



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS**

Pandeo vertical de ductos submarinos enterrados  
considerando efectos del cortante

**TESIS**  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
**Manuel Hernández Noriega**

TUTORES PRINCIPALES  
Dr. Rubén Cuamatzi Meléndez, Instituto Mexicano del Petróleo  
Dr. Roberto Gómez Martínez, Instituto de Ingeniería UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO. NOVIEMBRE DE 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. ESCOBAR SÁNCHEZ JOSÉ ALBERTO  
Secretario: DR. PÉREZ GAVILÁN ESCALANTE JUAN JOSÉ  
Vocal: DR. CUAMATZI MELÉNDEZ RUBÉN  
1<sup>er.</sup> Suplente: DR. GÓMEZ MARTÍNEZ ROBERTO  
2<sup>d o.</sup> Suplente: DR. POZOS ESTRADA ADRIÁN

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Ciudad Universitaria e Instituto Mexicano del Petróleo, Ciudad de México.

**TUTOR DE TESIS:**

NOMBRE

**Dr. Rubén Cuamatzi Meléndez**

---

**FIRMA**

***Pandeo vertical de ductos submarinos  
enterrados considerando efectos del  
cortante***

**TESIS**

**Manuel Hernández Noriega**

**Tutores Principales**

**Dr. Rubén Cuamatzi Meléndez, IMP**

**Dr. Roberto Gómez Martínez, II UNAM**



# RESUMEN - ABSTRACT

En este trabajo se propone emplear una teoría de vigas diferente de la que se ha utilizado hasta ahora para el análisis de pandeo vertical de ductos submarinos enterrados mediante modelado analítico. En los modelos analíticos propuestos de la literatura consultada, se utiliza la teoría de vigas de *Euler-Bernoulli* para calcular la deflexión del ducto. Aquí se propone utilizar la teoría de vigas de *Engesser-Timoshenko*, que se diferencia de la primera en que se toman en cuenta los esfuerzos y las deformaciones debidas a la fuerza cortante. Dicha teoría requiere un factor de corrección por cortante, que para el caso de cilindros huecos tiene el valor  $K_s = 0.53$ .

Por otra parte, el modelo de suelo que se utiliza para el análisis es el modelo de suelo plástico con imperfección inicial propuesto por Shi et al.<sup>[30]</sup>, lo que implica que para rigideces de suelo  $k \leq 1$ , puede presentarse una deflexión negativa en la longitud donde se presenta este tipo de suelo. Los resultados de la deflexión del modelo propuesto se compararán con los del modelo de Shi et al.<sup>[30]</sup>

Finalmente, se simularán dos modelos con elementos finitos mediante el software Abaqus®. El primer modelo se simulará con elementos viga PIPE32, mientras que el segundo modelo se simulará con elementos continuos tridimensionales C3D8R. Se obtendrán los esfuerzos axiales a lo largo del ducto de los modelos anteriores y del modelo propuesto para compararlos y realizar las observaciones pertinentes.

## ABSTRACT

In this work we propose employ a different beam theory that has been used until now for the analysis of upheaval buckling of buried pipeline by an analytical modeling. In the analytical models of literature review, the *Euler-Bernoulli* beam theory is used to calculate the buckling of pipeline. Here we propose use the *Engesser-Timoshenko* beam theory, wich differs from the first in that the Engesser-Timoshenko beam theory take account the stresses and strains due to the shear force. This theory requires a shear correction factor, which in case of hollow cylinders has the value  $K_s = 0.53$ .

On the other hand, the soil model used for the analysis is the model on plastic uneven seabed proposed by Shi et al.<sup>[30]</sup>, wich implies that for soil rigidities  $k \leq 1$  could result in a negative deflection in the length where this type of soil is presented. The results of the deflection of the proposed model are compared with the model of Shi et al.<sup>[30]</sup>

Finally, two finite element models to be built by Abaqus® software. The first model was built with PIPE32 beam elements, while the second model will be built with tree-dimensional continuous elements C3D8R. The axial stresses along the pipeline and previous models proposed for comparision are obtained, and make relevant comments of results.

## JUSTIFICACIÓN

Se identifican dos aspectos fundamentales para realizar investigación acerca del pandeo vertical de ductos submarinos enterrados, en el caso extremo de ruptura de la tubería en operación: **1)** Daño ambiental ocasionado por fuga de hidrocarburos con consecuencias devastadoras para las especies marinas; **2)** Interrupción del suministro de hidrocarburos por esa línea de tubería, en cuyo escenario extremo puede darse la interrupción total del bombeo desde el pozo petrolero, lo que tiene consecuencias económicas considerables.

En la industria petrolera nacional, Petróleos Mexicanos ha identificado problemas de pandeo vertical de varias líneas submarinas enterradas, en la zona petrolera costa fuera del estado de Tabasco, lo que representa un nicho muy importante para los investigadores mexicanos. Uno de los propósitos principales de esta investigación es el de coadyuvar en el desarrollo y generación de conocimientos, así como en la consolidación de un grupo de investigadores especialistas en la Industria Costa Fuera y Naval, necesario para lograr un crecimiento sostenible y tecnológicamente avanzado de una de las industrias más importantes del país.

## ALCANCES

Los alcances de este trabajo son:

1. Investigación del estado del arte del pandeo vertical de ductos submarinos enterrados.
2. Identificación de la oportunidad de investigación, que consiste en considerar los esfuerzos y deformaciones debidas a la fuerza cortante en el pandeo.
3. Implementación de un modelo analítico considerando los efectos del cortante, con base en una teoría de vigas de cuarto orden con el campo de desplazamientos propuesto por Engesser-Timoshenko.
4. Comparación de los resultados del modelo analítico de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli con los resultados del modelo utilizando la teoría de vigas de Engesser-Timoshenko.
5. Generación de modelos de elementos finitos mediante el software Abaqus®.
6. Comparación del modelo analítico propuesto con el modelo numérico generado en Abaqus®.
7. Conclusiones del trabajo.

# AGRADECIMIENTOS

Primeramente, agradezco a la vida por haberme dado la oportunidad de estar aquí y ahora. Los cimientos educativos y culturales me los otorgaron mis padres, principalmente mi papá y primer maestro. Mi madre, con esfuerzo y siempre con amor, me dotó de aquello que complementó mi formación personal, la cual sigue en constante desarrollo. Gracias papás.

Con respecto a este proyecto de maestría, tuve a bien contar con el apoyo de varias personas. Charo, quien fue pieza clave para la formalización y culminación del proyecto; El Maestro Pablo Pavía de la FES Acatlán, quien fue mi primer contacto con la UNAM, me orientó en el proceso de admisión, organizó un curso propedéutico para presentar el examen y se convirtió en un amigo incondicional; doña Martha, quien me recibió en su hogar para darme uno; Jenny, soporte de cordura y coherencia que ha estado a mi lado; Eva, amiga y colega que ha resuelto varias complicaciones, cuyo apoyo ha sido fundamental para mí; y por último, a algunos de mis compañeros de maestría, entre ellos a Héctor, amigo y excelente persona, a Gabriel y a Mauricio.

Este proyecto de maestría no hubiera sido posible sin el apoyo, el trabajo y la orientación de mis profesores, de quienes aprendí unas cosas sí y otras no. Agradezco profundamente a mi asesor, el Dr. Roberto Gómez Martínez, quien confió en mí y me otorgó una beca del Instituto de Ingeniería; a mi asesor el Dr. Rubén Cuamatzi, del Instituto Mexicano del Petróleo, quien me dedicó de su tiempo para orientarme con respecto a mi tesis; al Dr. Omar Vázquez Hernández, también del IMP, quien me apoyó con el equipo de cómputo que hizo posible el análisis numérico de mi tesis; y a todos mis profesores de la maestría, sobre todo a aquellos que me han inspirado para alcanzar metas relevantes.

Gracias también a la Universidad Nacional Autónoma de México, al Instituto de Ingeniería de la UNAM, al Instituto Mexicano del Petróleo y a los que pudiera haber omitido por error, pero que sin duda formaron parte de esto.

**Gracias**

# CONTENIDO

Resumen.....	iii
Abstract.....	iii
Justificación y Alcances.....	iv
Agradecimientos.....	v
Contenido.....	vi
Problemática a Analizar .....	viii

## CAPÍTULO 1

<b>Estado del Arte</b>	1
<b>1 – 1</b> Introducción.....	2
1-1.1 Esfuerzos en un recipiente cilíndrico a presión y de pared delgada.....	4
<b>1 – 2</b> Modelo Analítico de Ductos Rectos en Suelo Marino Rígido y Plano.....	5
<b>1 – 3</b> Modelo Analítico de Ductos Inicialmente Imperfectos en Suelo Marino Rígido.....	7
<b>1 – 4</b> Modelo Analítico de Ductos Rectos en Suelo Marino Plástico.....	9
<b>1 – 5</b> Modelo Analítico de Ductos Inicialmente Imperfectos en Suelo Marino Plástico.....	10

## CAPÍTULO 2

<b>Análisis de Modelado Analítico</b>	13
<b>2 – 1</b> Teoría de Vigas de Euler-Bernoulli.....	14
2-1.1 Pandeo de Columnas en la EBT.....	15
<b>2 – 2</b> Teoría de Vigas de Engesser-Timoshenko.....	15
2-2.1 Pandeo de Columnas en la TBT.....	16
<b>2 – 3</b> Modelo de Pandeo Vertical de Ductos considerando efectos de Cortante (SUBM).....	17
2-3.1 Solución de las ecuaciones que gobiernan el pandeo en el SUBM.....	21
2-3.2 Carga Axial.....	23

## CAPÍTULO 3

<b>Resultados y Comparación con otros Modelos</b>	25
<b>3 – 1</b> Comparación de Resultados con Modelos Propuestos en la Literatura.....	26
3-1.1 Soluciones teóricas de ductos en suelo plástico con imperfección inicial.....	26

## CAPÍTULO 4

<b>Modelo de Elementos Finitos con SIMULIA Abaqus®</b>	31
<b>4 – 1</b> Desarrollo del Modelo de Elementos Finitos.....	32
4-1.1 Tipo de Elementos Finitos empleados.....	32
<b>4 – 2</b> Descripción de los Parámetros de Modelado empleados.....	34
<b>4 – 3</b> Análisis de Resultados del <b>SUBM</b> vs Modelo de Elementos Finitos.....	37
Conclusiones.....	45
Trabajos Futuros.....	46
Anexo 1.....	47
Anexo 2.....	51
Anexo 3.....	52
Anexo 4.....	53
Anexo 5.....	54
Referencias.....	55

# PROBLEMÁTICA A ANALIZAR

## Contexto Nacional

México se encuentra en el lugar diecisieteavo del mundo en cuanto a reservas probadas<sup>[40]</sup>. Cuenta con cuatro cuencas petroleras en el Golfo de México, *Figura 0-1*, que son: Cuenca de Burgos, Cuenca Tampico Misantla, Cuenca de Veracruz y las Cuencas del Sureste, todas con regiones marinas. Los campos petroleros más importantes en cuanto a producción de aceite, desde 1979, se encuentran en las Cuencas del Sureste<sup>[35]</sup>, *Figura 0-1*, y comprende los estados de Campeche, Tabasco y parte de Veracruz.



**FIGURA 0-1** Cuencas Petroleras de México (Fuente: CNH<sup>[35]</sup>).

La zona de las Cuencas del Sureste es una provincia petrolera localizada en la Planicie Costera del Golfo de México y la Plataforma Continental del Sureste de México, e incluye una porción terrestre y una porción marina<sup>[35]</sup>. Dicha porción marina comprende un área en aguas someras (tirantes de agua menores de 500 metros), *Figura 0-2*, en donde según datos de la Comisión Nacional de Hidrocarburos (CNH), se han perforado alrededor de 300 pozos exploratorios<sup>[35]</sup> para aumentar la producción de los que ya se encuentran produciendo. Según estadísticas de Petróleos Mexicanos, en 2014 el 63.4% de la producción total de hidrocarburos líquidos se extrajo de la región marina del país<sup>[38]</sup>, mientras que del total de la producción de gas, el 47.3% corresponde a la misma región<sup>[39]</sup>. Esto implica que se necesitan transportar diariamente 1851 miles de barriles de hidrocarburos líquidos y 3088 millones de pies cúbicos de gas desde la región marina en producción<sup>[38, 39]</sup>.

En general, la forma más barata de transportar los hidrocarburos es por medio de ductos. En aguas someras, estos ductos deben enterrarse para evitar problemas con actividades de pesca, para proveer aislamiento térmico y/o para evitar el cruce con otros ductos o sistemas submarinos.

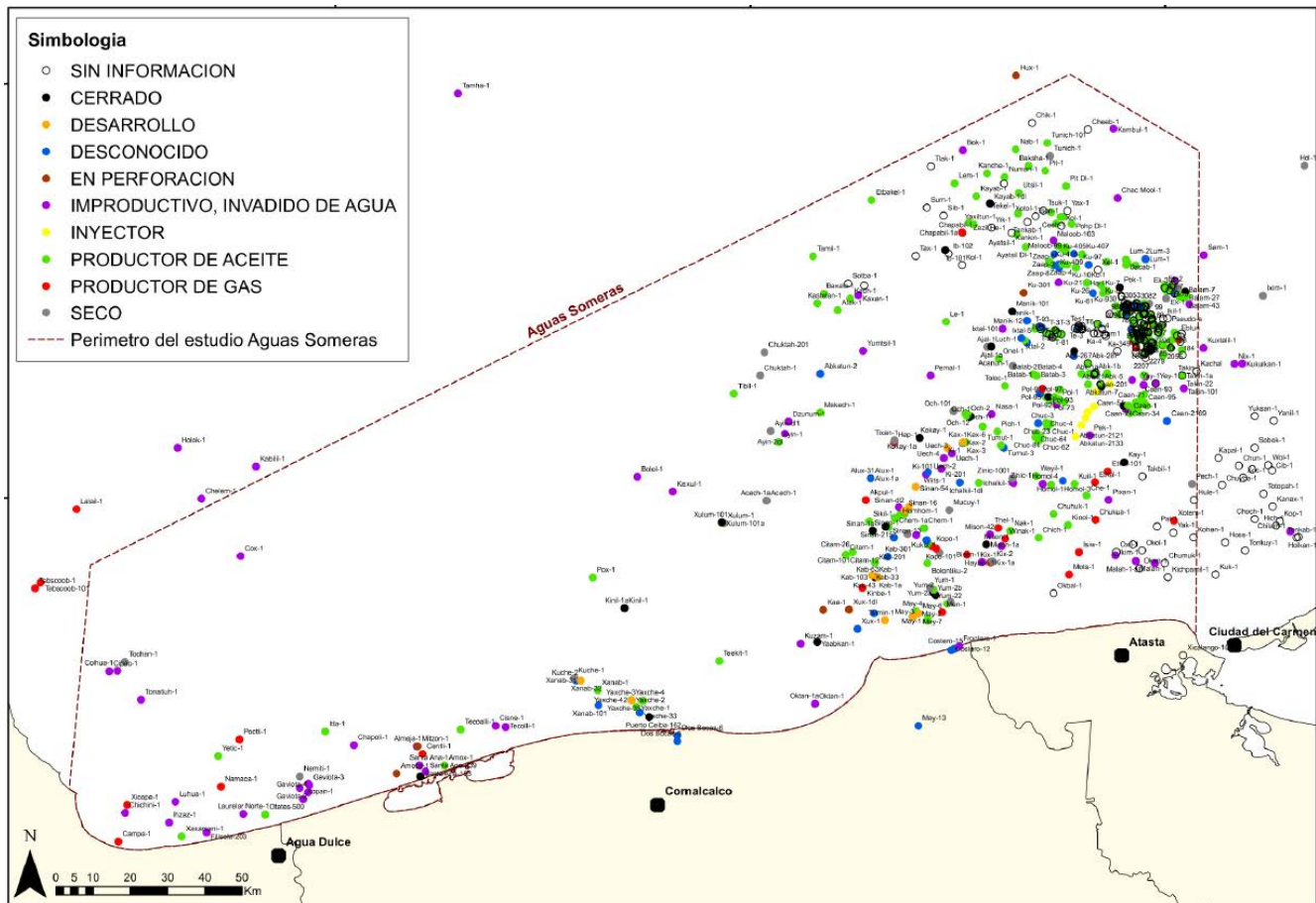


FIGURA 0-2 Aguas Someras de las Cuencas del Sureste de México (Fuente: CNH<sup>[35]</sup>).

Como consecuencia del enterramiento, se genera una restricción tridimensional al movimiento del ducto, el cual opera a elevadas temperaturas y presiones que generan una expansión del material y una carga sobre el eje axial. Se supone que la rigidez lateral del suelo es lo suficientemente grande que impide el movimiento en la dirección del eje  $y$ , *Figura A-1*, por lo que el desplazamiento del ducto se da en la dirección  $z$ , *Figura 2-2*, debido a las fuerzas de expansión y axial. Cuando dichas fuerzas son lo suficientemente grandes, se produce una configuración en el ducto conocida como “pandeo global”, y el desplazamiento puede ser bastante considerable (como en el caso del sector danés con un desplazamiento vertical de  $1.15 \text{ m}^{[9]}$ ), o como se muestra en la *Figura 0-3*, que es un ejemplo de pandeo global de un ducto en el desierto, de  $12 \text{ plg}$  de diámetro,  $1670 \text{ m}$  de longitud, que opera a una presión de  $380 \text{ bars}$  y que tiene un enterramiento de  $1.5 \text{ m}^{[41]}$ . Bajo ciertas condiciones de deformación y/o carga, el ducto puede presentar alguna falla que a su vez tiene consecuencias distintas, entre las que se encuentran: **ambiental** (la falla de un ducto ocasiona desastres ecológicos), **económica** (el paro en la producción conlleva pérdidas económicas) y **política** (incumplimiento de los contratos de venta de hidrocarburos al extranjero, que se ven reflejados en multas, etc.)

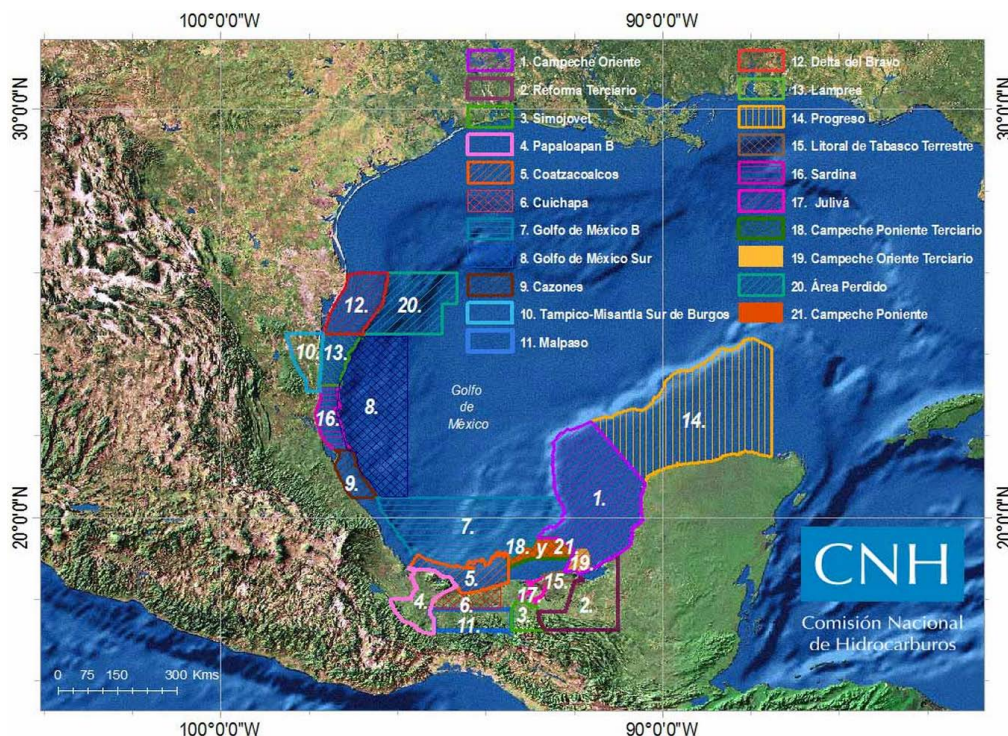
Es por esta razón que en un país productor de petróleo como México, con regiones marinas petroleras muy importantes, el estudio de la predicción del pandeo de ductos y sus consecuencias se vuelve de vital importancia para el correcto funcionamiento de dicha industria. Además, teniendo en cuenta que existen tres cuencas con regiones marinas, más la Plataforma de Yucatán, *Figura 0-1*,





**FIGURA 0-3** Ejemplo de pandeo global de un ducto en tierra<sup>[41]</sup>.

las cuales se encuentran en etapas de exploración con grandes potenciales de producción y divididas por zonas como se muestra en la *Figura 0-4*<sup>[36]</sup>, queda de manifiesto la oportunidad y la importancia de realizar investigación en la materia, pudiendo así desarrollar una mayor comprensión del fenómeno de pandeo global en ductos.



**FIGURA 0-4** Mapa Estadístico de los Proyectos de Exploración Resolución CNH.E.03.001/10 (Fuente: CNH<sup>[36]</sup>).



## Mecánica del ducto

Como se mostrará en las Secciones 1-2 a 1-5, se han desarrollado modelos analíticos con modificaciones respecto al comportamiento del suelo marino. Inicialmente se consideró rígido y plano, posteriormente se consideró rígido pero con una deformación inicial. En un tercer modelo se consideró un suelo inicialmente recto pero plástico, es decir, que el ducto podía sufrir asentamientos y pandeo vertical negativo.

El cuarto modelo considera suelo plástico y con imperfección geométrica inicial. Con base en los desarrollos anteriores, se demostró<sup>[14,27]</sup> que el pandeo vertical es muy sensible a imperfecciones y a la rigidez del suelo, por lo que el desarrollo de este trabajo considerará ambos comportamientos del suelo.

En este trabajo abordaremos un aspecto que no se ha tratado en los modelos analíticos presentados aquí, que consiste en el análisis de los efectos del esfuerzo cortante en el pandeo, con un modelo de suelo marino plástico no uniforme, es decir, con imperfección inicial, con el fin de **investigar si los esfuerzos y deformaciones por cortante tienen alguna influencia en la predicción del pandeo**. Para ello, utilizaremos la teoría de vigas con el campo de desplazamientos propuesto por Engesser-Timoshenko<sup>[28,29]</sup>, la cual considera dichos efectos en el pandeo de columnas.

La teoría de vigas de Timoshenko tiene casi las mismas suposiciones que la teoría de vigas clásica de Euler-Bernoulli, excepto que la suposición de secciones perpendiculares a la sección transversal después de la deformación no se mantiene. En esta teoría se considera un estado constante de deformación por cortante con respecto a la coordenada del espesor. Esto tiene como consecuencia la necesidad de usar coeficientes de corrección por cortante para compensar el error de la suposición de este esfuerzo cortante constante. Dichos coeficientes dependen no solo del material y de parámetros geométricos, sino también de las condiciones de frontera y las cargas. El coeficiente de corrección por cortante para tubería se toma como  $K = 0.53$ <sup>[34]</sup>.

Para transportar hidrocarburos extraídos de pozos, en la industria petrolera nacional e internacional se emplean una gran cantidad de ductos rígidos, dentro de los cuales se encuentran los ductos enterrados. Estos ductos operan en condiciones de alta presión y alta temperatura<sup>1</sup> (HP/HT), por lo que bajo ciertas circunstancias y dichas condiciones se puede presentar pandeo vertical (levantamiento de la línea sobre el suelo marino, conocido en inglés como upheaval buckling) como consecuencia de los diferenciales de presión y temperatura, así como por la interacción suelo-ducto (fricción y restricción al movimiento del ducto) debido al enterramiento del mismo. Se supone una rigidez lateral de suelo infinita, por lo que el desplazamiento del ducto se da en sentido vertical.

<sup>1</sup> Ciertos hidrocarburos requieren mantenerse a temperaturas elevadas para impedir que las parafinas se solidifiquen y se adhieran al ducto<sup>(1)</sup>. En ocasiones es necesario aislar térmicamente el ducto con el objetivo de evitar que el fluido se enfríe, provocando mayor resistencia al flujo del hidrocarburo, lo que produciría una mayor presión interna y por lo tanto mayor fuerza axial.

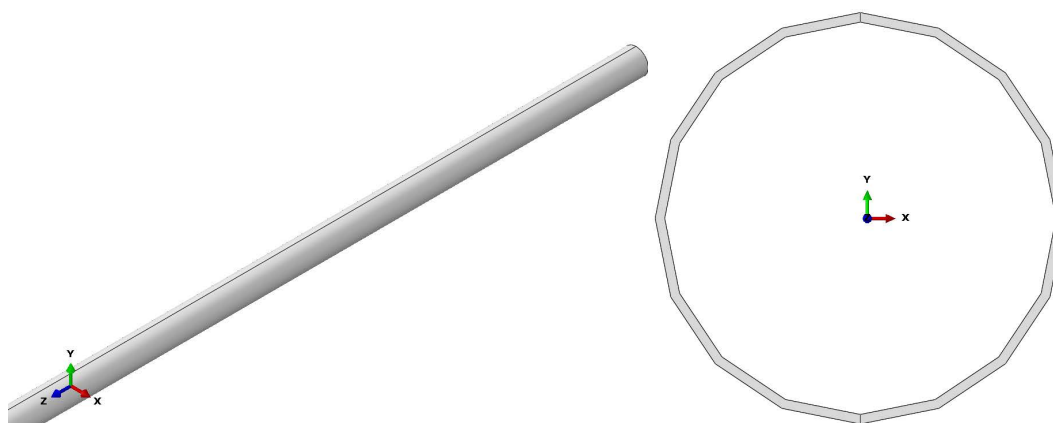
<sup>2</sup> Generalmente, los ductos submarinos son enterrados en campos de explotación localizados en aguas someras (profundidades menores a 500 metros<sup>(1)</sup>).

**CONTENIDO**

1-1	Introducción	2
1-1.1	Esfuerzos en un recipiente cilíndrico a presión y de pared delgada	4
1-2	Modelo analítico de ductos en suelo marino rígido y uniforme	5
1-3	Modelo analítico de ductos en suelo marino rígido no uniforme	7
1-4	Modelo analítico de ductos en suelo marino plástico y uniforme	9
1-5	Modelo analítico de ductos en suelo marino plástico no uniforme	10

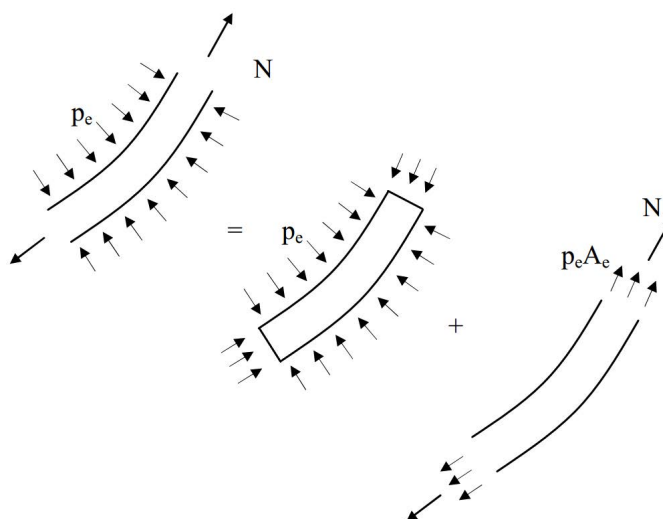
## 1-1 Introducción

El fenómeno del pandeo global de ductos submarinos enterrados se genera debido a que el ducto trata de expandirse volumétricamente por la acción de un diferencial de temperatura entre el hidrocarburo (que puede sobrepasar los  $100^{\circ}\text{C}$ <sup>[18]</sup>) y el ambiente, y por un diferencial de presión en la línea de hasta  $13.79\text{ MPa}$ <sup>[18]</sup> o mayor, generado por el flujo del hidrocarburo y la presión con la que sale del pozo productor, así como por la presión hidrostática; sin embargo, la expansión del ducto se encuentra restringida por el enterramiento del ducto. Como consecuencia de la restricción y de los diferenciales de presión y temperatura, se genera una fuerza axial que induce el pandeo en el sentido vertical (eje  $y$ ), ya que se considera que la rigidez del suelo marino es infinita en la dirección del eje  $x$ <sup>[7, 8]</sup>, *Figura 1-1*. El diferencial de presión tiene una equivalencia física de carga, y la resultante de fuerzas se conoce como **Fuerza Axial Efectiva**<sup>[2]</sup>, *Figura 1-2*, donde  $p_e$  es la presión externa,  $N$  es la carga axial y  $A_e$  es el área de la sección transversal del ducto. Desde el punto de vista físico, el ducto se desplazará hacia la dirección que menos resistencia oponga a su movimiento.



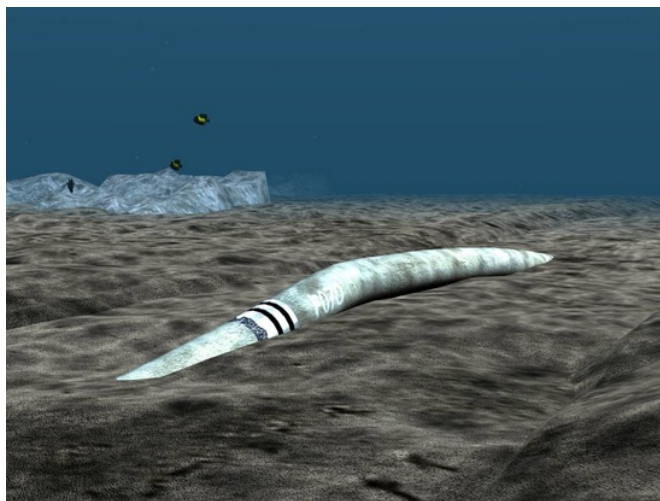
**FIGURA 1-1** Esquema de orientación positiva del ducto (*Figura generada en Abaqus®*).

El parámetro que determina la resistencia al movimiento vertical del ducto es la rigidez del suelo  $k$ <sup>[31]</sup>, cuya fórmula y definición se encuentran en el **Capítulo 2** de este documento. En este trabajo consideraremos que la rigidez en el sentido vertical (eje  $y$ ) varía dentro de cierta longitud considerada para el análisis, lo que tiene como consecuencia un posible pandeo vertical negativo del ducto.



**FIGURA 1-2** Sistemas físicos equivalentes – presión externa (*Fuente: Fyrliev et al*<sup>[2]</sup>).

Dicho de otra manera, consideraremos que el suelo es blando en cierta región a lo largo de la línea<sup>[31]</sup> (lo que ocasionará un pandeo vertical negativo), y en otra región el suelo tendrá mayor rigidez (lo que ocasionará un pandeo vertical positivo, ver *Figura 2-2*). En la *Figura 1-3* se muestra una simulación esquemática por computadora del pandeo vertical, donde se aprecia cómo el ducto puede levantarse por encima del lecho marino.



**FIGURA 1-3** Pandeo vertical de ductos submarinos enterrados<sup>[3]</sup>.

En 1974, cuando se inició el estudio del pandeo de ductos enterrados, el modelado analítico del pandeo vertical de ductos submarinos enterrados se basó en el análisis de la estabilidad lateral de las vías férreas<sup>[4]</sup>, debido a que éstas presentaban grandes desplazamientos laterales como consecuencia del calentamiento (expansión) del material y las restricciones que mantienen fijos los rieles. Uno de los primeros documentos que apareció en la literatura sobre pandeo de ductos fue en 1974<sup>[5]</sup>, en el cual Palmer y Baldry<sup>[6]</sup> estudiaron el comportamiento de ductos restringidos a la expansión térmica, mediante pruebas de laboratorio de ductos a escala pequeña y descubrieron que dichas restricciones ocasionan un aumento en la presión interna del ducto, lo que a su vez induce el pandeo. Basado en amplios estudios sobre el pandeo de vías férreas, Hobbs<sup>[7, 8]</sup> presentó un resumen de algunos modelos básicos de pandeo de ductos (modo vertical y lateral). El modo vertical se mostrará en la sección 1-2.

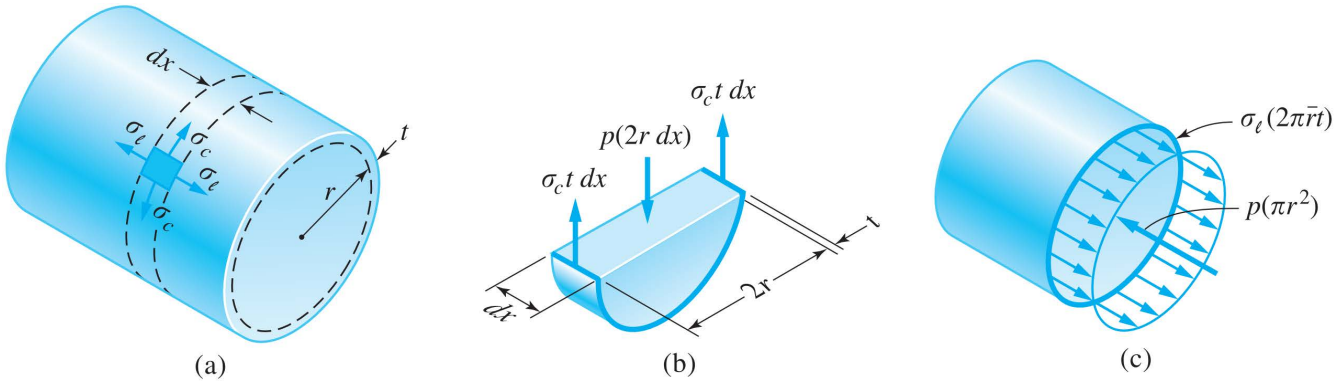
El estudio sobre el pandeo vertical se intensificó debido a varios incidentes ocurridos en la década de los ochenta, en el Mar del Norte. El primer caso de pandeo vertical ocurrió en 1986, en uno de los campos de Mærsk Olie og Gas AS' en el Sector Danés<sup>[9]</sup>, en donde en la línea de tubería Rolf A /Gorm encontraron un desplazamiento vertical de 1.1 m sobre el suelo marino. Como consecuencia de lo anterior, hubo un rápido crecimiento de los estudios relacionados con el pandeo vertical de ductos submarinos enterrados<sup>[10]</sup>, con investigaciones destacadas como las de Fyrileiv y Collberg<sup>[2]</sup>, Nielsen et al.<sup>[9]</sup>, Boer et al<sup>[16]</sup>, Friedmann<sup>[17]</sup>, Richards y Andronicou<sup>[18]</sup>, Ju y Kyriakides<sup>[19]</sup>, Pedersen y Jensen<sup>[20]</sup>, Ballet y Hobbs<sup>[21]</sup>, Taylor y Tran<sup>[22, 24]</sup>, Maltby y Calladine<sup>[23]</sup>, Croll<sup>[25]</sup>, Hunt y Blackmore<sup>[26]</sup>, entre otros.

Se presentan cuatro modelos analíticos que han sido desarrollados para predecir el pandeo, todos basados en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli con respecto al modelo analítico del ducto, pero con distintos modelos de suelo marino, los cuales se describen brevemente.

En este punto resulta conveniente determinar las fuerzas que interactúan en un recipiente cilíndrico a presión y de pared delgada.

### 1-1.1 Esfuerzos en un recipiente cilíndrico a presión y de pared delgada

Considere el recipiente cilíndrico que se muestra en la *Figura 1-4*, donde  $t$  representa el grosor de pared, tiene un radio interior  $r$  y está sometido a una presión manométrica  $p$  que se genera en el recipiente por el fluido que contiene<sup>[12, 13]</sup>.



**FIGURA 1-4** (a) Recipiente cilíndrico a presión; (b) Diagrama de cuerpo libre para determinar el esfuerzo circunferencial o anular  $\sigma_c$ ; (c) Diagrama de cuerpo libre para determinar el esfuerzo longitudinal o axial  $\sigma_l$ . (Imagen tomada de [13]).

El esfuerzo anular se determina considerando el diagrama de cuerpo libre de la *Figura 1-4b*. Para el equilibrio en la dirección de  $y$  (dirección vertical), se requiere:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 2[\sigma_c(t dx)] - p(2r dx) = 0$$

Por lo tanto, el esfuerzo circunferencial o anular es:

$$\sigma_c = \sigma_y = \frac{pr}{t} \quad (1.1)$$

El esfuerzo longitudinal se determina considerando el diagrama de cuerpo libre de la *Figura 1-4c*. Como se muestra,  $\sigma_l$  actúa de manera uniforme en toda la pared y  $p$  actúa en la sección del fluido contenido. Como el radio medio  $\bar{r}$  es aproximadamente igual al radio interior del recipiente  $r$ , el equilibrio en la dirección de  $x$  (dirección axial) requiere:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad \sigma_l(2\pi r t) - p(\pi r^2) = 0$$

Por lo tanto, el esfuerzo longitudinal o axial es:

$$\sigma_l = \sigma_x = \frac{pr}{2t} \quad (1.2)$$

Para determinar la componente axial de la deformación unitaria, empleamos la Ley de Hooke generalizada, cuya componente de interés es:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1.3)$$

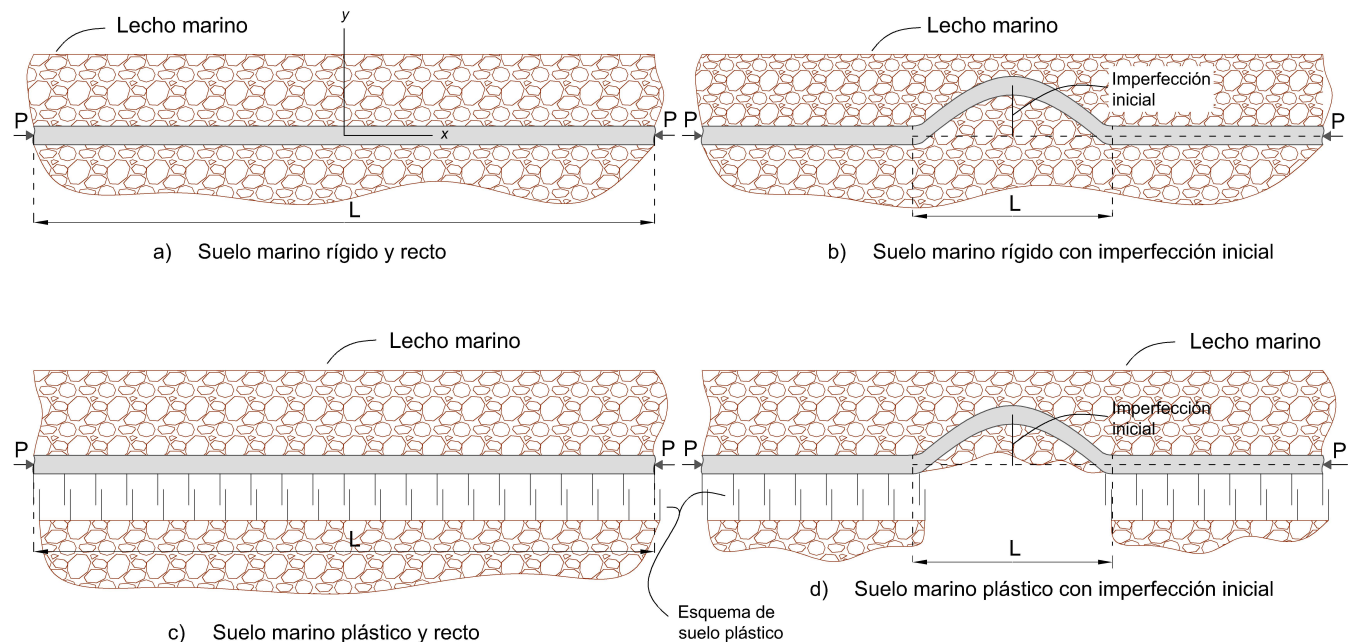
El hecho de que el recipiente sea de pared delgada, implica que la componente del esfuerzo en la dirección de  $z$ ,  $\sigma_z$ , es despreciable; por lo tanto, para nuestro problema particular, la componente axial de la deformación unitaria es:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] \quad (1.4)$$

## 1-2 Modelo Analítico de Ductos en Suelo Marino Rígido y Recto

En la década de los setenta, Kerr<sup>[4,11]</sup> investigó el problema del pandeo que se presenta en las vías férreas debido a un diferencial de temperatura, asumiendo que el suelo marino es rígido y recto, y cuya fuerza de fricción se considera constante a lo largo de la vía. Además, el elemento estructural con el que se modela la vía férrea es una viga de Euler-Bernoulli, la cual no considera esfuerzos ni deformaciones debidas a la fuerza cortante, ya que es una simplificación propia del modelo.

Con base en este trabajo, Hobbs<sup>[8]</sup> investigó el pandeo de ductos cuya temperatura sobrepasaba los  $100^\circ C$ , suponiendo que el suelo marino es **rígido y recto**, *Figura 1-5a*, y obtuvo la solución analítica para la carga crítica de pandeo, la longitud de pandeo y el desplazamiento vertical máximo.



**FIGURA 1-5** Modelos del suelo marino.

La componente principal de la fuerza de expansión térmica es precisamente un diferencial de temperatura entre el ducto y los alrededores del mismo (suelo marino), y también como consecuencia de la restricción al movimiento (ducto enterrado), es decir<sup>[8]</sup>:

*Fuerza de expansión térmica:*

$$P_0 = EA \alpha \Delta T \quad (1.5)$$

donde  $A$  es el área de la sección transversal del ducto,  $E$  es el módulo de elasticidad o de Young,  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica lineal, y  $\Delta T$  es la diferencia de temperatura entre el ducto y el ambiente.

La deformación unitaria axial debida a una diferencia positiva de presión  $\Delta p$  entre la presión del fluido y la presión hidrostática, está dada en términos de los esfuerzos radiales y axiales del ducto como<sup>[8]</sup>:

*Deformación unitaria:*

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left( \frac{\Delta p r}{2t} - \nu \frac{\Delta p r}{t} \right) \quad (1.6)$$

donde  $\nu$  es la relación de Poisson,  $t$  es el espesor de pared del ducto y  $r$  es su radio interior. Si la deformación unitaria axial  $\varepsilon$  está completamente restringida, la fuerza axial de compresión es<sup>[8]</sup>:

*Fuerza axial de compresión:*

$$P_0 = EA \varepsilon = (0.5 - \nu) \frac{A \Delta p r}{t} \quad (1.7)$$

La relación que describe la forma flexionada del ducto está dada por la ecuación diferencial<sup>[8]</sup>:

*Ecuación que gobierna la forma del ducto:*

$$y'' + n^2 y + \frac{m}{8} (4x^2 - L^2) = 0 \quad (1.8)$$

donde  $y(x)$  es la deflexión del ducto con respecto a la coordenada  $x$  (longitudinal), *Figura 1-5a*,  $m = w/EI$ ,  $n^2 = P/EI$  y  $w$  es el peso sumergido del ducto (incluyendo el peso del recubrimiento) por unidad de longitud. Para el modo de pandeo vertical, la solución de la *Ecuación 1.8* (ver Hobbs<sup>[8]</sup>) y la aplicación de las condiciones de frontera producen los siguientes resultados<sup>[8]</sup>:

*Fuerza axial en la zona de pandeo:*

$$P = 80.76 \frac{EI}{L^2} \quad (1.9)$$

*Fuerza axial más allá de la zona de pandeo:*

$$P_0 = P + \frac{wL}{EI} \sqrt{1.597 \times 10^{-5} EA \cdot f_a \cdot w \cdot L^5 - 0.25(f \cdot EI)^2} \quad (1.10)$$

donde  $f_a$  es el coeficiente de fricción entre el ducto y el suelo marino. El desplazamiento vertical máximo está dado por<sup>[8]</sup>:

*Desplazamiento vertical máximo:*

$$v_{max} = 2.408 \times 10^{-3} \frac{w L^4}{EI} \quad (1.11)$$

El momento flexionante máximo es<sup>[8]</sup>:

*Momento flexionante máximo:*



$$M_{max} = 0.06938 w \cdot L^2 \quad (1.12)$$

Dos de las suposiciones más importantes del modelo descrito son<sup>[8]</sup>:

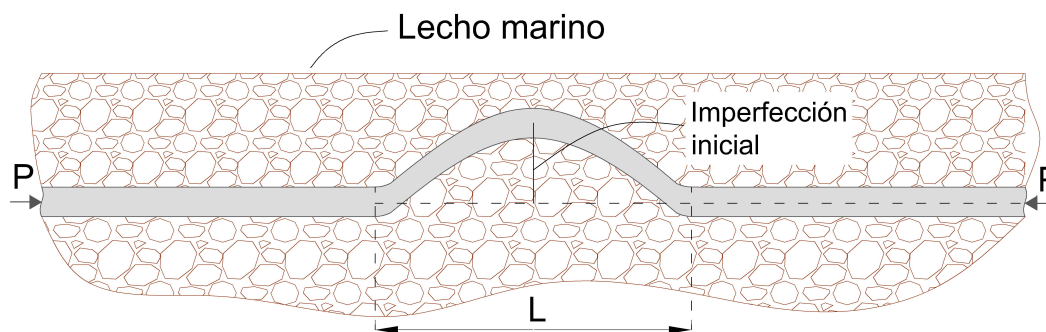
*Suposiciones principales:*

- 1) **El suelo marino se considera rígido y plano.** Aunque las condiciones topográficas marinas suelen ser bastante irregulares, se asume que el suelo no sufre deformaciones y además que es plano a lo largo del ducto. Por supuesto que este no es un enfoque realista, y actualmente se realiza investigación con modelos de elementos finitos basados en “elementos partícula” para mejorar los modelos de suelo.
- 2) **El ducto se modela con una teoría de vigas de Euler-Bernoulli.** En la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, se hacen tres suposiciones acerca de la forma en que el esfuerzo deforma al material:
  - a) El eje longitudinal  $x$ , que se encuentra en la superficie neutra, no experimenta cambios en su longitud;
  - b) Todas las secciones transversales de la viga permanecen planas y perpendiculares al eje longitudinal durante la deformación, y;
  - c) Cualquier deformación de la sección transversal dentro de su propio plano puede ignorarse<sup>[12]</sup> debido a que son muy pequeñas ( $\ll 1$ ). En otras palabras, se considera que la viga sufre únicamente deformación axial, y se desprecian los esfuerzos cortantes<sup>[14]</sup>.

En muchas de las aplicaciones en la ingeniería, los códigos de diseño especifican limitaciones de las deflexiones elásticas por tolerancia o por fines estéticos, y como resultado dichas deflexiones en vigas y ejes forman curvas poco pronunciadas, por lo que para dichos problemas esta teoría es relativamente aceptable<sup>[12]</sup>.

### 1-3 Modelo Analítico de Ductos en Suelo Marino Rígido con Imperfección Inicial

En 1986, Taylor y Gan<sup>[15]</sup> resolvieron el problema de pandeo de tuberías considerando una imperfección geométrica del ducto en un suelo rígido no uniforme, como se muestra en la *Figura 1-5b*. La consecuencia de la imperfección implica que el ducto no permanece recto una vez que se ha colocado, como se aprecia en la figura, sino que hay un desplazamiento vertical inicial que se toma en cuenta en el modelo matemático (ecuación diferencial que gobierna el pandeo). La longitud considerada en el análisis es únicamente la longitud deformada del ducto,  $L$ .



b) Suelo marino rígido con imperfección inicial

**FIGURA 1-5b** Modelos del suelo marino.



La imperfección puede ser ocasionada por rocas, por un asentamiento del suelo después de que se coloca el ducto o por algún otro ducto. Los autores encontraron que la imperfección inicial del ducto tiene una importante influencia en el pandeo, ya que éste se inicia con una menor carga térmica (y por consiguiente, menor carga axial) que la predicha por el modelo de Hobbs (sección 1-2). La deflexión máxima del presente modelo está dada por la ecuación<sup>[15]</sup>:

*Desplazamiento vertical máximo del ducto:*

$$v_{max} = \frac{K_1 \cdot q}{EI \cdot n^4} = 2.407 \times 10^{-3} \cdot \frac{q \cdot L^4}{EI} \quad (1.13)$$

donde  $L$  es la longitud flexionada del ducto, *Figura 1-5b*,  $n \cdot L = 8.9868$  representa un mínimo en la solución de las raíces de la ecuación,  $n = \sqrt{P/EI}$  y  $K_1 = (1 + n^2 L^2 / 8 - 1 / \cos nL / 2) = 15.6985$  (este resultado es consecuencia de sustituir el valor de la raíz  $nL$ ). La deflexión de la imperfección del suelo marino está dada por<sup>[15]</sup>:

*Desplazamiento vertical de la imperfección del suelo:*

$$v_0 = \frac{v_{0m}}{K_1} \left( 1 + \frac{n_0^2 \cdot L_0^2}{8} - \frac{n_0^2 \cdot x^2}{2} - \frac{\cos(n_0 \cdot x)}{\cos(n_0 \cdot L_0/2)} \right) - L_0/2 \leq x \leq L_0/2 \quad (1.14)$$

donde  $n_0 \cdot L_0 = 8.9868$ , y  $v_{0m}$  es el desplazamiento vertical máximo de la imperfección del suelo<sup>[15]</sup>:

*Desplazamiento vertical máximo de la imperfección del suelo:*

$$v_{0m} = 2.407 \times 10^{-3} \cdot \frac{q \cdot L_0^4}{EI} \quad (1.15)$$

Note que la longitud  $L_0$  es la longitud de la imperfección, no del ducto. El momento flexionante máximo está dado por<sup>[15]</sup>:

*Momento flexionante máximo:*

$$M_{max} = -0.06939 q(L^2 - L_0^2) \quad (1.16)$$

Dos de las suposiciones más importantes con respecto a este modelo son:

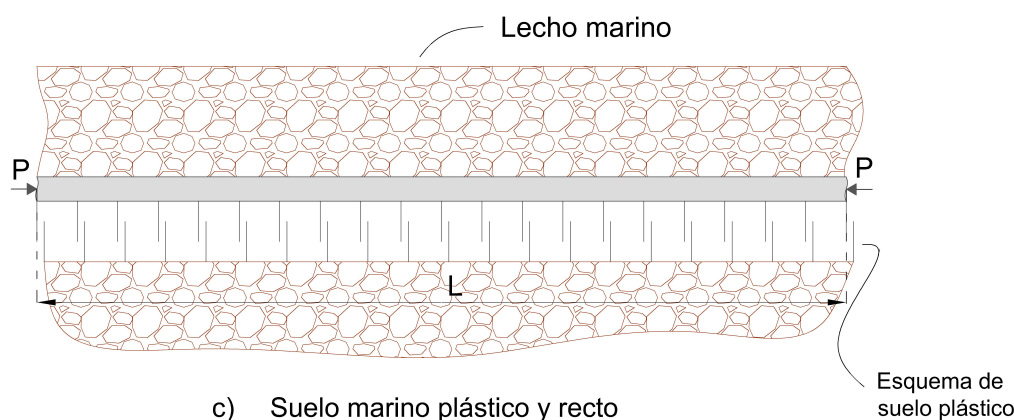
*Suposiciones principales:*

- 1) **El suelo marino se considera rígido y no uniforme.** Aunque las condiciones topográficas marinas suelen ser bastante irregulares, se considera que el suelo no sufre deformaciones. Sin embargo, a diferencia del modelo de suelo rígido y recto, en este modelo se considera un suelo rígido con una imperfección inicial que está dada por la *Ecuación 1.14*, *Figura 1-5b*, donde  $L_0$  es la longitud de la imperfección, no del ducto.
- 2) **El ducto se modela con la teoría de vigas de Euler-Bernoulli.** Esta suposición es la misma que para el modelo de suelo rígido y recto.

Muchos investigadores han hecho estudios sobre ductos en suelos no uniformes, entre los que se encuentran Boer et al<sup>[16]</sup>, Friedmann<sup>[17]</sup>, Richards y Andronicou<sup>[18]</sup>, Ju y Kyriakides<sup>[19]</sup>, Pedersen y Jensen<sup>[20]</sup>, Ballet y Hobbs<sup>[21]</sup>, Taylor y Tran<sup>[22, 24]</sup>, Maltby y Calladine<sup>[23]</sup>, Croll<sup>[25]</sup>, Hunt y Blackmore<sup>[26]</sup>, entre otros. Sin embargo, todos estos modelos utilizan la teoría de vigas de Euler-Bernoulli que, como ya se mencionó, no considera esfuerzos ni deformaciones debidas a la fuerza cortante.

#### 1-4 Modelo Analítico de Ductos en Suelo Marino Plástico y Recto

La siguiente modificación relevante del modelo analítico la realizaron Wang et al<sup>[27]</sup>, quienes resolvieron el problema de pandeo de ductos en suelo marino blando, como se muestra en la *Figura 1-5c*. El término “blando” se refiere a suelo plástico.



**FIGURA 1-5c** Modelos del suelo marino.

El concepto de suelo plástico implica que pueden presentarse deformaciones permanentes del suelo, debidas a que éste no es capaz de soportar las cargas del ducto. La capacidad de resistencia del suelo se mide mediante el parámetro de rigidez de éste,  $k$ . Un valor de rigidez de suelo  $k \leq 1$  implica que éste es un suelo plástico, por lo que no es capaz de soportar las cargas ocasionadas por el ducto, de modo que el ducto podrá presentar desplazamiento negativo (eje  $y$  negativo, *Figura 1-5a*) en la longitud en donde se presenta dicha rigidez. Wang et al<sup>[27]</sup> predijeron la posibilidad del pandeo vertical negativo, pero no consideraron la imperfección geométrica inicial del ducto como en el modelo anterior (sección **1-3**).

Las suposiciones principales para este modelo son<sup>[27]</sup>:

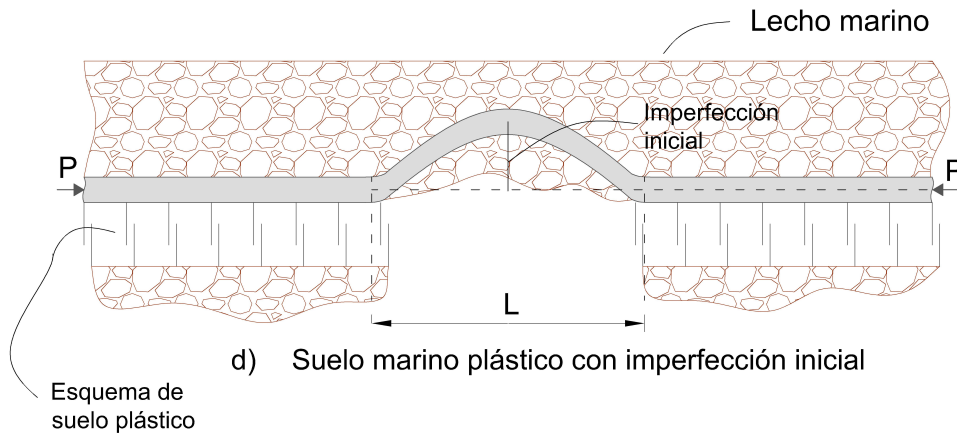
*Suposiciones principales:*

- 1) **El suelo marino se considera plástico y uniforme.** Aunque las condiciones topográficas marinas suelen ser bastante irregulares, aquí se considera que el suelo no sufre deformaciones. Sin embargo, a diferencia de los dos modelos anteriores, en el modelo analítico con suelo plástico y recto se asume que el suelo es blando, lo que permite deformaciones plásticas. Además, no se consideran deformaciones iniciales del suelo, lo que implica que el ducto es recto.
- 2) **El ducto se modela con una teoría de vigas de Euler-Bernoulli.** Esta suposición es la misma que para los dos modelos anteriores (secciones **1-2** y **1-3**).

### 1-5 Modelo Analítico de Ductos en Suelo Marino Plástico con Imperfección Inicial

Shi et al<sup>[28]</sup>, analizaron el problema del pandeo de ductos considerando una imperfección inicial (es decir, suelo no uniforme) y suelo blando (deformaciones plásticas), como se muestra en la *Figura 1-5d*. Los autores<sup>[28]</sup> encontraron que el pandeo vertical está fuertemente influenciado por la resistencia del suelo, ya que la carga térmica (y por lo tanto la axial) que se requiere para iniciar el pandeo en éste modelo, es menor que en los modelos anteriores.

En la *Figura 1-6* se muestra el modelo empleado, cuyas ecuaciones que gobiernan la configuración del ducto están dadas por<sup>[28]</sup>:



**FIGURA 1-5d** Modelos del suelo marino.

*Ecuaciones que gobiernan el pandeo:*

$$EI \frac{d^4 v_1}{dx^4} + N_t \cdot \frac{d^2 v_1}{dx^2} = -w \quad , \quad \text{para } 0 \leq x \leq l_1 \quad \text{Fig.1 - 6} \quad (1.17)$$

$$EI \frac{d^4 v_2}{dx^4} + N_t \cdot \frac{d^2 v_2}{dx^2} = r - w \quad , \quad \text{para } l_1 \leq x \leq l_2 \quad \text{Fig.1 - 6} \quad (1.18)$$

donde:

$l_1$  , es la longitud del primer tramo de pandeo con respecto a  $x$  (*Figura 1-6*) [m].

$l_2$  , es la longitud del segundo tramo de pandeo con respecto a  $x$ , empieza en  $x = l_1$  (*Figura 1-6*) [m].

$EI$  , es la rigidez del ducto a la flexión [ $N \cdot m^2$ ].

$N_t$  , es la fuerza axial en  $l_2$  [N].

$x$  , es la distancia medida a lo largo del eje  $x$  [m].

$v_1$  , es el desplazamiento vertical desde  $x = 0$  a  $x = l_1$  [m].

$v_2$  , es el desplazamiento vertical desde  $x = l_1$  a  $x = l_2$  [m].

$w$  , es el peso sumergido de la ducto por unidad de longitud [ $N/m$ ].

$r$  , es la resistencia al hundimiento [N].

El símbolo entre corchetes es la unidad de cada uno de los términos.

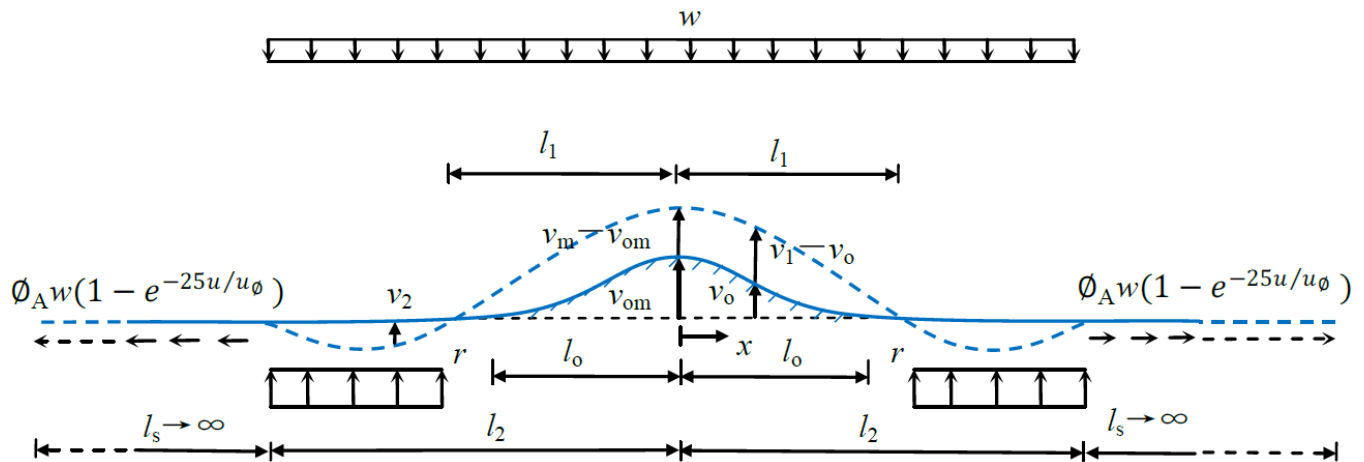


FIGURA 1-6 Pandeo vertical de ducto con imperfección inicial en suelo blando (Fuente: Shi et al<sup>[27]</sup>).

Las soluciones generales de las Ecuaciones 1.17 y 1.18 están dadas por<sup>[28]</sup>:

Soluciones generales de las ecuaciones que gobiernan el pandeo:

$$v_1(x) = A_1 \cos \mu x + A_2 \sin \mu x + A_3 x + A_4 - \frac{r_0 x^2}{2\mu^2} \quad (1.19)$$

$$v_2(x) = A_5 \cos \mu x + A_6 \sin \mu x + A_7 x + A_8 + k \cdot \frac{r_0 x^2}{2\mu^2} \quad (1.20)$$

donde:

$$k = \frac{r - w}{w}, \quad [-]; \quad r_0 = \frac{w}{EI}, \quad \left[ \frac{1}{m^3} \right]; \quad \mu = \sqrt{\frac{N_t}{EI}}, \quad \left[ \frac{1}{m} \right] \quad (1.21)$$

El término  $k$  es el **parámetro de la rigidez del suelo**, y los términos de  $A_1 - A_8$  son constantes de integración que se obtienen aplicando las condiciones de frontera de dicho modelo (no se especifican aquí; para información más detallada, consultar referencia<sup>[27, 31]</sup>).

Las suposiciones principales para este modelo son:

Suposiciones principales:

- 1) **El suelo marino se considera plástico y no uniforme.** Debido a las condiciones topográficas marinas que suelen ser bastante irregulares, se considera que el suelo es blando y sufre deformaciones plásticas. Además, se asume que el suelo no es uniforme, lo que implica que hay un desplazamiento inicial del ducto.
- 2) **El ducto se modela con una teoría de vigas de Euler-Bernoulli.** Esta suposición es la misma que para los tres modelos anteriores.

Debido a que este modelo considera la posibilidad de un suelo blando, el ducto puede presentar un pandeo vertical negativo. Además, considera dos ecuaciones que gobiernan la forma completa del tramo de línea, ecuaciones 1.17 y 1.18.

Como se mencionó en la Problemática a Analizar, en este trabajo se aborda un aspecto que no se ha tratado en los modelos presentados aquí, el cual consiste en el análisis de los efectos del esfuerzo cortante en el pandeo, con un modelo de suelo marino plástico no uniforme, es decir, con imperfección inicial en el ducto, con el fin de **investigar si los esfuerzos y deformaciones por cortante tienen alguna influencia en la predicción del pandeo** y, de ser así, determinar sus consecuencias. Para ello, utilizaremos la teoría de vigas con el campo de desplazamientos propuesto por Engesser-Timoshenko<sup>[29,30]</sup>, la cual considera dichos efectos en el pandeo de columnas. También, investigaremos el efecto de considerar que las secciones transversales de la viga no se mantienen planas después de la deformación, y se estudiará la distribución de esfuerzos y deformaciones en una sección cualquiera.

Los modelos analíticos propuestos en la literatura utilizado para predecir el pandeo global de ductos submarinos enterrados ha sido (y sigue siendo) un modelo basado en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, la cual no considera los esfuerzos y las deformaciones debidas a la fuerza cortante. El modelo de suelo, base para el desarrollo de este capítulo, es el propuesto por Shi et al.<sup>[28,31]</sup>, el cual considera suelo plástico en cierta sección del ducto, con lo cual es posible que se presente pandeo vertical negativo en dicha sección (*Figura 1-6*), además de que se considera una imperfección inicial del ducto (debido a un asentamiento del mismo, por el entrecruce con otro ducto o alguna roca). En éste capítulo se propone modelar el ducto con la Teoría de Vigas de Engesser-Timoshenko, lo cual implica que se tomarán en cuenta los efectos de las deformaciones y los esfuerzos debidos al cortante, y se proponen ecuaciones que gobiernen el fenómeno del pandeo de ductos enterrados en suelos plásticos con imperfección inicial.

**CONTENIDO**

<b>2-1</b>	Teoría de Vigas de Euler-Bernoulli	14
2-1.1	Pandeo de Columnas en la <b>EBT</b>	15
<b>2-2</b>	Teoría de Vigas de Engesser-Timoshenko	15
2-2.1	Pandeo de Columnas en la <b>TBT</b>	16
<b>2-3</b>	Modelo de Pandeo Vertical de Ductos considerando efectos de Cortante ( <b>SUBM</b> )	17
2-3.1	Solución de las ecuaciones que gobiernan el pandeo en el <b>SUBM</b>	21
2-3.2	Carga Axial	23

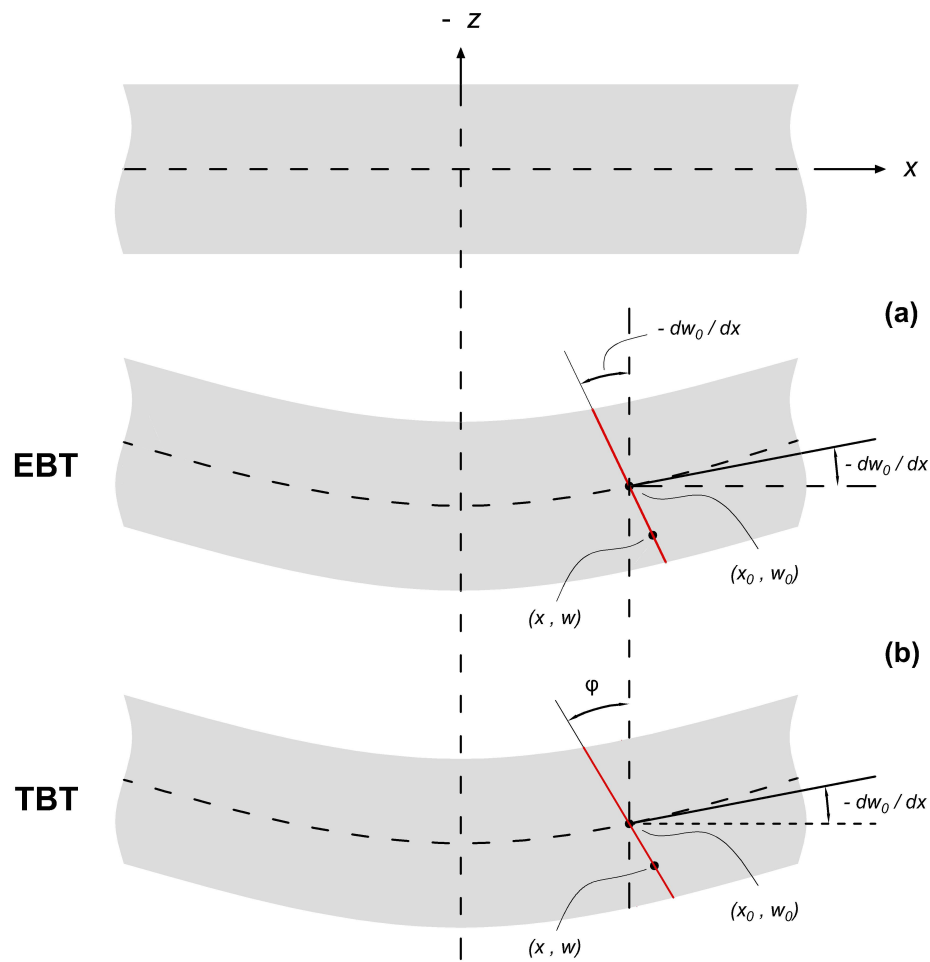
## 2-1 Teoría de Vigas de Euler-Bernoulli (EBT)

La teoría de vigas de Euler-Bernoulli (*Euler Beam Theory*, **EBT**) es una teoría de cuarto orden, cuyo campo de desplazamiento está dado por<sup>[30]</sup>:

Campo de desplazamientos en la **EBT**:

$$u^E(x, z) = -z \frac{dw_0^E}{dx} \quad (2.1a)$$

$$w^E(x, z) = w_0^E(x) \quad (2.1b)$$



**FIGURA 2-1** Configuración deformada de (a) Teoría de Vigas de Euler-Bernoulli, (b) Teoría de Vigas de Engesser-Timoshenko.

Como se muestra en la *Figura 2-1a*,  $w_0$  es la deflexión transversal en el punto  $(x, 0)$ , sobre el eje  $z = 0$ ; el superíndice  $E$  en las ecuaciones anteriores hace referencia a la teoría de Euler-Bernoulli. El campo de desplazamientos, *Ecuaciones 2.1a* y *2.1b*, implica que las secciones transversales se mantienen planas después de la deformación (recta en color rojo, *Figura 2-1a*). Como resultado de lo anterior, el esfuerzo cortante y las deformaciones por cortante se desprecian. En la **EBT**, se tienen cuatro condiciones de frontera en total (dos por cada extremo de la viga). Específicamente, las condiciones

esenciales de frontera son el desplazamiento  $w_0^E$  y la pendiente  $\theta = dw_0^E/dx$ ; mientras que las condiciones naturales de frontera son la fuerza cortante  $V_x^E = dM_x^E/dx$ , o el momento flexionante  $M_x^E$ .

### 2-1.1 Pandeo de columnas en la EBT

Con base en la **EBT**, la ecuación que gobierna el pandeo de columnas está dada por<sup>[30]</sup>:

*Ecuación que gobierna el pandeo de columnas en la EBT:*

$$D_x \frac{d^4 w^E}{dx^4} + N^E \frac{d^2 w^E}{dx^2} = 0 \quad (2.2)$$

donde  $D_x = EI_y$ ,  $E$  es el módulo de elasticidad o de Young,  $I_y$  es el momento de inercia de la sección transversal alrededor del eje  $y$ , y  $N^E$  es la fuerza axial de compresión.

La *Ecuación 2.2* es una ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden, por lo que la **EBT** se conoce también como teoría de vigas de cuarto orden.

### 2-2 Teoría de Vigas de Engesser-Timoshenko (TBT)

La teoría de vigas de Engesser-Timoshenko (*Timoshenko Beam Theory*, **TBT**) está basada en el campo de desplazamientos<sup>[30]</sup>:

*Campo de desplazamientos en la TBT:*

$$u^T(x, z) = z\varphi^T(x) \quad (2.3a)$$

$$w^T(x, z) = w_0^T(x) \quad (2.3b)$$

donde  $\varphi$  denota la rotación de la sección transversal. En la *Figura 2-1b*, se muestra la viga de Engesser-Timoshenko. Note que la pendiente  $\theta^T = dw_0^T/dx$  con respecto al eje  $x$  es la misma que la pendiente de la **EBT**. Además, según el desplazamiento descrito por la *Ecuación 2.3a*, las secciones transversales no permanecen ortogonales a la sección después de la deformación, por lo que se genera una nueva pendiente  $\varphi$  con respecto al eje  $z$ . El superíndice  $T$  en las expresiones anteriores se refiere a la **TBT**. Esta teoría de vigas tiene dos condiciones de frontera por extremo de la viga; específicamente<sup>[30]</sup>:

*Condiciones esenciales de frontera (o cinemáticas) de la TBT:*

$$\begin{Bmatrix} w_0^T \\ \varphi^T \end{Bmatrix} \quad (2.4a)$$

*Condiciones naturales de frontera (fuerza) de la TBT:*

$$\begin{Bmatrix} V_x^T \\ M_x^T \end{Bmatrix} \quad (2.4b)$$

Utilizando las relaciones constitutivas<sup>[30]</sup>:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad , \quad \sigma_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (2.5)$$



podemos expresar el momento flexionante y la fuerza cortante en términos de los desplazamientos generalizados  $(w_0^T, \varphi^T)^{[30]}$ :

Relaciones Esfuerzo-Desplazamiento en la **TBT**:

$$M_x^T = \int_A z \sigma_x dA = D_x \frac{d\varphi^T}{dx} \quad (2.6)$$

$$V_x^T = K_s \int_A \sigma_{xz} dA = K_s A_{xz} \left( \varphi^T + \frac{dw_0^T}{dx} \right) \quad (2.7)$$

donde  $K_s$  es el factor de corrección por cortante, y<sup>[30]</sup>:

Factores constantes para secciones transversales constantes en la **TBT**:

$$D_x = E_x \int_A z^2 dA = E I_y \quad , \quad A_{xz} = G_{xz} \int_A dA = G_{xz} A \quad (2.8)$$

Las ecuaciones de equilibrio en la **TBT** están dadas por las expresiones<sup>[30]</sup>:

Ecuaciones de equilibrio de la viga de Engesser-Timoshenko:

$$-\frac{dM_x^T}{dx} + V_x^T = 0 \quad , \quad -\frac{dV_x^T}{dx} = \omega \quad (2.9)$$

donde  $\omega$  es la carga distribuida transversal sobre la viga.

### 2-2.1 Pandeo de columnas en la TBT

Las ecuaciones de pandeo para la **TBT** están dadas, en función de  $\varphi^T$  y  $w^T$ , por las expresiones<sup>[30]</sup>:

Ecuaciones de equilibrio de columnas en la **TBT**:

$$D_x \frac{d^2 \varphi^T}{dx^2} = K_s A_{xz} \left( \varphi^T + \frac{dw^T}{dx} \right) \quad (2.10)$$

$$N^T \frac{d^2 w^T}{dx^2} = K_s A_{xz} \left( \frac{d\varphi^T}{dx} + \frac{d^2 w^T}{dx^2} \right) \quad (2.11)$$

Después de algunas operaciones, se tienen las ecuaciones de pandeo en términos de una sola variable<sup>[30]</sup>:

Ecuaciones que gobiernan el pandeo de columnas en la **TBT** en términos de una sola variable:

$$\frac{d^4 w^T}{dx^4} + \left( \frac{N^T / D_x}{1 - N^T / K_s A_{xz}} \right) \frac{d^2 w^T}{dx^2} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{d^3\varphi^T}{dx^3} + \left( \frac{N^T/D_x}{1 - N^T/K_S A_{xz}} \right) \frac{d\varphi^T}{dx} = 0 \quad (2.13)$$

En la siguiente sección resolveremos estas ecuaciones para el caso particular planteado en este trabajo.

### 2-3 Modelo de Pandeo Vertical de Ductos considerando efectos de Cortante (SUBM)

En esta sección se propone resolver el pandeo de ductos enterrados en suelos blandos considerando efectos de cortante con la Teoría de Vigas de Timoshenko (**Shear Upheaval Buckling Model, SUBM**), *Figura 2-2*. Para ello, resulta necesario plantear las siguientes suposiciones<sup>[28,31]</sup>:

*Suposiciones principales en el SUBM:*

1. Se considera que hay simetría en el pandeo. El sistema coordenado general se muestra en la *Figura 2-2*. El eje de simetría es el eje vertical  $z$ , y es en la dirección en la que se desarrolla la deflexión.
2. Se considera que el suelo marino se comporta plástico en cierta sección  $L_2$ , y además existe una imperfección inicial  $w_{imp}$ , *Figura 2-2*. Esto implica que puede generarse un pandeo vertical negativo en suelos blandos  $w_{down}$ , longitud  $L_2$ .
3. La fuerza normal  $N_0$ , llamada fuerza axial efectiva, es constante y se presenta en la longitud de pandeo  $L_2$ . Además, las cargas distribuidas  $\omega$  y  $\omega_{ind}$  también se consideran constantes.
4. Para el tramo de viga con longitud  $2L_1$ , se tienen como condiciones de frontera apoyos de pasador en ambos extremos.
5. Para el tramo de viga con longitud  $L_2$ , se tiene como condición de frontera apoyo de pasador para un extremo, mientras que el otro extremo tiene condiciones especiales: en  $x = L_2$  la pendiente  $dw_{down}/dx = 0$ , pero el momento flexionante también es  $M_{down} = 0$ .
6. El ducto entero se modela con la teoría de vigas de Timoshenko.
7. La fuerza axial de fricción no se considera constante, y está dada por la ecuación<sup>[18]</sup>.

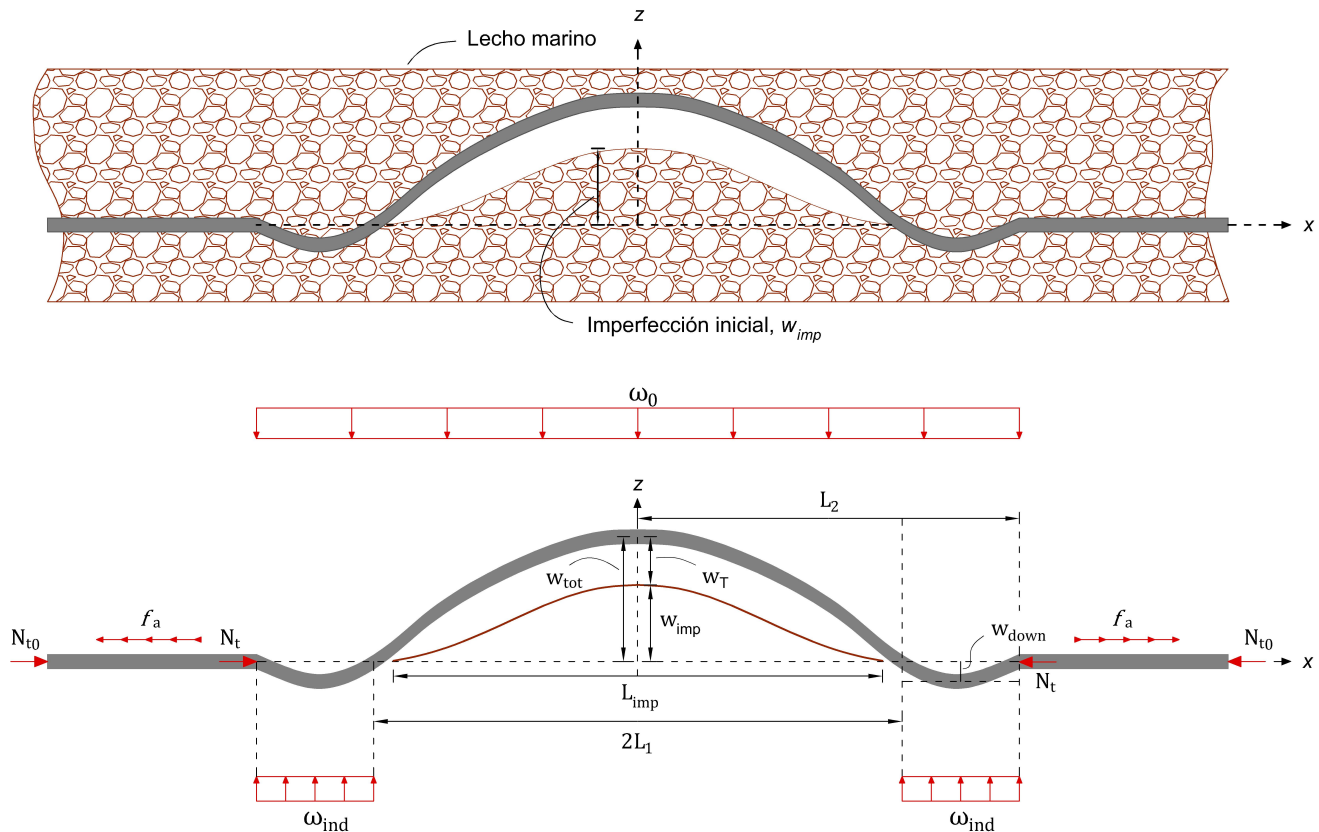
$$f_a = \phi_A (1 - e^{-25 u/u_\phi}) \quad (2.14)$$

donde

$\phi_A = 0.7$  , es el coeficiente de fricción axial totalmente movilizado.

$u$  , es el desplazamiento axial del ducto.

$u_\phi = 5 \text{ mm}$  , es el movimiento correspondiente al desplazamiento total obtenido.



**FIGURA 2-2** Sistema de referencia en el **SUBM**

El procedimiento de análisis se dividirá en dos partes, como se indica a continuación:

- 1. Ecuación de pando para la longitud  $L_1$ .** Se deriva la Ecuación 2.10 y utilizando la Ecuación 2.11, más el trabajo externo (carga distribuida), se obtiene:

$$D_x \frac{d^3 \varphi^T}{dx^3} = N_t \frac{d^2 w_{tot}}{dx^2} - \omega_0 \quad (2.15)$$

La Ecuación 2.11 se resuelve para  $d\varphi/dx$  y se obtiene:

$$\frac{d\varphi}{dx} = - \left( 1 - \frac{N_t}{K_s A_{xz}} \right) \frac{d^2 w_{tot}}{dx^2} \quad (2.16)$$

Con la Ecuación 2.15 y la segunda derivada de la Ecuación 2.16, se obtiene la Ecuación 2.17. Derivando la Ecuación 2.10 y utilizando la Ecuación 2.15, se obtiene la Ecuación 2.18.

- 2. Ecuación de pando para la longitud  $L_2$ .** Las operaciones para las ecuaciones de pando en la longitud  $L_2$  son las mismas que las anteriores, pero el trabajo externo ahora es  $k\omega_0$ .

Con base en las suposiciones para el **SUBM**, se tienen las siguientes ecuaciones de gobierno, las condiciones de frontera y las ecuaciones de compatibilidad necesarias para resolver el sistema de ecuaciones:

Ecuaciones que gobiernan el pandeo vertical en el **SUBM**:

$$\frac{d^4 w_{tot}}{dx^4} + \mu^2 \frac{d^2 w_{tot}}{dx^2} = -\mathbb{A}_1 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} (-L_1 \leq x \leq L_1) \quad (2.17)$$

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \mathbb{A}_2 \frac{d^2 w_{tot}}{dx^2} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} (-L_1 \leq x \leq L_1) \quad (2.18)$$

$$\frac{d^4 w_{down}}{dx^4} + \mu^2 \frac{d^2 w_{down}}{dx^2} = k\mathbb{A}_1 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} (\pm L_1 \leq x \leq \pm L_2) \quad (2.19)$$

$$\frac{d\phi_2}{dx} = \mathbb{A}_2 \frac{d^2 w_{tot}}{dx^2} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} (\pm L_1 \leq x \leq \pm L_2) \quad (2.20)$$

donde:

$w_T$  , es la deflexión calculada con la **TBT** para la longitud  $L_1$ .

$w_{tot} = w_T + w_{imp}$  , es la deflexión total del ducto.

$M_T = D_x \frac{d\phi_1}{dx}$  , es el momento flexionante para la longitud  $L_1$ .

$M_{down} = D_x \frac{d\phi_2}{dx}$  , es el momento flexionante para la longitud  $L_2$ .

$w_{imp}$  , es la imperfección inicial.

$w_{down}$  , es la deflexión calculada con la **TBT** para la longitud  $L_2$ .

$$\mu^2 = \left( \frac{N_t/D_x}{1 - N_t/K_S A_{xz}} \right) \quad (2.21)$$

$$\mathbb{A}_1 = \left( \frac{\omega_0/D_x}{1 - N_t/K_S A_{xz}} \right) \quad (2.22)$$

$$\mathbb{A}_2 = \left( \frac{N_t}{K_S A_{xz}} - 1 \right) \quad (2.23)$$

$$k = \left( \frac{\omega_{ind} - \omega}{\omega_u + \omega} \right) \quad (2.24)$$

$\omega_0 = \omega_u + \omega$  , es la suma de la resistencia del suelo y el peso sumergido del ducto.

$N_t = N^T$  , es la fuerza axial en  $L_2$  ( $-L_2 \leq x \leq L_2$ ).

$\omega$  , es el peso sumergido del ducto (por unidad de longitud).

$\omega_{ind}$  , es la resistencia del suelo a la inmersión del ducto (por unidad de longitud).

$\omega_u$  , es la resistencia del suelo al levantamiento del ducto (por unidad de longitud).

$D_x = EI$  , es la rigidez a la flexión (módulo de elasticidad por momento de inercia).

Las condiciones de frontera del problema son<sup>[27,30]</sup>:

Condiciones esenciales de frontera en el **SUBM**:

$$\theta_T = \frac{dw_{tot}}{dx} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (2.25a)$$

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (2.25b)$$

$$\varphi_2 = 0 \quad \text{en } x = \pm L_2 \quad (2.25c)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = 0 \quad \text{en } x = \pm L_1 \quad (2.25d)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dx} = 0 \quad \text{en } x = \pm L_1 \quad (2.25e)$$

$$w_{down} = 0 \quad \text{en } x = \pm L_1 \quad (2.25f)$$

$$\frac{dw_{down}}{dx} = 0 \quad \text{en } x = \pm L_2 \quad (2.25g)$$

Condiciones naturales de frontera en el **SUBM**:

$$V_T = K_s A_{xz} \left( \varphi_1 + \frac{dw_{tot}}{dx} \right) = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (2.26a)$$

$$M_{down} = D_x \frac{d\varphi_2}{dx} = 0 \quad \text{en } x = \pm L_2 \quad (2.26b)$$

Ecuaciones de compatibilidad en el **SUBM**:

$$\theta_T = \theta_{down} \quad \text{en } x = L_1 \quad \text{Fig. 2 - 2} \quad (2.27a)$$

$$w_T = w_{down} \quad \text{en } x = L_1 \quad \text{Fig. 2 - 2} \quad (2.27b)$$

$$\frac{d^2 w_{tot}}{dx^2} = \frac{d^2 w_{down}}{dx^2} \quad \text{en } x = L_1 \quad \text{Fig. 2 - 2} \quad (2.27c)$$

$$\frac{d^3 w_{tot}}{dx^3} = \frac{d^3 w_{down}}{dx^3} \quad \text{en } x = L_1 \quad \text{Fig. 2 - 2} \quad (2.27d)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{en } x = \pm L_1 \quad \text{Fig. 2 - 2} \quad (2.27e)$$

donde:

$V_T$  , es la fuerza cortante para  $x \leq L_1$ .

$$V_{down} = K_s A_{xz} \left( \varphi_2 + \frac{dw_{down}}{dx} \right) , \quad \text{es la fuerza cortante para } L_1 \geq x \leq L_2. \quad (2.28)$$

### 2-3.1 Solución de las ecuaciones que gobiernan el pandeo vertical en el SUBM

Se presentan las soluciones generales de las Ecuaciones 2.17, 2.18, 2.19 y 2.20. En la solución de la Ecuación 2.17, se toma la raíz negativa de  $\mu$  para asegurar el máximo desplazamiento:

Solución general de la deflexión en el segmento  $L_1$ , Ecuación 2.17:

$$w_{tot} = -\frac{A_1 x^2}{2\mu^2} + \frac{C_1 \cos(\mu x)}{\mu^2} + \frac{C_2 \sin(\mu x)}{\mu^2} + x C_4 + C_3 \quad \forall x, -L_1 \leq x \leq L_1 \quad (2.29a)$$

Solución general de la pendiente en el segmento  $L_1$ , Ecuación 2.17:

$$\theta_T = \frac{dw_{tot}}{dx} = \frac{-A_1 x + \mu^2 C_4 + \mu C_2 \cos[x\mu] - \mu C_1 \sin[x\mu]}{\mu^2} \quad \forall x, -L_1 \leq x \leq L_1 \quad (2.29b)$$

Solución general de la pendiente de la sección transversal en el segmento  $L_1$ , Ecuación 2.18:

$$\varphi_1 = -\frac{A_1 A_2 (x\mu + \csc[\mu L_2])(-L_1 + kL_1 - kL_2)\mu + (1+k) \sin[(L_1 - L_2)\mu] \sin[x\mu]}{\mu^3} + C_1 \quad \forall x, -L_1 \leq x \leq L_1 \quad (2.29c)$$

Solución general del momento flexionante en el segmento  $L_1$ , Ecuación 2.29b:

$$M_T = D_x \frac{d\varphi_1}{dx} = -\frac{A_1}{\mu^2} - C_1 \cos[x\mu] - C_2 \sin[x\mu] \quad \forall x, -L_1 \leq x \leq L_1 \quad (2.29d)$$

Solución general de la deflexión en el segmento  $L_2$ , Ecuación 2.19:

$$w_{down} = \frac{A_1 k x^2 + 2\mu^2(C_3 + xC_4) - 2C_1 \cos[x\mu] - 2C_2 \sin[x\mu]}{2\mu^2} \quad \forall x, \pm L_1 \leq x \leq \pm L_2 \quad (2.30a)$$

Solución general de la pendiente en el segmento  $L_2$ , Ecuación 2.19:

$$\theta_{down} = \frac{dw_{down}}{dx} = \frac{A_1 k x + \mu^2 C_4 + \mu C_2 \cos[x\mu] - \mu C_1 \sin[x\mu]}{\mu^2} \quad \forall x, \pm L_1 \leq x \leq \pm L_2 \quad (2.30b)$$

Solución general de la pendiente de la sección transversal en el segmento  $L_2$ , Ecuación 2.20:

$$\varphi_2 = \frac{A_1 A_2}{2\mu^3} \{ \csc[\mu L_2] [-(1+k) \cos[(L_1 + L_2 - x)\mu] + (1+k) \cos[(L_1 - L_2 + x)\mu] + 2\mu(kx \sin[L_2\mu] + (L_1 + kL_1 - kL_2) \sin[x\mu])] \} + C_1 \quad \forall x, \pm L_1 \leq x \leq \pm L_2 \quad (2.30c)$$

Solución general del momento flexionante en el segmento  $L_2$ , Ecuación 2.30b:

$$M_{down} = D_x \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{A_1 k}{\mu^2} - C_1 \cos[x\mu] - C_2 \sin[x\mu] \quad \forall x, \pm L_1 \leq x \leq \pm L_2 \quad (2.30d)$$

Aplicando las condiciones de frontera, se tienen las **Ecuaciones que Gobiernan el Pandeo en el SUBM**:

Solución particular de la deflexión, Ecuación 2.29a del **SUBM**:

$$w_{tot}(x) = \frac{1}{2\mu^4} A_1 (2(1+k) - ((1+k)L_1^2 - 2(1+k)L_1L_2 + kL_2^2 + x^2)\mu^2 - 2(1+k)\cos[L_1\mu]\cos[x\mu] \\ + 2(L_1 + kL_1 - kL_2)\mu(\cos[L_2\mu] - \cos[x\mu])\csc[L_2\mu] + 2(1+k)(\cos[x\mu]\cot[L_2\mu] - \csc[L_2\mu])\sin[L_1\mu]) \\ \forall x, -L_1 \leq x \leq L_1 \quad (2.31a)$$

Solución particular de la pendiente, Ecuación 2.29b del **SUBM**:

$$\theta_T(x) = \frac{A_1}{2\mu^4} (-2x\mu^2 + 2(1+k)\mu \cos[L_1\mu] \sin[x\mu] + 2(L_1 + kL_1 - kL_2)\mu^2 \csc[L_2\mu] \sin[x\mu] - \\ - 2(1+k)\mu \cot[L_2\mu] \sin[L_1\mu] \sin[x\mu]) \\ \forall x, -L_1 \leq x \leq L_1 \quad (2.31b)$$

Solución particular del momento flexionante, Ecuación 2.29c del **SUBM**:

$$\varphi_1(x) = -\frac{A_1 A_2 (x\mu + \csc[\mu L_2]) (-L_1 + kL_1 - kL_2)\mu + (1+k) \sin[(L_1 - L_2)\mu] \sin[x\mu]}{\mu^3} \\ \forall x, -L_1 \leq x \leq L_1 \quad (2.31c)$$

Solución particular de la pendiente de la sección transversal, Ecuación 2.29d en el **SUBM**:

$$M_T(x) = \frac{A_1}{2\mu^4} (-2\mu^2 + 2(1+k)\mu^2 \cos[L_1\mu] \cos[x\mu] + 2(L_1 + kL_1 - kL_2)\mu^3 \cos[x\mu] \csc[L_2\mu] \\ - 2(1+k)\mu^2 \cos[x\mu] \cot[L_2\mu] \sin[L_1\mu]) \\ \forall x, -L_1 \leq x \leq L_1 \quad (2.31d)$$

Solución particular de la deflexión, Ecuación 2.30a del **SUBM**:

$$w_{down}(x) = \frac{A_1}{2\mu^4} (-(L_2 - x)(-2(1+k)L_1 + k(L_2 + x))\mu^2 + 2(L_1 + kL_1 - kL_2)\mu \cot[L_2\mu] - \\ - 2(L_1 + kL_1 - kL_2)\mu \cos[x\mu] \csc[L_2\mu] + (1+k) \csc[L_2\mu] (-2 \sin[L_1\mu] + \\ + \sin[(L_1 + L_2 - x)\mu] + \sin[(L_1 - L_2 + x)\mu])) \\ \forall x, \pm L_1 \leq x \leq \pm L_2 \quad (2.32a)$$

Solución particular de la pendiente, Ecuación 2.30b en el **SUBM**:

$$\theta_{down}(x) = \frac{A_1}{2\mu^4} (k(-L_2 + x)\mu^2 + (-2(1+k)L_1 + k(L_2 + x))\mu^2 + (1+k)(-\mu \cos[(L_1 + L_2 - x)\mu] + \\ + \mu \cos[(L_1 - L_2 + x)\mu]) \csc[L_2\mu] + 2(L_1 + kL_1 - kL_2)\mu^2 \csc[L_2\mu] \sin[x\mu]) \\ \forall x, \pm L_1 \leq x \leq \pm L_2 \quad (2.32b)$$

Solución particular de la pendiente de la sección transversal, Ecuación 2.30c de la en el **SUBM**:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) = \frac{A_1 A_2}{2\mu^3} \{ & \csc[\mu L_2](-1+k) \cos[(L_1 + L_2 - x)\mu] + (1+k) \cos[(L_1 - L_2 + x)\mu] + \\ & + 2\mu(kx \sin[L_2\mu] + (L_1 + kL_1 - kL_2) \sin[x\mu]) \} \quad \forall x, L_1 \leq x \leq L_2 \end{aligned} \quad (2.32c)$$

Solución particular del momento flexionante, Ecuación 2.30d de del **SUBM**:

$$\begin{aligned} M_{down}(x) = \frac{A_1}{2\mu^4} ( & 2k\mu^2 + 2(L_1 + kL_1 - kL_2)\mu^3 \cos[x\mu] \csc[L_2\mu] + (1+k) \csc[L_2\mu] \\ & (-\mu^2 \sin[(L_1 + L_2 - x)\mu] - \mu^2 \sin[(L_1 - L_2 + x)\mu])) \quad \forall x, \pm L_1 \leq x \leq \pm L_2 \end{aligned} \quad (2.32d)$$

### 2-3.2 Carga Axial

En el modelo propuesto existen dos cargas axiales; por un lado está la carga  $N_{t0}$  más allá de la longitud  $x > L_2$ , cuyo valor está dado por<sup>[8]</sup>:

$$N_{t0} = EA\alpha\Delta T \quad (2.33)$$

donde

$E$  = es el módulo de Young.

$A$  = es el área de la sección tranvesal del ducto.

$\alpha$  = es el coeficiente de expansión térmica del material del ducto.

$\Delta T$  = es el diferencial de temperatura entre el ducto y el ambiente.

La otra carga axial es  $N_t$ , cuyo desarrollo se encuentra en Shi<sup>[30]</sup> et al., y es la carga que se encuentra dentro de la longitud  $x \leq L_2$ . Se necesitan cuatro ecuaciones para determinar las relaciones para la carga  $N_t$ <sup>[30]</sup>:

$$N_{t0} - N_t = 2\phi_A \omega EA \left( u_\phi \frac{e^{\frac{25u_s}{u_\phi}} - 1}{25} - u_s \right) \quad (2.34)$$

$$u_s = \frac{L_2(N_{t0} - N_t)}{EA} - \frac{1}{2} \left[ \int_0^{L_1} \left( \frac{dw_{tot}}{dx} \right)^2 dx + \int_0^{L_2} \left( \frac{dw_{down}}{dx} \right)^2 dx \right] \quad (2.35)$$



En la *Ec. 2.30*,  $u_s$  es el valor de  $u$  en la *Ec. 2.14*, es decir,  $u_s = u$ . Para el caso en el que el ducto está libre de esfuerzos cuando es recto, no se considera la configuración inicial de la *Ec. 2.30*.

Las otras dos ecuaciones se obtienen aplicando las condiciones de frontera *Ec. 2.21f* y *Ec. 2.22b*, quedando:

$$\frac{A_1}{2\mu^4} ((L_1 - L_2)(-2(1+k)L_1\mu + k(L_1\mu + L_2\mu))\mu + 2(L_1\mu + kL_1\mu - kL_2\mu) \cot[L_2\mu] - 2(L_1\mu + kL_1\mu - kL_2\mu) \cos[L_1\mu] \csc[L_2\mu] + (1+k) \csc[L_2\mu](-2 \sin[L_1\mu] + \sin[(2L_1\mu - L_2\mu)] + \sin[L_2\mu])) = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{A_1(2k\mu^2 + 2(L_1\mu + kL_1\mu - kL_2\mu)\mu^2 \cot[L_2\mu] - 2(1+k)\mu^2 \csc[L_2\mu] \sin[L_1\mu])}{2\mu^4} = 0 \quad (2.37)$$

Combinando las ecuaciones *Ec. 2.29* a *Ec. 2.32*, se pueden obtener las relaciones para  $\Delta T$  y para  $L_2$ .

En este capítulo hemos planteado las ecuaciones que gobiernan el pandeo de ductos submarinos enterrados considerando los efectos del cortante con base en la teoría de vigas de Engesser-Timoshenko. Mediante las condiciones de frontera planteadas, se han resuelto dichas ecuaciones. En el siguiente capítulo se asignan valores a las ecuaciones anteriores para compararlas con el modelo de Shi et al<sup>[30]</sup>. Los resultados se grafican y se realizan observaciones.

En este capítulo se asignan algunos valores a las ecuaciones de la deflexión en el **SUBM** para comparar los resultados con el modelo de Shi et. al<sup>[30]</sup>. Los valores propuestos de los términos en las ecuaciones son los mismos para los dos modelos. Se graficará la deflexión para distintos valores de rigidez del suelo  $k$  y se realizarán observaciones de los resultados.

### CONTENIDO

**3-1** Comparación de Resultados con Modelos propuestos en la Literatura 26

3-1.1 Soluciones Teóricas de Ductos en Suelo Plástico con Imperfección Inicial 26

### 3-1 Comparación de Resultados con Modelos propuestos en la Literatura

A continuación se expresan los datos que serán utilizados para la solución numérica de las ecuaciones de la deflexión:

Valores considerados en el cálculo de la deflexión:

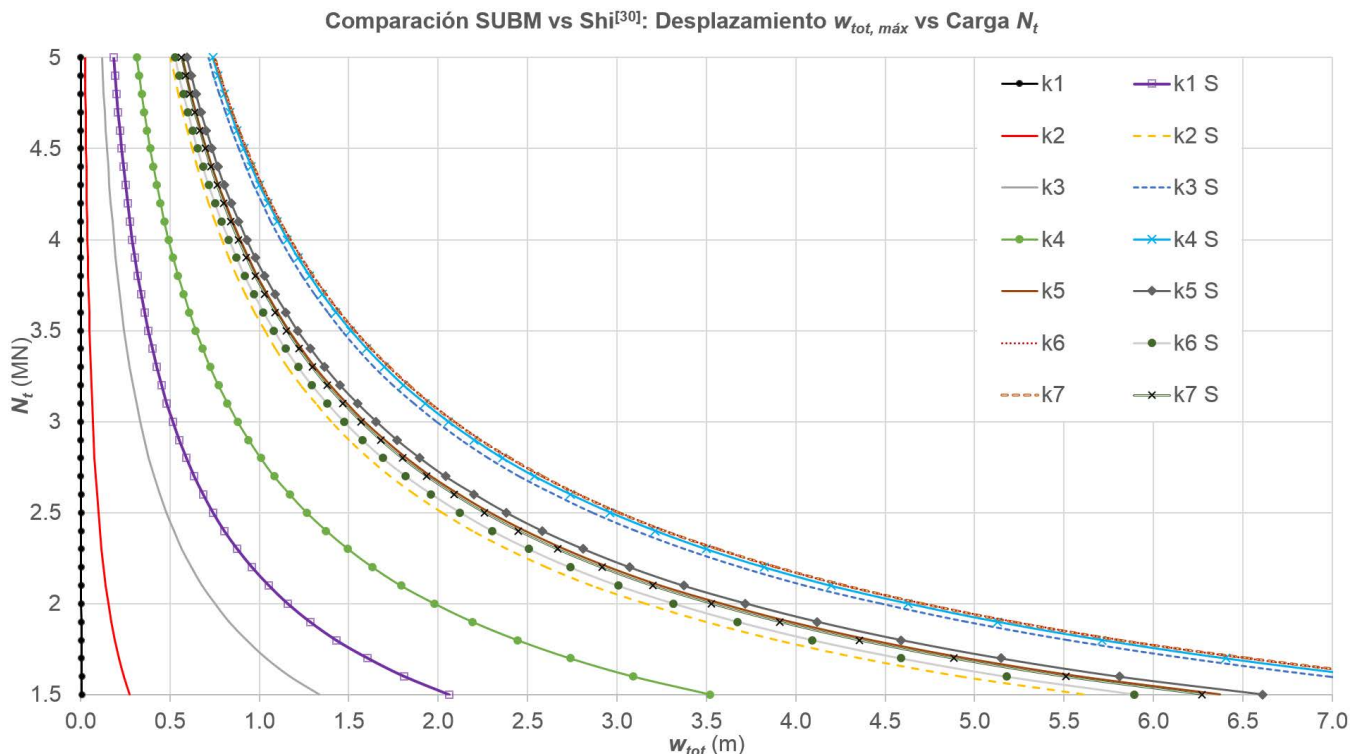
$$E = 210 \text{ GPa} \quad I = 150,909 \text{ cm}^4 \quad A = 299.2 \text{ cm}^2 \quad \alpha_{term} = 1.05 \times 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$$

$$G = 75 \text{ GPa} \quad \omega = 3.8 \text{ kN/m} \quad D_{ext} = 65 \text{ cm} \quad D_{int} = 62 \text{ cm} \quad h = 1.5 \text{ cm} \quad K = 0.53$$

#### 3-1.1 Soluciones teóricas de ductos en suelo plástico con imperfección inicial

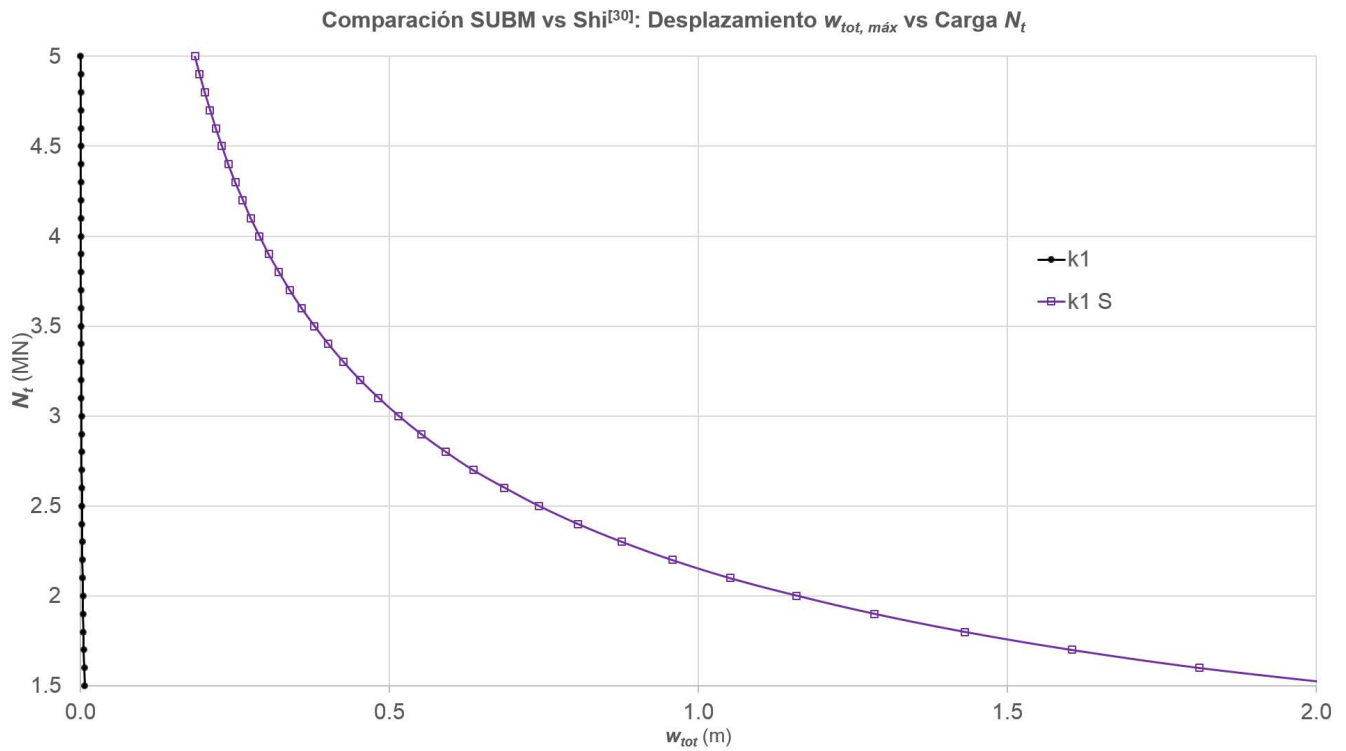
A continuación se grafican los resultados de la deflexión de Shi<sup>[30]</sup> et al., contra los del **SUBM**. Se presentan siete casos de rigidez del suelo para ambos modelos, *Tabla 3-1*. La *Fig. 3-1a* muestra una curva para cada valor de la rigidez  $k$ , donde la terminación *S* corresponde a las curvas del modelo de Shi<sup>[30]</sup> et al., para los respectivos valores de rigidez.

a)



**FIGURA 3-1** Gráfica comparativa entre el modelo analítico propuesto por Shi<sup>[30]</sup> et al., y el **SUBM**, Desplazamiento  $w_{tot}$  versus Carga  $N_t$ : a) Siete condiciones de rigidez del suelo, b) Rigidez del suelo  $k_1 = k_1 S = 0.1$ , c) Condición de rigidez del suelo  $k_1 = 0.1$  con una escala mayor para percibir la curva.

b)



c)

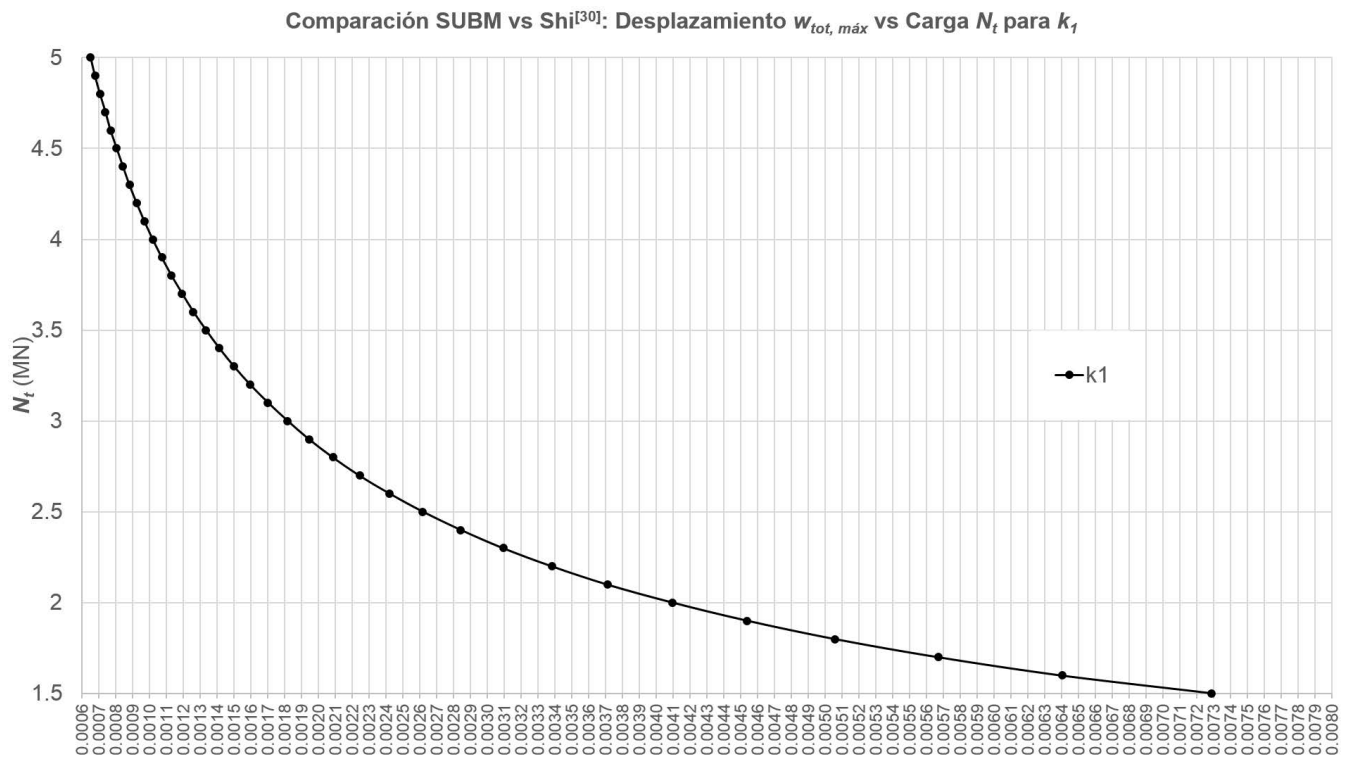


FIGURA 3-1c Condición de rigidez del suelo  $k_1 = 0.1$  con una escala mayor para percibir el comportamiento de la curva.

La Fig. 3-1 se construyó de la siguiente manera para graficar las curvas en el **SUBM**:

1. Con el método de Newton-Raphson, se calculan las raíces de las Ec. 2.31 y Ec. 2.32 con una rigidez del suelo  $k$  predeterminada.
2. Con base en la Ec. 2.26a, se calcula la ecuación de deflexión máxima, que resulta cuando  $x = 0$ ,  
Fig. 2-2:

$$w_{tot,m\acute{a}x} = \frac{A_1}{2\mu^4} (2(1+k) - ((1+k)(\mu L_1)^2 - 2(1+k)\mu L_1 \mu L_2 + k(\mu L_2)^2) - 2(1+k) \cos[\mu L_1] - 2((\mu L_1 + k\mu L_1 - k\mu L_2) + (1+k) \sin[\mu L_1]) \tan\left[\frac{\mu L_2}{2}\right]) \quad (3.4)$$

3. Para cada valor de rigidez del suelo  $k$  con sus respectivas raíces, y tomando la Ec. 3.4, se calcula la deflexión máxima del ducto para el rango de carga axial  $1.5 \leq N_t \leq 5 MN$ .

En la *Tabla 3-1* se muestran los valores de las raíces de las ecuaciones Ec. 2.31 y Ec. 2.32, para distintos valores de rigidez del suelo  $k$ . Las curvas para el modelo de Shi<sup>[30]</sup> et al., se graficaron tomando las ecuaciones del respectivo artículo, y asignando los mismo valores de las constantes, rigideces del suelo y raíces.

En el **Anexo 1** se encuentra la tabla con los valores necesarios para graficar la **Fig. 3-1**.

$k$	$\mu L_1$	$\mu L_2$	
0.1	0.3932	8.7999	$L_1 = 0.0447 L_2$
0.3	1.0092	8.6209	$L_1 = 0.1171 L_2$
0.5	1.5817	8.4803	$L_1 = 0.1865 L_2$
0.7	2.1982	8.2204	$L_1 = 0.2674 L_2$
1.0	2.9183	7.5510	$L_1 = 0.3865 L_2$
100	4.4736	4.5332	$L_1 = 0.9869 L_2$
1000	4.4914	4.4974	$L_1 = 0.9987 L_2$

**Tabla 3-1**

### Rigidez del suelo $k_1$

Se comparan primero las curvas donde la rigidez del suelo es  $k_1 = k_1 S = 0.1$ , Fig. 3-2a. Para un mismo valor de carga  $N_t = 2.5 MN$ , el desplazamiento obtenido mediante el **SUBM** resulta mucho menor ( $w_{tot} = 2.6 mm$ ) que el obtenido con Shi<sup>[30]</sup> et al., ( $w_{tot} = 742 mm$ ). Esto representa una diferencia de casi 740 mm por encima de la predicción hecha con el **SUBM**. En la Fig. 3-2b se grafican únicamente las curvas para dicho valor de rigidez, donde los valores de la curva  $k_1$  son tan pequeños que no es posible visualizarlos con precisión; la Fig. 3-2c muestra con claridad el comportamiento de la curva  $k_1$ , la cual se encuentra bastante cerca de cero, pero no toca al eje  $y$  en el rango de valores de carga considerados en este trabajo.

### Rigidez del suelo $k_2$

Se analiza ahora el caso en el que  $k_2 = k_2 S = 0.3$ . Para esta condición de rigidez, el comportamiento de las dos curvas es muy similar al anterior; para la condición de carga  $N_t = 2.5 \text{ MN}$ , el desplazamiento obtenido mediante el **SUBM** es  $w_{tot} = 0.099 \text{ m}$ , mientras que el obtenido con Shi<sup>[30]</sup> et al., resulta en  $w_{tot} = 2.019 \text{ m}$ , Fig. 3-1a, una diferencia de 1.92 metros. Para la condición de carga máxima considerada en este trabajo,  $N_t = 5 \text{ MN}$ , el desplazamiento obtenido mediante el **SUBM** es  $w_{tot} = 0.025 \text{ m}$ , mientras que el obtenido con Shi<sup>[30]</sup> et al., resulta en  $w_{tot} = 0.505 \text{ m}$ , lo que implica una diferencia de 0.48 m. En otras palabras, la diferencia de desplazamiento entre ambos modelos disminuye gradualmente conforme aumenta la carga, siendo siempre mayor el desplazamiento obtenido mediante Shi<sup>[30]</sup> et al., cuando la rigidez del suelo es  $k \leq 1$ .

En la *Tabla-2* se resumen los resultados para los distintos valores de rigidez del suelo y para la carga axial  $N_t = 2.5 \text{ MN}$ .

Con base en los resultados anteriores, se realizan las siguientes observaciones importantes:

1. Para todo el rango de carga considerado en este trabajo, la deflexión calculada mediante el **SUBM** es menor que la calculada con Shi<sup>[30]</sup> et al., cuando la rigidez del suelo es  $k \leq 1$ . Cuanto más se acerca el valor de la rigidez a cero, el desplazamiento calculado con el **SUBM** también tiende a cero, Fig. 3-1a y Fig. 3-1b.

Carga $N_T = 2.5 \text{ MN}$			
$k$	Desplazamiento (m)		%
	<b>SUBM</b>	Shi et al	
0.1	0.0026	0.742	74
0.3	0.099	2.019	192
0.5	0.480	2.862	238
0.7	1.265	2.961	170
1	2.289	2.380	9
100	3.012	2.121	89
1000	3.012	2.258	75

**Tabla 3-2**

2. Para la condición de carga  $N_t = 2.5 \text{ MN}$ , la diferencia de deflexión máxima entre los dos modelos se obtiene cuando la rigidez del suelo es  $k = 0.5$ , que es del 238%.
3. Para el caso del **SUBM**, la deflexión calculada con la rigidez  $k_6 = 100$  es igual a la calculada con  $k_7 = 1000$  hasta el rango milimétrico, mientras que para el modelo de Shi<sup>[30]</sup> et al., sí hay una diferencia: para  $k_6 S = 100$  la deflexión es  $w_{tot} = 2.121 \text{ m}$ , mientras que para  $k_7 S = 1000$  la deflexión es  $w_{tot} = 2.258 \text{ m}$ , lo que implica una diferencia de 13.7 centímetros.
4. Para la condición de carga  $N_t = 2.5 \text{ MN}$ , la menor diferencia de deflexión resulta cuando la rigidez del suelo es  $k = 1$ , que es del orden de 9%.
5. Para todo el rango de carga considerado en este trabajo, y con valores de rigidez  $k > 1$ , la deflexión calculada mediante el **SUBM** es mayor que la calculada con Shi<sup>[30]</sup> et al., área amarilla de la *Tabla-2*.

La **conclusión más importante** de los resultados anteriores se enuncia a continuación:

**Considerar los esfuerzos y deformaciones del ducto debidos a la fuerza cortante, tienen un importante efecto en la predicción del pandeo de ductos submarinos enterrados, considerando que el suelo tiene un comportamiento plástico.**

En éste capítulo se asignaron valores a algunos términos de las ecuaciones que gobiernan el pandeo en el **SUBM**. Como resultado, se obtuvo el desplazamiento máximo para siete valores de rigidez considerados, *Tabla 3-1*, y para un rango de carga axial  $1.5 \leq N_t \leq 5 MN$ . Con los mismos valores constantes, se resolvieron las ecuaciones para el modelo propuesto por Shi<sup>[30]</sup> et al., y se graficaron los resultados con el objetivo de compararlos. Se mostró que cuando la rigidez del suelo es  $k \leq 1$ , el desplazamiento obtenido con el modelo de Shi<sup>[30]</sup> et al., es mayor que el obtenido mediante el **SUBM** para todo el rango de carga, mientras que cuando la rigidez del suelo es  $k > 1$ , el desplazamiento del **SUBM** es mayor que el obtenido para el modelo de Shi<sup>[30]</sup> et al. En el capítulo siguiente se desarrollan simulaciones mediante modelos con elementos finitos con el software SIMULIA Abaqus®, y se compararán graficando los esfuerzos axiales del **SUBM** con aquellos obtenidos con las simulaciones numéricas.

En el capítulo anterior se compararon los resultados del **SUBM** con los del modelo de Shi et al<sup>[27]</sup>. En este capítulo se construyen dos modelos numéricos mediante el software Abaqus®. El primero consiste en un modelo con elementos viga-columna de pared gruesa y que consideran los esfuerzos y deformaciones debidas al cortante mediante la teoría de vigas de Timoshenko, mientras que el segundo modelo se construyó con elementos continuos tridimensionales. Empleando las condiciones de frontera pertinentes del Capítulo 2, se generan dichos modelos. Finalmente, se grafican los resultados de los esfuerzos axiales en el ducto del **SUBM** junto con los resultados de los dos modelos de elementos finitos. Se realizarán las observaciones pertinentes para cada rigidez de suelo.

### CONTENIDO

<b>4-1</b>	Desarrollo con Modelo de Elementos Finitos	32
<b>4-1.1</b>	Tipos de Elementos Finitos empleados	32
<b>4-2</b>	Descripción de los Parámetros de Modelado Empleados	34
<b>4-3</b>	Análisis de Resultados del <b>SUBM</b> vs Modelos de Elementos Finitos	37



## 4-1 Desarrollo del Modelo con Elementos Finitos

Desde mediados del siglo pasado y gracias al desarrollo tecnológico computacional, el Método del Elemento Finito (**FEM**, por sus siglas en inglés) se ha convertido en una herramienta indispensable en la simulación y modelado de sistemas en la ingeniería, así como en la solución de procesos, lo que era casi imposible hace algunas décadas sin la realización de costosos experimentos. El modelado de problemas ingenieriles se hace mediante ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, que a menudo son de naturaleza no lineal. El **FEM** es un poderoso método numérico para resolver dichas ecuaciones diferenciales con cierta aproximación. Las soluciones encontradas no representan el valor “exacto de las ecuaciones”, sino una aproximación que depende de la discretización del problema, las condiciones de frontera, entre otros<sup>[31, 32, 33]</sup>.

El objetivo de este capítulo es generar dos modelos con las características siguientes:

1. Modelo con elementos estructurales viga-columna que considere esfuerzos por cortante.
2. Modelo con elementos continuos tridimensionales.

### 4-1.1 Tipos de Elementos Finitos Empleados<sup>1</sup>

#### Modelo 1 – Elemento PIPE

PIPE32 Los elementos PIPE en Abaqus® asumen una sección circular hueca, además de que utilizan la teoría de vigas de Timoshenko. Estos elementos consideran esfuerzos internos causados por cargas de presión interna o externa. Están disponibles dos formulaciones para estos elementos. La formulación ducto de pared delgada asume un esfuerzo de arco (hoop) constante a través de la sección transversal, mientras que los esfuerzos en la dirección radial se desprecian. La formulación ducto de pared gruesa permite que los esfuerzos radiales y de arco varíen a través de la sección transversal.

El esfuerzo de arco en elementos de pared delgada es calculado como el promedio del esfuerzo en equilibrio con las cargas de presión internas y externas en la sección del ducto. Para esta formulación, la regla de integración con un punto a través del espesor es suficiente para obtener una solución precisa.

Para los elementos ducto de pared gruesa, la variación de los esfuerzos radiales y de arco bajo la aplicación de presión interna y/o externa se calculan usando las ecuaciones de Lamé. El cómputo de las ecuaciones constitutivas a cada punto material toman en cuenta los esfuerzos radiales y de arco impuestos para determinar la respuesta estructural. Se usa una regla de integración bidimensional para los elementos ducto de pared gruesa, con el fin de tomar en cuenta la variación de los efectos del esfuerzo a través de la sección transversal de forma precisa.

El número 3 en el nombre del elemento significa que está ubicado en el espacio tridimensional, mientras que el número 2 indica que es un elemento cuyo polinomio de interpolación es cuadrático.

Los esfuerzos que este elemento considera son:

$S_{11}$  – Es el esfuerzo axial.

<sup>1</sup> Esta sección y las siguientes se basan en [34].

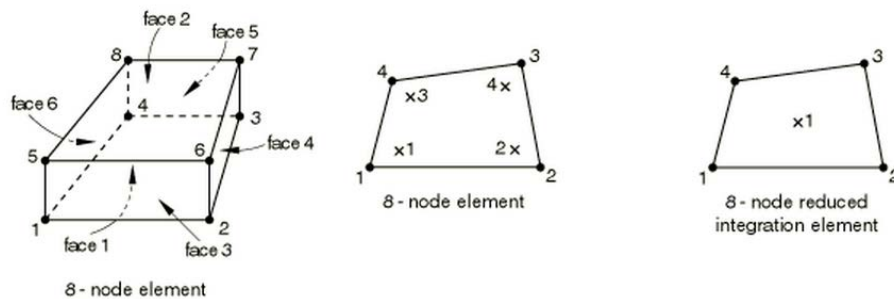
$S_{22}$  – Es el esfuerzo de arco (hoop), disponible solamente para elementos PIPE.

$S_{33}$  – Es el esfuerzo radial (disponible únicamente para elementos PIPE de pared gruesa).

$S_{12}$  – Es el esfuerzo cortante causado por torsión (disponible únicamente para elementos viga en el espacio tridimensional). Esta componente no está disponible para elementos de secciones abiertas y de pared delgada.

## Modelo – 2 Elemento Continuo Tridimensional

**C3D8R** Este es un elemento continuo tridimensional tetraédrico, con integración reducida y de primer orden (lineal). En la *Fig. 4-1* se muestran sus características. Mientras que en el elemento C3D8 hay cuatro puntos de integración por cara, en el elemento C3D8R solamente hay uno, lo que reduce el tiempo de cómputo de este último elemento.



**FIGURA 4-1** Elemento C3D8R (Fuente: [34])

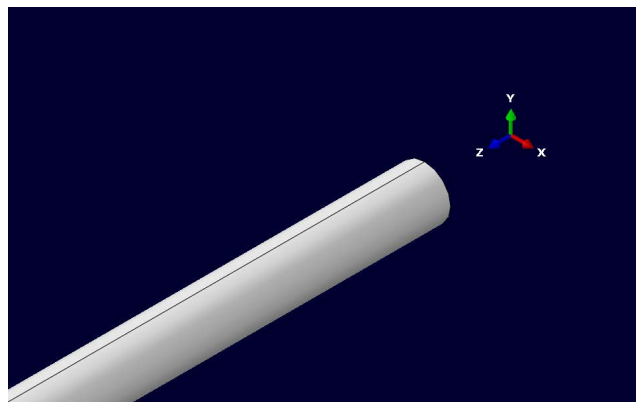
Con base en la *Fig. 4-2*, los ejes  $(x, y, z)$  están en las direcciones  $(1, 2, 3)$ , respectivamente. Además, los esfuerzos para este elemento son los siguientes:

$S_{11}$  – Es el esfuerzo de arco (hoop).

$S_{22}$  – Es el esfuerzo radial.

$S_{33}$  – Es el esfuerzo axial.

$S_{12}$  – Es el esfuerzo cortante sobre la cara 1 en la dirección 2.



**FIGURA 4-2** Orientación de los ejes Modelo-2.

$S_{13}$  – Es el esfuerzo cortante sobre la cara 1 en la dirección 3.

$S_{23}$  – Es el esfuerzo cortante sobre la cara 2 en la dirección 3.

## 4-2 Descripción de los parámetros de modelado empleados

### SUBM

Para obtener parámetros con los cuales puedan compararse los esfuerzos entre el **SUBM** y los modelos numéricos en Abaqus®, se realiza el siguiente procedimiento con respecto al **SUBM**:

1. Dentro del rango de carga axial considerado en este trabajo, se toma el valor  $N_t = 3.5 \text{ MN}$  para el cálculo de las longitudes  $L_1$  y  $L_2$ . Cabe aclarar que puede tomarse cualquier valor de carga considerado en el rango, y aquí se predetermina ese valor para realizar los cálculos de la deflexión, ecuaciones Ec. 2.26a y Ec. 3.4, para obtener los valores de la *Tabla 4-1*. Utilizando las ecuaciones Ec. 2.26c y Ec. 2.27c, se obtienen los valores de los momentos flexionantes que se muestran en el *Anexo 2*. La deflexión negativa se localiza en  $x = \frac{L_2 - L_1}{2} + L_1$ .

$k$	$N_t$ (MN)	$w_{tot, \text{máx}}$ (m)	$L_2$ (m)	$L_1$ (m)	$w_{down, \text{máx}}$ (m)
0.1	3.5	0.0013	83.516	3.733	-0.152
0.3	3.5	0.051	82.013	9.604	-0.409
0.5	3.5	0.244	80.512	15.015	-0.507
0.7	3.5	0.644	78.096	20.883	-0.308
1.0	3.5	1.166	71.736	27.726	-0.167
100	3.5	1.534	31.722	31.306	-

**TABLA 4-1**

2. Con los valores de los momentos flexionantes  $M_T$  y  $M_{down}$ , se realiza el cálculo de los esfuerzos de flexión axiales  $\sigma_{tot}$  y  $\sigma_{down}$  mediante la fórmula:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \quad (4.1)$$

donde  $M$  es el momento flexionante  $M_T$  o  $M_{down}$ ,  $c = 0.325 \text{ m}$  (radio externo del ducto) es la fibra más alejada de la sección transversal del ducto con respecto al eje neutro, e  $I$  es el momento de inercia de la sección.

3. Con los valores de momentos flexionantes obtenidos para cada valor de rigidez del suelo, se grafican los esfuerzos  $\sigma_{tot}$  y  $\sigma_{down}$  mostrados en el *Anexo 2*, cuya curva se identifica con una línea continua color negro denominada **SUBM**, *Fig. 4.3*.

Los esfuerzos obtenidos son los esfuerzos axiales máximos en el ducto para cada longitud  $x$  considerada en la tabla del *Anexo 2*. **Los esfuerzos axiales máximos de los tres modelos se localizan en el punto A, Fig. A-1 del Anexo 1.**

## Elementos Finitos

Por cada modelo realizado, se describen brevemente y en orden conforme al procedimiento en Abaqus® CAE, los parámetros con los que se realizó el modelo de elementos finitos. El procedimiento es el mismo para cada valor de rigidez del suelo.

### Modelo - 1 Elemento PIPE

*Part:* Se dibuja la parte con longitud  $2L_2$ .

Modeling Space: 3D.

Type: Deformable.

Base Feature: Wire – Planar.

*Property:* Se asignan las propiedades mecánicas del material, las mismas que en **3-1.1**.

Se crea una sección con perfil circular Thick, con las dimensiones descritas en **3-1.1**.

Se asigna la sección anteriormente creada a la parte Part.

Se le asignan las orientaciones de los ejes locales a la parte Part.

*Assembly:* Se crea una instancia independiente.

*Step:* Se crea un procedimiento de tipo Static, General, con duración de 1 segundo y permitiendo no linealidad geométrica.

*Interaction:* No hay interacción.

*Load:* Se crean las condiciones de frontera, equivalentes a las ecuaciones *Ec. 2.21* y *Ec. 2.22*.

Se crean condiciones de carga/desplazamiento, como se indica en la *Tabla 4-1*.

*Mesh:* El tamaño promedio de los elementos de la malla es de  $5\text{ mm}$ . Tipo de elemento: PIPE32, de la librería Standard.

*Job:* El tipo de Job es: Full Analysis. Precisión de salida de datos: Full.

*Visualization:* Report: Se escribe el reporte para los valores de los esfuerzos considerados en este elemento.

### Modelo - 2 Elemento Continuo Tridimensional

*Part:* Se dibuja la parte con longitud  $2L_2$ .

Modeling Space: 3D.

Type: Deformable.

Base Feature: Solid – Extrusion.

Partition cell: se crean particiones para facilitar la asignación de condiciones de frontera y el mallado.

**Property:** Se asignan las propiedades mecánicas del material, las mismas que en 3-1.1.

Se crea una sección con sólida homogénea, con las dimensiones descritas en 3-1.1.

Se asigna la sección anteriormente creada a la parte Part.

**Assembly:** Se crea una instancia independiente.

**Step:** Se crea un procedimiento de tipo Static, General, con duración de 1 segundo y permitiendo no linealidad geométrica.

**Interaction:** No hay interacción.

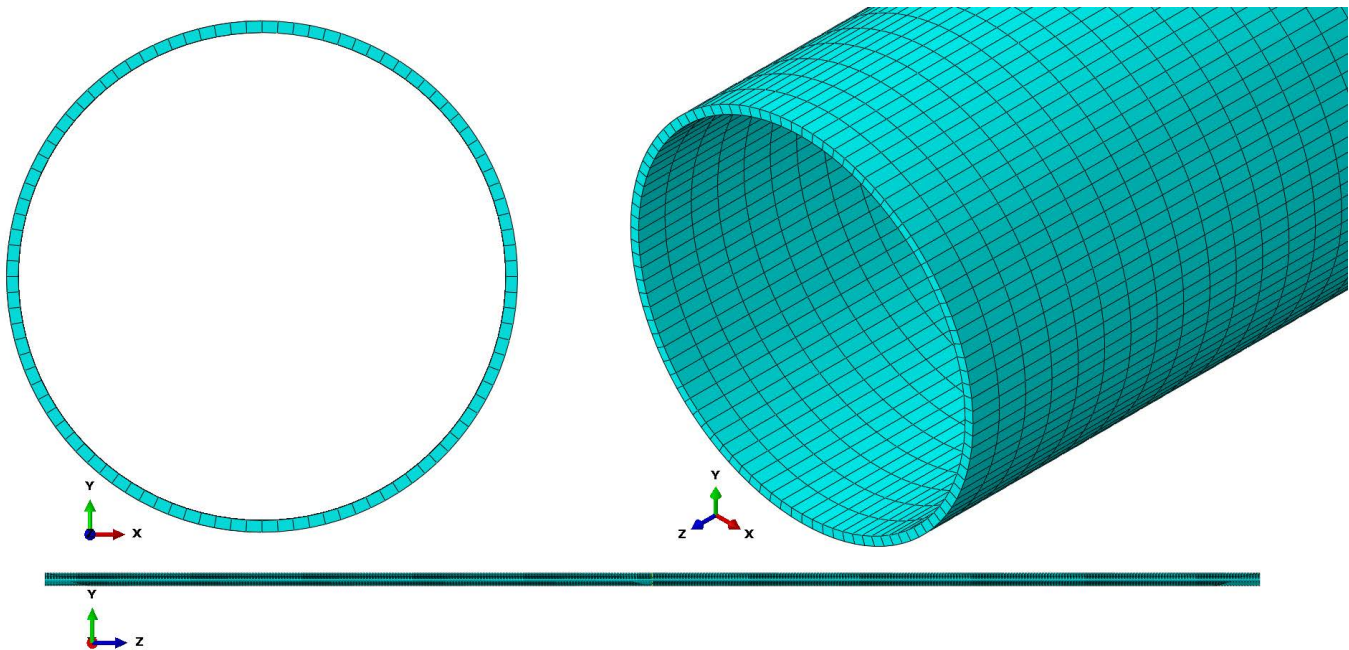
**Load:** Se crean las condiciones de frontera, equivalentes a las ecuaciones Ec. 2.21 y Ec. 2.22, excepto las condiciones Ec. 2.1a y Ec. 2.21g, ya que en este tipo de elementos no es posible predeterminedar la rotación como condición de frontera.

Se crean condiciones de carga/desplazamiento, como se indica en la Tabla 4-1.

**Mesh:** El tamaño promedio de los elementos de la malla es de 25 mm. Tipo de elemento: C3D8R, de la librería Standard, Fig. 4-3.

**Job:** El tipo de Job es: Full Analysis. Precisión de salida de datos: Full.

**Visualization:** Report: Se escribe el reporte para los valores de los esfuerzos considerados en este elemento.



**FIGURA 4-3** Malla del Modelo-2 Elemento Continuo Tridimensional

Una vez escritos los reportes de esfuerzos, se localizan los nodos y elementos en cada modelo dentro de Abaqus® CAE, correspondientes a cada valor de longitud de ducto considerado en el Anexo 3 y 4, respectivamente.

### 4-3 Análisis de Resultados del SUBM vs Modelos de Elementos Finitos

En la sección 4-1 se determinaron los esfuerzos mediante el modelo propuesto en este trabajo, el SUBM. En la sección 4-2 se determinaron los esfuerzos axiales para dos modelos de elementos finitos distintos, descritos en dicha sección. Las gráficas comparativas se muestran en la Fig. 4.4. El esfuerzo axial en las gráficas se representa como  $\sigma_{33}$ , acorde con la orientación de los ejes, Fig. 4-2, excepto para la curva del **SUBM**, ya que como muestra la Fig. 2-2, éste mismo esfuerzo se presenta en la dirección  $\sigma_{11}$ . Con el objetivo de presentar la misma terminología en las gráficas, el esfuerzo axial para las tres curvas se representa como  $\sigma_{33}$ , pero se aclara que para el caso del **SUBM** el esfuerzo axial se encuentra en la dirección de  $x$ , Fig. 2-2. En resumen, los esfuerzos graficados son esfuerzos axiales pero han sido representados en distintos sistemas de referencia en sus respectivas figuras.

Con el objetivo de visualizar adecuadamente cada gráfica comparativa, se describen los puntos más importantes:

#### Rigidez de suelo $k_1$

Como puede observarse en la Fig. 4-4a, en general, la tendencia de los esfuerzos es muy semejante en los tres modelos, excepto al final de la longitud  $L_2$ , donde se aprecia una incompatibilidad debido a la condición de frontera en  $L_2$ . Esta incompatibilidad se debe a que la ecuación que gobierna el pandeo en el **SUBM**, Ec. 2.17, es de una sola variable, a saber, el desplazamiento  $w$  del ducto sobre el eje  $z$  con respecto a su longitud en el eje  $x$ , Fig. 2-2. Dicha ecuación no tiene una implicación en lo que respecta al desplazamiento axial del ducto, mientras que en los modelos con elementos finitos, aplicando las condiciones de frontera para el **SUBM**, existe un desplazamiento axial cuya diferencia en esfuerzos puede observarse en el tramo final de la longitud  $L_2$ , Fig. 4-4a.

En todas las gráficas comparativas encontraremos esta incompatibilidad; sin embargo, en general, los esfuerzos que interesan en el análisis y el diseño son los esfuerzos máximos.

En la Tabla 4-2 se presentan los esfuerzos máximos para cada rigidez de suelo y su ubicación sobre el eje  $x$ . Para el caso de rigidez de suelo  $k_1 = 0.1$ , el esfuerzo máximo en el **SUBM** es de magnitud 41.12 MPa en compresión, mientras que para el modelo FEM Pipe resulta 12.8% menor, y en el modelo FEM 3D resulta 31.7% menor.

$k_1$			$k_2$			$k_3$		
Modelo	x (m)	$\sigma_{33,m\acute{a}x}$ (MPa)	Modelo	x (m)	$\sigma_{33,m\acute{a}x}$ (MPa)	Modelo	x (m)	$\sigma_{33,m\acute{a}x}$ (MPa)
SUBM	40	-41.12	SUBM	40	-118.57	SUBM	38	-179.83
FEM Pipe	44	-35.84	FEM Pipe	46	-104.90	FEM Pipe	0	210.20
FEM 3D	44	-28.08	FEM 3D	0	97.64	FEM 3D	0	244.80
$k_4$			$k_5$			$k_6$		
Modelo	x (m)	$\sigma_{33,m\acute{a}x}$ (MPa)	Modelo	x (m)	$\sigma_{33,m\acute{a}x}$ (MPa)	Modelo	x (m)	$\sigma_{33,m\acute{a}x}$ (MPa)
SUBM	0	268.22	SUBM	0	360.92	SUBM	0	1333.28
FEM Pipe	0	363.54	FEM Pipe	0	429.09	FEM Pipe	0	461.84
FEM 3D	0	413.00	FEM 3D	0	469.86	FEM 3D	0	346.60

**TABLA 4-2** Esfuerzos axiales máximos en los tres modelos y su ubicación



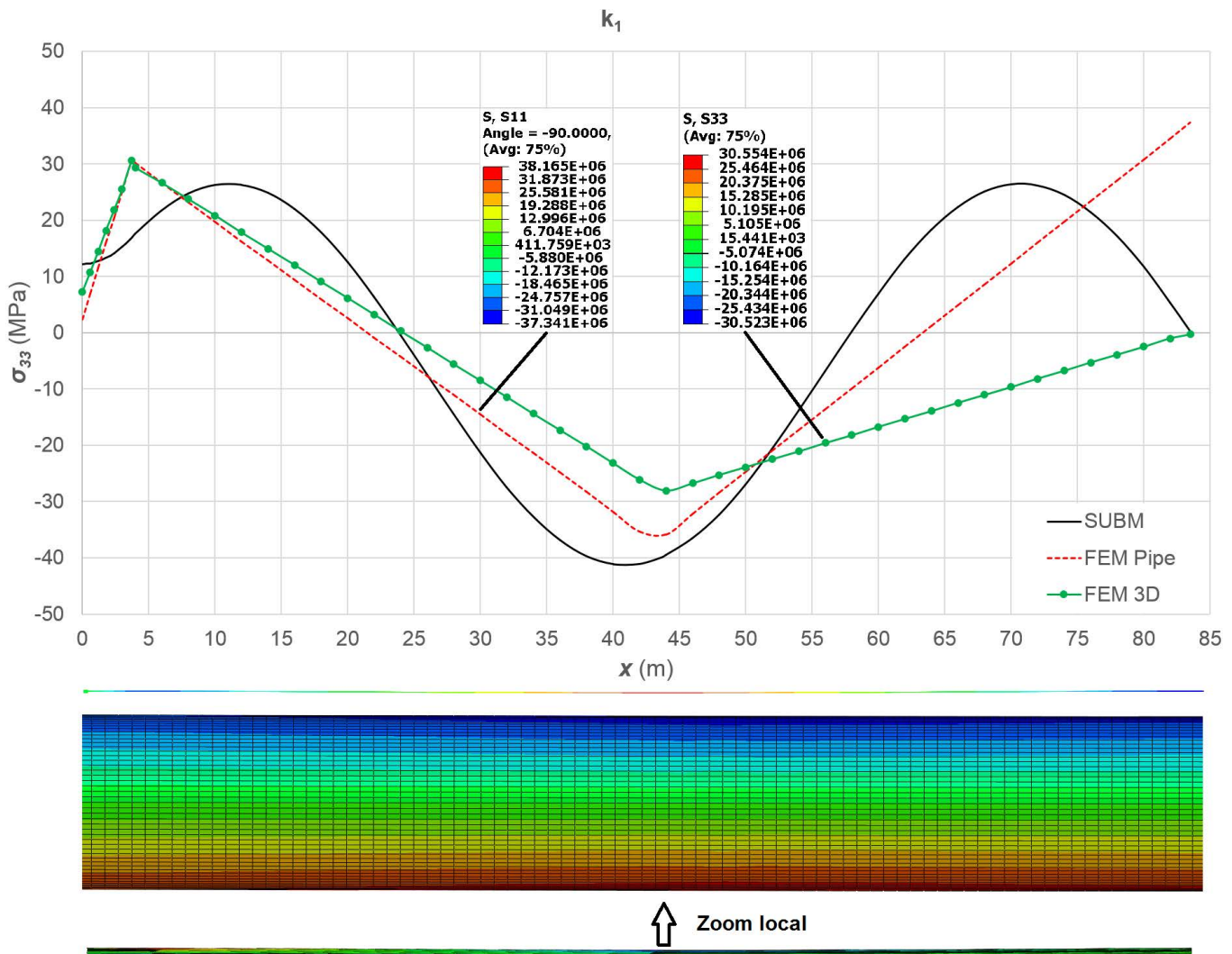
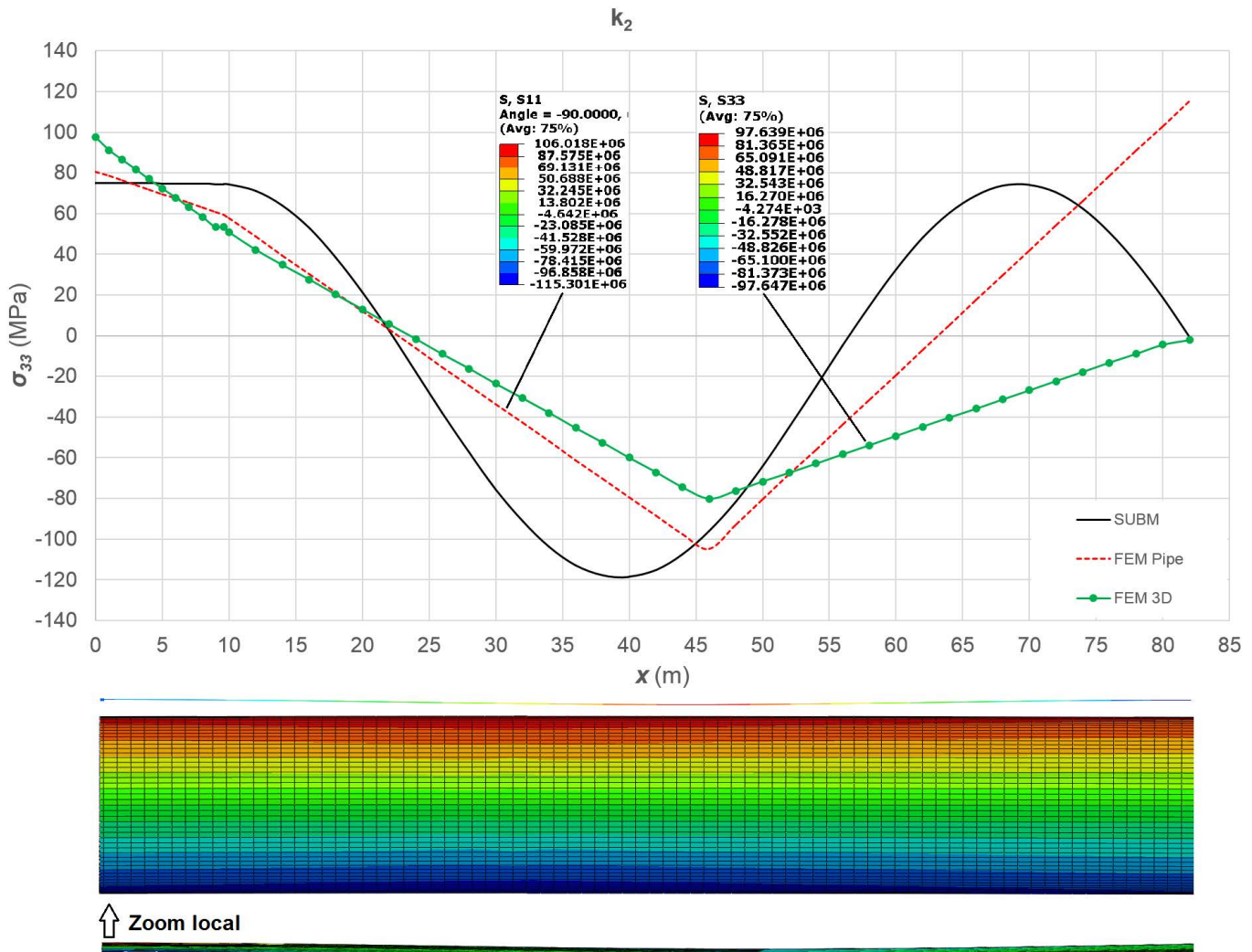


FIGURA 4-4a Rigidez de suelo  $k_1 = 0.1$

Además, mientras que en el **SUBM** el esfuerzo máximo ocurre en  $x = 40 \text{ m}$ , tanto en FEM Pipe como en FEM 3D el esfuerzo máximo se presenta en  $x = 44 \text{ m}$ . El resultado para el SUBM sorprende tomando en cuenta los valores de deflexión de la *Tabla 4-1*; mientras que el desplazamiento positivo es de solo  $1.3 \text{ mm}$  en  $x = 0 \text{ m}$ , el desplazamiento máximo negativo en  $x = \frac{L_2 - L_1}{2} + L_1 = 43.624 \text{ m}$  es de  $152 \text{ mm}$ . Se esperaría que el esfuerzo máximo se presentara justo en la longitud donde ocurre el desplazamiento máximo negativo, pero para el caso del **SUBM** este esfuerzo ocurre  $3.624 \text{ m}$  antes, mientras que para los modelos de elementos finitos el esfuerzo máximo se localiza  $0.376 \text{ m}$  después.

#### Rigidez de suelo $k_2$

En la *Fig. 4-4b* se presenta la comparación de resultados del esfuerzo axial para la rigidez de suelo  $k_2$ . Mientras que en la gráfica anterior el esfuerzo del **SUBM** era mayor que los modelos de elementos finitos para  $x = 0 \text{ m}$ , para este caso de rigidez el esfuerzo resulta menor que en los otros dos modelos. En el **SUBM**, el esfuerzo axial máximo resulta en  $118.57 \text{ MPa}$  en compresión, y se localiza en  $x = 40 \text{ m}$ , mientras que para el modelo FEM Pipe el esfuerzo máximo se localiza en  $x = 46 \text{ m}$ , y resulta  $11.5\%$  menor que el



**FIGURA 4-4b** Rigidez de suelo  $k_2 = 0.3$

predicho por el **SUBM**. Para el modelo FEM 3D el esfuerzo máximo se localiza en  $x = 0 \text{ m}$ , y resulta 17.7% menor que el predicho por el **SUBM**, pero este esfuerzo está en tensión, *Tabla 4-2*. Nuevamente, para el caso del **SUBM**, el esfuerzo máximo no se presenta en la longitud donde se presenta el máximo desplazamiento negativo, sino que se localiza en  $x = \frac{L_2 - L_1}{2} + L_1 = 45.809 \text{ m}$ , es decir, 5.809 m después, mientras que para el modelo FEM Pipe el esfuerzo máximo se presenta sólo 0.191 m después. Note que para el caso del modelo FEM 3D, el esfuerzo máximo se presenta en  $x = 0 \text{ m}$ , lo que resulta sorprendente considerando que ahí no se localiza el desplazamiento máximo. Sin embargo, el esfuerzo máximo en compresión es de 80.22 MPa, y se localiza en  $x = 46 \text{ m}$ , *Anexo 4*, lo que implica que solo resulta 17.8% menor que el esfuerzo en tensión localizado en  $x = 0 \text{ m}$ , *Tabla 4-2*.

#### Rigidez de suelo $k_3$

En la *Fig. 4-4c* se presenta la comparación de resultados del esfuerzo axial para la rigidez de suelo  $k_3$ . En el **SUBM**, el esfuerzo axial máximo resulta en 179.83 MPa en compresión, y se localiza en  $x = 38 \text{ m}$ , mientras que para los modelos de elementos finitos FEM Pipe y FEM 3D, los esfuerzos axiales máximos están en tensión y se localizan en  $x = 0 \text{ m}$ , y sus valores corresponden a 210.2 MPa y 244.8 MPa,



respectivamente, lo que implica que son mayores que los predichos por el **SUBM** en un rango del 16.9 y 36.1%, respectivamente. Nuevamente, se esperaría que los esfuerzos máximos se localizaran en la longitud donde ocurre el máximo desplazamiento, es decir, en  $x = \frac{L_2-L_1}{2} + L_1 = 47.763 \text{ m}$ , pero en el caso del **SUBM**, el esfuerzo máximo se localiza 9.763 m antes, mientras que para los modelos con elementos finitos el esfuerzo máximo se presenta en  $x = 0 \text{ m}$ . No obstante, los esfuerzos máximos a compresión de los modelos con elementos finitos se localizan muy cerca del máximo desplazamiento,

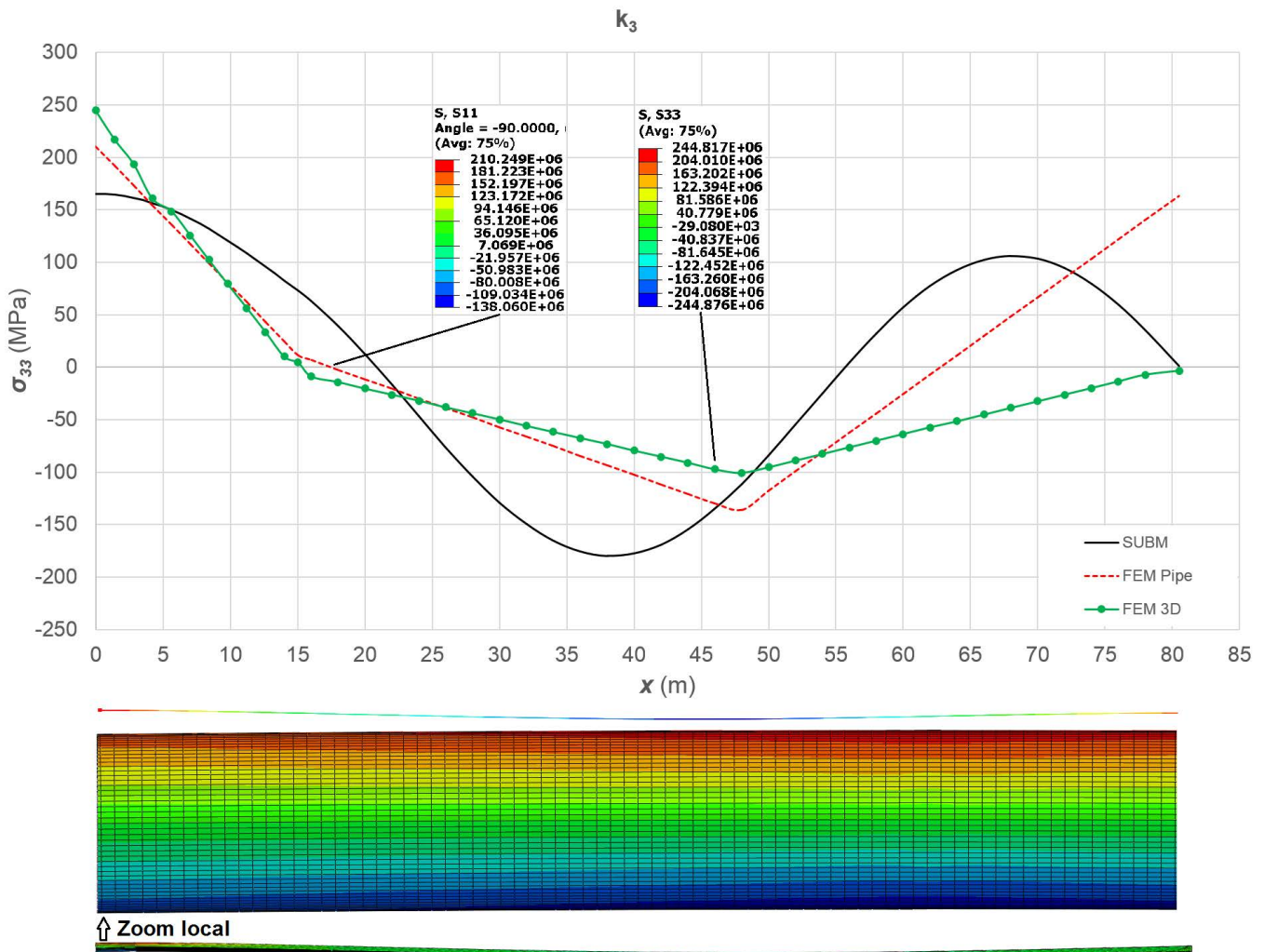


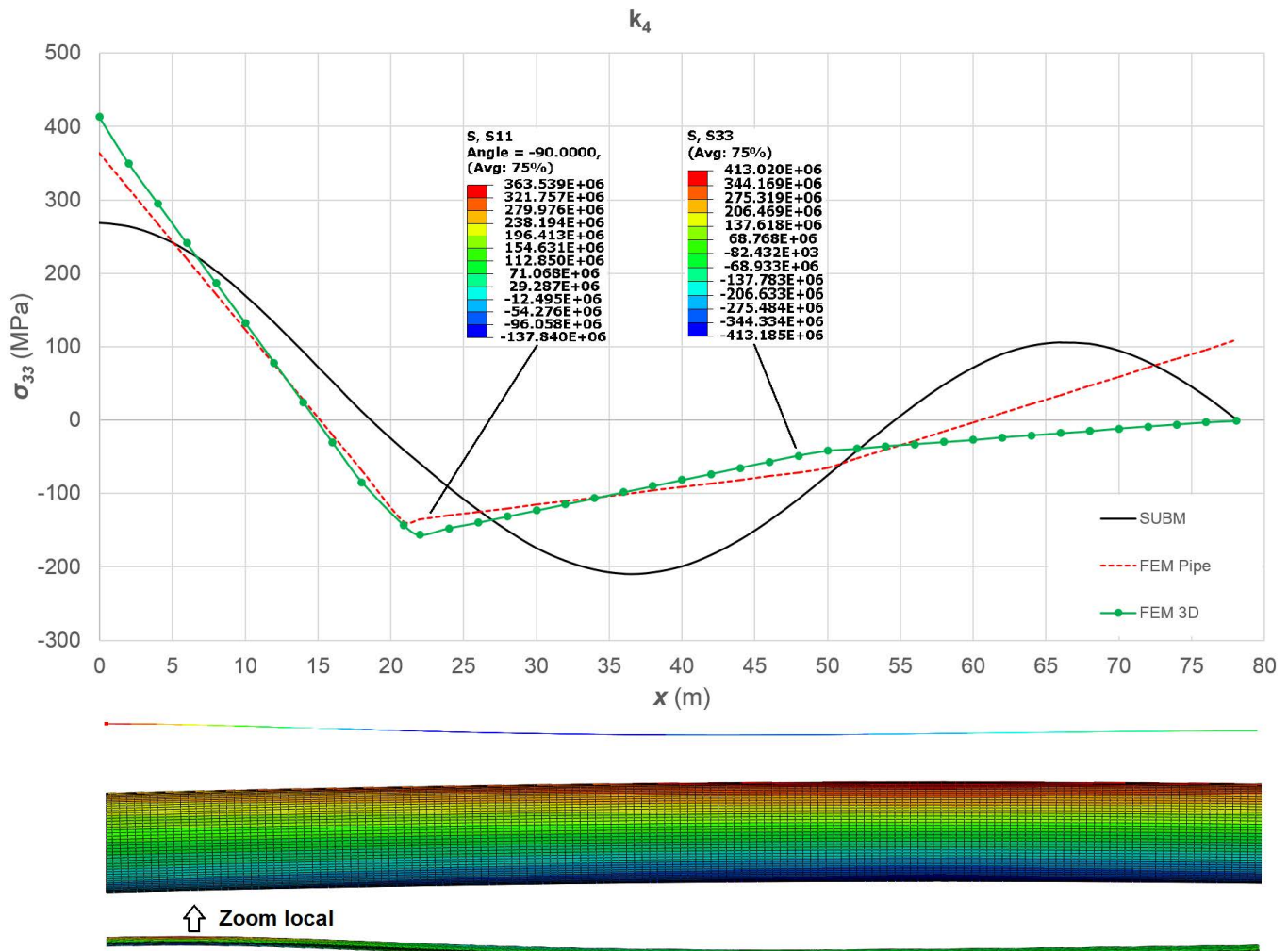
FIGURA 4-4c Rigidez de suelo  $k_3 = 0.5$

en  $x = 48 \text{ m}$ ; para el FEM Pipe el esfuerzo axial máximo en compresión es de  $135.9 \text{ MPa}$  mientras que el esfuerzo axial máximo en compresión para el FEM 3D es de  $100.9 \text{ MPa}$ , lo que representa un 24.4 y un 43.9% menor que el máximo esfuerzo en el **SUBM**, respectivamente, Anexo 3 y Anexo 4.

#### Rigidez de suelo $k_4$

En la Fig. 4-4d se presenta la comparación de resultados del esfuerzo axial para la rigidez de suelo  $k_4$ . En el **SUBM**, el esfuerzo axial máximo resulta en  $268.22 \text{ MPa}$  en tensión, y se localiza en  $x = 0 \text{ m}$ , mientras que para los modelos de elementos finitos FEM Pipe y FEM 3D, los esfuerzos axiales máximos también están en tensión y se localizan en  $x = 0 \text{ m}$ , cuyos valores en la Tabla 4-2 son 35.5 y 54% más

grandes que el predicho por el **SUBM**, respectivamente. Note que ahora los esfuerzos máximos se presentan en la misma posición  $x$ , lo cual es de esperarse ya que ahí es donde se presenta el máximo

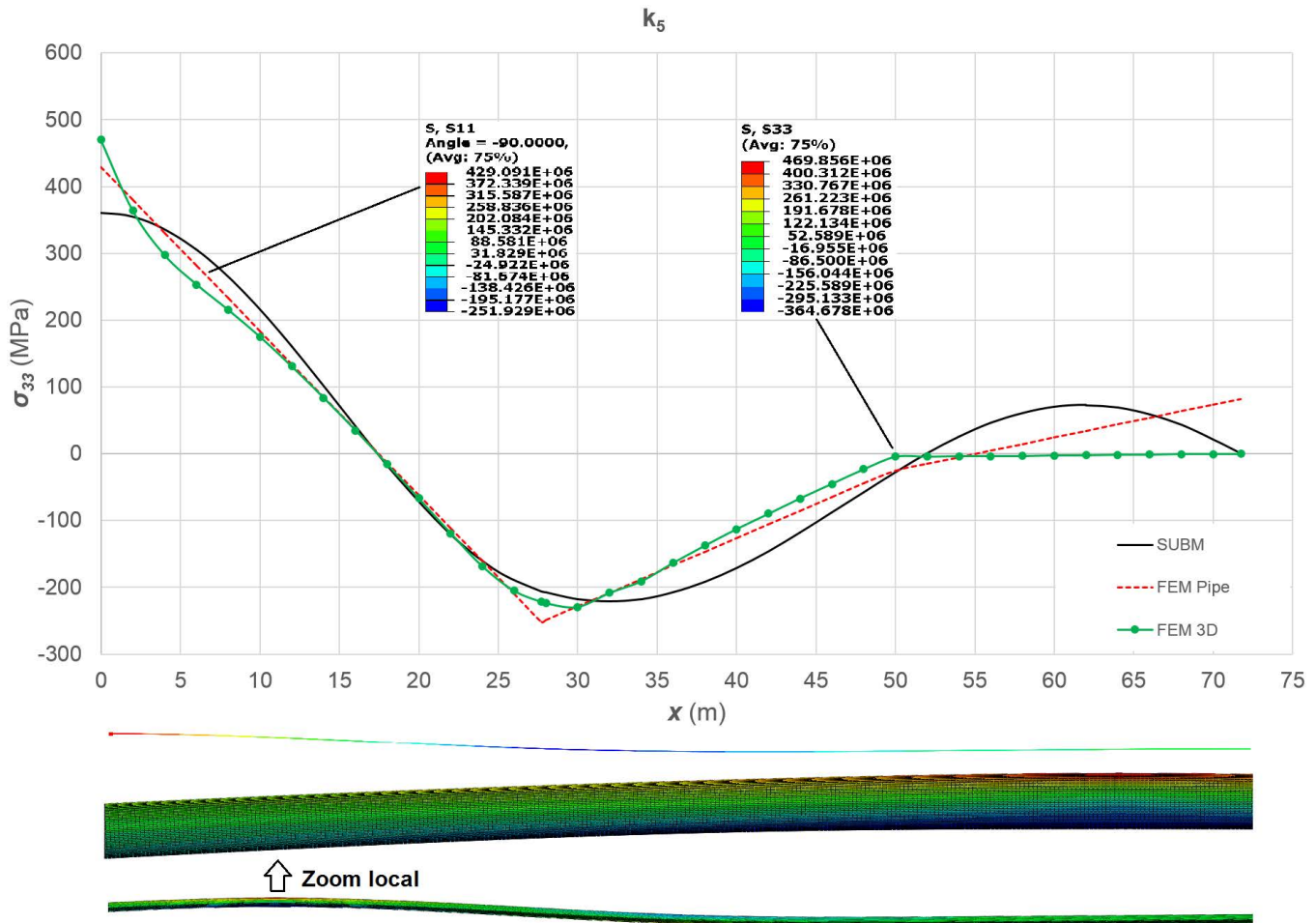


**FIGURA 4-4d** Rigidez de suelo  $k_4 = 0.7$

desplazamiento  $w_{tot,m\acute{a}x} = 64.4 \text{ cm}$ , mientras que el desplazamiento negativo es menor que la mitad de éste,  $w_{down,m\acute{a}x} = -30.8 \text{ cm}$ , *Tabla 4-1*, que se localiza en  $x = \frac{L_2 - L_1}{2} + L_1 = 49.49 \text{ m}$ . Además, los esfuerzos axiales máximos en compresión, para el **SUBM**, FEM Pipe y FEM 3D se localizan en  $x = 36 \text{ m}$ ,  $x = 20.883 \text{ m}$  y  $x = 22 \text{ m}$ , *Anexo 2*, *Anexo 3* y *Anexo 4*, respectivamente, y son del orden de  $209.28 \text{ MPa}$ ,  $137.8 \text{ MPa}$  y  $156.4 \text{ MPa}$ , respectivamente.

#### Rigidez de suelo $k_5$

En la *Fig. 4-4e* se presenta la comparación de resultados del esfuerzo axial para la rigidez de suelo  $k_5$ . En el **SUBM**, el esfuerzo axial máximo resulta en  $360.92 \text{ MPa}$  en tensión, y se localiza en  $x = 0 \text{ m}$ , mientras que para los modelos de elementos finitos FEM Pipe y FEM 3D, los esfuerzos axiales máximos también están en tensión y se localizan en  $x = 0 \text{ m}$ , cuyos valores en la *Tabla 4-2* son  $18.9$  y  $30.2\%$  más grandes que el predicho por el **SUBM**, respectivamente. Como en el caso anterior, los esfuerzos axiales



**FIGURA 4-4e** Rigidez de suelo  $k_5 = 1$

máximos se presentan en la misma posición  $x$ , lo cual es de esperarse ya que ahí es donde se presenta el máximo desplazamiento  $w_{tot,máx} = 1.166\text{ m}$ , mientras que el desplazamiento negativo es mucho menor que éste,  $w_{down,máx} = -0.167\text{ m}$ , *Tabla 4-1*, que se localiza en  $x = \frac{L_2 - L_1}{2} + L_1 = 49.731\text{ m}$ . Además, los esfuerzos axiales máximos en compresión, para el **SUBM**, FEM Pipe y FEM 3D se localizan en  $x = 32\text{ m}$ ,  $x = 27.726\text{ m}$  y  $x = 30\text{ m}$ , *Anexo 2*, *Anexo 3* y *Anexo 4*, respectivamente, y son del orden de  $220.55\text{ MPa}$ ,  $251.85\text{ MPa}$  y  $229.53\text{ MPa}$ , respectivamente.

#### Rigidez de suelo $k_6$

En la *Fig. 4-4f* se presenta la comparación de resultados del esfuerzo axial para la rigidez de suelo  $k_6$ . En el **SUBM**, el esfuerzo axial máximo resulta en  $1333.28\text{ MPa}$  en tensión, y se localiza en  $x = 0\text{ m}$ , mientras que para los modelos de elementos finitos FEM Pipe y FEM 3D, los esfuerzos axiales máximos también están en tensión y se localizan en  $x = 0\text{ m}$ , cuyos valores en la *Tabla 4-2* son 65.4 y 74% menores que el predicho por el **SUBM**, respectivamente.

Como en el caso anterior, los esfuerzos axiales máximos se presentan en la misma posición  $x$ , lo cual es de esperarse ya que ahí es donde se presenta el máximo desplazamiento,  $w_{tot,máx} = 1.534\text{ m}$ . Para esta condición de rigidez de suelo no hay desplazamiento negativo. En otras palabras, cuando el valor de la rigidez  $k \rightarrow \infty$ , el suelo se considera totalmente rígido, por lo que físicamente no es posible que

se desarrollen desplazamientos negativos.

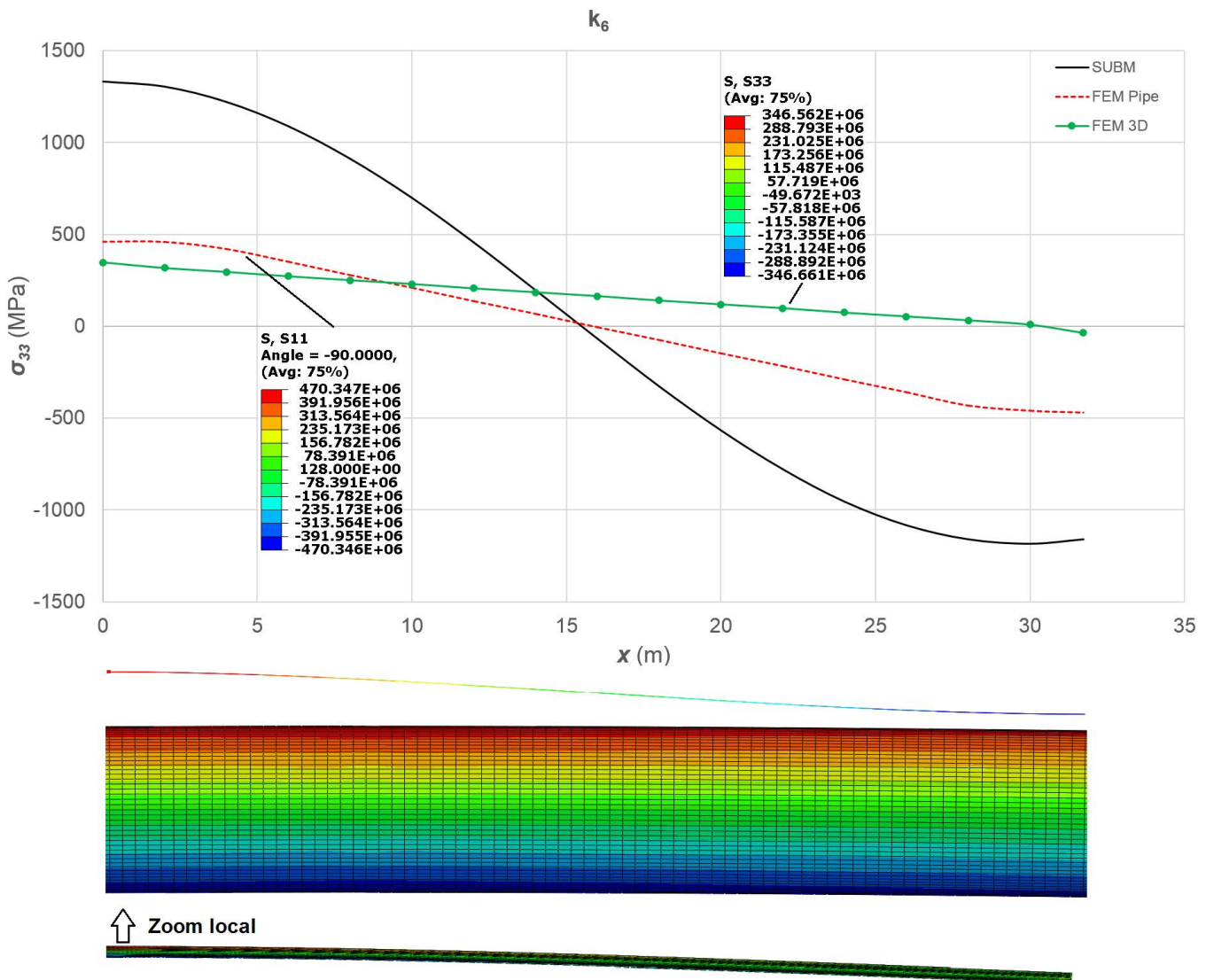
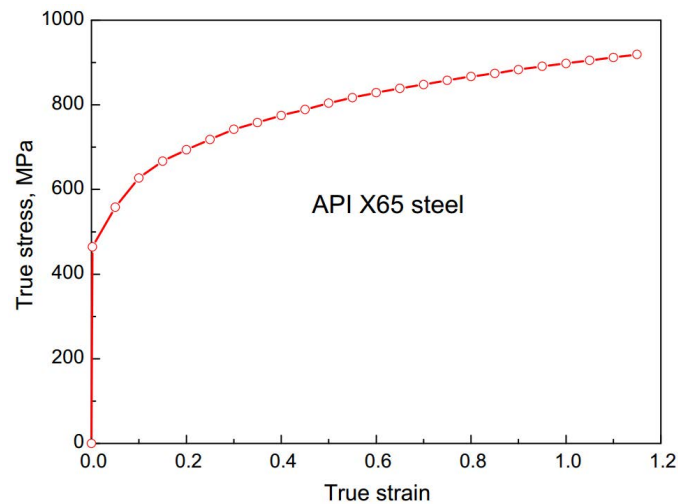


FIGURA 4-4f Rigidez de suelo  $k_6 = 100$

En términos matemáticos, cuanto mayor es el valor de la rigidez, tanto menor resulta la longitud  $L_2 - L_1$ , por lo que las ecuaciones *Ec. 2.19* y *Ec. 2.20* no son aplicables pues no existe el rango para el que están planteadas. Por ejemplo, para el valor de rigidez de suelo  $k = 100$ , la longitud de ducto  $L_2 \cong L_1 \rightarrow 31.722 \text{ m} \cong 31.306 \text{ m}$ , *Tabla 4-1*. Es importante resaltar que el esfuerzo predicho por el **SUBM** es mucho mayor que el predicho por los otros dos modelos. De hecho, el esfuerzo de fluencia para la tubería de acero API X65 es de  $460 \text{ MPa}$ , aproximadamente<sup>[37]</sup>, por lo que tanto en el **SUBM** como en el modelo FEM Pipe los esfuerzos máximos sobrepasan el esfuerzo de fluencia, e implica que para esta condición de rigidez de suelo el ducto se comporta como plástico en la longitud donde el esfuerzo de fluencia es rebasado. Para el caso del **SUBM**, el esfuerzo axial máximo en el ducto sobrepasa el esfuerzo máximo considerado en el diagrama Esfuerzo-Deformación para el ducto de acero API X65, que es de  $916 \text{ MPa}$ , donde se presenta una deformación unitaria  $\epsilon = 1.15$ <sup>[37]</sup>, *Fig. 4-5*. La condición de esfuerzo axial máximo en el ducto no puede presentarse sin que haya daño en el mismo, o en el peor de los casos una fractura,

que pertenece al campo de estudio del pandeo local en ductos, pero ese estudio se sale del alcance de este trabajo.



**FIGURA 4-5** Diagrama esfuerzo-deformación para el ducto de acero API X65 (*Fuente: [37]*)

La consecuencia más importante del análisis anterior consiste en que, bajo las condiciones de carga axial, propiedades mecánicas del ducto y dimensiones, el **SUBM** no puede utilizarse para predecir el pandeo de ductos enterrados para la condición de rigidez  $k_6 = 100$ . Sin embargo, en trabajos futuros deberán considerarse las condiciones de carga posibles con distintas dimensiones de ductos y para ductos con otras propiedades mecánicas con el fin de obtener un comportamiento general del fenómeno del pandeo global de ductos enterrados considerando efectos de cortante.

El presente trabajo concluye con las observaciones más importantes de los resultados obtenidos.



# CONCLUSIONES

*Con respecto al trabajo de Shi et al.<sup>[30]</sup>:*

La correspondencia más adecuada para una comparación de modelos resulta de aquella cuyas condiciones sean más semejantes. Tanto en el modelo de Shi et al.<sup>[30]</sup> como en el **SUBM**, se considera que el suelo presenta una rigidez que puede variar a lo largo de la longitud del ducto, lo que tiene como consecuencia que se presente una deflexión negativa en la sección donde la rigidez de suelo  $k \leq 1$ . Las condiciones de frontera en ambos modelos son equivalentes. La diferencia entre estos modelos es la teoría de la mecánica que se emplea para predecir el pandeo. En el modelo de Shi et al.<sup>[30]</sup> se emplea la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, mientras que en el **SUBM** se utiliza la teoría de vigas de Engesser-Timoshenko. En esta última se toman en cuenta los efectos que tiene en la predicción del pandeo considerar los esfuerzos y las deformaciones debidas a la fuerza cortante. Las conclusiones son:

1. Para rigideces de suelo  $k \leq 1$ , la predicción de la deflexión por parte del **SUBM** es menor que la predicha por el modelo de Shi et al.<sup>[30]</sup> Cuando la rigidez de suelo  $k = 0.1$ , la deflexión en el **SUBM** es casi cero en todo el rango de carga considerado, mientras que en el modelo propuesto por Shi et al.<sup>[30]</sup> la deflexión es considerablemente mayor, *Fig. 3-2b*.
2. Al contrario de lo anterior, para rigideces de suelo  $k > 1$ , la predicción del pandeo en el **SUBM** es mayor que la predicha por el modelo de Shi et al.<sup>[30]</sup>, *Fig. 3-2a*.

Los resultados muestran que considerar los efectos de la fuerza cortante sí tienen fuertes implicaciones en la predicción del pandeo de ductos submarinos enterrados. Al margen de los resultados mostrados, es importante señalar que el modelo propuesto debe contrastarse con extensas pruebas de laboratorio y con problemas de pandeo reales que se hayan presentado en los complejos petroleros.

*Con respecto a los modelos de elementos finitos:*

1. Como se comentó en el Capítulo 4, en general, la tendencia de los esfuerzos axiales en los modelos, el **SUBM** y los dos modelos discretizados, es muy similar. Salvo por la incompatibilidad de la condición de frontera para el desplazamiento sobre el eje  $x$  al final de la longitud  $L_2$ , los esfuerzos son similares, *Fig. 4-4*. El modelo de elementos finitos que resulta más compatible con el **SUBM** es el Modelo-1, pues los elementos que se utilizan son elementos viga que consideran los efectos de la fuerza cortante.
2. Salvo para la rigidez de suelo  $k_5$  y  $k_6$ , la variación de los esfuerzos axiales entre el **SUBM** y el Modelo-1 varía hasta en un 16.9%. La variación de los esfuerzos axiales cuando la rigidez de suelo es  $k_5$  es del rango de 35%, mientras que para  $k_6$  la variación resulta en 65%, *Fig. 4-4*.
3. Bajo las condiciones mecánicas del material considerado, las dimensiones del ducto y la condición de rigidez  $k_6 = 100$ , el **SUBM** no es un modelo adecuado para predecir el pandeo global de ductos submarinos enterrados, *Fig. 4-4f*, pues mientras los dos modelos numéricos predicen un pandeo cerca del punto de fluencia del material, en el **SUBM** el esfuerzo máximo es mucho mayor que el máximo considerado en el diagrama Esfuerzo-Deformación del acero de ductos API X65<sup>[37]</sup>.

El modelo propuesto en este trabajo solamente ofrece una aproximación para la predicción del pandeo de ductos submarinos enterrados en suelo plástico. Deberán realizarse pruebas exhaustivas para verificar su validez.

## Trabajos Futuros

Dentro del campo de investigación sobre el pandeo de ductos submarinos enterrados, se identifican los siguientes aspectos que deben ser estudiados:

- Los resultados numéricos obtenidos con el **SUBM** consideraron ciertos valores de propiedades mecánicas, carga axial y dimensiones del ducto. Por lo que deberá de considerarse un amplio rango de posibles valores de carga axial, dimensiones y propiedades mecánicas del ducto para obtener una tendencia generalizada del comportamiento del pandeo con el modelo propuesto.
- Deberá investigarse el comportamiento del ducto para cuando los esfuerzos máximos sobrepasen el límite de fluencia del material, debido a que pueden presentarse inestabilidades locales que pertenecen al campo de estudio del pandeo local de ductos.
- Una de las suposiciones principales para el análisis consiste en considerar que el pandeo es simétrico, por lo que debe investigarse la posibilidad de considerar que el pandeo es asimétrico.

Como se mencionó al inicio del Capítulo 4, el valor de los modelos analíticos tiene muchas restricciones debido a la simplicidad de las suposiciones iniciales, que generalmente tienen un rango de validez muy pequeño. Es por ello que el análisis en ingeniería adquiere mucho mayor poder cuando se utilizan métodos más elaborados para resolver las complicadas ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de ductos, como es el método del elemento finito.

# ANEXO 1

Desarrollo de las ecuaciones diferenciales.

(\* SOLUCIONES GENERALES DE LAS ECUACIONES 2.17 Y 2.19 Y SUS DERIVADAS (PENDIENTES) \*)

(\* wtot - DEFLEXIÓN 1 \*)

wtot = DSolve[wT''''[x] + μ² \* wT''[x] == -A1, wT[x], x] // FullSimplify

(\* θT - PENDIENTE 1 \*)

D[wtot, {x, 1}] // FullSimplify

$$\text{Out[1]} = \left\{ \left\{ wT[x] \rightarrow -\frac{A1 x^2}{2 \mu^2} + C[3] + x C[4] - \frac{C[1] \cos[x \mu] + C[2] \sin[x \mu]}{\mu^2} \right\} \right\}$$

$$\text{Out[2]} = \left\{ \left\{ wT'[x] \rightarrow \frac{-A1 x + \mu^2 C[4] - \mu C[2] \cos[x \mu] + \mu C[1] \sin[x \mu]}{\mu^2} \right\} \right\}$$

(\* wdown - DEFLEXIÓN 2 \*)

wdown = DSolve[wd''''[x] + μ² \* wd''[x] == k \* A1, wd[x], x] // FullSimplify

(\* θdown - PENDIENTE 2 \*)

D[wdown, {x, 1}] // FullSimplify

$$\text{Out[3]} = \left\{ \left\{ wd[x] \rightarrow \frac{A1 k x^2 + 2 \mu^2 (C[3] + x C[4]) - 2 C[1] \cos[x \mu] - 2 C[2] \sin[x \mu]}{2 \mu^2} \right\} \right\}$$

$$\text{Out[4]} = \left\{ \left\{ wd'[x] \rightarrow \frac{A1 k x + \mu^2 C[4] - \mu C[2] \cos[x \mu] + \mu C[1] \sin[x \mu]}{\mu^2} \right\} \right\}$$

Aplicando las condiciones de frontera:

in[1] = (\* SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES 2.17 Y 2.19 APLICANDO LAS CONDICIONES DE FRONTERA DEL SUBM \*)

(\* wtot - SOLUCIÓN PARCIAL \*)

DSolve[{wT''''[x] + μ² \* wT''[x] == -A1, wT'[0] == 0, wT''[0] == 0, wT[x], x] // FullSimplify

$$\text{Out[1]} = \left\{ \left\{ wT[x] \rightarrow -\frac{A1 x^2}{2 \mu^2} + C[3] - \frac{C[1] \cos[x \mu]}{\mu^2} \right\} \right\}$$

in[2] = (\* wdown - SOLUCIÓN PARCIAL \*)

DSolve[{wd''''[x] + μ² \* wd''[x] == k \* A1, wd[L2] == 0, wd'[L2] == 0, wd[x], x] // FullSimplify

$$\text{Out[2]} = \left\{ \left\{ wd[x] \rightarrow \frac{A1 k (L2 - x)^2 + 2 (C[1] + (-L2 - x) \mu C[2]) \cos[L2 \mu] - 2 C[1] \cos[x \mu] + 2 ((L2 - x) \mu C[1] + C[2]) \sin[L2 \mu] - 2 C[2] \sin[x \mu]}{2 \mu^2} \right\} \right\}$$

(\*\*\*\*\*)

(\* SE TIENEN QUE CAMBIAR LOS NOMBRES DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA EN wdown \*)

(\* C[1]=C5 C[2]=C6 \*)

(\*\*\*\*\*)

in[3] = (\* APLICANDO CONDICIÓN DE FRONTERA, EC. 2.27a - COMPATIBILIDAD 1 : dwtot/dx|x=L1 = ddown/dx|x=L1 \*)

D[-A1 x² + C3 - C1 Cos[x μ], x] /. x -> L1 // FullSimplify

D[1/2 μ² (A1 k L2² - 2 A1 k L2 x + A1 k x² + 2 (C5 + (-L2 + x) μ C6) Cos[L2 μ] - 2 C5 Cos[x μ] + 2 L2 μ C5 Sin[L2 μ] - 2 μ C5 Sin[L2 μ] + 2 C6 Sin[L2 μ] - 2 C6 Sin[x μ]), x] /. x -> L1

$$\text{Out[3]} = \frac{-A1 L1 - C1 \mu \sin[L1 \mu]}{\mu^2}$$

$$\text{Out[4]} = \frac{2 A1 k L1 - 2 A1 k L2 - 2 C6 \mu \cos[L1 \mu] + 2 C6 \mu \cos[L2 \mu] + 2 C5 \mu \sin[L1 \mu] - 2 C5 \mu \sin[L2 \mu]}{2 \mu^2}$$



(\* IGUALANDO LAS DOS ECUACIONES ANTERIORES Y DESPEJANDO C1 \*)

$$\text{Solve}\left[\frac{-A1 L1 + \mu C1 \text{Sin}[L1 \mu]}{\mu^2} = \frac{2 A1 k L1 - 2 A1 k L2 - 2 C6 \mu \text{Cos}[L1 \mu] + 2 C6 \mu \text{Cos}[L2 \mu] + 2 C5 \mu \text{Sin}[L1 \mu] - 2 C5 \mu \text{Sin}[L2 \mu]}{2 \mu^2}, C1\right]$$

(\* C1 \*)

$$\text{Out[5]} = \left\{ \left\{ C1 \rightarrow \frac{C5 \mu - C6 \mu \text{Cot}[L1 \mu] + A1 L1 \text{Csc}[L1 \mu] + A1 k L1 \text{Csc}[L1 \mu] - A1 k L2 \text{Csc}[L1 \mu] + C6 \mu \text{Cos}[L2 \mu] \text{Csc}[L1 \mu] - C5 \mu \text{Csc}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu]}{\mu} \right\} \right\}$$

(\* APLICANDO CONDICIÓN DE FRONTERA, EC. 2.27b - COMPATIBILIDAD 2 : wtot(L1)=wdown(L1) \*)

$$\frac{A1 x^2}{2 \mu^2} + C3 - \frac{C5 \mu - C6 \mu \text{Cot}[L1 \mu] + A1 L1 \text{Csc}[L1 \mu] + A1 k L1 \text{Csc}[L1 \mu] - A1 k L2 \text{Csc}[L1 \mu] + C6 \mu \text{Cos}[L2 \mu] \text{Csc}[L1 \mu] - C5 \mu \text{Csc}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu]}{\mu^2} \text{Cos}[x \mu] / . x \rightarrow L1$$

$$\frac{1}{2 \mu^2} (A1 k L2^2 - 2 A1 k L2 x + A1 k x^2 + 2 (C5 + (-L2 + x) \mu C6) \text{Cos}[L2 \mu] - 2 C5 \text{Cos}[x \mu] + 2 L2 \mu C5 \text{Sin}[L2 \mu] - 2 x \mu C5 \text{Sin}[L2 \mu] + 2 C6 \text{Sin}[L2 \mu] - 2 C6 \text{Sin}[x \mu]) / . x \rightarrow L1$$

$$\text{Out[6]} = C3 - \frac{A1 L1^2}{2 \mu^2} - \frac{\text{Cos}[L1 \mu] (C5 \mu - C6 \mu \text{Cot}[L1 \mu] + A1 L1 \text{Csc}[L1 \mu] - A1 k L1 \text{Csc}[L1 \mu] - A1 k L2 \text{Csc}[L1 \mu] + C6 \mu \text{Cos}[L2 \mu] \text{Csc}[L1 \mu] - C5 \mu \text{Csc}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu])}{\mu^3}$$

$$\text{Out[7]} = \frac{A1 k L1^2 - 2 A1 k L1 L2 - A1 k L2^2 - 2 C5 \text{Cos}[L1 \mu] + 2 (C5 + C6 (L1 - L2) \mu) \text{Cos}[L2 \mu] - 2 C6 \text{Sin}[L1 \mu] + 2 C6 \text{Sin}[L2 \mu] - 2 C5 L1 \mu \text{Sin}[L2 \mu] + 2 C5 L2 \mu \text{Sin}[L2 \mu]}{2 \mu^2}$$

(\* IGUALANDO LAS DOS ECUACIONES ANTERIORES Y DESPEJANDO C3 \*)

$$\text{Solve}\left[C3 - \frac{A1 L1^2}{2 \mu^2} - \frac{\text{Cos}[L1 \mu] (C5 \mu - C6 \mu \text{Cot}[L1 \mu] + A1 L1 \text{Csc}[L1 \mu] + A1 k L1 \text{Csc}[L1 \mu] - A1 k L2 \text{Csc}[L1 \mu] + C6 \mu \text{Cos}[L2 \mu] \text{Csc}[L1 \mu] - C5 \mu \text{Csc}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu])}{\mu^3} = \frac{A1 k L1^2 - 2 A1 k L1 L2 + A1 k L2^2 - 2 C5 \text{Cos}[L1 \mu] + 2 (C5 + C6 (L1 - L2) \mu) \text{Cos}[L2 \mu] - 2 C6 \text{Sin}[L1 \mu] + 2 C6 \text{Sin}[L2 \mu] - 2 C5 L1 \mu \text{Sin}[L2 \mu] + 2 C5 L2 \mu \text{Sin}[L2 \mu]}{2 \mu^2}, C3\right]$$

(\* C3 \*)

$$\text{Out[8]} = \left\{ \left\{ C3 \rightarrow \frac{1}{2 \mu^2} \text{Csc}[L1 \mu] \left( 2 A1 L1 \text{Cos}[L1 \mu] + 2 A1 k L1 \text{Cos}[L1 \mu] - 2 A1 k L2 \text{Cos}[L1 \mu] - 2 C6 \mu \text{Cos}[L1 \mu]^2 + 2 C6 \mu \text{Cos}[L1 \mu] \text{Cos}[L2 \mu] + A1 L1^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] - A1 k L1^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] - 2 A1 k L1 L2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] + A1 k L2^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] + 2 C5 \mu \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] + 2 C6 L1 \mu^2 \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] - 2 C6 L2 \mu^2 \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] - 2 C6 \mu \text{Sin}[L1 \mu]^2 - 2 C5 \mu \text{Cos}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] + 2 C6 \mu \text{Sin}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] - 2 C5 L1 \mu^2 \text{Sin}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] + 2 C5 L2 \mu^2 \text{Sin}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] \right) \right\} \right\}$$

(\* SUSTITUYENDO C1 Y C3 EN wtot Y APLICANDO CONDICIÓN DE FRONTERA, EC. 2.27a - COMPATIBILIDAD 3 \*)

D[

$$-\frac{A1 x^2}{2 \mu^2} + \frac{1}{2 \mu^2} \text{Csc}[L1 \mu] \left( 2 A1 L1 \text{Cos}[L1 \mu] + 2 A1 k L1 \text{Cos}[L1 \mu] - 2 A1 k L2 \text{Cos}[L1 \mu] - 2 C6 \mu \text{Cos}[L1 \mu]^2 + 2 C6 \mu \text{Cos}[L1 \mu] \text{Cos}[L2 \mu] + A1 L1^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] + A1 k L1^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] - 2 A1 k L1 L2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] + A1 k L2^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] + 2 C5 \mu \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] + 2 C6 L1 \mu^2 \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] - 2 C6 L2 \mu^2 \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] - 2 C6 \mu \text{Sin}[L1 \mu]^2 - 2 C5 \mu \text{Cos}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] + 2 C6 \mu \text{Sin}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] - 2 C5 L1 \mu^2 \text{Sin}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] + 2 C5 L2 \mu^2 \text{Sin}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] \right) - \frac{\text{Cos}[x \mu]}{\mu^2}, \{x, 2\} / . x \rightarrow L1$$

$$D\left[\frac{1}{2 \mu^2} (A1 k L2^2 - 2 A1 k L2 x + A1 k x^2 + 2 (C5 + (-L2 + x) \mu C6) \text{Cos}[L2 \mu] - 2 C5 \text{Cos}[x \mu] + 2 L2 \mu C5 \text{Sin}[L2 \mu] - 2 x \mu C5 \text{Sin}[L2 \mu] + 2 C6 \text{Sin}[L2 \mu] - 2 C6 \text{Sin}[x \mu]), \{x, 2\} / . x \rightarrow L1$$

$$\text{Out[9]} = \frac{A1}{\mu^2} - \frac{\text{Cos}[L1 \mu] (C5 \mu - C6 \mu \text{Cot}[L1 \mu] - A1 L1 \text{Csc}[L1 \mu] + A1 k L1 \text{Csc}[L1 \mu] - A1 k L2 \text{Csc}[L1 \mu] + C6 \mu \text{Cos}[L2 \mu] \text{Csc}[L1 \mu] - C5 \mu \text{Csc}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu])}{\mu}$$

$$\text{Out[10]} = \frac{2 A1 k + 2 C5 \mu^2 \text{Cos}[L1 \mu] + 2 C6 \mu^2 \text{Sin}[L1 \mu]}{2 \mu^2}$$

(\* IGUALANDO LAS DOS ECUACIONES ANTERIORES Y DESPEJANDO C5 \*)

$$\text{Solve}\left[\frac{A1}{\mu^2} + \frac{\text{Cos}[L1 \mu] (C5 \mu - C6 \mu \text{Cot}[L1 \mu] + A1 L1 \text{Csc}[L1 \mu] + A1 k L1 \text{Csc}[L1 \mu] - A1 k L2 \text{Csc}[L1 \mu] + C6 \mu \text{Cos}[L2 \mu] \text{Csc}[L1 \mu] - C5 \mu \text{Csc}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu])}{\mu} = \frac{2 A1 k + 2 C5 \mu^2 \text{Cos}[L1 \mu] + 2 C6 \mu^2 \text{Sin}[L1 \mu]}{2 \mu^2}, C5\right]$$

(\* C5 \*)

$$\text{Out[11]} = \left\{ \left\{ C5 \rightarrow \frac{\text{Csc}[L2 \mu] (-A1 - A1 k + A1 L1 \mu \text{Cot}[L1 \mu] - A1 k L1 \mu \text{Cot}[L1 \mu] - A1 k L2 \mu \text{Cot}[L1 \mu] - C6 \mu^2 \text{Cos}[L1 \mu] \text{Cot}[L1 \mu] + C6 \mu^2 \text{Cos}[L2 \mu] \text{Cot}[L1 \mu] - C6 \mu^2 \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])}{\mu^2} \right\} \right\}$$

In[12]= (\* APLICANDO CONDICIÓN DE FRONTERA, EC. 2.27d - COMPATIBILIDAD 4 \*)

$$D\left[\frac{A1 x^2}{2 \mu^2} + \frac{1}{2 \mu^3} \text{Csc}[L1 \mu] \left( 2 A1 L1 \text{Cos}[L1 \mu] + 2 A1 k L1 \text{Cos}[L1 \mu] - 2 A1 k L2 \text{Cos}[L1 \mu] - 2 C6 \mu \text{Cos}[L1 \mu]^2 + 2 C6 \mu \text{Cos}[L1 \mu] \text{Cos}[L2 \mu] + A1 L1^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] + A1 k L1^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] - 2 A1 k L1 L2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] + A1 k L2^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] + 2 C5 \mu \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] + 2 C6 L1 \mu^2 \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] - 2 C6 L2 \mu^2 \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] - 2 C6 \mu \text{Sin}[L1 \mu]^2 - 2 C5 \mu \text{Cos}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] + 2 C6 \mu \text{Sin}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] - 2 C5 L1 \mu^2 \text{Sin}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] + \frac{C5 \mu - C6 \mu \cot[L1 \mu] + A1 L1 \text{Csc}[L1 \mu] + A1 k L1 \text{Csc}[L1 \mu] - A1 k L2 \text{Csc}[L1 \mu] + C6 \mu \text{Cos}[L2 \mu] \text{Csc}[L1 \mu] - C5 \mu \text{Csc}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu]}{\mu} \text{Cos}[x \mu] \right) \text{Cos}[x \mu], \{x, 3\}\right] / . x \rightarrow L1$$

$$D\left[\frac{1}{2 \mu^2} \left( A1 k L2^2 - 2 A1 k L2 x + A1 k x^2 + 2 (C5 + (-L2 + x) \mu C6) \text{Cos}[L2 \mu] - 2 C5 \text{Cos}[x \mu] + 2 L2 \mu C5 \text{Sin}[L2 \mu] - 2 x \mu C5 \text{Sin}[L2 \mu] + 2 C6 \text{Sin}[L2 \mu] - 2 C6 \text{Sin}[x \mu] \right), \{x, 3\}\right] / . x \rightarrow L1$$

Out[12]= -Sin[L1 μ] (C5 μ - C6 μ Cot[L1 μ] + A1 L1 Csc[L1 μ] + A1 k L1 Csc[L1 μ] - A1 k L2 Csc[L1 μ] + C6 μ Cos[L2 μ] Csc[L1 μ] - C5 μ Csc[L1 μ] Sin[L2 μ])

Out[13]=  $\frac{2 C6 \mu^3 \text{Cos}[L1 \mu] - 2 C5 \mu^3 \text{Sin}[L1 \mu]}{2 \mu^2}$

In[14]= (\* DESPEJANDO C5 DE LA ECUACIÓN ANTERIOR\*)

$$\text{Solve}\left[-\text{Sin}[L1 \mu] (C5 \mu - C6 \mu \text{Cot}[L1 \mu] + A1 L1 \text{Csc}[L1 \mu] + A1 k L1 \text{Csc}[L1 \mu] - A1 k L2 \text{Csc}[L1 \mu] + C6 \mu \text{Cos}[L2 \mu] \text{Csc}[L1 \mu] - C5 \mu \text{Csc}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu]) == \frac{2 C6 \mu^3 \text{Cos}[L1 \mu] - 2 C5 \mu^3 \text{Sin}[L1 \mu]}{2 \mu^2}, C5\right]$$

Out[14]=  $\left\{\left\{C5 \rightarrow \frac{(A1 L1 + A1 k L1 - A1 k L2 + C6 \mu \text{Cos}[L2 \mu]) \text{Csc}[L2 \mu]}{\mu}\right\}\right\}$

In[15]= (\* IGUALANDO LAS DOS ECUACIONES DE C5 PARA OBTENER C6 \*)

$$\text{Solve}\left[\frac{\text{Csc}[L2 \mu] (-A1 - A1 k + A1 L1 \mu \text{Cot}[L1 \mu] + A1 k L1 \mu \text{Cot}[L1 \mu] - A1 k L2 \mu \text{Cot}[L1 \mu] - C6 \mu^2 \text{Cos}[L1 \mu] \text{Cot}[L1 \mu] + C6 \mu^2 \text{Cos}[L2 \mu] \text{Cot}[L1 \mu] - C6 \mu^2 \text{Sin}[L1 \mu]) \text{Tan}[L1 \mu]}{\mu^2} - \frac{(A1 L1 + A1 k L1 - A1 k L2 + C6 \mu \text{Cos}[L2 \mu]) \text{Csc}[L2 \mu]}{\mu}, C6\right]$$

Out[15]=  $\left\{\left\{C6 \rightarrow \frac{-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu]}{\mu^2 (\text{Cos}[L1 \mu] - \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])}\right\}\right\}$

In[16]= (\* C6 \*)

$$C6 = \frac{-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu]}{\mu^2 (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])};$$

In[17]= (\* C5 \*)

$$C5 = \frac{(A1 L1 + A1 k L1 - A1 k L2 + \frac{-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu]}{\mu^2 (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])} \mu \text{Cos}[L2 \mu]) \text{Csc}[L2 \mu]}{\mu};$$

In[18]= (\* SUSTITUYENDO C5 Y C6 EN C3 \*)

$$C3 = \frac{1}{2 \mu^3} \text{Csc}[L1 \mu] \left( 2 A1 L1 \text{Cos}[L1 \mu] + 2 A1 k L1 \text{Cos}[L1 \mu] - 2 A1 k L2 \text{Cos}[L1 \mu] - 2 C6 \mu \text{Cos}[L1 \mu]^2 + 2 C6 \mu \text{Cos}[L1 \mu] \text{Cos}[L2 \mu] + A1 L1^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] + A1 k L1^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] - 2 A1 k L1 L2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] + A1 k L2^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] + 2 C5 \mu \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] + 2 C6 L1 \mu^2 \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] - 2 C6 L2 \mu^2 \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] - 2 C6 \mu \text{Sin}[L1 \mu]^2 - 2 C5 \mu \text{Cos}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] + 2 C6 \mu \text{Sin}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] - 2 C5 L1 \mu^2 \text{Sin}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] + 2 C5 L2 \mu^2 \text{Sin}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] \right)$$

Out[18]=  $\frac{1}{2 \mu^3} \text{Csc}[L1 \mu] \left( 2 A1 L1 \text{Cos}[L1 \mu] + 2 A1 k L1 \text{Cos}[L1 \mu] - 2 A1 k L2 \text{Cos}[L1 \mu] + A1 L1^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] + A1 k L1^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] - 2 A1 k L1 L2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] + A1 k L2^2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] - \frac{2 \text{Cos}[L1 \mu]^2 (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\mu (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])} + \frac{2 \text{Cos}[L1 \mu] \text{Cos}[L2 \mu] (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\mu (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])} + \frac{2 L1 \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu]} - \frac{2 L2 \text{Cos}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu]} - \frac{2 \text{Sin}[L1 \mu]^2 (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\mu (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])} - \frac{2 \text{Sin}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu] (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\mu (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])} - 2 \text{Cos}[L1 \mu] \left( A1 L1 - A1 k L1 - A1 k L2 - \frac{\text{Cos}[L2 \mu] (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\mu (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])} \right) - 2 L1 \mu \text{Sin}[L1 \mu] \left( A1 L1 + A1 k L1 - A1 k L2 + \frac{\text{Cos}[L2 \mu] (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\mu (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])} \right) + 2 L2 \mu \text{Sin}[L1 \mu] \left( A1 L1 + A1 k L1 - A1 k L2 - \frac{\text{Cos}[L2 \mu] (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\mu (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])} \right) + 2 \text{Cot}[L2 \mu] \text{Sin}[L1 \mu] \left( A1 L1 + A1 k L1 - A1 k L2 + \frac{\text{Cos}[L2 \mu] (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\mu (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])} \right) \right)$

In[19]= (\* C1 \*)

$$C1 = \frac{C5 \mu - C6 \mu \text{Cot}[L1 \mu] + A1 L1 \text{Csc}[L1 \mu] + A1 k L1 \text{Csc}[L1 \mu] - A1 k L2 \text{Csc}[L1 \mu] + C6 \mu \text{Cos}[L2 \mu] \text{Csc}[L1 \mu] - C5 \mu \text{Csc}[L1 \mu] \text{Sin}[L2 \mu]}{\mu}$$

Out[19]=  $\frac{1}{\mu} \left( A1 L1 \text{Csc}[L1 \mu] + A1 k L1 \text{Csc}[L1 \mu] - A1 k L2 \text{Csc}[L1 \mu] - \frac{\text{Cot}[L1 \mu] (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\mu (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])} + \frac{\text{Cos}[L2 \mu] \text{Csc}[L1 \mu] (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\mu (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])} - \text{Csc}[L1 \mu] \left( A1 L1 - A1 k L1 - A1 k L2 + \frac{\text{Cos}[L2 \mu] (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\mu (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])} \right) + \text{Csc}[L2 \mu] \left( A1 L1 + A1 k L1 - A1 k L2 - \frac{\text{Cos}[L2 \mu] (-A1 \text{Tan}[L1 \mu] - A1 k \text{Tan}[L1 \mu])}{\mu (\text{Cos}[L1 \mu] + \text{Sin}[L1 \mu] \text{Tan}[L1 \mu])} \right) \right)$

(\* SUSTITUYENDO TODOS LOS VALORES DE LAS CONSTANTES EN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES \*)

(\* wtot - SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA DEFLEXIÓN \*)

$$wtot = -\frac{A1 x^2}{2 \mu^2} + C3 - \frac{C1 \cos[x \mu]}{\mu^2} // FullSimplify$$

$$\text{Out[20]} = \frac{1}{2 \mu^4} A1 \left( 2 (1+k) - \left( (1+k) L1^2 - 2 (1+k) L1 L2 + k L2^2 + x^2 \right) \mu^2 - 2 (1+k) \cos[L1 \mu] \cos[x \mu] + \right. \\ \left. 2 (L1 + k L1 - k L2) \mu (\cos[L2 \mu] - \cos[x \mu]) \csc[L2 \mu] + 2 (1+k) (\cos[x \mu] \cot[L2 \mu] - \csc[L2 \mu]) \sin[L1 \mu] \right)$$

In[21]= (\* wdown - SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA DEFLEXIÓN \*)

$$wdown = \frac{1}{2 \mu^2} \left( A1 k L2^2 - 2 A1 k L2 x + A1 k x^2 + 2 (C5 + (-L2 + x) \mu C6) \cos[L2 \mu] - 2 C5 \cos[x \mu] + 2 L2 \mu C5 \sin[L2 \mu] - 2 x \mu C5 \sin[L2 \mu] + 2 C6 \sin[L2 \mu] - 2 C6 \sin[x \mu] \right) // \\ FullSimplify$$

$$\text{Out[21]} = \frac{1}{2 \mu^4} A1 \left( -(L2 - x) (-2 (1+k) L1 + k (L2 + x)) \mu^2 + 2 (L1 + k L1 - k L2) \mu \cot[L2 \mu] - \right. \\ \left. 2 (L1 + k L1 - k L2) \mu \cos[x \mu] \csc[L2 \mu] + (1+k) \csc[L2 \mu] (-2 \sin[L1 \mu] + \sin[(L1 + L2 - x) \mu] + \sin[(L1 - L2 + x) \mu]) \right)$$

# ANEXO 2

Tabla de valores correspondientes a la gráfica de la Fig. 3-1.

$N_t$ (MN)	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_1 S$	$k_2 S$	$k_3 S$	$k_4 S$	$k_5 S$	$k_6 S$	$k_7 S$
	$w_{tot}$ (m)	$w_{tot}$ (m)	$w_{tot}$ (m)	$w_{tot}$ (m)	$w_{tot}$ (m)	$w_{tot}$ (m)	$w_{tot}$ (m)	$w_{tot}$ (m)	$w_{tot}$ (m)	$w_{tot}$ (m)	$w_{tot}$ (m)	$w_{tot}$ (m)	$w_{tot}$ (m)	$w_{tot}$ (m)
1.5	0.0073	0.276	1.335	3.519	6.370	8.381	8.381	2.061	5.608	7.949	8.226	6.610	5.891	6.271
1.6	0.0064	0.243	1.173	3.092	5.598	7.365	7.365	1.811	4.929	6.987	7.230	5.809	5.178	5.512
1.7	0.0057	0.215	1.039	2.739	4.958	6.523	6.523	1.605	4.366	6.189	6.404	5.146	4.587	4.883
1.8	0.0051	0.192	0.927	2.442	4.421	5.817	5.817	1.431	3.894	5.520	5.712	4.590	4.091	4.355
1.9	0.0045	0.172	0.832	2.192	3.968	5.220	5.220	1.284	3.495	4.955	5.127	4.120	3.672	3.909
2	0.0041	0.155	0.750	1.978	3.580	4.710	4.710	1.159	3.155	4.472	4.627	3.718	3.314	3.528
2.1	0.0037	0.141	0.681	1.794	3.247	4.272	4.272	1.051	2.861	4.056	4.197	3.372	3.006	3.200
2.2	0.0034	0.128	0.620	1.634	2.958	3.892	3.892	0.958	2.607	3.695	3.824	3.073	2.739	2.915
2.3	0.0031	0.117	0.567	1.495	2.706	3.560	3.560	0.877	2.385	3.381	3.499	2.811	2.506	2.667
2.4	0.0028	0.108	0.521	1.373	2.485	3.269	3.269	0.805	2.191	3.105	3.213	2.582	2.301	2.450
2.5	0.0026	0.099	0.480	1.265	2.289	3.012	3.012	0.742	2.019	2.862	2.961	2.380	2.121	2.258
2.6	0.0024	0.092	0.444	1.169	2.116	2.784	2.784	0.686	1.867	2.646	2.738	2.200	1.961	2.087
2.7	0.0022	0.085	0.411	1.084	1.962	2.582	2.582	0.636	1.731	2.454	2.539	2.040	1.818	1.936
2.8	0.0021	0.079	0.382	1.008	1.824	2.400	2.400	0.591	1.609	2.281	2.361	1.897	1.691	1.800
2.9	0.0019	0.074	0.356	0.939	1.700	2.237	2.237	0.551	1.500	2.127	2.201	1.768	1.576	1.678
3	0.0018	0.069	0.333	0.878	1.589	2.090	2.090	0.515	1.402	1.987	2.056	1.652	1.473	1.568
3.1	0.0017	0.064	0.312	0.822	1.487	1.957	1.957	0.483	1.313	1.861	1.926	1.548	1.379	1.468
3.2	0.0016	0.061	0.293	0.771	1.396	1.836	1.836	0.453	1.232	1.747	1.807	1.452	1.294	1.378
3.3	0.0015	0.057	0.275	0.725	1.312	1.726	1.726	0.426	1.159	1.642	1.700	1.366	1.217	1.296
3.4	0.0014	0.054	0.259	0.683	1.236	1.626	1.626	0.401	1.092	1.547	1.601	1.287	1.147	1.221
3.5	0.0013	0.051	0.244	0.644	1.166	1.534	1.534	0.379	1.030	1.460	1.511	1.214	1.082	1.152
3.6	0.0013	0.048	0.231	0.609	1.102	1.450	1.450	0.358	0.974	1.380	1.428	1.148	1.023	1.089
3.7	0.0012	0.045	0.219	0.576	1.043	1.372	1.372	0.339	0.922	1.307	1.352	1.086	0.968	1.031
3.8	0.0011	0.043	0.207	0.546	0.989	1.301	1.301	0.321	0.874	1.239	1.282	1.030	0.918	0.977
3.9	0.0011	0.041	0.197	0.518	0.939	1.235	1.235	0.305	0.830	1.176	1.217	0.978	0.872	0.928
4	0.0010	0.039	0.187	0.493	0.892	1.174	1.174	0.290	0.789	1.118	1.157	0.930	0.828	0.882
4.1	0.0010	0.037	0.178	0.469	0.849	1.117	1.117	0.276	0.751	1.064	1.101	0.885	0.789	0.839
4.2	0.0009	0.035	0.170	0.447	0.809	1.064	1.064	0.263	0.715	1.014	1.049	0.843	0.751	0.800
4.3	0.0009	0.033	0.162	0.426	0.772	1.015	1.015	0.251	0.682	0.967	1.001	0.804	0.717	0.763
4.4	0.0008	0.032	0.154	0.407	0.737	0.969	0.969	0.240	0.652	0.924	0.956	0.768	0.685	0.729
4.5	0.0008	0.031	0.148	0.389	0.704	0.927	0.927	0.229	0.623	0.883	0.914	0.734	0.655	0.697
4.6	0.0008	0.029	0.141	0.372	0.674	0.887	0.887	0.219	0.596	0.845	0.875	0.703	0.626	0.667
4.7	0.0007	0.028	0.135	0.356	0.645	0.849	0.849	0.210	0.571	0.810	0.838	0.673	0.600	0.639
4.8	0.0007	0.027	0.130	0.342	0.619	0.814	0.814	0.201	0.548	0.776	0.803	0.645	0.575	0.612
4.9	0.0007	0.026	0.124	0.328	0.594	0.781	0.781	0.193	0.526	0.745	0.771	0.619	0.552	0.588
5	0.0007	0.025	0.119	0.315	0.570	0.750	0.750	0.185	0.505	0.715	0.740	0.595	0.530	0.564

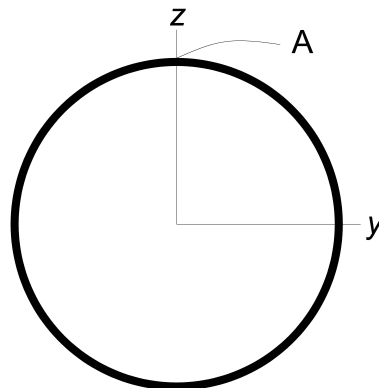


FIGURA A-1 Punto A, considerado para el cálculo de esfuerzos máximos.





# ANEXO 4

Tabla de valores correspondientes a la curva con línea discontinua roja de la gráfica en la Fig. 4-4. Para cada valor de  $x$ , se localizó el número de nodo correspondiente a esa longitud. Los datos mostrados en rojo indican el límite de la longitud  $L_1$  y el inicio de la longitud  $L_2$ . Ver Fig. 2.2.

k1			k2			k3			k4			k5			k6				
NODE	$x$	$\sigma_{tot}$ (MPa)	$\sigma_{down}$ (MPa)	NODE	$x$	$\sigma_{tot}$ (MPa)	$\sigma_{down}$ (MPa)	NODE	$x$	$\sigma_{tot}$ (MPa)	$\sigma_{down}$ (MPa)	NODE	$x$	$\sigma_{tot}$ (MPa)	$\sigma_{down}$ (MPa)	NODE	$x$	$\sigma_{tot}$ (MPa)	$\sigma_{down}$ (MPa)
4	0	2.406	-	4	0	80.66	-	4	0	210.2	-	4	0	363.54	-	4	0	461.84	-
16827	0.6	6.937	-	4154	1	78.46	-	7917	1.4	191.7	-	12688	2	315.57	-	13952	2	379.88	-
16947	1.2	11.470	-	4204	2	76.26	-	7777	2.8	173.2	-	12354	4	267.48	-	13552	4	330.7	-
17067	1.8	16.000	-	4254	3	74.06	-	7637	4.2	154.6	-	12021	6	219.52	-	13152	6	281.53	-
17187	2.4	20.530	-	4304	4	71.86	-	7497	5.6	136.1	-	11688	8	171.56	-	12752	8	232.36	-
17307	3	25.070	-	4354	5	69.66	-	7357	7	117.5	-	11355	10	123.59	-	12352	10	183.21	-
5	3.733	30.620	30.620	4404	6	67.46	-	7217	8.4	98.96	-	11021	12	75.474	-	11952	12	134.08	-
17506	4	-	30.16	4454	7	65.26	-	7077	9.8	80.41	-	10688	14	27.508	-	11552	14	84.98	-
17906	6	-	26.66	12701	8	63.08	-	6937	11.2	61.86	-	10355	16	-20.454	-	11152	16	35.912	-
18306	8	-	23.19	12751	9	60.88	-	22897	12.6	43.24	-	10021	18	-68.56	-	10752	18	-13.129	-
18706	10	-	19.73	5	9.604	59.54	59.54	22757	14	24.69	-	3	20.883	-137.8	-137.8	10352	20	-62.158	-
19106	12	-	16.28	12801	10	-	57.75	3	15.015	11.22	11.22	9356	22	-	-135.1	9952	22	-111.19	-
19506	14	-	12.84	12901	12	-	48.6	22557	16	-	6.712	9022	24	-	-130.2	9552	24	-160.26	-
19906	16	-	9.411	13001	14	-	39.46	22357	18	-	-2.401	8689	26	-	-125.3	9152	26	-209.36	-
20306	18	-	5.989	13101	16	-	30.31	22157	20	-	-11.51	8356	28	-	-120.4	3	27.726	-251.85	-251.85
20706	20	-	2.572	13201	18	-	21.16	21957	22	-	-20.63	8022	30	-	-115.5	37443	28	-	-249.15
21106	22	-	-0.842	13301	20	-	12.01	21757	24	-	-29.74	7689	32	-	-110.7	37043	30	-	-228.59
21506	24	-	-4.256	13401	22	-	2.868	21557	26	-	-38.85	7356	34	-	-105.8	36643	32	-	-208.08
21906	26	-	-7.672	13501	24	-	-6.28	21357	28	-	-47.97	7022	36	-	-100.9	36243	34	-	-187.59
22306	28	-	-11.09	13601	26	-	-15.43	21157	30	-	-57.08	6689	38	-	-96.06	35843	36	-	-167.12
22706	30	-	-14.52	13701	28	-	-24.57	20957	32	-	-66.19	6356	40	-	-91.19	35443	38	-	-146.66
23106	32	-	-17.95	13801	30	-	-33.72	20757	34	-	-75.31	6022	42	-	-86.32	35043	40	-	-126.2
23506	34	-	-21.39	13901	32	-	-42.87	20557	36	-	-84.42	5689	44	-	-81.46	34643	42	-	-105.75
23906	36	-	-24.85	14001	34	-	-52.01	20357	38	-	-93.54	5356	46	-	-76.6	34243	44	-	-85.299
24306	38	-	-28.32	14101	36	-	-61.16	20157	40	-	-102.7	5022	48	-	-71.73	33843	46	-	-64.849
24706	40	-	-31.8	14201	38	-	-70.39	19957	42	-	-111.8	4690	50	-	-64.94	33443	48	-	-44.4
25106	42	-	-35.31	14301	40	-	-79.45	19757	44	-	-120.9	30383	52	-	-52.541	33043	50	-	-25.37
25506	44	-	-35.84	14401	42	-	-88.59	19557	46	-	-130	30050	54	-	-40.157	32643	52	-	-15.475
25906	46	-	-32.14	14501	44	-	-97.74	19357	48	-	-135.9	3690	56	-	-27.755	32243	54	-	-5.5793
26306	48	-	-28.44	14601	46	-	-104.9	19157	50	-	-117.5	29383	58	-	-15.353	31843	56	-	4.316
26706	50	-	-24.73	14701	48	-	-92.63	18957	52	-	-99.06	29050	60	-	-2.97	31443	58	-	14.211
27106	52	-	-21.03	14801	50	-	-80.41	18757	54	-	-80.65	2890	62	-	9.431	31043	60	-	24.106
27506	54	-	-17.32	14901	52	-	-68.18	18557	56	-	-62.24	28383	64	-	21.833	30643	62	-	34
27906	56	-	-13.62	15001	54	-	-55.96	18357	58	-	-43.83	28050	66	-	34.215	30243	64	-	43.894
28306	58	-	-9.916	15101	56	-	-43.73	18157	60	-	-25.42	1690	68	-	46.615	29843	66	-	53.788
28706	60	-	-6.212	15201	58	-	-31.51	17957	62	-	-7.01	27383	70	-	59.014	29443	68	-	63.682
29106	62	-	-2.508	15301	60	-	-19.28	17757	64	-	11.4	1023	72	-	71.413	29043	70	-	73.575
29506	64	-	1.196	15401	62	-	-7.05	17557	66	-	29.81	690	74	-	83.793	1	71.736	-	82.17
29906	66	-	4.9	15501	64	-	5.178	17357	68	-	48.22	26383	76	-	96.191				
30306	68	-	8.605	15601	66	-	17.41	17157	70	-	66.63	1	78.096	-	109.18				
30706	70	-	12.31	15701	68	-	29.63	16957	72	-	85.03								
64510	72	-	16.01	15801	70	-	41.86	16757	74	-	103.4								
64910	74	-	19.71	15901	72	-	54.09	16557	76	-	121.8								
65310	76	-	23.42	16001	74	-	66.32	16357	78	-	140.2								
65710	78	-	27.12	16101	76	-	78.55	1	80.512	-	163.4								
66110	80	-	30.83	16201	78	-	90.78												
66510	82	-	34.53	16301	80	-	103												
7	83.52	-	37.34	7	82.01	-	115.3												



# REFERENCIAS

[J] Journal    [C] Conference    [B] Book/Handbook    [M] Monograph

- [1] Chakrabarti, S.K., (2005). “*Handbook of Offshore Engineering*”, [B] Vol. 1, Elsevier First Edition, Great Britain.
- [2] Fyrilev, O., Collberg, L., “*Influence of Pressure in Pipeline Design – Effective Axial Force*”. [J] 24<sup>th</sup> International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 2005, OMAE2005-67502. Greece.
- [3] Anonymous. “*Upheaval Buckling*”. Internet source: [http://www.nordnes.nl/rockinstallation/upheaval\\_buckling.jpg](http://www.nordnes.nl/rockinstallation/upheaval_buckling.jpg). Date: 15/11/2014
- [4] Kerr, A.D. “*On the Stability of Railroad Track in the Vertical Plane*”. [J] Rail International, 1974, Vol. 5, Pages: 131-142.
- [5] Gao, X-f., Liu, R., Du, Z-f., Tan Z-d. “*Overview of Upheaval Buckling Theoretical Studies for Submarine Buried Pipeline*”. [J] Journal of Ship Mechanics. Jun. 2011, Vol. 15, No. 6, Pages: 678-687.
- [6] Palmer, A.C., Baldry, J.A.S. “*Lateral Buckling of Axially Constrained Pipelines*”. [J] Journal of Petroleum Technology, 1974, Vol. 26, No. 11, Pages: 1283-1284.
- [7] Hobbs, R.E. “*Pipeline Buckling Caused by Axial Loads*”. [J] Journal of Constructional Steel Research, 1981, Vol. 1, No. 2, Pages: 2-10.
- [8] Hobbs, R.E. “*In-service Buckling of Heated Pipelines*”. [J] Journal of Transportation Engineering, 1984, Vol. 110, No. 2, Pages: 175-189.
- [9] Nielsen, N-J.R, Lyngberg, B., Pedersen, P.T. “*Upheaval Buckling Failures of Insulated Buried Pipelines: A Case Story*”. [C] 22<sup>nd</sup> Offshore Technology Conference, 1990, Houston, Texas. Pages: 581-592.
- [10] Guijt, J. “*Upheaval Buckling of Offshore Pipelines: Overview and Introduction*”. [C] 22<sup>nd</sup> Offshore Technology Conference, 1990, Houston, Texas. Pages: 573-580.
- [11] Kerr, A.D. “*Lateral Buckling of Railroad Tracks due to Constrained Thermal Expansion*”. [M] Railroad Track Mechanics and Technology, Pergamon Press, Oxford, 1978.
- [12] Hibbeler, R.C. (2011). “*Mechanics of Materials*”, 8<sup>th</sup> Edition. [B] Pearson Education Inc. 880 pp.
- [13] Pytel, A., Kiusalaas, J. (2012). “*Mechanics of Materials*”, 2<sup>nd</sup> Edition. [B] Cengage Learning. 576 pp.
- [14] Nayfeh, A.H., Pai, P.F. (2004). “*Linear and Nonlinear Structural Mechanics*”. [B] John Wiley & Sons, Inc. N5w Jersey, USA. 746 pp.
- [15] Taylor, N., Gan, A.B. “*Submarine Pipeline Buckling – Imperfection Studies*”. [J] Thin-Walled Structures 4, 1976. England, Great Britain. Pages: 295-323.
- [16] Boer, S., Hulsbergen, C.H., Richards, D.M., et al. “*Buckling Considerations in the Design of the Gravel Cover for a High Temperature oil line*”. [C] 18<sup>th</sup> Offshore Technology Conference, 1986, Houston, Texas. Pages: 1-8.
- [17] Friedmann, Y. “*Some Aspects of the Design of Hot Buried Pipelines*”. [C] Offshore Oil and Gas Line Technology Conference, 1986, Paris, France. Pages: 1-34.
- [18] Richards, D.M., Andronicou, A. “*Seabed Irregularity Effects on the Buckling of Heated Submarine Pipelines*”. [C] WEMT Advances in Offshore Technology, 1986. Amsterdam. Pages: 250-265.
- [19] Ju, G.T, Kyriakides, S. “*Thermal Buckling of Offshore Pipelines*”. [J] Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 1988, 110(4). Pages: 355-364.
- [20] Pedersen, P.T., Jensen, J.J. “*Upheaval Creep of Buried Heated Pipelines with Initial Imperfections*”. [J] Marine Structures, 1988, 1. Pages: 11-22.
- [21] Ballet, J.P., Hobbs, R.E. “*Asymmetric Effects of Prop Imperfections on the Upheaval Buckling of Pipelines*”. [J] Thin-Walled Structures, 1992, 13. Pages: 355-373.



- [22] Taylor, N., Tran, V. “*Prop Imperfection Subsea Pipeline Buckling*”. [J] Marine Structures, 1993, 6. Pages: 325-358.
- [23] Maltby, T.C., Calladine, C.R. “*An Investigation into Upheaval Buckling of Buried Pipelines – ii. Theory and Analysis of Experimental Observations*”. [J] International Journal of Mechanical Sciences, 1995, 37(9). Pages: 965-983.
- [24] Taylor, N., Tran, V. “*Experimental and Theoretical Studies in Subsea Pipeline Buckling*”. [J] Marine Structures, 1996, 9(2). Pages: 211-257.
- [25] Croll, J.G.A. “*A Simplified Model of Upheaval Thermal Buckling of Subsea Pipelines*”. [J] Thin-Walled Structures, 1997, 29(1-4). Pages: 59-78.
- [26] Hunt, G.W., Blackmore, A. “*Homoclinic and Heteroclinic Solutions of Upheaval Buckling*”. [J] Phil. Trans. R. Soc. London., 1997, 355(4) Pages: 2185-2195.
- [27] Wang, L., Shi, R., Yuan, F., Guo, Z., Yu, L., “*Global Buckling of pipelines in the Vertical Plane with a Soft Seabed*”. [J] Applied Ocean Research. 2011, 33(2) Pages: 130-136.
- [28] Shi, R., Wang, K., Long, F., Li, H. “*Vertical Buckling of Offshore Pipelines with Geometrical Imperfections on Soft Seabed*”. [J] Electronic Journal of Geotechnical Engineering. 2013, Vol. 18 Pages: 5491-5508.
- [29] Timoshenko, S.P., “*On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*”, [J] Philosophical Magazine, 41, 744-746 (1921).
- [30] Wang, C.M., Reddy, J.N., Lee, K.H., (2000), “*Shear Deformable Beams and Plates, Relationships with Classical Solutions*”, [B] Elsevier First Edition, United Kingdom.
- [31] Shi, R., Wang, L., Guo, Z., Yuan, F. “*Upheaval Buckling of a Pipeline with Prop Imperfection on a Plastic Soft Seabed*”. [J] Thin-Walled Structures. 2013, Vol. 65 Pages: 1-6.
- [32] de Borst, R., Crisfield, M.A., Remmers, J.J.C., Verhoosel, C.V., (2012), “*Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*”, [B] John Wiley & Sons Ltd. Second Edition, United Kingdom.
- [33] Wriggers, P., (2008), “*Nonlinear Finite Element Methods*”, [B] Springer-Verlag First Edition, Germany.
- [34] Liu, G.R., Quek, S.S., (2014), “*The Finite Element Method – A Practical Course*”, [B] Elsevier Second Edition, United States of America.
- [35] (2013), Abaqus 6.13 Documentation, © Dassault Systèmes, 2013, United States of America.
- [36] Comisión Nacional de Hidrocarburos, “*Golfo de México – Cuencas del Sureste - Aguas Someras*”, [En línea], México, Diciembre 2014, [Fecha de consulta: 24/09/15], Disponible en: <http://ronda1.gob.mx/Espanol/pdf/AguasSomeras.pdf>.
- [37] Comisión Nacional de Hidrocarburos, “*Proyecto de Exploración – Proyectos Resolución CNH.E.03.001/10*”, [En línea], México, [Fecha de consulta: 24/09/15], Disponible en: <http://www.cnh.gob.mx/7100.aspx>.
- [38] Liu, P.F., Zheng, J.Y., Zhang, B.J., Shi, P., (2010), “*Failure Analysis of natural gas buried X65 steel pipeline under deflection load using finite element method*”, [J] Materials and Design. 41, 1384-1391
- [39] Petróleos Mexicanos, “*Indicadores petroleros*”, [En línea], México, [Fecha de consulta: 01/10/15], Disponible en: [http://www.pemex.com/ri/Publicaciones/Indicadores%20Petroleros/eprohidro\\_esp.pdf](http://www.pemex.com/ri/Publicaciones/Indicadores%20Petroleros/eprohidro_esp.pdf)
- [40] Petróleos Mexicanos, “*Indicadores petroleros*”, [En línea], México, [Fecha de consulta: 01/10/15], Disponible en: [http://www.pemex.com/ri/Publicaciones/Indicadores%20Petroleros/eprodcrudo\\_esp.pdf](http://www.pemex.com/ri/Publicaciones/Indicadores%20Petroleros/eprodcrudo_esp.pdf).
- [41] Central Intelligence Agency, “*The World Factbook – Country Comparison Crude Oil Proved Reserves*”, [En línea], México, [Fecha de consulta: 12/10/15], Disponible en: <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2244rank.html>.

[42] Ple4Win “*High Pressure High Temperature Pipelines*”, [En línea], [Fecha de consulta: 01/10/15], Disponible en: <http://ple4win.nl/ple4win/application-areas/onshore/hpht/>