



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

FACULTAD DE INGENIERÍA

MATERIALES METÁLICOS

VALIDACIÓN DE UN CÓDIGO DE ELEMENTO FINITO  
PARA PLASTICIDAD ANISOTRÓPICA MEDIANTE  
ENSAYOS EN PRODUCTOS METÁLICOS LAMINADOS

**TESIS**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

PRESENTA:

**MIGUEL ÁNGEL RAMÍREZ TOLEDO**

TUTOR PRINCIPAL:

DR. RAFAEL SCHOUWENAARS

FACULTAD DE INGENIERÍA

COMITÉ TUTOR:

DR. IGNACIO ALEJANDRO FIGUEROA VARGAS

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES, UNAM

DR. ARMANDO ORTÍZ PRADO

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, DICIEMBRE 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Es mi deseo y deber moral mencionar mi más sincero reconocimiento a los principales promotores de este trabajo de investigación que finalmente ha concluido, por ahora. Este fue un proyecto que involucra a muchos profesores, investigadores, postdoctorantes, doctores y técnicos que, gracias a su aporte científico y experiencia profesional, pudieron aportar información valiosa para culminar el trabajo de esta tesis doctoral.

Agradezco al Prof. Dr. Armando Ortiz y al Dr. Ignacio Alejandro Figueroa Vargas por sus valiosas observaciones y comentarios sobre mi proyecto doctoral en todas las reuniones semestrales que hice con mi comité tutor. Al Prof. Dr. Heriberto Pfeiffer Perea, al Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales de la UNAM y a su Comité Académico por creer y apoyar este proyecto doctoral hasta las últimas consecuencias.

Gracias también por las valiosas observaciones y aportaciones que hicieron los miembros de mi jurado a esta tesis: Dr. José Bernardo Hernández Morales, Dr. José Gonzalo González Reyes, Dr. Francisco Manuel Sánchez Arévalo y Dr. Fernando Velázquez Villegas.

Al M.I. Efraín Ramos Trejo y al Dr. Lázaro Morales Acosta por su apoyo técnico en el uso de la máquina universal de tracción y el equipo de cámaras de video para medir campos de deformación.

A la Unidad de Investigación y Asistencia Técnica en Materiales (UDIATEM) de la Facultad de Ingeniería de la UNAM por ser mi “casa” durante los años de estudio de mi doctorado. Aquí, la lista de compañeros y amigos se vuelve extensa. Sin afán de olvidar a alguien, agradezco a Agustín, Sebastián, Carlos, Ricardo, David, Roberto, Armando, Esteban, Edgar, Osvaldo, por su compañerismo y, sobretodo, su amistad.

Al laboratorio de Tata Steel Research en IJmuiden, Países Bajos, por la experiencia científica y datos experimentales proporcionados.

Gracias al departamento MTM de la KU Leuven, Bélgica por la invitación para realizar una estancia de investigación durante mis estudios de doctorado. Pude aprender de cerca el trabajo arduo que se realiza diariamente en la línea de investigación, pudiendo palpar de primera mano la importancia del MTM a nivel mundial en el área de investigación. Este agradecimiento se extiende al Prof. Dr. Marc Seefeldt y al Prof. Dr. Ir. Albert Van Bael, quienes estuvieron supervisando esta estancia. También, agradezco a los doctores Philip Eyckens y Diarmuid Shore por la intensa asesoría durante mi estancia corta con ellos, así como al Dr. Jerzy

Gawad por su apoyo científico en el trabajo de simulación de esta tesis (además de los excelentes paseos en bicicleta por Leuven y sus alrededores los fines de semana, ¡qué gran experiencia, deseo repetirla pronto!).

Al Prof. Dr. Leo Kestens de la Ghent University por sugerir la revista internacional donde finalmente fue aceptado mi artículo de investigación para publicarse.

A mi tutor principal, Prof. Dr. Ir. Rafael Schouwenaars, por hacer posible este trabajo de doctorado. Gracias a su arduo trabajo durante más de veinte años en México, ahora podemos decir que este país produjo – con recursos propios y compartidos – investigación novedosa en el área de plasticidad policristalina y conformado de lámina metálica. Además, el vínculo con la gente experta de esta área en Bélgica se encuentra ahora más fortalecido. La culminación de este trabajo nunca hubiera sido una realidad sin su supervisión, dedicación y la formación que he recibido de él durante los últimos años.

A Denise y Anthony, gracias por recibirme y hacerme sentir como en casa estando tan lejos, ¡debemos repetir la visita ahora a la familia Guyon pronto!, porque Benjamín está creciendo muy rápido.

Caroline, muchas gracias por haber ido por nosotros al final de mi estancia en Bélgica, la pasamos excelente, siempre está garantizada la diversión y alegría contigo. El paseo que nos diste fue un recuerdo inolvidable, ¡espero verte pronto! Espero también un poco más relajado, sin estar preocupándome por el “botón de emergencia” que tanto nos hizo reír.

A mi hermano Carlos y su familia, mi familia en Cuautla, mis tías Dora y Elvira, quienes han aportado una buena dosis de risas y convivencia sana desde siempre.

A Karla, por estar a mi lado apoyándome en estos cinco años de doctorado. Ella mejor que nadie sabe de la dedicación y los esfuerzos que he hecho. ¡Lo logramos!

A mis padres, a quienes les debo todos mis logros y quien soy. ¡Gracias por ésta, la mejor de las herencias!

MART

# Resumen

En esta tesis, se estudia el comportamiento constitutivo de la lámina de aleación AA6016T4 la cual representa una opción comercial avanzada como alternativa al acero en la industria automotriz; también, la fabricación de latas de aluminio es un mercado importante donde esta aleación cobra importancia.

El *software* Hierarchical Multi-Scale (o sólo *HMS*) representa una herramienta poderosa para predecir el comportamiento constitutivo de la lámina AA6016T4. Se presenta en esta tesis un estudio del arte profundo detrás del funcionamiento de *HMS*. Sin embargo, *HMS* ha sido validado satisfactoriamente para el ensayo de Fukui en un análisis preliminar cuando fue presentado por primera vez en el año 2013, el cual se centra principalmente en el desarrollo de su programación y eficiencia computacional. Un análisis minucioso sobre la validez de *HMS* se realiza en esta tesis, considerando varios parámetros importantes en el ensayo de Fukui como fricción, contacto, textura de la lámina, modelos micromecánicos y modelos elásticos en su herramienta. La mejor predicción que otorga *HMS* para textura y modelo micromecánico se utiliza posteriormente en los ensayos de tracción y deformación cortante simple. Además, se presentan también resultados concretos de la validez de *HMS* para los ensayos anteriores.

Las conclusiones de esta tesis explican que *HMS* está reproduciendo satisfactoriamente el ensayo de Fukui y tracción, demostrando que *HMS* está listo para utilizarse en procesos de conformado de lámina donde se requieren geometrías más complejas. Para el ensayo de deformación cortante simple, se requiere de un control mecánico con mayor precisión para garantizar la validez de *HMS*. Si bien ésta última conclusión es un resultado negativo, la información generada es importante puesto que define el camino a seguir con este ensayo: utilizar probetas peculiares creadas en laboratorio cuya geometría garantice que se aplica deformación cortante, para omitir el deslizamiento no deseado de la probeta.

# Abstract

Sheet metal forming represents an essential component in a final assembly of a wide variety of commercial products. Here, the constitutive behaviour of aluminium alloy AA6016T4 is studied; it represents a technologically commercial advanced alternative to steel in car components. Moreover, the use of this alloy in can elaboration represents an important option.

The Hierarchical Multi-Scale Software, referred to as HMS, is a computationally robust finite element (FE) program which can predict the constitutive behaviour of AA6016T4 sheet. A complete state-of-the-art behind HMS is presented in this work. Several materials were subjected to Fukui test to assess HMS precision for the first time in 2013. Although it was demonstrated that HMS predictions were adequate to experimental data in a preliminary analysis, the main objective in this study lies on showing all HMS efficiency. A complete analysis of HMS readiness is presented in this thesis, considering several important parameters related to Fukui test. Friction, contact modelling, micromechanical models, sheet texture and elastic tools. The best combination of micromechanical model and sheet texture parameters are thus used in the tensile and shear FE models. Also, several important results on HMS assessment employing tensile and shear tests are presented.

The conclusion shows that HMS provides a good quality in the prediction of AA6016T4 behaviour during Fukui and tensile test. Therefore, HMS readiness for predicting complex strain trajectories, such as those found in commercial sheet forming processes, is guaranteed. On the other hand, it was proved that shear samples were subjected to slip during a test, adding uncontrolled displacement. Thus, HMS readiness based on shear test is not a viable option. Although this a negative result, it shows a tendency of this experiment in the future: The use of samples based on a specific geometry that guarantees a localised shear strain but also avoids the undesired slip.

# Índice

<b>Prólogo .....</b>	<b>1</b>
<b>1. Estado del arte .....</b>	<b>4</b>
1.1. Conformado de productos laminados: aplicaciones .....	4
1.1.1. Latas de Aluminio .....	4
1.1.2. Micro-conformado de lámina metálica .....	6
1.1.3. Estampado de carrocería para coches .....	7
1.1.4. Estampado en caliente de productos laminados .....	8
1.2. Aspectos básicos de la tribología en procesos de manufactura .....	10
1.3. Ensayos de caracterización y efectos de la anisotropía .....	15
1.3.1. Ensayo de tracción .....	15
1.3.2. Anisotropía en lámina metálica .....	19
1.3.3. Ensayo de deformación cortante simple .....	21
1.3.4. La técnica de correlación de imágenes digitales .....	24
1.3.5. Ensayo de Fukui .....	26
1.4. Plasticidad continua .....	32
1.4.1. Tensor de esfuerzos .....	32
1.4.2. Criterios de fluencia .....	35
1.4.3. Criterio de Tresca .....	39
1.4.4. Criterio de von Mises .....	39
1.4.5. Las reglas de flujo plástico (Flow Rules) .....	42
1.4.6. La superficie potencial plástica .....	42
1.5. Plasticidad cristalina .....	44
1.5.1. Sistemas cristalinos FCC, BCC y HCP .....	44
1.5.2. Sistemas de deslizamiento independientes .....	47
1.5.3. Mecanismos de deslizamiento .....	49
1.5.4. Ley de Schmid .....	50
1.5.5. Texturas cristalinas en los metales .....	52
1.6. Modelos para la deformación plástica en policristales .....	62
1.6.1. La aproximación de Sachs .....	62

1.6.2.	La aproximación de Taylor .....	62
1.6.3.	Aproximaciones actuales para deformación plástica cristalina .....	65
1.6.4.	La función potencial plástica Facet.....	70
1.7	Aportación original a la línea de investigación.....	72
<b>2.</b>	<b>Objetivos.....</b>	<b>74</b>
<b>3.</b>	<b>Metodología y material empleado .....</b>	<b>75</b>
3.1.	Propiedades del material utilizado para los modelos multiescala .....	76
3.2.	Optimización de modelos FEM .....	79
3.3.	Análisis estadístico en el ensayo de Fukui.....	80
<b>4.</b>	<b>Resultados.....</b>	<b>82</b>
4.1.	Descripción del modelo FEM para el ensayo de Fukui .....	82
4.1.1.	Resultados experimentales vs modelo FEM.....	86
4.2.	Descripción del modelo FEM para el ensayo de deformación cortante simple..	101
4.2.1.	Resultados experimentales vs modelo FEM.....	103
4.3.	Descripción del modelo FEM para el ensayo de tracción .....	104
4.3.1.	Resultados experimentales vs modelo FEM.....	105
<b>5.</b>	<b>Discusión.....</b>	<b>114</b>
5.1.	Ensayo de Fukui .....	114
5.2.	Ensayo de deformación cortante simple.....	117
5.3.	Ensayo de tracción.....	118
<b>6.</b>	<b>Conclusiones.....</b>	<b>119</b>
<b>7.</b>	<b>Publicaciones y estancia de investigación .....</b>	<b>121</b>
<b>8.</b>	<b>Referencias.....</b>	<b>123</b>

# Prólogo

Los productos metálicos laminados se utilizan ampliamente en las industrias automotriz, de teléfonos inteligentes (smartphones), fabricación de balas, empaques y otras más, como un paso intermedio en operaciones secundarias para la elaboración final del producto que sale al mercado para su venta. El proceso de laminado, tema que no se estudia en esta tesis, influye fuertemente sobre el comportamiento mecánico inicial del material y su naturaleza anisotrópica. El proceso [1,2], descrito de manera sencilla, consiste en introducir una pieza de metal en el espacio que se encuentra entre un par de rodillos que aplican fuerzas de compresión mediante un par mecánico; los rodillos terminan impulsando a la pieza a través del espacio reducido que definen. El resultado: la pieza laminada termina con un espesor menor y una longitud mayor. Leonardo da Vinci fue probablemente el primero en proponer un prototipo del proceso de laminado en Europa, el cual no se sabe con certeza si finalmente se pudo fabricar. Los principios básicos del laminado moderno se le atribuyen a Henry Cort, quien combinó las mejores técnicas de conformado que existían en 1783 junto con rodillos acanalados durante el proceso de laminado. La finalidad de esta combinación era producir lámina con mayor rapidez y eficiencia, dejando atrás el proceso artesanal tradicional de entonces [3,4].

La temperatura durante el proceso de laminado juega un papel importante que afecta al comportamiento final de la lámina. En general, un lingote de aproximadamente medio metro de espesor comienza a ser laminado en caliente a temperaturas arriba de la temperatura de recristalización para realizar reducciones severas en su espesor; posteriormente, el espesor alcanza un valor menor en pasos finales (por ejemplo, algunas micras para el papel aluminio) laminando en frío a temperatura ambiente. Ya sea en frío o en caliente, ambos procesos de laminado agregan propiedades a la lámina mediante el refinamiento de su microestructura, dado que un lingote recién colado presenta granos alargados (dendritas), porosidad y partículas como segunda fase en su microestructura. Durante el laminado en caliente, la porosidad se elimina, ocurre refinación de grano por recristalización y la segunda fase se disuelve por mezclado mecánico para obtener una lámina más resistente. También, el laminado en frío agrega endurecimiento por deformación a la lámina. Es decir, la historia termo-mecánica del proceso de laminado cambia la microestructura de la lámina y, por ende, sus propiedades.

La lámina metálica se puede describir como un policristal. En el trabajo actual, consiste principalmente de una fase cristalina con orientación preferencial dentro de su estructura debido al proceso de laminado. Los granos representan monocristales que conforman al policristal. Se encuentran delimitados por fronteras o límites de grano, además de estar orientados hacia una dirección preferencial dentro de la

lámina. Se le llama textura a esta orientación preferencial y se acepta ampliamente como la razón principal del comportamiento mecánico anisotrópico de los productos laminados. Más adelante se hace un estudio más minucioso sobre este tópico. Por el momento, basta con entender que la textura en una lámina se desarrolla en varias etapas de la historia termo-mecánica del laminado y es la principal razón por la que el comportamiento elasto-plástico muestra anisotropía. Es decir, las propiedades mecánicas de una lámina metálica dependen de la dirección dentro de ésta. El hecho de poseer un mejor control durante el proceso de conformado de láminas asegura que los productos finales adquieran una mejor calidad a menor precio. Calidad significa reducir la pérdida de material durante el conformado de láminas, prevención de fallas en el proceso, conformado satisfactorio de láminas más delgadas, disminución del tiempo de diseño del herramental mediante modelado numérico y su correspondiente prevención de fallas durante el proceso de manufactura. Esta es la razón por la cual se invierte en proyectos tecnológicos que vinculan a la industria con laboratorios especializados en el desarrollo de nuevos materiales y de técnicas numéricas para el modelado de su comportamiento.

Si bien existen muchas aplicaciones tecnológicas donde los productos laminados se deforman de manera compleja para crear geometrías complicadas, en este proyecto sólo se analizará una serie de ensayos estandarizados comerciales que se utilizan ampliamente para la caracterización de la anisotropía de una lámina mediante deformaciones controladas: estampado profundo (también, ensayo de Fukui), deformación cortante simple y ensayo de tracción. Los ensayos de compresión y deformación biaxial también son útiles para medir la anisotropía en una lámina, aunque para este proyecto no estuvieron disponibles. La validación que menciona el proyecto consiste en utilizar la teoría y los modelos avanzados que existen en el ámbito de la plasticidad policristalina junto con el método del elemento finito para reproducir de manera numérica los ensayos que se mencionan anteriormente y obtener la predicción del comportamiento constitutivo del producto laminado sujeto al ensayo correspondiente. Esta predicción numérica se compara con resultados experimentales reales de los ensayos mencionados para evaluar su exactitud. Se espera en un futuro que todo el desarrollo de este proyecto sirva como base para empezar a predecir el comportamiento constitutivo de productos laminados sujetos a deformaciones generales complejas, como las que se encuentran en procesos tecnológicos reales, y no sólo aquellas deformaciones que se aplican durante los ensayos convencionales.

La organización del trabajo en esta tesis se presenta a continuación brevemente. En el [Capítulo 1](#) se estudia la relación Procesos – Ensayos – Modelado, la cual describe el estado del arte detrás del desarrollo del código de elemento finito para plasticidad anisotrópica utilizado. Se refiere a “Procesos” a una lista de aplicaciones tecnológicas donde las láminas metálicas se utilizan como componentes intermedios para la elaboración final de un producto comercial, con la intención de señalar el mercado de interés, las oportunidades de innovación y el desarrollo tecnológico en la línea de investigación estudiada. También, se muestran los conceptos básicos más importantes en la tribología de procesos de manufactura. Posteriormente, se describen los ensayos de Fukui, deformación cortante simple y

tracción, cuya función es la caracterización de las propiedades mecánicas de láminas. Esta sección incluye también una revisión extensa de los modelos avanzados de plasticidad policristalina, los cuales se encuentran programados en el código de elemento finito estudiado. Al final de este capítulo, se explica brevemente la aportación novedosa de este proyecto a la línea de investigación. Una vez hecha la explicación previa, se plantean formalmente los objetivos centrales de esta tesis en el [Capítulo 2](#). La metodología empleada para lograr los objetivos, así como las propiedades de la aleación AA6016T4 se explica en el [Capítulo 3](#). El [Capítulo 4](#) muestra los resultados obtenidos, tanto numéricos como experimentales. Se elabora entonces una discusión en el [Capítulo 5](#) sobre los resultados descritos anteriormente, dividiendo una vez más las ideas expuestas ahí según el ensayo correspondiente. Finalmente, las conclusiones de esta tesis se exponen en el [Capítulo 6](#).

# 1. Estado del arte

## 1.1. Conformado de productos laminados: aplicaciones

### 1.1.1. Latas de Aluminio

Los productos laminados conformados se han vuelto parte importante de la vida diaria desde que se inventó el proceso de laminación. Un ejemplo ya mencionado es la industria de empaques, especialmente la industria de latas de aluminio. Históricamente [5], la producción de latas en la industria consistía de un proceso de elaboración de tres piezas: el corte de una lámina rectangular, que formaría el cuerpo de la lata y el corte de dos láminas circulares para elaborar la base y tapa, que posteriormente se unían al cuerpo de la lata por medio de un proceso de soldadura. Hoy en día se utiliza el estampado profundo sobre un disco de aleación de aluminio que formará tanto el cuerpo de la lata como su base, para posteriormente unirse con la tapa, lo cual implica una reducción de tiempo de producción y costos puesto que sólo se emplean dos piezas para la manufactura de la lata. La Figura 1.1 muestra ambos procesos de manufactura empleados para la elaboración de latas de aluminio.

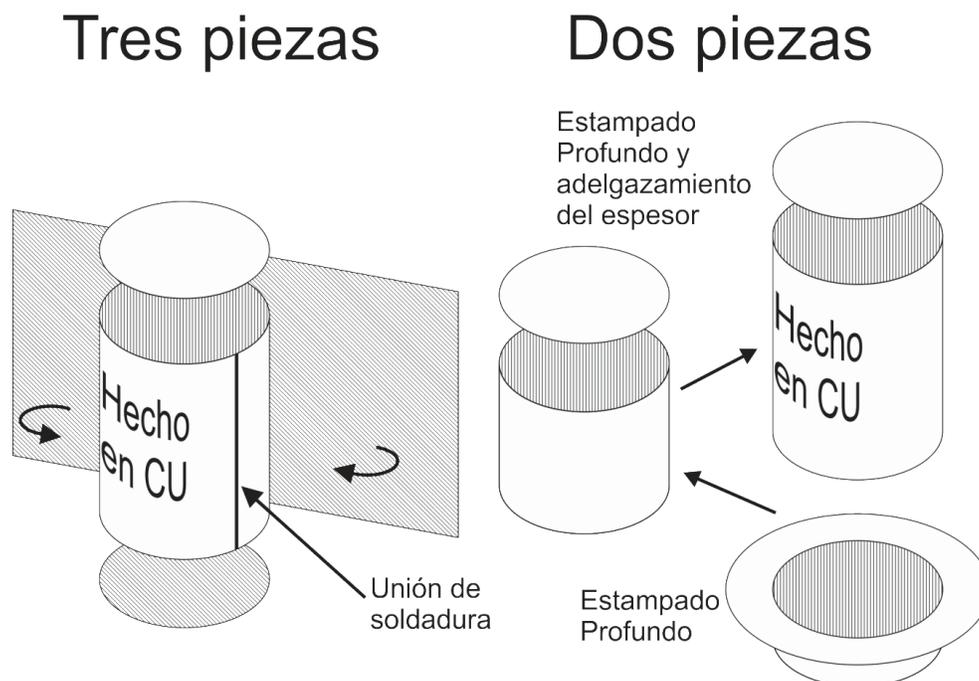


Figura 1.1. Procesos de manufactura para latas. (a) Proceso artesanal (tres piezas), (b) proceso actual (dos piezas).

Es necesario que la lámina posea una lubricación previa, lo cual se logra con rollos de lámina pre-lubricados, para conformar el cuerpo de la lata en dos etapas. La primera etapa consiste en conformar una copa inicial con un primer estampado profundo donde el espesor aumenta de grosor en el borde superior. Más adelante, este aumento se discute ampliamente en la sección de resultados experimentales del ensayo de Fukui. Para la segunda etapa (en inglés, *ironing*), se sigue estampando de tal manera que se disminuye el espesor con dados instrumentales y se alarga el tamaño del cuerpo de la lata para que alcancen las normas establecidas; el espesor se reduce de 0.3 a 0.11 mm aproximadamente. Esta segunda etapa se muestra en la Figura 1.2. La naturaleza de los esfuerzos y deformaciones durante el estampado profundo se presenta en el capítulo 1.3.5, donde se explica que la zona más importante de esfuerzos y deformaciones se encuentra presente sobre la pared y el borde superior del cuerpo de la lata.

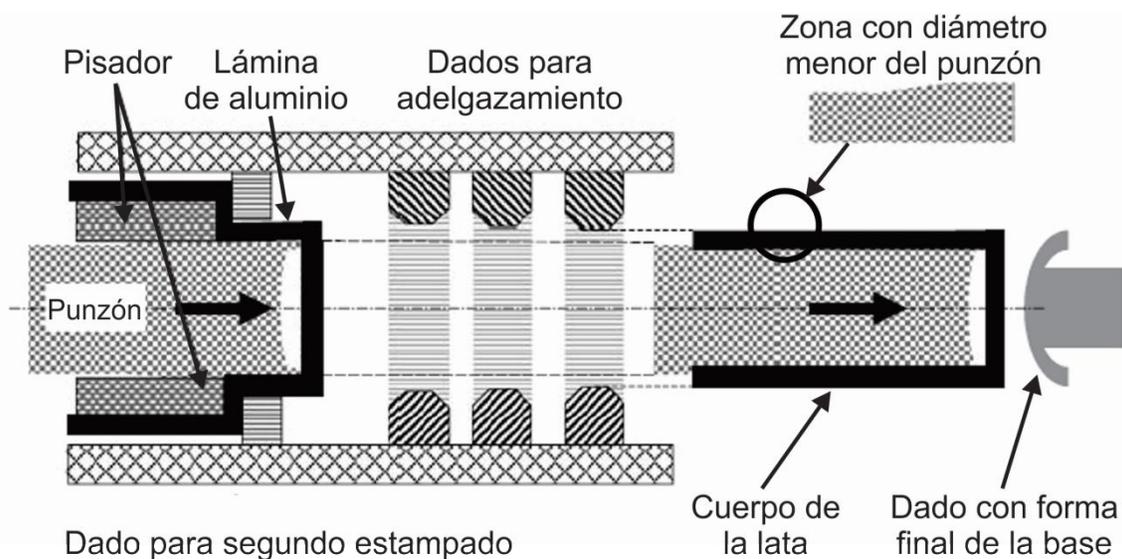


Figura 1.2. Estampado profundo que controla el espesor de la lata (traducción al español de [5]).

Como se muestra en la Figura 1.2, se emplea un punzón y dado con forma curva (convexo y cóncavo, respectivamente) para darle forma a la base de la copa. De lo contrario, la base quedaría plana y sin endurecimiento puesto que no se deformaría por estampado profundo. La segunda etapa son los dados de adelgazamiento, donde ocurre un movimiento más prolongado del punzón. Finalmente, el último extremo del punzón que entra en contacto con la copa presenta una reducción en su diámetro para evitar el adelgazamiento en la parte superior de la pared de la lata, ya que en pasos siguientes se requiere realizar una estricción en dicha zona. Dicho espesor se mantiene alrededor de los 0.16 mm [5].

Como se ha mencionado previamente, el proceso de laminado en productos metálicos influye en su comportamiento constitutivo puesto que se forma una textura cristalina. Esta es la razón por la cual la altura del cuerpo de la lata no suele ser homogénea, puesto que las propiedades mecánicas de la lámina empleada para su

elaboración varían según la dirección estudiada dentro de ésta. Se dice que el cuerpo de la lata forma “orejas” (en inglés, *earing*), las cuales representan una pérdida de material debido a que se tienen que remover para igualar la altura y poder unir con la tapa. La naturaleza de este defecto tecnológico se explica con mayor detalle en secciones posteriores.

Aun cuando hoy en día cada lata de aluminio producida solo pesa 13 g en promedio, su producción convierte a esta industria en una de las principales compradoras de aluminio a nivel mundial. En Estados Unidos, la producción anual de latas de aluminio alcanza los 100 billones de piezas, por lo que se requieren más de 1 millón de toneladas de aluminio para satisfacer esta demanda. Por otra parte, en la Unión Europea la producción de latas para el año 2004 fue de 17 billones de piezas a base de acero, y cerca de 23 billones de aluminio. Por lo tanto, cualquier innovación que se agregue al proceso tecnológico de producción de latas se verá reflejado en un ahorro de dinero por pieza producida, el cual se vuelve significativo debido a la alta cantidad de piezas producidas<sup>1</sup>. Existen pocas referencias del proceso tecnológico para producir latas debido a que la mayor parte de las empresas prefieren mantener su proceso como secreto industrial.

### 1.1.2. Micro-conformado de lámina metálica

Hoy en día existe una tendencia a miniaturizar diversos productos comerciales que existen en el mercado. Cabe señalar a los productos electrónicos portátiles como teléfonos inteligentes (smartphones), computadoras, reproductores de música, así como el área instrumental de la medicina, especialmente en el mercado de sensores y en sistemas opto-electrónicos. Los productos de micro-estampado requieren de un elevado conocimiento de la tecnología involucrada en su proceso de manufactura y producción. Sin embargo, disminuir cada vez más el tamaño de estos productos conlleva a un conformado mucho más complejo y costoso. Al final, el valor elevado del producto terminado con micro-estampado compensa los inconvenientes tecnológicos que se deben controlar durante el proceso. De las referencias [6,7,8,9,10,11], se muestra una serie de razones de dimensión por las cuales se complica el micro-conformado.

- La razón de la superficie de la lámina al volumen de ésta se incrementa cuando se miniaturiza.
- La fuerza de adhesión y tensión superficial tienen un mayor efecto cuando se minimiza el producto.
- La influencia de los granos individuales de la microestructura de la lámina tiene un mayor efecto en el micro-estampado.

---

<sup>1</sup> The Aluminum Association, 2016. Annual Reports. <http://www.aluminum.org/about-association/annual-reports> (accessed 01.11.16).

- La razón de los espacios sin lubricar, que se forman sobre la superficie rugosa, a la superficie total de la lámina disminuye e influye en el producto final.

Las investigaciones en esta área científica se centran principalmente en la elaboración de nuevos métodos para parametrizar la fricción, debido a que existen efectos de tamaño y geometría que cambian radicalmente esta propiedad. También, el control de la fuerza utilizada para estampar se vuelve más complejo cuando la pieza a estampar reduce su tamaño. Por lo tanto, también será más difícil el control de los defectos tecnológicos asociados a esta fuerza. Finalmente, se requiere de nuevos métodos para medir el grado de embutición (en inglés, *Limiting Drawing Ratio*) de una lámina sujeta a micro-estampado.

### 1.1.3. Estampado de carrocería para coches

La carrocería de coches que se produce mediante estampado de láminas se realiza con un alto índice de producción, donde se busca que la calidad del producto se mejore, los tiempos de producción se reduzcan y se mejoren los medios de entrega para los lotes de producción manufacturados [12].

Con la ayuda de paquetería *FEM* (en inglés, *Finite Element Method*) es posible analizar el proceso de estampado con el fin de mejorar el conocimiento del proceso y su predicción, eliminando así el ensayo y error en el herramental utilizado. Esto quiere decir que el uso de *software FEM* reduce los costos de operación y aumenta la confiabilidad del proceso. Un proceso común que se sigue en el estampado de láminas consiste en el diseño de la geometría de la pieza, para continuar con el diseño del herramental necesario. En esta parte del proceso es común realizar ensayos de manufactura con la pieza de trabajo y el herramental diseñados anteriormente, para retroalimentar con información experimental tanto el diseño de la pieza de trabajo como el diseño del herramental. Finalmente, este paso de retroalimentación promueve que el proceso de manufactura se optimice y termine funcionando adecuadamente en líneas de producción. Sin embargo, hoy en día este proceso para el diseño y manufactura de estampado de láminas requiere que se realice conjuntamente; es decir, se busca que el proceso se vuelva concurrente para reducir costos de operación y tiempo de desarrollo de nuevos productos.

Durante mucho tiempo, el acero ha sido el principal material para la manufactura de la carrocería de los coches. Aun cuando se han utilizado materiales más ligeros como aleaciones de aluminio, polímeros y materiales compuestos en lugar del acero, éste sigue siendo el material más utilizado. Una lámina de acero para la carrocería de un coche debe conjuntar un número de requisitos, tales como buena conformabilidad, resistencia suficiente, buena unión por soldadura, resistencia a la corrosión, buena calidad en los acabados superficiales y alta absorción de energía

al impacto. Estos requisitos pueden conseguirse solamente en aceros con bajo contenido de carbono, debido a que aceros con medio y alto contenido de carbono no son lo suficientemente dúctiles, además de mostrar una baja soldabilidad. Como ejemplos de aceros con bajo contenido de carbono son los aceros calmados con Al (en inglés Al killed steels) y aceros libres de intersticiales (en inglés IF steels). Un caso especial son las aleaciones de aluminio para lámina automotriz como alternativa al acero puesto que cumplen con todas las funciones descritas anteriormente, pero con una reducción importante de peso en el coche y, por lo tanto, un ahorro significativo de combustible durante su operación. Existe una gran cantidad de revisiones sobre estampado de lámina automotriz y aplicaciones [13,14,15,16,17,18,19]. Sin embargo, debido a que la manufactura con componentes de aluminio incrementa sustancialmente el precio final de un coche, se sigue prefiriendo utilizar lámina de acero en la mayoría de las líneas automotrices comerciales.

#### 1.1.4. Estampado en caliente de productos laminados

Debido a la gran demanda de automóviles más ligeros, seguros y con mejor respuesta a impactos, la industria automotriz ha empleado el uso de aceros de alta resistencia - con bajo contenido de carbono - (en inglés, *ultra-high strength steels*) como alternativa comercial para la estructura del chasis. La demanda por este tipo de aceros ha sido tan grande que desde el año 2000 se emplea para este propósito y el número de partes producidas por año ha llegado hasta la cifra de 107 millones de partes en el 2007 [20]. Las partes de la carrocería que son estampadas en caliente se muestran en la Figura 1.3.

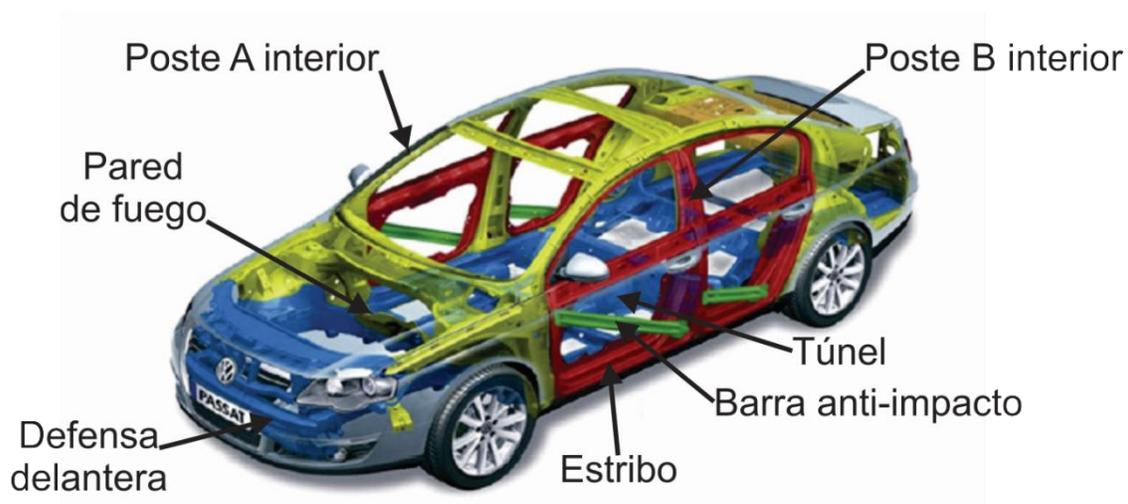


Figura 1.3. Componentes estampados en caliente en la carrocería de un coche (traducción al español de [20]). Poste A (amarillo), poste B (rojo), defensa delantera (azul), pared de fuego (amarillo), estribo (rojo), túnel (azul), barra anti-impacto (verde).

El estampado en caliente se puede realizar mediante dos métodos: el estampado en caliente directo y el estampado en caliente indirecto. Para el primero, la lámina de acero a estampar debe calentarse hasta la temperatura de austenización, para después ser trasladada al troquel que estampa y temple a la pieza en una sola operación. Para el segundo (estampado en caliente indirecto), la pieza recibe un primer estampado en frío, para después ser calentada hasta su temperatura de austenización, y finalmente se traslada hacia el troquel de estampado en caliente; en este tipo de método, se realizan operaciones de calibración y templado.

La ventaja de realizar un tratamiento térmico a las piezas de acero estampadas en caliente es que eleva su resistencia (hasta 1500 MPa) al llevar a cabo una transformación martensítica dentro de su estructura cristalina. Sin embargo, si se realiza una transformación martensítica completa en el acero, el porcentaje de elongación posible en la pieza se reduce hasta un 5%. Esto deteriora significativamente el rendimiento de la pieza a la absorción de energía durante un impacto. Por lo tanto, el troquel de estampado presenta zonas con temperaturas de temple diferentes para formar en la pieza regiones con diferente contenido de martensita. Es decir, se manufactura una pieza con diferentes grados de absorción de energía al impacto y con zonas de resistencia diferentes. Este efecto también se ha logrado cuando se crea una pieza mediante varios aceros con diferente temple cuya respuesta al impacto es distinta. Mientras que en uno de los aceros es posible llegar a la temperatura de austenización, en el otro esto no se logra. Entonces, una vez que el troquel aplique el tratamiento térmico, en una de las partes de acero se consigue la alta resistencia por la formación de martensita. En la otra parte, los parámetros del tratamiento térmico no logran el mismo temple. Finalmente, ambas partes son soldadas mediante láser. En la Figura 1.4 se muestra un poste B de un coche con ambas técnicas de estampado en caliente.

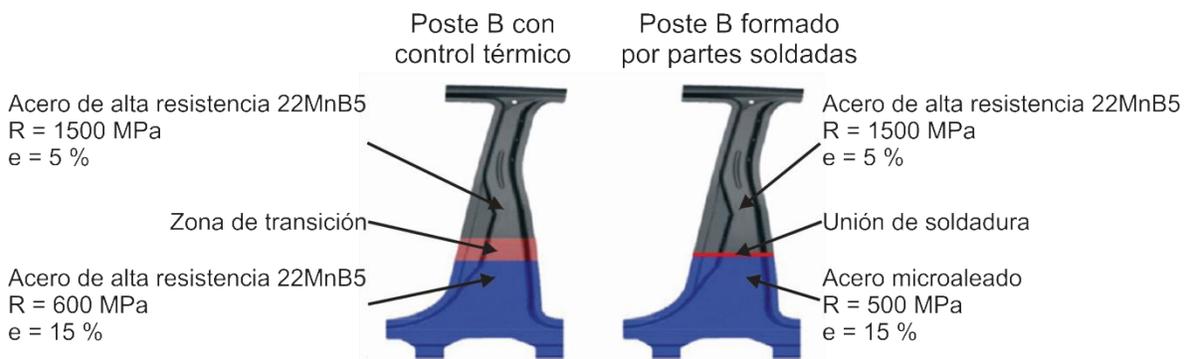


Figura 1.4. Poste B estampados en caliente, con diferentes resistencias (traducción al español de [20]).

Se recomienda revisar las referencias [21,22,23,24,25] para ahondar más sobre estampado en caliente de lámina, donde se explica con mayor detalle el estado del arte y algunas aplicaciones tecnológicas.

## 1.2. Aspectos básicos de la tribología en procesos de manufactura

La tribología es la ciencia dedicada al estudio de superficies en contacto que se encuentran en movimiento relativo [26]. El resultado de este movimiento relativo induce fricción entre las superficies, definida como una oposición al movimiento relativo que experimentan y que no solamente depende del material que compone a las superficies, sino también de su geometría, rugosidad, temperatura y, en su caso, del tipo de lubricación que las separa. Por lo tanto, esta área de estudio abarca un gran número de áreas de investigación que requieren de una aproximación multidisciplinaria. Las superficies en cuestión poseen una rugosidad producida por el acabado superficial del proceso de conformado que las fabrica; de tal forma que el área de manufactura que pertenece a la ingeniería mecánica se vuelve importante en un estudio de tribología. A su vez, esta rugosidad de las superficies propicia que el contacto entre ambas se realice en pequeñas zonas microscópicas localizadas, ya sea en el rango elástico o plástico; este tipo de interacción es estudiada por la mecánica de contacto. La Figura 1.5 muestra un diagrama del contacto a nivel microscópico de las superficies.

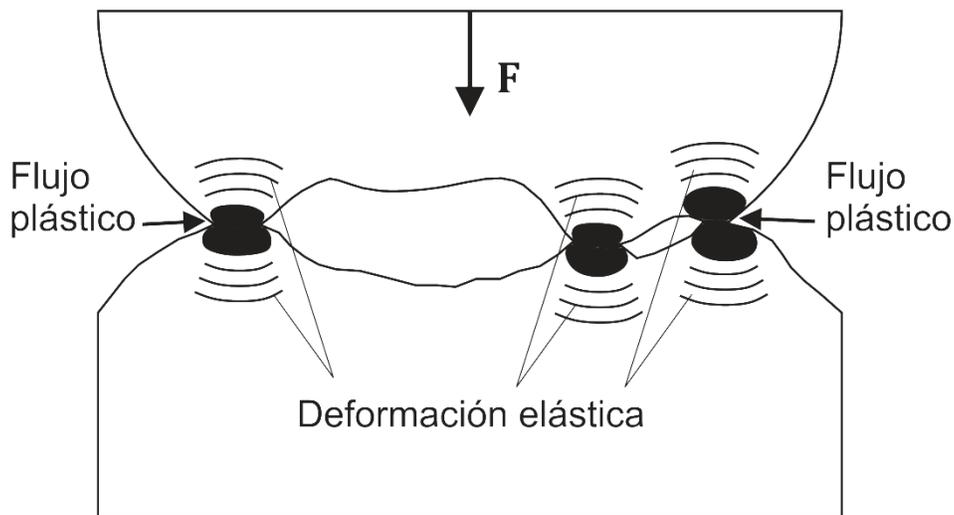


Figura 1.5. Contacto microscópico entre dos superficies rugosas.

También, dichas deformaciones están en completa relación con la estructura cristalina y fractura de las superficies; un área estudiada por la metalurgia mecánica y la metalurgia física. La corrosión que puede existir en las superficies es un fenómeno estudiado por la metalurgia química y también es necesaria para un estudio tribológico. Finalmente, si el propósito del estudio tribológico es reducir la fricción, el uso de lubricantes entre las superficies es un área estudiada por la mecánica de fluidos, donde generalmente se busca optimizar el espesor de la capa lubricante entre las superficies.

Debido a que el conformado de láminas metálicas es un proceso de manufactura ampliamente utilizado en la industria (como se muestra en secciones anteriores), es necesario revisar los aspectos más importantes de la tribología en esta área con el propósito de comprender mejor la naturaleza de la fricción y su importancia. A pesar de que la tribología es importante para optimizar y predecir la viabilidad de los procesos de manufactura en general, esta área de conocimiento no ha tenido una gran investigación si se compara con el estudio de la tribología en los elementos de máquinas. Además de la diversidad en las áreas de estudio de la tribología que se ha mencionado, la gran variedad de los procesos de manufactura que existen también agrega un área de investigación más al aspecto multidisciplinario de la tribología. Por lo tanto, aquí solamente se mencionan los aspectos de la tribología que son diferentes de aquellos aspectos de la tribología en el diseño de elementos de máquinas.

- ✓ Un aspecto único de la tribología en el estampado de láminas es la presión que se ejerce sobre la superficie común pieza de trabajo/herramienta, debido a que ésta rebasa el esfuerzo de cedencia en la pieza de trabajo. Por lo tanto, los valores de fricción para estampado de láminas son totalmente diferentes de aquellos valores obtenidos para la gran mayoría de los elementos de máquinas, cuyo diseño se encuentra generalmente en el rango elástico.
- ✓ Los lubricantes representan un alto costo, además de que es difícil removerlos de la pieza de trabajo y llegan a afectar otro tipo de procesos subsecuentes (soldadura, pintado y otros recubrimientos superficiales). Sin embargo, en muchas operaciones los lubricantes son críticos para el control de la calidad del acabado superficial, desgaste en la herramienta y consumo de potencia en la máquina-herramienta, lo cual justifica su precio. El uso de los lubricantes también es un aspecto diferente si hablamos de procesos de manufactura de productos laminados. A diferencia del punto de vista metalúrgico, el trabajo en frío y en caliente para los lubricantes establece una temperatura límite que define un rango de temperaturas para lubricantes orgánicos y lubricantes sintéticos, que algunos autores definen como 250 °C [27].
- ✓ Cuando se está diseñando el herramental para el estampado de productos laminados, es muy importante predecir las deformaciones a las que se encuentra sujeta la lámina cuando se estampa con el fin de diseñar la carga que se requiere en la prensa, considerando necesariamente que existe fricción en las superficies involucradas. De hecho, el aspecto más importante de la tribología en el estampado de láminas es que siempre existe contacto directo entre la lámina y la herramienta de estampado en algunas zonas localizadas. Es decir, el lubricante utilizado disminuye la fricción entre las superficies según el régimen de velocidad que alcance. El régimen de capa completa (en inglés, *full film regime*) representa una separación casi en su totalidad entre la lámina y la herramienta, lo cual disminuye en demasía a la fricción; mientras que el régimen de capa frontera (en inglés, *boundary film regime*) establece el mayor aumento en la fricción, por lo que existe el mayor

contacto entre las asperezas de las superficies. Para el estampado profundo, la Figura 1.6 [28] muestra la variación experimental del coeficiente de fricción seca, cuyos resultados son similares con respecto al número adimensional de velocidad definido como  $S = \mu Ux/pR^2$ , donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción seca,  $U$  es la velocidad de deslizamiento en la superficie común,  $x$  la longitud de contacto,  $p$  la presión en la superficie común y  $R$  la rugosidad (la altura máxima en el perfil). Los datos experimentales consideraron diversos acabados superficiales (Electrical Discharge Texturing, EDT; shot blasting, shotblast; y Laser Beam Texturing, lasertex), así como varios lubricantes utilizados para la medición experimental.

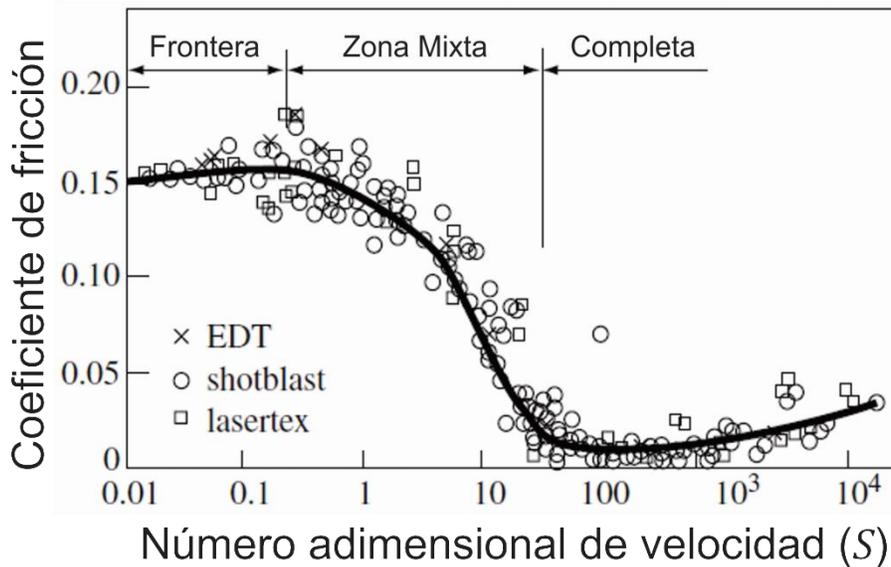


Figura 1.6. Datos experimentales del coeficiente de fricción (traducción al español de [28]).

- ✓ Los lubricantes líquidos a base de agua, también llamados emulsiones, son ampliamente utilizados en el estampado de láminas para coches y latas por tener un bajo nivel de contaminación. Una mezcla con aceite, aditivos, agentes antibacteriales, anti-espuma, etc., junto con una base de agua muestra excelentes condiciones de lubricación comparado con el uso de un lubricante de aceite puro. Además, su composición a base de agua le otorga propiedades refrigerantes, altamente apreciadas en el conformado de metales a altas velocidades.
- ✓ El uso de lubricantes sólidos para estampado de láminas es importante cuando la complejidad de la pieza de trabajo es alta, mostrando una mejor lubricación comparada con las emulsiones [29]. Los lubricantes sólidos más utilizados son los jabones a base de zinc y calcio, la cera natural de las abejas y algunos polímeros. La mejor manera de añadir estos lubricantes sólidos a la lámina es a través de una capa portadora hecha de polímero (por ejemplo, una capa a base de Teflón). El resultado de esta lubricación es que reduce la carga de estampado en la prensa, así como un mayor *LDR* en la pieza

estampada. Sin embargo, se debe poner una gran atención en el espesor de la capa, ya que un espesor insuficiente provoca un mayor desgaste en la herramienta; mientras que un exceso en la capa de jabón puede terminar adhiriéndose a la herramienta y provocar que las tolerancias en la pieza de trabajo se vean alteradas. Para usos industriales, este tipo de capas generalmente se ponen por medio de aerosoles en polvo o co-laminación. La Figura 1.7 muestra un esquema de los espesores manejados para las capas de jabón y cera. También se utilizan con frecuencia las capas metálicas como medio de lubricación, especialmente en el estampado de aceros. Por ejemplo, algunos contenedores de comida son estampados con lámina de acero cubierta de estaño; dicha capa posee la doble ventaja de lubricar durante el estampado y de ser un agente protector contra la corrosión.

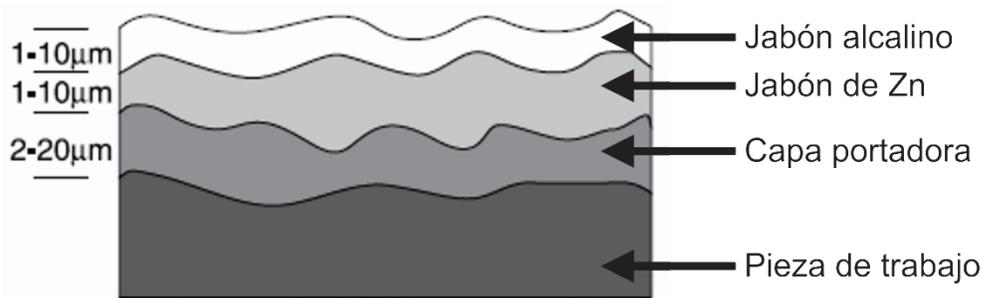


Figura 1.7. Diagrama de una capa portadora para lubricante sólido (traducción al español de [29]).

- ✓ El acabado superficial en una lámina estampada también representa un factor importante a considerar. Un acabado suave representa un aspecto más llamativo a la vista del consumidor, lo cual es importante si se habla de productos como contenedores o partes estampadas para autos. Por lo tanto, el valor del coeficiente de fricción depende del aplanado de las asperezas en una superficie el cual se logra por medio de algún acabado superficial. La Figura 1.8 muestra el comportamiento de la fuerza de fricción como una función de la fuerza normal que se ejerce en la pieza de trabajo, incluyendo a las láminas con estampado profundo. Resulta evidente de esta figura que el modelo de Coulomb para fricción seca aplica solamente si las asperezas en la superficie no han sido aplanadas por algún acabado superficial o durante el proceso de manufactura. Esto, como se ha mencionado antes, provoca que el contacto en la superficie común ocurra únicamente en zonas microscópicas localizadas. Por ejemplo, el estampado profundo se encuentra en una región mixta donde las asperezas de la superficie poseen un gran porcentaje de aplanamiento, sin llegar a ser aplastadas completamente. Por lo tanto, es justificable que los resultados en una simulación de estampado profundo tengan una veracidad aceptable si se toma un coeficiente de fricción seca constante; la realidad es que la fricción en el estampado profundo requiere de un modelado mucho más complejo que involucre todos los aspectos que se han mencionado [30,31,32].

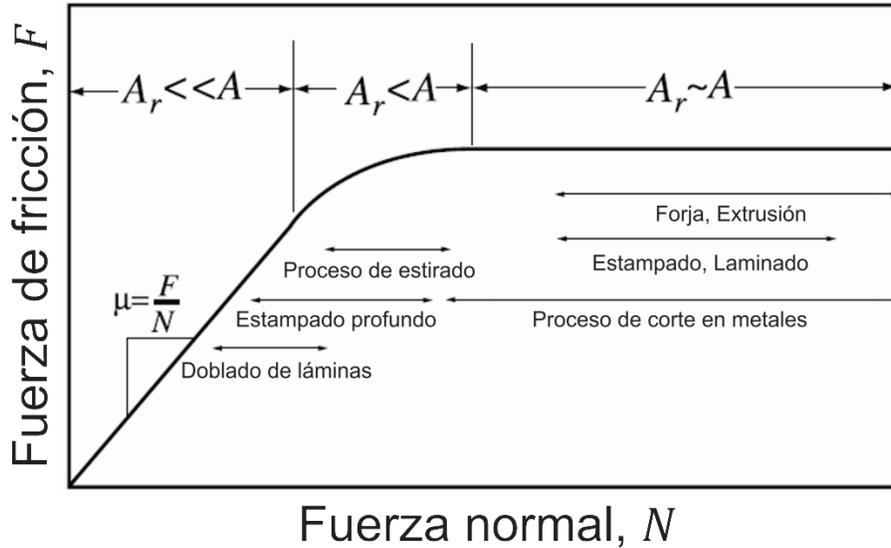


Figura 1.8. Fuerza de fricción como función de la fuerza normal. El modelo de Coulomb para fricción seca se utiliza en procesos donde el área real de contacto ( $A_r$ ) es mucho menor que el área macroscópica aparente ( $A$ ) (traducción al español de [28]).

- ✓ La interacción entre las asperezas de la superficie de trabajo y la superficie de la herramienta es de vital importancia. Al entrar en contacto ambas superficies, en ocasiones se forman pequeños fragmentos de desgaste a partir de las asperezas por medio del mecanismo llamado micro-corte. Estos fragmentos se pueden adherir tanto a la pieza de trabajo como a la herramienta. En ambos casos, los acabados superficiales pueden verse afectados si no se controla adecuadamente la generación de fragmentos de desgaste. Cuando los fragmentos son adheridos a la pieza de trabajo, se forma una capa de ceniza (en inglés, *smudge*) que a menudo puede quitarse utilizando un paño suave; sin embargo, cuando los fragmentos se adhieren en gran cantidad a la herramienta, es muy probable que se formen surcos en la lámina debido a que la tolerancia permisible en la herramienta se ha perdido (en inglés, *galling*).

De acuerdo a la Figura 1.8, es aceptable considerar en los procesos de manufactura de productos laminados que la fricción ocasionada en la superficie común “pieza de trabajo/herramienta” se comporte de acuerdo al modelo de Coulomb para fricción seca, tomando en cuenta que este valor experimental ha sido calculado para regímenes de velocidad moderados y bajos.

## 1.3. Ensayos de caracterización y efectos de la anisotropía

### 1.3.1. Ensayo de tracción

Un ensayo de tracción es un ensayo tecnológico que sigue una norma establecida para proveer información sobre la resistencia y ductilidad de materiales sujetos a esfuerzos de tracción uniaxial. Esta información es útil para comparar materiales, caracterizar nuevas aleaciones, control de calidad y en algunos casos, para diseño de elementos de máquinas. La máquina universal y la geometría de la probeta tienen especificaciones que permiten una aplicación primordialmente de tracción sobre su región central, tal y como se explica en la norma ASTM E8M, versión SI [33]. La variedad de materiales a ensayar mediante tracción es amplia, por lo que existe también una gran cantidad de probetas con geometrías específicas; en esta tesis sólo se utilizan probetas de tracción manufacturadas directamente de lámina metálica. La Figura 1.9 muestra la máquina universal utilizada y la geometría de la probeta de tracción.

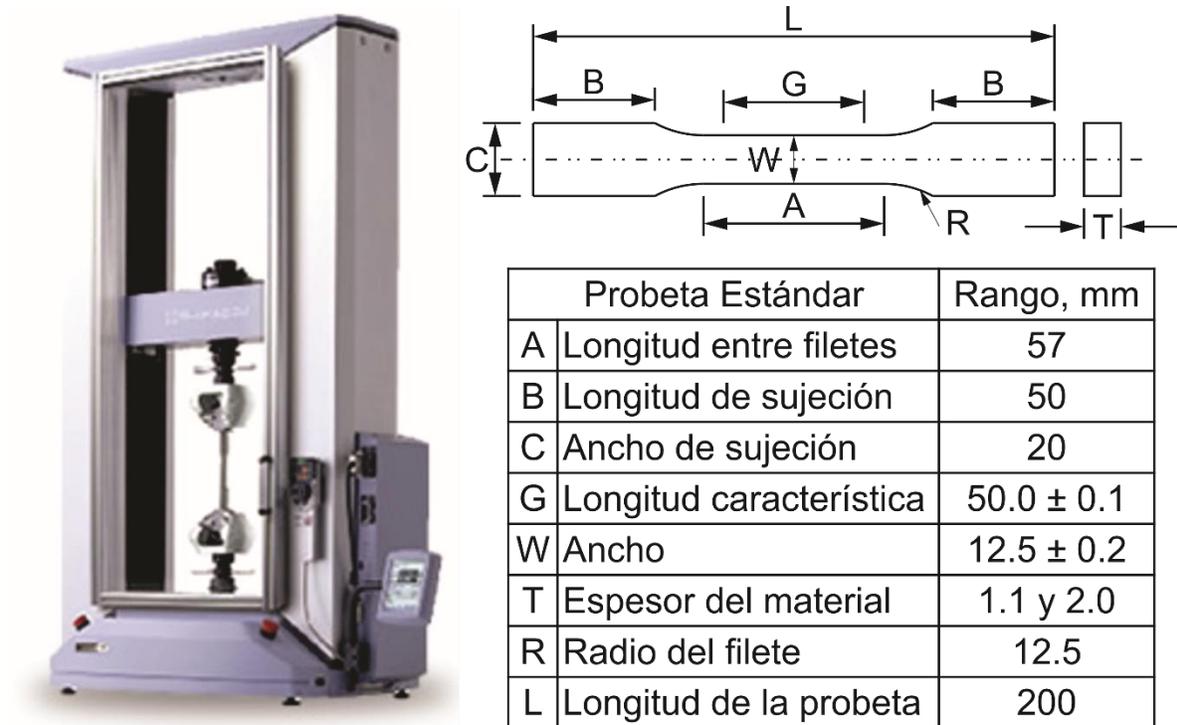


Figura 1.9. Máquina de tracción y geometría de la probeta (manufacturada de lámina), según la norma ASTM E8M. G también se le conoce como longitud del extensómetro; A se le llama también longitud reducida.

- *Definiciones de esfuerzo y deformación*

La máquina universal posee una celda de carga que mide la fuerza de reacción del material ensayado ( $F$ ) sujeto a un desplazamiento vertical controlado impuesto por el cabezal. Éste último, posee también un sensor que mide la elongación de la probeta ( $\Delta l$ ). Con las mediciones anteriores, es posible definir esfuerzos y deformaciones *ingenieriles* ( $s$  y  $e$ , respectivamente) utilizando la geometría original de la probeta ( $s = F/A_0$ ,  $e = \Delta l/l_0$ , donde  $A_0$  y  $l_0$  son el área transversal inicial y longitud inicial de la probeta, respectivamente). De hecho, las curvas  $F-\Delta l$  y  $s-e$  son cualitativamente idénticas dado que sólo se está dividiendo entre un factor constante, como se muestra en la Figura 1.10.

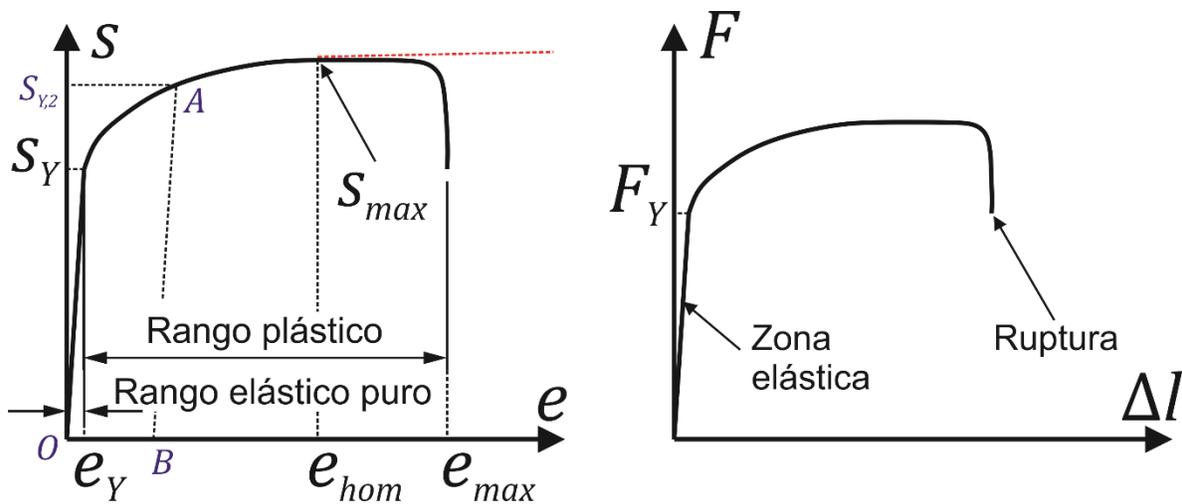


Figura 1.10. Curvas  $F-\Delta l$  y  $s-e$  típicas para materiales no ferrosos. La línea punteada roja muestra la curva correspondiente a esfuerzos y deformaciones logarítmicas.

Las definiciones de esfuerzo y deformación anteriores permiten definir propiedades mecánicas ajenas a la geometría de la probeta. Es decir, se puede definir el esfuerzo de cedencia ( $S_Y$ ) y el esfuerzo máximo a tracción ( $S_{max}$ ), ambos asociados a la resistencia del material, que describen el comienzo de la deformación plástica ( $e_Y$ ) y el punto máximo en la curva  $s-e$ , respectivamente; mientras que el % de reducción del área y el % de elongación están relacionados con la cantidad de deformación que un material puede experimentar antes de que se rompa la probeta ( $e_{max}$ ). Es decir, caracterizan la ductilidad del material. La Ecuación (1.1) muestra las definiciones anteriores.

$$Y = \frac{F_Y}{A_0} = S_Y \quad (1.1a)$$

$$S_{max} = \frac{F_{max}}{A_0} \quad (1.1b)$$

$$\% \text{ de elongación} = 100 \left( \frac{l_F - l_0}{l_0} \right) \quad (1.1c)$$

$$\% \text{ de reducción de área} = 100 \left( \frac{A_F - A_0}{A_0} \right) \quad (1.1d)$$

Donde  $F_Y$  es la fuerza elástica máxima sin deformación plástica en el material,  $l_F$  y  $A_F$  son la longitud y el área transversal de la probeta al momento de la fractura, respectivamente. Si el ensayo es interrumpido antes de llegar a la ruptura, la curva  $s-e$  del material regresa a un esfuerzo nulo siguiendo una línea recta paralela a la línea de la región elástica (trayectoria  $OAB$  en la Figura 1.10). Al reiniciar el ensayo, la probeta posee ahora un rango menor de elongación para la ruptura y se requiere aplicar un  $s_{Y,2}$  mayor a  $s_Y$  para que haya deformación plástica nuevamente. La diferencia  $\Delta s_Y = s_{Y,2} - s_Y$  caracteriza el endurecimiento por trabajo en frío del material. Este concepto se define formalmente más adelante.

La desventaja de utilizar las definiciones ingenieriles anteriores radica en el uso de la dimensión inicial. Cada vez que un material se deforma y se utiliza la definición ingenieril, siempre se hace referencia a la dimensión inicial inmediata, por lo que en cada evento de deformación se obtiene una deformación ingenieril diferente. Por lo tanto, es preferible utilizar una definición de deformación que vaya haciendo referencia a la dimensión *actual* o *instantánea* en la probeta, ya sea longitud o área transversal. La deformación logarítmica ( $\varepsilon$ ) utiliza la longitud actual de la probeta ( $l$ ) en su definición junto con cada incremento diferencial en ésta, tal y como se muestra en la Ecuación (1.2a). De igual forma, el esfuerzo logarítmico ( $\sigma$ ) hace uso del área transversal instantánea ( $A$ ) en la probeta y de la fuerza actual en ella ( $F$ ) – Ecuación (1.2b) – (*Cons.Vol.* significa conservación de volumen). Las definiciones logarítmicas pueden expresarse en términos de las definiciones ingenieriles.

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \left| \frac{l}{l_0} \right| = \ln \left| 1 + \frac{l-l_0}{l_0} \right| = \ln |1 + e| \quad (1.2a)$$

$$\sigma = \frac{F}{A} \xrightarrow{\text{Cons.Vol}} \sigma = \frac{F}{A_0} \frac{l}{l_0} = s(1 + e) \quad (1.2b)$$

La línea roja punteada en la Figura 1.10 muestra el comportamiento de la curva  $\sigma-\varepsilon$ , donde ésta no reduce súbitamente debido a que considera la reducción instantánea del área transversal.

- *Definiciones energéticas*

La resiliencia ( $R$ ) es un parámetro que mide la energía elástica que puede almacenar un material. En la Figura 1.10, el área bajo la curva en la región elástica representa a  $R$ .  $E$  se refiere al módulo de Young. También, se define la tenacidad de un material ( $T$ ) como la cantidad de energía que puede absorber éste antes de su ruptura. Volviendo a la Figura 1.10, el área bajo la curva de toda la curva  $s$ - $e$  representa el valor para  $T$ . Ambas definiciones se encuentran expresadas en la Ecuación (1.3).

$$R = \int_0^{e_Y} s de = \int_0^{e_Y} E e de \rightarrow R = \frac{s_Y^2}{2E} \quad (1.3a)$$

$$T = \int_0^{e_{max}} s de \quad (1.3b)$$

- *Criterio de Considère<sup>2</sup>*

Durante el ensayo, la probeta comienza a deformarse elásticamente hasta que se alcanza  $s_Y$  para  $e_Y$ . De este punto en adelante, el material sigue deformándose elásticamente en mucho menor cantidad que la deformación plástica, hasta que la curva alcanza un punto máximo en  $e_{hom}$ . A partir de este punto, la deformación en la probeta se vuelve localizada, donde inicia una reducción difusa del área transversal, llamada estricción o cuello. Finalmente, esta reducción se vuelve severa hasta que la probeta llega al punto de ruptura; es decir, para  $e_{max}$ .

El criterio de Considère establece el comienzo de la formación del cuello en la probeta. Su demostración no se incluye en esta tesis, pero puede realizarse utilizando las definiciones ingenieriles, la regla de la cadena en Matemáticas y el punto máximo de la curva  $s$ - $e$  definido por  $ds/de = 0$ . La Ecuación (1.4) muestra el resultado final.

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma \quad (1.4)$$

---

<sup>2</sup> Considère A., 1885. Annales des ponts et chaussees I sem., 574.

### 1.3.2. Anisotropía en lámina metálica

Durante el conformado mecánico de un material metálico, se observa el desarrollo de una orientación preferencial en los sistemas cristalinos de los granos que definen su microestructura, así como una orientación preferencial en la morfología de los mismos. La distribución de dichas orientaciones se denomina como textura cristalográfica y morfológica, respectivamente. Su presencia modifica las propiedades mecánicas, físicas e incluso químicas según la dirección que se analiza. En las secciones posteriores se analiza con mayor detalle el concepto de textura cristalográfica, la cual es la principal responsable para que exista anisotropía plástica en un material.

La formación de “orejas” en la copa estampada, que se ha mencionado previamente, es una consecuencia de la textura cristalina formada por laminación en la aleación de aluminio utilizada para la creación de latas. Debido a este inconveniente tecnológico, se han propuesto diversos métodos para la medición de la anisotropía en una lámina metálica. La medición de las propiedades anisotrópicas se realiza mediante probetas de tracción manufacturadas de la propia lámina, aunque también existen otros ensayos para caracterización de la anisotropía. Cada una de las probetas se encuentra orientada a un ángulo predeterminado con respecto a la dirección de laminado (**RD**) y durante el ensayo, se mide la reducción de su ancho y espesor. La Figura 1.11 muestra la orientación del sistema de referencia asociado a la lámina, con la dirección de laminado (**RD**), dirección normal al plano de la lámina (**ND**) y la dirección transversal a la lámina (**TD**).

A cada ángulo  $\alpha$  medido con respecto a **RD** se manufacturan varias probetas para ensayarse en una máquina de tracción, con la finalidad de encontrar sus contracciones y elongaciones. La Figura 1.12 muestra la orientación de las probetas de tracción con respecto a la dirección de laminado (**RD**) para utilizarse en un ensayo de tracción.

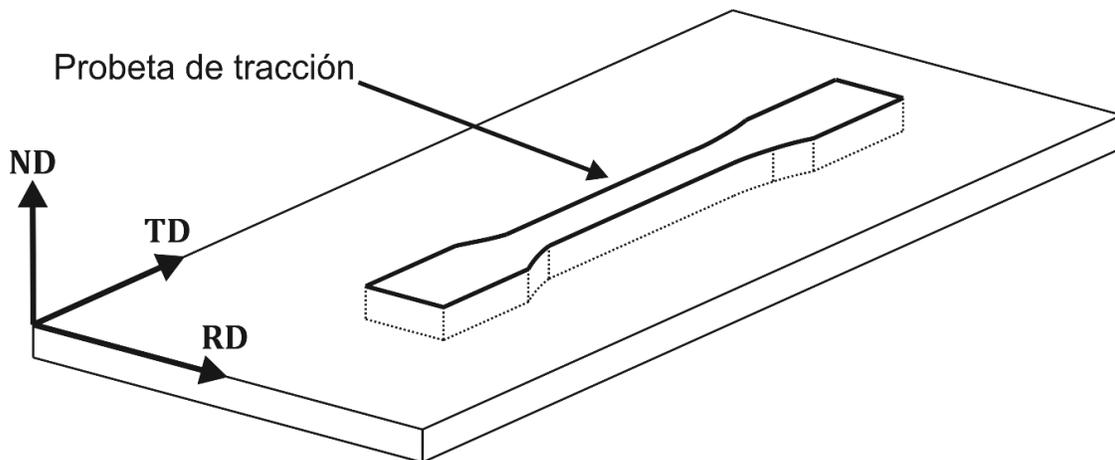


Figura 1.11. Sistema Dirección de laminado (**RD**) – Dirección normal (**ND**) – Dirección transversal (**TD**) asociado a la muestra.

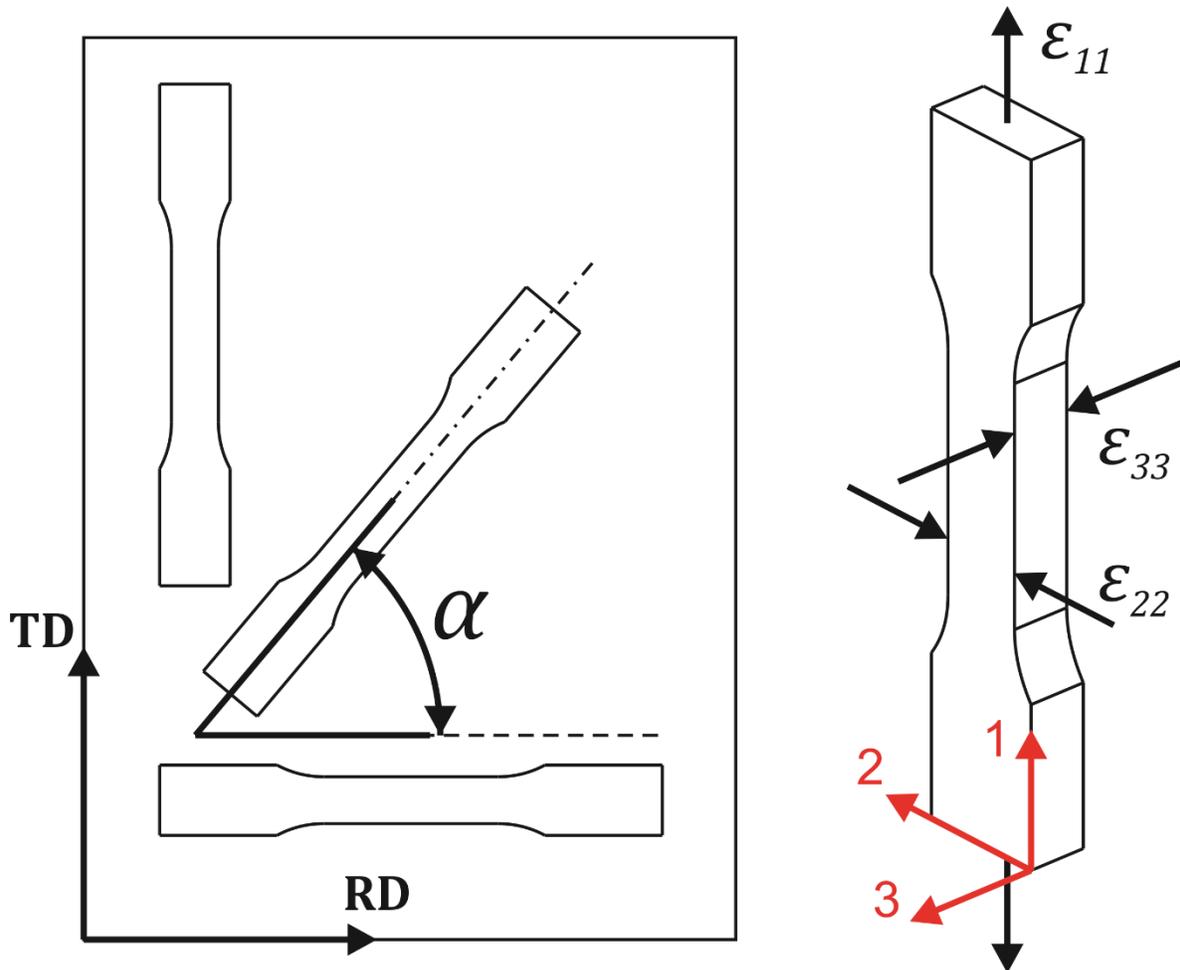


Figura 1.12. Probetas de tracción orientadas con respecto a RD (ángulo  $\alpha$ ). Las elongaciones  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{33}$  son los parámetros experimentales utilizados para medir el parámetro de Lankford.

La razón de la estricción del ancho ( $\epsilon_{22}$ ) al adelgazamiento del espesor ( $\epsilon_{33}$ ) se conoce como parámetro de Lankford ( $r$ ).

$$r(\alpha) = \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{33}} \text{ ó bien } \dot{r} = \frac{\dot{\epsilon}_{22}}{\dot{\epsilon}_{33}} \quad (1.5)$$

El valor de  $r$  puede estar en el intervalo  $[0, \infty]$ , interpretando 0 cuando la lámina no reduce su ancho, y para  $\infty$  la lámina no se adelgaza. El valor de  $r = 1$  se entiende como un valor promedio que indica comportamiento isotrópico en tracción, aunque la lámina sigue conservando comportamiento anisotrópico para otros estados de deformación. Como se explica más adelante, la lámina aumenta de espesor durante el ensayo de Fukui. Esta razón también puede definirse tomando  $\epsilon_{22}$  y  $\epsilon_{33}$  a lo largo de la dirección longitudinal, o bien con sus respectivas velocidades de deformación ( $\dot{\epsilon}_{22}$  y  $\dot{\epsilon}_{33}$ ), para definir los correspondientes valores  $q$  y  $\dot{q}$ . Esta es la razón de contracción. Para obtener el promedio de la resistencia de una lámina al

adelgazamiento de su espesor, se define el valor promedio de Lankford usando 3 valores de  $\alpha$  ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $90^\circ$ ) como se muestra en la Ecuación (1.6).

$$\bar{r} = \frac{r_{0^\circ} + 2r_{45^\circ} + r_{90^\circ}}{4} \quad (1.6)$$

También, para caracterizar la magnitud de la anisotropía en el plano de laminado, se utiliza una diferencia en el valor de Lankford.

$$\Delta r = \frac{r_{0^\circ} - 2r_{45^\circ} + r_{90^\circ}}{2} \quad (1.7)$$

Un valor de arriba de 1 para  $\Delta r$  indica buena conformabilidad, ya que esto significa que la placa se contrae más de lo que se adelgaza durante el ensayo de tracción.

### 1.3.3. Ensayo de deformación cortante simple

Para la caracterización del comportamiento constitutivo de productos metálicos, la ventaja que ofrece este ensayo (en inglés, *simple shear test*) sobre los ensayos convencionales de tracción o compresión es que se evita la estricción o cuello por tracción y el ensanchamiento (en inglés, *barreling*) que se presenta durante una prueba de compresión. También, el nivel de deformaciones alcanzado en una prueba de deformación cortante simple es más alto que el obtenido a tracción o compresión. El tipo de ensayo descrito aquí consiste en aplicar una deformación cortante simple y plana sobre una probeta hecha de lámina, cuya geometría es similar a las probetas utilizadas para el ensayo de tracción descrito en la sección 1.3.1.

La Figura 1.13 muestra un esquema típico de una probeta para este ensayo, donde se muestra la región de estudio del campo de deformaciones y sus dimensiones; las zonas grises en el diagrama de la probeta están sujetas por las mordazas del equipo, el cual se muestra más adelante. El inconveniente más importante de este ensayo es que cerca de las orillas que delimitan a la región de estudio, la deformación deja de ser predominantemente deformación cortante simple debido a defectos de sujeción, deslizamiento y fricción entre las mordazas y la probeta. Estos “efectos de orilla” se pueden disminuir si se aplica la relación de aspecto  $w/h \geq 10$  a la región de estudio en las probetas, además de mantener el espesor de éstas mucho menor a  $w$  y  $h$ ; esto beneficia que se tenga el nivel de deformación cortante simple de manera predominante sobre la región de estudio en la probeta.

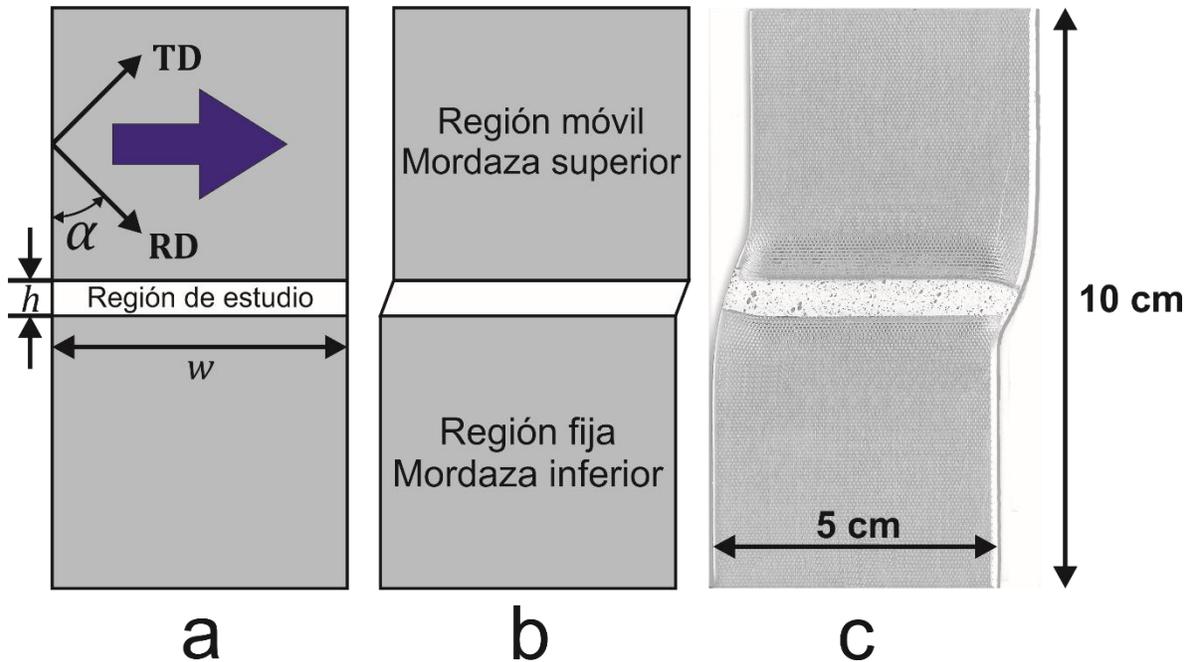


Figura 1.13. (a y b) Esquema de una probeta inicial y una ensayada para el experimento de deformación cortante simple; la dirección normal  $ND$  es perpendicular al plano de la página. (c) Probeta deformada real. La región de estudio es el lugar de la probeta sujeto principalmente a una deformación cortante simple.

La Figura 1.14 muestra el equipo utilizado para hacer esta prueba. Se observan en esta figura dos mordazas separadas entre sí, pero alineadas inicialmente. En esta posición, ambas mordazas sujetan firmemente a la probeta con ayuda de un mecanismo neumático antes de comenzar el ensayo. Una vez sujetos los extremos de la probeta, la estructura que sostiene a la mordaza superior comienza a desplazarse a la derecha con la ayuda de un motor que aplica hasta 30 kN en dirección horizontal; mientras que la mordaza inferior queda completamente fija durante todo el ensayo. Para eliminar la vibración excesiva durante el movimiento de la mordaza superior, se utilizan unos topes roscados que se ajustan al espacio entre éstas y la estructura de la máquina. Además, para mejorar la sujeción de las mordazas, se utiliza un pedazo de papel aluminio doblado que se introduce entre cada mordaza y la región gris de las láminas a ensayar (ver Figura 1.13), que comúnmente se conoce como “calza”. Esto homogeniza la sujeción de las mordazas puesto que la presión que ejercen sobre la probeta se vuelve más uniforme sobre la superficie de sujeción.

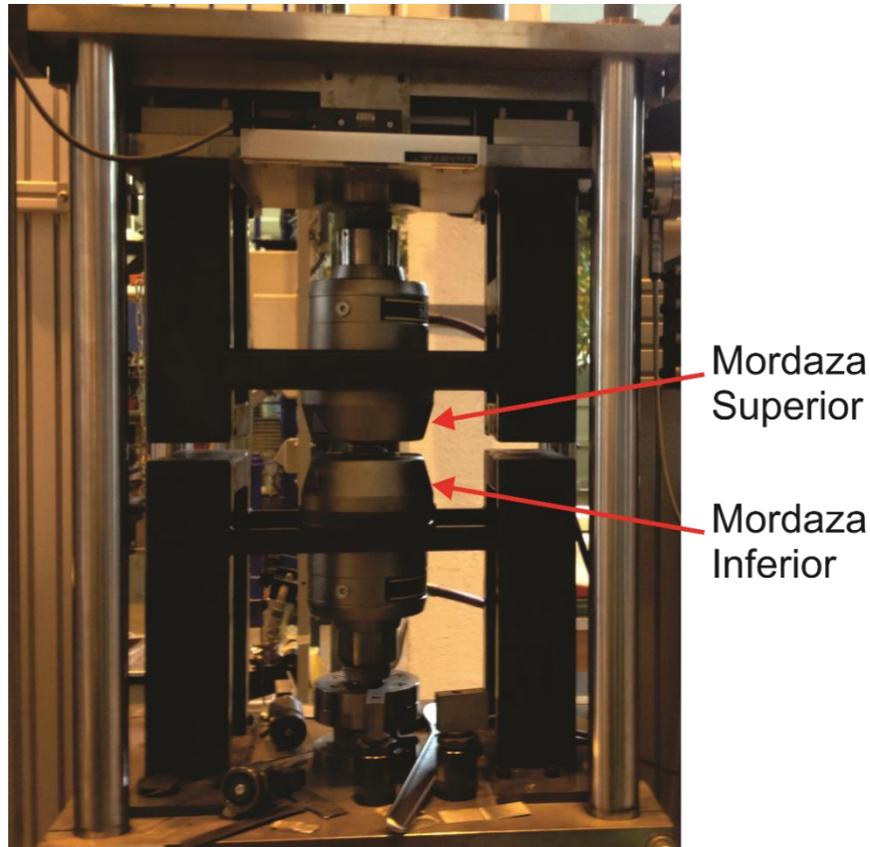


Figura 1.14. Equipo para el ensayo de deformación cortante simple. Los topes roscados van colocados en el espacio entre las mordazas y la estructura de color negro que se observa<sup>3</sup>.

Existen otras configuraciones similares [34,35,36] a la utilizada en el equipo de la Figura 1.14, donde se trata de eliminar las fuerzas laterales que se ejercen sobre las orillas de las probetas utilizadas. Por el momento no existe una norma internacional establecida de este ensayo. La Figura 1.15 muestra los efectos de “orilla” sobre la probeta mencionados previamente. Aun cuando éstos afectan al ensayo, la zona central de la región de estudio (lejos de las orillas) seguirá sujeta a un estado donde únicamente se ejerce deformación cortante simple.



Figura 1.15. Región de estudio en una probeta para el ensayo de deformación cortante simple. Esta región se encuentra entre las mordazas que se observan en la Figura 1.13, donde además se señala la zona homogénea de la probeta que se encuentra sujeta principalmente a una deformación cortante simple. Se observa en las esquinas de esta región el deslizamiento ocasionado por la falta de control en la sujeción de las mordazas y la fricción involucrada.

<sup>3</sup> KU Leuven, Department of Materials Engineering (MTM). Kasteelpark Arenberg 44 bus 2450, 3001 Heverlee, Belgium.

Una deformación cortante simple se muestra en la Figura 1.16. Las ecuaciones de movimiento y el gradiente de deformación correspondientes se definen en la Ecuación (1.8). El término  $\gamma$  indica la deformación cortante simple y corresponde a dos veces la deformación cortante tal y como se utiliza en un análisis tensorial del campo de deformaciones.

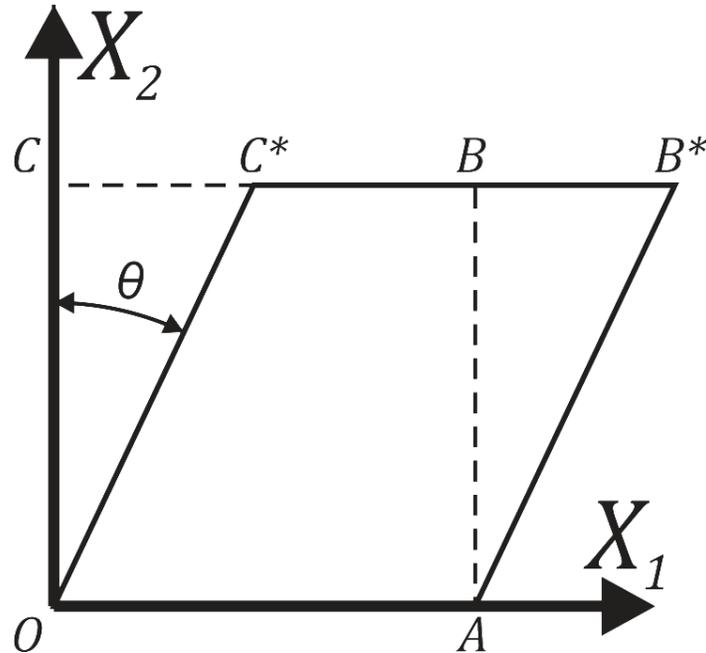


Figura 1.16. Esquema de un cubo de lados unitarios sujeto a deformación cortante simple. La dirección  $X_3$  apunta hacia afuera de la página.

$$x_1 = X_1 + \gamma X_2 \quad (1.8a)$$

$$x_2 = X_2 \quad (1.8b)$$

$$x_3 = X_3 \quad (1.8c)$$

$$\gamma = \tan\theta \quad (1.8d)$$

$$\mathbf{F} \equiv F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8e)$$

### 1.3.4. La técnica de correlación de imágenes digitales

Para poder estudiar el campo de deformaciones en la región de estudio de las probetas de tracción y deformación cortante simple, se utiliza la técnica *DIC* (en inglés, *Digital Image Correlation*). Las regiones de estudio son superficies en dos

dimensiones. Esta técnica requiere una preparación sobre la región de estudio de la probeta y un conjunto de fotografías durante el ensayo realizado. La preparación de la probeta consiste en adherir una base blanca con puntos negros distribuidos aleatoriamente, para que un equipo de cámaras capture varias fotografías de la región de estudio mientras la probeta se está deformando. Tanto el tamaño de los puntos negros (en inglés, *speckles*) como el tamaño de los píxeles en las fotografías capturadas son importantes para realizar un buen análisis mediante *DIC* [37]. Una vez que se tienen las imágenes del ensayo, la técnica *DIC* realiza un análisis de las fotografías capturadas, calculando los desplazamientos y deformaciones de los subconjuntos de píxeles en cada fotografía según la región de interés, mediante una función de correlación de datos programada con un algoritmo eficiente. A menor número de píxeles en cada subconjunto de la región de interés, mayor es el tiempo de cálculo y la precisión en la medición experimental. Es de esperarse que la medición del campo de deformaciones calculado con *DIC* sea predominantemente tracción o deformación cortante simple según sea el caso. Existe paquetería especializada para realizar este tipo de análisis (*Vic2D*, *Vic3D*, *NCORR* MatLab...) además de una amplia bibliografía básica y especializada sobre el tema, donde la tendencia actual es incluir el método de elementos finitos (*FEM*) en la técnica de subconjuntos común que utiliza *DIC* [38,39,40,41,42]; la idea general es dividir la región de estudio *DIC* en elementos finitos para garantizar continuidad entre subconjuntos.

Dado que la técnica *DIC* representa una línea de investigación extensa por sí misma, desarrollar exhaustivamente este tema no forma parte de los objetivos en esta tesis. No se pretende desarrollar o mejorar esta técnica, sino utilizarla como una herramienta para la medición de los campos de deformaciones en las probetas de tracción y deformación cortante simple, los cuales sirven para validar el código de plasticidad anisotrópica que se estudia aquí. La Figura 1.17 muestra las regiones de estudio preparadas con puntos negros para ambas probetas a ensayar, de donde se busca medir los campos de deformaciones correspondientes. La visión de la cámara debe ser perpendicular a los planos donde se encuentran los puntos negros, es decir, dirigida sobre la dirección normal **ND**.

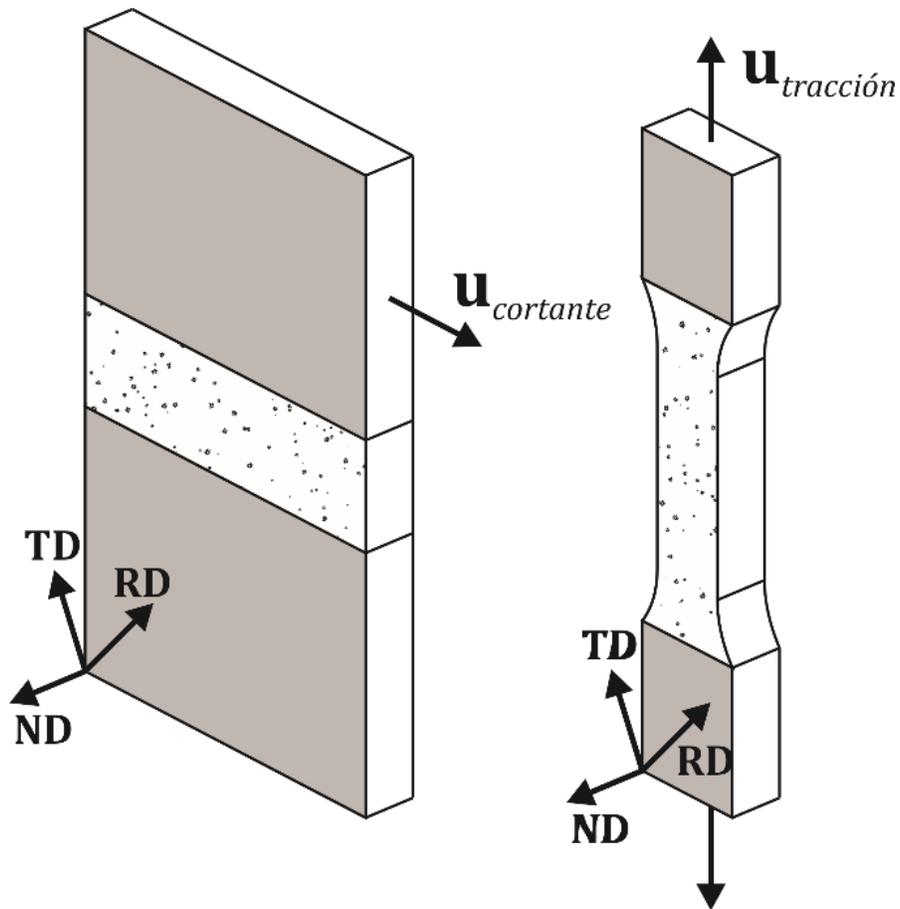


Figura 1.17. Esquemas 3D de las probetas de tracción y deformación cortante simple. Se muestran las regiones de estudio 2D en cada probeta con los puntos negros necesarios para la técnica *DIC*. Esta preparación debe realizarse antes de empezar los ensayos. La zona gris corresponde a las superficies de sujeción en las probetas. Veáanse también las regiones de estudio con puntos negros de las probetas reales en las figuras 1.13 y 1.15.

### 1.3.5. Ensayo de Fukui

De los ensayos que se utilizan en esta tesis, el ensayo de Fukui es la mejor representación de un proceso de manufactura real en lámina metálica (véase la sección 1.1.1 sobre la manufactura de latas de aluminio). Para este ensayo, existen varias normas internacionales que describen su funcionamiento, preparación y medición de probetas, dimensiones de los componentes y otras especificaciones de la prueba [43,44,45,46,47]. El ensayo utiliza un punzón el cual es la herramienta encargada de deformar a la lámina, definiendo una forma de copa; un pisador que sirve para presionar a la lámina y evitar que sus extremos se levanten mientras el punzón avanza; y una matriz (también se le conoce como dado) que sirve como base/sopORTE para la lámina antes de empezar y durante el proceso de estampado profundo. Se muestra un diagrama simple en la Figura 1.18 del equipo para el ensayo de Fukui.

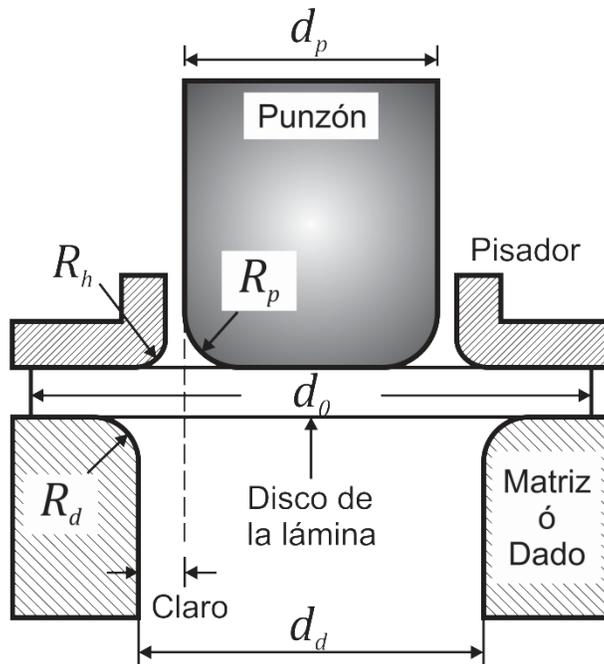


Figura 1.18. Esquema 2D ilustrativo de los componentes en un ensayo de Fukui.  $d_p$ : Diámetro del punzón;  $d_d$ : Diámetro de la apertura en el dado;  $d_0$ : Diámetro inicial del disco;  $R_p$ : Radio del fillete en el punzón;  $R_h$ : Radio del fillete en el pisador;  $R_d$ : Radio del fillete en la matriz. Para no perder claridad en la figura, se omite el diámetro de la apertura en el pisador ( $d_h$ ) y el espesor inicial del disco ( $h_0$ ).

Los parámetros importantes en este ensayo son la fuerza sobre el punzón, la fuerza en el pisador, la lubricación en las superficies de contacto lámina/pisador y lámina/matriz, el espesor de la lámina, además de la geometría en cada una de las herramientas utilizadas. A pesar de la simplicidad en los pasos del proceso, su complejidad teórica es elevada.

- *Estados de esfuerzos y deformaciones*

Durante el estampado profundo, existen cuatro zonas importantes en la lámina que están sujetas a modos de deformación distintos. La primera zona es la base de la copa formada: esta parte está en contacto con la cara plana del punzón, la cual deforma a la lámina de manera equi-biaxial sobre el plano de la base. Si bien la deformación impuesta por el punzón en la base de la copa tiende a reducir el espesor de la lámina, la realidad es que esta deformación es muy pequeña, por lo que generalmente se considera que el espesor no cambia durante el ensayo.

La segunda zona es la ceja en la lámina (en inglés, *flange*): la lámina está siendo empujada por el punzón hacia la abertura en el dado mediante una fuerza de tracción radial. Esto significa que también existe una contracción en la dirección circunferencial de la lámina debido a que el punzón empuja a ésta a través de la abertura en el dado, la cual es de menor tamaño si la comparamos con el diámetro inicial del disco. Por lo tanto, idealmente el estado de esfuerzos que se presenta en

esta región sería tracción en la dirección radial y compresión en la dirección circunferencial, ambos equivalentes, lo cual mantendría el espesor de la lámina constante. Esto no sucede en la realidad puesto que el estado de esfuerzos en la dirección radial cambia ( $\sigma_{radial} = 0$  sólo en la orilla exterior del disco de la lámina), provocando que la lámina aumente su espesor en la ceja, por lo que una de las especificaciones en el diseño del equipo es considerar que el claro sea más grande que el espesor inicial de la lámina. Además, debido al aumento en el espesor de la ceja en el disco, el diseño de la máquina debe permitir que el pisador pueda moverse en la dirección vertical mientras aplica la fuerza sobre la lámina, para compensar la elevación por dicho aumento. Cabe resaltar que la fuerza del pisador que se ejerce sobre la lámina agregaría una compresión a la zona, limitando parcialmente el incremento del espesor.

La tercera zona es la transición de la pared de la copa a su base: La fuerza que aplica el punzón sobre la base de la copa está siendo transmitida hacia la ceja por medio de su pared, aplicando una fuerza de tracción. Dada la geometría de la copa y del punzón, no ocurre contracción o estiramiento en la dirección circunferencial. Esto induce un estado uniaxial de esfuerzos (una elongación en la pared de la copa y una reducción en el espesor de la lámina).

La cuarta zona es la transición de la ceja a la pared de la copa: esta zona se caracteriza principalmente por la reducción inmediata del momento flector aplicado en la ceja, cuando el material finalmente llega a la pared de la copa – es decir, cuando el material sale de la ceja –, lo cual agrega un fuerza extra que tiene que vencer la fuerza que aplica el punzón [48,49]. La Figura 1.19 muestra las regiones mencionadas.

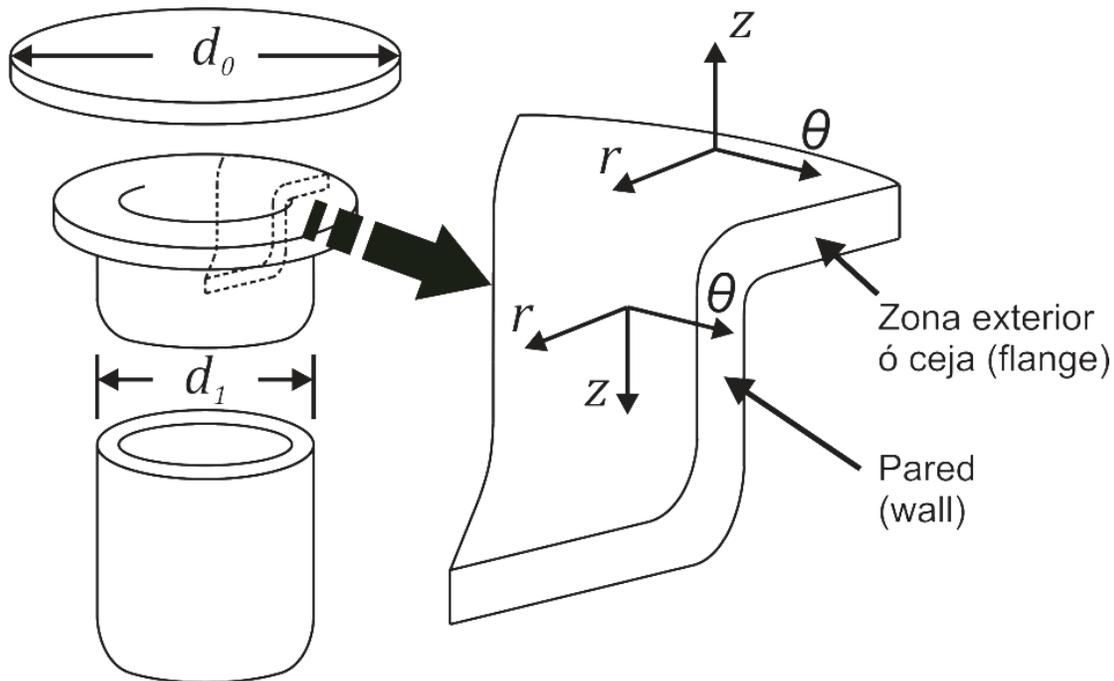


Figura 1.19. Regiones de estudio y orientación del material durante el estampado profundo.

- *Análisis matemático del ensayo*

Se han intentado una serie de análisis matemáticos complejos para la descripción y predicción de este proceso, considerando un estado de esfuerzos biaxial sobre la lámina [49]. El análisis clásico de Whiteley [50] propone las siguientes hipótesis para el caso de deformación plana sobre el disco para estampado profundo: se considera un nulo efecto del endurecimiento por trabajo en frío del material del disco; no existe fricción entre las superficies en contacto durante el ensayo; no se considera la geometría de los filetes en los componentes del ensayo; se considera un estado de esfuerzos y deformaciones plano sobre el disco; el espesor del disco no cambia; todo el trabajo externo realizado se utiliza únicamente para el proceso de deformación plástica que ocurre en la ceja del disco. La Figura 1.20 muestra el diagrama de cuerpo libre del disco de lámina que se utiliza para resolver el problema con las consideraciones anteriores.

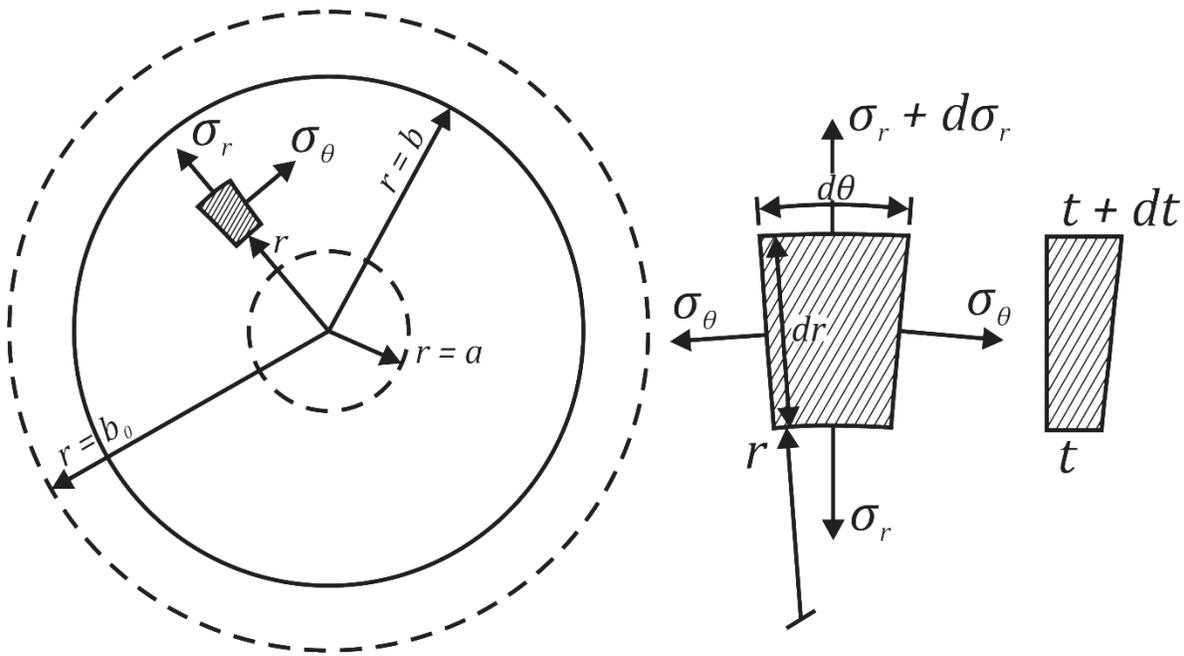


Figura 1.20. Diagrama de cuerpo libre para el disco del ensayo de Fukui; se define un sistema de referencia polar con origen en el centro del disco. Para el caso ideal, los esfuerzos y deformaciones ocurren sobre el plano de la lámina, cuya zona de influencia se encuentra limitada por el radio inicial del disco ( $d_o/2 = r = b_o$ ) y la abertura en el dado ( $d_a/2 = r = a$ ). El elemento diferencial que se muestra en la figura se encuentra en una posición intermedia ( $r$ ). El símbolo  $t$  significa el espesor de la lámina.

De la figura anterior, la ecuación general de equilibrio de fuerzas en la dirección radial para el elemento diferencial queda propuesta de la siguiente manera.

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta(t + dt) = \sigma_r r t d\theta + 2\sigma_\theta \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) t dr \quad (1.9)$$

Simplificando términos semejantes y despreciando los términos diferenciales de orden 3 y/o superior, la Ecuación (1.9) queda como sigue.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{t} \frac{dt}{dr} - \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = 0 \quad (1.10)$$

Utilizando las hipótesis del análisis de Whiteley descritas anteriormente, el término  $dt/dr$  se omite en (1.10), dando como resultado la ecuación diferencial (1.11).

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \quad (1.11)$$

La solución de la ecuación anterior representa el caso más simple. Sin endurecimiento por trabajo en frío en el material del disco, se puede proponer que el término  $\sigma_\theta - \sigma_r$  sea una constante ( $2k$ ) definida por los criterios de fluencia (tema que se estudia en secciones posteriores). Por lo tanto, la solución queda como se muestra en la Ecuación (1.12). La Ecuación (1.12c) representa la compresión que debe ejercer el pisador para mantener una deformación plana sobre el disco.

$$\sigma_r = 2k \ln \left| \frac{b}{r} \right|, a \leq r \leq b_0 \quad (1.12a)$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2k \quad (1.12b)$$

$$\sigma_h = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) \rightarrow \sigma_h = 2k \left( \ln \left| \frac{b}{r} \right| - \frac{1}{2} \right) \leq 0, a \leq r \leq b_0 \quad (1.12c)$$

Por otra parte, la deformación circunferencial sobre el plano del disco se define como se muestra en la Ecuación (1.13).

$$d\varepsilon_\theta = \frac{dr}{r} \quad (1.13)$$

La solución de la Ecuación (1.13) representa una compresión circunferencial debido a que no puede tomar valores positivos ( $\varepsilon_\theta = 0$  cuando  $r = b_0$ ) una vez que se integra. Para encontrar el resto de las componentes del tensor de deformaciones, se considera que para un proceso de deformación plástica no existe cambio de volumen en el disco ( $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0$ ) y que éste no cambia de espesor. La solución completa del estado de deformaciones sobre el disco se muestra en la Ecuación (1.14), tomando en cuenta las consideraciones anteriores y los límites mostrados en la Figura 1.20.

$$\varepsilon_\theta = \ln \left| \frac{b_0}{r} \right|, a \leq r \leq b_0 \quad (1.14a)$$

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta \quad (1.14b)$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (1.14c)$$

El análisis matemático de Schouwenaars *et al.* [51] y Van Houtte *et al.* [52] sobre la predicción de altura en copas de Fukui también se explica brevemente a continuación; aunque en las referencias anteriores se utiliza este modelo para aceros con bajo contenido de carbono, su aplicación puede extenderse a aleaciones de aluminio. Similar al análisis de Whiteley, se considera un estado de esfuerzos plano en el disco de la lámina (ver los sistemas de referencia en las Figuras 1.19 y 1.20). Sin embargo, bajo la hipótesis de  $\sigma_{zz} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{zr} = \sigma_{r\theta} = 0, \varepsilon_{zz} \neq 0$ , se supone que ocurre deformación plástica en la dirección radial y que el espesor puede cambiar. Cada punto de la ceja en el disco se mueve hacia el centro de éste, con una velocidad que depende del ángulo  $\theta$  que se forma con respecto a la dirección de laminado (**RD**). En una primera aproximación, la altura de la copa es igual a la duración del ensayo por la velocidad del punzón. Existen condiciones de frontera que son necesarias en este modelo: en la dirección del espesor, la superficie externa del disco está libre de esfuerzos cortantes y esfuerzos en la dirección radial ( $\sigma_{rr} = 0$ ); no así para  $\sigma_{\theta\theta} \neq 0$ , el cual define únicamente un estado de compresión en la dirección circunferencial. Para el resto de los puntos del disco fuera de la superficie externa,  $\sigma_{rr}$  es distinto de cero.

A diferencia de Whiteley, este modelo considera el valor  $q$ , el cual depende de la textura del material. Es decir,  $q$  depende del valor de  $\theta$  puesto que la anisotropía de la lámina se caracteriza según la orientación de este ángulo con respecto a la dirección **RD**. Una vez terminada la formulación del modelo anterior y la geometría de los componentes del ensayo, la altura de las orejas –  $h(\theta)$  – queda representada tal y como se muestra en la Ecuación (1.15). Se omite el desarrollo matemático.

$$h(\theta) = t + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) (2R_p + t) + \frac{(d_0/2)^{q+1} - [(d_p/2) + t]^{q+1}}{(q+1) \left[ (d_p/2) + \frac{t}{2} \right]^q} \quad (1.15)$$

- *Parámetro LDR y defectos tecnológicos*

La estampa de la lámina puede medirse de acuerdo al parámetro “Límite de Embutición” *LDR* (en inglés, *Limiting Drawing Ratio*), el cual expresa la razón del diámetro inicial de la lámina al diámetro de la copa conformada satisfactoriamente. Este es un parámetro experimental muy utilizado para medir la cantidad de embutición que puede recibir una lámina circular.

$$LDR = d_0/d_1 \quad (1.16)$$

Algunos defectos tecnológicos pueden ocurrir durante el proceso de estampado profundo. Uno de ellos se le conoce como “arrugas” (en inglés, *wrinkling* [50]), el

cual se manifiesta con la presencia de una gran cantidad de pliegues en la zona de la ceja. Este defecto es ocasionado por una falta de control en la fuerza aplicada por el pisador; una vez controlado el pisador, es posible evitar este defecto controlando adecuadamente la fuerza que ejerce sobre la lámina. La Figura 1.21 ilustra este defecto.



Figura 1.21. “Arrugas” formadas en la ceja de la lámina (en inglés, *wrinkling*) [50].

## 1.4. Plasticidad continua

Una deformación elástica que se impone en un sólido cambia su configuración física, llevándolo a un estado termodinámico metaestable. Sin embargo, una vez que se eliminan las cargas el sólido regresa a su forma inicial y, por lo tanto, la elasticidad representa un proceso termodinámico reversible. Dicho de otra forma, el estado elástico en un sólido induce deformaciones recuperables. Para alcanzar condiciones de flujo plástico en un sólido, es necesario deformar elásticamente y luego llegar a un punto de transición. Al rebasar este punto, una parte de la deformación total en el sólido queda permanente, recuperándose únicamente la deformación elástica del sólido cuando se eliminan todas las cargas sobre él. Existe una amplia literatura [53, 54, 55] de los fundamentos de la teoría de plasticidad continua; es decir, la teoría de la plasticidad aplicada a un medio continuo. Aquí solo se desarrollan los conceptos básicos para llegar al tema de las reglas de flujo plástico y la superficie potencial plástica, concepto que se utiliza más adelante para definir a la función potencial plástica Facet.

### 1.4.1. Tensor de esfuerzos

Cuando un sólido está sujeto a la acción de fuerzas que otros cuerpos ejercen sobre él, se produce una resistencia o fuerzas internas distribuidas dentro de todo el volumen que ocupa, de tal forma que, si el sólido se divide en elementos más pequeños, éstos se encuentran sujetos en un equilibrio estático ( $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$  y  $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$ ). La Figura 1.22 muestra la definición de esfuerzo. Se observa que  $\mathbf{l}$  es el vector

normal a la superficie  $\delta S$ , mientras que  $\delta P$  es la fuerza interna que se ejerce desde la mitad superior del sólido. El vector de esfuerzos  $\mathbf{T}$  que actúa en el origen se define como  $\mathbf{T} = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \delta P / \delta S$ , donde la componente  $\sigma$  de  $\mathbf{T}$  actúa en la dirección normal  $\mathbf{l}$ , mientras que  $\tau$  actúa sobre el plano definido por  $\delta S$ ; si en el origen de la superficie  $\delta S$  se define un sistema cartesiano rectangular, es fácil demostrar que el estado de esfuerzos en un sólido queda representado por un ente matemático llamado tensor de esfuerzos ( $\boldsymbol{\sigma}$  o  $\sigma_{ij}$  en notación índice). El resultado de este análisis estático define al tensor de esfuerzos de Cauchy, relacionado con el vector de esfuerzos en el sólido; es decir,  $T_i^{(1)} = \sigma_{ij} l_j$  (Fórmula de Cauchy). En el paralelepípedo de la Figura 1.22 se muestran las nueve componentes que componen al tensor de esfuerzos de segundo orden. Como se requiere equilibrio estático en el sólido, las ecuaciones de equilibrio requieren que la suma de fuerzas y momentos sea nula.

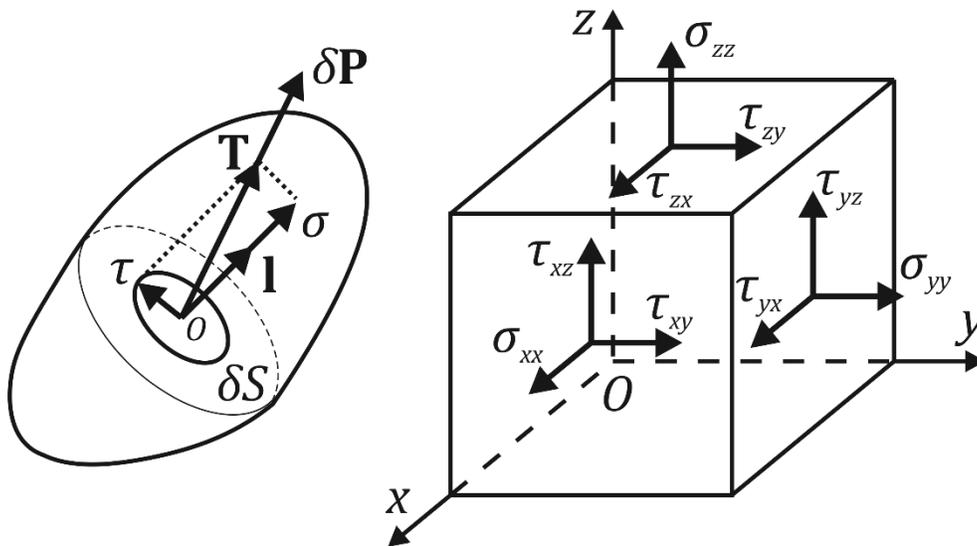


Figura 1.22. Definición del vector de esfuerzo y representación cartesiana del tensor de esfuerzos  $\sigma_{ij}$ . Todas las componentes del tensor de esfuerzos se aplican en el punto  $O$  del sistema  $xyz$ .

El resultado obtenido de esta condición de equilibrio es la simetría del tensor de esfuerzos ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ). La Ecuación (1.17) muestra el tensor y sus seis componentes independientes (Notación: Sea  $\mathbf{A}$  un tensor de segundo orden y  $A_{ij}$  sus respectivas componentes. El símbolo “ : ” en la expresión  $\mathbf{A} : A_{ij}$  significa “el tensor  $\mathbf{A}$  cuyas componentes son  $A_{ij}$ ”; en esta tesis, todas las componentes se encuentran expresadas en el sistema cartesiano ortogonal. Esta notación también aplica para vectores,  $\mathbf{a} : a_i$ ).

$$\boldsymbol{\sigma} : \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

De la definición de esfuerzo se observa que el vector de esfuerzos  $\mathbf{T}$  asociado a la superficie  $\delta S$  no necesariamente se encuentra en la misma dirección del vector normal  $\mathbf{l}$ . Esto quiere decir que existe una dirección característica para  $\mathbf{l}$  (eigenvector) en la cual el vector  $\mathbf{T}$  se representa como un múltiplo escalar ( $\sigma$ , eigenvalor) de  $\mathbf{l}$  ( $\mathbf{T}^{(1)} = \sigma\mathbf{l}$ ). Aquellas direcciones donde se cumple la aseveración anterior se denominan direcciones principales de esfuerzos. Utilizando la fórmula de Cauchy, la definición de direcciones principales y la delta de Kronecker ( $\mathbf{1}: \delta_{ij}$ ), es posible definir un sistema de ecuaciones donde las variables a calcular son las direcciones principales ( $l_i$ ) con su respectivo eigenvalor. Además, también debe de considerarse que el vector  $\mathbf{l}$  es un vector unitario. La Ecuación (1.18) muestra el resultado anterior.

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma\mathbf{1}) \cdot \mathbf{l} = \mathbf{0} \quad (1.18a)$$

$$(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})l_i = 0 \quad (1.18b)$$

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 1 \quad (1.18c)$$

$$l_i l_i = 1 \quad (1.18d)$$

Para que el sistema de ecuaciones (1.18) proporcione una solución no trivial (es decir,  $l_i \neq 0$ ), es necesario que se cumpla la condición de ortogonalidad (1.18 c y d) y que el determinante formado por los coeficientes de  $l_i$  sea nulo ( $\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma\mathbf{1}) = 0$ ). La expansión de este determinante define la ecuación característica del tensor de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$ . La Ecuación (1.19) muestra la forma de dicha ecuación.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (1.19)$$

Donde las tres raíces de la ecuación representan los esfuerzos principales de  $\sigma_{ij}$ , aplicados sobre planos donde los esfuerzos cortantes son nulos; y los coeficientes  $I_1, I_2$  e  $I_3$ , representan el primer, segundo y tercer invariante de  $\boldsymbol{\sigma}$ , respectivamente. La forma de los tres invariantes queda en función de las componentes del tensor de esfuerzos  $\sigma_{ij}$ . Debido a que los esfuerzos principales del tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  son independientes de la orientación del sistema de referencia, entonces los coeficientes de la ecuación característica – ó invariantes – también deben poseer esta característica. La Ecuación (1.20) muestra los valores para los tres invariantes.

$$I_1 = \text{tr}\boldsymbol{\sigma}: \sigma_{ii} \quad (1.20a)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma}]: \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) \quad (1.20b)$$

$$I_3 = \det \boldsymbol{\sigma}: \epsilon_{ijk}\sigma_{1i}\sigma_{2j}\sigma_{3k} \quad (1.20c)$$

Dado que las direcciones principales son ortogonales entre sí, es posible definir un sistema de referencia de tres dimensiones donde el tensor de esfuerzos representa un punto que tiene asociado un estado hidrostático de esfuerzos y una parte

asociada únicamente al estado cortante puro, pasando de un espacio de seis a tres dimensiones. La Ecuación (1.21) muestra el tensor de esfuerzos diagonalizado.

$$\boldsymbol{\sigma}^p: \sigma_{ij}^p = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Como se menciona antes, el esfuerzo hidrostático a tracción o compresión no influye en el comienzo de la deformación plástica, por lo que es conveniente separar la parte hidrostática del tensor de esfuerzos. Se define como tensor desviador de esfuerzos a la parte del tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  que no posee cambio de volumen, como se expresa en la Ecuación (1.22).

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_p \mathbf{1} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \quad (1.22a)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (1.22b)$$

Donde  $s_{ij}$  son las componentes del desviador de esfuerzos, cuya característica principal es que su traza es nula ( $s_{ii} = 0$ );  $\sigma_p$  representa el esfuerzo normal promedio de  $\boldsymbol{\sigma}$ , definido como  $\sigma_p = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ ; y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. En conclusión,  $\mathbf{s}$  es la parte del tensor de esfuerzos responsable del comienzo de la deformación plástica. Posee cinco variables linealmente independientes puesto que su traza es nula, y también se puede diagonalizar como el tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ . La Ecuación (1.23) muestra la ecuación característica para el tensor desviador de esfuerzos, así como los valores para sus respectivos invariantes ( $J_2, J_3$ ).

$$s^3 + J_2 s - J_3 = 0 \quad (1.23a)$$

$$J_2 = -\frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}, J_2 : -\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (1.23b)$$

$$J_3 = \det \mathbf{s}, J_3 : \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} \quad (1.23c)$$

## 1.4.2. Criterios de fluencia

Un criterio de fluencia, o cedencia, es una función matemática de las componentes del tensor de esfuerzos que predice el comienzo de la deformación plástica en un material para cualquier combinación de esfuerzos posible en un sólido. Es decir,

$$f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}) = k^2 \quad (1.24)$$

Donde  $k^2$  es una constante positiva. O bien, si se transforma al sistema de referencia de ejes principales, el criterio de cedencia queda definido sólo con las componentes principales del tensor de esfuerzos.

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = k^2 \quad (1.25)$$

Para la mayoría de los metales dúctiles, a menudo se consideran suposiciones que se han observado de análisis experimentales, además de simplificar en gran medida la teoría de la plasticidad para materiales isotrópicos. En primer lugar, el efecto Bauschinger no se considera en la plasticidad desarrollada en esta sección. Por lo tanto, los esfuerzos de cedencia a tracción y a compresión son equivalentes; y como se menciona más adelante, esta simplificación se observa en la simetría del lugar geométrico de la cedencia. En segundo lugar, el valor para la relación de Poisson es constante debido a que se considera que no hay cambio de volumen por deformación plástica. En tercer lugar, la ausencia de una teoría de la plasticidad a altas temperaturas se debe a la falta de datos experimentales y a la multi-dependencia a otros parámetros de la función que describe a la velocidad de deformación. Por lo tanto, los efectos de la temperatura y el fenómeno de termofluencia (en inglés, *creep*) no se consideran en la plasticidad isotrópica. Finalmente, se sabe que la magnitud del esfuerzo hidrostático no influye en la cedencia de un metal. Esto sucede porque su mecanismo de deformación se activa con el movimiento de dislocaciones (deslizamiento) o bien mediante maclas (en inglés, *twinning*), ambos activados por esfuerzos cortantes, los cuales no se asocian con un cambio de volumen.

En la Figura 1.23 se presenta de manera geométrica a la superficie de cedencia, definida por la función  $f$  en el sistema cartesiano formado por los ejes principales  $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ . Cualquier estado de esfuerzos en este espacio vectorial de tres dimensiones está definido por un vector que emana desde el origen del sistema de referencia ( $\mathbf{OQ}$ ). Se define como plano octaédrico, o plano  $\Pi$ , a aquel que posee su vector normal sobre la dirección  $\mathbf{OH}$  que define la igualdad  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = \sigma$ ; es decir,  $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ . El vector unitario  $\mathbf{n}$  define la dirección de la componente hidrostática del vector  $\mathbf{OQ}$ , representada por el vector  $\mathbf{OG}$ , mientras que la componente del desviador de esfuerzos está representada por el vector  $\mathbf{OP}$ , cuyas componentes son  $(s_I, s_{II}, s_{III})$  y su magnitud es  $\sqrt{2J_2}$ . El resultado es que el vector  $\mathbf{OP}$ , llamado también esfuerzo cortante octaédrico, define un cilindro en el espacio  $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ . Este cilindro es la superficie de cedencia del material, y su intersección con el plano octaédrico define a la curva de fluencia (en inglés, *yield locus*) o lugar geométrico de la fluencia. Cada proyección sobre el plano octaédrico es  $\sqrt{2/3}$  veces la proyección de su correspondiente componente de los ejes principales asociada.

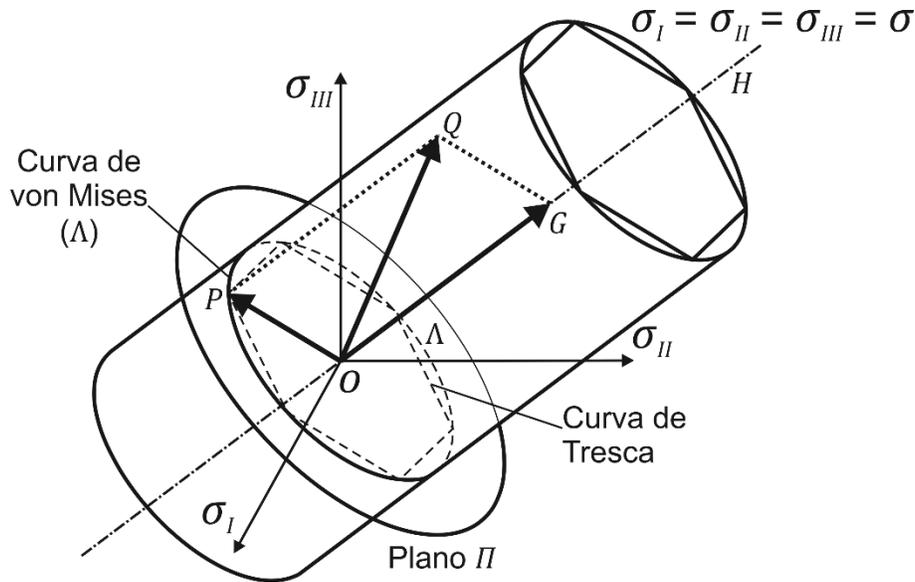


Figura 1.23. Esquema geométrico de la superficie de cedencia en el sistema de ejes principales.

Por lo tanto, la función de cedencia queda definida en términos de las componentes del desviador de esfuerzos.

$$f(s_I, s_{II}, s_{III}) = k^2 \quad (1.26)$$

El lugar geométrico de la fluencia para un material isotrópico posee una geometría característica sobre el plano octaédrico, la cual es consecuencia de las simplificaciones que se mencionan antes. Existe una simetría de la curva de fluencia con respecto a cada uno de los ejes proyectados ( $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ ). Esto se debe a que el lugar geométrico de la fluencia es una función de los invariantes del tensor desviador de esfuerzos. Es decir, si  $P(a, b, c)$  es un punto de la curva de fluencia, entonces  $P'(a, c, b)$  también forma parte de la curva.

$$f(J_2, J_3) = k^2 \quad (1.27)$$

Además, la omisión del efecto Bauschinger provoca que la curva de fluencia posea simetría con respecto a las líneas auxiliares en el plano  $\Pi$ . Cada una de estas líneas es ortogonal con su correspondiente eje proyectado ( $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ ). Dicho de otra forma, si un punto  $R(d, e, f)$  del plano  $\Pi$  provoca cedencia, entonces  $R'(-d, -e, -f)$  también lo hace, con lo cual se concluye que la distancia radial desde el origen del plano  $\Pi$  hasta cada uno de los puntos  $R$  y  $R'$  es la misma. La Figura 1.24 muestra al plano octaédrico de tal forma que su vector normal sale del papel.

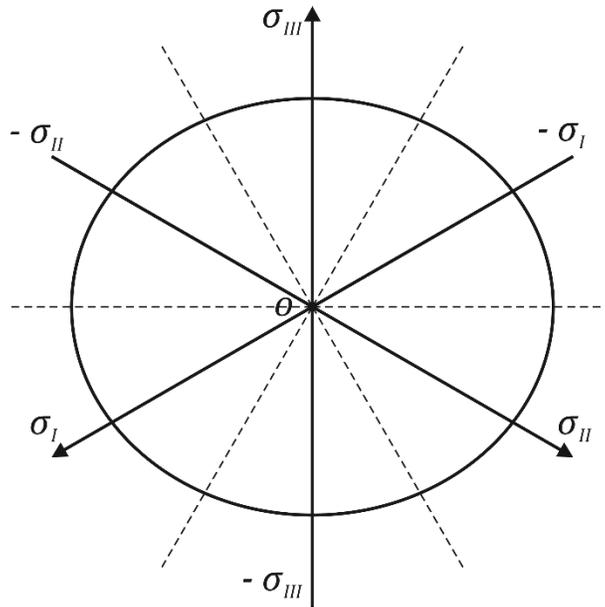


Figura 1.24. Simetría del lugar geométrico de la fluencia para materiales isotrópicos sobre el plano  $\Pi$ .

En conclusión, la función matemática que define al criterio de cedencia depende únicamente de las componentes del tensor desviador de esfuerzos, ya que el esfuerzo hidrostático no influye en el comienzo de la deformación plástica. Además, debido a que la traza del desviador de esfuerzos es nula, solamente se tienen cinco componentes linealmente independientes. La simetría que posee la curva de fluencia debido a la omisión del efecto Bauschinger y a la dependencia de los invariantes del desviador de esfuerzos obliga a que la curva repita su forma cada  $30^\circ$  sobre el plano  $\Pi$ . Esta simetría peculiar sobre el sector de  $30^\circ$  está limitada por dos estados de esfuerzos particulares. Sobre la línea horizontal se encuentra un estado de esfuerzos a cortante puro, mientras que la línea a  $30^\circ$  sobre la horizontal define un estado de esfuerzos de tracción o compresión uniaxial. Mediante geometría sobre el plano  $\Pi$  [54], es posible definir el parámetro experimental de Lode ( $\mu$ ), utilizado para calcular la curva de cedencia de materiales isotrópicos (ver la Figura 1.25).

$$\mu = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1} \quad (1.28)$$

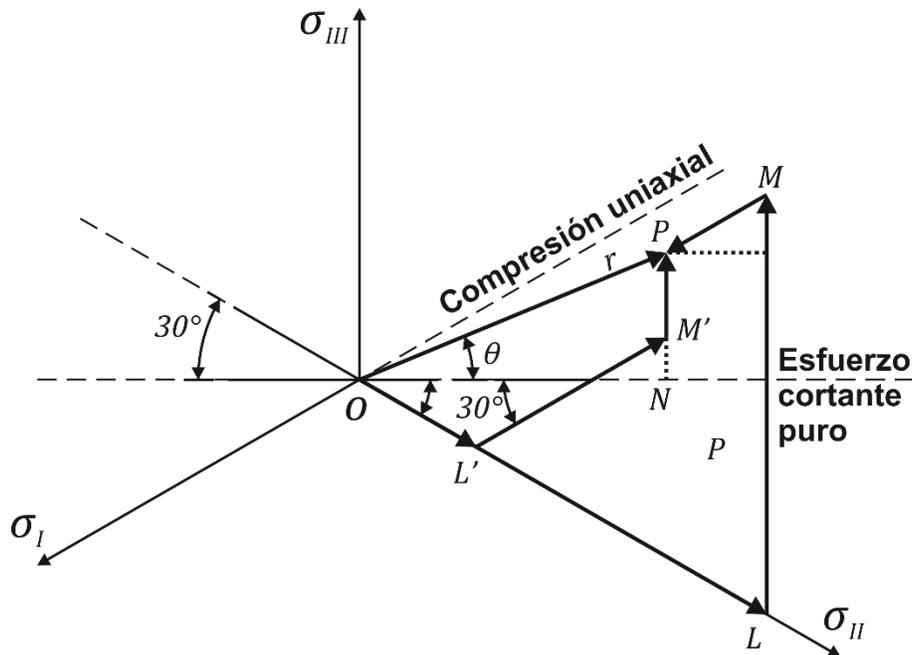


Figura 1.25. Parámetro de Lode definido en un sector de 30° sobre el plano octaédrico.

### 1.4.3. Criterio de Tresca

Este criterio de cedencia, creado por el ingeniero mecánico francés Henri Édouard Tresca (1814-1885), propone que la deformación plástica empieza cuando el esfuerzo cortante máximo alcanza un valor crítico. Es decir, la función matemática del lugar geométrico de la fluencia posee la siguiente forma, como se muestra en la Ecuación (1.29).

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \sigma_I - \sigma_{III} \text{ con } \sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \quad (1.29)$$

En la mayoría de los casos, la desigualdad en la Ecuación (1.29) no se conoce a priori, por lo que debe calcularse (ver Figura 1.24).

### 1.4.4. Criterio de von Mises

Las bases del criterio de von Mises (también conocido como criterio plasticidad J2 o de la máxima energía de distorsión) fueron elaboradas por el ingeniero Richard von Mises (1883-1953). Dichas bases están sustentadas en consideraciones teóricas. El resultado de ellas es que la cedencia debe alcanzarse cuando el segundo invariante del desviador de esfuerzos alcanza un valor constante crítico.

$$f(J_2, J_3) = \mathbf{s} : \mathbf{s} = 2k^2 \quad (1.30a)$$

$$f(J_2, J_3) = s_{ij}s_{ij} = 2k^2 \quad (1.30b)$$

Donde  $s_{ij}$  es el desviador de esfuerzos. Según Nadai, el criterio de fluencia de von Mises establece que la cedencia se alcanza cuando el esfuerzo cortante octaédrico adquiere un valor constante, característico para cada material. También, Hencky demostró que la cedencia se logra cuando la energía de distorsión elástica en el material posee un valor característico cuando se alcanza un punto del lugar geométrico de la fluencia. Mediante un ajuste experimental, es posible que los criterios de Tresca y de von Mises concuerden en el plano octaédrico. Así pues, el hexágono de Tresca queda circunscrito en el círculo de von Mises, como se muestra en la Figura 1.26.

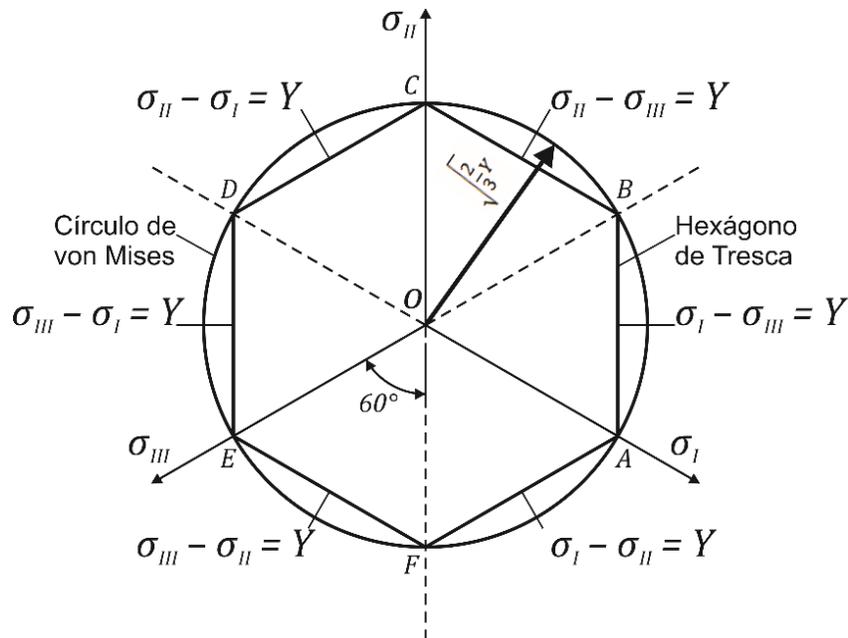


Figura 1.26. Lugar geométrico de la fluencia para Tresca y von Mises sobre el plano  $\Pi$ .

Una vez que el material haya alcanzado el lugar geométrico de la fluencia, comienza a deformarse plásticamente, de tal forma que dicha deformación se vuelve permanente, aun si se eliminan las cargas actuando sobre él. Si la forma o posición de la curva de fluencia cambia durante el proceso de deformación, se dice que ésta depende de la historia completa de la deformación plástica. De lo contrario, se define como sólido elástico perfectamente plástico a aquel sólido que, una vez alcanzado el punto de cedencia, no requiere de una sollicitación mayor para seguir deformándose plásticamente.

- *Postulados de endurecimiento por trabajo en frio*

El endurecimiento isotrópico en un material se refiere a que el tamaño del lugar geométrico de la fluencia cambia según la variación del estado de esfuerzos, representada por una trayectoria específica en el plano octaédrico, como se muestra en la Figura 1.27 (trayectoria  $P_0P$ ). Una vez más, este endurecimiento aplica para materiales isotrópicos y el efecto Bauschinger se desprecia aun cuando exista anisotropía por endurecimiento por trabajo en frio. Debido a que sólo cambia en tamaño, cada punto de la curva de cedencia con endurecimiento está determinado por el esfuerzo de cedencia instantáneo a tracción uniaxial, de tal forma que es necesario relacionar el esfuerzo de cedencia instantáneo con la cantidad de deformación plástica instantánea posterior a una curva de cedencia inicial. Este esfuerzo se denomina esfuerzo de cedencia equivalente ( $\bar{\sigma}$ ), esfuerzo efectivo o esfuerzo generalizado, el cual se puede determinar de dos formas. La primera, estableciendo la hipótesis que  $\bar{\sigma}$  es una función del trabajo plástico por unidad de volumen ( $dW^{(p)}$ ). La segunda, que  $\bar{\sigma}$  es una función de la deformación plástica total; es decir, se define con el segundo invariante del tensor de deformación plástica infinitesimal ( $d\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}:d\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(p)}$ ) a la deformación plástica equivalente ( $d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)}$ ). En la Ecuación (1.31) y (1.32) se encuentran escritas ambas hipótesis de manera matemática, donde la integral es válida sobre la trayectoria de deformación ( $P_0P$ ).

$$\bar{\sigma} = \varphi\left(\int dW^{(p)}\right) = \varphi\left(\int \boldsymbol{\sigma}:d\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}\right) = \varphi\left(\int \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{(p)}\right) = \varphi\left(\int s_{ij}d\varepsilon_{ij}^{(p)}\right) \quad (1.31)$$

$$\bar{\sigma} = \omega\left(\int d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)}\right) = \omega\left(\int \sqrt{\frac{2}{3}}d\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}:d\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}\right) = \omega\left(\int \sqrt{\frac{2}{3}}d\varepsilon_{ij}^{(p)}d\varepsilon_{ij}^{(p)}\right) \quad (1.32)$$

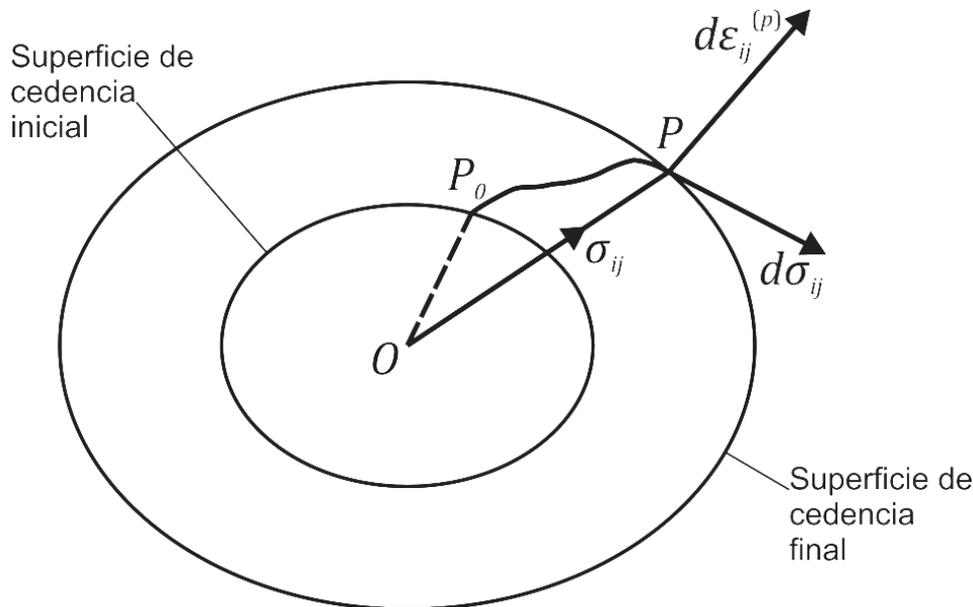


Figura 1.27. Representación geométrica del endurecimiento isotrópico.

Las razones por las que se utilizan las definiciones anteriores se explican a continuación. Si se considera incompresibilidad en el material ( $\sigma_{ii} = 0$ ), la componente hidrostática del tensor de esfuerzos no produce deformación plástica, por lo que la definición en la Ecuación (1.31) permite que se utilice el desviador de esfuerzos para definir el esfuerzo equivalente. En metales, esta consideración concuerda con la observación experimental. A diferencia de la Ecuación (1.31), la Ecuación (1.32) propone que la cantidad de endurecimiento por trabajo en frío sea determinada por cada incremento infinitesimal de distorsión plástica que ocurre en la trayectoria  $P_0P$ , y no sólo el punto inicial ( $P_0$ ) y el actual ( $P$ ) como se establece en la Ecuación (1.31). De esta forma, se toma en cuenta la historia de la deformación plástica para explicar el comportamiento del endurecimiento por trabajo en frío.

### 1.4.5. Las reglas de flujo plástico (*Flow Rules*)

Así como la ley de Hooke relaciona esfuerzos y deformaciones elásticas en el rango elástico, también existen las relaciones entre esfuerzo y deformación para el rango plástico (en inglés, *flow rules*). Es necesario relacionar el tensor de deformación plástica infinitesimal con el tensor de esfuerzos y su respectivo incremento, puesto que para la plasticidad es importante la trayectoria o modo de deformación que se sigue. Se dice que se toma en cuenta la historia de la trayectoria de la deformación.

### 1.4.6. La superficie potencial plástica

El comportamiento plástico que muestran los materiales isotrópicos indica que los ejes principales del tensor de esfuerzos infinitesimal coinciden con los del tensor de deformación plástica infinitesimal. En el sistema coordenado de esfuerzos principales, el tensor de deformación plástica infinitesimal está representado por un vector ortogonal al vector normal del plano octaédrico, por lo que su dirección pasa por el origen del sistema coordenado  $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ . Es decir,  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \sim (d\varepsilon_I^{(p)}, d\varepsilon_{II}^{(p)}, d\varepsilon_{III}^{(p)})$ , donde la constante de proporcionalidad tiene unidades de esfuerzo, y sus componentes se encuentran sobre el plano  $\Pi$ . Esto significa que la posición de  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$  define una superficie con forma de cilindro, al igual que el lugar geométrico de la fluencia. También, la ortogonalidad que posee  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$  con el cilindro define el llamado principio de la normalidad; es decir,  $w^{(p)} = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = C$  ( $C$ : constante) representa una superficie equipotencial para una trayectoria de deformación, por lo que en cada incremento infinitesimal de deformación,  $dw^{(p)} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = 0$ , demostrando la ortogonalidad entre ambos tensores. Finalmente, la intersección del cilindro formado por  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$  y el plano octaédrico define una curva ( $g$ ), que es función de los esfuerzos principales del desviador de esfuerzos.

$$g = g(s_I, s_{II}, s_{III}) = k^2 \quad (1.33)$$

Al igual que el lugar geométrico de la fluencia para materiales isotrópicos, la función  $g$  también posee simetría con respecto a los ejes proyectados en el plano octaédrico; además, la simetría de  $g$  también se da con respecto a los ejes ortogonales asociados a cada eje proyectado. Por lo tanto, la forma de la curva  $g$  también está definida en un sector de  $30^\circ$  del plano octaédrico, como muestra la Figura 1.28. De manera matemática, esto se escribe como se muestra en la Ecuación (1.34).

$$g = g(J_1, J_2) = k^2 \quad (1.34)$$

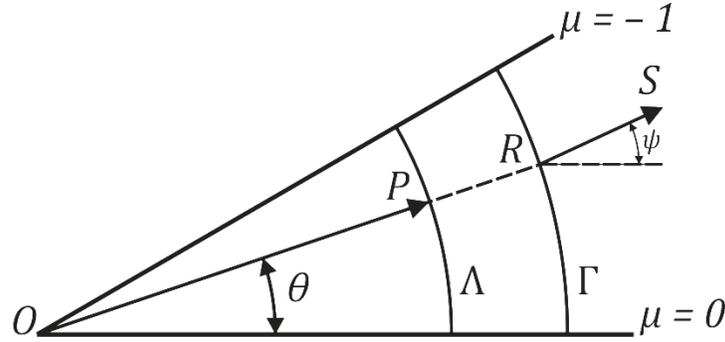


Figura 1.28. Representación geométrica de la superficie de fluencia ( $\Lambda$ ) y la función potencial plástica ( $\Gamma$ ).

La función  $g$  define la razón de las componentes del tensor de deformación plástica infinitesimal, y se le conoce como función potencial plástica. A su vez, la función potencial plástica define las reglas de flujo plástico, las cuales describen las relaciones esfuerzo-deformación para la región plástica en un espacio de nueve dimensiones.

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (1.35)$$

Donde  $d\lambda$  es una función escalar que describe la magnitud del tensor de esfuerzos infinitesimal, y puede depender de la posición y del tiempo. Una manera de comprobar el principio de normalidad, es a través del trabajo plástico por unidad de volumen ( $dW^{(p)}$ ). El producto doble punto entre tensores de segundo orden cuando  $f = g$  obliga a que ambos sean ortogonales entre sí, como lo establece la Ecuación (1.36).

$$dW^{(p)} = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} = 0 \quad (1.36a)$$

$$dW^{(p)} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{(p)} = 0 \quad (1.36b)$$

## 1.5. Plasticidad cristalina

Hasta este punto, la plasticidad continua ha logrado predecir los resultados experimentales obtenidos de metales cuando poseen una alta refinación de grano y se encuentran sujetos a cargas estáticas. De esta forma sería posible modelar un metal como un sólido elasto-plástico homogéneo e isotrópico. Sin embargo, se observa que la plasticidad de un metal muestra una fuerte dependencia a los efectos de temperatura, composición, rapidez de deformación y orientación cristalográfica. Lo último se debe al arreglo estructural que presentan todos los materiales policristalinos en cada uno de sus granos que lo forman. Es esta la razón por la cual es importante comprender como ocurre la plasticidad en un monocristal, para después utilizar este resultado hacia un conjunto de granos que representan a una lámina metálica.

### 1.5.1. Sistemas cristalinos FCC, BCC y HCP

La estructura cristalina de un monocristal metálico está formada por un arreglo geométrico tridimensional repetitivo de los átomos que la componen. La forma exterior de cada uno de ellos se representa con el modelo de esferas elásticas perfectas, puesto que la mayoría de los elementos metálicos que forman a un monocristal poseen al orbital  $s$  como su capa de valencia, encargada de los enlaces con otros átomos. La solución de la ecuación de Schrödinger para este tipo de orbital presenta una función de onda con simetría radial, por lo que los átomos se pueden modelar en buena aproximación bajo el modelo de esferas mencionado.

La mayoría de los metales en estado sólido presentan un empaquetamiento cristalino llamado cúbico centrado en las caras (en inglés, *Face-Centered Cubic*, FCC), cúbico centrado en el cuerpo (en inglés, *Body-Centered Cubic*, BCC), o también hexagonal compacto (en inglés, *Hexagonal Close-Packed* HCP). Los empaquetamientos compactos FCC y HCP se forman apilando varios planos atómicos (A, B y C), como se muestra en la Figura 1.29. Los círculos de línea completa forman al plano A; debajo se encuentran los círculos con línea punteada, que representan al plano B; finalmente, los puntos que se observan en la Figura corresponden con los centros de los círculos que forman al plano C. La descripción anterior de los planos atómicos indica una secuencia de apilamiento característica de la estructura FCC, es decir, un apilamiento ABCABC. Los átomos del plano B se encuentran debajo del plano A, exactamente en los espacios formados por 3 átomos adyacentes del plano A. De igual forma, los átomos del plano C se encuentran en los espacios formados por 3 átomos adyacentes del plano B. A su vez, la secuencia de apilamiento ABABAB utiliza dos planos atómicos (A y B), donde los átomos del plano A se posicionan en los espacios formados por 3 átomos adyacentes del plano B; este mismo patrón de posición se repite debajo del plano B con un plano A, para formar la estructura hexagonal compacta HCP (véase la Figura 1.29). Los tres empaquetamientos anteriores poseen direcciones y planos cristalográficos de cada

uno de ellos descritos en la notación de índices de Miller, aunque existen más empaquetamientos que se pueden formar, de acuerdo a las redes de Bravais.

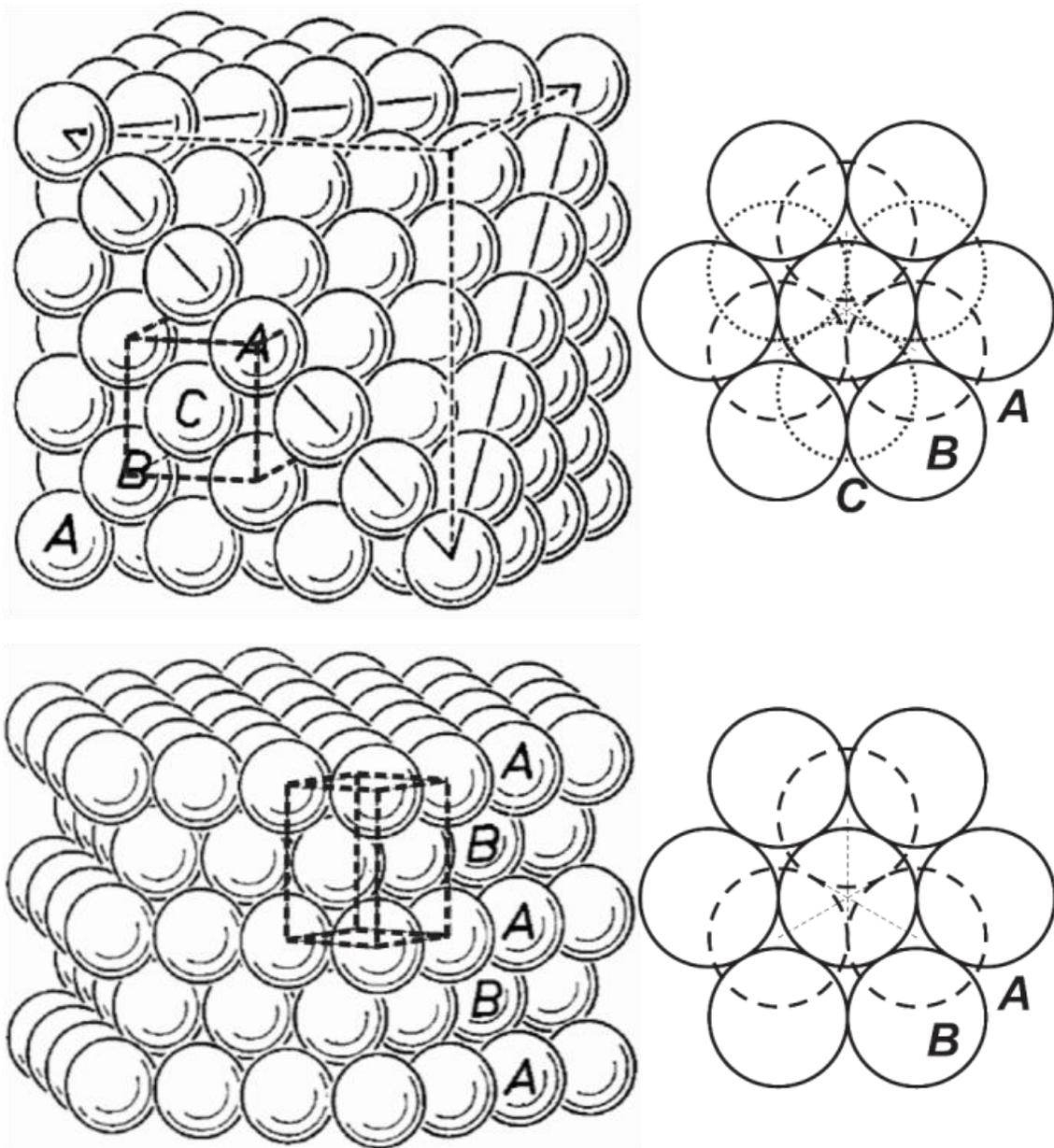


Figura 1.29. Empaquetamientos cristalinicos de planos atómicos [56].

Las celdas unitarias de los empaquetamientos BCC, FCC y HCP se muestran en la Figura 1.30. En cada una de ellas se muestran planos y direcciones cristalinicos más representativos para cada empaquetamiento explicado, escritos con la notación de los índices de Miller y omitiendo algunas direcciones para dar claridad a la figura.

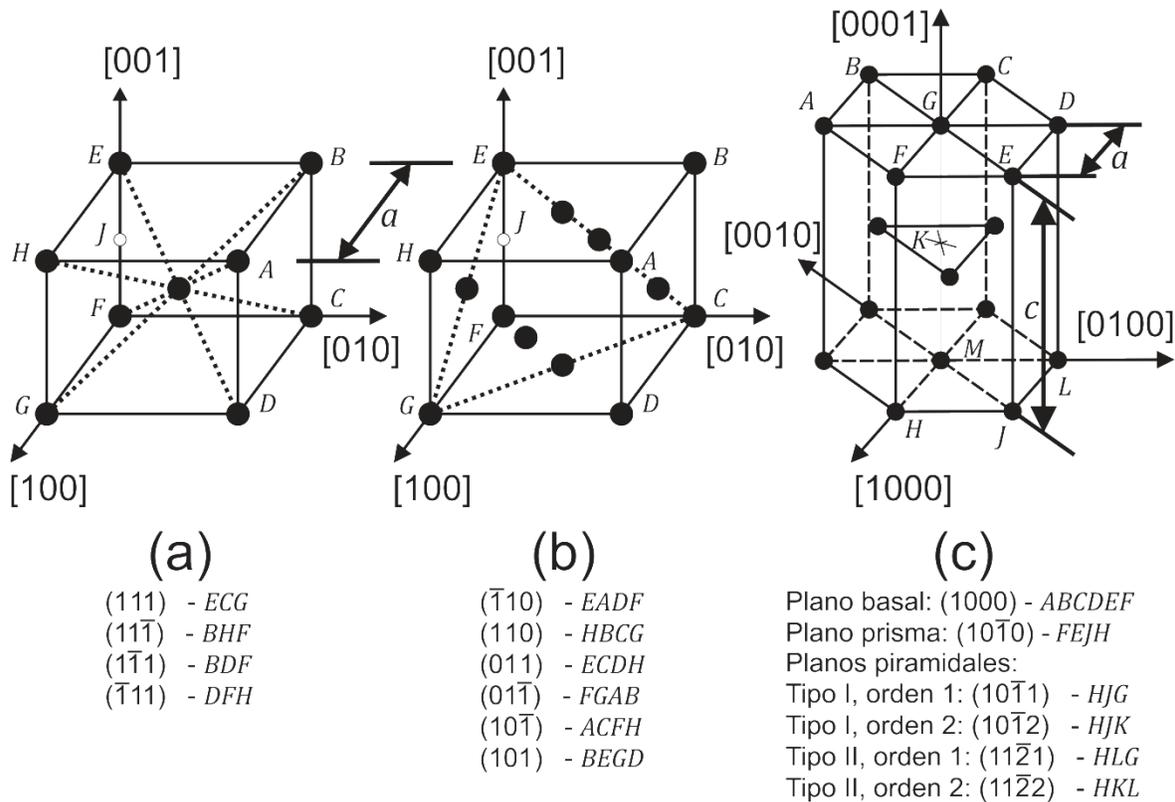


Figura 1.30. Empaquetamientos en metales y sus celdas unitarias. (a) Planos cristalinicos en BCC, (b) Planos cristalinicos en FCC (sólo se muestran 3 direcciones), (c) Planos cristalinicos en HCP [57].

El deslizamiento en una red cristalina se debe primordialmente al movimiento de los defectos de línea llamados dislocaciones. Además, también ocurre deslizamiento en un monocristal por medio de maclas (en inglés, *twinning*) y transformación martensítica. El deslizamiento en una red cristalina sucede generalmente en los planos con mayor densidad atómica y ocurre en la dirección mejor empaquetada dentro de dichos planos; a este plano y dirección se les conoce como sistema de deslizamiento. La resistencia al deslizamiento en estos planos es menor, en comparación con otros planos posibles de deslizamiento. En las estructuras FCC, BCC y HCP se encuentran sistemas de deslizamiento específicos, como se muestra en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1. Sistemas de deslizamiento en los empaquetamientos FCC, BCC y HCP [58]

Estructura Cristalina	Sistemas de Deslizamiento	Observaciones
FCC	1. $\{111\}\{110\} \rightarrow 4 \times 3 = 12$	12 sistemas de deslizamiento activables
BCC	1. $\{110\}\{111\} \rightarrow 6 \times 2 = 12$ 2. $\{112\}\{111\} \rightarrow 24$	Los sistemas (1) se refieren al plano y dirección cristalinos con mayor densidad atómica.
HCP	1. $(0001)\{11\bar{2}0\} \rightarrow 1 \times 3 = 3$ 2. $\{10\bar{1}0\}\{11\bar{2}0\} \rightarrow 3$ con $c/a > \sqrt{8}/3$ 3. $\{10\bar{1}1\}\{11\bar{2}0\} \rightarrow 6$ con $c/a < \sqrt{8}/3$	Los sistemas (1) representan al plano y direcciones cristalinos con mayor densidad atómica. La temperatura activa los sistemas de deslizamiento (2) y (3) y la relación $c/a$ es un parámetro que se utiliza para predecir que sistemas se activan (valor teórico, $c/a = \sqrt{8}/3$ ).

## 1.5.2. Sistemas de deslizamiento independientes

La descripción del deslizamiento que ocurre dentro de un monocristal se realiza mediante la formulación de una ecuación constitutiva que involucre los esfuerzos, deformaciones y su rotación de cuerpo rígido de manera local. Lo anterior significa establecer esta ecuación en un sistema de referencia asociado al monocristal (sistema de referencia cristalino). Para lograr lo anterior, se requiere establecer el modelado de procesos internos tales como velocidades de deslizamiento en varios sistemas de deslizamiento y la rotación de la red cristalina. El resultado de la descripción formulada por la ecuación constitutiva local debería explicar la deformación plástica macroscópica que se observa en el sólido, según el método de homogenización que se utilice (se le llama también, aproximación cristalina). Más adelante se hace una breve descripción de algunas aproximaciones cristalinas utilizadas.

La ecuación constitutiva local consiste en una ecuación cinemática y un criterio de selección para los sistemas de deslizamiento activos en el cristal, como se explica más adelante. La ecuación cinemática relaciona el tensor gradiente de velocidad con las rapidezces de deslizamiento de aquellos sistemas de deslizamiento activos. La Ecuación (1.37) muestra la ecuación cinemática.

$$\mathbf{l} = \sum_{s=1}^N \mathbf{b}^{(s)} \mathbf{n}^{(s)} \dot{\gamma}^{(s)} \quad (1.37a)$$

$$l_{ij} = \sum_{s=1}^N b_i^{(s)} n_j^{(s)} \dot{\gamma}^{(s)} \quad (1.37b)$$

Donde  $\mathbf{I}$  es el tensor gradiente de velocidad en el cristal,  $\mathbf{b}^{(s)}$  y  $\mathbf{n}^{(s)}$  son el vector unitario en la dirección del vector de Burgers y el vector normal unitario del plano de deslizamiento en el sistema de deslizamiento  $s$ , respectivamente;  $\dot{\gamma}^{(s)}$  la rapidez de deslizamiento en el sistema  $s$  y  $N$  representa el número de sistemas de deslizamiento disponibles en la red cristalina (ver Tabla 1.1). El tensor  $\mathbf{I}$  se puede expresar como la suma de un tensor simétrico ( $\mathbf{d}$ ) y uno anti-simétrico ( $\mathbf{w}^{(L)}$ ), que definen al tensor rapidez de deformación local ( $\mathbf{d}$ ) y al tensor rapidez de rotación en la red cristalina ( $\mathbf{w}^{(L)}$ ; en inglés, *Lattice: L*), como se muestra en la Ecuación (1.38).

$$\mathbf{I} = \text{Sym}\{\mathbf{I}\} + \text{Skew}\{\mathbf{I}\} = \mathbf{d} + \mathbf{w}^{(L)} \quad (1.38a)$$

$$\mathbf{d} = \sum_{s=1}^N \frac{1}{2} [\mathbf{b}^{(s)} \mathbf{n}^{(s)} + \mathbf{n}^{(s)} \mathbf{b}^{(s)}] \dot{\gamma}^{(s)} \quad (1.38b)$$

$$\mathbf{w}^{(L)} = \sum_{s=1}^N \frac{1}{2} [\mathbf{b}^{(s)} \mathbf{n}^{(s)} - \mathbf{n}^{(s)} \mathbf{b}^{(s)}] \quad (1.38c)$$

Se define a  $\mathbf{M}^{(s)}$  como el factor de orientación asociado al sistema de deslizamiento  $s$ . Este factor es una matriz simétrica compuesta por funciones lineales de los cosenos directores de los vectores normales a los planos de deslizamiento  $\mathbf{n}^{(s)}$  y los vectores asociados a las direcciones de deslizamiento  $\mathbf{b}^{(s)}$ , con respecto a un sistema de referencia adecuado (incluyendo el sistema de referencia cristalino). La Ecuación (1.39) muestra su definición.

$$\mathbf{M}^{(s)} = \frac{1}{2} [\mathbf{b}^{(s)} \mathbf{n}^{(s)} + \mathbf{n}^{(s)} \mathbf{b}^{(s)}] \quad (1.39a)$$

$$M_{ij}^{(s)} = \frac{1}{2} [b_i^{(s)} n_j^{(s)} + b_j^{(s)} n_i^{(s)}] \quad (1.39b)$$

En 1928, von Mises demostró que se requieren por lo menos cinco sistemas de deslizamiento linealmente independientes para que un cristal experimente deformación plástica por deslizamiento general (movimiento de dislocaciones, maclas de deformación, etc) – este dato también se confirma en [59] –. Ya sea que se tenga o no el número de sistemas de deslizamiento independientes, los granos que componen a la estructura cristalina dentro de un policristal se ven restringidos en su deslizamiento por aquellos granos vecinos con los cuales forman límites de grano.

Una deformación plástica infinitesimal en el monocristal indica que un número  $m$  de sistemas de deslizamiento están activos, cada uno con su respectiva deformación por deslizamiento. Es decir, las contribuciones de cada sistema sumadas entre sí completan a la deformación plástica total del monocristal. La Ecuación (1.40) muestra la afirmación anterior.

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{(T)} = \sum_{s=1}^m d\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)} \quad (1.40a)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{(T)} = \sum_{s=1}^m d\varepsilon_{ij}^{(s)} \quad (1.40b)$$

De la Ecuación (1.38b) se deduce que las componentes del tensor  $d_{ij}$  definen un sistema de seis ecuaciones, aunque sólo se necesitan cinco sistemas de deslizamiento linealmente independientes activos para que el sistema de ecuaciones tenga solución – ver la Ecuación (1.41) –. Debido a que el tensor  $l_{ij}$  es conocido (y, por lo tanto, también su parte simétrica  $\mathbf{d}$ ) porque representa el modo de deformación impuesto, las incógnitas del sistema de ecuaciones son las rapidezces de deslizamiento  $\dot{\gamma}^{(s)}$  y los factores de orientación asociados a los sistemas de deslizamiento activos  $\mathbf{M}^{(s)}$ . Sin embargo, la solución del sistema de ecuaciones no es única debido a que existen muchas combinaciones posibles de seis sistemas de deslizamiento linealmente independientes en HCP, FCC y BCC. Además, se considera que los procesos de deformación plástica por deslizamiento no producen cambio en la densidad del cristal; es decir, a nivel macroscópico no existe un cambio de volumen, por lo que la traza del tensor de deformaciones es nula. La traza del tensor  $d_{ij}$  también es cero debido a la ortogonalidad entre el vector de Burgers y el vector normal al plano de deslizamiento.

$$tr(\mathbf{d}): d_{ii} = 0 \quad (1.41)$$

$$\mathbf{b}^{(s)} \cdot \mathbf{n}^{(s)}: b_i^{(s)} n_i^{(s)} = 0 \quad (1.42)$$

Por lo tanto, existen solamente cinco componentes del tensor rapidez de deformación que definen un sistema de cinco ecuaciones linealmente independientes, por lo que se requieren únicamente cinco sistemas de deslizamiento linealmente independientes para que la Ecuación (1.38b) tenga solución. Sin embargo, en FCC [60] se encuentran 384 combinaciones de 5 sistemas de deslizamiento linealmente independientes que son diferentes entre sí; mientras que en BCC, para los sistemas (1) de la Tabla 1.1 se tienen 384 combinaciones linealmente independientes, aunque los sistemas (2) aportan un número mayor de combinaciones posibles de sistemas de deslizamiento independientes.

### 1.5.3. Mecanismos de deslizamiento

El deslizamiento que ocurre entre los planos cristalinos explica la deformación plástica macroscópica que ocurre en un monocristal cuando se rebase el esfuerzo cortante crítico. Existe un esfuerzo cortante teórico [61] capaz de ocasionar deslizamiento relativo entre planos atómicos. Empero, se ha observado de ensayos en probetas de tracción de monocristales que la deformación plástica comienza a valores mucho menores al esfuerzo cortante teórico. El esfuerzo cortante requerido para producir deformación plástica en monocristales metálicos está entre 0.5 y 10 MPa. Esto quiere decir que existen mecanismos de deslizamiento a nivel cristalino que promueven el deslizamiento a niveles de esfuerzos mucho más bajos que el teórico.

En esta tesis no se pretende utilizar un modelo matemático que explique las propiedades mecánicas a partir de la microestructura del material, tal y como sería el caso con el tamaño de grano, apilamiento de dislocaciones y los límites de grano. El efecto que poseen sobre la rapidez de deslizamiento en cada uno de los sistemas de deslizamiento activos es una consecuencia de los parámetros anteriores. Por lo tanto, aquí sólo se hace referencia a los trabajos en [62,63] para mayor información al respecto.

#### 1.5.4. Ley de Schmid

Esta ley explica que el deslizamiento en un monocristal depende de la orientación que poseen los sistemas de deslizamiento y del estado de esfuerzos que se proyecta sobre ellos. En el caso de un monocristal, esta magnitud sería el esfuerzo de cedencia calculado en la curva esfuerzo-deformación para un ensayo de tracción. Su valor se ve afectado por la temperatura y la composición del monocristal. La Ecuación (1.43) muestra la forma tensorial de la ley de Schmid.

$$\tau_C^{(s)} = \mathbf{M}^{(s)} : \mathbf{s} \quad (1.43a)$$

$$\tau_C^{(s)} = M_{ij}^{(s)} s_{ij} \quad (1.43b)$$

Donde  $\mathbf{s}$  es el tensor desviador de esfuerzos y  $\mathbf{M}^{(s)}$  es el factor de orientación del sistema de deslizamiento  $s$ , como se define en la Ecuación (1.39a). Como un caso particular de esta ley, tenemos el conocido ejemplo de la probeta de tracción en un monocristal, donde la deducción de ésta se realiza a través de un análisis geométrico. La deducción formal de esta ley escalar es a través de la Ecuación (1.43a). De acuerdo al sistema de referencia ortogonal ( $g: x_1x_2x_3$ ) que se observa en la Figura 1.31, la forma escalar de la ley de Schmid tensorial para una probeta de monocristal sujeta a tracción pura queda como se expresa en la Ecuación (1.44). Considere que  $g$  es un sistema de referencia asociado a la muestra y que ninguno sus ejes están necesariamente sobre el plano de deslizamiento del sistema  $s$ .

$$\tau_C^{(s)} = \tau_{CRSS}^{(s)} = (F/A)u_1n_1 = \sigma u_1n_1 = \sigma \cos \lambda \cos \Phi = \sigma m \quad (1.44)$$

Donde  $F$  es la magnitud de la fuerza de tracción ( $\mathbf{F}$ ) que se ejerce sobre el eje axial de la probeta,  $A$  es el área transversal de la probeta,  $u_1$  y  $n_1$  son los cosenos directores de los ángulos que forman el vector de deslizamiento unitario ( $\mathbf{u}$ ) y el vector normal unitario al plano de deslizamiento ( $\mathbf{n}$ ) con respecto al eje  $x_1$ ; de la Figura 1.31 se puede observar que estos ángulos son  $\lambda$  y  $\Phi$ , respectivamente. El factor de Schmid es  $m$ . El esfuerzo cortante crítico  $\tau_{CRSS}^{(s)}$  (en inglés, *critical resolved shear stress*) representa la magnitud del esfuerzo cortante necesario para que

comience el deslizamiento en un monocristal. El sistema de deslizamiento que se observa en la probeta define un factor de orientación  $\mathbf{M}^{(s)}$  que está asociado al sistema de referencia  $g$ . La Ecuación (1.45) muestra las componentes de este factor.

$$[\mathbf{M}^{(s)}]_g \equiv [M_{ij}^{(s)}]_g = \begin{bmatrix} M_{11}^{(s)} & M_{12}^{(s)} & M_{13}^{(s)} \\ M_{12}^{(s)} & M_{22}^{(s)} & M_{23}^{(s)} \\ M_{13}^{(s)} & M_{23}^{(s)} & M_{33}^{(s)} \end{bmatrix}_g \quad (1.45)$$

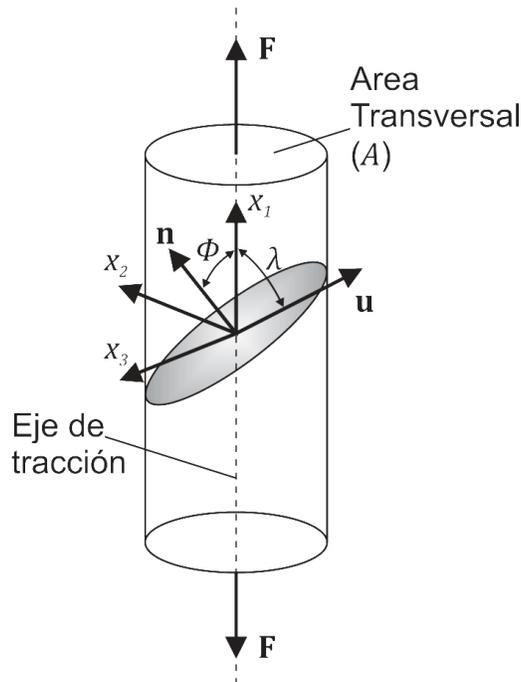


Figura 1.31. Caso particular de la ley de Schmid tensorial: Ensayo de tracción [64].

El valor de  $\tau_{CRSS}^{(s)}$  establece un criterio para el comienzo del deslizamiento en un monocristal. Además, el deslizamiento está asociado con el movimiento de dislocaciones y con las maclas, como se ha mencionado anteriormente. Por lo tanto,  $\tau_{CRSS}^{(s)}$  se ve afectado directamente con la interacción que involucra a las dislocaciones con los defectos cristalinos dentro del cristal; esta es un área de investigación de la metalurgia física. En el caso de un monocristal puro,  $\tau_{CRSS}^{(s)}$  es idéntico al esfuerzo de Peierls ( $\tau^{(Peierls)}$ ). Este esfuerzo cortante está relacionado con el movimiento de una dislocación a través de la red cristalina en una dirección particular. La Ecuación (1.46) muestra su respectivo valor.

$$\tau^{(Peierls)} = \frac{2G}{1-\nu} \exp\left(-\frac{2\pi w}{b}\right) = \frac{2G}{1-\nu} \exp\left[-\frac{2\pi a}{(1-\nu)b}\right] \quad (1.46)$$

Donde  $a$  es la distancia entre planos de deslizamiento,  $b$  es la distancia entre átomos sobre la dirección de deslizamiento; además,  $w$  es el ancho del núcleo de la dislocación, por lo que la Ecuación (1.46) muestra que  $\tau^{(Peierls)}$  posee una alta dependencia a este parámetro. De esta forma se puede deducir que  $\tau^{(Peierls)}$  es muy pequeño. Sin embargo, dentro de un material policristalino – es decir, un material formado con varios monocristales separados con límites de grano entre sí – se encuentran otros defectos cristalinos que detienen el movimiento de las dislocaciones.

### 1.5.5. Texturas cristalinas en los metales

Las texturas cristalinas u orientaciones preferenciales de la red cristalina, son la raíz de la anisotropía en las propiedades de un material policristalino. Esto quiere decir que el valor para cada una de las propiedades es diferente según la dirección en el material estudiado. En el caso de materiales cuya manufactura se realiza mediante metalurgia de polvos para generar un sólido conglomerado, se obtiene una distribución aleatoria en la orientación cristalográfica de los granos. Sin embargo, en la mayoría de los casos existe una dirección preferencial debido a un proceso natural – como la formación de dendritas en la fundición de metales – o a un proceso de conformado (forja, estampado, laminado, extrusión, ...). En esta sección se muestran, de manera breve, los aspectos básicos más importantes para la medición experimental de texturas y la influencia que tienen sobre el comportamiento anisotrópico que se observa en las propiedades plásticas de una lámina metálica.

- *Ley de Bragg y difracción de rayos X*

A nivel macroscópico, la medición cuantitativa experimental de las texturas se realiza generalmente con la difracción de rayos X (RX), aunque también se utiliza difracción de neutrones y, a escala microscópica, electrones.

Los RX son ondas electromagnéticas que pueden representarse como funciones sinusoidales, con una longitud de onda entre 0.01 y 1.0 nm, situada entre el espectro electromagnético de la radiación ultravioleta y los rayos gamma. Viajan en línea recta a la velocidad de la luz; con la suficiente energía, pueden atravesar muestras cristalinas delgadas. Debido a que el tamaño de su longitud de onda es similar al tamaño de los átomos, los RX son importantes para analizar materiales con estructura cristalina. Según la mecánica cuántica, su descripción puede definirse como onda o partícula (dualidad onda-partícula). También, la teoría del electromagnetismo establece que la radiación electromagnética será provocada cuando una partícula cargada es acelerada o desacelerada (por ejemplo, un electrón con carga negativa). Una manera sencilla de explicar la producción de rayos X es mediante un potencial eléctrico que aplica un voltaje elevado entre un

cátodo (carga  $-$ ) y un ánodo (carga positiva  $+$ ) dentro de un tubo al vacío. Si la temperatura en el cátodo es lo suficientemente alta (sin llegar a su punto de fusión), entonces el campo eléctrico entre los electrodos acelerará a los electrones altamente energizados hasta el ánodo, provocando en el proceso una emisión térmica y finalmente, una generación de RX cuando colisionan con el metal base del ánodo, convirtiendo la energía potencial adquirida en energía cinética. En cristalografía, el ánodo está hecho comúnmente de cobre.

Un cristal es un arreglo periódico de átomos el cual se encarga de difractar las ondas electromagnéticas de los RX con sus electrones. Cuando la radiación RX golpea a un electrón de los átomos del cristal – es decir, la muestra –, se producen ondas electromagnéticas secundarias llamadas dispersión elástica (principio de Huygens-Fresnel). Un cristal entonces producirá un arreglo secundario de ondas electromagnéticas cuando los RX interactúan con los electrones de los átomos del cristal, el cual en la mayoría de las direcciones se cancelan entre sí (interferencia destructiva). Sin embargo, en direcciones específicas las ondas electromagnéticas se suman porque se encuentran en fase, las cuales están determinadas por la ley de Bragg.

A continuación, se muestra una sencilla demostración de esta ley. Para que suceda una difracción de radiación electromagnética en fase, es necesario que se cumplan tres condiciones: 1. El arreglo atómico en el material de la muestra debe ser ordenado (cristalino). 2. La radiación debe ser monocromática, lo cual significa que debe tener sólo una longitud de onda. 3. La longitud de onda de la radiación ( $\lambda$ ) debe ser del mismo orden de tamaño (o incluso más pequeño) que la difracción característica. Dadas las tres condiciones de difracción anteriores, se concluye que el ángulo de difracción de una onda electromagnética depende de su longitud de onda y del espacio entre los átomos que la dispersan. La ley de Bragg [65] muestra dicha dependencia, considerando que los planos atómicos son como “espejos” que reflejan la onda electromagnética y que se encuentran separados por una distancia característica en el cristal ( $d$ ). La Figura 1.32 muestra los planos atómicos y las ondas electromagnéticas que interactúan entre sí, así como un esquema simple del equipo utilizado. La radiación incidente  $L$  se encuentra en fase y la línea perpendicular a ésta representa una de las crestas de las ondas en fase. Una parte de la radiación  $L$  se ve reflejada por los átomos del plano  $A$  (trayectoria  $LM$ ), mientras que el resto sigue viajando hasta ser reflejada por los átomos en los planos atómicos  $B$  y  $C$ . Para obtener una onda reflejada con intensidad en la dirección  $MN$ , es necesario que se encuentre en fase. Esto significa que la longitud de onda de la radiación reflejada debe ser igual a la longitud de onda de la radiación incidente, o bien un múltiplo entero de ésta. Por lo tanto, los segmentos  $PM_1$  y  $M_1Q$  deben ser un múltiplo de la longitud de onda, como muestra la Ecuación (1.47a). Además, por geometría los segmentos  $PM_1$  y  $M_1Q$  se encuentran relacionados con el ángulo de incidencia  $\theta$  y la distancia  $d$ , como muestra la Ecuación (1.47b). Igualando las Ecuaciones (1.47a) y (1.47b), se obtiene la ley de Bragg, como se muestra en la Ecuación (1.47c).

$$PM_1 = M_1Q = n\lambda \quad (1.47a)$$

$$PM_1 = M_1Q = d \sin \theta \quad (1.47b)$$

$$n\lambda = d \sin \theta \quad (1.47c)$$

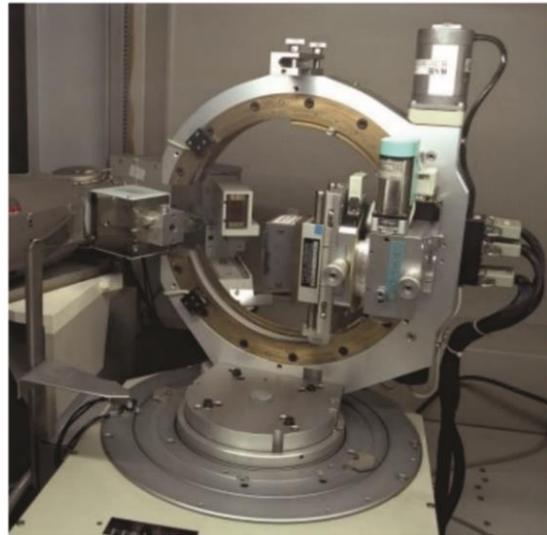
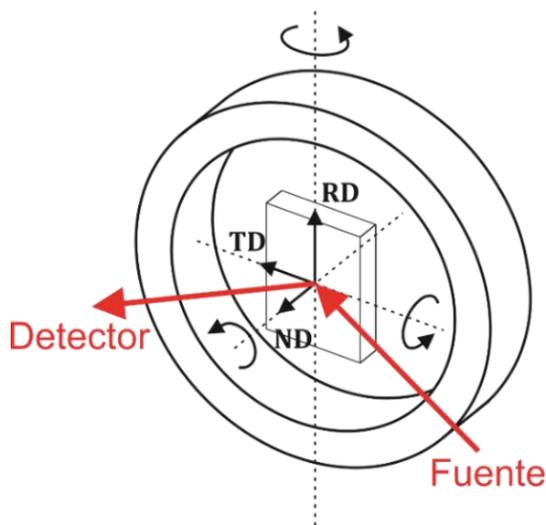
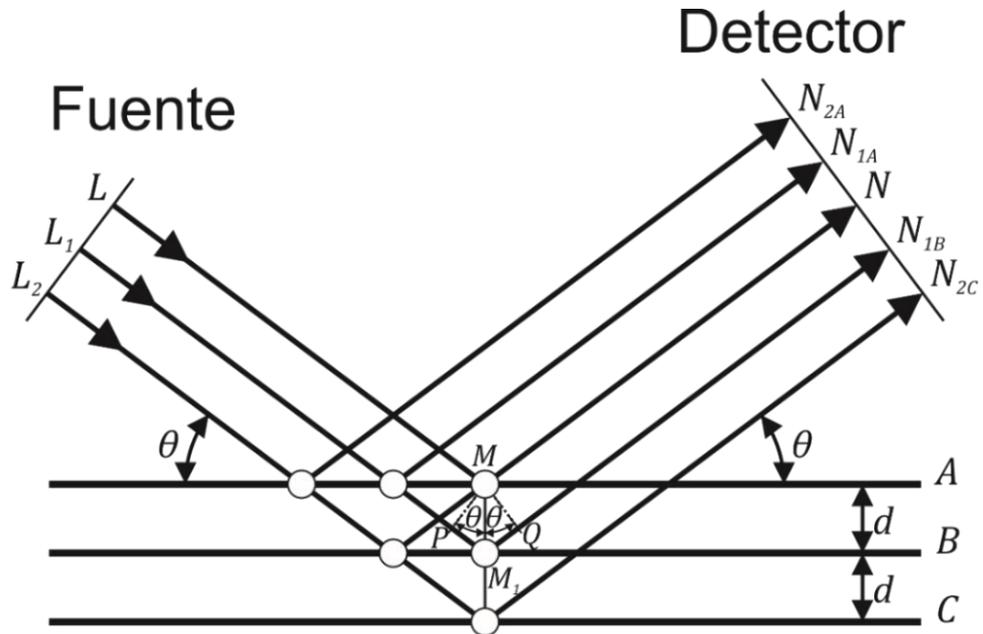


Figura 1.32. Esquema de la ley de Bragg. Se muestra también un esquema sencillo del goniómetro Siemens D500 de la fotografía [66], donde se muestran los grados de libertad del equipo sobre la muestra para incidir el haz de RX.

El ángulo de la ley de Bragg ( $\theta$ ) representa una herramienta fundamental para la medición de texturas, ya que permite identificar el arreglo de los planos cristalinos y su orientación cuando se varía  $\theta$  como un parámetro, dentro del cristal. Para una

muestra con una distribución aleatoria en las orientaciones del cristal, se produce un patrón de difracción uniforme debido a que el número de planos reflejantes es igual en todas las direcciones. Sin embargo, para una orientación preferencial, el número de planos que reflejan a los RX varía según la dirección estudiada, provocando que este patrón se inhomogeneo. A estos patrones de difracción se les denomina anillos Debye-Scherrer.

- *Descripciones matemáticas de una orientación*

Para especificar una orientación cristalina, es necesario establecer un sistema de referencia. Se requiere de un sistema de referencia cartesiano que esté asociado con la muestra ( $S: S_1, S_2, S_3$ ) y un sistema de referencia cartesiano que se relacione con las direcciones cristalográficas ( $C: C_1, C_2, C_3$ ). Este último se vuelve un sistema ortogonal gracias a una transformación previa que convierte los sistemas coordenados no ortogonales de las redes de Bravais en el sistema de referencia  $C$  [67], donde la red triclinica representa el caso más general. Una vez calculado el sistema  $C$ , existe una matriz de rotación que describe la orientación cristalográfica con respecto al sistema de referencia de la muestra. La Ecuación (1.48) muestra el resultado anterior.

$$\mathbf{C} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{S} \quad (1.48a)$$

$$C_i = g_{ij} S_j \quad (1.48b)$$

Donde  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{S}$  representan el sistema de referencia del cristal y el sistema de referencia de la muestra, respectivamente;  $\mathbf{g}$  es la matriz de rotación que asocia a ambos sistemas de referencia. Esta matriz se define con los cosenos de los ángulos que forman las direcciones  $\langle 100 \rangle$  con los ejes del sistema de la muestra. La Figura 1.33 muestra los ángulos con respecto al sistema de referencia de una lámina. Los ángulos  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  representan los ángulos que forma la dirección  $[100]$  con los ejes **RD**, **TD** y **ND** respectivamente;  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  los ángulos de  $[010]$  con respecto a los ejes **RD**, **TD** y **ND** respectivamente y los ángulos  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  definen la orientación de la dirección  $[001]$  con respecto a **RD**, **TN** y **ND** respectivamente.

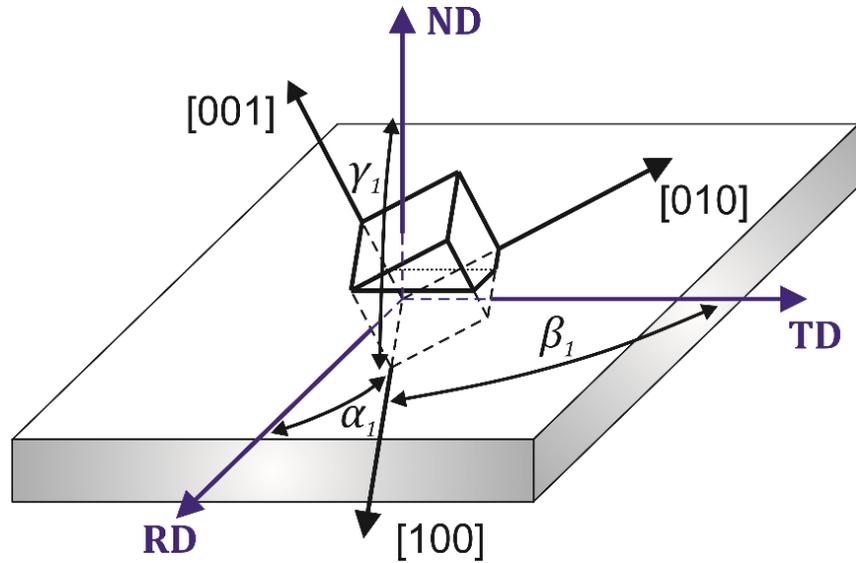


Figura 1.33. Ángulos para la matriz de rotación sobre una muestra de lámina. Por claridad, sólo se presentan los ángulos directores para el eje [100].

Por lo tanto,  $\mathbf{g}$  es una matriz cuadrada de nueve componentes como se muestra en la Ecuación (1.49). Tanto renglones como columnas representan la misma base de 3 vectores unitarios ortogonales entre sí, por lo que  $\mathbf{g}$  es una matriz ortonormal, y su inversa es simplemente la matriz transpuesta ( $\mathbf{g}^T = \mathbf{g}^{-1}$ ). Es por esta razón que la matriz  $\mathbf{g}$  se define debido a que forma la base para poder definir de manera matemática otras descripciones de la misma orientación. La Ecuación (1.49) muestra la definición de  $\mathbf{g}$  en términos de los cosenos directores entre el sistema  $S$  y el sistema  $C$ .

$$[\mathbf{g}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{e}_1^{(S)} \cdot \mathbf{e}_1^{(C)}) & \cos(\mathbf{e}_2^{(S)} \cdot \mathbf{e}_1^{(C)}) & \cos(\mathbf{e}_3^{(S)} \cdot \mathbf{e}_1^{(C)}) \\ \cos(\mathbf{e}_1^{(S)} \cdot \mathbf{e}_2^{(C)}) & \cos(\mathbf{e}_2^{(S)} \cdot \mathbf{e}_2^{(C)}) & \cos(\mathbf{e}_3^{(S)} \cdot \mathbf{e}_2^{(C)}) \\ \cos(\mathbf{e}_1^{(S)} \cdot \mathbf{e}_3^{(C)}) & \cos(\mathbf{e}_2^{(S)} \cdot \mathbf{e}_3^{(C)}) & \cos(\mathbf{e}_3^{(S)} \cdot \mathbf{e}_3^{(C)}) \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

La descripción matemática de los ángulos de Euler permite el uso único de tres parámetros necesarios para definir una orientación. Estos son  $\varphi_1, \Phi, \varphi_2$ , que definen a los ángulos de Euler de acuerdo a la definición de Bunge y cuyo rango de valores definen al espacio de Euler. La Figura 1.34 muestra su convención. El ángulo  $\varphi_1$  define el giro del eje  $\mathbf{RD}$  con respecto al eje  $\mathbf{ND}$ , para tomar la posición  $\mathbf{RD}'$ ;  $\Phi$  define la rotación del eje  $\mathbf{ND}$  con respecto al eje  $\mathbf{RD}'$ , para que sea coincidente con el eje [001] del cristal; finalmente,  $\varphi_2$  representa el giro con respecto a  $\mathbf{ND}$  (ahora situado en la posición [001]) sobre el plano definido por las direcciones [100] y [010], para que las direcciones  $\mathbf{RD}'$  y  $\mathbf{TD}$  sean coincidentes con los ejes [100] y [010].

Analíticamente, las tres rotaciones definidas por los ángulos de Euler se pueden definir mediante tres matrices de transformación, como muestra la Ecuación (1.50). Además, estas matrices se encuentran relacionadas con la matriz de rotación  $\mathbf{g}$ , definida en la Ecuación (1.48) y (1.49).

$$[\mathbf{g}]_{\varphi_1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{g}]_{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}, [\mathbf{g}]_{\varphi_2} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.50a)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\varphi_1} \cdot \mathbf{g}_{\Phi} \cdot \mathbf{g}_{\varphi_2} \quad (1.50b)$$

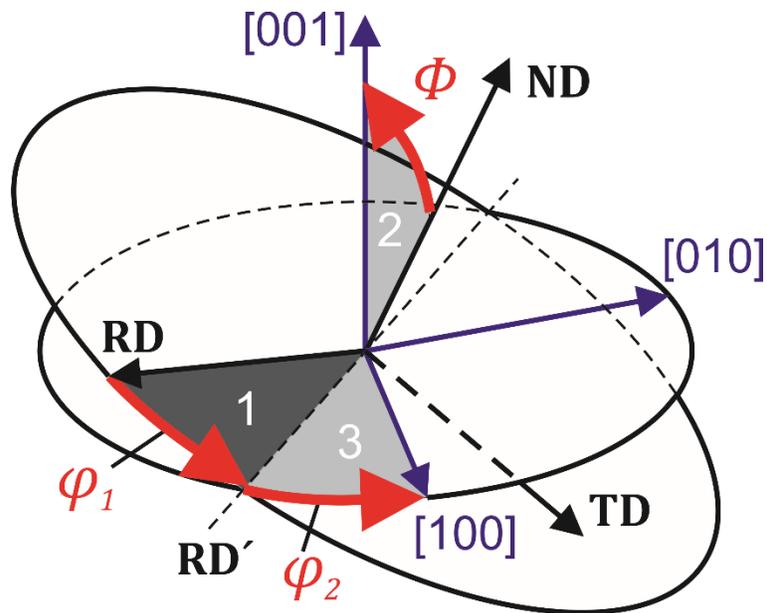


Figura 1.34. Definición de ángulos de Euler, según la convención de Bunge.

Estos tres ángulos también se encuentran relacionados con los ángulos que se utilizan para definir las proyecciones estereográficas de las direcciones cristalográficas de la muestra, como se explica a continuación.

- *Proyecciones estereográficas: Figura polo*

Para determinar la orientación de  $C$  con respecto a  $S$ , la muestra analizada es sistemáticamente girada en un goniómetro con ángulos bien definidos de tal forma que todos los posibles planos cristalinos son sucesivamente colocados en condición de reflexión y las intensidades obtenidas son determinadas como función de los ángulos experimentales. Para muestras policristalinas, la intensidad obtenida para una orientación de la muestra depende directamente de la fracción de volumen de monocristales que cumplen con la condición de reflexión – Ecuación (1.47c) –. Las direcciones o polos representan direcciones cristalinicas o direcciones perpendiculares a los planos dentro del cristal que se encuentran en reflexión.

Pueden describirse mediante una esfera de referencia unitaria asociada al sistema de la muestra  $S$ . Cada punto sobre la esfera define una dirección dentro del cristal. La información tridimensional del cristal sobre la esfera de referencia se proyecta hacia el sur de ésta; el plano ecuatorial sirve para elaborar una representación bidimensional llamada figura polo. La Figura 1.35 muestra un esquema representativo de una proyección estereográfica y su figura polo correspondiente.

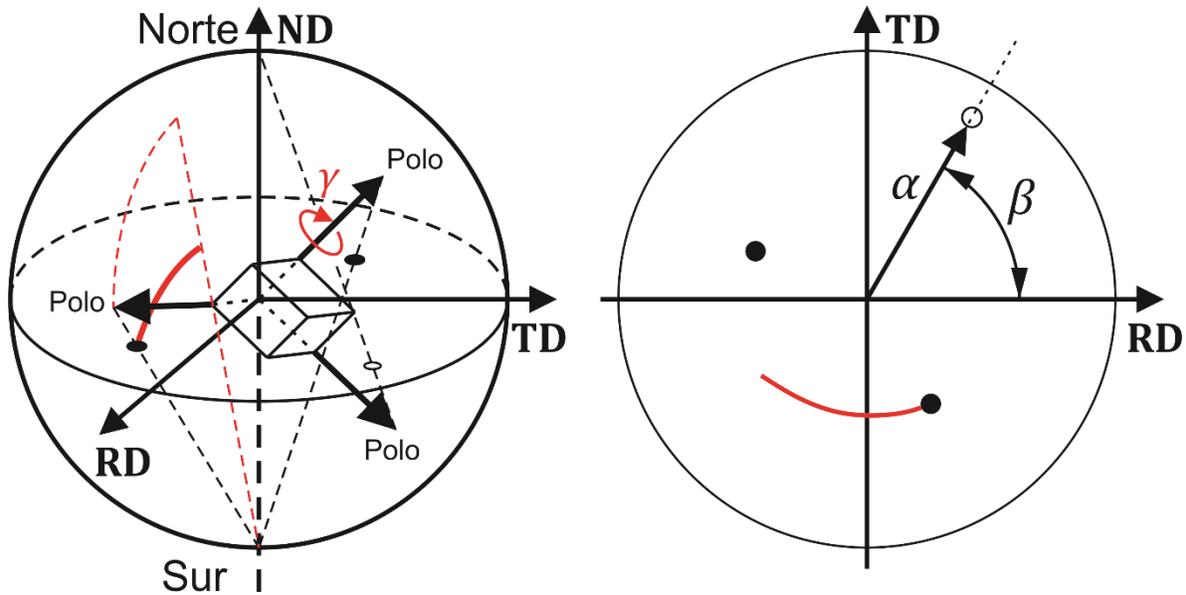


Figura 1.35. Proyección estereográfica de una figura polo. Cada polo se proyecta hacia el plano ecuatorial de la esfera unitaria. Nota: Los polos se proyectan hacia el Norte, dejando su proyección como círculo abierto en la figura polo, para indicar que el polo correspondiente está por debajo del plano ecuatorial.

Los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  en la figura polo se denominan azimutal y rotacional, respectivamente. El primero, se mide con respecto a la dirección **ND** de la muestra, recorriendo las circunferencias definidas por los meridianos de la esfera unitaria; el segundo, mide el ángulo sobre el plano ecuatorial para ubicar la proyección del polo. Como se ha mencionado anteriormente, se requieren varias proyecciones bidimensionales para definir completamente las orientaciones dentro de un policristal. Estas proyecciones son las proyecciones estereográficas o figuras polo, donde cada polo define una dirección cristalográfica asociada al sistema cristalino ortogonal utilizado. La Ecuación (1.51) representa la fracción de volumen de todos los granos que poseen una dirección cristalográfica *paralela* con la dirección de la muestra que define la figura polo.

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{4\pi} P_h(y) dy \quad \text{con } dy = \sin \alpha \, d\alpha d\beta \quad (1.51)$$

Donde  $y$  representa la orientación experimental del goniómetro definida por los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , los cuales se pueden medir desde la figura polo;  $h$  es la orientación cristalográfica o polo, y  $dy$  representa el elemento diferencial del espacio que definen los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .

- *Función de distribución de orientaciones*

Una función de distribución de orientaciones (*ODF*, indicada como  $f(g)$ ) define la probabilidad de todas las orientaciones en un cristal, descrita generalmente por la orientación  $g: \{\varphi_1, \Phi, \varphi_2\}$  de los ángulos de Euler. La Ecuación (1.52) muestra la definición anterior con las orientaciones en el volumen del cristal correspondiente. También, la Figura 1.36 muestra un esquema de una microestructura donde se observa la fracción de volumen de granos dentro de un cristal para una orientación específica.

$$\frac{dv}{v} = f(g)dg \quad (1.52a)$$

$$\text{con } dg = \sin \Phi d\varphi_1 d\Phi d\varphi_2 \quad (1.52b)$$

$$\text{y } \oint f(g)dg = 8\pi^2 \quad (1.52c)$$

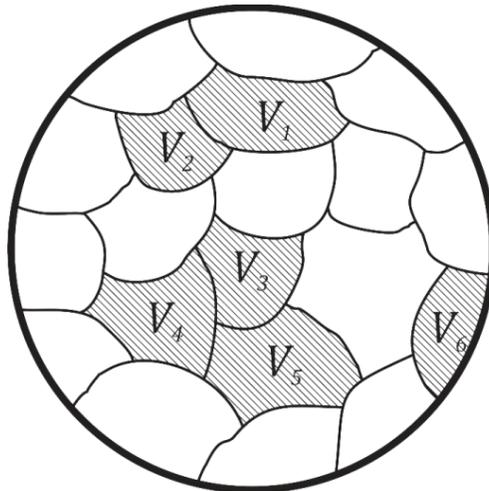


Figura 1.36. Esquema de una micrografía mostrando la fracción de volumen (granos) cuya orientación  $g$  es idéntica.

La fracción de volumen de granos con dirección paralela al polo se define con la Ecuación (1.51). La ecuación fundamental para calcular la función  $f(g)$  a partir de la información que proporcionan los polos experimentales  $P_h(y)$  se muestra en (1.53). Como se observa en la Figura 1.35, cada polo representa una dirección cristalina que define una orientación dentro del cristal; sin embargo, los polos aun poseen un grado de libertad por definir puesto que todavía pueden girar con respecto a la dirección que ellos definen (ángulo  $\gamma$ ). Esta es la razón general por la

que se requieren de varias figuras polo experimentales para definir unívocamente cada orientación cristalográfica de la textura en el policristal.

$$P_h(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma=0}^{2\pi} f(g) d\gamma \quad (1.53a)$$

$$\text{con } y: \{\alpha, \beta\} \quad (1.53b)$$

$$\text{y } g: \{\varphi_1, \Phi, \varphi_2\} \quad (1.53c)$$

En este punto, se requiere buscar la solución de la Ecuación (1.53) para determinar a la función  $f(g)$ . Sin embargo, dicha solución no es analítica, por lo que se propone su forma utilizando una base de funciones linealmente independientes. El método de expansión en series de funciones armónicas esféricas generalizadas (propuesto por Bunge [68]) permite darle una forma a la función distribución de orientaciones para que la Ecuación (1.53) tenga solución. La Ecuación (1.54) muestra la forma propuesta de la función  $f(g)$  generalizada, además de la forma que toma si se utilizan los ángulos de Euler.

$$f(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \sum_{n=-l}^{+l} C_l^{mn} T_l^{mn}(g) \quad (1.54a)$$

$$f(\varphi_1, \Phi, \varphi_2) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \sum_{n=-l}^{+l} C_l^{mn} e^{im\varphi_2} P_l^{mn}(\Phi) e^{in\varphi_1} \quad (1.54b)$$

$$\text{con } \nabla^2 f(g) = 0 \quad (1.54c)$$

Donde  $C_l^{mn}$  son los coeficientes de las funciones armónicas esféricas  $T_l^{mn}(g)$ , y cuando se utilizan los ángulos de Euler,  $P_l^{mn}(\Phi)$  representa a las funciones de Legendre generalizadas. Se puede construir un mapa que abarca de manera uniforme todo el espacio de Euler donde se encuentran definidas las orientaciones del policristal en estudio. La Figura 1.37 muestra el mapa de la función  $ODF$  para la superficie de la aleación de aluminio AA6016T4 de 1.1 mm de espesor. En él, se observan los tres ángulos de Euler y secciones constantes (generalmente de  $5^\circ$  en  $5^\circ$  para el ángulo  $\varphi_1$  constante). Los valores que toma cada contorno en la figura  $ODF$  son normalmente de naturaleza logarítmica. El contorno más intenso en la figura  $ODF$  indica aquella dirección cristalográfica hacia donde se encuentran orientados la mayor fracción de granos del policristal.

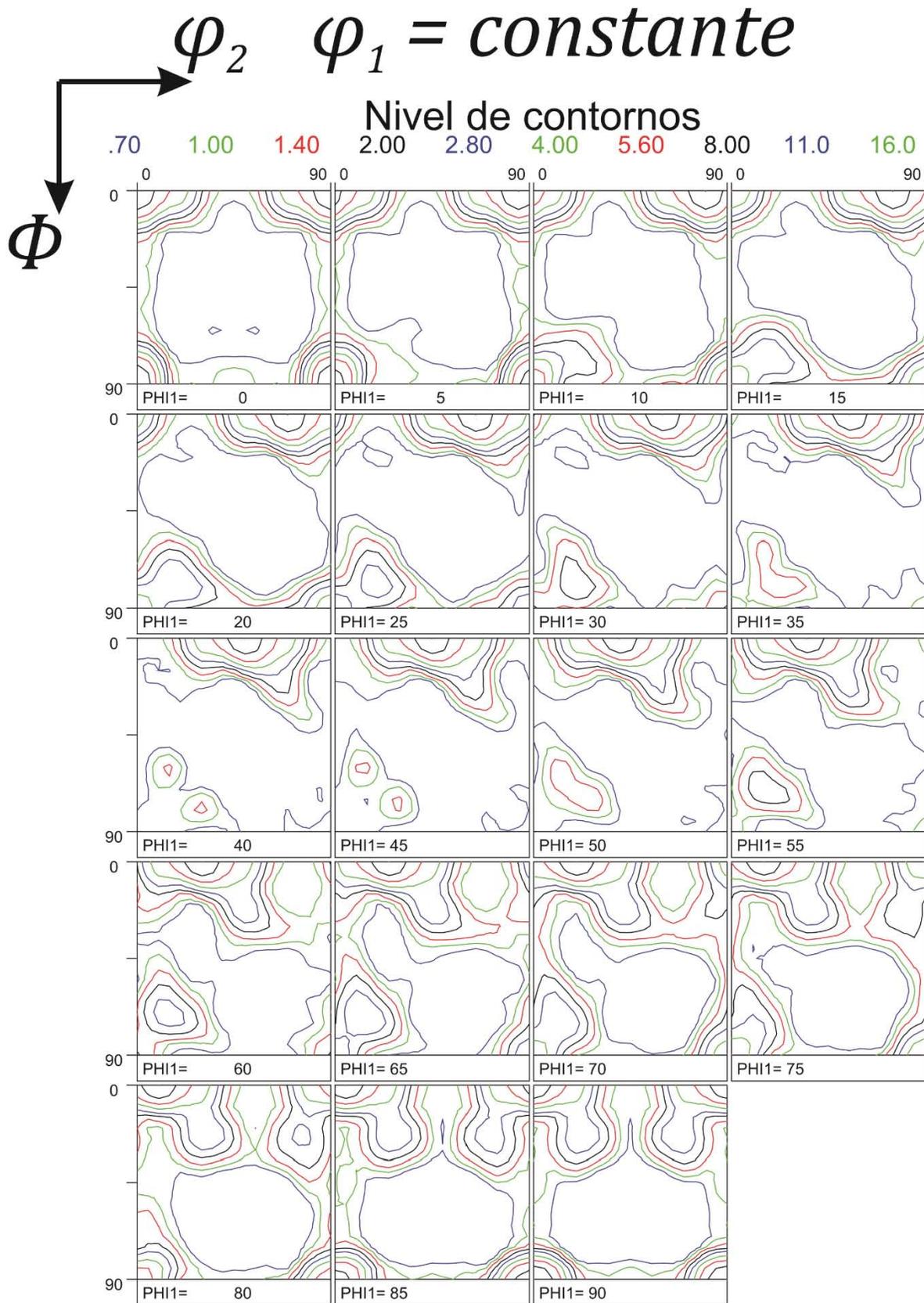


Figura 1.37. Textura superficial para la aleación AA6016T4 con espesor de 1.1 mm.

## 1.6. Modelos para la deformación plástica en policristales

Es necesario determinar la relación entre la deformación plástica incremental de un monocristal con la deformación homogénea macroscópica impuesta para poder predecir el comportamiento plástico, la evolución de la plasticidad anisotrópica y su respectivo proceso de re-orientación del cristal dentro de un policristal, especialmente cuando se ve sometido a grandes deformaciones como en el caso de forja o estampado de láminas.

### 1.6.1. La aproximación de Sachs

Un primer método de homogenización, es decir, una aproximación que permite asociar la deformación plástica cristalina con la deformación plástica macroscópica fue propuesta por Sachs en 1928, considerando que el esfuerzo a tracción de un material policristalino es equivalente a la suma de todas las contribuciones de aquellos granos individuales con menor resistencia a la tracción. De modo que, para un grano, su respectivo esfuerzo de tracción está definido según la ley de Schmid escalar:  $Y_i = g_i \tau$ , donde  $g$  es el factor inverso de Schmid ( $1/m_i$ ) y  $\tau$  el esfuerzo cortante sobre el plano de deslizamiento. El esfuerzo a tracción del policristal es simplemente el promedio de todas las contribuciones anteriores:  $Y = \int Y(g) f(g) dg = \int g \tau f(g) dg$ , donde  $f(g)$  es la función de distribución de orientaciones definida por la textura dentro del metal. La desventaja de esta aproximación de límite inferior es la falta de un equilibrio local y compatibilidad entre los granos vecinos.

### 1.6.2. La aproximación de Taylor

Taylor (1938) elaboró una aproximación de límite superior donde se consideró a las deformaciones cristalinas homogéneas en cada cristal, haciendo énfasis en la necesidad de una compatibilidad completa con el conjunto de granos representativo. Gracias a su trabajo teórico corroborado con el experimental de la época, llegó a la conclusión de que el gradiente de deformación en los granos individuales no era tan diferente al gradiente de deformación macroscópica, por lo que consideró que ambos son iguales. La Ecuación (1.55a) muestra el gradiente de velocidad macroscópico ( $\mathbf{L}$ ) separado en su parte simétrica ( $\mathbf{D}$ ) y antisimétrica ( $\mathbf{W}$ ), los cuales representan el tensor rapidez de deformación y el tensor rapidez de rotación *macroscópicos*, respectivamente. También, se muestra la primera hipótesis de Taylor (en inglés, *Full Constraints Taylor Model*) en la Ecuación (1.55b), tomando en cuenta al tensor rapidez de deformación local de la Ecuación (1.38b).

$$\mathbf{L} = \text{Sym}\{\mathbf{L}\} + \text{Skew}\{\mathbf{L}\} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (1.55a)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{D} \quad (1.55b)$$

En esta tesis, el tensor  $\mathbf{L}$  impone una trayectoria de deformación ( $\mathbf{D}$ ) sobre la lámina mediante el método del elemento finito para validar el código de plasticidad anisotrópica estudiado. También, los ensayos propuestos anteriormente imponen un gradiente controlado  $\mathbf{L}$  que aplica una trayectoria  $\mathbf{D}$  experimental sobre la lámina estudiada, cuya información retroalimenta a los resultados numéricos del código.

Utilizando el resultado de von Mises para sistemas de deslizamiento independientes, es posible escribir la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad (tensor rapidez de deformación local,  $d_{ij}$ ), definida anteriormente en la Ecuación (1.38b), como una combinación lineal de cinco sistemas de deslizamiento linealmente independientes.

$$\mathbf{d} = \mathbf{D} = \sum_{s=1}^5 \mathbf{M}^{(s)} \dot{\gamma}^{(s)} \quad (1.56a)$$

$$d_{ij} = D_{ij} = \sum_{s=1}^5 M_{ij}^{(s)} \dot{\gamma}^{(s)} \quad (1.56b)$$

Donde  $\mathbf{M}^{(s)}$  es el tensor de orientación para el sistema de deslizamiento respectivo, definido anteriormente en la Ecuación (1.39), y  $\dot{\gamma}^{(s)}$  la rapidez de deslizamiento en su respectivo sistema  $s$ . Hasta este punto, la aproximación de Taylor permite que la Ecuación (1.56) relacione una deformación macroscópica impuesta con la deformación plástica que ocurre en un monocristal. Sin embargo, se requiere de un criterio de selección de sistemas de deslizamiento para definir el conjunto de cinco sistemas de deslizamiento independientes que se activan por el tensor gradiente de velocidad impuesto debido a que existen muchas combinaciones posibles, como se explica en la sección 1.5.2. La Ecuación (1.57) muestra la segunda hipótesis de Taylor.

$$\dot{W}_c = \sum_s \tau_{CRSS}^{(s)} \dot{\gamma}^{(s)} \rightarrow \text{mínimo} \quad (1.57)$$

Donde  $\dot{W}_c$  es el trabajo interno en el cristal que se disipa por fricción, por unidad de tiempo;  $\tau_{CRSS}^{(s)}$  el esfuerzo cortante crítico de Schmid y  $\dot{\gamma}^{(s)}$  la rapidez de deslizamiento para su respectivo sistema de deslizamiento  $s$ . Al minimizar la función que describe a  $\dot{W}_c$ , es posible conocer los sistemas de deslizamiento linealmente independientes que se activan con el mínimo trabajo interno hecho sobre el cristal. Se calcula  $\mathbf{b}^{(s)}$  y  $\mathbf{n}^{(s)}$  de cada uno de ellos, con lo cual queda definida la matriz de factores de orientación  $M_{ij}^{(s)}$ , así como su respectivo  $\tau_{CRSS}^{(s)}$  que activa el sistema  $s$ . Al tener la matriz  $M_{ij}^{(s)}$ , es posible calcular las rapidezces de deformación  $\dot{\gamma}^{(s)}$  para cada sistema de deslizamiento, utilizando la Ecuación (1.56). Finalmente, el estado

de esfuerzos proyectado ( $s_{ij}$ ) sobre la matriz  $M_{ij}^{(s)}$  que produce el valor de  $\tau_{CRSS}^{(s)}$  respectivo, es calculado mediante la ley de Schmid generalizada, escrita en la Ecuación (1.43).

Este procedimiento de selección de sistemas de deslizamiento es un problema matemático de programación lineal cuya función objetivo es minimizar la Ecuación (1.57) sujeta a las ecuaciones (1.56) y (1.39), el cual se ha desarrollado para poder programarse en una computadora de manera eficiente [69]. Se requiere de la definición de un espacio 5-dimensional (5D) donde los tensores de segundo orden están representados de manera equivalente como vectores de cinco dimensiones, con la propiedad que se muestra en la Ecuación (1.58).

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (1.58a)$$

$$A_{ij}B_{ij} \equiv a_i b_i \quad (1.58b)$$

Donde  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  son tensores de segundo orden y  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  sus respectivos vectores 5-dimensionales.

El procedimiento anterior permite calcular el lugar geométrico de la fluencia en un grano, considerando que la deformación macroscópica impuesta al metal es idéntica con la deformación que éste experimenta. Sin embargo, es necesario realizar este procedimiento para una muestra estadística representativa de granos que constituyen al metal. Es aquí donde se utiliza la información que proporciona la *ODF* acerca de la orientación preferencial que define la textura cristalina del metal estudiado, para poder calcular un factor de Taylor promedio  $\bar{M}$  representativo de toda la muestra de granos, como se muestra en la Ecuación (1.59).

$$\bar{M} = \int M(g)f(g)dg \quad (1.59)$$

Donde  $M(g)$  es el factor de Taylor expresado como función de la orientación cristalográfica, y  $f(g)$  es la función *ODF* del cristal estudiado. Gracias a este factor es posible encontrar una proyección de  $\tau_{CRSS}^{(s)}$  sobre el esfuerzo de fluencia uniaxial correspondiente en una probeta. El argumento de la función *ODF* representa la descripción de la orientación cristalográfica en la muestra; es decir, los ángulos de Euler según Bunge, por ejemplo:  $g: \{\varphi_1, \Phi, \varphi_2\}$ . El término  $f(g)dg$  representa la fracción de volumen de todos los granos de la muestra que poseen una orientación cristalográfica dada, asociados a un volumen representativo  $dg$  del mismo, definido en el espacio de los ángulos de Euler. El valor promedio  $\bar{M}$  se multiplica con el esfuerzo de fluencia uniaxial medido de una probeta del material sometida a tracción, para calcular el esfuerzo de fluencia correspondiente al tensor rapidez de deformación  $d_{ij}$ . Este procedimiento se realiza en cada incremento de deformación, actualizando al factor de Taylor, la superficie de cedencia asociada y la orientación de la textura en el metal (utilizando  $\mathbf{w}^{(L)}$  y  $\mathbf{W}$ ).

### 1.6.3. Aproximaciones actuales para deformación plástica cristalina

Hoy en día existen otro tipo de aproximaciones que, en su mayoría, están basadas en la aproximación de Taylor para deformación plástica cristalina, como resultado de resolver la relación entre la deformación incremental del grano y la deformación macroscópica impuesta. La primera aproximación que se ha analizado aquí es la aproximación de Taylor, la cual considera que ambas son idénticas (en inglés, *Full Constraints Taylor Model* – FC Taylor –).

Una segunda aproximación ha sido desarrollada hace más de treinta años [70,71], debido a que consideraba a la aproximación *Full Constraints* de Taylor muy estricta con el movimiento local permitido en los granos del policristal. Se consideró que, si los granos tienen una forma alargada, éstos pueden experimentar esfuerzos cortantes en planos localizados sin crear incompatibilidades significativas. Este es el origen de la aproximación de restricciones relajadas (en inglés, *Relaxed Constraints model*). Es decir, la Ecuación (1.55b) no toma en cuenta algunas de las igualdades propuestas por la primera hipótesis de Taylor, como se muestra en la Ecuación (1.60). La Figura 1.38 muestra un esquema de un grano “relajado” en una de las orientaciones donde la deformación no causa una incompatibilidad.

$$\mathbf{d} = \mathbf{D} - \sum_{r=1}^R \tilde{\mathbf{M}}^{(r)} \dot{\gamma}^{(r)} \quad (1.60a)$$

$$d_{ij} = D_{ij} - \sum_{r=1}^R \tilde{M}_{ij}^{(r)} \dot{\gamma}^{(r)} \quad (1.60b)$$

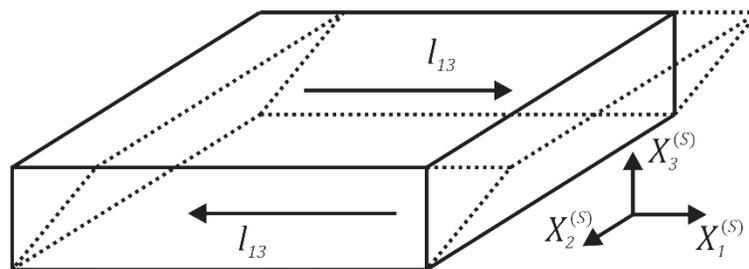


Figura 1.38. Esquema ilustrativo del grano en un policristal modelado con restricciones relajadas. En este caso particular, se muestra el caso ( $R = 1$ ).  $X_1^{(s)}$  es RD,  $X_2^{(s)}$  es TD,  $X_3^{(s)}$  es ND.

Donde  $\tilde{\mathbf{M}}^{(r)}$  representa un modo de relajación simétrico junto con su rapidez de deslizamiento correspondiente  $\dot{\gamma}^{(r)}$ . Se muestran los dos ejemplos comunes en la Ecuación (1.61) para indicar los modos de relajación que se utilizan en este modelo: el modo  $R = 1$  (en inglés, *lath*) y modo  $R = 2$  (en inglés, *pancake*). (Recuerde que los granos ahora poseen una forma geométrica específica y que, para el caso  $R = 1$ ,  $l_{13} \neq L_{13}$  pero  $l_{31} = L_{31}$ ; para  $R = 2$ ,  $l_{13} \neq L_{13}$  y  $l_{23} \neq L_{23}$  pero  $l_{31} = L_{31}$  y  $l_{32} = L_{32}$ ).

$$\text{Modelo } (R = 1): [\tilde{\mathbf{M}}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.61a)$$

$$\text{Modelo } (R = 2): [\tilde{\mathbf{M}}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } [\tilde{\mathbf{M}}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.61b)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{M}}^{(r)}$  está expresado en el sistema de referencia cristalino. De esta forma, con la Ecuación (1.60) podemos definir el problema de programación lineal para el modelo restricciones relajadas, tal y como se hizo anteriormente para el caso FC Taylor, minimizando la Ecuación (1.57).

$$W_c = \sum_{s=1}^N \tau_{CRSS}^{(s)} |\dot{\gamma}^{(s)}| - \sum_{r=1}^R \tau_{rel}^{(r)} |\dot{\gamma}^{(r)}| \rightarrow \text{mínimo} \quad (1.62a)$$

Sujeto a:

$$d_{ij} = D_{ij} - \sum_{r=1}^R \tilde{M}_{ij}^{(r)} \dot{\gamma}^{(rel)} \quad (1.62b)$$

$$M_{ij}^{(s)} = \frac{1}{2} [b_i^{(s)} n_j^{(s)} + b_j^{(s)} n_i^{(s)}] \quad (1.62c)$$

Debido a que  $\dot{\gamma}^{(r)}$  está asociada a un modo de relajación propuesto para un tipo de grano, para que no afecte al término  $W_c$ , se propone inicialmente que su correspondiente  $\tau_{rel}^{(r)}$  sea cero, introduciendo así una *condición de equilibrio* por cada relajación impuesta en el modelo que produce discontinuidades en el gradiente de velocidad correspondiente. Mientras que la solución por programación lineal para el modelo FC Taylor produce  $5 \dot{\gamma}^{(s)} \neq 0$  y  $N - 5 \dot{\gamma}^{(s)} = 0$ , la solución para el modelo de restricciones relajadas produce el mismo resultado de rapidez de deslizamiento ( $5 \dot{\gamma} \neq 0$  y  $N - 5 \dot{\gamma}^{(s)} = 0$ ), de donde las rapidez de deslizamiento distintas de cero incluyen  $5 - R \dot{\gamma}^{(s)}$  y  $R \dot{\gamma}^{(r)}$ , según el número de relajaciones utilizadas. Para que las velocidades de deslizamiento relacionadas con las relajaciones impuestas no contribuyan al gradiente de deformación impuesto, es necesario establecer matemáticamente esta condición, como se muestra en la Ecuación (1.63).

$$\mathbf{D}: \tilde{\mathbf{M}}^{(r)} = 0 \quad (1.63)$$

Algunas aproximaciones recientes que analizan la interacción entre varios granos dentro de un metal (llamados también, modelos multigrano) son la aproximación Lamel [72] (LAMEL) y la aproximación Advanced Lamel [73] (ALAMEL). La aproximación Lamel toma en cuenta la interacción de dos granos adyacentes entre sí; en ella no se permite deslizamiento en su frontera común. Su uso es únicamente para predecir la deformación plástica en laminado de metales (es decir, para granos elongados). El desarrollo matemático en LAMEL se basa en el modelo de

restricciones relajadas explicado anteriormente; y su parte más importante radica en que la condición de equilibrio impuesta por la descripción matemática del modelo de restricciones relajadas queda sobre el límite de grano o la frontera común entre los dos granos, lo cual provee continuidad a través de ellos para los campos de esfuerzos y deformaciones, tal y como se demuestra en [74]. La Ecuación (1.64) muestra el resultado anterior. La Figura 1.39 muestra un diagrama con los granos modelados con LAMEL.

$$s_{13}^{(G1)} = s_{13}^{(G2)} \quad (1.64a)$$

$$s_{12}^{(G1)} = s_{12}^{(G2)} \quad (1.64b)$$

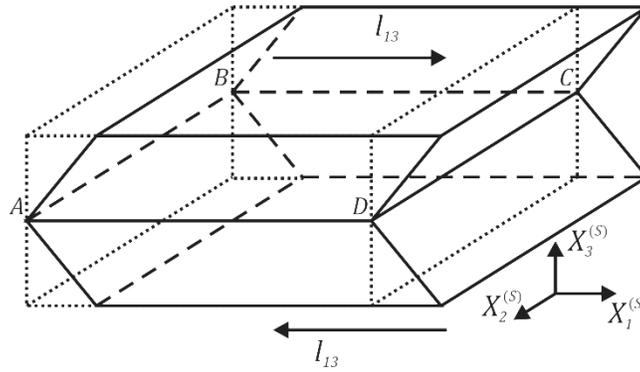


Figura 1.39. Diagrama geométrico que se utiliza en el modelo LAMEL. Los granos siguen siendo elongados en la dirección de laminado  $X_1^{(S)}$  y el plano ABCD representa el límite de grano.  $X_1^{(S)}$  es RD,  $X_2^{(S)}$  es TD,  $X_3^{(S)}$  es ND.

El problema de programación lineal para el modelo LAMEL por resolver se muestra en la Ecuación (1.65), considerando los dos granos del modelo y que las relajaciones impuestas son comunes en ambos granos ( $R = 2$ ).

$$W_c = \sum_{G=1}^2 \sum_{s=1}^N \tau_{CRSS}^{(G,s)} |\dot{\gamma}^{(G,s)}| - \sum_{r=1}^R \tau_{rel}^{(r)} |\dot{\gamma}^{(r)}| \rightarrow \text{mínimo} \quad (1.65a)$$

Sujeto a:

$$d_{ij}^{(1)} = D_{ij} - \sum_{r=1}^R \tilde{M}_{ij}^{(r)} \dot{\gamma}^{(rel)} \quad (1.65b)$$

$$d_{ij}^{(2)} = D_{ij} - \sum_{r=1}^R \tilde{M}_{ij}^{(r)} \dot{\gamma}^{(rel)} \quad (1.65c)$$

$$M_{ij}^{(G,s)} = \frac{1}{2} [b_i^{(G,s)} n_j^{(G,s)} + b_j^{(G,s)} n_i^{(G,s)}] \quad (1.65d)$$

Además:

$$D_{ij} = \frac{d_{ij}^{(1)} + d_{ij}^{(2)}}{2} \quad (1.65e)$$

Donde  $G$  representa el contador de la suma en la Ecuación (1.65a) para indicar el grano al que se hace referencia (grano 1:  $G = 1$ ; grano 2:  $G = 2$ ). La Ecuación (1.65e) indica la primera hipótesis de Taylor aplicada al par de granos como un conjunto multigrano. Es decir, la aproximación FC Taylor se impone en la frontera “hipotética” que divide a los dos granos propuestos del resto en una muestra representativa de un policristal. Esta es, en general, una de las desventajas más notorias que se define en los modelos multigrano puesto que la frontera del conjunto multigrano que define el modelo no debería ser diferente a las demás fronteras que definen el resto de los límites de grano en un policristal real. También, la frontera del conjunto multigrano no debería ser diferente al límite de grano que se propone en la descripción matemática de los modelos multigrano.

La aproximación ALAMEL es un modelo multigrano (2 granos) basado en el trabajo previo desarrollado para el modelo LAMEL, explicado anteriormente. ALAMEL busca eliminar las limitaciones que se producen cuando se desarrolla el modelo LAMEL. Una de ellas, que los granos están geoméricamente adaptados para utilizarse en aquellos policristales con granos alargados, por lo que se propone que la aplicación del modelo ALAMEL sea para cualquier tipo de grano, sin importar que su forma esté inicialmente predeterminada. Sin embargo, la Ecuación (1.63) no es válida para ALAMEL. También, la aproximación ALAMEL propone que el gradiente de la deformación promedio en ambos lados de un límite de grano sea igual al gradiente de deformación macroscópico – en analogía con la Ecuación (1.65e) –; además de incluir el resultado de equilibrio de esfuerzos en los límites de grano desarrollado para LAMEL, mostrado anteriormente en la Ecuación (1.64). Es decir, la aproximación FC Taylor propone que la deformación de un grano sea igual a la deformación macroscópica, lo cual conlleva a que ésta sea homogénea desde el centro de un grano hasta los límites de otro grano, mientras que en la aproximación ALAMEL se propone que los límites de grano muestren una continuidad en la velocidad de deformación y esfuerzos mediante la primera hipótesis de Taylor, produciendo una discontinuidad en el centro del grano. Es decir, la Ecuación (1.65e) se aplica a los límites de grano modelados y no al centro de cada grano modelado. Tanto la distribución de esfuerzos como las velocidades de deformación dentro de los granos se consideran distribuciones heterogéneas. La Figura 1.40 muestra las interacciones que se modelan con la aproximación ALAMEL.

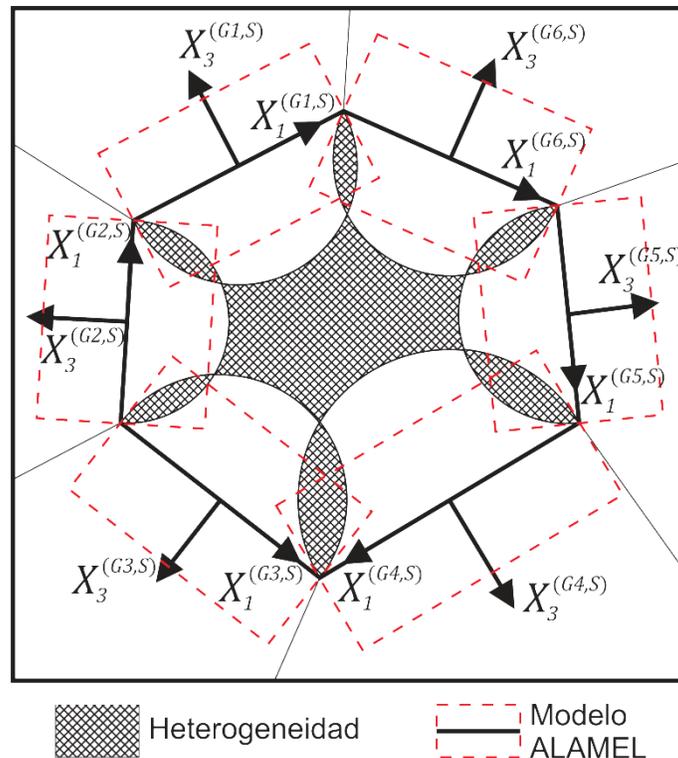


Figura 1.40. Regiones modeladas con la aproximación ALAMEL en un grano dentro de un metal. Para mostrar la heterogeneidad de este modelo, se considera que la zona de influencia para los campos de esfuerzos y deformaciones calculados con ALAMEL sea representado por un medio círculo, cuyo diámetro es del tamaño del límite de grano modelado en cada caso. El grano central está interactuando con otros 6 granos alrededor, por lo tanto, existen 6 sistemas de referencia para cada modelo ALAMEL propuesto por cada límite de grano modelado. Por claridad, no se muestra la zona de influencia circular del modelo ALAMEL en los seis granos vecinos como resultado de la interacción con el grano central.

En la actualidad, las aproximaciones intentan explicar la interacción de varios granos entre sí, para después relacionar esta interacción local con la deformación macroscópica del policristal (en inglés, *multi-grain models*), ya sea mediante una muestra estadística de orientaciones cristalinicas en una función *ODF* o por medio de modelos *FEM* que representan los granos en una estructura cristalina, donde los elementos finitos dividen en varias partes a cada grano (en inglés, *Crystal Plasticity Finite Element model CPFE*). Las referencias [75,76] son de las obras actuales más completas sobre la línea de investigación estudiada en esta tesis. Esta referencia brinda un panorama amplio no solo sobre modelos CPFE, sino del área de plasticidad cristalina en general.

La aproximación Autoconsistente (en inglés *Self-Consistent*) [77,78,79] considera la interacción entre un grano y todos sus vecinos mediante una matriz homogénea hipotética que representa el comportamiento constitutivo promedio de todo el policristal, por lo que se pueden relacionar esfuerzos y deformaciones locales en el grano y su alrededor con las deformaciones macroscópicas impuestas. Otras aproximaciones toman en cuenta la posibilidad de que el grano se pueda subdividir

durante la deformación plástica; es decir, esta aproximación permite que las velocidades de deformación en un grano varíen dentro de él, y sean completamente diferentes de los valores macroscópicos de deformación.

Se propone en un nuevo modelo híbrido [80] utilizar de manera combinada el modelo Autoconsistente junto con el modelo ALAMEL, con el cual se han demostrado predicciones de textura por deformación plástica con resultados prometedores. La idea general es utilizar el modelo Autoconsistente para modelar varios granos interactuando con el límite de grano propuesto en la descripción matemática del modelo ALAMEL. Esto mejora la predicción de textura para un gran número de ensayos realizados, pero también aumenta el tiempo de cálculo por cada simulación.

#### 1.6.4. La función potencial plástica Facet

La función potencial plástica Facet es una expresión analítica (como la que se define en la sección 1.4.6) que describe el comportamiento plástico anisotrópico de un material. En general, cualquier función potencial plástica que se propone para describir este comportamiento requiere de varios ensayos mecánicos controlados (ensayo de: tracción, compresión, deformación cortante pura, Fukui, etc.) y una función de interpolación. Esto significa que cada ensayo realizado identifica un punto de la sección bidimensional de la superficie potencial plástica para el material correspondiente, mientras que la función de interpolación calcula la parte restante de la sección 2D de la función potencial plástica entre dichos puntos. Por otro parte, la ventaja que ofrecen las aproximaciones cristalinas es que pueden realizar una mayor cantidad de ensayos mecánicos *in silico* que serían complicados de efectuar en un laboratorio. Esto permite que se tenga una mayor cantidad de puntos identificados en la función potencial plástica. La definición de la expresión para la función Facet está desarrollada de tal forma que puede ser utilizada junto con la teoría de aproximaciones cristalinas (en inglés, *multi-scale modelling*), cuya definición está basada en la teoría de potenciales plásticos duales [81, 82, 83, 84] (en inglés, *dual plastic potentials*).

Al dividir el espacio 5D del tensor rapidez de deformación ( $\mathbf{d}$ ) de manera uniforme (en cientos ó miles de puntos en el espacio 5D), se utiliza la aproximación cristalina (FC Taylor, ALAMEL,...) para cada punto de este espacio 5D, con el fin de calcular el estado de esfuerzos ( $\mathbf{s}$ ) correspondiente para la textura estudiada. Esto puede realizarse de manera inversa (dividir el espacio 5D para  $\mathbf{s}$  y calcular los tensores  $\mathbf{d}$  correspondientes). El resultado obtenido es una división uniforme del lugar geométrico de la fluencia para la textura del material estudiado, la cual puede graficarse si se toma una sección 2D (por ejemplo,  $s_{11} - s_{12}$  o  $d_{11} - d_{12}$ ). La sección 2D será solo un conjunto de puntos que están dividiendo al lugar geométrico de la fluencia. Sin embargo, no hay ninguna expresión analítica que defina a estos puntos calculados. Es por esta razón que se utiliza la teoría de potenciales plásticos para

encontrar una función analítica que se pueda ajustar con la información que proporciona la sección de puntos del lugar geométrico de la fluencia. Además, se ha demostrado que el uso de funciones potenciales no convexas en modelos *FEM* conlleva a inestabilidades en el método, por lo que se prefiere definir funciones potenciales convexas para el ajuste de los puntos mencionados. Como se tiene una gran cantidad de puntos que dividen al espacio 5D, es necesario también que la función potencial plástica posea un gran número de parámetros para su ajuste. Otro punto a considerar es la simetría en la textura estudiada. Hay funciones potenciales plásticas que consideran que el modo de deformación impuesto mantendrá la simetría de la textura inicial; esto no necesariamente ocurre.

La función potencial Facet [85] es un polinomio homogéneo de grado 6 o de grado 8, como se muestra en la Ecuación (1.66) en su versión para materiales insensibles a la velocidad de deformación.

$$\Psi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = [G_n(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})]^{1/n} \quad (1.66a)$$

$$\Psi(\dot{\epsilon}_{ij}) = [G_n(\dot{\epsilon}_{ij})]^{1/n} \quad (1.66b)$$

Donde

$$G_n(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \sum_{\kappa=1}^K \lambda_{\kappa} (s_{\kappa p} \dot{\epsilon}_p)^n \quad (1.67)$$

El índice  $p$  va de 1 a 5, enumerando las cinco componentes linealmente independientes del tensor rapidez de deformación;  $\lambda_{\kappa}$  y  $s_{\kappa}$  son parámetros para el ajuste de los puntos de la sección 2D del lugar geométrico de la fluencia, donde  $\lambda_{\kappa} \geq 0$ ; y el exponente  $n$  es un múltiplo de 2, donde generalmente se utiliza 6 u 8.

## 1.7 Aportación original a la línea de investigación

El estado del arte previo permite visualizar la importancia de la línea de investigación en las industrias que consumen piezas conformadas de lámina metálica para la elaboración de sus productos comerciales. También, se describen los ensayos y técnicas experimentales para caracterizar las propiedades mecánicas en los productos laminados (Fukui, deformación cortante simple, tracción, difracción de RX). Además, se muestra la gran cantidad de trabajo de investigación actual en el área de modelado de plasticidad policristalina que se utiliza en el desarrollo del código de elemento finito para plasticidad anisotrópica estudiado en esta tesis.

Gracias a la colaboración entre la Unidad de Investigación y Asistencia Técnica en Materiales (UDIATEM) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y el Department of Materials Engineering (Metaalkunde en Toegepaste Materiaalkunde, MTM) de la Universidad Katholieke Universiteit Leuven de Bélgica (KU Leuven), es posible tener acceso al *software* “Hierarchical Multi-Scale Software” [86] (de ahora en adelante, sólo *HMS*), el cual se ha desarrollado para programar los modelos multi-escala ALAMEL y FC Taylor, la función potencial plástica Facet que se muestra en el capítulo 1 junto con el método *FEM*, de una manera eficiente. *HMS* es el “...código de elemento finito para plasticidad anisotrópica...” al que se hace mención en el título de esta tesis.

De una manera breve, el proceso en *HMS* es como sigue. Cada simulación de elemento finito realizada en *HMS* inicia con un cálculo previo del lugar geométrico de la fluencia basado en la textura inicial de la lámina metálica (este tema se describe en la sección 1.5.5 sobre texturas cristalinas) y en el modelo multi-escala ALAMEL o FC Taylor, según el caso de estudio (sección 1.6). *HMS* posee la capacidad de poner en espera cada simulación *FEM* una vez que la textura requiera actualizarse – se utiliza  $\mathbf{w}^{(L)}$  y  $\mathbf{W}$  de las ecuaciones (1.38c) y (1.55a) para la nueva orientación – y, por lo tanto, se aplique también una renovación del lugar geométrico de la fluencia utilizando la función potencial Facet, descrita en la sección 1.6.4.

Sin embargo, la actualización de la textura no necesariamente es en todos los elementos finitos del modelo *FEM*, sino sólo en aquellos que sobrepasan un porcentaje de deformación plástica acumulada desde el último incremento de tiempo en la simulación. Esta es una de las ventajas que hace eficiente a *HMS*, puesto que los modelos *FEM* utilizados en esta tesis poseen entre 20 000 y 40 000 elementos finitos, y la actualización de la textura mediante funciones armónicas esféricas generalizadas no necesariamente ocurre en todos los elementos finitos del modelo rutinariamente en cada incremento de tiempo de la simulación. El proceso de actualización es sólo localizado, de acuerdo al umbral mencionado.

*HMS* es un código computacionalmente robusto, el cual es presentado por primera vez por Gawad J. *et al.* [86] y se utiliza para predecir el comportamiento constitutivo de lámina comercial AA6016T4 sujeta al ensayo de Fukui. Sin embargo, los resultados importantes de esta investigación se centran en el desarrollo de *HMS* y

su eficiencia computacional, mostrando únicamente resultados preliminares satisfactorios sobre su validez.

En esta tesis se presenta un análisis minucioso sobre la validez de *HMS*, utilizando lámina de aluminio AA6016T4 y el ensayo de Fukui, para demostrar si el código está listo para utilizarse en la predicción de procesos de conformado de lámina donde se imponen deformaciones generales complejas sobre ésta; es decir, evaluar, mediante los ensayos estudiados en esta tesis, si el código está listo para predecir el conformado de geometrías complejas en lámina comercial. Además, se incluyen resultados originales sobre la validez del código utilizando los ensayos de deformación cortante simple y tracción.

## 2. Objetivos

- El objetivo central de esta tesis es realizar un análisis sobre la validez de *HMS* para predecir el comportamiento constitutivo de la lámina AA6016T4 sujeta al ensayo de Fukui, deformación cortante simple y tracción.
- Para el ensayo de Fukui, elaborar un esquema de simulaciones extenso que demuestre la influencia de los siguientes parámetros sobre *HMS*: textura, fricción en los contactos lámina/componentes, modelos micromecánicos ALAMEL/FC Taylor, Rigidez/Elasticidad en los componentes del ensayo.
- Del análisis del esquema anterior, utilizar los parámetros de la simulación con la predicción *FEM* más adecuada, para emplearlos en los modelos *HMS* de los ensayos de deformación cortante simple y tracción.
- Analizar la influencia de la fricción de Coulomb sobre el ensayo de Fukui.
- Para el ensayo de Fukui, demostrar la imprecisión entre modelo *FEM* y ensayo mediante la introducción sistemática de errores numéricos inherentes al método de elemento finito (independientes del tipo de material utilizado). Por espacio en la tesis, se omite esta demostración para los otros dos ensayos.
- Presentar resultados concretos sobre la validez de los modelos *HMS* para el ensayo de deformación cortante simple y tracción.

# 3. Metodología y material empleado

La metodología para comparar y validar *HMS* es como sigue. Se cuenta con resultados experimentales para cada ensayo propuesto en esta tesis. Cada uno proporciona información específica del comportamiento del material; es decir, se tiene una medición experimental diferente según el ensayo. La Tabla 3.1 muestra las mediciones experimentales realizadas hasta ahora.

Tabla 3.1. Mediciones experimentales realizadas en cada ensayo.

Ensayo de Fukui	Ensayo de deformación cortante simple	Ensayo de tracción
Mediciones macroscópicas		
Altura de las copas (Perfil de orejas)	Campo de deformación DIC	Posición del cuello en las probetas
Espesor (debajo del perfil de orejas)		Fuerza vs Desplazamiento (gráfica s-e)
Fuerza del punzón		
Mediciones mesoscópicas		
Medición de la textura (debajo del perfil de orejas)	Pendiente	Pendiente

La idea es utilizar los modelos *HMS* de cada ensayo para calcular las predicciones *FEM* correspondientes con las mediciones experimentales y realizar una comparación entre ambos. Para lograr esta comparación, se propone un esquema de simulaciones para el ensayo de Fukui, descrito con precisión más adelante. Consiste en averiguar el efecto que tienen los siguientes parámetros sobre las simulaciones realizadas con *HMS*: gradiente de la textura en la dirección del espesor de la lámina, influencia de los modelos micromecánicos ALAMEL y FC Taylor, herramientas del ensayo simuladas como componentes rígidos, sin

evolución de textura y tres coeficientes de fricción seca (0.05, 0.15 y 0.25). Un análisis del esquema anterior completo permite seleccionar una combinación óptima de los parámetros anteriores que más se aproximan a los resultados experimentales en las copas. Entonces, esta selección óptima se utiliza también en los modelos *FEM* para los ensayos de deformación cortante simple y tracción; una vez más, las predicciones *FEM* obtenidas con esta selección óptima se comparan con sus resultados experimentales.

### 3.1. Propiedades del material utilizado para los modelos multiescala

Las propiedades descritas en esta sección son para ambos espesores estudiados (1.1 mm y 2.0 mm) y se aplican en los modelos *FEM* de los tres ensayos estudiados en esta tesis. Para definir las propiedades de la lámina, es necesario especificar varios parámetros que requiere el modelado multiescala. Uno de ellos se calcula mediante la ley de Swift para describir el endurecimiento por trabajo en frío en la aleación AA6016T4; para ambos espesores, se muestran en la Tabla 3.2 sus parámetros.

Tabla 3.2. Propiedades iniciales medidas y composición química para la aleación AA6016T4

AA6016T4					Valores			
Espesor, <i>mm</i>					1.1			
Densidad, <i>kg/m<sup>3</sup></i>					2700			
Módulo de Young, <i>GPa</i>					70.0			
Relación de Poisson					0.33			
Ley de Swift $\sigma = k(\varepsilon + \varepsilon_0)^n$								
<i>k</i> , MPa					500.0			
<i>n</i>					0.26			
$\varepsilon_0$					0.010			
Espesor, <i>mm</i>					2.0			
Densidad, <i>kg/m<sup>3</sup></i>					2700			
Módulo de Young, <i>GPa</i>					70			
Relación de Poisson					0.33			
Ley de Swift $\sigma = k(\varepsilon + \varepsilon_0)^n$								
<i>k</i> , MPa					500.0			
<i>n</i>					0.25			
$\varepsilon_0$					0.013			
Componentes Aleantes <sup>4</sup>	Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	Al
% Peso	1 – 1.5	0.5	0.2	0.2	0.25 – 0.6	0.1	0.2	Balance

También, el modelo multiescala requiere de la información de la textura cristalina de la lámina. Se muestra en la Figura 3.1a la textura utilizada para cada espesor de la

<sup>4</sup> Aluminium and Aluminium Alloys – Chemical Composition and form of Wrought products – Part 3: Chemical Composition and form of Products; European Standards: Pilsen, Czech, 2007; EN 573-3:2007.

lámina y las componentes más importantes de la textura que se observan en las tres secciones *ODF* mostradas. Se puede ver que las mediciones experimentales de las texturas se encuentran sobre la superficie (0% del espesor), a un cuarto (25% del espesor) y a la mitad (50% del espesor) del espesor de la lámina, con la intención de analizar si el gradiente de la textura a lo largo de la dirección *ND* afecta a las predicciones de las simulaciones *FEM*. Además, la Figura 3.1b muestra las figuras polo experimentales incompletas (111), (200), (220) y (311) que se obtuvieron mediante el método de reflexión<sup>5</sup>; por espacio, sólo se muestran para el espesor de 2.0 mm a 50% del espesor. Gracias a que el nivel de contornos utilizado es el mismo, es posible ver ambos gradientes en las texturas utilizadas según el espesor de lámina, así como sus diferentes intensidades. Se observa que los componentes principales de la textura de 1.1 mm son más intensos que en las secciones de la función *ODF* del espesor de 2.0 mm.

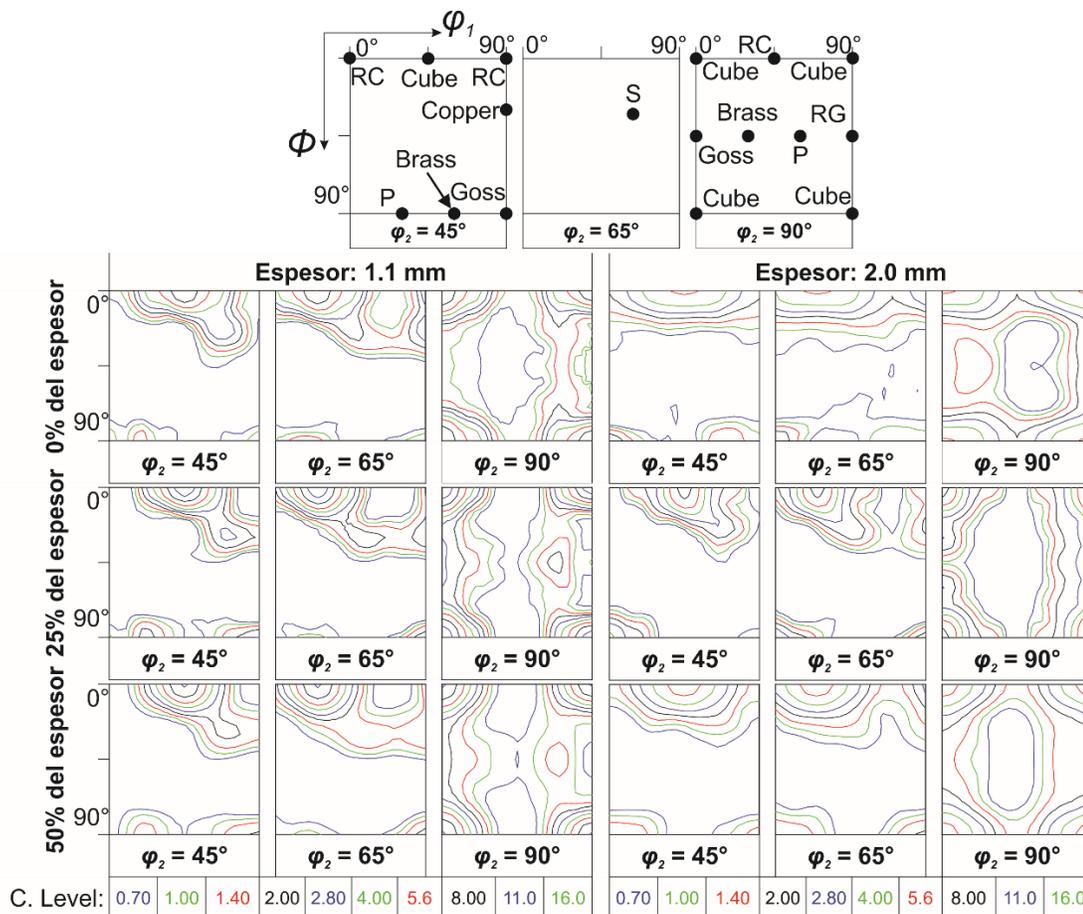


Figura 3.1a. Secciones de la función *ODF* de la textura cristalina para la aleación AA6016T4 en ambos espesores. Sólo se muestran las secciones  $\phi_2$  más representativas (45°, 65° y 90°) en aleaciones de aluminio comercial, considerando  $0^\circ \leq \phi_1, \Phi, \phi_2 \leq 90^\circ$ . Por claridad, el rango de niveles en las secciones *ODF* es el mismo, con la finalidad de comparar cualitativamente la intensidad de los componentes en ambos espesores.

<sup>5</sup> Van Houtte P., 1984. A new method for the determination of texture functions from incomplete pole figures – Comparisons with older methods. *Textures and Microstructures* 6, 137-162.

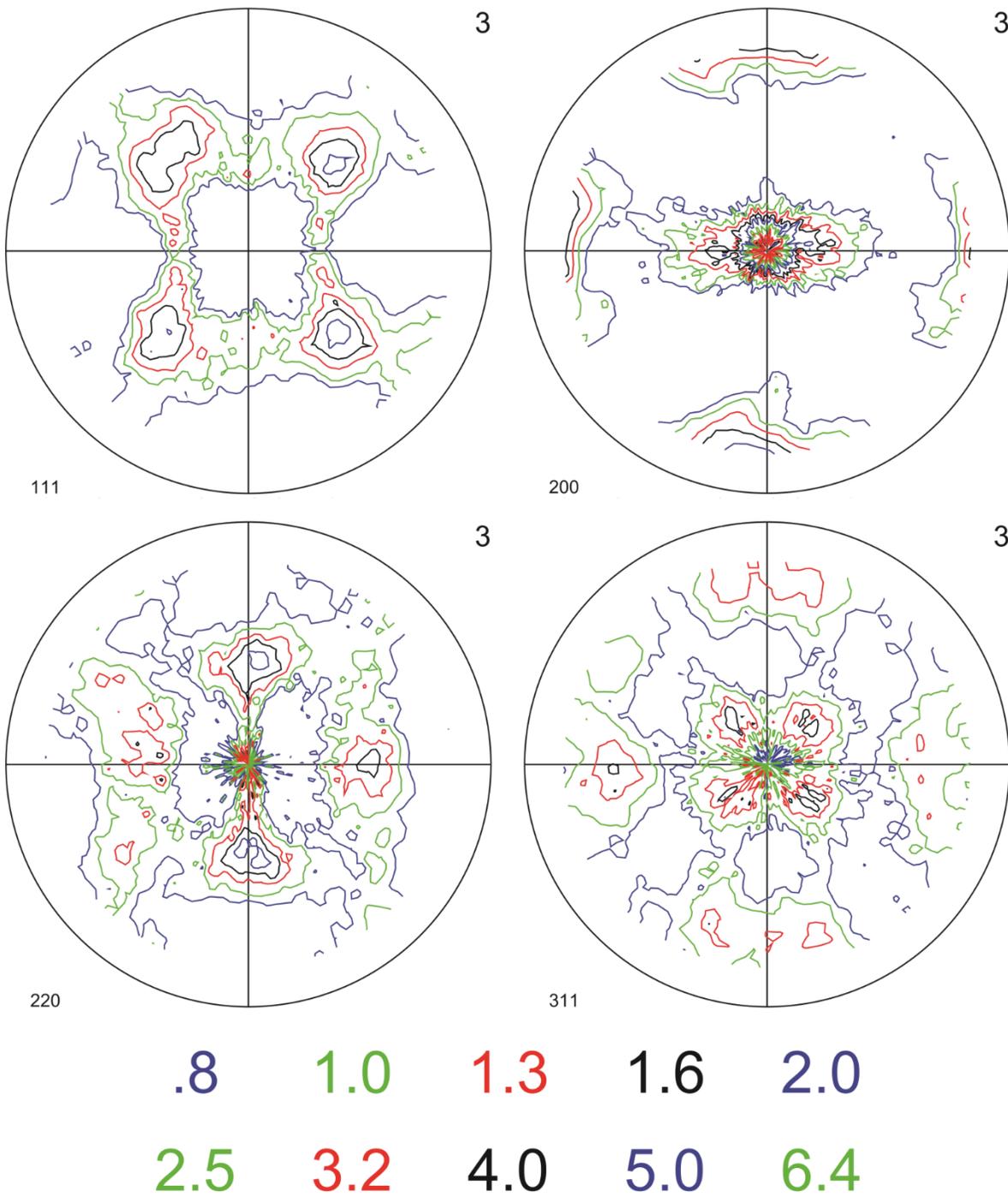


Figura 3.1b. Figuras polo experimentales de la aleación AA6016T4. Espesor de 2.0 mm, 50% del espesor.

## 3.2. Optimización de modelos *FEM*

El *software HMS* requiere que los modelos *FEM* sean creados en el formato que utiliza el *software* de elementos finitos comercial Abaqus. Además, el método de integración numérica empleado en estos modelos *FEM* debe ser un análisis dinámico explícito, lo cual provoca que se creen artificios numéricos que pueden afectar a la respuesta física del modelo *FEM* simulado. Los artificios numéricos más conocidos en el análisis dinámico explícito son el efecto *hourglassing*, el efecto de la razón de aspecto de los elementos finitos utilizados, aceleración artificial de las simulaciones además del modelado numérico del contacto superficial y sus algoritmos en *FEM*, de los cuales el último efecto representa un área de investigación extensa. Para los tres modelos *HMS* de los ensayos, primero se modela a la lámina bajo la hipótesis de un sólido elasto-plástico isotrópico, utilizando a la función de cedencia de von Mises con la finalidad de observar únicamente el efecto de los artificios numéricos. De esta forma se puede minimizar su efecto.

El efecto *hourglassing* está ligado directamente al método de integración reducida que utiliza el análisis dinámico explícito de elementos finitos. El análisis dinámico explícito desacopla la matriz de rigidez que se calcula comúnmente en problemas estáticos de cálculo de cargas, volviéndola una matriz diagonal (en inglés, *lumped matrix*), con lo cual la aceleración, velocidad y desplazamiento de los nodos ubicados en el centro de masa de cada elemento finito se calculan mediante la matriz transpuesta y la reacción interna del material ( $\ddot{u} = \mathbf{K}^{-1} \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \mathbf{K}^T \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{I})$ , donde  $\ddot{u}$  es la aceleración del centro de masa del elemento finito,  $\mathbf{K}^{-1}$  la matriz diagonal de rigidez,  $\mathbf{F}$  es la matriz asociada las fuerzas nodales en el elemento finito,  $\mathbf{I}$  es la matriz de resistencia interna asociada al elemento finito); esto vuelve al método eficiente gracias a la matriz diagonal ( $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}^T$ ), aun cuando se requieren muchos incrementos de simulación por cada nodo central en cada elemento finito de la malla. Sin embargo, gracias a las funciones de forma de los elementos finitos, el campo de desplazamientos puede calcularse para cada nodo del elemento finito a partir de los valores de desplazamiento calculados para los nodos centrales, aun cuando no se haya aplicado ningún método numérico de integración en el resto de los nodos. Esto quiere decir que, aun cuando el cálculo para el centro de masa sea nulo, el resto de los nodos si pueden tener desplazamiento debido a los centros de masa de los elementos finitos colindantes. En términos energéticos, si el nodo del centro de masa no se desplaza (en inglés, *zero-energy mode*), el resto de los nodos en el elemento finito si pueden tener energía cinética para desplazarse gracias a los nodos centrales de elementos finitos adyacentes. Esto se observa claramente en la Figura 4.5 del ensayo de Fukui como una variación en el valor de altura (dato que proviene de los desplazamientos nodales de la copa); el perfil de orejas debe ser constante puesto que no hay textura (en la Figura 4.5, Óptimo). Sin embargo, el perfil se modifica debido al efecto *hourglassing*.

Un artificio numérico común en *FEM* es la variación de la razón de aspecto en los elementos finitos (*RA*), especialmente cuando las funciones de forma son lineales. La razón de aspecto se define como la razón de la longitud más grande a la más

corta en el elemento finito. Mientras el valor de  $RA$  conserve al elemento finito más compacto y regular en su forma (es decir, que ambas longitudes sean muy parecidas), sus funciones de forma minimizan los errores numéricos asociados al método de interpolación lineal que utilizan para calcular los desplazamientos dentro del elemento finito a partir de los desplazamientos nodales.

También, el uso del criterio de Considère es fundamental para demostrar si los modelos de elemento finito del ensayo de tracción proveen una respuesta física óptima. Primero, se calcula matemáticamente la curva  $(\sigma-\varepsilon)_{Swift}$  utilizando la ley de endurecimiento de Swift para calcular el punto  $(e_{hom})_{Swift}$  mediante la Ecuación (1.4). Por otro lado, se calcula también la curva  $(\sigma-\varepsilon)_{FEM}$  desde elemento finito. Tanto  $(\sigma-\varepsilon)_{Swift}$  como  $(\sigma-\varepsilon)_{FEM}$  cruzan a la curva  $(d\sigma/d\varepsilon)_{Swift}$  en dos puntos:  $(e_{hom})_{Swift}$  y  $(e_{hom})_{FEM}$ , respectivamente. La diferencia entre ambas deformaciones homogéneas define la desviación numérica entre modelo matemático y modelo de elemento finito. Cuando esta diferencia es mínima, se dice que el modelo  $FEM$  es óptimo.

Una vez que los errores numéricos inherentes al método  $FEM$  – mencionados previamente – han sido reducidos a un mínimo, se dice que el modelo  $FEM$  está optimizado y que su respuesta física está libre de artificios numéricos. Es en este punto donde el modelo  $FEM$  se incorpora al *software HMS* para la simulación numérica, cambiando únicamente la hipótesis elasto-plástico isotrópico del material por el comportamiento constitutivo elasto-plástico anisotrópico que se calcula con la información que proporciona la textura de la lámina y los modelos multiescala (FC Taylor o ALAMEL). Por cuestión de espacio, únicamente se presentan resultados numéricos para modelos  $FEM$  del ensayo de Fukui donde se muestra una falta de control por los artificios numéricos anteriores que afectan a la altura del perfil de orejas, cuando en realidad no se espera la formación de éstas. En esta única sección se muestra como se ha corregido el modelo  $FEM$  para que su respuesta física sea fidedigna. Se omite esta parte para el resto de los ensayos.

Para una revisión del método  $FEM$  y de los métodos de integración numérica y artificios numéricos asociados al método dinámico explícito, en especial para contacto superficial y aceleración artificial, se recomienda revisar las referencias [87,88,89].

### 3.3. Análisis estadístico en el ensayo de Fukui

Se propone el siguiente análisis estadístico entre simulaciones y copas experimentales para validar *HMS* durante todo el ensayo. Los tres parámetros a comparar son: Altura de las orejas, Espesores (debajo de las orejas) y Fuerza del punzón; los valores de cada parámetro anterior se muestran como función del desplazamiento del punzón. Todos los parámetros anteriores se encuentran

medidos experimentalmente y también se cuenta con las predicciones *FEM* correspondientes.

En general, los puntos de medición experimental no coinciden con los puntos de las predicciones *HMS*. Por lo tanto, para poder comparar estadísticamente tanto simulación como experimento, se realiza un filtrado de datos según el desplazamiento del punzón y el ángulo con respecto a **RD**. Por ejemplo, se seleccionan aquellos valores experimentales para el ángulo con respecto a **RD** (y sus alturas de orejas correspondientes) que coincidan con las predicciones *HMS* del ángulo con respecto a **RD** (con las predicciones *FEM* de alturas en las orejas correspondientes). Este mismo procedimiento se realiza también para Espesores y Fuerza del punzón en cada una de las simulaciones de este ensayo.

Una vez que los datos experimentales y simulados pueden compararse gracias al filtro anterior, se calcula la raíz cuadrada de la desviación estándar (*SD*) y la máxima diferencia entre simulación y experimento (*MD*) para todo el ensayo. La primera, no es estrictamente una desviación estándar puesto que utiliza datos experimentales y simulados como población. *MD* es positiva si el valor experimental es mayor al simulado; de lo contrario, el valor es negativo. La Ecuación (3.1) muestra la definición de *SD*.

$$SD = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i^{exp} - x_i^{sim})^2}{N}} \quad (3.1)$$

# 4. Resultados

Los resultados se enfocan principalmente en la predicción *FEM* del comportamiento constitutivo de la aleación de aluminio AA6016T4 laminada en frío con ayuda de los modelos multiescala FC Taylor y ALAMEL, además de la comparación de esta predicción con resultados experimentales obtenidos de los ensayos de tracción, deformación cortante simple y de Fukui para el mismo producto laminado (AA6016T4). Este producto está disponible en dos espesores: 1.1 mm y 2.0 mm.

## 4.1. Descripción del modelo *FEM* para el ensayo de Fukui

Los resultados experimentales del ensayo de Fukui sobre la aleación AA6016T4 se obtuvieron en el laboratorio especializado de la compañía TATA STEEL<sup>6</sup>, quien ha colaborado con el MTM–KU Leuven a través de varios proyectos tecnológicos relacionados con el área de conformado de productos laminados. TATA STEEL es una de las diez compañías más importantes dedicadas a la producción y manufactura de acero a nivel mundial. La operación de TATA STEEL incluye veintiséis países como India, Reino Unido, Países Bajos, Tailandia, Singapur, China y Australia, mientras que su presencia comercial se cuenta en más de cincuenta países alrededor del mundo<sup>7</sup>.

Dado que se han utilizado dos espesores diferentes para las muestras de la aleación AA6016T4, existen dos configuraciones diferentes en el equipo experimental para evitar daños sobre éste, así como defectos tecnológicos en la lámina. Por lo tanto, se crearon dos modelos *FEM* de acuerdo a ambas configuraciones para poder comparar con los resultados experimentales. Debido a la simetría ortotrópica en la lámina y que el ensayo de Fukui prácticamente no cambia a esta simetría una vez que la lámina se vuelve una copa, se modela únicamente un cuarto del equipo de Fukui y un cuarto del disco de la lámina a estampar. El resto de la copa se construye por simetría. Dado que todos los componentes de este ensayo se deforman en el rango elástico y que dicho rango es muy pequeño comparado con el nivel de deformación que la lámina experimenta, los componentes del ensayo de Fukui han sido modelados como superficies rígidas. Esto significa que son objetos de dos dimensiones que no cambian de forma pero que si pueden experimentar movimiento

---

<sup>6</sup> Tata Steel Research, Development & Technology, IJmuiden Technology Centre, PO Box 10.000, 1970 CA, IJmuiden, The Netherlands.

<sup>7</sup> Tata Steel Company Profile, 2016. <http://www.tatasteel.com/about-us/company-profile.asp> (accessed 01.11.2016).

de cuerpo rígido. Más adelante se va a hacer hincapié en la necesidad de modelar estos componentes como sólidos elásticos durante las simulaciones, ya que la influencia que brinda esta consideración sobre las predicciones *FEM* mejora su exactitud con respecto a los resultados experimentales.

Finalmente, el cuarto de disco de lámina se modela como un sólido deformable. En él se define el comportamiento mecánico anisotrópico con los modelos multiescala (ya sea FC Taylor ó ALAMEL) y la información de la textura para la aleación AA6016T4 según el espesor de lámina empleado (0%, 25% y 50% del espesor). A continuación se muestra en la Tabla 4.1 las dimensiones utilizadas para los modelos *FEM* del ensayo de Fukui.

Tabla 4.1. Dimensiones para el modelo *FEM* del ensayo de Fukui. Ver la Figura 2.10

Especificaciones		
Espesor de la lámina ( $t$ ), $mm$	1.1	2.0
Diámetro del disco ( $d_0$ ), $mm$	85.0	85.0
Diámetro del punzón ( $d_p$ ), $mm$	50.0	50.0
Velocidad del punzón ( $v_p$ ), $mm/min$	30.0	90.0
Diámetro del dado ( $d_d$ ), $mm$	53.0	54.9
Radio del filete en el dado ( $R_d$ ), $mm$	4.0	3.75
Radio del filete en el pisador ( $R_h$ ), $mm$	3.0	3.0
Radio del filete en el punzón ( $R_p$ ), $mm$	10.0	10.0
Fuerza que ejerce el pisador ( $F_h$ ), $kN$	10.0	20.0

Para ambos espesores, la fricción entre las partes que entran en contacto se considera como fricción de Coulomb ó fricción seca, lo que se motiva con base en lo descrito en el Capítulo 1. Se definen los siguientes contactos: Lámina/Punzón, Lámina/Dado, Lámina/Pisador y Pisador/Matriz. Este último se define únicamente para que el pisador no penetre al dado una vez que entran en contacto. Se definen coeficientes de fricción de 0.05, 0.15 y 0.25 para el resto de los contactos definidos, con la finalidad de observar la influencia de la fricción sobre la copa conformada.

Las condiciones de frontera se muestran en la Tabla 4.2. Cada superficie rígida posee un punto de referencia el cual gobierna todos los grados de libertad de su movimiento de cuerpo rígido dado que no se deforma. Es este punto el que define su condición de frontera.

Tabla 4.2. Condiciones de frontera en los modelos *FEM*

Configuración del equipo	Valores
Espesor, mm Desplazamiento vertical del punzón , mm (hacia el fondo del dado) Movimiento del dado *Fuerza vertical en el pisador,N (dirigida hacia la lámina)	1.1 50 EMPOTRADO 2500
Espesor, mm Desplazamiento vertical del Punzón, mm (hacia el fondo del dado) Movimiento del dado *Fuerza vertical en el pisador, N (dirigida hacia la lámina)	2.0 50 EMPOTRADO 5000
*Es un valor constante. Para el valor real del equipo, debe multiplicarse por 4.	

El sólido deformable que define a la lámina también posee condiciones de frontera para definir simetría en éste. Los costados de ésta deben poseer simetría con respecto al plano que definen. Estos extremos del cuarto de la lámina van a través del espesor de ésta y se pueden observar mejor en la Figura 4.1.

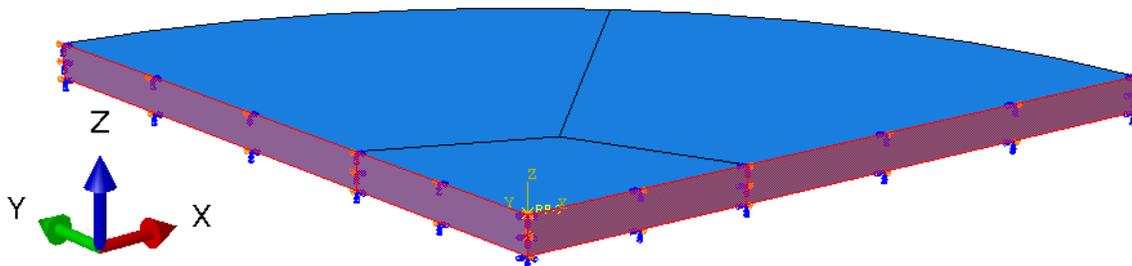


Figura 4.1. Simetría en el cuarto de disco. Los puntos que pertenecen al costado coplanar con el plano YZ no se desplazan en la dirección X, ni rotan con respecto a los ejes Y y Z, mientras que para el costado coplanar con el plano XZ, sus puntos no se desplazan en la dirección Y ni rotan con los ejes X y Z. Ambos costados se muestran en color rojo.

La malla de elementos finitos utilizada es diferente según el espesor modelado en la lámina. Sin embargo, se utilizan elementos finitos tridimensionales lineales con integración reducida para ambos espesores. La construcción de las dos mallas se hizo de tal forma que se cuide la relación de aspecto [90] en el tipo de elemento finito mencionado, la cual se define como la razón de la dimensión más larga a la dimensión más pequeña en el elemento finito. A medida que esta razón se encuentre cerca de 1 (es decir, se tiene un cubo), la precisión obtenida por los elementos finitos y sus funciones de forma será mejor. Dado que se tienen espesores diferentes, el número de elementos finitos será también diferente (3 para 1.1 mm y 4 para 2.0 mm).

Finalmente, se ha observado en simulaciones realizadas que es indispensable controlar la fuerza del pisador puesto que puede distorsionar severamente a la orilla de las copas *FEM* con anisotropía. Como la carga del punzón se transmite de manera radial hacia la lámina, el comportamiento de la deformación plástica también cambiará según el sistema **RD-TD-ND** definido inicialmente en ella. Esto significa que existen regiones del cuarto de lámina donde todavía hay contacto con el pisador, mientras que otras partes de la lámina ya no se encuentran sujetas por éste puesto que han deformado más rápido. Por lo tanto, hay un instante durante las simulaciones donde la fuerza del pisador se concentra en un volumen pequeño de la lámina (justo donde se forman las orejas de la copa), lo cual ocasiona la distorsión severa. La Figura 4.2 muestra este artificio.

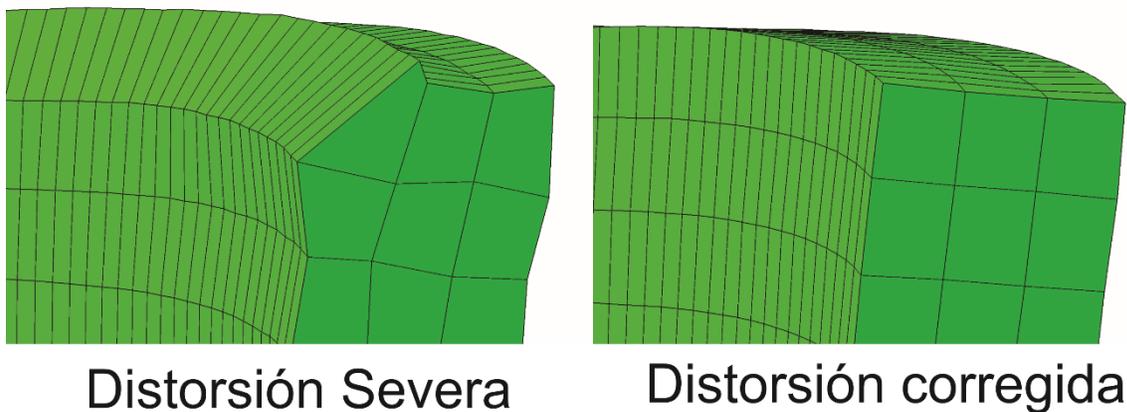


Figura 4.2. Distorsión severa en la malla de elementos finitos donde ocurre la formación de orejas en la copa debido a una falta de control en la fuerza del pisador. A la derecha se muestra el caso ya corregido.

La forma más sencilla de controlar este artificio es definiendo un perfil para la fuerza en el pisador en semejanza a la medición de la fuerza en la celda de carga del equipo experimental. De lo contrario, tan pronto como la fuerza empieza a concentrarse en las orejas de la lámina, su magnitud debe disminuir lo más rápido posible. La Figura 4.3 muestra el perfil experimental de la fuerza en el pisador que se define en los modelos *FEM* para ambos espesores de lámina y la fuerza en el punzón con respecto al desplazamiento de éste durante el ensayo.

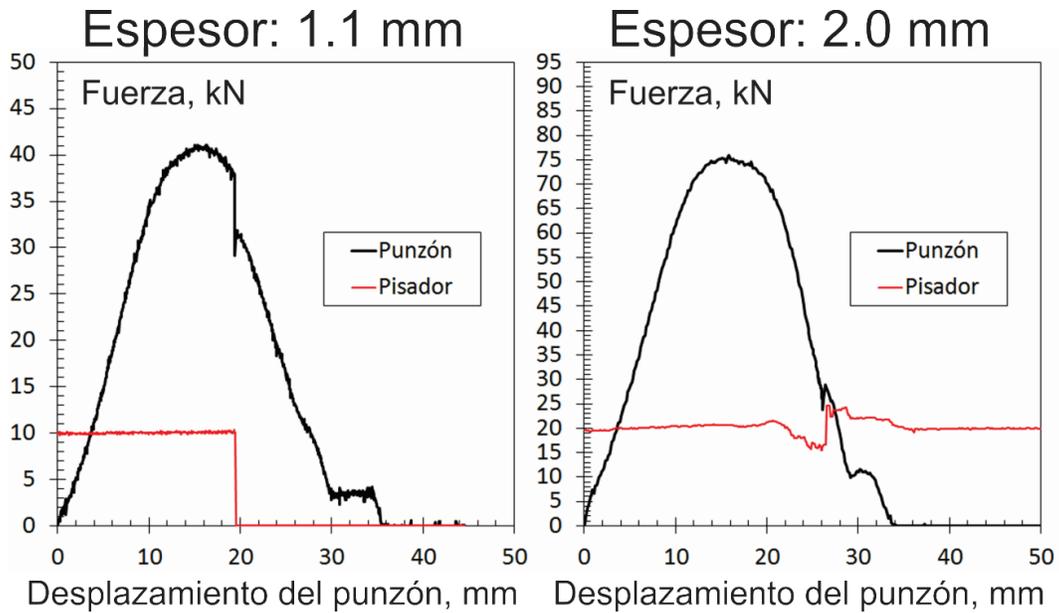


Figura 4.3. Comportamiento de la fuerza en el pisador y de la fuerza que ejerce el punzón durante el ensayo de Fukui. Ambas cantidades se grafican como función del desplazamiento del punzón.

#### 4.1.1. Resultados experimentales vs modelo *FEM*

A continuación, se muestra en la Figura 4.4 la copa experimental del ensayo junto a una copa *FEM*.

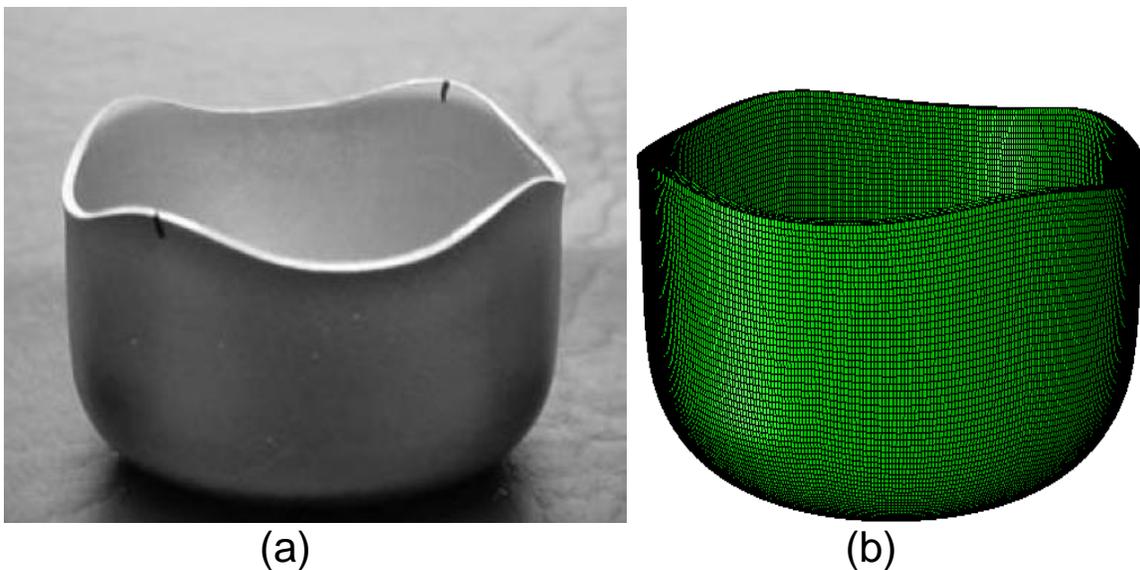


Figura 4.4. (a) Copa experimental y (b) Copa *FEM*.

Como se ha mencionado antes, el modelo *FEM* debe optimizarse para el caso isotrópico inicialmente. La Figura 4.5 muestra la influencia del efecto *hourglassing* y la relación de aspecto de los elementos finitos sobre el perfil de la copa conformada. En este caso, la lámina es un sólido elasto-plástico isotrópico de 1.1 mm de espesor, con fricción de Coulomb de 0.15. Para el caso isotrópico, el perfil de la copa debe ser constante.

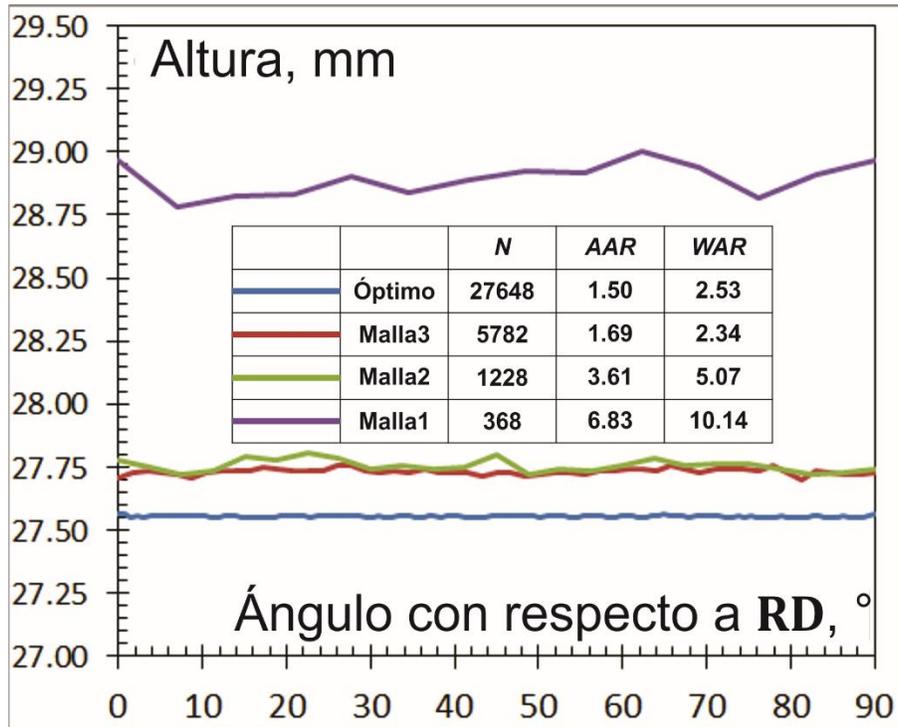


Figura 4.5. Influencia del efecto *hourglassing* y la relación de aspecto (*AR*) sobre el perfil de la copa *FEM*. *N*: número de elementos finitos; *AAR*: relación de aspecto promedio; *WAR*: valor más deficiente para la relación de aspecto.

En la Figura 4.7, se muestra el diagrama de simulaciones que se realizaron mediante el *software HMS* y que se comparan con los resultados experimentales para las copas de Fukui, donde se pretende analizar la influencia de la textura, fricción involucrada y modelo multiescala empleado en ambos espesores. Este es el segundo paso después de la optimización del modelo *FEM*. Se selecciona la textura a 0%, 25% y 50% del espesor de la lámina debido a que la superficie de la lámina se encuentra sujeta a un esfuerzo cortante máximo durante el proceso de laminado mientras que a la mitad se encuentra el plano neutro de la lámina. Como se muestra más adelante, la evolución de la textura durante el proceso de estampado profundo tiene un efecto menor sobre la predicción de las alturas y espesores en las copas, por lo que se omite este parámetro para su evaluación minuciosa como se realiza en el diagrama de la Figura 4.7. Existen dos mediciones experimentales realizadas sobre las copas que realiza una máquina de coordenadas instrumentada: La altura de las copas desde su base y el espesor de

las copas a 25 mm de altura, con la finalidad de mostrar la variación de dicho espesor debido a la formación de las orejas en la ceja. La Figura 4.6 muestra la punta de medición de la máquina de coordenadas. Para el perfil de orejas en la copa, se utiliza una punta que posee una rueda giratoria que va siguiendo el perfil de orejas en la copa, y que se ajusta verticalmente según la altura instantánea del perfil, mientras que para el espesor de la copa debajo de las orejas, se utiliza una punta redonda que va censando el contorno exterior en una medición y el contorno interior de la copa en otra de tal forma que el espesor final es simplemente el valor absoluto de la diferencia entre ambos contornos experimentales.

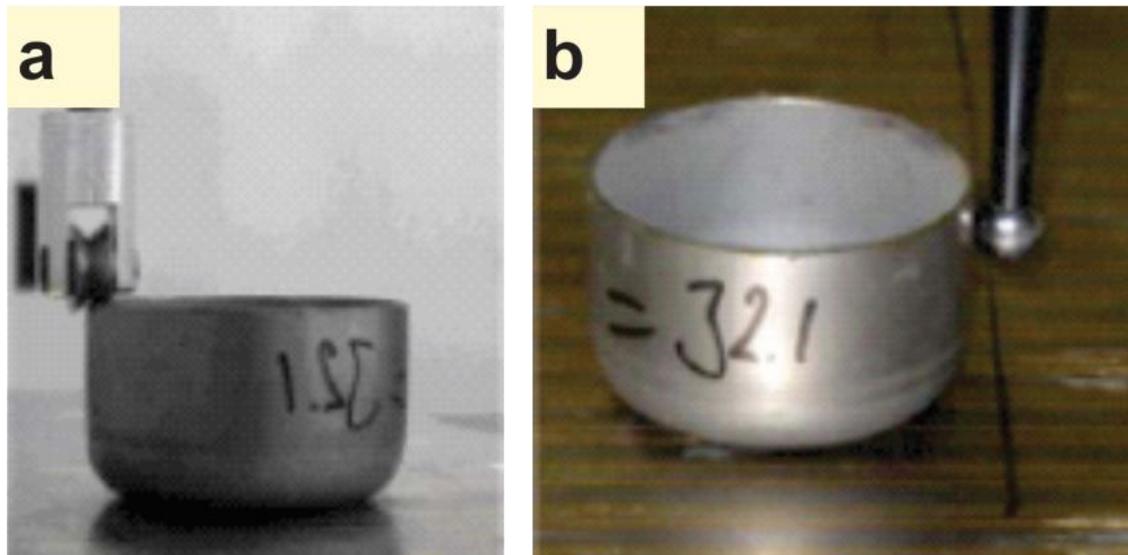


Figura 4.6. Puntas de medición que utiliza la máquina de coordenadas para medir el perfil de orejas (a) y el espesor (b).

# Esquema de Simulaciones

Componentes Rígidos, Fricción Constante, SIN evolución

1.1 mm	ALAMEL	0% del espesor	$\mu = 0.05$	Simulación01
			$\mu = 0.15$	Simulación02
			$\mu = 0.25$	Simulación03
		25% del espesor	$\mu = 0.05$	Simulación04
			$\mu = 0.15$	Simulación05
			$\mu = 0.25$	Simulación06
	50% del espesor	$\mu = 0.05$	Simulación07	
		$\mu = 0.15$	Simulación08	
		$\mu = 0.25$	Simulación09	
FC Taylor	0% del espesor	$\mu = 0.05$	Simulación10	
		$\mu = 0.15$	Simulación11	
		$\mu = 0.25$	Simulación12	
	25% del espesor	$\mu = 0.05$	Simulación13	
		$\mu = 0.15$	Simulación14	
		$\mu = 0.25$	Simulación15	
	50% del espesor	$\mu = 0.05$	Simulación16	
		$\mu = 0.15$	Simulación17	
		$\mu = 0.25$	Simulación18	
2.0 mm	ALAMEL	0% del espesor	$\mu = 0.05$	Simulación19
			$\mu = 0.15$	Simulación20
			$\mu = 0.25$	Simulación21
		25% del espesor	$\mu = 0.05$	Simulación22
			$\mu = 0.15$	Simulación23
			$\mu = 0.25$	Simulación24
		50% del espesor	$\mu = 0.05$	Simulación25
			$\mu = 0.15$	Simulación26
			$\mu = 0.25$	Simulación27
	FC Taylor	0% del espesor	$\mu = 0.05$	Simulación28
			$\mu = 0.15$	Simulación29
			$\mu = 0.25$	Simulación30
		25% del espesor	$\mu = 0.05$	Simulación31
			$\mu = 0.15$	Simulación32
			$\mu = 0.25$	Simulación33
		50% del espesor	$\mu = 0.05$	Simulación34
			$\mu = 0.15$	Simulación35
			$\mu = 0.25$	Simulación36

Figura 4.7. Esquema de simulaciones *FEM* para el ensayo de Fukui, considerando que la textura inicial no evoluciona. De izquierda a derecha, el número total de simulaciones es de: (2 espesores)(2 modelos micromecánicos)(3 texturas)(3 coeficientes de fricción) = 36 simulaciones.

- *Mediciones experimentales macroscópicas vs predicciones FEM*

La Figura 4.8, 4.9 y 4.10 muestran la comparación entre los resultados experimentales y numéricos de las alturas del perfil de orejas, espesores de la pared y la predicción de la fuerza en el punzón, respectivamente, con respecto a la dirección **RD**. Se puede observar una descripción minuciosa de la influencia de los parámetros analizados para el esquema de componentes rígidos con anisotropía y fricción constante descrito anteriormente.

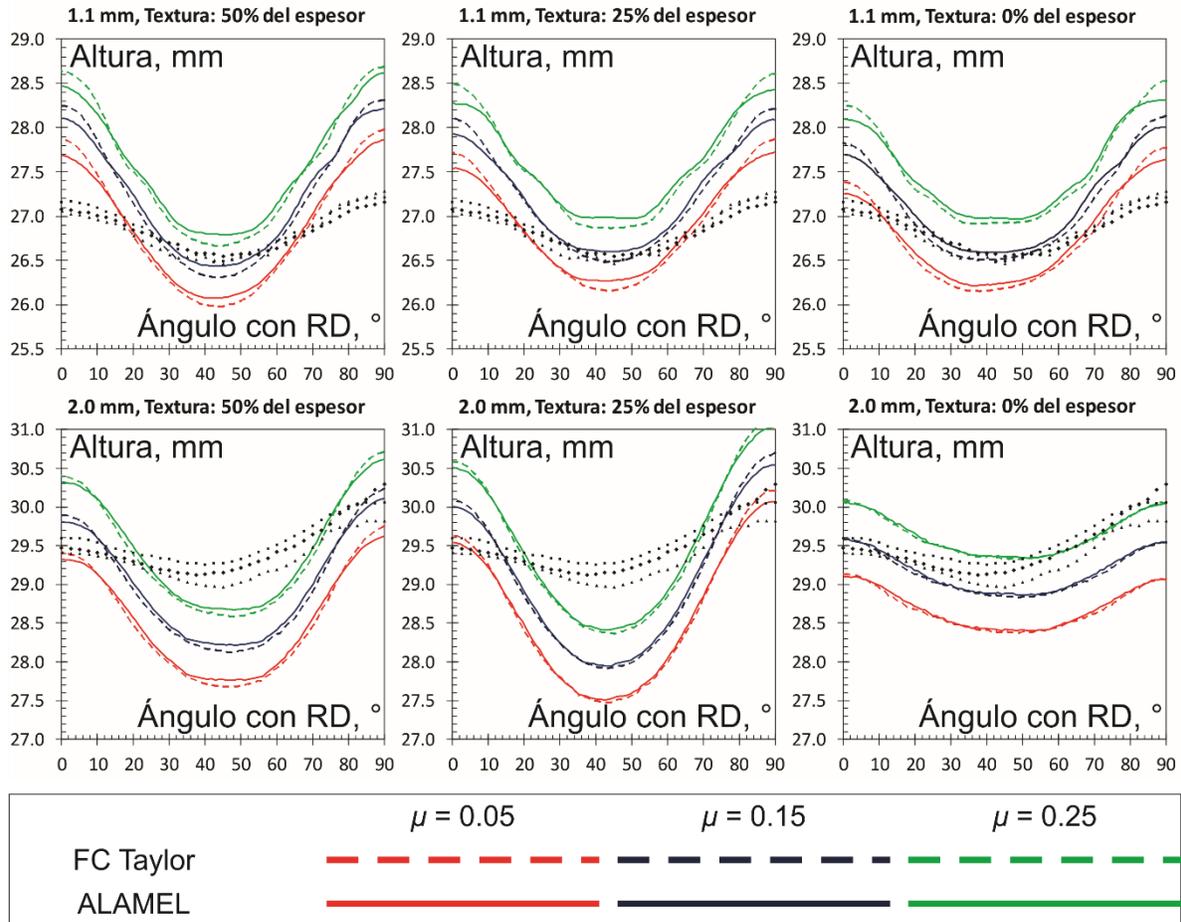


Figura 4.8. Comparación de alturas *FEM* y experimentales para el esquema que se muestra en la Figura 4.7. Los marcadores negros representan tres copas experimentales para cada espesor de la lámina AA6016T4.

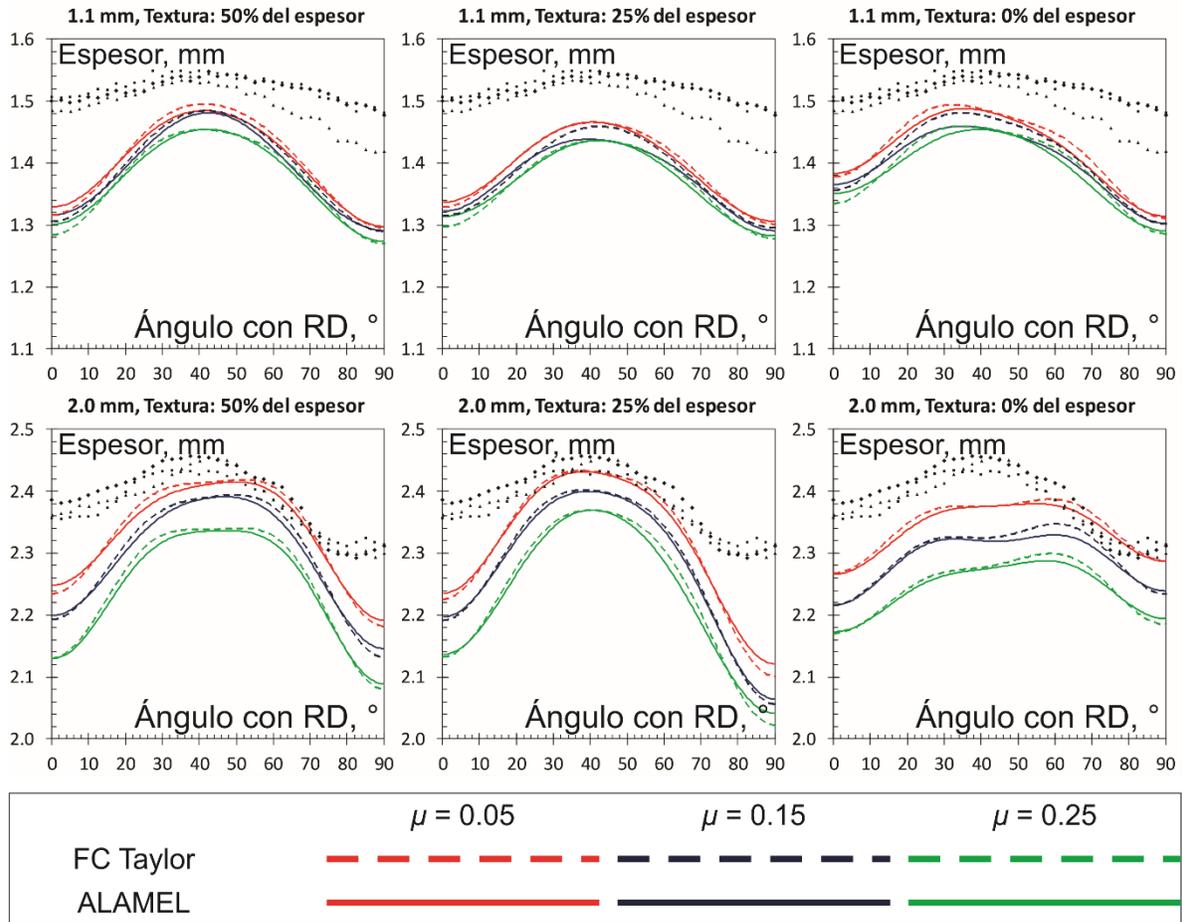


Figura 4.9. Comparación del espesor (a 25 mm desde la base de la copa) para el esquema que se muestra en la Figura 4.7.

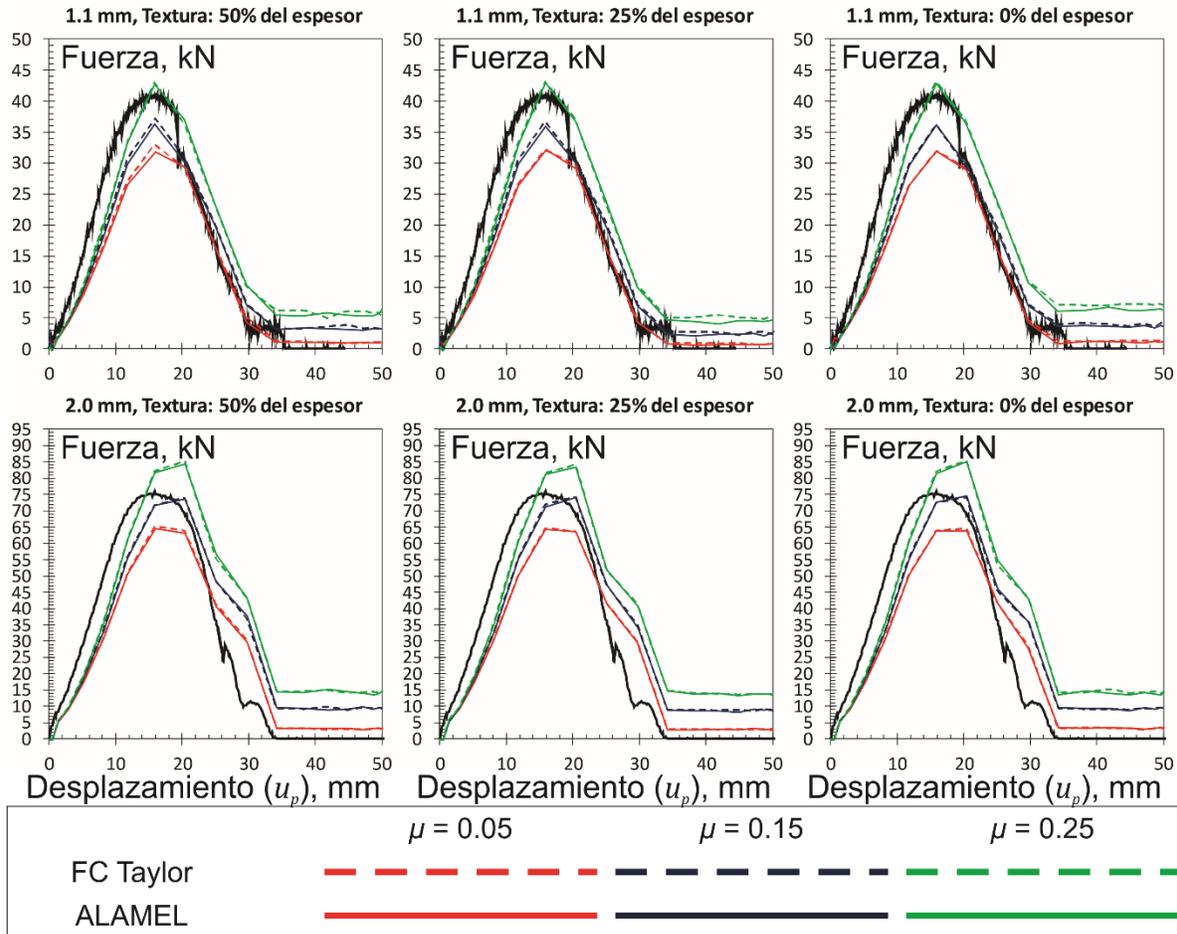


Figura 4.10. Comparación de la predicción *FEM* con la medición experimental para la fuerza en el punzón, basándose en el esquema que se muestra en la Figura 4.7.

El caso con evolución de textura para ambos modelos multiescala ALAMEL o Taylor no presentó una mejora en las mediciones macroscópicas anteriores. De los resultados para el esquema con anisotropía constante, cualitativamente se observa que la textura superficie (0% del espesor), el modelo ALAMEL y la fricción de 0.15 producen una predicción *FEM* aceptable para 1.1 mm y 2.0 mm, por lo que la Figura 4.11 muestra los resultados *FEM* con evolución de textura para la altura del perfil de orejas y el espesor, tomando en cuenta los parámetros anteriores.

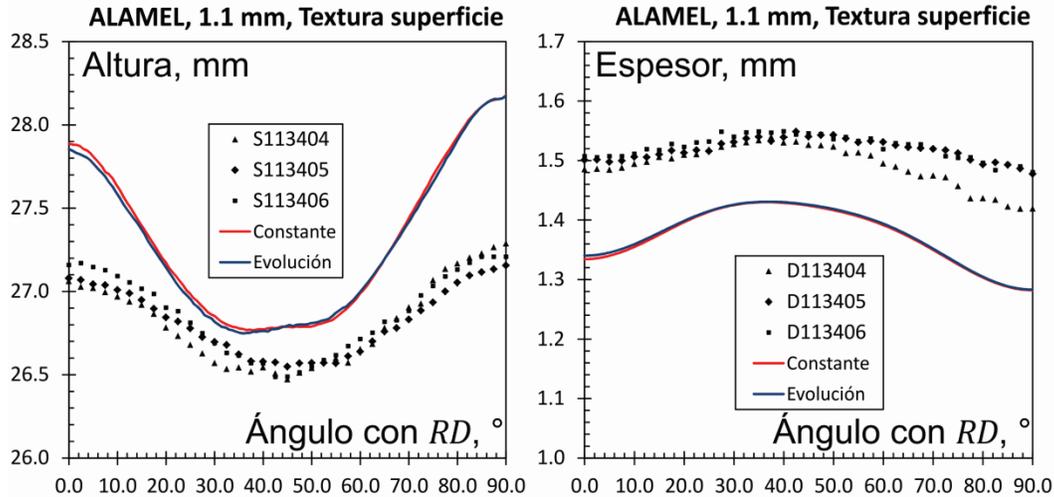


Figura 4.11. Comparación de la predicción *FEM* con los resultados numéricos del ensayo de Fukui considerando evolución de textura. Sólo se presentan los resultados de una simulación para la lámina de 1.1 mm de espesor debido a que la evolución de la textura no afecta significativamente la predicción *FEM* con respecto a los valores experimentales calculados.

- *Mediciones experimentales de la textura sobre la copa conformada vs predicciones FEM*

Se midieron seis texturas por cada copa conformada a 4 mm debajo del perfil de orejas sobre la superficie exterior de la copa, como se muestra en la Figura 4.12. Sin embargo, por espacio sólo se presenta una de las predicciones hechas por *HMS* para ambos espesores de lámina junto con la textura experimental correspondiente. Se utiliza el modelo multiescala ALAMEL y la zona de donde se obtiene la información de la textura se encuentra a  $0^\circ$  con respecto a *RD*. Para la lámina de 1.1 mm y en la región de estudio experimental, el elemento finito realizó 13 actualizaciones de textura; mientras que para la lámina de 2.0 mm, se realizaron 12 actualizaciones de textura en la misma región de estudio. La Figura 4.13 muestra la sección *ODF* ( $\varphi_2 = 45^\circ$ ) para la textura inicial de la lámina sobre la superficie, la textura final en la copa y la predicción de textura correspondiente. Debido a que la simetría ortotrópica de la lámina no se mantiene del todo durante el estampado profundo, lo mejor es definir las secciones *ODF* en el rango  $0^\circ \leq \Phi, \varphi_2 \leq 90^\circ, 0^\circ \leq \varphi_1 \leq 360^\circ$ , con la finalidad de captar toda la evolución de la textura adecuadamente y evitar omitir información de la textura.

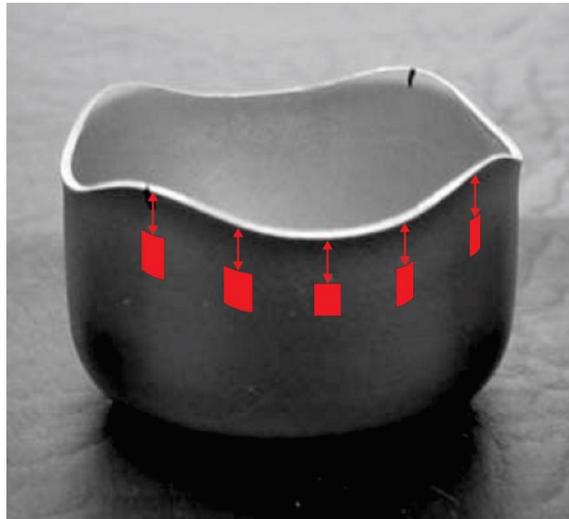


Figura 4.12. Regiones de la copa conformada de donde se obtienen las probetas para medir experimentalmente la textura de la aleación AA6016T4. Cada flecha vertical mide 4 mm.

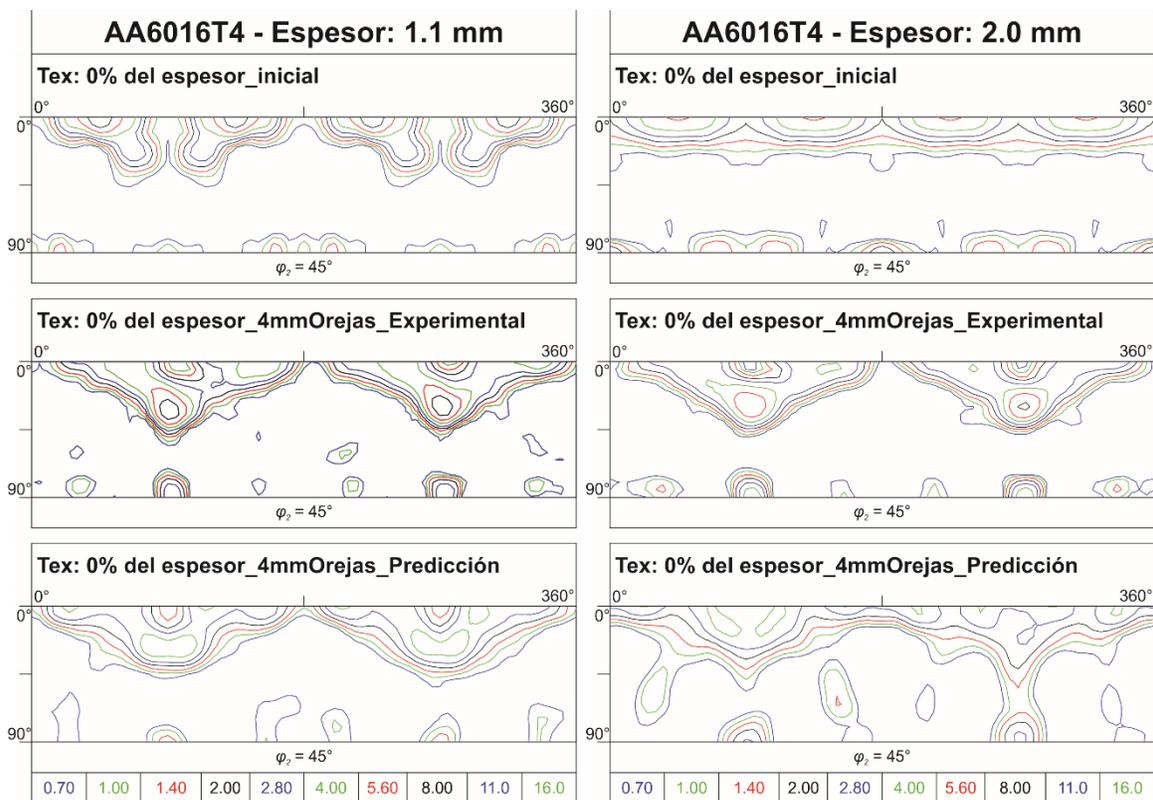


Figura 4.13. Comparación cualitativa entre la textura experimental y la predicción *FEM* para las copas conformadas en ambos espesores de lámina. Se muestra 1 de las 6 posibles comparaciones utilizando sólo *ALAMEL*. Fila 1: Textura inicial, Fila 2: Textura experimental, Fila 3: Predicción de textura. Todas las secciones mostradas de la figura *ODF* poseen el mismo rango de niveles para hacer más sencilla la comparación.

En ambos espesores, la textura inicial está orientada hacia la componente Cube, con una ligera desviación hacia la componente RC para la lámina de 2.0 mm. Esta componente evoluciona hacia la componente Copper durante el estampado profundo y entonces se desarrolla también la componente Goss (ver la parte superior de la Figura 4.13). La predicción de la textura está captando cualitativamente todos los componentes que se observan en la textura experimental, aunque es claro que la intensidad de las componentes Copper y Goss se subestima debido a que estas componentes son más intensas en la medición experimental.

- *Importancia del uso de componentes elásticos y fricción variable en los modelos FEM*

Del esquema para componentes rígidos mostrado en la Figura 4.7, se observa que las simulaciones que se acercan más a las mediciones macroscópicas para ambos espesores de lámina (1.1 y 2.0 mm) son aquellas que toman en cuenta: coeficiente de fricción de 0.15 (constante), modelo micromecánico ALAMEL y la textura de la superficie (0% del espesor). Hasta este punto, se consideró en los modelos que los componentes de la herramienta fueran rígidos y que haya fricción constante. Aunque el uso de punzón, dado y pisador como sólidos elásticos en lugar de superficies rígidas representa un cambio en los modelos *FEM* que eleva el tiempo de cálculo (en general, entre 8 y 10 horas adicionales por simulación), esto modifica las predicciones del perfil de orejas y espesores de manera observable. También, es aceptado que la rugosidad en una lámina disminuye cuando ésta comienza a deformarse durante un proceso de manufactura, por lo que sería adecuado utilizar un coeficiente de fricción que vaya disminuyendo en las simulaciones conforme la lámina del disco va volviéndose copa; este nuevo parámetro eleva el tiempo de cálculo a más de tres días por simulación. Sin embargo, el resultado de estos dos parámetros adicionales (componentes elásticos y fricción variable) demuestra que *HMS* sigue captando variaciones muy sutiles en las predicciones de las orejas y espesores debajo de éstas, aproximándose más a la medición experimental.

Entonces, del esquema de componentes rígidos y fricción constante en la Figura 4.7, en un tercer paso se han explorado dos modelos *FEM* anisotrópicos cuyos resultados ya proporcionan una predicción satisfactoria de las mediciones macroscópicas:

a) Espesor de lámina: 1.1 mm, coeficiente de fricción: 0.15, modelo ALAMEL, textura: 0% del espesor

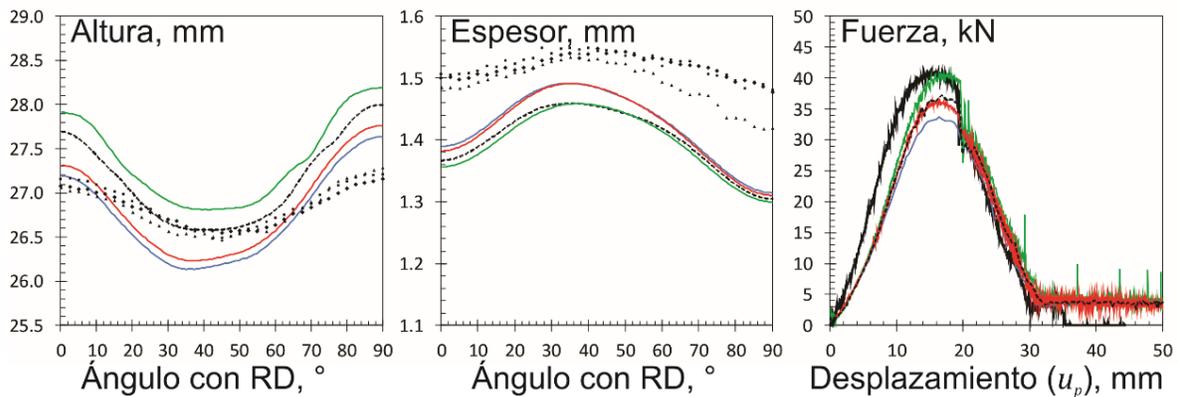
b) Espesor de lámina: 2.0 mm, coeficiente de fricción: 0.15, modelo ALAMEL, textura: 0% del espesor.

De aquí en adelante, los modelos a) y b) serán denominados como “Rígidos”, refiriéndose a las superficies rígidas que definen a los componentes del ensayo (punzón, dado y pisador).

La Figura 4.14 muestra los resultados para el perfil de orejas, espesores y fuerza en el punzón cuando se incluyen los componentes elásticos y la fricción variable en los modelos *FEM*. La elasticidad en los componentes del ensayo se considera isotrópica ( $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.29$ ) y representa una buena aproximación de la elasticidad en un acero típico para herramental en conformado de lámina; este modelo se denomina “Elásticos”. Por otra parte, mientras avanza el punzón, el coeficiente de fricción disminuye de manera lineal de 0.25 a 0.15; el valor 0.15 corresponde con el valor de fricción óptimo en los modelos “Rígidos”. El modelo de fricción variable se llama “ $\mu$  variable”. Los efectos considerados anteriormente se unen para observar el comportamiento de la altura de la copa, espesor y fuerza *FEM* en el punzón (modelo “Elásticos +  $\mu$  variable”).

La Figura 4.14 demuestra que los modelos *FEM* se modifican considerablemente cuando se emplean los parámetros de elasticidad en los componentes y la fricción variable en el contacto lámina/herramienta. La Figura 4.15 muestra el comportamiento del área de contacto para lámina/pisador y lámina/dado. La fricción variable disminuye el área siempre y cuando se utilice junto con los componentes elásticos en las simulaciones.

## 1.1 mm, Textura: 0% del espesor, ALAMEL



## 2.0 mm, Textura: 0% del espesor, ALAMEL

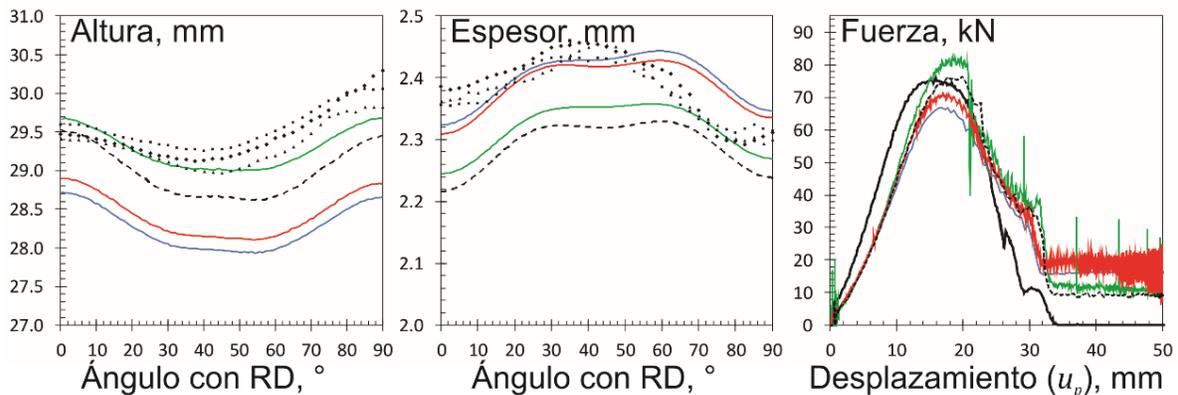


Figura 4.14. Predicciones para el perfil de orejas, espesor debajo de éstas y fuerza en el punzón, incluyendo los componentes elásticos y la disminución de la fricción durante el ensayo. Se puede observar la influencia de cada uno de los parámetros anteriores individualmente (línea azul y línea verde), así como la unión de ambos comportamientos (línea roja). Desplazamiento del punzón:  $u_p$ .

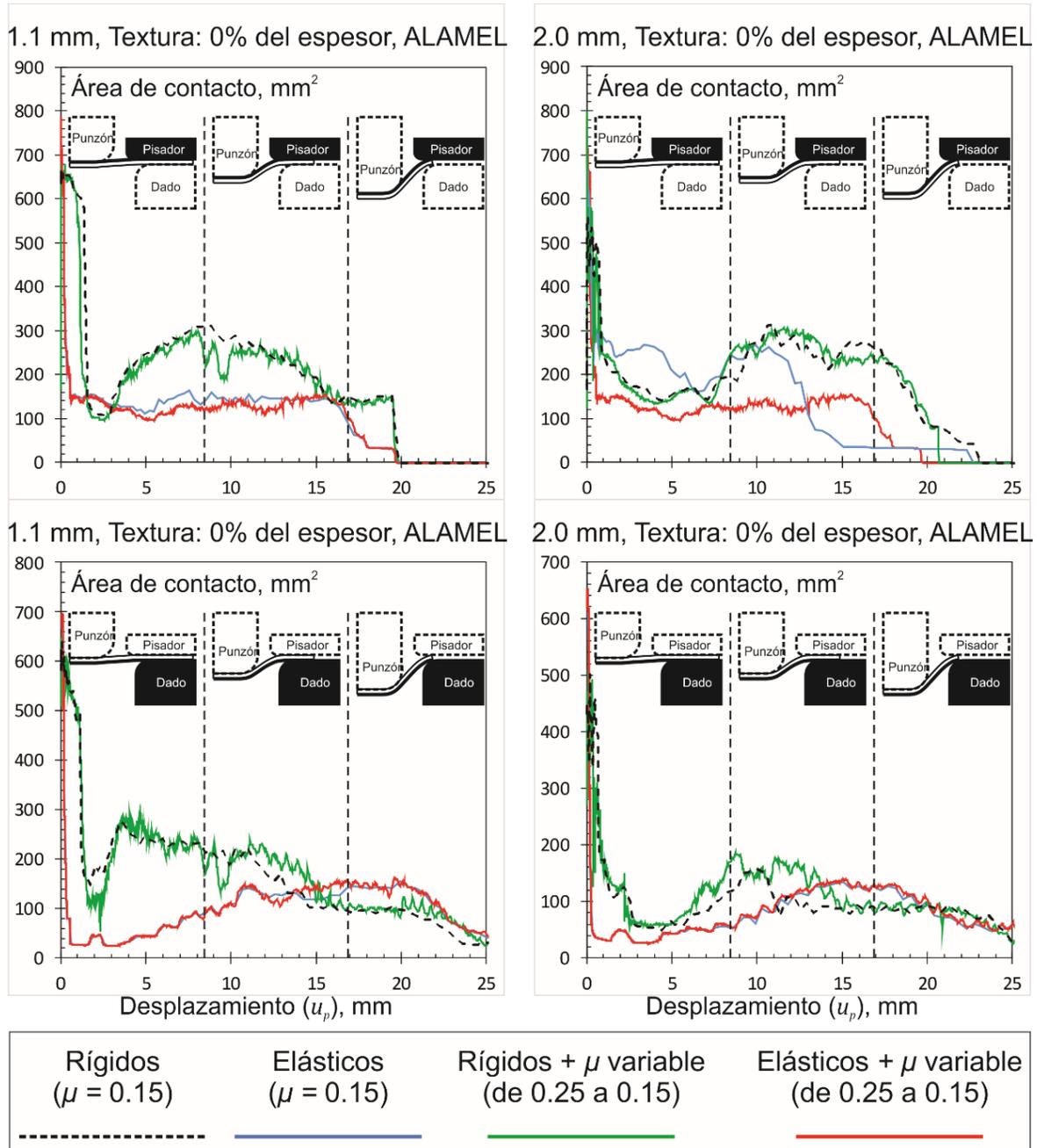


Figura 4.15. Comportamiento del área de contacto para lámina/pisador y lámina/dado, agregando componentes elásticos y fricción variable. Los efectos de ambos parámetros se muestran de manera individual.

De la figura anterior se observa que hay una reducción súbita en el área de contacto lámina/pisador y lámina/dado para todos los modelos *HMS*. Esto quiere decir que la formación de las orejas en la ceja del disco ocurre con un área de contacto reducida entre dado y pisador. La Figura 4.16 muestra la presión de contacto en el pisador para mostrar visualmente esta área de contacto.

Textura: 0% del espesor, ALAMEL  
 1.1 mm 2.0 mm

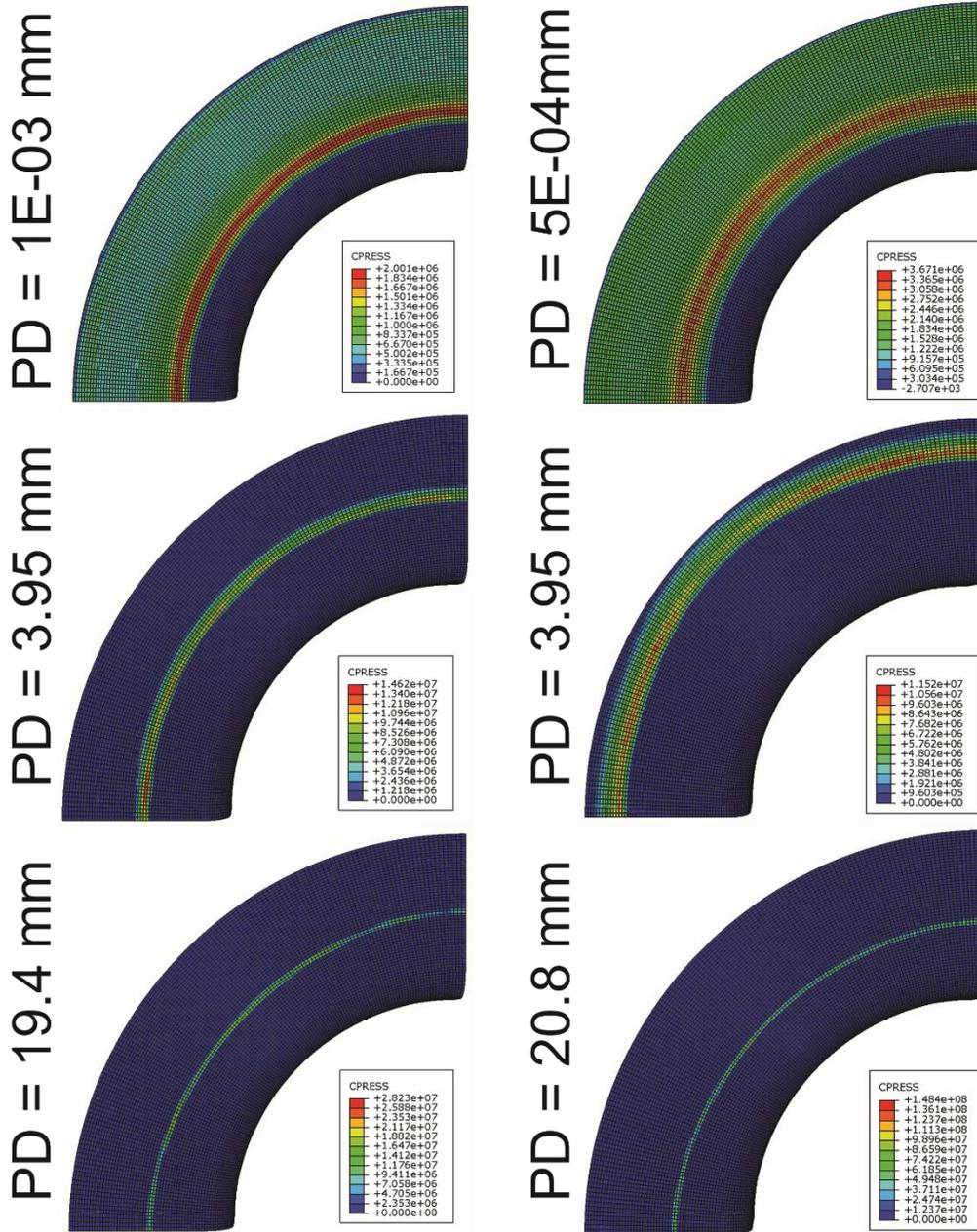


Figura 4.16. Presión de contacto en el pisador del ensayo de Fukui. Se muestra el cambio del área de contacto lámina/pisador a medida que el punzón va avanzando. PD: desplazamiento del punzón.

Finalmente, se muestra una tabla estadística (Tabla 4.3), mostrando la desviación estándar (*SD*) y la máxima diferencia (*MD*) entre simulación y experimento.

Tabla 4.3. Análisis estadístico de las simulaciones realizadas. Se resaltan las mejores predicciones

HMS: parámetros				Altura de Orejas		Espesor		Fuerza del punzón	
Espesor	Modelo	Textura	$\mu$	MD, mm	SD, mm	MD,mm	SD, mm	MD, kN	SD, kN
1.1 mm	ALAMEL	0%	0.05	-0.43	0.27	0.15	0.10	11.81	5.00
			0.15	-0.80	0.40	0.16	0.11	9.38	4.15
			0.25	-1.11	0.73	0.17	0.13	7.46	4.77
		25%	0.05	-0.51	0.30	0.16	0.12	11.71	4.97
			0.15	-0.88	0.50	0.17	0.14	9.25	3.94
			0.25	-1.22	0.82	0.18	0.15	7.59	4.30
		50%	0.05	-0.64	0.40	0.17	0.12	11.57	4.95
			0.15	-1.01	0.56	0.18	0.13	9.14	4.05
			0.25	-1.41	0.84	0.20	0.14	7.29	4.50
	FC Taylor	0%	0.05	-0.56	0.33	0.15	0.09	11.78	4.98
			0.15	-0.91	0.42	0.16	0.11	9.01	4.15
			0.25	-1.32	0.74	0.18	0.12	7.46	5.06
		25%	0.05	-0.65	0.36	0.17	0.12	11.54	4.92
			0.15	-1.01	0.54	0.18	0.13	8.90	3.90
			0.25	-1.40	0.84	0.20	0.15	7.05	4.42
50%		0.05	-0.77	0.47	0.18	0.12	11.17	4.71	
		0.15	-1.15	0.60	0.19	0.13	8.70	3.95	
		0.25	-1.54	0.87	0.21	0.14	6.95	4.54	
2.0 mm	ALAMEL	0%	0.05	1.03	0.77	0.10	0.06	18.76	10.33
			0.15	0.55	0.34	0.15	0.10	-25.38	10.66
			0.25	-0.56	0.27	0.19	0.15	-32.54	13.21
		25%	0.05	1.62	1.07	0.19	0.09	-19.31	10.57
			0.15	1.18	0.76	0.24	0.12	-23.65	10.42
			0.25	-1.02	0.64	0.27	0.16	-30.34	12.46
		50%	0.05	1.48	1.03	0.12	0.07	-19.37	10.48
			0.15	1.03	0.65	0.17	0.10	-27.47	11.18
			0.25	-0.84	0.47	0.24	0.15	-32.69	13.46
	FC Taylor	0%	0.05	1.07	0.79	0.10	0.06	18.68	10.37
			0.15	0.59	0.36	0.15	0.10	-25.54	10.59
			0.25	-0.58	0.26	0.20	0.14	-32.78	13.17
		25%	0.05	1.65	1.10	0.21	0.09	-19.62	10.53
			0.15	1.21	0.80	0.25	0.12	-25.02	10.60
			0.25	-1.12	0.69	0.29	0.16	-31.23	12.61
50%		0.05	1.54	1.08	0.13	0.07	-20.28	10.54	
		0.15	1.10	0.71	0.18	0.10	-26.49	10.95	
		0.25	-0.91	0.52	0.24	0.15	-32.93	13.40	
1.1 mm Evolución	ALAMEL	0%	0.15	-0.86	0.44	0.15	0.11	9.21	4.58
		50%	0.15	-1.04	0.60	0.17	0.13	9.08	4.39
1.1 mm Elásticos	ALAMEL	0%	0.15	0.49	0.30	0.15	0.10	7.21	4.99
2.0 mm Evolución	ALAMEL	0%	0.15	0.57	0.36	0.18	0.11	-25.38	11.03
		50%	0.15	0.90	0.58	0.18	0.10	-27.01	11.27
2.0 mm Elásticos	ALAMEL	0%	0.15	1.42	1.22	-0.08	0.04	18.19	9.95

## 4.2. Descripción del modelo *FEM* para el ensayo de deformación cortante simple

La descripción del funcionamiento de este ensayo se hizo en el capítulo uno. En esta sección se muestran los parámetros experimentales más importantes para el ensayo. La construcción de este modelo *FEM* (libre de artificios numéricos) trata de incluir los efectos de orilla que se mencionan en la sección 1.3.3 con el fin de lograr una mejor predicción del ensayo real. El modelo consiste de tres partes: dos superficies analíticamente rígidas que representan las mordazas del equipo, cuyo movimiento es únicamente de cuerpo rígido (sólo se necesita un punto de las superficies para describir su movimiento); y un sólido tridimensional deformable que modela a la probeta del ensayo. La Figura 4.17 muestra los componentes mencionados y sus respectivas dimensiones; ésta representa la posición inicial de todos los modelos *FEM* construidos. Por otra parte, el sólido deformable de la lámina sólo toma en cuenta la región de estudio de las probetas y 5 mm arriba y debajo, zona donde están en contacto las mordazas con la lámina, entre la ROI. El sólido de la probeta considera simetría transversalmente ortotrópica con respecto al plano de la lámina, con el eje de orden 2 paralelo a la dirección **ND**, por lo que sólo se considera la mitad del espesor de ésta. Por lo tanto, el espesor correspondiente a 1.1 mm será sólo de  $t = 0.55 \text{ mm}$ , mientras que el espesor correspondiente a 2.0 mm será de  $t = 1.0 \text{ mm}$  en los modelos *FEM*. Las dimensiones de la región de estudio tanto en el ensayo como en el modelo *FEM* son de 50 mm por 4 mm, manteniendo la razón de proporción entre ambas dimensiones arriba de 10. Se ha visto en modelos *FEM* anteriores que los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos se vuelven uniformes cuando se va más allá de 5 mm arriba y debajo de la región de estudio, donde las mordazas y la probeta entran en contacto. Esto significa que la probeta *FEM* sólo considera 14 mm de la probeta experimental, en la parte media de ésta.

Las simulaciones para validar *HMS* sólo consideran a la textura de la superficie (0% del espesor) y al modelo *ALAMEL*, puesto que ya se demostró que esta combinación predice mejor las mediciones macroscópicas para el ensayo de Fukui.

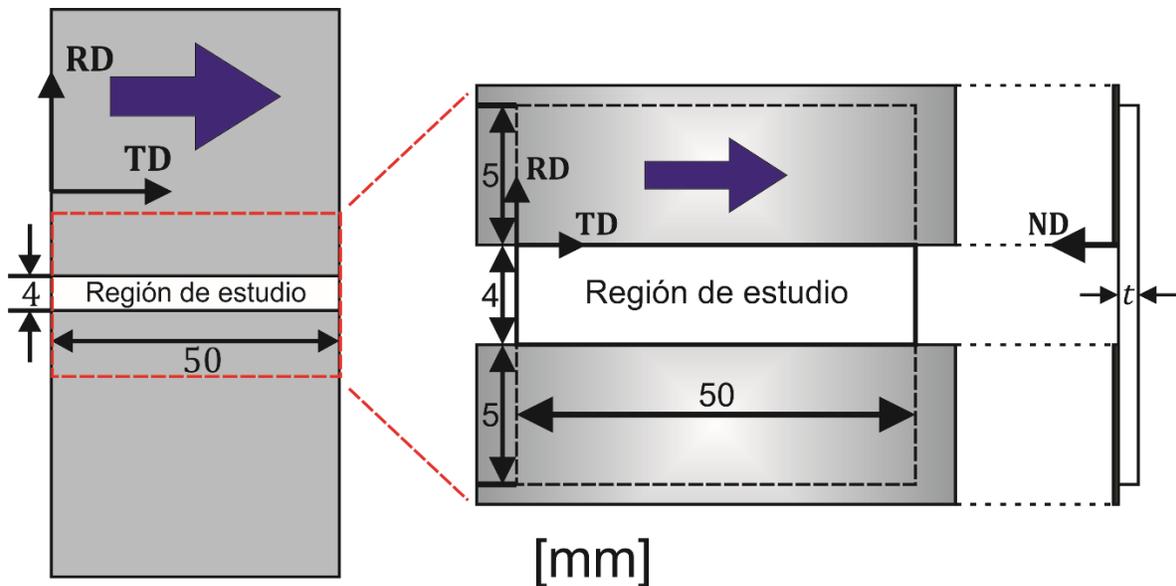


Figura 4.17. Esquema del modelo *FEM* para el ensayo de deformación cortante simple. El recuadro rojo punteado delimita el área de la probeta para el modelo *FEM* en *HMS*. Las mordazas se modelan como superficies analíticamente rígidas durante las simulaciones (color gris degradado). La dirección de laminado (**RD**) se encuentra perpendicular al movimiento de la mordaza superior para todos los experimentos realizados. El espesor se representa por  $t$ . La parte trasera de la lámina en el modelo *FEM* se encuentra sujeta a simetría transversalmente ortotrópica con respecto al eje **ND**.

La sujeción entre las mordazas y la lámina se modela mediante el modelo de Coulomb, utilizando un coeficiente de fricción alto de 0.5 y una presión uniforme de 300 bar en la dirección **ND** (valor de la presión neumática registrado por el equipo experimental) que ejercen las superficies analíticas sobre el sólido *FEM* de la lámina. La presión normal se mantiene uniforme y constante en ambas mordazas mientras la mordaza superior se desplaza hacia un lado para que comience a imponerse una deformación cortante simple sobre la región de estudio *FEM*. La superficie analítica inferior (mordaza) permanece inmóvil, sólo sujetando a la parte inferior de la probeta.

La malla de elementos finitos que se emplea en el modelo *FEM* toma en cuenta todas las consideraciones para eliminar artificios numéricos y optimizar el modelo (relación de aspecto, aceleración artificial, *hourglassing*...). Como se consideran 2 espesores estudiados, se tienen dos mallas de elementos finitos diferentes y, por lo tanto, se tienen que optimizar ambas previamente para el caso elasto-plástico isotrópico. Las dimensiones de las mordazas y de la probeta son las mismas para 1.1 mm como para 2.0 mm; lo único que cambia es el espesor de la lámina y la malla de elementos finitos.

Las cuatro orillas exteriores de la región de estudio se encuentran visibles para las cámaras inicialmente; sin embargo, durante el ensayo la orilla superior izquierda y la orilla inferior derecha deslizan hacia adentro de las mordazas; mientras que la orilla inferior izquierda y la orilla superior derecha, la lámina que se encuentra dentro

de las mordazas desliza hacia la región visible de las cámaras, por lo que al comienzo estas regiones no se detectan y no es posible hacer *DIC* en ellas.

#### 4.2.1. Resultados experimentales vs modelo *FEM*

Las mordazas del equipo experimental son un factor importante a considerar debido a su comportamiento durante el ensayo. De la sección 1.3.3, se observa la estructura de la máquina experimental cuyo motor mueve a la mordaza superior para aplicar el gradiente de deformación cortante simple. El comportamiento de esta estructura es complejo, puesto que mientras el motor aplica un desplazamiento de 8.0 mm en la parte superior de la máquina, la probeta en realidad está sujeta a un desplazamiento a corte de 1.01 mm; entre estos dos desplazamientos se encuentra el desplazamiento de la mordaza que se observa gracias a las cámaras (6.84 mm). La Figura 4.18 muestra el campo de deformaciones cortantes con *HMS* y con *DIC* (*NCORR*).

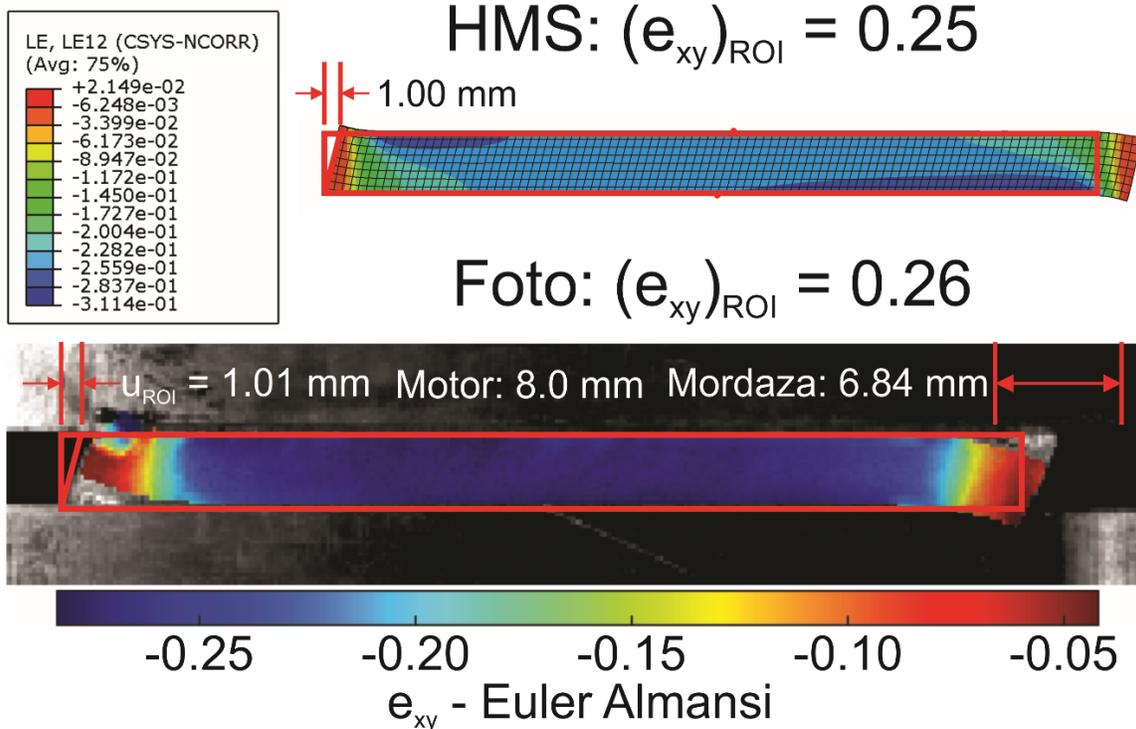


Figura 4.18. Desplazamiento horizontal en la probeta de deformación cortante simple. La probeta mostrada proviene de lámina de 1.1 mm de espesor, se utiliza la textura de la superficie con anisotropía constante.  $(e_{xy})_{ROI}$ : deformación cortante de toda la región de interés;  $u_{ROI}$ : desplazamiento de la región de interés;  $LE_{12}$ : deformación cortante logarítmica sobre el plano de la lámina en *HMS*.

Comparar los resultados entre modelos *FEM* y experimentos para validar *HMS* no es una tarea directa. El desplazamiento horizontal *FEM* comparado con *DIC* no coincide en ningún momento, debido al nulo conocimiento del deslizamiento que ocurre entre las mordazas y la probeta durante el ensayo. Más adelante se discute este resultado. La Figura 4.19 muestra el deslizamiento que ocurre en las orillas de la ROI en las probetas, así como un modelo *FEM* mostrando el campo de desplazamiento simulado.

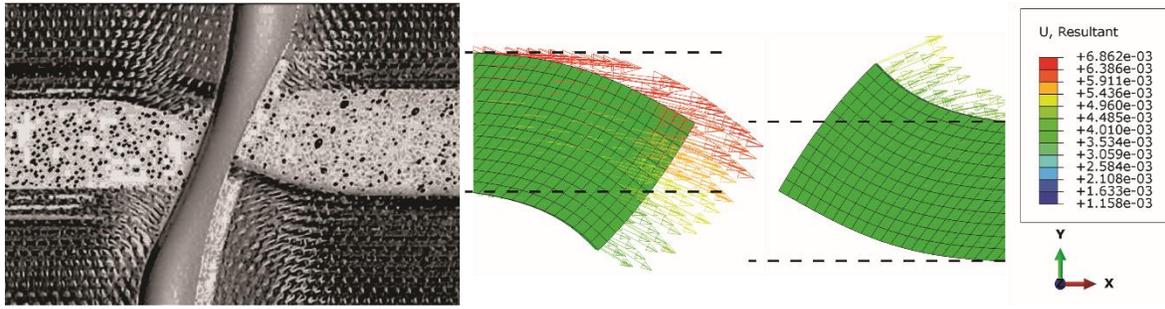


Figura 4.19. Orilla experimental de la probeta deformada junto con su orilla *FEM* correspondiente. Las líneas punteadas en las mallas de elementos finitos representan el límite de cada mordaza. Las dimensiones del espectro de colores arcoíris son metros.

### 4.3. Descripción del modelo *FEM* para el ensayo de tracción

El modelo *FEM* para este ensayo consiste en la geometría completa de la probeta, un extremo fijo de ésta (empotramiento) y en el otro, una condición de velocidad constante para todos los nodos que conforman este extremo opuesto. La Figura 4.20 muestra la geometría de las probetas, así como las condiciones de frontera utilizadas. Éstas últimas, se emplearon en todos los experimentos. La geometría de las probetas y su manufactura se hizo como dicta la norma ASTM E8 mencionada en el capítulo 1.

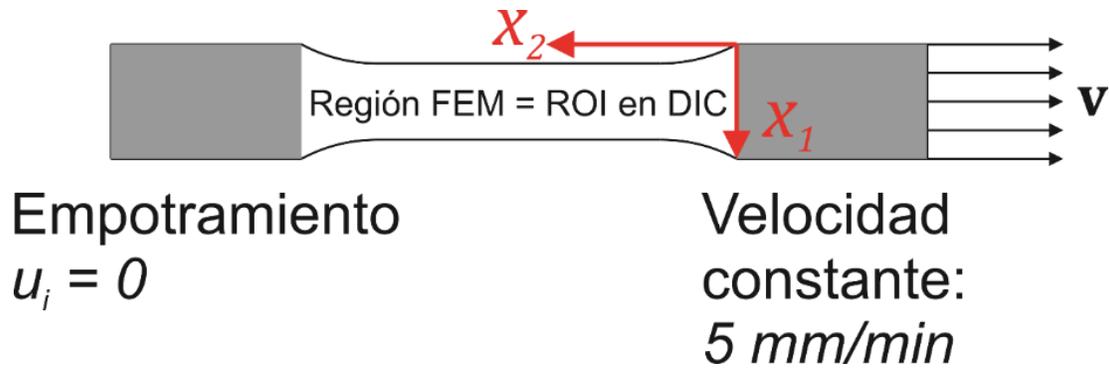


Figura 4.20. Esquema del modelo *FEM* para los ensayos de tracción. La geometría y manufactura se sigue como en la norma ASTM E8. Las zonas grises en la figura representan las regiones donde se imponen las condiciones de frontera sobre los elementos finitos correspondientes. El sistema de referencia  $x_1$ - $x_2$  se utiliza para las simulaciones *FEM* y el análisis *DIC*.

En el modelo de este ensayo se pretende eliminar el efecto de la rigidez/elasticidad en los contactos inherentes con la lámina, la fricción involucrada y la variación de la velocidad de deformación impuesta por el cabezal de la máquina de tracción. Los primeros dos efectos se pudieron observar en los ensayos de Fukui y deformación cortante simple; para el ensayo de tracción, no existe ningún contacto definido (y, por lo tanto, se omite el efecto de la fricción). También, la velocidad del cabezal se eligió constante para omitir la influencia de este parámetro sobre los ensayos. Todas las consideraciones anteriores tienen la finalidad de observar únicamente el efecto de la anisotropía de la lámina AA6016T4 y su evolución durante el ensayo. Como se menciona más adelante, el uso del esquema con evolución de textura en *HMS* será fundamental para la localización de la estricción en las probetas, aun cuando el caso isotrópico y el caso anisotrópico constante también produzcan estricciones en las probetas simuladas.

### 4.3.1. Resultados experimentales vs modelo *FEM*

De los resultados obtenidos para el ensayo de Fukui, es claro que la mejor predicción *FEM* para las texturas y las mediciones macroscópicas es aquella que utiliza la textura de la superficie junto con el modelo micromecánico ALAMEL. Por lo tanto, en el modelo *FEM* de tracción se utiliza únicamente la textura sobre la superficie de la lámina en ambos espesores y el modelo micromecánico ALAMEL. Un parámetro importante a considerar en estas simulaciones es la alineación inicial de la dirección **RD** con respecto a la dirección vertical en la cual se aplica el gradiente de velocidad de la máquina universal. La Figura 4.21a muestra las posiciones de este parámetro y las correspondientes simulaciones a determinar, así como el centro de la estricción en una probeta (Figura 4.21b).

Un primer análisis de resultados para el modelo *FEM* es obtener el estado de deformaciones más severo justo para el centro de la estricción, posteriormente se va a comparar este resultado con el subconjunto (en inglés, *subset*) *DIC* correspondiente en el análisis de las fotografías del ensayo. La Figura 4.21b muestra la manera en que se va a comparar la predicción *FEM* con el análisis *DIC* utilizando el centro de la estricción. Dado que Abaqus y *NCORR* poseen definiciones diferentes de deformación, es necesario transformar las deformaciones experimentales a la definición de Abaqus, o viceversa. En Abaqus, se define a la deformación logarítmica (**LE**) como se muestra en la Ecuación (4.2a) [91], mientras que *NCORR* utiliza la definición de deformación Euler-Almansi (**e**) para describir el campo de deformaciones *DIC* – Ecuación (4.2b) –, además de deformaciones Lagrangianas [92]. Aunque **LE** y **e** son definiciones de deformación que hacen referencia a la geometría actual de la probeta, los valores de las componentes en ambos tensores no necesariamente son iguales, especialmente cuando se alcanza la zona de la estricción donde ocurre un estado de deformaciones severo.

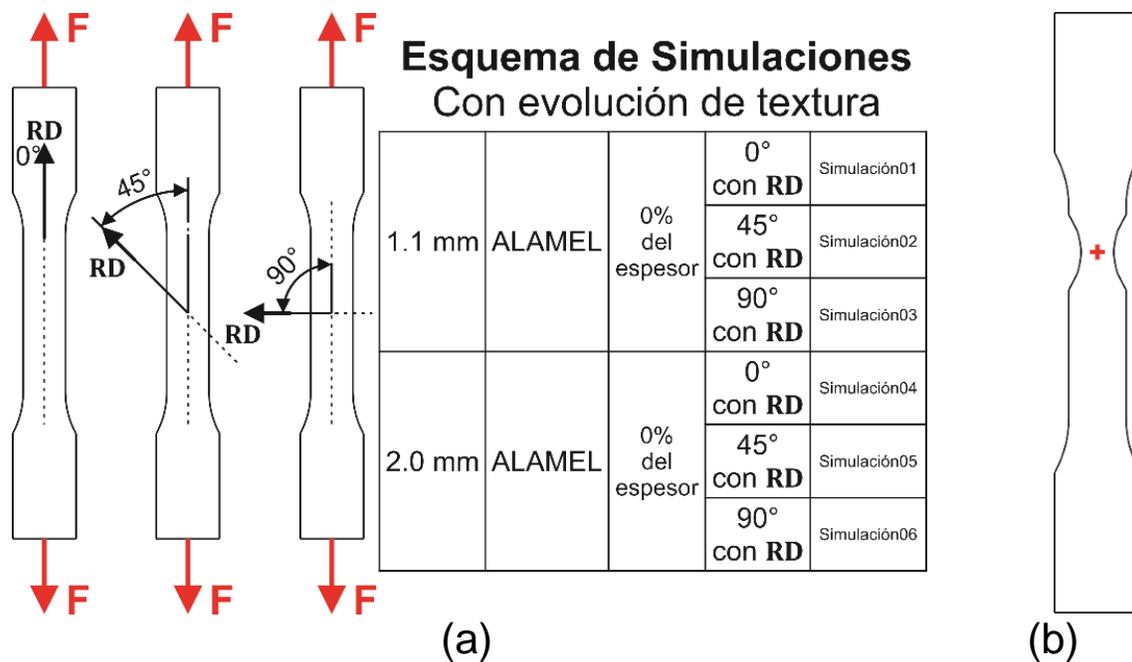


Figura 4.21. La Figura (a) muestra las tres direcciones de **RD** con respecto a la línea vertical de carga y su posición inicial durante el ensayo de tracción. Son seis simulaciones realizadas: (2 espesores)(3 orientaciones de **RD**) = 6 simulaciones. La Figura (b) muestra el centro de la estricción en una probeta (cruz roja), el cual se utiliza para mostrar los tensores de deformación *FEM*; la posición de la estricción no necesariamente se localiza en la parte media de la probeta.

$$\text{Abaqus: } \mathbf{LE} = \ln V \quad (4.2a)$$

$$NCORR: \mathbf{e} = \frac{1}{2} [1 - (\mathbf{B})^{-1}] \text{ con } \mathbf{B} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (4.2b)$$

El tensor  $\mathbf{V}$  representa al tensor deformación polar por izquierda (en inglés, *stretch tensor*) el cual se utiliza para definir una de las dos expresiones comunes del teorema de descomposición polar en medios continuos ( $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ ), mientras que el tensor  $\mathbf{B}$  se refiere al tensor deformación de Cauchy-Green por izquierda. Cabe destacar que la definición propuesta por los desarrolladores de Abaqus utiliza al tensor  $\mathbf{V}$  diagonalizado, puesto que sus eigenvalores siempre son positivos y diferentes de cero. Esto se utiliza así debido al cálculo numérico eficiente del tensor inverso  $\mathbf{V}^{-1}$ , ya que únicamente se necesita calcular los valores inversos de los componentes en la diagonal principal de  $\mathbf{V}$ . Por lo tanto, si despejamos al tensor  $\mathbf{V}$  de la Ecuación (4.2b), calculamos el valor de  $\mathbf{V}$  utilizando la representación en eigenvalores del tensor  $\mathbf{e}$  que proviene del análisis de datos *DIC* experimentales de *NCORR*, se aplica la definición (4.2a) de Abaqus y se regresa del sistema de ejes principales al sistema de referencia original que utiliza *NCORR*, obteniendo una representación de  $\mathbf{LE}^{(ncorr)}$  calculada desde *NCORR*, que se puede comparar directamente con los resultados numéricos de Abaqus. Este cálculo permite observar la evolución del tensor de deformaciones en el centro de la estricción durante la simulación y el ensayo. Mientras tanto, sólo se muestra más adelante el valor de  $\mathbf{LE}$  que calcula Abaqus y *HMS*.

- *Predicciones FEM para los esfuerzos y deformaciones en el centro de la estricción*

La naturaleza de los esfuerzos y deformaciones para el ensayo de tracción de una probeta de lámina como la que se estudia en esta tesis se menciona en el capítulo 1. Existe una etapa del ensayo donde la igualdad  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33}$  se cumple; es decir, la deformación sobre el espesor es idéntica a la deformación transversal de la probeta. Sin embargo, una vez que se forma la estricción y se desarrolla hasta que se produce un estado de deformaciones severo, la componente en el espesor comienza a tener un comportamiento propio, También, la componente longitudinal posee un comportamiento propio característico. La Figura 4.22 muestra las predicciones *FEM* para los esfuerzos de Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) y valores  $r$  y  $q$  para una probeta simulada, justo en el centro de la estricción.

# Textura: 0% del espesor, ALAMEL

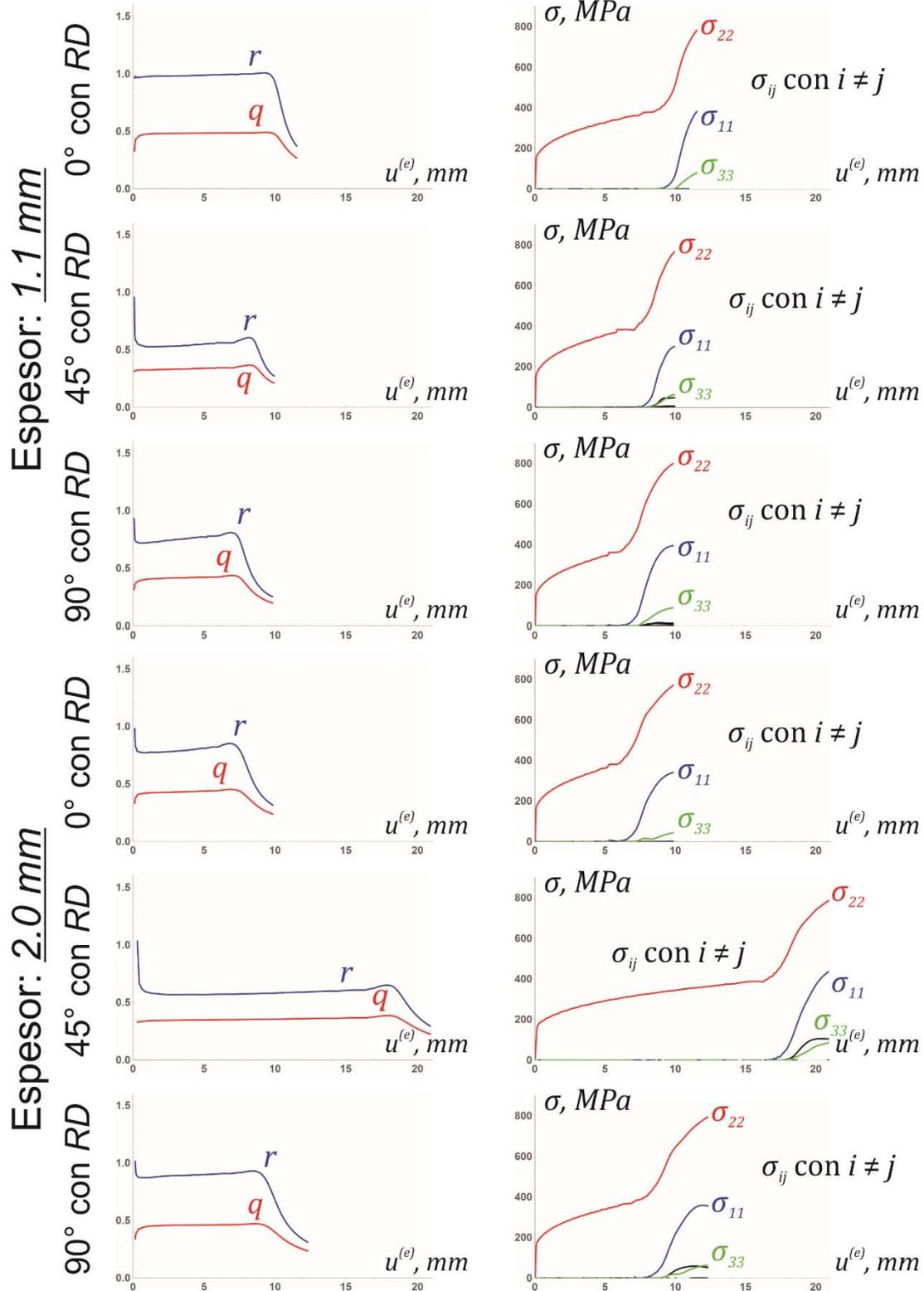


Figura 4.22. Gráficas para la predicción *FEM* del esfuerzo de Cauchy, valor  $r$  y valor  $q$ , con respecto al desplazamiento vertical calculado en el centro de la estricción ( $u^{(e)}$ ).

Se observa en la figura anterior que la prueba de tracción deja de ser tracción pura a partir de 6 mm en adelante, punto donde el resto de las componentes normales de  $\sigma$  comienzan a ser representativas.

- *Posición de la estricción FEM vs Posición de la estricción DIC*

La Figura 4.23 y 4.24 muestra la posición de la estricción tanto en las simulaciones *FEM* como en las probetas que se ensayaron. Es en este punto donde el esquema con evolución de textura cobra importancia, puesto que las simulaciones correspondientes predicen una estricción fuera del centro medio de la probeta, tal y como se observa en las probetas experimentales. También, se muestra el número de actualizaciones realizadas para la textura de la lámina hasta el instante donde se forma la estricción y, por lo tanto, este número coincide con el número de actualizaciones del lugar geométrico de la fluencia y la nueva anisotropía que se emplea, mediante la función FACET.

Una observación inmediata de las Figuras 4.23 y 4.24 muestra resultados interesantes que, como se ha mencionado previamente, requieren un mayor análisis del ensayo. Por ejemplo, las estricciones *FEM* y experimental quedan fuera del centro medio de las probetas lo cual es atípico en un ensayo de tracción; se dice comúnmente que una buena prueba de tracción libre de defectos en la geometría de la probeta y en la microestructura del material producirá una estricción en el centro medio de la probeta. También, el número de actualizaciones de la textura es alto para todas las simulaciones hechas con *HMS* (en general, todas poseen 40 actualizaciones o más). Además, la posición de la estricción en la probeta *FEM* no siempre coincide con lo obtenido experimentalmente; en todos los casos, la estricción *FEM* se encuentra fuera del centro de la probeta. Más adelante se discuten todas estas observaciones junto con el resto de las mediciones experimentales actuales.

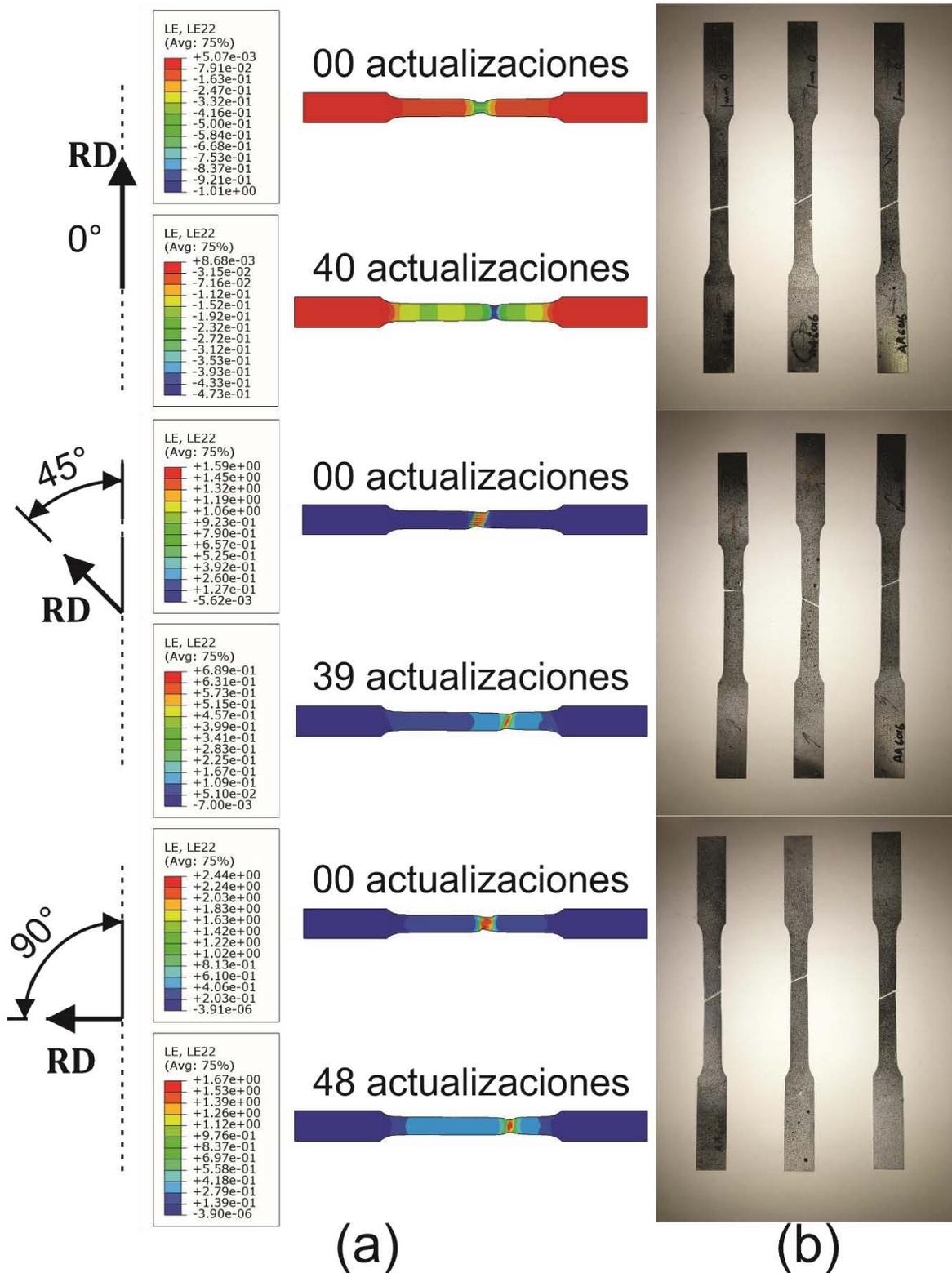


Figura 4.23. Posición de la estricción para las simulaciones *FEM* comparadas con las probetas experimentales de 1.1 mm. Se omite el caso isotrópico puesto que predice una estricción en el centro medio de la probeta; esto no ocurre en los experimentos reales. La dirección **RD** en las simulaciones coincide con la dirección **RD** experimental. (a) Probetas *HMS*; (b) Probetas experimentales.

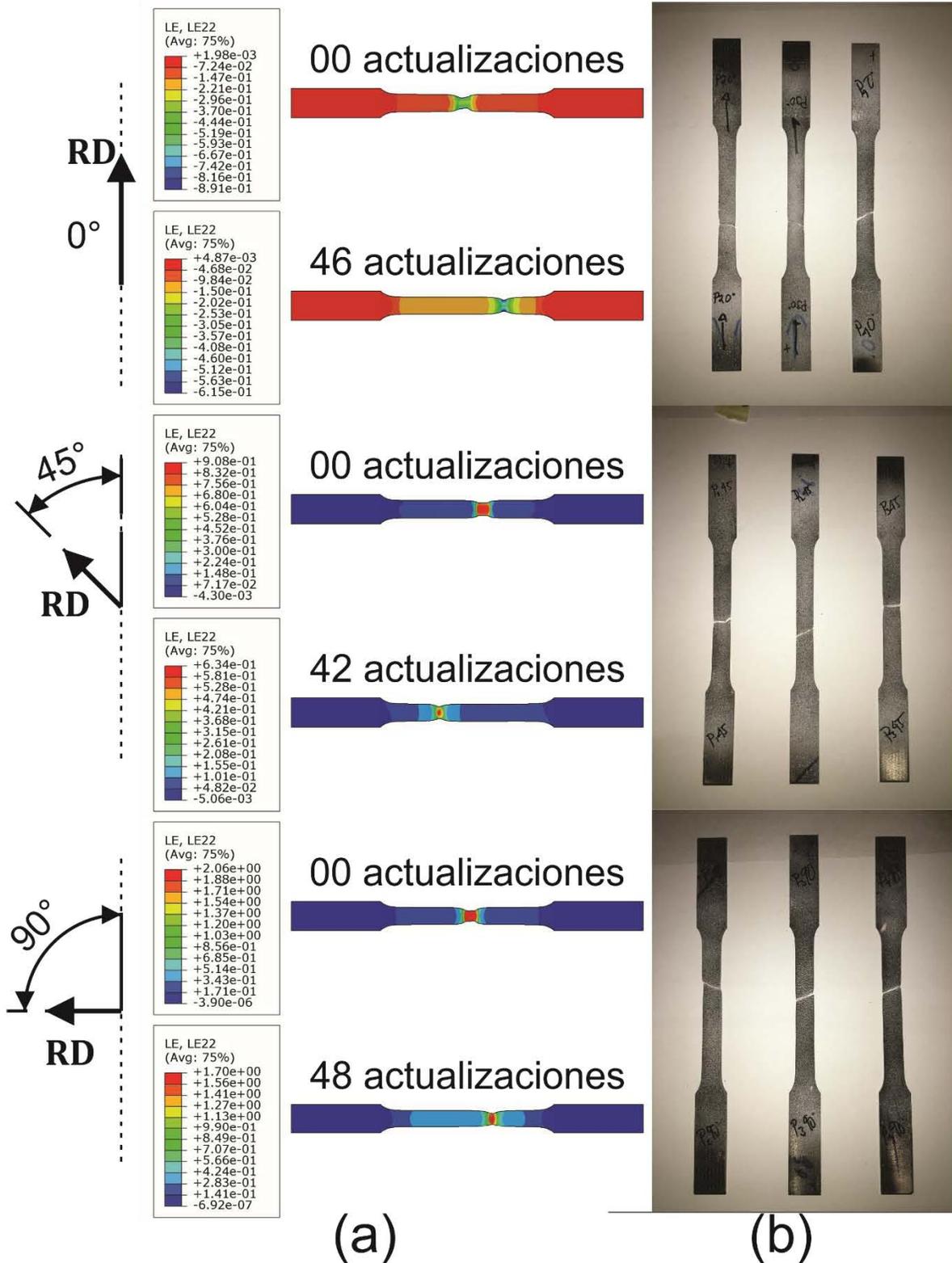


Figura 4.24. Posición de la estricción para las simulaciones *FEM* comparadas con las probetas experimentales de 2.0 mm. Se omite el caso isotrópico puesto que predice una estricción en el centro medio de la probeta; esto no ocurre en los experimentos reales. La dirección **RD** en las simulaciones coincide con la dirección **RD** experimental. (a) Probetas *HMS*; (b) Probetas experimentales.

- *Curvas Esfuerzo Ingenieril vs Deformación Ingenieril, comparación entre modelos HMS y experimento*

La Figura 4.25 muestra una comparación detallada entre la predicción *FEM* y la medición de la celda de carga en la máquina universal para los ensayos realizados.

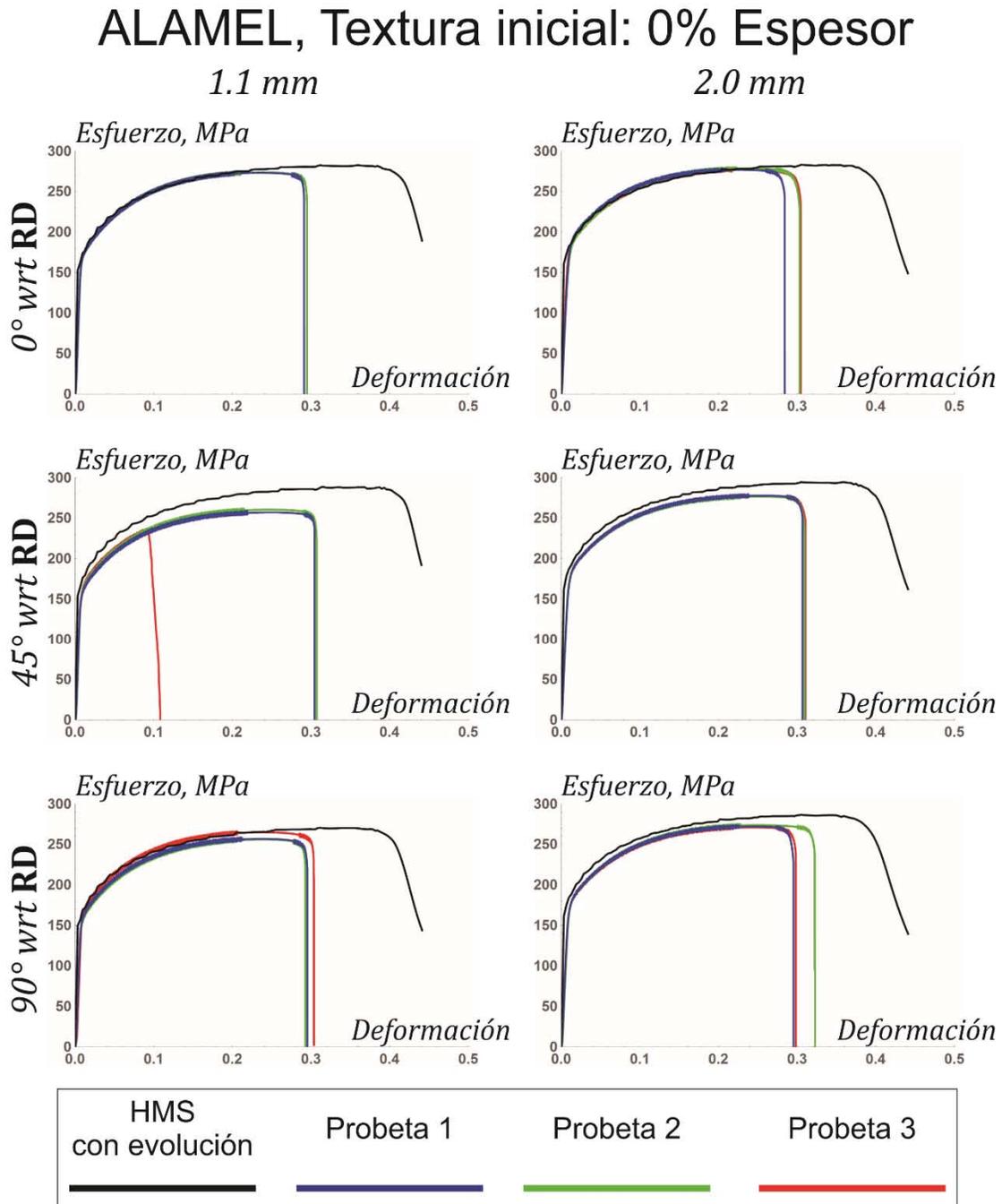


Figura 4.25. Curvas ingenieriles para los esfuerzos y deformaciones. Se observan diferencias notables entre *HMS* y experimento cuando cambiamos la orientación de **RD**, aun cuando se considera la evolución de la textura inicial durante las simulaciones.

Se observa en la figura anterior una desviación de la curva *FEM* con respecto a las mediciones experimentales cuando varía la dirección de laminado (**RD**) que se ensaya; también, se observa una ligera desviación entre el límite de cedencia según el espesor utilizado y la orientación de **RD**. Más adelante se discuten estos resultados.

# 5. Discusión

A continuación, se analizan los resultados mostrados anteriormente para los tres ensayos. El análisis de los resultados en esta sección se va realizando por partes, según el ensayo correspondiente, para sintetizar todos los puntos importantes de esta discusión en la parte de las conclusiones.

## 5.1. Ensayo de Fukui

Antes de empezar la discusión sobre este ensayo, es importante señalar que las Figuras 4.8, 4.9 y 4.10 poseen una escala mayor para hacer énfasis en la desviación entre la predicción *FEM* y las copas experimentales. Sin embargo, considerando los valores de la Tabla 4.3, se observa que la discusión sobre los resultados de este ensayo no se centra en las diferencias entre *HMS* y experimento, sino en la influencia de los factores estudiados sobre los resultados numéricos. El error promedio en la altura de la copa es de 1%, mientras que la diferencia máxima es del 2% para las mejores simulaciones. Para el espesor, el error promedio y diferencia máxima es de 7% y 10% para 1.1 mm; mientras que para 2.0 mm, los errores promedio y la diferencia máxima llegan a 3% y 5%. Es importante señalar que la nula atención al paso inicial de optimización de los modelos *FEM* para minimizar los artefactos numéricos puede ocasionar errores de precisión más grandes que la selección del modelo micromecánico o que la textura empleada. Este aspecto en elemento finito ha recibido poca atención en estudios previos y es especialmente importante en materiales con una textura cuasi-aleatoria donde la intensidad de las direcciones preferenciales es limitada.

Comparar los resultados que se obtuvieron para este ensayo con otros resultados reportados anteriormente no es un proceso directo. En ocasiones, sólo se proporciona una comparación cualitativa visual entre la malla de elementos finitos y la copa experimental. En el estudio de Yoon *et al.* [93,95,97], los perfiles de orejas simulados y experimentales están graficados juntos, lo que permite estimar de manera cualitativa la diferencia máxima entre simulación y experimento. Sus figuras sugieren una desviación *MD* de aproximadamente 8% [93] para la función de cedencia Barlat Yld96 [94] que incluye endurecimiento anisotrópico, del 3-4% en la simulación del perfil de 6 orejas [95] con la función de cedencia Yld 2004-18p [96] y del 2-3% [97] para la función de cedencia Yld2002-2d [98]. Se reporta también una precisión similar en el artículo de Vladimirov *et al.* [99].

El análisis mostrado para este ensayo ya se ha realizado en estudios previos [86,100]. En esta tesis, se utiliza de manera explícita el modelo micromecánico (FC Taylor ó ALAMEL) y la textura del material. La influencia de este último parámetro se incorpora de dos maneras diferentes: primero, de acuerdo al espesor utilizado

(1.1 mm ó 2.0 mm); segundo, considerando el gradiente de la textura a lo largo de la dirección normal **ND** (0%, 25% y 50% del espesor). También, se evalúa la influencia del coeficiente de fricción seca (0.05, 0.15 y 0.25) de manera sistemática en los modelos *FEM*, además de la rigidez o elasticidad en los componentes del ensayo.

Con respecto al modelo micromecánico, las diferencias entre FC Taylor y ALAMEL para las alturas, espesores debajo de las orejas y predicción *FEM* para la fuerza del punzón son tan pequeñas que no tiene sentido comparar el efecto de ambos modelos. Existen comparaciones previas donde ya se estudia el efecto de ambos modelos micromecánicos [73,74,81], y en ellos se encuentra que FC Taylor produce errores significativos en las predicciones modeladas, mientras que ALAMEL minimiza dichos errores; se concluye en estos trabajos de investigación que el error aumenta o disminuye según la trayectoria de deformación empleada. También, ALAMEL produce predicciones ligeramente superiores a las del modelo FC Taylor cuando se predice la evolución de la textura, incluso cuando FC Taylor predice la textura satisfactoriamente. La información proporcionada por las referencias anteriores junto con los resultados *FEM* previos obtenidos en esta tesis hizo que se eligiera el modelo ALAMEL sobre FC Taylor para estudiar otros aspectos de este ensayo.

El uso de la textura sobre la superficie de la lámina (0% del espesor) en lugar de la textura a la mitad de la lámina (50% del espesor) o en lugar de la textura a 25% del espesor produce mejores resultados numéricos, reduciendo el error en las mediciones experimentales para el perfil de orejas y espesores debajo de éstas. Este efecto se observa con mayor intensidad en la lámina de 2.0 mm. Para el proceso de laminado, se sabe que el gradiente de la textura a través del espesor de la lámina se obtiene debido a una deformación cortante cuyo efecto se da en toda la lámina, excepto a la mitad del espesor (plano central neutro). En este plano es donde ocurre idealmente deformación por compresión plana. El tratamiento térmico que recibe la lámina AA6016T4 junto con el proceso de deformación cortante sobre la superficie de ésta explican el gradiente obtenido en la textura. Los resultados obtenidos muestran que la textura sobre la superficie domina la respuesta mecánica global de la lámina, tal y como se obtiene en [101] para la misma aleación AA6016T4. El *software* permite definir una textura diferente en cada capa de elementos finitos a través del espesor de la lámina, pero de acuerdo a los resultados obtenidos, no hay ninguna mejoría si se considera este gradiente de la textura sobre el espesor ya que la mejor predicción de orejas se consigue con la textura de la superficie. Incluir el efecto de la textura a un cuarto y a la mitad del espesor solo restaría precisión a los resultados.

Con respecto al coeficiente de fricción, su efecto se observa en el valor absoluto del perfil de orejas final; es decir, no afecta la forma de éste, únicamente su altura. Para la copa obtenida con la lámina de 1.1 mm, se puede apreciar que el coeficiente de fricción de 0.05 es el que proporciona mejores predicciones *FEM*; mientras que para la lámina de 2.0 mm, el mejor coeficiente es de 0.25. Para la medición del espesor debajo del perfil de orejas, el mejor coeficiente de fricción es de 0.05 en todas las

simulaciones realizadas. Para la predicción de la fuerza *FEM* en el punzón, el mejor coeficiente es de 0.25 y 0.15 para la lámina delgada y gruesa, respectivamente. Por lo tanto, se concluye que el coeficiente de fricción de 0.15 representa una buena aproximación durante el ensayo. En las referencias [94,96,98] se utiliza un coeficiente de fricción mucho más bajo de 0.02 pero solamente estudian el perfil de orejas y el espesor de la copa; no incluyen ninguna referencia de la fuerza en el punzón. La zona de contacto relativamente pequeña entre herramientas y lámina explica la nula influencia de la fricción sobre la forma del perfil de orejas. Como se menciona en el capítulo de tribología en procesos de manufactura, se puede considerar un coeficiente de fricción seca durante el proceso de estampado profundo. Sin embargo, este resultado no debería de utilizarse tan a la ligera en aplicaciones industriales, donde es probable que se necesiten modelos de fricción más avanzados [101].

Los cambios en la textura de las láminas durante el ensayo son claros pero no drásticos en intensidad, aun cuando las deformaciones sobre el disco son bastante elevadas (aproximadamente 47% en la dirección circunferencial y sobre el espesor en la dirección **ND**). Sólo se observan cambios ligeros en la posición e intensidad de los componentes más importantes en las figuras *ODF*, por lo que el lugar geométrico de la fluencia no debería cambiar mucho. Esta es la razón por la que los modelos *FEM* con anisotropía constante producen los mismos resultados numéricos que aquellas simulaciones con evolución de textura (ver las Figuras 3.1 y 4.13). Es importante resaltar que el resultado con evolución de textura en la Figura 4.11 corresponde con la orilla de la copa, donde las deformaciones son máximas. Para otras regiones de la copa, el cambio de la textura por el proceso de deformación será aún menor. Esto quiere decir que la anisotropía inicial se mantiene y necesita considerarse durante el ensayo. Aun cuando ésta sea baja, *HMS* capta la intensidad de los componentes en la textura, logrando todas las mediciones macroscópicas analizadas.

Las diferencias principales entre modelo *FEM* y experimentos son: (a) la sobreestimación de la magnitud en el perfil de orejas y (b) el comportamiento de la fuerza en el punzón. Con respecto al punto (b), la fuerza se subestima al principio del ensayo, terminando con una sobrestimación del valor obtenido. Estas diferencias no son producto de cambiar los componentes del ensayo de rígidos a elásticos, variar la fricción o del contacto entre superficies. La sobreestimación de la fuerza en el punzón ya estaba presente desde antes del esquema de fricción propuesto. Es posible que la transición elasto-plástica al principio del ensayo no se considera de manera correcta con la ley de Swift de endurecimiento por trabajo en frío. Es posible que sea relevante considerar anisotropía elástica en este punto del ensayo. También, la precisión del equipo experimental y su diseño para controlar la fuerza, efectos dinámicos y adquisición de datos, puede ser un factor a mejorar, para alcanzar una precisión mayor con los resultados numéricos *FEM*. Debe mencionarse que el uso de herramientas elásticas provoca una diferencia notable en el perfil de orejas y el espesor de la copa, aun cuando esta diferencia no mejore la predicción *FEM* con respecto a los datos experimentales.

Con respecto a la predicción de textura, es probable que no se requiera una mejora en este aspecto para obtener mejores mediciones experimentales de la copa conformada, debido a que ésta no cambia de manera drástica durante el ensayo. De lo contrario, los efectos de la evolución de la textura serían notables. En lugar de esto, la implementación de una ley de endurecimiento mejor que la que ofrece Swift podría producir mejores modelos de endurecimiento por trabajo en frío en otras direcciones aparte de la dirección **RD**. La ley de Swift provee un modelo con suficiente precisión para un ensayo de tracción a  $0^\circ$  con respecto a **RD**, como se muestra en los resultados del ensayo de tracción. En las simulaciones realizadas en *HMS*, la ley de Swift define un endurecimiento isotrópico, por lo que ésta únicamente influye en el tamaño del lugar geométrico de la fluencia, mientras que la textura es la que influye sobre la forma. Un artículo reciente sugiere el uso de un endurecimiento por trabajo en frío diferencial mesoscópico (es decir, a nivel de granos donde se define el esquema matemático para ALAMEL y FC Taylor) junto con la evolución de la textura, para poder incluir ambos efectos tanto en la forma como en el tamaño del lugar geométrico de la fluencia [102].

## 5.2. Ensayo de deformación cortante simple.

El modelo *FEM* que se propuso para este ensayo requiere de un mayor conocimiento del equipo experimental, especialmente en las mordazas donde se genera un deslizamiento considerable de la probeta hacia ellas. La Figura 4.19 muestra los “surcos” largos que se forman en las probetas experimentales, lo cual no sucede en las mordazas *FEM* como se definieron previamente. De hecho, el desplazamiento *FEM* de la lámina hacia las mordazas disminuye en las orillas donde se forman los “surcos” experimentales, cuando debería de ocurrir lo opuesto. Esto significa que el contacto definido en el modelo *FEM* muestra una rigidez notable; esto ya se observó previamente en el ensayo de Fukui. Una solución por explorar es el uso de mordazas elásticas y analizar si el deslizamiento que ocurre en las orillas de la región ROI es equiparable con lo obtenido en las simulaciones. Es claro que se requiere añadir una mejora al modelo *FEM* considerando el diseño de las mordazas del equipo experimental. La fuerza de agarre que proporcionan las mordazas a la probeta no es equiparable con la presión neumática del equipo; es necesario observar el diseño para determinar la fuerza de agarre experimental en las probetas del ensayo.

Con respecto al resultado *FEM* obtenido en la Figura 4.18, se observa que las condiciones de frontera impuestas en el modelo *FEM* si producen una deformación cortante sobre el plano de la lámina, siendo el centro de ésta la que recibe la mayor deformación cortante, cuyo valor se muestra constante en una región amplia de la zona de estudio. Este resultado es el principal indicio de que se requiere mejorar el agarre de las mordazas en el modelo *FEM*. Aun cuando el orden de magnitud en la deformación cortante *FEM* resulta mucho mayor a lo observado en el análisis *DIC*, la forma cualitativa de su comportamiento es similar en ambos casos.

En lo general, se observa que, tanto en el ensayo como en el modelo, las condiciones de contacto y fricción causan incertidumbre. Por lo tanto, y contrario al ensayo de Fukui, el ensayo de deformación cortante simple en la forma en que se encuentra implementada en equipos comerciales no se puede utilizar para la validación de un modelo como *HMS*. La incertidumbre con respecto a los detalles del experimento no permite refinar el modelo para alcanzar una comparación cuantitativa.

### 5.3. Ensayo de tracción

El parámetro más importante en este modelo *FEM* es la evolución de la textura durante cada simulación numérica. La formación de la estricción ocurre debido a la geometría de la probeta, como se ha señalado en el caso isotrópico y anisotrópico constante. Sin embargo, gracias al parámetro que agrega evolución a la textura, es posible identificar que la estricción ocurre fuera del centro medio en las probetas, tal y como ocurre experimentalmente. Por la forma de la probeta, el centro de ésta deforma ligeramente más que los extremos, aun durante la deformación homogénea. Por lo tanto, el centro endurece un poco más y también la evolución de la textura es más pronunciada. Ahora, considerando que los granos rotan hacia direcciones más “duras”, esta rotación será ligeramente más avanzada en el centro. El balance de los tres efectos (forma de la probeta, endurecimiento y evolución de textura) es lo que determina la posición del cuello. Esta es una observación muy importante, ya que generalmente no se toma en cuenta el efecto de la textura para predecir la posición de la estricción. Asimismo, demuestra la precisión de *HMS* y la importancia de contar con métodos que permitan incluir la evolución de la textura en el lugar geométrico de la fluencia.

Uno de los puntos de discusión en el ensayo de Fukui es proponer el uso de una ley de endurecimiento diferencial anisotrópica en lugar de la ley de Swift isotrópica que utiliza *HMS* en las simulaciones. Este punto se confirma de manera clara en los resultados del ensayo de tracción, tal y como se observa en la Figura 4.25. El endurecimiento por trabajo en frío depende de la orientación de **RD** con respecto a la dirección vertical de carga. La ley de Swift utilizada en *HMS* fue determinada utilizando probetas de tracción con **RD** alineada con la dirección vertical (es decir,  $0^\circ$  con respecto a **RD**), por lo cual se obtiene una representación muy precisa del comportamiento. Sin embargo, existen diferencias pequeñas pero notables en este comportamiento cuando la orientación de **RD** se encuentra a  $45^\circ$  y  $90^\circ$  con respecto a la vertical, fenómeno que no se logra incluir en las simulaciones correspondientes realizadas con *HMS*. De esta forma, es posible incluir que el lugar geométrico de la fluencia varíe en forma y tamaño, según la textura y la ley de endurecimiento. Existen referencias actuales donde el endurecimiento por trabajo en frío diferencial es una línea de investigación importante [113,103].

# 6. Conclusiones

Se demostró con el uso de ensayos, modelos de elementos finitos y un análisis estadístico minucioso la validez de la predicción que realiza el *software HMS* para el ensayo de Fukui; aunque la comparación *HMS* – Ensayo de tracción es únicamente cualitativa, se observa que ésta es adecuada cuando la probeta está a 0° con respecto a **RD** y cuando evoluciona la textura junto con el lugar geométrico de la fluencia durante el ensayo. Para el ensayo de Fukui, las predicciones *FEM* macroscópicas y mesoscópicas muestran una adecuada concordancia con lo observado experimentalmente. Esto es significativo puesto que el ensayo de Fukui es la representación más fidedigna de un proceso de manufactura entre los tres ensayos analizados. Modelar las herramientas de este ensayo como sólidos elásticos no provee una mejora en la predicción de las mediciones experimentales, pero si se observa una influencia notable sobre las predicciones *FEM*, por lo que es significativo un estudio más formal de este efecto; además, el tiempo de cálculo aumenta considerando este parámetro, a un costo aceptable.

En el ensayo de deformación cortante simple, se observa que las condiciones de fricción y contacto introducen una incertidumbre muy grande en los resultados, tanto en el modelo como en el experimento. Esto implica que no se puede utilizar este ensayo en la validación de *HMS*. Si bien este es un resultado negativo, es importante, ya que este ensayo se pretende también utilizar (en otros grupos de trabajo) para calibrar lugares geométricos de la cedencia basados en experimentos y geometrías de probetas específicas. El resultado obtenido en este doctorado indica que esto no es recomendable si se utilizan los equipos disponibles en el mercado actual.

Los datos obtenidos en el ensayo de tracción permiten la interpretación más clara del estado del arte representado por *HMS*. Por un lado, se observa que la estricción de la probeta fuera del centro sólo ocurre cuando se toma en cuenta la evolución de la textura, indicando la importancia del endurecimiento por rotación cristalina. Con esto también se valida una ventaja muy importante de *HMS*, que puede tomar en cuenta esta evolución, en comparación con lugares geométricos de la fluencia basados en mediciones experimentales, que no muestran esta capacidad. Se observó que la curva de tracción en la dirección **RD** se modela con alta precisión, pero la curva para 45° y 90° con respecto a **RD** muestran desviaciones. Esto probablemente se debe a que el endurecimiento es diferente para cada orientación cristalina y, por ende, la ley de Swift no se tiene que aplicar a todo el lugar geométrico de la fluencia sino a cada orientación individual, antes de actualizar el lugar geométrico. Este método se ha incorporado recientemente en *HMS* [100] y se evaluará en estudios futuros. Cabe indicar que la cantidad de datos obtenidos en los ensayos de tracción es tal que su interpretación concreta requerirá de muchos meses más para aprovechar toda la información generada.

En todos los modelos *FEM* se habla de los artefactos numéricos que produce la regla de integración explícita reducida en los elementos finitos y la importancia de su optimización para reducir su efecto sobre los resultados numéricos. Este es un paso importante previo para poder incluir otros aspectos importantes como anisotropía y su evolución. Sin embargo, también se pudieron observar otros artefactos numéricos como la fuerza excesiva en el pisador del ensayo de Fukui, el uso de elementos elásticos para disminuir la rigidez en los contactos y la distorsión excesiva en los elementos finitos de la estricción en la probeta de tracción, donde claramente se requiere de un remallado para disminuir la relación de aspecto hasta 1 para evitar los errores de interpolación inherentes a las funciones de forma. Se demostró que una falta de control en estos artefactos conlleva a un error numérico representativo, el cual en el ensayo de Fukui es incluso equiparable con las mediciones macroscópicas. Aun cuando no fue posible realizar la validación de *HMS* con el ensayo de deformación cortante simple, se observaron resultados prominentes relacionados con la rigidez que se define en los contactos, demostrando que las condiciones de frontera en el modelo *FEM* respectivo si aplican deformación cortante simple sobre las probetas numéricas.

Los modelos micromecánicos FC Taylor y ALAMEL junto con la ley de Swift mostraron ser adecuados para la determinación inicial del lugar geométrico de la fluencia, donde este último muestra resultados ligeramente mejores en las predicciones. Este resultado se espera que sea igual para los otros dos ensayos. Se ha propuesto que una ley de endurecimiento mesoscópica diferencial junto con la evolución de la textura con los modelos micromecánicos podría mejorar la evolución del lugar geométrico de la fluencia.

La textura que domina la respuesta mecánica en todos los ensayos es la que se encuentra en la superficie (0% del espesor), cuyos componentes se desarrollan durante el proceso de laminación previo. Esto ocurre en ambos espesores.

Del análisis estadístico realizado, el uso de la fricción seca sobre el ensayo de Fukui muestra resultados satisfactorios. Sin embargo, es posible que este resultado no se pueda extrapolar a procesos de manufactura más complejos, donde un modelo tribológico más avanzado podría generar mejores resultados. Gracias a todo el análisis satisfactorio de este ensayo, es posible pensar que *HMS* puede reproducir otro tipo de procesos de manufactura en lámina con geometrías más complejas.

Mientras que en el ensayo de Fukui el uso de evolución de textura no muestra mejores resultados, para el ensayo de tracción este parámetro se vuelve fundamental en las predicciones *FEM*. Se espera que este parámetro también sea importante en el ensayo de deformación cortante simple, donde el rango de deformaciones es alto y equiparable con las deformaciones en la estricción de la probeta.

# 7. Publicaciones y estancia de investigación

- *Publicaciones en revistas internacionales*

Ramírez M.A., Shouwenaars R., Eyckens P., Gawad J., Kestens L., Van Bael A., Van Houtte P., 2016. Experimental validation and effect of modelling assumptions in the hierarchical multi-scale simulation of the cup drawing of AA6016T4 sheet. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. ACEPTADO.

- *Publicaciones en congresos internacionales*

Ramírez M.A., Figueroa C.G., Jacobo V.H., Ortíz A., Schouwenaars R., 2012. Mesh optimisation for the reverse modelling of the Vickers test and its application to a tribologically modified surface layer. EngOpt 2012 – 3<sup>rd</sup> International Conference on Engineering Optimization, Rio de Janeiro, Brazil, 01 - 05 July 2012

Shore D., Ramírez M.A., Gawad J., Schouwenaars R., Van Bael A., 2014. Validation of a multi-scale model for shear deformation of an aluminium sheet alloy. Key Engineering Materials Vols. 611-612, pp. 553-561. Trans Tech Publications, Switzerland. [doi:10.4028/www.scientific.net/KEM.611-612.553](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.611-612.553)

- *Estancia de investigación en el extranjero*

El autor de esta tesis agradece la invitación para realizar una estancia de investigación con los tutores Prof. Dr. Marc Seefeldt y Prof. Dr. Ir. Albert Van Bael del MTM de la KU Leuven, Bélgica, la cual fue fundamental para el desarrollo del tema de investigación en esta tesis. El periodo de la estancia fue del 01 de Julio de 2013 al 27 de Septiembre de 2013. Durante la estancia se realizó la mayor parte del trabajo experimental relacionado con el ensayo de deformación cortante simple y la medición experimental de las texturas en las láminas de 1.1 mm y 2.0 mm para la aleación AA6016T4. Asimismo, los agradecimientos se extienden también al PROGRAMA DE APOYO A LOS ESTUDIOS DE POSGRADO (PAEP) 2013 (convocatoria publicada: 5 de Febrero de 2013) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) a través del Programa de Becas Mixtas para Becarios CONACyT Nacionales: en el extranjero, proveniente del fondo Becas de Inversión

en el Conocimiento 2013 – Marzo 2014 (convocatoria: 290749), por su valioso apoyo financiero durante el periodo de la estancia.

También, el autor agradece a la universidad KU Leuven la oportunidad durante la estancia para visitar el laboratorio especializado de la compañía TATA STEEL, el cual proporcionó los resultados experimentales para las copas conformadas del ensayo de Fukui. El propósito de esta visita fue el aprendizaje de las diversas técnicas y ensayos utilizados para la caracterización del comportamiento constitutivo de productos laminados. Además, la visita sirvió como una retroalimentación a los modelos *FEM* del ensayo de Fukui puesto que la información sobre el control de los parámetros experimentales de éste contribuye a que el modelo *FEM* sea más completo y conciso con la realidad. También, se pudo presenciar directamente la visión industrial que la compañía posee sobre los proyectos científicos con los cuales está vinculada. Es decir, aquella parte del proyecto científico que puede generar una mejora en los procesos tecnológicos de la empresa.

# 8. Referencias

- 
- [1] Verlinden B. et al., 2007. 11.2. Rolling, in: Thermo-Mechanical Processing of Metallic Materials, first ed. Pergamon Materials Series Elsevier, UK, pp. 246-262.
- [2] Hosford W., 2007. 7.9. Flat rolling, in: Metal Forming, mechanics and metallurgy, third ed. Cambridge University Press, UK, pp. 93-99.
- [3] [https://en.wikipedia.org/wiki/Rolling\\_\(metalworking\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Rolling_(metalworking)) (Consulta, 2016).
- [4] Groover M., 2010. 19.1. Rolling, in: Fundamentals of Modern Manufacturing, fourth ed. John Wiley&Sons, Inc., pp. 396-403.
- [5] Verlinden B. et al., 2007. Aluminium beverage cans, in: Thermo-Mechanical Processing of Metallic Materials, first ed. Pergamon Materials Series Elsevier, UK, pp. 367-385.
- [6] Vollertsen F. et al., 2004. State of the art in micro forming and investigations in micro deep drawing. Journal of Materials Processing Technology 151, 70-79.
- [7] Vollertsen F. et al., 2006. State of the art in micro forming. International Journal of Machine Tools & Manufacture 46, 1172-1179.
- [8] Saotome Y. et al., 2001. Microdeep drawability of very thin sheet steels. Journal of Material Processing Technology 113, 641-647.
- [9] Razul A., Qin Y., 2013. A Review on Micromanufacturing, Micro-forming and their Key Issues. Procedia Engineering 53, 665-672.
- [10] Saotome Y., Okamoto T., 2001. An in-situ incremental microforming system for three-dimensional shell structures of foil materials. Journal of Material Processing Technology 113, 636-640.
- [11] Fu M., Chan W., 2013. A review on the state-of-the-art microforming technologies. International Journal of Advanced Manufacturing Technology 67, 2411-2437.
- [12] Liu Y. et al., 2004. FE simulation for concurrent design and manufacture of automotive sheet-metal parts. Journal of Materials Processing Technology 150, 145-150.
- [13] Lihui L. et al., 2014. A critical review on special forming processes and associated research for lightweight components based on sheet and tube materials. Manufacturing review 1, 9.
- [14] Reddy R., et al., 2012. A Review on Finite Element Simulations in Metal Forming. International Journal of Modern Engineering Research 2, 2326-2330.
- [15] Miller W. et al., 2000. Recent development in aluminium alloys for the automotive industry. Material Science and Engineering A280, 37-49.
- [16] Engler O. et al., 2007. Through-process simulation of texture and properties during the thermomechanical processing of aluminium sheets. Acta Materialia 55, 5449-5463.
- [17] Emmens W., et al., 2010. The technology of Incremental Sheet Forming – A brief review of the history. Journal of Materials Processing Technology 210, 981-997.
- [18] Hirsch J. et al., 2013. Superior light metals by texture engineering: Optimized aluminum and magnesium alloys for automotive applications. Acta Materialia 61, 818-843.
- [19] Engler O., Hirsch J., 2002. Texture control by thermomechanical processing of AA6xxx Al – Mg – Si sheet alloys for automotive applications – a review. Materials Science and Engineering A336, 249-262.
- [20] Karbasian H., Tekkaya A.E., 2010. A review on hot stamping. Journal of Materials Processing Technology 210, 2103-2118.
- [21] Maeno T. et al., 2014. Improvement in formability by control of temperature in hot stamping of ultra-high strength steel parts. CIRP Annals – Manufacturing Technology 63, 301-304.
- [22] Han X. et al., 2014. Application of hot stamping process by integrating quenching & partitioning heat treatment to improve mechanical properties. Procedia Engineering 81, 1737-1743.
- [23] Li M. et al., 2014. Hot stamping of door impact beam. Procedia Engineering 81, 1786-1791.
- [24] Chang Y. et al., 2014. Investigation of the factors influencing the interfacial heat transfer coefficient in hot stamping. Journal of Materials Processing Technology.

- 
- [25] Zhou J. et al., 2014. Forming defects in aluminum alloy hot stamping of side-door impact beam. *Transactions of Nonferrous Metals Society of China* 24, 3611-3620.
- [26] Blau P., 1992. Glossary of Terms, in: Henry S. (Eds.), *ASM Handbook vol. 18 Friction, Lubrication and Wear Technology*, first ed. ASM International, USA, pp. 20.
- [27] Schmid S., Wilson W., 2001. Tribology in manufacturing, in: Bharat B. (Eds.), *Modern Tribology Handbook vol. 2*, first ed. CRC Press LLC, USA, pp. 1387.
- [28] Schmid S., Wilson W., 2001. Tribology in manufacturing, in: Bharat B. (Eds.), *Modern Tribology Handbook vol. 2*, first ed. CRC Press LLC, USA, pp. 1407.
- [29] Schmid S., Wilson W., 2001. Tribology in manufacturing, in: Bharat B. (Eds.), *Modern Tribology Handbook vol. 2*, first ed. CRC Press LLC, USA, pp. 1408.
- [30] Kataoka S. et al., 2004. Tribology of dry deep-drawing of various metal sheets with use of ceramics tools. *Surface and Coatings Technology* 177-178, 582-590.
- [31] Molotnikov A. et al., 2012. Size effects in micro cup drawing. *Materials Science and Engineering A* 550, 312-319.
- [32] Zhenyu H., 2011. Realisation and application of size dependent FEM-simulation for deep drawing of rectangular work pieces. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology* 4, 90-95.
- [33] ASTM, 2015. *Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials*. American Society for Testing and Materials International.
- [34] Vegter H. et al., 2009. Development of simple shear test for the measurement of work hardening. *Journal of Materials Processing Technology* 209, 4248-4254.
- [35] Yin Q. et al., 2012. A cyclic twin bridge shear test for the identification of kinematic hardening parameters. *International Journal of Mechanical Sciences* 59, 31-43.
- [36] Yin Q. et al., 2014. An experimental and numerical investigation of different shear test configurations for sheet metal characterization. *International Journal of Solid and Structures* 51, 1066-1074.
- [37] Lecompte D. et al., 2006. Quality assessment of speckle patterns for digital image correlation. *Optics and Lasers in Engineering* 44, 1132-1145.
- [38] Sutton M. et al., 2009. *Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements, Basic Concepts, Theory and Applications*, first ed. Springer Science+Business Media, LLC.
- [39] Pan B. et al., 2009. Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement: a review. *Measurement Science and Technology* 20, 062001 (17 pp).
- [40] Pan B., 2011. Recent progress in Digital Image Correlation. *Experimental Mechanics* 51, 1223-1235.
- [41] Moerman K. et al., 2009. Digital image correlation and finite element modeling as a method to determine mechanical properties of human soft tissue *in vivo*. *Journal of Biomechanics* 42, 1150-1153.
- [42] Wang B. et al., 2015. Some practical considerations in finite element-based digital image correlation. *Optics and Lasers in Engineering* 73, 22-32.
- [43] ISO 11531, 2015. *Metallic materials -- Sheet and strip -- Earing Test*. International Organization for Standardization.
- [44] DIN , 2015. *Aluminium and Aluminium alloys – Test Methods – Earing test for sheet and strip*. Deutsches Institut für Normung.
- [45] JIS, 2010. *Method Of Conical Cup Test*. 日本工業規格 (Japanese Industrial Standards).
- [46] GB/T 15825, 2008. *Sheet metal formability and test methods*. 中國標準 (Chinese Standards).
- [47] <http://www.erichsen.de/ensayo-de-chapa/ensayo-mediante-embuticion>
- [48] Hill R., 1998. Miscellaneous Topics, in: *The Mathematical Theory of Plasticity*, first ed. Oxford Classics series, USA, pp. 282-287.
- [49] Verlinden B. et al., 2007. Deep Drawing, in: *Thermo-Mechanical Processing of Metallic Materials*, first ed. Pergamon Materials Series Elsevier, UK, pp. 306.
- [50] Hosford W., Caddell R., 2007. Cupping, redrawing and ironing, in: *Metal Forming, Mechanics and Metallurgy*, third ed. Cambridge University Press, UK, pp. 220-222.
- [51] Schouwenaars et al., 1996. Analysis and prediction of the earing behaviour of low carbon steel sheet. *Textures and Microstructures* 26-27, 553-570.
- [52] Van Houtte P. et al., 1993. In *Aluminum Alloys For Packaging*, edited by J. G. Morris, E. J. Westerman and P. L. Morris, pp. 261-273. Warrendale, PA: TMS.

- 
- [53] Chakrabarty, J., 2006. Foundations of plasticity, in: Theory of Plasticity, third ed. Elsevier Butterworth-Heinemann, UK, pp. 59.
- [54] Hill, R., 1998. Foundations of the theory, in: The Mathematical Theory of Plasticity, first ed. Oxford Classics series, USA, pp. 14.
- [55] Ramírez M., 2011. Fundamentos de la plasticidad continua, in: Modelado del proceso de estampado profundo mediante un código de elemento finito para deformación plástica anisotrópica. Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales, UNAM, pp. 16.
- [56] Steurer W., 1996. Crystal Structure of the Metallic Elements, in: Cahn R., Haseen P. (Eds.), Physical Metallurgy vol. 1, fourth ed. Elsevier Science B.V., The Netherlands, pp. 12, 13.
- [57] Dieter G., 1986. Plastic Deformation of Single Crystals, in: Mechanical Metallurgy, SI Metric Edition Materials Science&Metallurgy McGraw Hill, UK, pp. 105, 107.
- [58] Argon S., 1996. Mechanical Properties of single-phase crystalline media: deformation at low temperature, in: Cahn R., Haseen P. (Eds.), Physical Metallurgy vol. 3, fourth ed. Elsevier Science B.V., The Netherlands, pp. 1908.
- [59] Taylor G.I., 1938. Plastic strain in metals. J. Inst. Met. 62, 307-324.
- [60] Hirth J., Lothe J., 1982. Slip Systems of Perfect Dislocations, in: Theory of Dislocations, second ed. John Wiley & Sons Inc., USA, pp. 295-298.
- [61] Dieter G., 1986. Plastic Deformation of Single Crystals, in: Mechanical Metallurgy, SI Metric Edition Materials Science&Metallurgy McGraw Hill, UK, pp. 117-119.
- [62] Schouwenaars et al., 2010. A probabilistic derivation of the effect of grain size on the dislocation free path in a deforming polycrystal. Scripta Materialia 62, 590-593.
- [63] Schouwenaars et al., 2010. The stress field of an array of parallel dislocation pile-ups: Implications for grain boundary hardening and excess dislocation distribution. Acta Materialia 58, 4344-4353.
- [64] Verlinden B. et al., 2007. Modelling, in: Thermo-Mechanical Processing of Metallic Materials, first ed. Pergamon Materials Series Elsevier, UK, pp. 207.
- [65] Randle V., Engler O., 2010. Application of Diffraction to Texture Analysis, in: Introduction to Texture Analysis: Macrotecture, Microtexture and Orientation Mapping, second ed. Taylor and Francis Group CRC Press, USA, pp. 55.
- [66] [https://www.mtm.kuleuven.be/equipment/d500\\_goniometer/d500\\_goniometer](https://www.mtm.kuleuven.be/equipment/d500_goniometer/d500_goniometer) (Consulta, 2016).
- [67] Young C.T., Lytton J.L., 1972. Computer Generation and Identification of Kikuchi Projections. Journal of Applied Physics 43, 1408-1417.
- [68] Bunge H.-J., 1982. Expansion of Orientation Distribution Functions in Series of Generalized Spherical Harmonics, in: Texture Analysis in Materials Science, Mathematical Methods, first English ed. Butterworth & Co (Publishers), pp. 47.
- [69] Van Houtte P., 1988. Solution of the Taylor and the Bishop-Hill theory by linear programming, in: A comprehensive mathematical formulation of an extended Taylor-Bishop-Hill model featuring relaxed constraints, the Renouard-Wintenberger theory and a strain sensitivity model. Textures and Microstructures vol. 8 & 9, pp. 326-350.
- [70] Kocks U.F., Chandra H., 1982. Slip geometry in partially constrained deformation. Acta Metallurgica 30, 695-709.
- [71] Van Houtte P., 1982. On the equivalence of the relaxed Taylor theory and the Bishop-Hill theory for partially constrained plastic deformation of crystals. Materials Science and Engineering 55, 69-77.
- [72] Van Houtte P. et al., 2002. Comparison of two grain interaction models for polycrystal plasticity and deformation texture prediction. International Journal of Plasticity 18, 359-377.
- [73] Van Houtte P. et al., 2005. Deformation texture prediction: from the Taylor model to the advanced Lamel model. International Journal of Plasticity 21, 589-624.
- [74] Van Houtte P. et al., 1999. Quantitative prediction of cold rolling textures in low-carbon steel by means of the LAMEL model. Textures and Microstructures 31, 109-149.
- [75] Roters F. et al., 2010. Overview of constitutive laws, kinematics, homogenization and multiscale methods inc crystal plasticity finite-element modeling: Theory, experiments, applications. Acta Materialia 58, 1152-1211.

- 
- [76] Raabe D. et al., 2004. Continuum Scale Simulation of Engineering Materials, Fundamentals – Microstructures – Process Applications. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, Germany.
- [77] Tomé C.N., Lebensohn R.A., 2009. Manual for Code Visco-Plastic Self Consistent (VPSC). LA-CC-99-72, Department of Energy (DOE), Los Álamos National Laboratory, USA.
- [78] Lebensohn R.A. et al., 2004. A selfconsistent formulation for the prediction of the anisotropic behavior of viscoplastic polycrystals with voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 52, 249-278.
- [79] Segurado J. et al., 2012. Multiscale modeling of plasticity based on embedding the viscoplastic self-consistent formulation in implicit finite elements. *International Journal of Plasticity* 28, 124-140.
- [80] Xie Q. et al., 2014. A new cluster-type model for the simulation of textures of polycrystalline metals. *Acta Materialia* 69, 175-186.
- [81] Van Houtte P., 1994. Application of Plastic Potential to Strain Rate Sensitivity and Insensitive Anisotropic Materials. *International Journal of Plasticity* 10, 719-748.
- [82] Barlat et al., 2005. Linear transformation-based anisotropic yield functions. *International Journal of Plasticity* 21, 1009-1039.
- [83] Barlat et al., 2007. On linear transformations of stress tensors for the description of plastic anisotropy. *International Journal of Plasticity* 23, 876-896.
- [84] Van Houtte P. et al., 2004. Convex plastic potentials of fourth and sixth rank for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity* 20, 1505-1524.
- [85] Van Houtte P. et al., 2004. The Facet method: A hierarchical multilevel modelling scheme for anisotropic convex plastic potentials. *International Journal of Plasticity* 25, 332-360.
- [86] Gawad J. et al., 2013. Hierarchical multi-scale modeling of texture induced plastic anisotropy in sheet forming. *Computational Materials Science* 66, 65-83.
- [87] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., 2000. *The Finite Element Method Volume 1: The Basis*, fifth ed. Butterworth-Heinemann, Woburn, Massachusetts, USA.
- [88] Belytschko T., Fish J., 2007. *A First Course in Finite Elements*. John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, PO19 8SQ, England.
- [89] Ramírez M., 2011. Introducción al análisis dinámico explícito, in: *Modelado del proceso de estampado profundo mediante un código de elemento finito para deformación plástica anisotrópica*. Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales, UNAM, pp. 66-73.
- [90] Logan L., 2002. Practical Considerations in Modeling; Interpreting Results; and Examples of Plane Stress/Strain Analysis, in: *A first course in the finite element method*. © 2002 Wadsworth Group, Thomson. Third edition, page 308.
- [91] Simulia Dassault Systèmes, 2015. 1.4. Deformation, strain and strain rates, in: *Abaqus Theory Guide*.
- [92] Antoniou A., Blaber J., 2016. 5. Obtaining full field strains, in *DIC Algorithms*. Georgia Institute of Technology (<http://www.ncorr.com/index.php/dic-algorithms#5>).
- [93] Yoon J.W. et al., 2000. Earing predictions based on asymmetric nonquadratic yield function. *International Journal of Plasticity* 16, 1075-1104.
- [94] Barlat F. et al., 1997. Yield function development for aluminum alloy sheets. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 45, 1727-1763.
- [95] Yoon et al., 2006. Prediction of six or eight ears in a drawn cup based on a new anisotropic yield function. *International Journal of Plasticity* 22, 174-193.
- [96] Barlat F. et al., 2005. Linear transformation-based anisotropic yield functions. *International Journal of Plasticity* 21, 1009-1039.
- [97] Yoon J.W. et al., 2004. Plane stress yield function for aluminum alloy sheets – part 2: FE-formulation and its application. *International Journal of Plasticity* 20, 1075-1104.
- [98] Barlat F. et al., 2003. Plane stress yield function for aluminum alloy sheets – part 1: theory. *International Journal of Plasticity* 19, 1297-1319.
- [99] Vladimirov I.N. et al., 2010. Anisotropic finite elastoplasticity with nonlinear kinematic and isotropic hardening and application to sheet metal forming. *International Journal of Plasticity* 26, 659-687.
- [100] Gawad, J., Banabic, D., Van Bael, A., Comsa, D. S., Gologanu, M., Eyckens, P., Van Houtte, P., Roose, D. An evolving plane stress yield criterion based on crystal plasticity virtual experiments. *International Journal of Plasticity*. 75 (2015) 141-169.

- 
- [101] Karupannasamy, D. K., Hol, J., de Rooij, M. B., Meinders, T., Schipper, D. J. Modelling mixed lubrication for deep drawing processes. *Wear*, 294, (2012) 296-304.
- [102] Eyckens, P., Mulder, H., Gawad, J., Vegter, H., Roose, D., van den Boogaard, T., Van Bael, A., Van Houtte, P. The prediction of differential hardening behaviour of steels by multi-scale crystal plasticity modelling. *International Journal of Plasticity* 73, 119-141.
- [103] Yoon J., Cazacu O., 2010. Earing predictions for strongly textured aluminum sheets. *International Journal of Mechanical Sciences* 52, 1563-1578.