UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

VARIEDADES TÓRICAS SIN LA CONDICIÓN DE NORMALIDAD

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ENRIQUE CHÁVEZ MARTÍNEZ

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. ANDRÉS DANIEL DUARTE
CONACYT-UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. NOVIEMBRE 2016

A mis padres y a mi abuela.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, por todo el apoyo que me han dado desde que comencé este largo viaje, que me han educado y han sido un ejemplo de vida en todo momento para mi llevándome por un buen camino y ayudándome a corregir mis errores. Y más que nada por darme la oportunidad llegar hasta aquí.

Me encuentro particularmente agradecido con mi asesor de tesis el doctor Daniel Duarte por su incondicional ayuda y apoyo en todo momento durante la elaboración de este trabajo, su gran paciencia, dedicación y todo el tiempo que invirtió en este proyecto, que a pesar de haber sido una decisión de ultima hora, decidió tomarme bajo su tutela. Por sus grandes consejos y apoyo tanto académicos como personales, que me ayudaron durante todo este recorrido. Gracias a ellos logre que la transición a una nueva ciudad fuera más rápida y llevadera. Además, gracias a su gran carisma y pasión por las matemáticas, logro que todo este trabajo se volviera una experiencia sumamente divertida y enriquecedora.

Al doctor Jawad Snoussi que fue la persona que se encargo de mi durante mis estudios de maestría, quien siempre lograba hacer un espacio en su apretada agenda para atenderme y que gracias a el comenzó este viaje. Además, agradezco su apoyo en este trabajo en el área de algebra lineal.

A todos mis compañeros y maestros del IMATE-Cuernavaca quienes me acompañaron a lo largo de todos mis estudios de maestría, que con sus enseñanzas logre superarme académicamente y con su buena compañía y largas pláticas, lograron que los estudios de maestría se volvieran algo que disfrute mucho.

A toda la gente de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAZ, tanto profesores como estudiantes que me recibieron con los brazos abiertos durante mi estancia de elaboración de tesis, que gracias a su gran hospitalidad, lograron que todo este proceso se volviera algo de disfrute de principio a fin. Con su amistad logre salir de la rutina y olvidarme por momentos del estrés causado por este trabajo, haciéndolo una experiencia que nunca olvidaré.

A todos mis compañeros y amigos que están en Ciudad Juárez, que siempre me apoyaron en todo momento a pesar de la distancia. Muy en particular a Luis Albino que siempre estuvo en contacto conmigo y que siempre me dio los ánimos para continuar con este proceso y con sus buenas pláticas y consejos no dejo que perdiera el rumbo durante mi maestría.

Al doctor Gregor Weingart que me apoyo en este trabajo en el área de álgebra lineal y al doctor Homero Gallegos por su apoyo en el área de curvas elípticas, que con su basto conocimiento en estas áreas, logre superar algunos de los retos que aparecieron durante este trabajo.

A la UNAM y a la UAZ las dos instituciones que me abrieron sus puertas y me extendieron su mano durante todo mi proceso de maestría.

Expreso mi sincero agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología ya que sin el apoyo económico proporcionado a lo largo de estos dos años el mero hecho de estudiar un programa de posgrado hubiera sido simplemente impensable.

Y por ultimo a la DGAPA-UNAM por ofrecerme apoyo económico durante la primera parte de mi estancia para la culminación de este trabajo a través del proyecto PAPIIT IN-107614 y al instituto de matemáticas unidad Cuernavaca por el apoyo económico durante la segunda parte de la estancia para la culminación de este trabajo.

Índice general

Introducción

Las variedades tóricas son variedades algebraicas definidas por información combinatoria. La interacción entre el álgebra, la geometría y la combinatoria ha guiado a muchos resultados en esta área. Las variedades tóricas tienen aplicaciones en diversas áreas como la física, la teoría de códigos, la estadística algebraica y el modelado geométrico. Mas aún como es notado por W. Fulton en el prefacio de su libro [Ful]: "las variedades tóricas han proporcionado un campo de pruebas muy fértil para las teorías generales".

Originalmente, la definición de variedad tórica incluía la condición de normalidad. Con esta condición, es bien sabido que existe una descripción combinatoria de tales variedades en términos de abanicos dados por conos poliédricos racionales. Tal descripción es consecuencia de un resultado de H. Sumihiro, que afirma que toda variedad tórica normal tiene una cubierta por variedades tóricas afines. Sin embargo, existen variedades tóricas no normales que no cumplen el teorema de Sumihiro y por esta razón no se les puede asociar un objeto combinatorio en el espíritu del caso normal.

El objetivo de la tesis es estudiar una definición alternativa de variedad tórica no necesariamente normal a la que se le puede asociar objetos combinatorios. Esta definición es debida a P. González y B. Teissier, y aparece en el artículo [GyT]. Nosotros las llamaremos *variedades tóricas bien cubiertas*. Tal definición generaliza a las variedades tóricas normales. La esencia de esta definición es dar como condición el resultado del teorema de Sumihiro y de esta manera asociar un objeto combinatorio de manera análoga al caso normal. Enseguida, exploramos algunas consecuencias de esta nueva definición. Veremos que algunas propiedades conocidas de las variedades tóricas normales no se conservan sin la condición de normalidad, como ser anillo Cohen-Macaulay y la clasificación de variedades tóricas que son intersección completa en el caso de superficie, aunque, por otro lado también habrá nuevas propiedades que no se tenían en el caso normal, tal es el caso de las explosiones monomiales.

A continuación describimos el contenido de la tesis. El objetivo de la primera parte de la tesis es utilizar la teoría de variedades tóricas afines descrita en [CLS] y [GyT], con el propósito de entender la definición de variedades tóricas bien cubiertas y caracterizarlas de manera combinatoria. Esta parte es la base de todo nuestro trabajo.

En la segunda parte de la tesis utilizaremos lo aprendido en la primera parte para explorar algunos aspectos positivos y negativos de prescindir de la normalidad en la definición de variedad tórica. En esta parte utilizaremos algunos resultados generales de variedades tóricas normales o de geometría algebraica sin dar su demostración, con el fin de concentrarnos en sus versiones sin la condición de normalidad.

En el capítulo 1 daremos un pequeño repaso sobre toros algebraicos, que son parte fundamental de la definición de variedad tórica. Después de esto daremos la definición de variedades tóricas afines, así como su equivalencia con semigrupos afines e ideales binomiales primos. Además, definiremos y caracterizaremos como son los morfismos entre variedades tóricas afines. Concluimos el capítulo con un estudio de la normalización de estas variedades.

En el capítulo 2, a partir del semigrupo asociado a una variedad tórica, describiremos algunos cerrados y abiertos de Zariski de la variedad dada. Los resultados que probaremos de estos conjuntos serán las herramientas principales para entender la definición de variedad tórica bien cubierta, así como para probar muchos resultados posteriores.

En el capítulo 3, después de enunciar la definición de variedad tórica (no necesariamente normal), estudiaremos el ejemplo clásico de la curva nodal $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$, definida por la ecuación $y^2z = x^2(x+z)$, que cumple con la definición de variedad tórica, pero no tiene una cubierta por variedades tóricas afines. Este ejemplo motiva la definición de variedades tóricas bien cubiertas. El resultado principal de este capítulo afirma que tales variedades tienen una descripción combinatoria en términos de semigrupos, conos y abanicos. Finalmente, estudiaremos los morfismos entre tales variedades.

En el capítulo 4, veremos como algunos resultados generales de variedades tóricas normales, referentes a anillos Cohen-Macaulay e intersección completa, no se cumplen para el caso no normal.

En el capítulo 5, estudiaremos la explosión de una variedad tórica afín centrada en un ideal monomial. Veremos que dicha explosión da lugar a una variedad tórica bien cubierta, lo que nos da una descripción combinatoria de estas explosiones. Enseguida aplicaremos estos resultados en el caso particular de la modificación de Nash. Concluimos el capítulo explorando algunos aspectos geométricos de la modificación de Nash de una superficie tórica afín.

Parte I

Variedades Tóricas

Capítulo 1

Variedades Tóricas Afines

1.1. Toros Algebraicos

En esta sección daremos algunos resultados básicos sobre la estructura fundamental usada para la construcción de nuestro objeto de estudio.

Definición 1.1. Definimos el conjunto $(\mathbb{C}^*)^n := (\mathbb{C}\backslash\{0\})^n$. Este conjunto es una variedad afín isomorfa a $\mathbf{V}(x_1y_1 - 1, \ldots, x_ny_n - 1)$. Además, es un grupo con la multiplicación

$$(a_1, \ldots, a_n) \times (b_1, \ldots, b_n) = (a_1b_1, \ldots, a_nb_n).$$

Definición 1.2. Un toro algebraico T es una variedad afín isomorfa a $(\mathbb{C}^*)^n$, que hereda su estructura de grupo por el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^*)^n \times (\mathbb{C}^*)^n \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & (\mathbb{C}^*)^n \arrow[d, "\simeq"] \\
T \times T \arrow[r, "\varphi"] & T.
\end{tikzcd}$$

Enseguida mostramos una manera de construir toros algebraicos.

Definición 1.3. Una retícula M de rango d, es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango d. A partir de esta retícula definimos:

$$\mathbb{C}[t^M] := \{\sum_{m_i \in M} a_i t^{m_i} | a_i \in \mathbb{C} \ y \ |a_i \neq 0| < \infty\}.$$

$\mathbb{C}[t^M]$ es una $\mathbb{C}$-álgebra, con la siguiente operación:

$$\sum_{i \in A} a_i t^{m_i} \sum_{j \in B} b_j t^{m_j} = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} a_i b_j t^{m_i + m_j}.$$

Si $\{m_i\}_{i=1}^d$ es una base para M, entonces:

$$\mathbb{C}[t^M] = \mathbb{C}[t^{m_1}, \ldots, t^{m_d}, t^{-m_1}, \ldots, t^{-m_d}].$$

Notación 1.4. Dada una $\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada R, denotamos como $\mathrm{Specm}(R)$ a la variedad afín correspondiente.

Proposición 1.5. *Sea M una retícula. Entonces $T^M := \mathrm{Specm}(\mathbb{C}[t^M])$ es un toro algebraico. A este toro algebraico lo llamaremos el toro asociado a la retícula M.*

Demostración. Supongamos que M es una retícula de rango d y sea $\{m_1, \ldots, m_d\}$ una base de M. Definimos un homomorfismo sobreyectivo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\varphi : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}, \ldots, x_{2d}] \to \mathbb{C}[t^M]$$

dado por:

$$\varphi(x_i) = \begin{cases} t^{m_i} & si \quad 1 \leq i \leq d \\ \\ t^{-m_i} & si \quad d+1 \leq i \leq 2d \end{cases}$$

Se sigue que $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{2d}]/\ker\varphi \simeq \mathbb{C}[t^M]$, de lo que obtenemos un isomorfismo $\mathbf{V}(\ker\varphi) \simeq T^M$. Por otro lado, como $\{m_1, \ldots, m_d\}$ es base de M, tenemos que $\ker\varphi = (x_1x_{d+1} - 1, \ldots, x_dx_{2d} - 1)$. Entonces $\mathbf{V}(\ker\varphi) \simeq (\mathbb{C}^*)^d$ y por lo tanto T^M es un toro algebraico. $\square$

En la demostración de la proposición anterior se escogió una base particular para M, pero se pueden tomar diferentes conjuntos generadores de M como semigrupo, es decir, un conjunto finito $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ tal que:

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}A := \{\sum_{i=1}^n m_ia_i | m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = M.$$

Definición 1.6. Sea M una retícula de rango d y sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset M$ un conjunto generador de M como semigrupo, es decir, $\mathbb{Z}_{\geq 0}A = M$. Consideremos el homomorfismo sobreyectivo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\psi : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{C}[t^M] \tag{1.1}$$

definido por $x_i \mapsto t^{a_i}$. Definimos la realización geométrica de T^M asociada al conjunto A, denotada por T_A^M, como $\mathbf{V}(\ker\psi)$.

Veamos que el isomorfismo dado por el cambio de conjunto generador es un isomorfismo monomial.

Proposición 1.7. *Sea M una retícula de rango d y sean A, B dos conjuntos generadores de M, es decir, $\mathbb{Z}_{\geq 0}A = M = \mathbb{Z}_{\geq 0}B$. Entonces se tiene que las realizaciones geométricas del toro algebraico T_A^M y T_B^M, asociadas a los conjuntos A y B respectivamente, son isomorfas por un isomorfismo monomial.*

Demostración. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ dos conjuntos de generadores de la retícula M. Las álgebras asociadas a M con respecto a los sistemas de generadores A y B son $\mathbb{C}[t^{a_1}, \ldots, t^{a_n}]$ y $\mathbb{C}[t^{b_1}, \ldots, t^{b_m}]$ respectivamente.

Demostraremos que estas $\mathbb{C}$-álgebras son isomorfas y a partir de este isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras obtendremos que el isomorfismo entre las variedades correspondientes es monomial. Como ambos son conjuntos generadores de M como semigrupo se tiene que:

$$b_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,j} a_k \ \forall j \in \{1, \ldots, m\},$$

$$a_i = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{k,i} b_k \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Lo anterior implica

$$a_i = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \gamma_{k,i} \lambda_{l,i} a_l.$$

Definimos los siguientes homomorfismos de $\mathbb{C}$-álgebras:

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{C}[t^{a_1}, \ldots, t^{a_n}] & \rightarrow & \mathbb{C}[t^{b_1}, \ldots, t^{b_m}] \\ t^{a_i} & \mapsto & t^{\sum_{k=1}^{m} \gamma_{k,i} b_k} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{C}[t^{b_1}, \ldots, t^{b_m}] & \rightarrow & \mathbb{C}[t^{a_1}, \ldots, t^{a_n}] \\ t^{b_j} & \mapsto & t^{\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,j} a_k} \end{array}$$

Probaremos que $\Phi \circ \Psi = Id_{\mathbb{C}[t^{a_1}, \ldots, t^{a_n}]}$:

$$\begin{array}{rcl} \Phi \circ \Psi(t^{a_i}) & = & \Phi(t^{\sum_{k=1}^{m} \gamma_{k,i} b_k}) \\ & = & t^{\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \gamma_{k,i} \lambda_{l,i} a_l} \\ & = & t^{a_i} \end{array}$$

De manera similar se prueba que $\Psi \circ \Phi = Id_{\mathbb{C}[t^{b_1}, \ldots, t^{b_m}]}$. Se sigue que $\mathbb{C}[t^{b_1}, \ldots, t^{b_m}]$ y $\mathbb{C}[t^{a_1}, \ldots, t^{a_n}]$ son isomorfas y el isomorfismo entre T_A^M y T_B^M proveniente del isomorfismo Φ esta dado de la siguiente manera:

$$\Phi^* : T_A^M \rightarrow T_B^M$$

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n)=(\prod_{j=1}^{n}x_j^{\lambda_{j,1}},\ldots,\prod_{j=1}^{m}x_j^{\lambda_{j,m}}).$$

$\square$

Corolario 1.8. *Sea M una retícula de rango d y sea $A=\{c_1,\ldots,c_s\}\subset M$ conjunto generador de M. La estructura de grupo de T_A^M heredada de $(\mathbb{C}^*)^d$ coincide con la multiplicación entrada a entrada.*

Demostración. Sea $\{m_1,\ldots,m_d\}\subset M$ una base de M. Sea $B=\{m_1,\ldots,m_d, m_{d+1},\ldots,m_{2d}\}$, donde $m_{d+i}=-m_i$, para todo $i=1,\ldots,d$. Por lo visto en la proposición 1.1, $T_B^M=\mathbf{V}(x_1x_{d+1}-1,\ldots,x_dx_{2d}-1)$ y el isomorfismo $\Theta: T_B^M\to(\mathbb{C}^*)^d$, esta dado por la proyección en las primeras d coordenadas, además $\Theta^{-1}(x_1,\ldots,x_d)=(x_1,\ldots,x_d,x_1^{-1},\ldots,x_d^{-1})$.

Como A y B son conjuntos generadores de M como semigrupo, consideremos

$$m_j=\sum_{k=1}^{s}\lambda_{k,j}c_k\ \forall j\in\{1,\ldots,2d\},$$

$$c_i=\sum_{k=1}^{2d}\gamma_{k,i}m_k\ \forall i\in\{1,\ldots,s\}.$$

De esto obtenemos que

$$c_i=\sum_{k=1}^{2d}\sum_{l=1}^{s}\gamma_{k,i}\lambda_{l,k}c_l=\sum_{l=1}^{s}(\sum_{k=1}^{2d}\gamma_{k,i}\lambda_{l,k})c_l.$$

Por la proposición 1.7, tenemos que

$$\Phi: T_A^M\to T_B^M$$

$$\Phi(z_1,\ldots,z_s)=(\prod_{j=1}^{s}z_j^{\lambda_{j,1}},\ldots,\prod_{j=1}^{s}z_j^{\lambda_{j,2d}}).$$

y que

$$\Psi: T_B^M\to T_A^M$$

$$\Psi(z_1,\ldots,z_{2d})=(\prod_{j=1}^{2d}z_j^{\gamma_{j,1}},\ldots,\prod_{j=1}^{2d}z_j^{\lambda_{j,s}}).$$

Tenemos el diagrama

$$T_A^M \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} T_B^M \underset{\Theta^{-1}}{\overset{\Theta}{\rightleftarrows}} (\mathbb{C}^*)^d$$

Sean $a = (a_1, \ldots, a_s), b = (b_1, \ldots, b_s) \in T_A^M$. Un calculo directo muestra que:

$$\Psi(\Theta^{-1}(\Theta(\Phi(a)) \times \Theta(\Phi(b)))) = (a_1 b_1, \ldots, a_s b_s).$$

$\square$

Definición 1.9. Un caracter de un toro T^M es un homomorfismo de grupos $\phi : T^M \to \mathbb{C}^*$, que también es un morfismo de variedades. Un subgrupo a un parámetro de T^M es un homomorfismo de grupos $\psi : \mathbb{C}^* \to T^M$, que también es un morfismo de variedades.

El siguiente resultado fue tomado del libro [ByG]. Para los detalles de la prueba ver capítulo 3, sección 2, proposición 3.2.17.

Lema 1.10. *Si $\varphi : (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^m$, es un homomorfismo de toros algebraicos, entonces existen $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{Z}^n$ tal que:*

$$\varphi(x) = (x^{\mu_1}, \ldots, x^{\mu_m})$$

Nota 1.11. A partir de aquí, cuando escribamos T^M, el toro asociado a la retícula M, estaremos haciendo referencia a alguna realización geométrica, es decir, T_A^M, con A un conjunto generador de M.

Proposición 1.12. *Sea M una retícula de rango d. El grupo de caracteres de un toro algebraico T^M es isomorfo a M.*

Demostración. Tenemos que $T^M \simeq (\mathbb{C}^*)^d$, y por la proposición 1.7, se tiene que este isomorfismo es monomial. Ahora, por el lema 1.10 se obtiene que $\text{Hom}_{gr.\ alg.}((\mathbb{C}^*)^d, \mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{Z}^d$, donde $\text{Hom}_{gr.\ alg.}$ son los morfismos de variedades algebraicas tales que también son homomorfismos de grupos. Entonces del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T^M \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathbb{C}^* \\ (\mathbb{C}^*)^d \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

se deduce que

$$\text{Hom}_{gr.\ alg.}(T^M, \mathbb{C}^*) \simeq \text{Hom}_{gr.\ alg.}((\mathbb{C}^*)^d, \mathbb{C}^*)$$

y dado que la flecha vertical es un isomorfismo monomial, concluimos que $\text{Hom}_{gr.\ alg.}(T^M, \mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{Z}^d \simeq M$. $\square$

Observación 1.13. Consideremos el grupo $N := \mathrm{Hom}_{gr.\ alg.}(\mathbb{C}^*, T^M)$. De manera análoga a la prueba de la proposición 1.12, se tiene que $N \simeq \mathbb{Z}^d$.

Mas aún tenemos que $N \simeq \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$. En efecto , dado $n \in N$, podemos definir $\chi : M \to \mathbb{Z}$. Sea $m \in M$. Por la proposición 1.12, m induce un homomorfismo de grupos $m : T^M \to \mathbb{C}^*$. Componiendo, obtenemos $m \circ n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$. Por el lema 1.10, $m \circ n$ define un entero q. Haciendo $\chi(m) = q$, tenemos el isomorfismo $N \simeq \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$.

Además podemos definir un producto denotado por $\langle\ ,\ \rangle : N \times M \to \mathbb{Z}$, definido por $\langle n, m\rangle = n(m)$.

1.2. Variedades Tóricas Afines

En esta sección damos la definición de variedades tóricas afines. Mostraremos algunas propiedades básicas, así como algunas equivalencias.

1.2.1. Definición de Variedad Tórica Afín

Definición 1.14. Una variedad tórica afín es una variedad afín irreducible que contiene un abierto de Zariski isomorfo a un toro algebraico, tal que la acción del toro algebraico se extiende a toda la variedad.

Nota 1.15. Si X es una variedad tórica afín con toro algebraico T, entonces $\dim X = \dim T$.

Ejemplo 1.16. Consideremos la curva plana $\mathcal{C} = \mathbf{V}(x^3 - y^2)$. Notemos que:

$$\mathcal{C}\backslash\{0\} = \{(t^2, t^3)|t \in \mathbb{C}^*\} \simeq \mathbb{C}^*,$$

donde el isomorfismo esta dado por $t \mapsto (t^2, t^3)$. Este es un abierto de Zariski para la curva $\mathcal{C}$. Además, $\mathcal{C}$ hereda la acción de $\mathbb{C}^*$ de la siguiente manera:

$$(t^2, t^3) \cdot (s^2, s^3) = ((ts)^2, (ts)^3),$$

Por último, esta acción se extiende a $(0, 0)$ tomando

$$(t^2, t^3)(0, 0) = (0, 0),$$

es decir, $(0, 0)$ es un punto fijo de la acción. Concluimos que $\mathcal{C}$ es una variedad tórica afín.

Ejemplo 1.17. Consideremos la variedad $\mathcal{V} = \mathbf{V}(x^2 - y^2 z)$. Notemos que:

$$\mathcal{V} \cap (\mathbb{C}^*)^2 = \{(uv, u, v^2)|(u, v) \in (\mathbb{C}^*)^2\} \simeq (\mathbb{C}^*)^2$$

donde el isomorfismo esta dado por $(u, v) \mapsto (uv, u, v^2)$. Este es un abierto de Zariski para la variedad $\mathcal{V}$. Además $\mathcal{V}$ hereda la acción de $(\mathbb{C}^*)^2$ de la siguiente manera:

$$(uv, u, v^2) \cdot (ts, t, s^2) = (uvts, ut, (vs)^2),$$

Por último, esta acción se extiende a $(x, y, z) \in \mathcal{V} \backslash (\mathcal{V} \cap (\mathbb{C}^*)^2)$ tomando

$$(uv, u, v^2)(x, y, z) = (uvx, uy, v^2 z).$$

Concluimos que $\mathcal{V}$ es una variedad tórica afín.

1.2.2. Semigrupos Afines

Definición 1.18. Un semigrupo afín Γ es un conjunto con operación binaria asociativa y un elemento identidad, que satisface las siguientes condiciones:

i) La operación en Γ es conmutativa.

ii) El semigrupo es finitamente generado, es decir, existe un conjunto finito $\mathcal{A} \subset \Gamma$ tal que $\mathbb{Z}_{\geq 0}\mathcal{A} = \Gamma$.

iii) Existe una retícula M tal que $\Gamma \subset M$.

Observación 1.19. Sea Γ un semigrupo de M, y sea $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ un conjunto generador de Γ, es decir, $\mathbb{Z}_{\geq 0}(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) = \Gamma$. Sea

$$\pi : \mathbb{Z}^r \to M, \quad e_i \mapsto \gamma_i.$$

Notemos que $\Gamma = \pi(\mathbb{Z}^r_{\geq 0})$.

El homomorfismo de semigrupos π induce un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\widehat{\pi} : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[t^\Gamma] \subset \mathbb{C}[t^M] = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}].$$

Concluimos que

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]/\ker(\widehat{\pi}) \simeq \mathbb{C}[t^\Gamma]. \tag{1.2}$$

Sea $T^\Gamma := \mathbf{V}(\ker \widehat{\pi})$. Decimos que T^Γ es la variedad asociada al semigrupo Γ.

Observación 1.20. Como $\mathbb{C}[t^\Gamma]$ es una subálgebra de un dominio entero, se tiene que $\mathbb{C}[t^\Gamma]$ también es un dominio entero. Por lo que $\ker \widehat{\pi}$ es un ideal primo y T^Γ es irreducible.

Ahora veamos algunas propiedades básicas de las variedades asociadas a semigrupos afines, las cuales nos permitirán ver la equivalencia con las variedades tóricas.

Nota 1.21. Un elemento $m \in \mathbb{Z}^r$ se puede escribir de manera única como $m = m_+ - m_-$, donde $m_+, m_- \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$.

Lema 1.22. *El kernel del homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\widehat{\pi} : \mathbb{C}[x_1 \ldots, x_r] \to \mathbb{C}[t^\Gamma]$ definido en la observación 1.19, esta generado como espacio vectorial por los binomios $x^{m_+} - x^{m_-}$ donde $\pi(m_+) = \pi(m_-)$.*

Demostración. Sea $x^{m_+} - x^{m_-}$ tal que $\pi(m_+) = \pi(m_-)$. Aplicando el homomorfismo $\widehat{\pi}$ obtenemos

$$\widehat{\pi}(x^{m_+} - x^{m_-}) = t^{\pi(m_+)} - t^{\pi(m_-)} = 0,$$

por lo tanto $x^{m_+} - x^{m_-} \in \ker \widehat{\pi}$.

Veamos ahora que si $f \in \ker \widehat{\pi}$, entonces se puede escribir como combinación lineal de $x^{m_+} - x^{m_-}$, con $\pi(m_+) = \pi(m_-)$. Consideremos el orden lexicográfico en lo monomios de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]$, que denotaremos por $>_{lex}$. Dado $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, denotaremos el monomio mas grande de f bajo $>_{lex}$ como $in_{>_{lex}}(f) = x^u$.

Procedemos por contradicción. Sea $f \in \ker \widehat{\pi}$ tal que no puede ser escrito como combinación lineal de estos binomios. Entre todos los posibles polinomios con dicha propiedad, escogemos f tal que $in_{>_{lex}}(f) = x^u$ es mínimo. Observemos que

$$\widehat{\pi}(f) = f(t^{\gamma_1}, \ldots, t^{\gamma_r}) = 0,$$

ya que $f \in \ker \widehat{\pi}$. En particular, el monomio $t^{\pi(u)}$ se debe cancelar. Entonces existe otro monomio x^v en f tal que $x^u >_{lex} x^v$ y $\pi(v) = \pi(u)$. Consideremos el polinomio $f' := f - x^u + x^v$, este polinomio pertenece a $\ker \widehat{\pi}$. Si $f' = \sum_{i=1}^n a_i(x^{m_+} - x^{m_-})$, con $\pi(m_+) = \pi(m_-)$, se tiene que

$$f = f' + x^u - x^v,$$

lo que contradice el hecho de que f no puede ser escrito como combinación lineal de binomios de la forma $x^{m_+} - x^{m_-}$, con $\pi(m_+) = \pi(m_-)$. Concluimos que f' no puede ser escrito como combinación lineal de binomios de la forma $x^{m_+} - x^{m_-}$, con $\pi(m_+) = \pi(m_-)$. Por otro lado $in_{>_{lex}}(f) >_{lex} in_{>_{lex}}(f')$, lo que es una contradicción a la minimalidad de $in_{>_{lex}}(f)$. □

Ahora caracterizaremos los puntos de la variedad asociada a un semigrupo Γ.

Proposición 1.23. *Sea T^Γ la variedad asociada al semigrupo Γ, entonces existe una correspondencia biyectiva entre:*

(a) Puntos $p \in T^\Gamma$.

(b) *Ideales maximales* $\mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[t^\Gamma]$.

(c) *Homomorfismos de semigrupos* $\Gamma \to \mathbb{C}$*, donde* $\mathbb{C}$ *es considerado semigrupo bajo la multiplicación.*

Demostración. La correspondencia entre (a) y (b) es la estándar de geometría algebraica, la correspondencia entre (a) y (c) es especial del caso tórico.

Para $(a) \Rightarrow (c)$. Sea $p \in T^\Gamma$. A partir de este punto tenemos que definir un homomorfismo de semigrupos $\phi : \Gamma \to \mathbb{C}$. Sea $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ un conjunto generador del semigrupo Γ. Dado $\gamma \in \Gamma$, existen $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que $\gamma = \sum_{i=1}^r n_i\gamma_i$. Definimos $f_\gamma := \overline{x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r}}$, donde $\overline{\cdots}$ denota la clase en el cociente de la ecuación (1.2). Definimos $\phi : \Gamma \to \mathbb{C}$ como $\gamma \mapsto \phi(\gamma) := f_\gamma(p)$. Si suponemos que $\gamma = \sum_{i=1}^r n_i\gamma_i = \sum_{i=1}^r m_i\gamma_i$, se tiene que $\overline{\prod_{i=1}^s x_i^{m_i}} = \overline{\prod_{i=1}^s x_i^{n_i}}$ y como $p \in T^\Gamma$, se tiene que ϕ esta bien definida. Veamos ahora que ϕ es un homomorfismo de semigrupos, es decir, $\phi(0) = 1$ y $\phi(\gamma+\gamma') = \phi(\gamma)\phi(\gamma')$. Para el caso $\gamma = 0$, tenemos que $\gamma = \sum_{i=1}^r 0\gamma_i$, por lo tanto $\phi(\gamma) = f_\gamma(p) = 1$. Por otro lado si $\gamma = \sum_{i=1}^r n_i\gamma_i$ y $\gamma' = \sum_{i=1}^r n_i'\gamma_i$

$$\phi(\gamma + \gamma') = \overline{p_1^{n_1+n_1'} \ldots p_r^{n_r+n_r'}} = \overline{p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}}\,\overline{p_1^{n_1'} \ldots p_r^{n_r'}} = \phi(\gamma)\phi(\gamma').$$

Ahora mostraremos que (c) implica (a). Si $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ y $\phi : \Gamma \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo de semigrupos, definimos $p := (\phi(\gamma_1), \ldots, \phi(\gamma_r))$. Para ver que este punto está en T^Γ, por el lema 1.22, es suficiente ver que p anula todos los binomios de la forma $x^\alpha - x^\beta$, con $\alpha = (a_1, \ldots, a_r)$ y $\beta = (b_1, \ldots, b_r)$, tales que $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$, es decir, $\sum_{i=1}^r a_i\gamma_i = \sum_{i=1}^r b_i\gamma_i$. Pero esto se tiene ya que:

$$p^\alpha = \prod_{i=1}^r \phi(\gamma_i)^{a_i} = \phi(\sum_{i=1}^r a_i\gamma_i) = \phi(\sum_{i=1}^r b_i\gamma_i) = \prod_{i=1}^r \phi(\gamma_i)^{b_i} = p^\beta.$$

Enseguida mostraremos que esta asociación entre puntos y homomorfismos es biyectiva. Sea $\phi : \Gamma \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de semigrupos, a este homomorfismo de semigrupo le corresponde el punto $p = (\phi(\gamma_1), \ldots, \phi(\gamma_r))$, que a su vez le corresponde el homomorfismo de semigrupos $\phi' : \Gamma \to \mathbb{C}$, definido por $\phi'(\gamma_i) = p_i = \phi(\gamma_i)$. Se sigue que $\phi = \phi'$. Ahora sea $p = (p_1, \ldots, p_r) \in T^\Gamma$, a este punto le corresponde el morfismo $\phi : \Gamma \to \mathbb{C}$, definido por $\gamma = \sum_{i=1}^r n_i\gamma_i \mapsto \prod_{i=1}^r p_i^{n_i}$, que a su vez le corresponde el punto $p' = (\phi(\gamma_1), \ldots, \phi(\gamma_r)) = (p_1, \ldots, p_r)$. Se tiene entonces que $p = p'$. Concluimos que es una biyección.

$\square$

Observación 1.24. En el caso de que Γ sea una retícula, a un punto $p \in T^\Gamma$ le corresponde un homomorfismo de semigrupos $\phi : \Gamma \to \mathbb{C}^*$, debido a que los elementos de Γ son todos invertibles.

Proposición 1.25. *Sea M una retícula de rango d. La estructura de grupo de T^M heredada de $(\mathbb{C}^*)^d$ coincide con la acción dada por multiplicar los morfismos $\gamma : M \to \mathbb{C}^*$ con los que se identifican los puntos de la variedad T^M.*

Demostración. Sea $\{m_1, \ldots, m_s\}$ un conjunto generador de M. Sean $p, q \in T^M$, donde $p = (p_1, \ldots, p_s)$ y $q = (q_1, \ldots, q_s)$. Por el corolario 1.8, la acción heredada de $(\mathbb{C}^*)^d$ es $pq = (p_1q_1, \ldots, p_sq_s)$. Sean γ_p, γ_q los homomorfismos de semigrupos asociados a p, q.

Por la proposición 1.23, el homomorfismo de semigrupos $\gamma_p : M \to \mathbb{C}^*$ correspondiente al punto p, esta dado por $m_i \mapsto p_i$. De manera análoga se define $\gamma_q(m_i) = q_i$. El producto de estos homomorfismos de semigrupos $\gamma_p\gamma_q : M \to \mathbb{C}^*$ esta dado por

$$m_i \to p_iq_i.$$

Entonces el punto que le corresponde a este nuevo homomorfismo de semigrupos esta dado por

$$(\gamma_p\gamma_q(m_1), \ldots, \gamma_p\gamma_q(m_d)) = (p_1q_1, \ldots, p_sq_s),$$

que coincide con la acción heredada de $(\mathbb{C}^*)^d$. □

1.2.3. Equivalencia entre Variedades Asociadas a Semigrupos y Variedades Tóricas

Ahora probaremos la equivalencia entre las variedades asociadas a un semigrupo Γ y las variedades tóricas.

Observación 1.26. T^M induce una acción sobre $\mathbb{C}[t^M]$. En efecto, sea $t \in T^M$ y $f \in \mathbb{C}[t^M]$, con $\mathbb{C}[t^M]$ el anillo de funciones regulares de T^M. Definimos la acción $t \cdot f \in \mathbb{C}[t^M]$ como $p \mapsto f(t \cdot p)$ para $p \in T^M$.

Para la demostración de la equivalencia necesitamos el siguiente resultado de toros algebraicos.

Lema 1.27. *Sea $A \subset \mathbb{C}[t^M]$ un subespacio vectorial invariante bajo la acción de T^M. Entonces*

$$A = \bigoplus_{t^m \in A} \mathbb{C} \cdot t^m.$$

Demostración. Ver [CLS], capítulo 1, lema 1.1.16. □

Teorema 1.28. *Sea Γ un semigrupo afín, entonces T^Γ es una variedad tórica con toro T^M, donde $M = \mathbb{Z}\Gamma$. Recíprocamente, si X es una variedad tórica afín con toro $T \simeq (\mathbb{C}^*)^d$, entonces existe un semigrupo afín Γ, contenido en una retícula M de rango d, con $\mathbb{Z}\Gamma = M$, tal que $X \simeq T^\Gamma$.*

Demostración. Sea $T^{\Gamma} \subset \mathbb{C}^r$ la variedad asociada al semigrupo afín $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ y $M = \mathbb{Z}\Gamma$. Vamos a demostrar que T^{Γ} es una variedad tórica con toro T^M.

Sea $p \in T^M$, por la proposición 1.23, a este punto le corresponde un homomorfismo de semigrupos $\gamma_p : M \to \mathbb{C}^*$. Como $M = \mathbb{Z}\Gamma$, podemos restringir γ_p a Γ, para obtener un homomorfismo de semigrupos $\gamma_p|_{\Gamma} : \Gamma \to \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$. Esto induce una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : T^M & \to & T^{\Gamma} \\ \gamma_p & \mapsto & \gamma_p|_{\Gamma}. \end{array}$$

Veamos ahora que φ es inyectivo. Sean $p, q \in T^M$ tales que $\gamma_p|_{\Gamma} = \gamma_q|_{\Gamma}$. Como $M = \mathbb{Z}\Gamma$, $\gamma_p|_{\Gamma}$ se extiende de manera única a M de la siguiente manera. Si $m \in M$, $m = \sum_{i=1}^{s} n_i\gamma_i$, con $n_i \in \mathbb{Z}$ y $\gamma_i \in \Gamma$, entonces

$$\gamma'_p(m) = \sum_{i=1}^{s} n_i \gamma_p|_{\Gamma}(\gamma_i),$$

de donde se infiere que la extensión γ'_p en M es igual a γ_p. De manera análoga se tiene que $\gamma'_q = \gamma_q$. Por otro lado, como $\gamma_p|_{\Gamma}(\gamma_i) = \gamma_q|_{\Gamma}(\gamma_i)$, para toda $i = 1, \ldots, s$, se sigue que $\gamma_p = \gamma_q$ y por lo tanto $p = q$. Concluimos que φ es inyectivo.

Veamos ahora que la imagen de φ es un abierto de Zariski de T^{Γ}. Sea $p = (p_1, \ldots, p_r) \in T^{\Gamma}$. Supongamos $p_i \neq 0$ para toda $i = 1, \ldots, r$. Por la proposición 1.23, la imagen de $\bar{\phi}$ correspondiente a p esta contenida en $\mathbb{C}^*$. Esto implica que $\bar{\phi}$ se extiende de manera única a $\phi : M \to \mathbb{C}^*$, lo que a su vez determina un único punto en T^M. Ahora, si suponemos que $p_i = 0$ para algún i, $\overline{\phi}(\gamma_i) = 0$. Inferimos que $\overline{\phi}$ no se puede extender a un morfismo de $M \to \mathbb{C}^*$. En particular p no es un punto en la imagen de φ. De todo lo anterior se sigue que $Im\varphi \simeq T^M$ es el abierto de Zariski $x_1 \ldots x_r \neq 0$.

La acción de T^M se extiende a T^{Γ} multiplicando los homomorfismos de semigrupos de T^M restringidos a Γ, con los homomorfismos de semigrupos de T^M. Concluimos que T^{Γ} es una variedad tórica.

Recíprocamente, sea V una variedad tórica de dimensión d, en particular se tiene que V contiene un toro algebraico $T \simeq (\mathbb{C}^*)^d$ como un abierto de Zariski. Esto induce un homomorfismo inyectivo de $\mathbb{C}$-álgebras:

$$\mathbb{C}[V] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}[T] .$$

Por otro lado, fijamos un isomorfismo $T \cong T^M$, donde M es alguna retícula de rango d. Esto induce un isomorfismo

$$\mathbb{C}[T] \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[t^M] .$$

Consideremos $A = \phi(\varphi(\mathbb{C}[V]))$, que es una subálgebra de $\mathbb{C}[t^M]$.

Dados $t \in T^M$ y $f \in A$, definimos $\psi : V \to \mathbb{C}$, dado por $p \mapsto f'(t' \cdot p)$, donde $f' = \varphi^{-1}(\phi^{-1}(f))$ y $t' = \phi^{-1}(t)$. Como $t' \cdot p$ es una función algebraica, se sigue que ψ es una función regular de V, por lo que $\psi \in \mathbb{C}[V]$ y por lo tanto $t \cdot f = \phi(\varphi(\psi)) \in A$. Se sigue que A es estable bajo la acción de T^M. Por el lema 1.27, obtenemos

$$A = \bigoplus_{t^m \in A} \mathbb{C} \cdot t^m.$$

Esto implica que $A = \mathbb{C}[t^\Gamma]$, donde Γ es el semigrupo $\{m \in M | t^m \in A\}$. Ahora, como $\mathbb{C}[V]$ es una $\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada, existen $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[V]$ tales que $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_s]$, de donde obtenemos que $A = \mathbb{C}[f'_1, \ldots, f'_s]$, donde $f'_i = \phi(\varphi(f_i))$. Pero tenemos que $f'_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{j,i} t^{\gamma_{j,i}}$. De lo anterior, consideremos Γ' el semigrupo generado por el conjunto $\{\gamma_{j,i}\}$ para $j = 1, \ldots, n_i$ y $i = 1, \ldots, s$. Como los polinomios f'_i generan a A como $\mathbb{C}$-álgebra, entonces $\Gamma = \Gamma'$ y por lo tanto, Γ es finitamente generado. Concluimos que $\mathbb{C}[V] \simeq \mathbb{C}[t^\Gamma]$, con Γ un semigrupo afín y por lo tanto $V \simeq T^\Gamma$. El hecho de que $\mathbb{Z}\Gamma = M$ se sigue de la proposición siguiente. □

Para la siguiente proposición vamos a utilizar algunos resultados referentes a morfismos de variedades tóricas afines que demostraremos en la sección 1.3.

Proposición 1.29. *Sea $\phi : T^M \hookrightarrow T^\Gamma$ un morfismo inyectivo, donde T^M es un toro algebraico y T^Γ es la variedad asociada a un semigrupo Γ. Si $\Gamma \subset M$ y ϕ esta inducido por la inclusión de Γ en M, entonces $\mathbb{Z}\Gamma = M$.*

Demostración. Sea $p \in T^M$, por la proposición 1.23, se tiene que a p le corresponde un homomorfismo de semigrupos $\psi : M \to \mathbb{C}^*$. En esta demostración vamos a usar el hecho de que el homomorfismo de semigrupos correspondiente a $\phi(p) \in T^\Gamma$ es $\psi|_\Gamma = \psi \circ id : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ (ver corolario 1.35).

Procedemos por contrapositiva, supongamos que $M' := \mathbb{Z}\Gamma \neq M$ y tenemos que ver que ϕ no es inyectivo. Sea $q \in T^\Gamma$ y $\varphi' : \Gamma \to \mathbb{C}$ el homomorfismo correspondiente. Supongamos que $\varphi(\Gamma) \subset \mathbb{C}^*$. Entonces φ' se extiende de manera única a un homomorfismo de semigrupos $\varphi : M' \to \mathbb{C}^*$.

Como $M' \subsetneq M$, sea $x \in M$ tal que $x \notin M'$. Como veremos en el lema 1.38, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx \in M'$. Supongamos que n es mínimo, es decir, $n'x \notin M'$ para todo $1 < n' < n$. Como φ esta definido en nx, se tiene que $\varphi(nx) = u^n$, para algún $u \in \mathbb{C}^*$.

Sea $\varphi_1 : M' + \mathbb{Z}x \to \mathbb{C}^*$, definido por $\varphi_1(z + mx) = \varphi(z) \cdot u^m$. Se tiene que $\varphi_1|_{M'} = \varphi$ y φ_1 es homomorfismo de semigrupos. Por otro lado, sea $\varphi_2 : M' + \mathbb{Z}x \to \mathbb{C}^*$, definido por $\varphi_2(z + mx) = \varphi(z) \cdot (\xi_n u)^m$, donde ξ_n es una raíz n-ésima de la unidad diferente de 1. Se sigue que $\varphi_2|_{M'} = \varphi$ y que φ_2 es un homomorfismo de semigrupos. Por definición, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, pero $\varphi_1|_{M'} = \varphi_2|_{M'}$.

Sean φ'_1 y φ'_2 las extensiones de φ_1 y φ_2 a M (el hecho de que φ_i se puede extender a φ'_i es un resultado no trivial que requiere el lema de Zorn, ver [Lan], capítulo XX, lema 4.2). De esto obtenemos que $\varphi'_1 \neq \varphi'_2$ y $\varphi'_1|_{M'} = \varphi'_2|_{M'}$, en particular $\varphi'_1|_\Gamma = \varphi'_2|_\Gamma$. Por lo tanto, φ'_1 y φ'_2 corresponden a puntos distintos en T^M que tienen la misma imagen bajo ϕ. Concluimos que ϕ no es inyectiva. $\square$

1.2.4. Equivalencia de Ideales Tóricos e Ideales Binomiales Primos

Definición 1.30. Sea Γ un semigrupo afín. Definimos el ideal tórico asociado a Γ, denotado por I_Γ, como el ideal $\ker \widehat{\pi}$, definido en la ecuación (1.2).

Nota 1.31. En este trabajo, cuando nos refiramos a ideales binomiales, nos referimos a ideales generados por binomios de la forma $x^\alpha - x^\beta$.

Proposición 1.32. *I es un ideal binomial primo si y solo si existe un semigrupo Γ tal que $I = I_\Gamma$.*

Demostración. Por la observación 1.20 y el lema 1.22 se tiene que I_Γ es un ideal primo binomial.

Recíprocamente tomemos un ideal primo $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]$ generado por binomios de la forma $x^a - x^b$. Definimos la siguiente relación en $\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$: $u \sim v$ si $x^u - x^v \in I$. Una verificación directa muestra que $\sim$ es realción de equivalencia.

Sea $\Gamma = \mathbb{Z}^r_{\geq 0}/\sim$. Este es un semigrupo con la operación heredada de $\mathbb{Z}^r$, que esta bien definida ya que $\sim$ es una relación de equivalencia. Como Γ es finitamente generado, solo hace falta ver que $\mathbb{Z}\Gamma$ es libre de torsión, para mostrar que Γ es semigrupo afín. Supongamos que $\mathbb{Z}\Gamma$ tiene un elemento de torsión, es decir, existe $\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}\Gamma$ no nulo y un natural $n > 1$ tal que $n\bar{\gamma} = \bar{0}$. Tomemos un representante de $\bar{\gamma}$ en $\mathbb{Z}^r$, digamos γ. Consideremos $\gamma = \gamma_+ - \gamma_-$. Como $n\bar{\gamma} = 0$, se tiene que $n\gamma_+ \sim n\gamma_-$, de lo que se sigue que $x^{n\gamma_+} - x^{n\gamma_-} \in I$. Factorizando este binomio, obtenemos

$$x^{n\gamma_+} - x^{n\gamma_-} = (x^{\gamma_+} - x^{\gamma_-})(x^{(n-1)\gamma_+} + x^{(n-2)\gamma_+ + \gamma_-} + \cdots + x^{(n-1)\gamma_-}).$$

Como $\bar{\gamma} \neq 0$, el binomio $x^{\gamma_+} - x^{\gamma_-} \notin I$, además, como $x^{(n-1)\gamma_+} + x^{(n-2)\gamma_+ + \gamma_-} + \cdots + x^{(n-1)\gamma_-}$ no se anula en $(1, \dots, 1)$, se sigue que $x^{(n-1)\gamma_+} + x^{(n-2)\gamma_+ + \gamma_-} + \cdots + x^{(n-1)\gamma_-} \notin I$. Esto contradice que I es ideal primo. Concluimos que $\mathbb{Z}\Gamma$ es una retícula.

Ahora veamos que $I_\Gamma = I$. Tenemos el homomorfismo de semigrupos

$$\pi : \mathbb{Z}^r_{\geq 0} \to \Gamma = \mathbb{Z}^r_{\geq 0}/\sim,$$

definido por $\pi(e_i) = \bar{e}_i$. Lo que da lugar al homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\widehat{\pi} : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r] \to \mathbb{C}[t^\Gamma],$$

definido por $\widehat{\pi}(x_i) = t^{\bar{e}_i}$. Recordemos que $I_\Gamma = \ker \widehat{\pi}$. Sea $x^\alpha - x^\beta \in I$. Entonces $\widehat{\pi}(x^\alpha - x^\beta) = t^{\pi(\alpha)} - t^{\pi(\beta)}$. Por definición de $\sim$, se tiene que $\alpha \sim \beta$, por lo que $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$. Se sigue que $x^\alpha - x^\beta \in I_\Gamma$. Ahora, sea $f \in I_\Gamma$. Por el lema 1.22, se tiene que $f = \sum_{i=1}^{s} a_i(x^{\alpha_i} - x^{\beta_i})$, donde $\pi(\alpha_i) = \pi(\beta_i)$, para toda $i = 1, \ldots, s$. Por la definición de π se sigue que $\alpha_i \sim \beta_i$. Por lo tanto se tiene que $x^{\alpha_i} - x^{\beta_i} \in I$, para toda $i = 1, \ldots, s$. Por lo tanto $f \in I$. Concluimos que $I = I_\Gamma$. □

1.3. Morfismos de Variedades Tóricas Afines

En esta sección definimos los morfismos entre variedades tóricas afines.

Definición 1.33. Sea T^{Γ_i} la variedad tórica afín asociada al semigrupo Γ_i para $i = 1, 2$. Entonces un morfismo $\phi : T^{\Gamma_1} \to T^{\Gamma_2}$ es tórico si el homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras correspondiente $\phi^* : \mathbb{C}[t^{\Gamma_2}] \to \mathbb{C}[t^{\Gamma_1}]$ es inducido por un homomorfismo de semigrupo $\widehat{\phi} : \Gamma_2 \to \Gamma_1$, es decir, $\phi^*(t^\gamma) = t^{\widehat{\phi}(\gamma)}$.

Proposición 1.34. *Sean T^{Γ_i} variedades tóricas con toros T^{M_i}. Entonces un morfismo $\phi : T^{\Gamma_1} \to T^{\Gamma_2}$ es tórico si y solo si $\phi(T^{M_1}) \subset T^{M_2}$ y $\phi|_{T^{M_1}} : T^{M_1} \to T^{M_2}$ es un morfismo de grupos.*

Demostración. Por lo visto en la prueba de la proposición 1.28, las retículas M_i que definen a T^{M_i} están dadas por $\mathbb{Z}\Gamma_i = M_i$. Sea $\phi : T^{\Gamma_1} \to T^{\Gamma_2}$ un morfismo tórico. Por definición ϕ esta inducido por un homomorfismo de semigrupos $\widehat{\phi} : \Gamma_2 \to \Gamma_1$. Extendemos $\widehat{\phi}$ a $\bar{\phi} : M_2 \to M_1$ de la siguiente manera: consideremos $m_2 \in M_2$, dado que $\mathbb{Z}\Gamma_2 = M_2$, $m_2 = \sum_{i=1}^{s} n_i\gamma_i$, con $n_i \in \mathbb{Z}$ y $\gamma_i \in \Gamma_2$. Definimos $\bar{\phi}(m_2) = \sum_{i=1}^{s} n_i\widehat{\phi}(\gamma_i) \in M_1$.

De lo anterior obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[t^{\Gamma_2}] \arrow[r, "\phi^*"] \arrow[d] & \mathbb{C}[t^{\Gamma_1}] \arrow[d] \\
\mathbb{C}[t^{M_2}] \arrow[r, "\bar{\phi}^*"] & \mathbb{C}[t^{M_1}].
\end{tikzcd}$$

Lo que nos induce el diagrama en variedades

$$\begin{tikzcd}
T^{\Gamma_1} \arrow[r, "\phi"] & T^{\Gamma_2} \\
T^{M_1} \arrow[r] \arrow[u, hook] & T^{M_2}. \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

En particular $\phi(T^{M_1}) \subset T^{M_2}$. Ahora mostraremos que $\phi|_{T^{M_1}} : T^{M_1} \to T^{M_2}$ es un homomorfismo de grupos. Sean $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ y $\{\delta_1, \dots, \delta_s\}$ conjuntos generadores para Γ_1 y Γ_2 respectivamente. Consideremos $\widehat{\phi}(\delta_i) = \sum_{j=1}^r b_{j,i}\gamma_j$. Ahora, usaremos coordenadas en las variedades T^{Γ_i}, que están dadas por los isomorfismos de $\mathbb{C}$-álgebras $\mathbb{C}[t^{\Gamma_1}] \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]/I_{\Gamma_1}$ y $\mathbb{C}[t^{\Gamma_2}] \cong \mathbb{C}[y_1, \dots, y_s]/I_{\Gamma_2}$. Obtenemos que $\phi^*([x_i]) = \phi^*(t^{\delta_i}) = t^{\widehat{\phi}(\delta_i)} = \prod_{j=1}^s y_j^{b_{j,i}}$.
Esto implica que para $a = (a_1, \dots, a_r) \in T^{\Gamma_1}$, ϕ esta dado por

$$\phi(a) = (\prod_{j=1}^r a_j^{b_{j,1}}, \dots, \prod_{j=1}^r a_j^{b_{j,s}}).$$

Así, para $a, c \in T^{M_1}$ se tiene que

$$\phi(ac) = (\prod_{j=1}^r (a_jc_j)^{b_{j,1}}, \dots, \prod_{j=1}^r (a_jc_j)^{b_{j,s}}) =$$

$$(\prod_{j=1}^r a_j^{b_{j,1}}, \dots, \prod_{j=1}^r a_j^{b_{j,s}})(\prod_{j=1}^r c_j^{b_{j,1}}, \dots, \prod_{j=1}^r c_j^{b_{j,s}}) = \phi(a)\phi(c).$$

Recíprocamente, supongamos que ϕ satisface que $\phi(T^{M_1}) \subset T^{M_2}$ y que $\phi|_{T^{M_1}}$ es un homomorfismo de grupos $\phi(T^{M_1}) \subset T^{M_2}$. Como $\phi(T^{M_1}) \subset T^{M_2}$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} T^{\Gamma_1} \arrow[r, "\phi"] & T^{\Gamma_2} \\ T^{M_1} \arrow[u, hook] \arrow[r] & T^{M_2}, \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

que a su vez induce el diagrama en las $\mathbb{C}$-álgebras:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[t^{\Gamma_2}] \arrow[r, "\phi^*"] \arrow[d] & \mathbb{C}[t^{\Gamma_1}] \arrow[d] \\ \mathbb{C}[t^{M_2}] \arrow[r] & \mathbb{C}[t^{M_1}]. \end{tikzcd}$$

Sabemos que $\phi(a) = (f_1(a), \dots, f_s(a))$, con cada $f_i \in \mathbb{C}[t^{\Gamma_1}]$, es decir, $f_i = \sum b_\alpha t^{\delta'_\alpha}$ con $\delta'_\alpha \in \Gamma_1$. Como $\phi|_{T^{M_1}}$ es un homomorfismo de grupos, por el lema 1.10, el isomorfismo $\varphi : T^{M_1} \to (\mathbb{C}^*)^r$ es monomial. Además, por la proposición 1.7, $\phi : (\mathbb{C}^*)^r \to (\mathbb{C}^*)^s$ es monomial, lo que implica que f_i son monomios mónicos, es decir, $f_i = t^{\beta_i}$, para algún $\beta_i \in M_i$. Se sigue que $\phi^*(t^{\delta_i}) = t^{\beta_i}$ y como $\phi^* : \mathbb{C}[t^{\Gamma_2}] \to \mathbb{C}[t^{\Gamma_1}]$, se tiene que $\beta_i \in \Gamma_1$. Concluimos que ϕ^* esta inducido por el homomorfismo de semigrupos $\widehat{\phi} : \Gamma_2 \to \Gamma_1$, definido por $\delta_i \mapsto \beta_i$. $\square$

Corolario 1.35. *Sea $\phi : T^{\Gamma_1} \to T^{\Gamma_2}$ un morfismo tórico. Sea $p \in T^{\Gamma_1}$ y sea $\varphi : M_1 \to \mathbb{C}$ el homomorfismo de semigrupos asociado a p (ver proposición 1.23). Entonces al punto $\phi(p) \in T^{\Gamma_2}$ le corresponde el homomorfismo de semigrupos $\varphi \circ \widehat{\phi} : \Gamma_2 \to \mathbb{C}$, donde $\widehat{\phi}$ es el homomorfismo de semigrupos inducido por ϕ.*

Demostración. Como ϕ es morfismo tórico, esta inducido por $\widehat{\phi} : \Gamma_2 \to \Gamma_1$. Sea $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ y $\{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$ conjuntos generadores de Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Consideremos $\widehat{\phi}(\delta_i) = \sum_{j=1}^{r} b_{j,i}\gamma_j$ con $b_{j,i} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sea $\varphi : \Gamma_1 \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de semigrupos. Por la proposición 1.23, le corresponde el punto $(\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_r))$. Aplicando ϕ a este punto obtenemos

$$\phi(p) = (\prod_{j=1}^{r} \varphi(\gamma_j)^{b_{j,1}}, \ldots, \prod_{j=1}^{r} \varphi(\gamma_j)^{b_{j,s}}),$$

que a su vez le corresponde el homomorfismo de semigrupos $\varphi' : \Gamma_2 \to \mathbb{C}$, definido por $\varphi'(\delta_i) = \prod_{j=1}^{r} \varphi(\gamma_j)^{b_{j,i}}$.

Por otro lado $\widehat{\phi}(\delta_i) = \sum_{j=1}^{r} b_{j,i}\gamma_j$, por lo tanto $\varphi(\widehat{\phi}(\delta_i)) = \prod_{j=1}^{r} \varphi(\gamma_j)^{b_{j,i}}$. Concluimos que $\varphi' = \varphi(\widehat{\phi})$. □

1.4. Normalización

En esta sección analizaremos la propiedad de la normalización de una variedad afín. En el caso de variedades tóricas, veremos que su normalización tiene una descripción combinatoria.

Definición 1.36. Sea M una retícula y sea $\Gamma \subset M$ un semigrupo afín. Definimos $\mathrm{Sat}(\Gamma)$ como el conjunto de los $m \in M$, tales que $nm \in \Gamma$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\Gamma \subset \mathrm{Sat}(\Gamma)$. Decimos que Γ es saturado si $\Gamma = \mathrm{Sat}(\Gamma)$.

Notación 1.37. Sea M una retícula de rango d y $N = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$. Denotaremos por $M_{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial real d-dimensional $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. El semigrupo afín Γ, visto en $M_{\mathbb{R}}$, genera el cono $\check{\sigma} := \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma \subset M_{\mathbb{R}}$. El cono dual de $\check{\sigma}$ es el cono:

$$\sigma := \{\nu \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle \nu, \gamma \rangle \geq 0, \forall \gamma \in \check{\sigma}\},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto entre $\langle , \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$ que se extiende de manera natural a $M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}}$ aplicando el tensor por $\mathbb{R}$.

Lema 1.38. *Sea M una retícula y $\Gamma \subset M$ un semigrupo afín. Entonces $\check{\sigma} \cap M$ es saturado. Más aún, $\check{\sigma} \cap M = \mathrm{Sat}(\Gamma)$.*

Demostración. Veamos primero que $\check{\sigma} \cap M$ es saturado. Sean $m \in M$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $nm \in \check{\sigma} \cap M$. Como $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma$, $nm = \alpha\gamma$, con $\gamma \in \Gamma$ y $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Como $m \in M$, concluimos que $m = \frac{\alpha}{n}\gamma \in \check{\sigma}$.

Veamos ahora que $\check{\sigma} \cap M = \mathrm{Sat}(\Gamma)$. Como $\Gamma \subset \check{\sigma} \cap M$ y $\check{\sigma} \cap M$ es saturada, se tiene que $\mathrm{Sat}(\Gamma) \subset \check{\sigma} \cap M$.

Para ver que $\check{\sigma} \cap M \subset \mathrm{Sat}(\Gamma)$ tenemos que ver que para todo $m \in \check{\sigma} \cap M$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nm \in \Gamma$. Sea $m \in \check{\sigma} \cap M$, por definición de $\check{\sigma}$, $m = \lambda\gamma$, con $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\gamma \in \Gamma$. Como $m \in M$, se tiene que $\lambda = p/q$, con $p, q \in \mathbb{N}$. Concluimos que $qm \in \Gamma$.

□

Definición 1.39. Sea X una variedad algebraica afín. Decimos que X es normal si el anillo de funciones regulares $\mathbb{C}[X]$ es enteramente cerrado sobre su campo de fracciones.

Lema 1.40. *Sea σ un cono racional en $N_{\mathbb{R}}$ y sea $\check{\sigma} \subset M_R$ el cono dual de σ. Entonces la variedad tórica asociada al semigrupo $\check{\sigma} \cap M$ es normal.*

Demostración. Para ver que $T^{\check{\sigma} \cap M}$ es normal tenemos que ver que $\mathbb{C}[t^{\check{\sigma} \cap M}]$ es enteramente cerrado sobre su campo de fracciones. Si $\sigma = \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i | \ \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ con $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset N$, entonces tenemos que $\sigma = \{\sum_{i=1}^{r} w_i | \ w_i \in \tau_i\}$, donde τ_i es el rayo generado por v_i. Por la proposición A.7 (ver apéndice), se tiene que $\check{\sigma} = \cap_{i=1}^{r} \check{\tau}_i$. Por lo tanto tenemos que:

$$\mathbb{C}[t^{\check{\sigma} \cap M}] = \cap_{i=1}^{r} \mathbb{C}[t^{\check{\tau}_i \cap M}].$$

Como $\mathbb{C}[t^{\check{\tau}_i \cap M}] \simeq \mathbb{C}[x_1, x_2^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, tenemos que $\mathbb{C}[t^{\Gamma}]$ es enteramente cerrado en su campo de fracciones ya que la variedad afín asociada es no singular. Como la intersección de dominios enteros que son enteramente cerrados es enteramente cerrado, concluimos que $\mathbb{C}[t^{\check{\sigma} \cap M}]$ es enteramente cerrado sobre su campo de fracciones. □

Proposición 1.41. *Sea M una retícula y sea Γ un semigrupo afín. Consideremos $\check{\sigma} \subset M_{\mathbb{R}}$ el cono generado por Γ. Entonces la normalización de T^{Γ} es $T^{\check{\sigma} \cap M}$.*

Demostración. Para mostrar el enunciado tenemos que ver que la cerradura entera de $\mathbb{C}[t^{\Gamma}]$ en su campo de fracciones, denotada por $\overline{\mathbb{C}[t^{\Gamma}]}$, es $\mathbb{C}[t^{\check{\sigma} \cap M}]$. Para mostrar que $\mathbb{C}[t^{\check{\sigma} \cap M}] \subset \overline{\mathbb{C}[t^{\Gamma}]}$, basta mostrar que $t^{\gamma} \in \mathbb{C}[t^{\check{\sigma} \cap M}]$ es entero sobre $\mathbb{C}[t^{\Gamma}]$, pues $\overline{\mathbb{C}[t^{\Gamma}]}$ es un anillo (ver [AyM] capitulo 5, corolario 5.3). Sea $\gamma \in \check{\sigma} \cap M$ y $t^{\gamma} \in \mathbb{C}[t^{\check{\sigma} \cap M}]$. Por el lema 1.38 $\check{\sigma} \cap M = \mathrm{Sat}(\Gamma)$, por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\gamma \in \Gamma$. Se sigue que t^{γ} satisface el polinomio $x^n - t^{n\gamma} \in \mathbb{C}[t^{\Gamma}][x]$ y por lo tanto $t^{\gamma} \in \overline{\mathbb{C}[t^{\Gamma}]}$. Ahora, para ver que $\overline{\mathbb{C}[t^{\Gamma}]} \subset \mathbb{C}[t^{\check{\sigma} \cap M}]$, observemos que $\mathbb{C}[t^{\Gamma}] \subset \mathbb{C}[t^{\check{\sigma}\cap M}]$, además, por el lema 1.40 sabemos que la variedad tórica $T^{\check{\sigma}\cap M}$ es normal, por lo que $\mathbb{C}[t^{\check{\sigma}\cap M}] = \overline{\mathbb{C}[t^{\check{\sigma}\cap M}]}$, de lo que se obtiene que

$$\overline{\mathbb{C}[t^{\Gamma}]} \subset \overline{\mathbb{C}[t^{\check{\sigma}\cap M}]} = \mathbb{C}[t^{\check{\sigma}\cap M}].$$

Concluimos que $\mathbb{C}[t^{\check{\sigma}\cap M}] = \overline{\mathbb{C}[t^{\Gamma}]}$.

$\square$

Capítulo 2

Propiedades Básicas de Variedades Tóricas Afines

En este capítulo daremos la caracterización de las órbitas bajo la acción del toro. Con estos resultados sobre órbitas, podremos caracterizar los abiertos afines invariantes de una variedad tórica afín. El material que aparece en este capítulo está basado en la sección 3 parte I de [GyT].

Estas caracterizaciones serán de extrema utilidad para capítulos posteriores, debido a que una forma de construir variedades tóricas es pegando variedades tóricas afines por medio de los abiertos afines invariantes.

Notación 2.1. A partir de aquí, como solo usaremos semigrupos afines, los llamaremos solamente semigrupos y los denotaremos por Γ. A la retícula donde esta contenido el semigrupo Γ la denotaremos por M y la retícula dual de M la denotaremos por N. Al cono generado por Γ lo denotaremos por $\check{\sigma}$ y su cono dual por σ.

2.1. Correspondencia entre Caras y Órbitas

En esta sección describiremos las órbitas de una variedad tórica X bajo la acción del toro T y su relación con las caras del semigrupo asociado.

Definición 2.2. Dado un semigrupo Γ, un semigrupo $F \subset \Gamma$ es una cara de Γ si dados $x, y \in \Gamma$ tales que $x + y \in F$, se tiene $x, y \in F$.

Proposición 2.3. *Sea Γ un semigrupo. F es cara de Γ si y solo si el espacio vectorial de sumas finitas $I_F := \{\sum_{\delta \in \Gamma \setminus F} a_\delta t^\delta\}$ es un ideal primo en $\mathbb{C}[t^\Gamma]$.*

Demostración. Sea F una cara de Γ. Veamos primero que I_F es un ideal en $\mathbb{C}[t^\Gamma]$. Es claro que el 0 y la suma pertenecen a I_F. Sean $x = \sum_{i=1}^n a_i t^{\gamma_i} \in I_F$, donde $\gamma_i \in \Gamma \backslash F$ y $y = \sum_{j=1}^{m} b_j t^{\delta_j} \in \mathbb{C}[t^\Gamma]$. Aplicando la operación de esta $\mathbb{C}$-álgebra obtenemos:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j t^{\gamma_i + \delta_j}.$$

Si $\gamma_i + \delta_j \in F$ entonces $\gamma_i, \delta_j \in F$, pues F es cara de Γ. Esto es una contradicción, pues $\gamma_i \notin F$. Por lo tanto $\gamma_i + \delta_j \in \Gamma \backslash F$, es decir, $x \cdot y \in I_F$. Concluimos que I_F es un ideal de $\mathbb{C}[t^\Gamma]$. Veamos ahora que I_F es un ideal primo. Sean $x = \sum_{i=1}^{n} a_i t^{\gamma_i}$ y $y = \sum_{j=1}^{m} b_j t^{\delta_j}$ elementos de $\mathbb{C}[t^\Gamma]$ y supongamos que $x \cdot y \in I_F$, es decir,

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j t^{\gamma_i + \delta_j}$$

con $\gamma_i + \delta_j \notin F$. Como F es un semigrupo de Γ, $\gamma_i \notin F$ o $\delta_j \notin F$. De lo anterior obtenemos que $\gamma_i \notin F$, para todo i, o $\delta_j \notin F$, para toda j. Por lo tanto $x \in I_F$ o $y \in I_F$. Concluimos que I_F es un ideal primo.

Ahora supongamos que I_F es un ideal primo en $\mathbb{C}[t^\Gamma]$. Sean $\gamma, \delta \in F$, por definición $t^\gamma, t^\delta \notin I_F$. Como I_F es un ideal primo, $t^{\gamma+\delta} \notin I_F$. Se infiere que $\gamma + \delta \in F$, por lo tanto F es un subsemigrupo de Γ. Veamos ahora que F es una cara de Γ. Sean $\delta, \gamma \in \Gamma$ tales que $\delta + \gamma \in F$, esto implica que $t^{\delta+\gamma} \notin I_F$. Como I_F es un ideal, se tiene que t^γ y t^δ no pertenecen a I_F. Concluimos que $\gamma, \delta \in F$. □

El siguiente teorema fue tomado del artículo [KyK].

Teorema 2.4. *Sea $\Gamma \subset M$ un semigrupo finitamente generado tal que $\mathbb{Z}\Gamma = M$. Entonces existe $\delta_0 \in \Gamma$ tal que $\check{\sigma} \cap M + \delta_0 \subset \Gamma$.*

Demostración. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_s\}$ un conjunto generador de Γ y consideremos $P \subset M_{\mathbb{R}}$ el conjunto de los vectores x que pueden ser representados de la forma $x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i$, donde $0 \leq \lambda_i \leq 1$ y $a_i \in A$, para todo $i = 1, \ldots, s$. Definimos $Q = P \cap M$, notemos que este es un conjunto finito. Para cada $q \in Q$ tomamos una representación de q de la forma $q = \sum_{i=1}^{s} k_i(q) a_i$, con $k_i(q) \in \mathbb{Z}$ y $a_i \in A$. Sea $\delta_0 = \sum_{i=1}^{s} m_i a_i$, donde $m_i = 1 - \text{mín}_{q \in Q}\{k_i(q), 0\}$. Es claro que $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, por lo que $\delta_0 \in \Gamma$.

Sea $g \in \check{\sigma} \cap M \subset \check{\sigma}$, por lo que podemos expresar a $g = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i$, con $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $a_i \in A$. Sean $x = \sum_{i=1}^{s} \lfloor \lambda_i \rfloor a_i$ y $y = \sum_{i=1}^{s} (\lambda_i - \lfloor \lambda_i \rfloor) a_i$, donde $\lfloor \lambda_i \rfloor$ es la función piso de λ_i. Claramente $g = x + y$, $x \in \Gamma$ y $y \in P$. Veamos ahora que $g + \delta_0 \in \Gamma$. Como $g \in M$, se tiene que $y = g - x \in M$, por lo que $y \in Q$. Ahora

$$y + \delta_0 = \sum_{i=1}^{s} k_i(y) a_i + \sum_{i=1}^{s} m_i a_i = \sum_{i=1}^{s} (k_i(y) + m_i) a_i$$

Por la elección de m_i, $k_i(y) + m_i \geq 0$, por lo tanto $y + \delta_0 \in \Gamma$. Como $x \in \Gamma$, concluimos que $g + \delta_0 = x + y + \delta_0 \in \Gamma$. □

Notación 2.5. Usaremos la notación $\tau \leq \sigma$, para denotar que τ es cara de σ y la notación $\tau^\perp$ para denotar el espacio ortogonal de τ.

Lema 2.6. *Sea Γ un semigrupo. Las caras del semigrupo Γ son de la forma $\Gamma \cap \tau^\perp$, con $\tau \leq \sigma$.*

Demostración. Sea F una cara de Γ. Sea τ una cara de σ tal que $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$ contiene a F y tiene dimensión mínima. Como $\Gamma \cap \tau^\perp$ es un semigrupo y $F \subset \Gamma \cap \tau^\perp$, se sigue que F es una cara de $\Gamma \cap \tau^\perp$. Por la minimalidad de la dimensión de τ existe un elemento $\gamma_0 \in F$ que pertenece al interior relativo del cono $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$.

Ahora veamos que $F = \Gamma \cap \tau^\perp$. Sea $\gamma \in \Gamma \cap \tau^\perp$. Por el teorema 2.4, existe un elemento $\delta_0 \in \Gamma \cap \operatorname{int}(\check{\sigma} \cap \tau^\perp)$ tal que $\delta_0 + \check{\sigma} \cap M$ esta contenido en Γ. En otras palabras, la saturación de Γ esta contenida en Γ bajo una cierta traslación.

Veamos que existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $n\gamma_0 - (\gamma + \delta_0) \in (\check{\sigma} \cap \tau^\perp) \cap M$. Para esto solo hace falta ver que existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $n\gamma_0 - (\gamma + \delta_0) \in \check{\sigma} \cap \tau^\perp$, o lo que es lo mismo, ver que $\langle v, n\gamma_0 \rangle \geq \langle v, (\gamma + \delta_0) \rangle$, para todo $v \in (\check{\sigma} \cap \tau^\perp)^\vee$. Por la proposición A.7 y la proposición A.9 (ver apéndice), se tiene que $(\check{\sigma} \cap \tau^\perp)^\vee = \sigma + (\tau^\perp)^\perp$, por lo que $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in \sigma$ y $v_2 \in (\tau^\perp)^\perp$.

Como $\gamma_0, \gamma + \delta_0 \in \tau^\perp$, solo hace falta ver que existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\langle v_1, n\gamma \rangle \geq \langle v_1, (\gamma + \delta_0) \rangle$. Veamos que si $\langle v_1, \gamma_0 \rangle = 0$, se tiene que $\langle v_1, \gamma + \delta_0 \rangle = 0$, para todo $v_1 \in \sigma$. Supongamos que $\langle v_1, \gamma_0 \rangle = 0$, de esto se sigue que $v_1 \in \gamma_0^\perp \cap \sigma$. Dado que en particular $\gamma_0 \in \operatorname{int}(\check{\sigma} \cap \tau^\perp)$ y por el lema A.12 (ver apéndice), se tiene que $v_1 \in \gamma_0^\perp \cap \sigma = \tau$ y como $\gamma + \delta_0 \in \tau^\perp$, obtenemos así que $\langle v, \gamma + \delta_0 \rangle = 0$.

Sea $\{u_1, \ldots, u_s\}$ un conjunto generador de σ, es decir $\mathbb{R}_{\geq 0}(u_1, \ldots, u_s) = \sigma$. Por el párrafo anterior y dado que $\{u_1, \ldots, u_s\}$ es un conjunto finito, podemos escoger $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $n\langle u_i, \gamma_0 \rangle \geq \langle u_i, (\gamma + \delta_0) \rangle$. Por la linealidad de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se tiene que $\langle v_1, n\gamma_0 \rangle \geq \langle v_1, (\gamma + \delta_0) \rangle$ para todo $v_1 \in \sigma$. Concluimos que existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $n\gamma_0 - (\gamma + \delta_0) \in (\check{\sigma} \cap \tau^\perp) \cap M$.

Como F es una cara, notemos que si $\gamma \in \Gamma \cap \tau^\perp$, cumple que $(\gamma + \Gamma \cap \tau^\perp) \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_0 \neq \emptyset$, se tiene que $\gamma \in F$. Como $\delta_0 + \check{\sigma} \cap \tau^\perp \cap M \subset \Gamma$, obtenemos que

$$n\gamma_0 \in (\gamma + \delta_0) + \check{\sigma} \cap \tau^\perp \cap M \subset \gamma + \Gamma \cap \tau^\perp.$$

De esto se obtiene que $(\gamma + \Gamma \cap \tau^\perp) \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_0$ es no vacía para toda $\gamma \in \Gamma \cap \tau^\perp$, de lo que se sigue que $\gamma \in F$.

□

Corolario 2.7. *Las caras de un semigrupo Γ están en biyección con las caras de σ. Esta biyección invierte las inclusiones.*

Demostración. Por el lema anterior toda cara de Γ es de la forma $\Gamma \cap \tau^{\perp}$, para alguna τ cara de σ. Entonces solo hace falta ver que $\Gamma \cap \tau^{\perp}$ es cara de Γ para toda τ cara de σ. Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ tales que $\gamma_1 + \gamma_2 \in \Gamma \cap \tau^{\perp}$. Tenemos que $\langle v, \gamma_1 + \gamma_2 \rangle = 0$ para toda $v \in \tau$, pero $\langle v, \gamma_1 \rangle \geq 0$ y $\langle v, \gamma_2 \rangle \geq 0$, ya que $\gamma_1, \gamma_2 \in \check{\sigma}$ y $v \in \tau \subset \sigma$, de lo que se infiere que $\langle v, \gamma_1 \rangle = 0$ y $\langle v, \gamma_2 \rangle = 0$. Concluimos que $\gamma_1, \gamma_2 \in \tau^{\perp}$.

Si $\tau \leq \theta \leq \sigma$, entonces $\theta^{\perp} \subset \tau^{\perp}$, por lo tanto $\theta^{\perp} \cap \Gamma \subset \tau^{\perp} \cap \Gamma$. Concluimos que esta biyección invierte inclusiones. $\square$

Notación 2.8. Si $\tau \leq \sigma$, el conjunto $\Gamma \cap \tau^{\perp}$ es un subsemigrupo finitamente generado de Γ, ya que está generado por el conjunto generador finito de Γ intersección con $\tau^{\perp}$. Definimos la retícula de rango finito $M(\tau, \Gamma) := \mathbb{Z}(\Gamma \cap \tau^{\perp})$.

Observación 2.9. Por lo visto en la demostración del teorema 1.28, el toro de la variedad tórica afín $T^{\Gamma \cap \tau^{\perp}}$ es $T^{M(\tau,\Gamma)}$. A continuación definimos un morfismo inyectivo de variedades

$$i_{\tau} : T^{\Gamma \cap \tau^{\perp}} \to T^{\Gamma}.$$

Sea $u \in T^{\Gamma \cap \tau^{\perp}}$, por la proposición 1.23, podemos identificar a u con un homomorfismo de semigrupos $u : \Gamma \cap \tau^{\perp} \to \mathbb{C}$. Definimos $i_{\tau}(u) : \Gamma \to \mathbb{C}$ como

$$\gamma \mapsto \begin{cases} u(\gamma) & si \quad \gamma \in \tau^{\perp} \\ \\ 0 & otro \quad caso \end{cases} \tag{2.1}$$

Notemos que la imagen de i_{τ} es igual a $T^{\Gamma} \cap \{x_{i_1} \ldots x_{i_n} = 0\}$ siguiendo la notación de la ecuación (1.2). Siguiendo aquella notación $\gamma_{i_j} \notin \Gamma \cap \tau^{\perp}$, por lo que la imagen de i_{τ} es un cerrado de T^{Γ}.

Lema 2.10. *Sea T^{Γ} la variedad tórica asociada al semigrupo Γ. Sea $u \in T^{\Gamma}$, entonces existe $\tau \leq \sigma$ tal que $i_{\tau}(T^{M(\tau,\Gamma)}) = \{t \cdot u | t \in T^M\}$.*

Demostración. Sea $u \in T^{\Gamma}$, por el proposición 1.23 podemos ver a u como $u : \Gamma \to \mathbb{C}$ un homomorfismo de semigrupos. Vamos a demostrar que $u^{-1}(\mathbb{C}^*)$ es una cara de Γ. Sean $x, y \in u^{-1}(\mathbb{C}^*)$. Como $u(x + y) = u(x) \cdot u(y) \neq 0$, tenemos que $x + y \in u^{-1}(\mathbb{C}^*)$, se sigue que $u^{-1}(\mathbb{C}^*)$ es un subsemigrupo de Γ. Ahora, consideremos $x, y \in \Gamma$ tal que $x + y \in u^{-1}(\mathbb{C}^*)$. Así $u(x + y) \neq 0$, por lo tanto $u(x) \cdot u(y) \neq 0$ de lo que se infiere que $x, y \in u^{-1}(\mathbb{C}^*)$. Concluimos que $u^{-1}(\mathbb{C}^*)$ es una cara de Γ y por el corolario 2.7, $u^{-1}(\mathbb{C}^*) = \Gamma \cap \tau^{\perp}$ para algún $\tau \leq \sigma$.

Como $im(u|_{\Gamma \cap \tau^{\perp}}) \subset \mathbb{C}^*$, podemos definir a $u' : M(\tau, \Gamma) \to \mathbb{C}^*$ de la siguiente manera. Sea $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$un conjunto generador de $\Gamma \cap \tau^{\perp}$. Dado $x \in M(\tau, \Gamma)$, escribimos $x = \sum_{i=1}^{s} a_i \gamma_i$, con $a_i \in \mathbb{Z}$. Definimos $u'(x) = \prod_{i=1}^{s} u(\gamma_i)^{a_i}$. Notemos que efectivamente $u'(x) \in \mathbb{C}^*$, pues $u(\gamma_i) \neq 0$ para toda $i = 1, \ldots s$. Por la proposición 1.23 el homomorfismo de semigrupos u' define un punto en $T^{M(\tau,\Gamma)}$.

Ahora, dado un homomorfismo $v : M(\tau,\Gamma) \to \mathbb{C}^*$, definimos un morfismo de semigrupos $i_\tau(v) : \Gamma \to \mathbb{C}$ dado por:

$$\gamma \mapsto \begin{cases} v(\gamma) & si \quad \gamma \in \Gamma \cap \tau^\perp, \\ \\ 0 & otro \qquad caso. \end{cases}$$

Notemos que $i_\tau(u') = u$.

Vamos a demostrar que dado $u \in T^\Gamma$, se tiene

$$\{t \cdot u | t \in T^M\} = i_\tau(\{t \cdot u' | t \in T^{M(\tau,\Gamma)}\}).$$

Primero veamos que $i_\tau(\{t \cdot u' | t \in T^{M(\tau,\Gamma)}\}) \subset \{t \cdot u | t \in T^M\}$. Como $\mathbb{C}^*$ es un grupo divisible, se tiene que para toda $g : M(\tau,\Gamma) \to \mathbb{C}^*$, existe $\bar{g} : M \to \mathbb{C}^*$, tal que $\bar{g}$ extiende a g (ver [Lan], capítulo XX, sección 4), por lo que $i_\tau(g \cdot u') = \bar{g} \cdot u$.

Para probar la otra contención, como $M(\tau,\Gamma) \subset M$ se tiene que para todo $g \in T^M$, $\breve{g} = g|_{M(\tau,\Gamma)} \in M(\tau,\Gamma)$ y además tenemos $u(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \notin \Gamma \cap \tau^\perp$. Por lo tanto se tiene que $i_\tau(\breve{g} \cdot u') = g \cdot u$. Se tiene entonces que $i_\tau(\{t \cdot u' | t \in T^{M(\tau,\Gamma)}\}) = \{t \cdot u | t \in T^M\}$. Para ver que i_τ es inyectiva supongamos que existe $g_1, g_2 \in T^{M(\tau,\Gamma)}$, tales que $i_\tau(g_1 \cdot u') = i_\tau(g_2 \cdot u')$. Pero $i_\tau(g_i \cdot u')|_{\Gamma \cap \tau^\perp} = g_i \cdot u$. Por lo tanto $g_1 \cdot u' = g_2 \cdot u'$. Concluimos que es una biyección.

Ahora, queremos ver que $\{t \cdot u' | t \in T^{M(\tau,\Gamma)}\} = T^{M(\tau,\Gamma)}$, es decir, si $v \in T^{M(\tau,\Gamma)}$, existe $g \in T^{M(\tau,\Gamma)}$ tal que $g \cdot u = v$. Pero esto se tiene ya que u, v están definidas sobre $\mathbb{C}^*$, por tanto podemos definir $g(\gamma) = v(\gamma)/u(\gamma)$. De esto se sigue que $\{t \cdot u | t \in T^M\} = i_\tau(T^{M(\tau,\Gamma)})$. □

Corolario 2.11. *Sea T^Γ la variedad tórica asociada al semigrupo Γ. La función*

$$\tau \mapsto \mathrm{orb}(\tau,\Gamma) := i_\tau(T^{M(\tau,\Gamma)})$$

define una biyección entre las caras de σ y las órbitas de la acción del toro en T^Γ.

Demostración. Por lo visto en el lema anterior tenemos que para cada $u \in T^\Gamma$, existe $\tau \leq \sigma$ tal que $i_\tau(T^{M(\tau,\Gamma)}) = \{t \cdot u | t \in T^M\}$. Entonces solo hace falta ver que dados $u, v \in T^\Gamma$, se tiene que $u^{-1}(\mathbb{C}^*) = v^{-1}(\mathbb{C}^*) = \Gamma \cap \tau^\perp$ si y solo si existe $t \in T^M$ tal que $t \cdot u = v$. Supongamos que $u^{-1}(\mathbb{C}^*) = v^{-1}(\mathbb{C}^*) = \Gamma \cap \tau^\perp$, por lo que $u(\gamma) \neq 0$ si y solo si $v(\gamma) \neq 0$, para $\gamma \in \Gamma$. Más aun u, v definen un homomorfismo de semigrupos de $\Gamma \cap \tau^\perp$ en $\mathbb{C}^*$. Sean u', v' las extensiones de estos homomorfismos a $M(\tau,\Gamma)$ y sean $\bar{u}, \bar{v}$ las extensiones de estos homomorfismos a M. Sea $t = \bar{v} \cdot \bar{u}^{-1} \in T^M$. Entonces $t \cdot u = v$.

Ahora supongamos que existe $t \in T^M$ tal que $t \cdot u = v$. Sea $\gamma \in \Gamma$, por como esta definido el producto de homomorfismos se tiene

$$t \cdot u(\gamma) = t(\gamma) \cdot u(\gamma) = v(\gamma),$$

pero $t(\gamma) \neq 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, por lo que $u(\gamma) \neq 0$ si y solo si $v(\gamma) \neq 0$. Concluimos que $u^{-1}(\mathbb{C}^*) = v^{-1}(\mathbb{C}^*)$. □

Corolario 2.12. *Sea T^Γ la variedad tórica asociada al semigrupo Γ. La función*

$$\tau \mapsto i_\tau(T^{\Gamma\cap\tau^\perp})$$

define una biyección que invierte inclusiones entre las caras de σ y las cerraduras de las órbitas de la acción del toro en T^Γ.

Demostración. Por el corolario anterior y por la observación 2.9 tenemos que existe una biyección entre la caras de σ y las cerraduras de las órbitas de la acción del toro T^M. Por lo que solo hace falta ver que invierte inclusiones, es decir, si $\theta \leq \tau \leq \sigma$, entonces $i_\tau(T^{\Gamma\cap\tau^\perp})) \subset i_\theta(T^{\Gamma\cap\theta^\perp}))$. Por el corolario 2.7 se tiene que si $\theta \leq \tau$, $\Gamma \cap \tau^\perp \subset \Gamma \cap \theta^\perp$, entonces para todo $u \in T^{\Gamma\cap\tau^\perp}$, existe $u' \in T^{\Gamma\cap\theta^\perp}$, definido por:

$$u'(\gamma) = \begin{cases} u(\gamma) \quad si \quad \gamma \in \Gamma \cap \tau^\perp, \\ \\ 0 \qquad\qquad en \;\; otro \;\; caso. \end{cases}$$

Por como esta definido i_τ, se tiene que $i_\tau(u) = i_\theta(u')$, por lo que $i_\tau(T^{\Gamma\cap\tau^\perp})) \subset i_\theta(T^{\Gamma\cap\theta^\perp}))$. □

Observación 2.13. Del corolario 2.11 tenemos una partición de T^Γ por órbitas de la acción del toro de la forma:

$$T^\Gamma = \bigsqcup_{\tau\leq\sigma} \mathrm{orb}(\tau, \Gamma)$$

Observación 2.14. Sea $F = \Gamma \cap \tau^\perp$ un cara de Γ. La inclusión cerrada de $T^{\Gamma\cap\tau^\perp}$ en T^Γ corresponde al homomorfismo sobreyectivo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\mathbb{C}[t^\Gamma] \to \mathbb{C}[t^\Gamma]/I_F \simeq \mathbb{C}[t^{\Gamma\cap\tau^\perp}].$$

2.2. Abiertos Afines Invariantes

En esta sección describiremos los abiertos afines invariantes de una variedad tórica y al igual que en el caso de las órbitas, estarán en correspondencia con las caras de su semigrupo asociado.

Definición 2.15. Para toda cara τ de σ definimos:

$$\Gamma_\tau := \Gamma + M(\tau, \Gamma)$$

Lema 2.16. *Γ_τ es un semigrupo finitamente generado. Por otro lado $\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_\tau$ es igual a $\check{\tau}$.*

Demostración. Γ_τ es finitamente generado ya que ambos sumandos lo son.

Veamos ahora que $\sigma \cap (\tau^\perp)^\perp = \tau$. Se tiene que $\tau \subset \sigma \cap (\tau^\perp)^\perp$. En particular $\tau \subset (\tau^\perp)^\perp$. Como $\dim(\tau^\perp)^\perp = \operatorname{codim}(\tau^\perp) = \dim(\tau)$, se sigue que $\mathbb{R}\tau = (\tau^\perp)^\perp$. Sea $x \in \sigma \cap (\tau^\perp)^\perp$. De lo anterior tenemos que $x = v_1 - v_2$, con $v_1, v_2 \in \tau$. Se sigue que $x + v_2 = v_1 \in \tau$. Como $x, v_2 \in \sigma$ y τ es cara de σ se tiene que $x \in \tau$. Concluimos que $\sigma \cap (\tau^\perp)^\perp = \tau$.

Aplicando la proposición A.9 (ver apéndice), a $\tau^\perp$, obtenemos que

$$\tau = \sigma \cap (\tau^\perp)^\perp = \sigma \cap (\tau^\perp)^\vee$$

y por la proposición A.7 se tiene que

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \tau^\perp = \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbb{Z}(\Gamma \cap \tau^\perp) = \mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma_\tau).$$

$\square$

Lema 2.17. *(i) La cara minimal de un semigrupo Γ es una subretícula de M igual a $\Gamma \cap \sigma^\perp$.*

(ii) Para cualquier $m \in \Gamma$ en el interior relativo de $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$ se tiene que:

$$\Gamma_\tau = \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m).$$

(iii) Si $\tau \leq \theta \leq \sigma$ se tiene entonces que $M(\tau, \Gamma_\theta) = M(\tau, \Gamma_\tau)$ y que $\Gamma_\tau = \Gamma_\theta + M(\tau, \Gamma_\theta)$.

Demostración. (i) Por el corolario 2.7 existe una correspondencia biyectiva que invierte inclusiones entre las caras de σ y las caras de Γ, entonces se tiene que la cara mínima de Γ es igual a $\Gamma \cap \sigma^\perp$.

Ahora bien, $\mathbb{Z}(\Gamma \cap \sigma^\perp) = M(\sigma, \Gamma)$, es decir, la mínima retícula que contiene a $\Gamma \cap \sigma^\perp$ es $M(\sigma, \Gamma)$. Si $\mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma \cap \sigma^\perp) \neq M(\sigma, \Gamma)_{\mathbb{R}}$, el cono $\mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma \cap \sigma^\perp)$ tiene frontera en el espacio vectorial $M(\sigma, \Gamma)_{\mathbb{R}}$. Como la frontera de un cono es igual a la unión de sus caras propias (ver apéndice, lema A.5), $\mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma \cap \sigma^\perp)$ tiene una cara propia, esto da lugar a una cara propia de $\Gamma \cap \sigma^\perp$, que a su vez da lugar a una cara de Γ. Eso contradice la minimalidad de $\Gamma \cap \sigma^\perp$, de lo que se sigue que $\mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma \cap \sigma^\perp) = M(\sigma, \Gamma)_{\mathbb{R}}$.

Por lo anterior basta probar que si Γ es un semigrupo tal que $\mathbb{Z}\Gamma = M$ y $\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma = M_{\mathbb{R}}$ entonces $\Gamma = M$.

Bajo estas condiciones se tiene que M es la saturación de Γ, es decir, para cada $m \in M$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $nm \in \Gamma$. Queremos probar que $\Gamma = M$. Sea $m \in M$. Por lo anterior, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nm \in \Gamma$. Sea $M' = \mathbb{Z}(m)$ y $\Gamma' = M' \cap \Gamma$. Como $M' \simeq \mathbb{Z}$, el problema se reduce a suponer $M = \mathbb{Z}$.

Tenemos que ver que 1 o -1 pertenecen a Γ pues $\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma = M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. De la condición $\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma = M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, Γ contiene un elemento positivo y uno negativo. Sea x el menor positivo en Γ y y el mayor negativo. Supongamos que no son $1, -1$ respectivamente.

Si $x = -y$. Como $\mathbb{Z} = M$ existe $z \in \Gamma$ tal que $x \nmid z$ y, sin perdida de generalidad, supongamos que es positivo. Por el algoritmo de la división $z = nx + m$ con $0 < m < x$, luego $m = z + ny \in \Gamma$, lo que contradice la minimalidad de x.

Ahora si $x \neq -y$, sin perdida de generalidad, supongamos $x > -y$. Así $x + y \in \Gamma$ y $0 < x + y < x$, lo que contradice la minimalidad de x. Concluimos que $x = 1$ o $y = -1$, de lo que se infiere que $\Gamma = M$.

(ii) Sea $m \in \operatorname{int}(\check{\sigma} \cap \tau^{\perp}) \cap \Gamma$. Tenemos que $\sigma \cap m^{\perp} = \tau$ (ver lema A.12) y por dualidad $\check{\sigma} + \mathbb{R}(m) = \check{\tau}$ (ver proposición A.7). Por otro lado, $\Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m) = \Gamma + \mathbb{Z}(m)$, por lo que $\mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)) = \check{\sigma} + \mathbb{R}(m) = \check{\tau}$. Por lo tanto la cara mínima del semigrupo $\Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)$ es $(\Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)) \cap \tau^{\perp}$, que es una retícula por lo visto en (i).

Es claro que $\Gamma \cap \tau^{\perp} \subset (\Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)) \cap \tau^{\perp}$ y como $(\Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)) \cap \tau^{\perp}$ es una retícula se sigue que

$$M(\tau, \Gamma) = \mathbb{Z}(\Gamma \cap \tau^{\perp}) \subset (\Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)) \cap \tau^{\perp}. \tag{2.2}$$

Veamos que $(\Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)) \cap \tau^{\perp} = \Gamma \cap \tau^{\perp} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)$. Sea $x = \gamma + n(-m) \in \Gamma \cap \tau^{\perp} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)$, con $\gamma \in \Gamma \cap \tau^{\perp}$ y $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Como $\tau^{\perp}$ es un espacio vectorial y $m \in \tau^{\perp}$, $-m \in \tau^{\perp}$. Por lo tanto $x \in \tau^{\perp}$, de lo que se infiere que $x \in (\Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)) \cap \tau^{\perp}$. Ahora, sea $x \in (\Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)) \cap \tau^{\perp}$. Entonces $x \in \tau^{\perp}$ y $x = \gamma + n(-m)$, con $\gamma \in \Gamma$ y $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Como $m \in \tau^{\perp}$, se sigue que $\gamma = x + nm \in \tau^{\perp}$ y por lo tanto $x \in \Gamma \cap \tau^{\perp} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)$. Concluimos que estos dos conjuntos son iguales.

Finalmente como $m \in \Gamma \cap \tau^{\perp}$, $-m \in M(\tau, \Gamma)$ y como $\Gamma \cap \tau^{\perp} \subset M(\tau, \Gamma)$. Por el párrafo anterior y la ecuación 2.2, tenemos que $\Gamma \cap \tau^{\perp} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m) = M(\tau, \Gamma)$. Comparando estas igualdades obtenemos

$$\Gamma_{\tau} = \Gamma + M(\tau, \Gamma) = \Gamma + \Gamma \cap \tau^{\perp} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m) = \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m).$$

(iii) Vamos a probar que $M(\tau, \Gamma_\theta) = M(\tau, \Gamma)$. La contención $M(\tau, \Gamma) \subset M(\tau, \Gamma_\theta)$ es consecuencia de

$$M(\tau, \Gamma_\theta) = \mathbb{Z}((\Gamma + \mathbb{Z}(\Gamma \cap \theta^\perp)) \cap \tau^\perp)$$

y $\Gamma \subset \Gamma + \mathbb{Z}(\Gamma \cap \theta^\perp)$. Para la otra contención sea $\gamma + \sum \lambda_i \gamma_i \in (\Gamma + \mathbb{Z}(\Gamma \cap \theta^\perp)) \cap \tau^\perp$ con $\gamma \in \Gamma$, $\gamma_i \in \Gamma \cap \theta^\perp$ y $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Como $\tau \leq \theta$ implica que $\theta^\perp \subset \tau^\perp$, se tiene que $\gamma_i \in \Gamma \cap \tau^\perp$ y por lo tanto $\sum \lambda_i \gamma_i \in \mathbb{Z}(\Gamma \cap \tau^\perp)$. En particular como $\tau^\perp$ es un espacio vectorial $\sum -\lambda_i \gamma_i \in \tau^\perp$, de lo que sigue que $\gamma \in \Gamma \cap \tau^\perp$. Se infiere de lo anterior que $\gamma + \sum \lambda_i \gamma_i \in \mathbb{Z}(\Gamma \cap \tau^\perp)$. Concluimos que $M(\tau, \Gamma_\theta) = M(\tau, \Gamma)$.

Finalmente recordando que $\theta^\perp \subset \tau^\perp$ y del hecho de que $M(\tau, \Gamma_\theta) = M(\tau, \Gamma)$, tenemos

$$\Gamma_\theta + M(\tau, \Gamma_\theta) = \Gamma + \mathbb{Z}(\Gamma \cap \theta^\perp) + \mathbb{Z}(\Gamma \cap \tau^\perp) = \Gamma + \mathbb{Z}(\Gamma \cap \tau^\perp) = \Gamma_\tau.$$

□

Lema 2.18. *Sean $\Gamma \subset \Lambda$ dos semigrupos tales que $\mathbb{Z}\Gamma = M = \mathbb{Z}\Lambda$. Sean σ y θ los conos duales a $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma$ y $\check{\theta} = \mathbb{R}_{\geq 0}\Lambda$ respectivamente. Si $\mathrm{int}(\theta) \cap \mathrm{int}(\sigma) \neq \emptyset$, se tiene que*

$$\Gamma \backslash (\sigma^\perp \cap \Gamma) \subset \Lambda \backslash (\theta^\perp \cap \Lambda).$$

Demostración. Sea $\nu \in \mathrm{int}(\theta) \cap \mathrm{int}(\sigma)$. Por el lema A.12, obtenemos que

$$\sigma^\perp \cap \Gamma = \check{\sigma} \cap \nu^\perp \cap \Gamma \subset \check{\theta} \cap \nu^\perp \cap \Lambda = \theta^\perp \cap \Lambda.$$

Veamos ahora que $\Gamma \cap (\theta^\perp \cap \Lambda) = \Gamma \cap \sigma^\perp$. Para esto, notemos primero que $\Gamma \cap (\theta^\perp \cap \Lambda)$ es una cara de Γ. En efecto, si $x, y \in \Gamma$ tales que $x + y \in \Gamma \cap (\theta^\perp \cap \Lambda)$, como $\theta^\perp \cap \Lambda$ es una cara de Λ y además $\Gamma \subset \Lambda$, se tiene que $x, y \in \theta^\perp \cap \Lambda$ y por lo tanto $x, y \in \Gamma \cap (\theta^\perp \cap \Lambda)$. Para la otra inclusión procedemos por contradicción. Supongamos que $\Gamma \cap \sigma^\perp$ esta contenido propiamente en $\Gamma \cap (\theta^\perp \cap \Lambda)$. Como $\Gamma \cap (\theta^\perp \cap \Lambda)$ es una cara de Γ, por el corolario 2.7 se tiene que $\Gamma \cap (\theta^\perp \cap \Lambda) = \Gamma \cap \tau^\perp$ para alguna cara τ de σ. Como $\Gamma \cap \sigma^\perp$ esta contenido propiamente en $\Gamma \cap \tau^\perp$, se tiene que τ es una cara propia de σ. Por el lema 2.16 se tiene que $\check{\tau} = \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_\tau$ y por el lema 2.17, $\Gamma_\tau = \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)$, con $m \in \mathrm{int}(\check{\sigma} \cap \tau^\perp) \cap \Gamma$. De esto se sigue que

$$\check{\tau} = \mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)) = \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma + \mathbb{R}_{\geq 0}(-m) = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-m).$$

Por el lema 2.17 inciso (i), se tiene que $\Lambda \cap \theta^\perp$ es una retícula y como en particular $m \in \Lambda \cap \theta^\perp$, se tiene que $-m \in \Lambda \cap \theta^\perp$. De esto obtenemos que

$$\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-m) \subset \check{\theta}.$$

Y por dualidad $\theta \subset \tau$, lo que contradice que $\mathrm{int}(\theta) \cap \mathrm{int}(\sigma) \neq \emptyset$. Concluimos que $\Gamma \cap (\theta^\perp \cap \Lambda) = \Gamma \cap \sigma^\perp$ y por lo tanto $\Gamma \backslash (\sigma^\perp \cap \Gamma) \subset \Lambda \backslash (\theta^\perp \cap \Lambda)$. □

Definición 2.19. Sean T^{Γ_i} variedades tóricas asociadas a los semigrupos Γ_i, con toros T^{M_i}, para $i = 1, 2$, y sea $\phi : T^{\Gamma_1} \to T^{\Gamma_2}$ un morfismo tórico. Decimos que ϕ es equivariante, si para toda $t \in T^{M_1}$ y $a \in T^{\Gamma_1}$, se tiene que $\phi(t \cdot a) = \phi(t) \cdot \phi(a)$.

Lema 2.20. *Si $\tau \leq \sigma$, la inclusión de semigrupos $\Gamma \subset \Gamma_\tau$ induce una inclusión T^M-equivariante $T^{\Gamma_\tau} \subset T^\Gamma$ como un abierto afín. Recíprocamente, si $X \subset T^\Gamma$ es un encaje T^M-equivariante de un abierto afín, entonces existe un único $\tau \leq \sigma$ tal que X es T^M-equivariante isomorfo a T^{Γ_τ}.*

Demostración. Sea $\tau \leq \sigma$. Por el lema 2.17 tenemos que $\Gamma_\tau = \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)$, para algún $m \in \Gamma$. Consideremos $f = t^m \in \mathbb{C}[t^\Gamma]$. Localizando $\mathbb{C}[t^\Gamma]$ en f, obtenemos $\mathbb{C}[t^\Gamma]_f = \mathbb{C}[t^{\Gamma_\tau}]$, entonces $T^\Gamma \backslash V(f) \simeq T^{\Gamma_\tau}$, que es un abierto principal de la variedad tórica T^Γ.

Recíprocamente, sea X un abierto afín T^M-equivariante de T^Γ. Entonces X es una variedad tórica con toro T^M. Por el teorema 1.28 X es de la forma T^Λ, donde Λ es un semigrupo de M, tal que $\mathbb{Z}\Lambda = M$.

Sea $\check{\theta} := \mathbb{R}_{\geq 0}\Lambda$. Como $T^\Lambda \subset T^\Gamma$ es encaje T^M-equivariante, por la proposición 1.34, el homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\mathbb{C}[t^\Gamma] \to \mathbb{C}[t^\Lambda]$ esta inducido por una inclusion de semigrupos $\Gamma \subset \Lambda$. Se sigue que $\check{\sigma} \subset \check{\theta}$ y por dualidad $\theta \subset \sigma$. Ahora probaremos que si τ es la cara mas pequeña de σ tal que contiene a θ, entonces $\Gamma_\tau = \Lambda$. Bajo esta condiciones basta probar que si $\mathrm{int}(\theta) \cap \mathrm{int}(\sigma) \neq \emptyset$, entonces $\Lambda = \Gamma$.

Por la observación 2.14 la retícula $F = \sigma^\perp \cap \Gamma$ es la cara mínima de Γ y el ideal primo I_F de $\mathbb{C}[t^\Gamma]$ define la órbita $\mathrm{orb}(\sigma, \Gamma)$, que es un encaje cerrado de T^Γ. Por el lema 2.18 se tiene que $\Gamma \backslash (\sigma^\perp \cap \Gamma) \subset \Lambda \backslash (\theta^\perp \cap \Lambda)$. Esto implica que $I_F \mathbb{C}[t^\Lambda] \subset I_G$, donde $G = \Lambda \cap \theta^\perp$. En particular $1 \notin I_F \mathbb{C}[t^\Lambda]$. De lo anterior obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[t^\Gamma] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}[t^\Gamma]/I_F \arrow[d] \\
\mathbb{C}[t^\Lambda] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{C}[t^\Lambda]/I_F\mathbb{C}[t^\Lambda] \arrow[d, dashed] \\
& \mathbb{C}[t^\Lambda]/I_G.
\end{tikzcd}$$

Este diagrama de $\mathbb{C}$-álgebras nos induce el siguiente diagrama conmutativo en las variedades:

$$\begin{tikzcd}
T^\Gamma & T^{\Gamma \cap \sigma^\perp} \arrow[l, "i"'] \\
T^\Lambda \arrow[u, "i"] & T^{\Lambda \cap \theta^\perp}. \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Sea $x \in T^{\Lambda\cap\theta^{\perp}}$. Por el diagrama anterior tenemos que $g(x) = f(x)$, de lo que se infiere que $T^{\Lambda} \cap T^{\Gamma\cap\sigma^{\perp}} \neq \emptyset$ y como T^{Λ} es T^{M}-equivariante, del corolario 2.12, obtenemos que $\mathrm{orb}(\sigma, \Gamma) \subset T^{\Lambda}$.

Por el corolario 2.12 $\mathrm{orb}(\sigma,\Gamma) = \overline{\mathrm{orb}(\sigma,\Gamma)} \subset \overline{\mathrm{orb}(\tau,\Gamma)}$, para toda $\tau \leq \sigma$. Como T^{Λ} es abierto y contiene a $\mathrm{orb}(\sigma,\Gamma)$, $\mathrm{orb}(\tau,\Gamma) \cap T^{\Lambda} \neq \emptyset$ y como T^{Λ} es T^{M}-invariante, se tiene que $\mathrm{orb}(\tau,\Gamma) \subset T^{\Lambda}$, para toda $\tau \leq \sigma$. Dado que $T^{\Gamma} = \bigsqcup_{\tau\leq\sigma} \mathrm{orb}(\tau,\Gamma)$ concluimos que $T^{\Gamma} \subset T^{\Lambda}$ y por lo tanto $T^{\Gamma} = T^{\Lambda}$, lo que implica que $\Gamma = \Lambda$. $\square$

Proposición 2.21. *La inclusión de abiertos afines T^{M}-equivariante en una variedad tórica afín T^{Γ} es compatible con la normalización.*

Demostración. Como vimos en la demostración del lema 2.20, cualquier abierto T^{M}-equivariante de T^{Γ} es de la forma $T^{\Gamma}\backslash V(f)$ con $f = t^{\gamma}$ y $\gamma \in \Gamma$. Por otro lado $\check{\sigma} \cap M + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\gamma)$ es la saturación de $\Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\gamma)$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo, donde las flechas verticales son morfismos inyectivos y las flechas horizontales son las funciones de normalización:

$$\begin{array}{ccc} T^{\check{\sigma}\cap M} & \longrightarrow & T^{\Gamma} \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_f^{\check{\sigma}\cap M} & \longrightarrow & T_f^{\Gamma}. \end{array}$$

$\square$

Capítulo 3

Variedades Tóricas

En la teoría clásica de variedades tóricas, un resultado fundamental es que toda variedad tórica normal tiene una cubierta por abiertos afines invariantes por la acción del toro. Este resultado es la clave para dar una descripción combinatoria de una variedad tórica normal. En este capítulo veremos un ejemplo de una variedad tórica no normal que no tiene tal cubierta y por ende, no se le puede asociar un objeto combinatorio como en el caso normal.

Como consecuencia de esta situación, se han propuesto diversas maneras de replantear la definición de variedad tórica con miras a estudiarlas desde un punto de vista mas general. Estas propuestas se pueden consultar en [GKZ, Oda, Stu, Th1, Th2, Th3].

Nosotros estudiaremos la propuesta hecha por P. González y B. Teissier que aparece en el artículo [GyT]. De eso se tratará este capítulo.

3.1. Definición

En esta sección daremos la definición de una variedad tórica e ilustraremos esta definición con un ejemplo.

Definición 3.1. Una variedad tórica X es una variedad algebraica irreducible, separada, que contiene un abierto de Zariski isomorfo a un toro algebraico T, tal que la acción de T se extiende a todo X algebraicamente.

Ejemplo 3.2. Consideremos el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, que se define como:

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim,$$

donde $x \sim y$ si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $x = \lambda y$. Podemos ver a $(\mathbb{C}^*)^n$ contenido en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ a través del siguiente morfismo inyectivo:

$$\begin{array}{rcc} i : (\mathbb{C}^*)^n & \to & \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & [1 : x_1 : \ldots : x_n]. \end{array}$$

Para ver que es un abierto de Zariski, recordemos que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ esta cubierto por las cartas afines

$$U_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \backslash \mathbf{V}(x_i) = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} | x_i \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^n.$$

Entonces tenemos que ver que $i((\mathbb{C}^*)^n) \cap U_i$ es un abierto de Zariski para toda $i = 0, \ldots, n$. Pero esto se tiene, ya que $i((\mathbb{C}^*)^n) \cap U_i = U_i \backslash (\bigcup_{j \neq i} \mathbf{V}(x_j))$, para toda $i = 1, \ldots, n$.

$(\mathbb{C}^*)^n$ induce una acción de manera natural en $i((\mathbb{C}^*)^n)$, como sigue:

$$[1 : x_1 : \ldots : x_n][1 : y_1 : \ldots : y_n] = [1 : x_1 y_1 : \ldots : x_n y_n].$$

Veamos que esta acción está bien definida. Tomamos dos representantes $[\lambda : \lambda x_1 : \ldots : \lambda x_n]$ y $[\alpha : \alpha y_1 : \ldots : \alpha y_n]$, con $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}^*$. Aplicando la acción obtenemos que

$$[\lambda : \lambda x_1 : \ldots : \lambda x_n][\alpha : \alpha y_1 : \ldots : \alpha y_n] = [\alpha\lambda : \alpha\lambda x_1 y_1 : \ldots : \alpha\lambda x_n y_n]$$

$$= \lambda\alpha[1 : x_1 y_1 : \ldots : x_n y_n] = [1 : x_1 y_1 : \ldots : x_n y_n].$$

Veamos que la acción se puede extender a todo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Definimos:

$$\begin{array}{ccc} i((\mathbb{C}^*)^n) \times \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} & \to & \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \\ ([1 : x_1 : \ldots : x_n], [y_0 : y_1 : \ldots : y_n]) & \mapsto & [y_0 : y_1 x_1 : \ldots : y_n x_n], \end{array}$$

Esta es una acción ya que

$$[1 : 1 : \ldots : 1][y_0 : y_1 : \ldots : y_n] = [y_0 : y_1 : \ldots : y_n],$$

además

$$((x_1, \ldots, x_n)(z_1, \ldots, z_n))[y_0 : y_1 : \ldots : y_n] = (x_1 z_1, \ldots, x_n z_n)[y_0 : y_1 : \ldots : y_n]$$

$$= [y_0 : x_1 z_1 y_1 : \ldots : x_n z_n y_n] = (x_1, \ldots, x_n)((z_1, \ldots, z_n)[y_0 : y_1 : \ldots : y_n]).$$

Como $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ es una variedad irreducible y separada, concluimos que $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ es una variedad tórica.

3.2. Un Ejemplo Particular

En esta sección veremos un ejemplo de una variedad tórica no normal que no satisface el siguiente teorema de H. Sumihiro.

Teorema 3.3. *Una variedad tórica normal X tiene una cubierta finita dada por variedades tóricas afines normales T-invariantes.*

Demostración. Ver [Sum]. □

Ejemplo 3.4. Consideremos la curva cubica nodal proyectiva $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$, que está definida por la ecuación $y^2z = x^3 + x^2z$. El único punto singular de esta curva es $p = [0:0:1]$ y tiene un único punto en la linea al infinito $z = 0$, que es $q = [0:1:0]$.

Afirmamos que $\mathcal{C}$ es una variedad tórica con toro $\mathcal{C}\backslash\{p\} \simeq \mathbb{C}^*$. Asumiendo esto por el momento, supongamos que tenemos un abierto U invariante por la acción que contiene al punto p. Ahora, como U es abierto, se tiene que $U \cap (\mathcal{C}\backslash\{p\}) \neq \emptyset$. Por otro lado, como U es invariante bajo la acción, $\mathcal{C}\backslash\{p\} \subset U$. Pero entonces se tiene que $\mathcal{C} = U$. Por lo tanto, no existen abiertos afines $\mathbb{C}^*$-invariantes que contengan a p, de lo que se sigue que el teorema 3.3 falla.

Vamos a mostrar que $\mathcal{C}$ es una variedad tórica con toro $\mathcal{C}\backslash\{p\} \simeq \mathbb{C}^*$. Consideremos la parametrización de la curva $y^2 = x^3 + x^2$, dada por:

$$\varphi(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))).$$

Con esta parametrización se tiene para $t = \pm 1$, $\varphi(t) = p$. Reemplacemos t con $\frac{t+1}{t-1}$, con lo que obtenemos la parametrización

$$\phi(t) = \begin{cases} (\frac{4t}{(t-1)^2}, \frac{4t(t+1)}{(t-1)^3}) & si \quad t \neq 1 \\ \\ q & si \quad t = 1 \end{cases}$$

Entonces $\phi(0) = \phi(\infty) = p$ y $\phi : \mathbb{C}^* \to \mathcal{C}\backslash\{p\}$ es isomorfismo.

$\phi|_{\mathbb{C}^*}$ induce una acción sobre $\mathcal{C}\backslash\{p\}$ utilizando el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \arrow[r] \arrow[d, "\phi\times\phi"] & \mathbb{C}^* \arrow[d, "\phi"] \\ \mathcal{C}\backslash\{p\} \times \mathcal{C}\backslash\{p\} \arrow[r] & \mathcal{C}\backslash\{p\} \end{tikzcd}$$

Sean $t, s \in \mathbb{C}^*$, usando el diagrama definimos:

$$[\frac{4t}{(t-1)^2} : \frac{4t(t+1)}{(t-1)^3} : 1]\cdot[\frac{4s}{(s-1)^2} : \frac{4s(s+1)}{(s-1)^3} : 1] = [\frac{4ts}{(ts-1)^2} : \frac{4ts(ts+1)}{(ts-1)^3} : 1] \tag{3.1}$$

Notemos además que $x \cdot q = q \cdot x = x$, para toda $x \in \mathcal{C}\backslash\{p\}$. Esta operación define una acción de $\mathcal{C}\backslash\{p\}$ en $\mathcal{C}\backslash\{p\}$ que se puede extender a p haciendo $x \cdot p = p$, para todo $x \in \mathcal{C}\backslash\{p\}$.

Ahora tenemos que ver que esta acción es algebraica, es decir, esta dada por cocientes de polinomios. Para esto veremos que la ley de grupo dada por la teoría de curvas elípticas coincide con la acción. Después probaremos que la ley de grupo dada por la teoría de curvas elípticas es algebraica.

- Primero veamos como esta definida la ley de grupo. La ley de grupo esta definida solo en la parte suave de la curva y esta dada de la siguiente manera. Sean $u, v \in \mathcal{C}\backslash\{p\}$. Sea L la recta que pasa por x, y. Se define $u \times v := w$, donde w se obtiene como sigue. Por el teorema de Bezout $|L \cap \mathcal{C}| = 3$, sea $w' = [a : b : c]$ el tercer punto en la intersección. Definimos $w = [a : -b : c]$. En el caso de que $u = v$, tomamos la recta tangente a la curva y definimos $u \times v$ de manera análoga. Con esta operación $\mathcal{C}\backslash\{p\}$ es un grupo (ver figura 3.1, para mas detalle de la ley grupo ver [SyT], capítulo 1).

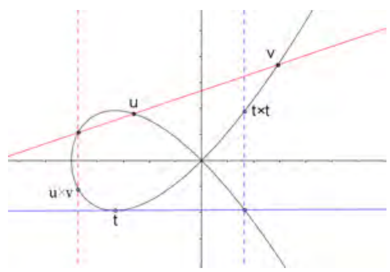

Figura 3.1: Ley de Grupo

- Veamos ahora que esta ley de grupo y la acción definida en la ecuación (3.1) coinciden en q. Necesitamos mostrar que $q \times u = u$, para toda $u \in \mathcal{C}\backslash\{p\}$. Tenemos que una recta esta dada de la forma $ax+by+cz = 0$, pero estamos suponiendo que pasa por el punto q, por lo que $b = 0$, de lo que obtenemos $ax + cz = 0$. Si $a = 0$, se tiene que la recta es $z = 0$, que es la recta al infinito en el espacio proyectivo y esta recta se intersecta con $\mathcal{C}$ solo en el punto q, es decir, tiene multiplicidad 3, se infiere que $q \times q = q$. Si $a \neq 0$, se tiene la recta vertical $x = -c/a$ en la carta afín $z = 1$. Como $\mathcal{C}$ es simétrica (si $[u_1 : u_2 : 1]$ es solución a $y^2z - x^3 - x^2z$, $[u_1 : -u_2 : 1]$ también es solución), se sigue que $q \times u = u$.

- Ahora, demostraremos que la acción definida en la ecuación (3.1) y la ley de grupo coinciden para todo $u, v \in \mathcal{C}\backslash\{p, q\}$, tenemos que ver que

  $$[\frac{4t}{(t-1)^2} : \frac{4t(t+1)}{(t-1)^3} : 1], [\frac{4s}{(s-1)^2} : \frac{4s(s+1)}{(s-1)^3} : 1], [\frac{4ts}{(ts-1)^2} : -\frac{4ts(ts+1)}{(ts-1)^3} : 1],$$

  son colineales. Pero esto se sigue de un calculo directo. Concluimos que la ley de grupo coincide con la acción dada en la ecuación (3.1).

- Ahora veamos que la ley de grupo efectivamente es algebraica para dos elementos distintos. Para esto calcularemos de manera explícita la operación de grupo. Sean $[x_1 : y_1 : 1], [x_2 : y_2 : 1] \in \mathcal{C} \backslash \{p, q\}$, tales que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. La ecuación de la recta que pasa por estos puntos es:

  $$y = (\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})(x - x_1) + y_1.$$

  Sea $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Sustituyendo en la ecuación de la curva obtenemos:

  $$x^3 + x^2(1 - \lambda^2) + x(2\lambda^2 x_1 - 2\lambda y_1) - \lambda^2 x_1^2 - 2\lambda x_1 y_1 - y_1^2 = 0.$$

  Dividiendo esta ecuación de grado 3 por sus factores $x - x_1, x - x_2$, obtenemos:

  $$x = \lambda^2 - x_1 - x_2 - 1.$$

  Sustituyendo en nuestra ecuación para y y multiplicándolo por -1 obtenemos:

  $$y = -\lambda^3 + \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda - y_1.$$

  Concluimos que la acción dada en dos puntos distintos es algebraica.

- Veamos ahora que la acción definida sobre un mismo punto también es algebraica. Consideremos un punto $[a : b : 1] \in \mathcal{C} \backslash \{p, q\}$, la recta tangente a este punto esta dada por:

  $$(-3a^2 - 2a)x + 2by = -a^3,$$

  de donde se obtiene que:

  $$y = \frac{(3a^2 + 2a)x}{2b} - \frac{a^3}{2b}.$$

  Sustituyendo en la ecuación de la curva obtenemos

  $$x^3 + x^2(1 - (\frac{(3a^2 + 2a)}{2b})^2) + x(\frac{3a^5 + 2a^4}{2b^2}) - \frac{a^6}{4b^2} = 0.$$

  Dividimos esta ecuación de grado 3, por el factor $(x - a)^2$, de lo que se obtiene:

  $$x = \frac{9a^4}{4b^2} + \frac{3a^3}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} - 2a - 1.$$

  Sustituyendo esto en nuestra ecuación de y y multiplicando por -1, obtenemos:

  $$y = (\frac{(3a^1 + 2a)}{2b})(\frac{9a^4}{4b^2} + \frac{3a^3}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} - 2a - 1) - \frac{3a^3}{2b}.$$

  Por lo tanto es una acción algebraica.

- Solo nos falta extender la acción a todo $\mathcal{C}$. Para extender la acción, procedemos de la misma manera, tomando una recta que pase por $(x_1, y_1) \in \mathcal{C}$ y por el punto p, esta recta esta definida por la ecuación $y = (\frac{y_1}{x_1})x$, sustituyendo en la ecuación de la curva obtenemos:

$$x^3 + x^2(1 - (\frac{y_1}{x_1})^2),$$

dividiendo por las raíces $x, x - x_1$, obtenemos que $x = 0$, y por lo tanto $y = 0$, es decir, el punto p. Se infiere que es un punto fijo de la acción. Se concluye que $\mathcal{C}$ es una variedad tórica.

3.3. Variedades Tóricas Bien Cubiertas

En esta sección damos la definición de variedad bien cubierta y las caracterizamos de manera combinatoria.

Definición 3.5. Sea N una retícula de rango finito. Un abanico Σ es un conjunto de conos poliédricos, racionales, fuertemente convexos del espacio vectorial real $N_{\mathbb{R}}$ (ver apéndice A), tal que:

(i) Si $\sigma \in \Sigma$ y $\tau \leq \sigma$, entonces $\tau \in \Sigma$.

(ii) Si $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, entonces $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma$ y $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma'$.

Definición 3.6. Consideremos una terna (N, Σ, Γ) que consiste de una retícula N, un abanico Σ en $N_{\mathbb{R}}$ y una familia de semigrupos finitamente generados $\Gamma = \{\Gamma_\sigma \subset \check{\sigma} \cap M | \sigma \in \Sigma\}$, donde $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ con las siguientes condiciones:

i. $\mathbb{Z}\Gamma_\sigma = M$ y $\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_\sigma = \check{\sigma}$, para todo $\sigma \in \Sigma$.

ii. $\Gamma_\tau = \Gamma_\sigma + M(\tau, \Gamma_\sigma)$, para cada $\sigma \in \Sigma$ y cualquier cara τ de σ.

Cada Γ_σ da lugar a la variedad tórica T^{Γ_σ}. Definimos la variedad T_Σ^Γ como el cociente $\bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} T^{\Gamma_\sigma} / \sim$, donde $\sim$ esta dado de la siguiente manera, sean $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, identificamos T^{Γ_σ} y $T^{\Gamma_{\sigma'}}$ por su abierto común $T^{\Gamma_{\sigma \cap \sigma'}}$ (ver lema 2.20).

Nota 3.7. La retícula N en la terna (N, Σ, Γ) esta determinado por Γ (ver condición i. de la definición). Por esto omitimos la referencia de la retícula N en la notación T_Σ^Γ.

Ejemplo 3.8. Sea Σ el abanico dado por los conos:

$$\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}((0, 1), (4, -2)),$$

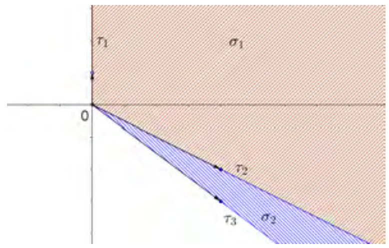

Figura 3.2

$$\sigma_2 = \mathbb{R}_{\geq 0}((4,-2),(4,-3))$$

y sus respectivas caras (ver figura 3.2): $\tau_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}((0,1))$, $\tau_2 = \mathbb{R}_{\geq 0}((4,-2))$, $\tau_3 = \mathbb{R}_{\geq 0}((4,-3))$ y $0 = \{(0,0)\}$.

Sea Γ el conjunto de los siguientes semigrupos:

$$\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}((1,0),(1,1),(2,3),(2,4)),$$

$$\sigma_2 = \mathbb{R}_{\geq 0}((1,1),(3,4),(-2,-4),(0,-1)),$$
$$\Gamma_{\tau_1} = \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0),(1,1),(2,3),(2,4),(-1,0)),$$
$$\Gamma_{\tau_2} = \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0),(1,1),(2,3),(2,4),(-2,-4)),$$
$$\Gamma_{\tau_3} = \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,1),(3,4),(-2,-4),(0,-1),(-3,-4)),$$
$$\Gamma_0 = \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0),(1,1),(2,4),(-1,-1)).$$

Un cálculo directo muestra que la terna $(\mathbb{Z}^2,\Sigma,\Gamma)$ cumple la definición 3.6. En el capítulo 5, mostraremos que la variedad T_Σ^Γ asociada a la terna $(\mathbb{Z}^2,\Sigma,\Gamma)$ corresponde a la explosión de la variedad $\mathbf{V}(xz-y^4)$ centrada en el ideal (xy,yz,xz).

Notemos que la variedad T_Σ^Γ no es una variedad tórica normal, pues el semigrupo Γ_1 no es saturado, le falta el punto $(1,2)$.

Sabemos que para toda variedad tórica normal X con toro isomorfo a T^M existe un abanico Σ en $N_\mathbb{R}$ tal que $X \simeq T_\Sigma$ (ver [CLS] corolario 3.1.8). A continuación veremos que estas variedades están incluidas en nuestra definición 3.6.

Proposición 3.9. *Sea Σ un abanico y T_Σ la variedad tórica normal asociada a Σ. Entonces existe una terna (N,Σ,Γ) tal que $T_\Sigma = T_\Sigma^\Gamma$.*

Demostración. Sea Σ un abanico, consideremos la familia de semigrupos $\Gamma = \{\Gamma_\sigma := \check{\sigma} \cap M | \sigma \in \Sigma\}$. Por la construcción de T_Σ, se tiene que $T_\Sigma = T_\Sigma^\Gamma$. Entonces solo hace falta ver que la terna (N,Σ,Γ) cumple con las condiciones de la definición.

Para el inciso $i.$, sea $\sigma \in \Sigma$. Por el lema 1.38, $\check{\sigma} \cap M$ es saturado. Además como σ es fuertemente convexo, por el lema A.14, se tiene que $\dim(\check{\sigma}) = n$. Se tiene entonces que $\mathbb{Z}(\check{\sigma} \cap M) = M$. Por otro lado $\mathbb{R}_{\geq 0}(\check{\sigma} \cap M) = \check{\sigma}$. Por lo tanto cumple el primer inciso de la definición. Para el inciso $ii.$ solo hace falta ver que $\Gamma_\tau = \check{\tau} \cap M$ es igual a $\Gamma_\sigma + M(\tau, \Gamma_\sigma)$. Por la observación 2.16, se tiene que $\mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma_\sigma + M(\tau, \Gamma_\sigma)) = \check{\tau}$. Esto nos reduce el problema a ver que $\Gamma_\sigma + M(\tau, \Gamma_\sigma)$ es saturado. Sea $\delta \in \mathrm{Sat}(\Gamma_\sigma + M(\tau, \Gamma_\sigma))$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\delta \in \Gamma_\sigma + M(\tau, \Gamma_\sigma)$, por lo que $n\delta = \gamma_1 + \gamma_2$, con $\gamma_1 \in \Gamma_\sigma$ y $\gamma_2 \in M(\tau, \Gamma_\sigma)$. Como $M(\tau, \Gamma_\sigma) = \mathbb{Z}(\Gamma_\sigma \cap \tau^\perp)$, podemos escribir a $\gamma_2 = \gamma_{2+} - \gamma_{2-}$, con $\gamma_{2+}, \gamma_{2-} \in \Gamma_\sigma \cap \tau^\perp$. Se sigue que $\gamma_{2-} + n\delta = \gamma_1 + \gamma_{2+} \in \Gamma_\sigma$, lo que implica que $n\gamma_{2-} + n\delta \in \Gamma_\sigma$ y como Γ_σ es saturado, se obtiene que $\gamma_{2-} + \delta \in \Gamma_\sigma$. Se infiere que $\delta \in \Gamma_\sigma + M(\tau, \Gamma_\sigma) =$. Concluimos que $\Gamma_\sigma + M(\tau, \Gamma_\sigma) = \check{\tau} \cap M$. □

Por el resultado anterior podemos ver que el caso de variedades tóricas normales esta incluido en nuestra definición. Ahora tenemos que ver que las variedades asociadas a las ternas (N, Σ, Γ) son variedades tóricas. Para esto necesitaremos un lema preparatorio.

Lema 3.10. *Sea (N, Σ, Γ) como en la definición 3.6 y T_Σ^Γ la variedad correspondiente. Entonces tenemos las siguientes propiedades:*

i) Si $\sigma, \theta \in \Sigma$ y si $\tau = \sigma \cap \theta$, entonces $\Gamma_\tau = \Gamma_\sigma + \Gamma_\theta$.

ii) La variedad T_Σ^Γ es separada.

Demostración. Sea $\tau = \sigma \cap \theta$. Por definición tenemos que $\Gamma_\tau = \Gamma_\sigma + M(\tau, \Gamma_\sigma) = \Gamma_\theta + M(\tau, \Gamma_\theta)$. Por lo tanto $\Gamma_\sigma, \Gamma_\theta \subset \Gamma_\tau$, lo que implica que $\Gamma_\sigma + \Gamma_\theta \subset \Gamma_\tau$.

Ahora mostraremos que $\Gamma_\tau \subset \Gamma_\sigma + \Gamma_\theta$. Afirmamos que $\mathrm{int}(\check{\sigma} \cap (-\check{\theta})) \cap \Gamma_\sigma \cap (-\Gamma_\theta) \neq \emptyset$. Suponiendo esto por el momento, sea $u \in \mathrm{int}(\check{\sigma} \cap (-\check{\theta})) \cap \Gamma_\sigma \cap (-\Gamma_\theta)$. En particular, $u \in \mathrm{int}(\check{\sigma} \cap (-\check{\theta}))$. Por el lema A.11 (ver apéndice), para todo $u \in \mathrm{int}(\check{\sigma} \cap (-\check{\theta}))$, se tiene que $\tau = \sigma \cap u^\perp = \theta \cap u^\perp$. Además, por el lema A.12 (ver apéndice), $u \in \mathrm{int}(\check{\sigma} \cap \tau^\perp)$. Por el lema 2.17 inciso (ii), tenemos que $\Gamma_\tau = \Gamma_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u)$, pero $-u \in \Gamma_\theta$, por lo que $\Gamma_\tau = \Gamma_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u) \subset \Gamma_\sigma + \Gamma_\theta$. Así, $\Gamma_\tau \subset \Gamma_\sigma + \Gamma_\theta$.

Para mostrar que $\mathrm{int}(\check{\sigma} \cap (-\check{\theta})) \cap \Gamma_\sigma \cap (-\Gamma_\theta) \neq \emptyset$, solo hace falta ver que $\mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma_\sigma \cap -\Gamma_\theta) = \check{\sigma} \cap -\check{\theta}$. La inclusión $\mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma_\sigma \cap -\Gamma_\theta) \subset \check{\sigma} \cap -\check{\theta}$ es inmediata, pues $\Gamma_\sigma \subset \check{\sigma}$ y $-\Gamma_\theta \subset -\check{\theta}$. Para la otra inclusión, sea $\gamma \in \check{\sigma} \cap -\check{\theta} \cap M$. En particular $\gamma \in \check{\sigma} \cap M$. Como $\check{\sigma} \cap M$ es la saturación de Γ_σ, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\gamma \in \Gamma_\sigma$. De manera análoga existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m\gamma \in -\Gamma_\theta$. Se sigue entonces que $nm\gamma \in \Gamma_\sigma \cap -\Gamma_\theta$, con lo que $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma_\sigma \cap -\Gamma_\theta)$. Por lo tanto, $\check{\sigma} \cap -\check{\theta} \cap M \subset \mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma_\sigma \cap -\Gamma_\theta)$. Concluimos entonces que $\mathrm{int}(\check{\sigma} \cap (-\check{\theta})) \cap \Gamma_\sigma \cap (-\Gamma_\theta) \neq \emptyset$. Esto concluye la demostración de i).

Para mostrar que T_Σ^Γ es separada es suficiente demostrar que la imagen del morfismo diagonal $\Delta : T^{\Gamma_{\sigma\cap\theta}} \to T^{\Gamma_\sigma} \times T^{\Gamma_\theta}$ es un cerrado de Zariski. Recordemos que el morfismo Δ esta dado por las inclusiones de $T^{\Gamma_{\sigma\cap\theta}}$ en T^{Γ_σ} y T^{Γ_θ} definidas en el lema 2.20. Consideremos el homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\Delta^* : \mathbb{C}[t^{\Gamma_\theta}] \bigotimes \mathbb{C}[t^{\Gamma_\sigma}] \to \mathbb{C}[t^{\Gamma_\tau}]$, definido por $t^\gamma \otimes t^{\gamma'} \to t^{\gamma+\gamma'}$, que es sobreyectivo por el inciso i). Por lo tanto $\mathbb{C}[t^{\Gamma_\theta}] \bigotimes \mathbb{C}[t^{\Gamma_\sigma}]/\ker(\Delta^*) \simeq \mathbb{C}[t^{\Gamma_\tau}]$. Se sigue que la imagen de $\Delta : T^{\Gamma_{\sigma\cap\theta}} \to T^{\Gamma_\sigma} \times T^{\Gamma_\theta}$ es un cerrado de Zariski para todo $\sigma, \theta \in \Sigma$. Concluimos que T_Σ^Γ es separada. □

Teorema 3.11. *La variedad que define la terna* (N, Σ, Γ) *es una variedad tórica.*

Demostración. Por el lema 3.10 tenemos que T_Σ^Γ es una variedad separada. Recordemos que

$$T_\Sigma^\Gamma = \bigsqcup_{\sigma\in\Sigma} T^{\Gamma_\sigma}/\sim,$$

donde la relación $\sim$ identifica el abierto afín $T^{\Gamma_{\sigma\cap\theta}}$ común a T^{Γ_σ} y T^{Γ_θ}, para todo $\sigma, \theta \in \Sigma$ (ver lema 2.20). Pero $T^M \subset T^{\Gamma_\tau}$, para todo $\tau \leq \sigma$, en particular, $T^M \subset T^{\Gamma_{\sigma\cap\theta}}$, para todo $\sigma, \theta \in \Sigma$. De esto se sigue que T^M es un abierto de Zariski en T_Σ^Γ y como T^M actúa en cada T^{Γ_σ}, entonces T^M extiende su acción a todo T_Σ^Γ. Como cada T^{Γ_σ} es una variedad irreducible se tiene que T_Σ^Γ es irreducible. Concluimos que T_Σ^Γ es una variedad tórica.

□

Observación 3.12. La definición 3.6 incluye tanto variedades tóricas normales como no normales. Basta que algún semigrupo de la familia Γ sea no saturado (ver ejemplo 3.8). Desafortunadamente, no incluye todas las variedades no normales como vimos en el ejemplo 3.4.

Proposición 3.13. *Sea* T_Σ^Γ *la variedad tórica asociada a una terna* (N, Σ, Γ). *Entonces la función*

$$\tau \mapsto \operatorname{orb}(\tau, \Gamma_\tau) := i_\tau(T^{M(\tau,\Gamma_\tau)})$$

define una biyección entre los conos de Σ *y las órbitas de la acción del toro en* T_Σ^Γ.

Demostración. Esto es consecuencia directa de la definición y el corolario 2.11. □

Enseguida vamos a caracterizar a las variedades tóricas que se obtienen a partir de la definición 3.6.

Definición 3.14. Decimos que una acción de un grupo en una variedad algebraica X es buena si X tiene una cubierta finita de abiertos afines que sean invariantes por la acción.

Definición 3.15. Una variedad tórica bien cubierta X es una variedad tórica tal que la acción del toro es buena.

Observación 3.16. Como vimos en el ejemplo 3.4, no toda variedad tórica es bien cubierta.

Veamos ahora que toda variedad tórica bien cubierta es isomorfa a alguna variedad tórica asociada a una terna (N, Σ, Γ).

Teorema 3.17. *Si X es una variedad tórica bien cubierta con toro T, entonces existe una terna (N, Σ, Γ) que cumple las condiciones de la definición 3.6 y un isomorfismo $\varphi : T \to T^M$, tal que la pareja (T, X) es isomorfa a (T^M, T^Γ_Σ).*

Demostración. Como X es una variedad tórica bien cubierta, se tiene que existen $V_1, \ldots, V_n$ cubierta finita de abiertos afines de X tales que V_i es invariante por T. Por la proposición 1.28, se tiene que para cada V_i, existe un semigrupo $\Gamma_i \subset M$, con M retícula de rango d tal que $V_i \simeq T^{\Gamma_i}$. En particular, cada V_i es una variedad tórica afín. Sea $\check{\sigma}_i := \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_i \subset M_\mathbb{R}$ y sean $\sigma_i \subset N_\mathbb{R}$ sus conos duales, donde N es la retícula dual a M. Sea Σ el conjunto de los conos σ_i y sus respectivas caras.

Veamos primero que Σ es un abanico. Dada la construcción de Σ, solo hace falta ver que $\sigma_i \cap \sigma_j$ es cara de σ_i y de σ_j. Como X es una variedad separada, se tiene que $V_i \cap V_j$ es un abierto afín de V_i. Además, como V_i y V_j son invariantes bajo la acción de T, se tiene que $V_i \cap V_j$ es un abierto afín invariante de V_i. Como $V_i \simeq T^{\Gamma_i}$, sea U el abierto afín de T^{Γ_i} correspondiente a $V_i \cap V_j$. Por lo visto en la demostración del lema 2.20 los abiertos afines T^M-invariantes de T^{Γ_i} son de la forma T^{Γ_τ}, con $\tau \leq \sigma_i$. De manera análoga se ve que $\tau \leq \sigma_j$. Veamos que $\tau = \sigma_i \cap \sigma_j$. Como X es una variedad separada, la imagen de la inclusión $V_i \cap V_j$ en $V_i \times V_j$ es cerrada, esto da lugar a que la imagen de la inclusión de T^{Γ_τ} en $T^{\Gamma_i} \times T^{\Gamma_j}$ es cerrada. Algebraicamente esto implica la sobreyectividad del homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\mathbb{C}[t^{\Gamma_i}] \bigotimes \mathbb{C}[t^{\Gamma_j}] \to \mathbb{C}[t^{\Gamma_\tau}] \quad , \quad t^{\gamma_i} \otimes t^{\gamma_j} \mapsto t^{\gamma_i + \gamma_j}.$$

De esto se sigue que $\Gamma_\tau \subset \Gamma_i + \Gamma_j$ y como $\Gamma_i, \Gamma_j \subset \Gamma_\tau$, se obtiene que $\Gamma_\tau = \Gamma_i + \Gamma_j$. Por lo tanto, usando el lema 2.16, se tiene:

$$\check{\tau} = \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma_i + \Gamma_j) = \check{\sigma}_i + \check{\sigma}_j$$

y por el lema A.7 (ver apéndice), $\tau = \sigma_i \cap \sigma_j$. Concluimos que Σ es un abanico.

Consideremos la familia de semigrupos $\Gamma = \{\Gamma_i\} \bigcup \{\Gamma_{i,\tau} | \tau \leq \sigma_i \ p.a. \ i\}$, donde si $\tau \leq \sigma_i$, $\Gamma_{i,\tau} = \Gamma_i + M(\tau, \Gamma_i)$. Veamos que la terna (N, Σ, Γ) cumple las condiciones de la definición 3.6. Para el inciso $i.$ de la definición, se tiene que $\mathbb{Z}\Gamma_i = M$ para todo i, lo que implica que $\mathbb{Z}\Gamma_{i,\tau} = M$, para todo $\tau \leq \sigma_i$. Además, por el lema 2.16 se tiene que $\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_{i,\tau} = \check{\tau}$. Para el inciso $ii.$, solo hay que ver que $\Gamma_{i,\sigma_i \cap \sigma_j} = \Gamma_{j,\sigma_i \cap \sigma_j}$, para todo i, j. Pero en efecto, esto se debe a que estos semigrupos definen abiertos isomorfos en las variedades T^{Γ_i} y T^{Γ_j}. Si $\tau \leq \sigma_i$ y $\tau \leq \sigma_j$, entonces $\Gamma_{i,\tau} = \Gamma_{j,\tau}$ por el lema 2.17 inciso iii). Concluimos que $(N, \Sigma, \Gamma))$ cumple las condiciones de la definición 3.6 y por tanto T_Σ^Γ es isomorfa a X.

□

3.4. Morfismos de Variedades Tóricas Bien Cubiertas

Recordemos que un morfismo $\phi : T^{M'} \to T^M$ de toros algebraicos esta determinado por cualquiera de los siguientes homomorfismos de grupos

$$\phi^* : M \to M' \ \ y \ \ \phi_* : N' \to N,$$

donde M y M' son las retículas de caracteres de T^M y $T^{M'}$ respectivamente y N y N' son las retículas de subgrupos de un parámetro de T^M y $T^{M'}$ respectivamente. Notemos que los homomorfismos ϕ^* y ϕ_* se determinan uno al otro por dualidad. Esto determina el morfismo

$$\bar{\phi} : \mathbb{C}[t^M] \to \mathbb{C}[t^{M'}], \quad t^m \mapsto t^{\phi^*(m)}, \quad m \in M,$$

que a su vez determina $\phi : T^{M'} \to T^M$.

Definición 3.18. Sean (N, Σ, Γ), (N', Σ', Γ') dos ternas como en la definición 3.6. Sea $\phi_* : N' \to N$ un homomorfismo de retículas y $\phi^* : M \to M'$ su homomorfismo dual. Decimos que ϕ_* es una función de abanicos que preserva semigrupos $(N, \Sigma, \Gamma) \to (N', \Sigma', \Gamma')$, si para cualquier $\sigma' \in \Sigma'$ existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\phi^*(\Gamma_\sigma) \subset \Gamma'_{\sigma'}$.

Proposición 3.19. *Sea $\phi : T^{M'} \to T^M$ un morfismo de toros algebraicos. Si ϕ_* define una función de abanicos que preserva semigrupos $(N, \Sigma, \Gamma) \to (N', \Sigma', \Gamma')$, entonces ϕ se extiende a un morfismo $\bar{\phi} : T_{\Sigma'}^{\Gamma'} \to T_\Sigma^\Gamma$ que es equivariante respecto a ϕ. Recíprocamente, si $f : T_{\Sigma'}^{\Gamma'} \to T_\Sigma^\Gamma$ es un morfismo que extiende a ϕ y que es equivariante respecto a ϕ, entonces ϕ_* define una función de abanicos que preserva semigrupos $(N, \Sigma, \Gamma) \to (N', \Sigma', \Gamma')$ tal que $f = \bar{\phi}$.*

Demostración. Sea $\phi : T^{M'} \to T^M$ un morfismo de toros algebraicos y supongamos que ϕ_* es una función de abanicos que preserva semigrupos $(N, \Sigma, \Gamma) \to (N', \Sigma', \Gamma')$. Veamos que ϕ se extiende a un morfismo $\bar{\phi} : T^{\Gamma'}_{\Sigma'} \to T^{\Gamma}_{\Sigma}$. Como ϕ_* define una función de abanicos que preserva semigrupos, se tiene que para cualquier $\sigma' \in \Sigma'$ existe un cono $\sigma \in \Sigma$ tal que ϕ^* determina un homomorfismo de semigrupos $\Gamma_\sigma \to \Gamma'_{\sigma'}$. Esto a su vez define a un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\mathbb{C}[t^{\Gamma_\sigma}] \to \mathbb{C}[t^{\Gamma'_{\sigma'}}]$. Lo que induce un morfismo entre variedades

$$\bar{\phi}_{\sigma',\sigma} : T^{\Gamma'_{\sigma'}} \to T^{\Gamma_\sigma}.$$

Sea $x \in T^{\Gamma'_{\sigma'}}$ y consideremos el homomorfismo de semigrupos asociado $x : \Gamma'_{\sigma'} \to \mathbb{C}$. Por el corolario 1.35 se tiene que $\bar{\phi}_{\sigma',\sigma}(x)$ le corresponde el homomorfismo de semigrupos $x \circ \phi^*|_{\Gamma_\sigma}$. Sea $y \in T^{M'}$ y $x \in T^{\Gamma'_{\sigma'}}$, observemos que

$$\bar{\phi}_{\sigma',\sigma}(y \cdot x) = (y \cdot x) \circ \phi^*|_{\Gamma_\sigma} = (y \circ \phi^*) \cdot (x \circ \phi^*|\Gamma_\sigma) = \phi(y) \cdot \bar{\phi}_{\sigma',\sigma}(x),$$

lo que nos dice que el morfismo $\bar{\phi}_{\sigma',\sigma}$ es equivariante.

Consideremos la función $\bar{\phi} : T^{\Gamma'}_{\Sigma'} \to T^{\Gamma}_{\Sigma}$, definida de la siguiente manera. Sea $x \in T^{\Gamma'}_{\Sigma'}$, sea $\sigma' \in \Sigma'$ tal que x pertenezca al abierto afín $T^{\Gamma'_{\sigma'}}$, definimos $\bar{\phi}(x) := \bar{\phi}_{\sigma',\sigma}(x)$.

Veamos ahora que este morfismo esta bien definido. Sea $x \in T^{\Gamma'}_{\Sigma'}$. Supongamos que $x \in T^{\Gamma'_{\sigma'}}$ y $x \in T^{\Gamma'_{\theta'}}$. Entonces $x \in T^{\Gamma'_{\tau'}}$ donde $\tau' = \sigma' \cap \theta' \in \Sigma'$. Además, por el lema 2.20, $T^{\Gamma'_{\tau'}}$ esta contenido en $T^{\Gamma'_{\sigma'}}$ y $T^{\Gamma'_{\theta'}}$ como un abierto afín. Como ϕ_* es un morfismo de abanicos que preserva semigrupos, existen $\tau, \sigma, \theta \in \Sigma$ y morfismos:

$$\bar{\phi}_{\sigma',\sigma} : T^{\Gamma'_{\sigma'}} \to T^{\Gamma_\sigma},$$
$$\bar{\phi}_{\theta',\theta} : T^{\Gamma'_{\theta'}} \to T^{\Gamma_\theta},$$
$$\bar{\phi}_{\tau',\tau} : T^{\Gamma'_{\tau'}} \to T^{\Gamma_\tau}.$$

Supongamos que τ, σ, θ son minimales con esta condición, es decir, si $\Delta \leq \sigma$, entonces $\phi^*(\Gamma_\Delta) \not\subset \Gamma_{\sigma'}$. Análogo para τ y θ.

Veamos que $\tau \leq \sigma$ y $\tau \leq \theta$. Como $\tau' \leq \sigma'$ y como (N', Σ', Γ') es una terna que cumple la definición 3.6, se tiene que $\Gamma'_{\tau'} = \Gamma'_{\sigma'} + M(\tau', \Gamma'_{\sigma'})$, de lo que se concluye que $\Gamma'_{\sigma'} \subset \Gamma'_{\tau'}$, por lo que $\phi^*(\Gamma_\sigma) \subset \Gamma'_{\sigma'} \subset \Gamma'_{\tau'}$. Supongamos que τ no es cara de σ y consideremos $\tau \cap \sigma$. Como $\tau \cap \sigma \leq \sigma$, tenemos que $\tau \cap \sigma$ es cara propia de τ. Por el lema 3.10 y dado que ϕ^* es homomorfismo de semigrupos tenemos

$$\phi^*(\Gamma_{\tau\cap\sigma}) = \phi^*(\Gamma_\tau + \Gamma_\sigma) = \phi^*(\Gamma_\tau) + \phi^*(\Gamma_\sigma) \subset \Gamma'_{\tau'},$$

lo que contradice la minimalidad de τ. Concluimos que $\tau \leq \sigma$ y por lo tanto T^{Γ_τ} esta contenido en T^{Γ_σ}. Análogamente se puede ver que $T^{\Gamma_\tau} \subset T^{\Gamma_\theta}$. Esto induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T^{\Gamma'_{\sigma'}} \arrow[r, "\bar{\phi}_{\sigma',\sigma}"] & T^{\Gamma_\sigma} \\
T^{\Gamma'_{\tau'}} \arrow[u, "i"] \arrow[d, "i"'] \arrow[r, "\bar{\phi}_{\tau',\tau}"] & T^{\Gamma_\tau} \arrow[u, "i"'] \arrow[d, "i"] \\
T^{\Gamma'_{\theta'}} \arrow[r, "\bar{\phi}_{\theta',\theta}"] & T^{\Gamma_\theta}
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad del diagrama diagrama muestra que la función $\bar{\phi}$ esta bien definida. Como $\bar{\phi}_{\sigma',\sigma}$ es equivariante en cada carta afín, se sigue que $\bar{\phi}$ es equivariante respecto a ϕ.

Recíprocamente, supongamos que tenemos f equivariante respecto a ϕ. Sea $\sigma' \in \Sigma'$, por el corolario 2.12, se tiene que si $\tau' \leq \sigma'$, se tiene $\mathrm{orb}(\sigma', \Gamma'_{\sigma'}) \subset \overline{\mathrm{orb}(\tau', \Gamma'_{\tau'})}$. Como f es equivariante respecto a ϕ, existen $\sigma, \tau \in \Sigma$ tales que:

$$f(\mathrm{orb}(\sigma', \Gamma'_{\sigma'})) \subset \mathrm{orb}(\sigma, \Gamma_\sigma),$$

$$f(\mathrm{orb}(\tau', \Gamma'_{\tau'})) \subset \mathrm{orb}(\tau, \Gamma_\tau).$$

Por otro lado la continuidad de f implica que

$$f(\mathrm{orb}(\sigma', \Gamma'_{\sigma'})) \subset f(\overline{\mathrm{orb}(\tau', \Gamma'_{\tau'})}) \subset \overline{f(\mathrm{orb}(\tau', \Gamma'_{\tau'}))} \subset \overline{\mathrm{orb}(\tau, \Gamma_\tau)}.$$

Se sigue que $\overline{\mathrm{orb}(\tau, \Gamma_\tau)} \cap \mathrm{orb}(\sigma, \Gamma_\sigma) \neq \emptyset$. Por lo tanto $\mathrm{orb}(\sigma, \Gamma_\sigma) \subset \overline{\mathrm{orb}(\tau, \Gamma_\tau)}$, y por el corolario 2.12 se concluye que $\tau \leq \sigma$.

Como $T^{\Gamma'_{\sigma'}} = \bigsqcup_{\tau' \leq \sigma'} \mathrm{orb}(\tau', \Gamma'_{\tau'})$, tenemos que $f(T^{\Gamma'_{\sigma'}}) \subset T^{\Gamma_\sigma}$. Inferimos que $f|_{T^{\Gamma'_{\sigma'}}} : T^{\Gamma'_{\sigma'}} \to T^{\Gamma_\sigma}$ es un morfismo equivariante entre variedades. Ahora, tenemos que $f|_{T^{M'}} = \phi$ y ϕ es un homomorfismo de grupos, tenemos que $f(T^{M'}) \subset T^M$ y que $f(t_1 \cdot t_2) = f(t_1) \cdot f(t_2)$, con $t_1, t_2 \in T^{M'}$. Por proposición 1.34, se tiene que $f|_{T^{\Gamma'_{\sigma'}}}$ esta definido por un homomorfismo de semigrupos con $\phi^*(\Gamma_\sigma) \subset \Gamma'_{\sigma'}$. Concluimos que ϕ_* es una función de abanicos que preserva abanicos tal que $f = \bar{\phi}$. □

Corolario 3.20. *La categoría de objetos de las ternas (N, Σ, Γ) de la definición 3.6 con morfismos entre abanicos que preservan semigrupos como en la definición 3.18, es equivalente a la categoría de objetos de variedades tóricas bien cubiertas, donde los morfismos son morfismos equivariantes que se extienden de los morfismos entre los correspondientes toros algebraicos.*

Demostración. Se sigue directamente del teorema 3.17 y de la proposición 3.19. □

Observación 3.21. En este capítulo obtuvimos el diagrama:

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{c} \textit{Variedades Tóricas} \\ \textit{Normales} \end{array} & \subset & \begin{array}{c} \textit{Variedades Tóricas} \\ \textit{Bien Cubiertas} \end{array} & \subset & \textit{Variedades Tóricas} \\
 & & \cup & & \\
 & & \begin{array}{c} \textit{Variedades Tóricas} \\ \textit{Afines} \end{array} & &
\end{array}
$$

Notemos que todas estas son contenciones propias, por los ejemplos 3.4 y 3.8.

Parte II

Algunas Aplicaciones

Capítulo 4

Algunas Consecuencias de Prescindir de la Normalidad

En este capítulo haremos una comparación entre las variedades tóricas afines sin la condición de normalidad y las normales. Veremos que algunos resultados conocidos de variedades tóricas normales no se cumplen para el caso no normal.

4.1. Intersección Completa

En esta sección hablaremos sobre intersección completa en el caso de variedades tóricas.

Definición 4.1. Sea $V \subset \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica afín de dimensión r. Decimos que V es intersección completa si existe $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, con $k = n - r$, tales que $\mathbb{I}(V) = (f_1, \ldots, f_k)$.

Existen criterios en dimensiones 1 y 2 que clasifican a las variedades tóricas normales que son intersección completa. Veremos a continuación que estos criterios fallan cuando no se tiene la condición de normalidad.

4.1.1. Dimensión 1

El caso de variedades tóricas normales de dimensión 1 es bastante limitado ya que, salvo isomorfismo, solo existen dos, que son $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^*$ y estas son intersección completa. Sin la condición de normalidad existe una gama más amplia de curvas tóricas. En general las curvas tóricas no son intersección completa, aunque sí existen algunas que lo son, por ejemplo las curvas tóricas planas singulares. En la siguiente proposición estudiamos otra familia de curvas tóricas que son intersección completa.

Proposición 4.2. *Sean* $a, b, c \in \mathbb{N}$ *y sea* $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(a, b, c) \subset \mathbb{Z}$ *tal que* $\mathbb{Z}\Gamma = \mathbb{Z}$. *Supongamos que* $\{a, b, c\}$ *es un conjunto generador minimal de* Γ. *Sean* $e = \mathrm{mcd}(a, b)$, $f = \mathrm{mcd}(b, c)$, $g = \mathrm{mcd}(a, c)$ *y* $h = \mathrm{mcd}(a/e, c/f)$ *y supongamos que* $\frac{bc}{efh}|\frac{c}{g}$. *Entonces* T^{Γ} *es intersección completa.*

Demostración. Como $\frac{bc}{efh}|\frac{c}{g}$, se tiene que $\frac{ba}{efh}|\frac{a}{g}$, de lo que se sigue que

$$\frac{c}{g} = \frac{bc}{efh}\lambda, \qquad \frac{a}{g} = \frac{ab}{efh}\lambda. \tag{4.1}$$

Consideremos $I = \langle x^{\frac{b}{e}} - y^{\frac{a}{e}}, y^{\frac{c}{f}} - z^{\frac{b}{f}} \rangle$. Afirmamos que $I_{\Gamma} = I$. Como $(\frac{b}{e}, -\frac{a}{e}, 0)$ y $(0, \frac{c}{f}, -\frac{b}{f})$ son relaciones entre a, b y c, por el lema 1.22, se tiene que $I \subset I_{\Gamma}$.

Ahora, sabemos que I_{Γ} esta generado por binomios, los cuales a su vez están dados por las soluciones enteras a la ecuación $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. La solución general a esta ecuación es:

$$u_1 = m\frac{b}{e} - l\frac{c}{g},$$

$$u_2 = k\frac{c}{f} - m\frac{a}{e},$$

$$u_3 = l\frac{a}{g} - k\frac{b}{f},$$

donde $m, l, k \in \mathbb{Z}$ (ver [Coh], sección 6,2). Entonces solo hace falta ver que todo binomio inducido por esta ecuación diofántica pertenece a I. Supondremos siempre que $u_1 \geq 0$, ya que en caso contrario solo hace falta multiplicar la ecuación por -1.

Entonces tenemos los siguientes casos:

I) $u_1 = 0$.

II) $u_1 \neq 0$, $u_2 \leq 0$ y $u_3 \leq 0$.

II) $u_1 \neq 0$, $u_2 \leq 0$ y $u_3 \geq 0$.

IV) $u_1 \neq 0$, $u_2 \geq 0$ y $u_3 \leq 0$.

Caso I. Supongamos que $u_1 = 0$. Sin perdida de generalidad supongamos que $u_2 > 0$ y $u_3 < 0$. Entonces la ecuación $bu_2 = -cu_3$ da lugar al binomio $y^{u_2} - z^{-u_3} \in I_{\Gamma}$ y tenemos que ver que este binomio pertenece a I. Por la ecuación (4.1) y como $u_3 < 0$, obtenemos que

$$0 < -u_3 = k\frac{b}{f} - l\frac{a}{g} = k\frac{b}{f} - l\frac{ab}{efh}\lambda = \frac{b}{f}(k - l\frac{a}{eh}\lambda).$$

Además, dado que $h|a/e$, se sigue que $k-l\frac{a}{eh}\lambda\in\mathbb{N}$. Ahora, como $y^{\frac{b}{f}}-z^{\frac{c}{f}}\in I$ y como $k-l\frac{a}{eh}\lambda\in\mathbb{N}$, se obtiene que:

$$y^{\frac{c}{f}(k-l\frac{a}{eh}\lambda)}-z^{\frac{b}{f}(k-l\frac{a}{eh}\lambda)}=y^{k\frac{c}{f}-l\frac{ac}{efh}\lambda}-z^{k\frac{b}{f}-l\frac{ab}{efh}\lambda}\in I.$$

Como $u_1=0$, se tiene que $m\frac{b}{e}=l\frac{c}{g}$ y por la ecuación (4.1), se sigue que

$$m\frac{a}{e}=l\frac{ac}{efh}\lambda.$$

Obteniendo así que:

$$y^{k\frac{c}{f}-l\frac{ac}{efh}\lambda}-z^{k\frac{b}{f}-l\frac{ab}{efh}\lambda}=y^{k\frac{c}{f}-m\frac{a}{e}}-z^{k\frac{b}{f}-l\frac{a}{g}}.$$

Concluimos que $y^{u_2}-z^{-u_3}\in I$.

A partir de aquí podemos suponer $u_1>0$. Observemos que por la ecuación (4.1) se tiene que

$$m\frac{b}{e}-l\frac{c}{g}=m\frac{b}{e}-l\frac{bc}{efh}\lambda=\frac{b}{e}(m-l\frac{c}{fh}\lambda). \tag{4.2}$$

Como $h|c/f$ y $l,\lambda\in\mathbb{N}$, se tiene que $l\frac{c}{fh}\lambda\in\mathbb{N}$ y por lo tanto $m-l\frac{c}{fh}\lambda\in\mathbb{Z}$, como estamos en el supuesto de que $u_1>0$, $m-l\frac{c}{fh}\lambda\in\mathbb{N}$.

Caso II. Supongamos que $u_2\leq 0$ y $u_3\leq 0$. Entonces la ecuación $au_1=-bu_2-cu_3$ da lugar al binomio $x^{u_1}-y^{-u_2}z^{-u_3}\in I_\Gamma$ y tenemos que ver que este binomio pertenece a I. Dado que $x^{\frac{b}{e}}-y^{\frac{a}{e}}\in I$ y como $m-l\frac{c}{fh}\lambda\in\mathbb{N}$:

$$x^{\frac{b}{e}(m-l\frac{c}{fh}\lambda)}-y^{\frac{a}{e}(m-l\frac{c}{fh}\lambda)}=x^{\frac{b}{e}(m-l\frac{c}{fh}\lambda)}-y^{m\frac{a}{e}-k\frac{c}{f}+k\frac{c}{f}-l\frac{ac}{efh}\lambda}\in I,$$

donde todos los sumando están en $\mathbb{N}$ por las condiciones de la proposición. Como $u_2,u_3\leq 0$, se tiene que $0\leq -u_2=m\frac{a}{e}-k\frac{c}{f}$ y $0\leq -u_3=k\frac{b}{f}-l\frac{a}{g}=k\frac{b}{f}-l\frac{ab}{efh}\lambda$. Debido a que $y^{\frac{c}{f}}-z^{\frac{b}{f}}\in I$ y a las desigualdades anteriores se tiene que

$$x^{\frac{b}{e}(m-l\frac{c}{fh}\lambda)}-y^{m\frac{a}{e}-k\frac{c}{f}+k\frac{c}{f}-l\frac{ac}{efh}\lambda}\equiv x^{\frac{b}{e}(m-l\frac{c}{fh}\lambda)}-y^{m\frac{a}{e}-k\frac{c}{f}}z^{k\frac{b}{f}-l\frac{ab}{efh}\lambda}\quad \text{mód } .I$$

y por la ecuación (4.2) se sigue que

$$x^{\frac{b}{e}(m-l\frac{c}{fh}\lambda)}-y^{m\frac{a}{e}-k\frac{c}{f}}z^{k\frac{b}{f}-l\frac{ab}{efh}\lambda}=x^{m\frac{b}{e}-l\frac{c}{g}}-y^{m\frac{a}{e}-k\frac{c}{f}}z^{k\frac{b}{f}-l\frac{a}{g}}=x^{u_1}-y^{-u_2}z^{-u_3}.$$

Esto demuestra que $x^{u_1}-y^{-u_2}z^{-u_3}\in I$.

El caso III y el caso IV, se demuestran de manera análoga al caso I y II. Como $\mathbb{Z}\Gamma=\mathbb{Z}$, se tiene que $T^\Gamma\subset\mathbb{C}^3$ es de dimensión 1 y como I_Γ esta generado por dos elementos, se tiene entonces que T^Γ es intersección completa. $\square$

Ejemplo 4.3. Consideremos $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(4,6,9)$. Como $\frac{6\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 1}|\frac{9}{1}$, por el resultado anterior tenemos que T^Γ es intersección completa y además

$$T^\Gamma = V(x^3 - y^2, y^3 - z^2).$$

Estas condiciones suficientes fueron construidas en este trabajo. Pero el problema de caracterizar a las curvas tóricas dadas por tres generadores que son intersección completa fue resuelto en la tesis doctoral de J. Herzog. Para enunciar su resultado necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.4. Sea Γ un semigrupo tal que $\mathbb{Z}\Gamma = \mathbb{Z}$. Sea $M = \Gamma\backslash\{0\}$ y $M^- = \{z \in \mathbb{Z}|\ z + M \subset \Gamma\}$. Decimos que Γ es simétrico si $M^- = \{m\} \cup \Gamma$, donde m es el mayor entero tal que $m \notin \Gamma$.

Teorema 4.5. *Sea $\Gamma \subset \mathbb{Z}$ generado mínimamente por tres elementos positivos. Entonces Γ es simétrico si y solo si T^Γ es intersección completa.*

Demostración. Ver [Her], teorema 3.10. □

Para el caso de $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tenemos casos particulares donde se preserva que es intersección completa. Mas aún, las condiciones de la proposición se pueden generalizar para una cantidad arbitraria de generadores, pero la falta de una solución general explícita a la ecuación diofántica

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

nos impide ver si estas condiciones son realmente suficientes para que sea intersección completa.

Ejemplo 4.6. Consideremos $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(210, 1155, 5005, 17017, 46189)$. Implementando el algoritmo (4.5) de [Stu] en SINGULAR, obtenemos que

$$I_\Gamma = \langle v^{11} - w^2, w^{13} - x^3, x^{17} - y^5, y^{19} - z^7\rangle.$$

Como $T^\Gamma \subset \mathbb{C}^5$, vemos que T^Γ es intersección completa.

4.1.2. Dimensión 2

En el caso de superficies tóricas normales, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.7. *Una superficie tórica normal es intersección completa si y solo si es hipersuperficie.*

Demostración. Ver [Ri1, Ri2]. □

Este resultado no es necesariamente cierto si no se pide la condición de normalidad. A continuación construiremos dos familias de ejemplos de superficies tóricas no normales que son intersección completa, pero no son hipersuperficies.

Ejemplo 4.8. Por lo visto en la sub-sección anterior tenemos la familia de superficies que son producto de dos curvas que son intersección completa. Por ejemplo:

$$\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}((4,0),(6,0),(9,0),(0,210),(0,1155),(0,5005),(0,17017),(0,46189)),$$

$$\Gamma_1 = \mathbb{Z}_{\geq 0}(4,6,9),$$

$$\Gamma_2 = \mathbb{Z}_{\geq 0}(210,1155,5005,17017,46189).$$

De donde se obtiene que

$$T^{\Gamma} = T^{\Gamma_1} \times T^{\Gamma_2},$$

De esto obtenemos que la superficie tórica T^{Γ} es intersección completa y no es hipersuperficie.

Proposición 4.9. *Sea Γ generado por elementos de la forma $\{(l,0),(k,m),(0,m),(0,n)\}$, con $l \neq 1$, $\mathrm{mcd}(l,k)=1$, $\mathrm{mcd}(m,n)=1$ y $m > n$. Entonces T^{Γ} es intersección completa y no es hipersuperficie.*

Demostración. Por el lema 1.22, sabemos que el ideal tórico I_{Γ} esta generado por las relaciones entre los elementos del semigrupo. En este caso dichas relaciones provienen del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} lu_1 + ku_2 &= 0, \\ mu_2 + mu_3 + nu_4 &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por [Coh], la solución general para ecuaciones diofánticas lineales es:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 k, \\ u_2 &= -\alpha_1 l = \alpha_2 - \alpha_3 n, \\ u_3 &= \alpha_4 n - \alpha_2, \\ u_4 &= \alpha_3 m - \alpha_4 m, \end{aligned}$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{Z}$. Sea $I = (z^n - w^m, x^k z^l - y^l)$. Vamos a demostrar que $I = I_{\Gamma}$. Dado que $(0,0,n,-m)$ y $(k,-l,l,0)$ son solución a la ecuación (4.3), se tiene que $I \subset I_{\Gamma}$.

Ahora veamos que $I_{\Gamma} \subset I$. Procederemos de manera similar a la proposición 4.2. Podemos suponer que $u_1 \geq 0$, ya que de caso contrario, solo tenemos que multiplicar las ecuaciones por -1. En particular, $u_2 \leq 0$. A partir de aquí consideraremos los casos dados por los signos de u_3 y u_4.

Con lo anterior tenemos los siguientes casos:

I) $u_1 = 0 = u_2$.

II) $u_1 > 0$, $u_3 \geq 0$ y $u_4 \geq 0$.

III) $u_1 > 0$, $u_3 \geq 0$ y $u_4 \leq 0$.

IV) $u_1 > 0$, $u_3 \leq 0$ y $u_4 \geq 0$.

V) $u_1 > 0$, $u_3 \leq 0$ y $u_4 \leq 0$.

Caso I. Supongamos que $u_1 = 0$, lo que implica que $u_2 = 0$. Se sigue que $u_3 \neq 0$ y $u_4 \neq 0$. Sin perdida de generalidad supongamos que $u_3 > 0$ y $u_4 < 0$, esto da lugar al binomio $z^{u_3} - w^{-u_4} \in I_\Gamma$. Veamos que este binomio pertenece a I. Como $0 < -u_4 = m(\alpha_4 - \alpha_3)$, entonces $\alpha_4 - \alpha_3 \in \mathbb{N}$. Tenemos que $z^n - w^m \in I$ y como $\alpha_4 - \alpha_3 \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$z^{n(\alpha_4-\alpha_3)} - w^{m(\alpha_4-\alpha_3)} = z^{\alpha_4 n - \alpha_3 n} - w^{\alpha_4 m - \alpha_3 m} \in I.$$

Ahora, como $u_2 = 0$, se tiene que $\alpha_3 n = \alpha_2$, por lo que

$$z^{\alpha_4 n - \alpha_2} - w^{\alpha_4 m - \alpha_3 m} \in I.$$

Concluimos que $z^{u_3} - w^{-u_4} \in I$.

A partir de aquí podemos suponer que $u_1 \neq 0$, que a su vez implica que $u_2 \neq 0$.

Caso II. Supongamos que $u_3 \geq 0$ y $u_4 \geq 0$. Tenemos que demostrar que $x^{u_1} z^{u_3} w^{u_4} - y^{-u_2} \in I$. Tenemos que $x^k z^l - y^l = 0$ en $R = \mathbb{C}[x, y, z, w]/I$. Por la condición de que $u_1 > 0$ se sigue que

$$x^{\alpha_1 k} z^{\alpha_1 l} - y^{\alpha_1 l} = x^{\alpha_1 k} z^{\alpha_3 n - \alpha_4 n + \alpha_4 n - \alpha_2} - y^{\alpha_1 l} = 0 \quad en \quad R.$$

Como $z^n = w^m$ en R y dado que $u_3 = \alpha_4 n - \alpha_2 \geq 0$ y $u_4 = \alpha_3 m - \alpha_4 > 0$, obtenemos:

$$x^{\alpha_1 k} w^{\alpha_3 m - \alpha_4 m} z^{\alpha_4 n - \alpha_2} - y^{\alpha_1 l} = 0 \quad en \quad R,$$

de lo que se concluye que

$$x^{u_1} z^{u_3} w^{u_4} - y^{-u_2} = 0 \quad en \quad R.$$

Caso III y IV. Se procede de manera análoga al caso I y II.

Caso V. El caso $u_3, u_4 < 0$ no se puede dar, ya que el sistema

$$mu_2 + mu_3 + nu_4 = 0$$

no tendría solución, dado que $u_2 < 0$. Concluimos que $T^\Gamma \subset \mathbb{C}^4$ es intersección completa, pero no es hipersuperficie. □

Estas dos familias de intersecciones completas nos dan pie a pensar que no existe una clasificación general de intersecciones completas en superficies tóricas como en el caso normal.

4.2. Cohen-Macaulay

Una propiedad importante de las variedades tóricas normales es que son Cohen-Macaulay. En esta sección daremos ejemplos de variedades tóricas no normales que no son Cohen-Macaulay. Empezaremos dando un repaso de la definición de anillo Cohen-Macaulay así como de sus propiedades básicas (ver [Sha] o [JyP] para las pruebas).

Definición 4.10. Sea R un anillo conmutativo noetheriano y sea $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset R$. Decimos que $a_1, \ldots, a_n$ es una sucesión regular de R si:

(i) $R \neq (a_1, \ldots, a_n)R$.

(ii) Para todo $i = 1, \ldots, n$, el elemento a_i no es un divisor de cero en $R/(a_1, \ldots, a_{i-1})R$.

Proposición 4.11. *Sea R un anillo noetheriano. Entonces toda sucesión regular maximal de R tiene la misma longitud.*

Definición 4.12. Sea (R, m) un anillo conmutativo noetheriano local. Definimos la profundidad de R, la cual denotaremos por $\mathrm{depth}(R)$, como el máximo de las longitudes de las sucesiones regulares contenidas en m.

Teorema 4.13. *Sea (R, m) un anillo conmutativo noetheriano local. Entonces $\mathrm{depth}(R) \leq \dim(R)$.*

Definición 4.14. Sea (R, m) un anillo conmutativo noetheriano local. Decimos que R es un anillo Cohen Macaulay si

$$\mathrm{depth}(R) = \dim(R).$$

Definición 4.15. Sea R un anillo conmutativo noetheriano. Decimos que R es un anillo Cohen-Macaulay si R_{m} es Cohen-Macaulay, para todo ideal maximal m de R.

Proposición 4.16. *Sea (R, m) un anillo noetheriano local, sea $f \in R$ un elemento no divisor de cero. Entonces*

$$\mathrm{depth}(R) = \mathrm{depth}(R/(f)R) - 1.$$

El siguiente resultado nos muestra una propiedad muy importante de las variedades tóricas normales.

Teorema 4.17. *Sea M una retícula y sea $\check{\sigma}$ un cono poliédrico racional contenido en $M_{\mathbb{R}}$. Entonces $\mathbb{C}[t^{\check{\sigma}\cap M}]$ es un anillo Cohen-Macaulay.*

Demostración. Ver [Dan], teorema 3.4, página 106. □

El resultado anterior nos dice que la $\mathbb{C}$-álgebra de una variedad tórica normal es Cohen-Macaulay. Pero esto no es cierto, en general, para el caso no normal. Para ilustrar esto, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.18. Este ejemplo fue tomado de [JyP]. Consideremos Γ el semigrupo generado por

$$\{(1,0),(1,1),(0,2),(0,3)\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

Notemos que Γ no es saturado, es decir, T^Γ no es normal. Vamos a mostrar que $\mathbb{C}[t^\Gamma]$ no es Cohen-Macaulay. Implementando el algoritmo (4.5) de [Stu] en el programa SINGULAR encontramos que

$$I_\Gamma = (y^2 - zx^2, yz - ux, z^2x - uy, u^2 - z^3).$$

Entonces $\mathbb{C}[t^\Gamma] \simeq \mathbb{C}[x,y,z,u]/I_\Gamma$. Sea $R := (\mathbb{C}[x,y,z,u]/I_\Gamma)_{(x,y,z,u)}$.

Vamos a mostrar que $\operatorname{depth}(R) = 1$. Afirmamos que la clase de $x - z$ en R no es un divisor de cero. Veamos primero que $x - z \notin I_\Gamma$. Esto se sigue de que $\mathbf{V}(I_\Gamma) \not\subset \mathbf{V}(x-z)$, pues $(0,0,1,1) \in V(I_\Gamma)$ y $(0,0,1,1) \notin V(x-z)$. Esto implica que $x - z \neq 0$ en $\mathbb{C}[t^\Gamma]$. Ahora, como $\mathbb{C}[t^\Gamma]$ es dominio entero, se tiene que el homomorfismo natural entre un anillo y su localizado

$$\upsilon : \mathbb{C}[t^\Gamma] \to R$$

es inyectivo, por lo tanto $x - z \neq 0$ en R y como R es un dominio entero, se tiene que $x - z$ no es un divisor de cero en R. Sea

$$R_1 := (R/(x-z) \simeq \mathbb{C}[x,y,u]/(y^2 - x^3, x(y-u), x^3 - uy, u^2 - x^3))_{(x,y,u)}$$

y sea $I' := (y^2 - x^3, x(y-u), x^3 - uy, u^2 - x^3)$. Usando el programa SINGULAR obtenemos que la descomposición primaria de I' es

$$(y - u, x^3 - u^2) \cap (u, y^2, xy, x^3),$$

por lo que los primos asociados a I' son $P_1 = (y - u, x^3 - u^2)$ y $P_2 = (x,y,u)$. De lo anterior obtenemos que los divisores de cero de R_1 son el ideal (x,y,u), de lo que se infiere que todo elemento es divisor de cero, lo que implica que $\operatorname{depth}(R_1) = 0$.

Por la proposición 4.16, obtenemos que

$$\operatorname{depth}(\mathbb{C}[t^\Gamma]) = \operatorname{depth}(R_1) + 1 = 1.$$

Como $\dim(\mathbb{C}[t^\Gamma]) = 2$, concluimos que $\mathbb{C}[t^\Gamma]$ no es un anillo Cohen-Macaulay.

Observación 4.19. Este ejemplo es también un ejemplo de una superficie no normal con singularidad aislada. Esto se puede verificar a partir de los polinomios que la definen y el criterio jacobiano.

El ejemplo anterior muestra que hay superficies tóricas no normales que no son Cohen-Macaulay. Podemos usar este ejemplo para construir una variedad tórica de cualquier dimensión que no sea Cohen-Macaulay por medio del semigrupo

$$\Gamma_n = \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0,\dots,0),(1,1,0,\dots,0),(0,2,0\dots,0),(0,3,0,\dots,0),e_3,\dots,e_n) \subset \mathbb{Z}^n.$$

Capítulo 5

Modificación de Nash de Variedades Tóricas

En este capítulo nos centraremos en algunos aspectos positivos de prescindir de la normalidad en la definición de variedades tóricas. El principal objetivo es estudiar las explosiones monomiales en variedades tóricas afines y enseguida estudiar el caso particular de la modificación de Nash. En la primera sección veremos que las explosiones monomiales de estas variedades son variedades tóricas bien cubiertas, lo que muestra la naturalidad de esta definición.

5.1. Explosiones de Ideales Monomiales en Variedades Tóricas Afines

En esta sección definiremos la explosión de un ideal en una variedad y veremos que la explosión de un ideal monomial en una variedad tórica es una variedad tórica bien cubierta.

Definición 5.1. Sea X una variedad afín y sea $\{g_0, \ldots, g_s\} \subset \mathbb{C}[X]$. La explosión de X centrada en $I = (g_0, \ldots, g_s)$, denotada por $Bl_I(X)$, es la cerradura de Zariski de $\varphi(Y)$, donde $Y = X \backslash V(I)$ y $\varphi : Y \to X \times \mathbb{P}^s$ esta definido por $\varphi(x) = (x, [g_0(x) : \ldots : g_s(x)]) \in X \times \mathbb{P}^s$.

Resumimos en el siguiente lema las propiedades básicas de la explosión de ideales que necesitaremos (ver [Hts] y [Hau]).

Lema 5.2. *Sea X una variedad algebraica, sea R su anillo de funciones regulares y sea $I = (f_1, \ldots, f_s)$ un ideal de R. Entonces se tienen los siguientes resultados.*

i) Las cartas afines de la explosión de X centrada en I están dada por las inclusiones de anillos

$$R \hookrightarrow R_j := R[\frac{f_1}{f_j}, \ldots, \frac{f_s}{f_j}],$$

donde los anillos R_j son subanillos de los anillos $R[\frac{1}{f_j}]$. Además, el pegado de las cartas afines esta dado por la igualdad $(R_j)_{\frac{f_i}{f_j}} = (R_i)_{\frac{f_j}{f_i}}$ en el anillo $R[\frac{1}{f_i}, \frac{1}{f_j}]$.

ii) Sea J un ideal principal. Entonces la explosión de X centrada en I es isomorfa a la explosión de X centrada en IJ.

Ahora, a partir de un ideal monomial I definido en $\mathbb{C}[t^\Gamma]$, para algún semigrupo Γ, vamos a construir una variedad tórica bien cubierta, después veremos que esta variedad que construimos coincide con la explosión de T^Γ centrada en I.

Consideremos un semigrupo Γ de una retícula M de rango d, tal que $\mathbb{Z}\Gamma = M$. Sea $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ y sea σ su cono dual. Asumamos que la dimensión de σ es d, lo que es equivalente a que $\check{\sigma}$ es fuertemente convexo.

Sea I un ideal en $\mathbb{C}[t^\Gamma]$ generado por los monomios $t^{m_1}, \ldots, t^{m_k}$, donde $\{m_1, \ldots, m_k\} \subset \Gamma$. Construimos el poliedro de Newton $N_\sigma(I)$, definido como la cerradura convexa en $M_\mathbb{R}$ del conjunto $\{m_i + \check{\sigma} | i = 1, \ldots, k\}$. Por conveniencia denotamos con la misma letra I el conjunto $\{m_1, \ldots, m_k\}$. El conjunto I determina la función:

$$\mathrm{ord}_I : \sigma \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \min_{m \in I} \langle v, m \rangle, \tag{5.1}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto entre $N_\mathbb{R}$ y $M_\mathbb{R}$. Para cada $m_i \in I$, definimos los conjuntos $\sigma_i = \{v \in \sigma | \mathrm{ord}_I(v) = \langle v, m_i \rangle\}$ y los semigrupos

$$\Gamma_i = \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_1 - m_i, \ldots, m_{i-1} - m_i, m_{i+1} - m_i, \ldots, m_k - m_i). \tag{5.2}$$

Teorema 5.3. *Con la notación anterior*

- $\check{\sigma}_i = \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_i$.
- $\Sigma(I) := \{\tau | \tau \leq \sigma_i$ *p.a.* $\sigma_i\}$ *es un abanico.*
- *Dado $\tau \leq \sigma_i$, definimos el semigrupo $\Gamma_{i,\tau} = \Gamma_i + M(\tau, \Gamma_i)$. Sea $\Gamma(I)$ esta familia de semigrupos. Entonces la terna $(N, \Sigma(I), \Gamma(I))$ satisface la definición 3.6.*

Demostración. La demostración de desglosara en la proposición 5.4, la proposición 5.6 y la proposición 5.7. $\square$

Proposición 5.4. $\sigma_i = (\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_i)^\vee$.

Demostración. Veamos primero que $\sigma_i \subset (\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_i)^\vee$. Sea $v \in \sigma_i$ y $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_i$. De la definición de Γ_i, tenemos que:

$$\gamma = \gamma' + a_1(m_1 - m_i) + \ldots + a_{i-1}(m_{i-1} - m_i) + a_{i+1}(m_{i+1} - m_i) + \ldots + a_k(m_k - m_i),$$

con $\gamma' \in \Gamma$ y $a_l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. De esto se sigue que:

$$\langle v, \gamma \rangle = \langle v, \gamma' \rangle + a_1(\langle v, m_1 \rangle - \langle v, m_i \rangle) + \ldots + a_k(\langle v, m_k \rangle - \langle v, m_i \rangle).$$

Como $v \in \sigma_i \subset \sigma$ y $\gamma' \in \check{\sigma}$, se tiene que $\langle v, \gamma' \rangle \geq 0$. Además, por la definición de σ_i tenemos que $\langle v, m_j \rangle - \langle v, m_i \rangle \geq 0$ para todo $m_j \in I$. Se infiere entonces que $\langle v, \gamma \rangle \geq 0$ y por lo tanto $v \in (\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_i)^\vee$.

Para ver que $(\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_i)^\vee \subset \sigma_i$ supongamos que existe $v \in (\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_i)^\vee$ tal que $\langle v, m_j \rangle < \langle v, m_i \rangle$, para algún $m_j \in I$. Pero $m_j - m_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_i$ y $\langle v, m_j - m_i \rangle < 0$, lo que es una contradicción a la elección de v. Concluimos que $(\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_i)^\vee = \sigma_i$. $\square$

Por la afirmación anterior se tiene que σ_i es un cono racional. A continuación daremos un resultado preliminar antes de ver que el conjunto $\Sigma := \{\tau | \tau \leq \sigma_i \;\; p.a. \;\; \sigma_i\}$ forma un abanico.

Lema 5.5. *La función* ord_I *es lineal en cada* σ_i*.*

Demostración. Sean $v_1, v_2 \in \sigma_i$, por definición $\mathrm{ord}_I(v_1) = \langle v_1, m_i \rangle$ y $\mathrm{ord}_I(v_2) = \langle v_2, m_i \rangle$. Por la proposición 5.4 se tiene que σ_i es un cono, por lo que $v_1 + v_2 \in \sigma_i$. De esto se sigue que:

$$\mathrm{ord}_I(v_1 + v_2) = \min_{m \in I} \langle v_1 + v_2, m_i \rangle = \min_{m \in I} \langle v_1, m_i \rangle + \min_{m \in I} \langle v_2, m_i \rangle = \mathrm{ord}_I(v_1) + \mathrm{ord}_I(v_2).$$

$\square$

Proposición 5.6. *El conjunto* $\Sigma(I) = \{\tau | \tau \leq \sigma_i, \;\; con \;\; i = 1, \ldots, k\}$ *forma un abanico.*

Demostración. Demostraremos que $\sigma_i \cap \sigma_j$ es cara de σ_i. Sean $v_1, v_2 \in \sigma_i$ tales que $v_1 + v_2 \in \sigma_i \cap \sigma_j$. Tenemos que demostrar que $v_1, v_2 \in \sigma_i \cap \sigma_j$. En particular se tiene que $v_1 + v_2 \in \sigma_j$ y por la definición de σ_j tenemos que

$$\mathrm{ord}_I(v_1 + v_2) = \langle v_1 + v_2, m_j \rangle = \langle v_1, m_j \rangle + \langle v_2, m_j \rangle.$$

Por otro lado, por el lema anterior la función ord_I es lineal en σ_i, de lo que obtenemos que:

$$\mathrm{ord}_I(v_1+v_2)=\mathrm{ord}_I(v_1)+\mathrm{ord}_I(v_2)=\min_{m\in I}\langle v_1,m\rangle+\min_{m\in I}\langle v_2,m\rangle,$$

obteniendo así la igualdad

$$\min_{m\in I}\langle v_1,m\rangle+\min_{m\in I}\langle v_2,m\rangle=\langle v_1,m_j\rangle+\langle v_2,m_j\rangle,$$

de donde se infiere que $\mathrm{ord}_I(v_l)=\langle v_l,m_j\rangle$, para $l=1,2$. De esto se sigue que $v_1,v_2\in\sigma_j$ y por lo tanto $v_1,v_2\in\sigma_i\cap\sigma_j$. Concluimos que $\Sigma(I)$ es un abanico. □

Con el resultado anterior obtenemos que $\Sigma(I)$ es un abanico. Ahora solo hace falta ver que la terna $(N,\Sigma(I),\Gamma(I))$ cumple la definición 3.6.

Proposición 5.7. *La terna $(N,\Sigma(I),\Gamma(I))$ cumple las condiciones de la definición 3.6.*

Demostración. Por construcción tenemos que $\Gamma\subset\Gamma_i\subset\Gamma_{i,\tau}$, de lo que se sigue que $\mathbb{Z}\Gamma_i=M$ y $\mathbb{Z}\Gamma_{i,\tau}=M$, para todo $\tau\leq\sigma_i$ y todo $i=1,\dots,k$. Por la proposición 5.4 se tiene que $\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_i=\check{\sigma_i}$ y por el lema 2.16, $\check{\tau}=\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_{i,\tau}$. Esto demuestra que cumple el primer punto de la definición 3.6.

Para demostrar el segundo punto de la definición consideramos primero $\tau=\sigma_1\cap\sigma_2$ (se tomara σ_1,σ_2 por simplicidad de la notación, pero es análogo para el caso σ_i,σ_j), y tenemos que ver que $\Gamma_{1,\tau}=\Gamma_{2,\tau}$.

Sea $m:=m_2-m_1\in\Gamma_1$. Veamos que $m\in\mathrm{int}(\check{\sigma_1}\cap\tau^\perp)$. Sea $\gamma\in m^\perp\cap\sigma_1$. Entonces $\langle\gamma,m\rangle=0$ y $\mathrm{ord}_I(\gamma)=\langle\gamma,m_1\rangle$. De esto se sigue que

$$\langle\gamma,m_2\rangle=\langle\gamma,m_1\rangle=\mathrm{ord}_I(\gamma).$$

Por la definición de σ_2, se tiene que $\gamma\in\sigma_2$. Esto prueba que $m^\perp\cap\sigma_1\subset\sigma_1\cap\sigma_2=\tau$. Consideremos ahora $\gamma\in\sigma_1\cap\sigma_2$. Por definición

$$\langle\gamma,m_2\rangle=\langle\gamma,m_1\rangle=\mathrm{ord}_I(\gamma)$$

de lo que se sigue que $\langle\gamma,m\rangle=0$. Concluimos que $\sigma_1\cap\sigma_2\subset m^\perp\cap\sigma_1$ y por lo tanto $\sigma_1\cap\sigma_2=m^\perp\cap\sigma_1$. Por el lema A.12 tenemos que $m\in\mathrm{int}(\check{\sigma_1}\cap\tau^\perp)$. De manera similar se puede probar que $-m\in\mathrm{int}(\check{\sigma_2}\cap\tau^\perp)$.

Por el lema 2.17 *ii*) tenemos que $\Gamma_{1,\tau} = \Gamma_1 + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m)$ y $\Gamma_{2,\tau} = \Gamma_2 + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m)$. De esto se obtienen las igualdades:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,\tau} &= \Gamma_1 + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m) \\
&= \Gamma + \sum_{j=3}^{k} \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_j - m_1) + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_2 - m_1) + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_1 - m_2) \\
&= \Gamma + \mathbb{Z}(m_2 - m_1) + \sum_{j=3}^{k} \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_j - m_1) \\
&= \Gamma + \mathbb{Z}(m_2 - m_1) + \sum_{j=3}^{k} \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_j - m_1 + m_2 - m_2) \qquad (5.3) \\
&= \Gamma + \mathbb{Z}(m_2 - m_1) + \sum_{j=3}^{k} \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_j - m_2) \\
&= \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_2 - m_1) + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_1 - m_2) + \sum_{j=3}^{k} \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_j - m_2) \\
&= \Gamma_{2,\tau}.
\end{aligned}$$

Ahora, si tenemos que $\tau \leq \sigma_i \cap \sigma_j$, por lo anterior tenemos que $\Gamma_{i,\sigma_i \cap \sigma_j} = \Gamma_{j,\sigma_i \cap \sigma_j}$ además por el lema 2.17 inciso *iii*) tenemos que $\Gamma_{i,\tau} = \Gamma_{i,\sigma_i \cap \sigma_j} + M(\tau, \Gamma_{i,\sigma_i \cap \sigma_j})$ y $\Gamma_{j,\tau} = \Gamma_{j,\sigma_i \cap \sigma_j} + M(\tau, \Gamma_{j,\sigma_i \cap \sigma_j})$. De esto obtenemos que $\Gamma_{i,\tau} = \Gamma_{j,\tau}$. Lo que prueba que la terna $(N, \Sigma(I), \Gamma(I))$ cumple el segundo inciso de la definición 3.6.

□

Con el resultado anterior podemos definir la variedad tórica bien cubierta $T^{\Gamma(I)}_{\Sigma(I)}$. Veamos ahora que $T^{\Gamma(I)}_{\Sigma(I)}$ coincide con la explosión de T^{Γ} centrada en I.

Corolario 5.8. *La variedad tórica bien cubierta $T^{\Gamma(I)}_{\Sigma(I)}$ es isomorfa a $Bl_I(T^{\Gamma})$.*

Demostración. Se sigue del lema 5.2 *ii*), considerando $R = \mathbb{C}[t^{\Gamma}]$ y tomando en cuenta que $\Gamma_i = \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_1 - m_i, \ldots, m_{i-1} - m_i, m_{i+1} - m_i, \ldots, m_k - m_i)$, implica que

$$\mathbb{C}[t^{\Gamma_i}] = \mathbb{C}[t^{\Gamma}][\frac{t^{m_1}}{t^{m_i}}, \ldots, \frac{t^{m_k}}{t^{m_i}}].$$

□

Este resultado nos da una manera combinatoria de entender las explosiones de ideales monomiales. En las siguientes secciones veremos algunas consecuencias de esta descripción.

Nuestro siguiente objetivo es mejorar la descripción de $Bl_I(T^\Gamma)$. Por definición, $T_{\Sigma(I)}^{\Gamma(I)}$ está cubierto por los abiertos afines T^{Γ_i}. Enseguida mostraremos que algunos de estos abiertos son redundantes.

Reordenando el conjunto I de ser necesario, supongamos que $I' = \{m_1, \ldots, m_s\}$ es el conjunto de los vértices de $N_\sigma(I)$. Primero vamos a mostrar que $\sigma_l \subset \bigcup_{i=1}^s \sigma_i$ si $s < l \leq k$.

Nota 5.9. $N_\sigma(I)$ es la cerradura convexa del conjunto $\{m_i + \check{\sigma} | i = 1, \ldots, s\}$.

Proposición 5.10. *Sea $m_l \in I$ tal que $s < l \leq k$. Entonces tenemos que:*

$$\langle v, m_l \rangle \geq \min_{m \in I'} \langle v, m \rangle.$$

Demostración. Sea $m_l \in I$, con $s < l \leq k$. Como $N_\sigma(I)$ es la cerradura convexa de $\{m_i + \check{\sigma}\}_{i=1}^s$, se tiene que

$$m_l = \sum_{i=1}^{s} \delta_i (m_i + \gamma_i),$$

con $\gamma_i \in \check{\sigma}$, $\delta_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^s \delta_i = 1$. Sea $v \in \sigma$, por la linealidad de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, obtenemos que:

$$\langle v, m_l \rangle = \sum_{i=1}^{s} \delta_i \langle v, m_i \rangle + \sum_{i=1}^{s} \delta_i \langle v, \gamma_i \rangle.$$

Ya que $v \in \sigma$ y $\gamma_i \in \check{\sigma}$, $\langle v, \gamma_i \rangle \geq 0$, de lo que se sigue que:

$$\langle v, m_l \rangle \geq \sum_{i=1}^{s} \delta_i \langle v, m_i \rangle.$$

Sea $m_j \in I'$ tal que $\langle v, m_j \rangle = \min_{m \in I'} \langle v, m \rangle$. De esto obtenemos que:

$$\langle v, m_l \rangle \geq \sum_{i=1}^{s} \delta_i \langle v, m_i \rangle \geq \sum_{i=1}^{s} \delta_i \langle v, m_j \rangle = \langle v, m_j \rangle \sum_{i=1}^{s} \delta_i = \langle v, m_j \rangle.$$

□

De la proposición anterior podemos ver que $\sigma_l \subset \bigcup_{i=1}^s \sigma_i$, para $s < l \leq k$. Además, de la definición de los σ_i se sigue que:

$$\sigma = \bigcup_{i=1}^{s} \sigma_i,$$

es decir, los conos σ_i forman una partición de σ, con $i = 1, \ldots, s$.

Lema 5.11. *Si m_i no es un vértice de $N_\sigma(I)$ entonces existe un vértice m_j tal que $m_i - m_j \in \Gamma_i$.*

Demostración. Como $\sigma_i \subset \sigma = \bigcup_{l=1}^{s} \sigma_l$, existe σ_j tal que $\mathrm{int}(\sigma_i) \cap \sigma_j \neq \emptyset$ y como $\sigma_i \cap \sigma_j$ es cara de σ_i se tiene que $\sigma_i \cap \sigma_j = \sigma_i$ y por lo tanto $\sigma_i \subset \sigma_j$. Por dualidad se tiene que $\check{\sigma_j} \subset \check{\sigma_i}$.

Por la proposición 5.4, se tiene que $m_i - m_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_j = \check{\sigma_j}$ y por lo anterior $m_i - m_j \in \check{\sigma_i}$. Por la proposición A.8, la cara mínima de $\check{\sigma_i}$ es el subespacio vectorial mas grande contenido en $\check{\sigma_i}$ y como $m_j - m_i, m_i - m_j \in \check{\sigma_i}$ se tiene que $m_j - m_i$ esta en la cara mínima de $\check{\sigma_i}$. Por el lema 2.17 *i*) sabemos que la cara mínima de Γ_i es una retícula y como $m_j - m_i \in \Gamma_i$ se tiene que $m_i - m_j \in \Gamma_i$. □

Proposición 5.12. *Sea Γ_i como en la ecuación (5.2) para $i > s$, entonces existe $j \leq s$ y $\tau \leq \sigma_i$ tales que $\Gamma_i = \Gamma_{j,\tau}$.*

Demostración. Dado que m_i no es vértice de $N_\sigma(I)$ y por el lema anterior, tenemos que existe $j \leq s$ tal que $m_i - m_j \in \Gamma_i$.

Por la proposición A.6 y como $m_i - m_j \in \Gamma_j$, existe $\tau \leq \sigma_j$ tal que $m_i - m_j \in \mathrm{int}(\Gamma_j \cap \tau^\perp)$ y por lema 2.17 *ii*) obtenemos que $\Gamma_{j,\tau} = \Gamma_j + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_j - m_i)$.

Procediendo de manera similar a los cálculos de la ecuación (5.3) obtenemos que $\Gamma_i = \Gamma_{j,\tau}$. □

Observación 5.13. Por el lema 2.20 y la proposición anterior, podemos ver a T^{Γ_i}, con $i > s$, como un abierto afín de T^{Γ_j} para algún $j \leq s$. Por lo que obtenemos que

$$T^{\Gamma(I)}_{\Sigma(I)} = \bigsqcup_{i=1}^{s} T^{\Gamma_i} / \sim .$$

5.2. Modificación de Nash de Variedades Tóricas Afines

Empezando en esta sección y hasta el final del capítulo, estudiaremos la llamada modificación de Nash de una variedad algebraica en el caso tórico. Incluimos este concepto en este momento pues, como veremos, es un ejemplo de la explosión de un ideal monomial. Esta modificación se ha utilizado en diversos problemas en geometría algebraica: resolución de singularidades, estudios de equisingularidad, obstrucciones de campos vectoriales, etc.

En este capítulo estamos interesados en estudiar dos problemas básicos relacionados con esta modificación: para qué valores $n \in \mathbb{N}$ la modificación de Nash de la superficie A_n preserva la normalidad y dar una comparación entre el ideal que define a la modificación de Nash y el lugar singular de una superficie tórica. Exploramos ambas preguntas con las herramientas desarrolladas a lo largo de la tesis. Los resultados de nuestro estudio aparecen en las secciones 5.3 y 5.4.

5.2.1. Modificación de Nash

Empezamos esta sección recordando la definición de un punto singular de una variedad afín.

Definición 5.14. Sea $X = \mathbf{V}(I) \subset \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica afín de dimensión d, $\mathbb{I}(X) = (f_1, \ldots, f_s)$ y sea $x \in X$. Decimos que x es singular si $\mathrm{rank}(\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_s))|_x < n - d$, donde $\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_s)$ denota a la matriz $(\partial f_i/\partial x_j)_{i,j}$. Denotamos por $\mathrm{Sing}(X)$ al conjunto de los puntos singulares de X.

Observación 5.15. Sean $\{m_1, \ldots, m_t\}$ los menores de $n - d \times n - d$ de la matriz $\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_s)$. Sabemos que $\mathrm{rank}(\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_s)|_x) < n - d$ si y solo si $m_i|_x = 0$ para todo $i = 1, \ldots, t$. Entonces $\mathrm{Sing}(X) = \mathbf{V}(m_1, \ldots, m_t) \cap X$.

Definición 5.16. Sea $X \subset \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica equidimensional de dimensión d. Definimos la modificación de Nash, denotada por (X^*, p) como el resultado del siguiente proceso. Sea $\eta : X \setminus \mathrm{Sing}(X) \to X \times G(d, n)$, dado por $x \mapsto (x, T_x X)$, donde $G(d, n)$ denota la grasmaniana de subespacios de dimensión d en $\mathbb{C}^n$ y $T_x X$ es el espacio tangente de X en el punto x. X^* es la cerradura de Zariski de $\eta(X \setminus \mathrm{Sing}(X))$ y $p : X^* \to X$ es la restricción de la proyección en la primera coordenada.

Enseguida enunciaremos las propiedades básicas de la modificación de Nash que utilizaremos en las siguientes secciones.

Teorema 5.17. *Sea $X \subset \mathbb{C}^n$ una variedad algebraica irreducible de dimensión d y (X^*, p) la modificación de Nash de X. Entonces:*

(1) $X \setminus \mathrm{Sing}(X) \cong X^* \setminus p^{-1}(\mathrm{Sing}(X))$. *En particular, p es un morfismo birracional.*

(2) Sea $\mathbb{I}(X) = (f_1, \ldots, f_s)$. Sea M cualquier submatriz de $\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_s)$ *formada por $n - d$ renglones tal que* $\mathrm{rank}(M) = n - d$. *Sea $\mathcal{J}$ el ideal generado por los menores $n - d \times n - d$ de M. Entonces (X^*, p) coincide con la explosión de X centrada en el ideal $\mathcal{J}$.*

Demostración. Ver [Nob]. □

Observación 5.18. Notemos que $\mathcal{J} \subset (m_1, \ldots, m_t)$, donde los m_i son todos los menores de tamaño $n-d \times n-d$ de la matriz $\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_s)$, lo que implica que $\mathrm{Sing}(X) \subset \mathbf{V}(\mathcal{J})$. En el caso de que X sea intersección completa, se tiene que el ideal $\mathcal{J}$ es el ideal de todos los menores de tamaño $n-d \times n-d$ de la matriz $\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_s)$ y por lo tanto $\mathrm{Sing}(X) = \mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap X$.

5.2.2. Modificación de Nash en el Caso Tórico

Empezaremos esta sección recordando la construcción de una variedad tórica asociada a un semigrupo $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$, tal que $\mathbb{Z}\Gamma = \mathbb{Z}^n$, como se hizo en la sección 1.2. Sea $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \subset \mathbb{Z}^d$ y consideramos el morfismo $\pi : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^d$, dado por $\pi(e_i) = \gamma_i$. Eso da lugar a la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^d \to 0,$$

donde $\mathcal{L} = \ker(\pi)$, que es una retícula de rango $c := r - d$. Por otro lado, el homomorfismo de semigrupos π da lugar al homomorfismo sobreyectivo de $\mathbb{C}$-álgebras

$$\bar{\phi} : \mathbb{C}[U_1, \ldots, U_r] \to \mathbb{C}[t^\Gamma],$$

de lo que se sigue que $\mathbb{C}[U_1, \ldots, U_r]/P \simeq \mathbb{C}[t^\Gamma]$, donde P es el ideal binomial primo $(\{U^{m^l} - U^{n^l}\}_{l \in L})$ (ver lema 1.22) y la variedad tórica asociada a Γ es $V(P)$.

Definición 5.19. Sea T^Γ una variedad tórica, definimos el ideal jacobiano logarítmico de T^Γ como el ideal generado por las clases de los monomios $U_{i_1} \cdots U_{i_d}$ en $\mathbb{C}[t^\Gamma]$, tales que $\det(\gamma_{i_1} \ldots \gamma_{i_d}) \neq 0$.

Veremos que la modificación de Nash de una variedad tórica X es isomorfa a la explosión de X centrada en el ideal jacobiano logarítmico, que es el resultado principal de esta sección. Empezamos dando un ejemplo que ilustre los dos resultados preliminares a la demostración.

Ejemplo 5.20. Sea $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0), (1,1), (1,2), (0,3), (0,4)) \subset \mathbb{Z}^2$. Implementando el algoritmo (4.5) de [Stu] en el programa SINGULAR, obtenemos que

$$\begin{aligned} I_\Gamma = (&x_4^4 - x_5^3, x_2x_5 - x_3x_4, x_1^2x_4 - x_2x_3, x_2x_4^3 - x_3x_5^2, x_2^2x_4^2 - x_3^2x_5, \\ &x_2^3x_4 - x_3^2, x_1x_5 - x_2x_4, x_1x_4^2 - x_3x_5, x_1x_3 - x_2^2, x_1x_2x_4 - x_3^2). \end{aligned}$$

Observamos que I_Γ esta generado por 10 elementos. Notemos que los vectores $(0,0,0,4,-3), (0,1,-1,-1,1), (2,-1,-1,1,0)$ obtenidos de los exponentes de los tres primeros generadores de I_Γ son linealmente independientes. Obtenemos la sucesión:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{N} \mathbb{Z}^5 \xrightarrow{M} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 0\,,$$

donde

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo directo muestra que:

- $\det(M_K) \neq 0$ si y solo si $\det(N_{K^c}) \neq 0$, donde K es un subconjunto de cardinalidad 2 del conjunto $\{1,2,3,4,5\}$, K^c es el complemento de K en $\{1,2,3,4,5\}$ y M_K, N_{K^c} son las submatrices de M y N, considerando los renglones dados por K y las columnas dadas por K^c, respectivamente.
- Sean $K \subset \{1,2,3,4,5\}$ y $L \subset \{1,\ldots,10\}$, ambos de cardinalidad 3. Además consideremos la matriz $J = (\partial f_i/\partial x_j)_{i,j}$, donde los f_i son los generadores de I_Γ. Denotemos por $J_{K,L}$ al menor de tamaño 3×3 de la matriz J correspondiente a K, L. Entonces $J_{K,L}$ módulo I_Γ es un monomio.

Estas dos observaciones serán demostradas en general en los siguientes lemas.

Notación 5.21. Dado el conjunto $\{1,\ldots,r\}$, denotamos por

$$\Lambda_c^r := \{K \subset \{1,\ldots,r\} |\ |K| = c\}.$$

Lema 5.22. *Usando la notación que acabamos de introducir. Sea J la matriz de derivadas parciales de $\{U^{m^l} - U^{n^l}\}_{l\in L}$. Consideremos $K \in \Lambda_c^r$ y $L' \in \Lambda_c^{|L|}$. Sea $J_{K,L'}$ el determinante de la submatriz J formada por los renglones L' y las columnas K. Entonces tenemos la siguiente congruencia:*

$$U_{k_1}\ldots U_{k_c} J_{K,L'} \equiv \prod_{l\in L'} U^{m^l} \det_{K,L'}((m-n)) \qquad \text{mód } P,$$

donde $(m-n)$ es la matriz de vectores $(m^l - n^l)_{l\in L}$ y $\det_{K,L'}$ el determinante correspondiente.

Demostración. Consideremos $m^l = (m^{l_1},\ldots,m^{l_r})$ y $n^l = (n^{l_1},\ldots,n^{l_r})$. Como $U^{m^l} \equiv U^{n^l}$ módulo P, se sigue que

$$\frac{\partial(U^{m^l} - U^{n^l})}{\partial U_j} = \frac{m^{l_j}U^{m^l} - n^{l_j}U^{n^l}}{U_j} \equiv \frac{(m^{l_j} - n^{l_j})U^{m^l}}{U_j} \qquad \text{mód } P.$$

De lo anterior tenemos que

$$\det_{K,L'}\left(\frac{\partial(U^{m^l}-U^{n^l})}{\partial U_j}\right) \equiv \det_{K,L'}\left(\frac{(m^{l_j}-n^{l_j})U^{m^l}}{U_j}\right) \qquad \text{mód } P.$$

De la igualdad de matrices

$$\left(\frac{(m^{l_j}-n^{l_j})U^{m^l}}{U_j}\right)_{l,j} = \begin{pmatrix} U^{m^{i_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U^{m^{i_c}} \end{pmatrix} \left(\frac{m^{l_j}-n^{l_j}}{U_j}\right)_{l,j},$$

obtenemos que

$$\det_{K,L'}\left(\frac{\partial(U^{m^l}-U^{n^l})}{\partial U_j}\right) \equiv \prod_{l\in L'} U^{m^l} \det_{K,L'}\left(\frac{m^{l_j}-n^{l_j}}{U_j}\right) \qquad \text{mód } P.$$

Multiplicando ambos lados de la congruencia por $\prod_{k\in K} U_k$ se tiene que:

$$\prod_{k\in K} U_k \det_{K,L'}\left(\frac{\partial(U^{m^l}-U^{n^l})}{\partial U_j}\right) \equiv \prod_{l\in L'} U^{m^l} \prod_{k\in K} U_k \det_{K,L'}\left(\frac{m^{l_j}-n^{l_j}}{U_j}\right) \qquad \text{mód } P.$$

Observemos que

$$\prod_{k\in K} U_k = \det \begin{pmatrix} U_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_{k_c} \end{pmatrix}.$$

Por propiedades básicas de matrices concluimos que

$$\prod_{k\in K} U_k J_{K,L'} \equiv \prod_{l\in L'} U^{m^l} \det_{K,L'}((m^l-n^l)) \qquad \text{mód } P.$$

□

Observación 5.23. Si $J_{K,L'} \neq 0$, entonces el cociente

$$\frac{\prod_{l\in L'} U^{m^l}}{U_{k_1}\dots U_{k_c}} \det_{K,L'}((m-n)) \in \mathbb{C}[t^\Gamma],$$

es de hecho un monomio. La prueba se sigue de simples argumentos inductivos y de la congruencia de $U^{m^l} \equiv U^{n^l}$ módulo P.

Lema 5.24. *Sea $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\gamma_1,\dots,\gamma_r) \subset \mathbb{Z}^d$ un semigrupo tal que $\mathbb{Z}\Gamma = \mathbb{Z}^d$ e $I_\Gamma = (\{U^{m^l}-U^{n^l}\}_{l\in L})$ el ideal tórico asociado a Γ. Entonces existe $L' \in \Lambda_{r-d}^{|L|}$ tal que*

$$\det_{K,L'}((m^l-n^l)) = 0 \Leftrightarrow \det_{K^c}(\gamma_1\dots\gamma_r) = 0,$$

para todo $K \in \Lambda_{r-d}^r$ y donde $K^c = \{1,\dots,r\}\backslash K$.

Demostración. Como T^Γ es de dimensión d, existen $K' \in \Lambda^r_{r-d}$ y $L' \in \Lambda^{|L|}_{r-d}$ tal que $J_{K',L'} \neq 0$. Sin perdida de generalidad supongamos que $L' = \{1, \dots, r-d\}$. Por la proposición 5.22, se tiene que

$$\prod_{k\in K} U_k J_{K,L'} \equiv \prod_{l\in L'} U^{m^l} \det_{K,L'}((m^l - n^l)) \qquad \text{mód } P,$$

para todo $K \in \Lambda^r_{r-d}$. Como $\det_{K',L'}((m^l - n^l)) \neq 0$, tiene que $\{m^l - n^l\}_{l\in L'}$ son linealmente independientes en $\mathbb{Z}^r$.

Recordemos que $c = r - d$ y sean

$$\gamma_j = (\gamma_{1,j}, \dots, \gamma_{d,j}) \in \mathbb{Z}^d,$$

$$m^i - n^i = a_i = (a_{1,i}, \dots, a_{r,i}) \in \mathbb{Z}^r,$$

para todo $i \in L'$ y $j = 1, \dots, r$. Por definición de I_Γ se tiene que $a_i \in \ker(M)$, donde

$$M : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^d$$

$$e_i \mapsto \gamma_i.$$

De lo anterior obtenemos la sucesión:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^c \xrightarrow{N} \mathbb{Z}^r \xrightarrow{M} \mathbb{Z}^d \longrightarrow 0,$$

donde

$$N = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,c} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,c} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{d,1} & \cdots & \gamma_{d,r} \end{pmatrix}.$$

Ahora, consideremos $K = \{d+1, \dots, r\} \in \Lambda^r_c$ y $K^c = \{1, 2, \dots, d\} \in \Lambda^r_d$ (usaremos estos conjuntos por simplicidad de notación, pero la prueba que sigue es análoga para $K \in \Lambda^r_c$), y supongamos que

$$\det \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{d,1} & \cdots & \gamma_{d,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que sus renglones son linealmente dependientes, por lo que existen $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} \\ \vdots \\ \gamma_{1,d} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_d \begin{pmatrix} \gamma_{d,1} \\ \vdots \\ \gamma_{d,d} \end{pmatrix} = 0,$$

con $\lambda_i \neq 0$ para algún $i = 1, \ldots, d$. Consideremos $\beta_j = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \gamma_{i,j}$, con $j = 1, \ldots, r$. Como $M : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^d$ es sobreyectiva, los renglones de M son linealmente independientes, por lo tanto existe $\beta_k \neq 0$, para algún $k \in \{d+1, \ldots, r\}$.

Ahora, tenemos que $Im(N) \subset \ker(M)$, por lo que se tiene que

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{d,1} & \cdots & \gamma_{d,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{r,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

de lo que se obtiene que

$$a_i \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{j,1} \\ \vdots \\ \gamma_{j,r} \end{pmatrix} = 0,$$

para todo $i = 1, \ldots, c$ y todo $j = 1, \ldots, d$. Se sigue que, para cada i:

$$\sum_{j=1}^{d} \lambda_j (a_i \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{j,1} \\ \vdots \\ \gamma_{j,r} \end{pmatrix}) = 0.$$

Esto es lo mismo que $\sum_{j=1}^{r} a_{j,i}\beta_j = 0$, para todo $i = 1, \ldots, c$, pero como $\beta_j = 0$ para $j = 1, \ldots, d$, se tiene que $\sum_{j=d+1}^{r} a_{j,i}\beta_j = 0$. De esto obtenemos que

$$\beta_{d+1} \begin{pmatrix} a_{d+1,1} \\ \vdots \\ a_{d+1,c} \end{pmatrix} + \beta_{d+2} \begin{pmatrix} a_{d+2,1} \\ \vdots \\ a_{d+2,c} \end{pmatrix} + \cdots + \beta_r \begin{pmatrix} a_{r,1} \\ \vdots \\ a_{r,c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

y como $\beta_k \neq 0$ para algún $k \in \{d+1, \ldots, r\}$, se tiene que los renglones de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{d+1,1} & \cdots & a_{d+1,c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,c} \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes. Por lo tanto

$$\det \begin{pmatrix} a_{d+1,1} & \cdots & a_{d+1,c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,c} \end{pmatrix} = 0.$$

Concluimos que

$$\det_{K^c}(\gamma_1 \ldots \gamma_d) = 0 \Rightarrow \det_{K,L'}((m^l - n^l)) = 0.$$

Para demostrar que

$$\det_{K,L'}((m^l - n^l)) = 0 \Rightarrow \det_{K^c}(\gamma_1 \dots \gamma_d) = 0$$

se procede de manera análoga, recordando que el conjunto de los vectores $\{a_1, \dots, a_c\}$ es linealmente independiente. Por lo tanto

$$\det_{K^c}(\gamma_1 \dots \gamma_r) = 0 \Leftrightarrow \det_{K,L'}((m^l - n^l)) = 0.$$

□

Teorema 5.25. *Sea X una variedad tórica afín. La modificación de Nash de X es isomorfa a la explosión de X centrada en el ideal jacobiano logarítmico.*

Demostración. Supongamos que $X \subset \mathbb{C}^r$ tiene dimensión d. Sea $P = (\{U^{m^l} - U^{n^l}\}_{l \in L})$ el ideal binomial primo tal que $X = V(P)$. Sea $f_i = U^{m^i} - U^{n^i}$, para $i \in L$.

Recordemos que $c = r - d$. Como X es de dimensión d, $J = (\partial f_i / \partial x_j)_{i,j}$ tiene rango c, por lo que existen $L' \in \Lambda_c^{|L|}$ y $K' \in \Lambda_c^r$ tales que $J_{K',L'} \neq 0$. Por el lema 5.22 se tiene que para todo $K \in \Lambda_c^r$, tenemos la congruencia:

$$\prod_{k \in K} U_k J_{K,L'} \equiv \prod_{l \in L'} U^{m^l} \det_{K,L'}((m^l - n^l)) \qquad \text{mód } P. \tag{5.4}$$

Por el teorema 5.17 (2), la explosión de Nash de X es isomorfa a la explosión de X centrada en el ideal $(\{J_{K,L'}\}_{K \in \Lambda_c^r})$. Este ideal es diferente de cero ya que $J_{K',L'} \neq 0$.

Por la congruencia (5.4), observemos que $J_{K,L'} = 0$ si y solo si $\det_{K,L'}((m^l - n^l) = 0$. Ahora, para todo $K \in \Lambda_c^r$, consideremos $\prod_{i \in K^c} U_i$. Multiplicando la congruencia por este monomio obtenemos:

$$\prod_{j=1}^{r} U_j J_{K,L'} \equiv \prod_{i \in K^c} U_i \prod_{l \in L'} U^{m^l} \det_{K,L'}((m^l - n^l)) \qquad \text{mód } P. \tag{5.5}$$

Por el lema 5.2 inciso *ii*) sabemos que multiplicar por un ideal principal nos da explosiones isomorfas, por lo tanto:

$$Bl_{(\{J_{K,L'}\}_{K \in \Lambda_c^r})}(X) = Bl_{(\{\prod_{j=1}^r U_j J_{K,L'}\}_{K \in \Lambda_c^r})}(X).$$

Por la congruencia (5.5) tenemos que

$$Bl_{(\{\prod_{j=1}^r U_j J_{K,L'}\}_{K \in \Lambda_c^r})}(X) = Bl_{(\{\prod_{i \in K^c} U_i \prod_{l \in L'} U^{m^l} \det_{K,L'}((m^l - n^l))\}_{K^c \in \Lambda_d^r})}(X).$$

Por último, aplicando nuevamente el lema 5.2 inciso ii) y el lema 5.24 obtenemos que

$$Bl_{(\{\prod_{i\in K^c} U_i \prod_{l\in L'} U^{m^l} \det_{K,L'}((m^l-n^l))\}_{K^c\in\Lambda_d^r})}(X) = Bl_{(\{\prod_{i\in K^c} U_i\}_{K^c\in\Lambda_d^r})}(X).$$

Concluimos que

$$X^* \simeq Bl_{(\{\prod_{i\in K^c} U_i\}_{K^c\in\Lambda_d^r})}(X).$$

□

5.3. Superficies A_n

En esta sección vamos a utilizar la descripción de la modificación de Nash de una variedad tórica dada en el teorema 5.25 para explorar la siguiente pregunta: ¿La modificación de Nash de una variedad normal es normal? Estudiaremos esta pregunta en el caso de las superficies A_n.

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos la superficie $A_n = \mathbf{V}(xz - y^{n+1}) \subset \mathbb{C}^3$. Es sabido que A_n es la superficie tórica normal obtenida a partir del semigrupo $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0),(1,1),(n,n+1)) \subset \mathbb{Z}^2$.

Sea A_n^* la modificación de Nash de A_n. Por el teorema 5.25, se tiene que $A_n^* \simeq Bl_I(A_n)$, donde $I = (xy, xz, yz)$. Por el corolario 5.8 se tiene que $Bl_I(A_n) \simeq T_{\Sigma(I)}^{\Gamma(I)}$, donde $T_{\Sigma(I)}^{\Gamma(I)} = \bigsqcup_{i=1}^3 T^{\Gamma_i}/\sim$, con

$$\Gamma_1 = \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_2 - m_1, m_3 - m_1),$$

$$\Gamma_2 = \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_1 - m_2, m_3 - m_2),$$

$$\Gamma_3 = \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_1 - m_3, m_2 - m_3),$$

y

$$m_1 = (1,0) + (1,1) = (2,1),$$
$$m_2 = (n,n+1) + (1,0) = (n+1,n+1),$$
$$m_3 = (n,n+1) + (1,1) = (n+1,n+2),$$

(ver teorema 5.7).

Notemos que

$$m_2 = \frac{1}{n+1}(m_1 + (n-1,0)) + \frac{n}{n+1}(m_3).$$

Como $m_1 + (n-1,0) \in m_1 + \check{\sigma}$, se tiene que m_2 no es vértice de $N_\sigma(I)$ (ver figura 5.1).

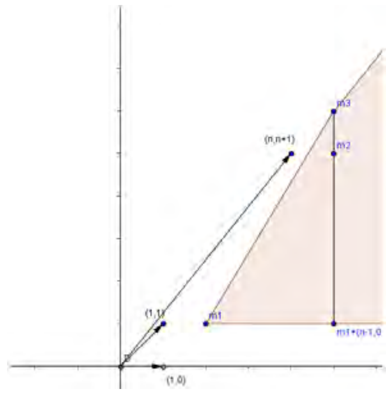

Figura 5.1: Poliedro de Newton

Por la observación 5.13, obtenemos que $T_{\Sigma(I)}^{\Gamma(I)} = T^{\Gamma_1} \bigsqcup T^{\Gamma_3} / \sim$, por lo que solo hay que ver que T^{Γ_1} y T^{Γ_3} son normales para ver que A_n^* es normal.

Antes de pasar al resultado principal haremos una observación que nos dará una forma de discernir si una superficie tórica es normal.

Observación 5.26. Sea $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) \subset \mathbb{Z}^2$ tal que $\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma$ es fuertemente convexo. Sean γ_i, γ_j tales que $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}(\gamma_i) + \mathbb{R}_{\geq 0}(\gamma_j)$. Además supongamos que γ_i y γ_j son minimales, es decir, si $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}(\gamma_i)$, con $\gamma \in \Gamma$, entonces $\gamma = \alpha\gamma_i$ con $\alpha > 1$. Definimos $K = \{\delta_1\gamma_i + \delta_2\gamma_j | 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 1\}$. Entonces $\mathbb{Z}^2 \cap K \subset \Gamma$ si y solo si Γ es saturado. Este hecho aparece en la demostración del lema de Gordan (ver lema A.10).

Teorema 5.27. *La modificación de Nash de la superficie tórica normal A_n es normal si y solo si $n = 1, 2$.*

Demostración. Por lo visto anteriormente, para mostrar que A_n^* es normal solo hace falta ver que Γ_1 y Γ_3 son saturados. Veamos primero los casos en los que A_n^* sí es normal.

Caso $n = 1$. Tenemos que $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0),(1,1),(1,2))$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_2 - m_1, m_3 - m_1) \\
&= \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0),(1,1),(1,2),(0,1),(0,2)) \\
&= \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0),(0,1)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $T^{\Gamma_1} \simeq \mathbb{C}^2$, que es una variedad normal. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 &= \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_1 - m_3, m_2 - m_3) \\
&= \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0),(1,1),(1,2),(0,-2),(0,-1)) \\
&= \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,2),(0,-1)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $T^{\Gamma_3} \simeq \mathbb{C}^2$, que es una variedad normal. Concluimos que A_1^* es normal.

Caso $n = 2$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_2 - m_1, m_3 - m_1)\\ &= \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0),(1,1),(2,3),(1,2),(1,3))\\ &= \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0),(1,1),(1,2),(1,3)).\end{aligned}$$

Tenemos que $K \cap \mathbb{Z}^2$ es nuestro conjunto generador (ver figura 5.2), por la observación 5.26, se tiene que $K \cap \mathbb{Z}^2 \subset \Gamma_1$ y por lo tanto Γ_1 es saturado, es decir, T^{Γ_1} es normal.

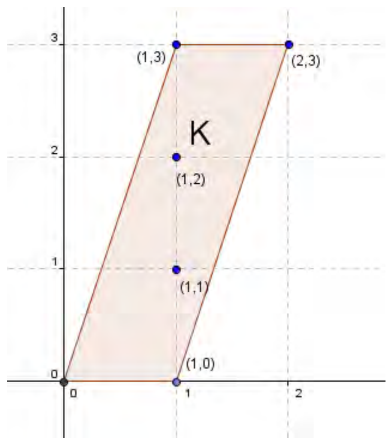

Figura 5.2

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_3 &= \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_1 - m_3, m_2 - m_3)\\ &= \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0),(1,1),(2,3),(-1,-3),(0,-1)).\end{aligned}$$

Tenemos que $K \cap \mathbb{Z}^2$ es nuestro conjunto generador (ver figura 5.3), por la observación 5.26, se tiene que $K \cap \mathbb{Z}^2 \subset \Gamma_1$ y por lo tanto Γ_1 es saturado, es decir, T^{Γ_3} es normal. Concluimos que A_2^* es normal.

Caso $n \geq 3$. En este caso vamos a demostrar que Γ_1 no es saturado. Esto implica que T^{Γ_1} no es normal y por lo tanto A_n^* tampoco. Tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_2 - m_1, m_3 - m_1)\\ &= \mathbb{Z}_{\geq 0}((1,0),(1,1),(n,n+1),(n-1,n),(n-1,n+1)).\end{aligned}$$

Veamos que este semigrupo no es saturado. Consideremos el punto $(n-2, n-1)$. Afirmamos que $(n-2, n-1) \in \check{\sigma}_1 \cap \mathbb{Z}^2$. En efecto, sea $c_1 = \frac{n-1}{n+1}$ y

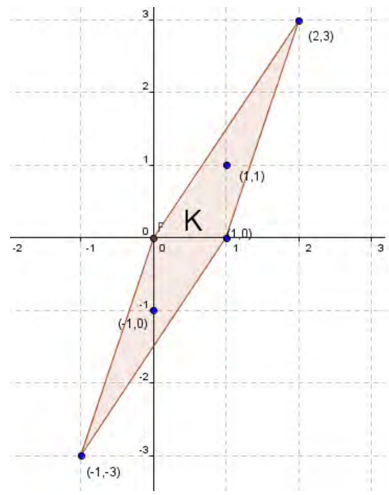

Figura 5.3

$c_2 = n - 2 - \frac{(n-1)^2}{n+1}$, entonces

$$(n-2, n-1) = c_1(n-1, n+1) + c_2(1,0).$$

Notemos que $c_2 \geq 0$ si y solo si $n \geq 3$.

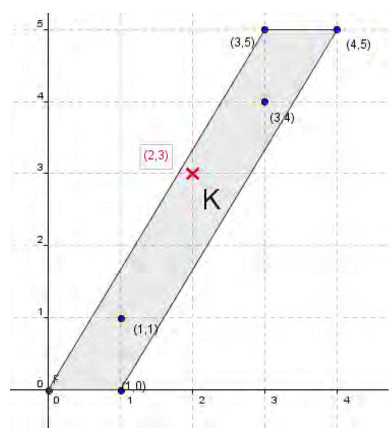

Figura 5.4: Caso n=4

Ahora tenemos que ver que $(n-2, n-1) \notin \Gamma_1$ (ver figura 5.4). Procedemos por contradicción. Supongamos que $(n-2, n-1) \in \Gamma_1$, entonces

$$(n-2, n-1) = a_1(1,0) + a_2(1,1) + a_3(n, n+1) + a_4(n-1, n) + a_5(n-1, n+1)$$

para $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, pero como $n - 1 < n, n + 1$, se sigue que $0 = a_3 = a_4 = a_5$, de donde obtenemos el sistema:

$$(n-2, n-1) = a_1(1,0) + a_2(1,1).$$

Por lo tanto $a_2 = n - 1$, pero esto implica que $a_1 = -1$, lo que es una contradicción al hecho de que $a_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Obtenemos que Γ_1 no es saturado y por lo tanto T^{Γ_1} no es normal. Concluimos que A_n^* no es normal para $n \geq 3$. $\square$

5.4. Modificación de Nash vs. Conjunto Singular

Sea $X = \mathbf{V}(I) \subset \mathbb{C}^n$ una variedad afín equidimensional. Como mencionamos en la sección 5.3, si $\mathcal{J}$ es un ideal cuya explosión define la modificación Nash de X, entonces $\mathrm{Sing}(X) \subset \mathbf{V}(\mathcal{J})$. Mas aún, si X es intersección completa, entonces $\mathrm{Sing}(X) = \mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap X$.

Por otro lado, el ideal $\mathcal{J}$ se puede elegir de varias manera. Esto nos lleva a la siguiente pregunta. Si X no es intersección completa, ¿existe alguna elección de $\mathcal{J}$ tal que $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap X = \mathrm{Sing}(X)$?

En esta sección exploraremos esta pregunta y daremos una respuesta parcial en el caso de superficies tóricas.

Consideremos $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\rho_1, \ldots, \rho_t) \subset \mathbb{Z}^2$ tal que:

- $\mathbb{Z}\Gamma = \mathbb{Z}^2$.
- $\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma$ es fuertemente convexo.
- El conjunto $\{\rho_1, \ldots, \rho_t\}$ es un conjunto generador minimal de Γ.

Sea $I_\Gamma = (f_1, \ldots, f_s)$ el ideal tórico asociado a Γ y T^Γ la superficie tórica correspondiente. En las siguientes dos secciones vamos a demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.28. *1) Si T^Γ es normal, entonces no existen $t-2$ binomios f_i tales que el ideal correspondiente $\mathcal{J}$ satisface que $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma = \mathrm{Sing}(T^\Gamma)$.*

2) Si $\dim\ \mathrm{Sing}(T^\Gamma) = 1$, entonces existen $t-2$ binomios f_i tales que el ideal correspondiente $\mathcal{J}$ satisface que $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma = \mathrm{Sing}(T^\Gamma)$.

Demostración. Ver proposición 5.33 y proposición 5.42. $\square$

5.4.1. T^Γ Superficie Tórica Normal

Como T^Γ es normal, Γ es saturado, por lo que podemos describir a $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \subset \mathbb{Z}^2$, con las siguientes condiciones (ver figura 5.5):

- $\det(\gamma_i\ \ \gamma_j) \neq 0$, para todo $i \neq j$.

- $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}(\gamma_1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(\gamma_n)$.

Además, al ser T^{Γ} una superficie tórica normal, se sigue que $\mathrm{Sing}(T^{\Gamma}) = \{\bar{0}\}$.

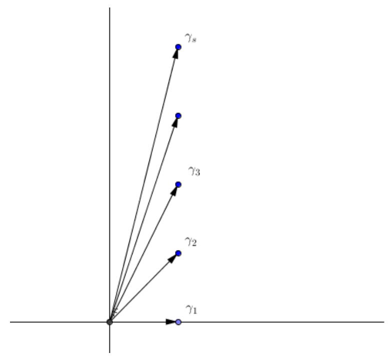

Figura 5.5

Observación 5.29. Sea $I_{\Gamma} = (f_1, \ldots, f_s)$ el ideal tórico asociado a Γ. Supongamos que T^{Γ} no es intersección completa. Por la proposición 4.7, se tiene que $n \geq 4$, donde n es la cantidad de generadores de Γ.

A continuación enunciaremos un resultado tomado del artículo [Ri1, Ri2], que servirá para demostrar un lema preparatorio al resultado principal.

Lema 5.30. *Sea $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \subset \mathbb{Z}^2$, con las condiciones antes dadas. Entonces I_{Γ} esta generado por los binomios $x_i x_j - y_{ij}$ para $2 \leq i+1 \leq j-1 \leq n-1$, donde*

$$y_{ij} = \begin{cases} x_{i+1}^{b_{i+1}}, & i+1 = j-1, \\ \\ x_{i+1}^{b_{i+1}-1} x_{i+2}^{b_{i+2}-2} \cdots x_{j-2}^{b_{j-2}-2} x_{j-1}^{b_{j-1}-1}, & i+1 < j-1, \end{cases}$$

donde $b_i \geq 1$, para todo $i = 2, \ldots, n-1$. Mas aún, este conjunto de generadores es minimal. Notemos que el monomio y_{ij} no es de la forma x_1^{α} o x_n^{β}, para $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Observación 5.31. Los exponentes b_i que aparecen en el lema anterior son descritos explícitamente en [Ri1, Ri2].

Para demostrar la primera parte del teorema 5.28, necesitaremos el siguiente lema.

Lema 5.32. *Sea I un ideal monomial en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ no nulo. Entonces $\mathbf{V}(I) \cap T^{\Gamma} = \{\bar{0}\}$ si y solo si $x_1^{\alpha} \in I$ y $x_n^{\beta} \in I$, para algunos $\alpha, \beta \geq 1$.*

Demostración. Supongamos que $x_1^\alpha, x_n^\beta \in I$ y sea $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I) \cap T^\Gamma$. Como $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I)$, se tiene que $a_1 = 0 = a_n$. Por otro lado $(a_1, \dots, a_n) \in T^\Gamma$ y por el lema 5.30, se tiene que existen enteros positivos c_i tales que $x_{i+1}^{c_{i+1}} - x_i x_{i+2} \in I_\Gamma$, para todo $i = 1, \dots, n-2$. Como $a_1 = 0$ se sigue que $a_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Por lo tanto $(a_1, \dots, a_n) = \bar{0}$.

Para la otra implicación procedemos por contrapositiva. Supongamos que $x_n^\beta \notin I$, para todo $\beta \in \mathbb{N}$. Entonces el punto $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{V}(I)$. Además, por el lema 5.30, se tiene que $(0, \dots, 0, 1) \in T^\Gamma$. Se sigue que $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{V}(I) \cap T^\Gamma$. □

Proposición 5.33. *Sea M cualquier submatriz de* $\mathrm{Jac}(f_1, \dots, f_s)$ *formada por $n-2$ renglones. Supongamos que M tiene rango $n-2$. Sea $\mathcal{J}$ el ideal de los menores de tamaño $n-2$ de M. Entonces* $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma \neq \{\bar{0}\}$.

Demostración. Sin perdida de generalidad supongamos que M es la submatriz de los primeros $n-2$ renglones. Tenemos que el ideal tórico $I_\Gamma = (f_1, \dots, f_s)$ esta generado por binomios de la forma $f_i = x^{A_i} - x^{B_i}$, donde $A_i, B_i \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, ambos diferentes del vector cero. Sea $A_i = (a_{i,1} \dots, a_{i,n})$ y $\{J_K\}_{K \in \Lambda^n_{n-2}}$ los menores de tamaño $n-2 \times n-2$ de la matriz M. Para cada $K \in \Lambda^n_{n-2}$, definimos la función $g_K : \{1, \dots, n\} \to \{0, 1\}$ de la siguiente manera:

$$g_K(j) = \begin{cases} 1 & si \quad j \in K, \\ \\ 0 & si \quad j \notin K. \end{cases}$$

Queremos mostrar que $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma \neq \{\bar{0}\}$. Supongamos lo contrario. Por el lema 5.32, se tiene que $x_1^\alpha, x_n^\beta \in \mathcal{J}$, para algunos $\alpha, \beta \geq 1$. Por la observación 5.23, se tiene que $\mathcal{J}$ es monomial, por lo que podemos asumir que $x_1^\alpha = J_K$ y $x_n^\beta = J_{K'}$, para algunos $K, K' \in \Lambda^n_{n-2}$. Más aún, se tiene que

$$\begin{aligned} x_1^\alpha &\equiv \frac{\prod_{i=1}^r x^{A_i}}{\prod_{k \in K} x_k} \\ &= \prod_{j=1}^n x_j^{\sum_{i=1}^r a_{i,j} - g_K(j)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_n^\beta &\equiv \frac{\prod_{i=1}^r x^{A_i}}{\prod_{k \in K'} x_k} \\ &= \prod_{j=1}^n x_j^{\sum_{i=1}^r a_{i,j} - g_{K'}(j)}. \end{aligned}$$

Como γ_1 y γ_n pertenecen a caras distintas de Γ, se tiene que I_Γ no puede tener binomios de la forma $x_1^c - \prod_{i=2}^n x_i^{c_i}$, $x_n^{c'} - \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{c'_i}$, pues tales binomios darían lugar a una relación $c_1\gamma_1 = \sum_{i>1}^n c_i\gamma_i$, lo que no es posible. Por lo tanto

$$x_1^\alpha = \prod_{j=1}^n x_j^{\sum_{i=1}^r a_{i,j} - g_K(j)},$$

$$x_n^\beta = \prod_{j=1}^n x_j^{\sum_{i=1}^r a_{i,j} - g_{K'}(j)}.$$

De estas ecuaciones obtenemos que $\sum_{i=1}^r a_{i,j} - g_K(j) = 0$ y $\sum_{i=1}^r a_{i,j} - g_{K'}(j) = 0$, para todo $j = 2, \ldots, n-1$. De esto se sigue que $g_K(j) = g_{K'}(j)$, para todo $j = 2, \ldots, n-1$ y $0 \leq \sum_{i=1}^r a_{i,j} \leq 1$, para todo $j = 2, \ldots, n-1$.

Por otro lado $\sum_{i=1}^r a_{1,j} - g_K(1) = \alpha$ y $\sum_{i=1}^r a_{1,j} - g_{K'}(1) = 0$. De esto se sigue que $\alpha = 1$, $g_K(1) = 0$, $g_{K'}(1) = 1$ y $\sum_{i=1}^r a_{1,j} = 1$. De manera análoga se obtiene que, $\beta = 1$, $g_{K'}(n) = 0$, $g_K(n) = 1$ y $\sum_{i=1}^r a_{n,j} = 1$. Obteniendo así que $K = (K' \backslash \{1\}) \cup \{n\}$. Como la cardinalidad de K es $n-2$, existe $p \in \{2, \ldots, n-1\}$, tal que $p \notin K$ y $p \notin K'$. Es decir $g_K(p) = 0 = g_{K'}(p)$.

Tenemos entonces que $\sum_{i=1}^r a_{i,j} = 1$, para todo $j \neq p$, lo que implica que para cada j, existe i_j tal que $a_{i_j,j} = 1$ y $a_{i,j} = 0$ para todo $i \neq i_j$. Además $a_{i,p} = 0$ para todo i. Entonces en la matriz

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,p} & & a_{n-2,n} \end{pmatrix},$$

por columna solo puede haber un 1 y los demás elementos son 0 y tenemos una columna con solo elementos 0. Como $A_i \neq \bar{0}$, se tiene que al menos existe un elemento 1 por renglón. Por la observación 5.29, se tiene que $n-2 \geq 2$, lo que implica que existe al menos un renglón $A_{i'}$ tal que solo tiene un 1. Lo que nos da un binomio de la forma $x_k - x^{B_{i'}}$, que a su vez nos da la relación en Γ, $\gamma_k = \sum_{i \neq k} d_i\gamma_i$, con $d_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, lo que es una contradicción a la minimalidad de los generadores de Γ. Concluimos que $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma \neq \{\bar{0}\}$. □

La proposición anterior muestra que si X es una superficie tórica normal, no existe elección del ideal $\mathcal{J}$ que define la modificación de Nash de X de tal manera que $Sing(X) = \mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap X$.

5.4.2. T^Γ Superficie Tórica con $\dim(\mathrm{Sing}(T^\Gamma))$=1

En este caso podemos describir a Γ de la siguiente manera:

$$\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\gamma_1, \ldots, \gamma_l, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \delta_1, \ldots, \delta_n) \subset \mathbb{Z}^2,$$

con las siguientes condiciones (ver figura 5.6):

- Γ es mínimamente generado por este conjunto.
- $\det(\gamma_i \ \ \gamma_j) = 0 = \det(\delta_i \ \ \delta_j)$, para todo i, j.
- $\det(\gamma_1 \ \ \lambda_i) \neq 0 \neq \det(\delta_1 \ \ \lambda_i)$ para todo i.
- $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}(\gamma_i) + \mathbb{R}_{\geq 0}(\delta_j)$, para cualquier i, j.

Consideremos I_Γ el ideal tórico asociado a Γ, a los elementos γ_i, λ_j y δ_k les asociaremos las variables x_i, y_j y z_k, respectivamente. Por lo tanto tenemos que

$$I_\Gamma \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n] =: \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}].$$

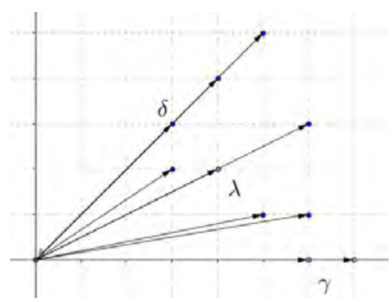

Figura 5.6

En el caso de superficies tóricas normales tenemos un conjunto explícito de generadores del ideal I_Γ. No sabemos si existe un resultado análogo para superficies no normales. Sin embargo, en el siguiente lema describimos algunos de los binomios de I_Γ

Lema 5.34. *Sea I_Γ el ideal tórico asociado a Γ, entonces tenemos que:*

a) Existen $\alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que $x_i^{\alpha_i} - x_j^{\alpha_j} \in I_\Gamma$, para todo $1 \leq i, j \leq l$.

b) Existen $\beta_i, \beta_j \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que $z_i^{\beta_i} - z_j^{\beta_j} \in I_\Gamma$, para todo $1 \leq i, j \leq n$.

c) Existen $\rho_i, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que $y_i^{\rho_i} - x_1^{\alpha_i} z_1^{\beta_i} \in I_\Gamma$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Demostración. a) Consideremos $\gamma_i, \gamma_j \in \Gamma$, como $\det(\gamma_i \ \ \gamma_j) = 0$, se tiene que $\gamma_j \in \mathbb{R}(\gamma_i)$ y como $\check{\sigma}$ es fuertemente convexo se tiene que existe $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $r\gamma_i = \gamma_j$. Además como $\gamma_j \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, podemos suponer que r es un racional diferente de cero, supongamos $r = \frac{p}{q}$. De esto obtenemos que $p\gamma_i = q\gamma_j$, con $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$. Esto da lugar al binomio $x_i^p - x_j^q$ en I_Γ.

b) Análogo al inciso a).

c) Consideremos $\lambda_i, \gamma_1, \delta_1 \in \Gamma$. Por las condiciones del semigrupo, se tiene que $a = \det(\lambda_i \ \delta_1) \neq 0$, $b = \det(\gamma_1 \ \lambda_i) \neq 0$ y $c = \det(\gamma_1 \ \delta_1) \neq 0$, para toda $1 \leq i \leq m$. Además, por como esta ordenado el semigrupo (ver figura 5.6), se tiene que $a, b, c > 0$ o $a, b, c < 0$. Asumamos que $a, b, c > 0$. Un cálculo directo muestra que $a\gamma_1 + b\delta_1 = c\lambda_i$. Esto da lugar al binomio $x_1^a z_1^b - y_i^c$ en I_Γ.

$\square$

Ahora vamos a describir las órbitas de T^Γ. Como $\check{\sigma}$ es fuertemente convexo y $\mathbb{Z}\Gamma = \mathbb{Z}^2$, se tiene que σ es fuertemente convexo. Por lo tanto Γ tiene cuatro caras, que son (ver corolario 2.7):

$$\Gamma \cap 0^\perp = \Gamma,$$

$$\Gamma \cap \tau_1^\perp = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\gamma_1, \ldots, \gamma_l),$$
$$\Gamma \cap \tau_2^\perp = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\delta_1, \ldots, \delta_n),$$
$$\Gamma \cap \sigma^\perp = \{(0,0)\},$$

donde τ_1, τ_2 son las caras de dimensión 1 de σ (ver figura 5.7). Por el corolario 2.11, se tiene que T^Γ es la unión disjunta de 4 órbitas. Calculemos explícitamente estas órbitas.

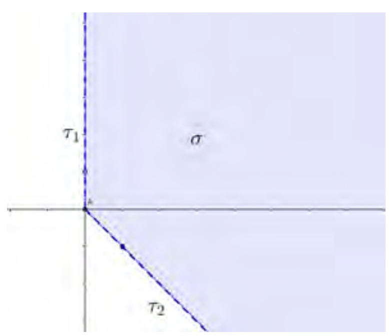

Figura 5.7

Notación 5.35. Sean $0_l = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^l$ y $1_l = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^l$. De manera análoga tomamos 0_m, 0_n, 1_m y 1_n.

Proposición 5.36. *Consideremos los puntos*

$$u_1 = (1_l, 0_m, 0_n),$$

$$u_2 = (0_l, 0_m, 1_n),$$

$$u_3 = (0_l, 0_m, 0_n),$$

$$u_4 = (1_l, 1_m, 1_n).$$

Entonces $u_i \in T^\Gamma$*, para* $i = 1, 2, 3, 4$.

Demostración. Como I_Γ esta generado por binomios de la forma $x^\alpha y^\beta z^\gamma - x^{\alpha'} y^{\beta'} z^{\gamma'}$, se tiene que $u_4 \in T^\Gamma$. Además, como $\check{\sigma}$ es fuertemente convexo, se tiene que $u_3 \in T^\Gamma$.

Tenemos que $\Gamma \cap \tau_1^\perp = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\gamma_1, \ldots, \gamma_l)$ es una cara del semigrupo Γ. Ahora consideremos el homomorfismo de semigrupos $\phi : \Gamma \cap \tau_1^\perp \to \mathbb{C}$, definido por $\phi(\gamma_i) = 1$. Sea $i_{\tau_1}(\phi) : \Gamma \to \mathbb{C}$ definido por

$$i_{\tau_1}(\phi)(\gamma) = \begin{cases} \phi(\gamma) & si \quad \gamma \in \Gamma \cap \tau_1^\perp \\ \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

(ver observación 2.9). Por la proposición 1.23, se tiene que $i_{\tau_1}(\phi)$ nos define un punto en $p \in T^\Gamma$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p &= (i_{\tau_1}(\phi)(\gamma_1), \ldots, i_{\tau_1}(\phi)(\gamma_l), i_{\tau_1}(\phi)(\lambda_1), \ldots, i_{\tau_1}(\phi)(\lambda_m), i_{\tau_1}(\phi)(\delta_1), \ldots, i_{\tau_1}(\phi)(\delta_n)) \\ &= (1_l, 0_m, 0_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_1 \in T^\Gamma$. De manera análoga se puede ver que $u_2 \in T^\Gamma$. □

Observación 5.37. Por lo visto en la demostración de la proposición 1.28, tenemos que $T^M \subset T^\Gamma$, esta definido de la siguiente manera:

$$T^M = T^\Gamma \cap (\mathbb{C}^*)^{l+m+n} = \{(a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n) \in T^\Gamma | a_i, b_j, c_k \neq 0\}.$$

Por el lema 2.10 y el corolario 2.11, se tiene que $T^\Gamma = \bigsqcup_{i=1}^4 \mathcal{O}_i$, donde

$$\mathcal{O}_1 = u_1 \cdot T^M = \{(a_1, \ldots, a_l, 0_m, 0_n) \in T^\Gamma\},$$

$$\mathcal{O}_2 = u_2 \cdot T^M = \{(0_l, 0_m, c_1, \ldots, c_n) \in T^\Gamma\},$$

$$\mathcal{O}_3 = u_3 \cdot T^M = \{(0_l, 0_m, 0_n)\},$$

$$\mathcal{O}_4 = u_4 \cdot T^M = T^M.$$

Además, por el corolario 2.12, se tiene que $\overline{\mathcal{O}_1} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3$ y $\overline{\mathcal{O}_2} = \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3$.

Lema 5.38. *Sea* J *un ideal monomial propio de* $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ *tal que* $J \not\subset I_\Gamma$*. Entonces* $\mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma$ *es unión de órbitas.*

Demostración. Supongamos que $J = (m_1, \dots, m_s)$ donde $m_i = \mathbf{x}^{\alpha_i}\mathbf{y}^{\beta_i}\mathbf{z}^{\rho_i}$ y $\alpha_i \in \mathbb{N}^l$, $\beta_i \in \mathbb{N}^m$, $\rho_i \in \mathbb{N}^n$. Veamos que $\mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma$ es estable bajo la acción de T^M. Sean

$$p = (a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma,$$

$$t = (t_1, \dots, t_l, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n) \in T^M.$$

Como en particular $p \in T^\Gamma$, se tiene que $t \cdot p \in T^\Gamma$. Como $p \in \mathbf{V}(J)$, observemos que

$$m_i(p) = a^{\alpha_i} b^{\beta_i} c^{\rho_i} = 0,$$

para todo $i = 1, \dots, s$. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} m_i(t \cdot p) &= (ta)^{\alpha_i}(ub)^{\beta_i}(vc)^{\rho_i} \\ &= t^{\alpha_i}u^{\beta_i}v^{\rho_i}a^{\alpha_i}b^{\beta_i}c^{\rho_i} \\ &= t^{\alpha_i}u^{\beta_i}v^{\rho_i} \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $t \cdot p \in \mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma$. Concluimos que $\mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma$ es estable bajo la acción de T^M. Con este resultado podemos describir explícitamente al conjunto $\mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma$.

Por la proposición 5.36 se tiene que $(0_l, 0_m, 0_n) \in T^\Gamma$, además, como J es monomial, se tiene que $(0_l, 0_m, 0_n) \in \mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma$. Entonces $\mathcal{O}_3 \subset \mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma$. Ahora, si $\mathcal{O}_4 \cap \mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma \neq \emptyset$, por la estabilidad de $\mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma$, se tiene que $T^M \subset \mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma$, pero T^M es un abierto en T^Γ y $\mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma$ es un cerrado propio, lo que sería una contradicción. Se infiere que $\mathcal{O}_4 \cap \mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma = \emptyset$.

Por los mismo argumentos se tiene que si $\mathcal{O}_1 \cap \mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{O}_1 \subset \mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma$. Lo mismo para $\mathcal{O}_2$. Esto nos deja con 4 posibilidades para $\mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma$:

$$\mathbf{V}(J) \cap T^\Gamma = \begin{cases} \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 & = \quad \overline{\mathcal{O}_1} \cup \overline{\mathcal{O}_2} \\ \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3 & = \quad \overline{\mathcal{O}_1} \\ \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 & = \quad \overline{\mathcal{O}_2} \\ \mathcal{O}_3 \end{cases}$$

□

Para el resto de la sección usaremos la siguiente notación:

t=l+m+n,

r=t-2.

Corolario 5.39.

$$\mathrm{Sing}(T^{\Gamma}) = \begin{cases} \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 & = \overline{\mathcal{O}_1} \cup \overline{\mathcal{O}_2} \\ \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3 & = \overline{\mathcal{O}_1} \\ \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 & = \overline{\mathcal{O}_2} \end{cases}$$

Demostración. Supongamos $I_\Gamma = (f_1, \ldots, f_s)$. Tenemos que $\mathrm{Sing}(T^\Gamma) = \mathbf{V}(\{J_{K,L}\}) \cap T^\Gamma$, donde los $J_{K,L}$ son los menores de tamaño $(r)\times(r)$ de la matriz $\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_s)$. Por la observación 5.18, se tiene que cada m_i es un monomio y como estamos suponiendo que $\dim(\mathrm{Sing}(T^\Gamma)) = 1$, se tiene que $\mathrm{Sing}(T^\Gamma) \neq \mathcal{O}_3$. El resto se sigue directamente del lema 5.38. □

Corolario 5.40. *Sea $I_\Gamma = (f_1, \ldots, f_s)$ el ideal tórico asociado a Γ. Sea $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_r}\} \subset \{f_1, \ldots, f_s\}$ y sea $\mathcal{J}$ el ideal de los menores de $r \times r$ de $\mathrm{Jac}(f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})$. Si $\mathcal{J} \not\subset I_\Gamma$, entonces*

$$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^{\Gamma} = \begin{cases} \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 & = \overline{\mathcal{O}_1} \cup \overline{\mathcal{O}_2} \\ \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3 & = \overline{\mathcal{O}_1} \\ \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3 & = \overline{\mathcal{O}_2} \end{cases}$$

Demostración. Se prueba de manera análoga al corolario anterior. □

Estamos listos para demostrar que existe una elección de $\mathcal{J}$ tal que $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma = \mathrm{Sing}(T^\Gamma)$. Supongamos que $\mathrm{Sing}(T^\Gamma) = \overline{\mathcal{O}_1} \cup \overline{\mathcal{O}_2}$. Sea $J_{K',L'}$ un menor de la matriz $\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_s)$ no nulo, para algunos $K' \in \Lambda_r^t$ y $L' \in \Lambda_r^s$. Sea $\mathcal{J} = (\{J_{K,L'}\}_{K \in \Lambda_r^t})$. Por la observación 5.18, se tiene que $\mathrm{Sing}(T^\Gamma) \subset \mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma$ y por los corolarios anteriores se concluye que $\mathrm{Sing}(T^\Gamma) = \mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma$. Ahora veamos que pasa si $\mathrm{Sing}(T^\Gamma) = \overline{\mathcal{O}_1}$.

Lema 5.41. *Supongamos que $\mathrm{Sing}(T^\Gamma) = \overline{\mathcal{O}_1}$. Entonces existe un menor $J_{K,L}$ de tamaño $r \times r$ de la matriz $\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_s)$ de la forma $\mathbf{z}^\rho$, con $\rho \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $\rho \neq 0_n$.*

Demostración. Por la observación 5.18, tenemos que todo menor $J_{K,L}$ de tamaño $r \times r$ de la matriz $\mathrm{Jac}(f_1, \ldots, f_s)$ es un monomio, es decir,

$$J_{K,L} = \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta \mathbf{z}^\rho,$$

donde $K \in \Lambda_r^t$ y $L \in \Lambda_r^s$. Procedemos por contradicción. Supongamos que alguna coordenada de α o β es distinta de cero para todo menor $J_{K,L}$. Sabemos que $\mathrm{Sing}(T^\Gamma) = \mathbf{V}(\{J_{K,L}\}_{K\in\Lambda_r^t, L\in\Lambda_r^s}) \cap T^\Gamma$. Consideremos $u_2 = (0_l, 0_m, 1_n)$. Por la proposición 5.36 se tiene $u_2 \in T^\Gamma$. Por otro lado, la suposición sobre los monomios $J_{K,L}$ implica que $J_{K,L}(u_2) = 0$. Se infiere que $u_2 \in \mathrm{Sing}(T^\Gamma)$ lo que es una contradicción a que $\mathrm{Sing}(T^\Gamma) = \overline{\mathcal{O}_1}$. Concluimos que existe un menor $J_{K,L} = \mathbf{z}^\rho$. □

Proposición 5.42. *Existe* $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_r}\} \subset \{f_1, \ldots, f_s\}$, *tal que* $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma = \mathrm{Sing}(T^\Gamma)$, *donde* $\mathcal{J}$ *es el ideal de los menores de tamaño* $r \times r$ *de la matriz* $\mathrm{Jac}(f_{i_1}\ldots, f_{i_r})$.

Demostración. Por el lema 5.41, existe un menor $J_{K',L'}$ de tamaño $r \times r$ tal que $J_{K',L'} = \mathbf{z}^\rho \neq 0$. Sea $\mathcal{J} = (\{J_{K,L'}\}_{K\in\Lambda_r^t})$. Por observación 5.18, se tiene que $\mathrm{Sing}(T^\Gamma) \subset \mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma$.

Ahora veamos que $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma = \overline{\mathcal{O}_1}$. Sea

$$(a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma.$$

Como $\mathbf{z}^\rho \in \mathcal{J}$, se tiene que $c_i = 0$, para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por el lema 5.34 inciso b), se tiene que $c_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se sigue que $\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Por el corolario 5.40

$$\mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap T^\Gamma = \overline{\mathcal{O}_1} = \mathrm{Sing}(T^\Gamma).$$

□

La proposición anterior muestra que si X es una superficie tórica tal que $\dim(\mathrm{Sing}(X)) = 1$, siempre se puede elegir al ideal $\mathcal{J}$ que define la modificación de Nash de X de tal manera que $\mathrm{Sing}(X) = \mathbf{V}(\mathcal{J}) \cap X$.

Apéndice A

Conos

En este apéndice daremos algunos de los resultados clásicos sobre conos poliédricos que usaremos en este trabajo, para ver las pruebas se puede consultar [CLS] o [Ewa].

Sean N, M retículas duales de rango finito. Denotamos por $N_{\mathbb{R}}$ al espacio vectorial $N \otimes \mathbb{R}$ y $M_{\mathbb{R}}$ al espacio vectorial $M \otimes \mathbb{R}$.

Definición A.1. Un cono poliédrico racional en $N_{\mathbb{R}}$ es un conjunto de la forma

$$\sigma = Cono(S) = \{\sum_{u \in S} \lambda_u u | \lambda_u \geq 0\} \subset N_{\mathbb{R}},$$

donde $S \subset N$ es finito. Decimos que σ es generado por S.

Definición A.2. Dado un cono poliédrico racional $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$, definimos el cono dual de σ como

$$\check{\sigma} = \{m \in M_{\mathbb{R}} | \langle m, u \rangle \geq 0 \ \ para \ \ todo \ \ u \in \sigma\}.$$

Definición A.3. Sea σ un cono poliédrico racional y sea $\tau \subset \sigma$. Decimos que τ es una cara de σ si para todo $x, y \in \sigma$ tales que $x + y \in \tau$ se tiene que $x, y \in \tau$. Usaremos la notación $\tau \leq \sigma$ para denotar las caras de σ.

Lema A.4. *Sea σ un cono poliédrico racional y sea $\check{\sigma}$ su cono dual. Si τ es una cara de σ y $\tau^* = \check{\sigma} \cap \tau^{\perp}$, entonces:*

(a) *τ^* es una cara de $\check{\sigma}$.*

(b) *La función $\tau \mapsto \tau^*$ es una biyección que invierte inclusiones entre las caras de σ y las caras de $\check{\sigma}$.*

(c) $\dim(\tau) = \operatorname{codim}(\tau^*)$.

Proposición A.5. *Sea σ un cono poliédrico racional. Entonces*

$$\partial\sigma = \bigcup_{\tau<\sigma} \tau,$$

donde $\tau < \sigma$ denota una cara propia de σ.

Proposición A.6. *Sea σ un cono poliédrico racional. Entonces*

$$\sigma = \bigsqcup_{\tau\leq\sigma} \operatorname{int}(\tau)$$

Proposición A.7. *Sea σ_1, σ_2 cono en N_R, entonces tenemos las siguientes propiedades:*

i) $(\sigma_1 + \sigma_2)^\vee = \check{\sigma}_1 \cap \check{\sigma}_2$.

ii) $(\sigma_1 \cap \sigma_2)^\vee = \check{\sigma}_1 + \check{\sigma}_2$.

Lema A.8. *Sea σ un cono poliédrico racional. Entonces la cara mínima de σ es un subespacio vectorial de $M_\mathbb{R}$.*

Proposición A.9. *Sea V un espacio vectorial. Entonces $V^\perp = \check{V}$.*

Lema A.10. *Sea σ un cono poliédrico racional. Entonces $\check{\sigma} \cap M$ es un semigrupo finitamente generado.*

Lema A.11. *Sean σ_1, σ_2 conos en N_R tales que $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara común de ambos conos. Entonces se tiene que*

$$\tau = m^\perp \cap \check{\sigma}_1 = m^\perp \cap \check{\sigma}_2,$$

para todo m en el interior de $\check{\sigma}_1 \cap (-\check{\sigma}_2)$.

Lema A.12. *Sea $\tau \leq \sigma$ entonces*

$$\{m \in \check{\sigma} | \tau = \sigma \cap m^\perp\} = \operatorname{int}(\check{\sigma} \cap \tau^\perp).$$

Definición A.13. Sea $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ un cono poliédrico racional, decimos que σ es fuertemente convexo si el origen de $N_\mathbb{R}$ es una cara de σ.

Lema A.14. *Sea $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ un cono poliédrico racional. Entonces se tienen las siguientes equivalencias:*

(1) *σ es fuertemente convexo.*

(2) *σ no contiene un subespacio lineal de dimensión positiva de $N_\mathbb{R}$.*

(3) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

(4) $\dim(\check{\sigma}) = n$.

Bibliografía

[AyM] M. Atiyah and I. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[ByG] E. Bombieri and W. Gubler, *Heights in Diophantine Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[CLS] D. Cox, J. Little, and H. Schenck, *Toric Varieties*, Graduate Studies in Mathematics, vol.124, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[Coh] H. Cohen, *Number Theory, Volume I: Tools and Diophantine Equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 239, Springer-Verlag, New York, 2007.

[Dan] V. Danilov, *The Geometry of Toric Varieties*, Uspekhi Mat. Nauk 33 (1978), no. 2(200), 85–134, 247.

[DGPS] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann; Singular 3-1-6 — A computer algebra system for polynomial computations. http://www.singular.uni-kl.de (2012).

[Ewa] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 168, Springer-Verlag, New York, 1996.

[Ful] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Math. Studies 131, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[GKZ] I. Gel'fand, M. Kapranov and A. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimesional Determinants*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.

[GyT] P. González, B. Teissier, *Toric Geometry and the Semple-Nash Modification*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Serie A Matemáticas, DOI 10.1007/s13398-012-0096-0, 2012.

[G-S] G. Gonzalez-Springberg, *Eventails en dimension 2 et transformé de Nash*, Publ. de lÉ.N.S., Paris (1977), 1-68.

[Har] J. Harris, *Algebraic Geometry: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 133, Springer-Verlag, New York, 1992.

[Hts] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Hau] H. Hauser, *Blowups and Resolution*, Proceedings of the Clay Mathematics Institute Summer School on Resolution of Singularities, Obergurgl, Austria, 2012.

[Her] J. Herzog, *Generators and Relations of Abelian Semigroups and Semigroup Rings*, Manuscripta Math. 3, 175-193, 1970.

[JyP] T. de Jong and G. Pfister, *Local Analytic Geometry*, Vieweg, 2000.

[KyK] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, *Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory*, Annals of Math. **176**(2012), no. 2, 925-978.

[Lan] S. Lang, *Algebra*-Rev. 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002.

[Nob] A. Nobile, *Some Properties of the Nash Blowing-Up*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 60, No. 1, 1975.

[Oda] T. Oda, *Torus Embeddings and Applications*, Tata Institute of Fundamental Researh Lectures on Mathematics and Physics, vol. 57, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978. Based on joint work with Katsuya Miyake.

[Ri1] O. Riemenschneider, *Deformation von Quotienttensingularitäten (nach zyklischen Gruppen)*, Math. Ann. **37**(1981), 406-417.

[Ri2] O. Riemenschneider, *Deformations of Quotient Singularities (by Cyclic Groups)*, trans. John Voight, http://www.math.berkeley.edu/ jvoight/cfrac/cfrac-riemen1.ps.

[Sha] R. Sharp, *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[SyT] J. Silverman and J. Tate, *Rational Points on Elliptic Curves*, Undegraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1992.

[Stu] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series, vol. 8, American Mathematical Society, Providence, RI,1996.

[Sum] H. Sumihiro, *Equivariant Completion*, J. Math. Kyoto Univ. **14** (1974), 1-28.

[Th1] H. Thompson, *Fan is to Monoid as Scheme is to Ring: a Generalization of the Notion of a Fan*, ArXiv math.AG/0306221.

[Th2] H. Thompson, *Comments on Toric Varieties*, ArXiv math.AG/0310336.

[Th3] H. Thompson, *Toric Singularities Revisited*, J. Algebra **299** (2006), no.2, 503-534.