**:032003 (2016). 1605.09318
- [4] BABU, K.S. TASI Lectures on Flavor Physics. En *Proceedings of Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics on The dawn of the LHC era (TASI 2008)*, págs. 49–123 (2010). 0910.2948
- [5] BAR-SHALOM, S., NANDI, S., Y SONI, A. Two Higgs doublets with 4th generation fermions - models for TeV-scale compositeness. *Phys. Rev. D* **84**:053009 (2011). 1105.6095
- [6] BAUER, M., CARENA, M., Y GEMMLER, K. Flavor from the electroweak scale. *JHEP* **2015**(11):1–57 (2015). 1506.01719
- [7] BESPROSVANY, J. Gauge and Space-Time Symmetry Unification. *Int. J. Theor. Phys.* **39**(12):2797–2836 (2000). hep-th/0203114
- [8] BESPROSVANY, J. Electroweak model from generalized dirac equation with boson and fermion solutions. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **101**(1):323 – 329 (2001)
- [9] BESPROSVANY, J. Standard model coupling constants from compositeness. *Mod. Phys. Lett. A* **18**:1877–1885 (2003). hep-ph/0305211

-
- [10] BESPROSVANY, J. Standard model particles and interactions from field equations on spin 9+1-dimensional space. *Phys. Lett. B* **578**:181–186 (2004). [hep-th/0203122](#)
- [11] BESPROSVANY, J. Electroweakly interacting scalar and gauge bosons, and leptons, from field equations on spin 5+1 dimensional space. *Int. J. Mod. Phys. A* **20**:77 (2005). [hep-th/0206156](#)
- [12] BESPROSVANY, J. Y ROMERO, R. Extended spin symmetry and the standard model. *AIP Conf. Proc.* **1323**:16–27 (2010)
- [13] BESPROSVANY, J. Y ROMERO, R. Representation of quantum field theory in an extended spin space and fermion mass hierarchy. *Int. J. Mod. Phys. A* **29**(29):1450144 (2014). [1408.4066](#)
- [14] BESPROSVANY, J. Y ROMERO, R. Particles within extended-spin space: Lagrangian connection. *Nucl. Part. Phys. Proc.* **267**:199 – 206 (2015). [1512.05395](#)
- [15] BOER, W.D. Grand unified theories and supersymmetry in particle physics and cosmology. *Progress in Particle and Nuclear Physics* **33**:201 – 301 (1994). [hep-ph/9402266](#)
- [16] BRACIC, A.B. Y MANKOC BORSTNIK, N.S. On the origin of families of fermions and their mass matrices. *Phys.Rev.* **D74**:073013 (2006). [hep-ph/0512062](#)
- [17] BRANCO, G., FERREIRA, P., LAVOURA, L., REBELO, M., SHER, M., Y SILVA, J.P. Theory and phenomenology of two-Higgs-doublet models. *Phys. Rept.* **516**(1 - 2):1 – 102 (2012). [1106.0034](#)
- [18] BREGAR, G., BRESKVAR, M., LUKMAN, D., Y MANKOC BORSTNIK, N.S. On the origin of families of quarks and leptons - predictions for four families. *New J. Phys.* **10**:093002 (2008). [0708.2846](#)
- [19] CHATRCHYAN, S. *et al.* Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Physics Letters B* **716**(1):30 – 61 (2012)
- [20] CHENG, T. Y LI, L. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford science publications. Clarendon Press (1984)
- [21] CHISHOLM, J. Y FARWELL, R. Gauge transformations of spinors within a Clifford algebraic structure. *J.Phys.A* **A32**:2805–2823 (1999)

- [22] COHEN-TANNOUJDI, C., DIU, B., Y LALOE, F. *Quantum Mechanics, 2 Volume Set*. Wiley (1992)
- [23] COLEMAN, S.R. Y MANDULA, J. All possible symmetries of the S matrix. *Phys. Rev.* **159**:1251–1256 (1967)
- [24] CRAIG, N. The State of Supersymmetry after Run I of the LHC. En *Beyond the Standard Model after the first run of the LHC Arcetri, Florence, Italy, May 20-July 12, 2013* (2013). 1309.0528
- [25] CRIVELLIN, A., D’AMBROSIO, G., Y HEECK, J. Addressing the LHC flavor anomalies with horizontal gauge symmetries. *Phys. Rev. D* **91**:075006 (2015). 1503.03477
- [26] DINE, M., FISCHLER, W., Y SREDNICKI, M. A simple solution to the strong CP problem with a harmless axion. *Phys. Lett. B* **104**(3):199 – 202 (1981)
- [27] ENGLERT, F. Y BROUT, R. Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. *Phys. Rev. Lett.* **13**:321–323 (1964)
- [28] ESPRIU, D., MESCIA, F., Y RENAU, A. Axion-Higgs interplay in the two-Higgs-doublet model. *Phys. Rev. D* **92**:095013 (2015). 1503.02953
- [29] FRITZSCH, H. Y XING, Z.Z. Mass and flavor mixing schemes of quarks and leptons. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **45**(1):1 – 81 (2000). hep-ph/9912358
- [30] FROGGATT, C. Y NIELSEN, H. Hierarchy of quark masses, cabibbo angles and CP violation. *Nucl. Phys. B* **147**(3):277 – 298 (1979)
- [31] FUKANO, H.S. Y TUOMINEN, K. Topcolor-like dynamics and new matter generations. *arXiv e-print* (2011). 1102.1254
- [32] GELL-MANN, M. Isotopic Spin and New Unstable Particles. *Phys. Rev.* **92**:833–834 (1953)
- [33] GEORGI, H., QUINN, H.R., Y WEINBERG, S. Hierarchy of Interactions in Unified Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.* **33**:451–454 (1974)
- [34] GEORGI, H. Y GLASHOW, S.L. Unity of All Elementary-Particle Forces. *Phys. Rev. Lett.* **32**:438–441 (1974)
- [35] GLASHOW, S. Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl.Phys.* **22**:579–588 (1961)

-
- [36] HABER, H., KANE, G., Y STERLING, T. The fermion mass scale and possible effects of Higgs bosons on experimental observables. *Nuclear Physics B* **161**:493 – 532 (1979)
- [37] HIGGS, P. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Physics Letters* **12**(2):132 – 133 (1964)
- [38] HUNG, P. Y XIONG, C. Dynamical Electroweak Symmetry Breaking with a Heavy Fourth Generation. *Nucl. Phys. B* **848**:288–302 (2011). 1012.4479
- [39] LEADER, E. Y PREDAZZI, E. *An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics*. An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics 2 Volume Paperback Set. Cambridge University Press (1996)
- [40] LU, W. Yang-Mills Interactions and Gravity in Terms of Clifford Algebra. *Adv. Appl. Clifford Algebras* **21**:145–163 (2011). 1008.0122
- [41] MANDULA, J.E. Coleman-Mandula theorem **10**(2):7476 (2015). revision 147717
- [42] MARTIN, S.P. *A Supersymmetry primer*, págs. 1–98 (2011). hep-ph/9709356
- [43] MONCADA, G.A.S. *Supersimetría y modelo de espín extendido*. Proyecto Fin de Carrera, Facultad de Ciencias, UNAM (2015)
- [44] MUKHI, S. String theory: a perspective over the last 25 years. *Classical and Quantum Gravity* **28**(15):153001 (2011)
- [45] NAKANO, T. Y NISHIJIMA, K. Charge Independence for V-particles. *Prog. Theor. Phys.* **10**:581–582 (1953)
- [46] NESTI, F. Standard Model and Gravity from Spinors. *Eur. Phys. J.* **C59**:723–729 (2009). 0706.3304
- [47] OLIVE, K.A. *et al.* Review of Particle Physics. *Chin. Phys.* **C38**:090001 (2014)
- [48] PAVSIC, M. On the Unification of Interactions by Clifford Algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras* **20**(3-4):781–801 (2010)
- [49] PESKIN, M.E. Supersymmetry in Elementary Particle Physics. En *Proceedings of Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics : Exploring New Frontiers Using Colliders and Neutrinos (TASI 2006): Boulder, Colorado, June 4-30, 2006*, págs. 609–704 (2008). 0801.1928

- [50] PICH, A. The Standard model of electroweak interactions. En *High-energy physics. Proceedings, European School, Aronsborg, Sweden, June 18-July 1, 2006*, págs. 1–49 (2007). [[1\(2007\)](#)], [0705.4264](#)
- [51] POKORSKI, S. The state of supersymmetry. *Ann. Phys.* **528**(1-2):84–88 (2016)
- [52] PONCE, W.A., WILLS, L.A., Y ZEPEDA, A. Systematic study of horizontal gauge theories. *Z. Phys. C* **73**(4):711–720 (1997). [hep-ph/9507467](#)
- [53] ROMERO, R. Y BESPROSVANY, J. Quark horizontal flavor symmetry and two-Higgs doublet in (7+1)-dimensional extended spin space (2016). [arXiv:1611.07446](#)
- [54] ROSS, G.C. *Flavor Physics for the Millennium: TASI 2000*, capítulo Models of fermion masses, págs. 775–826. EBL-Schweitzer. World Scientific (2001)
- [55] SCHWARZ, J.H. Y SEIBERG, N. String theory, supersymmetry, unification, and all that. *Rev. Mod. Phys.* **71**:S112–S120 (1999)
- [56] SHIMA, K. Supersymmetric structure of space-time and matter: Superon - graviton model. *Phys.Lett.* **B501**:237–244 (2001). [hep-ph/0012320](#)
- [57] SNYGG, J. *Clifford algebra: a computational tool for physicists*. Oxford University Press (1997)
- [58] TRAYLING, G. Y BAYLIS, W. A Geometric basis for the standard model gauge group. *J.Phys.* **A34**:3309–3324 (2001). [hep-th/0103137](#)
- [59] WALD, R. *General Relativity*. University of Chicago Press (2010)
- [60] WEINBERG, S. A Model of Leptons. *Phys.Rev.Lett.* **19**:1264–1266 (1967)
- [61] ZHITNITSKY, A.R. On Possible Suppression of the Axion Hadron Interactions. (In Russian). *Sov. J. Nucl. Phys.* **31**:260 (1980). [[Yad. Fiz. 31, 497 \(1980\)](#)]