



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

DECAIMIENTOS ELECTROMAGNÉTICOS DE BARIONES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

GUSTAVO HAZEL GUERRERO NAVARRO

TUTOR PRINCIPAL:

DR. ROELOF BIJKER BIJKER
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

COMITÉ TUTOR:

DR. GENARO TOLEDO SÁNCHEZ
INSTITUTO DE FÍSICA
DRA. LIBERTAD BARRÓN PALOS
INSTITUTO DE FÍSICA

Ciudad Universitaria, CD. MX., Noviembre 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En este trabajo se presenta el problema de los decaimientos electromagnéticos de los bariones del decuplete, en donde los valores experimentales actuales para el ancho de decaimiento se encuentran aproximadamente dos veces por encima de las predicciones hechas por el modelo de quarks constituyentes. El objetivo principal es resolver este problema mediante otro modelo de quarks efectivo, tomándose como un problema de grados de libertad donde se consideran además quarks del mar, logrando obtener la contribución de los quarks de valencia y el primer término de los quarks del mar. Para ello se ha considerado un modelo de quarks *unquenched* donde se incorporan en la función de onda de los bariones los efectos de los pares quark-antiquark con los números cuánticos del vacío como términos del tipo barión-mesón acoplados con los números cuánticos del barión original. Para hacer esto se ha tomado el modelo 3P_0 para la creación de pares quark-antiquark y considerando este efecto como una perturbación en la función de onda de bariones. Se ha obtenido además una expresión más general para el ancho de decaimiento electromagnético en modelos que consideren quarks de valencia y del mar en términos de los momentos magnéticos de transición de bariones. Los resultados obtenidos para el ancho de decaimiento en el modelo de quarks *unquenched* son resultados parciales donde no se han considerado todos los términos debido al mar de quarks, los cuales son aditivos al resultado final. Sin embargo con la primer contribución del mar de quarks los resultados han alcanzado valores similares a los predichos por el modelo de quarks constituyentes, estando aún por debajo del valor experimental.

ABSTRACT

In this work is presented the electromagnetic decay of baryons problem, where the current experimental data for the radiative decay width shows that this values are approximately two times larger than the predictions of the constituent quark model. The main aim is to solve this problem with the approach of effective degrees of freedom for quarks in the quark model, considering also the sea quarks, obtaining the valence quark and the first term of the sea quarks contributions. For it has been considered an unquenched quark model where are incorporated the effects of the quark-antiquark sea pairs with the quantum numbers of vacuum in the wave function for baryons as terms type baryon-meson with quantum numbers coupled with the quantum numbers of the original baryon. In order to do this is taken the 3P_0 model for the creation of pairs quark-antiquark and considering the effect as a perturbation in the wave function of baryons. It has also obtained a more general expression for the electromagnetic decay width in quark models such that considers valence and sea quarks in terms of the transition magnetic moments. The results for the unquenched quark model are still incompleted where hasn't been taken into account all the contributions of the sea quarks terms, like additive terms, within the expression of the radiative decay width. However with the first sea quarks contribution the results have reached similar values to those predicted by the constituent quark model, while still smaller with respect the experimental data.

Índice general

Introducción	5
1. El modelo de quarks constituyentes	7
1.1. Antecedentes	7
1.2. Números cuánticos de los quarks y grados de libertad	7
1.3. Diagramas de peso	9
1.4. Bariones qqq	13
1.4.1. Octete	14
1.4.2. Decuplete	18
1.5. Mesones $q\bar{q}$	20
1.5.1. Construcción de la funciones de onda espín-sabor	20
1.5.2. Mezcla de estados isoescalares	21
2. Simetrías	25
2.1. Simetría de isospín SU(2)	25
2.2. Simetría de espín SU(2)	28
2.3. Simetría de sabor SU(3)	30
2.4. Simetría de espín-sabor SU(6)	32
3. Unquenching el modelo de quarks	35
3.1. El modelo 3P_0	35
3.2. El modelo de la nube mesónica	40
3.3. El modelo de quarks Unquenched	53
3.3.1. Cálculo del parámetro γ^2	53
3.3.2. Cálculo de amplitudes de probabilidad de estados $ BC\rangle$	54
4. Decaimientos electromagnéticos de bariones	63
4.1. La interacción electromagnética	63
4.1.1. Campos de quarks cargados	63
4.1.2. Campo de radiación	64
4.2. Acoplamiento de la radiación con la materia	66
4.2.1. Término elástico de quarks $\langle f \hat{H}_{int}^1 i\rangle$	67
4.2.2. Término de aniquilación de pares de quarks $\langle f \hat{H}_{int}^2 i\rangle$	69
4.2.3. Término de creación de pares de quarks $\langle f \hat{H}_{int}^3 i\rangle$	71
4.2.4. Término elástico de antiquarks $\langle f \hat{H}_{int}^4 i\rangle$	71
4.3. Momentos magnéticos	72
4.3.1. Momentos magnéticos en el CQM	73
4.3.2. Momentos magnéticos en el UQM	75
4.4. Decaimientos electromagnéticos de bariones en estado base	91
4.4.1. Decaimientos electromagnéticos en el CQM	92

4.4.2. Decaimientos electromagnéticos en el UQM	93
5. Resultados	95
5.1. Momentos magnéticos de transición	95
5.2. Decaimientos electromagnéticos	96
Conclusiones	101
Apéndice.	102
A.	103
A.1. Funciones de onda de espín-sabor del octete de bariones en el modelo de quarks	103
B.	105
B.1. El grupo de simetría SU(2)	105
B.1.1. Multipletes	106
B.2. El grupo de simetría SU(3)	108
C.	111
C.1. Coeficientes de Clebsch-Gordan	111
D.	113
D.1. El valor principal de Cauchy	113
D.2. Valores de las masas de hadrones en la simetría de isospín	114
Bibliografía	115

Introducción

En la física nuclear y de partículas un problema importante a lo largo de la historia ha sido la estructura interna de la materia, entre ellos el problema de la estructura del nucleón. Primeramente se consideraba al nucleón como una partícula puntual, pero los siguientes experimentos mostraron que tenía una estructura más compleja, información que fue usada para construir paso a paso el modelo de quarks (naive CQM), como los experimentos sobre el momento magnético anómalo del nucleón en 1933 [1], que resultó cerca de 2.5 veces mayor que lo esperado para una partícula de espín 1/2. Mediciones recientes dan un valor cerca de 2.793 [2]. Los resultados sobre el radio del protón (evidencia de que tenía un tamaño finito) se dieron en 1957 en los experimentos de dispersión de electrones en el SLAC [3] con un valor aproximado de ~ 0.8 fm (El valor reciente es de 0.877 ± 0.007 [2]). La evidencia sobre la existencia de partones en estados ligados (quarks constituyentes) se dió en 1972 con los experimentos de dispersión inelástica profunda por la colaboración MIT-SLAC [4]. Esta serie de experimentos dieron la pauta para la construcción de modelo de quarks constituyentes primario (CQM) en los 1960's [9, 12] y posteriormente de la formulación de la cromodinámica cuántica (QCD) en los 1970's como una teoría de las interacciones fuertes entre partículas.

Con el CQM se mostró que el nucleón, el elemento constituyente de los átomos, estaba además compuesto por fermiones de Dirac, *quarks*, además de otros estados ligados compuestos por ellos, generalmente llamados hadrones, entre ellos los bariones y los mesones. Experimentos más precisos para la obtención de datos experimentales se han obtenido en distintos laboratorios (p. ej. Jefferson Lab, MIT-Bates, LEGS en BNL, MAMI en Mainz, ELSA en Bonn y GRAAL en Grenoble).

Existen dos importantes enfoques para estudiar la estructura interna de los hadrones, por un lado la QCD por ser una teoría de la interacción fuerte, considera una constante de acoplamiento grande, por lo que los resultados teóricos dados por ella se tratan de manera no-perturbativa. Por el otro lado los modelos de quarks son utilizados para obtener resultados teóricos considerando grados de libertad efectivos, entre ellos los grados de libertad permitidos por la QCD.

El CQM fue bien aceptado por el éxito que tuvo en la predicción de los momentos magnéticos de los bariones, así como la predicción de la existencia de la resonancia Ω , sin embargo, en 1991 con los experimentos llevados a cabo por la *New Muon Collaboration* (NMC) [5] se dió evidencia sobre la asimetría de sabor en el protón (algo que el CQM no podía reproducir), es decir, existía una contribución de anti-quarks, a partir de la violación de la suma de Gottfried [32], que considera la diferencia entre la estructura electromagnética entre el protón y el neutrón. Estos resultados fueron confirmados más adelante en los experimentos de Drell-Yan [6].

Existen propuestas sobre los modelos de quarks que consideran grados de libertad efectivos en la región no-perturbativa a valores bajos de Q^2 como quarks constituyentes los cuales forman estados intermedios del tipo barión-mesón a partir de la contribución de quarks y anti-quarks incluidos en la función de onda de los bariones [7, 8].

Entre estos modelos también se encuentra el modelo de quarks Unquenched (UQM) [39], que fue planteado a partir del trabajo de Micu [16] mediante el modelo de creación de pares quark-antiquark en un estado 3P_0 en el estudio de los decaimientos fuertes de mesones y posteriormente desarrollado por Weise [27].

Los decaimientos electromagnéticos (o bien las fotoproducciones) proveen información importante sobre la estructura interna de los bariones, pues puede también constituir una prueba de consistencia de los distintos modelos de quarks construidos, y un entendimiento en un nivel más fundamental de las transiciones entre hadrones. En este trabajo se utiliza el UQM para estudiar los decaimientos electromagnéticos entre bariones y se estudian las contribuciones de los pares quark-antiquark (también llamada la contribución del mar) en la función de onda de estos. El principal motivo para el estudio de esto son las importantes diferencias entre las predicciones del Modelo de Quarks Constituyentes (CQM) y los datos experimentales de las anchuras de decaimiento electromagnéticas entre los bariones del octete y del decuplete, las cuales son cerca de 2 veces mayores que lo predicho por el CQM

$$\Gamma_{B_{10} \rightarrow B_8 \gamma}^{exp} \approx 2\Gamma_{B_{10} \rightarrow B_8 \gamma}^{CQM},$$

para los casos de transiciones $\Delta \rightarrow N\gamma$, $\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0\gamma$ y $\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$.

Tal como los problemas de la asimetría de sabor y la crisis de espín del protón son tratados como un problema de grados de libertad en los modelos de quarks, se estudian los decaimientos electromagnéticos en un modelo que incluya grados de libertad exóticos y efectivos, como el UQM, considerando los efectos del mar, ($q\bar{q}$), como componentes de Fock de orden mayor a las consideradas en el CQM.

Para ello se realizan cálculos de los momentos magnéticos de transición de los bariones en el estado base y se toma el enfoque en donde el ancho de decaimiento electromagnético queda expresado en términos de este. Dentro de este trabajo además se encuentra que la expresión usada en otros trabajos teóricos, en los que rescatan los resultados de los momentos magnéticos de transición a partir de los resultados experimentales para el ancho de decaimiento electromagnético, no es válida para modelos que consideren grados de libertad efectivos para la creación de pares $q\bar{q}$ en la función de onda considerada para los hadrones en su modelo.

El ancho de decaimiento electromagnético queda expresado en general logrando resolver la parte de valencia y el primer término del mar de quarks, que contribuyen en el decaimiento electromagnético, obteniendo con ello los resultados, que son comparados con el CQM, otros modelos teóricos [59]-[64], y los resultados experimentales para $\Delta \rightarrow N\gamma$ [33], $\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0\gamma$ [52] y $\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$ [53] y $\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^0\gamma$.

Capítulo 1

El modelo de quarks constituyentes

1.1. Antecedentes

A partir de los finales de la década de 1940 comenzó en varios laboratorios, tanto en aceleradores de partículas como en los detectores de rayos cósmicos, el descubrimiento de cientos de partículas pesadas, llamadas hadrones, tales como Λ^0 , Σ^\pm , Σ^0 , Ξ^- , Ξ^0 , Δ^{++} , Δ^\pm , Δ^0 , Ω^- , ρ^0 , ρ^\pm , ω^0 , η^0 , K^\pm , K^0 y bastantes versiones más pesadas de muchas de estas partículas con espín superior (indicadas por la adición de asteriscos a los símbolos) que se conocen como *recurrencias de Regge*. Siendo tan numerosas las partículas conocidas, hubiera sido totalmente desconcertante si no fuera por el hecho de que se observó que se agrupaban en ciertas familias, llamadas *multipletes*, que eran reconocidos debido a que cada partícula venía identificada por un conjunto de seis números cuánticos (espín, carga eléctrica, hipercarga, número bariónico, isoespín, paridad), respectivamente $(J, Q, Y, \mathcal{B}, I, P)$, junto con su masa, m . Cada uno de estos números cuánticos constituye una propiedad específica de la partícula y su conjunto se trata como una "huella digital" de cada partícula. Se obtuvo una buena comprensión (por parte de Murray Gell-Mann y Yuval Ne'eman en 1961) de la naturaleza de estos multipletes sobre la formulación matemática de que tales multipletes proporcionan representaciones del grupo $SU(3)$. Tal método se le conoció como el "*Eightfold Way*" (camino de las ocho vías, sobre el que se predijo la existencia antes de su descubrimiento de algunos otros hadrones) en el cual los bariones y mesones eran organizados en patrones geométricos de acuerdo a su carga y extrañeza. El "*Eightfold Way*" predijo una estructura para clasificar a estas partículas, a las que después se les llamó hadrones. Un entendimiento de por qué el "*Eightfold Way*" funcionó tan bien vino en 1964 cuando M. Gell-Mann y G. Zweig independientemente propusieron la hipótesis que todos los hadrones eran compuestos de constituyentes más elementales [9], a los cuales Gell-Mann llamó **quarks**, con la misteriosa característica de que estos deben tener carga eléctrica semientera, véase la tabla 1.1. Los tres quarks consisten en un doblete de isoespín, $I = \frac{1}{2}$ y de extrañeza, $S = 0$, etiquetados u y d , posicionados para el isoespín "**up**" y "**down**", respectivamente. El tercero es un isosingulete $S = -1$, etiquetado como s (por su denominación en inglés *strange*). Más adelante se explicará esto, y se aclara la forma de clasificar a los bariones y a los mesones en el enfoque de elementos básicos constituyentes de quarks. Los bariones pueden verse como estados base de tres quarks, qqq , y los mesones son compuestos de un quark más un antiquark, $q\bar{q}$, respectivamente. En este momento fueron los tres sabores de quarks más los correspondientes antiquarks necesarios para explicar el espectro de los bariones observado.

1.2. Números cuánticos de los quarks y grados de libertad

La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría cuántica de campos de la interacción fuerte y sus constituyentes son un conjunto de fermiones, los quarks, y bosones gauge, los gluones. Las partículas fuertemente interactuantes, los hadrones, son estados ligados de los campos de quarks y gluones. Como

los gluones tienen números cuánticos no nulos de color, espín y paridad, y los quarks pueden llevar números cuánticos no nulos de color, espín, paridad, sabor, carga y número bariónico se puede decir que la mayoría de los números cuánticos de las partículas fuertemente interactuantes están dados por los números cuánticos de sus quarks (y antiquarks) constituyentes. La descripción de las propiedades hadrónicas que enfatiza fuertemente el papel del contenido mínimo de quarks de la función de onda de un hadrón es genéricamente llamada el *modelo de quarks*. Este se presenta en muchos niveles: desde la simple, imagen casi libre de dinámica de partículas fuertemente interactuantes como estados ligados de quarks y antiquarks, hasta la descripción más detallada de la dinámica, ya sea a través de modelos o directamente desde QCD en si misma.

Los quarks son fermiones fuertemente interactuantes con espín $J = 1/2$ y, por convención, paridad positiva. Los antiquarks tienen paridad negativa. Los quarks además tienen un número bariónico aditivo $1/3$, los antiquarks $-1/3$. En la tabla 1.1 se presentan otros números cuanticos aditivos (sabores) para las tres generaciones de quarks. Ellos están relacionados con la carga Q (en unidades de la carga elemental e) a través de la fórmula generalizada de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{\mathcal{B} + S + C + B + T}{2}, \quad (1.1)$$

donde I_3 es la proyección de isoespín en la dirección \hat{z} , \mathcal{B} es el número bariónico, S es el número de extrañeza, C el encanto (*charm*), B fondo (*bottom*) y T cima (*top*). La convención es que el sabor de un quark (I_3 , S , C , B , o T) tiene el mismo signo que su carga Q . Con esta convención, un sabor llevado por un mesón cargado tiene el mismo signo que su carga. Los antiquarks tiene el signo opuesto de sabor.

Cuadro 1.1: Números cuánticos de los quarks y antiquarks. Q denota la carga eléctrica, \mathcal{B} es el número bariónico, J es el espín, I el isoespín, I_3 la proyección de isoespín, S es el número de extrañeza, C el encanto (*charm*), B fondo (*bottom*), T cima (*top*), P la paridad, Y la hipercarga, además de las masas.

	Q	\mathcal{B}	J	I	I_3	S	C	B	T	P	Y	masa [33]
u	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0	+	$\frac{1}{3}$	$2.3^{+0.7}_{-0.5}$ MeV
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	+	$\frac{1}{3}$	$4.8^{+0.5}_{-0.3}$ MeV
s	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	0	0	0	+	$-\frac{2}{3}$	95 ± 5 MeV
c	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	+1	0	0	+	0	1.275 ± 0.025 GeV
b	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	-1	0	+	0	4.18 ± 0.03 GeV
t	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	+1	+	0	173.21 ± 0.71 GeV

La hipercarga, Y , está definida como

$$Y = \mathcal{B} + S - \frac{C - B + T}{3}. \quad (1.2)$$

La hipercarga es un número cuántico útil para establecer la simetría de sabor. La simetría de sabor está basada en una diferencia insignificante en las masas de los quarks en comparación a la energía de los fenómenos estudiados. Los quarks u , d y s comunmente cumplen con esto, pudiendo transformarlos dentro de un grupo de simetría de sabor $SU(3)_f$. Al grupo de simetría entre u y d se le conoce como

la simetría de isoespín $SU(2)_I$. Un cuarto quark tal como el c puede ser incluido para extender $SU(3)$ a $SU(4)$, pero esta simetría está bastante rota debido a que el quark c es mucho más pesado que los u , d y s . Podemos considerar a $SU(3)$ como una buena aproximación para los fenómenos estudiados en este trabajo. Vemos que la simetría de isoespín es una mucho mejor simetría que la simetría de sabor $SU(3)_f$. Véase la tabla 1.1.

Así los grados de libertad, los podemos representar de forma irreducible con el grupo de simetría de sabor $SU(3)_f$ y de espín $SU(2)_s$. Tenemos además un grado de libertad extra para el cual los bariones siguen siendo fermiones en el estado base, el *color*. Este, como se comentó antes, se refiere a la carga de la interacción fuerte y para ello se toma en este caso de tres tipos, **g** (green), **b** (blue), **r** (red). Debemos notar que este es un grado de libertad que se encuentra confinado y esta simetría no es un observable, debido a que los hadrones se presentan como singuletes de color; para ello existe una generalización que considera N_c número de colores [13]. En el caso de tres colores estos se transforman bajo el grupo de simetría $SU(3)_c$.

En este punto tenemos ya una noción de los grupos de simetría en los que se transforman los distintos grados de libertad de los quarks, el cual no es sino el producto tensorial de los grupos de simetría para las transformaciones anteriores y que es subconjunto de

$$SU(3)_f \otimes SU(2)_s \otimes SU(3)_c. \quad (1.3)$$

Como una generalización de este grupo de simetría, debido a la simetría del espín con el sabor de los quarks, es usual utilizar el grupo de simetría

$$\mathcal{G}_{sfc} = SU(6)_{sf} \otimes SU(3)_c \quad (1.4)$$

con $SU(6)_{sf}$ es el grupo de simetría de las transformaciones llamadas de espín-sabor y

$$SU(6)_{sf} \supset SU(3)_f \otimes SU(2)_s, \quad (1.5)$$

pero en este caso nos bastará con utilizar explícitamente el producto de los grupos de simetría de sabor, $SU(3)_f$, y espín, $SU(2)_s$, como dos grupos independientes, con el algebra descrita en el apéndice B y el capítulo 2. De esta misma manera podemos descomponer el grupo de simetría para el sabor (y también su álgebra) como

$$SU(2)_I \otimes U(1)_Y \subset SU(3)_f, \quad (1.6)$$

donde, como veremos a continuación, los multipletes de isoespín (con elementos u y d) pueden construirse a partir de $SU(2)_I$, y los multipletes de sabor (con elementos u , d , s) pueden construirse incluyendo la simetría de hipercarga $U(1)_Y$.

1.3. Diagramas de peso

Tomando como antecedente el grupo de transformaciones de $SU(3)$ del apéndice B.2, donde encontramos los generadores de este grupo, ecuación (B.36), está definida el *subálgebra de Cartan* como el conjunto de generadores que conmutan entre sí. A este subconjunto de generadores se les conoce como *generadores de Cartan*.

En el caso del grupo $SU(3)$ los generadores del álgebra \hat{F}_i , como se ve en la ecuación (B.40), que forman el *subálgebra de Cartan* son los operadores \hat{F}_3 y \hat{F}_8 que en la física de partículas elementales están asociados con los operadores de proyección de isoespín e hipercarga respectivamente como

$$\hat{F}_3 = \hat{I}_3, \quad \hat{F}_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{Y} \quad (1.7)$$

Siguiendo la misma idea y utilizando los demás generadores se pueden construir a los operadores de escalón para el álgebra de $SU(3)$ en la física de la simetría de sabor (ver apéndice B) como siguen

$$\hat{I}_\pm = \hat{F}_1 \pm i\hat{F}_2, \quad \hat{V}_\pm = \hat{F}_4 \pm i\hat{F}_5, \quad \hat{U}_\pm = \hat{F}_6 \pm i\hat{F}_7 \quad (1.8)$$

Teniendo estos operadores, puede reescribirse el álgebra del grupo $SU(3)$ (B.38) en términos de ellos como

$$\begin{aligned}
[\hat{U}_+, \hat{V}_+] &= [\hat{U}_+, \hat{I}_-] = [\hat{V}_+, \hat{I}_+] = 0 \\
[\hat{Y}, \hat{I}_3] &= 0 \\
[\hat{Y}, \hat{I}_\pm] &= 0, \quad [\hat{Y}, \hat{U}_\pm] = \pm \hat{U}_\pm, \quad [\hat{Y}, \hat{V}_\pm] = \pm \hat{V}_\pm, \\
[\hat{I}_3, \hat{I}_\pm] &= \pm \hat{I}_\pm, \quad [\hat{I}_3, \hat{U}_\pm] = \mp \frac{1}{2} \hat{U}_\pm, \quad [\hat{I}_3, \hat{V}_\pm] = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_\pm, \\
[\hat{I}_+, \hat{I}_-] &= 2\hat{I}_3, \quad [\hat{U}_+, \hat{U}_-] = \frac{3}{2} \hat{Y} - \hat{I}_3, \quad [\hat{V}_+, \hat{V}_-] = \frac{3}{2} \hat{Y} + \hat{I}_3, \\
[\hat{U}_+, \hat{V}_-] &= \hat{I}_-, \quad [\hat{I}_-, \hat{V}_+] = \hat{U}_+, \quad [\hat{I}_+, \hat{U}_+] = \hat{V}_+.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Para construir el diagrama de peso de la representación fundamental tenemos que definir en primer lugar a $|\phi_m\rangle$ como el vector en el espacio de la representación. Este vector debe cumplir la siguiente ecuación de eigenvalores

$$\hat{F}_i |\phi_m\rangle = m_i |\phi_m\rangle \tag{1.10}$$

donde \hat{F}_i corresponden únicamente a los generadores de Cartan que, en este caso y como vimos arriba, corresponden a los índices $i = 3, 8$. Al conjunto de eigenvalores, m_1, m_2, \dots se les asociarán las componentes de lo que llamaremos los vectores de peso de ϕ .

Una vez que se encontraron los generadores de Cartan (\hat{I}_3 y \hat{Y}) procedemos a encontrar sus eigenvalores, por lo que para ello definiremos los vectores base en la siguiente representación

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

donde cada elemento de esta base está asociado a los sabores ligeros de los quarks u , d y s como se muestra en el apéndice B. Hecho esto se obtienen las siguientes ecuaciones de eigenvalores

$$\begin{aligned}
\hat{I}_3 |u\rangle &= \frac{1}{2} |u\rangle & \hat{I}_3 |d\rangle &= -\frac{1}{2} |d\rangle & \hat{I}_3 |s\rangle &= 0 \\
\hat{Y} |u\rangle &= \frac{1}{3} |u\rangle & \hat{Y} |d\rangle &= \frac{1}{3} |d\rangle & \hat{Y} |s\rangle &= -\frac{2}{3} |s\rangle
\end{aligned} \tag{1.12}$$

El par ordenado de los valores propios (m_1, m_2) correspondiente cada vector base constituirá un punto en el diagrama de peso. Como resultado de ello obtenemos un triplete en el espacio cuyos ejes son I_3 y Y , tal como se muestra en la figura 1.1.

Existe otra forma para clasificar los multipletes de un grupo de transformaciones utilizando las etiquetas (λ, μ) o bien la dimensión de la representación

$$\dim(\lambda, \mu) = \frac{1}{2}(\lambda + 1)(\mu + 1)(\lambda + \mu + 2) \tag{1.13}$$

Así entonces podemos identificar al triplete de la representación fundamental de $SU(3)$ con las etiqueta $(1, 0)$ o en términos de su dimensión como **3**. En el mismo sentido podemos expresar a los estados de

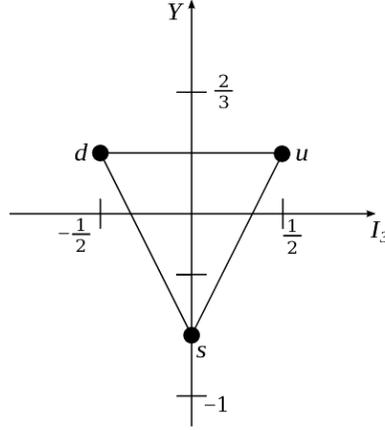


Figura 1.1: Diagrama de peso de la representación fundamental de $SU(3)$ donde se muestra el triplete de quarks $(1,0)$

la base (1.11) con las etiquetas $|(\lambda, \mu)I, I_3, Y\rangle$ los cuales quedan como sigue

$$\begin{aligned}
 |u\rangle &= |(1, 0)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}}\rangle \\
 |d\rangle &= |(1, 0)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}}\rangle \\
 |s\rangle &= |(1, 0)_{0, 0, -\frac{2}{3}}\rangle.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Teniendo estos estados y los operadores de escalón (1.8), se puede pasar de un vector de la base en el diagrama de peso haciendo uso de estos operadores. Al utilizar la representación matricial y usando la base (1.11) es sencillo concluir que (véase la figura 1.2)

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_{\pm}|u\rangle &= \hat{I}_{+}|u\rangle = \hat{V}_{+}|u\rangle = 0 \\
 \hat{V}_{\pm}|d\rangle &= \hat{I}_{-}|d\rangle = \hat{U}_{+}|d\rangle = 0 \\
 \hat{I}_{\pm}|s\rangle &= \hat{V}_{-}|s\rangle = \hat{U}_{-}|s\rangle = 0 \\
 \hat{I}_{-}|u\rangle &= |d\rangle \quad \hat{I}_{+}|d\rangle = |u\rangle \\
 \hat{V}_{-}|u\rangle &= |s\rangle \quad \hat{V}_{+}|s\rangle = |u\rangle \\
 \hat{U}_{-}|d\rangle &= |s\rangle \quad \hat{U}_{+}|s\rangle = |d\rangle
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Como puede verse en la figura 1.2 y usando las ecuaciones de las relaciones de conmutación (1.9) puede obtenerse fácilmente que los operadores de escalón cambian el valor de isoespín, I , la proyección de isoespín, I_3 y de la hipercarga Y de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{\pm} &: \quad \Delta I_3 = \pm 1, \quad \Delta Y = 0, \quad |\Delta I| = 0 \\
 \hat{V}_{\pm} &: \quad \Delta I_3 = \pm \frac{1}{2}, \quad \Delta Y = \pm 1, \quad |\Delta I| = \frac{1}{2} \\
 \hat{U}_{\pm} &: \quad \Delta I_3 = \mp \frac{1}{2}, \quad \Delta Y = \pm 1, \quad |\Delta I| = \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

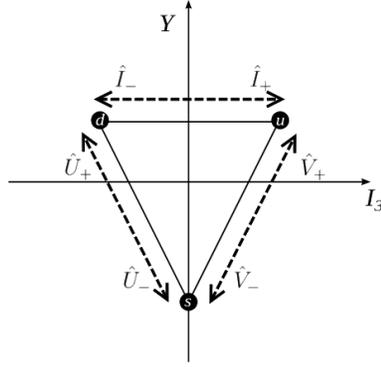


Figura 1.2: Acción de los operadores de escalón \hat{I}_\pm , \hat{U}_\pm y \hat{V}_\pm en la representación del diagrama de peso $I_3 - Y$

Explícitamente al aplicar los operadores de escalón a cualquier vector $|I, I_3, Y\rangle$ (donde a cualquier vector se refiere a cualesquiera valores Y , I y I_3 , incluyendo los valores para los estados base de sabor de los quarks mencionados antes, y que nos serán útiles en los siguientes capítulos para los estados de multiquarks como los bariones y mesones) se tiene una ecuación de eigenvalores, cuyos valores propios están dados en una forma más general, como una forma larga aunque sencilla de demostrarse, como

$$\hat{I}_\pm |I, I_3, Y\rangle = \sqrt{(I \mp I_3)(I \pm I_3 + 1)} |I, I_3 \pm 1, Y\rangle, \quad (1.18)$$

$$\hat{V}_\pm |I, I_3, Y\rangle = a_\pm \left| I + \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle + b_\pm \left| I - \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle, \quad (1.19)$$

$$\hat{U}_\pm |I, I_3, Y\rangle = c_\pm \left| I + \frac{1}{2}, I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle + d_\pm \left| I - \frac{1}{2}, I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle, \quad (1.20)$$

donde los coeficientes vienen dados por los elementos de matriz

$$\begin{aligned} a_\pm &= |I, I_3, Y\rangle = \left\langle I + \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1 \left| \hat{V}_\pm \right| I, I_3, Y \right\rangle, \\ b_\pm &= |I, I_3, Y\rangle = \left\langle I - \frac{1}{2}, I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1 \left| \hat{V}_\pm \right| I, I_3, Y \right\rangle, \\ c_\pm &= |I, I_3, Y\rangle = \left\langle I + \frac{1}{2}, I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1 \left| \hat{U}_\pm \right| I, I_3, Y \right\rangle, \\ d_\pm &= |I, I_3, Y\rangle = \left\langle I - \frac{1}{2}, I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1 \left| \hat{U}_\pm \right| I, I_3, Y \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.21)$$

que siguen la convención de fases de De Swart [51] y están dados en [14].

Una vez formulada el álgebra de los operadores $SU(3)$ para el multiplete de quarks, terminaremos esta sección siguiendo los mismos pasos que hemos hecho para la representación conjugada del diagrama de peso visto anteriormente. Esto será de especial utilidad para describir las propiedades de los quarks “conjugados”, o mejor dicho en física, de los antiquarks. El hecho de que esto funcione de manera análoga es que la diferencia fundamental entre los quarks y los antiquarks es el cambio de signo en la carga eléctrica, dejando el resto de sus números cuánticos igual. Al observar de nuevo la

relación de Gell-Mann-Nishijima (1.1), de donde podemos concluir que la hipercarga y la proyección de isoespín tienen que cambiar de signo. Esto se refleja en el diagrama de peso de la representación fundamental para los quarks como una reflexión sobre el eje de hipercarga, Y , y de proyección de isoespín, I_3 para cada vértice, como se muestra en la figura 1.3 (véase apéndice B para la representación conjugada). A esta representación se le llamará el antitriplete de quarks, o bien en términos de su dimensión como $\bar{\mathbf{3}}$.

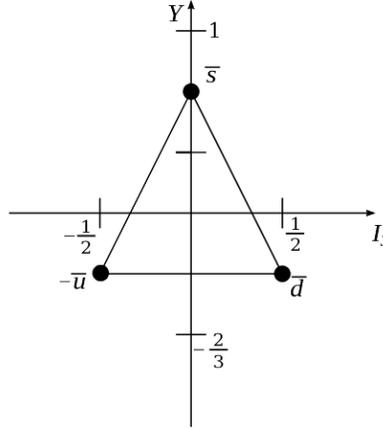


Figura 1.3: Diagrama de peso de la representación fundamental conjugada para los antiquarks en el espacio $I_3 - Y$

Todo esto nos será útil más adelante, donde la representación fundamental de $SU(3)$ y su representación conjugada es justamente la base para la construcción de las funciones de onda de los bariones y mesones del modelo de quarks constituyentes, donde los componentes en estas funciones de onda de los bariones y los mesones corresponderán a la composición de la base en esta representación.

1.4. Bariones qqq

Los bariones son fermiones con número bariónico $\mathcal{B} = 1$, es decir, en el caso más general, se considera que estos están compuestos por tres quarks más algún número de pares quark-antiquark con una contribución de gluones. En el modelo de quarks constituyentes se consideran muchas veces bariones como configuraciones de 3 quarks (qqq). La parte de color de su función de onda es un singulete de $SU(3)$, un estado completamente antisimétrico de los tres colores, lo que es únicamente válido para este caso de 3 quarks efectivos. Como los quarks son fermiones, la función de onda del barión debe ser una función de onda antisimétrica bajo el intercambio de cualesquiera dos quarks de igual masa (u y d en el límite de simetría de isoespín y u , d y s en el límite de simetría de sabor). Así puede escribirse como

$$|\Psi\rangle_{total} = |\psi_r\rangle_{orb} \otimes |\phi\rangle_{sabor} \otimes |\chi\rangle_{espin} \otimes |\psi_c\rangle_{color}. \quad (1.22)$$

Un postulado fundamental propuesto por Gell-Mann era que los componentes de la función total, los quarks, tenían espín semi-entero, o en otras palabras, eran fermiones. Hecho esto cuando acoplamos el número cuántico de espín (así como de isoespín) para tres de ellos, el resultado es que el estado final también tenía que corresponder a un fermión, es decir, la función de onda total tenía que ser una función antisimétrica bajo el intercambio de cualesquiera dos componentes. En este punto nadie tenía idea del grado de libertad del color en la función de onda de los bariones y un problema fundamental era que usando solamente el sabor y el espín en la descripción de los hadrones con la representación

fundamental de $SU(3)$ era que siempre se obtenía una función de onda simétrica, considerando el estado base ($|\psi\rangle_{orb}$ simétrica).

Como se sabía que esto debía ser un fermión y que cumpliera el principio de exclusión de Pauli, se introdujo así el estado de color $|\psi\rangle_{color}$ como una función antisimétrica, considerando los tres grados de libertad correspondientes mencionados antes, *i.e.*

$$|\psi_B\rangle_{color} = \frac{1}{\sqrt{6}}(rgb - grb + brg - rbg + gbr - bgr) \quad (1.23)$$

donde $|\psi_B\rangle_{color}$ denota la función de onda de color para estados de tres quarks, es decir, bariones. Una característica de las partículas físicas es que son escalares en el espacio de color (razón por la que también no se había observado esto como un grado de libertad), es decir, que $grb = 0$ en cualquiera de sus combinaciones.

En cuanto al sabor, es importante mencionar la forma fundamental en que se acoplan los estados de tres quarks $|q\rangle \otimes |q\rangle \otimes |q\rangle$. Debido a que cada elemento $|q\rangle$ es un elemento de la representación fundamental $SU(3)$ o bien $SU_f(3)$ entonces el producto directo se puede expresar como la suma directa de distintos grupos de acuerdo a sus propiedades de simetría en 27 combinaciones posibles la cuál queda como

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1}_A \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{8}_M \oplus \mathbf{10}_S. \quad (1.24)$$

Esto indica que existe un singulete antisimétrico, $\mathbf{1}_A$, dos octetes con simetría mixta, $\mathbf{8}_M$, y un decuplete totalmente simétrico, $\mathbf{10}_S$.

A continuación se discutirá la construcción de la función de onda de espín-sabor para el caso de los dos octetes posibles y el singulete, así como en otro caso el decuplete completamente simétrico.

1.4.1. Octete

Como vimos antes, los estados con simetría mixta del acoplamiento entre tres estados de sabor de quarks correspondían a dos octetes $\mathbf{8}_M$, los cuales cada uno tiene una simetría distinta respecto al intercambio de los primeros dos componentes (sabor). Las funciones de onda que corresponden a espín-sabor del octete de bariones, $|\psi\rangle_{sabor} \otimes |\psi\rangle_{espín}$, se obtienen al multiplicar los estados de simetría mixta como se muestra en la figura 1.4 su diagrama de peso y que se explicará a continuación esta construcción.

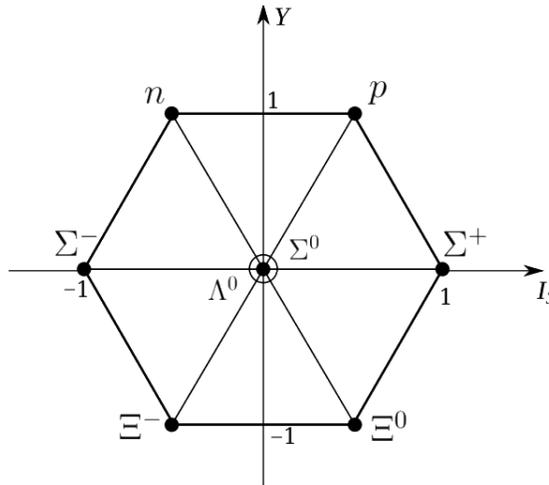


Figura 1.4: Diagrama de peso de los bariones del octete en el espacio $I_3 - Y$

Oscilador armónico

Para explicar los estados de simetría mixta en el octete de bariones es necesario introducir una base en la cuál se pueda expresar las simetrías mixtas del octete de sabores $\mathbf{8}_M$. Para ello podemos ver que el hamiltoniano de la parte espacial para tres cuerpos no relativistas ligados mediante un potencial de oscilador armónico es

$$H = \sum_i^3 \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3), \quad (1.25)$$

donde V es un potencial que depende solamente de las posiciones de los quarks (o de configuración) y se puede expresar como una suma de todas las contribuciones de la interacción entre pares de quarks, es decir,

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \sum_{i \neq j} V_{ij}(r_{ij}). \quad (1.26)$$

donde $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ es la magnitud de la coordenada relativa entre \vec{r}_i y \vec{r}_j , Para el caso de un potencial de oscilador armónico, como primera aproximación analítica y sin interacciones residuales, el potencial tiene la forma

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \frac{1}{2}K(r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{13}^2), \quad (1.27)$$

por lo que el hamiltoniano no relativista y sin interacciones residuales para el oscilador armónico de tres quarks tiene la forma

$$H_0 = \sum_i^3 \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2}K(r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{13}^2). \quad (1.28)$$

Esta ecuación que contiene tres grados de libertad puede ser separable mediante las coordenadas de Jacobi, las cuales representan una base para las funciones de onda de tres quarks y son

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{\lambda} &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 - (m_1 + m_2)\vec{r}_3}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + (m_1 + m_2)^2}} \\ \vec{R} &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

donde $\vec{\rho}$ es la coordenada relativa entre los primeros dos pares de quarks, $\vec{\lambda}$ es la coordenada relativa entre el centro de masa del par anterior con el tercer quark, y \vec{R} es la coordenada del centro de masa. Para un sistema de tres componentes indistinguibles con masas idénticas, $m_1 = m_2 = m_3 = m$ (simetría de sabor) el hamiltoniano (1.28) se diagonaliza como

$$H_0 = H_{CM} + \frac{\vec{p}_\rho^2}{2m} + \frac{\vec{p}_\lambda^2}{2m} + \frac{3K}{2}(\rho^2 + \lambda^2) \quad (1.30)$$

y con las coordenadas de Jacobi como

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \\ \vec{R} &= \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3). \end{aligned} \quad (1.31)$$

De esta manera resulta mucho más sencillo estudiar sistemas de este tipo, en cada uno de sus grados de libertad como veremos a continuación.

Simetrías de permutación

Puede verse que las coordenadas de Jacobi $\vec{\rho}$ y $\vec{\lambda}$ son los estados propios del operador de permutaciones P_{12} cuyo eigenvalor es 1, en otras palabras, son simétricas ante el intercambio de los primeros dos componentes 1 y 2. Por el otro lado, estas no son eigenestados para los componentes 2 y 3, ya que

$$P_{23}\vec{\lambda} = -\frac{1}{2}\vec{\lambda} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\rho}, \quad P_{23}\vec{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\lambda} + \frac{1}{2}\vec{\rho}. \quad (1.32)$$

A los estados que cumplan estas ecuaciones se les asociará con estas etiquetas, así entonces en la función de onda de sabor de los dos octetes con simetría mixta haremos la siguiente asociación

$$\mathbf{8}_M \rightarrow \phi^\rho, \phi^\lambda \quad (1.33)$$

La construcción de estas funciones de onda se explicará a continuación.

Construcción de la funciones de onda espín-sabor.

Para obtener estas funciones de onda de sabor del octete de bariones, definimos el operador de antisimetrización

$$\mathcal{A} = \frac{1}{n!} \sum_P \delta_P P \quad (1.34)$$

donde δ_P se refiere a la paridad de las permutaciones, P , como $\delta_P = (-1)^{n-k}$ con k el número de ciclos y n el número de elementos a antisimetrizar. Así también el operador de simetrización está dado por

$$\mathcal{S} = \frac{1}{n!} \sum_P P. \quad (1.35)$$

El siguiente paso es tomar un estado de tres partículas con dos partículas idénticas y luego antisimetrizar y simetrizar utilizando los operadores correspondientes (1.34) y (1.35). Se tomará en primer lugar el estado $|uud\rangle$ como sigue

$$\begin{aligned} |\phi^1\rangle &= \mathcal{A}_{13}\mathcal{S}_{12}|uud\rangle = \frac{1}{4}(e - P_{13})(e + P_{12})|uud\rangle = \frac{1}{2}(|uud\rangle - |duu\rangle) \\ |\phi^2\rangle &= \mathcal{A}_{23}\mathcal{S}_{12}|uud\rangle = \frac{1}{4}(e - P_{23})(e + P_{12})|uud\rangle = \frac{1}{2}(|uud\rangle - |udu\rangle) \\ |\phi^3\rangle &= \mathcal{A}_{12}\mathcal{S}_{13}|uud\rangle = 0 \\ |\phi^4\rangle &= \mathcal{A}_{12}\mathcal{S}_{23}|uud\rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

Podemos observar que los estados $|\phi^1\rangle$ y $|\phi^2\rangle$ tienen la misma simetría que el caso de los estados $|\phi^\lambda\rangle$ y $|\phi^\rho\rangle$ respectivamente, por lo que se hará simplemente esta asociación a cada uno. Otra cosa importante es que los estados de sabor deben de ser una base ortonormal, pero normalizando y haciendo la combinación lineal adecuada tenemos que la base ortonormal queda como

$$\begin{aligned} |\phi^\lambda\rangle &= \mathcal{N}_\lambda(|\phi^1\rangle + |\phi^2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|uud\rangle - |udu\rangle - |duu\rangle) \\ |\phi^\rho\rangle &= \mathcal{N}_\rho(|\phi^1\rangle - |\phi^2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|udu\rangle - |duu\rangle) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Barión	$ (\lambda, \mu)I, I_3, Y\rangle$	$ \phi^\lambda\rangle$	$ \phi^\rho\rangle$
p	$ (1, 1)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 uud\rangle - udu\rangle - duu\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(udu\rangle - duu\rangle)$
n	$ (1, 1)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(udd\rangle + dud\rangle - 2 ddu\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(udd\rangle - dud\rangle)$
Σ^+	$ (1, 1)1, 1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(usu\rangle + suu\rangle - 2 uus\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(suu\rangle - usu\rangle)$
Σ^0	$ (1, 1)1, 0, 0\rangle$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}(2 uds\rangle + 2 dus\rangle - sdu\rangle - sud\rangle - usd\rangle - dsu\rangle)$	$\frac{1}{2}(sdu\rangle + sud\rangle - usd\rangle - dsu\rangle)$
Σ^-	$ (1, 1)1, -1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(dsd\rangle + sdd\rangle - 2 dds\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(sdd\rangle - dsd\rangle)$
Λ^0	$ (1, 1)0, 0, 0\rangle$	$\frac{1}{2}(sud\rangle - sdu\rangle + usd\rangle - dsu\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(2 uds\rangle - 2 dus\rangle + sdu\rangle - sud\rangle + usd\rangle - dsu\rangle)$
Ξ^0	$ (1, 1)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 ssu\rangle - uss\rangle - sus\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(sus\rangle - uss\rangle)$
Ξ^-	$ (1, 1)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 ssd\rangle - dss\rangle - sds\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(sds\rangle - dss\rangle)$

Cuadro 1.2: Estados de simetría mixta de tres quarks en los bariones del octete $J^P = \frac{1}{2}^+$.

Estos estados corresponden a los estados de simetría mixta de sabor para el protón. El resto de los estados pueden obtenerse de manera análoga o también usando los operadores de escalón en las ecuaciones (1.18), (1.20) y (1.19). Véanse también las figuras 1.2 y 1.4. Las funciones de sabor de simetría mixta para el octete de bariones están mostradas explícitamente en la tabla 1.2.

Hemos ya discutido la estructura de las funciones de simetría mixta de sabor para el octete, por lo que ahora se discutirá la estructura de las funciones de onda (estados) de espín, para completar esta parte.

Para que la función de onda completa del barión (1.22) sea una función antisimétrica, el producto $\chi\phi$ debe de ser una función simétrica, por lo que tomamos la única combinación simétrica normalizada

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi^\rho\phi^\rho + \chi^\lambda\phi^\lambda) \quad (1.38)$$

con ϕ^ρ y ϕ^λ definidas en la tabla 1.2. χ^ρ y χ^λ representan estados de espín $S = \frac{1}{2}$ con simetría de permutación ρ y λ , respectivamente. Ellos pueden contruirse de igual manera a partir de $\phi_{p(n)}^\rho$ y $\phi_{p(n)}^\lambda$ si hacemos la analogía con el reemplazamiento

$$u \rightsquigarrow \uparrow, \quad d \rightsquigarrow \downarrow$$

donde \uparrow y \downarrow son los estados de proyección de espín $S_z = +\frac{1}{2}$ y $S_z = -\frac{1}{2}$ respectivamente, i. e.,

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \uparrow; \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \downarrow.$$

Los estados de tres partículas de simetría mixta y $S = \frac{1}{2}$, $S_z = +\frac{1}{2}$ son

$$\chi_{\frac{1}{2}}^\lambda = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \quad (1.39)$$

$$\chi_{\frac{1}{2}}^{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \quad (1.40)$$

utilizando de manera análoga el operador de escalón S_- como el caso I_- de la ecuación (1.18) con el reemplazamiento arriba señalado, pueden obtenerse aquellos estado de espín que tienen valores $S = \frac{1}{2}$, $S_z = -\frac{1}{2}$ los cuales son

$$\chi_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(2\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \quad (1.41)$$

$$\chi_{-\frac{1}{2}}^{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow). \quad (1.42)$$

Una vez hecho esto, tenemos ya la estructura de la función de onda de espín-sabor para los estados del octete con espín $J = \frac{1}{2}$ y $J = -\frac{1}{2}$. Los estados para el espín $J = \frac{1}{2}$ se muestran en el apéndice A.

1.4.2. Decuplete

Construcción de las funciones de onda espín-sabor

Para que la función de onda total de los bariones sea antisimétrica, las funciones en el espacio de espín-sabor, como se ha venido mencionando, deben ser simétricas. De esta manera, el decuplete de sabor $\mathbf{10}_S$ se acopla con el estado de espín $J = 3/2$ para formar estados completamente simétricos de espín-sabor. Estos estados corresponden al decuplete de bariones con proyección máxima $J = \frac{3}{2}$ cuyo diagrama de peso se muestra en la Figura 1.5.

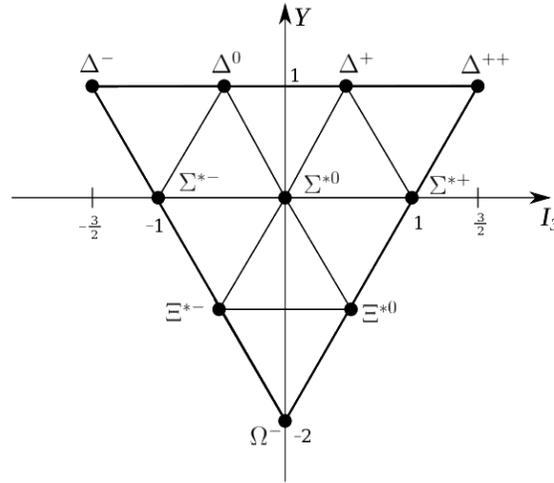


Figura 1.5: Diagrama de peso de los bariones del decuplete en el espacio $I_3 - Y$

Como vemos la única combinación posible, tanto en el estado de sabor (isoespín) como en el estado de espín, cuyos valores tengan la proyección máxima, es la combinación simétrica para un sistema de tres componentes. El estado con proyección máxima de espín $J_z = \frac{3}{2}$ completamente simétrico es

$$\chi_{\frac{3}{2}}^S = \uparrow\uparrow\uparrow \quad (1.43)$$

Y utilizando el operador de escalón \hat{S}_- se pueden obtener los estados completamente simétricos

para los valores de proyección espín $J_z = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, como

$$\begin{aligned}\chi_{\frac{1}{2}}^S &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow) \\ \chi_{-\frac{1}{2}}^S &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow) \\ \chi_{-\frac{3}{2}}^S &= \downarrow\downarrow\downarrow\end{aligned}\tag{1.44}$$

Para la parte de sabor es muy sencillo obtener los estados totalmente simétricos, los cuáles son los triviales $|uuu\rangle, |ddd\rangle, |sss\rangle$; es fácil obtener los demás estados aplicando los operadores de escalón (1.18), (1.20), (1.19). Otra alternativa para los casos no triviales donde tenemos componentes no idénticas es simplemente obtener los estados simétricos aplicando el operador de simetrización (1.35) como en el caso anterior. Como un ejemplo ilustrativo para el estado $|q_1q_2q_3\rangle$ tenemos el caso particular

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{123}|uus\rangle &= \frac{1}{3!}(e + P_{12} + P_{13} + P_{23} + P_{123} + P_{132})|uus\rangle \\ &= \frac{1}{3}(|uus\rangle + |usu\rangle + |suu\rangle)\end{aligned}\tag{1.45}$$

Cuando se normaliza adecuadamente este estado totalmente simétrico se obtiene la función de onda de sabor para el hiperón (estados con un quark extraño) Σ^{*+} . Pueden verse las funciones de onda de sabor para todos los bariones del decuplete en la tabla 1.3.

Barión	$ (\lambda, \mu)I, I_3, Y\rangle$	$ \phi^S\rangle$
Δ^{++}	$ (3, 0)\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\rangle$	$ uuu\rangle$
Δ^+	$ (3, 0)\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uud\rangle + udu\rangle + duu\rangle)$
Δ^0	$ (3, 0)\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu\rangle + dud\rangle + udd\rangle)$
Δ^-	$ (3, 0)\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1\rangle$	$ ddd\rangle$
Σ^{*+}	$ (3, 0)1, 1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uus\rangle + usu\rangle + suu\rangle)$
Σ^{*0}	$ (3, 0)1, 0, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds\rangle + dus\rangle + usd\rangle + sud\rangle + sdu\rangle + dsu\rangle)$
Σ^{*-}	$ (3, 0)1, -1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dds\rangle + dsd\rangle + sdd\rangle)$
Ξ^{*0}	$ (3, 0)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uss\rangle + sus\rangle + ssu\rangle)$
Ξ^{*-}	$ (3, 0)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dss\rangle + sds\rangle + ssd\rangle)$
Ω^-	$ (3, 0)0, 0, -2\rangle$	$ sss\rangle$

Cuadro 1.3: Funciones de onda de sabor simétricas de los bariones del decuplete $J^P = \frac{3}{2}^+$.

Una vez obtenidos los estados simétricos para el espín y para el sabor, las funciones de onda de espín-sabor en los bariones del decuplete, por ser una función simétrica, es simplemente

$$\Psi = \phi^S \chi^S,\tag{1.46}$$

donde pueden obtenerse fácilmente para los distintos casos de sabor y de espín correspondientes.

1.5. Mesones $q\bar{q}$

Los mesones se consideran como los estados formados por dos partículas que reproducen un singulete de sabor y de color, es decir, un estado del tipo $q\bar{q}$. La función de onda total para los estados de un mesón puede expresarse de la misma manera como en la ecuación (1.22) con los mismos grados de libertad para el caso del barión como mencionamos antes, la primera diferencia entre la función de onda explícita del barión será la parte correspondiente a la función de onda de color. Una manera para formar un singulete de color es la combinación directa quark-antiquark en un estado base, debido a que el antiquark lleva una carga opuesta de color al quark, es decir, transforma invariante como un singulete de color bajo $SU(3)_c$. También es claro que $q\bar{q}$ transforma bajo $SU(3)_f$ como un singulete de sabor. Debido a que hay 3 sabores, 2 partículas (quark y antiquark) y 2 posibles espines, hay un total de $3 \times 3 \times 2 = 18$ combinaciones o distintos estados, o bien

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \quad (1.47)$$

donde vemos que de acuerdo a sus simetrías pueden existir dos octetes con sus respectivos singuletes.

Cabe mencionar que el principio de Pauli, para que la función de onda total sea antisimétrica, ya no es útil aquí, puesto que los componentes implicados en ella no son idénticos. La función de onda espacial seguirá siendo simétrica en el estado base. La función de onda de color es con toda comodidad una función neutra en el espacio de color, la cual se construye a partir de las combinaciones posibles de color y anti-color con la propiedad anterior como

$$|\psi_M\rangle_{color} = \frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g}). \quad (1.48)$$

1.5.1. Construcción de las funciones de onda espín-sabor

Comenzaremos con la construcción de la función de onda de espín para los mesones. Puesto que los mesones se proponen como estados de un quark y un antiquark, entonces cada uno de ellos puede llevar un espín $s_i = \frac{1}{2}$ por lo que en el estado acoplado tenemos que la suma vectorial de los valores de espín cumple

$$|s_1 - s_2| \leq J \leq s_1 + s_2 \quad (1.49)$$

por lo que el espín total, J , del estado acoplado para el mesón puede tomar los valores posibles 1 y 0, es decir, existe un triplete de estados de espín con proyección $J_z = 1, 0, -1$ correspondientes a $J = 1$ como siguen

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \uparrow\uparrow, \\ \chi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow), \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\chi_{-1} = \downarrow\downarrow,$$

así como un singulete de espín correspondiente a $J = 0, J_z = 0$ como

$$\chi_0^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \quad (1.51)$$

Estos dos posibles estados de espín son justamente lo que diferencian a los mesones vectoriales ($J = 1$) y a los mesones pseudoescalares ($J = 0$) los cuales cada uno forman multipletes octete y singulete, como se muestran en las figuras 1.6 y 1.7.

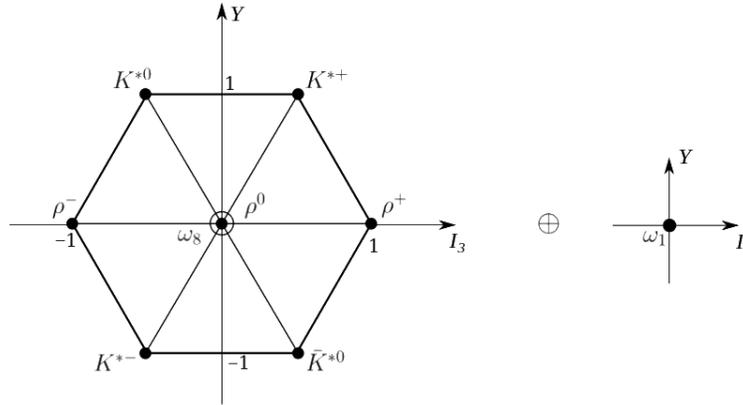


Figura 1.6: Diagrama de peso de los mesones vectoriales, $J^P = 1^-$, en el espacio $I_3 - Y$

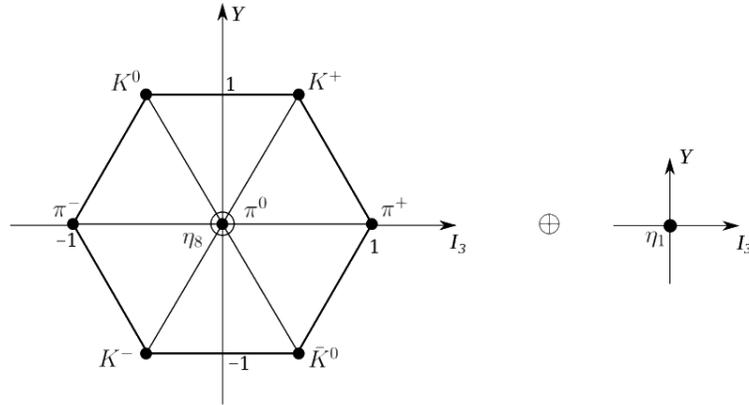


Figura 1.7: Diagrama de peso de los mesones pseudoescalares, $J^P = 0^-$, en el espacio $I_3 - Y$

Para las funciones de onda que corresponden a los estados de sabor de los mesones vemos que para los mesones vectoriales y pseudoescalares estas son exactamente las mismas, como se ve en los diagramas de peso correspondientes, excepto por un signo, lo que hará que sean funciones ortogonales. De los diagramas de peso se observa que en cada octete hay dos dobletes de isoespín, un triplete y un singlete de sabor.

Para obtener los dobletes de isoespín se combinan un quark extraño, s o \bar{s} , con un quark u o d , o bien un \bar{u} o \bar{d} . De aquí resultan los estados como se muestran en la tabla 1.4, usando la convención de fases de De Swart [51].

1.5.2. Mezcla de estados isoescalares

Uno de los éxitos en la historia de la física del sabor ha sido la exploración de las simetrías discretas de conjugación de carga (C), paridad (P) y tiempo (T). La simetrías (C) y (P) eran una simetrías conservadas en muchos procesos observados en la que muchos tenían fe, hasta que en 1956 se observó en decaimientos de Kaones cargados que (C) y (P) no eran conservadas por la interacción débil, y algunos físicos mantuvieron su entonces credibilidad de la simetría compuesta, (CP) como

Mesón pseudoescalar(vectorial)	Función de onda de sabor
$K^+(K^{+*})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{s} \pm \bar{s}u)$
$K^0(K^{0*})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{s} \pm \bar{s}d)$
$K^-(K^{-*})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{u} \pm \bar{u}s)$
$\bar{K}^0(\bar{K}^{0*})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{d} \pm \bar{d}s)$
$\pi^+(\rho^+)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{d} \pm \bar{d}u)$
$\pi^-(\rho^-)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{u} \pm \bar{u}d)$
$\pi^0(\rho^0)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}[(d\bar{d} - u\bar{u}) \pm (\bar{d}d - \bar{u}u)]$
$\eta_8(\omega_8)$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}[(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \pm (\bar{u}u - \bar{d}d - 2\bar{s}s)]$
$\eta_1(\omega_1)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}[(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \pm (\bar{u}u - \bar{d}d + \bar{s}s)]$

Cuadro 1.4: Estados de sabor y sus permutaciones para mesones pseudoescalares y vectoriales que contienen quarks u , d y s .

una buena simetría para las interacciones, pero tiempo después, en 1964, el decaimiento $K_L \rightarrow \pi\pi$ fue observado estableciendo la violación de CP [44]. La segunda propuesta del modelo estándar, cuya construcción fué hecha a finales de esta década [45], no consideraba aún este fenómeno. Teniendo esto en cuenta, para procesos que no involucran la interacción débil, se considera a CP como una buena simetría y los estados isoescalares de mesones con los mismos números cuánticos J^{PC} se pueden mezclar y formar observables físicos. En particular los mesones pseudoescalares η_8 y η_1 se mezclan para formar otros dos estados físicos pseudoescalares como una mezcla de las funciones de onda de $SU(3)$ mediante la transformación finita que actúa en este espacio como

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_8 \cos \theta_P - \eta_1 \sin \theta_P \\ \eta' &= \eta_8 \sin \theta_P + \eta_1 \cos \theta_P\end{aligned}\tag{1.52}$$

donde a θ_P se le conoce como el ángulo de mezcla entre el octete y el singlete de estos mesones (nonete). Al utilizar las funciones de onda, descritas en la tabla 1.4 y sustituirlas en las ecuaciones anteriores, se obtiene la base física para los mesones η' y η . Una forma de conocer el valor del ángulo de mezcla de estos mesones pseudoescalares se puede obtener a partir de las comparaciones las mediciones de las anchuras parciales de J/ψ decayendo a un vector y un pseudoescalar [46], decaimientos radiativos de $\phi(1020)$ en mesones η y η' [47], o en aniquilaciones $p\bar{p}$ yendo a un par vector-pseudoescalar o en dos pseudoescalares [48, 49]. El ángulo de mezcla que se puede obtener a partir de ello se encuentra en un intervalo de entre -10° y -20° . En este trabajo se usará el ángulo de mezcla dentro del intervalo reportado en [33] como $\theta_P = -18^\circ$.

Para el caso de los mesones vectoriales ω_1 y ω_8 la mezcla está descrita de manera análoga a la ecuación 1.52, identificando a los estados de los mesones vectoriales físicos como

$$\begin{aligned}\phi &= \omega_8 \cos \theta_V - \omega_1 \sin \theta_V \\ \omega &= \omega_8 \sin \theta_V + \omega_1 \cos \theta_V\end{aligned}\tag{1.53}$$

donde el ángulo de mezcla $\theta_V = 36.4^\circ$ que es un ángulo de mezcla tal que el estado para ϕ es casi un estado puro $s\bar{s}$. Para los propósitos de este trabajo, sólo se utilizan los estados pseudoescalares η y η' .

Capítulo 2

Simetrías

La importancia de la simetría en la física moderna es sumamente crítica. Si bien, es una idealización de los espacios estudiados en física, puede verse también como una aproximación muy conveniente, es decir, en el estudio de los espacios simétricos se hace una suposición sobre la existencia de una estructura precisa como simplemente una idealización matemática, que al representar una situación física esta sería considerada únicamente como un tipo de representación aproximada. Una de las teorías del siglo XX que ha tenido un gran éxito, es el modelo de quarks constituyentes, específicamente con el desarrollo de la teoría de la relatividad, la mecánica cuántica y la teoría de campos en el estudio de la espectroscopia de mesones y bariones como una consecuencia de las simetrías de isoespín y de sabor en las masas de los quarks ligeros, presentes en las funciones de onda de estos hadrones (el ya conocido *eightfold way*). Otro ejemplo famoso del estudio de la simetría de sabor fue la predicción del barión extraño Ω^- , el cual fue descubierto casi inmediatamente después.

En la física de partículas elementales la teoría de grupos ha resultado ser una herramienta poderosa y de gran simplicidad para obtener resultados directos haciendo uso únicamente de las propiedades y de los patrones que poseen estas partículas que pertenecen a cierto grupo de simetría sin necesidad de hacer un extenso cálculo sobre la dinámica de éstas. Justo como se vió en el capítulo anterior, la estructura algebraica que poseen los quarks debido a sus grupos de transformaciones de simetría como el de espín-sabor $SU_{sf}(6)$ y el de color como $SU_c(3)$ y como vimos las posibles combinaciones de ellos nos pueden dar información de la estructura fundamental de los hadrones, que cumplen las mismas reglas de transformación. En este tema no se considerará la simetría de color, por lo que nos centraremos en la simetría de espín-sabor. Hemos visto que la simetría de espín-sabor puede descomponerse en dos grupos independientes, de espín y de sabor como

$$SU_{sf}(6) \supset SU_f(3) \otimes SU_s(2),$$

lo que a su vez, puede descomponerse la simetría de sabor (o bien de isoespín) en la simetría de sabor de los quarks u y d (incluye a los anti-quarks) $SU_I(2)$ y simetría de hipercarga $U_Y(1)$ para el quark extraño $s(\bar{s})$

$$SU_f(3) \supset SU_I(2) \otimes U_Y(1).$$

Podemos ver a partir de aquí las relaciones de simetría que existen entre los distintos estados que constituyen los bariones de octete y del decuplete que serán bastantes útiles para relacionar sus propiedades de acuerdo a sus valores de espín y de sabor.

2.1. Simetría de isoespín $SU(2)$

Siguiendo el sentido histórico de como iban descubriéndose las simetrías de acuerdo a sus propiedades, discutiremos primeramente la simetría de isoespín $SU_I(2)$. La idea de que este grupo de

simetría podía describir, en un principio al protón y al neutrón, surge a partir de que en ausencia de la interacción electromagnética estas partículas, aparentemente distintas, correspondían a un sólo estado llamado *Nucleón* ante la interacción nuclear fuerte y que formaba un doblete.

Para diferenciar una de la otra partícula vemos que el protón es el único hadrón estable bajo interacciones electrodébiles e interacciones fuertes, teniendo una vida media mayor a 10^{33} años, mientras que el neutrón no es tan estable bajo la interacción electrodébil, decayendo en $885.7s$ (aproximadamente 15 min.). El protón tiene carga positiva y tiene un momento magnético de $2.793\mu_N$, mientras que el neutrón está neutramente cargado y tiene un momento magnético de $-1.913\mu_N$. Podemos notar que estos valores son muy distintos para el neutrón y el protón.

Para ver las similitudes entre ellos notamos que la masa del protón es $m_p = 938.3$ MeV mientras que la del neutrón es $m_n = 939.6$ MeV. La diferencia en masa entre el protón y el neutrón resulta de $m_n - m_p = 1.293$ MeV, lo que para la magnitud de sus masas es prácticamente insignificante. Podemos considerar así, y para fenómenos que dependan de energías mucho mayores que 1.293 MeV, que una buena simetría es considerar a $m_n \cong m_p$. Considerando que la masa del neutrón y del protón son iguales (para evitar este rompimiento de simetría) nace la idea del número cuántico de isospín I , que es independiente al espín y se consideraría un grado de libertad más. Puede verse la tabla 1.2 para ver sus respectivos valores de isospín. El respectivo doblete del nucleón es

$$|p\rangle = \left| I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2} \right\rangle \quad |n\rangle = \left| I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (2.1)$$

que en la representación

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

transforma bajo rotaciones de $SU_I(2)$ con la transformación de isospín \hat{I} (véase apéndice **B.1**),

$$N' = \hat{I}N. \quad (2.3)$$

La simetría de isospín implica que la interacción fuerte con un operador hamiltoniano \hat{H} conmuta con \hat{I} ,

$$[\hat{I}, \hat{H}] = 0. \quad (2.4)$$

Podemos expresar estos operadores en el espacio de espín-sabor usando la segunda cuantización en términos de operadores de creación y aniquilación como

$$\hat{I}_+ = \hat{u}_\uparrow^\dagger \hat{d}_\uparrow + \hat{u}_\downarrow^\dagger \hat{d}_\downarrow, \quad \hat{I}_- = \hat{d}_\uparrow^\dagger \hat{u}_\uparrow + \hat{d}_\downarrow^\dagger \hat{u}_\downarrow, \quad (2.5)$$

donde puede notarse que estos operadores son escalares en el espacio de espín (dejan invariantes las proyecciones de espín de los quarks), actuando únicamente en el espacio de isospín, cambiando la proyección de este, es decir, \hat{I}_+ (\hat{I}_-) aniquila un quark d (u) y crea otro quark u (d) en el estado de Fock correspondiente a la función de onda del nucleón (consideraremos en este capítulo los operadores correspondientes a los antiquarks como una extensión aditiva trivial de los operadores de espín y sabor, teniendo en cuenta que los estados antiquark transforman de la misma forma que los estados de quarks como se ve en el apéndice **B.2**).

Como vimos en el capítulo anterior, en el modelo de quarks, el protón y el neutrón pueden considerarse compuestos por estados más fundamentales como los quarks uud y ddu respectivamente (figura 1.4). En este mismo sentido puede llevarse la simetría de isospín a los mismos estados de quarks u y d los cuales forman el doblete de isospín de $SU_I(2)$. (Véase la figura 1.1 y 1.3). Como se ve en la tabla 1.2 o en (2.1) para los valores de isospín del protón y el neutrón y de acuerdo a la ecuación (1.18), estos dos estados están relacionados como

$$|\psi_p\rangle = \hat{I}_+ |\psi_n\rangle \quad |\psi_n\rangle = \hat{I}_- |\psi_p\rangle \quad (2.6)$$

por lo que podemos calcular el valor esperado para cualquier operador (lo que más adelante nos servirá para calcular el valor observable que justamente es el valor esperado para el operador de momento magnético) y este expresarlo para los distintos multipletes en términos de uno solo, una herramienta completamente práctica con el sólo uso de la simetría de isoespín a la que pertenecen estas partículas. Como ejemplo tenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n | \hat{O} | \psi_n \rangle &= \langle \psi_n | \hat{O} I_- | \psi_p \rangle \\
&= \langle \psi_n | I_- \hat{O} + [\hat{O}, I_-] | \psi_p \rangle \\
&= \langle \psi_p | \hat{O} | \psi_p \rangle + \langle \psi_p | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_p \rangle.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

También tenemos el caso inverso

$$\langle \psi_p | \hat{O} | \psi_p \rangle = \langle \psi_n | \hat{O} | \psi_n \rangle + \langle \psi_n | [I_-, [\hat{O}, I_+]] | \psi_n \rangle \tag{2.8}$$

Esto mismo se puede hacer para los demás multipletes de bariones. En el caso del multiplete de bariones Σ del octete y Σ^* del decuplete, se ven idénticos frente al número cuántico de isoespín de acuerdo a la correspondiente carga. De esta forma ocurre también para las partículas Ξ y Ξ^* . Así para los del decuplete tenemos el mismo caso en el octete de las siguientes identidades de estas partículas. Por la ecuación (1.18), como antes, tenemos que

$$\begin{aligned}
I_+ |\psi_{\Sigma^{(*)+}}\rangle &= 0, & I_+ |\psi_{\Sigma^{(*)0}}\rangle &= \sqrt{2} |\psi_{\Sigma^{(*)+}}\rangle, & I_+ |\psi_{\Sigma^{(*)-}}\rangle &= \sqrt{2} |\psi_{\Sigma^{(*)0}}\rangle, \\
I_- |\psi_{\Sigma^{(*)+}}\rangle &= \sqrt{2} |\psi_{\Sigma^{(*)0}}\rangle, & I_- |\psi_{\Sigma^{(*)0}}\rangle &= \sqrt{2} |\psi_{\Sigma^{(*)-}}\rangle, & I_- |\psi_{\Sigma^{(*)-}}\rangle &= 0,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

por lo que tenemos que

$$\langle \psi_{\Sigma^{(*)0}} | \hat{O} | \psi_{\Sigma^{(*)0}} \rangle = \langle \psi_{\Sigma^{(*)+}} | \hat{O} | \psi_{\Sigma^{(*)+}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \psi_{\Sigma^{(*)+}} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Sigma^{(*)+}} \rangle, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\Sigma^{(*)-}} | \hat{O} | \psi_{\Sigma^{(*)-}} \rangle &= \langle \psi_{\Sigma^{(*)0}} | \hat{O} | \psi_{\Sigma^{(*)0}} \rangle + \frac{1}{2} \left(\langle \psi_{\Sigma^{(*)0}} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Sigma^{(*)0}} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \psi_{\Sigma^{(*)+}} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Sigma^{(*)+}} \rangle \right)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Para el multiplete de bariones Ξ y Ξ^* tenemos el caso análogo al caso del protón y el neutrón en las ecuaciones (2.8) y (2.7) puesto que tienen el mismo número de isoespín correspondiente, ya que forma un doblete de isoespín de la manera análoga. Entonces

$$\langle \psi_{\Xi^{(*)-}} | \hat{O} | \psi_{\Xi^{(*)-}} \rangle = \langle \psi_{\Xi^{(*)0}} | \hat{O} | \psi_{\Xi^{(*)0}} \rangle + \langle \psi_{\Xi^{(*)0}} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Xi^{(*)0}} \rangle. \tag{2.12}$$

Para el caso del multiplete Δ que es el único que tiene una degeneración en un cuádruplete debido a su valor de isoespín $I = \frac{3}{2}$ tenemos que

$$\langle \psi_{\Delta+} | \hat{O} | \psi_{\Delta+} \rangle = \langle \psi_{\Delta++} | \hat{O} | \psi_{\Delta++} \rangle + \frac{1}{3} \langle \psi_{\Delta++} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Delta++} \rangle, \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\Delta^0} | \hat{O} | \psi_{\Delta^0} \rangle &= \langle \psi_{\Delta+} | \hat{O} | \psi_{\Delta+} \rangle + \frac{1}{4} \left(\langle \psi_{\Delta+} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Delta+} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \psi_{\Delta++} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Delta++} \rangle \right),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\Delta^-} | \hat{O} | \psi_{\Delta^-} \rangle &= \langle \psi_{\Delta^0} | \hat{O} | \psi_{\Delta^0} \rangle + \frac{1}{3} \left(\langle \psi_{\Delta^0} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Delta^0} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \psi_{\Delta^+} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Delta^+} \rangle + \langle \psi_{\Delta^{++}} | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | \psi_{\Delta^{++}} \rangle \right).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Puede verse directamente que los elementos de matriz mostrados arriba pueden expresarse todos completamente en términos del elemento de matriz con mayor proyección de isoespín por simple sustitución. Por ejemplo el elemento de matriz (2.15) contiene términos de Δ^0 , Δ^+ y Δ^{++} , pero utilizando las dos ecuaciones anteriores puede expresarse en términos de únicamente Δ^{++} . Cabe mencionar que existe una expresión que generaliza los casos anteriores sobre el valor esperado de un operador \hat{O} de un estado de multiplete de isoespín I y proyección $I_3 = I - k - 1$ para expresarlo en términos de los estados de mayor proyección, y que fácilmente puede demostrarse que es

$$\begin{aligned}
\langle I, I - k - 1 | \hat{O} | I, I - k - 1 \rangle &= \langle I, I - k | \hat{O} | I, I - k \rangle \\
&\quad + \sum_{i=0}^k \frac{\langle I, I - k + i | [I_+, [\hat{O}, I_-]] | I, I - k + i \rangle}{(2I - k)(k + 1)}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Para los términos cruzados (elementos de matriz no diagonales) no nulos tenemos

$$\begin{aligned}
\langle p | \hat{O} | \Delta^+ \rangle &= \langle p | \hat{O} \hat{I}_+ | \Delta^0 \rangle \\
&= \langle p | \hat{I}_+ \hat{O} + [\hat{O}, \hat{I}_+] | \Delta^0 \rangle \\
&= \langle p | \hat{I}_+ \hat{O} | \Delta^0 \rangle + \langle p | [\hat{O}, \hat{I}_+] | \Delta^0 \rangle \\
&= \langle n | \hat{O} | \Delta^0 \rangle + \langle p | [\hat{O}, \hat{I}_+] | \Delta^0 \rangle,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

que para el caso en donde el operador es una función de los operadores $SU(2)$ de espín, $\hat{O} = \sum_{i,n} a_{i,n} (\hat{\sigma}_i)^n$, con $\hat{\sigma}_i$ la i -ésima la matriz de Pauli, tenemos que

$$[\hat{O}(\hat{\sigma}), \hat{I}_{\pm}] = 0, \tag{2.18}$$

pues $[\vec{\sigma}, I_{\pm}] = 0$, entonces

$$\langle p | \hat{O}(\hat{\sigma}) | \Delta^+ \rangle = \langle n | \hat{O}(\hat{\sigma}) | \Delta^0 \rangle. \tag{2.19}$$

De forma análoga, las siguientes expresiones son igualmente válidas.

$$\langle \Sigma^+ | \hat{O}(\hat{\sigma}) | \Sigma^{*+} \rangle = \langle \Sigma^- | \hat{O}(\hat{\sigma}) | \Sigma^{*-} \rangle, \tag{2.20}$$

$$\langle \Xi^0 | \hat{O}(\hat{\sigma}) | \Xi^{*0} \rangle = \langle \Xi^- | \hat{O}(\hat{\sigma}) | \Xi^{*-} \rangle. \tag{2.21}$$

Es notable mencionar que estas expresiones pueden usarse en pruebas de consistencia como por ejemplo usar el operador \hat{O} , como el operador de momento magnético o como el operador de contenido de sabor.

2.2. Simetría de espín $SU(2)$

Desde el experimento llevado a cabo en 1922 por Stern y Gerlach [10] y desarrollado un análisis más formal por Uhlenbeck y Goudsmit en 1925 [11] donde mostró que el electrón, como una partícula masiva, tenía un momento magnético intrínseco (llamado espín) e independiente del momento magnético

debido a corrientes espaciales (una degeneración a la energía), que significó el descubrimiento de una simetría más de la naturaleza y un grado de libertad extra interno que entender de las partículas. Un formalismo más elaborado para esto fue necesario, provisto por la mecánica cuántica. Es convencional llamar al espín de una partícula masiva como simplemente el número que codifica, por un lado, el número de estados internos que tiene una partícula, y por otro lado, la manera en que estos estados se mezclan entre sí bajo rotaciones y boost, es decir, la forma en que la partícula cambia su apariencia al realizar transformaciones de Poincaré.

Debido a que las operaciones de las transformaciones de espín, cumplen con la misma algebra $SU(2)$, de las transformaciones de isoespín (espín isotópico), aunque en espacios totalmente independientes (existe una degeneración de estados de quarks debido a $[\mathbf{S}, \mathbf{I}] = 0$), se sigue cumpliendo la ecuación (1.18) para los operadores de escalón de espín, es decir,

$$\hat{S}_{\pm}|S, S_3, Y, I\rangle = \sqrt{(S \mp S_3)(S \pm S_3 + 1)}|S, S_3 \pm 1, Y, I\rangle, \quad (2.22)$$

entonces, para los bariones del octete, B_8 ($J^P = \frac{1}{2}^+$), y decuplete, B_{10} ($J^P = \frac{3}{2}^+$), usando la notación $|\mathbf{B}, S_z\rangle$, se cumplen

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ \left| B_{10}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{3} \left| B_{10}, \frac{3}{2} \right\rangle, & \hat{S}_- \left| B_{10}, \frac{3}{2} \right\rangle &= \sqrt{3} \left| B_{10}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ \hat{S}_+ \left| B_{10}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= 2 \left| B_{10}, \frac{1}{2} \right\rangle, & \hat{S}_- \left| B_{10}, \frac{1}{2} \right\rangle &= 2 \left| B_{10}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ \left| B_8, \frac{1}{2} \right\rangle &= 0 & \hat{S}_- \left| B_8, \frac{1}{2} \right\rangle &= \left| B_8, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ \hat{S}_+ \left| B_8, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \left| B_8, \frac{1}{2} \right\rangle, & \hat{S}_- \left| B_8, -\frac{1}{2} \right\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\hat{\mu} = \sum_q \mu_q (\hat{q}_\uparrow^\dagger \hat{q}_\uparrow - \hat{q}_\downarrow^\dagger \hat{q}_\downarrow) \quad (2.25)$$

La expresión de los operadores de escalón para el espín, en el espacio de espín-sabor, en segunda cuantización es

$$\hat{S}_+ = \hat{u}_\uparrow^\dagger \hat{u}_\downarrow + \hat{d}_\uparrow^\dagger \hat{d}_\downarrow + \hat{s}_\uparrow^\dagger \hat{s}_\downarrow, \quad \hat{S}_- = \hat{u}_\downarrow^\dagger \hat{u}_\uparrow + \hat{d}_\downarrow^\dagger \hat{d}_\uparrow + \hat{s}_\downarrow^\dagger \hat{s}_\uparrow. \quad (2.26)$$

Así, se puede mostrar fácilmente que

$$[\hat{S}_-, [\hat{S}_+, \hat{\mu}]] = 2\hat{\mu}. \quad (2.27)$$

Usando todas estas expresiones anteriores puede notarse que

$$\begin{aligned} \left\langle B_{10}, \frac{1}{2} \left| \hat{\mu} \right| B_{10}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle B_{10}, \frac{3}{2} \left| \hat{S}_+ \hat{\mu} \right| B_{10}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle B_{10}, \frac{3}{2} \left| [\hat{S}_+, \hat{\mu}] + \hat{\mu} \hat{S}_+ \right| B_{10}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle B_{10}, \frac{3}{2} \left| [\hat{S}_+, \hat{\mu}] \right| B_{10}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left\langle B_{10}, \frac{3}{2} \left| \hat{\mu} \right| B_{10}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{3} \left\langle B_{10}, \frac{3}{2} \left| [[\hat{S}_+, \hat{\mu}], \hat{S}_-] \right| B_{10}, \frac{3}{2} \right\rangle + \left\langle B_{10}, \frac{3}{2} \left| \hat{\mu} \right| B_{10}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ &= -\frac{2}{3} \left\langle B_{10}, \frac{3}{2} \left| \hat{\mu} \right| B_{10}, \frac{3}{2} \right\rangle + \left\langle B_{10}, \frac{3}{2} \left| \hat{\mu} \right| B_{10}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{3} \left\langle B_{10}, \frac{3}{2} \left| \hat{\mu} \right| B_{10}, \frac{3}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Análogamente a esta expresión, se deducen las siguientes

$$\left\langle B_{10}, -\frac{1}{2} \left| \hat{\mu} \right| B_{10}, -\frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{3} \left\langle B_{10}, \frac{3}{2} \left| \hat{\mu} \right| B_{10}, \frac{3}{2} \right\rangle \quad (2.29)$$

$$\left\langle B_8, -\frac{1}{2} \left| \hat{\mu} \right| B_8, -\frac{1}{2} \right\rangle = -\left\langle B_8, \frac{1}{2} \left| \hat{\mu} \right| B_8, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (2.30)$$

$$\left\langle B_8, -\frac{1}{2} \left| \hat{\mu} \right| B_{10}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \left\langle B_8, \frac{1}{2} \left| \hat{\mu} \right| B_{10}, \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (2.31)$$

Estas expresiones, utilizando la simetría de espín, serán de bastante ayuda al simplificar las expresiones obtenidas en el cálculo de los momentos magnéticos y los decaimientos radiativos de los bariones en los distintos modelos de quarks tratados en este trabajo, pues en estos se sigue cumpliendo de manera prácticamente exacta esta simetría.

2.3. Simetría de sabor SU(3)

A principios de la década de 1960 se había descubierto que algunas partículas fuertemente interactuantes podían ser caracterizadas por un número cuántico de extrañeza, conservado en interacciones fuertes y electromagnéticas. Como ejemplo podemos considerar, el octete de bariones, $J^P = \frac{1}{2}^+$ (ver Figura 1.4). El doblete de isoespín tiene extrañeza $S = 0$, el triplete de isoespín Σ y el singulete tienen $S = -1$, y el doblete Ξ tiene extrañeza $S = -2$. La diferencia de masa entre cada partícula de extrañeza unitaria y el nucleón es [33]

$$m_\Lambda - m_N = 177 \text{ MeV}, \quad m_\Sigma - m_N = 254 \text{ MeV}. \quad (2.32)$$

De forma similar, el barión doblemente extraño Ξ es más pesado que Λ y

$$m_\Xi - m_\Lambda = 203 \text{ MeV}. \quad (2.33)$$

La diferencia de masas ~ 200 MeV de estos bariones es mucho más pequeña que la masa entre ellas. Por lo tanto si no hubiera alguna pequeña perturbación que degenerara las masas, el octete de bariones debería de estar degenerado.

La extrañeza representa en este contexto un nuevo número cuántico, es decir, un grado de libertad más que describe también el estado de las partículas, véase la ecuación (1.1).

Algo completamente similar ocurre con los demás multipletes formados por quarks constituyentes, como el decuplete de bariones y los nonetes vectorial y pseudoescalar de mesones. Todos estos multipletes sugieren una simetría interna de $SU(3)$ del espectro de hadrones, la cual incluye la simetría de isoespín $SU(2)$ (1.3), generalizada al grupo $SU(3)$ añadiendo un quark extraño con extrañeza $S = -1$. Como podemos ver en la figuras 1.4-1.7 el arreglo de los bariones y los mesones no sólo constituyen arreglos en multipletes de isoespín de la representación de $SU_I(2)$ sino que también están dispuestos en una simetría extra llamada simetría de hipercarga, debido a los números cuánticos de extrañeza que se les asoció a estas partículas *extrañas* que iban descubriéndose en los decaimientos de los kaones, así como en colisiones *nucleón-pión*, y que sugerían que debería existir un tercer quark, nombrado s (véase sección 1.1).

La asignación de los números cuánticos de extrañeza e isoespín pronto se volvieron azarosos y caóticos, por lo que debió ser mucho mejor organizar las partículas en algún otro grupo de simetría, cosa que Gell-Mann y George Zweig [12] hicieron, introduciendo la simetría $SU(3)$. El arreglo de los bariones en esta simetría se vuelve exacta cuando se considera que la masa del quark s se hace cero ($m_s \rightarrow 0$), de esta forma es idealizado que constituyen la representación del grupo de simetría $SU_f(3)$. Cuando se supone esta simetría de sabor cuando la masa del quark s se vuelve despreciable, los elementos de matriz de los operadores, que cambian la hipercarga que crean o aniquilan un quark extraño, \hat{U}_\pm y \hat{V}_\pm , entre los multipletes de sabor (figuras 1.4 y 1.5) pueden relacionarse con algún otro estado del

multiplete, ya sean del decuplete o del octete, justamente como en la sección anterior para la simetría $SU_I(2)$. Como ejemplo de ello tomaremos al hiperón Λ^0 que es justamente un singulete de sabor. Usando los operadores de escalón de las ecuaciones (1.20) y (1.19), o bien usando las expresiones en segunda cuantización en el espacio de espín-sabor

$$\hat{U}_+ = \hat{d}_\uparrow^\dagger \hat{s}_\uparrow + \hat{d}_\downarrow^\dagger \hat{s}_\downarrow, \quad \hat{U}_- = \hat{s}_\uparrow^\dagger \hat{d}_\uparrow + \hat{s}_\downarrow^\dagger \hat{d}_\downarrow, \quad (2.34)$$

$$\hat{V}_+ = \hat{u}_\uparrow^\dagger \hat{s}_\uparrow + \hat{u}_\downarrow^\dagger \hat{s}_\downarrow, \quad \hat{V}_- = \hat{s}_\uparrow^\dagger \hat{u}_\uparrow + \hat{s}_\downarrow^\dagger \hat{u}_\downarrow, \quad (2.35)$$

y los hacemos actuar sobre los estados del protón y el neutrón, obteniendo que

$$\hat{V}_- |\psi_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_{\Sigma^0}\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}} |\psi_{\Lambda^0}\rangle, \quad (2.36)$$

$$\hat{U}_- |\psi_n\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_{\Sigma^0}\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}} |\psi_{\Lambda^0}\rangle. \quad (2.37)$$

Así entonces se obtiene que este hiperón puede expresarse en términos del proton y del neutrón como

$$|\psi_{\Lambda^0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\hat{V}_- |\psi_p\rangle + \hat{U}_- |\psi_n\rangle \right). \quad (2.38)$$

Por otro lado

$$\hat{V}_+ |\psi_{\Lambda^0}\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} |\psi_p\rangle, \quad \hat{U}_+ |\psi_{\Lambda^0}\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} |\psi_n\rangle \quad (2.39)$$

Con estas ecuaciones, podemos expresar el valor esperado de un operador, siguiendo el mismo procedimiento de la sección anterior, para expresarlo en términos del valor esperado del multiplete de sabor del protón y el neutrón (que a la vez están relacionados entre sí por (2.7)). Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\Lambda^0} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Lambda^0} \rangle &= \frac{1}{6} \left[3 \left(\langle \psi_p | \hat{\mathcal{O}} | \psi_p \rangle + \langle \psi_n | \hat{\mathcal{O}} | \psi_n \rangle \right) \right. \\ &\quad + \langle \psi_p | \left[\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-] \right] | \psi_p \rangle + \langle \psi_p | \left[I_+, [\hat{U}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] \right] | \psi_p \rangle \\ &\quad \left. - \langle \psi_n | \left[I_-, [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{U}_-]] \right] | \psi_n \rangle + \langle \psi_n | \left[\hat{U}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{U}_-] \right] | \psi_n \rangle \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Así como el multiplete de isospín del protón y el neutrón, se obtuvieron las relaciones de los elementos de matriz para los demás multipletes de isospín, por lo que ahora falta relacionar a estos distintos multipletes entre sí. Siguiendo el mismo procedimiento se obtienen las relaciones para el octete como

$$\langle \psi_{\Sigma^+} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Sigma^+} \rangle = \langle \psi_p | \hat{\mathcal{O}} | \psi_p \rangle + \langle \psi_p | \left[\hat{U}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{U}_-] \right] | \psi_p \rangle, \quad (2.41)$$

y

$$\langle \psi_{\Xi^0} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Xi^0} \rangle = \langle \psi_{\Sigma^+} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Sigma^+} \rangle + \langle \psi_{\Sigma^+} | \left[\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-] \right] | \psi_{\Sigma^+} \rangle. \quad (2.42)$$

Con esto basta y quedan completamente relacionados los elementos de matriz entre todos los bariones de octete. Ahora, a diferencia de la simetría $SU_I(2)$ del caso anterior, como los operadores de escalón \hat{U}_\pm y \hat{V}_\pm dependen de las etiquetas (λ, μ) y están diferentes entre el octete y el decuplete, tendremos expresiones distintas al aplicar estos operadores en los bariones del octete. Por ello mismo

obtenemos las siguientes expresiones que relacionan los valores esperados, para el caso del decuplete, como

$$\langle \psi_{\Sigma^{*+}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Sigma^{*+}} \rangle = \langle \psi_{\Delta^{++}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Delta^{++}} \rangle + \frac{1}{3} \langle \psi_{\Delta^{++}} | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Delta^{++}} \rangle, \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\Xi^{*0}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Xi^{*0}} \rangle &= \langle \psi_{\Sigma^{*+}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Sigma^{*+}} \rangle + \frac{1}{4} \left(\langle \psi_{\Sigma^{*+}} | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Sigma^{*+}} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \psi_{\Delta^{++}} | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Delta^{++}} \rangle \right), \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\Omega^-} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Omega^-} \rangle &= \langle \psi_{\Xi^{*-}} | \hat{\mathcal{O}} | \psi_{\Xi^{*-}} \rangle + \frac{1}{3} \left(\langle \psi_{\Xi^{*-}} | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Xi^{*-}} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \psi_{\Sigma^{*+}} | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Sigma^{*+}} \rangle + \langle \psi_{\Delta^{++}} | [\hat{V}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{V}_-]] | \psi_{\Delta^{++}} \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Teniendo estas últimas tres ecuaciones junto con (2.10)-(2.15) tenemos relacionados todos los elementos de matriz entre los bariones del decuplete entre sí. Lo mismo con las ecuaciones (2.7),(2.8), (2.40)-(2.42) para relacionar todos los miembros del octete entre sí. Sin embargo los elementos de matriz entre el octete y el decuplete no están completamente relacionados únicamente usando el grupo de simetría $SU_f(3)$. Es decir no tenemos aquí una relación completamente directa entre el elemento de matriz de un barión del octete y un barión del decuplete, que veremos en la siguiente sección usando la simetría de espín-sabor. Cabe mencionar que los términos cruzados de los elementos de matriz entre los multipletes de isoespín entre octete y decuplete están completamente relacionados con la simetría de isoespín. El objetivo ahora es relacionarlos en la simetría de espín-sabor.

2.4. Simetría de espín-sabor $SU(6)$

Al ampliar la simetría de sabor $SU_f(3)$ a la simetría de espín sabor $SU_{sf}(6)$, además de utilizar los operadores de escalón (1.18), (1.20), (1.19), es necesario definir un nuevo operador que actúe en el espacio de sabor y en el espacio de espín, que como sigue es conveniente expresarlo en términos de los operadores de creación y aniquilación como segunda cuantización,

$$\hat{T}_- = \hat{d}_\downarrow^\dagger \hat{u}_\uparrow \quad \hat{T}_+ = \hat{u}_\uparrow^\dagger \hat{d}_\downarrow, \quad (2.46)$$

con $\hat{d}_\downarrow^\dagger$ y \hat{d}_\downarrow los operadores de creación y aniquilación de un quark d respectivamente con proyección de espín $S = -\frac{1}{2}$, mientras que \hat{u}_\uparrow^\dagger y \hat{u}_\uparrow son los operadores de creación y aniquilación de un quark u con proyección de espín $\frac{1}{2}$. La naturaleza de este operador es la de cambiar la proyección de espín en $\Delta S_z = \pm 1$ a la vez que la proyección de isoespín en $\Delta I_3 = \pm 1$ según sea el caso. Este operador nos ayudará a relacionar los estados del octete de bariones, cuya proyección máxima de espín es de $S_z = \frac{1}{2}$ con los bariones del octete con proyección máxima de espín $S_z = \frac{3}{2}$. Para ello encontraremos la relación más directa la cuál es entre el estado del protón con proyección de espín $S_z = \frac{1}{2}$, $|\psi_p, \frac{1}{2}\rangle$, y el estado de Δ^{++} con proyección $S_z = \frac{3}{2}$, $|\psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2}\rangle$. De acuerdo a esto aplicamos los operadores \hat{T}_\pm y se encuentra que

$$\hat{T}_+ \left| \psi_p, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{2} \left| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle, \quad (2.47)$$

$$\hat{T}_- \left| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{2} \left| \psi_p, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \psi_{\Delta^+}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (2.48)$$

y

$$\hat{T}_+ \left| \psi_{\Delta^+}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle. \quad (2.49)$$

Teniendo estas identidades y tomando únicamente las expresiones de los operadores de escalón $SU(2)$ para \hat{I}_\pm y \hat{S}_\pm en términos de los operadores de creación y aniquilación en el espacio de espín-sabor (2.5), (2.26) teniendo en cuenta las relaciones de conmutación para los fermiones, que como consecuencia se cumple la ecuación

$$[q_i^\dagger q_j, q_k^\dagger q_l] = q_i^\dagger q_l \delta_{q_j, q_k} - q_k^\dagger q_j \delta_{q_i, q_l}, \quad (2.50)$$

donde se considera que las expresiones q_i , q_j , q_k y q_l son iguales sólo cuando corresponden al mismo sabor y a la misma proyección de isospín, podemos expresar el elemento de matriz del estado del octete $|\psi_p, \frac{1}{2}\rangle$ en términos del estado del decuplete $|\psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2}\rangle$ como

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_p, \frac{1}{2} \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \psi_p, \frac{1}{2} \right\rangle &= \left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| [\hat{T}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{T}_-]] \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ &+ \frac{1}{6} \left(\left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| [\hat{S}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{S}_-]] \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \right. \\ &+ \left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-]] \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ &- \left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| [\hat{S}_+, [\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{T}_-]]] \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ &- \left. \left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| [[[\hat{T}_+, \hat{\mathcal{O}}], \hat{I}_-], \hat{S}_-] \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \right) \\ &+ \frac{1}{18} \left\langle \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \left| [\hat{S}_+, [[\hat{I}_+, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{I}_-], \hat{S}_-]]] \right| \psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.51)$$

Existe un intento por obtener la expresión inversa, es decir, obtener el elemento de matriz de un operador $\hat{\mathcal{O}}$ para el estado $|\psi_{\Delta^{++}}, \frac{3}{2}\rangle$ en términos del estado $|\psi_p, \frac{1}{2}\rangle$, sin embargo aún es un problema que queda abierto (es importante notar que las relaciones para los operadores de escalón de sabor (2.34), (2.35) no se usaron, aunque no quedan exentas de aplicarse también para tener las relaciones completas entre los estados del octete y del decuplete en el espacio de espín-sabor). Un primer camino para obtener esta expresión es la de definir nuevos operadores de escalón, por ejemplo \hat{W}_\pm y \hat{W}'_\pm como

$$\begin{aligned} I_\pm &= \hat{W}_\pm + \hat{W}'_\pm & i.e. \\ W_+ &= u_\downarrow^\dagger d_\uparrow & W'_+ &= u_\downarrow^\dagger d_\downarrow \\ W'_- &= d_\downarrow^\dagger u_\downarrow & W_- &= d_\uparrow^\dagger u_\uparrow \end{aligned} \quad (2.52)$$

de donde se obtienen las expresiones en la tabla 2.1. Resolver este problema es de gran ayuda para obtener las expresiones de simetría entre todos los bariones en el espacio espín-sabor para algún valor esperado, como el momento magnético.

$ B, S_z\rangle$	$W_+ = u_\uparrow^\dagger d_\uparrow$	$W'_+ = u_\downarrow^\dagger d_\downarrow$	$W'_- = d_\downarrow^\dagger u_\downarrow$	$W_- = d_\uparrow^\dagger u_\uparrow$
$ \Delta^{++}, \frac{3}{2}\rangle$	0	0	0	$\sqrt{3} \Delta^+, \frac{3}{2}\rangle$
$ \Delta^{++}, \frac{1}{2}\rangle$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} p, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} p, \frac{1}{2}\rangle$
$ \Delta^+, \frac{3}{2}\rangle$	$\sqrt{3} \Delta^{++}, \frac{3}{2}\rangle$	0	0	$2 \Delta^0, \frac{3}{2}\rangle$
$ \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \Delta^{++}, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^{++}, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{2}{3} \Delta^0, \frac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} n, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{4}{3} \Delta^0, \frac{1}{2}\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} n, \frac{1}{2}\rangle$
$ p, \frac{1}{2}\rangle$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta^{++}, \frac{1}{2}\rangle$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta^{++}, \frac{1}{2}\rangle$	$-\frac{\sqrt{2}}{3} \Delta^0, \frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{3} n, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \Delta^0, \frac{1}{2}\rangle + \frac{4}{3} n, \frac{1}{2}\rangle$
$ n, \frac{1}{2}\rangle$	$-\frac{\sqrt{2}}{3} \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle + \frac{4}{3} p, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{3} p, \frac{1}{2}\rangle$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta^-, \frac{1}{2}\rangle$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta^-, \frac{1}{2}\rangle$
$\Delta^0, \frac{1}{2}$	$\frac{4}{3} \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} p, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{2}{3} \Delta^+, \frac{1}{2}\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} p, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^-, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \Delta^-, \frac{1}{2}\rangle$
$ \Delta^0, \frac{3}{2}\rangle$	$2 \Delta^+, \frac{3}{2}\rangle$	0	0	$\sqrt{3} \Delta^-, \frac{3}{2}\rangle$
$ \Delta^-, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \Delta^0, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} n, \frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^0, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} n, \frac{1}{2}\rangle$	0	0
$ \Delta^-, \frac{3}{2}\rangle$	$\sqrt{3} \Delta^0, \frac{3}{2}\rangle$	0	0	0

Cuadro 2.1: Resultados de aplicar los operadores \hat{W}_\pm y \hat{W}'_\pm a las funciones de onda de espín-sabor del barión correspondiente B con proyección de espín S_z .

Capítulo 3

Unquenching el modelo de quarks

En este capítulo se presenta el procedimiento para construir el modelo de quarks unquenched en el cual los efectos de la creación de pares quark-antiquark son introducidos explícitamente en el CQM mediante el mecanismo inspirado en la creación de pares del estado del vacío 3P_0 , con números cuánticos $J^{PC} = 0^{++}$, de la QCD. Este enfoque fue motivado por el trabajo de Geiger e Isgur con sus colaboradores sobre el modelo del *flux tube breaking*, en el cual mostraron que la emergencia del CQM esta dada por el límite adiabático del modelo del tubo de flujo para el cual los efectos de la creación de pares $q\bar{q}$ son añadidos como una perturbación [18]. Como un objetivo en la física hadrónica tenemos describir la estructura de los bariones en términos de grados de libertad efectivos y, en un nivel más fundamental, entender la emergencia de los grados de libertad desde la QCD [19]. A pesar de los progresos realizados en los complicados cálculos, sigue siendo un problema de proporciones enormes resolver las ecuaciones de la QCD en la región no perturbativa. Es por ello que se han desarrollado modelos de hadrones efectivos, tales como el *bag model*, modelos de quarks quirales (χ QM), modelos de solitones [27], modelo del “instantón” líquido [28] y los modelos de quarks constituyentes (CQMs) entre los que se encuentran el modelo de Isgur-Karl [20], el modelo de Capstick-Isgur [21], los modelos colectivos [22, 23], el modelo hipercentral [24], el modelo quiral de intercambio de un bosón [25] y el modelo del instantón de Bonn [26]. Una importante clase está provista por los modelos de quarks constituyentes los cuales están basados en grados de libertad efectivos, pero estos enfoques únicamente toman algunas propiedades de la interacción fuerte dejando de lado la QCD. Como hemos visto al principio, la asimetría de sabor existente en el protón [32], las mediciones de \bar{d}/\bar{u} del mar del nucleón [34], y la crisis de espín del protón [35], dió inicio a la creación de varios modelos efectivos que dieran cabida a esta desconcertante y clara propiedad, tomada como evidencia de la existencia de otros grados de libertad exóticos en los hadrones. Entre ellos se encuentran el modelo de la nube mesónica [29], MCM, por sus siglas en inglés, y el modelo de quarks constituyentes unquenched, UQM. En esta parte se explicará la base teórica para la construcción de las funciones de onda de los bariones en estos dos últimos modelos y que se usarán para estudiar los momentos magnéticos y los decaimientos electromagnéticos.

3.1. El modelo 3P_0

Este modelo de creación de pares fue utilizado por Micu [16] en el estudio de decaimientos fuertes de mesones, tratando la parte espacial de los elementos de matriz para decaimientos como un parámetro libre. Los modelos de creación de pares que tratan la parte espacial como un grado de libertad involucran operadores de creación de un q y un \bar{q} . El hamiltoniano de interacción en el modelo de creación de pares puede ser derivado desde el hamiltoniano en el formalismo de la teoría cuántica de

campos [17]

$$\hat{H}_I = g \int d^3x \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x), \quad (3.1)$$

donde g es un parámetro muy pequeño, que indica que este se tratará perturbativamente en el hamiltoniano total, y con $\hat{\psi}(x)$ es el operador de Dirac asociado con el punto espacio-temporal x . Bajo una transformación de Lorentz $x' = ax$, la densidad $\hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x)$ es una función escalar y el hamiltoniano de interacción resulta ser invariante relativista. El operador de campo

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon(\vec{p})}} \left(\hat{b}_r(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} u_r(\vec{p}) + (-1)^{r+1} \hat{d}_r^\dagger(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} v_r(\vec{p}) \right) \quad (3.2)$$

es el operador de campo fermiónico de quarks en el espacio de posiciones, $\hat{b}_r^\dagger(\vec{p})$ ($\hat{d}_r^\dagger(\vec{p})$) es el operador de creación de un quark (antiquark) con número cuántico de espín, sabor y color r y momento \vec{p} en el espacio de Fock y espinores de Dirac,

$$u_r(\vec{p}) = \sqrt{\frac{\varepsilon(\vec{p}) + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\varepsilon(\vec{p})+m} \chi_r \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$v_r(\vec{p}) = \sqrt{\frac{\varepsilon(\vec{p}) + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{\varepsilon(\vec{p})+m} \chi_{3-r} \\ \chi_{3-r} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

con $\chi_1 = \chi_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\chi_2 = \chi_{-1/2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y la normalización estándar, $\bar{u}_r u_s = \delta_{rs}$, $\bar{v}_r v_s = -\delta_{rs}$. Entonces el hamiltoniano de interacción se puede reexpresar en cuatro interacciones separadas

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= g \int d^3x \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1)\varepsilon(\vec{p}_2)}} \sum_{r,s} \left(\hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_1) e^{i\vec{p}_1\cdot\vec{x}} \bar{u}_r(\vec{p}_1) + (-1)^{r+1} \hat{d}_r(\vec{p}_1) e^{-i\vec{p}_1\cdot\vec{x}} \bar{v}_r(\vec{p}_1) \right) \\ &\quad \times \left(\hat{b}_s(\vec{p}_2) e^{-i\vec{p}_2\cdot\vec{x}} u_s(\vec{p}_2) + (-1)^{s+1} \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_2) e^{i\vec{p}_2\cdot\vec{x}} v_s(\vec{p}_2) \right) \\ &= \hat{H}_{EQ} + \hat{H}_{QPC} + \hat{H}_{QPA} + \hat{H}_{EQ}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

con

$$\hat{H}_{EQ} = g \int d^3x \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1)\varepsilon(\vec{p}_2)}} \sum_{r,s} \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_1) \hat{b}_s(\vec{p}_2) e^{i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\cdot\vec{x}} \bar{u}_r(\vec{p}_1) u_s(\vec{p}_2) \quad (3.6)$$

$$\hat{H}_{QPC} = g \int d^3x \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1)\varepsilon(\vec{p}_2)}} \sum_{r,s} (-1)^{s+1} \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_2) e^{i(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\cdot\vec{x}} \bar{u}_r(\vec{p}_1) v_s(\vec{p}_2), \quad (3.7)$$

$$\hat{H}_{QPA} = g \int d^3x \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1)\varepsilon(\vec{p}_2)}} \sum_{r,s} (-1)^{r+1} \hat{d}_r(\vec{p}_1) \hat{b}_s(\vec{p}_2) e^{-i(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\cdot\vec{x}} \bar{v}_r(\vec{p}_1) u_s(\vec{p}_2), \quad (3.8)$$

$$\hat{H}_{EQ} = g \int d^3x \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1)\varepsilon(\vec{p}_2)}} \sum_{r,s} (-1)^{r+1} (-1)^{s+1} \hat{d}_r(\vec{p}_1) \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_2) e^{-i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\cdot\vec{x}} \bar{v}_r(\vec{p}_1) v_s(\vec{p}_2), \quad (3.9)$$

donde \hat{H}_{EQ} (\hat{H}_{EQ}) es el hamiltoniano de interacción elástica para cualquier par de quarks (antiquarks), \hat{H}_{QPC} es el hamiltoniano de interacción que crea un par quark-antiquark ($q\bar{q}$) en el vacío con números cuánticos r, s respectivamente y análogamente \hat{H}_{QPA} es el hamiltoniano de interacción que aniquila

un par quark-antiquark del vacío. La parte del hamiltoniano entero que nos interesa es únicamente aquel que crea un par $q\bar{q}$ a partir del vacío, \hat{H}_{QPC} , en donde el término, expresado en la base de Dirac,

$$\begin{aligned}
\bar{u}_r(\vec{p}_1)v_s(\vec{p}_2) &= u_r^\dagger(\vec{p}_1)\gamma^0v_s(\vec{p}_2) \\
&= \sqrt{\frac{\varepsilon(\vec{p}_1)+m}{2m}}\sqrt{\frac{\varepsilon(\vec{p}_2)+m}{2m}}\begin{pmatrix}\chi_r^\dagger & \chi_r^\dagger\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_1}{\varepsilon(\vec{p}_1)+m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{1}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & -\mathbf{1}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_2}{\varepsilon(\vec{p}_2)+m}\chi_{3-s} \\ \chi_{3-s}\end{pmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1)+m}\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_2)+m}}{2m}\begin{pmatrix}\chi_r^\dagger & \chi_r^\dagger\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_1}{\varepsilon(\vec{p}_1)+m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_2}{\varepsilon(\vec{p}_2)+m}\chi_{3-s} \\ -\chi_{3-s}\end{pmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1)+m}\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_2)+m}}{2m}\left(\chi_r^\dagger\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_2}{\varepsilon(\vec{p}_2)+m}\chi_{3-s}-\chi_r^\dagger\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_1}{\varepsilon(\vec{p}_1)+m}\chi_{3-s}\right). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Así el hamiltoniano de creación de pares, en la aproximación no-relativista para los espinores, queda entonces como

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{QPC} &= g \int d^3x \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{me^{i(\vec{p}_1+\vec{p}_2)\cdot\vec{x}}}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1)\varepsilon(\vec{p}_2)}} \sum_{r,s} (-1)^{s+1} \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_2) \\
&\quad \times \frac{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1)+m}\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_2)+m}}{2m} \left(\chi_r^\dagger \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_2}{\varepsilon(\vec{p}_2)+m} \chi_{3-s} - \chi_r^\dagger \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_1}{\varepsilon(\vec{p}_1)+m} \chi_{3-s} \right) \\
&= g \int \frac{d^3p_1 d^3p_2}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1)\varepsilon(\vec{p}_2)}} \delta^3(\vec{p}_1+\vec{p}_2) \sum_{r,s} (-1)^{s+1} \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_2) \frac{1}{2} \chi_r^\dagger \vec{\sigma}\cdot(\vec{p}_2-\vec{p}_1) \chi_{3-s} \\
&= g \int \frac{d^3p_1 d^3p_2}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1)\varepsilon(\vec{p}_2)}} \delta^3(\vec{p}_1+\vec{p}_2) \sum_{r,s} (-1)^{s+1} \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_2) \chi_r^\dagger \vec{\sigma}\cdot\left(\frac{\vec{p}_2-\vec{p}_1}{2}\right) \chi_{3-s} \\
&= g \int \frac{d^3p_1 d^3p_2}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1)\varepsilon(\vec{p}_2)}} \delta^3(\vec{p}_1+\vec{p}_2) \sum_{r,s} (-1)^{s+1} \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_2) \vec{\sigma}_{r,3-s}\cdot\vec{p}, \tag{3.11}
\end{aligned}$$

notando que $\varepsilon(\vec{p}_1) = \varepsilon(\vec{p}_2) = \varepsilon$ cuando $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ y definiendo $\vec{p} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{2}$. Vemos ahora que sumando únicamente la parte de espín el término

$$\begin{aligned}
\sum_{r,s=1}^2 (-1)^{s+1} \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_2) \vec{\sigma}_{r,3-s}\cdot\vec{p} &= \sum_{s=1}^2 (-1)^{s+1} \left(\vec{\sigma}_{1,3-s}\cdot\vec{p} \hat{b}_1^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_2) + \vec{\sigma}_{2,3-s}\cdot\vec{p} \hat{b}_2^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_2) \right) \\
&= \vec{\sigma}_{1,2}\cdot\vec{p} \hat{b}_1^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_1^\dagger(\vec{p}_2) - \vec{\sigma}_{1,1}\cdot\vec{p} \hat{b}_1^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_2^\dagger(\vec{p}_2) \\
&\quad + \vec{\sigma}_{2,2}\cdot\vec{p} \hat{b}_2^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_1^\dagger(\vec{p}_2) - \vec{\sigma}_{2,1}\cdot\vec{p} \hat{b}_2^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_2^\dagger(\vec{p}_2) \\
&= (p_x - ip_y) \hat{b}_1^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_1^\dagger(\vec{p}_2) - p_z \hat{b}_1^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_2^\dagger(\vec{p}_2) \\
&\quad - p_z \hat{b}_2^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_1^\dagger(\vec{p}_2) - (p_x + ip_y) \hat{b}_2^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_2^\dagger(\vec{p}_2). \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Usando que $\mathcal{Y}_1^m(\vec{p}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \vec{\varepsilon}_m\cdot\vec{p}$, y la base armónica esférica como

$$\vec{\varepsilon}_{-1,1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \pm ie_2), \quad \vec{\varepsilon}_0 = e_3 \tag{3.13}$$

Así la expresión (3.12) queda como

$$\begin{aligned}
& \sum_{r,s=1}^2 (-1)^{s+1} \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_2) \vec{\sigma}_{r,3-s} \cdot \vec{p} = \vec{\varepsilon}_{-1} \cdot \vec{p} \hat{b}_1^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_1^\dagger(\vec{p}_2) \\
& \quad - \vec{\varepsilon}_0 \cdot \vec{p} \left(\hat{b}_1^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_2^\dagger(\vec{p}_2) + \hat{b}_2^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_1^\dagger(\vec{p}_2) \right) \\
& \quad + \vec{\varepsilon}_{+1} \cdot \vec{p} \hat{b}_2^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_2^\dagger(\vec{p}_2) \\
& = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \mathcal{Y}_1^{-1}(\vec{p}) \hat{b}_1^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_1^\dagger(\vec{p}_2) \\
& \quad - \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \mathcal{Y}_1^0(\vec{p}) \left(\hat{b}_1^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_2^\dagger(\vec{p}_2) + \hat{b}_2^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_1^\dagger(\vec{p}_2) \right) \\
& \quad + \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \mathcal{Y}_1^{-1}(\vec{p}) \hat{b}_2^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_2^\dagger(\vec{p}_2) \\
& = \sqrt{8\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{Y}_1^{-1}(\vec{p}) \hat{b}_1^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_1^\dagger(\vec{p}_2) - \frac{1}{\sqrt{6}} \mathcal{Y}_1^0(\vec{p}) \left(\hat{b}_1^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_2^\dagger(\vec{p}_2) + \hat{b}_2^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_1^\dagger(\vec{p}_2) \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{Y}_1^{-1}(\vec{p}) \hat{b}_2^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_2^\dagger(\vec{p}_2) \right] \\
& = \sqrt{8\pi} \left[\langle 11; 1-1|00 \rangle \mathcal{Y}_1^{-1}(\vec{p}) \hat{b}_1^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_1^\dagger(\vec{p}_2) + \langle 10; 10|00 \rangle \mathcal{Y}_1^0(\vec{p}) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{b}_1^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_2^\dagger(\vec{p}_2) + \hat{b}_2^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_1^\dagger(\vec{p}_2) \right) \right. \\
& \quad \left. + \langle 1-1; 11|00 \rangle \mathcal{Y}_1^{-1}(\vec{p}) \hat{b}_2^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_2^\dagger(\vec{p}_2) \right] \\
& = \sqrt{8\pi} \sum_m \sum_{m_1, m_2} \langle 1m; 1-m|00 \rangle \mathcal{Y}_1^m(\vec{p}) \langle \frac{1}{2}m_1; \frac{1}{2}m_2|1-m \rangle \hat{b}_{m_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_{m_2}^\dagger(\vec{p}_2) \\
& = \sqrt{8\pi} \sum_m \sum_{m_1, m_2} \langle 1m; 1-m|00 \rangle \mathcal{Y}_1^m(\vec{p}) \chi_{m_1, m_2}^{-m} \hat{b}_{m_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_{m_2}^\dagger(\vec{p}_2). \tag{3.14}
\end{aligned}$$

De esta expresión podemos notar fácilmente que los números cuánticos del vacío, $J^{PC} = 0^{++}$ surgen de forma natural desde la expresión al principio de la sección para el hamiltoniano de interacción (3.1). El coeficiente de Clebsh-Gordan (usando la convención de [33] y como se muestra en el apéndice **C.1**) $\langle 1m; 1-m|00 \rangle = \langle 1m; l-m|JJ_z \rangle$ indica el acoplamiento del espín total del par $q\bar{q}$, $S = S_q + S_{\bar{q}} = 1$ y proyección $m = 1, 0, -1$, con el espín total del estado vacío $|00\rangle$, $J = 0$, y momento angular $l = 1$ lo que indica que el par creado $q\bar{q}$ se encuentra en una onda P . La función singulete de espín $\chi_{m_1, m_2}^{-m} = \langle \frac{1}{2}m_1; \frac{1}{2}m_2|1-m \rangle$ indica el acoplamiento de los espines de los quarks creados con el momento angular total. Finalmente el hamiltoniano de interacción de creación de pares queda como

$$\hat{H}_{QPC} = \sqrt{8\pi}g \int \frac{d^3p_1 d^3p_2}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1)\varepsilon(\vec{p}_2)}} \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \sum_m \sum_{m_1, m_2} \langle 1m; 1-m|00 \rangle \mathcal{Y}_1^m(\vec{p}) \chi_{m_1, m_2}^{-m} \hat{b}_{m_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_{m_2}^\dagger(\vec{p}_2). \tag{3.15}$$

Si ahora expresamos los índices (hasta ahora ocultos) para el sabor y el color, representados en singuletes de $SU(3)$, para los operadores de creación de quarks vemos que

$$\hat{b}_{m_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_{m_2}^\dagger(\vec{p}_2) = \sum_{i_1, i_2} \sum_{j_1, j_2} \mathcal{F}_{i_1, i_2} \mathcal{C}_{j_1, j_2} \hat{b}_{m_1, i_1, j_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_{m_2, i_2, j_2}^\dagger(\vec{p}_2). \tag{3.16}$$

Los singuletes de sabor y color son

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \\
\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-r\bar{r} + y\bar{y} + b\bar{b})
\end{aligned} \tag{3.17}$$

con la convención de signos de De Swart [51], están escritos arriba como las funciones correspondientes

$$\mathcal{F}_{i_1, i_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{i_1, i_2}^f \eta_{i_1}, \quad \mathcal{C}_{j_1, j_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{j_1, j_2}^c \eta_{j_1} \quad (3.18)$$

$$\eta_1 = -1, \quad \eta_2 = \eta_3 = 1 \quad (3.19)$$

$$[\delta_{i_1, i_2}^f] = \begin{pmatrix} u\bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & d\bar{d} & 0 \\ 0 & 0 & s\bar{s} \end{pmatrix} \quad [\delta_{i_1, i_2}^c] = \begin{pmatrix} r\bar{r} & 0 & 0 \\ 0 & d\bar{d} & 0 \\ 0 & 0 & y\bar{y} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Claramente $Tr(\mathcal{F}) = \phi_0$ y $Tr(\mathcal{C}) = \omega_0$. Reescribiendo el hamiltoniano

$$\begin{aligned} \hat{H}_{QPC} &= \sqrt{8\pi g} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_1) \varepsilon(\vec{p}_2)}} \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \\ &\times \sum_m \sum_{m_1, i_1, j_1} \sum_{m_2, i_2, j_2} \langle 1m; 1 - m | 00 \rangle \mathcal{Y}_1^m(\vec{p}) \chi_{m_1, m_2}^{-m} \mathcal{F}_{i_1, i_2} \mathcal{C}_{j_1, j_2} \hat{b}_{m_1, i_1, j_1}^\dagger(\vec{p}_1) \hat{d}_{m_2, i_2, j_2}^\dagger(\vec{p}_2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

y simplificando

$$\hat{H}_{QPC} = \sqrt{2\pi g} \sum_{i, j} \int \frac{d^3 p_i d^3 p_j}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_i) \varepsilon(\vec{p}_j)}} \delta^3(\vec{p}_i + \vec{p}_j) \sum_m \langle 1m; 1 - m | 00 \rangle \mathcal{Y}_1^m(\vec{p}_j - \vec{p}_i) \chi_{i, j}^{-m} \mathcal{F}_{i, j} \mathcal{C}_{i, j} \hat{b}_i^\dagger(\vec{p}_i) \hat{d}_j^\dagger(\vec{p}_j), \quad (3.22)$$

que en el límite no relativista ($\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_i) \varepsilon(\vec{p}_j)} \cong m$) y fijando por convención $\sqrt{2\pi g}/m = 3\gamma$ es

$$\hat{H}_{QPC} = 3\gamma \sum_{i, j} \int d^3 p_i d^3 p_j \delta^3(\vec{p}_i + \vec{p}_j) \sum_m \langle 1m; 1 - m | 00 \rangle \mathcal{Y}_1^m(\vec{p}_j - \vec{p}_i) \chi_{i, j}^{-m} \mathcal{F}_{i, j} \mathcal{C}_{i, j} \hat{b}_i^\dagger(\vec{p}_i) \hat{d}_j^\dagger(\vec{p}_j). \quad (3.23)$$

Debido a que el operador \hat{H}_{QPC} crea un par de quarks constituyentes, una función gaussiana, $V(\vec{p}_i - \vec{p}_j)$, de quark-antiquark de creación de vértice fue introducida para la cual el par es creado como un objeto finito con un tamaño efectivo, más que un objeto puntual. En el espacio de momentos se acopla con

$$V(\vec{p}_i - \vec{p}_j) = e^{-r_q^2(\vec{p}_i - \vec{p}_j)^2/6}, \quad (3.24)$$

$$\hat{H}_{QPC} = \int d^3 p_i d^3 p_j \hat{H}_{QPC}(\vec{p}_i, \vec{p}_j) \rightsquigarrow \int d^3 p_i d^3 p_j \hat{H}_{QPC}(\vec{p}_i, \vec{p}_j) V(\vec{p}_i - \vec{p}_j). \quad (3.25)$$

Este enfoque fue formulado en el modelo de Cornell [36], usando un potencial de confinamiento V como la componente temporal de un vector de Lorentz ($\Gamma = \gamma$) a diferencia del trabajo de Ackleh [17] en el hamiltoniano al principio que considera un potencial de confinamiento como un escalar de Lorentz ($\Gamma = I$). Así

$$\begin{aligned} \hat{H}_{QPC} &= \hat{T}^\dagger({}^3P_0) \\ &= 3\gamma \sum_{i, j} \int d^3 p_i d^3 p_j \delta^3(\vec{p}_i + \vec{p}_j) \sum_m \langle 1m; 1 - m | 00 \rangle \mathcal{Y}_1^m(\vec{p}_j - \vec{p}_i) \chi_{i, j}^{-m} \mathcal{F}_{i, j} \mathcal{C}_{i, j} \hat{b}_i^\dagger(\vec{p}_i) \hat{d}_j^\dagger(\vec{p}_j) V(\vec{p}_i - \vec{p}_j) \end{aligned} \quad (3.26)$$

El mecanismo de la creación de pares es insertado al nivel de quarks en los diagramas de anillos de orden uno que son calculados por la suma de un conjunto completo de estados intermedios barión-mesón, $|BC\rangle$, véase figura 3.1(a). Bajo esas suposiciones, la función de onda de los estados de los bariones consiste de una configuración de tres quarks de orden cero, $|A\rangle$, más una suma sobre todas las componentes de Fock de orden mayor tres, $|BC\rangle$, debidas a la creación de pares quark-antiquark

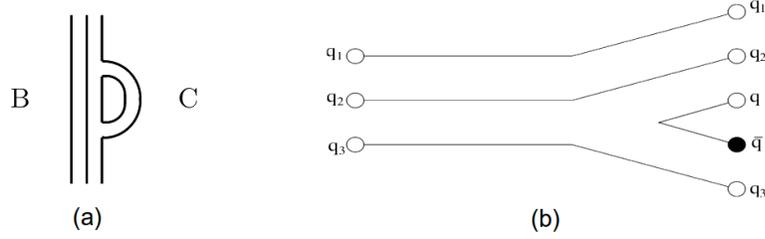


Figura 3.1: (a) Diagrama considerando un anillo para la corrección mesónica, C , en el estado del barión B al nivel de quarks. (b) Creación de un par quark-antiquark a través del mecanismo 3P_0 .

en el estado de vacío 3P_0 . A primer orden en la teoría de perturbaciones debido al hamiltoniano de creación de pares 3.1 como el hamiltoniano de interacción normalizado (3.26), la función de onda de bariones se puede escribir de la siguiente manera

$$|\psi_A\rangle = \mathcal{N}_A \left[|A\rangle + \sum_{BCIJ} \int d\vec{K}_0 k_0^2 dk_0 |BC\vec{K}klJ\rangle \frac{\langle BC\vec{K}_0 k_0 l J | T^\dagger | A \rangle}{m_A - E_B(k_0) - E_C(k_0)} \right], \quad (3.27)$$

en donde A denota a el barión inicial, B y C representan al barión y al mesón intermedios, y m_A , E_B y E_C son sus respectivas energías, \vec{K}_0 y l son el momento radial relativo y el momento angular orbital de B y C , y J es el momento angular total $\vec{J} = \vec{J}_B + \vec{J}_C + \vec{l}$. El momento k_0 es evidentemente el momento en el centro de masa del sistema $A - BC$. Además

$$\mathcal{N}_A = \left(1 + \sum_{BC} \int d\vec{K}_0 k_0^2 dk_0 \frac{|\langle BC\vec{K}_0 k_0 l J | T^\dagger | A \rangle|^2}{(m_A - E_B(k_0) - E_C(k_0))^2} \right)^{-1/2}, \quad (3.28)$$

es la constante de normalización; esta se calcula explícitamente en la sección 3.3.2 para cada barión A usado en este trabajo.

El estado para función de onda (3.27) en este modelo para los bariones (o bien mesones) queda completamente determinada, salvo el parámetro γ que se toma mejor dicho como una constante adimensional que es determinada a partir de las mediciones de la asimetría de sabor en el protón [32] (véase sección 3.3.1).

3.2. El modelo de la nube mesónica

El modelo de la nube mesonica ha sido uno de los intentos por explicar la asimetría de sabor existente en el nucleón. Sullivan [29] fue uno de quienes estudiaron por primera vez este modelo, donde muestra que el estado de un barión está compuesto por las contribuciones de los quarks de valencia, tal como en el modelo de quarks, y las contribuciones de los quarks del mar, es decir, las contribuciones debidas al par quark-antiquark como estados que se presentan como acoplamientos barión-mesón ($qqq - q\bar{q}$). Thomas [30] hizo un estudio del rompimiento de la simetría $SU(3)$ en el mar del nucleón y sobre las contribuciones de la nube mesonica de los quarks del mar, en particular la nube piónica, en la que mostró la importancia de estos estados a la función de onda del barión, y aún más tarde estudiado por Henley y Miller [31].

De acuerdo a este modelo, el estado de la función de onda del barión puede escribirse como una contribución de los quarks de valencia, que corresponde a la función de espín-sabor del modelo de quarks (capítulo 1), más una contribución de los quarks de mar, en el que se considera que un mesón es emitido por el barión del modelo de quarks como un par quark-antiquark (más adelante no

consideraremos esto como tal, pues es creado desde el vacío en el UQM) y que se acopla al barión inicial creando un par a la vez barión mesón (figura 3.2).

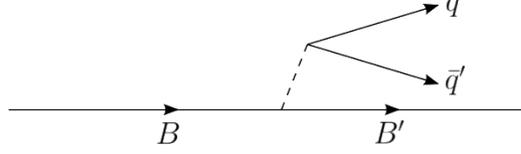


Figura 3.2: Diagrama del proceso de emisión de un mesón por un barión en el modelo MCM

Como un ejemplo de la construcción de la función de onda en este modelo, podemos escribir para el caso del multiplete de bariones del decuplete, $J^{PC} = \frac{3}{2}^{++}$, para Δ y considerando únicamente todas las contribuciones posibles de los mesones pseudoescalares acoplados al multiplete de bariones, tanto del decuplete como del octete $J^{PC} = \frac{1}{2}^{++}$, como

$$|\Psi_{\Delta}\rangle = \mathcal{N}_{\Delta} \left[|\Delta\rangle + a_{\Delta \rightarrow N\pi} |N\pi\rangle + a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} |\Delta\pi\rangle + a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} |\Sigma K\rangle \right. \\ \left. + a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta} |\Delta\eta\rangle + a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} |\Sigma^* K\rangle + a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta'} |\Delta\eta'\rangle \right] \quad (3.29)$$

en donde $|\Delta\rangle$ es el barión inicial, los términos $|N\pi\rangle$ y $|\Delta\pi\rangle$ son los acoplamientos barión-mesón con el barión del octete y del decuplete respectivamente que corresponden a los acoplamientos de los quarks del mar y los coeficientes $a_{\Delta \rightarrow N\pi}$ y $b_{\Delta \rightarrow \Delta\pi}$ se refieren a la amplitud de probabilidad correspondiente a los estados del vacío, que veremos en la siguiente sección. Nótese que cada término de la nube mesónica debe corresponder a los mismos números cuánticos del barión inicial como el momento angular, número bariónico, la hipercarga, isoespín y carga eléctrica, extrañeza, etc.

El paso siguiente es ahora especificar el valor de proyección de isoespín, I_3 para la función de onda. Haremos el caso $I_3 = \frac{3}{2}$, es decir, para el estado correspondiente a Δ^{++} . Lo que se hace en este caso es especificar el valor de isoespín teniendo el valor de la hipercarga ($Y = 1$ para Δ), teniendo que especificar las funciones de onda barión-mesón en el espacio de sabor $SU_f(3)$ mediante

$$U_Y(1) \rightarrow SU_f(3) \supset U_Y(1) \otimes SU_I(2). \quad (3.30)$$

Especificando los números de isoespín, por ejemplo para Ψ_{Δ^+} cuyo estado de isoespín es $|I, I_3\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$,

$$|\Psi_{\Delta^+}\rangle = \mathcal{N}_{\Delta} \left[|\Delta\rangle_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} + a_{\Delta \rightarrow N\pi} |N\pi\rangle_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} + a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} |\Delta\pi\rangle_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} + a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} |\Sigma K\rangle_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} \right. \\ \left. + a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta} |\Delta\eta\rangle_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} + a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} |\Sigma^* K\rangle_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} + a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta'} |\Delta\eta'\rangle_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} \right] \quad (3.31)$$

donde $|\Delta\rangle_{I=\frac{3}{2}, I_3=\frac{1}{2}} = |\Delta^+\rangle$ y los estados $|BC\rangle_{I, I_3}$ se acoplan en isoespín como

$$|N\pi\rangle \rightarrow |N\pi\rangle_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, 11 \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle |n\pi^+\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}, 10 \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle |p\pi^0\rangle \right. \\ \left. = \frac{1}{\sqrt{3}} |n\pi^+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |p\pi^0\rangle, \quad (3.32)$$

$$|\Delta\pi\rangle \rightarrow |\Delta\pi\rangle_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = \left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2}, 10 \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle |\Delta^+\pi^0\rangle + \left\langle \frac{3}{2} - \frac{1}{2}, 11 \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle |\Delta^0\pi^+\rangle + \left\langle \frac{3}{2} \frac{3}{2}, 1 - 1 \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle |\Delta^{++}\pi^-\rangle \right. \\ \left. = \sqrt{\frac{1}{15}} |\Delta^+\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} |\Delta^0\pi^+\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |\Delta^{++}\pi^-\rangle, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}
|\Sigma K\rangle \rightarrow |\Sigma K\rangle_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} &= \langle 11, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |\Sigma^+ K^0\rangle + \langle 10, \frac{1}{2} \frac{1}{2} | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |\Sigma^0 K^+\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^+ K^0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^0 K^+\rangle,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
|\Sigma K^*\rangle \rightarrow |\Sigma K^*\rangle_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} &= \langle 11, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |\Sigma^+ K^{*0}\rangle + \langle 10, \frac{1}{2} \frac{1}{2} | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |\Sigma^0 K^{*+}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^+ K^{*0}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^0 K^{*+}\rangle,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
|\Delta\eta\rangle \rightarrow |\Delta\eta\rangle_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} &= \langle \frac{3}{2} \frac{1}{2}, 00 | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |\Delta^+\eta\rangle \\
&= |\Delta^+\eta\rangle,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
|\Delta\eta'\rangle \rightarrow |\Delta\eta'\rangle_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} &= \langle \frac{3}{2} \frac{1}{2}, 00 | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |\Delta^+\eta'\rangle \\
&= |\Delta^+\eta'\rangle
\end{aligned} \tag{3.37}$$

donde ahora los términos acoplados barión-mesón tienen especificado como valor de isoespín $I = \frac{3}{2}, I_3 = \frac{1}{2}$, en la siguiente manera

$$\begin{aligned}
|BC\rangle \rightarrow |BC\rangle_{I=\frac{3}{2}, I_3=\frac{1}{2}} &= (|B\rangle|C\rangle)_{I=\frac{3}{2}, I_3=\frac{1}{2}} \\
&= (|I^B\rangle|I^C\rangle)_{I=\frac{3}{2}, I_3=\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{I_3^B=-I^B}^{I^B} \sum_{I_3^C=-I^C}^{I^C} |I^B I_3^B\rangle |I^C I_3^C\rangle \langle I^B I_3^B, I^C I_3^C | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle \\
&= \sum_{I_3^B=-I^B}^{I^B} \sum_{I_3^C=-I^C}^{I^C} \langle I^B I_3^B, I^C I_3^C | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |I^B I_3^B\rangle |I^C I_3^C\rangle,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

donde debe cumplirse únicamente que $I_3^B + I_3^C = I_3 = \frac{1}{2}$, con los valores posibles de la proyección de isoespín como se muestran en las sumas. Véase apéndice C y ecuación (C.1). La función de onda (3.29), especificada en el espacio de sabor en (3.31), queda entonces como

$$\begin{aligned}
|\Psi_{\Delta^+}\rangle &= \mathcal{N}_{\Delta} \left[|\Delta^+\rangle + a_{\Delta \rightarrow N\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} |n\pi^+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |p\pi^0\rangle \right) \right. \\
&\quad + a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} \left(\sqrt{\frac{1}{15}} |\Delta^+\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} |\Delta^0\pi^+\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |\Delta^{++}\pi^-\rangle \right) \\
&\quad + a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^+ K^0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^0 K^+\rangle \right) \\
&\quad + a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^+ K^{*0}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^0 K^{*+}\rangle \right) \\
&\quad \left. + a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta} |\Delta^+\eta\rangle + a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta'} |\Delta^+\eta'\rangle \right].
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Ahora sólo para expresarlos en el espacio de espín-sabor, es decir, a cada estado de la expresión anterior debemos acoplarla con el momento angular total del barión original, Δ^+ . Para ello consideraremos la siguiente ampliación del grupo

$$SU_f(3) \rightarrow SU_f(3) \otimes SU_s(2) \tag{3.40}$$

lo que quiere decir que cada estado especificado en sabor que compone el estado total de la ecuación debe estar también especificado ahora en el espacio de espín, con la proyección de espín de cada uno debe ser la misma que la del estado total $|\Psi_{\Delta^+}\rangle$ que en este caso consideraremos, $S_z = \frac{1}{2}$. Así, de acuerdo a (3.40), por ejemplo

$$|p\pi^0\rangle \rightarrow |p\pi^0\rangle_{S=\frac{3}{2}S_z=\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

$$|\Delta^+\pi^0\rangle \rightarrow |\Delta^+\pi^0\rangle_{S=\frac{3}{2}S_z=\frac{1}{2}} \quad (3.42)$$

cuyos acoplamientos deberán tener esta vez los correspondientes coeficientes de Clebsch-Gordan con los números cuánticos de espín. Para ello consideraremos los números cuánticos de la paridad y el espín para los mesones pseudoescalares (en este ejemplo piones), los bariones del octete (en este ejemplo el nucleón), los bariones del decuplete (en este ejemplo Δ) en las tablas 1.4, 1.2 y 1.3 respectivamente. Al acoplarse dos partículas en el espacio de espín debemos considerar la regla de adición vectorial para el espín en la teoría del momento angular como

$$|l - S_T| \leq J \leq l + S_T \quad (3.43)$$

donde $\vec{J} = \vec{S}_B + \vec{S}_C + \vec{l} = \vec{S}_T + \vec{l}$ es el momento angular de espín total y que debe de corresponder al espín del barión de la función de onda completa y que en este caso es $J = \frac{3}{2}$ para Δ^{++} . S_T se refiere al espín total del sistema barión-mesón en este caso es únicamente igual al espín del barión, pues el pión es un mesón pseudoescalar ($S_z = 0$) por lo que $S_T = \frac{1}{2}$ para el acoplamiento nucleón-pión y $S_T = \frac{3}{2}$ para el acoplamiento delta-pión. \vec{l} es el momento angular total relativo entre el barión y el mesón. Teniendo en cuenta la conservación de la paridad tenemos que la paridad de Δ^+ es $P = +$, para los bariones aquí utilizados es $P(B) = +$ y $P(C) = (-)$ para el mesón π y además existe una dependencia debida al momento angular relativo en la función de onda espacial como $(-)^l$. Así tenemos que la paridad del sistema barión-mesón debe cumplir

$$P = P(B)P(C)(-)^l \quad (3.44)$$

es decir

$$(+) = (+)(-)(-)^l \quad (3.45)$$

de esta forma sabemos que l debe de tomar valores impares, es decir, $l = 1, 3, 5, \dots$, así por la ecuación (3.43) y de acuerdo a los valores de espín para cada barión y mesón, puede fijarse el valor de l . Para el caso nucleón-pión, el único valor posible es $l = 1$. De esta manera, como se hizo en el caso anterior para el isoespín, obtenemos los coeficientes de Clebsch-Gordan para el acoplamiento de espín. Entonces de (3.42) y acoplado a la proyección de espín de la función total para la Δ^+ como $S_z = \frac{1}{2}$. Como antes, usando la ecuación (C.1)

$$\begin{aligned} |p\pi^0\rangle_{S=\frac{3}{2}S_z=\frac{1}{2}} &= \sum_{m_l=-l}^l \sum_{m'=-S_T}^{S_T} \langle S_T = \frac{1}{2} m', l m_l | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |p, m', \pi^0, 0; l m_l\rangle \\ &= \sum_{m_l=-l}^l \sum_{m'=-S_T}^{S_T} \langle \frac{1}{2} m', l m_l | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |p, m', \pi^0; l m_l\rangle \\ &= \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}, 10 | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |p, \frac{1}{2}, \pi^0; 10\rangle + \langle \frac{1}{2} -\frac{1}{2}, 11 | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |p, -\frac{1}{2}, \pi^0; 11\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} |p, \frac{1}{2}, \pi^0; 10\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |p, -\frac{1}{2}, \pi^0; 11\rangle \end{aligned} \quad (3.46)$$

Nótese que en esta última ecuación se omite la proyección de espín del pión, pues esta es cero y tomamos como la total la del protón. Así hemos encontrado en este caso la expresión explícita para el acoplamiento en $S = \frac{3}{2}, S_z = \frac{1}{2}$ para protón- π^0 en el espacio de espín.

Para los acoplamientos que corresponden a $\Delta\pi$ (y en general para acoplamientos de un barión del decuplete con un mesón pseudoscalar) tenemos que los valores posibles del momento angular relativo entre el barión y el mesón, por las ecuaciones (3.43) y (3.45), es $l = 1, 3$. En este caso tomaremos únicamente el caso $l = 1$ pues para los fines que veremos en el próximo capítulo los términos relacionados a este valor al calcular el momento magnético se anulan. Así tenemos, como antes, por ejemplo

$$\begin{aligned}
|\Delta^+\pi^0\rangle_{S=\frac{3}{2}S_z=\frac{1}{2}} &= \sum_{m_l=-l}^l \sum_{m'=-S_T}^{S_T} \langle S_T = \frac{3}{2}m', lm_l | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |\Delta^+, m', \pi^0, 0; lm_l\rangle \\
&= \sum_{m_l=-l}^l \sum_{m'=-S_T}^{S_T} \langle \frac{3}{2}m', 1m_l | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |\Delta^+, m', \pi^0; 1m_l\rangle \\
&= \langle \frac{3}{2} \frac{1}{2}, 10 | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |\Delta^+, \frac{1}{2}, \pi^0; 10\rangle + \langle \frac{3}{2} \frac{3}{2}, 1-1 | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |\Delta^+, \frac{3}{2}, \pi^0; 1-1\rangle \\
&\quad + \langle \frac{3}{2} -\frac{1}{2}, 11 | \frac{3}{2} \frac{1}{2} \rangle |\Delta^+, -\frac{1}{2}, \pi^0; 11\rangle \\
&= \sqrt{\frac{1}{15}} |\Delta^+, \frac{1}{2}, \pi^0; 10\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |\Delta^+, \frac{3}{2}, \pi^0; 1-1\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} |\Delta^+, -\frac{1}{2}, \pi^0; 11\rangle. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Cabe mencionar que la notación usada en estos estados es $|B, m', C; lm_l\rangle$, donde m' es la proyección de espín, de este estado acoplado, l es el valor del momento angular total, y m_l representa su proyección l_3 . Con esta información quedan completamente especificados sus números cuánticos de espín y con ello el estado en el espacio de espín. De manera totalmente análoga se especifican los números cuántico de espín y sus correspondientes coeficientes de Clebsch-Gordan para cada estado de nuestro ejemplo en la ecuación (3.39), según corresponda el acoplamiento octete-mesón o decuplete-mesón. Entonces

para $|\Psi_{\Delta^+, \frac{1}{2}}\rangle$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|\Psi_{\Delta^+, \frac{1}{2}}\rangle = & \mathcal{N}_\Delta \left[\left| \Delta^+, \frac{1}{2} \right\rangle \right. \\
& + a_{\Delta \rightarrow N\pi} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| n, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| n, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| p, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| p, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^+, -\frac{1}{2}, K^0; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, K^0; 1, 0 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^0, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} \left(\sqrt{\frac{1}{15}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Delta^+, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^+, \frac{3}{2}, \pi^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Delta^+, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad - \sqrt{\frac{8}{15}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Delta^0, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^0, \frac{3}{2}, \pi^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Delta^0, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{2}{5}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Delta^{++}, \frac{1}{2}, \pi^-; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^{++}, \frac{3}{2}, \pi^-; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Delta^{++}, -\frac{1}{2}, \pi^-; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, K^0; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, K^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2}, K^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2}, K^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Delta^+, \frac{1}{2}, \eta; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^+, \frac{3}{2}, \eta; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Delta^+, -\frac{1}{2}, \eta; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& \left. + a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Delta^+, \frac{1}{2}, \eta'; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^+, \frac{3}{2}, \eta'; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Delta^+, -\frac{1}{2}, \eta'; 1, 1 \right\rangle \right\} \right]
\end{aligned}$$

(3.48)

Sucesivamente se hace lo mismo para los siguientes estados $|\Psi_A, \frac{1}{2}\rangle$,

$$\begin{aligned}
\left| \Psi_{\Sigma^{*+}, \frac{1}{2}} \right\rangle = & \mathcal{N}_{\Sigma^*} \left[\left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2} \right\rangle \right. \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^+, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^0, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Lambda^0, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Lambda^0, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow N \bar{K}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| p, -\frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| p, \frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 0 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^+, -\frac{1}{2}, \eta; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, \eta; 1, 0 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^+, -\frac{1}{2}, \eta'; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, \eta'; 1, 0 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi K} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^0, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^0, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, \pi^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2}, \pi^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Delta \bar{K}} \left(-\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Delta^+, \frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^+, \frac{3}{2}, \bar{K}^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Delta^+, -\frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Delta^{++}, \frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^{++}, \frac{3}{2}, \bar{K}^-; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Delta^{++}, -\frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, \eta; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, \eta; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2}, \eta; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, \eta'; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, \eta'; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2}, \eta'; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& \left. + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi^* K} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2}, K^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Xi^{*0}, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \Psi_{\Xi^{*0}, \frac{1}{2}} \right\rangle = & \mathcal{N}_{\Xi^*} \left[\left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2} \right\rangle \right. \\
& + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi\pi} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^0, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^0, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^-, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^-, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma\bar{K}} \left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^0, -\frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 0 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^+, -\frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 0 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi\eta} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^0, -\frac{1}{2}, \eta; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^0, \frac{1}{2}, \eta; 1, 0 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi\eta'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^0, -\frac{1}{2}, \eta'; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^0, \frac{1}{2}, \eta'; 1, 0 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Xi^* \rightarrow \Lambda\bar{K}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Lambda^0, -\frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Lambda^0, \frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 0 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^*\pi} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2}, \pi^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Xi^{*0}, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Xi^{*-}, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Xi^{*-}, \frac{3}{2}, \pi^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Xi^{*-}, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma\bar{K}} \left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2}, \bar{K}^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, \bar{K}^-; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^*\eta} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2}, \eta; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2}, \eta; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Xi^{*0}, -\frac{1}{2}, \eta; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^*\eta'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2}, \eta'; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2}, \eta'; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Xi^{*0}, -\frac{1}{2}, \eta'; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Xi^* \rightarrow \Omega K} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Omega^-, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Omega^-, \frac{3}{2}, K^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Omega^-, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \Psi_{\Sigma^{*0}, \frac{1}{2}} \right\rangle = & \mathcal{N}_{\Sigma^*} \left[\left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2} \right\rangle \right. \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^+, -\frac{1}{2}, \pi^-; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, \pi^-; 1, 0 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^-, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^-, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Lambda^0, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Lambda^0, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow N\bar{K}} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| p, -\frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| p, \frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 0 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| n, -\frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| n, \frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 0 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\eta} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^0, -\frac{1}{2}, \eta; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2}, \eta; 1, 0 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\eta'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^0, -\frac{1}{2}, \eta'; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2}, \eta'; 1, 0 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi K} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^0, -\frac{1}{2}, K^0; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^0, \frac{1}{2}, K^0; 1, 0 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^-, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^-, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, \pi^-; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, \pi^-; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2}, \pi^-; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Sigma^{*-}, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*-}, \frac{3}{2}, \pi^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Sigma^{*-}, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Delta \bar{K}} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Delta^+, \frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^+, \frac{3}{2}, \bar{K}^-; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Delta^+, -\frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Delta^0, \frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Delta^0, \frac{3}{2}, \bar{K}^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Delta^0, -\frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2}, \eta; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2}, \eta; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2}, \eta; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2}, \eta'; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2}, \eta'; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2}, \eta'; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi^* K} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2}, K^0; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2}, K^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Xi^{*0}, -\frac{1}{2}, K^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{15}} \left| \Xi^{*-}, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \Xi^{*-}, \frac{3}{2}, K^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}} \left| \Xi^{*-}, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \left. \right]
\end{aligned}$$

(3.51)

Para el octete de bariones tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \Psi_p, \frac{1}{2} \right\rangle = & \mathcal{N}_N \left[\left| p, \frac{1}{2} \right\rangle \right. \\
& + a_{N \rightarrow N\pi} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| p, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| p, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| n, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| n, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{N \rightarrow \Sigma K} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, K^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^+, -\frac{1}{2}, K^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^0, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{N \rightarrow \Lambda K} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Lambda^0, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Lambda^0, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{N \rightarrow N\eta} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| p, \frac{1}{2}, \eta; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| p, -\frac{1}{2}, \eta; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{N \rightarrow N\eta'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| p, \frac{1}{2}, \eta'; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| p, -\frac{1}{2}, \eta'; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{N \rightarrow \Delta\pi} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Delta^{++}, \frac{3}{2}, \pi^-; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Delta^{++}, \frac{1}{2}, \pi^-; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Delta^{++}, -\frac{1}{2}, \pi^-; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad - \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Delta^+, \frac{3}{2}, \pi^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Delta^+, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Delta^+, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{1}{6}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Delta^0, \frac{3}{2}, \pi^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Delta^0, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Delta^0, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{N \rightarrow \Sigma^* K} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, K^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, K^0; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2}, K^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2}, K^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \left. \right]
\end{aligned}$$

(3.52)

$$\begin{aligned}
\left| \Psi_{\Sigma^+, \frac{1}{2}} \right\rangle = & \mathcal{N}_{\Sigma} \left[\left| \Sigma^+, \frac{1}{2} \right\rangle \right. \\
& + a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \pi} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^+, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^0, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Sigma \rightarrow \Xi K} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^0, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^0, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma \rightarrow N \bar{K}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| p, \frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| p, -\frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma \rightarrow \Lambda \pi} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Lambda^0, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Lambda^0, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, \eta; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^+, -\frac{1}{2}, \eta; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, \eta'; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^+, -\frac{1}{2}, \eta'; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \pi} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, \pi^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2}, \pi^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Sigma \rightarrow \Delta \bar{K}} \left(-\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Delta^+, \frac{3}{2}, \bar{K}^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Delta^+, \frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Delta^+, -\frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Delta^{++}, \frac{3}{2}, \bar{K}^-; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Delta^{++}, \frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Delta^{++}, -\frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, \eta; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, \eta; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2}, \eta; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, \eta'; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, \eta'; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2}, \eta'; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Sigma \rightarrow \Xi^* K} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2}, K^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Xi^{*0}, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \Psi_{\Xi^0, \frac{1}{2}} \right\rangle = & \mathcal{N}_{\Xi} \left[\left| \Xi^0, \frac{1}{2} \right\rangle \right. \\
& + a_{\Xi \rightarrow \Xi \pi} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^0, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^0, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^-, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^-, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Xi \rightarrow \Sigma \bar{K}} \left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^0, -\frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^+, -\frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Xi \rightarrow \Lambda \bar{K}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Lambda^0, \frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Lambda^0, -\frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^0, \frac{1}{2}, \eta; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^0, -\frac{1}{2}, \eta; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^0, \frac{1}{2}, \eta'; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^0, -\frac{1}{2}, \eta'; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \pi} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2}, \pi^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Xi^{*0}, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Xi^{*-}, \frac{3}{2}, \pi^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^{*-}, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Xi^{*-}, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Xi \rightarrow \Sigma^* \bar{K}} \left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2}, \bar{K}^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, \bar{K}^-; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2}, \eta; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2}, \eta; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Xi^{*0}, -\frac{1}{2}, \eta; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2}, \eta'; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2}, \eta'; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Xi^{*0}, -\frac{1}{2}, \eta'; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& \left. + a_{\Xi \rightarrow \Omega K} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Omega^-, \frac{3}{2}, K^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Omega^-, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Omega^-, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \Psi_{\Lambda^0, \frac{1}{2}} \right\rangle = & \mathcal{N}_\Lambda \left[\left| \Lambda^0, \frac{1}{2} \right\rangle \right. \\
& + a_{\Lambda \rightarrow \Sigma \pi} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2}, \pi^-; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^+, -\frac{1}{2}, \pi^-; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^0, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^-, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Sigma^-, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Lambda \rightarrow \Xi K} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^0, \frac{1}{2}, K^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^0, -\frac{1}{2}, K^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^-, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Xi^-, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Lambda \rightarrow N \bar{K}} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| p, \frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| p, -\frac{1}{2}, \bar{K}^-; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| n, \frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| n, -\frac{1}{2}, \bar{K}^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Lambda \rightarrow \Lambda \eta} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Lambda^0, \frac{1}{2}, \eta; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Lambda^0, -\frac{1}{2}, \eta; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Lambda \rightarrow \Lambda \eta'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Lambda^0, \frac{1}{2}, \eta'; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Lambda^0, -\frac{1}{2}, \eta'; 1, 1 \right\rangle \right\} \\
& + a_{\Lambda \rightarrow \Sigma^* \pi} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2}, \pi^-; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2}, \pi^-; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2}, \pi^-; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2}, \pi^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2}, \pi^0; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2}, \pi^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Sigma^{*-}, \frac{3}{2}, \pi^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Sigma^{*-}, \frac{1}{2}, \pi^+; 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Sigma^{*-}, -\frac{1}{2}, \pi^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \\
& + a_{\Lambda \rightarrow \Xi^* K} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2}, K^0; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2}, K^0; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Xi^{*0}, -\frac{1}{2}, K^0; 1, 1 \right\rangle \right\} \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \left| \Xi^{*-}, \frac{3}{2}, K^+; 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \Xi^{*-}, \frac{1}{2}, K^+; 1, 0 \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}} \left| \Xi^{*-}, -\frac{1}{2}, K^+; 1, 1 \right\rangle \right\} \right) \left. \right]
\end{aligned}$$

3.3. El modelo de quarks Unquenched

Una vez obtenidas las funciones de onda de espín-sabor de los bariones del decuplete en el MCM, lo único que basta es obtener los valores para las amplitudes de probabilidad $a_{A \rightarrow BC}$ para que estén completamente determinadas. Existen varios métodos para obtenerlas. En la siguiente sección nos centraremos en el modelo de quarks unquenched, UQM, para obtener estos valores.

3.3.1. Cálculo del parámetro γ^2

En los modelos de quarks (sin considerar gluones), se consideran a los quarks como partones efectivos que llevan una fracción del momento total, \mathbf{P} , del hadrón. Se espera que los quarks estén distribuidos en la forma $x = p_{quark}^z / \mathbf{P}$ con funciones de distribución de quarks dependientes de espín $q_{\uparrow}(x)$ y $q_{\downarrow}(x)$ representando las probabilidades de encontrar quarks con componente de espín $\pm \frac{1}{2}$ a lo largo del eje \hat{z} y fracción de momento x . Para estudiar las distintas contribuciones de estos quarks en los distintos modelos son útiles las siguientes funciones

$$q(x) = q_{\uparrow}(x) + q_{\downarrow}(x) \quad (3.56)$$

$$\Delta q(x) = q_{\uparrow}(x) - q_{\downarrow}(x) \quad (3.57)$$

$$\Delta q = \int dx [q_{\uparrow}(x) - q_{\downarrow}(x)]. \quad (3.58)$$

La suma de Gottfried está dada por [32],

$$S_G = \int_0^1 dx \frac{F_p(x) - F_n(x)}{x} = 0.255 \pm 0.008 \quad (3.59)$$

que indica el contenido de quarks (y antiquarks en general) en el protón, donde $F_p(x)$ y $F_n(x)$ son las funciones de estructura electromagnética del protón y neutrón respectivamente, los cuales se obtienen a partir de las dispersiones electrón-protón y neutrón-neutrón. Sabemos que las secciones eficaces cumplen para el modelo de partones

$$\frac{d\sigma_{ep}}{d_x d_y} \propto \frac{F_p(x)}{x} = \frac{4}{9} [u(x) - \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [d(x) - \bar{d}(x)], \quad (3.60)$$

$$\frac{d\sigma_{nn}}{d_x d_y} \propto \frac{F_n(x)}{x} = \frac{4}{9} [d(x) - \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [u(x) - \bar{u}(x)], \quad (3.61)$$

entonces usando la normalización para las funciones de estructura del protón como

$$\int_0^1 dx [u(x) - \bar{u}(x)] = 2, \quad \int_0^1 dx [d(x) - \bar{d}(x)] = 1 \quad (3.62)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} S_G &= \int_0^1 dx \frac{F_p(x) - F_n(x)}{x} \\ &= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{3} (u(x) + \bar{u}(x)) - \frac{1}{3} (d(x) + \bar{d}(x)) \right] \\ &= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{3} (u(x) - \bar{u}(x)) - (d(x) - \bar{d}(x)) + \frac{2}{3} (\bar{u}(x) - \bar{d}(x)) \right] \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \int_0^1 dx (\bar{d}(x) - \bar{u}(x)), \end{aligned} \quad (3.63)$$

conocida como la regla de suma de Gottfried. El resultado para el CQM es directamente $S_G = 1/3$, pues no están considerados los antiquarks en la función de onda del protón (*i.e.* $\bar{d} = \bar{u} = 0$). Sin embargo como en la ecuación 3.59 el valor experimental es distinto, teniendo como consecuencia que

$$\bar{d} - \bar{u} = \int_0^1 dx [\bar{d}(x) - \bar{u}(x)] = 0.118 \pm 0.012, \quad (3.64)$$

es decir, existe un exceso de antiquarks \bar{d} sobre antiquarks \bar{u} en el protón. Con este valor de la asimetría de sabor en el protón podemos extraer el valor del parámetro γ para el modelo 3P_0 y evidentemente para el UQM que aparece en las amplitudes de probabilidad de los estados barión-mesón en las funciones de onda de los bariones de la sección 3.2. Para ello se calculan los valores de \bar{d} y \bar{u} con la función de onda 3.52 del protón

$$\bar{d} = \mathcal{N}_N^2 \left(\frac{1}{6} a_{N \rightarrow N\pi}^2 + \frac{1}{6} a_{N \rightarrow N\eta}^2 + \frac{4}{6} a_{N \rightarrow \Delta\pi}^2 + \frac{2}{6} a_{N \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow N\eta} \right) \quad (3.65)$$

$$\bar{u} = \mathcal{N}_N^2 \left(\frac{5}{6} a_{N \rightarrow N\pi}^2 + \frac{1}{6} a_{N \rightarrow N\eta}^2 + \frac{2}{6} a_{N \rightarrow \Delta\pi}^2 - \frac{2}{6} a_{N \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow N\eta} \right). \quad (3.66)$$

Así, se tiene entonces que

$$\Delta P = \bar{d} - \bar{u} = 0.118 = \mathcal{N}_N^2 \left(\frac{2}{3} a_{N \rightarrow N\pi}^2 - \frac{1}{3} a_{N \rightarrow \Delta\pi}^2 - \frac{2}{3} a_{N \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow N\eta} \right), \quad (3.67)$$

de donde el factor de normalización \mathcal{N}_N^2 está determinado por 3.82 y puede factorizarse entonces γ^2 quedando

$$\gamma^2 = \frac{-3\Delta P}{\alpha_{N \rightarrow \Delta\pi}^2 (3\Delta P + 1) + 2\alpha_{N \rightarrow N\pi} \alpha_{N \rightarrow N\eta}} + \frac{-3\Delta P}{\alpha_{N \rightarrow N\pi}^2 (3\Delta P - 2) + 3\Delta P (\alpha_{N \rightarrow N\eta}^2 + \alpha_{N \rightarrow \Sigma K}^2 + \alpha_{N \rightarrow \Lambda K}^2 + \alpha_{N \rightarrow \Sigma^* K}^2)}, \quad (3.68)$$

donde se ha factorizado γ de las amplitudes de probabilidad como $\gamma \alpha_{A \rightarrow BC} = a_{A \rightarrow BC}$. Sustituyendo el valor experimental de $\Delta P = \bar{d} - \bar{u}$ y calculando las integrales de las expresiones $\alpha_{A \rightarrow BC}$ como se muestra en [38, 39] tenemos que el valor $\gamma^2 = 49.92$.

Para el caso en que se suponen únicamente las contribuciones de los mesones π en la nube mesónica, los términos $a_{N \rightarrow N\eta} = a_{N \rightarrow \Sigma K} = a_{N \rightarrow \Sigma^* K} = a_{N \rightarrow \Lambda K} = 0$, por lo que el valor del parámetro es $\gamma^2 = 20.025$ [41].

3.3.2. Cálculo de amplitudes de probabilidad de estados $|BC\rangle$

De acuerdo a la ecuación para la función de onda de un barión en el modelo de quarks unquenched (3.27), el factor de normalización está dado por

$$1 = \mathcal{N}_a^2 \left(1 + \sum_{BCIJ} \int k^2 dk \frac{|M_{A \rightarrow BC}(k)|^2}{[m_a - E_B(k) - E_C(k)]^2} \right) \quad (3.69)$$

donde Henley y Miller [31] mostraron que la transición puede ser expresada como $\langle BC \vec{K} kl J | T^\dagger | A \rangle = \delta(k) M_{A \rightarrow BC}(k)$, o bien

$$M_{A \rightarrow BC}(k) = \int d\vec{K} \langle BC \vec{K} kl J | T^\dagger | A \rangle \quad (3.70)$$

de donde el factor, desarrollado en general por W. Roberts y Silvestre-Brac [37] para el estudio de decaimientos de bariones, expresado en la normalización de las coordenadas de Jacobi (1.31) y como en [40], queda como

$$M_{A \rightarrow BC}(k_0) = 6\gamma \theta_{A \rightarrow BC} \epsilon(l_{\lambda_b}, l_c, L_{bc}, l, l_{\lambda_a}, L, k_0) \quad (3.71)$$

Los coeficientes $\theta_{A \rightarrow BC}$ se refieren a los acoplamientos de color-espín-sabor entre el barión inicial y los estados intermedios barión-mesón debido a los pares quark-antiquark. Para bariones y mesones sin excitaciones orbitales, i.e., $l_{\lambda_A} = l_{\lambda_B} = l_{\lambda_C} = 0$, como se muestra en [40], se reducen a

$$\theta_{A \rightarrow BC} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2J_b + 1}{2}} (-1)^{J_\rho + J_a - \frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} J_a & 1 & J_b \\ \frac{1}{2} & J_b & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \mathcal{F}_{A \rightarrow BC}, \quad (3.72)$$

que para el caso de bariones del decuplete, $A_{10} \rightarrow B_8 + C_8$

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ \Sigma^* \\ \Xi^* \\ \Omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N\pi & \Sigma K \\ N\bar{K} & \Sigma\pi & \Lambda\pi & \Sigma\eta_8 & \Xi K \\ \Sigma\bar{K} & \Lambda\bar{K} & \Xi\pi & \Xi\eta_8 \\ & & \Xi\bar{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{27} & \frac{\sqrt{2}}{27} & -\frac{1}{9\sqrt{3}} & \frac{1}{9\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{27} \\ \frac{1}{9\sqrt{3}} & -\frac{1}{9\sqrt{3}} & \frac{1}{9\sqrt{3}} & \frac{1}{9\sqrt{3}} \\ & & \frac{2}{9\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

Los coeficientes de espín-sabor-color para los acoplamientos $A_{10} \rightarrow B_{10} + C_8$ son

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ \Sigma^* \\ \Xi^* \\ \Omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\pi & \Delta\eta_8 & \Sigma^* K \\ \Delta\bar{K} & \Sigma^*\pi & \Sigma^*\eta_8 & \Xi^* K \\ \Sigma^*\bar{K} & \Xi^*\pi & \Xi^*\eta_8 & \Omega K \\ & \Xi^*\bar{K} & \Omega\eta_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{5}}{18\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{9\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{10}}{27} & -\frac{\sqrt{10}}{27} & 0 & \frac{\sqrt{10}}{27} \\ -\frac{\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{5}}{18\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{18\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{9\sqrt{6}} \\ & -\frac{\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Coefficientes color-spin-sabor para acoplamientos $A_{10} \rightarrow B_{10} + C_1$ son

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ \Sigma^* \\ \Xi^* \\ \Omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\eta_1 \\ \Sigma^*\eta_1 \\ \Xi^*\eta_1 \\ \Omega\eta_1 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{5}}{9\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Para los acoplamientos color-espín-sabor del octete $A_8 \rightarrow B_8 + C_8$

$$\begin{pmatrix} N \\ \Sigma \\ \Lambda \\ \Xi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N\pi & N\eta_8 & \Sigma K & \Lambda K \\ N\bar{K} & \Sigma\pi & \Lambda\pi & \Sigma\eta_8 & \Xi K \\ N\bar{K} & \Sigma\pi & \Lambda\eta_8 & \Xi K \\ \Sigma\bar{K} & \Lambda\bar{K} & \Xi\pi & \Xi\eta_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18\sqrt{3}} & -\frac{1}{18\sqrt{3}} & \frac{1}{18\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} \\ \frac{1}{27\sqrt{2}} & -\frac{2\sqrt{2}}{27} & -\frac{1}{9\sqrt{3}} & -\frac{1}{9\sqrt{3}} & \frac{5}{27\sqrt{2}} \\ -\frac{3\sqrt{6}}{5} & \frac{9}{1} & \frac{9\sqrt{3}}{1} & -\frac{9\sqrt{6}}{1} \\ -\frac{1}{18\sqrt{3}} & -\frac{1}{18\sqrt{3}} & \frac{1}{18\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Los acoplamientos para $A_8 \rightarrow B_{10} + C_8$ de color-espín-sabor son

$$\begin{pmatrix} N \\ \Sigma \\ \Lambda \\ \Xi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\pi & \Sigma^* K \\ \Delta\bar{K} & \Sigma^*\pi & \Sigma^*\eta_8 & \Xi^* K \\ \Sigma^*\bar{K} & \Xi^*\pi & \Xi^*\eta_8 & \Omega K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \\ \frac{4}{27} & -\frac{2}{27} & -\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} & \frac{2}{27} \\ -\frac{\sqrt{2}}{9} & \frac{2}{9\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} & \frac{2}{9\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

Los acoplamientos para $A_8 \rightarrow B_8 + C_1$ de color-espín-sabor son

$$\begin{pmatrix} N \\ \Sigma \\ \Lambda \\ \Xi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N\eta_1 \\ \Sigma\eta_1 \\ \Lambda\eta_1 \\ \Xi\eta_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

Por el otro lado tenemos el factor $\epsilon(l_{\lambda_b}, l_c, L_{bc}, l, l_{\lambda_a}, L, k_0)$ el cuál de acuerdo a [37] puede expresarse como

$$\epsilon(k_0) = -\frac{1}{2} \left(\frac{9\alpha_b^4 \alpha_c^2}{\pi} \right)^{3/4} \frac{4\alpha_b^2 + \alpha_c^2}{(3\alpha_b^2 + \alpha_c^2 + \alpha_d^2)^{5/2}} k_0 e^{-F^2 k_0^2} = \epsilon' k_0 e^{-F^2 k_0^2} \quad (3.79)$$

con

$$F^2 = \frac{\alpha_b^2(12\alpha_b^2 + 5\alpha_c^2) + \alpha_d^2(20\alpha_d^2 + 3\alpha_c^2)}{24(3\alpha_b^2 + \alpha_c^2 + \alpha_d^2)} \quad (3.80)$$

Con $\alpha_b^2 = 9.77 \text{ GeV}^{-2}$, $\alpha_c^2 = 6.25 \text{ GeV}^{-2}$ y $\alpha_d^2 = 0.0 \text{ GeV}^{-2}$. Hecho esto, resulta ahora evidente que las amplitudes de probabilidad $a_{A \rightarrow BC}$ de la sección anterior se pueden expresar en este modelo de la forma

$$a_{A \rightarrow BC}^2 = (6\gamma\theta_{A \rightarrow BC}\varepsilon')^2 \int_0^\infty dk_0 \frac{k_0^4 e^{-2F^2 k_0^2}}{\left[m_A - \sqrt{m_B^2 + k_0^2} - \sqrt{m_C^2 + k_0^2} \right]^2}. \quad (3.81)$$

Y también el factor de normalización queda simplificado como

$$\mathcal{N}_A^2 = \left(1 + \sum_{BC} a_{A \rightarrow BC}^2 \right)^{-1} \quad (3.82)$$

Como ejemplo, los factores $a_{A \rightarrow B_8 C}$ de la ecuación (3.29) están dados por

$$a_{A \rightarrow B_8 C}^2 = (6\gamma\theta_{A \rightarrow B_8 C}\varepsilon')^2 \int_0^\infty dk_0 \frac{k_0^4 e^{-2F^2 k_0^2}}{\left[m_A - \sqrt{m_{B_8}^2 + k_0^2} - \sqrt{m_C^2 + k_0^2} \right]^2} \quad (3.83)$$

y los coeficientes $a_{A \rightarrow B_{10} C}$ quedan como

$$a_{A \rightarrow B_{10} C}^2 = (6\gamma\theta_{A \rightarrow B_{10} C}\varepsilon')^2 \int_0^\infty dk_0 \frac{k_0^4 e^{-2F^2 k_0^2}}{\left[m_A - \sqrt{m_{B_{10}}^2 + k_0^2} - \sqrt{m_C^2 + k_0^2} \right]^2} \quad (3.84)$$

Algo que nos será de bastante utilidad en el siguiente capítulo al calcular los valores esperados del operador de momento magnético para un estado son los términos cruzados los cuales no son simplemente la multiplicación directa, sino, estrictamente hablando, el término cruzado esta dado por

$$a_{A \rightarrow B_8 C} a_{A \rightarrow B_{10} C} = (6\gamma\varepsilon')^2 \theta_{A \rightarrow B_{10} C} \theta_{A \rightarrow B_8 C} \times$$

$$\int_0^\infty dk_0 \frac{k_0^4 e^{-2F^2 k_0^2}}{\left[m_A - \sqrt{m_{B_8}^2 + k_0^2} - \sqrt{m_C^2 + k_0^2} \right] \left[m_A - \sqrt{m_{B_{10}}^2 + k_0^2} - \sqrt{m_C^2 + k_0^2} \right]} \quad (3.85)$$

Para los coeficientes que contienen la mezcla de los estados isoescalares η y η' los posibles casos en los elementos de matriz distintos de cero $\langle B_1 C_1 | \hat{O} | B_2 C_2 \rangle$ a utilizar son $a_{A \rightarrow B\eta}^2$, $a_{A \rightarrow B\eta'}^2$, $a_{A_1 \rightarrow B_1 \eta} a_{A_2 \rightarrow B_2 \eta}$, $a_{A_1 \rightarrow B_1 \eta'} a_{A_2 \rightarrow B_2 \eta'}$, donde, de acuerdo a las ecuaciones de mezcla de sabor de los mesones isoescalares η , η' 1.52, se tiene que

$$\begin{aligned}
a_{A \rightarrow B\eta}^2 &= \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{|\langle B\eta, lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle|^2}{[m_A - E_B(k) - E_\eta(k)]^2} \\
&= \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{|\cos \theta_P \langle B\eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle - \sin \theta_P \langle B\eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle|^2}{[m_A - E_B(k) - E_\eta(k)]^2} \\
&= \cos^2 \theta_P \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{|\langle B\eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle|^2}{[m_A - E_B(k) - E_\eta(k)]^2} \\
&\quad + \sin^2 \theta_P \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{|\langle B\eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle|^2}{[m_A - E_B(k) - E_\eta(k)]^2} \\
&\quad - 2 \cos \theta_P \sin \theta_P \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{\langle B\eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle \langle B\eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle^*}{[m_A - E_B(k) - E_\eta(k)]^2}, \tag{3.86}
\end{aligned}$$

donde, por las ecuaciones 3.70 y 3.71 tenemos que las integrales, escritas arriba, tienen en común todos sus factores excepto los coeficientes de espín-sabor-color $\theta_{A \rightarrow B\eta}$ (además de las funciones dependientes del ángulo de mezcla) y son tales que, análogamente a lo mostrado anteriormente, la amplitud de probabilidad se reduce a

$$\begin{aligned}
a_{A \rightarrow B\eta}^2 &= (6\gamma\varepsilon')^2 \int_0^\infty dk \frac{k^4 e^{-2F^2 k^2}}{[m_A - E_B(k) - E_\eta(k)]^2} \\
&\quad \times (\theta_{A \rightarrow B\eta_8}^2 \cos^2 \theta_P + \theta_{A \rightarrow B\eta_1}^2 \sin^2 \theta_P - 2\theta_{A \rightarrow B\eta_8} \theta_{A \rightarrow B\eta_1} \cos \theta_P \sin \theta_P) \\
&= (6\gamma\varepsilon')^2 \int_0^\infty dk \frac{k^4 e^{-2F^2 k^2}}{[m_A - E_B(k) - E_\eta(k)]^2} (\theta_{A \rightarrow B\eta_8} \cos \theta_P - \theta_{A \rightarrow B\eta_1} \sin \theta_P)^2. \tag{3.87}
\end{aligned}$$

Análogamente, para las amplitudes de probabilidad que tienen estados del tipo $|B\eta'\rangle$, tenemos que éstas son

$$\begin{aligned}
a_{A \rightarrow B\eta'}^2 &= \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{|\langle B\eta', lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle|^2}{[m_A - E_B(k) - E_{\eta'}(k)]^2} \\
&= \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{|\sin \theta_P \langle B\eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle + \cos \theta_P \langle B\eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle|^2}{[m_A - E_B(k) - E_{\eta'}(k)]^2} \\
&= \sin^2 \theta_P \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{|\langle B\eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle|^2}{[m_A - E_B(k) - E_{\eta'}(k)]^2} \\
&\quad + \cos^2 \theta_P \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{|\langle B\eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle|^2}{[m_A - E_B(k) - E_{\eta'}(k)]^2} \\
&\quad + 2 \cos \theta_P \sin \theta_P \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{\langle B\eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle \langle B\eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A \rangle^*}{[m_A - E_B(k) - E_{\eta'}(k)]}, \tag{3.88}
\end{aligned}$$

y entonces

$$a_{A \rightarrow B\eta'}^2 = (6\gamma\varepsilon')^2 \int_0^\infty dk \frac{k^4 e^{-2F^2 k^2}}{[m_A - E_B(k) - E_{\eta'}(k)]^2} (\theta_{A \rightarrow B\eta_8} \sin \theta_P + \theta_{A \rightarrow B\eta_1} \cos \theta_P)^2. \tag{3.89}$$

Para el caso de los términos cruzados se tiene que

$$\begin{aligned}
a_{A_1 \rightarrow B_1 \eta} a_{A_2 \rightarrow B_2 \eta} &= \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{\langle B_1 \eta, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_1 \rangle \langle B_2 \eta, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_2 \rangle^*}{[m_{A_1} - E_{B_1}(k) - E_\eta(k)][m_{A_2} - E_{B_2}(k) - E_\eta(k)]} \\
&= \cos^2 \theta_P \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{\langle B_1 \eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_1 \rangle \langle B_2 \eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_2 \rangle^*}{[m_{A_1} - E_{B_1}(k) - E_\eta(k)][m_{A_2} - E_{B_2}(k) - E_\eta(k)]} \\
&\quad \sin^2 \theta_P \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{\langle B_1 \eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_1 \rangle \langle B_2 \eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_2 \rangle^*}{[m_{A_1} - E_{B_1}(k) - E_\eta(k)][m_{A_2} - E_{B_2}(k) - E_\eta(k)]} \\
&\quad - \cos \theta_P \sin \theta_P \left(\sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{\langle B_1 \eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_1 \rangle \langle B_2 \eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_2 \rangle^*}{[m_{A_1} - E_{B_1}(k) - E_\eta(k)][m_{A_2} - E_{B_2}(k) - E_\eta(k)]} \right. \\
&\quad \left. \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{\langle B_1 \eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_1 \rangle \langle B_2 \eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_2 \rangle^*}{[m_{A_1} - E_{B_1}(k) - E_\eta(k)][m_{A_2} - E_{B_2}(k) - E_\eta(k)]} \right), \quad (3.90)
\end{aligned}$$

y por el mismo argumento anterior, esta expresión es reducida a

$$\begin{aligned}
a_{A_1 \rightarrow B_1 \eta} a_{A_2 \rightarrow B_2 \eta} &= (6\gamma\varepsilon')^2 \int_0^\infty dk \frac{k^4 e^{-2F^2 k^2}}{[m_{A_1} - E_{B_1}(k) - E_\eta(k)][m_{A_2} - E_{B_2}(k) - E_\eta(k)]} \\
&\quad \times (\theta_{A_1 \rightarrow B_1 \eta_8} \theta_{A_2 \rightarrow B_2 \eta_8} \cos^2 \theta_P + \theta_{A_1 \rightarrow B_1 \eta_1} \theta_{A_2 \rightarrow B_2 \eta_1} \sin^2 \theta_P \\
&\quad - [\theta_{A_1 \rightarrow B_1 \eta_8} \theta_{A_2 \rightarrow B_2 \eta_1} + \theta_{A_1 \rightarrow B_1 \eta_1} \theta_{A_2 \rightarrow B_2 \eta_8}] \cos \theta_P \sin \theta_P) \\
&= (6\gamma\varepsilon')^2 \int_0^\infty dk \frac{k^4 e^{-2F^2 k^2}}{[m_{A_1} - E_{B_1}(k) - E_\eta(k)][m_{A_2} - E_{B_2}(k) - E_\eta(k)]} \\
&\quad \times (\theta_{A_1 \rightarrow B_1 \eta_8} \cos \theta_P - \theta_{A_1 \rightarrow B_1 \eta_1} \sin \theta_P) (\theta_{A_2 \rightarrow B_2 \eta_8} \cos \theta_P - \theta_{A_2 \rightarrow B_2 \eta_1} \sin \theta_P). \quad (3.91)
\end{aligned}$$

Análogamente el término

$$\begin{aligned}
a_{A_1 \rightarrow B_1 \eta'} a_{A_2 \rightarrow B_2 \eta'} &= \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{\langle B_1 \eta', lJk\vec{K} | \hat{T} | A_1 \rangle \langle B_2 \eta', lJk\vec{K} | \hat{T} | A_2 \rangle^*}{[m_{A_1} - E_{B_1}(k) - E_{\eta'}(k)][m_{A_2} - E_{B_2}(k) - E_{\eta'}(k)]} \\
&= \sin^2 \theta_P \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{\langle B_1 \eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_1 \rangle \langle B_2 \eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_2 \rangle^*}{[m_{A_1} - E_{B_1}(k) - E_{\eta'}(k)][m_{A_2} - E_{B_2}(k) - E_{\eta'}(k)]} \\
&\quad \cos^2 \theta_P \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{\langle B_1 \eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_1 \rangle \langle B_2 \eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_2 \rangle^*}{[m_{A_1} - E_{B_1}(k) - E_{\eta'}(k)][m_{A_2} - E_{B_2}(k) - E_{\eta'}(k)]} \\
&\quad + \cos \theta_P \sin \theta_P \left(\sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{\langle B_1 \eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_1 \rangle \langle B_2 \eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_2 \rangle^*}{[m_{A_1} - E_{B_1}(k) - E_{\eta'}(k)][m_{A_2} - E_{B_2}(k) - E_{\eta'}(k)]} \right. \\
&\quad \left. \sum_{IJ} \int k^2 dk d\vec{K} \frac{\langle B_1 \eta_1, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_1 \rangle \langle B_2 \eta_8, lJk\vec{K} | \hat{T} | A_2 \rangle^*}{[m_{A_1} - E_{B_1}(k) - E_{\eta'}(k)][m_{A_2} - E_{B_2}(k) - E_{\eta'}(k)]} \right), \quad (3.92)
\end{aligned}$$

queda como

$$\begin{aligned}
a_{A_1 \rightarrow B_1 \eta'} a_{A_2 \rightarrow B_2 \eta'} &= (6\gamma\varepsilon')^2 \int_0^\infty dk \frac{k^4 e^{-2F^2 k^2}}{[m_{A_1} - E_{B_1}(k) - E_{\eta'}(k)][m_{A_2} - E_{B_2}(k) - E_{\eta'}(k)]} \\
&\quad \times (\theta_{A_1 \rightarrow B_1 \eta_8} \sin \theta_P + \theta_{A_1 \rightarrow B_1 \eta_1} \cos \theta_P) (\theta_{A_2 \rightarrow B_2 \eta_8} \sin \theta_P + \theta_{A_2 \rightarrow B_2 \eta_1} \cos \theta_P). \quad (3.93)
\end{aligned}$$

Si observamos en las integrales de las ecuaciones (3.3.2), (3.84) y (3.85), debemos tener especial cuidado al calcularlas numéricamente, pues en el caso en que $m_A > M_B + M_C$ tenemos valores de k_0

en los cuáles existen polos en la integral (polos dobles), por lo que deben tratarse con la adecuada herramienta. Para el caso en que $m_A \leq M_B + M_C$ no se tiene ningún problema en resolver estas integrales. Como en estos casos se tienen polos dobles en las correspondientes integrales es bastante conveniente hacer el siguiente cambio de variable

$$k_0 \longrightarrow E_{BC} = \sqrt{M_B^2 + k_0^2} + \sqrt{M_C^2 + k_0^2}. \quad (3.94)$$

Así la integral correspondiente queda como

$$\int_0^\infty dk_0 \frac{k_0^4 e^{-2F^2 k_0^2}}{\left[m_A - \sqrt{m_B^2 + k_0^2} - \sqrt{m_C^2 + k_0^2} \right]^2} = \int_{M_B+M_C}^\infty dE_{BC} \frac{f(E_{BC}) e^{-2F^2 A/E_{BC}^2}}{M_A - E_{BC}} \quad (3.95)$$

con

$$A = A(E_{BC}) = \left(\frac{1}{4} [E_{BC}^2 - M_B^2 - M_C^2]^2 - M_B^2 M_C^2 \right), \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} f(E_{BC}) &= (-2F^2) \left(2 \frac{A^{5/2}}{E_{BC}^7} (E_{BC}^2 - M_B^2 - M_C^2) - \frac{A^{3/2}}{2E_{BC}^5} (E_{BC}^2 - M_B^2 - M_C^2)^2 - 2 \frac{A^{7/2}}{E_{BC}^9} \right) \\ &+ \frac{9}{2} \frac{A^{3/2}}{E_{BC}^5} (E_{BC}^2 - M_B^2 - M_C^2) - \frac{3}{4} \frac{A^{1/2}}{E_{BC}^3} (E_{BC}^2 - M_B^2 - M_C^2)^2 - 6 \frac{A^{5/2}}{E_{BC}^7} - \frac{A^{3/2}}{E_{BC}^3} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Así podemos ver que de la ecuación (3.95) es solamente necesario calcular numéricamente la integral alrededor de un sólo polo (que incluso podía tener multiplicidad 2). El método usado aquí para calcularla fue mediante el valor principal de Cauchy (apéndice D). Las masas utilizadas para el cálculo se tomaron como el promedio entre el multiplete de isospín (pues aquí suponemos la simetría de isospín con la masa del quark u idéntica a la masa del quark d) de las últimas mediciones reportadas en [33], y que se muestran en la tabla D.1 en el apéndice **D.2**.

Los resultados para los coeficientes de amplitud de probabilidad calculados se muestran en la tabla 3.1, para el caso de la contribución piónica, y en la tabla 3.2 para la contribución de todos los mesones pseudoescalares.

Con los valores ya obtenidos para las amplitudes de probabilidad, y como se mencionó anteriormente, es posible tener las funciones de onda de espín-sabor para los bariones del decuplete en UQM, de la forma

$$|\Psi_A\rangle = \mathcal{N}_A \left[|A\rangle + \sum_{BC} a_{A \rightarrow BC} |BC\rangle \right], \quad (3.98)$$

que corresponden a las funciones de MCM (3.48)-(3.55), con la diferencia que en el UQM la nube mesonica no es producida como consecuencia de la emisión del barión $|A\rangle$ sino por la creación de pares con los números cuánticos del vacío. Estos estados nos serán útiles para el cálculo de los momentos magnéticos de estos bariones en el UQM en el siguiente capítulo.

$a_{N \rightarrow N \pi}^2$	0.470533	$a_{\Delta \rightarrow \Delta \pi} a_{N \rightarrow N \pi}$	0.49648
$a_{N \rightarrow \Delta \pi}^2$	0.323428	$a_{\Delta \rightarrow \Delta \pi} a_{N \rightarrow \Delta \pi}$	0.403534
$a_{\Delta \rightarrow N \pi}^2$	0.366562	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \pi}$	-0.171695
$a_{\Delta \rightarrow \Delta \pi}^2$	0.513753	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \pi}$	-0.0919165
$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \pi}^2$	0.217043	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \pi}$	0.248108
$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.0683586	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \pi}$	0.138443
$a_{\Sigma \rightarrow \Lambda \pi}^2$	0.105995	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \pi}$	0.242865
$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi}^2$	0.130517	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Lambda \pi}$	-0.123221
$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.283629	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Lambda \pi}$	0.172582
$a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi}^2$	0.203568	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Lambda \pi}$	0.169713
$a_{\Xi \rightarrow \Xi \pi}^2$	0.020971	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi \pi}$	0.070858
$a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \pi}^2$	0.0996904	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi \pi}$	-0.0479087
$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi}^2$	0.21351	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \pi}$	-0.147068
$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \pi}^2$	0.109453	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \pi}$	0.103759
$a_{\Lambda \rightarrow \Sigma \pi}^2$	0.194878	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma \pi}$	0.159289
$a_{\Lambda \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.261784	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma \pi}$	-0.234831
$a_{\Delta \rightarrow N \pi} a_{N \rightarrow N \pi}$	0.499892	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma^* \pi}$	-0.177633
$a_{\Delta \rightarrow N \pi} a_{N \rightarrow \Delta \pi}$	0.40033	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma^* \pi}$	0.270052

Cuadro 3.1: Valores numéricos para los coeficientes de acoplamiento de las funciones de onda de los bariones en el UQM cuando la contribución es únicamente de la nube piónica ($\gamma^2 = 20.025$).

$a_{N \rightarrow N\pi}^2$	1.17307	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Sigma\bar{K}$	0.338007	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta_8} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta_8}$	0	$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta}^2$	0.161237
$a_{N \rightarrow \Delta\pi}^2$	0.806326	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Lambda\bar{K}$	0.483748	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta_1} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta_1}$	0	$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta'}^2$	0.00920331
$a_{N \rightarrow N\eta_8}^2$	0.0275238	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Sigma^* \bar{K}$	0.942947	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta_1} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta_1}$	0	$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta}^2$	0.156232
$a_{N \rightarrow \Sigma K}^2$	0.0199163	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Omega K$	0.261781	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta_1} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta_1}$	0	$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta'}^2$	0.0105879
$a_{N \rightarrow \Lambda K}^2$	0.20034	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Xi \eta_8$	0.201369	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta_1} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta_1}$	0.0791802	$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta}^2$	0.165273
$a_{N \rightarrow N\eta_1}^2$	0.0328945	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Xi^* \eta_1$	0	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi \pi}$	0.176653	$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta'}^2$	0.008985
$a_{N \rightarrow \Sigma^* K}^2$	0.123882	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Xi^* \eta_8$	0.157215	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi \pi}$	-0.119439	$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta}^2$	0.0292687
$a_{\Delta \rightarrow N\pi}^2$	0.913861	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Xi^* \eta_1$	0.183931	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi \pi}$	-0.366649	$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta'}$	0.162821
$a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi}^2$	1.28082	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Sigma \pi$	0.485842	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi \pi}$	0.258677	$a_{\Sigma \rightarrow \Xi \eta}$	0.176682
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma K}^2$	0.275972	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Sigma^* \pi$	0.652643	$a_{\Xi^* \rightarrow \Lambda \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Sigma \bar{K}}$	0.694169	$a_{\Sigma \rightarrow \Xi \eta'}$	0.0919393
$a_{\Delta \rightarrow \Delta \eta_8}^2$	0.148635	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow N \bar{K}$	0.806184	$a_{\Xi^* \rightarrow \Lambda \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Lambda \bar{K}}$	0.153792	$a_{\Sigma \rightarrow \Xi^* \eta}$	0.15354
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K}^2$	0.24507	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Xi K$	0.0444129	$a_{\Xi^* \rightarrow \Lambda \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Sigma^* \bar{K}}$	-0.318095	$a_{\Sigma \rightarrow \Xi^* \eta'}$	0.010469
$a_{\Delta \rightarrow \Delta \eta_1}^2$	0.175432	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Xi^* K$	0.262785	$a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Sigma \bar{K}}$	-0.592374	$a_{\Sigma \rightarrow \Xi \eta}$	0.18214
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma \pi}^2$	0.541101	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Lambda \eta_8$	0.115716	$a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Lambda \bar{K}}$	-0.130708	$a_{\Sigma \rightarrow \Xi^* \eta'}$	0.0096116
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.170422	$a_{\Sigma\eta}^2 \rightarrow \Lambda \eta_1$	0.0342937	$a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Sigma^* \bar{K}}$	0.273289	$a_{\Sigma \rightarrow \Xi^* \eta}$	0.0415422
$a_{\Delta \rightarrow \Lambda \pi}^2$	0.264253	$a_{\Delta \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow N\pi}$	1.24626	$a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma^* \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Sigma \bar{K}}$	0.998816	$a_{\Sigma \rightarrow \Xi^* \eta'}$	0.251595
$a_{\Delta \rightarrow N \bar{K}}^2$	0.0374272	$a_{\Delta \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow \Delta\pi}$	0.998047	$a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma^* \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Lambda \bar{K}}$	0.219239	$a_{\Sigma \rightarrow \Lambda \eta}$	0.0620963
$a_{\Delta \rightarrow \Xi K}^2$	0.423993	$a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} a_{N \rightarrow N\pi}$	1.23775	$a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma^* \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Sigma^* \bar{K}}$	-0.464953	$a_{\Sigma \rightarrow \Lambda \eta'}$	0.0660753
$a_{\Delta \rightarrow \Delta \bar{K}}^2$	0.629441	$a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} a_{N \rightarrow \Delta\pi}$	1.00604	$a_{\Xi^* \rightarrow \Omega K} a_{\Xi \rightarrow \Omega K}$	0.276684	$a_{\Delta \rightarrow \Delta \eta} a_{N \rightarrow N\eta}$	0.123229
$a_{\Delta \rightarrow \Xi^* K}^2$	0.0980676	$a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Sigma K}$	0.0739482	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \eta_8} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta_8}$	0.23353	$a_{\Delta \rightarrow \Delta \eta'} a_{N \rightarrow N\eta'}$	0.040763
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma \eta_8}^2$	0.117873	$a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Lambda K}$	0.234792	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta_8} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta_8}$	-0.163189	$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta}$	-0.162897
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma \eta_1}^2$	0.0348297	$a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Sigma^* K}$	0.183854	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \eta_8} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta_8}$	-0.183382	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta}$	0.067562
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \eta_8}^2$	0.172726	$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} a_{N \rightarrow \Sigma K}$	0.0698558	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta_8} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta_8}$	0.206934	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta}$	-0.159665
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \eta_1}^2$	0	$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} a_{N \rightarrow \Lambda K}$	0.221578	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \eta_1} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta_1}$	0	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta}$	0.0686951
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma \pi}^2$	0.325388	$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} a_{N \rightarrow \Sigma^* K}$	0.174025	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta_1} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta_1}$	0	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta'} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta'}$	0.00908983
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.707103	$a_{\Delta \rightarrow \Delta \eta_8} a_{N \rightarrow N\eta_8}$	0.0639571	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \eta_1} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta_1}$	0	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta'} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta'}$	-0.0415109
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.507508	$a_{\Delta \rightarrow \Delta \eta_1} a_{N \rightarrow N\eta_1}$	0.0759615	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta_1} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta_1}$	0.0809408	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta'} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta'}$	-0.00973864
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.357558	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \pi}$	-0.428045	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma \pi}$	0.397117	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta'} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta'}$	0.0387097
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.100663	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \pi}$	-0.229154	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma \pi}$	-0.585448	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \eta} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta}$	0.178876
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.611548	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \pi}$	0.618547	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma^* \pi}$	-0.44285	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta}$	-0.07978
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.336287	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \pi}$	0.345147	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma^* \pi}$	0.673256	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \eta} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta}$	-0.165871
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.182721	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \pi}$	0.605477	$a_{\Sigma^* \rightarrow N \bar{K}} a_{\Lambda \rightarrow N \bar{K}}$	0.516	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta}$	0.0856706
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Lambda \pi}$	-0.307197	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma \pi}$	-0.567574	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta'} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta'}$	0.0297112
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Lambda \pi}$	0.430259	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma^* \pi}$	0.63778	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta'} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta'}$	-0.051308
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.180011	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Lambda \pi}$	0.423105	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi K} a_{\Lambda \rightarrow \Xi K}$	-0.0666979	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \eta'} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta'}$	-0.0100122
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.052282	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \pi}$	0.329521	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi K} a_{\Lambda \rightarrow \Xi^* K}$	0.161638	$a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta'} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta'}$	0.152088
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.248534	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi K} a_{\Sigma \rightarrow \Xi K}$	0.206291	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Delta \bar{K}} a_{\Lambda \rightarrow N \bar{K}}$	0.701965	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta} a_{\Lambda \rightarrow \Lambda \eta}$	0.101108
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	1.05801	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi K} a_{\Sigma \rightarrow \Xi^* K}$	0.0988601	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi^* K} a_{\Lambda \rightarrow \Xi K}$	-0.122209	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta} a_{\Lambda \rightarrow \Lambda \eta}$	-0.0426303
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.051038	$a_{\Sigma^* \rightarrow N \bar{K}} a_{\Sigma \rightarrow N \bar{K}}$	-0.11241	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi^* K} a_{\Lambda \rightarrow \Xi^* K}$	0.296955	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta'} a_{\Lambda \rightarrow \Lambda \eta'}$	0.0243575
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.230472	$a_{\Sigma^* \rightarrow N \bar{K}} a_{\Sigma \rightarrow \Delta \bar{K}}$	-0.443485	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta_8} a_{\Lambda \rightarrow \Lambda \eta_8}$	0.145126	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta'} a_{\Lambda \rightarrow \Lambda \eta'}$	0.103719
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.29288	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Delta \bar{K}} a_{\Sigma \rightarrow N \bar{K}}$	-0.150949	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta_8} a_{\Lambda \rightarrow \Lambda \eta_8}$	0		
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.272386	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Delta \bar{K}} a_{\Sigma \rightarrow \Delta \bar{K}}$	-0.619035	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta_1} a_{\Lambda \rightarrow \Lambda \eta_1}$	0		
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.0356202	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi^* K} a_{\Sigma \rightarrow \Xi K}$	0.377578	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta_1} a_{\Lambda \rightarrow \Lambda \eta_1}$	0.0785672		
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.169749	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi^* K} a_{\Sigma \rightarrow \Xi^* K}$	0.18149	$a_{N \rightarrow N \eta}^2$	0.530313		
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta_8} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta_8}$	-0.146447	$a_{N \rightarrow N \eta'}^2$	0.0176521		
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.532292	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta_8} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta_8}$	0	$a_{\Delta \rightarrow \Delta \eta}^2$	0.286381		
$a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.272872	$a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta_8} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta_8}$	-0.176521	$a_{\Delta \rightarrow \Delta \eta'}^2$	0.0941415		

Cuadro 3.2: Valores numéricos para las amplitudes de probabilidad de las funciones de onda en el UQM cuando la contribución es de la nube mesónica pseudoescalar ($\gamma^2= 49.92$).

Capítulo 4

Decaimientos electromagnéticos de bariones

Las mediciones de la interacción del campo electromagnético con el núcleo provee una fuente de información experimental muy importante. La radiación gamma puede ser absorbida como también emitida por el núcleo, que en su nivel más fundamental, por un protón o un neutrón. Esto se generaliza a los demás bariones del octete ($J^P = \frac{1}{2}^+$) y decuplete ($J^P = \frac{3}{2}^+$). Estos llevan información en su momento angular total y energía así como en las probabilidades de transición asociadas. Estas mediciones nos permiten realizar conclusiones directas sobre el momento angular, la paridad, energías de excitación, y elementos de matriz de la transición entre los estados de bariones. En algunos casos la información puede ser resumida en los momentos multipolares electromagnéticos, tal como el momento dipolar magnético que está más directamente relacionado con el decaimiento electromagnético. En este trabajo se presenta la formulación de las ecuaciones relevantes para el momento magnético de transición y las anchuras de decaimiento electromagnético de los bariones, mostrando la importante dependencia de los modelos que se usen en esta, es decir, se comparan los modelos CQM (qqq) y UQM ($qqq - q\bar{q}$) observando directamente la importancia de la contribución de los términos $q\bar{q}$ del vacío en la nube mesónica de los bariones en estas expresiones.

4.1. La interacción electromagnética

Un grado de libertad de las partículas estudiadas aquí, como los hadrones y en si los quarks constituyentes, es la carga eléctrica (tabla 1.1), que es responsable de la interacción electromagnética formulada clásicamente como una misma interacción entre la interacción eléctrica y magnética por J. C. Maxwell y su versión cuantizada, la electrodinámica cuántica (QED) en donde se consideran la interacción del campo de radiación de fotón (con sus respectivas relaciones de conmutación en los operadores campo) y los campos de materia, como los bosones o fermiones. En este caso se estudiarán los bariones conformados por quarks (fermiones) y su interacción con la radiación con el fin de estudiar las expresiones del hamiltoniano electromagnético asociado que contribuyen según los grados de libertad en los modelos CQM y UQM.

4.1.1. Campos de quarks cargados

De acuerdo al teorema de Noether, todas las leyes de conservación se originan a partir de la invariancia de un sistema bajo transformaciones en un cierto espacio. Las partículas cargadas que están descritas como campos y en términos de los espinores de Dirac, como los quarks, existe una invariancia bajo las transformaciones locales del grupo $U(1)$ tales como los cambios de fase

$$\hat{q}'(x) = e^{i\theta(x)}\hat{q}(x) \quad (4.1)$$

que con la transformación gauge del campo de fotones $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{Q_q} \partial_\mu \theta(x)$ la corriente conservada global para los distintos quarks q , resulta

$$\hat{j}^\mu(\vec{x}) = \sum_q \hat{q}(\vec{x}) Q_q \gamma^\mu \hat{q}(\vec{x}) \quad (4.2)$$

donde el campo de quarks es como en 3.2

$$\hat{q}(\vec{x}) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon(\vec{p})}} \left(\hat{b}_r(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} u_r(\vec{p}) + (-1)^{r+1} \hat{d}_r^\dagger(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} v_r(\vec{p}) \right) \quad (4.3)$$

con $\hat{b}_r(\vec{p})$ ($\hat{d}_s(\vec{p})$) el operador de aniquilación de un quark (antiquark) con números cuánticos r (s) y momento \vec{p} , que por la naturaleza fermiónica para los números cuánticos de los bariones (y bosónica de los mesones), estos operadores deben cumplir las relaciones de anticonmutación

$$\{\hat{b}_r(\vec{p}_r), \hat{b}_s(\vec{p}_s)\} = 0, \quad \{\hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_r), \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}_s)\} = 0, \quad \{\hat{b}_r(\vec{p}_r), \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}_s)\} = \delta_{r,s} \delta^3(\vec{p}_r - \vec{p}_s), \quad (4.4)$$

$$\{\hat{d}_r(\vec{p}_r), \hat{d}_s(\vec{p}_s)\} = 0, \quad \{\hat{d}_r^\dagger(\vec{p}_r), \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_s)\} = 0, \quad \{\hat{d}_r(\vec{p}_r), \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_s)\} = \delta_{r,s} \delta^3(\vec{p}_r - \vec{p}_s), \quad (4.5)$$

$$\{\hat{b}_r(\vec{p}_r), \hat{d}_s(\vec{p}_s)\} = 0, \quad \{\hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_r), \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_s)\} = 0, \quad \{\hat{b}_r(\vec{p}_r), \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_s)\} = 0. \quad (4.6)$$

Desarrollando la expresión de la 4-corriente tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{j}^\mu(\vec{x}) &= \sum_q \sum_{r,s} \int \frac{d^3 p_r d^3 p_s}{(2\pi)^3} Q_q \frac{m}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_r) \varepsilon(\vec{p}_s)}} \left(\hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_r) e^{i\vec{p}_r \cdot \vec{x}} \bar{u}_r(\vec{p}_r) + (-1)^{r+1} \hat{d}_r(\vec{p}_r) e^{-i\vec{p}_r \cdot \vec{x}} \bar{v}_r(\vec{p}_r) \right) \\ &\quad \times \gamma^\mu \left(\hat{b}_s(\vec{p}_s) e^{-i\vec{p}_s \cdot \vec{x}} u_s(\vec{p}_s) + (-1)^{s+1} \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_s) e^{i\vec{p}_s \cdot \vec{x}} v_s(\vec{p}_s) \right) \\ &= \hat{j}_1^\mu + \hat{j}_2^\mu + \hat{j}_3^\mu + \hat{j}_4^\mu \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde

$$\hat{j}_1^\mu = \sum_q \sum_{r,s} \int \frac{d^3 p_r d^3 p_s}{(2\pi)^3} Q_q \frac{m}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_r) \varepsilon(\vec{p}_s)}} \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_r) \hat{b}_s(\vec{p}_s) e^{i(\vec{p}_r - \vec{p}_s) \cdot \vec{x}} \bar{u}_r(\vec{p}_r) \gamma^\mu u_s(\vec{p}_s), \quad (4.8)$$

$$\hat{j}_2^\mu = \sum_q \sum_{r,s} \int \frac{d^3 p_r d^3 p_s}{(2\pi)^3} Q_q \frac{m}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_r) \varepsilon(\vec{p}_s)}} (-1)^{r+1} \hat{d}_r(\vec{p}_r) \hat{b}_s(\vec{p}_s) e^{-i(\vec{p}_r + \vec{p}_s) \cdot \vec{x}} \bar{v}_r(\vec{p}_r) \gamma^\mu u_s(\vec{p}_s), \quad (4.9)$$

$$\hat{j}_3^\mu = \sum_q \sum_{r,s} \int \frac{d^3 p_r d^3 p_s}{(2\pi)^3} Q_q \frac{m}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_r) \varepsilon(\vec{p}_s)}} (-1)^{s+1} \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_r) \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_s) e^{i(\vec{p}_r + \vec{p}_s) \cdot \vec{x}} \bar{u}_r(\vec{p}_r) \gamma^\mu v_s(\vec{p}_s), \quad (4.10)$$

$$\hat{j}_4^\mu = \sum_q \sum_{r,s} \int \frac{d^3 p_r d^3 p_s}{(2\pi)^3} Q_q \frac{m}{\sqrt{\varepsilon(\vec{p}_r) \varepsilon(\vec{p}_s)}} (-1)^{r+s+2} \hat{d}_r(\vec{p}_r) \hat{d}_s^\dagger(\vec{p}_s) e^{-i(\vec{p}_r - \vec{p}_s) \cdot \vec{x}} \bar{v}_r(\vec{p}_r) \gamma^\mu v_s(\vec{p}_s), \quad (4.11)$$

representan a las cuatro diferentes 4-corrientes debidas a las distintas propagaciones posibles entre quarks y antiquarks. Los modelos de quarks que consideran únicamente contribuciones del tipo qqq para bariones, la corriente que produce contribuciones es únicamente \hat{j}_1^μ , mientras que en modelos de quarks que consideran contribuciones del tipo $qqq - q\bar{q}$ pueden contribuir todas las corrientes anteriores. Estas expresiones para las 4-corrientes son útiles en la representación de Dirac para las aproximaciones no-relativistas que consideraremos para el hamiltoniano de interacción de los campos de quarks con el campo de radiación. El hamiltoniano de interacción se utilizará más adelante para el cálculo de las anchuras de decaimientos.

4.1.2. Campo de radiación

Ahora, para un campo electromagnético en el vacío (\vec{E} , \vec{B}), se sabe que la densidad de energía es

$$\varepsilon_{em} = \frac{1}{8\pi} \left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2 \right) \quad (4.12)$$

y para una onda electromagnética plana, que indica la radiación que puede ser emitida por la materia, el vector potencial es, a primer orden en la ecuación de Helmholtz,

$$\vec{A}_k(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (4.13)$$

las expresiones para el campo eléctrico y magnético se vuelven (usando $\omega = ck = c|\vec{k}|$, una consecuencia directa de la ecuación de onda)

$$\vec{E}_k = -k\vec{A}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \vec{B}_k = -\vec{k} \times \vec{A}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (4.14)$$

y la densidad energía se puede expresar entonces como

$$\varepsilon_{em} = \frac{1}{8\pi} k^2 |\vec{A}_0|^2. \quad (4.15)$$

Para un campo correspondiente a un fotón, esta densidad de energía es igual a $\hbar k/V$, donde V es el volumen del sistema que contiene al fotón, entonces la amplitud del campo electromagnético se puede ver como

$$A_0 = \sqrt{\frac{8\pi\hbar\omega}{Vk^2}} = \sqrt{\frac{8\pi\hbar c^2}{Vk}} = \sqrt{\frac{8\pi}{Vk}}, \quad (4.16)$$

usando $\hbar = c = 1$. La correspondiente expresión compleja que para la misma densidad de energía del potencial es entonces

$$\vec{A}_{em}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon} \sqrt{\frac{2\pi}{Vk}} \left(a_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} + a_0^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t} \right), \quad (4.17)$$

donde a_0 es un número complejo con modulo unitario, que determina la fase de la onda, y $\vec{\epsilon}$ es el vector unitario indicando la polarización. Debido a la naturaleza transversa de las ondas electromagnéticas, hay dos direcciones de polarización diferentes ϵ_l , $l = 1, 2$, que cumplen con la condición $\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$. Esta es una consecuencia directa de la invariancia de norma por el gauge de Coulomb para el vector de campo en ondas planas, es decir, en general se cumplirá

$$\nabla \cdot \vec{A}_{em} = 0. \quad (4.18)$$

Esto nos será útil en situaciones donde usemos la aproximación no-relativista para el caso no dependiente del tiempo en la interacción de la radiación con la materia. Existe un motivo para cuantizar la forma de este potencial, cuya densidad de energía estará dada mediante la expresión clásica

$$\varepsilon_{em} = -\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}). \quad (4.19)$$

Esto debería describir la emisión y absorción de fotones, y los elementos de transición típicos entre los estados nucleares Ψ_i y Ψ_f deberían ser de la forma

$$\int d^3r \langle \Psi_f, unfoton | -\vec{j} \cdot \vec{A} | \Psi_i, nofoton \rangle \quad (4.20)$$

para la emisión de un fotón, y el conjugado hermitiano para la absorción de un fotón. El operador de campo debería entonces contener operadores de creación y de aniquilación para fotones. Naturalmente para la cuantización del campo electromagnéticos simplemente se reemplazan las amplitudes a_0 y a_0^* por operadores de creación y aniquilación de un fotón \hat{a}^\dagger , \hat{a} . Sólo queda conformarse con un operador para la emisión o absorción. Esto queda más claro con el balance de energía. En el elemento de matriz escrito arriba para la emisión, la fase total dependiente del tiempo es

$$i(E_f - E_i)t + i\phi \quad (4.21)$$

con ϕ la fase desconocida que acompaña al operador de creación de campo de radiación. La conservación de la energía requiere que $E_f = E_i - \omega$, así que debemos tener $\phi = \omega t$. Esto es consistente con los operadores de creación y aniquilación que están asociados con ondas planas con momentos en direcciones opuestas, pues la conservación de la energía requiere el cambio apropiado en el momento total para la creación o destrucción de un fotón. El factor de normalización asegura que la energía del campo estará dada correctamente en términos del número de fotón.

Para la forma final del operador de campo de radiación es necesario sumar sobre todas las contribuciones posibles del momento continuo \vec{k} y sobre las polarizaciones discretas λ , quedando expresado, en notación tensorial como

$$\hat{A}_\mu(\vec{x}, t) = \sum_\lambda \int d^3k \sqrt{\frac{2\pi}{kV}} \left(\epsilon_\mu^\lambda \hat{a}_\lambda(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - ikt} + \epsilon_\mu^{*\lambda} \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + ikt} \right) \quad (4.22)$$

donde la elección del vector de polarización \vec{e}^λ o su conjugado depende de la elección que se tome la proyección del vector en la base esférica con la proyección del momento angular λ que acompaña al operador de creación o aniquilación. Las relaciones de conmutación del álgebra de bosones que cumplen los operadores de creación y aniquilación son

$$\left[\hat{a}_\lambda(\vec{k}), \hat{a}_\beta^\dagger(\vec{p}) \right] = \delta_{\lambda\beta} \delta^3(\vec{k} - \vec{p}), \quad (4.23)$$

$$\left[\hat{a}_\lambda(\vec{k}), \hat{a}_\beta(\vec{p}) \right] = \left[\hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}), \hat{a}_\beta^\dagger(\vec{p}) \right] = 0 \quad (4.24)$$

que indican en el espacio de Fock, con un estado de vacío $|0\rangle$ de energía cero, la creación (aniquilación) de un estado de fotón $|\gamma\rangle$ con polarización λ y momento \vec{k} mediante

$$|\gamma\rangle = |\vec{k}\lambda\rangle = \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k})|0\rangle. \quad (4.25)$$

A continuación veremos algunas propiedades de los elementos de matriz del acoplamiento del campo de radiación con la materia.

4.2. Acoplamiento de la radiación con la materia

En el estudio de la interacción de la materia, en particular de los hadrones, con el campo electromagnético es fundamental el estudio de los procesos como estados inicial $|i\rangle$ y final $|f\rangle$ asintóticamente lejanos en el tiempo y bajo la influencia de un hamiltoniano de interacción \hat{H}_{int} . Para ello el hamiltoniano total es aquel que incluye el hamiltoniano para la materia que hemos considerado hasta ahora $\hat{H}_{oscilador} + g\hat{H}_{QPC}$ más el hamiltoniano que acopla la corriente eléctrica como grado de libertad de los quarks con el campo electromagnético como

$$\hat{H}_{int} = - \int d^3x \hat{j}^\mu(\vec{x}) \hat{A}_\mu(\vec{x}, t) \quad (4.26)$$

donde $\mu = 1, 2, 3$. Desarrollando esta expresión usando la ecuación para el campo (4.22) y las expresiones para las corrientes (4.8)-(4.11)

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} &= - \int d^3x \hat{j}_1^\mu(\vec{x}) \hat{A}_\mu(\vec{x}, t) - \int d^3x \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) \hat{A}_\mu(\vec{x}, t) - \int d^3x \hat{j}_3^\mu(\vec{x}) \hat{A}_\mu(\vec{x}, t) - \int d^3x \hat{j}_4^\mu(\vec{x}) \hat{A}_\mu(\vec{x}, t) \\ &= \hat{H}_{int}^1 + \hat{H}_{int}^2 + \hat{H}_{int}^3 + \hat{H}_{int}^4. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Como se mencionó antes, para el caso de los estado de bariones descritos en modelos que consideran sólo constituyentes qqq el único término que contribuye es \hat{H}_{int}^1 , mientras que para modelos que consideran constituyentes $qqq - q\bar{q}$ pueden ser no nulos todos los 4 términos para este hamiltoniano.

Los elementos de matriz básicos que nos proporcionan información para un proceso de decaimiento o fotoproducción-absorción de estados son de la forma

$$\langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle. \quad (4.28)$$

Con el fin de calcular estos elementos de matriz, usamos en esta sección la aproximación no-relativista convencionalmente en el CQM y en el UQM. En otras palabras usamos esta aproximación en los espinores y no en los operadores de creación-aniquilación en el operador de campo de los estados de quarks, o bien de los bariones y mesones. Los estados de bariones-fotón asintóticamente independientes, inicial y final para un proceso de decaimiento-absorción son

$$|i\rangle = |\Psi_A, 0\rangle = |\Psi_A\rangle|0\rangle, \quad (4.29)$$

$$|f\rangle = |\Psi_{A'}, \gamma\rangle = |\Psi_{A'}, \vec{k}_1 \lambda\rangle = |\Psi_{A'}\rangle|\vec{k}_1 \lambda\rangle \quad (4.30)$$

que en segunda cuantización el estado del fotón $|\vec{k}_1 \lambda\rangle$ es como en la ecuación (4.25) y los estados de hadrones se expresan como

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{r_1 r_2 r_3} \int \prod_{i=1}^3 d^3 p_i \Psi_A(\vec{p}_{r_1}, \vec{p}_{r_2}, \vec{p}_{r_3}) \hat{b}_{r_1}^\dagger(\vec{p}_{r_1}) \hat{b}_{r_2}^\dagger(\vec{p}_{r_2}) \hat{b}_{r_3}^\dagger(\vec{p}_{r_3}) |0\rangle \quad (4.31)$$

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{r_6 r_7 r_8} \int \prod_{i=4}^6 d^3 p_i \Psi_B(\vec{p}_{r_4}, \vec{p}_{r_5}, \vec{p}_{r_6}) \hat{b}_{r_5}^\dagger(\vec{p}_{r_5}) \hat{b}_{r_6}^\dagger(\vec{p}_{r_6}) \hat{b}_{r_7}^\dagger(\vec{p}_{r_7}) |0\rangle \quad (4.32)$$

$$|C\rangle = \sum_{r_8 r_9} \int \prod_{i=8}^9 d^3 p_i \Psi_C(\vec{p}_{r_8}, \vec{p}_{r_9}) \hat{b}_{r_8}^\dagger(\vec{p}_{r_8}) \hat{d}_{r_9}^\dagger(\vec{p}_{r_9}) |0\rangle \quad (4.33)$$

Donde $|A\rangle$ y $|B\rangle$ indican los estados de bariones con tres quarks efectivos qqq , y $|C\rangle$ indica el estado de un meson con $q\bar{q}$ efectivos. Podemos notar aquí que toda la dependencia de los modelos CQM se encuentra en la función Ψ_A y en estos

$$|\Psi_A\rangle = |A\rangle \quad (4.34)$$

mientras que para el caso de modelos que son extensiones de CQM en grados de libertad, y en el caso del UQM el estado de quarks efectivos $qqq - q\bar{q}$, de la forma *barión + barión-mesón*, de los bariones es como en la ecuación (3.98)

$$|\Psi_A\rangle = \mathcal{N}_A \left[|A\rangle + \sum_{BC} \int dk a_{A \rightarrow BC}(k) |BC, k\rangle \right],$$

como vimos antes, k el momento relativo entre B y C .

4.2.1. Término elástico de quarks $\langle f | \hat{H}_{int}^1 | i \rangle$

Para analizar el elemento de matriz del primer término del hamiltoniano de interacción, usamos la ecuación para el estado del fotón (4.25) y la expresión para el operado de campo electromagnético (4.22) y suponiendo que los estados inicial y final son independientes de la posición \vec{x} (estados asintóticos), teniendo

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{A'}, \gamma | \hat{H}_{int}^1 | \Psi_A \rangle &= -\langle \Psi_{A'}, \gamma | \int d^3x \hat{j}_1^\mu(\vec{x}) \hat{A}_\mu(\vec{x}, t) | \Psi_A, 0 \rangle \\
&= -\langle \Psi_{A'} | \int d^3x \hat{j}_1^\mu(\vec{x}) \langle 0 | \hat{a}_\beta(\vec{k}_1) d^3k \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 V}} \left(\epsilon_\mu^\lambda \hat{a}_\lambda(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - ik_0 t} + \epsilon_\mu^{*\lambda} \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + ikt} \right) | 0 \rangle | \Psi_A \rangle \\
&= -\int d^3x \langle \Psi_{A'} | \hat{j}_1^\mu(\vec{x}) d^3k \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 V}} \langle 0 | \left[\hat{a}_\beta(\vec{k}_1), \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) \right] | 0 \rangle \epsilon_\mu^{*\lambda} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + ikt} | \Psi_A \rangle \\
&= -\int d^3x \langle \Psi_{A'} | \hat{j}_1^\mu(\vec{x}) d^3k \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 V}} \delta_{\beta\lambda} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}) | \Psi_A \rangle \epsilon_\mu^{*\lambda} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + ikt} \\
&= -\int d^3x \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 V}} \langle \Psi_{A'} | \hat{j}_1^\mu(\vec{x}) | \Psi_A \rangle \epsilon_\mu^{*\beta} e^{-i\vec{k}_1\cdot\vec{x} + ikt} \\
&= -\int d^3x \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 V}} \epsilon_\mu^{*\beta} e^{-i\vec{k}_1\cdot\vec{x} + ikt} \langle \Psi_{A'} | \hat{j}_1^\mu(\vec{x}) | \Psi_A \rangle
\end{aligned} \tag{4.35}$$

donde, en el límite no relativista, usando el gauge de Coulomb $\vec{p} \cdot \epsilon_\mu^{*\beta} = 0$ y considerando el estado base ($l = 0$) de $|\Psi_A\rangle$ y $|\Psi_{A'}\rangle$, podemos hacer

$$\begin{aligned}
\hat{j}_1^\mu(\vec{x}) &= \sum_{r,s} \sum_q \int \frac{dp_r^3 dp_s^3}{(2\pi)^3} Q_q \frac{m_q}{\sqrt{\epsilon(\vec{p}_r)\epsilon(\vec{p}_s)}} \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_r) \hat{b}_s(\vec{p}_s) e^{i(\vec{p}_r - \vec{p}_s)\cdot\vec{x}} \bar{u}_r(\vec{p}_r) \gamma^\mu u_s(\vec{p}_s) \\
&\rightarrow \sum_{r,s} \sum_q \int \frac{dp_r^3 dp_s^3}{(2\pi)^3} Q_q \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_r) \hat{b}_s(\vec{p}_s) e^{i(\vec{p}_r - \vec{p}_s)\cdot\vec{x}} i \epsilon^{\mu lm} Q_q \frac{(p_r^l - p_s^l) \sigma_{r,s}^m}{2m_q}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

y el término queda como

$$\begin{aligned}
\int d^3x e^{-i\vec{k}_1\cdot\vec{x} + ikt} \langle \Psi_{A'} | \vec{j}_1(\vec{x}) | \Psi_A \rangle &= \sum_{r,s} \sum_q \int d^3p_r d^3p_s \frac{d^3p_r d^3p_s}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{p}_r - \vec{p}_s + \vec{k}_1)\cdot\vec{x} + ik_1 t} i \langle \Psi_{A'} | \hat{b}_r^\dagger \hat{b}_s \frac{Q_q}{2m_q} (\vec{p}_s - \vec{p}_r) \times \vec{\sigma}_{r,s} | \Psi_A \rangle \\
&= \sum_{r,s} \sum_q \int d^3p_r d^3p_s \delta^3(\vec{p}_r - \vec{p}_s + \vec{k}_1) e^{ik_1 t} i \langle \Psi_{A'} | \hat{b}_r^\dagger \hat{b}_s \frac{Q_q}{2m_q} (\vec{p}_s - \vec{p}_r) \times \vec{\sigma}_{r,s} | \Psi_A \rangle,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

que usando la definición de la función $\delta(\vec{x})$ y que $\int dx \delta(x-a) f(x) h(x) = \int dx \delta(x-a) f(x) h(a)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int d^3x e^{-i\vec{k}_1\cdot\vec{x} + ikt} \langle \Psi_{A'} | \vec{j}_1(\vec{x}) | \Psi_A \rangle &= -\sum_{r,s} \sum_q \int d^3p_r d^3p_s \delta^3(\vec{p}_r - \vec{p}_s + \vec{k}_1) e^{ik_1 t} i \langle \Psi_{A'} | \hat{b}_r^\dagger \hat{b}_s \frac{Q_q}{2m_q} (\vec{k}_1) \times \vec{\sigma}_{r,s} | \Psi_A \rangle \\
&= \int d^3p_r d^3p_s \delta^3(\vec{p}_r - \vec{p}_s + \vec{k}_1) i \langle \Psi_{A'} | \sum_{r,s} \sum_q \hat{b}_r^\dagger(\vec{p}_r) \hat{b}_s(\vec{p}_s) \frac{Q_q}{2m_q} \vec{\sigma}_{r,s} | \Psi_A \rangle \times \vec{k}_1 e^{ik_1 t} \\
&= i \langle \Psi_{A'} | \sum_{r,s} \sum_q \int d^3p_s \hat{b}_r^\dagger(-\vec{p}_s + \vec{k}_1) \hat{b}_s(\vec{p}_s) \frac{Q_q}{2m_q} \vec{\sigma}_{r,s} | \Psi_A \rangle \times \vec{k}_1 e^{ik_1 t} \\
&= i \langle \Psi_{A'} | \vec{\mu}_S | \Psi_A \rangle \times \vec{k}_1 e^{ik_1 t}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Donde $\vec{\mu}$ es el operador de momento dipolar magnético debido a la contribución de espín únicamente. Así el elemento de matriz para el hamiltoniano de interacción de la primera contribución queda como

$$\langle \Psi_{A'}, \gamma | \hat{H}_{int}^1 | \Psi_A \rangle = i \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 V}} \langle \Psi_{A'} | \vec{\mu}_S | \Psi_A \rangle \times \vec{k}_1 \cdot \vec{\epsilon}^{*\beta}. \tag{4.39}$$

Es evidente que la única contribución posible para el CQM es de la forma

$$\langle \Psi_{A'}, \gamma | \hat{H}_{int}^1 | \Psi_A \rangle = i \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 V}} \langle A' | \vec{\mu}_S | A \rangle \times \vec{k}_1 \cdot \vec{\epsilon}^{*\beta}, \tag{4.40}$$

pues los estados tienen sólo contribuciones del tipo qqq , es decir, el operador $\hat{\mu}_S$ acopla de manera no nula sobre los estados $|A\rangle$ y $|A'\rangle$ ya que de acuerdo a (4.8) para la 3-corriente y (4.31) para el estado del barion, A , en segunda cuantización tenemos estados creados por operadores \hat{b} que crean-aniquilan únicamente estados de quarks q y por las relaciones de anticonmutación para estos operadores de fermiones el término para este elemento de matriz es claramente no nulo.

Para la contribución de los estados del tipo (3.98) que consideran contribuciones de quarks del tipo $qqq - q\bar{q}$, como el caso del UQM, las contribuciones no nulas para este elemento de matriz son del tipo

$$\langle \Psi_{A'}, \gamma | \hat{H}_{int}^1 | \Psi_A \rangle = i \mathcal{N}_{A'} \mathcal{N}_A \left[\langle A' | \vec{\mu}_S | A \rangle + \sum_{B'C'} \sum_{BC} a_{A' \rightarrow B'C'} a_{A \rightarrow BC} \langle B'C' | \vec{\mu}_S | BC \rangle \right] \times \vec{k}_1 \cdot \vec{\epsilon}^{*\beta}. \quad (4.41)$$

Comparando esta ecuación, consecuencia del UQM, con la ecuación (4.40), que es consecuencia del CQM, es evidente la importancia de la nube mesónica en la función de onda para estos elementos de matriz. Más adelante veremos un enfoque más sencillo para el cálculo de estos elementos, a partir de la definición del operador de momento magnético de espín y calculando los momentos magnéticos de transición, como se muestra en (4.39).

Para los observables nos es útil el cálculo del modulo al cuadrado de este elemento de matriz, utilizando la expresión (4.39) y la simetría de espín para el elemento de matriz usado, quedando como

$$\begin{aligned} \left| \langle \Psi_{A'}, \gamma | \hat{H}_{int}^1 | \Psi_A \rangle \right|^2 &= \frac{2\pi}{k_1 V} \frac{1}{pol} \sum_{pol} \left| \int d^3x \epsilon_\mu^{*\beta} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x} + ikt} \langle \Psi_{A'} | \hat{j}_1^\mu(\vec{x}) | \Psi_A \rangle \right|^2 \\ &= \frac{2\pi}{k_1 V} \frac{1}{2J_A + 1} \sum_{M_A, M_{A'}} \left| \langle \Psi_{A'}, M_{A'} | \vec{\mu}_S | \Psi_A, M_A \rangle \times \vec{k}_1 \cdot \vec{\epsilon}^{*\beta} \right|^2 \\ &= \frac{2\pi}{k_1 V} \frac{1}{2J_A + 1} \left(\left| \langle \Psi_{A'}, \frac{1}{2} | \vec{\mu}_S | \Psi_A, \frac{1}{2} \rangle \right|^2 + \left| \langle \Psi_{A'}, -\frac{1}{2} | \vec{\mu}_S | \Psi_A, -\frac{1}{2} \rangle \right|^2 \right) k_1^2 \\ &= \frac{2\pi k_1}{V} \frac{2}{2J_A + 1} \left| \langle \Psi_{A'}, \frac{1}{2} | \vec{\mu}_S | \Psi_A, \frac{1}{2} \rangle \right|^2, \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde J_A es el espín total de barión inicial.

4.2.2. Término de aniquilación de pares de quarks $\langle f | \hat{H}_{int}^2 | i \rangle$

El término correspondiente al elemento de matriz de la segunda contribución, análogamente al elemento de matriz $\langle \Psi_{A'}, \gamma | \hat{H}_{int}^1 | \Psi_A \rangle$, queda como

$$\langle \Psi_{A'}, \gamma | \hat{H}_{int}^2 | \Psi_A \rangle = - \int d^3x \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 V}} \epsilon_\mu^{*\beta} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x} + ikt} \langle \Psi_{A'} | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | \Psi_A \rangle. \quad (4.43)$$

En este caso podemos notar que para el CQM el término es nulo, pues $|\Psi_A\rangle = |A\rangle$ y

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{A'} | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | \Psi_A \rangle &= \langle A' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | A \rangle \\ &= \frac{1}{3} \sum_{r,s} \sum_{r_1, \dots, r_6} (-1)^{r+1} \int \prod_{i=1}^6 d^3p_i \frac{d^3p_r d^3p_s}{(2\pi)^3} \Psi_{A'}^*(\vec{p}_{r_1}, \vec{p}_{r_2}, \vec{p}_{r_3}) \Psi_A(\vec{p}_{r_4}, \vec{p}_{r_5}, \vec{p}_{r_6}) \\ &\quad \times Q_{r,s} e^{-i(\vec{p}_r + \vec{p}_s) \cdot \vec{x}} \bar{v}_r(\vec{p}_r) \gamma^\mu u_s(\vec{p}_s) \langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{d}_r \hat{b}_s \hat{b}_{r_4}^\dagger \hat{b}_{r_5}^\dagger \hat{b}_{r_6}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.44)$$

y evidentemente el operador de aniquilación de un antiquark, \hat{d}_r , conmuta con los operadores de creación y aniquilación de quarks, \hat{b} y \hat{b}^\dagger , y actuando hacia la derecha vemos que

$$\langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{d}_r \hat{b}_s \hat{b}_{r_4}^\dagger \hat{b}_{r_5}^\dagger \hat{b}_{r_6}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{b}_s \hat{b}_{r_4}^\dagger \hat{b}_{r_5}^\dagger \hat{b}_{r_6}^\dagger \hat{d}_r | 0 \rangle = 0. \quad (4.45)$$

Es decir, el operador de interacción, \hat{H}_{int}^2 , de aniquilación de pares $q\bar{q}$ básicamente aniquila este par a la derecha en el estado $|A\rangle$, que en CQM no existe, así

$$\langle A' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | A \rangle = 0 \quad (4.46)$$

por lo que no hay contribuciones de este tipo para el modelo de quarks constituyentes.

Por el otro lado, para el UQM, tenemos funciones de onda representadas por los estados de la ecuación (3.98) y el elemento de matriz es entonces

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{A'} | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | \Psi_A \rangle &= \mathcal{N}_{A'} \mathcal{N}_A \left[\langle A' | + \sum_{B'C'} a_{A' \rightarrow B'C'} \langle B'C' | \right] \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) \left[|A\rangle + \sum_{BC} a_{A \rightarrow BC} |BC\rangle \right] \\ &= \mathcal{N}_{A'} \mathcal{N}_A \left[\langle A' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | A \rangle + \sum_{BC} a_{A \rightarrow BC} \langle A' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | BC \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_{B'C'} a_{A' \rightarrow B'C'} \langle B'C' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | A \rangle + \sum_{B'C'BC} a_{A' \rightarrow B'C'} a_{A \rightarrow BC} \langle B'C' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | BC \rangle \right], \end{aligned} \quad (4.47)$$

donde los términos $\langle A' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | A \rangle$ y $\langle B'C' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | A \rangle$ son, por el mismo argumento que se dió antes, evidentemente nulos. queda ver que el término $\langle B'C' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | BC \rangle$ es nulo también, por lo que el único término que contribuye es $\langle A' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | BC \rangle$. Para ver esto

$$\begin{aligned} \langle B'C' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | BC \rangle &= \frac{1}{3} \sum_{r,s} \sum_{r_1, \dots, r_{10}} \int \prod_{i=1}^{10} d^3 p_i d^3 p_r d^3 p_s \Psi_{B'}^*(\vec{p}_{r_1}, \vec{p}_{r_2}, \vec{p}_{r_3}) \Psi_{C'}^*(\vec{p}_{r_4}, \vec{p}_{r_5}) \Psi_B(\vec{p}_{r_6}, \vec{p}_{r_7}, \vec{p}_{r_8}) \Psi_C(\vec{p}_{r_9}, \vec{p}_{r_{10}}) \\ &\quad \times Q_{r,s} e^{-i(\vec{p}_r + \vec{p}_s) \cdot \vec{x}} \frac{(-1)^{r+1}}{(2\pi)^3} \bar{v}_r(\vec{p}_r) \gamma^\mu u_s(\vec{p}_s) \langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{b}_{r_4} \hat{d}_{r_5} \hat{b}_s \hat{d}_r \hat{b}_{r_6}^\dagger \hat{b}_{r_7}^\dagger \hat{b}_{r_8}^\dagger \hat{d}_{r_9}^\dagger \hat{d}_{r_{10}}^\dagger | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (4.48)$$

con

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{b}_{r_4} \hat{d}_{r_5} \hat{b}_s \hat{d}_r \hat{b}_{r_6}^\dagger \hat{b}_{r_7}^\dagger \hat{b}_{r_8}^\dagger \hat{d}_{r_9}^\dagger \hat{d}_{r_{10}}^\dagger | 0 \rangle &= -\langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{b}_{r_4} \hat{b}_s \hat{b}_{r_6}^\dagger \hat{b}_{r_7}^\dagger \hat{b}_{r_8}^\dagger \hat{d}_{r_9}^\dagger \hat{d}_{r_{10}}^\dagger | 0 \rangle \\ &= -\langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{b}_{r_4} \hat{b}_s \hat{b}_{r_6}^\dagger \hat{b}_{r_7}^\dagger \hat{b}_{r_8}^\dagger \hat{d}_{r_9}^\dagger \{ \hat{d}_r, \hat{d}_{r_{10}}^\dagger \} | 0 \rangle \\ &= -\delta_{r,r_{10}} \delta^3(\vec{p}_r - \vec{p}_{r_{10}}) \langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{b}_{r_4} \hat{b}_s \hat{b}_{r_6}^\dagger \hat{b}_{r_7}^\dagger \hat{b}_{r_8}^\dagger \hat{d}_{r_9}^\dagger | 0 \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Así tenemos que $\langle B'C' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | BC \rangle = 0$. Para el término

$$\begin{aligned} \langle A' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | BC \rangle &= \frac{1}{3} \sum_{r,s} \sum_{r_1, \dots, r_8} \frac{(-1)^{r+1}}{(2\pi)^3} \int \prod_{i=1}^8 d^3 p_i d^3 p_r d^3 p_s \Psi_{A'}^*(\vec{p}_{r_1}, \vec{p}_{r_2}, \vec{p}_{r_3}) \Psi_B(\vec{p}_{r_4}, \vec{p}_{r_5}, \vec{p}_{r_6}) \Psi_C(\vec{p}_{r_7}, \vec{p}_{r_8}) \\ &\quad \times Q_{r,s} e^{-i(\vec{p}_r + \vec{p}_s) \cdot \vec{x}} \bar{v}_r(\vec{p}_r) \gamma^\mu u_s(\vec{p}_s) \langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{b}_r \hat{d}_s \hat{b}_{r_4}^\dagger \hat{b}_{r_5}^\dagger \hat{b}_{r_6}^\dagger \hat{b}_{r_7}^\dagger \hat{d}_{r_8}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.50)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{b}_r \hat{d}_s \hat{b}_{r_4}^\dagger \hat{b}_{r_5}^\dagger \hat{b}_{r_6}^\dagger \hat{b}_{r_7}^\dagger \hat{d}_{r_8}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{b}_r \hat{b}_{r_4}^\dagger \hat{b}_{r_5}^\dagger \hat{b}_{r_6}^\dagger \hat{b}_{r_7}^\dagger \hat{d}_s \hat{d}_{r_8}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{b}_r \hat{b}_{r_4}^\dagger \hat{b}_{r_5}^\dagger \hat{b}_{r_6}^\dagger \hat{b}_{r_7}^\dagger \{ \hat{d}_s, \hat{d}_{r_8}^\dagger \} | 0 \rangle \\ &= \delta_{r,r_8} \delta^3(\vec{p}_r - \vec{p}_{r_8}) \langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{b}_r \hat{b}_{r_4}^\dagger \hat{b}_{r_5}^\dagger \hat{b}_{r_6}^\dagger \hat{b}_{r_7}^\dagger | 0 \rangle \\ &\neq 0, \quad \iff r \neq r_8 \end{aligned} \quad (4.51)$$

En este caso particular hay entonces una contribución no nula para el elemento de matriz $\langle \Psi_{A'} | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | \Psi_A \rangle$ si consideramos la nube mesónica en el UQM, es decir,

$$\langle \Psi_{A'} | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | \Psi_A \rangle = \mathcal{N}_{A'} \mathcal{N}_A \left[\sum_{BC} a_{A \rightarrow BC} \langle A' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | BC \rangle \right], \quad (4.52)$$

que tiene como clara consecuencia, debido a que los estados son independientes de \vec{x} , que

$$\langle \Psi_{A'}, \gamma | \hat{H}_{int}^2 | \Psi_A \rangle = \mathcal{N}_{A'} \mathcal{N}_A \left[\sum_{BC} a_{A \rightarrow BC} \langle A', \gamma | \hat{H}_{int}^2 | BC \rangle \right]. \quad (4.53)$$

4.2.3. Término de creación de pares de quarks $\langle f | \hat{H}_{int}^3 | i \rangle$

El elemento de matriz para el hamiltoniano que corresponde al término de creación de pares es

$$\langle \Psi_{A'}, \gamma | \hat{H}_{int}^3 | \Psi_A \rangle = - \int d^3x \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 V}} \epsilon_\mu^{*\beta} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x} + ikt} \langle \Psi_{A'} | \hat{j}_3^\mu(\vec{x}) | \Psi_A \rangle. \quad (4.54)$$

Análogamente al término de aniquilación de pares tenemos que en el CQM este elemento de matriz, $\langle \Psi_{A'}, \gamma | \hat{H}_{int}^3 | \Psi_A \rangle$ es nulo. Sin embargo en el modelo UQM no es nulo y se cumple que el término

$$\langle \Psi_{A'} | \hat{j}_3^\mu(\vec{x}) | \Psi_A \rangle = \mathcal{N}_{A'} \mathcal{N}_A \left[\sum_{B'C'} a_{A' \rightarrow B'C'} \langle B'C' | \hat{j}_3^\mu(\vec{x}) | A \rangle \right] \quad (4.55)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle B'C' | \hat{j}_3^\mu(\vec{x}) | A \rangle &= \frac{1}{3} \sum_{r,s} \sum_{r_1, \dots, r_8} \frac{(-1)^{s+1}}{(2\pi)^3} \int \prod_{i=1}^8 d^3p_i d^3p_r d^3p_s \Psi_{B'}^*(\vec{p}_{r_1}, \vec{p}_{r_2}, \vec{p}_{r_3}) \Psi_{C'}^*(\vec{p}_{r_4}, \vec{p}_{r_5}) \Psi_A(\vec{p}_{r_6}, \vec{p}_{r_7}, \vec{p}_{r_8}) \\ &\times Q_{r,s} e^{i(\vec{p}_r + \vec{p}_s) \cdot \vec{r}} \bar{u}_r(\vec{p}_r) \gamma^\mu v_s(\vec{p}_s) \langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{b}_{r_4} \hat{d}_{r_5} \hat{b}_r^\dagger \hat{d}_s^\dagger \hat{b}_{r_6}^\dagger \hat{b}_{r_7}^\dagger \hat{b}_{r_8}^\dagger | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Las ecuaciones (4.54) y (4.55) implican, como en la subsection anterior, que el elemento de matriz

$$\langle \Psi_{A'}, \gamma | \hat{H}_{int}^3 | \Psi_A \rangle = \mathcal{N}_{A'} \mathcal{N}_A \left[\sum_{B'C'} a_{A' \rightarrow B'C'} \langle B'C', \gamma | \hat{H}_{int}^3 | A \rangle \right] \quad (4.57)$$

es no nulo para el caso de la contribución de la nube mesonica en el UQM.

4.2.4. Término elástico de antiquarks $\langle f | \hat{H}_{int}^4 | i \rangle$

Para el elemento de matriz propio de un proceso que involucra pares de antiquarks es bastante evidente que la contribución en estados para bariones que no incluyan estados de antiquarks como constituyentes en la función de onda, como en el CQM, es nulo. Sin embargo, en general tenemos que

$$\langle \Psi_{A'}, \gamma | \hat{H}_{int}^4 | \Psi_A \rangle = - \int d^3x \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 V}} \epsilon_\mu^{*\beta} e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x} + ikt} \langle \Psi_{A'} | \hat{j}_4^\mu(\vec{x}) | \Psi_A \rangle, \quad (4.58)$$

donde la única contribución para estados que representan bariones en el UQM proviene del término

$$\langle \Psi_{A'} | \hat{j}_4^\mu(\vec{x}) | \Psi_A \rangle = \mathcal{N}_{A'} \mathcal{N}_A \left[\sum_{B'C'BC} a_{A' \rightarrow B'C'} a_{A \rightarrow BC} \langle B'C' | \hat{j}_4^\mu(\vec{x}) | BC \rangle \right], \quad (4.59)$$

o bien, acoplado con el vector de polarización y la normalización del campo electromagnético

$$\langle \Psi_{A'} | \hat{H}_{int}^4 | \Psi_A \rangle = \mathcal{N}_{A'} \mathcal{N}_A \left[\sum_{B'C'BC} a_{A' \rightarrow B'C'} a_{A \rightarrow BC} \langle B'C', \gamma | \hat{H}_{int}^4 | BC \rangle \right], \quad (4.60)$$

donde el elemento de matriz

$$\begin{aligned} \langle B'C' | \hat{j}_2^\mu(\vec{x}) | BC \rangle &= \frac{1}{3} \sum_{r,s} \sum_{r_1, \dots, r_{10}} \int \prod_{i=1}^{10} d^3 p_i d^3 p_r d^3 p_s \Psi_{B'}^*(\vec{p}_{r_1}, \vec{p}_{r_2}, \vec{p}_{r_3}) \Psi_{C'}^*(\vec{p}_{r_4}, \vec{p}_{r_5}) \Psi_B(\vec{p}_{r_6}, \vec{p}_{r_7}, \vec{p}_{r_8}) \Psi_C(\vec{p}_{r_9}, \vec{p}_{r_{10}}) \\ &\times Q_{r,s} e^{-i(\vec{p}_r + \vec{p}_s) \cdot \vec{x}} \frac{(-1)^{r+1}}{(2\pi)^3} \bar{v}_r(\vec{p}_r) \gamma^\mu v_s(\vec{p}_s) \langle 0 | \hat{b}_{r_1} \hat{b}_{r_2} \hat{b}_{r_3} \hat{b}_{r_4} \hat{d}_{r_5} \hat{d}_{r_6} \hat{d}_{r_7} \hat{d}_{r_8} \hat{d}_{r_9} \hat{d}_{r_{10}} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (4.61)$$

de donde podemos notar que el término $\bar{v}_r(\vec{p}_r) \gamma^\mu v_s(\vec{p}_s)$ que es completamente análogo al término elástico de quarks en la primera contribución, $\bar{u}_r(\vec{p}_r) \gamma^\mu u_s(\vec{p}_s)$ es un operador, en el gauge de Coulomb, que sólo depende del operador de espín \hat{S} , entonces al acoplar este elemento de matriz usando en particular mesones pseudoescalares ($S = 0$), C' y C , este término es idénticamente cero en el UQM, como en el CQM.

4.3. Momentos magnéticos

En esta sección se estudian los momentos magnéticos, pues están considerados como un problema importante para el caso de los decaimientos electromagnéticos, (otro enfoque para ello son las amplitudes de helicidad [50]), pues como vimos en la sección 4.2.1, el elemento de matriz que contribuye en el CQM es sólo este. Para el caso del UQM constituye una suposición considerar únicamente este, pues como vimos antes, existen otros términos de acoplamiento no nulos que contribuyen, a parte del momento magnético. En la electrodinámica clásica es sabido que un cuerpo eléctricamente cargado que se encuentra en rotación posee un momento dipolar magnético. Esto llegó a ser muy extraño al descubrirse que el electrón, visto como una partícula elemental, pudiera poseer un momento magnético al realizarse el experimento de Stern-Gerlach [10] y se observó que al mandar haces de estas partículas y hacerlas pasar por un campo magnético inhomogéneo se separaban en dos haces distintos, como si tuvieran dos momentos angulares intrínsecos. Esta idea no podía concebirse para este tipo de partículas, en las que se esperaba que no fueran afectadas por el campo magnético, por lo que se les asoció un grado de libertad cuya cantidad asociada era análoga al momento angular clásico, que se le llamó espín [11]. Se encontró que para la mecánica cuántica las partículas con espín distinto de cero pueden poseer un momento magnético, que ahora era una función del espín, se obtiene a partir del operador

$$\vec{\mu} = \frac{g_s q}{2mc} \vec{S}. \quad (4.62)$$

A g_s se le conoce como el factor giromagnético de espín y toma el valor de 2 en mecánica cuántica para este caso y q es la carga eléctrica de la partícula ($q = e$ en este caso). Así mismo para un conjunto de partículas cuánticas tenemos que

$$\hat{\mu}(\vec{S}, \vec{l}) = \sum_i \mu_i (2\vec{S}_i + \vec{l}_i). \quad (4.63)$$

con μ_i el momento magnético de cada elemento, $\vec{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$ (σ_i son las matrices de Pauli como se dan en (B.7)) y de donde \vec{l}_i se refiere al momento angular orbital relativo que se genera para cada par de partículas. Este último caso es de especial utilidad al calcular el momento magnético para objetos cuánticos que se consideran compuestos por elementos constituyentes, tales como los hadrones.

4.3.1. Momentos magnéticos en el CQM

Uno de los éxitos del modelo de quarks (QCM) ha sido la predicción de los momentos magnéticos de los bariones y mesones en buena aproximación. Existe un formalismo matemático para obtener los valores del momento magnético de los bariones a partir de las funciones de onda de espín-sabor con el operador (4.63), o bien (4.62). En el CQM, como se mostró en el capítulo 1, se construyeron las funciones de espín-sabor. En este punto suponemos que no existen excitaciones orbitales en los elementos constituyentes, entonces el operador de momento magnético puede expresarse simplemente como

$$\vec{\mu} = \sum_i 2\mu_i \vec{s}_i + \sum_i \mu_i \vec{l}_i = \vec{\mu}_{\text{espin}} + \vec{\mu}_{\text{orbital}} \rightarrow \vec{\mu}_{\text{espin}} \quad (4.64)$$

con μ_i como se muestra en (4.62) y además en el que consideraremos únicamente la parte de espín $\vec{\mu}_{\text{espin}}$.

Con lo anterior en cuenta, puede obtenerse de forma sencilla el valor esperado (que es un observable) del momento magnético para los bariones del octete y decuplete tomando las funciones de onda espín-sabor con la proyección máxima de espín ($S_z = \frac{1}{2}$ para el octete y $S_z = \frac{3}{2}$ para el decuplete) y el operador (4.64) expresándose como sigue

$$\mu(B) = \langle \psi_B, S_z | \vec{\mu} | \psi_B, S_z \rangle = 3 \langle \psi_B, S_z | 2\mu_3 S_z(3) | \psi_B, S_z \rangle, \quad (4.65)$$

donde μ_3 y S_{3z} son el momento magnético y el operador de espín para el tercer quark respectivamente en la función de estado del barión. Como ejemplo tomaremos el caso del protón. Para ello tomaremos su función de onda de espín-sabor, mostrada explícitamente en el apéndice A, por lo que se obtiene al aplicar a cada quark con su correspondiente espín, que

$$\mu(p) = \left\langle \psi_p, \frac{1}{2} \left| \vec{\mu} \right| \psi_p, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{4\mu_u - \mu_d}{3} \quad (4.66)$$

Esta expresión queda completamente en función de los momentos magnéticos de los quarks, cuyos valores no pueden obtenerse directamente del modelo de quarks, sino que existe una vía indirecta, en la cuál pueden medirse experimentalmente los momentos magnéticos del neutrón y de Λ^0 en el que tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas (los momentos magnéticos de los tres quarks ligeros u , d y s). Para obtener el valor esperado del momento magnético para el protón no es necesario hacer el cálculo de nuevo con el operador (4.64), sino que pueden usarse las propiedades de simetría con la identidad (2.8) que se vio en el capítulo 2, y con el operador de momento magnético definido en términos de los operadores de creación y aniquilación (véase también (2.50)), como $\vec{\mu}_z$. De esta manera tenemos por la simetría de isoespín que

$$\mu(n) = \left\langle \psi_n, \frac{1}{2} \left| \vec{\mu} \right| \psi_n, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{4\mu_d - \mu_u}{3} \quad (4.67)$$

donde puede verse la simetría que tiene en el caso del protón únicamente intercambiando el quark u por el quark d . De la misma forma tenemos que

$$\mu(\Lambda^0) = \left\langle \psi_{\Lambda^0}, \frac{1}{2} \left| \vec{\mu} \right| \psi_{\Lambda^0}, \frac{1}{2} \right\rangle = \mu_s. \quad (4.68)$$

De esta manera teniendo los valores experimentales para estos bariones, resolviendo el sistema de ecuaciones, los momentos magnéticos μ_u , μ_d y μ_s son determinados a partir de los momentos magnéticos del protón, p , el neutrón, n , y lambda, Λ^0 , los cuales se muestran en la tabla 4.1. Los momentos magnéticos calculados (obtenidos fácilmente utilizando las propiedades de simetría del capítulo 2) para el resto de los bariones, así como los resultados experimentales [32] se muestran en las tablas 4.2 y 4.3 en unidades del magnetón nuclear, $\mu_N = e\hbar/2m_N$ (en unidades SI).

$$\begin{array}{r} \hline \mu_u \quad 1.852\mu_N \\ \mu_d \quad -0.972\mu_N \\ \mu_s \quad -0.613\mu_N \\ \hline \end{array}$$

Cuadro 4.1: Momentos magnéticos para los quarks u , d y s

Barión	μ	$\mu_{calc}(\mu_N)$	$\mu_{exp}(\mu_N)$
p	$(4\mu_u - \mu_d)/3$	2.793*	2.973
n	$(4\mu_d - \mu_u)/3$	-1.913*	-1.913
Σ^+	$(4\mu_u - \mu_s)/3$	2.673	2.458±0.010
Σ^0	$(2\mu_u + 2\mu_d - \mu_s)/3$	0.791	-
Σ^-	$(4\mu_d - \mu_s)/3$	-1.091	-1.160±0.025
Λ^0	μ_s	-0.613*	-0.613±0.004
Ξ^0	$(4\mu_s - \mu_u)/3$	-1.435	-1.250±0.014
Ξ^-	$(4\mu_s - \mu_d)/3$	-0.493	-0.651±0.003

Cuadro 4.2: Momentos magnéticos de los bariones del octete en CQM. Los valores indicados con * se refieren a los valores tomados para el cálculo de los momentos magnéticos efectivos de los quarks en este modelo.

Para los momentos magnéticos de transición entre los bariones del octete $J^P = \frac{1}{2}^+$ (B_8) y decuplete $J^P = \frac{3}{2}^+$, basta con obtener los elementos de matriz

$$\langle B_{10}, S_z | \hat{\mu} | B_8, S_z \rangle \quad (4.69)$$

que son no nulos para los casos en que la proyección de isoespín, la proyección de espín son iguales en los bariones con grados de libertad de espín-sabor. Basta con obtener los elementos de matriz mostrados en la tabla 4.4 para la proyección de espín $S_z = \frac{1}{2}$ y los demás elementos de matriz de interés se obtienen usando las simetrías de espín y de isoespín; véanse las secciones **2.1** y **2.2**.

Teniendo los valores para los momentos magnéticos de los bariones en el CQM puede proseguirse al cálculo de los momentos magnéticos de los mismos en el modelo de quarks efectivo UQM, en el que se utilizan los valores encontrados aquí para la parte de los quarks de valencia (que pertenecen al barión principal de la función de onda total en el UQM). En el siguiente capítulo se explicará la forma de obtener el momento magnético considerando las contribuciones de los quarks de mar (correspondientes a los términos barión-mesón) siendo necesario ampliar la expresión del momento magnético para considerar a los antiquarks involucrados.

Barión	μ	$\mu_{calc}(\mu_N)$	$\mu_{exp}(\mu_N)$
Δ^{++}	$3\mu_u$	5.556	3.7 a 7.5
Δ^+	$2\mu_u + \mu_d$	3.091	-
Δ^0	$\mu_u + 2\mu_d$	-0.092	-
Δ^-	$3\mu_d$	-2.916	-
Σ^{*+}	$2\mu_u + \mu_s$	3.091	-
Σ^{*0}	$\mu_u + \mu_d + \mu_s$	0.267	-
Σ^{*-}	$2\mu_d + \mu_s$	-2.557	-
Ξ^{*0}	$\mu_u + 2\mu_s$	0.626	-
Ξ^{*-}	$\mu_d + 2\mu_s$	-2.198	-
Ω^-	$3\mu_s$	-1.839	-2.02 ± 0.05

Cuadro 4.3: Momentos magnéticos de los bariones del decuplete en CQM

4.3.2. Momentos magnéticos en el UQM

En esta sección vemos la base de los momentos magnéticos en el UQM para obtener los valores del momento magnético de los bariones, y los momentos magnéticos de transición. Debido a que en este modelo existen contribuciones del tipo barión-mesón, $|BC\rangle$, existen antiquarks involucrados debido al mesón, así como momentos angulares relativos \vec{l}_i debido a este acoplamiento. Se utiliza el operador de momento magnético de forma práctica, a partir de (4.63), como

$$\vec{\mu} = \sum_q \mu_q \left[2\vec{s}(q) + \vec{l}(q) - 2\vec{s}(\bar{q}) - \vec{l}(\bar{q}) \right] \quad (4.70)$$

de donde el índice q corre sobre todos los quarks y antiquarks en las funciones de espín-sabor. Cabe mencionar que el momento magnético de los antiquarks es sencillamente el negativo del momento magnético de los correspondientes quarks, pues estos dependen directamente de la carga eléctrica, ver (4.62), y en cuyo caso la correspondiente antipartícula es de carga opuesta, es decir

$$\mu_q = -\mu_{\bar{q}} \quad (4.71)$$

El siguiente paso es utilizar explícitamente este operador (4.70) para calcular los momentos magnéticos en el UQM.

Para el caso particular de los momentos magnéticos en el UQM de los bariones del octete y decuplete se calcularon en los trabajos previos [41, 42] y se realizó de forma análoga que en CQM pero con el caso especial del operador (4.70) y los correspondientes coeficientes de amplitud de probabilidad como se vió en la sección 3.3.2 usando únicamente la contribución mesónica de los piones, los que contribuyen más por ser los de mayor masa. Los valores obtenidos para los momentos magnéticos del octete y decupete de bariones se obtuvieron en [41, 42], mostrados en las tablas 4.5, 4.6. Podemos

Transición	μ	$\mu_{calc}(\mu_N)$
Δ^+ / p	$\frac{2\sqrt{2}}{3}(\mu_u - \mu_d)$	2.662
Σ^{*+} / Σ^+	$\frac{2\sqrt{2}}{3}(\mu_s - \mu_u)$	-2.324
Σ^{*0} / Σ^0	$\frac{\sqrt{2}}{3}(2\mu_s - \mu_u - \mu_d)$	-0.993
Σ^{*0} / Λ^0	$\sqrt{\frac{2}{3}}(\mu_u - \mu_d)$	2.306
Ξ^{*0} / Ξ^0	$\frac{2\sqrt{2}}{3}(\mu_s - \mu_u)$	-2.324

Cuadro 4.4: Momentos magnéticos de transición entre decuplete y octete de bariones con $S_z = \frac{1}{2}$ en el CQM

notar en estas que el valor experimental y los resultados del UQM siguen teniendo prácticamente los mismos buenos resultados.

Para el caso de los momentos magnéticos totales y de transición de bariones en el UQM se considera el operador para el momento magnético (4.70) expresándolo convenientemente en las partes de espín y de momento angular orbital como

$$\hat{\mu} = \sum_q \mu_q 2(\hat{S}(q) - \hat{S}(\bar{q})) + \sum_q \mu_q (\hat{l}(q) - \hat{l}(\bar{q})) = \vec{\mu}_S + \vec{\mu}_l. \quad (4.72)$$

Se consideran también las funciones de onda de espín-sabor del UQM, en las que se consideran primero los efectos que tiene el espín en estas con el operador (4.72), que contribuye en la parte de valencia, qqq y del mar de quarks, $q\bar{q}$, y luego el efecto del momento angular orbital, que contribuye sólo en la parte del mar. Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{B'}, S S_z l m_l | \vec{\mu} | \Psi_B, S S_z l m_l \rangle &= \langle \Psi_{B'}, S S_z | \vec{\mu}_S | \Psi_B, S S_z \rangle + \langle \Psi_{B'}, l m_l | \vec{\mu}_l | \Psi_B, l m_l \rangle \\ &= \mu_S(B'/B) + \mu_l(B'/B) \end{aligned} \quad (4.73)$$

con $\mu_S(B'/B)$ y $\mu_l(B'/B)$ los momentos magnéticos para multipletes de isoespín de un barión B , cuando $B = B'$, y de transición cuando $B \neq B'$, debido al espín y al momento angular relativo respectivamente. De esta forma el momento magnético del barión (y en general del hadrón) está dado por la suma de las contribuciones de espín y de momento angular relativo de forma independiente, por lo que se analizará en la siguiente sección las contribuciones de espín.

Contribuciones del espín

Al obtener el valor esperado del operador $\vec{\mu}_S$ de la ecuación (4.72) a un estado en general del UQM para un multiplete de isoespín B , ver como ejemplo ecuación (3.29), utilizamos el estado

$$|\Psi_A\rangle = \left[|A\rangle + \int d\vec{k} \sum_{BC} a_{A \rightarrow BC}(\vec{k}) |BC\rangle \right] \quad (4.74)$$

y tomamos el valor esperado del operador de momento magnético debido al espín $\hat{\mu}_S$ teniendo que

Barión	CQM (μ_N)	UQM (μ_N) [41]	$\mu_{exp}(\mu_N)$ [33]
p	2.793	2.793*	2.793
n	-1.913	-1.913*	-1.913
Σ^+	2.673	2.589	2.458 \pm 0.010
Σ^0	0.791	0.783	-
Σ^-	-1.091	-1.023	-1.160 \pm 0.025
Λ	-0.613	-0.613*	-0.613 \pm 0.004
Ξ^0	-1.435	-1.359	-1.250 \pm 0.014
Ξ^-	-0.493	-0.530	-0.651 \pm 0.003
Σ^0/Λ^0	1.630	1.640	1.610 \pm 0.08

Cuadro 4.5: Momentos magnéticos de los bariones del octete

$$\begin{aligned}
\mu_S(A) &= \langle \Psi_A | \vec{\mu}_S | \Psi_A \rangle \\
&= \mathcal{N}_A^2 \left[\langle A | \hat{\mu}_S | A \rangle + \int d\vec{k} \sum_{BCB'C'} a_{A \rightarrow BC} a_{A \rightarrow B'C'}(\vec{k}) \langle BC | \hat{\mu}_S | B'C' \rangle \right] \quad (4.75)
\end{aligned}$$

donde $a_{A \rightarrow BC} a_{A \rightarrow B'C'} = a_{A \rightarrow BC}^2$ cuando $B = B'$, $C = C'$. A partir de aquí se puede reconocer que el primer término de esta ecuación pertenece al momento magnético del barión A del modelo de quarks CQM. Los demás términos corresponden a las contribuciones debidas a los estados intermedios del UQM. Para calcular estos términos es bastante fácil obtener una expresión simple por la naturaleza del operador $\hat{\mu}_S$, es decir, por la ecuación (4.72) tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle B_i C_l | \hat{\mu}_S | B_j \rangle &= 0, \quad \forall i, j, l, \\
\langle B_i C_j | \hat{\mu}_S | B_k C_l \rangle &= \langle B_i | \hat{\mu}_S | B_k \rangle \delta_{C_j C_l} + \langle C_j | \hat{\mu}_S | C_l \rangle \delta_{B_i B_k} \\
&= \langle B_i | \vec{\mu}_S | B_k \rangle \delta_{C_j C_l}.
\end{aligned} \quad (4.76)$$

donde el término $\langle C_j | \vec{\mu} | C_l \rangle \delta_{ik} = 0$ para mesones pseudoescalares C ($S = 0$), así el estado puro del mesón no contribuirá al momento magnético. De esta manera el momento magnético como se muestra en la ecuación (4.75) queda sencillamente como

$$\begin{aligned}
\mu_S(A) &= \langle \Psi_A | \vec{\mu}_S | \Psi_A \rangle \\
&= \mathcal{N}_A^2 \left[\langle A | \hat{\mu}_S | A \rangle + \int d\vec{k} \sum_{BB'C} a_{A \rightarrow BC} a_{A \rightarrow B'C}(\vec{k}) \langle B | \hat{\mu}_S | B' \rangle \right], \quad (4.77)
\end{aligned}$$

que contiene los elementos de matriz reproducibles en el CQM. Lo que resta hacer ahora es obtener los valores esperados correspondientes de la última ecuación con los correspondientes estados especificados

Barión	CQM (μ_N)	UQM (μ_N) [42]	Exp (μ_N) [33]
Δ^{++}	5.556	5.31165	3.7 a 7.5
Δ^+	2.7318	2.48262	-
Δ^0	-0.092	-0.346408	-
Δ^-	-2.916	-3.17544	-
Σ^{*+}	3.091	2.78921	-
Σ^{*0}	0.267	0.036555	-
Σ^{*-}	-2.557	-2.71611	-
Ξ^{*0}	0.626	0.340423	-
Ξ^{*-}	-2.198	-2.25133	-
Ω^-	-1.839	-1.85787	-2.02 ± 0.05

Cuadro 4.6: Momentos magnéticos de bariones del decuplete

en el espacio de espín-sabor, es decir, cada estado contiene el desarrollo con los correspondientes coeficientes de Clebsch-Gordan de espín y de sabor. Como un ejemplo de ello se realiza el caso del momento magnético de transición $\mu_S(\Delta^+/p)$ en la proyección de espín $S_z = \frac{1}{2}$. Tomando las funciones de onda para Δ^+ y p representadas por los estados de las ecuaciones (3.48) y (3.52) respectivamente hacemos, tomando en cuenta sólo los números cuánticos de espín,

$$\begin{aligned}
& \left\langle \Psi_{\Delta^+, S_z = \frac{1}{2}} \left| \hat{\mu}_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{p, S_z = \frac{1}{2}} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_\Delta \mathcal{N}_p \left[\langle \Delta^+, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | p, \frac{1}{2} \rangle \right. \\
&+ a_{\Delta \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow N\pi} \left(\frac{2}{9} \langle n, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | n, -\frac{1}{2} \rangle - \frac{2}{9} \langle n, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | n, \frac{1}{2} \rangle - \frac{2}{9} \langle p, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | p, -\frac{1}{2} \rangle + \frac{2}{9} \langle p, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | p, \frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow \Delta\pi} \left(\frac{1}{18} \langle n, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^0, -\frac{1}{2} \rangle - \frac{1}{9} \langle n, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^0, \frac{1}{2} \rangle - \frac{1}{9} \langle p, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^+, -\frac{1}{2} \rangle + \frac{2}{9} \langle p, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^+, \frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} a_{N \rightarrow N\pi} \left(\frac{1}{45} \langle \Delta^+, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | p, \frac{1}{2} \rangle + \frac{4}{45} \langle \Delta^+, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | p, -\frac{1}{2} \rangle + \frac{4}{45} \langle \Delta^0, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | n, \frac{1}{2} \rangle + \frac{16}{45} \langle \Delta^0, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | n, -\frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} a_{N \rightarrow \Delta\pi} \left(\frac{1}{45} \langle \Delta^+, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^+, \frac{1}{2} \rangle + \frac{1}{15} \langle \Delta^+, \frac{3}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^+, \frac{3}{2} \rangle + \frac{2}{45} \langle \Delta^+, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^+, -\frac{1}{2} \rangle \right. \\
&\quad + \frac{2}{45} \langle \Delta^0, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^0, \frac{1}{2} \rangle - \frac{2}{15} \langle \Delta^0, \frac{3}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^0, \frac{3}{2} \rangle + \frac{4}{45} \langle \Delta^0, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^0, -\frac{1}{2} \rangle \\
&\quad \left. - \frac{1}{15} \langle \Delta^{++}, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^{++}, \frac{1}{2} \rangle + \frac{2}{10} \langle \Delta^{++}, \frac{3}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^{++}, \frac{3}{2} \rangle - \frac{2}{15} \langle \Delta^{++}, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^{++}, -\frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Sigma K} \left(-\frac{2}{9} \langle \Sigma^+, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^+, -\frac{1}{2} \rangle + \frac{2}{9} \langle \Sigma^+, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^+, \frac{1}{2} \rangle + \frac{2}{9} \langle \Sigma^0, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^0, -\frac{1}{2} \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{9} \langle \Sigma^0, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^0, \frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Lambda K} \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}} \langle \Sigma^0, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Lambda^0, -\frac{1}{2} \rangle + \frac{2}{3\sqrt{3}} \langle \Sigma^0, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Lambda^0, \frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Sigma^* K} \left(\frac{1}{9} \langle \Sigma^+, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2} \rangle - \frac{2}{9} \langle \Sigma^+, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*+}, \frac{1}{2} \rangle - \frac{1}{9} \langle \Sigma^0, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{9} \langle \Sigma^0, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*0}, \frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} a_{N \rightarrow \Sigma K} \left(\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*+}, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^+, \frac{1}{2} \rangle + \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^+, -\frac{1}{2} \rangle - \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*0}, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^0, \frac{1}{2} \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^0, -\frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} a_{N \rightarrow \Lambda K} \left(\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{15}} \langle \Sigma^{*0}, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Lambda^0, \frac{1}{2} \rangle + \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{15}} \langle \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Lambda^0, -\frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} a_{N \rightarrow \Sigma^* K} \left(-\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*+}, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*+}, \frac{1}{2} \rangle + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*+}, \frac{3}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*+}, \frac{3}{2} \rangle - \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*+}, -\frac{1}{2} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*0}, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*0}, \frac{1}{2} \rangle - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*0}, \frac{3}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*0}, \frac{3}{2} \rangle + \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*0}, -\frac{1}{2} \rangle \right) \\
&\left. + (a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta} a_{N \rightarrow \Delta\eta} + a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta'} a_{N \rightarrow \Delta\eta'}) \left(\frac{1}{3\sqrt{5}} \langle \Delta^+, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | p, \frac{1}{2} \rangle + \frac{4}{3\sqrt{5}} \langle \Delta^+, -\frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | p, -\frac{1}{2} \rangle \right) \right], \tag{4.78}
\end{aligned}$$

simplicando usando las relaciones de simetría de espín, (2.28)-(2.31), para los elementos de matriz y factorizando los elementos en común se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
& \left\langle \Psi_{\Delta^+}, S_z = \frac{1}{2} \left| \hat{\mu}_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_p, S_z = \frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_\Delta \mathcal{N}_p \left[\langle \Delta^+, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | p, \frac{1}{2} \rangle \right. \\
&+ a_{\Delta \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow N\pi} \left(\left[-\frac{2}{9} - \frac{2}{9} \right] \langle n, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | n, \frac{1}{2} \rangle + \left[\frac{2}{9} + \frac{2}{9} \right] \langle p, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | p, \frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow \Delta\pi} \left(\left[\frac{1}{18} - \frac{1}{9} \right] \langle n, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^0, \frac{1}{2} \rangle + \left[\frac{2}{9} - \frac{1}{9} \right] \langle p, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^+, \frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} a_{N \rightarrow N\pi} \left(\left[\frac{1}{45} + \frac{4}{45} \right] \langle \Delta^+, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | p, \frac{1}{2} \rangle + \left[\frac{4}{45} + \frac{16}{45} \right] \langle \Delta^0, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | n, \frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} a_{N \rightarrow \Delta\pi} \left(\left[\frac{1}{3(45)} - \frac{1}{15} - \frac{2}{3(45)} \right] \langle \Delta^+, \frac{3}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^+, \frac{3}{2} \rangle + \left[\frac{2}{3(45)} - \frac{2}{15} - \frac{4}{3(45)} \right] \langle \Delta^0, \frac{3}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^0, \frac{3}{2} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{2}{10} - \frac{1}{45} + \frac{2}{45} \right] \langle \Delta^{++}, \frac{3}{2} | \hat{\mu}_S | \Delta^{++}, \frac{3}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Sigma K} \left(\left[\frac{2}{9} + \frac{2}{9} \right] \langle \Sigma^+, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^+, \frac{1}{2} \rangle - \left[\frac{2}{9} + \frac{2}{9} \right] \langle \Sigma^0, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^0, \frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Lambda K} \left(\left[\frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \right] \langle \Sigma^0, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Lambda^0, \frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Sigma^* K} \left(\left[\frac{1}{9} - \frac{2}{9} \right] \langle \Sigma^+, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*+}, \frac{1}{2} \rangle + \left[\frac{2}{9} - \frac{1}{9} \right] \langle \Sigma^0, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*0}, \frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} a_{N \rightarrow \Sigma K} \left(\left[\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} + \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} \right] \langle \Sigma^{*+}, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^+, \frac{1}{2} \rangle - \left[\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} + \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} \right] \langle \Sigma^{*0}, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^0, \frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} a_{N \rightarrow \Lambda K} \left(\left[\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{15}} + \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{15}} \right] \langle \Sigma^{*0}, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | \Lambda^0, \frac{1}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} a_{N \rightarrow \Sigma^* K} \left(\left[\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \right] \langle \Sigma^{*+}, \frac{3}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*+}, \frac{3}{2} \rangle + \left[\frac{\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \right] \langle \Sigma^{*0}, \frac{3}{2} | \hat{\mu}_S | \Sigma^{*0}, \frac{3}{2} \rangle \right) \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta} a_{N \rightarrow \Delta\eta} \left(\frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{4}{3\sqrt{5}} \right) \langle \Delta^+, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | p, \frac{1}{2} \rangle \\
&+ a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta'} a_{N \rightarrow \Delta\eta'} \left(\frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{4}{3\sqrt{5}} \right) \langle \Delta^+, \frac{1}{2} | \hat{\mu}_S | p, \frac{1}{2} \rangle \left. \right]. \tag{4.79}
\end{aligned}$$

Una vez hecho esto podemos usar los valores de los elementos de matriz del CQM involucrados en esta expresión, por lo que se simplifica a la siguiente expresión en términos de los momentos magnéticos de los quarks

$$\begin{aligned}
\mu_S(\Delta^+/p) &= \left\langle \Psi_{\Delta^+}, \frac{1}{2} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_p, \frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_\Delta \mathcal{N}_N \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} + a_{\Delta \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow N\pi} \left(\frac{20}{27} \right) + a_{\Delta \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow \Delta\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{27} \right) \right. \\
&\quad + a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} a_{N \rightarrow N\pi} \left(\frac{10\sqrt{2}}{27} \right) + a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} a_{N \rightarrow \Delta\pi} \left(\frac{10}{27} \right) + a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Sigma K} \left(\frac{8}{27} \right) \\
&\quad + a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Lambda K} \left(\frac{4}{9} \right) + a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Sigma^* K} \left(\frac{\sqrt{2}}{27} \right) + a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} a_{N \rightarrow \Sigma K} \left(-\frac{\sqrt{20}}{27} \right) \\
&\quad + a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} a_{N \rightarrow \Lambda K} \left(\frac{\sqrt{20}}{9} \right) + a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} a_{N \rightarrow \Sigma^* K} \left(\frac{2\sqrt{10}}{27} \right) + a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta} a_{N \rightarrow N\eta} \left(\frac{2\sqrt{10}}{9} \right) \\
&\quad \left. + a_{\Delta \rightarrow \Delta\eta'} a_{N \rightarrow N\eta'} \left(\frac{2\sqrt{10}}{9} \right) \right] (\mu_u - \mu_d). \tag{4.80}
\end{aligned}$$

Podemos observar que esta simple expresión, que corresponde al momento magnético de transición para la parte de espín en el UQM, queda únicamente en términos de μ_u y μ_d (depende de los momentos magnéticos experimentales del protón y neutrón) y de las amplitudes de probabilidad $a_{A \rightarrow BC} a_{A' \rightarrow B'C}$ (depende de las masas de los bariones y del valor de γ^2 de la asimetría de sabor). De forma completamente análoga se realiza lo mismo para el resto de las transiciones de bariones.

$$\begin{aligned}
\mu_S(\Sigma^{*+}/\Sigma^+) &= \left\langle \Psi_{\Sigma^{*+}}, \frac{1}{2} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{\Sigma^+}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Sigma^*} \mathcal{N}_{\Sigma} \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} (\mu_s - \mu_u) + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \pi} \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{4\mu_u - \mu_s}{3} + \frac{2\mu_u + 2\mu_d - \mu_s}{3} \right) \right. \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \pi} \frac{\sqrt{5}}{6} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} (\mu_s - \mu_u) + \frac{\sqrt{2}}{3} (2\mu_s - \mu_u - \mu_d) \right) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \pi} \frac{2}{3\sqrt{3}} (\mu_d - \mu_u) + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Lambda \pi} \frac{2}{3\sqrt{3}} (\mu_d - \mu_u) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Lambda \pi} \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} (\mu_d - \mu_u) + a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Lambda \pi} \frac{2\sqrt{2}}{3} (\mu_s) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \pi} \frac{-1}{6\sqrt{2}} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} (\mu_s - \mu_u) + \frac{\sqrt{2}}{3} (2\mu_s - \mu_u - \mu_d) \right) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \pi} \frac{\sqrt{5}}{9} (3\mu_u + 2\mu_s + \mu_d) + a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda \pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \pi} \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} (\mu_u - \mu_d) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta} \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{4\mu_u - \mu_s}{3} \right) + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta} \frac{2}{9} (\mu_u - \mu_s) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi K} a_{\Sigma \rightarrow \Xi K} \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{4\mu_s - \mu_u}{3} \right) + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi K} a_{\Sigma \rightarrow \Xi^* K} \frac{2}{9} (\mu_u - \mu_s) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow N \bar{K}} a_{\Sigma \rightarrow N \bar{K}} \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{4\mu_u - \mu_d}{3} \right) + a_{\Sigma^* \rightarrow N \bar{K}} a_{\Sigma \rightarrow \Delta \bar{K}} \frac{1}{9} (\mu_u - \mu_d) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Delta \bar{K}} a_{\Sigma \rightarrow N \bar{K}} \frac{\sqrt{10}}{9} (\mu_d - \mu_u) + a_{\Sigma^* \rightarrow \Delta \bar{K}} a_{\Sigma \rightarrow \Delta \bar{K}} \frac{\sqrt{5}}{18} (11\mu_u + \mu_d) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta'} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta'} \frac{2\sqrt{10}}{9} (\mu_s - \mu_u) + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta} \frac{2\sqrt{10}}{9} (\mu_s - \mu_u) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta} \frac{2\sqrt{5}}{9} (2\mu_u + \mu_s) + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta'} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \eta'} \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{4\mu_u - \mu_s}{3} \right) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \eta'} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta'} \frac{2\sqrt{5}}{9} (2\mu_u + \mu_s) + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \eta'} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta'} \frac{2}{9} (\mu_u - \mu_s) \\
&\quad \left. + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi^* K} a_{\Sigma \rightarrow \Xi K} \frac{2\sqrt{10}}{9} (\mu_s - \mu_u) + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi^* K} a_{\Sigma \rightarrow \Xi^* K} \frac{2\sqrt{5}}{9} (2\mu_s + \mu_u) \right] \quad (4.81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_S(\Xi^{*0}/\Xi^0) &= \left\langle \Psi_{\Xi^{*0}}, \frac{1}{2} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{\Xi^0}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Xi^*} \mathcal{N}_{\Sigma} \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} (\mu_s - \mu_u) + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi \pi} \frac{2\sqrt{2}}{9} \left(\frac{4\mu_s - \mu_u}{3} + 2 \frac{4\mu_s - \mu_d}{3} \right) \right. \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \pi} \frac{-2}{27} (3\mu_s - \mu_u - 2\mu_d) + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi \pi} \frac{2\sqrt{10}}{27} (3\mu_s - \mu_u - 2\mu_d) \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \pi} \frac{2\sqrt{5}}{27} (6\mu_s + 2\mu_d + \mu_u) + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \eta} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta} \frac{2\sqrt{2}}{9} (4\mu_s - \mu_u) \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \eta} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta} \frac{2}{9} (\mu_u - \mu_s) + a_{\Xi^* \rightarrow \Lambda \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Sigma \bar{K}} \frac{2\sqrt{2}}{9} (\mu_d - \mu_u) \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Lambda \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Lambda \bar{K}} \frac{2\sqrt{2}}{3} \mu_s + a_{\Xi^* \rightarrow \Lambda \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Sigma^* \bar{K}} \frac{1}{9} (\mu_u - \mu_d) \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Sigma \bar{K}} \frac{2\sqrt{2}}{27} (10\mu_u + 2\mu_d - 3\mu_s) + a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Lambda \bar{K}} \frac{2\sqrt{2}}{9} (\mu_d - \mu_u) \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Sigma^* \bar{K}} \frac{1}{27} (5\mu_u - 6\mu_s + \mu_d) + a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma^* \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Sigma \bar{K}} \frac{-\sqrt{10}}{27} (5\mu_u - 6\mu_s + \mu_d) \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma^* \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Lambda \bar{K}} \frac{\sqrt{10}}{9} (\mu_d - \mu_u) + a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma^* \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Sigma^* \bar{K}} \frac{2\sqrt{5}}{27} (5\mu_u + 3\mu_s + \mu_d) \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta} \frac{2\sqrt{10}}{9} (\mu_s - \mu_u) + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta} \frac{2\sqrt{5}}{9} (2\mu_s + \mu_u) \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \eta'} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta'} \frac{2\sqrt{2}}{9} (4\mu_s - \mu_u) + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta'} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta'} \frac{2\sqrt{5}}{9} (2\mu_s + \mu_u) \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta'} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta'} \frac{2\sqrt{10}}{9} (\mu_s - \mu_u) + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \eta'} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta'} \frac{2}{9} (\mu_u - \mu_s) \\
&\quad \left. + a_{\Xi^* \rightarrow \Omega K} a_{\Xi \rightarrow \Omega K} \frac{2\sqrt{5}}{3} \mu_s \right] \tag{4.82}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_S(\Sigma^{*0}/\Lambda^0) &= \left\langle \Psi_{\Sigma^{*0}}, \frac{1}{2} \left| \mu_z(\mathbf{S}) \right| \Psi_{\Lambda^0}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Sigma^*} \mathcal{N}_{\Lambda} \left[\sqrt{\frac{2}{3}} + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma\pi} \frac{8}{9\sqrt{3}} + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma^*\pi} \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \right. \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma\pi} \frac{-2\sqrt{5}}{9\sqrt{3}} + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma^*\pi} \frac{2\sqrt{10}}{9\sqrt{3}} + a_{\Sigma^* \rightarrow N\bar{K}} a_{\Lambda \rightarrow N\bar{K}} \frac{5\sqrt{2}}{9} \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma\pi} \frac{-2\sqrt{2}}{9} + a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma^*\pi} \frac{1}{9} + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\eta} a_{\Lambda \rightarrow \Lambda\eta} \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi K} a_{\Lambda \rightarrow \Xi K} \frac{-\sqrt{2}}{9} + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi K} a_{\Lambda \rightarrow \Xi^* K} \frac{1}{9} + a_{\Sigma^* \rightarrow \Delta\bar{K}} a_{\Lambda \rightarrow N\bar{K}} \frac{2\sqrt{10}}{9} \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\eta'} a_{\Lambda \rightarrow \Lambda\eta'} \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{3}} + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\eta} a_{\Lambda \rightarrow \Lambda\eta} \frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{3}} + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\eta'} a_{\Lambda \rightarrow \Lambda\eta'} \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \\
&\quad \left. + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi^* K} a_{\Lambda \rightarrow \Xi^* K} \frac{\sqrt{5}}{9} + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi^* K} a_{\Lambda \rightarrow \Xi K} \frac{-\sqrt{10}}{9} \right] (\mu_u - \mu_d) \tag{4.83}
\end{aligned}$$

Una vez obtenidas las ecuaciones para los momentos magnéticos en este caso, puede calcularse el valor numérico, a partir de los valores para el momento magnético de los quarks como se dan en la tabla 4.1 (aunque es más adecuado hacerlo con los momentos magnéticos efectivos para el UQM como se ve más adelante en la tabla 5.1) y las amplitudes de probabilidad que se muestran en la tabla 3.1, para el caso de la contribución piónica, y en la tabla 3.2 para la contribución de todos los mesones pseudoescalares.

Contribuciones del momento angular orbital relativo

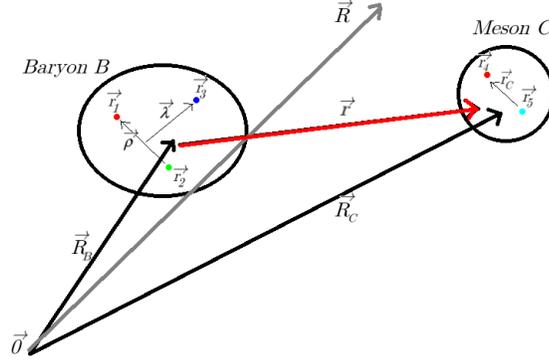
En esta parte se discutirá a fondo la contribución del momento angular relativo de los quarks del mar (los quarks de valencia se supone que forman el barión principal en el estado base) que forman el par barión-mesón. Para ello analizaremos la naturaleza del operador del momento magnético debido al momento angular. Por la ecuación (4.72) tenemos que este operador sólo actúa sobre los valores de los números cuánticos de la proyección de momento angular de la función de onda a la que se aplique. Sin embargo, debido a que las funciones de onda de los bariones se construyeron en un sistema de coordenadas de Jacobi (véanse las secciones 1.4 y 1.5), este operador debe expresarse también en estas coordenadas. Para ello supondremos que a cada quark constituyente del barión (incluidos los antiquarks) le corresponde la i -ésima coordenada espacial \vec{r}_i , de esta manera introduciendo las coordenadas de Jacobi con la simetría de sabor tenemos

$$\left. \begin{aligned} \vec{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \\ \vec{R}_B &= \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{r}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho} + \vec{R}_B \\ \vec{r}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho} + \vec{R}_B \\ \vec{r}_3 &= \vec{R}_B - \frac{\sqrt{6}}{3}\vec{\lambda} \end{aligned} \tag{4.84}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_C &= \vec{r}_4 - \vec{r}_5 \\ \vec{R}_C &= \frac{1}{2}(\vec{r}_4 + \vec{r}_5) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{r}_4 &= \vec{R}_C + \frac{1}{2}\vec{r}_C \\ \vec{r}_5 &= \vec{R}_C - \frac{1}{2}\vec{r}_C \end{aligned} \tag{4.85}$$

con las coordenadas $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ correspondientes a los quarks del barión (qqq), \vec{r}_4 y \vec{r}_5 se refieren a los quarks del mesón ($q\bar{q}$) y donde las coordenadas \vec{r}_C y \vec{R}_C corresponden a las coordenadas espaciales relativas entre los quarks del mesón, C .

Hay otra transformación de coordenadas hacia las coordenadas del centro de masa entre el barión,

Figura 4.1: Coordenadas relativas para un sistema barión-mesón, $|BC\rangle$.

B , y el mesón C , \vec{R} , y el vector relativo entre el barión y el mesón, \vec{r} , quedando como sigue

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{R}_B - \vec{R}_C \\ \vec{R} &= \frac{m_B \vec{R}_B + m_C \vec{R}_C}{m_B + m_C} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{R}_B &= \vec{R} + \frac{m_C}{m_B + m_C} \vec{r} \\ \vec{R}_C &= \vec{R} - \frac{m_B}{m_B + m_C} \vec{r} \end{aligned} \quad (4.86)$$

entonces, las coordenadas quedan transformadas en términos de las coordenadas de Jacobi y del centro de masa como

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\rho} + \vec{R} + \frac{m_C}{m_B + m_C} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\rho} + \vec{R} + \frac{m_C}{m_B + m_C} \vec{r} \\ \vec{r}_3 &= \vec{R} + \frac{m_C}{m_B + m_C} \vec{r} - \frac{\sqrt{6}}{3} \vec{\lambda} \\ \vec{r}_4 &= \vec{R} - \frac{m_B}{m_B + m_C} \vec{r} + \frac{1}{2} \vec{r}_C \\ \vec{r}_5 &= \vec{R} - \frac{m_B}{m_B + m_C} \vec{r} - \frac{1}{2} \vec{r}_C \end{aligned} \quad (4.87)$$

Puede así también expresarse esta transformación de coordenadas en notación tensorial, utilizando la convención de suma de Einstein, así

$$\vec{r}_i = \sum_{k=1}^5 T_i^k \vec{\alpha}_k = T_i^k \vec{\alpha}_k \quad (4.88)$$

con T_i^k el tensor de transformación de coordenadas, $\vec{\alpha}_k$ la k -ésima coordenada de Jacobi, y debido a que toda transformación lineal de coordenadas se puede expresar como $T_i^k = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k}$, se tiene que la transformación a las coordenadas de Jacobi se expresa simplemente como sigue

$$\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k} \vec{\alpha}_k \quad (4.89)$$

donde de la regla de correspondencia de la ecuación (4.87) tenemos que las coordenadas correspondientes son $\vec{\alpha}_1 = \vec{\lambda}$, $\vec{\alpha}_2 = \vec{\rho}$, $\vec{\alpha}_3 = \vec{R}$, $\vec{\alpha}_4 = \vec{r}_C$ y $\vec{\alpha}_5 = \vec{r}$ para la regla de transformación de la ecuación

anterior. Similarmente puede obtenerse una regla de transformación de coordenadas para el operador de momento como

$$\vec{p}_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} = i\hbar \sum_{j=1}^5 \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}_j} = i \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}_j} \quad (4.90)$$

así la ecuación para la transformación de coordenadas del momento es

$$\vec{p}_i = \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} \vec{p}_{\alpha_j} \quad (4.91)$$

con $\vec{p}_{\alpha_j} = i \frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}_j}$ el momento en las coordenadas de Jacobi. De esta forma podemos obtener una expresión para el momento magnético debido al momento angular relativo en términos de las coordenadas de Jacobi, utilizando a las coordenadas $\vec{\alpha}_k$ y los momentos \vec{p}_{α_j} a partir de la definición del momento angular como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \mu_i \vec{l}_i &= \sum_{i=1}^5 \mu_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \\ &= \sum_{i=1}^5 \mu_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k} \vec{\alpha}_k \times \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} \vec{p}_{\alpha_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^5 \mu_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k} \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} (\vec{\alpha}_k \times \vec{p}_{\alpha_j}) \\ &= B_j^k (\vec{\alpha}_k \times \vec{p}_{\alpha_j}) \end{aligned} \quad (4.92)$$

de donde el tensor B_j^k es el tensor de transformación de coordenadas para el momento magnético angular y es simplemente el producto como

$$B_j^k = \sum_{i=1}^5 \mu_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k} \frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} = \left(\frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} \right) (\mu_i) \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k} \right) \quad (4.93)$$

donde las correspondientes representaciones matriciales de las transformaciones de coordenadas son

$$\left(\frac{\partial \vec{\alpha}_j}{\partial \vec{r}_i} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_B}{3M} & \frac{m_B}{3M} & \frac{m_B}{3M} & \frac{m_C}{2M} & \frac{m_C}{2M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.94)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{\alpha}_k} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & \frac{m_C}{M} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & \frac{m_C}{M} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{m_C}{M} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{m_B}{M} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{m_B}{M} \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

y

$$(\mu_i) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_5 \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

con $M = M_B + M_C$. Así entonces, el producto queda como

$$(B_j^k) = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{6} + \frac{\mu_2}{6} + \frac{2}{3}\mu_3 & \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\sqrt{3}} & \frac{\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{m_C}{\sqrt{6}M}(\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3) \\ \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_1 - \mu_2) & 0 & \frac{m_C}{\sqrt{2}M}(\mu_1 - \mu_2) \\ \frac{m_B}{3M} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{3}\mu_3 \right) & \frac{m_B}{3\sqrt{2}(\mu_1 - \mu_2)} & \frac{m_B(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}{3M} + \frac{m_C(\mu_4 + \mu_5)}{2M} & \frac{m_C}{4M}(\mu_4 - \mu_5) & \frac{m_B m_C}{M^2} \left(\frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3} - \frac{\mu_4 + \mu_5}{2} \right) \\ 0 & 0 & \mu_4 - \mu_5 & \frac{\mu_4 + \mu_5}{2} & -\frac{m_B}{M}(\mu_4 - \mu_5) \\ \frac{\mu_1 + \mu_2}{3\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{9}\mu_3 & \frac{1}{3\sqrt{2}}(\mu_1 - \mu_2) & \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}{3} - \frac{(\mu_4 + \mu_5)}{2} & -\frac{1}{2}(\mu_4 - \mu_5) & \frac{m_C(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}{3M} + \frac{m_B(\mu_4 + \mu_5)}{2M} \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

Una vez calculado explícitamente este tensor de transformación, entonces tenemos que la expresión para el operador de momento magnético angular, por la ecuación (4.92), queda transformado a las coordenadas de Jacobi como

$$\begin{aligned} \sum_i \mu_i \vec{l}_i &= B_j^k (\vec{\alpha}_k \times \vec{p}_{\alpha_j}) \\ &= \sum_{kj} B_{jk} (\vec{\alpha}_k \times \vec{p}_{\alpha_j}) \\ &= B_{11}(\vec{\alpha}_1 \times \vec{p}_{\alpha_1}) + B_{12}(\vec{\alpha}_2 \times \vec{p}_{\alpha_1}) + \dots + B_{55}(\vec{\alpha}_5 \times \vec{p}_{\alpha_5}) \\ &= B_{11}(\vec{\lambda} \times \vec{p}_\lambda) + B_{12}(\vec{\rho} \times \vec{p}_\lambda) + B_{13}(\vec{R} \times \vec{p}_\lambda) + B_{14}(\vec{r}_C \times \vec{p}_\lambda) + B_{15}(\vec{r} \times \vec{p}_\lambda) \\ &+ B_{21}(\vec{\lambda} \times \vec{p}_\rho) + B_{22}(\vec{\rho} \times \vec{p}_\rho) + B_{23}(\vec{R} \times \vec{p}_\rho) + B_{24}(\vec{r}_C \times \vec{p}_\rho) + B_{25}(\vec{r} \times \vec{p}_\rho) \\ &+ B_{31}(\vec{\lambda} \times \vec{p}_R) + B_{32}(\vec{\rho} \times \vec{p}_R) + B_{33}(\vec{R} \times \vec{p}_R) + B_{34}(\vec{r}_C \times \vec{p}_R) + B_{35}(\vec{r} \times \vec{p}_R) \\ &+ B_{41}(\vec{\lambda} \times \vec{p}_{r_C}) + B_{42}(\vec{\rho} \times \vec{p}_{r_C}) + B_{43}(\vec{R} \times \vec{p}_{r_C}) + B_{44}(\vec{r}_C \times \vec{p}_{r_C}) + B_{45}(\vec{r} \times \vec{p}_{r_C}) \\ &+ B_{51}(\vec{\lambda} \times \vec{p}_r) + B_{52}(\vec{\rho} \times \vec{p}_r) + B_{53}(\vec{R} \times \vec{p}_r) + B_{54}(\vec{r}_C \times \vec{p}_r) + B_{55}(\vec{r} \times \vec{p}_r). \end{aligned} \quad (4.98)$$

Aquí todos los términos relacionados con el momento angular debido a las coordenadas asociadas a las coordenadas de Jacobi para los quarks, así como para las coordenadas para la nube mesónica r_C y r y las relativas entre ellas pueden despreciarse. Con lo que únicamente queda el término más significativo el cual corresponde al término de posición relativa entre el barión y el mesón ($\vec{r} \times \vec{p}_r$). Así entonces el momento magnético debido al momento angular relativo del sistema barión-mesón es

$$\begin{aligned} \sum_i \mu_i \vec{l}_i &= B_{55}(\vec{r} \times \vec{p}_r) \\ &= \left(\frac{m_C}{3M}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \frac{m_B}{2M}(\mu_4 + \mu_5) \right) (\vec{r} \times \vec{p}_r) \\ &= \left(\alpha_{BC} \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3} + (1 - \alpha_{BC}) \frac{\mu_4 + \mu_5}{2} \right) \vec{l}_r, \end{aligned} \quad (4.99)$$

donde $\vec{l}_r = (\vec{r} \times \vec{p}_r)$ y por simplicidad $\alpha_{BC} = \frac{m_C}{m_B + m_C}$. El paso siguiente es ahora utilizar este operador para obtener el momento magnético y el momento magnético de transición de los bariones en el UQM debido al momento angular relativo. En la funciones de onda de espín-sabor correspondientes (3.48)-(3.55) podemos observar que los únicos estados que tienen valores para l distintos de cero son los estados intermedios barión-mesón, pues se supuso que el barión correspondiente a los quarks de valencia no presenta excitaciones orbitales ($l_T = 0$), por ello serán los únicos que contribuirán en este

caso. Por ejemplo para el cálculo de los elementos de matriz del momento magnético de transición entre un barión del octete A_{10} y un barión del octete A_8 en la proyección $S_z = \frac{1}{2}$, que tiene como números cuánticos orbitales $l = 1$ utilizamos el operador de momento magnético orbital (4.99) teniendo

$$\begin{aligned}
\mu_l(A_{10}/A_8) &= \left\langle \Psi_{A_{10}}, S_z = \frac{1}{2}, l_T = 0 \left| \hat{\mu}(l) \right| \Psi_{A_8}, S_z = \frac{1}{2}, l_T = 0 \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{A_{10}} \mathcal{N}_{A_8} \left[\sum_{BCm_l} a_{A_{10} \rightarrow BC} a_{A_8 \rightarrow BC} \langle BC, l = 1, m_l | \hat{\mu}_l | BC, l = 1, m_l \rangle \right] \\
&= \mathcal{N}_{A_{10}} \mathcal{N}_{A_8} \left[\sum_{BCm_l} a_{A_{10} \rightarrow BC} a_{A_8 \rightarrow BC} m_l \left\{ \alpha_{BC} \left(\frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3} \right)_B + (1 - \alpha_{BC}) \left(\frac{\mu_4 + \mu_5}{2} \right)_C \right\} \right]
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Hecho este ejemplo en general, tenemos que para las funciones de onda del decuplete en el UQM, es bastante fácil realizar este cálculo, tomando únicamente los elementos de matriz que corresponden a los estados intermedios que tienen proyección de momento angular relativo $m_l \neq 0$ que son los estado cuyos valores propios son distintos de cero y el elemento de matriz no se anula. Como ejemplo tomamos el caso de transición $\Delta^+ \rightarrow p$ usando los estados (3.48) y (3.52) como sigue

$$\begin{aligned}
\mu_l(\Delta^+/p) &= \left\langle \Psi_{\Delta^+}, S_z = \frac{1}{2}, l_T = 0 \left| \hat{\mu}(l) \right| \Psi_p, S_z = \frac{1}{2}, l_T = 0 \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Delta^+} \mathcal{N}_p \left[a_{\Delta^+ \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow N\pi} \left(\frac{2}{9} \langle n\pi^+, m_l = 1 | \hat{\mu}_l | n\pi^+, m_l = 1 \rangle - \frac{2}{9} \langle p\pi^0, m_l = 1 | \hat{\mu}_l | p\pi^0, m_l = 1 \rangle \right) \right. \\
&\quad + a_{\Delta^+ \rightarrow \Delta\pi} a_{N \rightarrow \Delta\pi} \left(\frac{1}{9} \langle \Delta^+\pi^0, m_l = 1 | \hat{\mu}_l | \Delta^+\pi^0, m_l = 1 \rangle + \frac{2}{9} \langle \Delta^0\pi^+, m_l = 1 | \hat{\mu}_l | \Delta^0\pi^+, m_l = 1 \rangle \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{1}{3} \langle \Delta^{++}\pi^-, m_l = 1 | \hat{\mu}_l | \Delta^{++}\pi^-, m_l = 1 \rangle \right) \\
&\quad + a_{\Delta^+ \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Sigma K} \left(\frac{2}{9} \langle \Sigma^0 K^+, m_l = 1 | \hat{\mu}_l | \Sigma^0 K^+, m_l = 1 \rangle - \frac{2}{9} \langle \Sigma^+ K^0, m_l = 1 | \hat{\mu}_l | \Sigma^+ K^0, m_l = 1 \rangle \right) \\
&\quad + a_{\Delta^+ \rightarrow \Sigma K^*} a_{N \rightarrow \Sigma K^*} \left(\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*+} K^0, m_l = -1 | \hat{\mu}_l | \Sigma^{*+} K^0, m_l = -1 \rangle \right. \\
&\quad \quad + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*0} K^+, m_l = 1 | \hat{\mu}_l | \Sigma^{*0} K^+, m_l = 1 \rangle \\
&\quad \quad + \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*+} K^0, m_l = -1 | \hat{\mu}_l | \Sigma^{*+} K^0, m_l = -1 \rangle \\
&\quad \quad \left. + \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{5}} \langle \Sigma^{*0} K^+, m_l = 1 | \hat{\mu}_l | \Sigma^{*0} K^+, m_l = 1 \rangle \right) \left. \right]
\end{aligned} \tag{4.101}$$

De esta manera y al simplificar los valores esperados de los elementos de matriz de esta última ecuación usando las propiedades de simetría de espín (análoga a la simetría de momento angular), tenemos sencillamente que el momento magnético debido a la contribución orbital esta dado por

$$\begin{aligned}
\mu_l(\Delta^+/p) &= \left\langle \Psi_{\Delta^+}, \frac{1}{2} \left| \mu_z(l) \right| \Psi_p, \frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_\Delta \mathcal{N}_N \left[a_{\Delta \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow N\pi} \left(\frac{1}{9}(1 - \alpha_{N\pi}) - \frac{2}{27}\alpha_{N\pi} \right) \right. \\
&\quad + a_{\Delta \rightarrow \Delta\pi} a_{N \rightarrow \Delta\pi} \left(\frac{5}{18}(1 - \alpha_{\Delta\pi}) - \frac{5}{27}\alpha_{\Delta\pi} \right) + a_{\Delta \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Sigma K} \left(\frac{1}{9}(1 - \alpha_{\Sigma K}) - \frac{2}{27}\alpha_{\Sigma K} \right) \\
&\quad \left. + a_{\Delta \rightarrow \Sigma^* K} a_{N \rightarrow \Sigma^* K} \left(\frac{\sqrt{10}}{18}(1 - \alpha_{\Sigma^* K}) - \frac{\sqrt{10}}{27}\alpha_{\Sigma^* K} \right) \right] (\mu_u - \mu_d). \tag{4.102}
\end{aligned}$$

Se calculan los valores para las demás transiciones de interés de manera análoga mostrados a continuación,

$$\begin{aligned}
\mu_l(\Sigma^{*+}/\Sigma^+) &= \left\langle \Psi_{\Sigma^{*+}}, \frac{1}{2} \left| \mu_z(l) \right| \Psi_{\Sigma^+}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Sigma^*} \mathcal{N}_\Sigma \left[a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma\pi} \frac{-1}{3\sqrt{2}} \left(\alpha_{\Sigma\pi} \frac{2\mu_u + \mu_s}{3} + \alpha_{\Sigma\pi} \frac{\mu_u + \mu_d + \mu_s}{3} + (1 - \alpha_{\Sigma\pi}) \frac{\mu_u - \mu_d}{2} \right) \right. \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^*\pi} \frac{-\sqrt{5}}{6} \left(\alpha_{\Sigma^*\pi} \frac{2\mu_u + \mu_s}{3} + \alpha_{\Sigma^*\pi} \frac{\mu_u + \mu_d + \mu_s}{3} + (1 - \alpha_{\Sigma^*\pi}) \frac{\mu_u - \mu_d}{2} \right) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Lambda\pi} a_{\Sigma \rightarrow \Lambda\pi} \frac{-\sqrt{2}}{3} \left(\alpha_{\Lambda\pi} \frac{\mu_u + \mu_d + \mu_s}{3} + (1 - \alpha_{\Lambda\pi}) \frac{\mu_u - \mu_d}{2} \right) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow N\bar{K}} a_{\Sigma \rightarrow N\bar{K}} \frac{-\sqrt{2}}{3} \left(\alpha_{N\bar{K}} \frac{2\mu_u + \mu_d}{3} + (1 - \alpha_{N\bar{K}}) \frac{\mu_s - \mu_d}{2} \right) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\eta} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma\eta} \frac{-\sqrt{2}}{3} \left(\alpha_{\Sigma\eta} \frac{2\mu_u + \mu_s}{3} \right) + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\eta} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^*\eta} \frac{-\sqrt{5}}{3} \left(\alpha_{\Sigma^*\eta} \frac{2\mu_u + \mu_s}{3} \right) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma\eta'} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma\eta'} \frac{-\sqrt{2}}{3} \left(\alpha_{\Sigma\eta'} \frac{2\mu_u + \mu_s}{3} \right) + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*\eta'} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^*\eta'} \frac{-\sqrt{5}}{3} \left(\alpha_{\Sigma^*\eta'} \frac{2\mu_u + \mu_s}{3} \right) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi K} a_{\Sigma \rightarrow \Xi K} \frac{-\sqrt{2}}{3} \left(\alpha_{\Xi K} \frac{2\mu_s + \mu_u}{3} + (1 - \alpha_{\Xi K}) \frac{\mu_u - \mu_s}{2} \right) \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Delta\bar{K}} a_{\Sigma \rightarrow \Delta\bar{K}} \left\{ \frac{-\sqrt{5}}{12} \left(\alpha_{\Delta\bar{K}} \frac{2\mu_u + \mu_d}{3} + (1 - \alpha_{\Delta\bar{K}}) \frac{\mu_s - \mu_d}{2} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{\sqrt{5}}{4} \left(\alpha_{\Delta\bar{K}} \mu_u + (1 - \alpha_{\Delta\bar{K}}) \frac{\mu_s - \mu_u}{2} \right) \right\} \\
&\quad \left. + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi^* K} a_{\Sigma \rightarrow \Xi^* K} \frac{-\sqrt{5}}{3} \left(\alpha_{\Xi^* K} \frac{2\mu_s + \mu_u}{3} + (1 - \alpha_{\Xi^* K}) \frac{\mu_u - \mu_s}{2} \right) \right], \tag{4.103}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_l(\Xi^{*0}/\Xi^0) &= \left\langle \Psi_{\Xi^{*0}}, \frac{1}{2} \left| \mu_z(l) \right| \Psi_{\Xi^0}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Xi^*} \mathcal{N}_{\Xi} \left[a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi \pi} \frac{-\sqrt{2}}{9} \left\{ \alpha_{\Xi \pi} \frac{2\mu_s + \mu_u}{3} + 2 \left(\alpha_{\Xi \pi} \frac{2\mu_s + \mu_d}{3} + (1 - \alpha_{\Xi \pi}) \frac{\mu_u - \mu_d}{2} \right) \right\} \right. \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \pi} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \pi} \frac{-\sqrt{5}}{9} \left\{ \alpha_{\Xi^* \pi} \frac{2\mu_s + \mu_u}{3} + 2 \left(\alpha_{\Xi^* \pi} \frac{2\mu_s + \mu_d}{3} + (1 - \alpha_{\Xi^* \pi}) \frac{\mu_u - \mu_d}{2} \right) \right\} \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \eta} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta} \frac{-\sqrt{2}}{3} \left(\alpha_{\Xi \eta} \frac{2\mu_s + \mu_u}{3} \right) + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta} \frac{-\sqrt{5}}{3} \left(\alpha_{\Xi^* \eta} \frac{2\mu_s + \mu_u}{3} \right) \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi \eta'} a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta'} \frac{-\sqrt{2}}{3} \left(\alpha_{\Xi \eta'} \frac{2\mu_s + \mu_u}{3} \right) + a_{\Xi^* \rightarrow \Xi^* \eta'} a_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta'} \frac{-\sqrt{5}}{3} \left(\alpha_{\Xi^* \eta'} \frac{2\mu_s + \mu_u}{3} \right) \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Lambda \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Lambda \bar{K}} \frac{-\sqrt{2}}{3} \left(\alpha_{\Lambda \bar{K}} \frac{\mu_u + \mu_d + \mu_s}{3} + (1 - \alpha_{\Lambda \bar{K}}) \frac{\mu_s - \mu_d}{2} \right) \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma \bar{K}} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma \bar{K}} \left\{ \frac{-\sqrt{2}}{9} \left(\alpha_{\Sigma \bar{K}} \frac{\mu_u + \mu_d + \mu_s}{3} + (1 - \alpha_{\Sigma \bar{K}}) \frac{\mu_s - \mu_d}{2} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{2\sqrt{2}}{9} \left(\alpha_{\Sigma \bar{K}} \frac{2\mu_u + \mu_s}{3} + (1 - \alpha_{\Sigma \bar{K}}) \frac{\mu_s - \mu_u}{2} \right) \right\} \\
&\quad + a_{\Xi^* \rightarrow \Sigma^* \bar{K}} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \bar{K}} \left\{ \frac{-\sqrt{5}}{9} \left(\alpha_{\Sigma^* \bar{K}} \frac{\mu_u + \mu_d + \mu_s}{3} + (1 - \alpha_{\Sigma^* \bar{K}}) \frac{\mu_s - \mu_d}{2} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{2\sqrt{5}}{9} \left(\alpha_{\Sigma^* \bar{K}} \frac{2\mu_u + \mu_s}{3} + (1 - \alpha_{\Sigma^* \bar{K}}) \frac{\mu_s - \mu_u}{2} \right) \right\} \\
&\quad \left. + a_{\Xi^* \rightarrow \Omega K} a_{\Xi \rightarrow \Omega K} \frac{-\sqrt{5}}{3} \left(\alpha_{\Omega K} \mu_s + (1 - \alpha_{\Omega K}) \frac{\mu_u - \mu_s}{2} \right) \right], \tag{4.104}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_l(\Sigma^{*0}/\Lambda^0) &= \left\langle \Psi_{\Sigma^{*0}}, \frac{1}{2} \left| \mu_z(l) \right| \Psi_{\Lambda^0}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \mathcal{N}_{\Sigma^*} \mathcal{N}_{\Sigma} \left[a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma \pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma \pi} \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\alpha_{\Sigma \pi} \frac{2\mu_d + \mu_s}{3} + (1 - \alpha_{\Sigma \pi}) \frac{\mu_u - \mu_d}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \alpha_{\Sigma \pi} \frac{2\mu_u + \mu_s}{3} - (1 - \alpha_{\Sigma \pi}) \frac{\mu_d - \mu_u}{2} \right) \right. \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \pi} a_{\Lambda \rightarrow \Sigma^* \pi} \frac{5}{3\sqrt{30}} \left(\alpha_{\Sigma^* \pi} \frac{2\mu_d + \mu_s}{3} + (1 - \alpha_{\Sigma^* \pi}) \frac{\mu_u - \mu_d}{2} \right. \\
&\quad \left. \left. - \alpha_{\Sigma^* \pi} \frac{2\mu_u + \mu_s}{3} - (1 - \alpha_{\Sigma^* \pi}) \frac{\mu_d - \mu_u}{2} \right) \right. \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow N \bar{K}} a_{\Lambda \rightarrow N \bar{K}} \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(\alpha_{N \bar{K}} \frac{2\mu_d + \mu_u}{3} + (1 - \alpha_{N \bar{K}}) \frac{\mu_s - \mu_d}{2} \right. \\
&\quad \left. \left. - \alpha_{N \bar{K}} \frac{2\mu_u + \mu_d}{3} - (1 - \alpha_{N \bar{K}}) \frac{\mu_s - \mu_u}{2} \right) \right. \\
&\quad + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi K} a_{\Lambda \rightarrow \Xi K} \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(\alpha_{\Xi K} \frac{2\mu_s + \mu_d}{3} + (1 - \alpha_{\Xi K}) \frac{\mu_u - \mu_s}{2} \right. \\
&\quad \left. \left. - \alpha_{\Xi K} \frac{2\mu_s + \mu_u}{3} - (1 - \alpha_{\Xi K}) \frac{\mu_d - \mu_s}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + a_{\Sigma^* \rightarrow \Xi^* K} a_{\Lambda \rightarrow \Xi^* K} \frac{\sqrt{5}}{6} \left(\alpha_{\Xi^* K} \frac{2\mu_s + \mu_d}{3} + (1 - \alpha_{\Xi^* K}) \frac{\mu_u - \mu_s}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \alpha_{\Xi^* K} \frac{2\mu_s + \mu_u}{3} - (1 - \alpha_{\Xi^* K}) \frac{\mu_d - \mu_s}{2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Los valores numéricos de estos dependen de nuevo, como en el caso de la contribución de espín, de las amplitudes de probabilidad que dependen a su vez de la masa de los bariones y el valor experimental de γ^2 para la asimetría de sabor. La dependencia de las masas de los bariones también está incluida en los valores de los momentos magnéticos de los quarks y en la expresión del valor esperado del operador de momento magnético orbital.

4.4. Decaimientos electromagnéticos de bariones en estado base

La tasa para las transiciones entre un estado inicial $|i\rangle$ de una partícula y un estado final $|f\rangle$ bajo la influencia de un Hamiltoniano perturbativo de interacción \hat{H}_{int} está dado por la regla de oro de Fermi

$$\omega_{i \rightarrow f} = 2\pi \delta(E_i - E_f) \left| \langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle \right|^2. \tag{4.106}$$

La anchura de decaimiento se obtiene a partir de integrar sobre el espacio fase del estado final,

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{d(\text{probabilidad})}{d(\text{tiempo})} = 2\pi \left| \langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle \right|^2 \rho_f, \tag{4.107}$$

donde ρ_f es la densidad de estados finales, que para el caso de un hadrón emitiendo un fotón, y usando la normalización (large-box) que usamos para el operador de campo electromagnético, tenemos que

$$\begin{aligned}\rho_f = \rho(E_f) &= \int \delta(E_i - E_f) \frac{d^3 n_{\text{estados finales}}}{dE_{\text{final}}} = \int \delta(E_i - E_f) \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{k^2 dk}{dk} d\Omega_k \\ &= \int \delta(E_i - E_f) \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 d\Omega_k\end{aligned}\quad (4.108)$$

donde hemos usado que $d^3 n_{\text{estados finales}} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d^3 k$, $L^3 = V$ el volumen de la caja de normalización y la relación de energía para el fotón $E = k$. Por otro lado, para un proceso $A \rightarrow B + C$, en la normalización usada para una sola partícula tenemos que en el sistema de reposo de A

$$\rho_f = \int d^3 p_B d^3 p_C \delta(m_A - E_B - E_C) \delta^3(\vec{p}_B + \vec{p}_C) = 4\pi \frac{E_B E_C}{m_A} k, \quad (4.109)$$

donde $\delta^3(\vec{p}_B + \vec{p}_C)$ se refiere a la expresión que aparece en 4.38. En el caso particular de la transición con un fotón, $m_C = 0$, $E_C = k$ y esta ecuación se simplifica a

$$\rho_f = 4\pi \frac{E_B}{m_A} k^2, \quad (4.110)$$

como se muestra en [15] y dónde se ha usado la normalización dividiendo por el número de estados disponibles finales por unidad de volumen $\frac{V}{(2\pi)^3}$.

Para la emisión de un fotón usamos el estado inicial y final como antes,

$$\Gamma_{A \rightarrow A' \gamma} = 2\pi \left| \langle \Psi_{A' \gamma} | \hat{H}_{int} | \Psi_A \rangle \right|^2 \rho(E_f), \quad (4.111)$$

sustituyendo los valores para el estado base y considerando las 2 polarizaciones posibles del fotón tenemos

$$\Gamma_{A \rightarrow A' \gamma} = 2_{pol} 2\pi \left| \langle \Psi_{A' \gamma} | \hat{H}_{int} | \Psi_A \rangle \right|^2 4\pi \frac{E_{A'}}{m_A} k_1^2. \quad (4.112)$$

Aquí podemos notar que el factor de volumen V se cancelará con el módulo al cuadrado del factor de normalización usada para el operador hamiltoniano electromagnético de perturbación, \hat{H}_{int} . Algo de utilidad es el valor del momento del fotón en términos de las masas de los hadrones inicial, A , y final A' . Por conservación de energía sabemos que el valor del momento del fotón emitido, k_1 , en el sistema del centro de masa cumple la ecuación,

$$\begin{aligned}m_A &= E_{A'} + k_1 \\ &= \sqrt{k_1^2 + m_{A'}^2} + k_1\end{aligned}\quad (4.113)$$

entonces

$$(k_1 - m_A)^2 = k_1^2 + m_{A'}^2 \implies k_1 = \frac{m_A^2 - m_{A'}^2}{2m_A}. \quad (4.114)$$

es el valor del momento del fotón en términos de las masas para los estados inicial y final.

4.4.1. Decaimientos electromagnéticos en el CQM

Para el caso de modelos de quarks constituyentes, debido a que los bariones están descritos en terminos de estados de tres quarks, qqq , el ancho de decaimiento tiene únicamente la contribución del

primer término del elemento de matriz de transición, como se vió en la sección 4.2, y por la ecuación (4.42)

$$\begin{aligned}\Gamma_{A \rightarrow A' \gamma} &= 2_{pol} 2\pi \left| \langle \Psi_{A' \gamma} | \hat{H}_{int}^1 | \Psi_A \rangle \right|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} k_1^2 d\Omega_k. \\ &= 4\pi \frac{2\pi k_1}{V} \frac{2}{2J_A + 1} \left| \left\langle A', \frac{1}{2} | \vec{\mu}_S | A, \frac{1}{2} \right\rangle \right|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \frac{E_{A'}}{m_A} k_1^2.\end{aligned}\quad (4.115)$$

Simplificando esta expresión, con $J_A = \frac{3}{2}$ el espín del barión inicial, tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_{A \rightarrow A' \gamma} &= 8 \frac{E_{A'} k_1^3}{m_A} \frac{1}{2J_A + 1} \left| \left\langle A', \frac{1}{2} | \vec{\mu}_S | A, \frac{1}{2} \right\rangle \right|^2 \\ &= 2 \frac{E_{A'} k_1^3}{m_A} \left| \left\langle A', \frac{1}{2} | \vec{\mu}_S | A, \frac{1}{2} \right\rangle \right|^2\end{aligned}\quad (4.116)$$

que en unidades del magnetón nuclear $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_N}$ (con $\hbar = 1$) y $|\langle A', \frac{1}{2} | \vec{\mu}_S | A, \frac{1}{2} \rangle|^2 = \mu_S^2(A/A') \mu_N$ se expresa como

$$\Gamma_{A \rightarrow A' \gamma} = \frac{\alpha E_{A'} k_1^3}{2m_A m_N^2} \mu_S^2(A/A'), \quad (4.117)$$

con $\alpha = e^2 = \frac{1}{137}$.

Así la ecuación (4.117) del ancho de decaimiento para el CQM, sustituyendo el valor del momento, k_1 , del fotón en términos de las masas de los bariones inicial y final (4.114) queda como

$$\Gamma_{A \rightarrow A' \gamma} = \frac{\alpha}{32} \frac{(m_A^4 - m_{A'}^4)(m_A^2 - m_{A'}^2)^2}{m_A^5 m_N^2} \mu_S^2(A/A') \quad (4.118)$$

Esta relación, que queda en términos del momento magnético de transición en el CQM, es frecuentemente usada para obtener los valores experimentales de este mismo a partir de las mediciones de las secciones eficaces para los decaimientos, en donde la parte del ancho de decaimiento electromagnético se considera cerca de $\sim 1\%$ del total [33]. Esta última expresión, como veremos adelante, no es adecuada para modelos que consideren nubes mesónicas, o grados de libertad exóticos, es decir, esta expresión tiene una dependencia del modelo usado del valor para el momento magnético de transición, mientras que las mediciones para $\Gamma_{A \rightarrow A' \gamma}$ sólo depende de las suposiciones hechas en los modelos de quarks considerados sobre las secciones eficaces.

4.4.2. Decaimientos electromagnéticos en el UQM

Para considerar las contribuciones de los elementos de matriz de transición no nulos del hamiltoniano de interacción en el UQM, la expresión más adecuada es

$$\begin{aligned}\Gamma_{A \rightarrow A' \gamma} &= 2_{pol} 2\pi \left| \langle \Psi_{A' \gamma} | \hat{H}_{int} | \Psi_A \rangle \right|^2 \rho_f \\ &= 4\pi \left| \langle \Psi_{A' \gamma} | \hat{H}_{int}^1 | \Psi_A \rangle + \langle \Psi_{A' \gamma} | \hat{H}_{int}^2 | \Psi_A \rangle + \langle \Psi_{A' \gamma} | \hat{H}_{int}^3 | \Psi_A \rangle + \langle \Psi_{A' \gamma} | \hat{H}_{int}^4 | \Psi_A \rangle \right|^2 \rho_f,\end{aligned}\quad (4.119)$$

donde hemos visto que la contribución de estos términos es no nula para el UQM debido a las contribuciones de los estados intermedios barión-mesón $|BC\rangle$ por la contribución de los pares de quarks $q\bar{q}$. Como hemos visto ya, el primer término, $\langle \Psi_{A' \gamma} | \hat{H}_{int}^1 | \Psi_A \rangle$, en la sumatoria de los elementos de matriz está completamente resuelto usando las funciones de onda de los estados $|\Psi_A\rangle$ en el UQM,

el cuál queda en términos de los momentos magnéticos de transición en el UQM debido sólomente a la contribución del espín, como lo vimos en la sección 4.3.2. Sin embargo el resto de los términos no queda completamente resuelto y se propone el estudio de estos como un problema abierto. Como una primera suposición para este trabajo podemos obtener el valor parcial del ancho de decaimiento electromagnético en el UQM, considerando sólo el primer término $\langle \Psi_{A'\gamma} | \hat{H}_{int}^1 | \Psi_A \rangle$, como

$$\Gamma_{A \rightarrow A'\gamma}^1 = 2_{pol} 2\pi \left| \langle \Psi_{A'\gamma} | \hat{H}_{int}^1 | \Psi_A \rangle \right|^2 \rho_f \quad (4.120)$$

donde, a diferencia del CQM, esta expresión tiene incluida en la función de onda $|\Psi_A\rangle$ la contribución de los estados de valencia $|A\rangle$ y la contribución de los estados $|BC\rangle$ por la creación de pares del mar $q\bar{q}$. Es importante aquí señalar que el resto de los términos tiene puramente la contribución del mar, y no la contribución de valencia, es decir, como se vió en la sección 4.2 para cada término, la expresión completa es

$$\begin{aligned} \Gamma_{A \rightarrow A'\gamma} &= 4\pi \rho_f \mathcal{N}_{A'}^2 \mathcal{N}_A^2 \\ &\times \left| i \sqrt{\frac{2\pi}{k_1 V}} \left[\langle A' | \vec{\mu}_S | A \rangle + \sum_{BB'C} a_{A' \rightarrow B'C} a_{A \rightarrow BC} \langle B'C | \vec{\mu}_S | BC \rangle \right] \times \vec{k}_1 \right. \\ &\quad + \sum_{BC} a_{A \rightarrow BC} \langle A', \gamma | \hat{H}_{int}^2 | BC \rangle \\ &\quad + \sum_{B'C'} a_{A' \rightarrow B'C'} \langle B'C', \gamma | \hat{H}_{int}^3 | A \rangle \\ &\quad \left. + \sum_{BCB'C'} a_{A' \rightarrow B'C'} a_{A \rightarrow BC} \langle B'C', \gamma | \hat{H}_{int}^4 | BC \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (4.121)$$

pero en esta suposición consideramos la contribución total de la parte de valencia y el primer sumando de la contribución del mar.

Hecho esto, la primer contribución de la expresión anterior queda de forma análoga a la expresión para el CQM, usando la ecuación (4.39), como

$$\Gamma_{A \rightarrow A'\gamma}^1 = 2 \frac{E_{A'} k_1^3}{m_A} \left| \langle \Psi_{A'}, 1/2 | \vec{\mu}_S | \Psi_A, 1/2 \rangle \right|^2 = \frac{\alpha E_{A'} k_1^3}{2m_A m_N^2} \mu_S^2 (\Psi_A / \Psi_{A'}), \quad (4.122)$$

que, análogamente a la expresión para el CQM, se reduce en el centro de masas del sistema barión final-fotón ($A' - \gamma$) a

$$\Gamma_{A \rightarrow A'\gamma}^1 = \frac{\alpha}{32} \frac{(m_A^4 - m_{A'}^4)(m_A^2 - m_{A'}^2)^2}{m_A^5 m_N^2} \mu_S^2 (\Psi_A / \Psi_{A'}) \quad (4.123)$$

Los resultados de los momentos magnéticos de transición, en el CQM y en el UQM, se calcularon con el fin de obtener el valor para el ancho de decaimiento electromagnético bajo estas suposiciones y poder compararlos con los valores experimentales. Aunque cabe señalar en este punto que el valor obtenido para el UQM no es el valor completo, por lo que constituye sólomente un primer paso para obtener el resultado total tomando las contribuciones faltantes del mar.

Capítulo 5

Resultados

Los resultados obtenidos para el momento magnético de transición, y en función de este, el ancho de decaimiento parcial electromagnético en el UQM se obtuvieron a partir del desarrollo de las ecuaciones para los elementos de matriz $\langle A' | \hat{\mu} | A \rangle$ en la sección 4.3.2 para el momento magnético y a partir de la ecuación (4.123) para el ancho de decaimiento. Se realizaron los cálculos para el CQM ($\gamma^2 = 0$), para el UQM con sólo la contribución piónica ($\gamma^2 = 20.025$ con $a_{A \rightarrow B\pi} \neq 0$) y el UQM con la contribución de todos los mesones pseudoescalares ($\gamma^2 = 49.92$) y este último tomando la mezcla entre los mesones η y η' como $\theta_P = -18^\circ$ y de $\theta_P = 0^\circ$ para el caso de los mesones η_1 y η_8 .

Los valores usados para los momentos magnéticos de los quarks en el CQM se toman como se mostraron en la tabla 4.1, como una solución de un sistema de ecuaciones lineal, donde los valores de cada ecuación son los momentos magnéticos de los bariones p , n y Λ^0 . Para el caso del UQM los valores de los momentos magnéticos de los quarks no tenemos un sistema de ecuaciones lineal, por lo que se realiza una iteración en la solución al sistema de ecuaciones lineales [41] con los valores de los momentos magnéticos de los mismos bariones y que resulta convergente, dando los valores para los momentos magnéticos de los quarks como se muestran en la tabla 5.1.

μ_u	$2.159\mu_N$
μ_d	$-0.910\mu_N$
μ_s	$-0.665\mu_N$

Cuadro 5.1: Momentos magnéticos efectivos para los quarks u , d y s en el UQM

5.1. Momentos magnéticos de transición

Con las suposiciones especificadas arriba los resultados obtenidos para los momentos magnéticos de transición en el UQM con la contribución de piones (UQM π) como para la contribución de espín, como la contribución del momento orbital relativo en el mar como barión-mesón, junto con el momento magnético total se muestra en la tabla 5.2.

Los resultados para los momentos magnéticos de transición considerando la contribución del resto de los mesones pseudoescalares con las mezclas correspondientes de los estados de mesones isoescales se muestran en la tabla 5.3.

Para hacer una comparación con los momentos magnéticos de transición experimentales se toman los resultados del CQM, UQM π y UQM $\pi K \eta \eta'$ para la contribución de espín sólomente, pues las mediciones experimentales de estos valores son extraídas de las anchuras de decaimiento y usando la

Transición (μ_N)	$\mu_s\pi$	$\mu_l\pi$	$\mu_T\pi$
Δ^+/p	2.68091	0.210584	2.89
Σ^{*+}/Σ^+	-2.1453	-0.0779084	-2.22
Σ^{*0}/Λ^0	2.13222	0.174976	2.31
$\frac{2}{\sqrt{3}}\Sigma^{*0}/\Lambda^0$	2.46207	0.202045	2.66
Ξ^{*0}/Ξ^0	-2.00569	-0.0749409	-2.08

Cuadro 5.2: Resultados de los momentos magnéticos de transición en el UQM para la contribución de espín, μ_s , del momento angular relativo, μ_l y el total, μ_T , considerando la contribución del meson π .

Transición (μ_N)	$\mu_s\pi K\eta_1\eta_8$	$\mu_l\pi K\eta_1\eta_8$	$\mu_T\pi K\eta_1\eta_8$	$\mu_s\pi K\eta\eta'$	$\mu_l\pi K\eta\eta'$	$\mu_T\pi K\eta\eta'$
Δ^+/p	2.75012	0.301182	3.05	2.74089	0.298646	3.04
Σ^{*+}/Σ^+	-2.29202	-0.158617	-2.45	-2.29381	-0.158625	-2.45
Σ^{*0}/Λ^0	2.27782	0.233697	2.51	2.26705	0.234352	2.50
$\frac{2}{\sqrt{3}}\Sigma^{*0}/\Lambda^0$	2.6302	0.26985	2.90	2.61777	0.270607	2.89
Ξ^{*0}/Ξ^0	-2.2728	-0.183334	-2.46	-2.2625	-0.185787	-2.45

Cuadro 5.3: Resultados de los momentos magnéticos de transición en el UQM para la contribución de espín, μ_s , del momento angular relativo, μ_l y el total, μ_T , considerando la contribución de los mesones $\pi K\eta_1\eta_8$ y en la mezcla $\pi K\eta\eta'$.

ecuación (4.123) como suposición, como se muestra en las publicaciones de la colaboración CLAS, [52] para $\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0\gamma$, [53] para $\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma$ y [33] para $\Delta^+ \rightarrow p\gamma$. Estos se muestran en la tabla 5.4.

Como podemos observar en los resultados mostrados también en las gráficas 5.1 y 5.2 los momentos magnéticos de transición en el CQM resultan similares a los mismos para la parte parcial (valencia más el primer término de la contribución mesónica) en el UQM y los resultados experimentales siguen siendo mayores en ambos casos. Discutiremos esto más adelante.

5.2. Decaimientos electromagnéticos

Los resultados obtenidos para el ancho de decaimiento electromagnético en el UQM, como mencionamos antes, son un resultado parcial (UQM*). Estos se obtuvieron mediante la ecuación (4.123) a partir de los resultados de los momentos magnéticos de transición parciales para la parte de espín de la sección anterior.

Como se muestran en la tabla 5.5 y las gráficas de las figuras 5.3 y 5.4, similares a los resultados de los momentos magnéticos de transición, que el CQM queda por debajo de los resultados experimentales, y de la misma manera lo hace el resultado parcial del UQM¹. Para el caso de la transición $\Delta^+ \rightarrow p$ existe una aproximación hacia los datos experimentales, pero no es lo suficientemente buena, además

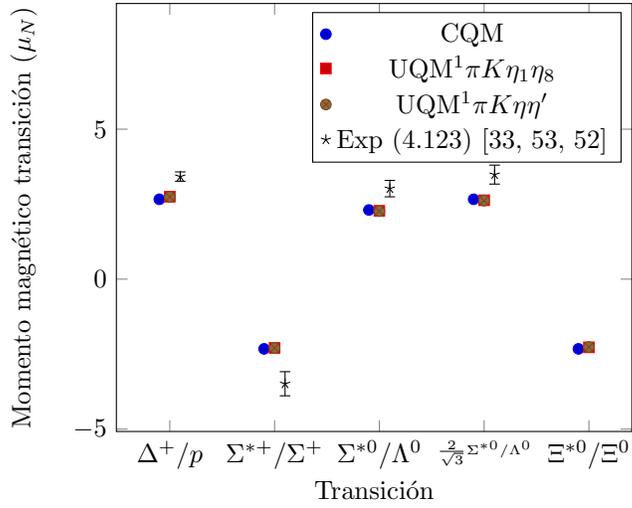


Figura 5.1: Resultados de los momentos magnéticos de transición para la parte de espín de la tabla 5.4

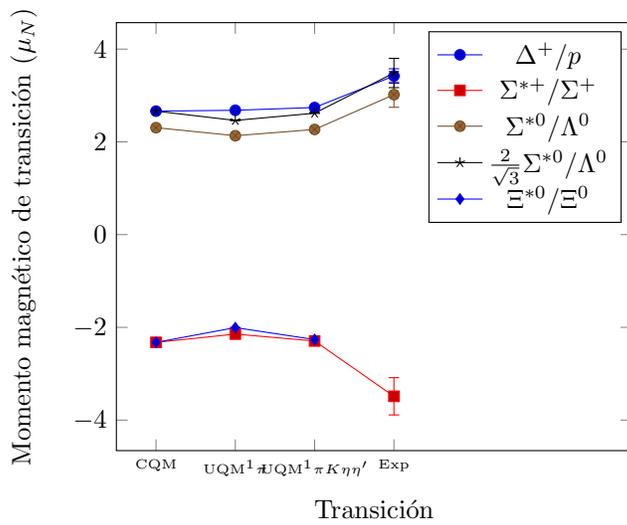


Figura 5.2: Resultados de los momentos magnéticos de transición para la parte de espín de la tabla 5.4

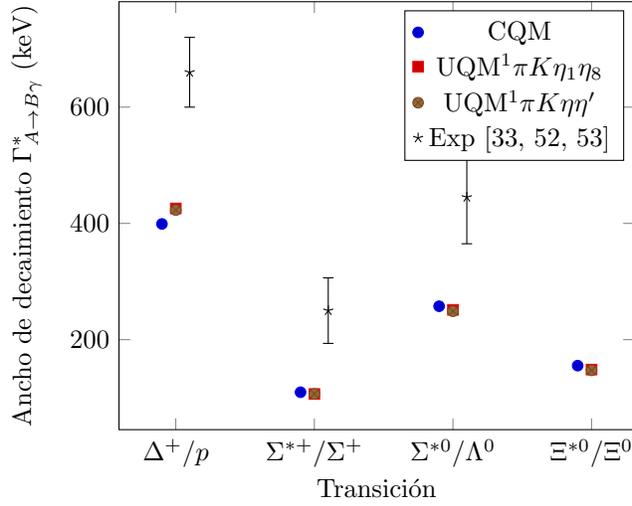


Figura 5.3: Resultados de los decaimientos electromagnéticos para el CQM, para el UQM considerando la contribución de los mesones π , $\pi K \eta_1 \eta_8$ y para los resultados experimentales correspondientes a la tabla 5.5

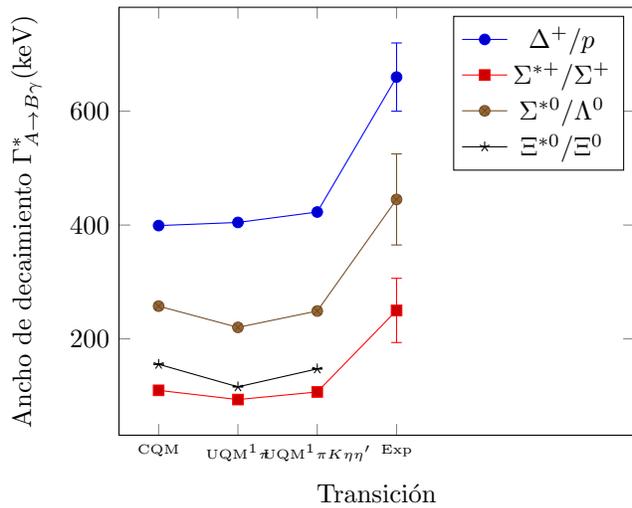


Figura 5.4: Resultados de los decaimientos electromagnéticos para el CQM, para el UQM considerando la contribución de los mesones π , $\pi K \eta \eta'$ y para los resultados experimentales [33], [52], [53] correspondientes a la tabla 5.5

Transición (μ_N)	CQM	UQM π	UQM $\pi K \eta_1 \eta_8$	UQM $\pi K \eta \eta'$	Exp ec. (4.123)
Δ^+ / p	2.66	2.68	2.75	2.74	3.42 ± 0.16 [33]
Σ^{*+} / Σ^+	-2.32	-2.15	-2.29	-2.29	-3.49 ± 0.40 [53]
Σ^{*0} / Λ^0	2.31	2.13	2.28	2.27	3.02 ± 0.27 [52]
$\frac{2}{\sqrt{3}} \Sigma^{*0} / \Lambda^0$	2.66	2.46	2.63	2.62	3.49 ± 0.32 [52]
Ξ^{*0} / Ξ^0	-2.32	-2.01	-2.27	-2.26	—

Cuadro 5.4: Resultados de los momentos magnéticos de transición para la parte de espín y el cálculo del momento magnético de transición (4.123) a partir de los resultados experimentales.

Ancho de decaimineto (keV)	CQM	UQM $^1 \pi$	UQM $^1 \pi K \eta_1 \eta_8$	UQM $^1 \pi K \eta \eta'$	Exp
$\Gamma_{\Delta^+ \rightarrow p \gamma}$	399	405	426	423	660 ± 60 [33]
$\Gamma_{\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \gamma}$	110	93	107	107	250 ± 56 [53]
$\Gamma_{\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0 \gamma}$	258	220	251	249	445 ± 80 [52]
$\Gamma_{\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^0 \gamma}$	155	116	149	147	—

Cuadro 5.5: Resultados de los decaimientos electromagnéticos para el CQM, para el UQM considerando la contribución de los mesones π , $\pi K \eta \eta'$ y para los resultados experimentales

de que en el resto de las transiciones no existe una diferencia notable con el UQM 1 . No existe un cambio alguno que se pueda apreciar si consideramos la contribución pionica ó de todos los mesones pseudoescalares, como se ve en la figura 5.4. Cualitativamente los resultados parciales del UQM son similares para cada transición.

Podemos hacer la comparación con otros modelos sobre la predicción de los anchos de decaimiento electromagnético como se muestra en la tabla 5.6. Parece ser más adecuado hacer la comparación de estos valores que el de los momentos magnéticos de transición, puesto que como vimos antes, la ecuación que relaciona a ambas cantidades (4.123) no es siempre válida para todos los modelos, incluyendo el de este trabajo, UQM, pues aún así constituye sólomente un resultado parcial y no definitivo debido al resto de la contribución del mar que falta por incluir.

	$\Gamma_{\Delta \rightarrow N\gamma}$	$\Gamma_{\Sigma^{*0} \rightarrow \Lambda^0\gamma}$	$\Gamma_{\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma}$
U-spin [52, 53]		423±38	250±23
HB χ PT [54]	670-790	252-540	70-220
Algebraic model [55]	342-344	221.3	140.7
QCD SR [56]	887	409	150
Large N_c [57]	669±42	336±81	149±36
Spectator [58]	648	399	154
NRQM [59, 62]		273	104
RCQM [60]		267	
χ CQM [61]		265	105
MIT Bag [62]		152	117
Soliton [63]		243	91
Skyrme [64]		157-209	47
UQM ¹ $\pi K\eta\eta'$	423	249	107
Exp	660±60 [33]	445±80 [52]	250±56 [53]

Cuadro 5.6: Resultados para los anchos de decaimiento $A \rightarrow A'\gamma$ (keV) de distintos modelos teóricos (incluido este trabajo) y los resultados experimentales.

Conclusiones

Hemos visto hasta ahora que las contribuciones hechas al momento magnético de transición debido a los pares de quarks del mar $q\bar{q}$ en los primeros términos para el UQM no han resultado hacer una diferencia con el CQM si hablamos de la parte de espín. Si consideramos la contribución orbital debido al mar en el momento magnético añadido al momento magnético de transición en el UQM existe por supuesto una diferencia considerable, sin embargo no tenemos una conexión en la teoría y en el experimento que nos relacione esta cantidad en el momento magnético de transición de los bariones en el estado base, es decir el ancho de decaimiento electromagnético, que relaciona la parte experimental con el momento magnético de transición, sólo es una función de espín incluyendo la parte de los quarks del mar con las aproximaciones hechas en este trabajo. Por ello, en la deducción de la ecuación para el ancho de decaimiento (4.123) en el UQM es importante señalar que no todos los modelos pueden usarla como una ecuación completa, incluido este modelo, pues aún no considera todos los términos asociados a los grados de libertad además de los considerados en los CQM con quarks efectivos.

Para los decaimientos electromagnéticos es de interés considerar la contribución completa debida al mar en el UQM (4.121). Como un primer paso, como se vió antes, se obtuvo un resultado parcial para los valores del ancho de decaimiento electromagnético $\Gamma_{A \rightarrow A\gamma}^1$ y se observó una gran similitud con los obtenidos por el CQM, tanto cualitativamente como cuantitativamente, justo como sucede con los momentos magnéticos de los bariones del octete y decuplete, aunque en estos últimos sí se considera la contribución orbital en el UQM ya que sí existe en este caso una contraparte experimental que avale la expresión completa con la parte orbital para ambos modelos. Para el caso de los decaimientos electromagnéticos en ambos modelos sólo existe una dependencia en la parte de espín, con los grados de libertad adecuados para cada modelo, pero no existe contraparte orbital alguna. Resulta interesante la similitud también de los modelos CQM y la parte parcial UQM para la predicción de los anchos de decaimiento, puesto que ahora en esta no hemos considerado la parte orbital en el UQM. La comparación aún más interesante sería considerar el resultado total del UQM con el CQM y ver la evolución de este hacia los resultados experimentales, puesto que se ha demostrado que los términos faltantes del mar son no-nulos en el UQM, pero al momento no podemos afirmar si habrá una contribución neta al ancho de decaimiento, puesto que estos contienen coeficientes de acoplamiento de espín-sabor-color con signos relativos. En el caso que sí contribuyan netamente al decaimiento lo primero que podemos hacer es ver el orden de magnitud en el que contribuyen estos términos. La primer propuesta sería ver los valores para las amplitudes de probabilidad de los acoplamientos de los estados barión-mesón con barión $\langle A, \gamma | \hat{H}_{int}^{2,3} | BC \rangle$ y considerando que los bariones se presentan en el centro de masa, pues en el cálculo exacto existe un fotón que lleva una parte del momento, que hace una diferencia con el cálculo ya hecho. Esta observación nos podría dar una idea si los términos faltantes del mar que no consideramos son suficientes para coincidir con los resultados experimentales

Para los resultados obtenido en el UQM se pudo también observar que cualitativamente los valores presentan el mismo comportamiento que los resultados experimentales y con el CQM, lo que nos dice evidentemente que la simetría de isoespín utilizada es una buena simetría. Sucede lo mismo con las predicciones de U-spin [53] que propone la simetría de sabor para los quarks u y s . Estos modelos de forma interesante presentan esta propiedad cualitativa debido a las simetrías, por lo que es adecuado

hacer uso de ellas. Esto nos dice que el problema a resolver es un problema de grados de libertad y no tanto de la simetría de sabor en los modelos, como podemos ver en la tabla 5.6.

Apéndice A

A.1. Funciones de onda de espín-sabor del octete de bariones en el modelo de quarks

$$\left| p, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}} | uud(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + dud(2 \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + duu(2 \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) \rangle \quad (\text{A.1})$$

$$\left| n, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-1}{3\sqrt{2}} | ddu(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + udu(2 \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + udd(2 \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) \rangle \quad (\text{A.2})$$

$$\left| \Sigma^+, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-1}{3\sqrt{2}} | uus(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + usu(2 \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + suu(2 \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) \rangle \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-1}{6} & | (dus + uds)(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + (dsu + usd)(2 \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\ & + (sdu + sud)(2 \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) \rangle \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

$$\left| \Sigma^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-1}{3\sqrt{2}} | dds(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + dsd(2 \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + sdd(2 \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) \rangle \quad (\text{A.5})$$

$$\left| \Lambda^0, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} | (sud - sdu)(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) + (usd - dsu)(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + (uds - dus)(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \rangle \quad (\text{A.6})$$

$$\left| \Xi^0, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}} | ssu(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + sus(2 \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + uss(2 \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) \rangle \quad (\text{A.7})$$

$$\left| \Xi^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}} | ssd(2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + sds(2 \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + dss(2 \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) \rangle \quad (\text{A.8})$$

Apéndice B

En la física de partículas elementales la teoría de grupos ha resultado ser una herramienta poderosa y de gran simplicidad para obtener resultados directos haciendo uso únicamente de las propiedades y de los patrones que poseen estas partículas que pertenecen a cierto grupo de simetría sin necesidad de hacer un extenso cálculo sobre la dinámica de éstas.

B.1. El grupo de simetría SU(2)

Comenzaremos con el grupo de simetría que es utilizado en la descripción de las simetrías en mecánica cuántica como lo son el espín o el isoespín en el caso de cantidades que puedan tener dos grados de libertad. Para ello discutiremos la parametrización del grupo SU(2).

Un elemento de SU(2) es una matriz unitaria de 2×2

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

donde los elementos a , b , c y d son números complejos, i.e. existen ocho parámetros reales. Además se cumple la condición

$$\det u = 1. \quad (\text{B.2})$$

La inversa de (B.1) es

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Y por la condición de unitariedad $u^\dagger = u^{-1}$ se requiere que $d = a^*$ y que $c = -b^*$, entonces tenemos que u puede expresarse de la forma

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

por lo que ahora contiene solamente cuatro parámetros. Si se utiliza además la condición (B.2) se tiene la restricción

$$aa^* + bb^* = 1 \quad (\text{B.5})$$

lo que sólo nos deja con tres parámetros libres.

Para una transformación infinitesimal es muy útil introducir las siguientes parametrizaciones

$$a = 1 - \frac{i}{2}a_{11}, \quad b = -\frac{1}{2}b_{12} - \frac{i}{2}a_{12} \quad (\text{B.6})$$

la cual es consistente con $\det u = 1$. Así entonces podemos escribir en forma matricial que

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{b_{12}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{1}_2 - \frac{i}{2}a_{11}\sigma_z - \frac{i}{2}a_{12}\sigma_x - \frac{i}{2}b_{12}\sigma_y \quad (\text{B.7})$$

donde $\mathbf{1}_2$ es la matriz unitaria de 2×2 y σ_x , σ_y y σ_z son las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Usando el hecho de que este operador podemos expresarlo como un operador infinitesimal (colocar un pie de página aquí) podemos entonces identificar los tres generadores de SU(2) con las tres componentes de espín

$$J_i = S_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \quad (i = x, y, z) \quad (\text{B.9})$$

Así también la transformación finita queda como

$$u = e^{i\omega \cdot J} \quad (\text{B.10})$$

desde la cual se puede obtener la ecuación (B.7) una vez más tomando a $\omega = (-a_{12}, -b_{12}, -a_{11})$. Esto tiene la misma forma que el operador de rotación con $\mathbf{J} = \mathbf{S}$ en lugar de $\mathbf{J} = \mathbf{L}$. Nótese que a partir de las matrices de Pauli puede seguirse el álgebra de SU(2).

B.1.1. Multipletes

Ahora lo que nos interesa es dar una representación para la transformación u que podamos expresar en términos de una base más conocida como los operadores de escalón. Por razones que serán convenientes en los siguientes capítulos, en la siguiente ecuación de transformación

$$\phi' = u\phi \quad (\text{B.11})$$

definiremos a

$$\phi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

y respectivamente

$$\phi' = \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

En cuanto a la transformación u como en la ecuación (B.10) usaremos a $\omega = \frac{\theta}{2}\hat{n}$, así entonces podemos hacer la expansión en Taylor en torno a la transformación unitaria

$$\begin{aligned} u &= e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n} \cdot \hat{J}} = \mathbf{1}_2 + i\frac{\theta}{2}\hat{n} \cdot \hat{J} + \frac{1}{2!}\left(i\frac{\theta}{2}\right)^2(\hat{n} \cdot \hat{J})^2 + \dots \\ &= \mathbf{1}_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \dots + i\hat{n} \cdot \hat{J}\left[\theta - \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \dots\right] \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

usando $\hat{J}^2 = \mathbf{1}_2$ y $\hat{n} = (0, 2, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{1}_2 \cos \frac{\theta}{2} + i2J_2 \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \mathbf{1}_2 \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

lo cuál nos da un caso general en como se transforman los vectores ϕ . A partir de aquí podemos definir las transformaciones triviales llamadas operadores de escalón, sobre las cuales se basa la idea de los multipletes de escalón como

$$I_+ = J_x + iJ_y \quad I_- = J_x - iJ_y \quad (\text{B.16})$$

de donde

$$\begin{aligned} I_+ d &= u & I_- u &= d \\ I_+ u &= 0 & I_- d &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

o bien

$$I_+ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad I_- \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

Esta es la forma en que se transforma la representación en ϕ como la definimos arriba, sin embargo hay otra representación la cuál es la conjugada y será útil en la representación de la transformación de SU(2) para antipartículas en los capítulos siguientes.

Representación conjugada

En la representación conjugada utilizaremos el operador de conjugación de carga, C , el cuál actúa en el doblete que representamos arriba como

$$C \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

cambiando los valores de proyección J_3 para u y d como

$$\bar{u} \rightarrow J_3 = -\frac{1}{2} \quad \bar{d} \rightarrow J_3 = \frac{1}{2} \quad (\text{B.20})$$

lo cual al momento de obtener una transformación de u^* correspondiente, como se hizo arriba, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \quad (\text{B.21})$$

cuya matriz de transformación corresponde a la conjugación compleja de (B.15). Pero si lo que queremos es que exista una sólo transformación, u , para la representación del doblete de SU(2) y su conjugada, debemos entonces redefinir un doblete en la representación conjugada, así

$$\phi^* = \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

por lo que la transformación para este doblete queda exactamente igual, i.e.

$$\begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Y debido a que ϕ y ϕ^* son dobletes que se transforman de la misma manera, los operadores de escalón se mantienen de igual forma para ambos casos

$$I_+ \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{d} \end{pmatrix} \quad I_+ \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{u} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

Por lo que en este punto tenemos ya una descripción para los operadores de escalón para ambos dobletes de SU(2).

B.2. El grupo de simetría SU(3)

Comenzaremos con la representación fundamental del grupo SU(3) la cuál es una matriz unitaria de 3×3 . En la vecindad de la unidad, la transformación se puede escribir como

$$u = \mathbf{1}_3 + i\rho \quad (\text{B.25})$$

donde $\mathbf{1}_3$ es la matriz unitaria de 3×3 y ρ es una matriz de 3×3 con entradas complejas que satisface la propiedad

$$\rho = \rho^\dagger \quad (\text{B.26})$$

que es requerida por la condición de unitariedad. Entonces, si $\rho_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}$, debemos tener

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad b_{ij} = -b_{ji} \quad (\text{B.27})$$

lo cual significa que $b_{ii} = 0$. En este caso es muy conveniente trabajar con una base esférica donde las coordenadas de un punto se definen como x_1 , x_0 y x_{-1} cuya regla de transformación es

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) = r \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} Y_{11} \quad (\text{B.28})$$

$$x_0 = z = r \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} Y_{10} \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) = r \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} Y_{1,-1} \quad (\text{B.30})$$

que son mostradas en terminos de los armónicos esféricos¹, Y_{lm} . Entonces la transformación unitaria introducida arriba cambia x_i en x'_i como

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_0 \\ x'_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + ia_{11} & ia_{10} - b_{10} & ia_{1,-1} - b_{1,-1} \\ ia_{10} + b_{10} & 1 + ia_{00} & ia_{0,-1} - b_{0,-1} \\ ia_{1,-1} + b_{1,-1} & ia_{0,-1} + b_{0,-1} & 1 + ia_{-1,-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

Aquí, tratamos con la transformación especial, i.e. $\det u = 1$. Los parámetros de una transformación especial infinitesimal entonces tiene que cumplir con la restricción (terminos de segundo orden en ρ_{ij} son anulados)

$$a_{11} + a_{00} + a_{-1,-1} = 0 \quad (\text{B.32})$$

Así, eliminando $a_{-1,-1}$, la matriz de transformación en (B.31) depende de ocho parámetros independientes a_{11} , a_{00} , a_{10} , b_{10} , $a_{1,-1}$, $b_{1,-1}$, $a_{0,-1}$ y $b_{0,-1}$ y el orden de SU(3) es ocho. Bajo una transformación infinitesimal, una función escalar F cambia a

¹Las funciones Y_{lm} están definidas por

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

donde P_l^m son los polinomios asociados de Legendre.

$$\begin{aligned}
F(x'_1, x'_0, x'_1) &= SF(x_1, x_0, x_1) = F(x_1, x_0, x_1) + \sum_i (x'_i - x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i} \\
&= \left[1 + ia_{11} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_{-1}} \right) + ia_{00} \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_{-1}} \right) \right. \\
&\quad + ia_{10} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + ia_{1-1} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} + x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + ia_{0-1} \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} + x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_0} \right) \\
&\quad + b_{10} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + b_{1-1} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\
&\quad \left. + b_{0-1} \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_0} \right) F \right]. \tag{B.33}
\end{aligned}$$

Hecho esto, vamos a identificar los siguientes operadores con el fin de simplificar el álgebra como

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{11} &= \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_{-1}} \right), & \hat{X}_{00} &= \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_{-1}} \right) \\
\hat{X}_{10} &= \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right), & \hat{Y}_{10} &= -i \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\
\hat{X}_{1-1} &= \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} + x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right), & \hat{Y}_{1-1} &= -i \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\
\hat{X}_{0-1} &= \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} + x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_0} \right), & \hat{Y}_{0-1} &= -i \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-1}} - x_{-1} \frac{\partial}{\partial x_0} \right).
\end{aligned} \tag{B.34}$$

Para cada una de esos operadores podemos asociar una matriz. Por ejemplo,

$$\hat{X}_{11} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix}, \text{ etc.} \tag{B.35}$$

Las matrices resultantes están relacionadas con las ocho matrices de Gell-Mann $\lambda_i (i = 1, \dots, 8)$ como siguen

$$\begin{aligned}
X_{11} + X_{00} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \sqrt{3}\lambda_8 & X_{11} - X_{00} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \\
X_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 & Y_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \\
X_{1-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_4 & Y_{1-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_5 \\
X_{0-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_6 & Y_{0-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \lambda_7
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Debemos notar que las matrices de Gell-Mann tienen traza nula y cumplen la condición de normalización siguiente

$$tr(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}. \tag{B.37}$$

Por cálculo directo, podemos encontrar que el álgebra de Lie de $\text{su}(3)$ es

$$[\lambda_k, \lambda_l] = 2if_{klm}\lambda_m \quad (\text{B.38})$$

donde los f_{klm} son antisimétricos bajo el intercambio de cualesquiera dos índices. Los únicos diferentes de cero son las permutaciones de

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, & f_{147} &= f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2} \\ f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Similarmente a $\text{SU}(2)$, pueden introducirse los generadores del álgebra como

$$\hat{F}_i = \frac{1}{2}\lambda_i \quad (\text{B.40})$$

que cumplen con la siguiente ley de conmutación como consecuencia de la ecuación (B.38)

$$[\hat{F}_k, \hat{F}_l] = if_{klm}\hat{F}_m \quad (\text{B.41})$$

la cuál representa otra forma del álgebra de Lie $\text{su}(3)$

Hecho esto, se pueden usar los operadores \hat{F}_i para reescribir las transformación definida en la ecuación (B.33) la cual queda como

$$S = 1 + i\delta\theta_i\hat{F}_i \quad (\text{B.42})$$

y la forma finita, la cuál corresponde al límite en que $\delta\theta_i \rightarrow 0$, es

$$S = e^{i\theta_i\hat{F}_i} \quad (\text{B.43})$$

la cual es unitaria debido a que θ_i son reales y \hat{F}_i son hermitianos.

Apéndice C

C.1. Coeficientes de Clebsch-Gordan

Tal como se utilizan los coeficientes de Clebsch-Gordan para obtener los coeficientes de acoplamiento en el espacio de sabor y de espín entre dos hadrones en el capítulo 3, se hace una breve descripción para obtener sus valores.

Los coeficientes de Clebsch-Gordan pertenecen a los coeficientes asociados a la expansión en una base de momentos angulares parciales en la que están definidos los estados correspondientes en una combinación lineal como sigue

$$|(j_1, j_2), JM\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM\rangle \quad (\text{C.1})$$

con $M = m_1 + m_2$ y donde $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM\rangle$ son los coeficientes de Clebsch-Gordan y funcionan en ambos sentidos de la ecuación.

La expresión explícita para calcularlos está dada por

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle &= \delta_{m, m_1+m_2} \sqrt{\frac{(2j+1)!(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!(j_1+j_2-j)!}{(j_1+j_2+j+1)!}} \times \\ &\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j_1-m_1)!(j_1+m_1)!(j_2-m_2)!(j_2+m_2)!} \times \\ &\sum_k \frac{(-1)^k}{k!(j_1+j_2-j-k)!(j_1-m_1-k)!(j_2+m_2-k)!(j-j_2+m_1+k)!(j-j_1-m_2+k)!} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

En la siguiente figura se muestran los valores explícitos para estos valores para los distintos valores de momento angular parcial, j_1 , j_2 y total, J .

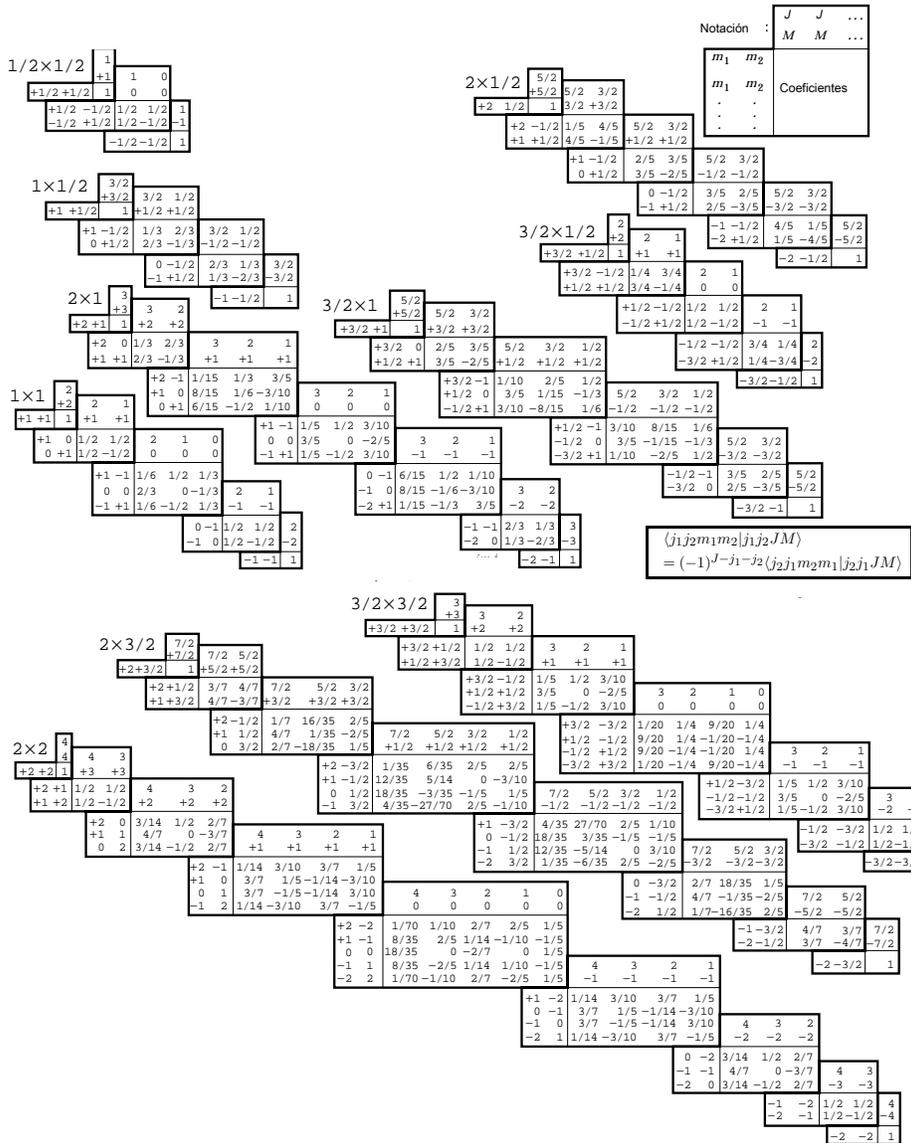


Figura C.1: Coeficientes de Clebsch-Gordan donde se usa la convención de suma de Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959). El signo para la raíz cuadrada se sobrentiende, por ejemplo, para $-8/15$ el coeficiente es $-\sqrt{8/15}$.

Apéndice D

D.1. El valor principal de Cauchy

Como se vió en la sección 3.3.2 el cálculo de los coeficientes involucra el cálculo de la integral de la forma

$$\int_0^\infty dk \frac{k^4 e^{-Ck^2}}{[m_A - \sqrt{m_B^2 - k^2} - \sqrt{m_C^2 - k^2}]^2} \quad (\text{D.1})$$

y que podía ser tratada de acuerdo al cambio de variable $k \rightarrow E_{BC} = \sqrt{m_B^2 - k^2} + \sqrt{m_C^2 - k^2}$ y $E_A = m_A$ quedando en forma general como

$$\int_0^\infty dk \frac{k^4 e^{-Ck^2}}{[m_A - \sqrt{m_B^2 - k^2} - \sqrt{m_C^2 - k^2}]^2} = \int_{M_B+M_C}^\infty \frac{f'(E_{BC})}{E_{BC} - E_A} dE_{BC} \quad (\text{D.2})$$

donde $f'(E_{BC}) = f(E_{BC}) \exp(-2F^2 A/E_{BC}^2)$ como en la ecuación (3.97) es una función sin polos en E_{BC} . Esta integral impropia puede resolverse mediante el método del valor principal Cauchy, el cual es un método que permite asignar valores finitos a ciertas integrales impropias que en otro caso resultarían indefinidas, haciendo la siguiente aproximación

$$\begin{aligned} \int_{M_B+M_C}^\infty \frac{f'(E_{BC})}{E_{BC} - E_A} dE_{BC} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{M_B+M_C}^{E_A-\varepsilon} \frac{f'(E_{BC}) dE_{BC}}{E_{BC} - E_A} + \int_{E_A+\varepsilon}^D \frac{f'(E_{BC}) dE_{BC}}{E_{BC} - E_A} \right) \\ &+ \int_D^\infty \frac{f'(E_{BC}) dE_{BC}}{E_{BC} - E_A}, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

donde D toma valores muy grandes, por lo que el último término puede descartarse. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{M_B+M_C}^\infty \frac{f'(E_{BC})}{E_{BC} - E_A} dE_{BC} &= g(E_A) \ln(E_{BC} - E_A) \Big|_{M_B+M_C}^{E_A-\varepsilon} + g(E_A) \ln(E_{BC} - E_A) \Big|_{E_A+\varepsilon}^D \\ &\sim \ln(-\varepsilon) - \ln(M_B + M_C - E_A) + \ln(D - E_A) - \ln(\varepsilon) \\ &= \ln \frac{-\varepsilon}{M_B + M_C - E_A} + \ln \frac{D - E_A}{\varepsilon} = \ln \frac{E_A - D}{M_B + M_C - E_A}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Esta última expresión puede resolverse fácilmente con métodos numéricos, cuyos programas eligen un valor adecuado para D y usan este caso para la resolución de esta integral.

D.2. Valores de las masas de hadrones en la simetría de isoespín

En el cálculo de los coeficientes de amplitud de probabilidad en **3.2** así como en el cálculo de los momentos magnéticos debido al momento angular en **4.2.2** se utilizan valores para las masas de los bariones y mesones en la simetría de isoespín, las cuales, como se ha mencionado, corresponden al promedio de las masas de los multipletes de isoespín [33]. Los valores se muestran en la siguiente tabla.

Hadrón	m (GeV)
Δ	1.232
Σ^*	1.384
Ξ^*	1.533
Ω	1.672
N	0.939
Σ	1.193
Ξ	1.318
Λ	1.116
π	0.138
K	0.495
η	0.548
η'	0.958

Cuadro D.1: Valores para las masas, m , de los bariones y mesones pseudoescalares en la simetría de isoespín

Bibliografía

- [1] I. Estermann, R. Frisch and O. Stern, *Nature* 132, 169 (1933).
- [2] K. Nakamura, *Nucl. Part. Phys.* 37, 075021 (2010).
- [3] R. Hofstadter, *Annu. Rev. Nucl. Sci.* 7, 231 (1957).
- [4] J. I. Friedman and H.W. Kendall, *Annu. Rev. Nucl. Sci.* 22, 203 (1902).
- [5] P. Amaudruz *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* 66, 2712 (1991).
- [6] R. S. Towell *et. al.*, *Phys. Rev. D.* 64, 052002 (2001).
- [7] V. D. Burkert and T.S. H. Lee, *Int. J. Mod. Phys. E* 13, 1035 (2004).
- [8] I. G. Aznauryan *et. al.*, *Int. J. Mod. Phys. E* 22, 1330015 (2013).
- [9] M. Gell-Mann and Y. Neéman, *The Eightfold Way* (New York: Benjamin, 1964).
- [10] W. Gerlach and O. Stern, *Annalen der Physik*, IV 74 (1924).
- [11] G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit, *Naturwissenschaften* 13, 953 (1925)
- [12] M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* 8 (3), 214–215 (1964); G. Zweig, *An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking*. CERN Report No.8181/Th 8419 (1964); G. Zweig, *An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking: II*. CERN Report No.8419/Th 8412 (1964).
- [13] G. t’Hooft, *Nucl. Phys. B* 72, 461 (1974).
- [14] Fl. Stancu, *Group Theory in Subnuclear Physics*, Oxford University Press, (1996).
- [15] A.L. Yaouanc, L. Oliver, O. Péne and J.C. Raynal, *Hadron transitions in the Quark Model*, (OPA, 1988).
- [16] L. Micu, *Nucl. Phys. B* 10, 521 (1969).
- [17] E. S. Ackleh, T. Barnes, and E. S. Swanson, *Phys. Rev. D* 54, 6811 (1996).
- [18] P. Geiger and N. Isgur, *Phys. Rev. D* 55, 299 (1997).
- [19] N. Isgur, *Nucl. Phys. A* 623, 37c (1997).
- [20] N. Isgur and G. Karl, *Phys. Rev. D* 18, 4187 (1978); *ibid.* 19, 2653 (1979); *ibid.* 20, 1191 (1979).
- [21] S. Capstick and N. Isgur, *Phys. Rev. D* 34, 2809 (1986).
- [22] R. Bijker, F. Iachello and A. Leviatan, *Ann. Phys. (N.Y.)* 236, 69 (1994).
- [23] R. Bijker, F. Iachello and A. Leviatan, *Ann. Phys. (N.Y.)* 284, 89 (2000).

- [24] M. Ferraris, M.M. Giannini, M. Pizzo, E. Santopinto and L. Tiator, Phys. Lett. B 364, 231 (1995).
- [25] L. Ya. Glozman and D.O. Riska, Phys. Rep. 268, 263 (1996).
- [26] U. Löring, K. Kretzschmar, B.Ch. Metsch and H.R. Petry, Eur. Phys. J. A 10, 309 (2001).
- [27] A.W. Thomas and W. Weise, *The structure of the nucleon* (Wiley-VHC, Berlin, 2001).
- [28] T. Schaefer and E. Shuryak, Phys. Rev. D. 53, 6522 (1996).
- [29] J.D. Sullivan, Phys. Rev. D 5, 1732 (1992).
- [30] A. W Thomas, Phys. Lett. B 126, 197 (1983).
- [31] E.M. Henley and G. A. Miller, Phys. Lett. B 251, 453-454 (1990).
- [32] W. Chang and J. Peng, Phys. Rev. Lett. 106, 252002 (2011).
- [33] K. A. Olive et al. [Particle Data Group Collaboration], Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014).
- [34] S. Kumano , Phys. Rep. 303, 183 (1998).
- [35] S. D. Bass, *The spin structure of the nucleon* (World Scientific, Singapore, 2008).
- [36] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. Lane, and T.-M. Yan, Phys. Rev. Lett. 36, 500 (1976).
- [37] W. Roberts and B. Silvestre-Brac, Few Body Systems 11, 171 (1992).
- [38] B. Millán-Ramos, *Funciones de estructura y contenido de sabor del protón*. B.Sc. Tesis, UNAM, (2014).
- [39] R. Bijker and E. Santopinto, Phys. Rev. C 80, 065210(2009).
- [40] R. Bijker, J. Ferreti and E. Santopinto, *Strong Decays of missing resonances*, (2016) ar-Xiv:1506.0746.
- [41] S. Díaz, *Los momentos magnéticos de bariones: quarks de valencia y del mar*. B.Sc. Tesis, UNAM (2013).
- [42] G. Guerrero-Navarro, *Contribuciones de los quarks del mar en el momento magnético de los bariones del decuplete*. B.Sc. Tesis, UNAM (2014).
- [43] H. Holtmann, A. Szczurek and J. Speth, Nucl. Phys. A 596, 631-669 (1996).
- [44] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch and R. Turlay, Phys. Rev. Lett. 13, 138 (1964); Phys. Rev. 140 B, 74 (1965).
- [45] S. L. Glashow, Nucl. Phys. 22 (1961) 579. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264. A. Salam in Elementary Particle Physics (Nobel Symp. 8), ed. N. Svartholm, Almquist and Wilsell, Stockholm, 1968.
- [46] A. Bramon et al., Phys. Lett. B 403, 339 (1997).
- [47] A. Aloisio et al., Phys. Lett. B 541, 45 (2002).
- [48] C. Amsler et al., Phys. Lett. B 294, 451 (1992).
- [49] C. Amsler, Rev. Mod. Phys. 70, 1293 (1998).
- [50] I. Aznauryan, V.D., T.S.H. Lee and V. Mokeev, J. Phys.: Conf. Ser. 299 012008 (2011).

- [51] J. J. De Swart, *Rev. Mod. Phys.* 35, 916 (1963).
- [52] D. Keller *et al.* (CLAS Collaboration), *Phys. Rev. D* 83, 072004 (2011).
- [53] D. Keller *et al.* (CLAS Collaboration), *Phys. Rev. D* 85, 052004 (2012).
- [54] M.N. Butler, M.J. Savage, and R.P. Springer, *Nucl. Phys.* B399, 69 (1993).
- [55] R. Bijker, F. Iachello, and A. Leviatan, *Ann. Phys. (N.Y.)* 284, 89 (2000).
- [56] L. Wang and F.X. Lee, *Phys. Rev. D* 80, 034003 (2009).
- [57] R.F. Lebed and R. H. TerBeek, *Phys. Rev. D* 83, 016009 (2011).
- [58] G. Ramalho and K. Tsushima, *Phys. Rev. D* 88, 053002 (2013).
- [59] J.W. Darewych, M. Horbatsch, and R. Koniuk, *Phys. Rev. D* 28, 1125 (1983); R. Koniuk and N. Isgur, *Phys. Rev. D* 21, 1868 (1980); 23, 818 (1981).
- [60] M. Warns, W. Pfeil, and H. Rollnik, *Phys. Lett. B* 258, 431 (1991).
- [61] G. Wagner, A. J. Buchmann, and A. Faessler, *Phys. Rev. C* 58, 1745 (1998).
- [62] E. Kaxiras, E. J. Moniz, and M. Soyeur, *Phys. Rev. D* 32, 695 (1985).
- [63] C. L. Schat, C. Gobbi, and N. N. Scoccola, *Phys. Lett. B* 356, 1 (1995).
- [64] A. Abada, H. Weigel, and H. Reinhardt, *Phys. Lett. B* 366, 26 (1996); T. Haberichter, H. Reinhardt, N. N. Scoccola, and H. Weigel, *Nucl. Phys.* A615, 291 (1997).