



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA CIVIL – HIDRÁULICA**

**CARACTERÍSTICAS HIDRODINÁMICAS EFECTIVAS DEL SUELO EN EL RIEGO POR GRAVEDAD**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**DOCTOR EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**  
**M.C. FELIPE ZATARÁIN MENDOZA**

**TUTOR PRINCIPAL**  
**DR. CARLOS FUENTES RUIZ, FACULTAD DE INGENIERÍA**

**COMITÉ TUTOR**  
**DR. LUIS RENDÓN PIMENTEL, HIDROSINERGIA**  
**DR. HEBER. E. SAUCEDO ROJAS, FACULTAD DE INGENIERÍA**  
**DR. SERGE L. TAMARI WAGNER, IMTA**  
**DR. NAHÚN H. GARCÍA VILLANUEVA, IMTA**

**CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE 2016**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Nahún Hamed García Villanueva

Secretario: Dr. Heber Eleazar Saucedo Rojas

1er. Vocal: Dr. Carlos Fuentes Ruiz

2do. Vocal: Dr. Serge Léonard Tamari Wagner

3er. Vocal: Dr. Luis Rendón Pimentel

Universidad Nacional Autónoma de México, campus Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Jiutepec, Morelos, México.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Carlos Fuentes Ruiz

-----  
**FIRMA**

## **DEDICATORIA**

A la memoria de mis padres.

A Alejandra, mi alegría.

## **AGRADECIMIENTOS**

Al doctor Carlos Fuentes Ruiz, quien con su espíritu científico persistente me acompañó en este largo proceso.

Al doctor Luis Rendón Pimentel, quien para mí ha sido un referente de profesionalismo.

Al doctor Heber E. Saucedo Rojas, por su larga amistad, escrúpulo científico y apoyo.

Al doctor Serge L. Tamari Wagner, por su amistad y enseñanzas sobre el rigor en la adquisición de datos experimentales.

Al doctor Nahún H. García Villanueva, por su decidido apoyo.

A mis hermanos, siempre presentes. A Natalie, por estar. A mis amigos, Florentino y Luis Fernando, por la amistad permanente.

# CARACTERÍSTICAS HIDRODINÁMICAS EFECTIVAS DEL SUELO EN EL RIEGO POR GRAVEDAD

## Contenido

INTRODUCCIÓN GENERAL.....	1
CAPÍTULO 1 ECUACIONES Y PARÁMETROS DEL FLUJO DE AGUA EN EL SUELO	4
1.1 Introducción .....	4
1.2 Ecuación de Richards .....	4
1.3 Formas funcionales de las propiedades hidrodinámicas.....	6
1.4 Parámetros de las propiedades hidrodinámicas .....	10
1.5 Conclusiones .....	12
CAPÍTULO 2 MÉTODOS INDIRECTOS DE CARACTERIZACIÓN HIDRODINÁMICA DE SUELOS.....	13
2.1 Introducción .....	13
2.2 Los métodos indirectos de caracterización hidrodinámica .....	13
2.3 Parámetros de forma .....	14
2.4 La base de datos GRIZZLY .....	19
2.5 Aplicación.....	20
2.6 Parámetros de estructura.....	22
2.6 Conclusiones .....	24
CAPÍTULO 3 MÉTODOS INVERSOS DE CARACTERIZACIÓN HIDRODINÁMICA DE SUELOS.....	25
3.1 Introducción .....	25
3.2 Breve descripción del desarrollo histórico de los métodos inversos .....	25
3.3 Método inverso con el permeámetro de disco .....	28
3.3.1 Descripción de permeámetro.....	28
3.3.2 Análisis tradicional de los datos del permeámetro de disco .....	29
3.3.3 Antecedentes del problema inverso .....	32
3.3.4 Formulación del problema inverso.....	33
3.4 Aplicación.....	42
3.5 Conclusiones .....	49
CAPÍTULO 4 LAS PROPIEDADES HIDRODINÁMICAS EFECTIVAS DEL SUELO EN EL RIEGO POR MELGAS .....	50
4.1 Introducción .....	50
4.2 Avance-infiltración en el riego por melgas .....	51

4.2.1 Avance .....	51
4.2.2 Infiltración .....	54
4.3 Escalamiento.....	55
4.3.1 Escalamiento de Miller y Miller .....	55
4.3.2 Aplicación en mesa de drenaje.....	57
4.3.3 Aplicación melga Montecillo .....	60
4.4 Análisis de los factores de escala .....	66
4.4.1 La distribución probabilística de los factores de escala.....	66
4.4.2 Propiedades medias de los parámetros .....	67
4.4.3 La media estocástica de la infiltración .....	68
4.4.4 La estructura espacial de la infiltración.....	69
4.4.5 Generación espacial correlacionada .....	71
4.4.6 Generación sintética.....	74
4.5 Propiedades hidrodinámicas efectivas en la fase de avance.....	75
4.5.1 Condiciones para establecer la existencia de las propiedades efectivas .....	77
4.5.2 Análisis y modelación de la fase de avance .....	78
4.5.3 Condición general para representar las propiedades hidrodinámicas por propiedades efectivas.....	83
CONCLUSIONES GENERALES .....	97
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	99

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Ajuste de la curva granulométrica en los 660 suelos de la base de datos GRIZZLY. ....	20
Figura 2.2 Ajuste de la curva de retención en los 660 suelos de la base de datos GRIZZLY. ....	21
Figura 2.3 Predicción de la curva de retención a partir de la curva granulométrica en 660 suelos de la base de datos GRIZZLY. ....	21
Figura 3.1 Esquema del infiltrómetro de disco. ....	29
Figura 3.2 Vista de la mesa de drenaje en el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. ....	42
Figura 3.3 Determinación de la densidad aparente. ....	43
Figura 3.4 Ajuste de la curva granulométrica del suelo. ....	44
Figura 3.5 Vista de una de las veinte pruebas de infiltración. ....	46
Figura 3.6 Lámina infiltrada acumulada medida en las veinte pruebas de infiltración. ...	47
Figura 4.1 Infiltración acumulada experimental escalada y modelación con la ecuación de Richards pseudo-tridimensional con parámetros del suelo de referencia. ....	60
Figura 4.2 Lámina infiltrada acumulada en función del tiempo, observada en 21 puntos separados cada 5 m a lo largo de una melga de 5 m de ancho y 100 m de largo en Montecillo, México. ....	61
Figura 4.3 Lámina infiltrada acumulada en función del tiempo: datos experimentales escalados y función de Green y Ampt con parámetros del suelo de referencia en la melga Montecillo. ....	65
Figura 4.4 Probabilidad acumulada del logaritmo de los factores de escala en la melga Montecillo. ....	67
Figura 4.5 Semivariograma del logaritmo de los factores de escala. ....	71
Figura 4.6 Semivariogramas del logaritmo de los factores de escala teórico y de los campos correlacionados. ....	73
Figura 4.7 Distribución espacial de los factores de escala (Monte Carlo). ....	74
Figura 4.8 Distribución espacial de los factores de escala (krigeado). ....	74
Figura 4.9 Distribución espacial de los factores de escala (método Monte Carlo). ....	75
Figura 4.10 Distribución espacial de los factores de escala generados con el método de Shinozuka y Jan. ....	75
Figura 4.11 Datos experimentales y modelación de la fase de avance del riego en la melga Montecillo, gasto unitario $q_0 = 3.2 \text{ ls}^{-1}$ con valores del suelo de referencia. ....	79
Figura 4.12 Datos experimentales y modelación de la fase de avance del riego en la melga Montecillo, gasto unitario $q_0 = 3.2 \text{ ls}^{-1}$ (calibración). ....	80
Figura 4.13 Datos experimentales y modelación de la fase de avance del riego en la melga Montecillo, gasto unitario $q_0 = 2.4 \text{ ls}^{-1}$ (predicción). ....	82
Figura 4.14 Probabilidad acumulada del logaritmo de los factores de escala en la melga Montecillo y en los campos correlacionados generados. ....	83
Figura 4.15 Semivariogramas teórico y de los campos correlacionados del logaritmo de los factores de escala. ....	84
Figura 4.16. Distribución espacial de los cinco campos de factores de escala generados. ....	84



Figura 4.17 Avance e infiltración en la melga Montecillo con campos correlacionados de la conductividad hidráulica a través del logaritmo de los factores de escala. ....	85
Figura 4.18 Curva de avance y lámina infiltrada en una melga con dos combinaciones de suelos: 1) arcilloso-arenoso, y 2) arenoso-arcilloso.....	87
Figura 4.19 Curva de avance y lámina infiltrada en una melga con veinte tipos de suelos. ....	88
Figura 4.20 Curva de avance y lámina infiltrada en una melga con cincuenta suelos...	89
Figura 4.21 Curva de avance y lámina infiltrada en una melga con cien suelos. ....	90
Figura 4.22 Tiempo total de avance de riego obtenido a partir de la modelación y generación sintética de suelos. ....	91
Figura 4.23 Curva de avance y lámina infiltrada con un gasto de $q_0 = 0.0032 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$ . .....	92
Figura 4.24 Curva de avance y lámina infiltrada con un gasto de $q_0 = 0.0025 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$ . .....	93
Figura 4.25 Curva de avance y lámina infiltrada con un gasto de $q_0 = 0.0015 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$ . .....	94
Figura 4.26 Curva de avance y lámina infiltrada con un gasto de $q_0 = 0.0010 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$ . .....	95
Figura 4.27 Lámina infiltrada para dos campos correlacionados del logaritmo de los factores de escala con un gasto menor al mínimo. ....	96

## INDICE DE CUADROS

Cuadro 3.1 Densidad aparente, porosidad y parámetros $s$ y $m$ en los veinte sitios. ....	44
Cuadro 3.2 Humedad inicial en los veinte sitios. ....	45
Cuadro 3.3 Parámetros $\{\psi_d, K_s\}$ de la modelación inversa individual en los veinte sitios. .....	47
Cuadro 4.1 Escalamiento de Miller y Miller y variables de flujo. ....	57
Cuadro 4.2 Parámetro $\{K_s\}$ y factores de escala del análisis conjunto. ....	59
Cuadro 4.3 Valores de la conductividad hidráulica a saturación y los factores de escala en la melga Montecillo ( $K_{s*} = 2.33$ cm/h). ....	66

## **RESUMEN**

La caracterización apropiada de las propiedades hidrodinámicas del suelo es esencial en el desempeño de los modelos de simulación de la transferencia de agua. El objetivo de esta tesis es analizar de forma general los métodos de determinación de dichas propiedades y de manera particular la caracterización realizada en el contexto del riego por gravedad. Para modelar y diseñar el riego por gravedad es común hacer mediciones durante un evento de riego y deducir valores promedio o efectivos de las propiedades hidrodinámicas de los suelos. Pero, la variabilidad espacial de los suelos puede ser de tal magnitud que la representatividad de estos valores podría cuestionarse. Se parte de la hipótesis de que el uso de valores efectivos de las propiedades hidrodinámicas del suelo en el riego por gravedad es válido en ciertas condiciones y se plantea el objetivo de analizarlas. La variabilidad espacial se representa a través de factores de escala calculados con la conductividad hidráulica saturada calculada a través de pruebas de infiltración. La influencia de la variabilidad espacial en el riego superficial se estudia con información experimental y a través de simulación Montecarlo, interpolación por krigeado, simulación estocástica y la generación de campos correlacionados con un método fundamentado en el análisis espectral. El estudio se complementa con la modelación de la fase de avance con valores de las propiedades hidrodinámicas del suelo generados aleatoriamente a partir de su representación estadística. A pesar de que los campos correlacionados presentan una variabilidad espacial importante, como se refleja en el perfil de las láminas infiltradas, el avance en las simulaciones muestra prácticamente el mismo comportamiento. Se concluye que es válido utilizar métodos inversos para determinar valores medios de las propiedades hidrodinámicas en el riego por gravedad cuando la distribución de probabilidad de las mismas es única en el espacio.

## **ABSTRACT**

Appropriate characterization of soil hydraulic properties is essential to the performance of water flow models. The purpose of this thesis is the analysis of the characterization methods in general and in relation with the surface irrigation. Simulation and design of surface irrigation is frequently made by measuring data during an irrigation event and deducing average or effective soil hydraulic properties. However, the accurate of this values can't be assured because the soil spatial variability. We assume that using effective hydraulic properties in surface irrigation is valid under certain conditions. Spatial variability of soil hydraulic properties is represented by scale factors calculated with the saturated hydraulic conductivity determined with infiltration tests. The influence of spatial variability on the advance front in surface irrigation is studied with experimental information and Montecarlo's simulation, kriging interpolation, stochastic simulation and correlated fields obtained with spectral methods. Also, surface irrigation modeling is made with random soil hydraulic properties generated from their statistical representation. Despite the correlated fields spatial variability reflected on the infiltration depth variations along the field, the advanced on surface irrigation has a similar shape in all the correlated fields. We conclude that the using soil effective hydraulic properties is valid when their probability distribution is unique in space.

## INTRODUCCIÓN GENERAL

La predicción de la transferencia de agua en el suelo es importante en las técnicas de riego y drenaje con las que se regula el régimen de humedad de los suelos agrícolas. En los procesos hidrológicos y de contaminación del agua subterránea el estudio del movimiento del agua en los suelos parcialmente saturados juega también un papel preponderante.

La modelación mecanicista de la transferencia de agua en los suelos parcialmente saturados está basada en la ecuación de Richards (1931). La solución de esta ecuación a través de métodos analíticos o numéricos requiere de un número de parámetros que depende del grado de sofisticación del modelo y en particular de las formas algebraicas seleccionadas para describir las características hidrodinámicas del suelo que están constituidas por las relaciones entre el potencial de presión del agua en el suelo con el contenido de humedad y la conductividad hidráulica del mismo. La identificación de los parámetros que los modelos requieren es una de las principales limitantes para el uso de los mismos.

Las propiedades hidrodinámicas de los suelos son de los datos de entrada más importantes en los modelos de simulación del riego por gravedad, que en la formulación mecanicista más completa se realiza con las ecuaciones de Barré de Saint Venant, para simular el flujo superficial, y la ecuación de Richards, para la infiltración. Los algoritmos de diseño del riego por gravedad dependen también de la caracterización hidrodinámica adecuada del suelo. Strelkoff *et al.* (2009) señalaron que probablemente el factor más importante en el proceso del riego superficial y uno de los más difíciles de cuantificar es la infiltración, por lo que su caracterización apropiada es fundamental en el desempeño de los sistemas de riego. En principio, es posible resolver la ecuación de Richards, sin embargo, en suelos naturales, las condiciones superficiales de heterogeneidad son un problema importante. Tradicionalmente la infiltración se mide en puntos discretos con infiltrómetro de doble cilindro o con instrumentos como el infiltrómetro de disco (Angulo-Jaramillo *et al.*, 2000). En el mejor caso, las mediciones así obtenidas son representativas de un solo punto. La variabilidad espacial puede ser de tal magnitud que los valores promedio adecuados para la simulación no pueden deducirse con facilidad. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones el interés no es la distribución detallada del potencial de presión y de la humedad sino los promedios espaciales (Mohanty y Shu, 2007).

Para estimar los valores probabilistas de los parámetros se han implementado algunas técnicas para instrumentar pruebas de riego. Las técnicas pueden ser simples, como introducir una barra de metal para determinar la profundidad de penetración del agua después del riego, o más elaboradas, como medir los perfiles superficiales del agua durante el riego. Las determinaciones indirectas, a través de la simulación de las fases de avance y recesión son populares porque los datos son relativamente fáciles de obtener y los resultados representan promedios de campo en algún sentido. En la práctica, es una tendencia actual hacer las mediciones durante un evento de riego y deducir datos promedio o efectivos de la infiltración y rugosidad (Strelkoff *et al.*, 2009).

De acuerdo con Jury *et al.* (2011), una propiedad efectiva es una relación funcional entre cantidades promediadas sobre un volumen que dependen de la escala y del modelo. La conductividad hidráulica no saturada es un ejemplo de una propiedad efectiva, definida como el cociente entre el flujo y el gradiente de potencial hidráulico, medidos a la misma escala. Ésta es monótona y única cuando el volumen de medición se elige en una región con material poroso homogéneo. Pero, conforme aumenta la escala de medición y el material es más heterogéneo, la posibilidad de una representación única adecuada de la función disminuye. Propiedades como la conductividad hidráulica saturada varían en varios órdenes de magnitud en un campo típico (Sharma *et al.*, 1980).

Para incorporar los efectos de la variabilidad espacial de las propiedades hidrodinámicas pueden identificarse dos caminos: i) identificar los valores de todas las propiedades relevantes del suelo e incorporarlos en un modelo numérico tridimensional determinístico para simular las distribuciones detalladas del potencial de presión y del contenido de humedad y ii) usar propiedades efectivas ya sea desde un punto de vista estocástico o a través de la estimación inversa con experimentación hidrodinámica. El primero de los enfoques tiene la desventaja de requerir una gran cantidad de datos para caracterizar un medio poroso heterogéneo, lo cual puede hacer prohibitiva su instrumentación.

En el presente trabajo de investigación se propone analizar de forma general los métodos de caracterización hidrodinámica de los suelos y en particular la caracterización realizada en el contexto del riego por gravedad.

En el capítulo uno se muestran las ecuaciones diferenciales que se utilizan para modelar el proceso de transferencia de agua en el suelo y se describen de manera detallada las características hidrodinámicas de los suelos. Considerando que la adecuada caracterización hidrodinámica de los suelos depende en buena medida de la definición clara de las relaciones funcionales, parámetros y escalas de medición, en este capítulo se plantea como objetivo la discusión de estos tres elementos. Para tal efecto, se analizan las formas algebraicas de las propiedades hidrodinámicas de los suelos.

En el capítulo dos se analizan los métodos indirectos de estimación de las propiedades hidrodinámicas de los suelos. En particular, se realiza la estimación de los parámetros de forma de la característica de humedad a partir de la curva granulométrica del suelo aplicando las relaciones desarrolladas en el marco de la geometría fractal en la conceptualización de las escalas de Laplace y Stokes de Fuentes (1992). La verificación de las relaciones propuestas se realiza a través de la comparación de las pendientes medias de las curvas granulométrica y de retención en 660 suelos de la base de datos GRIZZLY (Haverkamp *et al.*, 1998) utilizando la ecuación de van Genuchten (1980). Los resultados indican que la metodología propuesta puede ser utilizada con fines de predicción de los parámetros de forma. Los parámetros de estructura de la curva de retención deben ser obtenidos a partir de otras consideraciones.

En el capítulo tres se analiza la modelación inversa como herramienta para la estimación de los parámetros. El capítulo inicia con una breve descripción del desarrollo histórico de los métodos inversos para la determinación de las propiedades hidrodinámicas de los suelos. De esta revisión se derivan dos importantes conclusiones: i) En condiciones de

laboratorio se han propuesto y mejorado algunas metodologías que han producido algunos buenos resultados, sin embargo, se enfatiza el hecho de que en la mayoría de los casos los parámetros determinados en laboratorio son inconsistentes para las condiciones de campo; y ii) Las funciones objetivo utilizadas en los métodos inversos requieren información complementaria a las tradicionalmente medidas en una prueba de infiltración convencional, por ejemplo. Posteriormente, se muestra el planteamiento general del problema inverso para la caracterización hidrodinámica de suelos y finalmente se muestra un estudio experimental.

En el capítulo cuatro se discute el tema la variabilidad espacial de las propiedades hidrodinámicas de los suelos. En particular se discute la conveniencia del uso de propiedades hidrodinámicas efectivas. La estimación de propiedades efectivas puede realizarse por i) promedios estadísticos simples, cuya validez está restringida por la no linealidad de la ecuación de flujo; ii) la aproximación estocástica, que evalúa la presencia y magnitud de los errores en la modelación; y iii) la modelación inversa que se enfrenta a problemas de unicidad de la solución y correlación entre parámetros. El análisis se realiza sobre las condiciones para que la posición del frente de avance en el riego por melgas pueda ser descrito por propiedades hidrodinámicas efectivas del suelo. La utilización de las propiedades hidrodinámicas efectivas del suelo se examina a través de la generación sintética de suelos. Para analizar el problema de la variabilidad espacial de las propiedades hidrodinámicas utiliza la teoría de similitud en medios porosos con el objeto de realizar el escalamiento de la infiltración.

Los objetivos que se plantean son los siguientes:

- 1 Revisar los fundamentos de la caracterización hidrodinámica de suelos para predecir la transferencia de agua en los mismos.
- 2 Analizar métodos indirectos e inversos de caracterización hidrodinámica de suelos.
- 3 Analizar el problema de la variabilidad espacial de las propiedades hidrodinámicas de los suelos y en particular la representación de las mismas por propiedades únicas o efectivas para modelar fase de avance en el riego por gravedad.

# CAPÍTULO 1 ECUACIONES Y PARÁMETROS DEL FLUJO DE AGUA EN EL SUELO

## 1.1 Introducción

En este capítulo se exponen las ecuaciones diferenciales que se utilizan para describir la transferencia del agua en el suelo y se describen de manera detallada los parámetros de las características hidrodinámicas.

Considerando que la adecuada caracterización hidrodinámica de los suelos depende en buena medida de la definición clara de las relaciones funcionales, parámetros y escalas de medición, en este capítulo se plantea como objetivo la discusión de estos tres elementos.

## 1.2 Ecuación de Richards

La descripción de la transferencia del agua en el suelo puede hacerse con la ley de Darcy (1856) modificada por Buckingham (1907) para suelos no saturados:

$$q = -K(\psi) \nabla H = -K(\psi) \nabla(\psi - z) \quad (1.1)$$

donde  $q$  es el flujo por unidad de área expuesta perpendicularmente al movimiento del agua [ $LT^{-1}$ ];  $H = \psi - z$  es el potencial hidráulico [ $L$ ];  $\psi$  es el potencial de presión del agua en el suelo [ $L$ ];  $z$  es el potencial gravitacional, asimilado a la coordenada espacial vertical orientada positivamente hacia abajo [ $L$ ];  $K(\psi)$  es la conductividad hidráulica en función del potencial de presión en suelos no saturados; y  $\nabla H = (\partial H / \partial x, \partial H / \partial y, \partial H / \partial z)$  es el gradiente del potencial hidráulico.

Para completar la descripción del flujo transitorio del agua en el suelo se requiere de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot q \quad (1.2)$$

donde  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua en el suelo [ $L^3 L^{-3}$ ]; y  $\nabla \cdot q = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$  es la divergencia del vector flujo.

La combinación de las ecuaciones (1.1) y (1.2) proporciona la ecuación general de transferencia de agua en el suelo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla(\psi - z)] \quad (1.3)$$

De la ecuación (1.3) se obtiene la ecuación de Richards (1931):

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla (\psi - z)] \quad (1.4)$$

donde:

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} \quad (1.5)$$

es la capacidad específica  $[L^{-1}]$ , definida sólo para procesos uniformes de humedecimiento o secado.

Childs y Collis-George (1950) definen la difusividad hidráulica como:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{K(\theta)}{C(\theta)} \quad (1.6)$$

para obtener la ecuación tipo Fokker-Planck:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla (\theta)] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (1.7)$$

La función de difusividad hidráulica puede calcularse con  $\psi(\theta)$  y  $K(\theta)$ , con la ecuación (1.6). También puede obtenerse con métodos directos experimentales.

Las llamadas características hidrodinámicas de un suelo están formadas por la función de conductividad hidráulica  $K(\psi)$  y la característica de humedad  $\psi(\theta)$ .



### 1.3 Formas funcionales de las propiedades hidrodinámicas

Para representar las propiedades hidrodinámicas de los suelos, que tienen formas distintas para la amplia gama de suelos encontrados en la naturaleza, se han dedicado esfuerzos considerables en el desarrollo de funciones con un conveniente número de parámetros.

En la literatura especializada se han reportado diferentes formas funcionales basadas en la combinación de las variables dependientes  $\theta$ ,  $\psi$  y  $K$ , y en un cierto número de parámetros de ajuste, para la descripción de las características hidrodinámicas (e.g., Gardner, 1958; Brooks y Corey, 1964; Brutsaert, 1966; van Genuchten, 1980).

El número de parámetros involucrados generalmente es cuatro o cinco y depende de las funciones cuya selección presenta dos dificultades: i) el número de combinaciones posibles es muy alto; y ii) no se cuenta con un criterio preciso sobre las propiedades físicas que estas formas funcionales deben satisfacer.

Uno de los grupos más grandes de modelos para representar la curva de retención presentado en la literatura es la función potencia siguiente (Braddock *et al.*, 2001):

$$\psi = \psi_d \Theta^{-1/\lambda} (1 - \Theta^{1/m})^{1/n} \quad ; \quad \Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (1.8)$$

donde  $\psi_d$  es un parámetro de escala y representa un valor característico de la presión;  $m > 0$ ,  $n > 0$  y  $\lambda > 0$  son tres parámetros de forma;  $\Theta$  es el grado de saturación;  $\theta_s$  y  $\theta_r$  son los contenidos de humedad a saturación y residual, respectivamente.

Cuando  $\Theta \rightarrow 0$  en la ecuación (1.8) se obtiene la ecuación de Brooks y Corey (1964):

$$\Theta = \left( \frac{\psi_{cr}}{\psi} \right)^\lambda \quad \text{para } \psi \leq \psi_{cr} \quad (1.9)$$

$$\Theta(\psi) = 1 \quad \text{para } \psi_{cr} \leq \psi$$

y cuando  $\lambda = mn$  se obtiene la ecuación de van Genuchten (1980):

$$\Theta = \left[ 1 + \left( \frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^{-m} \quad (1.10)$$

Los dos parámetros adimensionales de forma en la ecuación de van Genuchten (1980),  $m$  y  $n$ , están ligados por:

$$m = 1 - \frac{k}{n} \quad ; \quad \text{con } n > k \quad (1.11)$$

donde  $k$  es un valor entero inicialmente introducido por van Genuchten (1980) para calcular expresiones analíticas cerradas en las funciones de conductividad hidráulica cuando se usan los modelos de predicción de Burdine (1953) o Mualem (1976). Para la teoría de Mualem  $k=1$  y para la teoría de Burdine  $k=2$ .

La mayoría de los modelos paramétricos de la función  $K(\psi)$  está basada en la relación teórica entre el tamaño de poro y el potencial de presión, i.e. la curva de retención puede ser interpretada como una medida estadística de la distribución equivalente del tamaño de poros (Corey, 1992). Las expresiones para la conductividad hidráulica pueden derivarse a partir de las leyes de Darcy y Poiseuille. Con estos modelos, dada una forma de la curva de retención se derivan expresiones cerradas para la conductividad hidráulica.

La conceptualización general, que consiste en considerar el espacio poroso como un conjunto de poros cilíndricos, completamente llenos de agua o vacíos, es una simplificación que requiere entonces de la calibración de factores para la consideración de la tortuosidad y conexión de los poros y de al menos un punto para el escalamiento de la curva de conductividad.

Introduciendo la ecuación (1.10) en el modelo de Mualem (1976), van Genuchten (1980) obtiene la expresión de la conductividad hidráulica siguiente:

$$\frac{K}{K_s} = \Theta^{1/2} \left[ 1 - \left( 1 - \Theta^{1/m} \right)^m \right]^2; \quad \text{con } m = 1 - 1/n \quad (1.12)$$

donde  $K_s$  es la conductividad hidráulica a saturación y es el punto de escalamiento de la curva.

La introducción de la ecuación (1.10) en el modelo de Burdine (1953) permite obtener:

$$\frac{K}{K_s} = \Theta^2 \left[ 1 - \left( 1 - \Theta^{1/m} \right)^m \right]; \quad \text{con } m = 1 - 2/n \quad (1.13)$$

Fuentes *et al.* (2001), al considerar algunas hipótesis sobre la manera de definir el tamaño del poro que interviene en un modelo general derivado por los mismos autores, generan cuatro modelos particulares. Introduciendo la ecuación (1.8) en estos modelos, Fuentes *et al.* (2003) obtienen las formas cerradas siguientes:

El modelo del "poro pequeño":

$$K_r = \frac{\Theta^s B_1(\Theta^{1/m}; 1, sm) - B_1(\Theta^{1/m}; 1+sm, sm)}{B(1, sm) - B(1+sm, sm)}, \quad 0 < sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (1.14)$$

$$K_r = \frac{\Theta^s B_1(\Theta^{1/m}; 1-sm, sm) - B_1(\Theta^{1/m}; 1, sm)}{B(1-sm, sm) - B(1, sm)}, \quad 0 < 2sm = 1 - 4s/n < 1$$

Modelo de la "media geométrica":

$$K_r = \left[ 1 - (1 - \Theta^{1/m})^{sm} \right]^2, \quad 0 < sm = 1 - 2s/n < 1 \quad (1.15)$$

Modelo del "poro neutro":

$$K_r = \Theta^s \left[ 1 - (1 - \Theta^{1/m})^{sm} \right], \quad 0 < sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (1.16)$$

Modelo del "poro grande":

$$K_r = \left[ 1 - (1 - \Theta^{1/m})^{2sm} \right], \quad 0 < 2sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (1.17)$$

donde  $B_1(x;p,q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$  es la función beta incompleta de variable  $x$  y parámetros  $p > 0$  y  $q > 0$ ;  $B(p,q) = B_1(1;p,q)$  es la función beta completa;  $s$  es el cociente de la dimensión fractal del suelo ( $D$ ) entre la dimensión del espacio físico ( $E$ ), es decir,  $s = D/E$ . Este parámetro es una función de la porosidad volumétrica total del suelo ( $\phi$ ):

$$(1-\phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad (1.18)$$

En las relaciones mostradas puede observarse que la ecuación de Brooks y Corey (1964) para la característica de humedad es un modelo de cuatro parámetros (tres parámetros de escala:  $\theta_s$ ,  $\theta_r$  y  $\psi_d$ ; y el parámetro de forma  $\lambda$ ). El modelo de van Genuchten (1980) está expresado en función de cinco parámetros, los cuales se reducen a cuatro cuando se relacionan los parámetros de forma  $m$  y  $n$ . Los modelos mostrados de la conductividad hidráulica adicionan el parámetro de escala  $K_s$ . Por lo tanto, para realizar la modelación de la transferencia de agua en el suelo deberá contarse con al menos cinco parámetros: tres parámetros de escala de la curva de retención ( $\theta_s$ ,  $\theta_r$  y  $\psi_d$ ); un parámetro de forma ( $m$ ); y el parámetro de escala de la conductividad hidráulica ( $K_s$ ).

La característica de humedad puede obtenerse a través de la determinación directa de algunos puntos ( $\psi, \theta$ ) en campo o en laboratorio. La aplicación de estos métodos generalmente demanda tiempos y costos que dificultan su implementación. Los métodos de laboratorio son además poco representativos de las condiciones de campo por la diferencia de escala y la utilización de muestras muchas veces alteradas. En campo, los

métodos más comunes miden el potencial de presión con tensiómetros por lo que los datos experimentales están restringidos al rango de succión de estos instrumentos ( $0 \geq \psi > -750$  cm). Una vez que se determinan algunos puntos experimentales de la curva de retención, es común ajustar libremente los parámetros de las ecuaciones, sin otorgar significado físico y sin tomar en cuenta las restricciones derivadas de los aspectos del fenómeno.

Cuando se ajustan libremente los parámetros de las ecuaciones algebraicas a la característica de humedad experimental no se otorga significado físico a los parámetros y no se consideran las restricciones derivadas de la propia naturaleza de las ecuaciones. Fuentes *et al.* (1992) analizan las restricciones de los parámetros de ajuste utilizados en la curva de retención  $\psi(\theta)$  y la conductividad hidráulica  $K(\theta)$  utilizando como criterio la ecuación de infiltración. Los autores consideran las siguientes ecuaciones: Gardner (1958); Brooks y Corey (1964); Brutsaert ((1966); van Genuchten (1980) sujeto a las condiciones de Mualem (1976) y Burdine (1956); van Genuchten (1980) combinado con Brooks y Corey (1964); y Fujita (1952). En el estudio, los autores muestran que la mayoría de las combinaciones fallan cuando se utilizan sobre el amplio margen de tipos de suelos que se encuentran en las aplicaciones y en particular se señala que para los suelos arcillosos el ajuste libre de parámetros es inconsistente con la teoría de infiltración.

De las ocho combinaciones evaluadas por Fuentes *et al.* (1992), seis modelos: 1) Gardner (1958); 2) Brooks y Corey (1964); 3) Brutsaert (1966); 4) van Genuchten (1980) con condición de Mualem (1976); 5) van Genuchten (1980) con condición de Burdine (1953); y 6) van Genuchten (1980) sujeto a la condición de Mualem (1976) con la ecuación de Brooks y Corey (1964), son inadecuados para describir las propiedades hidrodinámicas de los suelos arcillosos. Esta situación puede provocar inconsistencias con la teoría de la infiltración cuando se ajustan sus parámetros en este tipo de suelos.

Las otras dos combinaciones: 1) van Genuchten (1980) sujeto a la condición de Burdine (1953) con la ecuación de Brooks y Corey (1964) para  $K(\theta)$ ; y 2) Fujita (1952) y Parlange *et al.* (1982), pueden aplicarse a todo tipo de suelos sin restricción en los parámetros de ajuste.

La primera de las combinaciones utiliza un parámetro menos que la segunda, por lo que resulta mejor en la práctica. La segunda combinación es adecuada en estudios teóricos ya que con su utilización pueden obtenerse soluciones analíticas para casos particulares.

Otra manera de obtener las propiedades hidrodinámicas del suelo es la solución inversa de la ecuación de Richards (1931). Estos métodos estiman los parámetros de las relaciones funcionales de las características hidrodinámicas a través de optimización, es decir, dadas las condiciones iniciales y de frontera de un fenómeno hidrodinámico, el problema se resuelve con métodos numéricos o analíticos, y los parámetros de las relaciones constitutivas son obtenidos a través de un algoritmo de optimización. En estos métodos se han encontrado problemas de inestabilidad y de falta de unicidad de la solución debidos principalmente a la correlación entre parámetros. Esta situación ha obligado a la búsqueda de datos independientes para su inclusión en la función objetivo

(e.g. van Dam *et al.* 1992 y Toorman *et al.*, 1992). Simunek y van Genuchten (1996) concluyen que para obtener tres parámetros ( $\psi_d$ ,  $m$  y  $K_s$ ) a través de la inversión de la ecuación de Richards con datos de infiltración medidos con el infiltrómetro de succión, se requiere información adicional como el potencial de presión en el suelo debajo del disco del infiltrómetro.

Otros métodos se basan en información más fácil de obtener (distribución del tamaño de partículas, por ejemplo), es decir, la estimación de las características hidrodinámicas se realiza de manera indirecta a partir de propiedades del suelo más accesibles como la textura, la densidad aparente, la materia orgánica y la mineralogía de arcillas (Brakensiek *et al.*, 1981; Rawls *et al.*, 1982; Rawls *et al.*, 1992). Estos métodos tienen restricciones para obtener los parámetros de escala.

#### 1.4 Parámetros de las propiedades hidrodinámicas

El contenido volumétrico de humedad a saturación natural es un parámetro físico relativamente bien definido. Algunos autores (Rogowski, 1971) consideran que su valor es ligeramente inferior a la porosidad del suelo ( $\phi$ ) debido al aire atrapado, de tal manera que:  $0.75 \leq \theta_s / \phi \leq 1$ .

Haverkamp *et al.* (1998) consideran a  $\theta_s$  como el parámetro de ajuste más estable de los dos parámetros de escala ( $\theta_r$  y  $\theta_s$ ). Estos autores comparan los valores de  $\theta_s$  calculados con el modelo de Brooks y Corey (1964) ( $\theta_{sBC}$ ) con aquellos del modelo de van Genuchten (1980) ( $\theta_{sVG}$ ) sujeto a la condición de Burdine (1953), con  $\theta_r = 0$ , en los suelos de la base datos GRIZZLY (Haverkamp, 1998). Una regresión lineal de la forma  $\theta_{sBC} = c(\theta_{sVG})_{k=2}$  proporciona  $c = 0.976$ , con  $r^2 = 0.976$ . La desviación estándar obtenida  $ss = 0.0266 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  es del mismo orden de magnitud del error asociado a la medición reportado para experimentos de campo (e.g., Sinclair y Williams, 1979; Haverkamp *et al.*, 1984) (i.e.,  $\pm 0.02 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ). En un pequeño grupo de suelos (8.5%), que caen fuera del 95% del intervalo de confianza de  $\pm 2ss(e)$ , el valor de  $\theta_{sBC}$  subestima  $\theta_{sVG}$ . Los autores atribuyen esto último a la poca disponibilidad de datos en la región húmeda de la curva  $\psi(\theta)$ .

Los autores comparan también los valores de  $\theta_{sVG}$  calculados con el modelo de van Genuchten sujeto a las condiciones de Mualem y Burdine con  $\theta_r = 0$ . El acuerdo entre  $(\theta_{sVG})_{k=1}$  y  $(\theta_{sVG})_{k=2}$  es particularmente bueno. Una regresión lineal de la forma  $(\theta_{sVG})_{k=1} = c(\theta_{sVG})_{k=2}$  proporciona un coeficiente  $c = 1.011$ , con un coeficiente de correlación  $r^2 = 0.999$ . La desviación estándar,  $ss(e) = 0.0079 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ , es mucho menor que el error de medida asociado con el contenido de humedad.

A partir de estos resultados, los autores infieren que el parámetro  $\theta_s$  puede considerarse un parámetro independiente de ajuste, es decir, independiente del modelo de retención, del valor de  $k$  o del valor de  $\theta_r$ .

En relación con el contenido de humedad residual  $\theta_r$ , los autores señalan que su significado físico es ambiguo. Bajo condiciones de campo el suelo difícilmente tiene un contenido de humedad igual a cero debido a las pequeñas cantidades de agua retenidas por las fuerzas de adsorción y a las atrapadas en poros no conectados. Sin embargo, el valor de  $\theta_r$  diferente de cero depende no sólo de la geometría del medio poroso sino también de las condiciones iniciales antes del humedecimiento, lo cual significa que el valor de  $\theta_r$  diferente de cero no puede considerarse un parámetro característico del suelo.

En la práctica, la mayoría de los estudios estiman el valor de  $\theta_r$  mediante el ajuste de la ecuación de retención a los datos medidos de  $\psi(\theta)$ , lo que reduce  $\theta_r$  a un parámetro puramente empírico definido en términos del mejor ajuste y por lo tanto restringido al rango de datos experimentales. Esto conlleva a la obtención de valores negativos de  $\theta_r$  en muchos suelos. Por ejemplo, en la base de datos GRIZZLY, en 54.4% de los 660 suelos se obtienen valores negativos de  $\theta_r$  al ajustar la ecuación de van Genuchten (1980) con la condición de Mualem. Por conveniencia, el valor de  $\theta_r$  puede restringirse a valores positivos,  $\theta_r \geq 0$ , lo cual sería apropiado si  $\theta_r$  fuese un parámetro físico. Sin embargo, como  $\theta_r$  es un parámetro de ajuste no existe razón para imponer tal restricción.

Por otra parte, a diferencia de  $\theta_s$ , el contenido de humedad residual  $\theta_r$  no es independiente de los parámetros de forma de la curva de retención. Haverkamp *et al.* (2002), utilizan  $\theta_r = 0$  para el ciclo principal de secado/mojado y sugieren que para suelos con porosidad uni-modal, el valor de  $\theta_r$  está relacionado con el historial de los ciclos de mojado y secado anteriores a la lectura de datos de  $\psi(\theta)$ .

De acuerdo con Haverkamp *et al.* (2002), independientemente de la ecuación que se seleccione para representar la característica de humedad, los parámetros de forma  $\lambda$  y  $mn$  dependen de los parámetros de escala, i.e.,  $\theta_r$  y  $\theta_s$ . Varios estudios (Haverkamp, 2002) muestran que  $m$  se incrementa con  $\theta_r$ . El incremento de  $m$  proporciona una forma cuadrada a la curva de retención, por lo tanto, el seleccionar  $\theta_r$  igual a cero es particularmente apropiado para suelos arenosos.

Siguiendo los resultados reportados por Haverkamp *et al.* (1998), el valor de  $mn$  depende del valor de  $k$  seleccionado. Los autores calcularon los valores de  $\lambda$  y  $mn$  con  $k = 2$  y  $k = 10$  para 660 suelos tomados de la base de datos GRIZZLY (con  $\theta_r = 0$ ). Al comparar los valores de  $mn$  calculados con los dos valores de  $k$ , i.e.  $k = 2$  y  $k = 10$ , se puede

observar un decremento en  $mn$  con el aumento de  $k$ . Aunque este efecto no puede percibirse para valores pequeños de  $mn$  (i.e.,  $mn < 0.8$ ), la diferencia se vuelve gradualmente más significativa para valores mayores de  $mn$ . Sobre  $0 < mn < 0.8$  y con  $k = 2$  se tiene  $mn \approx \lambda$ . Fuera de este intervalo, los valores de  $mn$  se desvían de la línea 1:1 y  $mn \neq \lambda$ . Sin embargo, cuando se compara  $\lambda$  y  $mn$  calculados con  $k = 1$ , la condición  $mn \approx \lambda$  es satisfecha casi sobre todo el rango de  $mn$ . El comportamiento cambiante de  $\lambda$  con  $mn$  para diferentes valores de  $k$ , puede ser explicado mediante el análisis de los límites. Cuando  $k \rightarrow 0$ , el valor de  $m$  tiende a 1. Esto reduce considerablemente el número de parámetros libres y, por lo tanto, limita la flexibilidad de ajuste de la ecuación de van Genuchten (1980). Al contrario, cuando  $k \rightarrow \infty$ , la ecuación de van Genuchten (1980) tiene un comportamiento en potencia como la ecuación de Brooks y Corey (1964) y  $mn = \lambda$ . Esto explica la cercanía de  $mn$  con  $\lambda$  para  $k = 10$ . La dependencia de  $mn$  con respecto a  $k$  y la inconsistencia entre las definiciones de los índices de forma de Brooks y Corey (1964) y van Genuchten (1980), muestra claramente que  $mn$  no es el índice de forma ideal para el modelo de van Genuchten (1980) de la curva de retención.

## 1.5 Conclusiones

Se han discutido las relaciones funcionales y parámetros de las propiedades hidrodinámicas de los suelos. Se analiza la naturaleza de los parámetros y las propiedades invariantes con el objeto de realizar una definición de los parámetros adecuados para la caracterización hidrodinámica de los suelos.

Para realizar la modelación de la transferencia de agua en el suelo deberá contarse con al menos cinco parámetros: tres parámetros de escala de la curva de retención ( $\theta_s, \theta_r, \psi_d$ ); un parámetro de forma ( $m$ ); y el parámetro de escala de la conductividad hidráulica ( $K_s$ ).

## CAPÍTULO 2 MÉTODOS INDIRECTOS DE CARACTERIZACIÓN HIDRODINÁMICA DE SUELOS

### 2.1 Introducción

El hecho de que los métodos directos para caracterizar hidrodinámicamente los suelos sean costosos y laboriosos ha motivado la búsqueda de metodologías de caracterización basadas en información más fácil de obtener. En los métodos indirectos, la estimación de las características hidrodinámicas se realiza a partir de propiedades del suelo más accesibles como la textura, la densidad aparente, la materia orgánica y la mineralogía de arcillas (Brakensiek *et al.*, 1981; Rawls *et al.*, 1982; Rawls *et al.*, 1992).

En este capítulo se analizan los métodos indirectos de estimación de las propiedades hidrodinámicas de los suelos. En particular se expone la estimación de los parámetros de forma de la característica de humedad a partir de la curva granulométrica del suelo aplicando las relaciones desarrolladas en el marco de la geometría fractal en la conceptualización de las escalas de Laplace y Stokes de Fuentes (1992). La verificación de las relaciones propuestas se realiza a través de la comparación de las pendientes medias de las curvas granulométrica y de retención en 660 suelos de la base de datos GRIZZLY (Haverkamp *et al.*, 1998) utilizando la ecuación de van Genuchten (1980). Los resultados indican que esta metodología puede ser utilizada con fines de predicción de los parámetros de forma. Sin embargo, los parámetros de escala de la curva de retención deben ser obtenidos a partir de otras consideraciones.

### 2.2 Los métodos indirectos de caracterización hidrodinámica

En general, los métodos indirectos para obtener la curva de retención se basan en la curva granulométrica y pueden clasificarse en tres grandes categorías: i) métodos discretos de regresión; ii) métodos de regresión funcional; y iii) métodos semifísicos.

#### i Métodos discretos de regresión

Los métodos discretos de regresión estiman el contenido de humedad en el suelo que corresponde a ciertos valores del potencial de presión utilizando regresión lineal múltiple (Gupta y Larson, 1979) o redes neuronales (Pachepsky *et al.*, 1996). Los valores del contenido de humedad que con mayor frecuencia se estiman son a -10, -33 y -1500 kPa. Los dos últimos valores corresponden a los contenidos de humedad a capacidad de campo y punto de marchitamiento permanente, respectivamente. Tietje y Tapkenhinrichs (1993) concluyen que los métodos discretos a menudo tienen resultados pobres porque las ecuaciones de regresión están basadas en medidas obtenidas de muestras alteradas de suelo.

#### ii Métodos de regresión funcional

En los métodos de regresión funcional se asume una forma preliminar de la curva de retención y los parámetros se derivan a través de métodos de regresión. Rawls *et al.* (1982) presentan una lista de valores promedio de los parámetros de la ecuación de



Brooks y Corey. Rawls y Brankensiek (1985) derivan los parámetros de la misma ecuación como una función de los contenidos de arcilla y arena y la porosidad para suelos de los E.U.A. Shaap *et al.* (1998) derivan los parámetros promedio para la ecuación de van Genuchten con base en las clases texturales de los E.U.A.

### iii Métodos semifísicos

Los métodos semifísicos correlacionan los parámetros de forma de la curva de retención con los de la distribución del tamaño de partículas. La principal hipótesis de estos métodos es la similaridad de forma entre ambas curvas (e.g., Arya y Paris, 1981; Haverkamp y Parlange, 1986; Fuentes, 1992).

Bastet *et al.* (1999) apuntan que las funciones de pedotransferencia deben utilizarse con las consideraciones siguientes: i) la aplicabilidad de las funciones es muy variable, desde lo aceptable hasta lo extremadamente inconveniente; ii) las funciones empíricas son válidas en los suelos para los cuales se generaron y en consecuencia no son de aplicación general; y iii) la predicción de las funciones es mejor a potenciales de presión bajos debido a la influencia de la textura del suelo sobre la distribución de la microporosidad.

Los métodos indirectos se validan estadísticamente evaluando su conveniencia para describir los datos. Sin embargo, el principal objetivo de la caracterización hidrodinámica es el uso de los parámetros en los modelos de simulación y por tal motivo deberían ser evaluados en su aplicación final. Vereecken *et al.* (1990) nombran tal evaluación como una validación funcional, i.e., la evaluación del desempeño de las funciones de pedotransferencia en el contexto de las aplicaciones. Vereecken *et al.* (1992) evalúan el efecto de la incertidumbre en las variables de entrada de la función de pedotransferencia, por ejemplo, densidad aparente o contenido de arcilla, sobre el error de estimación de variables como la cantidad de agua drenada del perfil del suelo o la relación entre las evapotranspiraciones real y potencial, por medio de simulación Montecarlo. Espino *et al.* (1995) señalan que el hecho de que las funciones de pedotransferencia estén basadas en datos limitados afecta su capacidad para capturar completamente los procesos hidrodinámicos de interés.

## 2.3 Parámetros de forma

El contenido de humedad en el suelo está íntimamente ligado a la curva porosimétrica,  $S(R)$ , que representa el volumen de poros relativo al volumen poroso total cuyos tamaños son menores o iguales a un tamaño  $R$ , llamada también frecuencia acumulada del tamaño de los poros con base en volumen.

Los métodos directos para la determinación de la curva porosimétrica son de aplicación restringida, situación que ha motivado el desarrollo de métodos para la obtención de ésta a partir de la curva granulométrica,  $F(D)$ , que representa la masa de las partículas por unidad de masa de suelo cuyos tamaños son menores o iguales a un tamaño  $D$ , llamada también frecuencia acumulada del tamaño de partículas con base en la masa. Es de

señalarse que la curva granulométrica es la propia masa acumulada de las partículas en un suelo de masa unitaria ( $M_{st} = 1$ ).

La definición de los tamaños o escalas R y D es extremadamente difícil debido a la estructura geométrica irregular de los suelos. La definición se realiza de manera indirecta o equivalente. Para la primera se utiliza la ley de Laplace que establece la relación entre el potencial de presión ( $\psi$ ), expresado como una altura equivalente de agua, y el radio de poro (R). Para la segunda escala se utiliza la ley de Stokes que describe la velocidad ( $v_s$ ) en régimen laminar de una partícula de diámetro D que cae dentro de un fluido infinito. Estas leyes se escriben respectivamente de la manera siguiente:

$$\psi = -\frac{2\sigma \cos \alpha_c}{\rho_w g R} \quad (2.1)$$

$$v_s = \frac{g\rho_o}{18\mu_c} \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_o}\right) D^2 \quad (2.2)$$

donde  $\sigma$  es la tensión en la interfaz agua-aire [ $MT^{-2}$ ];  $\mu_c$  es el coeficiente de viscosidad dinámica [ $ML^{-1}T^{-1}$ ];  $\rho_w$  es la densidad del agua [ $ML^{-3}$ ];  $\rho_o$  es la densidad de partículas [ $ML^{-3}$ ]; g es la aceleración gravitacional [ $LT^{-2}$ ]; y  $\alpha_c$  es el ángulo de contacto que forma la interfaz agua-aire con las partículas sólidas.

Para establecer una relación entre S(R) y F(D) se ha aceptado que existe una correspondencia biunívoca entre R y D, de modo que en un paquete caracterizado por R y D la relación de vacíos (e) es una constante. Arya y Paris (1981) discretizan la curva granulométrica en  $N_c$  clases, cada clase caracterizada por  $R_i$  y  $D_i$ , de modo que el volumen de los vacíos ( $V_{vi}$ ) relativo al volumen de los sólidos ( $\Delta V_{si}$ ) en la clase i-ésima es igual al volumen total de los vacíos ( $V_{vt}$ ) relativo al volumen total de los sólidos ( $V_{st}$ ), es decir  $\Delta V_{vi}/\Delta V_{si} = V_{vt}/V_{st} = e$ . Aceptando que la densidad de las partículas es la misma en cada clase  $\Delta M_{si}/\Delta V_{si} = M_{st}/V_{st} = \rho_o$ , se obtiene  $\Delta V_{vi}/V_{vt} = \Delta M_{si}/M_{st}$ ; la masa total es tomada unitaria,  $M_{st} = 1$ . La acumulación de las fracciones relativas de volumen y de masa conduce a la igualdad siguiente:

$$S(R) = F(D) \quad (2.3)$$

Se acepta que para un contenido volumétrico de agua dado ( $\theta$ ), el agua se encuentra contenida en los poros con radios menores o iguales a R. En tal situación la curva porosimétrica se vuelve igual al grado de saturación  $\theta/\phi$ , donde  $\phi$  es la porosidad total del suelo, es decir  $\theta(R) = \phi S(R) = \phi F(D)$ . Con la última relación se puede estimar la

característica de humedad  $\theta(\psi)$  a partir de la curva granulométrica utilizando la relación de Laplace, ecuación (2.1), si se cuenta con una relación entre R y D.

En cada paquete formado por la clase i-ésima de partículas y poros, puede obtenerse una relación entre R y D siguiendo el razonamiento de Arya y Paris (1981). En cada paquete el volumen de los sólidos es proporcionado por  $\Delta V_{si} = \frac{\pi}{6} \Delta N_i D_i^3$  donde  $\Delta N_i$  es el número de partículas de diámetro  $D_i$ . El espacio de los vacíos es asimilado a un tubo cilíndrico de área  $\pi R_i^2$  y longitud  $\Delta N_i D_i$ ; considerando sin embargo que las partículas son irregulares la longitud del tubo deberá ser mayor, para ello se introduce un exponente  $\alpha \geq 1$  de modo que la longitud quede definida por  $(\Delta N_i)^\alpha D_i$  y el volumen de los vacíos por  $\Delta V_{vi} = \pi R_i^2 (\Delta N_i)^\alpha D_i$ . Puesto que la relación de vacíos es constante se obtiene lo siguiente:

$$R_i = D_i \sqrt{\frac{e}{6(\Delta N_i)^{\alpha-1}}} \quad (2.4)$$

El número de partículas en el paquete se calcula con  $\Delta N_i = 6V_{si}/\pi D_i^3 = 6\Delta F_i/\pi \rho_o D_i^3$ , donde  $\Delta F_i$  es la masa de las partículas en la clase i-ésima. La relación de vacíos se calcula con  $e = \phi/(1-\phi)$ . Mediante la reproducción, en algunos suelos, de la característica de humedad a partir de la curva granulométrica con las ecuaciones (2.3) y (2.4), asumiendo un ángulo de contacto nulo y una temperatura de 20°C, es decir  $\psi = -0.149/R$  si R y  $\psi$  están en centímetros, los autores obtienen un valor medio de  $\alpha \cong 1.38$ .

La sustitución de la expresión de  $\Delta N_i$  en la ecuación (2.4) conduce a la siguiente relación entre R y D:

$$R_i = D_i^{1+3(\alpha-1)/2} \sqrt{\frac{e \left( \frac{\pi \rho_o}{6\Delta F_i} \right)^{\alpha-1}}{6}} \quad (2.5)$$

La estimación de la presión del agua con la ley de Laplace utilizando la ecuación (2.4) puede depender del tamaño de la clase. En efecto, si la definición de las clases es tal que contengan la misma masa  $\Delta F_i = 1/N_c$  y tomando  $D_i = \frac{1}{2} [D(F_{i-\frac{1}{2}}) + D(F_{i+\frac{1}{2}})]$ , el valor de  $R_i$  y en consecuencia la presión asociada pueden depender de  $N_c$ . Cuando la partición es realizada en el dominio de manera constante  $\Delta D_i = (D_{\max} - D_{\min})/N_c$ , con  $D_i = \frac{1}{2} (D_{i-\frac{1}{2}} + D_{i+\frac{1}{2}})$ , se obtendrán  $\Delta F_i$  variables definidas por  $\Delta F_i = F(D_{i+\frac{1}{2}}) - F(D_{i-\frac{1}{2}})$ , pudiendo ocurrir que la variación de  $D_i$  en relación con el número de clases sea menos fuerte que la variación correspondiente en  $\Delta F_i$ , y en consecuencia  $R_i$  pueda depender de  $N_c$ .

Si, de acuerdo con Fuentes (1992), se acepta que la distribución de la masa en las clases sigue un patrón fractal, es decir  $\Delta F_i = \Delta F_d (D_i/D_d)^{3-D_f}$ , donde  $D_f$  es la dimensión fractal y  $\Delta F_d$  es la masa asociada a una clase característica representada por  $D_d$ , de la ecuación (2.5) se obtiene, con  $s = D_f/3$ , lo siguiente:

$$R_i = D_i^{1+3s(\alpha-1)/2} \sqrt{\frac{e}{6} \left( \frac{\pi \rho_o D_d^{3(1-s)}}{6 \Delta F_d} \right)^{\alpha-1}} \quad (2.6)$$

en la cual el radio puede depender de la cantidad de masa ( $\Delta F_d$ ) correspondiente a la escala característica de las clases de partículas ( $D_d$ ), como ha sido señalado por Fuentes (1985), quien introduce distribuciones continuas para este modelo. En Fuentes (1992) se intenta salvar este problema al extraer la relación no lineal entre R y D. La misma estructura de la ecuación (2.6) sugiere una relación en potencia que contiene como caso particular la relación lineal utilizada por Haverkamp y Parlange (1985) en suelos arenosos.

La relación de empaquetamiento sugerida por Fuentes (1992) es la siguiente:

$$\frac{R}{R_d} = \left( \frac{D}{D_d} \right)^{1+\kappa} \quad (2.7)$$

en donde la relación entre las escalas de referencia ( $R_d$  y  $D_d$ ) quedan sujetas a una determinación a partir de los fenómenos dinámicos (como la infiltración y el drenaje de los suelos) con la teoría de los fenómenos inversos. Este autor propone dos relaciones entre  $\kappa$  y  $s$ . En las pequeñas escalas la relación:

$$\kappa = \frac{2s-1}{2(1-s)} \quad (2.8)$$

mientras que en las grandes escalas la relación siguiente:

$$\kappa = \frac{2s-1}{2s(1-s)} \quad (2.9)$$

El parámetro  $s$  está definido como  $s = D_f/E$ , donde  $D_f$  es la dimensión fractal del suelo y  $E = 3$  la dimensión de Euclides en donde el suelo se encuentra embebido, y su dependencia con respecto a la porosidad total del suelo ( $\phi$ ) se encuentra definida de manera implícita en la ecuación siguiente (Fuentes *et al.*, 2001):

$$(1-\phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad (2.10)$$

Dado que la clase característica en esta aproximación no puede argumentarse sin ambigüedad, en el contexto de la modelación de Arya y Paris (1981) y Fuentes (1985, 1992), el último autor sugiere concentrar los esfuerzos en estimar los parámetros de “forma” de las distribuciones utilizadas para describir la curva granulométrica.

Si la curva porosimétrica es representada por un función  $S(R; R_d, \xi)$  en donde  $R_d$  representa la escala característica de los tamaños de los poros y por tanto de la presión del agua (o “escala” de los poros o de la presión) y  $\xi$  es el vector de los parámetros de forma (que intervienen directamente en la densidad de esta función), es claro que la curva granulométrica de acuerdo con las ecuaciones (2.3) y (2.7) adquiere la forma  $F(D) = S(D^{1+\kappa}; R_d, \xi)$ . La descripción de la primera curva se volverá más difícil si cada uno de los parámetros deberá guardar una relación estrecha con los de la segunda. Por tal razón, la “forma” de las curvas será caracterizada con el parámetro que resulta del trabajo de Bloemen (1980) sobre la curva granulométrica para caracterizar su forma en “S”; este parámetro fue propuesto partiendo de una forma discreta de la curva y escrita en lenguaje continuo por Fuentes (1985). El parámetro de forma es definido por la pendiente media:

$$\xi_F = \int_0^1 \frac{d \log(F)}{d \log(D)} dF \quad (2.11)$$

la cual puede extenderse para caracterizar la forma también en “S” de la curva porosimétrica:

$$\xi_S = \int_0^1 \frac{d \log(S)}{d \log(R)} dS \quad (2.12)$$

Considerando las ecuaciones (2.3) y (2.5) en las ecuaciones (2.11) y (2.12) se encuentra la relación siguiente entre las pendientes medias:

$$1 + \kappa = \frac{\xi_F}{\xi_S} \quad (2.13)$$

Para ilustrar la aplicación de las relaciones expuestas anteriormente, la curva de retención se describe con la ecuación de van Genuchten (1980).

Si el contenido volumétrico de agua se obtiene mediante la acumulación del volumen de vacíos desde los poros más pequeños hasta los poros más grandes, es decir, el llenado de los poros se realiza en forma sucesiva, con la relación de Laplace y la ecuación (2.12), la curva porosimétrica puede expresarse de la manera siguiente:

$$S(R) = S_r + (1 - S_r) \left[ 1 + \left( \frac{R_d}{R} \right)^n \right]^{-m} \quad (2.14)$$

donde  $S_r = \theta_r / \theta_s$ .

Con la ayuda de las ecuaciones (2.4) y (2.5), la curva granulométrica puede describirse con la función:

$$F(D) = F_r + (1 - F_r) \left[ 1 + \left( \frac{D_d}{D} \right)^N \right]^{-M} \quad (2.15)$$

donde  $F_r = S_r$ ; con los parámetros de forma de ambas curvas relacionados con las expresiones siguientes:

$$M = m \quad \text{y} \quad N = (1 + \kappa)n \quad (2.16)$$

Por otra parte, con las ecuaciones (2.8) y (2.12) aplicadas a las ecuaciones (1.10) y (2.14), respectivamente, se obtiene:

$$\xi_s = \frac{mn}{1+m} \quad \text{y} \quad \xi_F = \frac{MN}{1+M} \quad (2.17)$$

Las relaciones mostradas consideran a los parámetros  $m$  y  $n$  de forma independiente. Sin embargo, es conveniente utilizar alguna de las relaciones entre estos parámetros establecidas con el objeto de obtener formas cerradas de la función de conductividad hidráulica. Para ilustración, en este trabajo se utiliza la relación obtenida por Fuentes *et al.* (2003) para el modelo de conductividad hidráulica ( $K$ ) del “poro grande”:

$$K = K_s \left[ 1 - \left( 1 - S_e^{1/m} \right)^{2sm} \right] \quad \text{con} \quad 0 < 2sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (2.18)$$

donde  $K_s$  es la conductividad hidráulica a saturación.

## 2.4 La base de datos GRIZZLY

Para la aplicación de las relaciones descritas se utiliza la base de datos GRIZZLY (Haverkamp *et al.*, 1998) que compila datos de 660 suelos de la literatura. Prácticamente la totalidad de los datos provienen de experimentos de campo, excepto los datos correspondientes a 20 suelos que fueron caracterizados en experimentos de laboratorio. En la mayoría de los suelos se dispone de: i) la densidad aparente,  $\rho_d$  [g/cm<sup>3</sup>]; ii) densidad real,  $\rho_s$  [g/cm<sup>3</sup>], la cual se considera igual a 2.65 g/cm<sup>3</sup> para los casos en los que no se reporta el valor particular en la fuente; iii) el tamaño de partículas  $D$  [μm] como una función de la frecuencia acumulada; iv) porcentaje de materia orgánica; v) datos de la

curva de retención  $\theta(\psi)$ ; y vi) datos de conductividad hidráulica  $K(\theta)$ . Para la determinación de la distribución del tamaño de partículas se utilizaron una gran variedad de métodos de medida (e.g. métodos de tamizado y sedimentación), al igual que para las características hidrodinámicas (e.g., tensiómetros, membranas de presión, sonda de neutrones, y métodos de drenaje interno). En los casos en que se reportan las curvas de humedecimiento y secado, solo la curva de secado se conservó para la base datos.

La distribución de los 660 suelos de acuerdo con las clases texturales del USDA (7ª Sistema de Clasificación Americana de suelos del USDA, 1960) cubre la mayoría del triángulo de texturas. En la base datos están representadas 10 clases texturales: arena (85), arena franca (60), franco arenoso (143), franco (72), franco limoso (83), franco arcillo arenoso (2), franco arcilloso (31), franco arcillo limoso (61), arcillo limoso (54), y arcilla (69).

## 2.5 Aplicación

El parámetro  $s$  es calculado en función de la porosidad con la ecuación (2.10), el valor de  $\kappa$  se calcula con las expresiones (2.8) y (2.9) y los valores de  $D_0$  y  $m$  se obtienen mediante la minimización de la suma de los cuadrados de los errores entre la frecuencia acumulada experimental y la estimada con la ecuación (2.15), considerando la relación (2.17). Para la optimización se utiliza el algoritmo de Marquardt (1963). En la Figura 2.1 se muestra una comparación entre la frecuencia acumulada del tamaño de partículas experimental y la ajustada. En la figura se puede apreciar que no existe diferencia significativa entre los dos valores de  $\kappa$ .

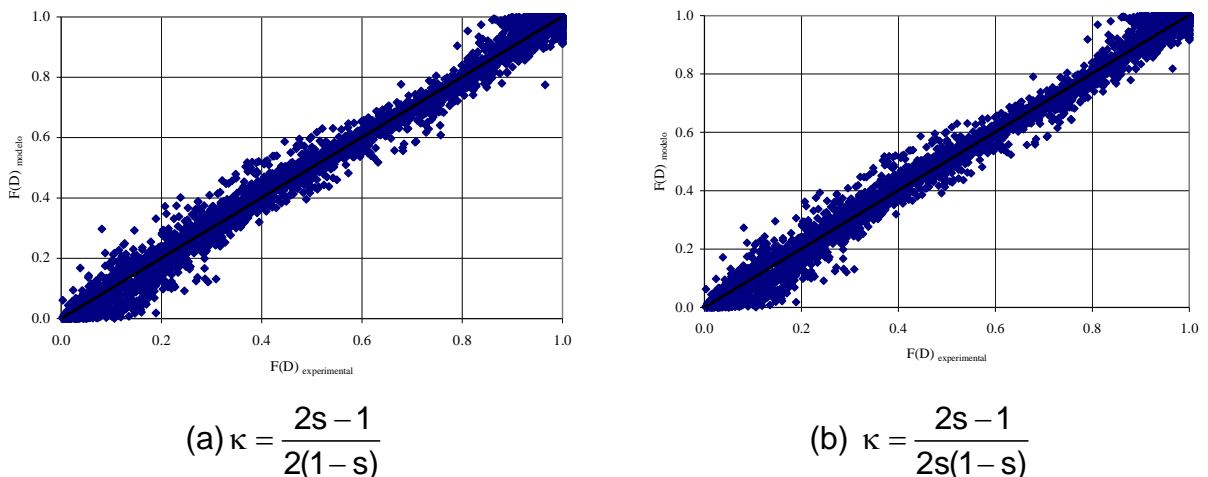


Figura 2.1 Ajuste de la curva granulométrica en los 660 suelos de la base de datos GRIZZLY.

Los parámetros de forma de la curva de retención se obtienen con las relaciones (2.16).

Para verificar la bondad de la predicción, el valor "real" de  $m$  se estima a través del ajuste de la ecuación (1.10) a los datos experimentales considerando la relación (1.17), es decir

el modelo del poro grande. Los valores de los parámetros  $\theta_r$  y  $\theta_s$  son tomados como se reportan en el catálogo ( $\theta_r = 0$ ); los valores de  $\psi_d$  y  $m$  son obtenidos mediante la minimización de la suma de los cuadrados de los errores entre el contenido volumétrico de humedad experimental y el estimado con la ecuación (1.10). En la Figura 2.2 se muestra una comparación de los datos experimentales y los ajustados con el modelo.

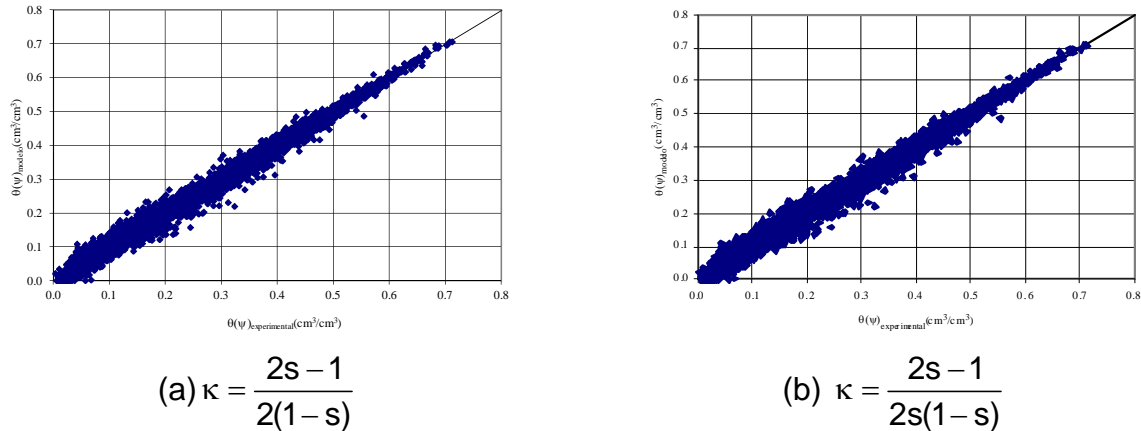


Figura 2.2 Ajuste de la curva de retención en los 660 suelos de la base de datos GRIZZLY.

En la Figura 2.3 muestra la comparación entre las pendientes medias considerando la relación (2.17). Aunque la predicción es similar con ambas expresiones de  $\kappa$ , se puede apreciar una ligera mejoría con la ecuación (2.9), que corresponde a las grandes escalas.

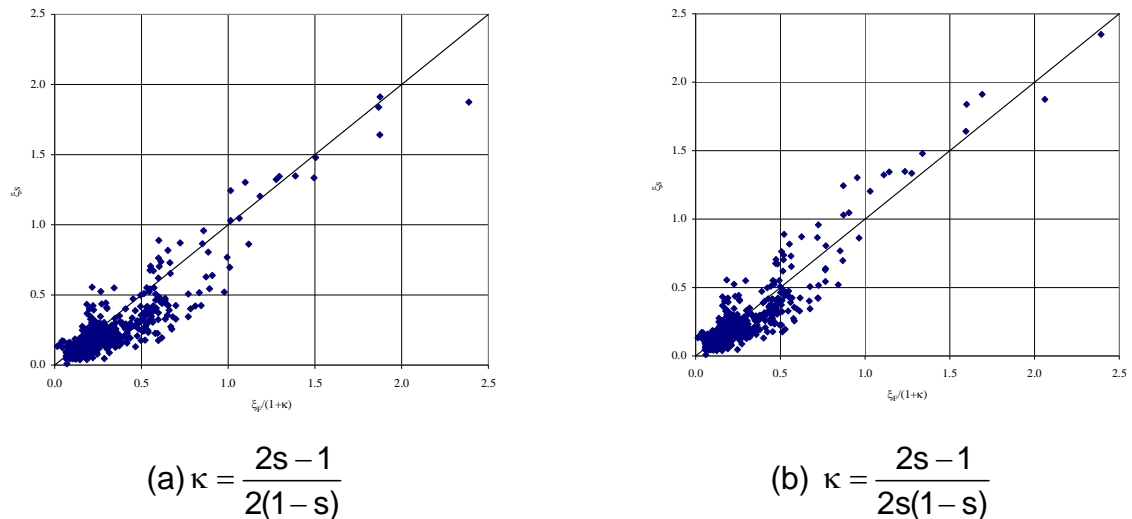


Figura 2.3 Predicción de la curva de retención a partir de la curva granulométrica en 660 suelos de la base de datos GRIZZLY.



## 2.6 Parámetros de estructura

Con base en elementos de la geometría fractal de Mandelbrot (1983), Fuentes (1992) propone la relación siguiente:

$$R = \frac{D}{T} \left( \frac{\lambda_v}{\lambda_s} \right) \quad (2.19)$$

Las escalas  $\lambda_s$  y  $\lambda_v$  pueden definirse considerando que una unidad de masa de suelo seco puede asimilarse a una esfera de diámetro  $\lambda_t$ , es decir:

$$\lambda_t = \left( \frac{6M_t}{\pi\rho_t} \right)^{1/3} \quad (2.20)$$

$$\lambda_v = \lambda_t \varphi^{1/3} \quad (2.21)$$

$$\lambda_s = \lambda_t (1 - \varphi)^{1/3} \quad (2.22)$$

El factor de tortuosidad T es proporcionado por:

$$T = \left( \frac{\lambda_v}{R} \right)^\delta = \left( \frac{\lambda_s}{D} \right)^\kappa \quad (2.23)$$

donde:

$$\delta = 2s - 1 \quad (2.24)$$

y

$$\kappa = \frac{2s - 1}{2(1 - s)} \quad (2.25)$$

La introducción de las ecuaciones (2.21) y (2.22), considerando  $e = V_v / V_s = \varphi / (1 - \varphi)$  en la ecuación (2.19) conduce a:

$$R = \frac{D}{T} e^{1/3} \quad (2.26)$$

Para pasar de las pequeñas a las grandes escalas, Fuentes (1992) se basa en la aplicación de la relación R-D a los puntos de referencia  $R_M$  y  $D_M$ , es decir:

$$R_M = \frac{D_M}{T_M} \left( \frac{\lambda_v}{\lambda_s} \right) \quad (2.27)$$

donde:

$$T_M = \left( \frac{\lambda_s}{D_M} \right)^k \quad (2.28)$$

De acuerdo con Fuentes (1992):

$$S_M = S(R_M) = 1/2 = F(D_M) = F_M \quad (2.29)$$

cuya sustitución en la ecuación (2.15) proporciona:

$$D_M = \frac{D_g}{(2^{1/M} - 1)^{1/N}} \quad (2.30)$$

y de la ecuación (2.26):

$$R_M = \frac{D_M}{T_M} e^{1/3} \quad (2.31)$$

Y considerando que  $R_M$  es el diámetro:

$$r_m = R_m / 2 \quad (2.32)$$

Si se considera como hipótesis que el ángulo de contacto no cambia con el contenido de humedad y en particular que es igual a cero, la ley de Laplace puede escribirse como:

$$|\psi| = \frac{2\lambda_L^2}{r} \quad (2.33)$$

de donde pueden asociarse  $\psi_M$  y  $r_M$ :

$$|\psi_M| = \frac{2\lambda_L^2}{r_M} \quad (2.34)$$

donde  $\lambda_L$  es un grandor definido por  $\lambda_L = (2\sigma / \rho_w g)^{1/2}$ , que tiene las dimensiones de una longitud y para el agua a 20°C  $\lambda_L = 0.386$ , por lo tanto:

$$\Psi_m = -\frac{0.149}{r_M} \quad (2.35)$$

y con la hipótesis (2.28) en la (1.10) se obtiene:

$$\Psi_d = \frac{\Psi_M}{(2^{1/m} - 1)^{1/n}} \quad (2.36)$$

Las relaciones establecidas para los parámetros de estructura se ven afectadas por el hecho, como lo señala Fuentes (1992), que la curva granulométrica depende de la convención sobre el tamaño mayor de partículas ( $D_{max}$ ) bajo del cual se define el sistema de sólidos del suelo (generalmente se admite  $G = 1$  con  $D_{max} = 2000 \mu m$ ). Y dado que la masa de partículas de tamaño menor que  $D$  es relacionado a la masa unitaria  $G(D_{max}) = 1$ , se infiere que una variación en la definición de  $D_{max}$  repercutirá sobre el valor del parámetro  $D_m$  definido por  $F(D_m) = 1/2$  y sobre  $R_m$  y  $\Psi_m$ . Dicho de otra manera, la variación de la frontera representada por  $D_{max}$  producirá un desplazamiento de la curva granulométrica sobre el eje  $D$  y por consecuencia un desplazamiento de la curva  $\theta(\psi)$  sobre el eje  $\psi$ .

Por lo tanto, los parámetros de escala de la curva de retención deben ser obtenidos a partir de otras consideraciones.

## 2.6 Conclusiones

Se realiza la estimación de los parámetros de forma de la característica de humedad a partir de la curva granulométrica del suelo aplicando las relaciones desarrolladas en el marco de la geometría fractal en la conceptualización de las escalas de Laplace y Stokes de Fuentes (1992).

La verificación de las relaciones propuestas se realiza a través de la comparación de las pendientes medias de las curvas granulométrica y de retención en 660 suelos de la base de datos GRIZZLY utilizando la ecuación de van Genuchten (1980).

Los resultados indican que la metodología propuesta puede ser utilizada con fines de predicción de los parámetros de forma. Los parámetros de estructura de la curva de retención deben ser obtenidos a partir de otras consideraciones

## **CAPÍTULO 3 MÉTODOS INVERSOS DE CARACTERIZACIÓN HIDRODINÁMICA DE SUELOS**

### **3.1 Introducción**

En el capítulo anterior quedó establecido un procedimiento para la obtención de los parámetros de forma de algunas formas funcionales de las propiedades hidrodinámicas de los suelos basado principalmente en la distribución de partículas de los mismos. Ahí se remarcaron los inconvenientes de utilizar la misma información para la obtención de los parámetros de estructura de estas formas funcionales.

En el presente capítulo se analiza la modelación inversa como herramienta para la estimación de los parámetros de estructura. Para tal efecto se presenta una breve descripción del desarrollo histórico de los métodos inversos para la determinación de las propiedades hidrodinámicas de los suelos. De esta revisión se derivan dos importantes conclusiones: i) en condiciones de laboratorio se han propuesto y mejorado algunas metodologías que han producido algunos buenos resultados, sin embargo, se enfatiza el hecho que en la mayoría de los casos los parámetros determinados en laboratorio son inconsistentes con las condiciones de campo; y ii) las funciones objetivo utilizadas en los métodos inversos requieren información adicional para complementar a la tradicionalmente obtenida en una prueba de infiltración convencional. Posteriormente, se muestra el planteamiento general del problema inverso para la caracterización hidrodinámica de suelos y finalmente se muestra un estudio experimental.

### **3.2 Breve descripción del desarrollo histórico de los métodos inversos**

Los métodos inversos han sido los más ampliamente utilizados en años recientes para la caracterización hidrodinámica de los suelos. Es común aceptar ciertas funciones para las características hidrodinámicas y estimar los parámetros de estas funciones minimizando una función objetivo con un algoritmo de optimización de mínimos cuadrados sobre las desviaciones entre las variables de flujo observadas y simuladas. Las soluciones numéricas de las ecuaciones de flujo permiten seleccionar las relaciones constitutivas arbitrariamente, incorporar la heterogeneidad de los suelos determinística o estocásticamente y proporcionan la flexibilidad para incorporar diferentes condiciones iniciales y de frontera. Por ello pueden utilizarse en condiciones experimentales muy amplias.

Las técnicas para estimar las propiedades hidrodinámicas de los suelos a partir de la medición del flujo han sido largamente investigadas. Bouwer y Jackson (1974) presentan una revisión de métodos para medir la conductividad hidráulica.

Whisler y Watson (1968) proponen un procedimiento numérico inverso para estimar  $K(\theta)$  con datos experimentales de drenaje en una columna de suelo.

Skaggs *et al.* (1971) describen un método para estimar  $K(\psi)$  a partir de la infiltración en una columna de suelo. Estos autores aceptan que  $\theta(\psi)$  es conocido y estiman los parámetros de una ecuación tipo Gardner (1956) para  $K(\psi)$ , a través del ajuste de la velocidad experimental con un modelo numérico. A diferencia de Whisler y Watson (1968), que utilizan una técnica de ajuste de la curva, Skaggs *et al.* definen una función objetivo para su minimización, i. e. la diferencia en área entre la velocidad de infiltración observada y la modelada. Estos autores grafican la superficie de respuesta de la función objetivo en función de los dos parámetros buscados. La superficie de respuesta se usa ampliamente en los métodos inversos actuales.

Algunos años después, Zachmann *et al.* (1981) introdujeron el uso de los métodos numéricos inversos para determinar los parámetros de las propiedades hidrodinámicas en experimentos de drenaje con columnas de arena inicialmente saturadas. Estos autores comparan cuatro tipos de datos para obtener las propiedades hidrodinámicas: i) volumen drenado acumulado en función del tiempo; ii) volumen acumulado máximo; iii) carga de presión en un punto en función del tiempo; y iv) contenido de humedad en un punto en función del tiempo. Los autores obtienen los mejores resultados con el volumen drenado acumulado.

Hornung (1983) presenta un estudio sobre una columna de suelo con una distribución inicial hidrostática de presiones y sujeta a una condición de flujo constante en la superficie. Utiliza la ecuación de van Genuchten (1980) (1.10) y asume como parámetros conocidos  $K_s$ ,  $\theta_s$  y  $\theta_r$ . Los parámetros  $\alpha = \frac{1}{\psi_d}$  y  $n$  se estiman ajustando el flujo drenado en la base de la columna con una solución numérica. El autor discute si un experimento de infiltración proporciona información suficiente para obtener las propiedades hidrodinámicas del suelo e introduce el término unicidad de la solución. A manera de conclusión se plantea que no puede obtenerse una solución única cuando se usan solo datos del flujo drenado y que para resolver tal problema deberá incluirse información adicional tal como la carga de presión en una posición conocida de la columna bajo condiciones de flujo permanente.

Kool *et al.* (1985a) formulan la modelación inversa de un experimento de drenaje con presión de "un-paso", el cual fue inicialmente introducido por Gardner (1956). El método experimental consiste en colocar una columna de suelo relativamente pequeña sobre un plato poroso. La muestra se satura y es sometida a una presión de aire aplicada en la parte superior registrando el volumen drenado en la base de la columna en función del tiempo. Los autores estiman los parámetros  $\theta_r$ ,  $\alpha = \frac{1}{\psi_d}$  y  $n$  con datos del flujo drenado acumulado en complemento con el flujo drenado en estado estacionario. Kool *et al.* (1985b) proporcionan un código para el análisis del problema inverso (ONESTEP). Russo *et al.* (1991) señalan que ajustar un gran número de parámetros en el modelo de van Genuchten (1980) puede presentar problemas de no-unicidad y correlación de parámetros.

Toorman *et al.* (1992) analizan la superficie de respuesta de la función objetivo con combinaciones de contenido de humedad y carga de presión. Estos autores indican que la unicidad puede lograrse si la función objetivo se complementa con datos de la carga de presión en un punto.

Van Dam *et al.* (1992), al comparar diferentes funciones objetivo y combinaciones de parámetros, sugieren la no unicidad de la solución y concluyen que la optimización con datos de volumen de salida es insuficiente y que para una buena estimación de  $K(\psi)$  se requieren datos de  $\theta(\psi)$  obtenidos de manera independiente.

Para evitar la necesidad de información adicional, van Dam *et al.* (1994) proponen el método "multi-paso", en el cual la presión del aire se modifica en pequeños incrementos. El cambio paulatino de la presión, de acuerdo con los autores, favorece asimismo la uniformidad del flujo al evitar cambios repentinos de la presión. Los autores estiman los parámetros  $\alpha = \frac{1}{\psi_d}$ ,  $n$ ,  $K_s$  y el parámetro introducido por Mualem (1976) para contabilizar la tortuosidad y conectividad de poros del modelo Mualem-van Genuchten y crean el programa MULSTP a partir del código ONESTEP. Los resultados muestran que los datos de un experimento multi-paso proveen suficiente información para obtener una solución única.

Durner *et al.* (1996) modifican el método multi-paso introduciendo un cambio suavizado de presión. Este método es utilizado también por Zurmuhl y Durner (1998) para estimar funciones bimodales. Durner *et al.* (1999) presentan una revisión de los cambios de un-paso, multi-paso y cambio continuo.

Hollenbeck y Jensen (1998) estudiaron la posibilidad de reproducir los procedimientos experimentales de un-paso y multi-paso en una arena. Los autores muestran que los experimentos con cambios pequeños de presión no son reproducibles y que por lo tanto el problema inverso está mal definido. Por su parte, los cambios grandes de presión son reproducibles pero el flujo de salida es prácticamente el mismo para diferentes cambios de presión, induciendo la no unicidad del sistema. Estas consideraciones implican limitaciones para estos métodos. El método multi-paso está bien formulado teóricamente para la solución inversa pero las limitaciones experimentales restringen su aplicación.

Un procedimiento alternativo es el método de evaporación. En este método, una muestra de suelo saturada se deja secar monitoreando periódicamente la masa perdida y el potencial de presión (Wind, 1968). Feddes *et al.* (1988) a través de modelación inversa estiman  $K(\theta)$  de un experimento de evaporación y comparan los resultados con el análisis estándar de Wind (1968). Santini *et al.* (1995) utilizan el método inverso en experimentos de laboratorio y obtienen valores semejantes a datos de  $K_s$  y de la curva de retención obtenidos de manera independiente. Simunek *et al.* (1998a) obtienen un buen acuerdo entre  $\theta(\psi)$  y  $K(\theta)$  obtenidos con modelación inversa y el método de Wind. Romano y Santini (1999) presentan un

análisis numérico de la sensibilidad y estabilidad de la solución inversa en experimentos de evaporación.

Todos los métodos descritos hasta este punto son métodos de laboratorio. Estos métodos son relativamente fáciles de implementar, pero tienen la desventaja de que pueden producir parámetros que no son representativos de las condiciones de campo. Por tal motivo, muchos de los esfuerzos actuales de investigación se dedican a los métodos de estimación *in situ*.

Feddes *et al.* (1993) analizan la posibilidad de obtener las propiedades hidrodinámicas efectivas de una cuenca. Para tal efecto, los autores generan 32 muestras de suelo con propiedades hidrodinámicas diferentes. Los perfiles de humedad modelados para cada una de las muestras son promediados y utilizados para obtener parámetros hidrodinámicos efectivos mediante modelación inversa. Los autores concluyen que es posible derivar los parámetros hidrodinámicos promedio con un método inverso utilizando la evapotranspiración areal y la humedad superficial del suelo.

Con el objeto de obtener medidas de flujo transitorio para la aplicación de técnicas inversas se han desarrollado diferentes instrumentos. Para la solución inversa de las ecuaciones de transferencia se han desarrollado programas de computadora como SFIT (Kool y Parker, 1987) para estimar los parámetros de van Genuchten (1980) con experimentos de flujo transitorio unidimensional. Simunek *et al.* (1999) incorporan a sus soluciones de la ecuación de Richards uni y bidimensional en elemento finito procedimientos inversos. Simunek y van Genuchten (2000) presentan el programa DISC para la solución inversa de las pruebas con el permeámetro de disco.

### **3.3 Método inverso con el permeámetro de disco**

#### **3.3.1 Descripción de permeámetro**

La idea de construir instrumentos para establecer una condición negativa de potencial de presión sobre la superficie del suelo surge con el propósito de excluir la influencia de los macroporos y por lo tanto medir únicamente el flujo en la matriz del suelo. El proceso de desarrollo de estos instrumentos permitió la creación del permeámetro de disco o también llamado infiltrómetro de tensión (Perroux y White, 1988). Ángulo-Jaramillo *et al.* (2000) presentan una revisión sobre la aplicación del infiltrómetro de tensión para la medición de parámetros de las propiedades hidrodinámicas y parámetros de transporte de solutos.

El infiltrómetro de tensión se muestra de manera esquemática en la Figura 3.1. El aparato consta de una base que en su parte inferior lleva una membrana porosa de nylon con un tamaño de malla de 60  $\mu\text{m}$ . Sobre la base están montados un reservorio de agua y una torre de succión. La torre de succión está conectada al

reservorio y controla el potencial de presión aplicado a la membrana. La presión del agua  $\psi_0$ , al nivel de la membrana, está dada por:

$$\psi_0 = h_2 - h_1 \quad (3.1)$$

La presión  $\psi_0$  es la presión impuesta en una prueba de infiltración y varía en el rango  $-150 \text{ mm} \leq \psi_0 \leq 0 \text{ mm}$ . Esta presión es regida por la posición del tubo C1 y el nivel constante del agua en la torre de succión. Este dispositivo constituye un vaso de Mariotte a carga constante.

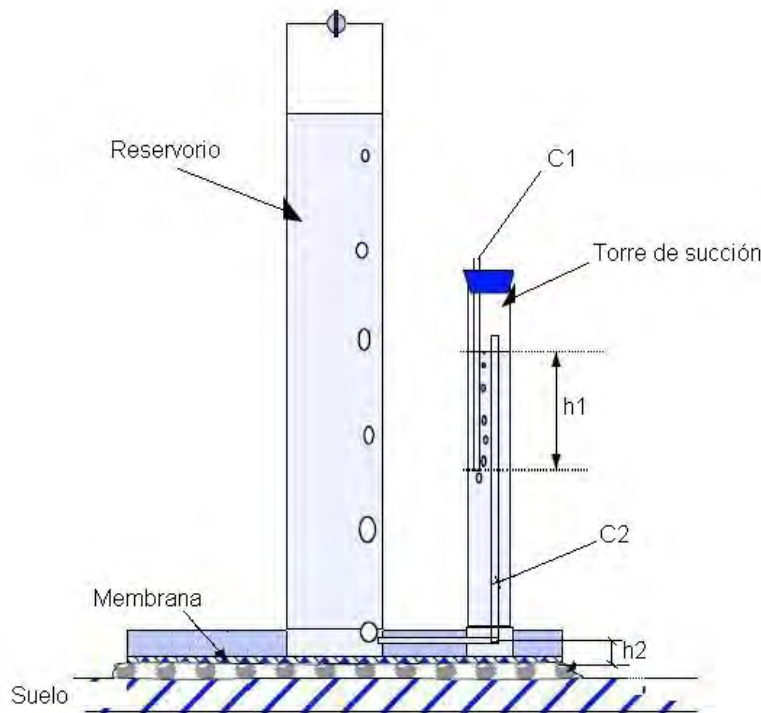


Figura 3.1 Esquema del infiltrómetro de disco.

El flujo del agua bajo el infiltrómetro de disco es tridimensional, sin embargo, si se asume que no ocurre flujo normal al eje radial el problema puede formularse en una forma axisimétrica. El flujo pseudotridimensional puede resolverse usando la formulación bidimensional axisimétrica de la ecuación de Richards.

### 3.3.2 Análisis tradicional de los datos del permeámetro de disco

El flujo en estado permanente puede aproximarse con la ecuación de Wooding (1968):

$$q_{\infty} = K_0 + \frac{4\Phi}{\pi R} \quad (3.2)$$



donde  $q_{\infty}$  es la velocidad de infiltración en estado permanente  $[LT^{-1}]$ ;  $K_0$  es la conductividad hidráulica que corresponde a la carga de presión impuesta en la superficie  $[LT^{-1}]$ , es decir,  $K_0 = K(\psi_0)$ ;  $R$  es el radio del disco  $[L]$ ; y  $\Phi$  es la transformada de Kirchhoff  $[L^2T^{-1}]$  definida por:

$$\Phi = \int_{\psi_n}^{\psi_0} K(\psi) d\psi \quad (3.3)$$

donde  $\psi_n$  es el potencial de presión inicial. En la ecuación (3.2) se asume que se cumple la condición  $K(\psi_n) \ll K(\psi_0)$ . Esta ecuación fue obtenida siguiendo la relación de Gardner (1958):

$$K(\psi) = K_s e^{\alpha\psi} \quad (3.4)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro de ajuste  $[L^{-1}]$ . Con esta ecuación la transformada de Kirchhoff toma la forma siguiente:

$$\Phi = \frac{K}{\alpha} \quad (3.5)$$

y la ecuación (3.2) se puede escribir como sigue:

$$q_{\infty} = K \left[ 1 + \frac{4}{\pi R \alpha} \right] \quad (3.6)$$

Smettem y Clothier (1989) usan dos o más discos de distintos radios para determinar  $K$  y  $\Phi$  de la ecuación (3.2) o  $K$  y  $\alpha$  de la ecuación (3.6), mientras que Reynolds y Elrick (1991) utilizan dos o más potenciales de presión en la superficie del suelo.

Las restricciones de la ecuación de Wooding (1968), la incertidumbre con respecto al tiempo para alcanzar el flujo permanente y la pérdida de información al ignorar el estado transitorio restringen la aplicación de los métodos basados en flujo permanente.

El análisis en flujo transitorio implica experimentos más cortos y volúmenes menores en las muestras de suelo.

Las expresiones más recientes (Haverkamp *et al.*, 1994 y Zhang, 1997) tienen la forma siguiente:

$$I(t) = C_1\sqrt{t} + C_2t \quad (3.7)$$

Warrick (1992) propone expresiones para  $C_1$  y  $C_2$  obtenidas para tiempos pequeños con una difusividad constante y Zhang (1997) proporciona valores empíricos. Haverkamp *et al.* (1994), usando los trabajos previos de Turner y Parlange (1974) y Smettem *et al.* (1994), proponen las expresiones siguientes:

$$C_1 = S_0 \quad (3.8)$$

$$C_2 = \frac{(2-\beta)}{3}K_0 + \frac{\gamma}{R(\theta_0 - \theta_n)}S_0^2 \quad (3.9)$$

donde  $\beta$  es un parámetro que depende de la función de difusividad,  $0 \leq \beta \leq 1$ ;  $\gamma$  es una constante aproximadamente igual a 0.75.

La ecuación (3.7) toma entonces la forma:

$$I(t) = S_0\sqrt{t} + \left( \frac{2-\beta}{3}K_0 + \frac{\gamma}{R\Delta\theta}S_0^2 \right)t \quad (3.10)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (3.10) corresponde al flujo capilar vertical y domina la infiltración al inicio. El segundo término corresponde al flujo gravitacional y el tercer término representa el componente capilar lateral del flujo. La ecuación es válida para tiempos no cercanos al flujo permanente.

En la ecuación (3.10) el flujo lateral es lineal con el tiempo mientras que en Zhang (1997) se asume que el coeficiente  $C_2$  depende sólo de  $K_0$  y no de  $S_0$ .

Para encontrar los parámetros  $C_1$  y  $C_2$  de la ecuación (3.7), los datos pueden ser ajustados a diferentes formas de la misma ecuación: i) la infiltración acumulada, ecuación (3.7); ii) la velocidad de infiltración:  $q = C_1/2\sqrt{t} + C_2$ ; la infiltración acumulada en forma lineal:  $I/\sqrt{t} = C_1 + C_2\sqrt{t}$ ; y iv) la diferencial en forma lineal:  $dI/d\sqrt{t} = C_1 + 2C_2\sqrt{t}$ .

De acuerdo con Vandervaere *et al.* (2000), el cuarto método es el mejor porque otorga el mismo peso a todos los datos experimentales. En este método:

$$C_1 = S \quad (\text{ordenada al origen}) \quad (3.11)$$

$$C_2 = \frac{2-\beta}{3}K + \frac{\gamma S^2}{R\Delta\theta} \quad (\text{pendiente}) \quad (3.12)$$

### **3.3.3 Antecedentes del problema inverso**

En un estudio numérico, Simunek y van Genuchten (1996) analizan la viabilidad de aplicar la modelación inversa a datos de una prueba simple de infiltración con el permeámetro de disco, acoplando la solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional axisimétrica con un procedimiento no lineal de mínimos cuadrados. Estos autores encuentran que la curva de infiltración acumulada no es suficiente para obtener los parámetros de  $\theta(\psi)$  y  $K(\theta)$  y que debe incluirse información adicional. Simunek y van Genuchten (1997) proponen el uso de datos de una prueba de infiltración con múltiples tensiones para evitar la adquisición de otro tipo de datos, tales como el contenido de humedad o el potencial de presión. Sin embargo, los datos exclusivos de infiltración acumulada no permiten una solución inversa bien planteada, sino que deben considerarse datos colectados normalmente en una prueba de infiltración como el contenido de humedad final bajo el disco, la conductividad hidráulica que resulta del análisis de Wooding (1968) y contenido de humedad inicial.

Simunek *et al.* (1998b) utilizan datos de una prueba del permeámetro de dos discos con tensiones consecutivas de -200, -100 y -30 mm en un suelo limo-arenoso. La conductividad hidráulica que obtienen es similar a la obtenida con la solución de Wooding. Al obtener una curva de retención 10% inferior a la medida en laboratorio, señalan que la simulación con datos de laboratorio no corresponde con la infiltración en campo.

Simunek *et al.* (1999) utilizaron el permeámetro de disco con tensión múltiple en un suelo limoso reempaquetado e instrumentado con 16 tensiómetros en ocho posiciones bajo el disco y una prueba de TDR ("Time Domain Reflectometry") dos centímetros bajo el disco. La función objetivo para el método inverso se definió con diferentes combinaciones de la infiltración acumulada, humedad y potencial de presión. La curva de retención obtenida difiere de aquellas determinadas por los métodos de evaporación y olla y membrana de presión. Los autores argumentan que las propiedades predichas por el método inverso pueden ser más útiles para describir la infiltración.

Estos estudios no han logrado proporcionar un método eficiente y la instalación de tensiómetros bajo el disco resulta costosa y complicada.

### 3.3.4 Formulación del problema inverso

La formulación inversa para la caracterización hidrodinámica de suelos requiere de tres elementos básicos: i) definición de parámetros; ii) solución del problema directo; y iii) procedimiento de optimización.

#### a) Definición de parámetros

El flujo del agua bajo el infiltrómetro de disco es tridimensional, sin embargo, si se asume que no ocurre flujo normal al eje radial el problema puede formularse en una forma axisimétrica. El flujo pseudotridimensional puede resolverse usando la formulación bidimensional axisimétrica de la ecuación de Richards:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] + \frac{\partial K}{\partial z} \quad (3.13)$$

donde  $\theta$  es el contenido volumétrico de humedad [ $L^3L^{-3}$ ];  $\psi$  es el potencial de presión del agua en el suelo [L];  $K$  es la conductividad hidráulica [ $LT^{-1}$ ];  $r$  es una coordenada radial [L];  $z$  es la coordenada vertical [L] positiva hacia arriba; y  $t$  es el tiempo [T]. La ecuación (3.13) puede resolverse numéricamente para las siguientes condiciones iniciales y de frontera aplicables a un experimento con el infiltrómetro de disco:

$$\begin{aligned} \psi(r, z, t) &= \psi_i & t &= 0 \\ \psi(r, z, t) &= \psi_0(t) & 0 < r < r_0, z &= 0 \\ -\frac{\partial \psi(r, z, t)}{\partial z} - 1 &= 0 & r > r_0, z &= 0 \\ \psi(r, z, t) &= \psi_i & r^2 + z^2 &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $\psi_i$  es la carga de presión inicial [L];  $\psi_0$  es la presión impuesta por el infiltrómetro de disco sobre la superficie del suelo [L]; y  $r_0$  es el radio del disco [L].

La ecuación (3.13) sujeta a las condiciones iniciales y de frontera de la ecuación (3.14) se resuelve con el código cuasi-tridimensional en elemento finito de Simunek y van Genuchten (1994) denominado SWMS\_2D. La solución numérica está basada en el esquema iterativo propuesto por Celia *et al.* (1990) el cual, de acuerdo con los autores, mejora las condiciones de conservación de la masa.

Para las propiedades hidrodinámicas se utilizaron la función de van Genuchten (1980), ecuación (1.10), y la función de conductividad hidráulica del poro grande de Fuentes *et al.* (2003), ecuación (1.17).

Las características hidrodinámicas definidas presentan seis parámetros desconocidos:  $\{\phi, \theta_s, \theta_r, \psi_d, K_s, m\}$ . El contenido de humedad a saturación puede ser tomado igual a la porosidad, la cual se estima con la fórmula clásica siguiente:

$$\phi = 1 - \frac{\rho_b}{\rho_o} \quad (3.15)$$

donde  $\rho_b$  es la densidad del suelo seco [ $ML^{-3}$ ] y  $\rho_o$  es la densidad de las partículas [ $ML^{-3}$ ]; el contenido de humedad residual, siendo un parámetro de ajuste, se asume igual a cero (Haverkamp *et al.*, 2005); el parámetro de forma ( $m$ ) puede ser estimado a partir de la curva granulométrica si ésta se ajusta con la ecuación siguiente (Fuentes, 1992):

$$F(D) = \left[ 1 + \left( \frac{D_d}{D} \right)^{\frac{n}{2(1-s)}} \right]^{-m} ; \quad 0 < 2sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (3.16)$$

Los parámetros de escala de la presión y de la conductividad  $\{\psi_d, K_s\}$  pueden ser estimados a partir de la prueba con el infiltrómetro de disco a través de la modelación inversa, de modo de minimizar la función objetivo siguiente:

$$\Phi(\psi_d, K_s) = \sum_{i=1}^N \left[ I_i - \hat{I}(t_i; \psi_d, K_s) \right]^2 \quad (3.17)$$

donde  $N$  es el número de observaciones de la lámina infiltrada  $(t_j, I_j)$  y la función  $\hat{I}(t_j; \psi_d, K_s)$  es la lámina infiltrada calculada con la solución numérica de la ecuación de Richards.

El mínimo de la función objetivo generalmente se determina a través de un algoritmo de optimización no lineal. El más común de estos algoritmos es el de Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963). Este método lleva a cabo una interpolación entre el método de Gauss-Newton y el método del gradiente.

La conductividad hidráulica a saturación está relacionada con las propiedades del agua y del medio poroso como sigue:

$$K_s = \frac{g R_d^2}{8\nu T_d^2} (\phi - \theta_r)^{2s} \quad (3.18)$$

donde  $g$  es la aceleración gravitacional [ $LT^{-2}$ ],  $\nu$  es la viscosidad cinemática [ $L^2T^{-1}$ ],  $R_d$  es el radio de poro asociado a la presión  $\psi_d$  a través de la relación de Laplace:

$$R_d = -\frac{\lambda_L^2}{\psi_d} \quad (3.19)$$

en donde la escala capilar tiene el valor  $\lambda_L = 0.386$  cm si  $R_d$  y  $\psi_d$  están en centímetros, y  $T_d$  es el factor de tortuosidad de las trayectorias de flujo que ocurren en los poros de radio  $R_d$ .

De las ecuaciones (3.18) y (3.19) se deduce:

$$K_s \psi_d^2 = \Omega = \frac{g \lambda_L^4}{8\nu T_d^2} (\phi - \theta_r)^{2s} \quad (3.20)$$

Cuando se conocen  $K_s$  y  $\psi_d$ , el factor de tortuosidad se calcula con la expresión que resulta de la ecuación (3.20):

$$T_d = (\phi - \theta_r)^s \lambda_L^2 \sqrt{\frac{g}{8\nu\Omega}} \quad (3.21)$$

## b) Solución de la ecuación de transferencia

En el análisis que se muestra en este capítulo, para la solución numérica de la ecuación de transferencia se utiliza la versión 1.21 del programa de cómputo SWMS\_2D (Simunek *et al.*, 1994). El programa resuelve la ecuación de Richards (1931) y la ecuación de convección-dispersión para el transporte de solutos numéricamente con un esquema en elemento finito tipo Galerkin con funciones de base lineales. De acuerdo con el tamaño del problema, las matrices que resultan de la discretización de las ecuaciones son resueltas por un método directo como la eliminación gaussiana para matrices en banda, o métodos iterativos como el método de gradiente conjugado para matrices simétricas o orthomin (Vinsome, 1976) para matrices asimétricas. El programa está escrito en ANSI estándar FORTRAN 77.

La región de flujo se divide en una red de elementos triangulares. Las esquinas de estos elementos son los puntos nodales. La variable dependiente, la carga de presión  $\psi(x, z, t)$ , se aproxima por una función  $\psi'(x, z, t)$  de la manera siguiente:

$$\psi'(x, z, t) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x, z) \psi_n(t) \quad (3.22)$$

donde  $\varphi_n$  son funciones "piecewise" de base lineales que satisfacen la condición  $\varphi_n(x_m, z_m) = \delta_{nm}$ ,  $\psi_n$  son coeficientes desconocidos que representan la solución de la ecuación de Richards en los nodos y  $N$  es el número de nodos.

El método de Galerkin establece que el operador diferencial asociado con la ecuación de Richards es ortogonal a cada una de las  $N$  funciones de base, es decir:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ K \left( K_{ij}^A \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + K_{iz}^A \right) \right] + S \right\} \varphi_n d\Omega = 0 \quad (3.23)$$

Al aplicar la primera identidad de Green y con el reemplazo de  $\psi$  por  $\psi'$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \varphi_n + K K_{ij}^A \frac{\partial \psi'}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right) d\Omega = \\ \sum_e \int_{\Gamma_e} K \left( K_{ij}^A \frac{\partial \psi'}{\partial x_j} + K_{iz}^A \right) n_i \varphi_n d\Gamma + \sum_e \int_{\Omega_e} \left( -K K_{iz}^A \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} - S \varphi_n \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde  $\Omega_e$  representa el dominio ocupado por el elemento  $e$ , y  $\Gamma_e$  es un segmento de frontera del elemento  $e$ . Las condiciones de frontera tipo Neumann pueden ser incorporadas en el esquema numérico especificando la integral de línea en la ecuación (3.24).

A través de un proceso de simplificación e integración sobre los elementos se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en función del tiempo con coeficientes no lineales. En forma matricial, estas ecuaciones están dadas por:

$$[F] \frac{\partial \{\theta\}}{\partial t} + [A] \{\psi\} = \{Q\} - \{B\} - \{D\} \quad (3.25)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \sum_e K_i K_{ij}^A \int_{\Omega_e} \varphi_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} d\Omega \\ &= \sum_e \frac{K}{4A_e} \bar{K} \left[ K_{xx}^A b_m b_n + K_{xz}^A (c_m b_n + b_m c_n) + K_{zz}^A c_n c_m \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$B_n = \sum_e K_l K_{iz}^A \int_{\Omega_e} \varphi_l \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} d\Omega = \sum_e \frac{K}{2} \bar{K} (K_{xz}^A b_n + K_{zz}^A c_n) \quad (3.27)$$

$$F_{nm} = \delta_{nm} \sum_e \int_{\Omega_e} \varphi_n d\Omega = \delta_{nm} \sum_e \frac{K}{3} A_e \quad (3.28)$$

$$Q_n = -\sum_e \sigma_l \int_{\Gamma_e} \varphi_l \varphi_n d\Gamma = -\sum_e \sigma_n \lambda_n \quad (3.29)$$

$$D_n = \sum_e S_l \int_{\Omega_e} \varphi_l \varphi_n d\Omega = \sum_e \frac{K}{12} A_e (3\bar{S} + S_n) \quad (3.30)$$

donde las variables testadas representan valores promedio sobre un elemento e, los subíndices i y j indican direcciones espaciales (i,j=1,2), y:

$$\begin{aligned} l &= 1, 2, \dots, N & m &= 1, 2, \dots, N & n &= 1, 2, \dots, N \\ b_i &= z_j - z_k & c_i &= x_k - x_j \\ b_j &= z_k - z_i & c_j &= x_i - x_k \\ b_k &= z_i - z_j & c_k &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$A_e = \frac{c_k b_j - c_j b_k}{2} \quad \bar{K} = \frac{K_i + K_j + K_k}{3} \quad \bar{S} = \frac{S_i + S_j + S_k}{3}$$

La ecuación (3.29) es válida para una condición de frontera tipo flujo. Para una condición de frontera tipo gradiente la variable  $\sigma_l$  en la ecuación (3.29) deberá ser reemplazada por el producto de la conductividad hidráulica K y el gradiente prescrito  $\sigma_2 (=1)$ . Las ecuaciones (3.26) a (3.30) son válidas para un flujo bidimensional en un dominio cartesiano (x,z), y para el flujo en un sistema con geometría axisimétrica (x,z) en el cual x se usa como la coordenada radial. Para el flujo en un plano:

$$\kappa = 1 \quad \lambda_n = \frac{L_n}{2} \quad (3.32)$$

y para el flujo en geometría axisimétrica:

$$\kappa = 2\pi \frac{x_i + x_j + x_k}{3} \quad \lambda_n = L_n \pi \frac{x_n' + 2x_n}{3} \quad (3.33)$$



Los subíndices  $i$ ,  $j$ , y  $k$  en las ecuaciones (3.31) y (3.33) representan las tres esquinas de un elemento triangular  $e$ .  $A_e$  es el área del elemento  $e$ ,  $\bar{K}$  y  $\bar{S}$  son el promedio de la conductividad hidráulica y de la extracción de agua por las raíces en el elemento  $e$ , respectivamente,  $L_n$  es la longitud del segmento frontera conectado al nodo  $n$ , y  $x'_n$  es la coordenada  $x$  de un nodo frontera adyacente al nodo  $n$ . El símbolo  $\sigma_n$  en la ecuación (3.29) representa el flujo a través de la frontera en la vecindad del nodo frontera  $n$  (positivo cuando su dirección es hacia fuera del sistema). Se considera que el flujo en la frontera es uniforme sobre cada segmento frontera. Las entradas del vector  $Q_n$  son cero en todos los nodos internos que no actúan como fuentes o sumideros.

El procedimiento numérico para derivar la ecuación (3.25) incorpora dos consideraciones importantes que se suman a las relacionadas con el elemento finito tipo Galerkin. La primera se refiere a las derivadas temporales de los valores nodales del contenido de agua en (3.25). Estas derivadas temporales son ponderadas de acuerdo con:

$$\frac{d\theta_n}{dt} = \frac{\sum_e \int_{\Omega_e} \frac{\partial \theta}{\partial t} \varphi_n d\Omega}{\sum_e \int_{\Omega_e} \varphi_n d\Omega} \quad (3.34)$$

Esta consideración implementa la técnica "mass-lumping", la cual incrementa la tasa de convergencia del proceso iterativo en la solución (e.g. Neuman, 1973).

La segunda consideración en el esquema numérico está relacionada con el tensor de anisotropía  $K^A$ , el cual se mantiene constante en cada elemento. En contraste, el contenido de humedad  $\theta$ , la conductividad hidráulica  $K$ , la capacidad específica  $C$ , y la tasa de extracción de las raíces  $S$ , en un punto dado en el tiempo varían linealmente sobre cada elemento  $e$ . Por ejemplo, el contenido de humedad en cada elemento se expande de la manera siguiente:

$$\theta(x, z) = \sum_{n=1}^3 \theta(x_n, z_n) \varphi_n(x, z) \quad (3.35)$$

donde  $n$  representa los vértices del elemento  $e$ . La ventaja de la interpolación lineal es que no se requiere integración numérica para evaluar los coeficientes en (3.25).

La integración en el tiempo de (3.25) se realiza discretizando el dominio del tiempo en una secuencia de intervalos finitos y reemplazando las derivadas temporales por diferencias finitas. Se utiliza un esquema implícito hacia atrás:

$$[F] \frac{\{\theta\}_{j+1} - \{\theta\}_j}{\Delta t_j} + [A]_{j+1} \{\psi\}_{j+1} = \{Q\}_j - \{B\}_{j+1} - \{D\}_j \quad (3.36)$$

donde  $j+1$  denota el nivel del tiempo actual,  $j$  se refiere al nivel del tiempo anterior, y  $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ . La ecuación (3.15) representa el conjunto final de ecuaciones algebraicas que deberán resolverse. El conjunto de ecuaciones es generalmente altamente lineal debido a que los coeficientes  $\theta$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $D$ , y  $Q$  ( $Q$  sólo para condiciones de frontera tipo gradiente) son funciones de  $\psi$ . Los vectores  $D$  y  $Q$  son evaluados en el nivel de tiempo anterior.

Puesto que la ecuación (3.36) tiene una naturaleza no lineal, debe utilizarse un proceso iterativo para obtener la solución de la matriz global en cada paso de tiempo. En cada iteración, a partir de (3.36) se deriva un sistema de ecuaciones algebraicas linealizadas, el cual se resuelve, después de incorporar las condiciones de frontera, mediante eliminación Gaussiana o el método de gradiente conjugado. Después de la inversión, se recalculan los coeficientes en (3.36) usando la primera solución y se resuelve nuevamente el sistema. El proceso iterativo continúa hasta que se alcanza un grado satisfactorio de convergencia. La primera estimación de  $\psi$  en cada paso de tiempo, en la iteración cero, se obtiene por extrapolación de los valores de carga presión en los dos niveles anteriores de tiempo.

El código SWMS\_2D usa el método propuesto por Celia *et al.*, 1990. Este método consiste en separar el término del contenido de humedad en dos partes:

$$[F] \frac{\{\theta\}_{j+1} - \{\theta\}_j}{\Delta t_j} = [F] \frac{\{\theta\}_{j+1}^{k+1} - \{\theta\}_{j+1}^k}{\Delta t_j} + [F] \frac{\{\theta\}_{j+1}^k - \{\theta\}_j}{\Delta t_j} \quad (3.37)$$

donde  $k+1$  y  $k$  denotan las iteraciones actual y anterior, respectivamente; y  $j+1$  y  $j$  los niveles de tiempo actual y anterior, respectivamente. El segundo término en el lado derecho de (3.37) es conocido en la iteración actual. El primer término de la derecha puede expresarse en términos de la carga de presión:

$$[F] \frac{\{\theta\}_{j+1} - \{\theta\}_j}{\Delta t_j} = [F][C]_{j+1} \frac{\{\psi\}_{j+1}^{k+1} - \{\theta\}_{j+1}^k}{\Delta t_j} + [F] \frac{\{\theta\}_{j+1}^k - \{\theta\}_j}{\Delta t_j} \quad (3.38)$$

donde  $C_{nm} = \delta_{nm} C_n$ , y  $C_n$  representa el valor nodal de la capacidad específica. El primer término al lado derecho deberá desaparecer al final del proceso iterativo si la solución numérica converge. Esta característica particular garantiza errores relativamente pequeños en el balance de masa en la solución.

### c) Procedimiento de optimización

Para definir una función objetivo pueden considerarse diferentes tipos o clases de datos. Por ejemplo, en un experimento en flujo transitorio pueden obtenerse datos del primer nivel de aplicación de la ecuación de Richards, i.e. contenido de humedad o potencial de presión; y del segundo nivel (e.g. infiltración acumulada). La función objetivo puede definirse entonces con la expresión siguiente (Simunek y van Genuchten, 1997):

$$\Phi(\beta, \hat{q}_k) = \sum_{j=1}^k \left[ v_j \sum_{i=1}^{n_j} \left\{ w_i [q_j(t_i) - \hat{q}_j(t_i, \beta)]^2 \right\} \right] \quad (3.39)$$

donde  $k$  es el número de clases de datos;  $n_j$  es el número de datos en la clase  $j$ ;  $q_j(t_i)$  es el datos medido en la clase  $j$  en el tiempo  $i$ ;  $\hat{q}_j(t_i, \beta)$  son los datos predichos por el modelo con el vector de parámetros  $\beta$ ;  $v_j$  y  $w_i$  son factores de peso asociados a una clase o a un punto, respectivamente.

Generalmente, a  $w$  se le asigna la unidad y a  $v$  una constante relacionada con la magnitud de los datos en cada clase:

$$v_j = (n_j \sigma_j^2)^{-1} \quad (3.40)$$

la cual normaliza los datos por su variancia  $\sigma_j^2$  (Clausnitzer y Hopmans, 1995).

El mínimo de la función objetivo generalmente se determina a través de un algoritmo de optimización no lineal. El más común de estos algoritmos es el de Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963). Este método lleva a cabo una interpolación entre el método de Gauss-Newton y el método del gradiente.

### d) Consideraciones adicionales

En la modelación inversa es recomendable construir una superficie de respuesta. El objetivo de la superficie de respuesta es mostrar la relación entre los parámetros y la función objetivo. Para construir una superficie de respuesta de un par de parámetros se discretiza el valor de estos parámetros alrededor de sus valores reales mientras el resto de los parámetros se conservan constantes en su respectivo valor real. Para cada combinación de parámetros se realiza la simulación numérica y se calcula la función objetivo. Para ilustrar el comportamiento de la función objetivo con respecto al par de parámetros considerados se construye una gráfica con líneas de igual valor de la función objetivo.

Con la superficie de respuesta pueden verificarse la existencia y unicidad de la solución y la sensibilidad de los parámetros. De la superficie de respuesta pueden

inferirse elementos sobre la forma de la distribución de parámetros, correlación y regiones de confianza (Press *et al.*, 1992). Toorman *et al.* (1992), Russo *et al.* (1991) y Simunek y van Genuchten (1996) presentan ejemplos del uso de las superficies de respuesta.

Un problema inverso está bien planteado si cumple con las propiedades siguientes (Carrera y Neumann, 1986):

- Existencia:
- Unicidad.
- Estabilidad.

De acuerdo con Mclaughlin y Townley (1996), un problema mal planteado no implica que el problema inverso carezca de sentido, sino que la formulación deberá ser modificada. Un problema mal planteado puede mejorarse también reduciendo el número de parámetros. El problema de unicidad puede verificarse resolviendo el problema inverso en repetidas ocasiones con diferentes valores iniciales de los parámetros. Russo *et al.* (1991) concluyen que, aunque la identificación depende de la estructura de los modelos y la unicidad y estabilidad de la calidad de la información complementaria y del error de medida, es imposible determinar a priori si el problema inverso está bien planteado.

Uno de los aspectos más importantes en la utilización de métodos inversos es la posible correlación entre parámetros, la cual puede originar que sean determinados erróneamente cuando la modificación de un parámetro es compensada por el correspondiente cambio en el parámetro correlacionado. Si los parámetros son perfectamente independientes, el error de medida en los datos experimentales puede provocar una función objetivo poco sensible a los parámetros, o en caso contrario, una alta sensibilidad que provoca inestabilidad en la solución.

El análisis de sensibilidad tiene por objeto mejorar el diseño de un experimento cuyo propósito sea la optimización de parámetros. Este análisis consiste en la realización de pruebas numéricas para verificar la sensibilidad de los datos medidos al cambio de parámetros. En un experimento deberán medirse aquellas variables más sensibles al cambio de los parámetros. Simunek y van Genuchten (1996) llevaron a cabo un análisis de este tipo para el infiltrómetro de disco.

### 3.4 Aplicación

La información experimental se obtuvo en la mesa de drenaje del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, la cual es un contenedor de 40 m de longitud, tres metros de ancho y cuatro metros de profundidad (Figura 3.2). El material de relleno proviene de un banco de arena basáltica en Cuautla, Morelos. Se clasifica como arena medio gruesa con proporciones en peso de las fracciones de arena muy gruesa (1 -2 mm), arena fina a gruesa (0.125 - 1 mm), y finos (< 0.125 mm) fueron de 12%, 81% y 7%, respectivamente. El material fue seleccionado y colocado en ocho etapas para tener un medio poroso uniforme, con estructura masiva y sin capas (Tamari *et al.*, 2001).



Figura 3.2 Vista de la mesa de drenaje en el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.

Se seleccionaron veinte sitios de muestreo. La densidad aparente se midió en cada uno de los veinte sitios, Figura 3.3. La densidad de partículas se consideró igual a  $2.65 \text{ g cm}^{-3}$ .



Figura 3.3 Determinación de la densidad aparente.

El valor del parámetro de forma  $m$  de las ecuaciones (1.10) y (1.17) fue determinado para cada uno de los sitios, de acuerdo con el método indirecto presentado en el capítulo 2, ajustando a los datos experimentales la ecuación:

$$F(D) = \left[ 1 + \left( \frac{D_d}{D} \right)^{\frac{n}{2(1-s)}} \right]^{-m} ; \quad 0 < 2sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (3.41)$$

En la Figura 3.4 se muestra el ajuste para el caso de la porosidad promedio, en cuyo caso  $m = 0.1836$ . Los valores del parámetro  $m$  para cada uno de los sitios se muestran en el Cuadro 3.1.

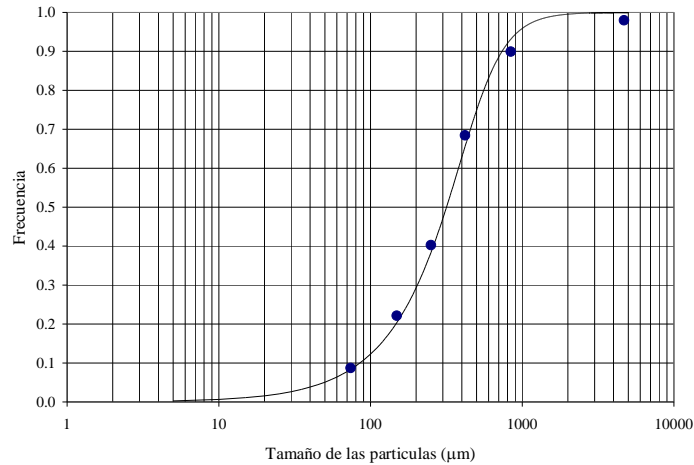


Figura 3.4 Ajuste de la curva granulométrica del suelo.

Cuadro 3.1 Densidad aparente, porosidad y parámetros  $s$  y  $m$  en los veinte sitios.

Sitio	Densidad aparente (g/cm <sup>3</sup> )	Porosidad (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )	Parametro $s$ (adimensional)	Parámetro de forma $m$ (adimensional)
1	1.37	0.4843	0.6909	0.1785
2	1.45	0.4524	0.6843	0.1832
3	1.51	0.4302	0.6797	0.1865
4	1.45	0.4520	0.6842	0.1833
5	1.48	0.4416	0.6820	0.1848
6	1.49	0.4385	0.6814	0.1853
7	1.51	0.4294	0.6795	0.1867
8	1.44	0.4572	0.6853	0.1825
9	1.48	0.4410	0.6819	0.1849
10	1.53	0.4244	0.6785	0.1874
11	1.39	0.4766	0.6893	0.1796
12	1.39	0.4762	0.6892	0.1797
13	1.46	0.4480	0.6834	0.1839
14	1.46	0.4497	0.6837	0.1836
15	1.37	0.4827	0.6906	0.1787
16	1.42	0.4648	0.6869	0.1814
17	1.44	0.4560	0.6850	0.1827
18	1.49	0.4369	0.6811	0.1855
19	1.40	0.4715	0.6883	0.1804
20	1.46	0.4472	0.6832	0.1840
Promedio	1.45	0.4530	0.6844	0.1831
Desv. Est.	0.05	0.0180	0.0037	0.0027
Mínimo	1.37	0.4244	0.6785	0.1785
Máximo	1.53	0.4843	0.6909	0.1874

Para determinar los parámetros de escala de la presión y de la conductividad hidráulica saturada  $\{\psi_d, K_s\}$ , se realizaron veinte pruebas de infiltración con el infiltrómetro de disco, Figura 3.5. Antes de cada prueba se midió la humedad inicial (Cuadro 3.2).

Cuadro 3.2 Humedad inicial en los veinte sitios.

Sitio	Humedad inicial (cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )
1	0.0560
2	0.0057
3	0.0458
4	0.0061
5	0.0574
6	0.0068
7	0.0657
8	0.0053
9	0.0410
10	0.0063
11	0.0613
12	0.0064
13	0.0317
14	0.0122
15	0.0515
16	0.0093
17	0.0478
18	0.0116
19	0.0653
20	0.0102
Promedio	0.0302
Desv. Est.	0.0241
Mínimo	0.0053
Máximo	0.0657



En cada una de las pruebas se estableció una condición de presión igual a cero sobre la superficie del suelo. Los datos medidos de la lámina infiltrada acumulada se muestran en la Figura 3.6.



Figura 3.5 Vista de una de las veinte pruebas de infiltración.

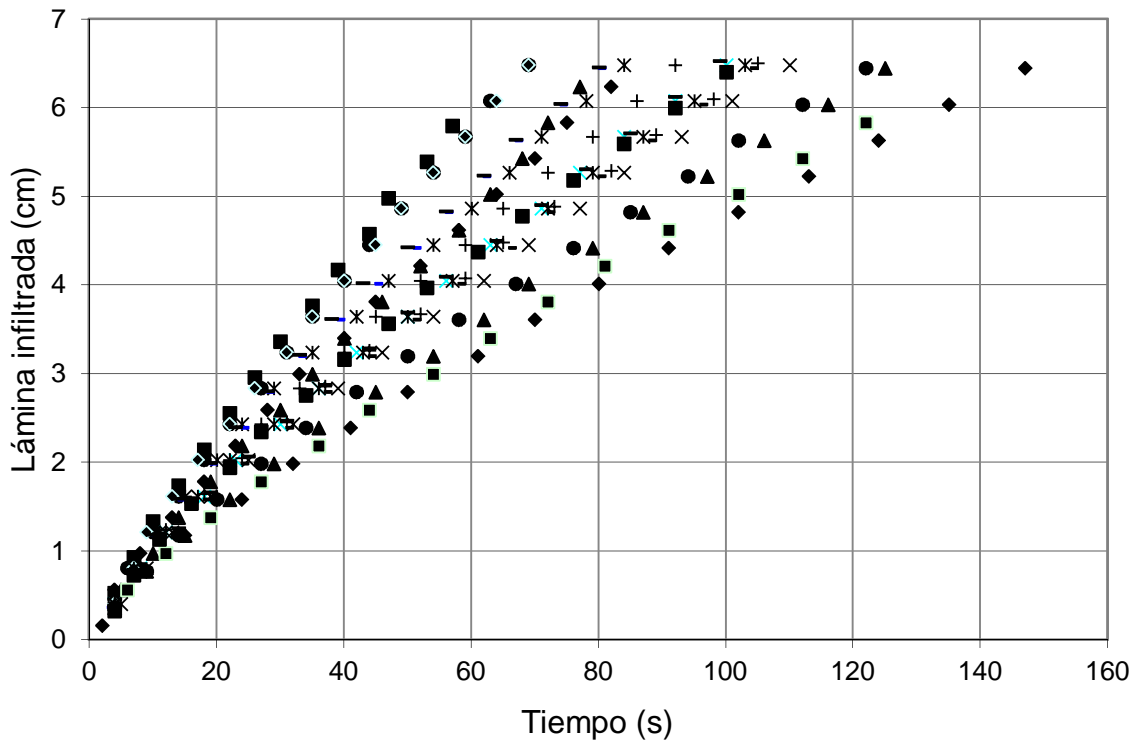


Figura 3.6 Lámina infiltrada acumulada medida en las veinte pruebas de infiltración.

Los parámetros  $\{\psi_d, K_s\}$  se determinaron inversamente para cada prueba.

La región de flujo para la modelación es de 100x100 cm, con una discretización en ambos sentidos de 0.25 cm mínima y 5 cm máxima. El número puntos nodales es de 1,522. La discretización temporal se realizó con 0.01 s, con 0.001 s mínimo y 1.0 s máximo.

Los resultados se muestran en el Cuadro 3.3. En este caso se optimizan  $2N_s$  parámetros, es decir, dos parámetros en cada prueba de infiltración. En el mismo cuadro se muestran los valores de tortuosidad calculados con la ecuación (3.21). Los valores resultantes de la conductividad hidráulica saturada son del mismo orden de magnitud que los obtenidos por Arroyo (1996) con los métodos del infiltrómetro de doble cilindro y el método de Wind en laboratorio.

Cuadro 3.3 Parámetros  $\{\psi_d, K_s\}$  de la modelación inversa individual en los veinte sitios.

Sitio	$\psi_d$ (cm)	$K_s$ (cm/h)
1	9.8	108
2	7.1	76
3	13.1	114
4	7.1	83
5	10.0	110
6	7.8	90
7	9.4	99
8	8.9	88
9	10.0	108
10	7.8	82
11	10.6	127
12	7.4	97
13	9.8	97
14	8.3	90
15	9.5	117
16	9.7	106
17	10.0	92
18	5.9	80
19	11.5	121
20	7.5	102
Promedio	9.1	99
Desv. Est.	1.7	14
Mínimo	5.9	76
Máximo	13.1	127

A pesar de tratarse de un suelo supuestamente homogéneo, los resultados experimentales y los parámetros encontrados muestran una importante variabilidad espacial.

### **3.5 Conclusiones**

Se analiza la modelación inversa como herramienta para la estimación de los parámetros de estructura. Para tal efecto se presenta una breve descripción del desarrollo histórico de los métodos inversos para la determinación de las propiedades hidrodinámicas de los suelos. De esta revisión se derivan dos importantes conclusiones: i) en condiciones de laboratorio se han propuesto y mejorado algunas metodologías que han producido algunos buenos resultados, sin embargo, se enfatiza el hecho que en la mayoría de los casos los parámetros determinados en laboratorio son inconsistentes para las condiciones de campo; y ii) las funciones objetivo utilizadas en los métodos inversos requieren información adicional para complementar a la tradicionalmente obtenida en una prueba de infiltración convencional. Se muestra el planteamiento general del problema inverso para la caracterización hidrodinámica de suelos y un estudio experimental.

Puesto que en general puede afirmarse que cuando un problema inverso está mal planteado no significa que carezca de significado, sino que la formulación debe ser modificada, la modelación inversa puede ser cuestionada sólo por la representatividad de los parámetros obtenidos. Esta última condición tiene que ver con lo que se considera volumen elemental representativo y la existencia de las propiedades efectivas, lo cual se asume implícitamente al utilizar la modelación inversa.

## **CAPÍTULO 4 LAS PROPIEDADES HIDRODINÁMICAS EFECTIVAS DEL SUELO EN EL RIEGO POR MELGAS**

### **4.1 Introducción**

Cuando el objetivo de la caracterización hidrodinámica de los suelos es la estimación de parámetros para un modelo de simulación en la escala de campo, es muy probable que la variabilidad espacial de las propiedades obligue a descartar la utilización de modelos tradicionales determinísticos. Esta consideración ha motivado una amplia atención en años recientes al análisis de los problemas de flujo de agua y transporte de solutos en un marco probabilista, en el cual la heterogeneidad es representada en términos de parámetros hidrodinámicos aleatorios caracterizados por un número limitado de parámetros estadísticos.

La variabilidad espacial en la escala de campo puede ser considerada de dos maneras: i) identificando los valores locales de todas las propiedades relevantes e incorporarlas en un modelo determinístico, e.g., tridimensional para simular las distribuciones detalladas de presión y contenido de humedad; o ii) utilizando parámetros “efectivos” o “equivalentes” que capturen los efectos combinados de la variabilidad.

La primera de las opciones es de muy difícil implementación porque la cantidad de datos requeridos puede ser muy grande y porque en la mayoría de los casos los objetivos no son conocer una distribución detallada de las distribuciones de la presión y contenido de humedad, sino promedios espaciales o distribuciones en las grandes escalas.

En la segunda opción se espera que las simulaciones basadas en parámetros únicos provean información satisfactoria sobre el fenómeno de interés, e.g. predecir el cambio en tamaño y forma de una pluma de contaminación o la posición del frente de avance y lámina infiltrada en función del tiempo en el riego por gravedad.

La existencia de los parámetros efectivos es una cuestión abierta. En el presente capítulo la discusión se basa en el caso particular el fenómeno de avance en el riego por melgas.

Para representar las propiedades hidrodinámicas con parámetros efectivos pueden identificarse tres opciones: i) promedios estadísticos simples; ii) modelación inversa; y iii) enfoque estocástico. Al enfoque estocástico y a la modelación inversa con experimentos en flujo transitorio se les atribuye conceptualmente un futuro promisorio. El análisis del presente capítulo se enfoca sobre la existencia de las propiedades hidrodinámicas efectivas tal y como estas son obtenidas a través de modelación inversa. Para tal efecto se analiza el fenómeno de avance-infiltración en el riego por melgas.

## 4.2 Avance-infiltración en el riego por melgas

### 4.2.1 Avance

El riego por melgas puede dividirse en cuatro fases: avance, almacenamiento, consumo y recesión. La fase de avance inicia con la introducción del agua en la melga y termina cuando se alcanza el extremo final. La modelación del riego puede hacerse con las ecuaciones de Barré de Saint-Venant, formadas por las ecuaciones obtenidas de los principios de conservación de la masa y cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + V_i = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (qU)}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} + gh(J - J_o) + \beta V_i U = 0 \quad (4.2)$$

en donde  $x$  es la dirección principal del movimiento  $[L]$ ;  $t$  es el tiempo  $[T]$ ;  $q(x,t) = U(x,t)h(x,t)$  es el gasto por unidad de ancho de melga o gasto unitario  $[L^2 T^{-1}]$ ;  $U = U(x,t)$  es la velocidad media en una sección transversal  $[LT^{-1}]$ ;  $h = h(x,t)$  es el tirante del agua sobre la superficie del suelo  $[L^2 T^{-1}]$ ;  $J_o = -\partial Z/\partial x$ , con  $Z$  la coordenada vertical orientada positivamente hacia arriba  $[L^2 T^{-1}]$ , es asimilada generalmente a la pendiente topográfica de la superficie del suelo cuando el ángulo de inclinación es pequeño  $[L L^{-1}]$ ;  $J = J(x,t)$  es la pendiente de fricción  $[L L^{-1}]$ ;  $g$  es la aceleración gravitacional  $[L T^{-2}]$ ;  $V_i = V_i(x,t) = \partial l(x,t)/\partial t$  es la velocidad de infiltración  $[L T^{-1}]$ ,  $l = l(x,t)$  es el volumen infiltrado por unidad de ancho y por unidad de longitud de la melga o lámina infiltrada  $[L]$ ; el parámetro adimensional  $\beta$  está definido como  $\beta = V_{ix}/U$ , donde  $V_{ix}$  es la proyección en la dirección del movimiento de la velocidad de salida de la masa de agua debido a la infiltración, generalmente es despreciada.

En la fase de avance del riego las condiciones iniciales y de frontera son las siguientes:

$$q(x,0) = 0 \quad h(x,0) = 0 \quad (4.3)$$

$$q(0,t) = q_o, \quad q(x_f,t) = 0 \quad h(x_f,t) = 0 \quad (4.4)$$

donde  $q_o$  es el gasto unitario constante impuesto a la entrada de la melga;  $x_f(t)$  es la posición del frente de onda.

Para cerrar el sistema (4.1)-(4.4) es necesario proporcionar ecuaciones para la velocidad de infiltración y la pendiente de fricción.

En cuanto a la ley de resistencia hidráulica, que relaciona la pendiente de fricción con la velocidad media y el tirante de agua, puede utilizarse la ley propuesta por Fuentes (1992), que resulta del análisis del acoplamiento de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Richards en la singularidad que se manifiesta en la entrada de la melga:

$$U = k \frac{g^d}{v^{2d-1}} h^{3d-1} J^d \quad ; \quad q = Uh = kv \left( \frac{gh^3 J}{v^2} \right)^d \quad (4.5)$$

donde  $v$  es el coeficiente de viscosidad cinemática [ $L^2T^{-1}$ ];  $k$  es una constante adimensional que depende principalmente de la rugosidad del suelo; la potencia  $d$  es tal que  $1/2 < d < 1$ , el límite inferior corresponde al régimen de Chézy y el superior al régimen de Poiseuille.

Para representar la fase de avance, las ecuaciones de Saint-Venant se resuelven de manera aproximada. La versión integral de la ecuación de continuidad, ecuación (4.1), considerando las condiciones iniciales y de frontera, ecuaciones (4.3)-(4.4), es la siguiente:

$$q_0 t = \int_0^{x_f} \phi(x, t) dx \quad (4.6)$$

donde  $\phi(x, t) = h(x, t) + l(x, t)$  representa la lámina total de agua almacenada.

En un estudio detallado del riego por gravedad realizado por Saucedo *et al.* (2001) utilizando las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y de Richards demuestran que considerar la lámina infiltrada como una función solamente del tiempo de contacto es suficiente para describirlo adecuadamente, es decir, se supone que la lámina infiltrada es una función solamente del tiempo de contacto ( $\tau$ ) del agua con el suelo en el punto  $x$ , definido por  $\tau(x, t) = t - t_x$ , donde  $t$  es el tiempo de total de avance y  $t_x$  es el tiempo de llegada de la onda de avance al punto  $x$ .

Se ha mostrado que el modelo hidrológico de Lewis y Milne (1938) es una buena aproximación en la fase de avance del riego por gravedad ya que conserva sus principales características (Rendón *et al.*, 1997) y será retenido por su sencillez para el estudio de la variabilidad espacial de las propiedades hidrodinámicas del suelo y su impacto en la fase mencionada.

El volumen almacenado se define como:

$$\phi(\tau) = \bar{h} + I(\tau) \quad (4.7)$$

El tirante medio puede ser estimado a partir del perfil de la onda en régimen permanente ( $\partial h/\partial t = 0$  y  $\partial q/\partial t = 0$ ). De las ecuaciones (4.1)-(4.2) se deduce:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{J_o - J + 2\gamma K_s q / gh^2}{1 - F^2} \quad (4.8)$$

donde  $\gamma = 1 - \frac{1}{2}\beta$ , y el número de Froude definido por:  $F^2 = q^2 / gh^3$ .

La ecuación (4.8) se integra en general de manera numérica, sin embargo puede obtenerse una solución analítica aproximada si se considera que en la posición del frente de la onda ( $x = x_f$ ) el término predominante es la pendiente de fricción:  $dh/dx \cong -J$ . La pendiente de fricción en términos del tirante y del gasto se deduce de la ecuación (4.5):  $J = (v^2/gh^3)(q/kv)^{1/d}$ .

Cuando  $t \rightarrow \infty$ , la onda de Saint-Venant está completamente establecida, el tirante ya no depende del tiempo:  $\partial h/\partial t = 0$ . La ecuación de continuidad, ecuación 4.7a, se reduce a:  $dq/dx + K_s(x) = 0$ . Su integración conduce a ( $q = 0$  en  $x = x_{max}$ ):

$$q(x) = \int_x^{x_{max}} K_s(\bar{x}) d\bar{x} \quad (4.9)$$

La variación del gasto con respecto a  $x$  puede estimarse considerando que la conductividad hidráulica en la ecuación (4.9) es igual a la media, es decir:  $q = q_o(1 - x/x_{max})$ . La integración conduce a  $h(x) = h_r(1 - x/x_{max})^\delta$ , con  $\delta = (1 + d)/4d$  y  $h_r = (v^2 x_{max} / \delta g)^{1/4}$ , y para extrapolar este perfil hasta la entrada de la melga se reemplaza el tirante  $h_r$  por el tirante normal  $h_o$ . El tirante medio se obtiene del volumen sobre la superficie dividido por  $x_{max}$ :

$$\bar{h} \cong \left( \frac{4d}{5d+1} \right) h_o \quad (4.10)$$

donde:

$$h_o = \left( \frac{v^2}{gJ_o} \right)^{1/3} \left( \frac{q_o}{kv} \right)^{1/3d} \quad (4.11)$$



Debe notarse que el perfil en potencia proporcionado por el comportamiento de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant en tiempos largos se puede aplicar para describir de manera aproximada la forma del perfil para todo tiempo si se escribe como sigue:

$$h(x,t) \cong h_o(t) \left[ 1 - \frac{x}{x_f(t)} \right]^\delta \quad (4.12)$$

El tirante medio en función del tiempo resulta de la integración de este perfil desde 0 a  $x_f(t)$ , a saber:

$$\bar{h}(t) \cong \frac{h_o(t)}{1+\delta} \quad (4.13)$$

en la cual se debe proporcionar la función  $h_o(t)$ . Con fines de ilustración del perfil superficial se puede asumir el valor constante  $h_o$  proporcionado por la (4.11).

Por otra parte, la velocidad de infiltración puede calcularse con la ecuación de Richards (1931). Sin embargo, para orientar nuestro análisis a la existencia de las propiedades hidrodinámicas efectivas y sin pérdida de generalidad, utilizaremos la ecuación de Green y Ampt (1911).

#### **4.2.2 Infiltración**

Para el estudio de la variabilidad espacial de la infiltración se utiliza el modelo de Green y Ampt (1911), el cual puede deducirse a partir de la ecuación de Richards (1931) cuando la difusividad hidráulica se asimila a una densidad de Dirac y la función de conductividad hidráulica  $K(\theta)$  es continua (Parlange *et al.*, 1982, 1985). El modelo de Green y Ampt (1911) es representado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dl}{dt} = K_s \left[ 1 + \frac{(h+h_f)(\theta_s - \theta_o)}{l} \right] \quad (4.14)$$

donde  $l$  es la lámina infiltrada aculada [L];  $t$  es el tiempo [T];  $h_f$  es la succión en el frente de humedecimiento (flujo en pistón) [L], y  $h$  es la lámina de agua sobre la superficie del suelo (presión positiva) [L].

La integración de la ecuación (4.14) con la condición  $l = 0$  en  $t = 0$  conduce a:

$$I = K_s t + \lambda \ln \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right) \quad (4.15)$$

donde  $\lambda = (h + h_f)(\theta_s - \theta_o)$

La lámina infiltrada en el modelo hidrológico es calculada con la ecuación (4.15) con  $\lambda = (\bar{h} + h_f)(\theta_s - \theta_o)$ .

La ecuación (4.15) presenta dos parámetros desconocidos:  $h_f$  y  $K_s$ . Los parámetros  $\theta_s$ ,  $\theta_o$  y  $h$  son medidos.

Si se cuenta con  $N_s$  pruebas de infiltración se deben identificar  $2N_s$  parámetros y como se mostró, el análisis de la variabilidad espacial de estos parámetros puede simplificarse con la utilización de la teoría de los medios similares.

### 4.3 Escalamiento

#### 4.3.1 Escalamiento de Miller y Miller

Las técnicas de escalamiento reducen los efectos de la variabilidad en los parámetros del suelo y pueden clasificarse en dos grandes grupos: los métodos con bases físicas y los métodos empíricos. Entre los primeros se tienen los métodos de análisis dimensional e inspeccional. Estos últimos están basados en el concepto de similaridad y permiten convertir un conjunto de cantidades dimensionales interrelacionadas físicamente en un conjunto de cantidades no dimensionales que conservan la interrelación original para un sistema. En los sistemas físicos pueden definirse tres tipos de similaridad: geométrica (i.e., Miller y Miller, 1955), cinemática y dinámica (teoría de grupos de Lie, Sposito, 1990). Los factores de escala obtenidos a través de este análisis dimensional tienen significado físico definido en términos del sistema bajo estudio.

En los métodos basados en técnicas empíricas se obtienen factores de escala (un sólo valor) mediante normalización funcional para cada relación establecida experimentalmente mediante análisis de regresión (i.e. Warrick *et al.*, 1977).

En el presente trabajo de investigación se retiene el escalamiento de Miller y Miller.

La similitud de Miller es un algoritmo con bases físicas para definir relaciones invariantes de escala de las propiedades del agua en medios porosos homogéneos. Con el uso de la similitud de Miller, puede imaginarse que el heterogéneo campo es la unión de dominios aproximadamente homogéneos, cada uno de los cuáles puede ser representado por sólo una escala de longitud característica. La heterogeneidad se refleja en la variabilidad espacial de la escala de longitud.

Miller y Miller (1956) son los primeros en remarcar la invariancia de escala de las ecuaciones de movimiento en medios porosos. El concepto fundamental que soporta la teoría de similitud de Miller y Miller es una longitud característica que refleja el tamaño de las partículas sólidas y las dimensiones de los poros en un arreglo geométrico particular. Si se acepta la similaridad geométrica, la variabilidad de las características hidrodinámicas del suelo puede ser descrita por un solo factor de escala o de similitud ( $r_i$ ):

$$r_i = \frac{R_j}{R_*} \quad (4.16)$$

donde  $R_j$  y  $R_*$  son escalas de longitud características del medio (j) y de referencia (\*), respectivamente.

La similitud clásica de Miller y Miller (1956) se basa en una relación física entre el tamaño efectivo de poro y el potencial de presión (ecuación de Laplace):

$$\psi = \frac{2\sigma}{\rho g r} \quad (4.17)$$

donde  $\sigma$  [ $MT^{-2}$ ] es la tensión superficial en la interface aire-agua,  $\rho$  [ $ML^{-3}$ ] es la densidad del agua, y  $g$  [ $LT^{-2}$ ] es la aceleración gravitacional.

La ecuación (4.17) define un radio de poro que corresponde a cada valor medido de  $\psi$ . Se dice que dos medios porosos son Miller-similares si puede encontrarse un factor de escala  $r_j$  [L] para cada uno de ellos, tal que valores idénticos del radio adimensional  $R_j/r_j$  implica similitud geométrica en el arreglo microscópico de poros y partículas sólidas. Los medios similares de este tipo exhiben estructuras microscópicas que parecen idénticas, excepto por la escala, en el mismo sentido de los triángulos semejantes.

De la teoría de flujo viscoso pueden derivarse las siguientes reglas de escalamiento:

$$\theta_j = \theta_* \quad (4.18)$$

$$\psi_j = r_j \psi_* \quad (4.19)$$

$$K_j = r_j^2 K_* \quad (4.20)$$

y en general:

$$\zeta_j = r_j^n \zeta_s \quad (4.21)$$

En el Cuadro 4.1 se muestra el valor del exponente para diferentes variables relacionadas con la transferencia del agua en el suelo.

Cuadro 4.1 Escalamiento de Miller y Miller y variables de flujo.

Variable	$\theta$	$\psi, l$	D	q, v	x,y,z	t
Exponente	0	-1	1	2	-1	-3

Las relaciones para la curva de infiltración acumulada son obtenidas a partir de la invariancia de escala de la ecuación de Richards.

Se debe observar que la similitud entre los medios induce que la porosidad y el factor de tortuosidad son constantes

#### 4.3.2 Aplicación en mesa de drenaje

Si en una región del espacio se realizan  $N_s$  pruebas de infiltración, la información experimental puede ser analizada de manera conjunta si se supone que los medios porosos son similares.

Las relaciones entre los parámetros de escala de la presión y la conductividad hidráulica a saturación de los suelos j-ésimo y de referencia son:

$$\Psi_{dj} = \frac{\Psi_{d^*}}{r_j} \quad (4.22)$$

$$K_{sj} = r_j^2 K_{s^*} \quad (4.23)$$

La combinación de las ecuaciones (4.22) y (4.23) conduce a la relación siguiente:

$$K_{sj} \Psi_{dj}^2 = K_{s^*} \Psi_{d^*}^2 = \Omega \quad (4.24)$$

en donde  $\Omega$  es un parámetro característico de la región estudiada.

La ecuación (4.24) permite reducir el número de parámetros desconocidos de  $2N_s$  a  $N_s + 1$ , es decir  $\{K_{sj}, \Omega\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_s$ . Este conjunto de parámetros puede ser estimado mediante la minimización de la siguiente función objetivo:

$$\Phi(K_{s1}, K_{s2}, \dots, K_{sN_s}, \Omega) = \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i=1}^{N_j} \left[ I_i - \hat{I}(t_i; K_{s1}, K_{s2}, \dots, K_{sN_s}, \Omega) \right]^2 \quad (4.25)$$

donde  $N_j$  es el número de observaciones realizadas en el suelo  $j$ -ésimo.

Puesto que generalmente  $K_s$  sigue una distribución log-normal, es conveniente construir el suelo de referencia a partir de la condición de normalización siguiente del logaritmo de los factores de escala (Fuentes, 1992):

$$\sum_{j=1}^{N_s} \ln(r_j) = 0 \quad (4.26)$$

la cual implica que la conductividad hidráulica del suelo de referencia es la media geométrica:

$$\ln(K_{s*}) = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \ln(K_{sj}) \quad (4.27)$$

En el caso de la información experimental obtenida en la mesa de drenaje: la porosidad se considera el valor promedio,  $\phi = 0.45 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ , con lo cual resulta  $s = 0.68$  y  $m = 0.187$ . Para la humedad inicial se toma el valor promedio, es decir,  $0.302 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ . De la optimización resulta un parámetro  $\Omega = 1.87 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  y los veinte valores de conductividad hidráulica mostrados en Cuadro 4.2. La conductividad hidráulica del suelo de referencia se calcula como la media geométrica, ecuación (4.27), y los factores de escala mostrados en el Cuadro 4.2 se calculan de acuerdo con la ecuación (4.23). En la Figura 4.1 se muestran los datos experimentales de las veinte pruebas de infiltración escalados y la función de infiltración que resulta de la ecuación de Richards con los parámetros del suelo de referencia, es decir,  $\psi_d = -7.9 \text{ cm}$  y  $K_s = 106 \text{ cm/h}$ . La tortuosidad en este caso tiene un valor de 2.22.

Cuadro 4.2 Parámetro  $\{K_s\}$  y factores de escala del análisis conjunto en la mesa de drenaje.

Sitio	$K_s$ (cm/h)	Factor de escala (r) (adimensional)
1	124	1.1
2	180	1.3
3	128	1.1
4	100	1.0
5	131	1.1
6	167	1.3
7	113	1.0
8	138	1.1
9	101	1.0
10	166	1.2
11	62	0.8
12	71	0.8
13	88	0.9
14	98	1.0
15	75	0.8
16	95	0.9
17	94	0.9
18	139	1.1
19	58	0.7
20	101	1.0

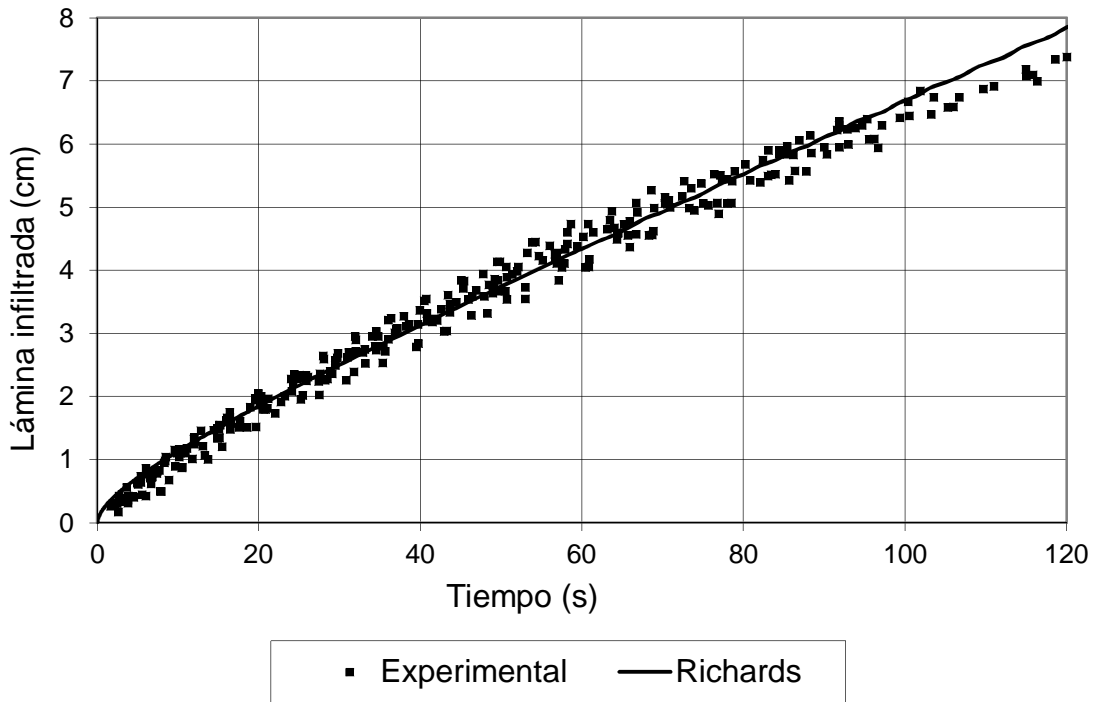
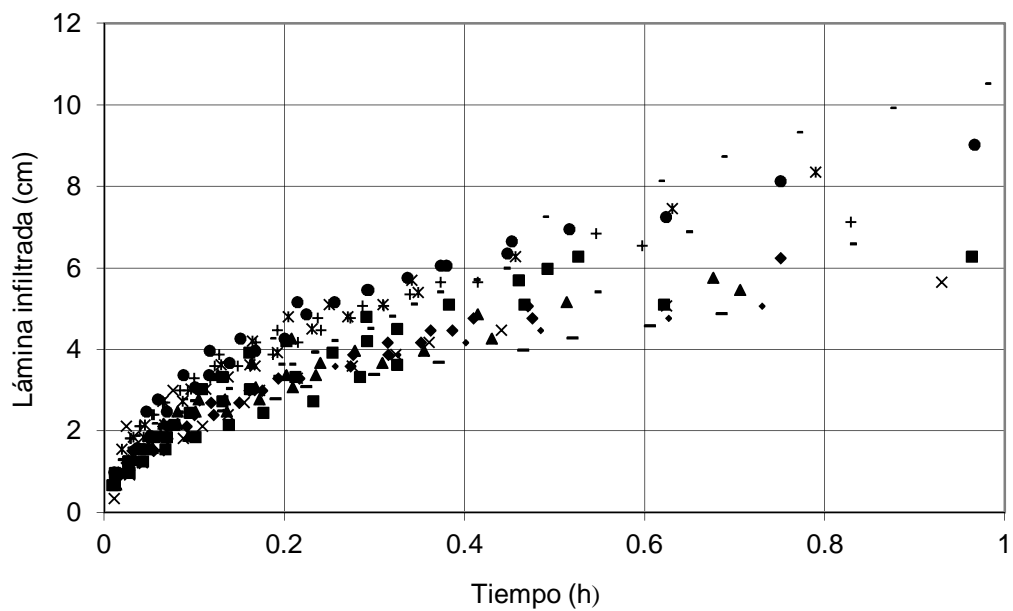


Figura 4.1 Infiltración acumulada experimental escalada y modelación con la ecuación de Richards pseudo-tridimensional con parámetros del suelo de referencia.

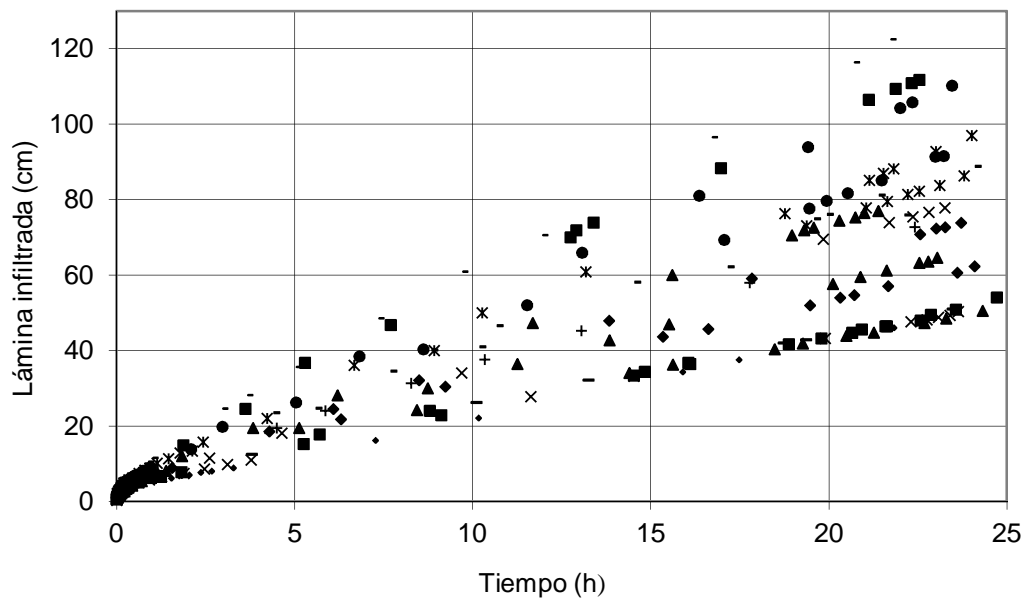
El procedimiento de modelación inversa es aplicable para la caracterización hidrodinámica del suelo. Este procedimiento es también útil para caracterizar la variabilidad espacial de los parámetros de los suelos.

#### 4.3.3 Aplicación melga Montecillo

El análisis de la variabilidad espacial de la infiltración en el sentido longitudinal de una melga se realiza también con datos obtenidos en una parcela experimental ubicada en Montecillo, Estado de México. El suelo en la parcela es de textura esencialmente arenosa. En una melga de 100 m de longitud, 5 m de ancho y pendiente longitudinal  $J_0 = 0.002 \text{ m m}^{-1}$ , se realizaron 21 pruebas de infiltración, una cada 5 m a lo largo de la melga, utilizando el método del doble cilindro, con 0.35 m y 1.45 m de diámetro interior y exterior de los cilindros, respectivamente. La evolución en el tiempo de la lámina infiltrada se muestra en la Figura 4.2. En la figura pueden observarse diferencias de hasta 4 cm en una hora y 70 cm en un día.



(a) Una hora.



(b) Un día.

Figura 4.2 Lámina infiltrada acumulada en función del tiempo, observada en 21 puntos separados cada 5 m a lo largo de una melga de 5 m de ancho y 100 m de largo en Montecillo, México.



De acuerdo con la teoría de los medios similares de Miller y Miller, los parámetros  $K_s$  y  $\lambda$  de la ecuación (4.15) de un suelo cualquiera están relacionados con los parámetros respectivos del suelo de referencia por:

$$K_{sj} = r_j^2 K_{s^*} \quad (4.28)$$

$$\lambda_j = \frac{\lambda^*}{r_j} \quad (4.29)$$

donde el subíndice  $j$  identifica a los suelos  $j = 1, 2, 3, \dots, N_s$ , donde  $N_s$  es el número de pruebas de infiltración y  $r_j$  los factores de escala; los parámetros con asterisco corresponden al suelo de referencia. De las ecuaciones (4.28) y (4.29) se infiere:

$$K_{sj} \lambda_j^2 = K_{s^*} \lambda^{*2} = \Omega_f \quad (4.30)$$

donde el parámetro  $\Omega_f$  es una constante característica de la región estudiada.

La ecuación (4.30) permite reducir el número de parámetros desconocidos de  $2N_s$  a  $N_s + 1$ . Los parámetros pueden obtenerse minimizando la suma de los cuadrados de los errores, es decir, la diferencia entre los valores experimentales y los proporcionados por la ecuación de Green y Ampt:

$$SCE(K_{s1}, K_{s2}, \dots, K_{sN_s}; \Omega_f) = \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i=1}^{N_j} [I_{ij} - I(t_{ij}; K_{sj}, \Omega_f)]^2 \quad (4.31)$$

donde  $N_j$  representa el número de puntos experimentales de cada prueba de infiltración.

Si se considera que se conoce una solución aproximada,  $I(t; K_s, \Omega_f)$  puede expresarse a través de una serie de Taylor:

$$I(t; K_s, \Omega_f) \cong I(t; \hat{K}_s, \hat{\Omega}_f) + \frac{\partial I(t; \hat{K}_s, \hat{\Omega}_f)}{\partial K_s} (K_s - \hat{K}_s) + \frac{\partial I(t; \hat{K}_s, \hat{\Omega}_f)}{\partial \Omega_f} (\Omega_f - \hat{\Omega}_f) \quad (4.32)$$

Por facilidad, sea:

$$\hat{I} = I(t; \hat{K}_s, \hat{\Omega}_f) \quad ; \quad \frac{\partial \hat{I}}{\partial K_s} = \frac{\partial I(t; \hat{K}_s, \hat{\Omega}_f)}{\partial K_s} \quad ; \quad \frac{\partial \hat{I}}{\partial \Omega_f} = \frac{\partial I(t; \hat{K}_s, \hat{\Omega}_f)}{\partial \Omega_f} ;$$

$$\Delta K_s = K_s - \hat{K}_s ; \quad \Delta \Omega_f = \Omega_f - \hat{\Omega}_f$$

La suma del cuadrado del error se expresa como:

$$\text{SCE}(t; K_{sj}, \Omega_f) = \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i=1}^{N_j} \left[ l_{ij} - \hat{l}_{ij} - \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial K_s} \right)_{ij} \Delta K_{sj} - \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial \Omega_f} \right)_{ij} \Delta \Omega_f \right]^2 \quad (4.33)$$

y sus derivadas:

$$\frac{\partial \text{SCE}}{\partial K_{sj}} = -2 \sum_{i=1}^{N_j} \left[ l_{ij} - \hat{l}_{ij} - \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial K_s} \right)_{ij} \Delta K_{sj} - \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial \Omega_f} \right)_{ij} \Delta \Omega_f \right] \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial K_s} \right)_{ij} = 0$$

es decir:

$$\left[ \sum_i^{N_j} \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial K_s} \right)_{ij}^2 \right] \Delta K_{sj} + \left[ \sum_i^{N_j} \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial K_s} \right)_{ij} \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial \Omega_f} \right)_{ij} \right] \Delta \Omega_f = \sum_i^{N_j} [l_{ij} - \hat{l}_{ij}] \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial K_s} \right)_{ij} = 0 \quad (4.34)$$

Y con respecto al parámetro  $\Omega_f$  :

$$\frac{\partial \text{SCE}}{\partial \Omega_f} = -2 \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i=1}^{N_j} \left[ l_{ij} - \hat{l}_{ij} - \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial K_s} \right)_{ij} \Delta K_{sj} - \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial \Omega_f} \right)_{ij} \Delta \Omega_f \right] \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial \Omega_f} \right)_{ij}$$

de donde:

$$\sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i=1}^{N_j} \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial K_s} \right)_{ij} \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial \Omega_f} \right)_{ij} \Delta K_{sj} + \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i=1}^{N_j} \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial \Omega_f} \right)_{ij}^2 \Delta \Omega_f = \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{i=1}^{N_j} (l_{ij} - \hat{l}_{ij}) \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial \Omega_f} \right)_{ij} \quad (4.35)$$

Si se hace:

$$\begin{aligned} A_j &= \sum_{i=1}^{N_j} \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial K_s} \right)_{ij}^2; & B_j &= \sum_{i=1}^{N_j} \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial K_s} \right)_{ij} \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial \Omega_f} \right)_{ij} \\ D_j &= \sum_{i=1}^{N_j} \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial \Omega_f} \right)_{ij}^2; & E_j &= \sum_{i=1}^{N_j} (l_{ij} - \hat{l}_{ij}) \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial K_s} \right)_{ij} \\ G_j &= \sum_{i=1}^{N_j} (l_{ij} - \hat{l}_{ij}) \left( \frac{\partial \hat{l}}{\partial \Omega_f} \right)_{ij} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Entonces:

$$A_j \Delta K_{sj} + B_j \Delta \Omega_f = E_j$$

$$\sum_{j=1}^{N_s} B_j \Delta K_{sj} + \left[ \sum_{j=1}^{N_s} D_j \right] \Delta \Omega_f = \sum_{j=1}^{N_j} G_j$$

$$\Delta K_{sj} = \frac{E_j - B_j \Delta \Omega_f}{A_j} \quad (4.37)$$

y

$$\sum_{j=1}^{N_s} \frac{B_j E_j}{A_j} - \left[ \sum_{j=1}^{N_s} \frac{B_j^2}{A_j} \right] \Delta \Omega_f + \left[ \sum_{j=1}^{N_s} D_j \right] \Delta \Omega_f = \sum_{j=1}^{N_s} G_j$$

$$\Delta \Omega_f = \frac{\sum_{j=1}^{N_s} G_j - \sum_{j=1}^{N_s} \frac{B_j E_j}{A_j}}{\sum_{j=1}^{N_s} D_j - \sum_{j=1}^{N_s} \frac{B_j}{A_j}} \quad (4.38)$$

Los  $N_s$  parámetros  $K_s$  y el parámetro  $\Omega_f$  se obtienen entonces a través de un proceso iterativo.

Debido a que la conductividad hidráulica a saturación se asume como independiente de la carga de agua sobre la superficie del suelo y de la condición inicial, el escalamiento proporcionado por la ecuación 4.19 debe ser escrito como:

$$K_{sj} h_{fj}^2 = K_{s^*} h_{f^*}^2 = \Omega \quad (4.39)$$

Considerando la definición del parámetro  $\lambda$ , el parámetro  $\Omega$  puede estimarse a partir de  $(\sqrt{K_{s^*}}) h_{f^*} = \sqrt{\Omega_f} / (\theta_s - \theta_o) - (\sqrt{K_{s^*}}) h = \sqrt{\Omega}$ .

De las medidas experimentales realizadas en la melga montecillo se han deducido los siguientes valores medios:

i) la carga sobre la superficie  $h = 8.5$  cm .

ii) el contenido volumétrico de humedad a saturación  $\theta_s = 0.4865$  cm<sup>3</sup>cm<sup>-3</sup> .

iii) el contenido volumétrico de humedad inicial  $\theta_0 = 0.2366 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ .

En el Cuadro 4.3 se reportan los parámetros correspondientes a las 21 pruebas experimentales de infiltración en la melga Montecillo. Los valores de los parámetros en el suelo de referencia son:  $K_{s*} = 2.33 \text{ cm/h}$  y  $\lambda_* = 7.71 \text{ cm}$ . Los valores de los parámetros regionales son:  $\Omega_f = 138.5 \text{ cm}^3/\text{h}$  y  $\Omega = 5.84 \text{ cm}^3/\text{h}$ . En la Figura 4.3 se muestran los datos experimentales escalados y la función de Green y Ampt con los parámetros del suelo de referencia. El excelente ajuste (coeficiente de determinación:  $R^2 = 0.999$ ) muestra que la teoría de los medios similares es aplicable a la melga Montecillo.

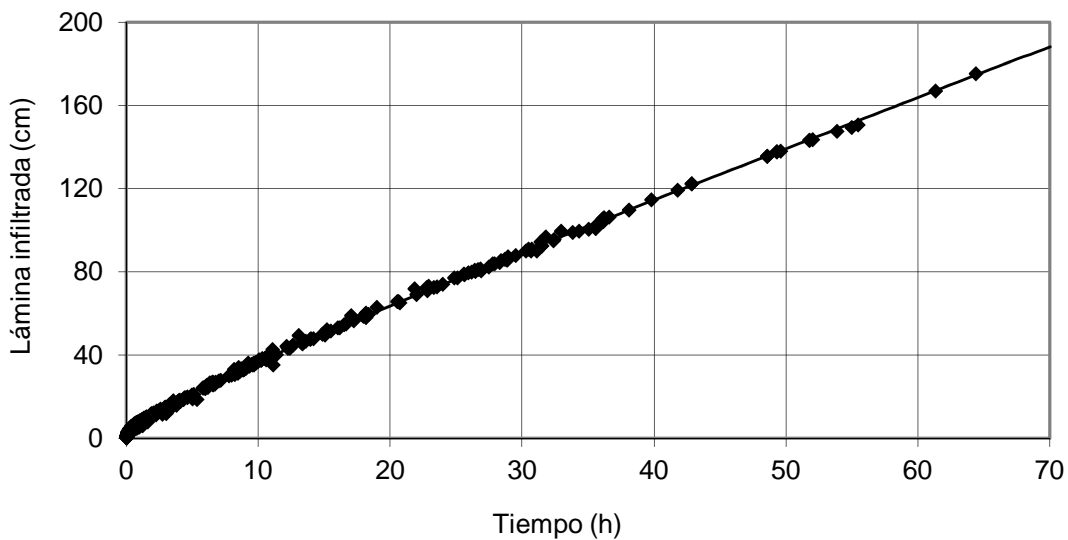


Figura 4.3 Lámina infiltrada acumulada en función del tiempo: datos experimentales escalados y función de Green y Ampt con parámetros del suelo de referencia en la melga Montecillo.

Cuadro 4.3 Valores de la conductividad hidráulica a saturación y los factores de escala en la melga Montecillo ( $K_{s*} = 2.33$  cm/h).

Distancia (m)	$K_s$ (cm/h)	Factor de escala (r) (adimensional)
0	1.21	0.7198
5	1.31	0.7491
10	2.01	0.9270
15	1.32	0.7521
20	3.27	1.1831
25	3.16	1.1637
30	2.37	1.0072
35	2.63	1.0610
40	4.80	1.4338
45	2.35	1.0040
50	4.26	1.3499
55	2.81	1.0977
60	2.56	1.0464
65	2.87	1.1085
70	3.96	1.3016
75	3.96	1.3015
80	2.95	1.1247
85	1.35	0.7600
90	1.81	0.8813
95	1.36	0.7641
100	1.31	0.7493

#### 4.4 Análisis de los factores de escala

##### 4.4.1 La distribución probabilística de los factores de escala

La distribución probabilística de la variable  $\ln(K_s)$ , de acuerdo con resultados experimentales reportados en la literatura (e.g. Nielsen *et al.*, 1973; Warrick y Amoozegard-Fard, 1979; Sharma *et al.*, 1980; Vauclin, 1982), sigue una distribución normal. Ello permite suponer que la variable  $\tau = \ln(r)$  sigue también una distribución de Gauss. La consideración de la normalización definida por la ecuación (4.27), permite definir la densidad de probabilidad  $p(\tau)$  y la probabilidad acumulada  $F(\tau)$  gaussianas respectivamente como sigue:

$$p(\tau) = \frac{1}{\sigma_\tau \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\right] \quad (4.40)$$

$$F(\tau) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\tau}{\sigma_\tau \sqrt{2}} \right) \right] \quad (4.41)$$

donde  $\sigma_\tau$  es la desviación estándar del logaritmo de los factores de escala y  $\operatorname{erf}(x)$  denota la función error.

En la Figura 4.4 se compara la probabilidad acumulada calculada con la ecuación (4.41), con la probabilidad empírica acumulada. El valor de la desviación estándar en la melga Montecillo es de:  $\sigma_\tau = 0.019$ . El acuerdo que muestra la probabilidad empírica con la función teórica de probabilidad, a pesar de la poca cantidad de realizaciones, permite suponer efectivamente que la variable  $\tau = \ln(r)$  sigue una distribución de Gauss.

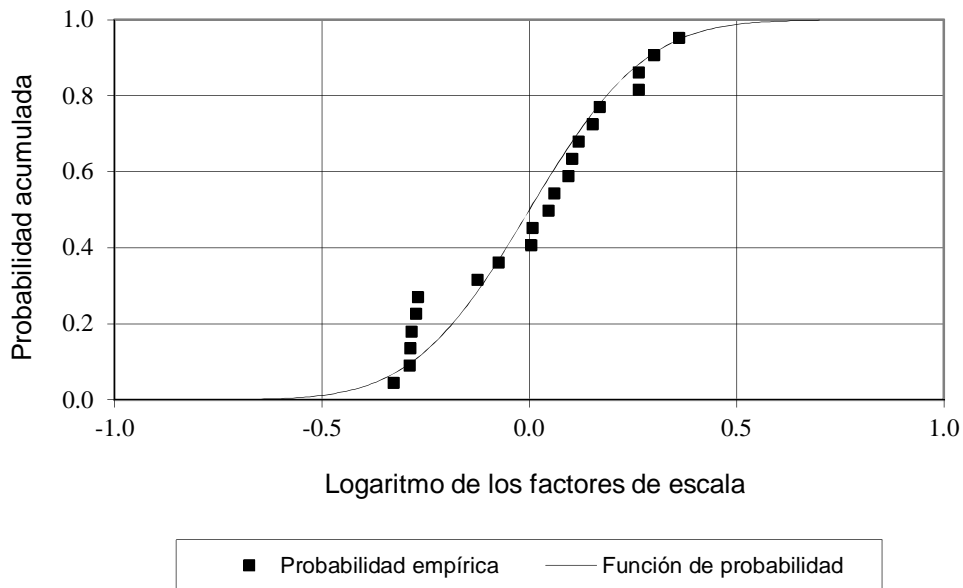


Figura 4.4 Probabilidad acumulada del logaritmo de los factores de escala en la melga Montecillo.

#### 4.4.2 Propiedades medias de los parámetros

Para calcular la media de las propiedades es importante introducir el valor medio de  $r^n$  (momento de orden  $n$ ), definido por:

$$\langle r^n \rangle = E \{ r^n \} = \int_{-\infty}^{\infty} r^n p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{n\tau} p(\tau) d\tau \quad (4.42)$$

donde  $E$  es el operador esperanza matemática.

Con la función de distribución de Gauss, ecuación (4.40), se obtiene:

$$\langle r^n \rangle = \exp \left[ \frac{n^2 \sigma_r^2}{2} \right] \quad (4.43)$$

Para la melga Montecillo:

$$\langle r \rangle = 1.0228 \quad (4.44)$$

$$\sigma_r^2 = E \{ r^2 \} - E^2 \{ r \} = 0.22168 \quad (4.45)$$

$$\langle K_s \rangle = K_{s*} \langle r^2 \rangle = 2.55 \text{ cm/h} \quad (4.46)$$

donde  $\langle r \rangle$  y  $\sigma_r^2$  son la media aritmética y variancia de los factores de escala, respectivamente y  $\langle K_s \rangle$  es la media aritmética de la conductividad hidráulica a saturación.

#### 4.4.3 La media estocástica de la infiltración

La infiltración puede considerarse como un proceso estocástico con la función  $I(t)$  y con los factores de escala ( $r$ ) como la variable aleatoria. De esta manera la media estocástica de la infiltración se define como sigue:

$$I(t) = E \{ I(t; r) \} = \int_{-\infty}^{\infty} I(t; e^r) p(r) dr \quad (4.47)$$

Con la función de distribución de Gauss definida por la ecuación (4.40) y con el cambio de variable  $\eta = r / (\sigma_r \sqrt{2})$ , la ecuación (4.47) puede escribirse en la forma:

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I \left[ t; \exp(\sqrt{2} \sigma_r \eta) \right] \exp(-\eta^2) d\eta \quad (4.48)$$

El cálculo de la integral se facilita con la utilización de los polinomios de Hermite (Abramowitz y Stegun, 1970):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-x^2) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (4.49)$$

donde  $w_i$  y  $x_i$  son respectivamente los factores de peso y las raíces de los polinomios.

#### 4.4.4 La estructura espacial de la infiltración

De acuerdo con Matheron (1965), una variable regionalizada caracteriza un fenómeno espacial o temporal que presenta una cierta estructura. La consideración de las propiedades hidrodinámicas de los suelos y en particular de la conductividad hidráulica como variables regionalizadas ha sido ampliamente utilizada por diversos autores, i.e., Muñoz-Pardo (1987).

La consideración de la conductividad hidráulica o cualquier otra propiedad de los suelos como una variable regionalizada puede tener un objeto utilitario de caracterización de la variable a partir de un muestreo discreto, pero también puede ayudar de manera general a comprender la naturaleza de la propiedad. En el caso del diseño del riego generalmente interesan los valores medios representativos de la parcela o zona de estudio y no los valores puntuales de las propiedades hidrodinámicas.

Para que la inferencia probabilística pueda ser aplicada a las variables regionalizadas es necesario aceptar la hipótesis de estacionariedad. Una función aleatoria es estacionaria si la ley de probabilidad de los valores tomados por esta función en  $k$  puntos arbitrarios es invariante para toda traslación del conjunto de estos puntos.

Para analizar la estructura espacial del logaritmo de los factores de escala se introducen el autocorrelograma y el semivariograma. El autocorrelograma o función de autocorrelación de un proceso  $z(x)$ , con estacionariedad de segundo orden y media  $\mu$ , se define como:

$$C(h) = E \{ [z(x+h) - \mu][z(x) - \mu] \} \quad (4.50)$$

donde  $h$  es la interdistancia entre dos puntos. El coeficiente de autocorrelación se define como  $\rho(h) = C(h)/\sigma^2$ , con  $\sigma^2 = C(0)$  la varianza, y es tal que  $|\rho(h)| \leq 1$ . En el caso en estudio  $z(x) = \tau(x)$ ,  $\sigma^2 = \sigma_\tau^2$  y  $\mu = \mu_\tau = 0$ .

El semivariograma es definido como:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var} \{ z(x+h) - z(x) \} = C(0) - C(h) \quad (4.51)$$

Se infiere de las ecuaciones (4.50) y (4.51) que el semivariograma dividido por la varianza está relacionado con el coeficiente de autocorrelación de la manera siguiente:



$$\gamma^*(h) = \frac{\gamma(h)}{\sigma^2} = 1 - \rho(h) \quad (4.52)$$

Para el cálculo del semivariograma o autocorrelograma así relacionados se utiliza el siguiente estimador insesgado:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(x_i + h) - z(x_i)]^2 \quad (4.53)$$

donde  $N(h)$  es el número de pares de puntos separados por una distancia  $h$ .

En nuestro caso, para llevar a cabo la interpolación por kriging se obtiene el semivariograma del logaritmo de los factores de escala. Para la modelación del semivariograma se utiliza la hipótesis markoviana de primer orden:

$$\rho(h) = a \exp(-h / \lambda_m) \quad (4.54)$$

y

$$\gamma(h) = \sigma^2 [1 - \rho(h)] \quad (4.55)$$

donde  $\gamma(h)$  es el semivariograma;  $a$  es el alcance; y  $\lambda_m$  es la longitud de autocorrelación.

Suponer  $\rho(0) = a = 1$  permite estimar una longitud de autocorrelación  $\lambda_m = 10$  m. En la Figura 4.5 se muestran los semivariogramas teórico y experimental y en ella puede observarse que a pesar de que el número de observaciones es limitado, los factores de escala en la melga Montecillo presentan una estructura espacial bien definida.

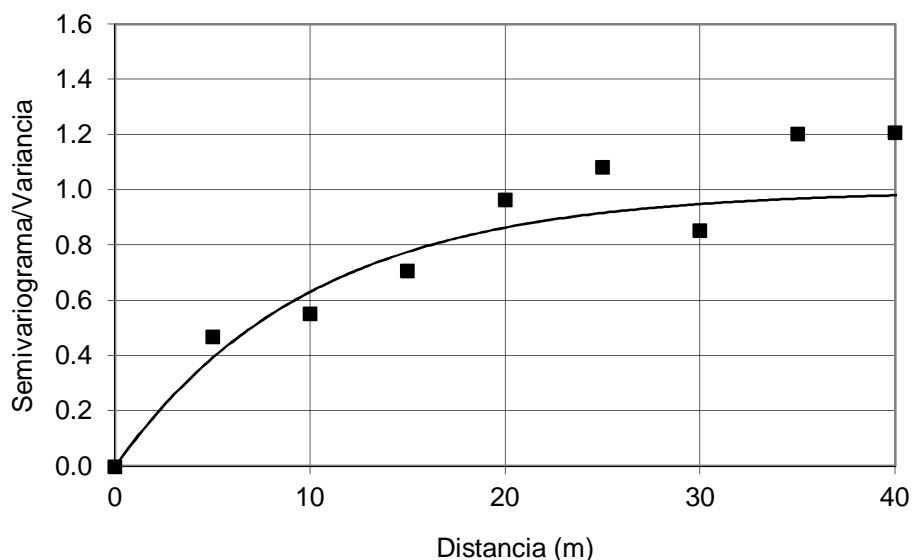


Figura 4.5 Semivariograma del logaritmo de los factores de escala.

#### 4.4.5 Generación espacial correlacionada

La generación de un campo correlacionado de la conductividad hidráulica consiste en producir realizaciones de la misma que presenten ciertas características impuestas. Para el caso de la hipótesis de estacionariedad de segundo orden es suficiente con mantener la media y el semivariograma (Journel y Huijbregts, 1978).

Los métodos fundamentados sobre el análisis espectral permiten generar una realización  $z(x)$  en cualquier punto del espacio (Rice, 1954, Shinozuka y Jan, 1972, Mejía y Rodríguez-Iturbe, 1974). El análisis espectral de una función aleatoria  $z(x)$  asocia a la función de autocovarianza  $C(h)$  su transformada de Fourier, llamada densidad espectral  $S(\omega)$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular, a saber:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega h} C(h) dh \quad (4.56)$$

Por analogía con el caso de un fenómeno temporal aleatorio, en el caso de funciones aleatorias espaciales, se utiliza un generador espectral para la simulación la función, es decir:

$$z(x) = \sum_{n=1}^{N_h} c_n \cos(\omega_n x + \varphi_n) \quad (4.57)$$

donde  $N_h$  es el número de armónicas;  $c_n$  es un coeficiente de ponderación que permite la restitución de la función de densidad espectral de la señal y de su

varianza;  $\omega_n$  son las frecuencias de la señal;  $\varphi_n$  son los ángulos de fase aleatorios distribuidos uniformemente entre 0 y  $2\pi$ ;  $\cos(\omega_n + \varphi_n)$  es un modelo aleatorio de fase, estacionario de orden dos, ergódico, de media nula y varianza igual a un medio.

Se puede demostrar que la función de autocovarianza que resulta de la introducción de la ecuación (4.57) en la ecuación (4.50) es la siguiente:

$$C(h) = \sum_{n=1}^{N_h} \frac{c_n^2}{2} \cos(\omega_n h) \quad (4.58)$$

donde  $\omega_n$  son las frecuencias de cada una de las armónicas.

De la ecuación (4.58) se obtiene la siguiente expresión de la varianza,  $C(0) = \sigma^2$ :

$$\sigma^2 = \sum_{n=1}^{N_h} \frac{c_n^2}{2} \quad (4.59)$$

En la literatura se han reportado diferentes métodos para estimar el coeficiente  $c_n$ . Por ejemplo, Mejía y Rodríguez-Iturbe (1974) suponen todos los coeficientes iguales y obtienen:

$$c_n = \sigma \sqrt{\frac{2}{N_h}} \quad (4.60)$$

Este método conserva la varianza, pero no todo el semivariograma (Muñoz-Pardo, 1987).

De la transformada inversa de Fourier de la densidad espectral, ecuación (4.56), se deduce (Falconer, 1990):

$$C(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega h) d\omega \quad (4.61)$$

la cual se discretiza como sigue:

$$C(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N_h} S(\omega_n) \Delta\omega \cos(\omega_n h) \quad (4.62)$$

y como  $C(0) = \sigma^2$ , se deduce:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N_h} S(\omega_n) \Delta\omega \quad (4.63)$$

donde  $\Delta\omega = 2\Omega / N_h$ , de suerte que  $-\Omega < \omega_n < \Omega$ .

La comparación de las ecuaciones (4.59) y (4.63) conduce a la siguiente expresión para calcular los coeficientes:

$$c_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} S(\omega_n) \Delta\omega} \quad (4.64)$$

Este método lo reporta Muñoz-Pardo (1987) como de Shinozuka y Jan (1972).

Los dos métodos aquí utilizados se diferencian en la manera de generar las amplitudes. En la Figura 4.6 se muestra el ajuste del semivariograma con ambos métodos. El método de Shinozuka y Jan ajusta el semivariograma correctamente en la escala de correlación. El método de Mejía y Rodríguez-Iturbe conserva la varianza.

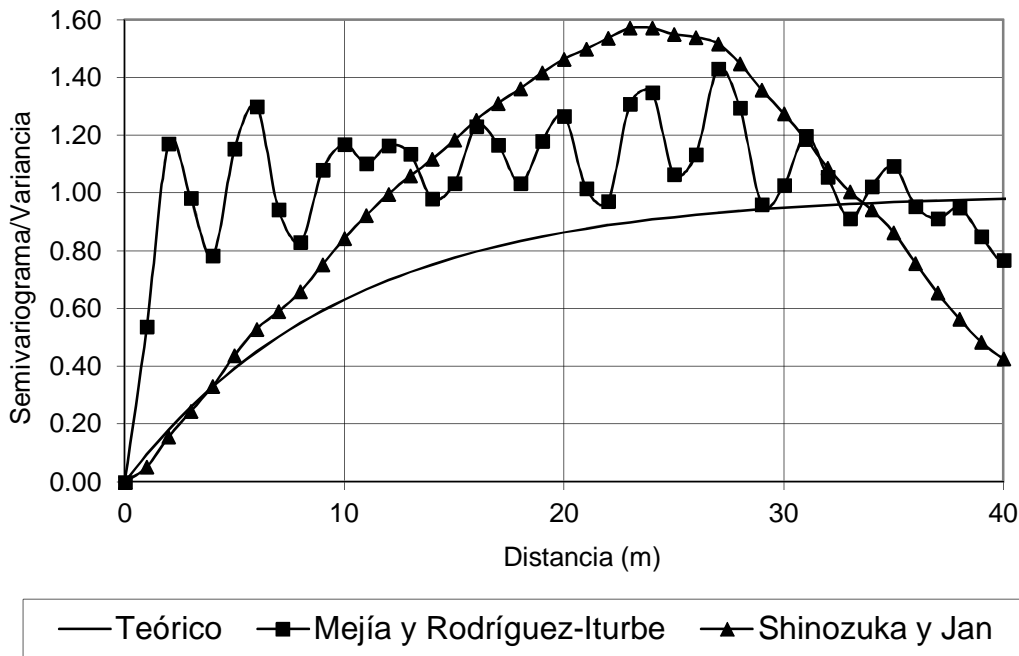


Figura 4.6 Semivariogramas del logaritmo de los factores de escala teórico y de los campos correlacionados.

Para introducir en el modelo hidrológico de simulación del avance en el riego por melgas se seleccionan los datos generados con el método de Shinozuka y Jan.

#### 4.4.6 Generación sintética

Con los factores de escala calculados con base en las pruebas de infiltración realizadas con el doble cilindro, se obtuvieron 106 datos de los factores de escala (uno por cada metro) a través del método Monte Carlo (Figura 4.7) e interpolación krigé (Figura 4.8). En la Figura 4.9 se muestran los factores de escala generados con el método de Shinozuka y Jan.

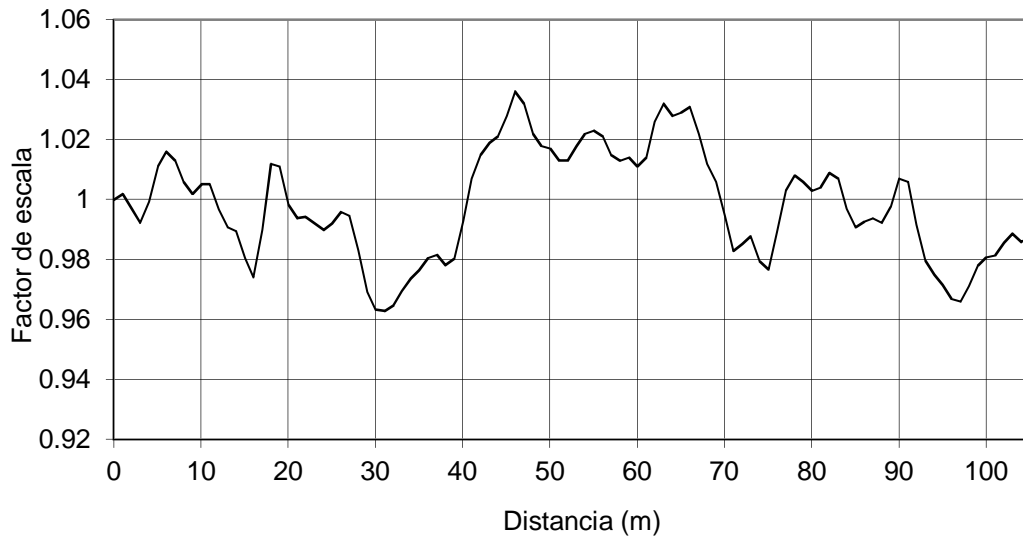


Figura 4.7 Distribución espacial de los factores de escala (Monte Carlo).

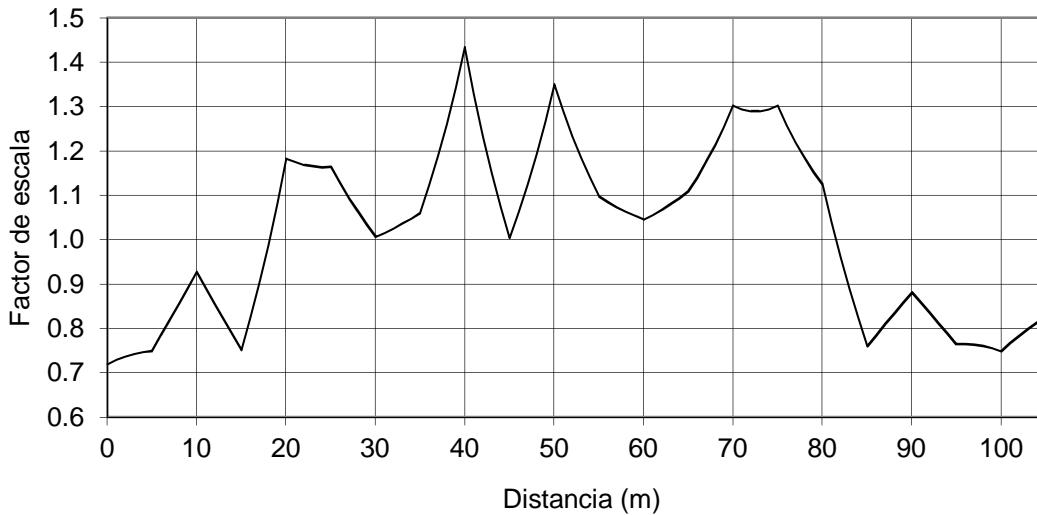


Figura 4.8 Distribución espacial de los factores de escala (krigeado).

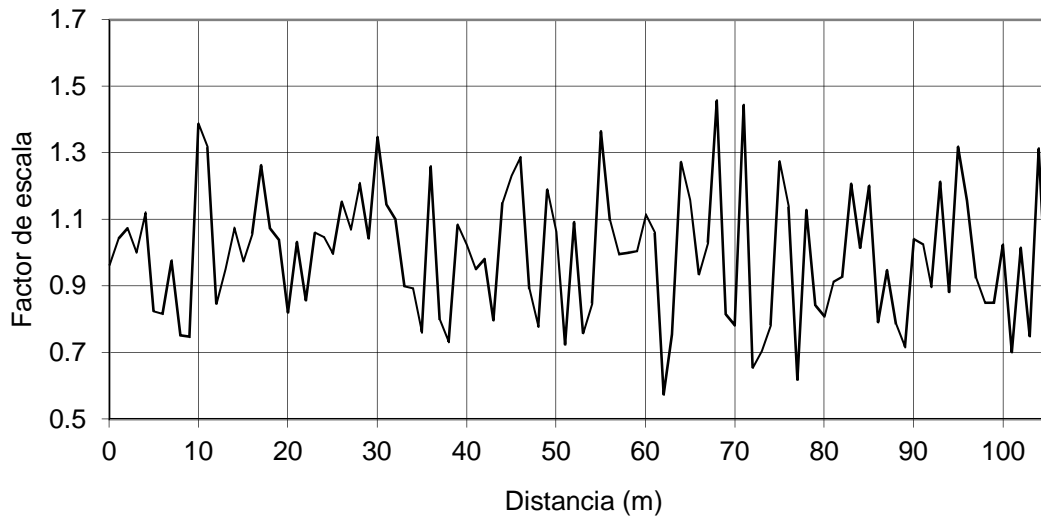


Figura 4.9 Distribución espacial de los factores de escala (método Monte Carlo).

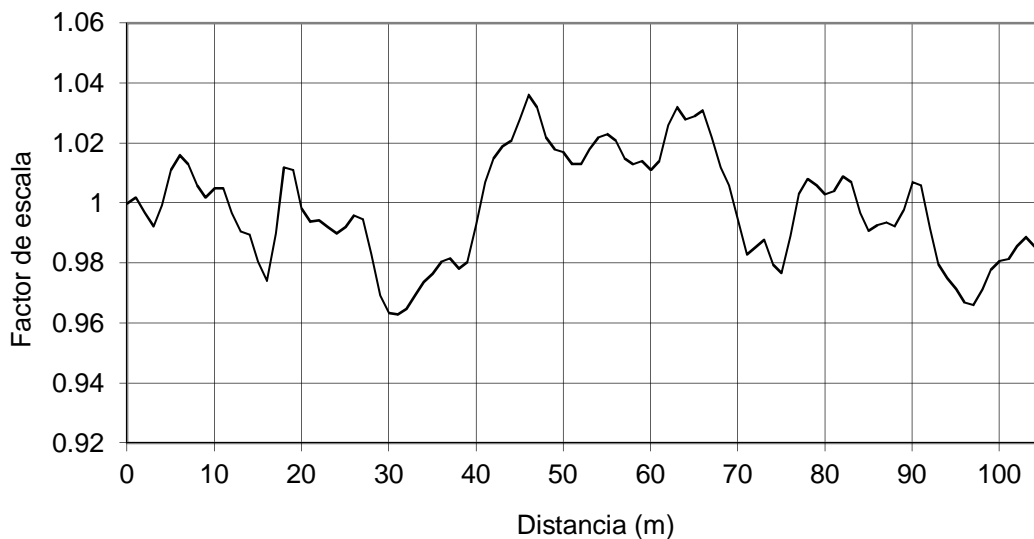


Figura 4.10 Distribución espacial de los factores de escala generados con el método de Shinozuka y Jan.

#### 4.5 Propiedades hidrodinámicas efectivas en la fase de avance

Una prueba de riego consiste en medir el avance y la recesión del frente de agua en una melga o surco en función del tiempo. El avance se mide al iniciar el riego y la recesión se mide cuando la lámina de agua sobre la superficie desaparece una vez que se corta la entrada de agua a la melga o surco. Las técnicas para obtener la información experimental en una prueba de riego pueden ser tan elaboradas como medir los perfiles superficiales del agua durante el riego. Las determinaciones indirectas, a través de la simulación de las fases de avance y recesión son populares

porque los datos son relativamente fáciles de obtener y los resultados representan promedios de campo en algún sentido.

En la práctica, es una tendencia actual hacer las mediciones durante un evento de riego y deducir datos promedio o efectivos de la infiltración y rugosidad (Strelkoff *et al.*, 2009).

La modelación matemática puede usarse para predecir avance, la recesión y perfiles de humedad. El procedimiento de estimación tiene por objetivo encontrar el mejor ajuste entre los datos experimentales y la predicción. El modelo matemático empleado puede ser un modelo completo con las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Richards o un procedimiento simplificado. En principio, puede utilizarse cualquier dato observado, desde un par de datos distancia-tiempo de avance o mediciones experimentales exhaustivas en muchos puntos. La precisión de la estimación depende de los datos recolectados y el procedimiento de estimación utilizado.

Los datos que pueden recolectarse en una prueba de riego son el avance, recesión, contenido de humedad y carga de presión. En términos generales, para llevar a cabo la prueba de riego se definen las dimensiones y topografía (pendientes longitudinal y transversal) de la melga o surcos. Es conveniente realizar un muestreo para la caracterización física del suelo, en particular la granulometría. Se colocan estacas cada 10 o 20 m a lo largo de la melga. Al iniciar la prueba se determina la humedad inicial y el gasto a la entrada de la melga o surco. Se anota la hora de ingreso del agua a la melga o surco y el tiempo en que el agua llega a cada una de las estacas. Al cortar la entrada de agua a la melga o surco se comienza a medir la recesión, que consiste en anotar el momento en que el agua desaparece a la entrada de la melga y en cada una de las estacas. Con la información se construye un gráfico del tiempo acumulado contra la distancia, tanto para el avance como para la recesión. La diferencia entre el tiempo de recesión y el tiempo de avance es el tiempo que el agua tuvo la oportunidad para infiltrarse en el suelo (tiempo de contacto).

Para medir cada una de las variables referidas en una prueba de riego pueden utilizarse instrumentos como los sensores de presión, sondas de TDR para la humedad, aforadores e incluso registros automatizados.

Los datos experimentales aquí utilizados fueron obtenidos en la parcela Montecillo, Estado de México. El suelo en la parcela es de textura esencialmente arenosa. Las melgas tienen 100 m de longitud, 5 m de ancho y pendiente longitudinal  $J_0 = 0.002 \text{ m m}^{-1}$ . El contenido de humedad a saturación  $\theta_s = 0.4865 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ . Se realizaron dos pruebas de avance con dos gastos unitarios diferentes. Al iniciar la prueba de avance se midió la humedad del suelo y el gasto unitario introducido a la melga. Los datos del avance fueron obtenidos a cada 10 metros.

#### 4.5.1 Condiciones para establecer la existencia de las propiedades efectivas

Para establecer las condiciones sobre las cuales la fase de avance puede ser descrita por características efectivas se parte de las consideraciones siguientes: a) la infiltración tiene un régimen permanente al infinito, el flujo de Darcy es igual a  $K_s$ ; b) la media  $\langle K_s \rangle$  existe; y c) la variabilidad espacial de las características hidrodinámicas en la fase de avance se manifiesta plenamente en los tiempos largos (figura 4.1).

La existencia de un régimen permanente de la infiltración permite establecer los límites siguientes:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_f(t) = x_{\max} \quad (4.65)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_f(t) = 0 \quad (4.66)$$

donde  $x_{\max}$  es la posición máxima del frente de avance y  $U_f(t) = dx_f/dt$  es la velocidad de avance.

Cuando  $t \rightarrow \infty$ , la onda de Saint-Venant está completamente establecida, el tirante ya no depende del tiempo:  $\partial h/\partial t = 0$ . La ecuación de continuidad, ecuación (4.1), se reduce a:  $dq/dx + K_s(x) = 0$ . Su integración conduce a ( $q = 0$  en  $x = x_{\max}$ ):

$$q(x) = \int_x^{x_{\max}} K_s(\bar{x}) d\bar{x} \quad (4.67)$$

Ya que en  $x = 0$ ,  $q = q_0$ , se tiene:

$$q_0 = \int_0^{x_{\max}} K_s(\bar{x}) d\bar{x} \quad (4.68)$$

De acuerdo con el teorema del valor medio de las integrales puede definirse la media sobre el intervalo  $[0, x_{\max}]$  como:

$$\bar{K}_s(x_{\max}) = \frac{1}{x_{\max}} \int_0^{x_{\max}} K_s(\bar{x}) d\bar{x} \quad (4.69)$$

es decir:

$$q_0 = \bar{K}_s(x_{\max}) x_{\max} \quad (4.70)$$



La ecuación (4.70) indica que para un gasto de riego dado existe un valor medio de la conductividad hidráulica que define una posición del frente de avance máximo. Para una melga de longitud  $L$ , el gasto mínimo que asegura la llegada de la onda a su extremo final se deduce de la ecuación (4.70):

$$q_m = \bar{K}_s(L)L \quad (4.71)$$

Considerando que la media de la conductividad es una constante sobre el intervalo  $[0,L]$ ,  $\bar{K}_s(L) = \langle K_s \rangle$ , la representación de la fase de avance por características hidrodinámicas efectivas, es decir independientes del gasto en la entrada de la melga, es posible para gastos superiores al proporcionado por la ecuación (4.71). Este resultado se ilustra utilizando los datos experimentales obtenidos en dos pruebas de avance realizadas en la melga Montecillo.

#### **4.5.2 Análisis y modelación de la fase de avance**

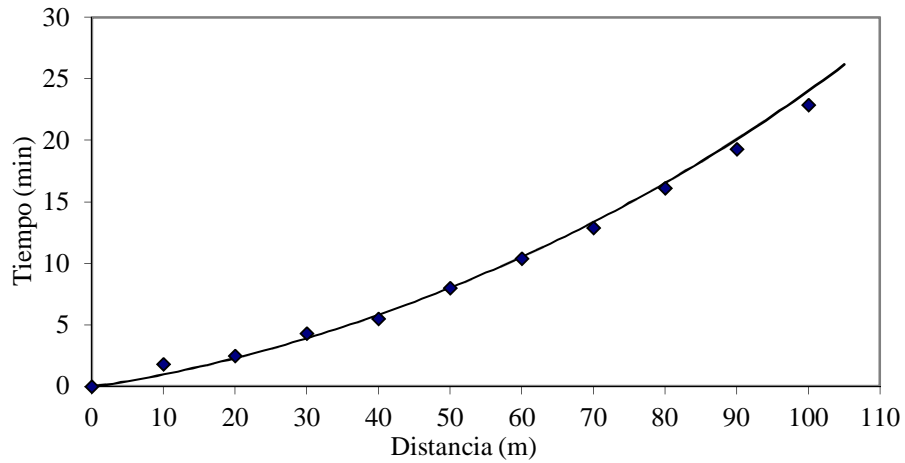
##### **a) Identificación de parámetros**

Los valores de referencia:  $K_s^* = 2.33 \text{ cm/h}$ ,  $\lambda^* = 7.71 \text{ cm}$  permiten obtener:  $h_i^* = 27 \text{ cm}$ .

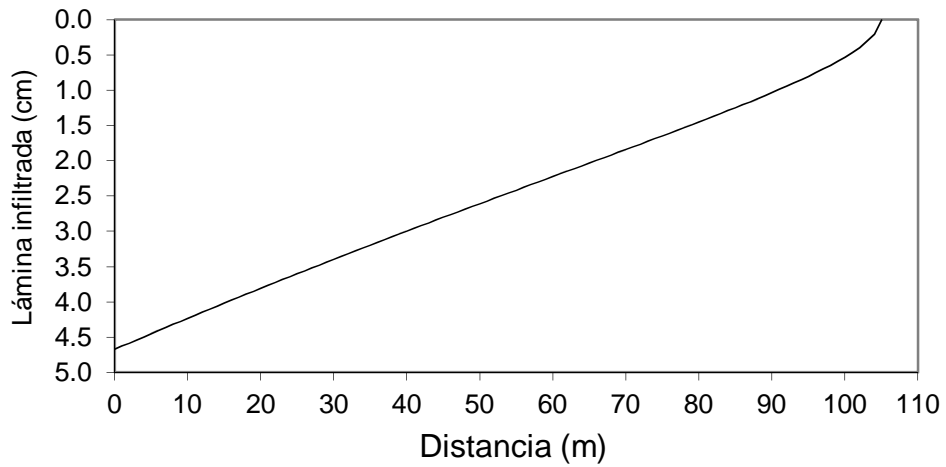
La pendiente de la melga es  $J_0 = 0.002 \text{ m m}^{-1}$  y el contenido de humedad a saturación  $\theta_s = 0.4865 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ .

Al iniciar la prueba de avance la humedad del suelo es  $\theta_0 = 0.2479 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$  y el gasto unitario introducido a la melga  $q_0 = 0.0032 \text{ m}^3 / (\text{s m})$ .

Utilizando el modelo hidrológico, con una discretización espacial de 1 m, mediante calibración se obtiene  $\bar{h} \cong 1.38 \text{ cm}$ . El ajuste con los datos experimentales se muestra en la Figura 4.11 y Figura 4.12.

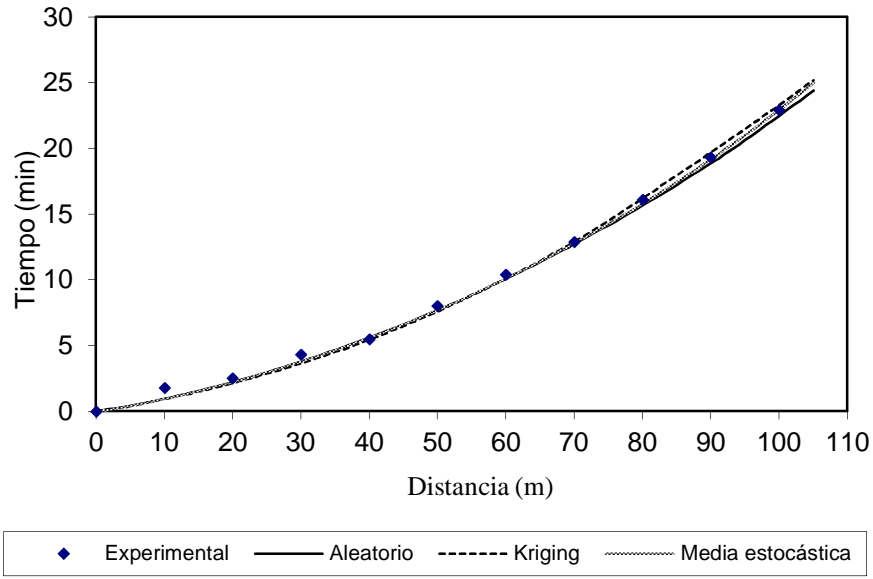


(a) Curva de avance.

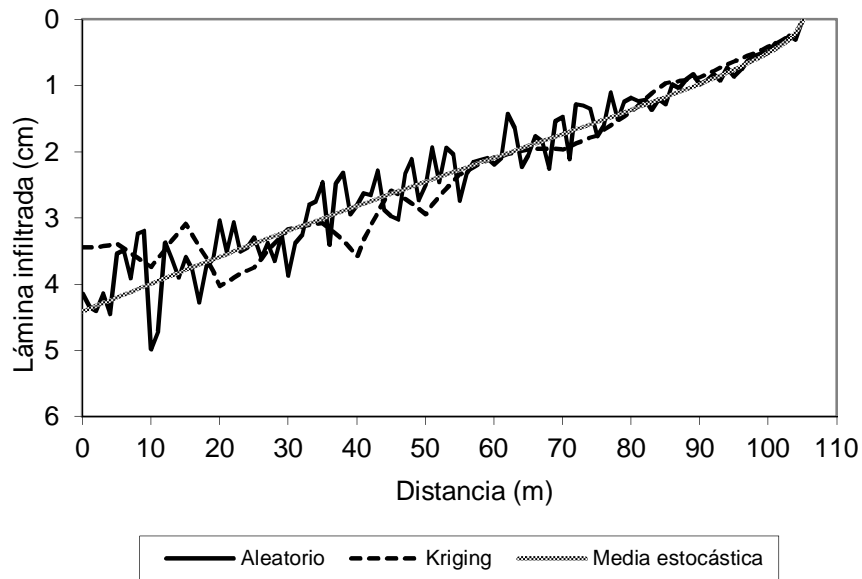


(b) Lámina infiltrada.

Figura 4.11 Datos experimentales y modelación de la fase de avance del riego en la melga Montecillo, gasto unitario  $q_0 = 3.2 \text{ ls}^{-1}$  con valores del suelo de referencia.



(a) Curva de avance.



(b) Lámina infiltrada.

Figura 4.12 Datos experimentales y modelación de la fase de avance del riego en la melga Montecillo, gasto unitario  $q_0 = 3.2 \text{ ls}^{-1}$  (calibración).

En la Figura 4.12a puede observarse que mediante la calibración se logra reproducir con diferencias mínimas la curva de avance experimental con las tres formas de considerar la variabilidad espacial de la infiltración: aleatorio (Montecarlo), con estructura espacial (kriging) y la media estocástica. La Figura 4.12b muestra la variación de la lámina infiltrada a lo largo de la melga para los tres tipos de modelos.

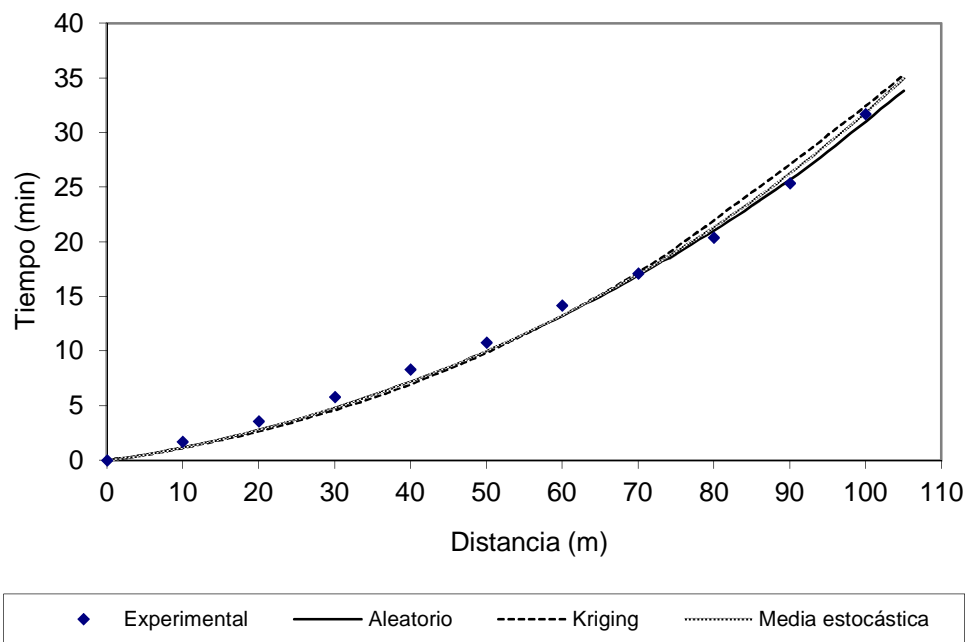
Para calcular el tirante medio para otras pruebas de riego es necesario definir los parámetros  $k$  y  $d$  de la ley de resistencia. El número de Reynolds es definido por  $Re = Uh/\nu = q/\nu$ , con  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  se obtiene para esta prueba  $Re = 3200$ , valor que permite utilizar la ley de Poiseuille ( $d = 1$ ). De la ecuación (4.10) se obtiene el tirante normal:  $h_o = \frac{3}{2}\bar{h} = 2.07 \text{ cm}$ . De la ecuación(4.11) se deduce:  $k \cong 1/54$ .

## **b) Predicción**

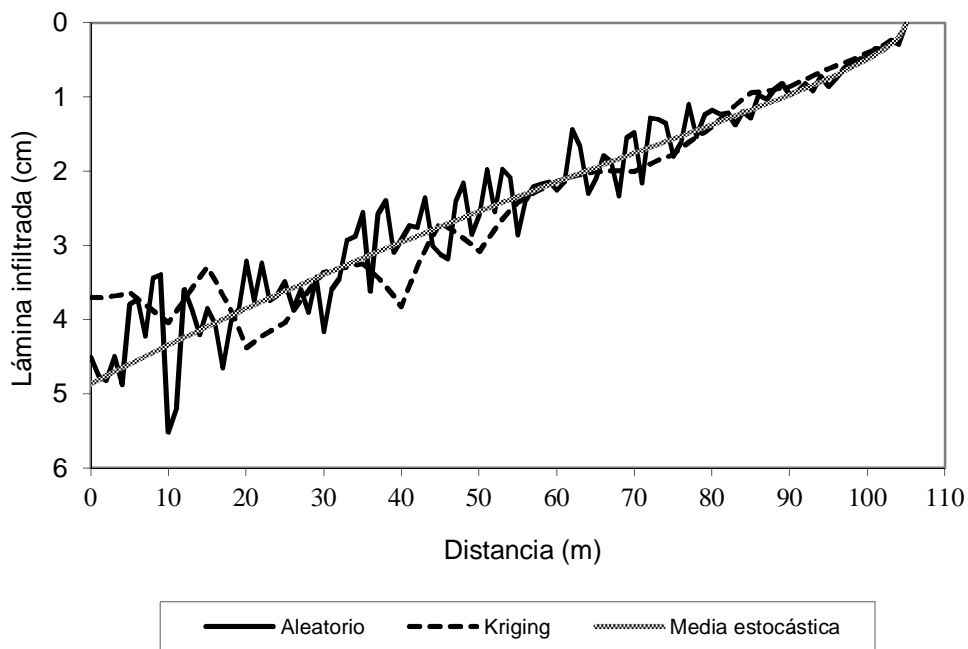
Para verificar la calibración del modelo se realiza una segunda prueba con otro gasto de riego:  $q_o = 0.0024 \text{ m}^3/(\text{s m})$  y con un contenido de humedad inicial  $\theta_o = 0.3017 \text{ cm}^3\text{cm}^{-3}$ .

De la ley de resistencia se obtiene:  $h_o \cong 1.87 \text{ cm}$  y  $\bar{h} \cong 1.25 \text{ cm}$ .

El excelente ajuste del modelo con los datos experimentales (Figura 4.13a) en la predicción del avance del riego, muestra que a pesar de la variabilidad espacial de la infiltración (Figura 4.13b), el frente de avance puede ser representado por propiedades hidrodinámicas únicas e independientes del gasto de riego. Las propiedades efectivas pueden ser obtenidas a través de una prueba de avance.



(a) Curva de avance.



(b) Lámina infiltrada.

Figura 4.13 Datos experimentales y modelación de la fase de avance del riego en la melga Montecillo, gasto unitario  $q_0 = 2.4 \text{ ls}^{-1}$  (predicción).

### 4.5.3 Condición general para representar las propiedades hidrodinámicas por propiedades efectivas

Las condiciones generales para simular el riego por gravedad con propiedades hidrodinámicas del suelo únicos o efectivos son analizadas con la generación sintética de parámetros. En una primera parte, se generan campos correlacionados de la conductividad hidráulica a través del logaritmo de los factores de escala con el método antes expuesto de Shinozuka y Jan (1972). Los valores generados son introducidos en el modelo hidrológico de simulación del frente de avance. En la segunda parte, los parámetros probabilísticos son utilizados también para generar los parámetros de la infiltración en los suelos de manera aleatoria, considerando que la condición general para utilizar propiedades hidrodinámicas efectivas en el riego por gravedad implica que la distribución probabilística de las propiedades hidrodinámicas se única en el espacio.

Las realizaciones conservan la varianza y el semivariograma. En Figura 4.14 puede apreciarse la adecuada conservación de la distribución probabilística del logaritmo de los factores de escala en los campos correlacionados generados.

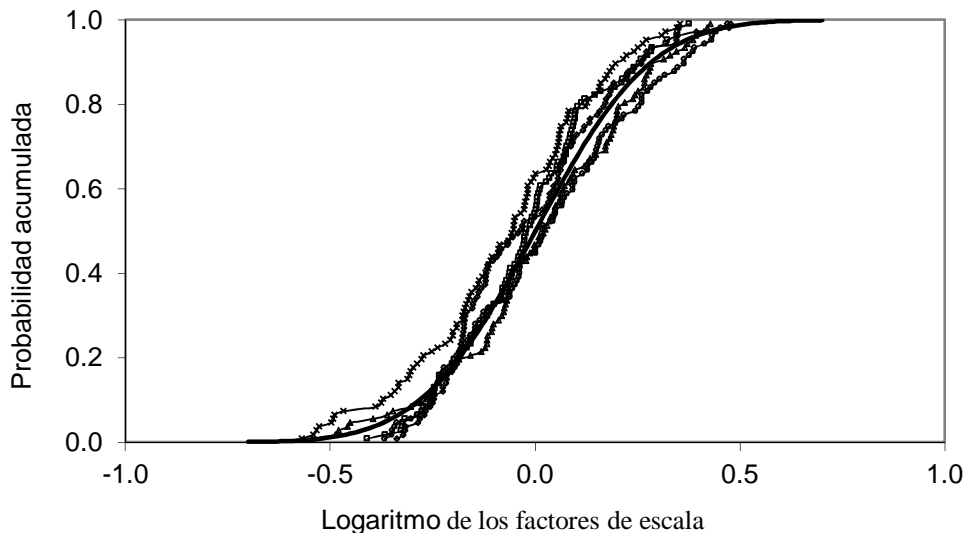


Figura 4.14 Probabilidad acumulada del logaritmo de los factores de escala en la melga Montecillo y en los campos correlacionados generados.

Mientras que en la Figura 4.15 se aprecia que el comportamiento de los semivariogramas de los campos generados es similar al semivariograma teórico dentro del rango de correlación.

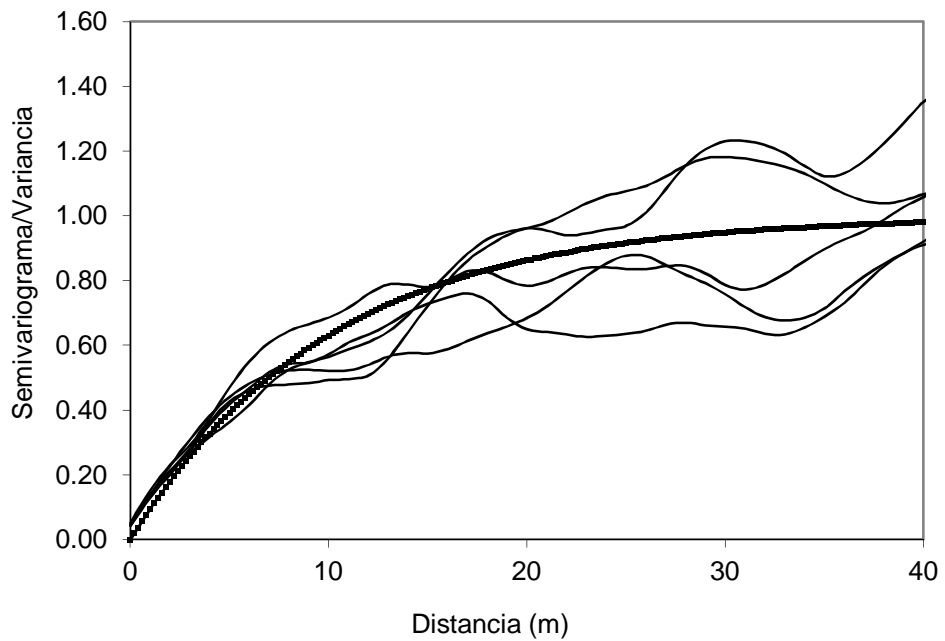


Figura 4.15 Semivariogramas teórico y de los campos correlacionados del logaritmo de los factores de escala.

Los valores generados de los factores de escala de los cinco campos correlacionados (Figura 4.16) son introducidos en el modelo de simulación del avance del riego.

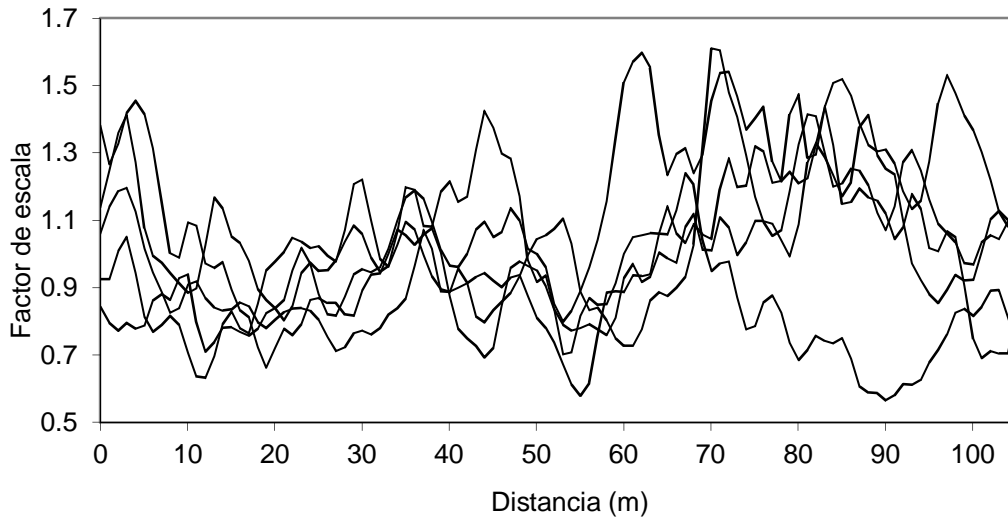
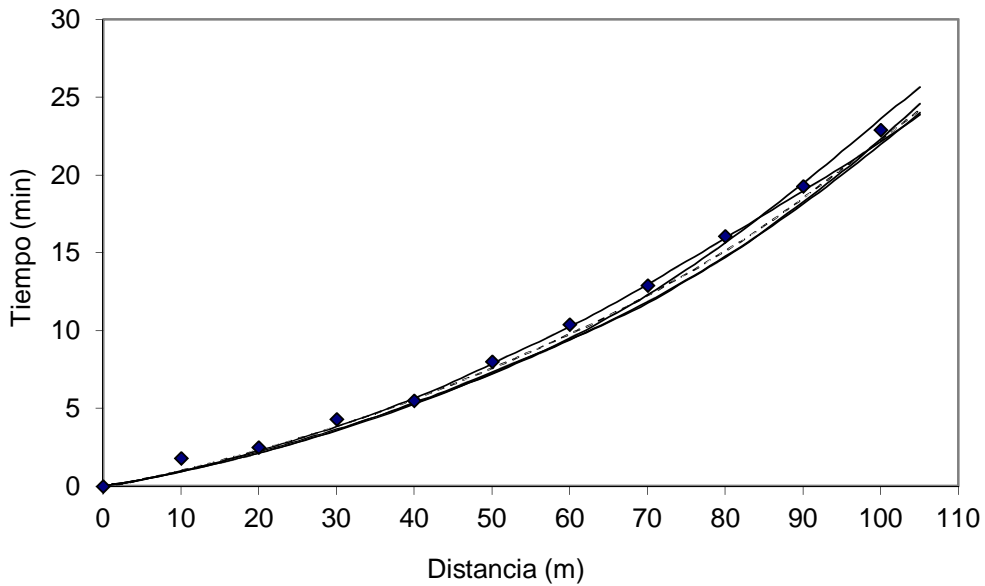
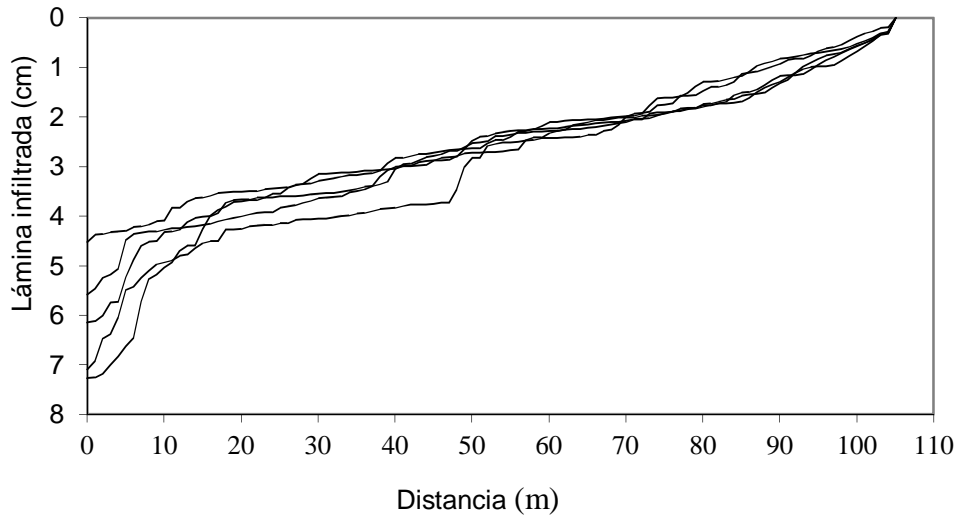


Figura 4.16. Distribución espacial de los cinco campos de factores de escala generados.

El frente de avance simulado utilizando los cinco campos correlacionados es semejante con los datos experimentales como puede observarse en la Figura 4.17.



(a) Curva de avance.



(b) Lámina infiltrada.

Figura 4.17 Avance e infiltración en la melga Montecillo con campos correlacionados de la conductividad hidráulica a través del logaritmo de los factores de escala.

A pesar de que los campos correlacionados presentan una variabilidad espacial importante, lo cual se refleja en el perfil de las láminas infiltradas, las simulaciones muestran prácticamente el mismo comportamiento del avance del riego. Por tal condición, la aplicación de los campos correlacionados ha permitido contribuir al

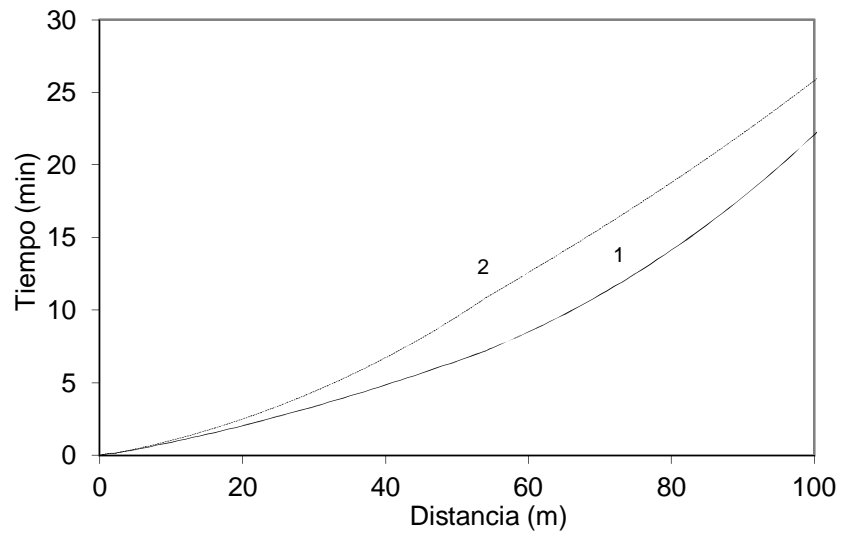


análisis de las condiciones para aplicar métodos inversos en la caracterización de suelos con eventos de riego.

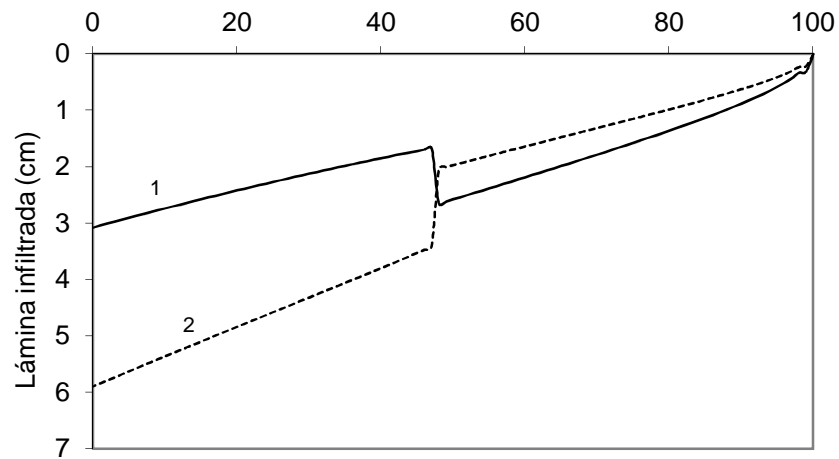
Los parámetros probabilísticos son utilizados también para estudiar la condición general para representar las propiedades hidrodinámicas por propiedades efectivas. Esta condición implica que la distribución probabilística de las propiedades hidrodinámicas sea única en el espacio. La modelación del avance se realiza variando el número de suelos desde dos hasta cien. Para cada valor del número de suelos se realizan al menos diez repeticiones de la modelación del avance. En cada repetición se generan de manera aleatoria los factores de escala cuyo número corresponde al número de suelos, es decir, cada suelo está representado por su factor de escala.

Para obtener los factores de escala se generan de manera aleatoria los valores de probabilidad para los suelos y con la función de probabilidad acumulada se obtienen los valores del logaritmo de los factores de escala. Se utiliza el mismo suelo de referencia que en los casos anteriores. Los valores así obtenidos son ubicados conforme se generan sobre la melga que tiene una longitud de 100 m, la cual está discretizada para la modelación en 100 nodos. El gasto de riego es de  $3.2 \text{ ls}^{-1}\text{m}^{-1}$ . El número de nodos por suelo resulta de dividir el número total de nodos entre el número de suelos.

En la Figura 4.18 se muestra el efecto de invertir los suelos en una melga. Una mitad corresponde a un suelo arcilloso ( $r = 1.434$ ) y la otra mitad a un suelo arenoso ( $r = 0.678$ ). En el primer caso el suelo arcilloso se coloca al inicio de la melga y para el segundo caso se invierten los suelos, es decir, el suelo arenoso se coloca al inicio. El tiempo de avance fue mayor en el segundo caso, lo que se debe a que el volumen infiltrado fue mayor (Figura 4.18).



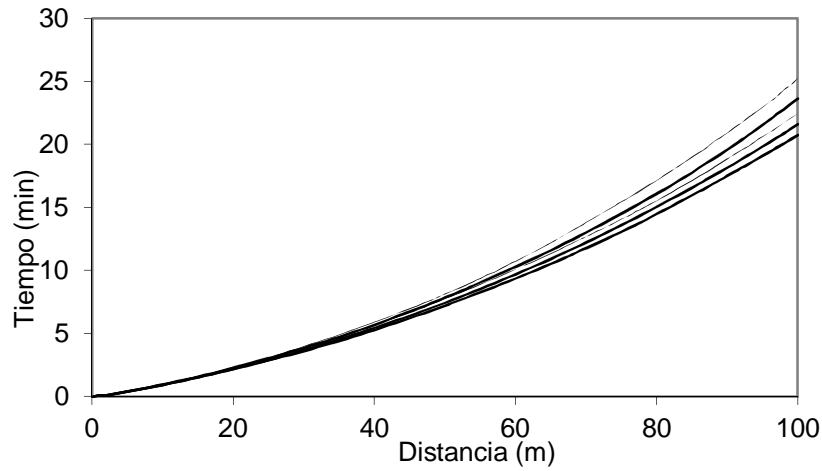
(a) Curva de avance.  
Distancia (m)



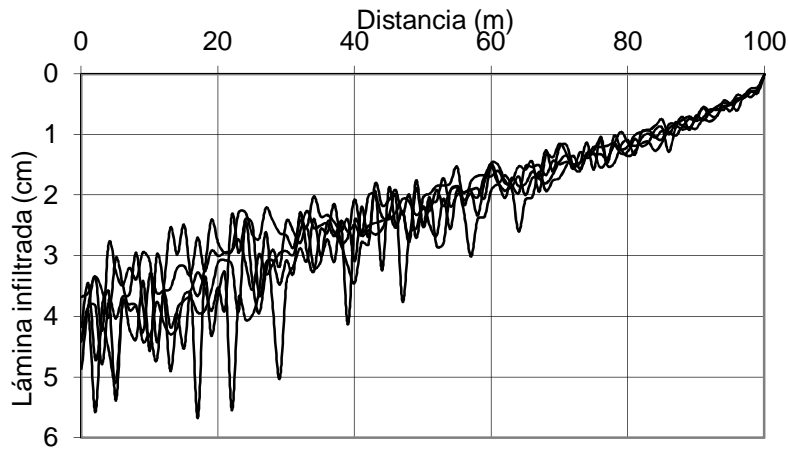
(b) Lámina infiltrada.

Figura 4.18 Curva de avance y lámina infiltrada en una melga con dos combinaciones de suelos: 1) arcilloso-arenoso, y 2) arenoso-arcilloso.

Las Figuras 4.17, 4.18 y 4.19 corresponden a la modelación con números de suelos 20, 50 y 100, respectivamente. En cada una de las figuras se muestran cinco repeticiones y puede observarse que al incrementar el número de suelos las curvas de avance son cada vez más similares.

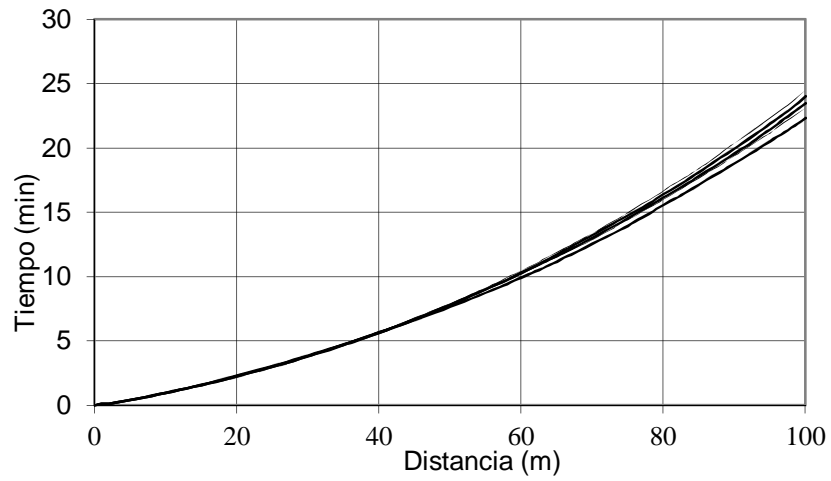


(a) Curva de avance.

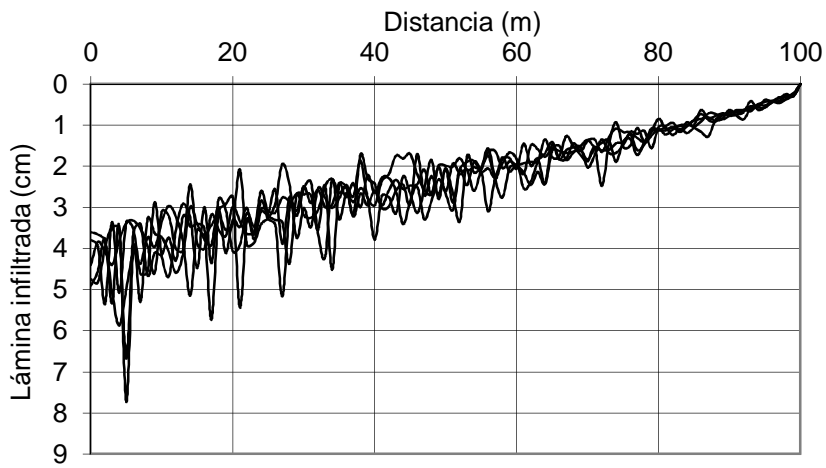


(b) Lámina infiltrada.

Figura 4.19 Curva de avance y lámina infiltrada en una melga con veinte tipos de suelos.

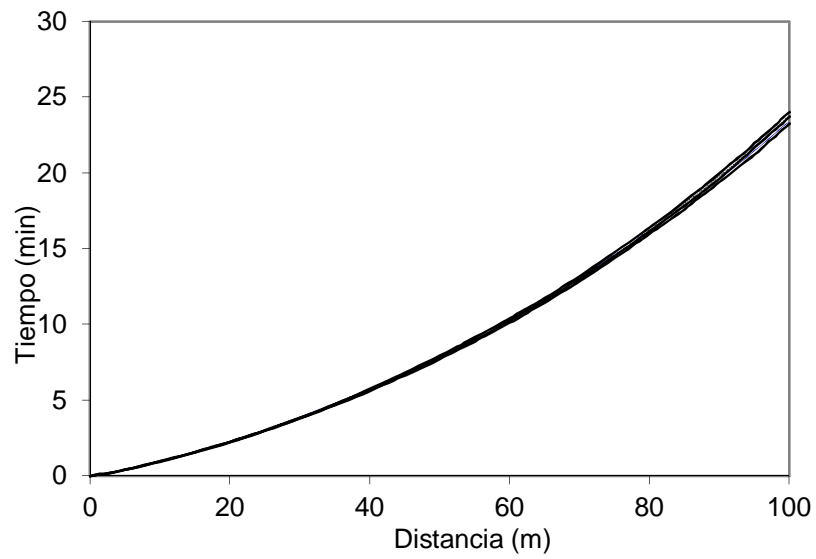


(a) Curva de avance.

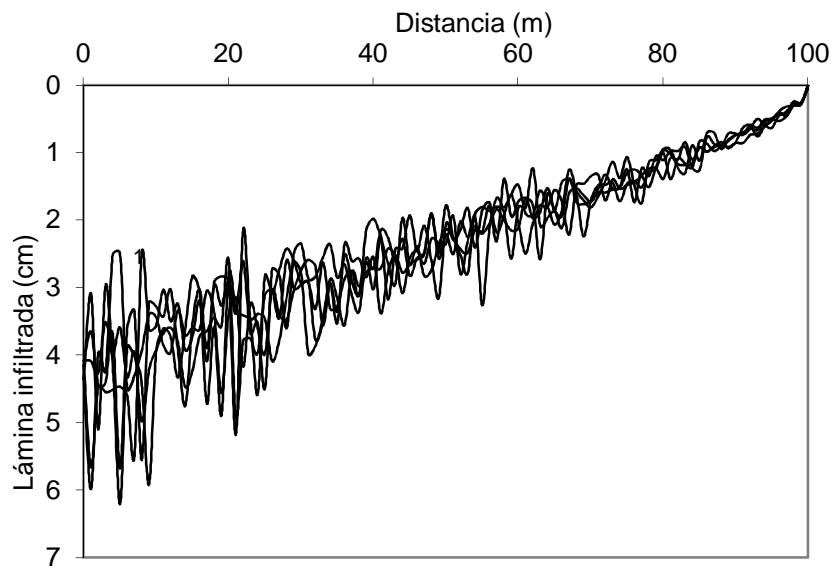


(b) Lámina infiltrada.

Figura 4.20 Curva de avance y lámina infiltrada en una melga con cincuenta suelos.



(a) Curva de avance.



(b) Lámina infiltrada.

Figura 4.21 Curva de avance y lámina infiltrada en una melga con cien suelos.

Al incrementarse el número de suelos el tiempo total de avance tiende a un valor único (Figura 11).

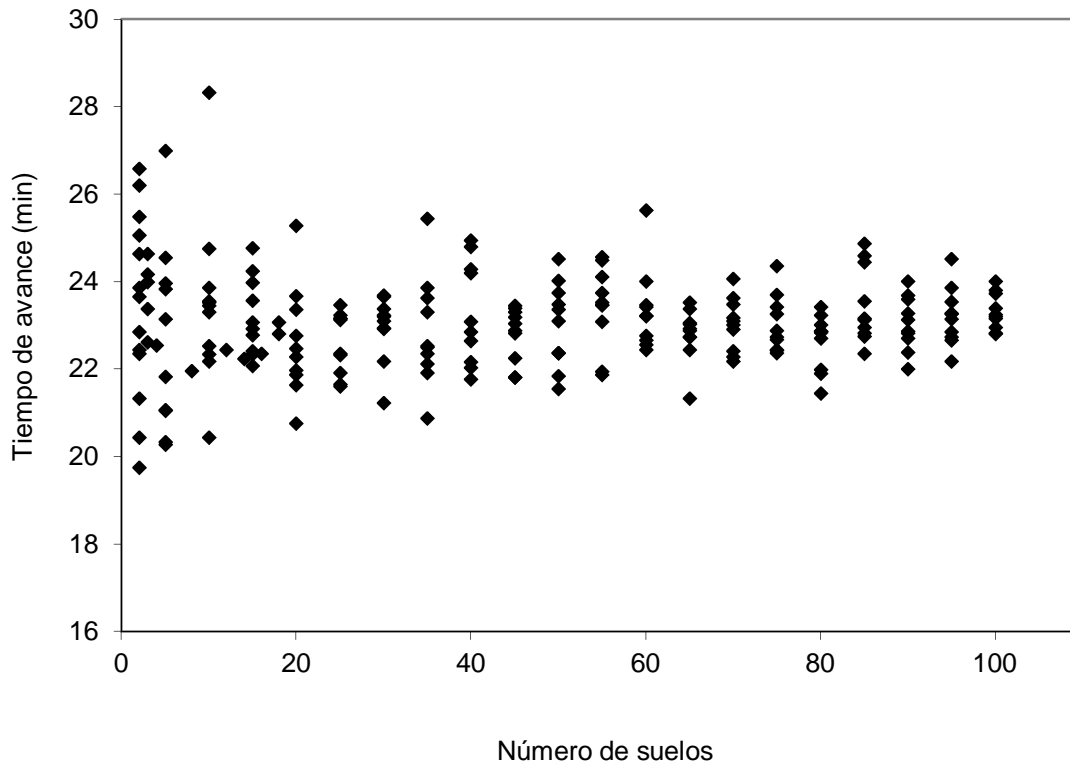
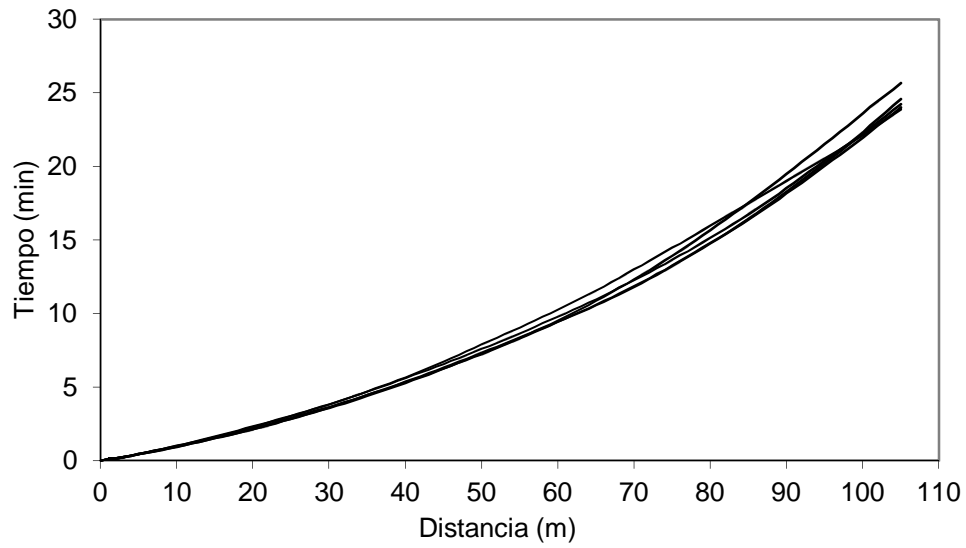


Figura 4.22 Tiempo total de avance de riego obtenido a partir de la modelación y generación sintética de suelos.

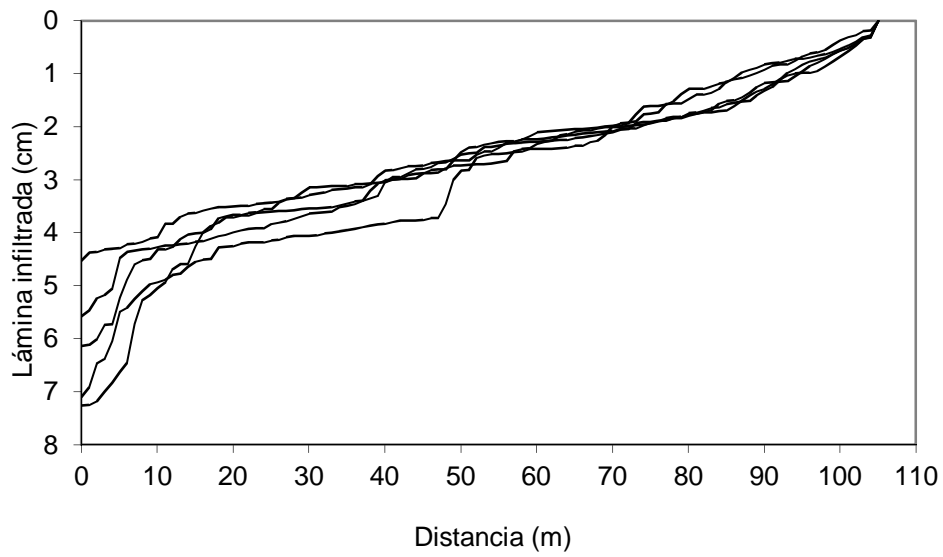
La modelación con dos suelos intercambiando la posición de los mismos muestra una gran diferencia en los tiempos de avance, mientras que conforme se incrementa el número de suelos el tiempo de avance converge a un valor único, lo cual confirma que para la modelación de la fase de avance en el riego por gravedad las propiedades hidrodinámicas efectivas existen cuando la distribución de probabilidad de las mismas es única.

Para analizar la condición de gasto mínimo, en el modelo de simulación se varía el gasto introducido a la melga. Para el caso estudiado el gasto mínimo, ecuación (4.71), es  $q_m = 0.00075 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$ .

El gasto unitario utilizado en la modelación se disminuye de la siguiente manera:  $q_0 = 0.0032 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$  (Figura 4.23),  $q_0 = 0.0025 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$  (Figura 4.24) ,  $q_0 = 0.0015 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$  (Figura 4.25) y  $q_0 = 0.0010 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$  (Figura 4.26). Finalmente, se realiza la simulación con un gasto menor al mínimo (Figura 4.27). En las figuras puede apreciarse que las curvas de avance son similares entre los campos correlacionados para cada uno de los gastos, aunque la lámina infiltrada tenga una fuerte variación espacial.

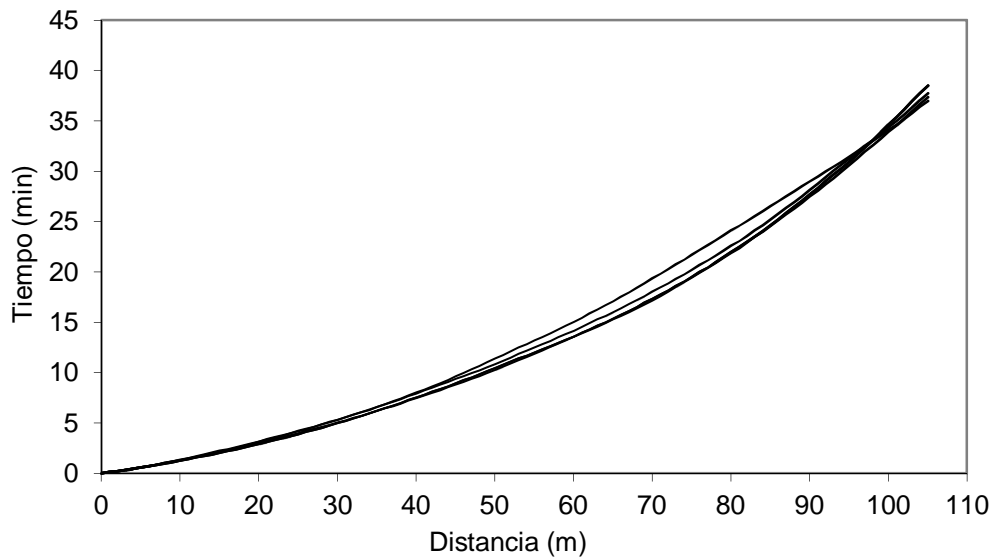


(a) Curva de avance.

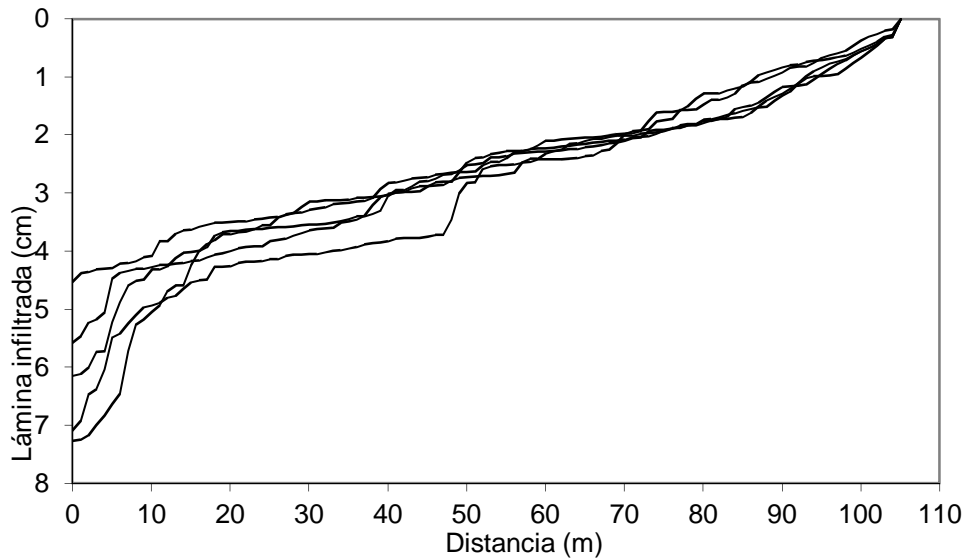


(b) Lámina infiltrada.

Figura 4.23 Curva de avance y lámina infiltrada con un gasto de  $q_0 = 0.0032 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$ .



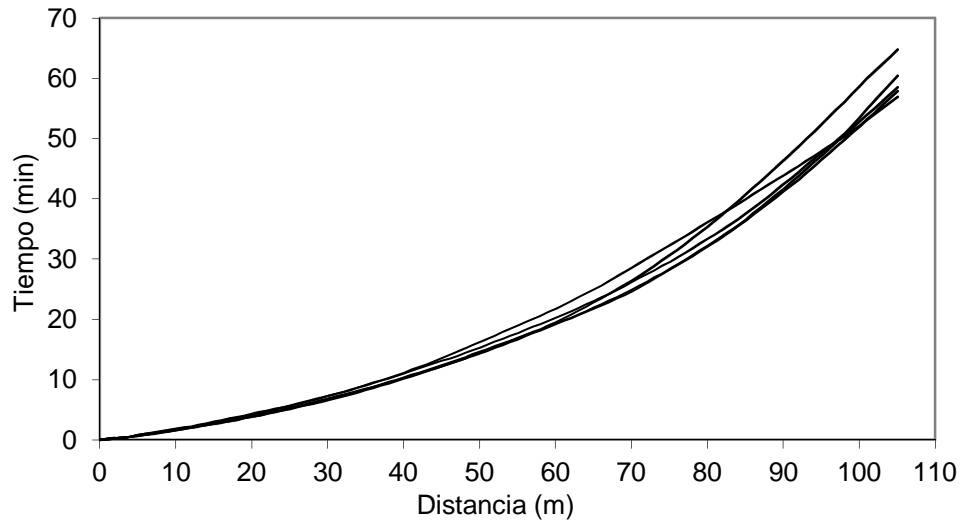
(a) Curva de avance.



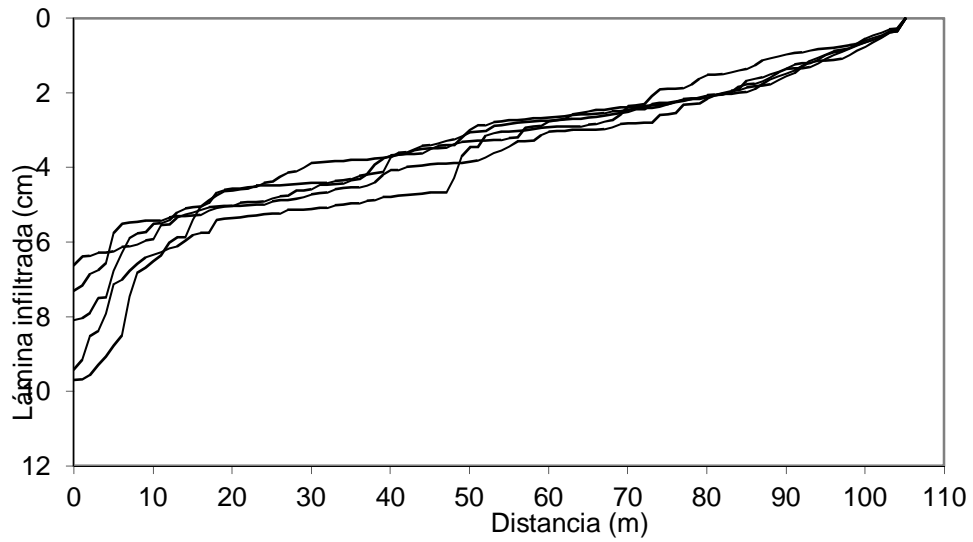
(b) Lámina infiltrada.

Figura 4.24 Curva de avance y lámina infiltrada con un gasto de  $q_0 = 0.0025 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .



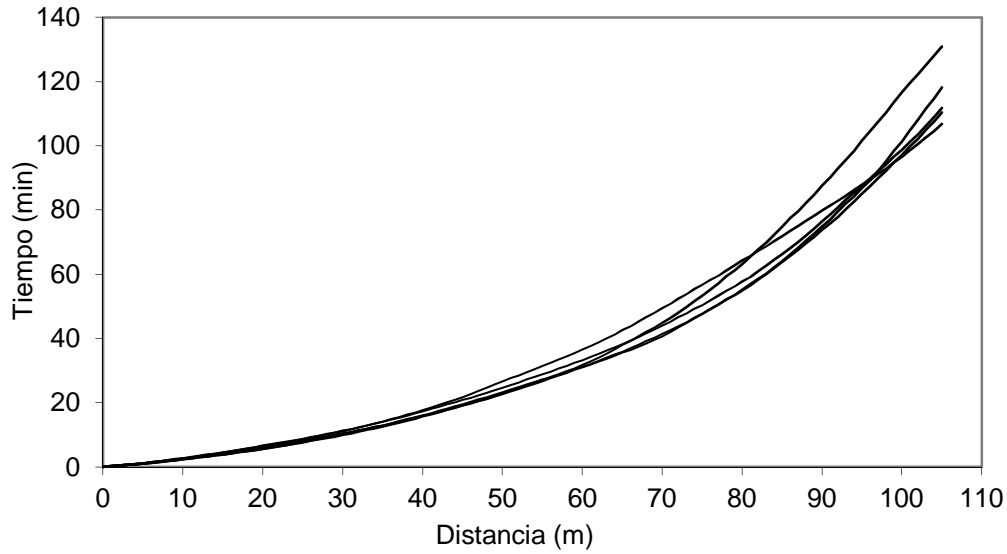


(a) Curva de avance.

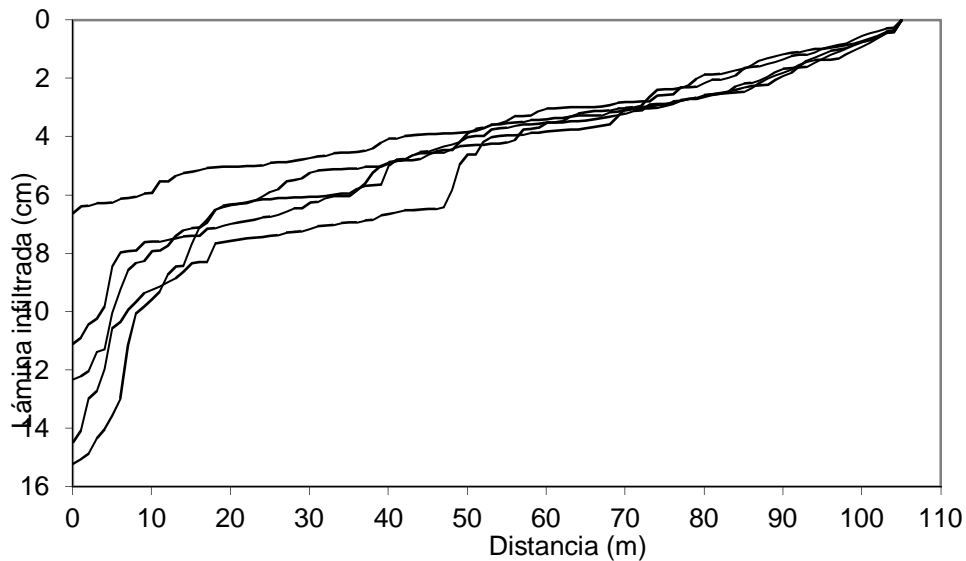


(b) Lámina infiltrada.

Figura 4.25 Curva de avance y lámina infiltrada con un gasto de  $q_0 = 0.0015 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .



(a) Curva de avance.



(b) Lámina infiltrada.

Figura 4.26 Curva de avance y lámina infiltrada con un gasto de  $q_0 = 0.0010 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

Cuando el valor del caudal es menor que el caudal mínimo, el avance y la lámina infiltrada resultantes en la modelación son erráticos y el agua no alcanza el final de la melga. En la Figura 4.27 se muestra como ejemplo los resultados para dos campos correlacionados.

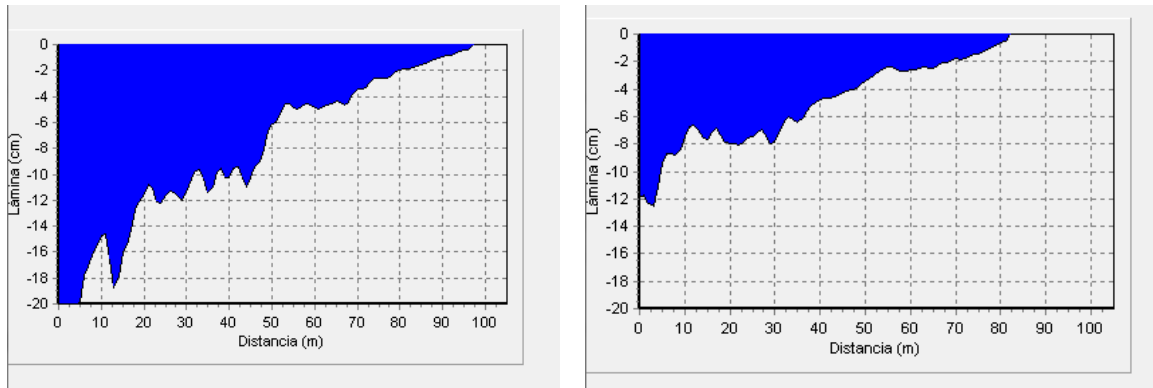


Figura 4.27 Lámina infiltrada para dos campos correlacionados del logaritmo de los factores de escala con un gasto menor al mínimo.

## 4.6 Conclusiones

A partir de la generación sintética de suelos ha sido posible analizar las condiciones en las que el avance del riego por melgas puede ser descrito por propiedades hidrodinámicas del suelo efectivas o equivalentes. Las condiciones generales son que la distribución de probabilidad de las propiedades hidrodinámicas sea única en el espacio y que el gasto de riego aportado sea mayor a un gasto mínimo bien definido, que permite que el agua alcance el extremo final de la melga.

El análisis se aborda con dos maneras de reproducir la variabilidad espacial de la conductividad hidráulica saturada, una con la creación de campos correlacionados que conservan la estructura espacial a través de un método espectral y la otra con la generación aleatoria mediante la función de probabilidad.

Con ambos procedimientos se confirma que es válido utilizar parámetros medios de las propiedades hidrodinámicas de los suelos determinados a través de la inversión de modelos cuando la distribución de probabilidad de las mismas es única en el espacio.

Los campos correlacionados se utilizan también para estudiar la condición de gasto. La modelación se realiza con diferentes valores del gasto. A pesar de que los campos correlacionados presentan una variabilidad espacial importante, lo cual se refleja en el perfil de las láminas infiltradas, las simulaciones muestran prácticamente el mismo comportamiento de las curvas de avance para gastos mayores que el mínimo.

## CONCLUSIONES GENERALES

Se han discutido las relaciones funcionales, parámetros y escalas de medición de las propiedades hidrodinámicas de los suelos. Se analiza la naturaleza de los parámetros y las propiedades invariantes con el objeto de realizar una definición de los parámetros adecuados para la caracterización hidrodinámica de los suelos.

Se realiza la estimación de los parámetros de forma de la característica de humedad a partir de la curva granulométrica del suelo aplicando las relaciones desarrolladas en el marco de la geometría fractal en la conceptualización de las escalas de Laplace y Stokes de Fuentes (1992). La verificación de las relaciones propuestas se realiza a través de la comparación de las pendientes medias de las curvas granulométrica y de retención en 660 suelos de la base de datos GRIZZLY utilizando la ecuación de van Genuchten (1980). Los resultados indican que la metodología propuesta puede ser utilizada con fines de predicción de los parámetros de forma. Los parámetros de estructura de la curva de retención deben ser obtenidos a partir de otras consideraciones.

Se analiza la modelación inversa como herramienta para la estimación de los parámetros de estructura. Para tal efecto se presenta una breve descripción del desarrollo histórico de los métodos inversos para la determinación de las propiedades hidrodinámicas de los suelos. De esta revisión se derivan dos importantes conclusiones: i) en condiciones de laboratorio se han propuesto y mejorado algunas metodologías que han producido algunos buenos resultados, sin embargo, se enfatiza el hecho que en la mayoría de los casos los parámetros determinados en laboratorio son inconsistentes para las condiciones de campo; y ii) las funciones objetivo utilizadas en los métodos inversos requieren información adicional para complementar a la tradicionalmente obtenida en una prueba de infiltración convencional. Se muestra el planteamiento general del problema inverso para la caracterización hidrodinámica de suelos y un estudio experimental.

Puesto que en general puede afirmarse que cuando un problema inverso está mal planteado no significa que carezca de significado, sino que la formulación debe ser modificada, la modelación inversa puede ser cuestionada sólo por la representatividad de los parámetros obtenidos. Esta última condición tiene que ver con lo que se considera volumen elemental representativo y la existencia de las propiedades efectivas, lo cual se asume implícitamente al utilizar la modelación inversa.

Para la determinación de los parámetros de escala se ha utilizado la evolución de la lámina infiltrada obtenida en 21 puntos sobre un transecto de la parcela montecillo. Los datos muestran una importante variabilidad espacial. Para simplificar el análisis se ha aceptado la teoría de similitud en medios porosos, refinada a través del enfoque fractal. Esta teoría ha permitido el escalamiento de la infiltración. Considerando la variabilidad espacial de las características del suelo se establece que, a partir de un gasto mínimo bien definido, la fase de avance en el riego por melgas puede ser descrita por características hidrodinámicas efectivas.

A partir de la generación sintética de suelos ha sido posible analizar las condiciones bajo las cuales el avance del riego por melgas puede ser descrito por propiedades hidrodinámicas del suelo efectivas o equivalentes.

Las condiciones generales son que la distribución probabilística de las propiedades hidrodinámicas sea única en el espacio y que el gasto de riego aportado sea mayor a un gasto mínimo bien definido, que permite que el agua alcance el extremo final de la melga. El análisis se aborda con dos maneras de reproducir la variabilidad espacial de la conductividad hidráulica saturada, una con la creación de campos correlacionados que conservan la estructura espacial a través de un método espectral y la otra con la generación aleatoria mediante la función de probabilidad.

Con ambos procedimientos se confirma que es válido utilizar parámetros medios de las propiedades hidrodinámicas de los suelos determinados a través de la inversión de modelos cuando la distribución de probabilidad de las mismas es única en el espacio.

Los campos correlacionados se utilizan también para estudiar la condición de gasto. La modelación se realiza con diferentes valores del gasto. A pesar de que los campos correlacionados presentan una variabilidad espacial importante, lo cual se refleja en el perfil de las láminas infiltradas, las simulaciones muestran prácticamente el mismo comportamiento de las curvas de avance para gastos mayores que el mínimo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abramowitz, M. y I. A. Stegun, 1970. Handbook of mathematical functions, Dover Publications, Inc., New York, 1046 p.

Angulo-Jaramillo, J.P. Vandervaere, S. Roulier, J.L. Thony, J.P. Gaudet y M. Vauclin, 2000. Field measurement of soil surface hydraulic properties by disc and ring infiltrometers A review and recent developments. Soil and Tillage Research 55: 1-29.

Arroyo Correa, V. M., 1996. Investigación y transferencia de tecnología en ingeniería hidroagrícola. Proyecto HC-9602. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.

Arya, L. M. y J. F. Paris, 1981. A physicoempirical model to predict soil moisture characteristics from particle-size distribution and bulk density data. Soil Science Society of America Journal 45: 1023-1030.

Bastet, G., A. Buand, M. Bornand y P. Quénin, 1999. Performance of available pedotransfer functions for predicting the water retention properties of French soils. En: van Genuchten, M.Th., F.J. Leij y L. Wu (Editores). Characterization and Measurement of the Hydraulic Properties of Unsaturated Porous Media. pp. 981-992. University of California, Riverside, CA.

Bloemen, G. W., 1980. Calculation of hydraulic conductivities of soils from texture and organic matter content. Z. Pflanzenernährung und Bodenkunde. 143(5):581-612.

Bouwer, H., y R.D. Jackson, 1974. Determining soil properties. En: Drainage for Agriculture. ASA Monogr. 17. chap. 23. sect. 10, edited by J. van Schilfgaarde. pp. 611-672. American Society of Agronomy. Madison. Wisconsin.

Braddock, R.D, Parlange, J.-Y. y Lee, H., 2001. Application of a soil water hysteresis model to simple water retention curves. Transport in porous media 44: 407-420.

Brakensiek, D.L., R. L. Engleman y W. J. Rawls, 1981. Variation within texture classes of soil water parameters. Trans. ASAE, 335-339.

Brooks, R. H. y A. T. Corey, 1964. Hydraulic properties of porous media. Hydrol., pap. 3, Colorado State University, Fort Collins.

Brutsaert, W., 1966. Probability laws for pore size distributions. Soil Sci. 101:85-92.

Buckingham, E., 1907. Studies on the movement of soil moisture. Boletín 38.U.S. Department of Agriculture Bureau of Soils, Washington, DC.

Burdine, N.T., 1953. Relative permeability calculation from size distribution data. Trans. AIME 198:71-78.

Carrera, J. y S. P. Neumann, 1986. Estimation of aquifer parameters under transient and steady-state conditions: 2. Uniqueness, stability and solution algorithms. Water Resour. Res. 22:211-227.

Celia, M. A., E. T. Bouloutas y R. L. Zarba, 1990. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. Water Resour. Res. 26: 1483-1496.

Childs, E.C. y N. Collis-George, 1950. The permeability of porous materials. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A 201:392-405.

Clausnitzer, V. y J. W. Hopmans, 1995. Non-linear parameter estimation: LM\_OPT. General-purpose optimization code based on the Levenberg-Marquardt algorithm. Land, Air and Water Resources Paper No. 100032, University of California, Davis, CA.

Corey, A.T., 1992. Pore-size distribution. P. 37-44. En: M. Th. Van Genuchten, F. J. Leij an L. J. Lund (ed.) Proc. Int. Workshop on Indirect Methods for Estimating the Hydraulic Properties of Unsaturated Soils. University of California. Riverside, CA.

Darcy, H., 1856. Les fontaines publiques de la ville de Dijon, Dalmont, Paris.

Durner, W., B. Schultze, y T. Zurmuhl, 1996. Transient flow experiments for the determination of soil hydraulic properties – An evaluation of different boundary conditions. En: Durner W., J. Halbertsma, M. Cislerova (Eds). European Workshop on Advanced Methods to Determine Hydraulic Properties of Soils, Thurnau, 10-12 June 1996. pp. 85-88. Department of Hydrology, University of Bayreuth.

Durner, W., B. Schultze, y T. Zurmuhl, 1999. State-of-the-art in inverse modeling of inflow/outflow experimentes. En: van Genuchten, M.Th., F.J. Leij, L. Wu (Eds.) Characterization and Measurement of the Hydraulic Properties of Unsaturated Porous Media. pp. 661-681. University of California, Riverside, CA.

Espino, A., D. Mallants, M. Vanclooster y J. Feyen, 1995. Cautionary notes on the use of pedotransfer functions for estimating soil hydraulic properties. Agricultural Water Management 29: 235-253.

Falconer, K., 1990. Fractal geometry, mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons. England. 288 p.

Feddes, R.A., P. Kabat, P.J.T van Bakel, J.J.B. Bronswijk, y J. Halbertsma, 1988. Modelling soil water dynamics in the unsaturated zone – state of the art. *Journal of Hydrology* 100: 69-111.

Feddes, R. A., M. Menenti, P. Kabat, W.G.M. Bastiaanssen, 1993. Is large-scale inverse modelling of unsaturated flow with areal average evaporation and surface soil moisture as estimated from remote sensing feasible? *Journal of Hidrology* 143: 125-152.

Fuentes, C., 1992. *Appoche fractale des trasferts hydriques dans les sols non-saturés*. Tesis de doctorado. Grenoble: Université Joseph Fourier de Grenoble. 267 p.

Fuentes, C., 1985. *El potencial de presión y la conductividad hidráulica: Análisis y predicción*. Tesis profesional. Universidad Autónoma Chapingo. 206 p.

Fuentes, C., R. Haverkamp y J.-Y. Parlange, 1992. Parameter constraints on closed-form soilwater relationships. *Journal of Hidrology* 134: 117-142.

Fuentes, C., F. Brambila, M. Vauclin, J.-Y. Parlange y R. Haverkamp, 2001. Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados. *Ingeniería Hidráulica en México* 16( 2): 119-137.

Fuentes, C., A.C.D. Antonino, J. Sepúlveda, F. Zataráin, y B. de León, 2003. Predicción de la conductividad hidráulica relativa de los suelos con modelos fractales. *Ingeniería Hidráulica en México* 18(4): 31-40.

Fujita, H., 1952. The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part II. *Text. Res. J.* 22: 823-827.

Gardner, W.R., 1956. Calculation of capillary conductivity from pressure plate outflow data. *Soil Science Society of America Proceedings* 20: 317-320.

Gardner, W. R., 1958. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Sci.* 85:228-232.

Green, W.H., y G.A. Ampt, 1911. *Studies in soil physics, I: the flow of air and water through soils*. *J. Agric. Sci.* 4:1-24.

Gupta, S.C. y W.E. Larson, 1979. Estimating soil water retention characteristics from particle size distribution, organic matter percent and bulk density. *Water Resour. Res.* 15:1633-1635.



Haverkamp, R., M. Vauclin y G. Vachaud, 1984. Error analysis in estimating soil water content from neutron probe measurements I. Local standpoint. *Soil Sci.* 137(2): 78-90.

Haverkamp, R. y J.-Y. Parlange, 1986. Predicting the water-retention curve from particle-size distribution: 1. Sandy soils without organic matter. *Soil Sci.* 142: 325-339.

Haverkamp, R., P. J. Ross, K. R. J. Smetem y J.-Y. Parlange, 1994. Three-dimensional analysis of infiltration from the dis infiltrometer. 2. Physically based infiltration equation. *Water Resour Res.* 30:2931-2935.

Haverkamp, R., C. Zammit, F. Bouraoui, K. Rajkai, J.L. Arrúe, y N. Heckmann, 1998. GRIZZLY, Grenoble Catalogue of Soils: Survey of soil field data and description of particle-size, soil water retention and hydraulic conductivity functions. Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement (LTHE), Grenoble Cedex 9, France.

Haverkamp, R., P. Reggiani, P. J. Ross and J.-Y. Parlange, 2002. Soil water hysteresis prediction model based on theory and geometric scaling. P. 213-246. In D. Smiles et al. (Ed.) *Heat and Mass Transfer in the Natural Environment: A Tribute to J.R. Philip*, AGU Monograph, American Geophysical Union, Washington, DC.

Hollenbeck, K.J. y K.H. Jensen, 1998. Experimental evidence of randomness and nonuniqueness in unsaturated outflow experiments designed for hydraulic parameter estimation. *Water Resources Research* 34:595-602.

Hornung, U., 1983. Identification of non-linear soil physical parameters from an input-output experiment. In: Deuffhardt P., E. Hairer (Eds). *Workshop on Numerical Treatment of Inverse Problems in Differential and Integral Equations.* 227-237. Birkhauser, Boston.

Journel, A. G. y Ch. J. Huijbregts, 1978. *Mining geostatistics.* Academic Press, New York. 612 p.

Jury, W. A., D. Or, Y. Pachepsky, H. Vereecken, J. W. Hopmans, L. R. Ahuja, B. E. Clothier, K. L. Bristow, G. J. Kluitenberg, P. Moldrup, J. Šimůnek, M. Th. van Genuchten and R. Horton, 2011. Kirkham's legacy and contemporary challenges in soil physics research. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 75:1589–1601.

Kool, J.B., J.C. Parker, y M.Th. van Genuchten, 1985a. Determining soil hydraulic properties for one-step outflow experiments by parameter estimation. I. Theory and numerical studies. *Soil Science Society of America Journal* 49:1348-1354.

Kool, J.B., J.C. Parker, y M.Th. van Genuchten, 1985b. ONESTEP: A nonlinear parameter estimation program for evaluating soil hydraulic properties from one-step outflow experiments. Virginia Agricultural Station Bulletin 85-3, Blacksburg, Virginia.

Kool, J.B. y J.C. Parker, 1987. Estimating Soil Hydraulic Properties from Transient Flow Experiments: SFIT User's Guide. Electric Power Research Institute, Palo Alto California.

Lewis M.R. y W.E. Milne, 1938. Analysis of border irrigation. *Agri. Engr.* 19:267-272.

McLaughlin, D. y L.R. Townley, 1996. A reassessment of the groundwater inverse problem. *Water Resources Research* 32, 1131-1161.

Mandelbrot, B.B., 1983. The fractal geometry of nature. W. H. Freeman and Company, New York. 468p.

Marquardt, D.W., 1963. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 11, 431-441.

Matheron, G., 1965. Les variables régionalisées et leur estimation Ed. Masson. Paris.

McLaughlin, D. y L. R. Townley, 1996. A reassessment of the groundwater inverse problem. *Water Resour. Res.* 32:1131-1161.

Mejía G. and I. Rodríguez-Iturbe, 1974. On the synthesis of random fields from the spectrum: An application to the generation of hydrologic spatial processes. *Water Resour. Res.* 10(4): 705-711.

Miller, E. E. y R. D. Miller, 1955. Theory of capillary flow, I. Practical implications, *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.* 19:267-271.

Miller, E. E. y R. D. Miller, 1956. Physical theory for capillary flow phenomena. *J. appl. phys.* 27: 324-332.

Mohanty, B. P. y J. Zhu, 2007. Effective parameters in horizontally and vertically heterogeneous soils for steady-state land-atmosphere interaction. *J. Hydrometeorol.* 8, 715-729.

Mualem, Y., 1976. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resources Res.* 12: 513-522.

Muñoz-Pardo, José Francisco, 1987. Approche géostatistique de la variabilité spatiale des milieux géophysiques, application a l'échantillonnage de phénomènes

bidimensionnels par simulation d'une fonction aléatoire. Thèse Docteur-Ingénieur. L'Université Scientifique, Technologique et Médicale de Grenoble.

Nielsen, D. R., J. W. Biggar y K. T. Erh, 1973. Spatial variability of field measured soil-water properties. *Hilgardia* 42: 215-259.

Neuman, S. P. 1973. Saturated-unsaturated seepage by finite elements, *J. Hydraul. Div. ASCE* 99 (HY12): 2233-2250.

Pachepsky, Y.A, D. Timlin y G. Varallyay, 1996. Artificial neural networks to estimate soil water retention from easily measurable data. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 60: 727-733.

Parker, J.C., J.B. Kool, y M.Th. van Genuchten, 1985. Determining soil hydraulic properties from one-step outflow experiments by parameter estimation. II. Experimental studies. *Soil Science Society of America Journal* 49: 1354-1359.

Parlange, J.-Y., I. Lisle, R.D. Braddock y R.E. Smith, 1982. The three-parameter infiltration equation. *Soil Sci.* 133: 337-341.

Parlange, J.-Y., R. Haverkamp y J. Touma, 1985. Infiltration under ponded conditions: 1. Optimal analytical solution and comparison with experimental observations. *Soil Sci. Vol.* 139 4: 305-311.

Perroux, K.M. y I. White, 1988. Design for disc permeameters. *Soil Science Society of America Journal* 52: 1205-1215.

Press, W.H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling y B.P. Flannery, 1992. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 2<sup>nd</sup> Ed. Cambridge University Press. Cambridge.

Rawls, W.J., D.L. Brakensiek y K.E. Saxton, 1982. Estimation of soil water properties. *Trans. ASAE* 25: 1316-1320.

Rawls, W.J. y D.L. Brakensiek, 1985. Prediction of soil water properties for hydrologic modelling. En: Jones, E. y T.J. Ward (Editores), *Watershed Management in the Eighties*. Proceedings of the Symposium of the ASCE. pp 293-299. ASCE Convention, Denver.

Rawls, W. J., L. R. Ahuja y D. L. Brakensiek, 1992. Estimating soil hydraulic properties from soil data. In: M. Th. van Genuchten, F.J. Leij y L.J. Lund (Ed.) *Proc. Int. Workshop on Indirect Methods for Estimating the Hydraulic Properties of Unsaturated Soils*. University of California, CA, 329-340.

Rendón, L., C. Fuentes y G. Magaña, 1997. Diseño del riego por gravedad. En *Manual para el Diseño de Zonas de Riego Pequeñas*. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, México.

Reynolds, W.D. y D.E. Elrick, 1991. Determination of hydraulic conductivity using a tension infiltrometer. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 556: 633-639.

Rice, S. O., 1954. *Mathematical analyses of random noise. Selected papers on noise and stochastic processes.* N. WAX Dover, New York.

Richards, L. A., 1931. Capillary conduction of liquids through porous medium. *Physics* 1: 318-333.

Rogowski, A.S., 1971. Watershed physics: Model of soil moisture characteristics. *Water Resour. Res.* 7(6):1575-1582.

Romano, N. y A. Santini, 1999. Determining soil hydraulic functions from evaporation experiments by a parameter estimation approach: experimental verifications and numerical studies. *Water Resources Research* 35: 3343-3359.

Russo, D, E, Bresler, U. Shani y J.C. Parker, 1991. Analysis of infiltration events in relation to determining soil hydraulic properties by inverse problem methodology. *Water Resour. Res.* 27: 1361-1373.

Santini, A., N. Romano, G. Ciollaro, y V. Comegna, 1995. Evaluation of a laboratory inverse method for determining unsaturated hydraulic properties of a soil under different tillage practices. *Soil Science* 160, 340-351.

Saucedo, H., C. Fuentes y M. Zavala, 2006. El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 3. verificación numérica de la hipótesis del tiempo de contacto en el riego por melgas. *Ingeniería Hidráulica en México* 21: 135-145.

Shaap, M.G., Leij, F.L., van Genuchten, M.Th., 1998. Neural network analysis for hierarchical prediction of soil hydraulic properties. *Soil Science Society of America Journal* 62:847-855.

Sharma, M. L., G. A. Gardner y C. G. Hunt, 1980. Spatial variability of infiltration in watershed. *J. of Hydrology* 45: 101-122.

Shinozuka, M. y C. M. Jan, 1972. Digital simulation of random processes and its applications. *J. Sound. Vib.* 25(1): 111-128.

Simunek, J., T. Vogel, y M.Th. van Genuchten, 1994. The SWMS\_2D Code for simulating water flow and solute transport in two-dimensional variably saturated media. Version 1.21. Research Report No. 132. U.S. Salinity Laboratory. Riverside, California.

Simunek, J., M. Th. van Genuchten, 1996. Estimating unsaturated soil hydraulic properties from tension disc infiltrometer data by numerical inversion. *Water Resources Research* 32: 2683-2696.

Simunek, J., M.Th. van Genuchten, 1997. Estimating unsaturated soil hydraulic properties from multiple tension disc infiltrometer data. *Soil Science* 162: 383-398.

Simunek, J., O. Wendroth, y M.Th. van Genuchten, 1998a. A parameter analysis of the evaporation method for determining soil hydraulic properties. *Soil Science Society of America Journal* 62: 894-905.

Simunek, J., Angulo-Jaramillo, R., M. G. Shaap, J. P. Vandervaere y M. T. van Genuchten, 1998b. Using an inverse method to estimate hydraulic properties of crusted soils from tension-disc infiltrometer data. *Geoderma* 86: 61-81.

Simunek, J. y M. Th. van Genuchten, 1999. Using the HYDRUS-1D and HYDRUS-2D codes for estimating unsaturated soil hydraulic and solute transport parameters. In: van Genuchten, M.Th., Leij, F.J., Wu, L. (Eds.). *Characterization and Measurement of the Hydraulic Properties of Unsaturated Porous Media*. pp. 1523-1536. University of California, Riverside, CA.

Simunek, J. y M. Th. van Genuchten, 2000. The DISC computer software for analyzing tension disc infiltrometer data by parameter estimation. Version 1|.0, Research Report No. 145, U.S. Salinity Laboratory, USDA, ARS, Riverside, California.

Sinclair, D.F. y J. Williams, 1979. Components of variance involved in estimating soil water content and water content change using a neutron moisture meter. *Austr. J. Soil Res.* 17: 237-247.

Skaggs, W. R., E.J. Monke y L.F. Huggins, 1971. An approximate method for defining the hydraulic conductivity-pressure potential relationships for soils. *Transactions of the ASAE* 14: 130-133.

Smetten, K.R.J. y B.E. Clothier, 1989. Measuring unsaturated sorptivity and hydraulic conductivity using multiple disc permeameters. *J. Soil Sci.* 40: 563-568.

Sposito, G. 1990. Lie group invariance of the Richards equation. P. 327-347. IN J. Cushman (ed.) *Dynamic offluids in hierarchical porous media*. Academic Press, New York.

Strelkoff, T.S., A.J. Clemmens and E. Bautista, 2009. Estimation of soil and crop hydraulic properties. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering* 135: 537-555.

Tamari, S., L. Gómez, V.M. Arroyo C., y N.H. García, 2001. Propuesta para monitorear la contaminación del agua en una parcela piloto con drenaje agrícola. *Agrociencia* 35: 321-334.

Tietje, O., y M. Tapkenhinrichs, 1993. Evaluation of pedo-transfer functions. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 57: 1088-1095.

Toorman, A.F., P.J. Wierenga, y R.G. Hills, 1992. Parameter estimation of soil hydraulic properties from one-step outflow data. *Water Resources Research* 28: 3021-3028.

Van Dam, J.C., J.N.M. Stricker, y P. Droogers, 1992. Evaluation of the inverse method for determining soil hydraulic functions from one-step outflow experiments. *Soil Science Society of America Journal* 56:1042-1050.

Van Dam, J.C., J.N.M. Stricker, y P. Droogers, 1994. Inverse method for determining soil hydraulic functions from multi-step outflow experiments. *Soil Science Society of America Journal* 58: 647-652.

Van Genuchten, M. Th., 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 44: 892-898.

Vauclin, M., 1982. Méthodes d'étude de la variabilité spatiale des propriétés d'un sol, *En Variabilité spatiale des processus de transfert dans les sols*, Colloque S.H.F.-I.N.R.A. 15: 9-43.

Vereecken, H., J. Diels, y J. Feyen, 1990. Functional evaluation of pedo-transfer-functions for soil hydraulic properties. *Transaction of the 14th International Congress of Soil Science Kyoto* 5, 533-534.

Vereecken, H., J. Diels, J. van Orshoven, J. Feyen y J. Bouma, 1992. Functional evaluation fo pedotransfer functions for the estimation of soil hydraulic properties. *Soil. Sci. Soc. Am. J.* 56:1371-1378.

Vinsome, P. K. W., 1976. Orthomin, an Iterative Method for Solving Sparse Sets of Simultaneous Linear Equations. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/5729-MS.

Warrick, A.W., G.J. Mullen y D.R. Nielsen, 1977. Scaling field-measured soil hydraulic properties using a similar media concept. *Water Resour. Res.* 13:355-362.

Warrick, A. W. y A. Amoozegard-Fard, 1979. Infiltration and drainage calibration using a similar media concept. *Water Resources Res.* 13: 355-362.

Warrick, A. W., 1992. Models for disc infiltrimeters. *Water Resour Res.* 28:1319-1327.

Whisler, F. D. y K. K. Watson, 1968. One-dimensional gravity drainage of uniform columns of porous materials. *Journal of Hydrology* 6: 277-296.

Wind, G.P., 1968. Capillary conductivity data estimated by a simple method. In P.E. Rijtema y H. Wassink (eds), *Water in the unsaturated zone*, vol.1, Proc. of the Wageningen symp., June 1966. pp. 181-191. International Association of Scientific Hydrology. Gentbrugge.

Wooding, R. A., 1968. Steady infiltration from a shallow circular pond. *Water Resour. Res.* 4:1259-1273.

Zachmann, D.W., P.C. DuChateau, y A. Klute, 1981. The calibration of the Richards flow equation for a draining column by parameter identification. *Soil Science Society of America Journal* 45: 1012-1015.

Zhanf. R., 1997. Infiltration models for the disk infiltrometer. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 61:1597-1603.

Zurmuhl, T., W. Durner, 1998. Determination of parameters for bimodal hydraulic functions by inverse modeling. *Soil Science Society of America Journal* 62: 874-880.