UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# DE LOS ORÍGENES INCIERTOS DEL ÁLGEBRA: DE LA GEOMETRÍA MESOPOTÁMICA A LAS ESCUELAS DE ÁBACO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

MÓNICA CITLALLI PEREYRA ZAMUDIO

DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. JOSE RAFAEL MARTINEZ ENRIQUEZ

2016

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX

## Hoja de datos del jurado

1. **Datos del alumno**
   Pereyra
   Zamudio
   Mónica Citlalli
   53 89 22 12
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de ciencias
   Matemáticas
   307334527
2. **Datos del tutor**
   M. en C.
   José Rafael
   Enríquez
   Martínez
3. **Datos del sinodal 1**
   Dr.
   Carlos
   Torres
   Alcaraz
4. **Datos del sinodal 2**
   Mat.
   César
   Guevara
   Bravo
5. **Datos del sinodal 3**
   M. en D.
   Tania Azucena
   Chicalote
   Jiménez
6. **Datos del sinodal 4**
   M. en F.C.
   María del Pilar
   Piñones
   Contreras
7. **Datos del trabajo escrito**
   De los orígenes inciertos del álgebra: De la geometría Mesopotámica a las escuelas de Ábaco
   127 p.
   2016

# ÍNDICE GENERAL

## AGRADECIMIENTOS

Por este conducto, haga manifiesto mi sincero agradecimiento y doy las gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para la Investigación y Mejoramiento a la Enseñanza **(PAPIME)** por el apoyo económico brindado (Clave del proyecto **PE103916**) así como a la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme dado la oportunidad de obtener una sólida formación científica, así como un desarrollo humano y espiritual que cambio para bien mi vida. De igual modo quiero agradecer al M. en C. José Rafael Martínez Enríquez por su paciencia y apoyo durante el desarrollo de la presente tesis. A los miembros del jurado Dr. Carlos Torres Alcaraz, M. en F.C. María del Pilar Piñones Contreras, M. en D. Tania Azucena Chicalote Jiménez y Mat. Julio César Guevara Bravo por su apoyo académico y consejos durante el desarrollo de mi tesis.

**Igualmente deseo dedicar esta tesis a:**

Mi madre María de Lourdes Zamudio Guzmán por su apoyo y amor en todo momento.

Mi padre Javier Pereyra Venegas porque gracias a su ayuda y consejos he llegado hasta donde estoy.

A mi hermano Javier Eduardo Pereyra Zamudio por su solidaridad y cariño.

A mis amigos por su apoyo incondicional.

## INTRODUCCIÓN:

En los dominios de la historia de las matemáticas, al igual que en los de tantas otras disciplinas, se producen polémicas o discusiones sobre los orígenes de las diferentes ramas que integran la o las matemáticas. Uno de estos enfrentamientos, quizá de los más ásperos, ha girado en torno de la naturaleza del 'álgebra geométrica' y de cuándo fechar como ya establecido su uso en la solución de problemas. Hasta la década de 1970 era común que los académicos interesados en cuestiones históricas hablasen del 'álgebra de los griegos', inspirados en gran medida por la publicación –que no necesariamente implica se le leyera– en los años 30 de la obra de Jacob Klein traducida en 1968 al inglés como *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. La tentación o inevitable acción de mirar el pasado bajo la perspectiva del presente no era nueva. Ya Hans Georg Zeuthen, seguido por varios más, había planteado la existencia de un 'álgebra geométrica' inmersa en la antigua 'geometría teórica' –para contrastarla con una 'geometría práctica' que no requería de justificaciones más allá de su efectividad en el uso– y que se puede resumir en dos aseveraciones: i) Los griegos poseían un sistema de razonamiento análogo a nuestra álgebra; ii) Los griegos tenían pleno conocimiento de métodos para resolver problemas cuadráticos (como los que nos ofrece la tradición babilónica) y que los Libros II y VI de los *Elementos* contienen proposiciones dirigidas a formalizar los fundamentos teóricos de tales métodos.

Esta problemática pronto perdió su atractivo, básicamente por carecer de material con el cual corroborar sus pretensiones, pues hay que recordar que a fines del siglo XIX difícilmente se podía encontrar orientalistas con conocimientos matemáticos. Llegada la primera mitad del siglo XX, con la disponibilidad de miles de tablillas sin descifrar, pero contando ahora con el interés de múltiples instituciones –museos, universidades y emprendedores independientes–, y la devoción de algunos académicos con horizontes más amplios y mayor refinamiento intelectual, hubo quienes, sin haber leído a Zeuthen, de manera independiente se plantearon si sería posible remontar las raíces de esta ‘álgebra geométrica’ a etapas anteriores de la civilización griega, y para su sorpresa resultó que desde el periodo de entreguerras había quien había abordado esta problemática: Otto Neugebauer.

Neugebauer no pretendía, cuando inició sus estudios de la matemática mesopotámica, establecer lazos entre esta matemática y la griega. Su objetivo era simplemente averiguar el talante y alcance de los contenidos de carácter matemático de las tablillas que se habían recolectado, por miles, en las regiones arenosas donde habían florecido las más antiguas civilizaciones del Medio Oriente. Lo que publicó en los años 30 fue espectacular: las tablillas –depositarias de relatos, manuales y ejercicios, todos expresados en escritura cuneiforme– decodificadas y analizadas, revelaban la existencia de técnicas muy sofisticadas para el manejo de relaciones numéricas expresadas mediante ideogramas y números representados en base sexagesimal.[1] En particular, Neugebauer mostró que estas técnicas podían fácilmente ser traducidas a los planteamientos del álgebra de nuestros días, lo cual a su vez permitía suponer que el ‘álgebra geométrica’ de los griegos era la traducción de un ‘álgebra numérica’ babilónica.

Esta interpretación era por demás atractiva para quienes buscan lazos de continuidad en las grandes corrientes del pensamiento. Y esto en ocasiones nubla la capacidad crítica, aun en mentes tan preclaras como la de Neugebauer, pues a pesar de estar consciente del cuidado que debía tener de no sobreestimar o exagerar el carácter algebraico de las matemáticas babilónicas, algo que sí tomó en cuenta en sus publicaciones más eruditas, no ocurrió así en trabajos dirigidos a un público no especializado, como serían los lectores de *The Exact Sciences in Antiquity*.[2] En esta obra, y en otras más, como lo señala Jens Høyrup,[3] era casi “imposible distinguir una justificación a través de una interpretación como álgebra”.

---

[1] Neugebauer, O. 1935–1937. *Mathematische Keilschrift-Texte I-III. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*. Reedición: Neugebauer, O. (2013). *Mathematische Keilschrift-Texte: mathematical cuneiform texts*. Springer-Verlag.

[2] Neugebauer, O.,1969. *The exact sciences in antiquity*.

[3] Høyrup, J. ,1996, p. 9.

Una vez borrada la línea de separación entre las dos interpretaciones anteriores, la puerta quedaba abierta para que los lectores de Neugebauer, o los difusores, historiadores o demás personas que ofrecían recopilaciones de los saberes antiguos, difundieran esta visión errónea del carácter de la matemática babilónica. Esta cuestión llegó a mayores cuando fue retomada por matemáticos o historiadores, o aficionados a la matemática o a su historia, que construyeron su propia versión de lo que serían las virtudes, alcances y naturaleza de las matemáticas babilónica y griega. Un caso extremo de esta situación la ofrece André Weil, uno de los más influyentes matemáticos de mediados del siglo XX. Con un evidente desconocimiento sobre exactamente qué y cómo se expresaban los textos babilónicos, Weil manifestó que no había ninguna dificultad en aceptar la existencia de una agenda algebraica semi-oculta en las tablillas cuneiformes, y que era trivial reconocer que

"cuando ecuaciones cuadráticas, resueltas algebraicamente en los textos cuneiformes, vuelven a la superficie con Euclides, revestidas con ropajes geométricos sin que para ello haya alguna motivación geométrica, los matemáticos considerarán apropiado describir este tratamiento como 'álgebra geométrica', y se verán inclinados a suponer alguna conexión con Babilonia, aun en ausencia de evidencias "históricas" concretas. Nadie pide documentación alguna que dé testimonio del origen común del griego, el ruso y el sánscrito, ni levanta objeciones para referirse a ellos como lenguajes indoeuropeos."[4]

Y va por más, señalando que solo quienes poseen un conocimiento excepcional de las matemáticas, rebasando el entendimiento usual, podrían alcanzar una sapiencia profunda de los logros del periodo en que fueron fechadas las tablillas, y solo quienes respondan a esta descripción podrán alcanzar a recuperar las ideas que flotan "en el aire", es decir, en nuestras mentes. El ejemplo que aduce para que se entienda esto constituye la apoteosis del pensamiento platonizante de Weil: refiriéndose a las teorías sobre *ratios* y proporciones contenidas en los *Elementos* de Euclides, Weil sostuvo que:

[4] Weil, André, 1980, p. 435.

“Para nosotros es imposible analizar adecuadamente los contenidos de los Libros V y VII [de Euclides] sin recurrir al concepto de grupo, más aún, de grupos de operadores, dado que las razones de magnitudes son tratadas como un grupo multiplicativo operando sobre el grupo aditivo de las operaciones mismas.”[5]

Para Weil darse cuenta de lo anterior era un gran avance, aunque tal claridad fuera exclusiva de las mentes privilegiadas que podrían captarlo. Y sin embargo esto aclaraba, según él, la naturaleza misteriosa de la presentación euclidiana, y a su vez permitía vislumbrar más fácilmente “la línea que de manera directa enlazaba a Euclides con Oresme y Chuquet, y de ahí a Napier y los logaritmos.”[6]

Esta posición fue atacada por excelentes historiadores de la ciencia, con profundos conocimientos matemáticos, como Árpád Szabó, Michael Mahoney, Sabetai Unguru y, finalmente, Roshdi Rashed.[7] En los últimos años, post año 2000, la controversia se ha atemperado y, se puede decir, la posición platónica parece haber quedado un tanto olvidada, y sin embargo la cuestión de bajo qué facetas aparece un pensamiento que indujo a pensar en la existencia en una doctrina algebraica desde los tiempos babilónicos, o los de la Grecia diofantina, parecen seguir siendo motivo de estudios, principalmente bajo la guía de Jens Høyrup, quien aún retirado de las obligaciones académicas sigue produciendo escritos con un ritmo impresionante. Baste para ello revisar la bibliografía de su autoría que aparece en los buscadores especializados de internet.[8]

Con estos antecedentes, y aun sin el conocimiento de las lenguas en las que originalmente fueron depositados estos conocimientos y prácticas, puede uno de todas maneras intentar un estudio que permita formarse una opinión respecto de qué tan justificado estaba el suponer la presencia de un pensamiento de tipo algebraico en las civilizaciones antiguas, y si éste se fue transmitiendo, si bien con modificaciones, de un contexto cultural a otro, de una cultura a la contigua o a la que le sucedió en el tiempo, de una manera de

---

[5] *Ibid.* p. 439.
[6] *Ibid.*
[7] Szabó, 1969; Mahoney, 1994; Unguru, 1975, p. 77, 1979, p. 77; Rashed, 2007.
[8] Høyrup, 2016.

conceptualizar el trabajo matemático a otro. Éstas son preguntas de carácter histórico a las que, con base en las traducciones disponibles, se puede intentar dar una respuesta justificada. Lo que de este ejercicio resulte, además de la experiencia académica adquirida al analizar los cambios, permanencia y evolución del pensamiento matemático, puede también tener importancia por su potencial de ser utilizado en la enseñanza, aunque no sea éste un propósito explícito del presente trabajo.

El objetivo de esta tesis es analizar diferentes problemas representativos de un aspecto del pensamiento matemático. El aspecto al que me refiero inicia, basándome en los vestigios más antiguos provenientes de la región de la que se dice fue cuna de las primeras civilizaciones, en el Sumer o la antigua Mesopotamia. Siguiendo estas primeras expresiones sistemáticas de estrategias para resolver problemas de índole matemática, me ocuparé de mostrar la evolución del pensamiento matemático a lo largo del entramado que condujo al establecimiento, en su formato tardo-renacentista, de la disciplina que hoy se conoce como álgebra. Esto se llevará a cabo mediante el análisis de los procedimientos y técnicas empleadas en trabajos específicos que definieron el curso de esta (proto)disciplina, y la comparación con los métodos hoy reconocidos como propios del álgebra. El propósito de este análisis y comparación es mostrar qué tan adecuado es decir, como muchos lo han hecho desde fines del siglo XIX –y continúa siendo expresado– que desde los más remotos tiempos, casi desde la primera mitad del segundo milenio antes de nuestra era, los babilonios ya utilizaban los elementos básicos del pensamiento algebraico. Y hay quienes añaden a lo anterior que en Grecia también existió una forma de abordar los problemas que recurría a un álgebra, y que el mejor testimonio de ello lo es el Libro II de los *Elementos* de Euclides, texto repleto de proposiciones con carácter evidentemente geométrico pero fácilmente traducibles al lenguaje algebraico. De esto a preguntarse si esta ‘álgebra’ griega es la heredera del álgebra babilónica hay solo un pequeño espacio. Antes de responder a esta elucubración habría que entender cuáles son las características de los problemas y métodos de solución de los babilonios que han sido identificados como muestra de la existencia de un pensamiento algebraico, y lo mismo cabe decir para el caso griego.

Este estudio iniciará, en el Capítulo 1, con el análisis de unos de los primeros trabajos en matemáticas encontrados en Babilonia –entre las miles de tablillas que los arqueólogos rescataron de las arenas que cubrieron los otros centros culturales mesopotámicos–, los cuales generalmente corresponden, en términos actuales, a sistemas de ecuaciones de primer grado que se podían reducir a ecuaciones cuadráticas. Estos problemas normalmente consistían o se podían reducir a encontrar las medidas de cuadrados o rectángulos de los cuales se conocía el área, o la suma o resta de sus longitudes o anchuras. Estos problemas frecuentemente eran resueltos mediante métodos generales, algunos de los cuales se podían 'visualizar' –en la tesis se verá a qué me refiero con 'visualizar'– y a partir de ello construir una solución. Otros parecían ser resueltos recurriendo a una estrategia un tanto dudosa, como sería el caso del método de *la falsa posición,* que se utilizaba comúnmente en problemas vinculados con el comercio. En esta situación el procedimiento estaba relacionado más bien con un pensamiento aritmético, y no tanto con cuestiones geométricas. Asimismo, el método de *cortar y pegar*, asociado con transformaciones o reacomodos geométricos, era uno que aparecía frecuentemente, en ocasiones de manera implícita o que nos hacía presuponer que en algo había intervenido en el diseño de la solución.

Siguiendo esta pauta, en el Capítulo 2, se analizarán el tipo de problemas a los que con mayor frecuencia se refieren quienes ven razonamientos algebraicos en la matemática griega y que, evidentemente, tienen en Diofanto al gran prototipo –y posiblemente el único ejemplo– de esta escuela. Se mostrarán casos que ilustren el tipo de problemas que presenta Diofanto y la forma como conduce los diferentes procesos que los resuelven. En su *Aritmética* podemos hallar tanto la introducción de un aparente lenguaje compuesto por abreviaciones y ligaduras, como una descripción y clasificación de números, definiendo de esta manera dos de los conceptos más importantes que aparecen en un texto que se ocupa del álgebra en su sentido moderno: el número y la incógnita, a la cual Diofanto llamó *aritmo*. Estos problemas, como se hará patente, poseen un carácter numérico en tanto que al momento de ser planteados los elementos conocidos tienen asignados valores específicos que deberán ser manipulados siguiendo operaciones numéricas básicas, y a través de ello se obtienen el número o los números que responden a la cuestión planteada.

En el Capítulo 3 se presentará lo que para muchos es el génesis indudable del pensamiento algebraico: la aparición del *Kitāb al-jabr wa'lmuqābala* (*Libro de restauración y oposición*) de al-Khwarizmi (finales del siglo VIII d.C.), que en la parte que nos interesa consiste de una recopilación de procedimientos operativos sostenidos sobre visualizaciones de configuraciones geométricas, y cuya descripción en el título de la obra condujo a la aparición en el horizonte latino de la palabra 'álgebra' para designar este planteamiento de resolución de un cierto tipo de problemas. En la obra de al-Khwarizmi destaca la introducción de tres cantidades (la raíz, el cuadrado, y el simple número), las cuales representan un cambio en la naturaleza de la práctica de la disciplina, siendo estas cantidades capaces de representar tanto términos geométricos como aritméticos. Asimismo, con las combinaciones de dichas cantidades, el autor establece lo que nosotros identificamos con seis tipos de ecuaciones cuyas soluciones serán explicadas a través de estrategias sencillas que se valen de la utilización de ilustraciones geométricas. Como se verá, bajo esta interpretación existe una riqueza latente en cuanto a las posibilidades que se abrían para la manipulación algorítmica de cantidades que lo mismo podrían representar longitudes, áreas, pesos, etc.. Al igual que muchos de sus antecesores, al-Khwarizmi tomó como fuente de trabajo problemas de difícil solución pero que formaban parte de la cotidianeidad que tocaba vivir a comerciantes, jueces, hombres de leyes, personas todas ellas que se ocupaban de cuestiones como herencias, repartición de bienes y problemas concernientes al comercio.

En el Capítulo 4 me ocuparé de los avances logrados por Abu Kamil (830-950 d.C.) sobre lo hecho por al-Khwarizmi este autor, en contraste con los afanes de ofrecer un texto leíble por las personas educadas de su época, se aparta de esta perspectiva y dirige sus escritos a un público que posee conocimientos avanzados de las matemáticas, en particular de los *Elementos* de Euclides. Gracias a ello Abu Kamil logra establecer un verdadero método para el estudio y la construcción de soluciones para los seis tipos de ecuaciones descritos por al-Khwarizmi.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presenta un panorama que a la manera de epílogo describe brevemente los destinos en el mundo latino de la tradición 'algebraica' árabe, en los términos que ésta se entendía en esos tiempos en los que se dice poco ocurría en cuanto a la gestación de nuevas disciplinas.

A la manera de una valoración de lo expuesto respecto del sentido y uso de estrategias de solución de problemas que muchos reclaman como testimonio de la existencia de un pensamiento algebraico desde la antigüedad, se hará un balance de lo que nos ofrece la literatura que se ostenta como vehículo de ese tipo de pensamiento y las prácticas concomitantes. Como parte de dicho análisis se aportarán elementos que ayuden a comprender si los razonamientos, presentados en las obras mencionadas, en efecto exhibían o eran vehículos de transmisión de un pensamiento algebraico. Esto tendrá como sustento la comparación entre lo que hoy se entiende como álgebra y lo que ofrecían los textos antiguos aquí discutidos. Concluiré afirmando que dar por sentado que los antiguos manejaban las ideas básicas de los métodos algebraicos no se sostiene con base en la evidencia histórica aportada por los textos relevantes para esta cuestión.

## CAPÍTULO 1.LAS MATEMÁTICAS EN MESOPOTAMIA.


**Figura 1.** Mapa de la civilización sumeria y sus principales ciudades.

### 1.1.- Antecedentes:

La civilización sumeria, considerada la más antigua en el mundo, se desarrolló en la cuenca delimitada por los ríos Tigris y Éufrates, en la región históricamente denominada Mesopotamia. Suele considerarse ya establecida desde los comienzos del quinto milenio a. C. y desde entonces hay registros más o menos fiables de muchos eventos que en dicha región tuvieron lugar, y en particular se guarda información de un gran número de sus gobernantes. De entre ellos uno de los más destacados fue el rey Hammurabi (1792-1750 a.C.), quien gobernó una de las ciudades-estado más importantes de la época: Babilonia. A él se le reconocieron grandes dotes para ejercer su autoridad y como parte de sus aportaciones a la instauración de formas civilizadas de gobierno se cuenta la instauración de un sistema legal y civil, recordado como el código que lleva su nombre, y que le ayudó a regular su imperio a través de una buena administración y legislación de su ciudad.

Además de lo anterior, y como instrumento de manejo de la información, Hammurabi también impulsó el uso de las por entonces más avanzadas técnicas de acopio de información cuantitativa sobre áreas de terrenos de labor, volúmenes de producción de granos, de aceites, precios, e impuestos derivados de lo anterior. Para ello, se rodeó de personas entrenadas en estos menesteres y que eventualmente llevó a la recolección de información más sofisticada y que en su contexto podríamos calificar como prefiguras de los saberes científicos. En esta labor los escribas, personas calificadas para recoger en el lenguaje cuneiforme[9] la información considerada relevante, jugaron un papel de primerísima importancia, pues estando al servicio del gobierno su función era llevar un registro de los hechos sobresalientes de la administración. Esta labor tuvo un efecto colateral que influyó en transformar a la civilización mesopotámica, pues además del simple acopio de información administrativa y de interés para los jerarcas, eventualmente algunos de estos escribas, y quienes aprendieron de ellos el arte de la escritura, se ocuparon también de la recolección y recopilación del saber científico y literario de su época.

Entre todo este conocimiento almacenado (una porción del cual llegó hasta nuestros días y ha sido traducido a lenguas modernas gracias a los afanes de un reducido grupo de expertos filólogos y científicos) los maestros escribas se ocuparon de problemas de índole matemática, en particular de aquellos que hoy catalogamos, con base en siglos de desarrollos de la nomenclatura matemática, bajo el rubro de 'formas cuadráticas'.

Tal y como aparecen en las tablillas, los planteamientos de estos problemas suelen corresponder principalmente a lo que se interpreta generalmente como ejercicios que recogen los aprendices de escribas. Si esta apreciación es correcta, tales ejercicios dan fe de las capacidades matemáticas que los futuros administradores de bienes necesitaban adquirir, además de ilustrar el avance matemático de los tiempos en que las correspondientes tablillas fueron elaboradas.

Para el 3200 a. C. es un hecho que los escribas almacenaban registros de la información relevante de las urbes para entonces constituidas,

[9] El primero que de manera regular se utilizó para trasladar a símbolos sobre un soporte material las palabras de un lenguaje.

principalmente en el sur de Mesopotamia.[10] La información se plasmaba en tablas hechas de arcilla mediante incisiones realizadas con una cuña mientras el material estaba aún fresco y podía ser fácilmente marcado. Una vez terminado el vaciado de información las tablillas eran secadas al sol o en hornos. Gracias a ello y a que durante milenios se guardaron bajo tierra, o sellados en urnas, en ocasiones bajo los restos de las urbanizaciones recientemente traídas a la luz del día, un número considerable –varios miles provenientes de diferentes locaciones– de los registros en arcilla mantuvo su integridad.

En lo que respecta a aquellos con contenido matemático, algunos investigadores han especulado acerca de los orígenes de dichos problemas. Uno de los más notables, activo en la segunda mitad del siglo XX y recientemente jubilado, mas no retirado del estudio de la historia de las matemáticas, es Jens Høyrup,[11] quien en lo que se refiere a la cuestión de la matemática desarrollada en las zonas bañadas por los ríos Éufrates y Tigris, piensa que fueron originalmente elaborados -y posteriormente evolucionaron a casos más sofisticados– para demostrar la competencia profesional tanto de los agrimensores como de los escribas de aquellos tiempos. Otros estudiosos del tema, tales como Eleanor Robson, suponen que los procedimientos matemáticos, muy cercanos a lo algorítmico, cobraron forma como técnicas para llevar a cabo operaciones con las cifras recogidas de la medición de líneas y que les permitirían calcular áreas de campos de sembradío, habitaciones, etc., o volúmenes de silos, envases y demás tipo de contenedores, y todo o casi todo esto como resultado de su utilidad para asuntos vinculados con la justicia y la imposición de impuestos.

## 1.2.- Introducción:

En este capítulo analizaré algunos de los problemas que han despertado la idea de que detrás de las instrucciones que constituyen el contenido de muchas de las tablillas matemáticas hay un claro pensamiento algebraico. Esto

[10] Ur (2010), "Cycles of Civilization … ", p. 393.

[11] Textos clásicos de Hoyrup son: *In measure, number, and weight: Studies in mathematics and culture* (1994), y *Lengths, widths, surfaces: A portrait of old Babylonian algebra and its kin* (2013).

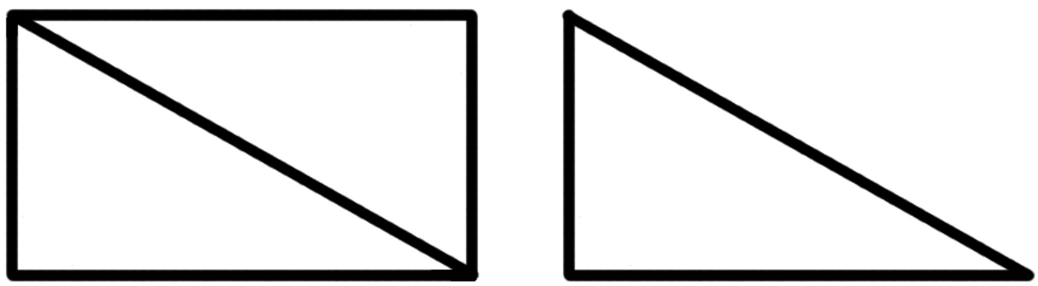
se llevará a cabo comparando los métodos de resolución utilizados por los antiguos escribas con los métodos “modernos” que emplea el álgebra para resolverlos, y en algunos casos examinando las diferentes formas de visualizar estos problemas, lo cual nos permitirá apreciar sí:

i. Los métodos utilizados en la antigua Mesopotamia involucraban procedimientos claramente algebraicos.
ii. O sí solo, en ciertas operaciones, remedaban etapas de un algoritmo algebraico.
iii. O si de plano lo único en común es que hay que realizar, sea cual sea el método de solución seguido, operaciones de suma, producto, división o extracción de raíces, de donde no se pueden desprender de manera alguna, aseveraciones sobre la existencia de un álgebra mesopotámica.

### 1.3.- Problemas:

Como se mencionó anteriormente, muchos de los problemas más antiguos estaban relacionados con la medición de áreas de terrenos. Si pensamos que grandes porciones del país estaban asignadas y divididas entre agricultores, cabe suponer que esto inspiraba a los calculadores mesopotámicos a plantear problemas que cubrían todo tipo de situaciones, es decir, considerar terrenos de todas formas cuyas superficies había que calcular. Éste era un gran avance cultural pues se pasaba de simplemente medir directamente en el terreno ciertas dimensiones básicas de superficies con formas idealizadas y fácilmente manejables como triángulos y cuadrángulos, para con ello obtener los valores de magnitudes compuestas –las de área y, cuando fuera el caso, las de volúmenes– a generar aproximaciones más detalladas y exactas a partir de las cuales se tendría una mejor percepción de las magnitudes de los terrenos. Cierto es, ésta no era una actividad intelectual producto de la curiosidad, del ocio o de inquietudes teóricas sobre el saber matemático, si así se le pudiera calificar en tan temprana etapa de avance, y mucho tenía que ver con las necesidades prácticas tales como establecer precios o realizar cálculos de productividad, el de cobro/pago de impuestos y mediante esta práctica, según lo afirma E. Robson,[12] de alguna manera establecer justicia.

Este tipo de problemas no eran los únicos que esta civilización se había planteado, y como los restos arqueológicos lo constatan, eventualmente se alcanzó un relativo grado de sofisticación. Considérese, como ejemplo, el problema que aparece en la tablilla identificada con las siglas MIO 1107,[13] y que plantea determinar el área de un terreno con una forma irregular. Este tipo de problema también aparece en la civilización egipcia y era resuelto por los topógrafos de la época dividiendo el campo en rectángulos y triángulos rectángulos cuya área era intuitivamente simple de calcular, procurando cubrir todo el terreno –hasta donde fuera posible y recomendable– y luego se sumaban las áreas de cada una de dichas figuras. Con ello se obtenía una aproximación del área total. Como se puede constatar, su intuición los llevó a visualizar, correctamente, el área de un triángulo rectángulo como la mitad del rectángulo que se obtiene duplicando el triángulo y colocándolo sobre el original de manera que se transformara en un cuadrilátero.



De este modo se hace patente que los granjeros estaban conscientes de la noción de área, y sin embargo nunca definieron con exactitud dicho concepto. Si al área la representamos por la letra A, entonces A = *ab*, donde *a* representa la longitud y *b* la anchura. Hay que notar que debido a la forma tan natural e intuitiva de asociar una medida a un terreno o superficie cualquiera, no presupone que este manejo de la idea de área haya sido originado en dicha cultura.

[12] Katz et al (2014), *Taming the Unknown*, p.31.
[13] Rudman (2010), *The Babylonian Theorem*, pp. 61- 63.

Un problema similar al anterior, el cual involucra la medición de áreas así como medidas de la producción de campos de cultivo es el que aparece en la tabla VAT 8389[14]; "*Uno de dos campos produce 4 gur por cada bur, mientras que el segundo produce 3 gur por cada bur. Además se sabe que el primer campo produce 500 sila más que el segundo, y el área total de los dos campos es de 1800 sar".*[15] La pregunta es ¿qué tan grande es cada campo? Este problema se puede plantear utilizando álgebra mediante un sistema de ecuaciones, únicamente considerando que un "*gur*" es una unidad de capacidad igual a 300 *sila,* la unidad básica de capacidad, y un *bur* es igual a 1800 *sar* la medida estándar de área. Traducido a términos algebraicos el sistema queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \\ x + y = 1800 \end{cases}$$

Donde $x$ representa el área total del primer campo y $y$ el área del segundo campo. Así, $\frac{2}{3}x$ representa la producción del primer campo, mientras que $\frac{1}{2}y$ corresponde a la producción total del segundo, y $500$ la diferencia de producción entre el primero y el segundo campo, de modo que usando álgebra el problema quedaría resuelto de la siguiente manera:

Despejando $x$ de la segunda ecuación y sustituyendo el resultado en la primera

$$\frac{2}{3}(1800 - y) - \frac{1}{2}y = 500$$

$$1200 - 1\frac{1}{6}y = 500$$

$$1\frac{1}{6}y = 700$$

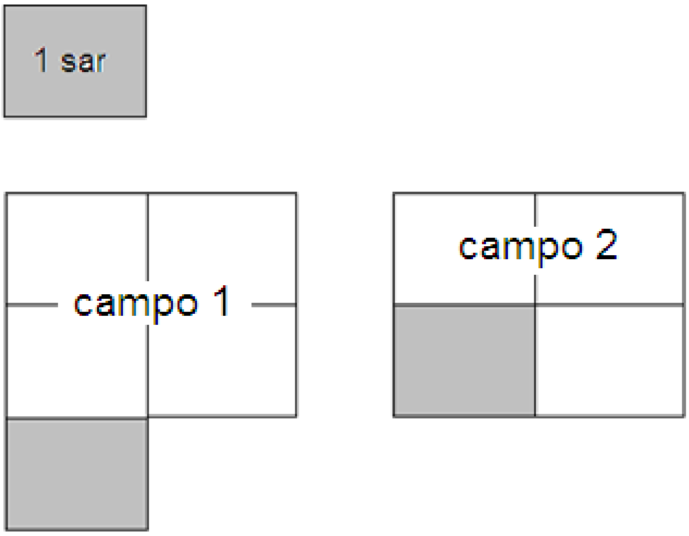
Por lo que se obtiene

$$y = 600$$

[14] La sigla VAT se refiere a que está depositada en la Biblioteca Vaticana.
[15] Katz y Parshall (2014), *Taming the Unknown,* p. 19.

$$x = 1200$$

Sin embargo, hacerlo así es un anacronismo, y el registro histórico, en este caso la tablilla en cuestión, muestra que para saber cuánto medía cada campo, los escribas emplearon otro método, el cual hoy se conoce como de la "*falsa posición*". En este caso el método consiste en hacer la suposición inicial de que las áreas de cada campo son ambas iguales a $900$. Así, los granos recolectados del primer campo sumarían $600$ *sila*, mientras que los granos del segundo campo sumarían $450$ *sila*, para una diferencia entre ellos de $150$ *sila*. Puesto que la diferencia deseada es de $500$ *sila*, los escribas necesitaban ajustar entonces el incremento de la diferencia por $350$ *sila*. Ahora bien, ellos se percataron de que a cada transferencia de un *sar* del segundo campo al primero incrementaba la diferencia de producción por $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$, esto se sigue del siguiente razonamiento: si se traspasa un *sar* del segundo al primero, el área del primero incrementaría en $901$ mientras que el área del segundo disminuiría a $899$, y por consiguiente $\frac{2}{3}(901) = 600.666$ y $\frac{1}{2}(899) = 449.5$ por ende se tendrá la siguiente expresión $600.666 - 449.5 = 151.166 = 150 + 1.166$, que indica la diferencia de producción, es decir $1\frac{1}{6}$. De esta manera el problema se transforma y lo que hace falta es encontrar el múltiplo de $1\frac{1}{6}$ con el cual obtener los 350 faltantes, a saber 300. Por lo qu el primer campo resultó tener por área 900 + 300 = 1200 *sar*, mientras que el segundo tuvo por área 900 – 300 = 600 *sar.*




El método de la falsa posición se empleó para resolver muchos problemas en las tablas babilónicas. Este método, como se pudo apreciar en el ejemplo anterior, comenzaba asignando cierto valor inicial (que usualmente era incorrecto o falso) con el fin de obtener una nueva cantidad; ésta se iría ajustando según los datos del problema para encontrar los números buscados, en este caso las áreas de los campos. Este método era completamente aritmético y no necesitaba de la geometría para la justificación del mismo.

Si bien es cierto que diversos trabajos encontrados en Babilonia correspondían a aplicaciones prácticas, como la distribución de bienes, reparto de herencias, préstamos e intereses, muchas de ellas también correspondían a importantes trabajos astronómicos, la mayoría de ellos relacionados con la construcción de calendarios y el consiguiente manejo de observaciones sistemáticas del movimiento de las estrellas en los cielos. Este seguimiento y codificación les permitió predecir fenómenos como la ocurrencia de lunas nuevas, los eclipses de luna y de sol, y la posición de la luna mes tras mes en el transcurso del año. Si bien el estudio de esta problemática es muy importante para conocer los niveles de avance de las civilizaciones antiguas, y algunos de los más importantes estudiosos de las ciencias babilónicas se ocuparon de ambas disciplinas, destacando entre ellos al iniciador de estos estudios, Otto Neugebauer, y sus discípulos B. L. van der Waerden y A.

Aaboe,[16] este trabajo se restringirá al análisis de problemas relacionados con el cálculo de áreas, principalmente las de figuras en forma de rectángulos, como es el caso de los dos ejemplos presentados líneas antes.

En dichos ejemplos la terminología empleada por los escribas aún carecía de rigor, por lo que los nombres utilizados las más de las veces eran términos de uso común, y aunque tenían que ver principalmente con objetos como área, longitud, anchura, peso y volúmenes, aún no mostraban el carácter especializado de las ciencias que se constituirían posteriormente. Con todo, y ésta es una de las dificultades que enfrentan los traductores o los lectores actuales de dichos escritos ya traducidos, se puede decir con certeza que aún con su muy primitivo vocabulario se pueden identificar los elementos que hoy designamos como incógnitas. Bajo esta lectura resulta un hecho que todas las incógnitas en la antigua Babilonia eran consideradas como números, y que cuando no se les asignaba de inicio un valor específico –para el cual existía la palabra que designaba el número– en ocasiones estos aparecían designados con vocablos cuya identificación no fue posible más que a partir de los significados que deben adoptar una vez que se hace la lectura e interpretación de los escritos. Ejemplo notorio de esta situación es el uso de las palabras *igûm* e *igibûm*, sin significado conocido en la terminología mesopotámica cuando por primera vez se les identificó en una tablilla. El problema en el que aparecen ambas expresiones será tratado más adelante, baste por el momento el señalamiento de que para ellos no había un símbolo o contenido para lo que de manera abstracta podían significar.

Para apreciar mejor las formas bajo las cuales se presentan los problemas en la antigua Mesopotamia, paso a exhibir un par de ejemplos. En ellos se ilustra el patrón usual de presentación del problema: i) Se dice explícitamente en qué consiste el problema, básicamente a través de establecer los valores de inicio, y lo que se espera calcular o encontrar a partir de ellos. ii) Acto seguido se procede a su solución, la cual se describe a través

[16] Neugebauer, O. (2013). *Astronomy and history selected essays.* Neugebauer, O. (1978). *A history of ancient mathematical astronomy*. Aaboe, A. (1974). *Scientific astronomy in antiquity*. Van der Waerden, B. L. (1954). *Science Awakening*. Toomer, G. J. (1968). (BL van der) Waerden *Die Anfänge der Astronomie*.(Erwachende Wissenschaft, 2.).

de una serie de instrucciones sobre las operaciones que se deben realizar con los valores dados y los nuevos que se obtienen conforme se avanza en el camino a la solución. Y finalmente se señala que los valores calculados son la solución buscada. En el transcurso de la solución en ningún momento se ofrece una razón para proceder tal y como se hace, ni se ilustra con alguna figura geométrica que permita intuir la lógica del procedimiento, y tampoco se hace alusión a alguna técnica general que sustente el orden de las instrucciones. Y sin embargo, por el origen evidentemente geométrico de algunos de estos problemas, o por la posibilidad de modelarlos geométricamente, muchos pensadores han caído en la tentación de asimilarlos a las problemáticas y las técnicas de demostración o justificación que aparecen en el Libro II de los *Elementos* de Euclides, con lo que no dudan en señalar que los problemas babilonios o mesopotámicos son básicamente una presentación verbal o retórica de lo que será la geometría del libro euclidiano, y que por basarse en operaciones numéricas fácilmente traducibles a términos algebraicos ésta no es sino un álgebra geométrica en un estadío primitivo.

A partir de cómo se concluye el párrafo anterior se dice que las técnicas utilizadas por esta civilización para resolver los problemas tienen que ver, en su mayoría, con un álgebra geométrica en la que se alude a diagramas, y en la que se pueden escribir cosas como “el área es el producto de 7 y 5, siendo 7 la longitud y 5 la anchura”, refiriéndose a un rectángulo. Presentaré dos ejemplos de esta situación y de ellos concluiré que más que técnicas algebraicas en acción, aún si se les considera expresadas verbalmente, lo que se tiene es un problema geométrico que se resuelve con base en ideas geométricas que descansan en la recomposición de un diagrama o en un proceso de completar figuras que eventualmente llevan a la solución. Siguiendo con esta idea consideraré el ejemplo que aparece en las tablas BM 85200 y VAT 6599. Antes de abordarlo hay que resaltar que las expresiones numéricas, tal y como aparecen en la tablillas, usan un sistema de representación de base 60, por lo que presento los datos tal y como aparecen en la tablilla y, para mayor claridad incluyo dentro de paréntesis su equivalencia con enteros y racionales, tal y como nos parecería más entendible a quienes estamos acostumbrados a la representación numérica con base 10.

Problema 25 de BM 85200 y VAT 6599;

"*El área de un rectángulo es de 8; 20 (= 8 $\frac{1}{3}$), mientras que la suma de su longitud y anchura es 5; 50 (= 5 $\frac{5}{6}$), ¿cuánto vale la longitud del rectángulo y cuanto la anchura?"* [17]

En términos modernos este problema se traduciría en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy = 8\,\frac{1}{3} \\ x + y = 5\,\frac{5}{6} \end{cases}$$

Donde $x$ juega el papel de la longitud mientras que $y$ representa la anchura, por lo que una forma de resolverlo sería despejando $x$ de la segunda ecuación y sustituirla en la primera.

$$x = 5\frac{5}{6} - y$$

$$\left(5\frac{5}{6} - y\right)y = 8\frac{1}{3}$$

$$y^2 - 5\frac{5}{6}y + 8\frac{1}{3} = 0$$

La cual se resuelve utilizando la fórmula general $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y con la que se obtienen dos soluciones $y_1$ y $y_2$.

$$y_1 = \frac{40}{12} = 3\frac{1}{3}$$

$$y_2 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

[17] Katz y Parshall (2014), *Taming the Unknown,* p. 23.

De donde sustituyendo la solución inicial $y_1$ en $x = 5\frac{5}{6} - y$ obtenemos una primera solución para el sistema de ecuaciones, la cual llamamos $x_1 = 2\frac{1}{2}$; de manera similar, utilizando $y_2$, se obtiene la segunda solución para el sistema de ecuaciones, es decir, $x_2 = 3\frac{1}{3}$.No obstante, para seguir el razonamiento detrás de la resolución del problema consideré la traducción hecha por Jens Høyrup,[18] quien propone una interpretación de las operaciones que aparecen en las tablas.

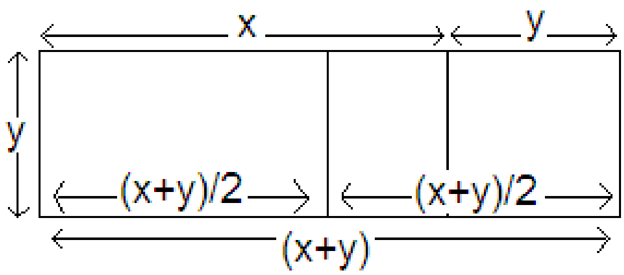
**Problema de texto 25 BM 85200 + VAT 6599 de la antigua Babilonia modificado de Jens Høyrup**

| | |
|---|---|
| 1 | Partir $\frac{1}{2}$ de 5; 50 |
| 2 | El resultado 2; 55 ( = 2 $\frac{11}{12}$ ) |
| 3 | Combina 2; 55 con el mismo |
| 4 | Lo que te da 8; 30, 25 ( $= 8 \frac{73}{144}$ ) |
| 5 | De dentro arranca 8; 20 |
| 6 | Lo que te da 0; 10, 25 ( $= \frac{25}{144}$ ) |
| 7 | La medida del cuadrado es 0; 25 (= $\frac{5}{12}$) |
| 8 | Añade y arranca 2; 55 |
| 9 | 3; 20 ( = 3 $\frac{1}{3}$ ) es la longitud |
| 10 | 2; 30 ( = 2 $\frac{1}{2}$ ) es la anchura |

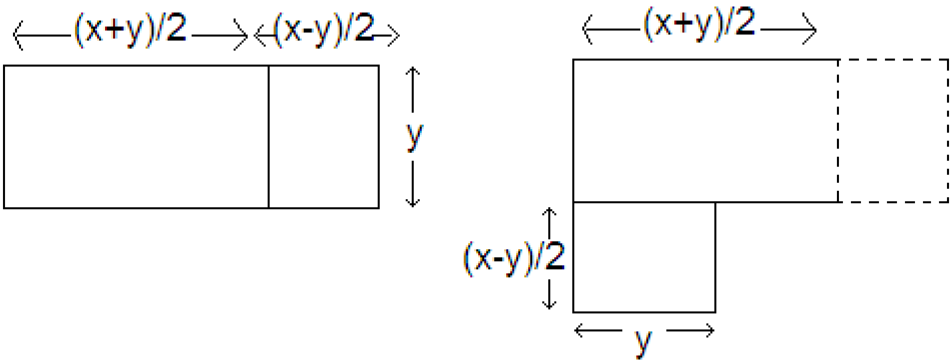
Esta serie de pasos se pueden ver reflejados en la siguiente visualización, la cual quizás sirvió como base para la construcción del procedimiento:

[18] Katz y Parshall (2014), *Taming the Unknown,* p. 23.

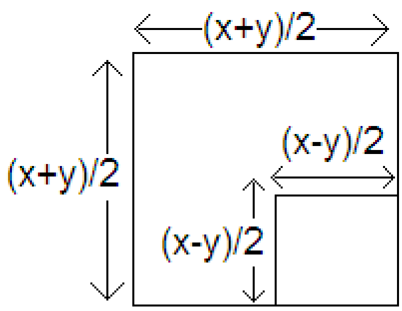
Primero comenzaron por dibujar un rectángulo cuya longitud fuera $x$ y cuya anchura fuera $y$. A continuación marcaron en dicho rectángulo el valor $5;\ 50$ $(= 5\ \frac{5}{6} = x + y)$ de modo que la mitad de este resulta $2;\ 55$ $(= 2\ \frac{11}{12} = \frac{x+y}{2})$



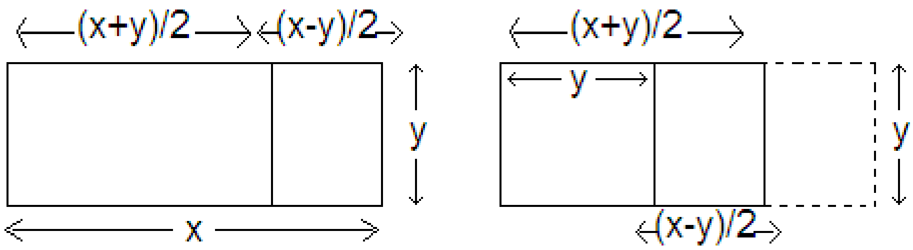

Posteriormente desplazaron el rectángulo de lados $(\frac{x-y}{2})$, $(y)$ a la parte inferior del rectángulo de lados $(\frac{x+y}{2})$, $(y)$ formando una especie de figura en forma de "L"




En seguida procedieron a formar el cuadrado de medidas $\frac{x+y}{2}$ el cual tiene por área $8;\ 30{,}25$ $[= 8\ \frac{73}{144} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2]$.



Luego restaron el área de $8;\ 20$ $(= 8\ \frac{1}{3})$ del rectángulo original al área de $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ para de esta forma obtener el área del cuadrado faltante $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ encerrado por la figura en forma de “L”, área que resulto ser $0;\ 10,25$ $(= \frac{25}{144})$, de modo que $\frac{x-y}{2} = 0;25$ $(= \frac{5}{12})$. Por lo tanto, si añadimos esta medida a $\frac{x+y}{2}$ obtendremos la longitud buscada $x = 3;\ 20 = 3\ \frac{1}{3}$ $(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x)$, y si la restamos obtendremos la anchura $y = 2;\ 30 = 2\ \frac{1}{2}$ (es decir $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = y$).




Como se puede apreciar a partir de los diagramas, puede haber varias lecturas o traducciones del texto que aparece en la tablilla, y éstas dependen de las diferentes interpretaciones u opiniones de los matemáticos y lingüistas que realizan el trabajo de traducción. Høyrup, en 1985, describe ciertas acciones en términos de “partir en dos” o “arrancar”, en contraste con lo presentado por autores de la talla de Otto Neugebauer –matemático y astrónomo alemán– en la década de 1930, para quien las instrucciones de la tablilla son de carácter aritmético. En efecto, según Neugebauer los conceptos geométricos juegan solo un papel secundario. Que esta situación se repite se podrá apreciar en el análisis de las dos posibles traducciones del problema siguiente, y que corresponde también, bajo cierta interpretación, a un cálculo de áreas.

El problema aparece en la tablilla conocida como YBC 6967, así llamada por ser parte de *la Yale Babylonian Collection*, es decir, la Colección babilónica de la Universidad de Yale. En el enunciado que se presenta en el párrafo siguiente se mantiene por el momento la transliteración[19] de dos vocablos para los que no había significado según el vocabulario disponible para los traductores de fines del siglo XX. Más adelante se traducirán como ‘número’ y ‘recíproco del número’ en vista del contexto y de los cálculos y resultados que constituyen el contenido de la tablilla. Pasemos ahora al enunciado:

*“Un igibum excede su ibum en 7. ¿Cuáles son el ibum y el igibum?”*

En este caso consideraré dos traducciones de este mismo problema, la primera[20] hecha por Høyrup –y que pareciera más apegada al original– y la segunda[21] por Neugebauer (quien catalogó la mayor parte del material que constituye la colección de tablillas babilónicas ahora depositadas en la Universidad de Yale).

Versión de Jens Høyrup:

**Ejemplo de resolucion del problema YBC 6967 según Høyrup**

| | |
|---|---|
| Obv. | |
| 1 | El igibûm excede al igûm, 7 va mas allá |
| 2 | Cuanto el igûm y el igibûm ? |
| 3 | Tú, 7 por el cual el igibûm |
| 4 | Excede al igûm, que va más allá |
| 5 | Parte en dos 3°30´ ; |
| 6 | Junta 3°30´ con 3°30´ |
| 7 | Resulta 12° 15´. |
| 8 | A 12° 15´ lo que crece para ti |
| 9 | 1` la superficie añadida 1` 12° 15´. |
| 10 | ¿ [Cual las medidas iguales 1`] 12° 15´ ? 8° 30´. |
| 11 | [8° 30´ y] 8° 30´, su duplicado, escribirías |
| Rev. | |
| 1 | 3° 30´, lo que resulta |
| 2 | Arranca de uno |
| 3 | Añade a uno |
| 4 | El primero es 12, el segundo es 5 |
| 5 | 12 es el igibûm, 5 es el igûm |

[19] Transliteración se entiende en este caso como una ‘traducción’ en la que los signos cuneiformes son reemplazados por sus valores numéricos o fonéticos en la misma posición que en el original.

[20] Chemla (2012), *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, pp. 377- 378. Y Rudman (2010), *The Babylonian Theorem*, p.71, citando a Høyrup 2002.

[21] Rudman (2010), *The Babylonian Theorem*, pp. 66- 67 y Neugebauer, Sachs y Götze (1945), pp. 129ff.

Versión de O. Neugebauer:

**Ejemplo de resolucion de problema YBC 6967 según Neugebauer**

| Linea de texto | Traducción |
| --- | --- |
| 1 | El igibum excede al igum por 7 |
| 2 | ¿Que son [el igum y] el igibum ? |
| 3- 5 | Tú parte a la mitad 7, por el cual el igibum excedió al igum, y (el resultado) es 3.5 |
| 6- 7 | Multiplica 3.5 y 3.5 y (el resultado es) 12.25 |
| 8 | A 12.25, lo que resulta para tí |
| 9 | Añade [60 al producto], y (el resultado es) 72.25. |
| 10 | ¿Cual es [la raíz cuadrada de 72.25]? (respuesta) 8.5. |
| 11 | Establecer [8.5 y] 8.5, su igual, y entonces |
| 1- 2 Reverso | Substrae 3.5, la *takiltum*, del uno, |
| 3 reverso | Añadirlo al otro |
| 4 reverso | Uno es 12, el otro es 5 |
| 5 reverso | 12 es el igibum, 5 el igum |

Como se puede apreciar, en los textos originales de la antigua Babilonia aparecen las palabras igûm e igibûm, las cuales, como ya se mencionó líneas arriba, en términos modernos significan número y su recíproco, es decir, números a, b tales que ab = 1. En el caso babilónico este producto no necesariamente tenía que ser 1 pues también podría ser nuestro 60 o alguna potencia de 60, ya que el sistema numérico que se utilizaba en la antigua Babilonia era de base 60. Asimismo, en la primera tabla aparecen números como 1`12°15´ que indican $1 \cdot 60^{1} + 12 \cdot 60^{0} + 15 \cdot 60^{-1}$ [22]

Utilizando álgebra, y la salvedad acerca del significado de 'recíproco', este problema se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ xy = 60 \end{cases}$$

El cual se puede resolver despejando $x$ de la primera ecuación

[22] Chemla (2012), *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, p. 365.

$$x = 7 + y$$

Sustituyendo $x$ en la segunda ecuación

$$(7 + y)\, y = 60$$

Lo que resulta en la ecuación cuadrática

$$y^2 + 7y - 60 = 0$$

Misma que se puede resolver usando la fórmula general, que nos da como resultado:

$y_1 = 5$ y $y_2 = 12$

Así, para el valor $y_1 = 5$ obtenemos:

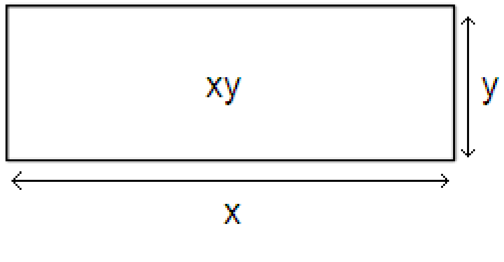
$$x_1 = 12$$

Y para $y_2 = 12$ obtenemos el valor:

$$x_2 = 19$$

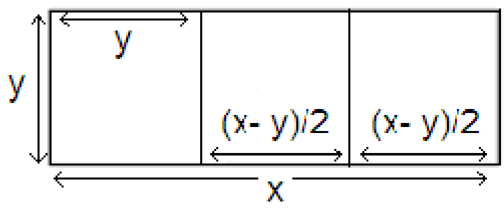
En el caso de esta tablilla, el método seguido les llevó a la solución en que 5 y 12 son los valores buscados.

No se puede establecer con certeza el procedimiento heurístico seguido por el escriba que recoge la solución que aparece en la tablilla. Sin embargo, y con base en las operaciones descritas, se podría reconstruir una línea de pensamiento como la siguiente: el escriba empezaba por dibujar un rectángulo de longitud "$x$" y anchura "$y$" y con área igual a 60.

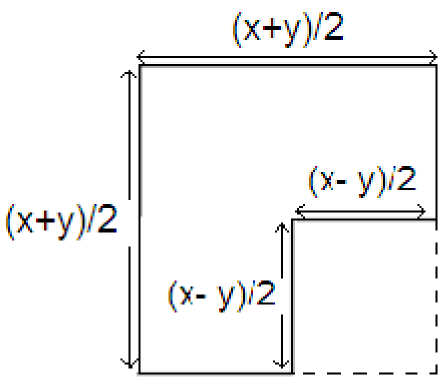



Luego, en dicho rectángulo marcaría la diferencia entre la longitud y la anchura ($x - y = 7$), la cual posteriormente dividían en dos ($\frac{x-y}{2} = 3;30 = 3\frac{1}{2}$).

Esto resultaba en un cuadrado de medida “$y$” y dos rectángulos con lados $\frac{x-y}{2}$ e $y$.



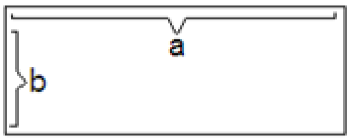

Luego se cambiaba de lugar uno de los dos rectángulos de lados $\frac{x-y}{2}$ e $y$, de tal forma que quedara por debajo del cuadrado de lados $y$, formando una especie de figura en forma de “L” que seguía conservando el área $(60)$ del rectángulo original. Acto seguido se completaba el cuadrado, añadiéndole el área $12;\ 15\ \ (= 12\ \frac{1}{4} = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2)$ a $60$, con lo que el área del cuadrado más grande resultaba ser ahora igual a $72;\ 15\ (72\ \frac{1}{4})$.



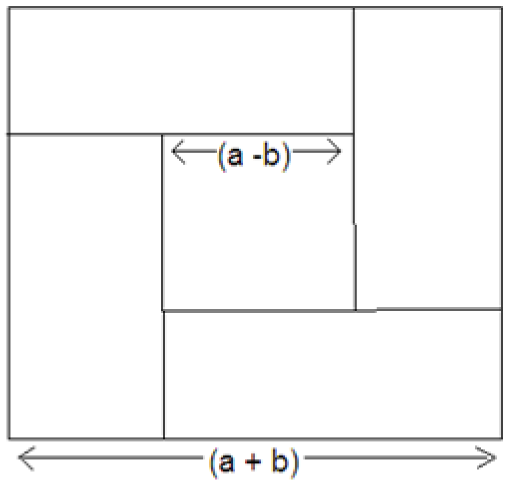

De esta forma, extrayendo la raíz cuadrada, la medida de los lados del cuadrado resulta ser $8;\ 30$ $(\frac{x+y}{2} = 8\ \frac{1}{2})$, y por lo tanto la anchura buscada es $y\ =\ 5\ (\frac{x-y}{2} - \frac{x+y}{2} = y)$ y la longitud queda como $x\ =\ 12\ \ (\frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2} = x\ )$.

Como se puede ver, esta posible visualización del problema juega con las áreas $xy$, $(\frac{x-y}{2})$, $(\frac{x+y}{2})$, las cuales corta y mueve para reconstituir diferentes figuras, según convenga. Aunque la anterior visualización concuerde con las acciones descritas por Høyrup en su traducción, algunos autores, entre ellos

Peter Rudman, creen poco probable que esta visualización haya sido la que inspiró la solución del problema original, argumentando la complejidad de los procedimientos asociados con ésta[23]. Para Rudman es más sencillo, y por ende más cercano a la verdad, pensar que las técnicas empleadas para enseñar a los estudiantes se basaban en una serie de patrones preexistentes, derivados de la práctica y muy parecidos entre ellos, y que eran utilizados por los maestros para componer o generar los problemas. Más aún, sostiene que la visualización que propone Høyrup no corresponde a la época del problema y se asemeja más a lo que sería una estrategia típica de las escuelas de ábaco del siglo XV o a los procedimientos seguidos en la actualidad para hacer más comprensible y, si es posible, disfrutable, el aprendizaje de los métodos algebraicos de solución de ecuaciones cuadráticas. La interpretación geométrico-algebraica que adopta Høyrup en el problema le parece errónea y por ello propone una visualización basada en los patrones clásicos que se encontraban en los pisos ajedrezados o en las paredes donde los componentes básicos de la construcción podían ser acomodados formando diferentes patrones, y también podían haberse inspirado, como podría sugerirlo el siguiente problema, en la construcción de columnas cuadradas con una sección transversal definida por cuatro ladrillos rectangulares que se acomodaban para conformar la parte externa de la columna, dejando así un hueco en su interior, con el consiguiente ahorro en material y peso de la construcción. Con este formato Rudman propone la siguiente visualización, misma que repite el esquema de la columna que se acaba de mencionar, y que consiste en formar dos cuadrados concéntricos utilizando cuatro rectángulos.

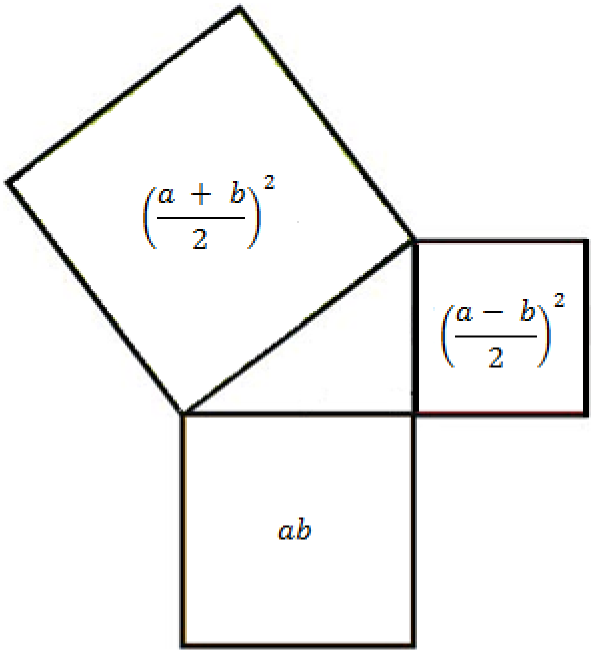



[23] Rudman (2010), *The Babylonian Theorem*, p. 73.




En el contexto del problema de la tablilla YBC 6967 la medida de los lados del cuadrado pequeño representa el $7$, que es el valor con el cual la longitud excede a la anchura ($a - b = 7$). Tendríamos entonces que el área del cuadrado pequeño, mismo que se encuentra dentro del cuadrado más grande, es $49$; además, como sabemos que el área de cada rectángulo es $60$, dado que $ab = 60$, entonces el área del cuadrado más grande es $289$ (ya que $4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$). La raíz cuadrada de este número es $17$ y corresponde a la medida del lado del cuadrado más grande. De esta manera resulta que $(a+b) - (a-b) = 17 - 7 = 10$, de donde se obtiene que $b = 5$ ( $(a+b) - (a-b) = 2b$) y $a = 12$. Sin embargo $(a+b)$ y $(a-b)$ no fueron los algoritmos usados para resolver este problema, sino más bien se ocuparon $\frac{(a+b)}{2}$ y $\frac{(a-b)}{2}$, lo que no representa ningún problema ya que únicamente basta con dibujar esta figura con la mitad de su dimensión.

Otra forma de visualizar dicho problema es apelando a un triángulo rectángulo, en el que las relaciones entre valores obtenidos a partir de a y b son las que se ilustran en la figura siguiente:




Este tipo de visualización se basa en el uso del teorema de Pitágoras. Con base en esta visualización se construyen los cuadrados de áreas $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ $\left(= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)$ y $60\ (= (ab))$, que son los valores dados en el planteamiento del problema, y de esta forma se pueda aplicar el teorema de Pitágoras con el fin de obtener el área del cuadrado restante $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 72\ \frac{1}{4}$ . Esta visualización posee un cierto valor agregado, en cuanto a la posibilidad de haber sido utilizada pues según Rudman la descomposición que aparece en la imagen está documentada en tablillas babilónicas, no así los diagramas con las otras visualizaciones consideradas hasta el momento. Por ello, aunque con un grado elevado de plausibilidad, sostenida en evidencias tales como la adecuación de las operaciones realizadas con los acomodos de las figuras ya ilustrados, hay que aceptar que hasta el momento son una mera suposición de lo que pudo haberse utilizado en el planteamiento y la resolución del problema.

Una vez señalado lo anterior, lo que se debe resaltar en este problema es el hecho de que el orden de los pasos que conducen a la solución de este problema no siguen la misma hilación que las instrucciones de los demás problemas, en los que siempre se habla de sumar y luego restar cierta cantidad, pues en el problema que nos ocupa, en la versión de Høyrup, el orden se invierte, como se puede ver en las líneas reverso 2- 3, en donde primero se habla de “cortar” y luego de sumar. Esto parece hacer referencia a una operación de separar una pieza de un lado para luego acomodarla en otro sitio, algo que por cierto no se refleja en los diagramas –visualización– con los que se ilustró este procedimiento. No obstante, esta alteración y la forma como literalmente están escritas las frases parecen apuntar a una traducción que tal vez sea literal, pero que igualmente reflejan expresiones que lucen un tanto primitivas, lo que a su vez apunta, posiblemente, al bajo nivel descriptivo del dialecto utilizado y a que las expresiones matemáticas de la época aún no habían conformado un vocabulario y una sintaxis bien definidos para el caso.

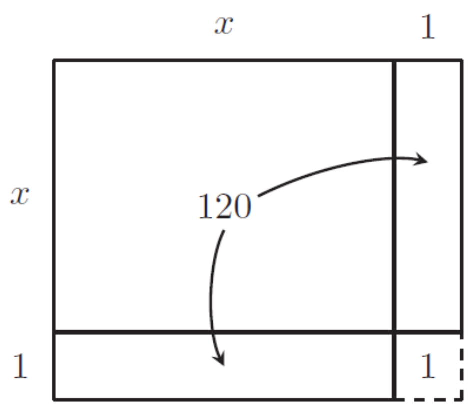
En los problemas encontrados en la zona cubierta por las culturas asirio-sumerias no existen ejemplos de que se intentara probar que las figuras (gnomon) utilizadas en el método de “cortar y pegar” fueran rectángulos o cuadrados, apelando a supuestos implícitos o, al igual que se busca hacerlo en nuestro tiempo para justificar los procedimientos, sobre la base de visualizar figuras cuyas propiedades geométricas se adapten a los contenidos e instrucciones del problema que se pretende resolver. Todo lo contrario sucedería en el caso de una matemática tan desarrollada como la euclidiana, donde queda perfectamente establecido, sea como dato o bajo una demostración, con qué tipos de figuras se está trabajando en todo momento. Con todo, los resultados obtenidos en los procedimientos registrados por los maestros escribas son correctos, como se puede ver cuando dichos procedimientos se traducen a expresiones algebraicas y que a partir de ellas es posible establecer una justificación para los mismos. Sin embargo, no porque se puedan interpretar a través de un lenguaje algebraico moderno, significa que los babilonios hayan contado, para resolver problemas, con métodos algebraicos disfrazados bajo ropajes geométricos.

Otra cuestión que cabe destacar es que en su formulación abundan los problemas con carácter analítico, en el sentido de que las medidas desconocidas son tratadas como si sus valores fueran conocidos, y que hasta pueden ser, de cierta manera, aislados de las relaciones en las que se encuentran. Si acaso el álgebra fuese comprendida tan solo como la aplicación del análisis en el sentido planteado por Francois Viete, el método sería de naturaleza claramente algebraica. Sin embargo, si el álgebra es considerada como una ciencia en la que uno de sus rasgos principales es la utilización de símbolos abstractos que permitan abarcar de manera más general los diferentes tipos de objetos y dar como resultado un estudio más amplio que depende menos de la intuición, el 'álgebra' de los segmentos de línea medibles de la antigua Babilonia no es propiamente un álgebra.

Ciertos problemas parecían de fácil solución apelando a su evidente significado geométrico, y su solución pasaba por realizar operaciones fácilmente identificables con manipulaciones geométricas. Tal es el caso de uno de los problemas que aparecen en la tablilla MS 5112:[24]

"El campo y dos de los lados apilados [sumados, añadidos] dan 2,00 [=120]. ¿A qué son iguales el campo y el lado?"

La visualización de este enunciado es más o menos directa, si tomamos como x la magnitud del lado por determinar, y suponemos que al cuadrado de lado x se le añaden dos rectángulos de lados x y 1. Lo que seguiría para determinar x es, naturalmente, agregar un cuadrado de lado 1 a la figura, en el hueco que se forma entre las superficies añadidas, y con ello se completa el cuadrado con x + 1 por lado. El área sería entonces 121 y el lado se obtiene extrayendo la raíz cuadrada de dicho número, resultando ser 11. A dicho valor hay que sustraerle el 1 y se obtiene el valor buscado para el lado del cuadrado original.




Desde nuestra posición de lo que se trata en este problema es deducir el valor de un número que sabemos posee la característica de que su cuadrado,

[24] Friberg, 2007, p. 309, Katz, 2014, *Taming the Unknown*, pp. 24-25.

al sumársele dos veces el valor de su lado, da 120. En términos más resumidos, se busca el valor de x tal que $x^2 + 2x = 120$. Esto no es sino un caso particular del problema más general que extraer el valor de x tal que

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

Veamos ahora lo que el escriba ofrece como solución:

"A 2,00 [= 120] del amontonamiento añadir la extensión, dando 2,01 [= 121]. Su lado igual encuentra, lo cual da 11. De 11 corta su extensión 1, y entonces 10 es el lado igual".

Evidentemente, aun con su forma un tanto ambigua –anticuada en tanto que refleja una etapa de formación de un vocabulario y manera de presentación de un procedimiento–, lo que instruye el escriba es a realizar las operaciones que marca nuestra expresión algebraica si bien su guía sería el planteamiento geométrico y su recomposición, tal y como se hizo renglones atrás.

Pasemos ahora a otro problema cuya solución utiliza una técnica diferente, aunque por su naturaleza parecería susceptible de ser resuelto con 'técnicas babilónicas' estándar. Con el propósito de que el problema y su solución sean más fácilmente entendibles presento el problema, enunciado y solución, bajo una versión típica de nuestro tiempo. Ésta será seguida por otra formulación, que aparece en el libro de Katz y Parshall (2014) y que pretende seguir el espíritu del original, y finalmente reproduzco la forma como es presentada en Katz (2007) y que corresponde a una versión fiel, en lo que cabe dado que pasa por el proceso de transliteración/traducción (al inglés y luego al español), del original babilonio.

Problema 23 de las tablas BM 13901 [25]

[25] Katz y Parshall (2014), *Taming the Unknown,* p.28, y Katz (ed.), 2007, *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia* p. 107.

“La suma de los cuatro lados de un cuadrado y la de la superficie que abarcan es $\frac{25}{36}$".

Este problema se puede interpretar en términos modernos mediante la ecuación $x^2 + 4x = \frac{25}{36}$, la cual traduce a simbología algebraica lo que la formulación retórica expresa.

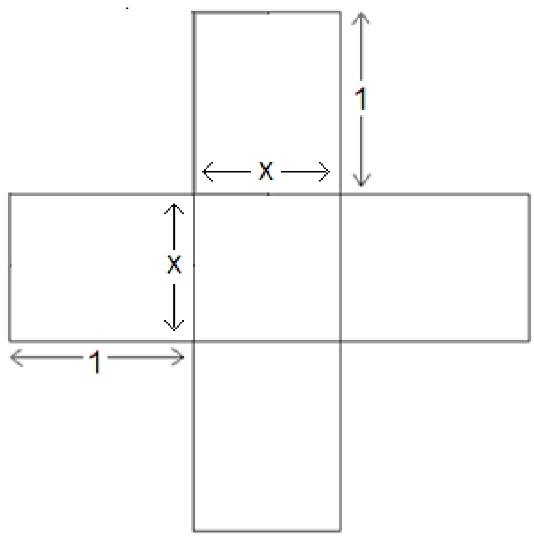
Resolver este problema con álgebra es bastante sencillo: se pueden factorizar los términos de la ecuación $x^2 + 4x - \frac{25}{36} = 0$ de manera que ésta se transforme en $\left(-x + \frac{1}{6}\right)\left(-x - \frac{25}{6}\right) = 0$

Por lo que $x_1 = \frac{1}{6}$ y $x_2 = -\frac{25}{6}$. La solución negativa se desecha en este caso, dado que no corresponde a un valor que tenga sentido para este problema.

O se puede utilizar la fórmula general $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ si tomamos la expresión anterior como $x^2 + 4x - \frac{25}{36} = 0$.

Así, $a = 1$, $b = 4$ y $c = -\frac{25}{36}$, de modo que sustituyendo en la fórmula anterior se tiene que $x_1 = \frac{1}{6}$ y $x_2 = -\frac{25}{6}$, donde la raíz negativa tiene el mismo destino que párrafos atrás.

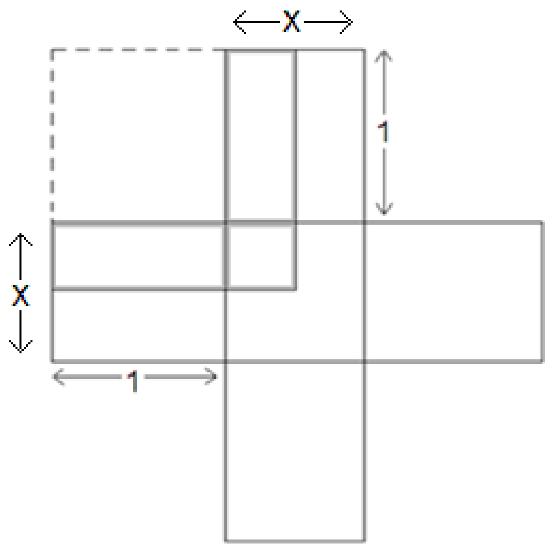
Como se puede apreciar, el problema es del tipo $x^2 + bx = c$. Sin embargo aquí la $b$ posee un rasgo particular ya que su valor es $4$, que es el número de lados de un cuadrado. Esto permite utilizar la siguiente visualización:



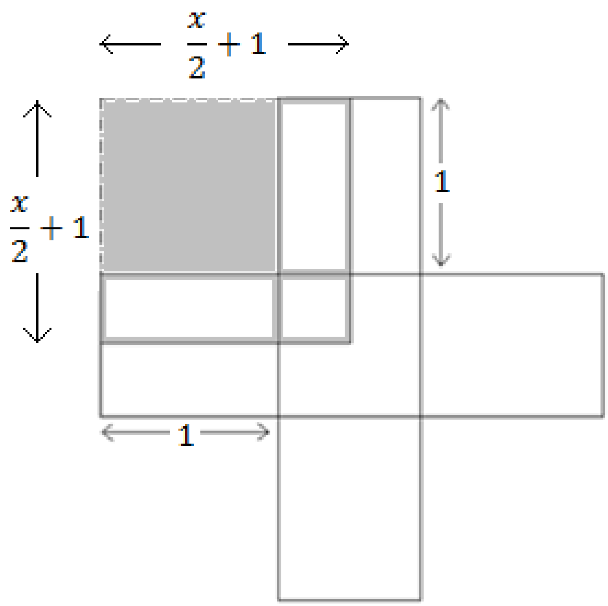

Pasemos ahora a la solución a la manera como lo presenta Katz (2007). Según esto el escriba plantea seguir los siguientes pasos para encontrar el valor del lado del cuadrado:

"… En el primer paso de la solución, $\frac{1}{4}$ de $\frac{25}{36}$ fue tomado para obtener $\frac{25}{144}$. A esto le fue añadido 1 para dar $\frac{169}{144}$. La raíz cuadrada de este valor es $\frac{13}{12}$. Resta 1 lo que te da $\frac{1}{12}$. Así, la medida de la longitud es dos veces ese valor, $\frac{1}{6}$."

Es probable que para resolver este problema los escribas comenzaran por dibujar un cuadrado de medida x al cual le añadieron cuatro rectángulos de medidas x y 1, formando una especie de cruz (esta figura tenía por área $\frac{25}{36}$) posteriormente tomaron $\frac{1}{4}$ de su área ($\frac{x^2}{4} + x$) esto es $\frac{25}{144}$.




Luego completaron el cuadrado $\frac{x^2}{4} + x + 1 = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$, añadiéndole el área 1 del cuadrado encerrado por la cuarta parte de la figura en forma de cruz, resulta $\frac{169}{144}$; así, la raíz cuadrada de este número es $\frac{13}{12}$, por lo que si se resta 1 de este valor se obtiene $\frac{1}{12}$ , que duplica el valor de x, de donde resulta que x = $\frac{1}{6}$".



Una vez entendida la mecánica de resolución del problema presento, como se dijo líneas atrás que lo haría, el enunciado que supone reproduce el original:[26]

"(xxiii) Un área. Sumé cuatro anchuras y el área de manera que diera [el valor] 0; 41 40. Escribe 4, los cuatro lados. El recíproco de 4 es 0; 15. Aumento 0; 15 en 0; 41 40 y se obtiene 0; 10 25. Lo anotas. Añades 1, la proyección, y entonces 1: 10 25 es el cuadrado de 1; 05. Le restas 1, la proyección, la que había sido sumada y luego copias [tomas] 0; 05 dos veces y luego 0; 10 se multiplica por sí misma".

Expresados los valores en base 60 añade un tanto a la dificultad de nuestra lectura del problema, reflejando la falta de costumbre en lidiar con este sistema y que impide establecer correspondencia obvia entre cómo se está procediendo y los resultados que se arrojan. A esto se le añade la retórica usada por los escribas de la época, que se refleja, entre otras cosas, en que al final de la solución se refieren una vez más al enunciado del problema cuando dice que 0; 10 ( 1/6 en la presentación inicial de este problema) elevado al cuadrado más 2 veces 0; 05 (1/12), es decir, 4 veces 0; 10 darían el valor propuesto en el enunciado del problema.

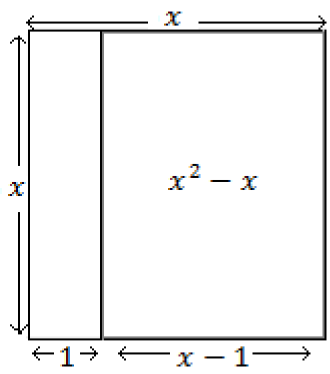
En las mismas tablas BM 13901 también se puede encontrar el siguiente problema:

Problema 2 de las tablas BM 13901 [27]

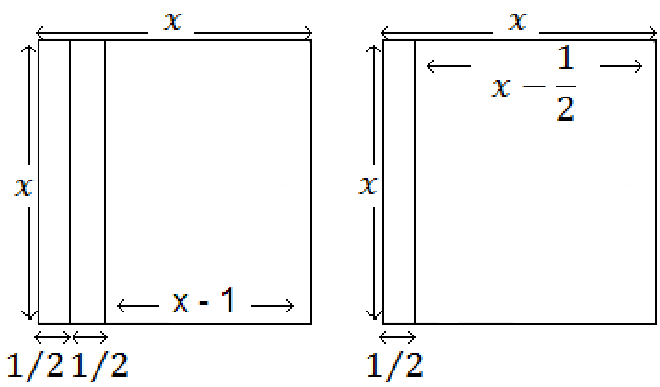
Este problema en notación moderna se escribiría como la ecuación $x^2 - x = 870$, y su solución se expresaba de la siguiente manera: "*sustraje el lado de mi cuadrado del valor del área y resultó 14, 30 (= 870). Añade 1 a lo largo, siendo la proyección. Parte 1 a la mitad. Combina* [es decir, multiplica] *0; 30 (=* $\frac{1}{2}$*) y 0; 30. Añade 0; 15 (=* $\frac{1}{4}$*) a 14, 30. 14, 30; 15 (= 870* $\frac{1}{4}$*) es el cuadrado de 29; 30 (= 29* $\frac{1}{2}$*). Suma el 0; 30 que habías combinado* [multiplicado] *a 29; 30 de manera que la medida del cuadrado es 30*". Es posible que para resolver dicho problema los escribas hayan seguido el siguiente razonamiento:

[26] Katz, 2007, *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia…,* p. 107.
[27] Véase Katz y Parshall, 2014, *Taming the Unkown,* p. 25

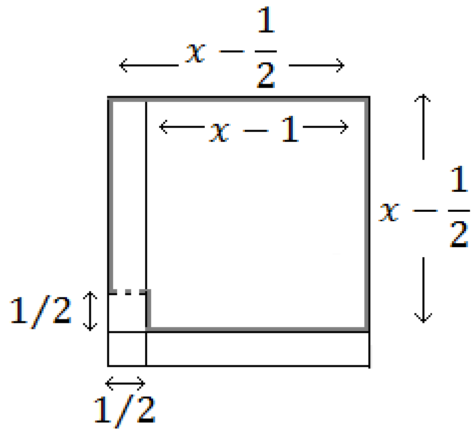
En un cuadrado de medidas $x$, marcaron sobre uno de los lados una distancia $1$ y extendieron sobre ella una línea de longitud $x$. Dentro de este cuadrado quedan determinados dos rectángulos uno de los cuales tendrá por lados a $x$ y a $(x-1)$ y su área será $14;\ 30\ (=\ 870)$,




Posteriormente dividieron a la mitad la distancia 1, con lo que quedaban determinados tres rectángulos, dos de lados $x$ y $(\frac{1}{2})$ y otro de lados $x - \frac{1}{2}$ y $x$.




Después se mueve uno de los rectángulos que se acaban de generar con lados $x$ y $(\frac{1}{2})$, de tal forma que quede sobre el lado (x - $\frac{1}{2}$) del tercer rectángulo y por encima de una parte del rectángulo con lados $x$ y $(\frac{1}{2})$.




De esta manera lo que resulta es un nuevo cuadrado de lados $(x - \frac{1}{2})$ y que tiene por área $870$ $(= x^2 - x)$ (que era el área del rectángulo original, pues éste se encuentra dentro del nuevo cuadrado), por lo que si a esta cantidad se le añade el área $\frac{1}{4}$ del cuadrado faltante, se obtiene $870\ \frac{1}{4}$. Con ello, al extraer la raíz cuadrada de $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ se obtiene que la medida del lado de este nuevo cuadrado es $29\ \frac{1}{2}$. Y por último se sumó $\frac{1}{2}$ para concluir que $x$ debía medir $30$.

Con este ejemplo se ilustra una manera de resolver la ecuación cuadrática $x^2 - bx = c$. De paso se exhibe la dependencia de la solución con la manipulación de una figura inicial y el hecho, no trivial, de que este caso y el que maneja como positivos todos los coeficientes expresados en este formato, son considerados como casos particulares y ajenos unos de otros. Esto mantiene a la matemática babilónica en un nicho ajeno al de los procedimientos algebraicos con los que usualmente se le quiere vincular. A manera de confirmación de esta afirmación se pueden analizar los otros 22 problemas incluidos en esta tablilla (BM 13901) y que ilustran la adaptación de este cálculo geométrico a diferentes problemas, variantes todos ellos de situaciones a las que pueden dar lugar figuras cuadriláteras y las magnitudes con ellas asociadas.

Como se puede apreciar en los ejemplos considerados en este trabajo, los procedimientos eran descritos por medio de instrucciones sucesivas y que obedecían al proceso geométrico de construcción, disminución o reacomodo de partes en una configuración geométrica que involucraba cuadriláteros cuyas áreas o magnitudes de sus lados era sencillo calcular. La manera de proceder de estas explicaciones evidentemente didácticas tenía por objetivo proporcionar a los estudiantes una mayor comprensión de la terminología correspondiente, así como de las operaciones y conceptualizaciones matemáticas empleadas en la época. Esta forma de enseñar matemáticas implicaba primero aprender a seleccionar los algoritmos apropiados y necesarios para el problema, de modo que los procedimientos se transformaron a fin de permitir aplicaciones coherentes, además de aprender a dominar las técnicas necesarias para dicha resolución. Sin embargo en ninguna de las tablas encontradas se hace explícito el origen del razonamiento que da sustento a los algoritmos que traducen a operaciones aritméticas los pasos a seguir para la resolución de los mismos. Para uno, lector de los siglos XX y XXI es relativamente sencillo acomodar sus procedimientos a elaboraciones geométricas, justificándose esto en tanto que las cadenas de problemas que se encuentran en los 'documentos' en barro o arcilla reflejan ser variaciones sobre un mismo tema, y que en los casos revisados resultan ser cálculos relacionados con áreas. No se mezclan, por ejemplo, con problemas de interés o interés compuesto, ni de proporciones, ni con asuntos propios de la aritmética, tales cuestiones relacionadas con números primos, conmensurabilidad, etc. Todas estas problemáticas surgirán posteriormente y son más propias de la matemática griega.

Toca ahora ser más explícito sobre la materia de la existencia de un 'álgebra' en la matemática recogida en las tablillas mesopotámicas. Hoy día la forma de resolver, enfrentar o conceptualizar problemas varía dependiendo del aparato matemático que se utilice y esto también parece ser el caso si se trata de la matemática del pasado. En el caso del método algebraico, una de sus características principales –en tanto se esté pensando en el uso del álgebra como la herramienta que se utiliza en la geometría analítica y el cálculo– es el uso y la manipulación de símbolos. Esto permite operar omitiendo el significado de los objetos representados, es decir, se trabaja la mayor parte del tiempo con símbolos que pueden estar representando longitudes, anchuras, pesos, fuerzas y demás nociones a las que recurren los modelos o las teorías acerca de hechos del mundo. El proceso que lleva hacia el álgebra consiste en traducir el problema a un lenguaje donde los símbolos representan magnitudes y algunas de cuyas relaciones podemos establecer para, a partir de ellas determinar otras más y, a fin de cuentas, determinar los valores de unas magnitudes en términos de los valores conocidos de otras. Proceder así permite 'razonar' dicho problema desde una perspectiva diferente a la original, y en la que cobra sentido el lenguaje del álgebra. Bajo este enfoque el problema cambia y también su análisis.

Previo a la aparición del álgebra, problemas como completar un cuadrado, eran abordados de forma literal, añadiendo el área del cuadrado faltante, y siempre teniendo en mente y sirviendo de guía el problema por resolver, como se ilustró con amplitud en los ejercicios anteriores. Esto no sucede al trabajar con álgebra, pues el manejo de los símbolos característicos de esta materia hacen innecesario establecer una contraparte geométrica para cada operación algebraica –aunque la haya– y además permite operaciones cuyo significado geométrico sería difícil establecer. Lo que es un hecho es que al analizar los problemas anteriores sucede que esta cualidad tan distintiva del álgebra, i.e., el manejo simbólico, está ausente, destacando principalmente los objetos que se identifican tanto con elementos geométricos como con números específicos. Cuando nos referimos a 14, 30 esto significa específicamente el número 14, 30, y corresponde a la magnitud de un lado o a un área que se identifica en un diagrama. Esto es algo imposible de soslayar. Una cosa análoga ocurre en la geometría griega, donde, como se verá en el siguiente capítulo, línea AB significa exactamente eso, la línea que en el papel aparece con las letras A y B en los extremos respectivos.

Además, el considerar algo como un símbolo o no, depende del contexto en el que lo uses; por ejemplo, el signo moderno para la adición fue utilizado por primera vez en un libro de aritmética impreso por Johannes Widman[28] en Alemania. Widman encontró el signo en una colección de manuscritos que consultó durante la elaboración de su aritmética, en particular en el Dresen C80 (c. 1486), en el que se usaba el signo + como una ligadura. Este signo estaba

[28] Kerkhove (2007), *New Perspectives on Mathematical Practices*, p. 10.

transcrito en el contexto de la aritmética y era una abreviatura taquigráfica de la palabra en latín “et”, de modo que la forma que ostenta como dos líneas cruzadas se deriva de la letra t en la palabra “et”. Widman usaba el signo + para describir la acción física o mental de operar como en la frase “3 + 5 hace 8”, por lo que no se consideraba como un símbolo. Sin embargo, Cardano introduce el signo + dentro del contexto del álgebra para operar con polinomios, de modo que éste forma parte de expresiones como las binomiales, mismas que constituyen parte del lenguaje algebraico.

## CAPÍTULO 2. El ESPLENDOR DE LAS MATEMÁTICAS GRIEGAS, LA ARITMÉTICA DE DIOFANTO:

### 2.1.- Antecedentes:

La biblioteca de Alejandría fue el centro de investigación y aprendizaje más grande de su época. Situado en el enclave arquitectónico al oeste del delta del Nilo, con el mediterráneo al norte y el lago Mareotis en su orilla sur, se cree que la biblioteca queda establecida en la segunda mitad del siglo III a. C. bajo los auspicios de Ptolomeo I, quién quedó a cargo de la ciudad tras la muerte de Alejandro Magno (356- 323 a. C.) y la consiguiente repartición del imperio entre sus generales.

Al haber sido ambos estudiantes de Aristóteles, Ptolomeo apreciaba la educación tanto como Alejandro, por lo que buscó establecer en esta nueva ciudad un lugar dedicado únicamente al saber. Resultado de ello fue la creación del Museo –lugar de las Musas–, un espacio donde los estudiosos se reunían y trabajaban, así como la Biblioteca, la cual se conectaba con el Museo y en la cual se podía consultar textos en temas tan diversos como el teatro, la medicina, la retórica, y disciplinas más técnicas como las matemáticas y la astronomía.

Muchos personajes célebres trabajaron y estudiaron en Alejandría y en ciudades cercanas a ésta, como es el caso de la ciudad de Pérgamo, ubicada en la península de Anatolia, hoy Turquía,[29] entre los que podemos encontrar a los siguientes:

Euclides de quien solo se sabe formó una escuela en Alejandría y a quien debemos una de las más grandes obras, si no la más importante, de geometría: los "*Elementos*" (posteriormente se analizarán con más detalle algunas de las proposiciones que aparecen en esta obra), que comprende diversos campos de la matemática como son la geometría plana (libros I - IV), la teoría generalizada de la proporción (V – VI), la teoría aritmética (VII – IX), y la geometría del espacio (XI – XIII). Por lo que concierne a los métodos

[29] Esta ciudad contaba con la segunda biblioteca más importante de la época, solo superada por la de Alejandría.

utilizados en la obra, los más relevantes podrían ser el procedimiento elemental de construcción mediante reglas y compás, y el procedimiento que se conoce como 'aplicación de áreas'. Pero por encima de todo lo que más llama la atención es el conjunto de definiciones, postulados y nociones comunes que aparecen en la portada axiomática del libro 1, los cuales, junto con los teoremas a los que da lugar, suponen la cumbre de la llamada geometría euclidiana.

Teón de Alejandría (c. 335 – c. 405 d.C.), matemático, astrónomo y filósofo natural, perteneció a la última generación de estudiosos ubicados en el Museo. Teón continuó con la tradición académica de elaborar nuevas ediciones y comentarios de algunos de los grandes libros que se encontraban en la biblioteca, los cuales eran altamente valorados (las copias a mano de obras originales eran muy apreciadas, incluso más que las originales, por las correcciones llevadas a cabo en las mismas).

Teón se enfocó particularmente en textos matemáticos tales como los de Euclides y de Claudio Ptolomeo. Entre sus discípulos se encontraba su propia hija Hipatia (355-415), de quien se sabe que también elaboró comentarios a varias obras importantes depositadas en la biblioteca, como el *Canon Astronómico* y las *Cónicas* de Apolonio, además de ser la primera en comentar los primeros seis libros de la *Aritmética* de Diofanto. Hipatia fue también una profesora eminente, destacando, según la tradición, en la enseñanza de ética, astronomía y matemáticas, instruyendo en filosofía a quienes se considera los últimos intelectuales importantes de Alejandría.[30]

Debido a su influencia y a lo que pareció ser inclinaciones paganas, Hipatia encontró la muerte al verse atrapada en un juego de poder orquestado por Cirilo, patriarca de Alejandría (el cual eventualmente fue declarado santo, contando entre sus méritos el haber expulsado a los no cristianos de Alejandría). Esto ocurría en el año 415 d. C. Después de la muerte de Hipatia

[30] Una excelente biografía de Hipatia es el libro de M. Dzielska, 2009, *Hipatia de Alejandría*.

la ciudad de Alejandría, el centro intelectual más grande de la época, comenzó su declive y con ello la decadencia de las matemáticas griegas.

Como se mencionó anteriormente, Hipatia comentó varios tratados famosos, uno de los cuales fue la *Aritmética*, la obra más conocida de Diofanto (nació entre 201/215 y murió entre 285/299 d. C.), a la que probablemente añadió algunas soluciones alternativas y varios problemas nuevos (1-7, 17, 18 del libro II) [31], los cuales fueron admitidos como genuinos en el texto.

Además de la Aritmética, a Diofanto se le atribuyen diferentes obras entre las que se puede mencionar una colección de pasajes de su tratado en números poligonales, así como su obra *Porismos,* de la que se piensa fue un conjunto de proposiciones que consideraban las propiedades de ciertos números, así como su divisibilidad.

La *Aritmética* es una compilación de diversos problemas, entre los que destaca la búsqueda o identificación de números racionales que satisfagan relaciones particulares. La obra constaba de trece libros y de los cuales solo siete han llegado hasta nuestros días. En estos siete se distribuyen 189 [32] problemas, la mayoría de los cuales tratan con lo que bajo nuestros ojos serían ecuaciones indeterminadas de primer grado con una incógnita, y de segundo grado con dos o tres incógnitas. A cada uno de los problemas le asigna una o más soluciones. Algo no muy usual en la época y en este tipo de textos es que al inicio de los libros aparecen introducciones breves, casi dedicatorias, que expresan que la finalidad del tratado es servir como herramienta en la instrucción de los estudiantes más avanzados.

Como ejemplo de lo anterior presento este pequeño fragmento: "*He intentado comenzar a partir de los cimientos sobre los que la ciencia se edifica, para exponer la naturaleza y el poder subsistentes en los números*" [33] Ésta es quizá la principal razón de la obra y que por lo tanto la sitúa como parte de una tradición educativa en la que estaba inmersa la biblioteca de Alejandría.

[31] Heath (1910), *Diophantus of Alexandria*, p. 14.
[32] Bashmakova y Smirnova (2000), *The Beginnings and Evolution of Algebra, p 37.*
[33] Katz y Parshall (2014), *Taming the Unknown,* p. 60.

## 2. 2.- Introducción:

En la dedicatoria a la *Aritmética* se introduce la simbología que se usará a lo largo de los diferentes problemas que aparecen en la obra, así como una serie de reglas para "operar con polinomios" que veré a continuación.

En la siguientes secciones analizaré algunos de los problemas que se encuentran en los libros 1 y 2 de la *Aritmética*, así como los métodos de resolución empleados por Diofanto, en particular enfocando el supuesto carácter algebraico atribuido a la simbología encontrada en la obra. De igual manera se analizarán las proposiciones II. 4, II. 5 y II. 14 de los *Elementos* de Euclides tratando de examinar si dichos enunciados y demostraciones responden a un razonamiento algebraico o no.

## 1. 3. – Definiciones:

La manera de funcionar del álgebra supone el uso de diferentes símbolos, los cuales describen relaciones abstractas entre los objetos de estudio y sus representaciones. Esto le permite a su vez la creación de un nuevo tipo de operaciones que facilitan razonamientos y proporcionan una especie de economía en los procedimientos que conducen a la resolución de los problemas. Los símbolos y las operaciones a las que estos se sujetan constituyen las bases del algebra. Es por eso que muchos estudiosos se preguntan si se puede considerar que estas bases quedaron establecidas a partir de la notación introducida en la *Aritmética* de Diofanto. A continuación se muestran la notación y las reglas que aparecen en la dedicatoria de la misma.[34]

- La unidad (= $x^0$ para nosotros) se denota con el signo $\overset{o}{M}$.
- El número que se asocia con una indeterminada cantidad de unidades (= x) es llamado *aritmos* (άριθμός) y su signo es ς.
- Al cuadrado (= $x^2$) lo denomina potencia o *dynamis* (δύναμις) y lo denota mediante una letra Δ seguida del del superíndice Y, es decir $\Delta^Y$.

[34] Heath (1910), *Diophantus of Alexandria*, p. 129.

- El cubo (= $x^3$ para nosotros), denominado cubo o kubos (κύβος), se denotó mediante la letra K seguida del superíndice Y, quedando así $K^Y$.
- Un cuadrado- cuadrado (= $x^4$) aparece como una doble Δ con superíndice Y, quedando como $\Delta^Y \Delta$.
- Un cuadrado- cubo (= $x^5$) queda denotado con el signo $\Delta K^Y$.
- El cubo- cubo (= $x^6$) aparece como $K^Y K$.

Acto seguido prosiguió a definir los que ahora llamamos recíprocos y que reciben nombres similares a sus denominadores.

- Cuando el denominador es una incógnita (= $\frac{1}{x}$) lo llama parte numérica.
- Cuando el denominador es la parte cuadrada de la incógnita (= $\frac{1}{x^2}$) lo llama parte cuadrática.
- Cuando el denominador es la incógnita al cubo (= $\frac{1}{x^3}$) lo llama parte cúbica.
- Cuando el denominador es el cuadrado- cuadrado (= $\frac{1}{x^4}$) lo llama parte cuadrado- cuadrática.
- Cuando el denominador es un cuadrado- cubo (= $\frac{1}{x^5}$) lo llama parte cuadrado- cúbica.
- Cuando el denominador es el cubo- cubo (= $\frac{1}{x^6}$) lo llamó parte cubo- cúbica.

Todas las denominaciones anteriores fueron definidas así con el propósito de facilitar la comprensión de lo que en palabras de Diofanto serían los principios básicos de la naturaleza esencial de los números.

Cabe destacar aquí que Diofanto establece una definición de lo que para él es un número y, más importante aún, lo que es un *aritmo*, el cual representa lo desconocido; divide además a los diferentes números en categorías de manera que los números contenidos en ellas se caracterizan por compartir el mismo exponente. Así, los problemas establecidos en esta obra deberían caracterizarse por relaciones entre dichas categorías, sin referencia a ningún número en particular. Sin embargo, como se verá a continuación, Diofanto termina proponiendo un número que representará cada problema en específico.

## 2. 4.- Problemas:

Diofanto establece sus problemas comenzando con una expresión que es válida para la mayoría de los números. Sin embargo, al resolver los problemas siempre ilustra sus 'métodos' por medio de ejemplos particulares. La forma de organizar dichos problemas responde a una serie de reglas de presentación que a posteriori Proclo identifica específicamente y que describen de manera general la estructura o partes de un problema matemático. Estas 'partes', sus nombres, las resalto con una impresión más oscura y describo su papel en la estructura de una demostración.[35]

Un problema comienza con la **prótasis,** que es la proposición o enunciado del problema. Mediante la prótasis se describe el problema de forma general. Le sigue la **ékthesis,** que es la exposición del problema, en donde se establece una condición particular; enseguida viene el **diorismós**. Su característica es que fija el propósito, es decir, construye una relación (geométrica), en ocasiones utilizando letras sobre el diagrama, y explica el objetivo que se desea alcanzar. Viene luego la **kataskeue** que consiste en construir los objetos de la prueba, que pueden ser segmentos o puntos auxiliares que permiten probar la prótasis. A este último proceso, la demostración propiamente dicha, se le llama **apódeixis**. Por último se presenta la **syumpérasma**, es decir, la conclusión, la cual suele ser casi siempre una repetición de la prótasis. Para identificar mejor la estructura descrita arriba, la ejemplificaré con el Problema 8 del libro II [36] de la *Aritmética* y que dice lo siguiente:

---

[35] Ver Ana Millán Gasca, 2004, *Euclides*, pp. 62-66.
[36] Katz y Parshall (2014), *Taming the Unknown,* p. 66.

*Partir un cuadrado dado en dos cuadrados.* (**Prótasis**)

*Se propone entonces partir 16 en dos cuadrados*. (**Ékthesis**)

*Pongamos que el primer número es un cuadrado de aritmo. Entonces el otro número será 16 unidades menos un cuadrado de aritmo. Hace falta entonces que 16 unidades menos un cuadrado de aritmo sean iguales a un cuadrado.* (**Diorismós**).

*Tomemos el cuadrado de una cantidad cualquiera de aritmos disminuida en tantas unidades como las que tenga la raíz de 16 unidades. Que esto sea el cuadrado de dos aritmos menos 4 unidades. Este cuadrado será entonces cuatro cuadrados de aritmo más 16 unidades menos dieciséis aritmos.* (**Kataskeue**).

*Igualémoslo a 16 unidades menos un cuadrado de aritmo; agreguemos a una parte y a la otra los términos negativos y quitemos los semejantes de los semejantes. Se sigue que cinco cuadrados de aritmo son iguales a 16 aritmos, y que entonces el aritmo es dieciséis quintos. Se sigue que uno de los números será* $\frac{256}{25}$ *y que el otro será* $\frac{144}{25}$*.* (**Apódeixis**).

*Estos dos números sumados dan* $\frac{400}{25}$*, es decir, 16 unidades, y cada uno de ellos es un cuadrado.* (**Syumpérasma**).

Eecke traduce el problema a términos algebraicos de la siguiente manera;[37]

Considere la ecuación $\mathbb{X}^2 + \mathbb{Y}^2 = 16$. Tomemos $\mathbb{X}^2 = \mathrm{x}^2$ y entonces $\mathbb{Y}^2 = 16 - \mathrm{x}^2$. Dado que $\mathbb{Y}^2$ debe ser un cuadrado, identificamos a $\mathbb{Y}^2$ como una expresión de la forma $\left(\mathrm{mx} - \sqrt{16}\right)^2$, en la cual se adopta, por ejemplo, que m

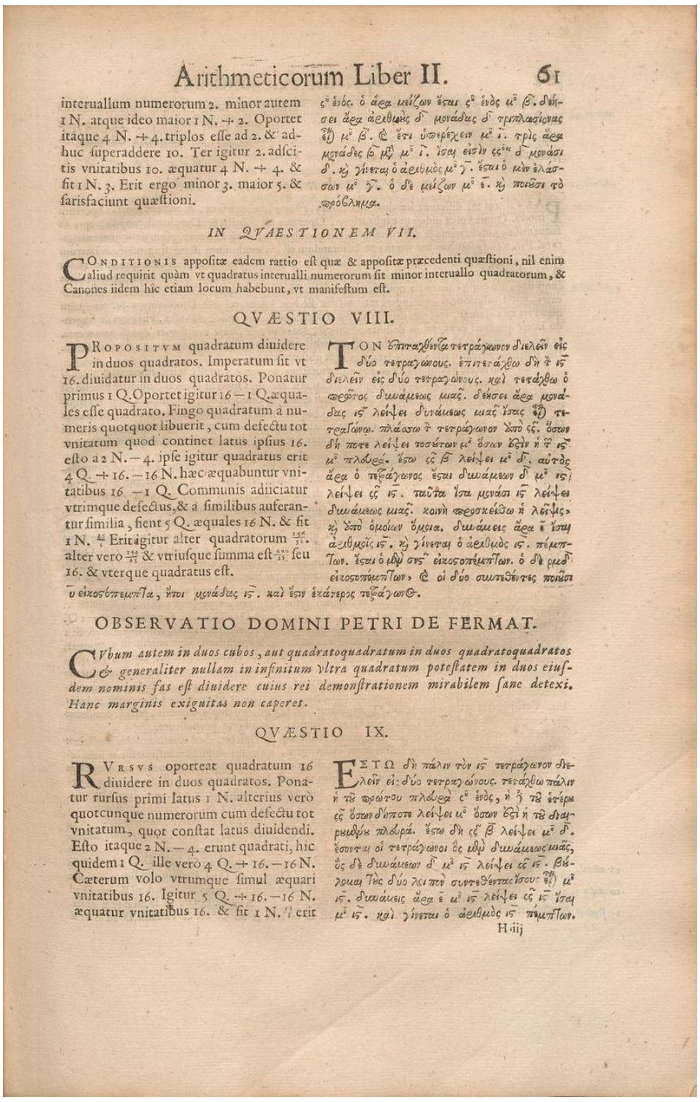
[37] Eecke (1959), *Diophante d'Alexandrie*, pp. 53- 55

es igual a 2; entonces $(2x - 4)^2 = 16 - x^2$, y según el texto esto es $4x^2 + 16 - 16x = 16 - x^2$. De aquí resulta que $5x^2 = 16x$ y entonces $x = \frac{16}{5}$. Consecuencia de esto es que $\mathbb{X}^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{256}{25}$ y $\mathbb{Y}^2 = \frac{144}{25} = \left(\frac{12}{5}\right)^2$, que son los valores que resuelven el problema dado que $\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{400}{25} = 16$.

Este problema no le pareció tan sencillo a alguno de los copistas del libro de Diofanto, pues en el manuscrito *Matritensis* 48, documento que data del siglo XIII, hay una anotación en el margen de este problema que dice lo siguiente: “que tu alma Diofanto, esté con Satán por la dificultad de tus otros teoremas y sobre todo la de éste”).[38]

Por otra parte, dicho problema es uno de los más famosos del libro II, si no es que el más famoso, posiblemente, de la historia de las matemáticas, pues fue en el margen de este teorema, en la edición de Claude Gaspar Bachet de Méziriac de la *Arithmetica* (1621) de Diofanto, que Fermat escribió la famosa frase de “he descubierto una demostración verdaderamente notable que este margen es demasiado pequeño para incluirla”. El enunciado al principio de la frase es conocido como “el último Teorema de Fermat”.

[38] Eece (1959), Diophante d’Alexandrie, pp. 53- 55.



Arithmeticorum Liber II. 61

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem rattio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

*Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

H iij

**Figura 2.** Edición de 1670 de la *Arithmetica* de Diofanto, dirigida por el hijo de Fermat, y en la que se incluye el comentario de Pierre de Fermat, como una nota bajo el título OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.[39]

En cuanto a la estructura, los problemas de Diofanto no son los únicos que se adaptan a la descripción desglosada posteriormente por Proclo. Las proposiciones que constituyen los "*Elementos*" (primera obra que distingue sus principios en definiciones, postulados y nociones comunes), escrita alrededor del año 300 a. C. por Euclides, también responden a esta estructura. Tomemos como ejemplo el siguiente teorema o proposición de los *Elementos*, Libro II:

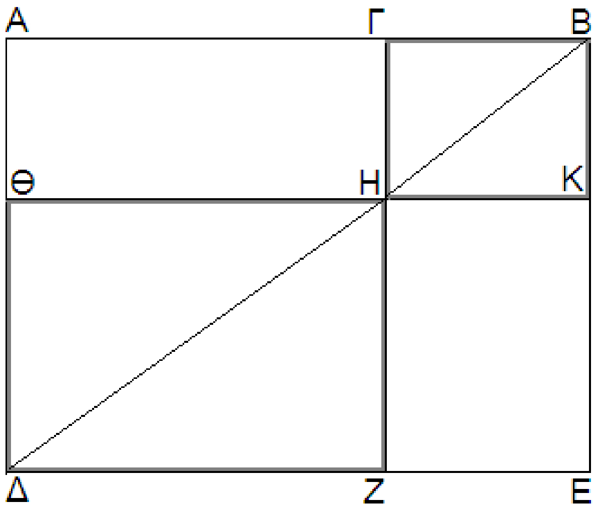
Proposición II.4; [40]

[39] https://en.wikipedia.org/wiki/Diophantus#/media/File:Diophantus-II-8-Fermat.jpg

*Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos.* (**Prótasis**)

*Córtese, pues, al azar la línea AB en el (punto) Γ*. (**ékthesis**)

*Digo que el cuadrado de AB es igual a los cuadrados de AΓ, ΓB y dos veces el rectángulo comprendido por A Γ, ΓB*. (**diorismós**)



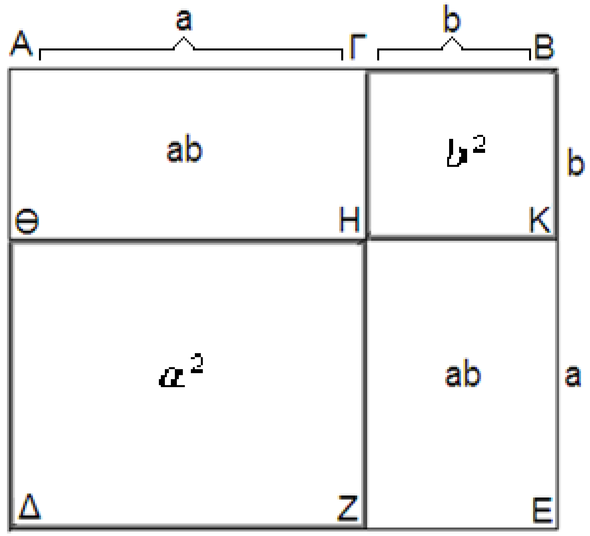

*Pues constrúyase a partir de AB el cuadrado AΔEB y trácese BΔ, y por el (punto) Γ trácese ΓZ paralela a una de las dos (rectas) AΔ, EB, y por el (punto) H trácese ΘK paralela a las dos (rectas) AB. ΔE*. (**kataskeue**). *Ahora bien, como ΓZ es paralela a AΔ, y BΔ ha incidido sobre ellas, el ángulo externo ΓHB es igual al interno y opuesto AΔB. Pero el (ángulo) AΔB es igual al (ángulo) ABΔ, puesto que el lado BA es también igual al (lado) AΔ. Por tanto el ángulo ΓHB es también igual al (ángulo) HBΓ; de modo que el lado BΓ es también igual al lado ΓH; pero ΓB es igual a HK y ΓH a KB; por tanto, HK es también igual a KB; luego ΓHKB es equilátero*.

[40] Euclides (1991), *Euclides Elementos Libros I- IV*, pp. 270- 272.

*Digo, en fin, que también es rectangular. Pues como ΓH es paralela a BK, [y ΓB ha incidido sobre ellas] entonces los ángulos KBΓ, HΓB son iguales a dos rectos. Pero el (ángulo) KBΓ es recto; por tanto, el (ángulo) BΓH es también recto; de modo que los (ángulos) opuestos ΓHK, HKB son, asimismo rectos. Luego ΓHKB es rectangular; pero se ha demostrado que también es equilátero; por tanto es un cuadrado; y es el (cuadrado) de ΓB. Por lo mismo, efectivamente ΘZ es también un cuadrado; y es el (cuadrado) de ΘH, es decir de AΓ; por tanto, ΘZ, KΓ son los (cuadrados) de AΓ, ΓB. Y como AH es igual a HE y AH es el [rectángulo comprendido] por AΓ, ΓB: porque HΓ es igual a ΓB; entonces HE es también igual al [rectángulo comprendido] por A Γ, ΓB; por tanto, AH, HE son iguales a dos veces el [rectángulo comprendido] por AΓ, ΓB. Pero ΘZ, ΓK son también los cuadrados de AΓ, ΓB; por tanto los cuatro ΘZ, ΓK, AH, HE son iguales a los cuadrados de AΓ, RB y dos veces el rectángulo comprendido por AΓ, ΓB. Ahora bien, ΘZ, ΓK, AH, HE son el [cuadrado] entero AΔEB, que es el cuadrado de AB; por tanto, el cuadrado de AB es igual a los cuadrados de AΓ, ΓB y dos veces el rectángulo comprendido por AΓ, ΓB.* (**apódeixis**)

*Por consiguiente, si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la [recta] entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos. Q. E. D.* (**syumpérasma**)

Si bien no hay acuerdo sobre cuál es el propósito del libro II de los *Elementos,* este problema resulta bastante interesante, ya que si se toma al segmento de línea AΓ= a y al segmento de línea ΓB = b, se puede construir la siguiente figura, en la que en el interior de los rectángulos se indica cómo obtener el área a partir de las magnitudes de los segmentos que comprenden cada sección de la figura:




De manera que, visto bajo otro sistema de ideas, es decir, otra formulación matemática, Euclides habría demostrado por medio de la geometría la siguiente propiedad o igualdad algebraica:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Con el lenguaje del álgebra es posible interpretar o traducir fácilmente a términos algebraicos la mayor parte de las 'identidades' que aparecen en el Libro II de los *Elementos*, de modo que en nuestros días, y para ciertos propósitos, problemas como el descrito anteriormente también se puede considerar algebraico. Esto tiende a confundir y a crear una relación inexistente, hasta ese entonces, de un *álgebra* (disciplina que considero aún no podía estar constituida como tal) y la geometría. Hay que hacer énfasis en que no debemos olvidar que la solución del problema, como ya se vio arriba, depende únicamente de herramientas geométricas y no del álgebra, como se pudiera llegar a pensar a causa de dicha interpretación.

Al igual que en el caso de los "*Elementos*", el álgebra que se emplea en la interpretación del procedimiento descrito en el problema 8 del libro II de la *Aritmética* de Diofanto da lugar a ecuaciones que se corresponden perfectamente con las instrucciones dadas para llegar a la solución del mismo. ¿Significa esto que Diofanto utilizó, de alguna manera, un razonamiento algebraico para dar solución a sus problemas? O, variando la pregunta, ¿qué tipo de razonamiento, más allá de lo expresado retóricamente, fue el que Diofanto empleó para resolverlos? Como ya se dijo, una de las principales características del pensamiento algebraico es que éste trata con relaciones matemáticas más que con objetos. Considerado así, la siguiente –y sus derivadas– parece una pregunta razonable: ¿Se le puede atribuir a la *Aritmética* una naturaleza simbólica?, ¿subyacente tal vez?, ¿y cómo se interpretaría o explicarían esta 'subyacencia?, y si éste fuera el caso, entonces el pensamiento empleado en ella ¿ocupó representaciones abstractas que permitieran redirigir la forma en que se concibe o comprende el problema, llevándolo hacia una nueva forma de pensar que permitiera alcanzar su solución a través de una abstracción que prescinde de la vinculación o maridaje de las operaciones aritméticas con la configuración o reconfiguración geométrica?¿Y todo con qué fin, si no está aprovechando las posibilidades que arrojaría despojarse de la necesidad de la correspondencia con la figura?.

En realidad todo lo que se puede decir de la *Aritmética* acerca de si se empleó una simbología para resolver los problemas son meras suposiciones, debido principalmente al hecho de que este tratado, así como la mayoría de los tratados griegos cuyo contenido nos ha llegado, los hemos podido conocer a través de copias medievales y algunas bizantinas, lo que a su vez implica que los textos han pasado por diversos cambios y omisiones, tanto en cuanto a los contenidos como en la atención que los lectores prestaron a los diferentes elementos que hoy sabemos son dignos de atención, entre los que se pueden considerar los siguientes: los materiales, los intereses de los copistas o sus patrones, la censura, el afán de ampliar o 'explicar' pasajes, el papel de las imágenes, etc.

Como ya se mencionó anteriormente, la A*ritmética* fue comentada por Hipatia, y no fue la única en hacerlo. Siglos después la obra fue conocida y discutida en el mundo árabe, y gracias a ello contamos con los contenidos de los libros IV al VII, en una versión de Qustā Ibn Lūqā (820-912 d.C.), médico y matemático árabe que visitó Constantinopla y adquirió, para luego traducir al árabe, varios manuscritos matemáticos griegos. Ahora bien, lo interesante aquí es que tanto los comentarios de Hipatia como la versión griega que se relaciona con el texto original y la interpretación y traducción de los textos árabes, coinciden en dar por sentado la falta de simbolismo en la obra, es decir, el manejo reglamentado de los nombres y símbolos que se ocuparon para designar a lo desconocido (o incógnita), así como las potencias de lo desconocido. A esto se añade que incluso en la traducción árabe los números son escritos por medio de palabras. Esta versión de los manuscritos griegos de la *Aritmética*" parece que fue fiel a los textos originales, debido principalmente a que en ese momento no se había establecido el uso generalizado de los hoy llamados números hindúes o números arábigos.

¿Por qué entonces se considera a la *Aritmética* como una obra de carácter simbólico? Este enredo se debe principalmente a que en ella se estableció un sistema de símbolos que se supone servirían para escribir lo que ahora llamamos polinomios. Dicho sistema se describe en la introducción de la misma, y es sin duda uno de los aspectos más importantes de este libro, principalmente debido a la cantidad de símbolos que ahí aparecen. Algunos ejemplos o remanentes de la probable simbología empleada en la obra son:

El signo ↑ (λεῖψις) que indicaba una falta o deficiencia de algo.

El signo ς, que para muchos autores no se puede interpretar como símbolo algebraico (como es el caso de Heath), representaba lo que ahora llamaríamos incógnita y que en la *Aritmética* se llama, como hemos visto, *aritmos*.

Así una ecuación como $x^3 + 13x^2 + 5x + 2$ se podía escribir, según Cajori,[41] como $K^Y \bar{\alpha} \Delta^Y \iota \bar{\chi} \varsigma \bar{\varepsilon} \, \dot{\mathrm{M}} \, \bar{\beta}$ . De hecho Cajori (quien utilizó este ejemplo para indicar la falta de signo para la multiplicación y para la suma en la *Aritmética*) señala que este sistema de símbolos, y el no consultar lo que realmente dice y hace el autor de la *Aritmética* es una de las principales razones para llegar a pensar en este texto como uno de los primeros trabajos algebraicos en la historia.

[41] Kerkhove (2007), *New Perspectives on Mathematical Practices*, p. 4.

Sin embargo, es probable que la introducción de todos estos símbolos mencionados previamente se debiera al trabajo realizado por los escribas del siglo IX quienes al traducir los manuscritos se encontraban con palabras que se repetían y aparecían varias veces en los textos, como es el caso de la palabra ἀριθμός (*aritmos),* la cual tenía presencia en cada problema. De esta manera, para facilitar su trabajo y ahorrarse tiempo, los escribas pudieron haber sustituido esta palabra por la letra ς, lo cual les ahorraba mucho trabajo.[42]

Otra de las prácticas más comunes entre este grupo de amanuenses era el uso de ligaduras, que consiste en combinar las letras de palabras que se repetían consecutivamente, con lo que también se ahorraban mucho tiempo –y espacio en el pergamino o en el papel–[43] en la transcripción de los textos. El caso del signo ς es un ejemplo de una ligadura para "αρ", que proviene de la palabra ἀριθμός (*aritmos*). Así, sucedería que este proceso que llevó al uso de abreviaciones y ligaduras para las palabras y enunciados de carácter matemático inició más bien en el siglo IX d. C., y no en el III d.C. en la obra de Diofanto. Esto situaría dicha práctica en el mismo siglo en que al-Kwarizmi escribe su *Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala,* mismo que, por efecto de una transliteración de al-Jabr, comenzó eventualmente a ser conocido como el álgebra de al-Kwarismi.[44]

Una vez hechas las puntualizaciones sobre la pertinencia de pensar que el álgebra inicia con Diofanto, retomo la *Aritmética* para analizar algunas de las ingeniosas formas que tiene de solucionar cada uno de los problemas planteados en ella. Estos métodos, como se verá a continuación, no siguen una forma específica o general para resolverlos, sino que más bien desarrollan estrategias matemáticas según las necesidades de cada problema. En seguida presentaré tres problemas del libro 1 que pueden ilustrar esta idea.

---

[42] Ibid.

[43] Hay que tomar en cuenta que el material sobre el que se escribía, fuera pergamino o papel, tenía costos elevados, por lo que quienes los usaban procuraban desperdiciar lo menos posible el espacio, además de reutilizar el material cuando era posible. Tal es el caso de los palimpsestos, pergaminos que contenían un texto y éste era literalmente raspado para reescribir otro texto sobre la misma superficie. En ocasiones el texto bajo la superficie era aún legible y podría recuperarse lo ahí escrito.

[44] Rashed, R.; Armstrong, Angela (1994), *The Development of Arabic…,* pp. 11-2. Ver también https://es.wikipedia.org/wiki/Compendio_de_cálculo_por_reintegración_y_comparación. Consultado 5 marzo, 2016.

Libro 1, Problema 1 [45]

*Dividir un número en dos con una diferencia dada entre ellos.*

*Sea 100 el número dado y 40 la diferencia; encontrar dichos números.*

*Supongamos que el número más pequeño es un aritmo: entonces el número más grande será un aritmo más 40 unidades; en consecuencia la suma de los dos números se convierte en dos aritmos más 40 unidades.*

*Así, las 100 unidades dadas son esta suma; entonces 100 unidades son iguales a dos aritmos más 40 unidades. Restemos lo semejante de lo semejante, es decir 40 unidades de 100, y de la misma manera 40 unidades de dos aritmos más 40 unidades. Los dos aritmos restantes valen 60 unidades y cada aritmo resulta ser 30 unidades.*

*Volviendo a lo que habíamos planteado: el número más pequeño será 30 unidades, mientras que el más grande será 70 unidades y la prueba es evidente.*

Esto se puede traducir en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbb{X} + \mathbb{Y} = 100 \\ \mathbb{X} - \mathbb{Y} = 40 \end{cases}$$

Donde $\mathbb{X} > Y$.
Hagamos $\mathbb{Y}$ = x. Entonces $\mathbb{X}$ = x + 40.
De donde $\mathbb{X}$ + $\mathbb{Y}$ = 2x + 40.
Así 100 = 2x + 40.
Restando lo semejante de lo semejante 100 – 40 = 2x + 40 – 40.
Lo que resulta ser 2x = 60.
Por lo tanto x = 30.

[45] Eecke (1959), *Diophante d'Alexandrie*, p. 9.

De donde $\mathbb{Y}$ = 30 mientras que $\mathbb{X}$ = 70.

En este primer ejercicio de la *Aritmética* se puede observar más fácilmente la forma en que se procede para resolver los problemas (por medio de una serie de pasos o instrucciones). Esta manera de demostrar las proposiciones no responde necesariamente a un razonamiento algebraico. ¿Por qué? El álgebra ha contribuido, desde su asentamiento bajo una cierta identidad a partir de la segunda mitad del siglo XVI, con una serie de técnicas globalizadas que hizo de un conjunto de estrategias variopintas y métodos particulares instancias de un esquema organizado sujeto a otra lógica de resolución inspirado en problemas aritméticos. En el ejemplo anterior una manera de resolver, casi mecánicamente –diríase algorítmicamente–, este ejercicio por medio de un razonamiento algebraico sería sumando ambas ecuaciones para con ello obtener que 2 $\mathbb{X}$ = 140. De aquí se deduce que $\mathbb{X}$ = 70 y por consiguiente $\mathbb{Y}$ = 30. Al utilizar un razonamiento algebraico el problema cambia de contexto, en cierta forma dejando de lado la naturaleza o identidad de los objetos abstraídos mediante el lenguaje simbólico, y de paso la guía que empujaba el razonamiento basado en la geometría. Una vez introducidos los símbolos algebraicos y las reglas de su manejo, el proceso de solución se altera y deja de lado las visualizaciones.

El siguiente problema también aparece en el Libro I de la *Aritmética* y es similar al anterior.

Libro 1 Problema 5 [46]

*Descomponer un número dado en dos números de manera que si las fracciones diferentes dadas de cada una de las partes, cuando se sumen, produzcan un número dado.*

*Condición necesaria: el número dado debe siempre ser tal que esté comprendido entre los dos números que se obtienen al tomar las fracciones dadas diferentes del número propuesto al inicio.*

[46] *Ibid.*, p. 11- 12.

*A partir de esto propongamos separar el 100 en dos números de manera que la tercera parte del primero más la quinta parte del segundo sean 30 unidades.*

*Supongamos que la quinta parte del segundo número sea un aritmo, por lo tanto el segundo número es cinco aritmos. Entonces la tercera parte del primero será 30 unidades menos un aritmo, y este primer número será entonces 90 unidades menos tres aritmos. Finalmente queremos que los dos números sumados nos den 100 unidades, o lo que es lo mismo, que los dos números sumados formen dos aritmos más 90 unidades con lo que el total deberá ser igual a 100 unidades. Restemos lo semejante de lo semejante, y entonces las 10 unidades restantes son iguales a dos aritmos, entonces el aritmo será 5 unidades.*

*Regresamos a lo anterior. Habíamos planteado que la quinta parte del segundo número era un aritmo, es decir, 5 unidades; entonces el segundo número será 25 unidades. Resulta que la tercera parte del primer número es 30 unidades menos un aritmo, es decir, 25 unidades. Entonces el primer número será 75 unidades. Con ello se establece que la tercera parte del primer número más la quinta parte del segundo son 30 unidades, y que la suma de los números forma el número propuesto.*

Lo anterior se puede ver de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \mathbb{X} + \mathbb{Y} = 100 \\ \dfrac{\mathbb{X}}{3} + \dfrac{\mathbb{Y}}{5} = 30 \end{cases}$$

donde 100 es el número dado, $(^1/_3)\ \mathbb{X}$, $(^1/_5)\ \mathbb{Y}$ las fracciones diferentes y 30 la suma dada.

Hagamos $\frac{\mathbb{Y}}{5}$ = x, de donde $\mathbb{Y}$ = 5 x

Entonces $\frac{\mathbb{X}}{3}$ = 30 – x de donde $\mathbb{X}$ = 3 (30 – x) = 90 – 3x

Luego, como queremos que $\mathbb{X}$ + $\mathbb{Y}$ = 100.

Entonces $\mathbb{X}$ + $\mathbb{Y}$ = $(90 - 3x)$+ 5x = 90 + 2x = 100.

Restando lo semejante de lo semejante

$90 + 2x - 90 = 100 - 90$

$2x = 10$

$x = 5.$

Entonces $\frac{\mathbb{Y}}{5} = 5$ de modo que $\mathbb{Y} = 25$

Por lo tanto $\frac{\mathbb{X}}{3} = 30 - 5 = 25$ y entonces $\mathbb{X} = 75$.

Esta traducción del ejercicio a un lenguaje simbólico no quiere decir que el razonamiento de Diofanto haya sido de alguna manera algebraico, si bien él comienza igualando una de las cantidades que se pretenden encontrar a un *aritmo*, de tal manera que las expresiones se pueden reducir a una ecuación de primer grado, lo que a su vez le permitirá ilustrar una de sus formas de solucionar los problemas por medio de la manipulación y combinación de los términos semejantes (en donde añadir o restar diferentes tipos de números, en el sentido de la clasificación mencionada en la dedicatoria de la "*Aritmética*", no le causa ningún conflicto). Reducir a ecuaciones la solución de los problemas que plantea Diofanto ciertamente lleva a usar reglas acordadas en la constitución del álgebra, y por consiguiente es un método que se adapta a cada tipo de problema. No obstante, en la *Aritmética* no existe una clasificación explícita de problemas, como analizaré posteriormente en este trabajo.

Además de lo anterior, el ejercicio 5 contiene la primera de muchas condiciones necesarias para establecer la solución de un problema, debido principalmente a que para Diofanto lo que para nosotros son los números irracionales y los negativos no pueden tener sentido como solución.

El siguiente problema presenta un sistema de ecuaciones en el cual el número de incógnitas es mayor a la cantidad de ecuaciones que se pueden establecer a partir del planteamiento del problema. Esto es lo que constituye un sistema indeterminado de ecuaciones.

Libro 1, Problema 27: [47]

*Encontrar dos números tales que su suma y su producto sean números dados.*

*Hace falta que el cuadrado de la semisuma de los números que se quieren encontrar exceda en un cuadrado el producto de estos números; cosa que por otra parte es figurativa.*

*Proponemos entonces que la suma de los números sea veinte unidades y que su producto sea noventa y seis unidades.*

*Que el excedente de los números sea dos aritmos. Entonces dado que la suma de los números es veinte unidades, si la dividimos en dos partes iguales entonces cada una de las partes será la mitad de la suma o diez unidades.*

*Ahora, si le añadimos a una de las partes y quitamos de la otra parte la mitad del excedente de los números, es decir, un aritmo, se establece de nuevo que la suma de los números es veinte unidades y que lo que le excede son dos aritmos. En consecuencia hagamos que el número más grande sea un aritmo aumentado en 10 unidades que es la mitad de la suma de los números, entonces el número será diez unidades menos un aritmo, y se establece así que la suma de los números es veinte unidades y que lo que la excede son dos aritmos.*

*Es necesario también que el producto de los números sea 96 unidades, o que su producto sea 100 unidades menos un cuadrado de aritmo; esto lo igualamos a 96 unidades, y el aritmo queda como 2 unidades. Como consecuencia el número más grande es 12 unidades, el más pequeño 8 unidades y ambos números satisfacen la proposición.*

[47] *Ibid.*, p. 36- 38.

La siguiente interpretación algebraica del procedimiento se debe a Ver Eecke, quien presenta el siguiente sistema de ecuaciones como la traducción algebraica del problema:

$$\begin{cases} \mathbb{X} + \mathbb{Y} = 20 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots I \\ \mathbb{X}\mathbb{Y} = 96 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . II \end{cases}$$

Tomemos a $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ tales que $\mathbb{X} - \mathbb{Y} = 2x$ dado que $\frac{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}{2} = 10$ satisface la ecuación I, si tomamos a $\mathbb{X} = x + 10$, de donde resulta que $\mathbb{Y} = 10 - x$. Ahora si tomamos la ecuación II resulta que $(x + 10)(10 - x) = 96$ o, como lo señala el texto, esto se puede escribir en términos algebraicos como $100 - x^2 = 96$, es decir, $x^2 = 4$, de donde se deduce que $x = 2$ y que $\mathbb{X} = 12$ y $\mathbb{Y} = 8$. Estos valores satisfacen la proposición 27 y se ajustan a la condición $\left(\frac{12+8}{2}\right)^2 - 12 \times 8$ = número cuadrado 4.

Este problema y su solución no son originales pues problemas semejantes o equivalentes ya eran trabajados entre los babilonios. Su transmisión al plano griego es fácilmente explicable si se toma en cuenta a las posibilidades comerciales que se abrieron entre la Grecia clásica y las culturas orientales, desde las afincadas en tierras cercanas a los antiguos territorios griegos en la costa de Asia Menor hasta los confines occidentales de la India, pasando por los imperios persas y semitas ubicados en medio. Tras la conquista de Alejandro Magno se dio una época de extraordinario intercambio cultural, y en particular las matemáticas griegas recibieron la influencia de las matemáticas egipcias y mesopotámicas. Existe evidencia de que las técnicas geométricas utilizadas por estas civilizaciones se transmitieron a Grecia y eventualmente al mundo del islam. De ahí que Diofanto no fuera el primero en proponer una forma de resolver esta clase de problemas. Como se muestra en el capítulo anterior de esta tesis, el problema 25 de las tablas BM 85200 + VAT 6599 recoge un problema similar. En aquella ocasión los escribas anotaron un algoritmo que se basaba en una construcción geométrica para determinar la longitud, que en este caso sería $\mathbb{X}$, y la anchura $\mathbb{Y}$ de un rectángulo, con área $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ y suma de la longitud y anchura $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ dadas.

Considerando lo anterior, el autor de la *Aritmética* siguió un proceso similar al de los babilonios para resolver el problema, en el sentido de que para definir el valor $\mathbb{X} - \mathbb{Y}$ = 2x primero consideró uno de los valores ya conocidos $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$, y probablemente basándose en el hecho de que $\frac{(\mathbb{X}+\mathbb{Y})}{2} + \frac{(\mathbb{X}-\mathbb{Y})}{2} = \mathbb{X}$ y $\frac{(\mathbb{X}+\mathbb{Y})}{2} - \frac{(\mathbb{X}-\mathbb{Y})}{2} = \mathbb{Y}$, ya establecido en el método babilonio, así probablemente Diofanto eligió este valor debido a que éste le permitía manejar con mayor facilidad los valores del problema.

Aunado a lo anterior ocurre que este problema también se puede hallar en esencia en los *Elementos* de Euclides, donde aparece como la proposición 14 del Libro II. A continuación, para contrastar, se muestra dicha proposición así como su demostración.

Proposición II.14 [48]

*Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.*

*Así pues, hay que construir un cuadrado igual a la figura rectilínea A,*

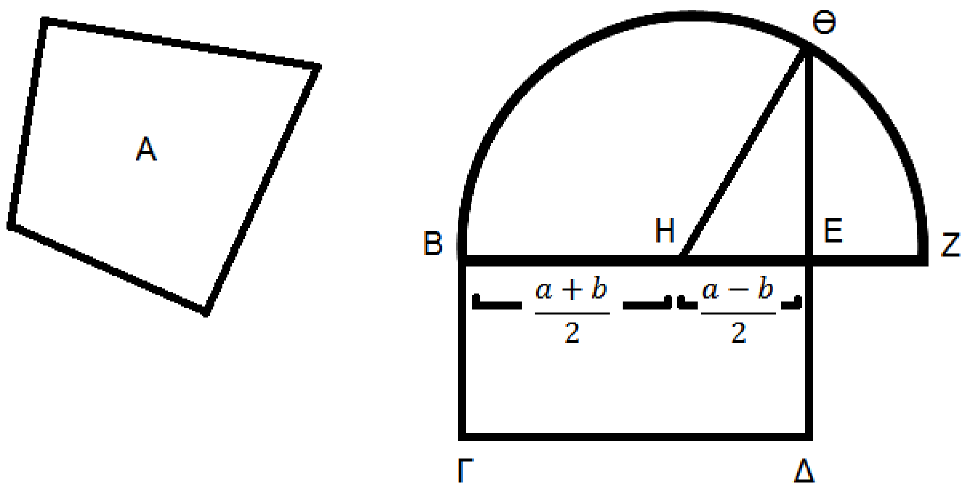



**Figura 3.**

*Constrúyase, pues, el paralelogramo rectángulo BΔ igual a la figura rectilínea A. Entonces, si BE es igual a EΔ, se habrá hecho lo propuesto:*

[48] Euclides (1991), *Euclides Elementos Libros I- IV*, pp. 288- 289.

*porque se ha construido el cuadrado BΔ igual a la figura rectilínea A; pero si no, una de las (rectas) BE, EΔ es mayor.*

*Sea mayor BE y prolónguese hasta Z, y hágase EZ igual a EΔ, y divídase en dos partes iguales BZ en H, y con el centro H y una de las (rectas) HB o HZ como distancia, descríbase el semicírculo BΘZ y prolónguese ΔE hasta Θ y trácese HΘ.*

*Así pues, como la recta BZ ha sido cortada en partes iguales en H y en desiguales en E, entonces el rectángulo comprendido por BE, EZ junto con el cuadrado de EH es igual al cuadrado de HZ. Pero HZ es igual a HΘ; por tanto, el (rectángulo comprendido) por BE, EZ junto con el (cuadrado) de HE es igual al (cuadrado) de HΘ. Pero los cuadrados de ΘE, EH son iguales al (cuadrado) de HΘ. Por lo tanto el (rectángulo comprendido) por BE, EZ junto con el (cuadrado) de HE es igual a los (cuadrados) de ΘE, EH. Quítese de ambos el cuadrado de HE; entonces el rectángulo restante comprendido por BE, EZ es igual al cuadrado de EΘ.*

*Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por BE, EZ es BΔ; porque EZ es igual a EΔ; por tanto, el paralelogramo BΔ es igual al cuadrado de ΘE. Pero BΔ es igual a la figura rectilínea A. Luego A es igual al cuadrado que puede formarse a partir de EΘ.*

*Por consiguiente se ha construido un cuadrado, el que puede formarse a partir de EΘ, igual a la figura rectilínea dada A. Q. E. F.*

En términos algebraicos el problema anterior se puede traducir en la siguiente expresión $x^2 = ab$, donde $a$ corresponde al segmento $BE$ y $b$ al segmento $E\Delta$, en la figura 3.

Para demostrar esta proposición Euclides necesitó de la proposición 5 del Libro II de los *Elementos,* que dice lo siguiente:

*Si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera junto con el cuadrado de la (recta que está) entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.* Esto se puede escribir por medio de la ecuación:

$$ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

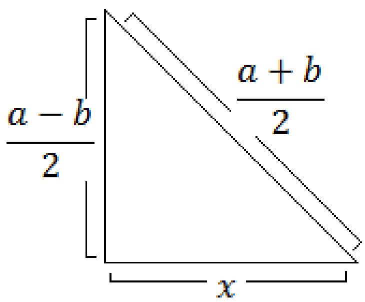
Como se puede ver, Euclides se encontraba ante un problema similar al de Diofanto. ¿En qué sentido? Euclides conocía el área de la figura rectilínea dada puesto que conocía la medida de los lados, $a$ y $b$. Por consiguiente sabía cuánto valía $(a + b)$ y por ende $\left(\frac{a+b}{2}\right)$; además de esto contaba con la proposición II. 5 del mismo Libro y con la que uno puede obtener las siguientes expresiones:

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Y por consiguiente

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

En consecuencia, para encontrar el cuadrado cuya área sea igual al área de la figura dada, es necesario recurrir al teorema de Pitágoras.




Del cual se obtiene la expresión $x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Entonces lo único que falta es saber cuánto vale $\left(\frac{a-b}{2}\right)$, lo cual es sencillo, pues Euclides solo necesitó colocar las medidas del rectángulo sobre una línea recta, de modo que como $a = BE$ colocó $b = EZ$, pues $E\Delta = EZ$ por construcción y sobre esa línea encontrar y marcar el punto medio $H$.

De este modo se tiene que $\left(\frac{a+b}{2}\right) = BH$, y como $BH = HZ$ y $EZ = b$, resulta que $HZ - EZ = \left(\frac{a+b}{2}\right) - b = \left(\frac{a-b}{2}\right) = HE$, por lo que una vez que se obtiene $\left(\frac{a-b}{2}\right)$ de ahí se deduce a qué corresponde $x^2$.

Como se puede ver, la forma en que se resuelve el ejercicio es diferente en cada uno de estos casos. A diferencia de los métodos que surgen de un contexto geométrico, empleados por los escribas y por Euclides, las demostraciones de las proposiciones en la *Aritmética* ya no son motivadas por elementos geométricos como líneas, cuadrados o rectángulos. Lo que hace Diofanto es basar sus líneas de razonamiento en un enfoque numérico, recurriendo a encontrar dos números independientemente de algún tipo de construcción o correspondencia geométrica.

En los problemas tratados hasta ahora se pueden apreciar las diversas herramientas matemáticas desarrolladas y expuestas[49] por el autor de la *Aritmética* en función de las necesidades de cada problema. Y sin embargo, no parece ser un propósito de este texto establecer la existencia de métodos generales de resolución de problemas. Las razones de ello pueden ser múltiples, desde la carencia de un espíritu de conservación de este tipo de información[50] 'intelectual', la precariedad del material en que se trabajaba, i.e., madera, cera, etc. Esta ausencia de estandarización de los problemas se hace evidente al observar cómo cada pregunta requiere de un método bastante específico, el cual con frecuencia no sirve incluso para otros problemas estrechamente relacionados con los ya resueltos. Asimismo, la existencia de diferentes soluciones para un mismo problema apunta a que Diofanto no clasificaba sus problemas (como hoy se clasifican en los libros de álgebra más avanzados) y por consiguiente no establece estrategias generales para cada uno de los nichos que se definirían según el método de solución propio de los

[49] No es posible saber qué tanto es contribución original en tanto que no hay suficientes vestigios de este tipo de problemas previo a la aparición de los textos de Diofanto

[50] Lo que no tendría sentido argumentar es remitirlo a una falta de visión acerca de la importancia de los métodos generales en la solución de problemas matemáticos, pues si una cosa mostraron Euclides, Arquímedes y Apolonio, por mencionar los más conspicuos, es la búsqueda de métodos generales y de resultados encadenados que llevaran al establecimientos de las verdades matemáticas.

problemas que caían en ellos. Y no era el caso de que estuviera generando diferentes formas solución para los distintos problemas que constituían el contenido de un nicho. Esta observación no pretende menospreciar el hecho de que el orden en que presenta los problemas responde a una evidente claridad sobre los niveles de dificultad de las soluciones.

En ocasiones la facilidad con que se resuelve un problema depende del simbolismo y el manejo al que sus elementos se prestan. Una vez que esta mancuerna alcanza un cierto nivel, la problemática y los propósitos de este entramado matemático pueden evolucionar y plantearse preguntas no contempladas en los orígenes de la disciplina y ello puede llevar a que los enfoques de resolución de problemas también sufran cambios, las más de las veces para facilitar tanto la solución como para entender el problema bajo una perspectiva más general. Bajo este enfoque se puede afirmar que los planteamientos diofantinos, a saber, la problemática, las abreviaturas y ligaduras que aparecen en la *Aritmética*, contrastados con la matemática de los siglos XVII y XVIII, por no mencionar la que viene después, no pueden considerarse como elementos de un lenguaje matemático bien desarrollado. Al respecto Euler decía: "*en el tiempo de Diofanto el uso de letras para denotar números desconocidos no estaba bien establecido y consecuentemente las soluciones más generales que ahora nosotros habilitamos para dar el significado de tal notación no pueden ser esperadas de él*".[51] La notación utilizada en la *Aritmética* se puede considerar como un estado intermedio entre el álgebra retórica (en la cual se usa el lenguaje escrito y no existen abreviaturas o símbolos) y el álgebra completamente simbólica, que es más parecida al álgebra que se utiliza hoy día.

Con la creación del álgebra simbólica la humanidad fue capaz de elaborar un lenguaje matemático autónomo, con el cual no solo era posible establecer cierto tipo de problemas de manera clara y concisa, además de demostrar teoremas con una mayor claridad conceptual y ahorro intelectual en los razonamientos, sino que además se podrían expresar o exhibir con nitidez

[51] Heath (1910), *Diophantus of Alexandria*, p 56.

los pasos que conducen a la solución del problema o la demostración del teorema.

Un antecedente en la revolución que condujo a la aparición del álgebra simbólica fue el texto de François Viète titulado *In Artem Analycitem Isagoge* (*Introducción al arte analítico*), publicada en 1591, y es la primera obra en la que de manera sistemática se utilizan letras para representar incógnitas y parámetros que constituyen una ecuación algebraica. Es el inicio de la presentación del álgebra como una axiomática de cálculos literales y como un «método para inventar bien en matemáticas».

Esta álgebra simbólica tiene sus antecedentes inmediatos en el Renacimiento, con los llamados libros de ábaco, obras elaboradas la mayoría como manuales para ser utilizadas en las escuelas de ábaco, donde se instruía a los orfebres, pintores, arquitectos, comerciantes, etc., todos aquellos que necesitaban de las aplicaciones de las matemáticas, fuera por sus contenidos geométricos fuera por sus métodos de cálculo mercantil. No obstante, para alcanzar esta etapa fue necesaria la transición del 'álgebra' que se empleó en la "*Aritmética*" al 'álgebra' de los árabes. Esta última estuvo marcada por los trabajos de Al-Khwarizmi, textos en los que se plantean, por primera vez, métodos más o menos generales para lidiar con problemas de cierto tipo. Esto será el contenido del siguiente capítulo.

## CAPITULO 3. AL-KHWARIZMI Y EL *KITĀB AL-MUKHTASAR FĪ HISĀB AL-JA'OR WA'L-MUQĀBALA* O *KITĀB AL-JABR WA'LMUQĀBALA* (*LIBRO DE RESTAURACIÓN Y OPOSICIÓN*).

### 3. 1.- Antecedentes:

Tras la propagación del Islam como nueva religión y la consolidación de la conquista de Mahoma sobre los pueblos del Medio Oriente, surgió una nueva civilización, estableciendo en Damasco su capital y trayendo consigo una transformación en el análisis y comprensión de diversas áreas del saber, destacando entre ellas las relacionadas con el campo de las matemáticas. Como se ha visto a lo largo de la historia, las matemáticas al igual que muchas otras ciencias han llevado sus investigaciones más allá de las aparentes necesidades inmediatas de la sociedad. Tal fue el caso de la matemática árabe que destacó tanto en las aplicaciones como en los desarrollos teóricos de las matemáticas, pudiéndose constatar que la mayoría de los matemáticos islámicos contribuyeron tanto a la teoría como a los usos prácticos de sus aportaciones.

Tras la división del califato de Damasco y el surgimiento de los califatos de Bagdad, El Cairo y Córdoba, varios de sus gobernantes se preocuparon por impulsar el desarrollo y la preservación de los nuevos saberes y de los heredados de la antigua Grecia. Uno de los gobernantes que más destacaron en esta labor fue el califa al-Mansur, el cual fundó en Bagdad (c. 762) una nueva ciudad, más tolerante y abierta a nuevas ideas, y en poco tiempo se convirtió en un floreciente centro comercial e intelectual, en el que el conocimiento adquirido, tuviera un fin práctico o no, era altamente valorado. Esto tenía connotaciones religiosas dado que los seguidores de Mahoma pensaban que preservar y transmitir el conocimiento era un requerimiento de Alá, de modo que toda persona que mostrara algo de talento y creatividad era animada y apoyada por el gobierno para proseguir sus estudios o dedicarse a la enseñanza y la investigación. Un sucesor de al-Mansur, el califa Harún al-Rashid, quien gobernara del 786 al 809, comenzó un programa de traducción de manuscritos de diferentes lenguas al árabe. Entre estos textos se encontraban, como ya se mencionó, los principales trabajos clásicos de la antigua Grecia, muchos de los cuales eran de carácter científico. Le sucedió el califa al- Ma`mun, quien estableció una biblioteca llamada *La casa de la sabiduría* y en la que los manuscritos eran almacenados para ser copiados y traducidos. Gracias a estos traductores nos han llegado versiones en árabe de los trabajos de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Diofanto y otros matemáticos más.

Los eruditos islámicos adoptaron en sus obras rasgos distintivos de los trabajos matemáticos griegos, los cuales influyeron y de cierta manera obligaron a los matemáticos árabes a justificar sus procedimientos de demostración o de generación de soluciones de los problemas que se proponían resolver. La lectura de los textos preservados y/o producidos en lengua árabe muestra el uso extendido de demostraciones geométricas aún para problemas cuya naturaleza no era propiamente geométrica. Este último es el caso de gran parte del material que aparece en los escritos de *al jabr*, que luego serían llamados algebraicos gracias a la transliteración del término árabe que significaba, literalmente, acomodo o recomposición, lo que hace el médico al reacomodar en su sitio los huesos que han sido fracturados o dislocados. Fue así como los matemáticos islámicos se dieron a la tarea de justificar sus reglas 'algebraicas' a través de la geometría. El personaje que la historia rescata como el iniciador de esta rama o enfoque de las matemáticas fue Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, autor del famoso *Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala Kitab al-jabrwa* (Libro de cálculo por reintegración [reducción, restauración, restitución] y comparación [balance]). Esta obra, con el paso del tiempo, fue referida las más de las veces como el *Libro de álgebra*.

## 3. 2.- Introducción:

Este capítulo analizará el desarrollo y la evolución del álgebra en el mundo islámico, en el cual inicia la transición de la etapa geométrica y aritmética, de uso más o menos extendido en Mesopotamia y Grecia, a una matemática que recurre primero al uso de símbolos como forma abreviada de representación, al uso de estos para generar información de manera más económica y despojada de la necesidad de la demostración.

Tomando como base *El libro de álgebra* de al-Khwarizmi se estudiará la generalidad de los procedimientos empleados en él para resolver diferentes problemas, así como la clasificación de los mismos y la identificación de estos con las ecuaciones que de manera natural se les asocian. Escrito entre 813 y 830, el texto refleja el resultado de siglos de depuración de las prácticas de solución de problemas iniciadas en Mesopotamia, Grecia y Egipto, a las que se sumaron las contribuciones de la matemática hindú. Como veremos, destaca el uso de justificaciones un tanto intuitivas basadas en la geometría y que recuerdan los procedimientos seguidos en Mesopotamia, pero enriquecidos con el uso de un lenguaje capaz de manejar tanto términos geométricos como aritméticos, pero sin asumir un tipo de notación equivalente o semejante a la utilizada en la *Aritmética* de Diofanto.

El libro de al-Khwarizmi fue traducido al latín por Gerardo de Cremona, prolífico autor a quien también se debe la traducción de otras obras de referencia de la matemática griega, como los *Elementos* de Euclides. En árabe la única copia que se posee está depositada en una biblioteca de la Universidad de Oxford y está fechada en 1361. Esta copia fue la base de la traducción al inglés de Edward Rosen, quien sin ser matemático de profesión sí era un experto en lengua árabe, y en 1831 publicó la primera versión en un idioma moderno del *al Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala* y le llamó simplemente *The algebra of Mohammed ben Musa*.[52] En castellano, usualmente, es llamado *El libro de álgebra*. Que en lugar de usar la palabra 'restauración' se haya recurrido a la transliteración de *al-jabr* y se haya elegido usar 'algebra' (en latín) es una decisión que tomó Gerardo de Cremona en su traducción al latín de esta obra, y como tal se extendió su uso y alcanzó al Renacimiento, y de ahí que todo lo que llegó a comprender el avance y añadidos a esta tradición de solución de problemas haya quedado comprendido bajo el nombre de 'álgebra'. [53]

Pasemos ahora a describir el contenido y el estilo del escrito de al-Khwarizmi sobre 'la restauración y el balance' de las cantidades a las que se refiere un problema.

[52] Rosen, 1831. *The algebra of Mohammed Ben Musa.* https://archive.org/details/algebraofmohamme00khuwuoft
[53] Ver Puig (2009), Historias de al-Khwārizmī p. 107.

### 3.3.- El *libro de álgebra de mohammed ben musa*. contenido y problemas:

A pesar de las intenciones de al-Khwarizmi de escribir un manual que sirviera como herramienta para resolver problemas prácticos relacionados con asuntos legales, transacciones comerciales, herencias y problemas aritméticos, al-Khwarizmi, en la parte preparatoria, propiamente matemática, terminó por redactar más bien un manual teórico, en donde la mayoría de los problemas eran abstractos, aunque con un tinte de estarse ocupando de aplicaciones.[54] Este trabajo fue el primero en la historia en el que aparece el origen del término "algebra", siendo éste la palabra *al-jabr*, que significa 'restauración', y que transliterada sirvió para "eventualmente" designar una nueva disciplina: el álgebra.

El *Libro de álgebra* está compuesto de tres partes: i) una dedicada a cuestiones reducibles a nuestra noción moderna de álgebra, y que se puede decir que trata de la resolución de ecuaciones –si tal cosa hubiera sido planteada en los términos simbólicos y de reacomodo de cantidades en una expresión que se constituye mediante símbolos para las cantidades y las operaciones que se realizan con ellas, y que es la parte que nos interesa; ii) otra de carácter geométrico, muy elemental, y iii) una más con problemas testamentarios, muy complicada debido en gran parte a nuestro desconocimiento de las normas que guiaban las disposiciones respecto de herencias y códigos mercantiles en el mundo árabe.

En las secciones que siguen trataremos exclusivamente los temas algebraicos, los de la primera sección del texto de al-Khwarizmi. Inicia especificando qué es lo que va a entender por número y los tipos de números que existen. De inmediato pasa a ocuparse de la materia de lo que hoy llamaríamos ecuaciones algebraicas de segundo grado, es decir, ecuaciones cuadráticas. Para ello define una serie de términos, señalando que generalmente aparecen tres tipos de cantidades[55] con las que tratar en sus diferentes problemas. Éstas son: '*la raíz*' que es la cantidad vinculada con el

[54] Califico como 'tinte' los esfuerzos por maquillar como aplicaciones la presentación de los problemas por ser estas aplicaciones tan elementales que solo parecen reflejar un pretexto para modelar ciertas situaciones a las que se pueden reducir problemas reales.

[55] Rosen (1831), *The Algebra of Mohammed Ben Musa*, p. 6.

cuadrado, y a la que se designa con el término “*jidhr*”, y que se define como: *cualquier cantidad que ha de ser multiplicada por sí misma.*

Luego está ‘*el cuadrado*’, que lo designa con el término ‘*māl*’ Se define como *la cantidad total de la raíz multiplicada por sí misma.* Y por último ‘*el número simple’*, es decir, la cantidad constante, y la llama ‘*adad mufrad’.* La define como *algún número que pueda ser pronunciado sin hacer referencia a la raíz o al cuadrado*. Este conjunto de términos representa un cambio en la naturaleza del análisis de la disciplina, ya que estos permiten hacer una traducción sin distinción de términos geométricos o aritméticos.

Usando como principio básico esta naciente terminología al-Khwarizmi reduce los diferentes tipos de problemas abordados en su libro a seis clases. Éstas las identifica tomando en cuenta las posibles combinaciones de los términos ya mencionados, y constituirán las bases de este nuevo estudio. Estos diferentes tipos de problemas pueden ser vistos o traducidos en términos actuales presentándolos según se reduzcan a una u otra de las siguientes ecuaciones, de las que solo se analizarán las tres últimas. Lo que hace al-Khwarizmi es presentar el problema y acto seguido dar instrucciones sobre qué operaciones realizar con los valores de las cantidades dadas y con ello encontrar el valor de la cantidad desconocida y cuya determinación es el objeto del problema. Evidentemente, deducir el valor de la cantidad desconocida en los tres primeros casos es muy sencillo puesto que se logra realizando operaciones elementales siguiendo una lógica también muy básica. Es por ello que al-Khwarizmi solo se ocupa de los tres últimos casos.

1.- $ax^2 = bx$.

2.- $ax^2 = c$.

3.- $bx = c$.

4.- $ax^2 + bx = c$.

5.- $ax^2 + c = bx$.

6.- $bx + c = ax^2$.

Dado que el planteamiento es obtener resultados que correspondan a situaciones 'reales' –aunque fueran idealizaciones de problemas concretos–, la solución de estos problemas excluía la posibilidad de obtener resultados que no fueran valores positivos. Esto también es el efecto, en parte, del tratamiento o justificación geométrica que acompañaba, en una segunda etapa de la presentación de al-Khwarizmi, a los 'algoritmos' verbales que conducían a la solución.

El poder persuasivo o epistémico de la geometría se puede apreciar en los párrafos siguientes, en los que presento cómo aborda el autor del *Libro de álgebra* las diferentes situaciones a las que dan lugar los problemas cuadráticos. El primer caso es emblemático pues las cifras que incurren en él siguieron siendo utilizadas hasta bien entrado el Renacimiento –siete siglos de ser copiado el problema sin cambiar las cifras involucradas–, cuando todavía Luca Pacioli las sigue copiando.

El problema en cuestión es del tipo $ax^2 + bx = c$ y su solución la expresa primero en forma retórica y luego ofrece una justificación geométrica de las operaciones que instruyó a seguir previamente. El primer problema de la segunda clase, a la que describe como aquélla en la que hay que 'dividir por dos las raíces' –más adelante se verá la razón de ello–, en la que se combinan cuadrados, raíces y números, es el que viene a continuación, y hago notar que estoy respetando la forma verbal como lo presenta:

*"Raíces y cuadrado son iguales a números"*

Por ejemplo "*un cuadrado y diez raíces de la misma cantidad iguales a treinta y nueve dírhems*"[56] ($x^2 + 10x = 39$) es decir, *¿cuál debe ser el cuadrado que, cuando se incrementó en diez de sus propias raíces, produce treinta y nueve? La solución es ésta: divide a la mitad el número de raíces, que en el presente ejemplo da cinco.*

*Esto lo multiplicas por sí mismo; el producto es veinticinco. Añade esto a los treinta y nueve; la suma es sesenta y cuatro. Ahora toma la raíz de esto, la*

[56] Rosen (1831), *The Algebra of Mohammed Ben Musa*, p. 8.

*cual es ocho, y sustrae de él la mitad del número de las raíces, que es cinco; lo que queda es tres. Ésta es la raíz del cuadrado que tú buscabas; su cuadrado es nueve.*

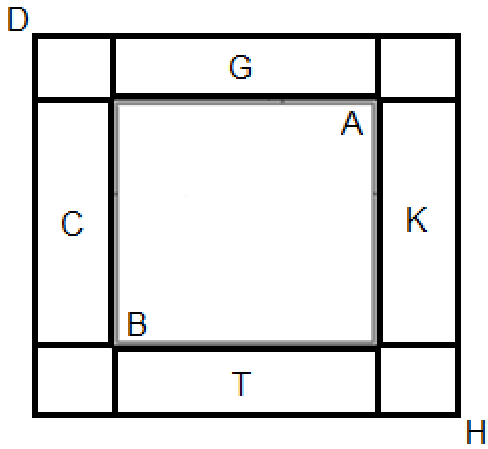
En los párrafos siguientes señala cómo proceder cuando el llamado cuadrado consiste en realidad en varios cuadrados y que se traduce en reducir el caso al de un solo cuadrado, para lo cual hay que escalar también proporcionalmente en los valores de los demás términos participantes. Pasa luego a establecer cómo se resuelven los otros dos casos –que veremos más adelante- de los seis que planteó, y en la siguiente sección presenta las justificaciones geométricas de las soluciones retóricas.

CASO 1. La primera justificación se ocupa del caso que denomina 'cuadrado más raíz igual a número', i.e., $ax^2 + bx = c$. Hela aquí, respetando hasta donde es posible, la sintaxis –sobre todo lo repetitivo– de la construcción en la versión inglesa de Rosen:

*Demostración del caso: "Un cuadrado y diez raíces son iguales a 39 dirhems"* [57]

*La figura para explicar esto es un cuadrado, los lados del cual son desconocidos. Eso representa el cuadrado, el cual, o la raíz del cual, deseas conocer. Ésta es la figura A B, cada lado de la cual puede ser considerado como una de sus raíces; y si tú multiplicas uno de estos lados por algún número, entonces la cantidad de ese número puede ser vista como el número de raíces que se suman al cuadrado.*

[57] Rosen (1831), *The Algebra of Mohammed Ben Musa*, p. 13.




*Cada lado del cuadrado representa la raíz del cuadrado; y, como en el ejemplo las raíces están vinculadas con el cuadrado, podemos tomar un cuarto de diez, es decir, dos y una mitad, y combinar eso con cada uno de los cuatro lados de la figura. Así con el cuadrado original A B, cuatro nuevos paralelogramos se unieron, cada uno teniendo un lado del cuadrado como su longitud y el número dos y un medio como su anchura; estos son los paralelogramos C, G, T, y K. Tenemos ahora un cuadrado con lados iguales, aunque desconocidos; pero en cada uno de las cuatro esquinas falta una pieza dos y un medio multiplicado por dos y un medio. Con el fin de compensar estos faltantes y completar el cuadrado, debemos añadir, además de lo ya añadido, cuatro veces el cuadrado de dos y un medio, eso es, veinticinco. Sabemos que la primera figura, a saber, el cuadrilátero que representa el cuadrado, junto con los cuatro paralelogramos alrededor, que representan las diez raíces, resultan igual a el número treinta y nueve. Si a este le añadimos veinticinco, que es el equivalente de los cuatro cuadrados en las esquinas de la figura A B con los que se completa la figura grande D H, entonces sabemos que todo esto junto vale sesenta y cuatro. Uno de los lados de este cuadrado grande es su raíz, eso es, ocho. Si le restamos dos veces un cuarto de diez, es decir, [restamos] cinco de ocho, como si se hiciera de los dos extremos de los lados del cuadrado grande DH, entonces lo que queda de tal lado será tres, y esa es la raíz del cuadrado, o el lado de la figura original A B. Debe ser observado que hemos tomado la mitad del número de las raíces, y esta mitad multiplicada por sí misma la hemos añadido al número treinta y nueve, para así completar la* *figura grande en sus cuatro esquinas; esto debido a que la cuarta parte de cualquier número multiplicada por sí misma, y luego por cuatro, es igual al producto de la mitad de ese número multiplicada por sí misma; en función de ello multiplicamos solo la mitad de las raíces por sí mismas, en lugar de multiplicar su cuarta parte por sí misma y luego por cuatro.*

A lo largo del desarrollo del álgebra, tanto la aritmética como la geometría jugaron un papel fundamental guiando su curso. Como se vio en los capítulos anteriores, la geometría fue una de las disciplinas que sirvieron de inspiración para configurar, probar y explicar diferentes reglas para resolver problemas. Igual ocurrió en el caso de la obra de al- Khwarizmi.

Para analizar el razonamiento detrás de la resolución del problema hay que tomar en cuenta que algunas magnitudes que participan en ella, ya sea que se trate de longitudes, anchuras o áreas, están determinadas por cantidades específicas, es decir, sus medidas son conocidas, y por ello todas las operaciones que se llevan a cabo para obtener la cifra que constituye la solución, están relacionadas con las medidas de magnitudes geométricas. Esto contrasta con las demostraciones que aparecen en los *Elementos* de Euclides, donde los objetos de estudio se conciben únicamente como magnitudes y no como las medidas de entes geométricos. Teniendo en mente lo anterior, el conocer las dimensiones de las figuras permite a su vez hacer un reacomodo de las mismas, el cual hace posible, por medio de la construcción de una nueva figura, la solución del problema. Es posible que esta forma de resolver problemas haya sido justamente la que se utilizó en el ejercicio anterior, en el que si se empieza por considerar un rectángulo formado por el cuadrado A B, de lado $x$, y un rectángulo de altura igual a los lados del cuadrado, pero con base igual a 10, y se sabe que la suma de sus áreas es igual a treinta y nueve *dírhems,* se plantea cuál será el valor del lado del cuadrado inicial. Es inmediato darse cuenta de la semejanza del problema y de su solución con problemas que ya aparecían en la cultura babilonia, y donde además se resolvían con procedimientos geométricos similares. En Mesopotamia se procedía literalmente a '*completar el cuadrado'* para resolver el problema.

Supóngase el mismo problema de al- Khwarizmi que acabamos de revisar. Divídase en cuatro la base de 10 unidades del rectángulo, formando así cuatro rectángulos (que serán los *cuatro nuevos paralelogramos* G, K, T, C mencionados en la demostración geométrica, pero ahora aparecen según la figura siguiente), mismos que tendrán altura *x* y base $\frac{10}{4}$:

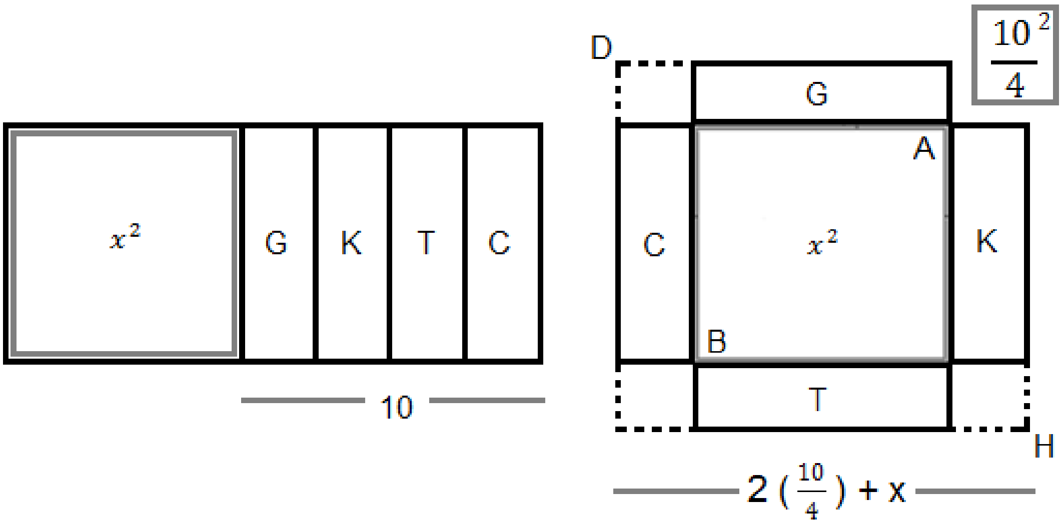



**Figura 4.** Construcción geométrica del ejemplo correspondiente a la ecuación $x^2+10x=39$ modificada de al-Khwarizmi [58] y Charbonneau.[59] En la que se muestra el procedimiento geométrico a seguir para la solución del problema.

Acto seguido estos cuadrados son desplazados de tal manera que cada uno quede junto a uno de los 4 lados del cuadrado de área desconocida $x^2$. Con ello se forma una figura en forma de cruz, la cual sigue conservando el área –39– del rectángulo. De esta manera, para averiguar cuál es el valor de *x* solo falta completar el área del cuadrado grande de lados $\left(\frac{10}{2}+x\right)$ añadiendo las áreas de los cuatro cuadrados pequeños, es decir $39+4\left(\frac{10}{2}\right)^2$. Este razonamiento, así como la regla que se obtiene de la resolución de esta clase de problema, se puede traducir de manera general de la manera siguiente, tomando a $b = 10$ y $c = 39$:

[58] Rosen (1831), *The Algebra of Mohammed Ben Musa*, p. 15.
[59] Charbonneau (1996), *From Euclides to Descartes: Algebra And Its Relation To Geometry*, p. 27. en *Approaches To Algebra Perspectives for Reseach and Teaching*, editado por Bednarz N., Kieran C. y Lee L.

Sea $x^2 + bx = c$ entonces

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$x = \pm\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$$

Sin embargo, no hay que olvidar que una de las principales características de lo que se entiende por álgebra después de Viète es su autonomía, es decir, que una característica de una disciplina que se identifica plenamente como tal es su autosuficiencia en cuanto a la que considera como una demostración o solución válida en el seno de su ámbito de acción. Desde esta perspectiva es importante señalar que si bien al-Khmarizmi presentó una amplia variedad de ejemplos en su manual, con demostraciones muy claras, éstas con frecuencia apelaban a la identificación de las magnitudes con los elementos de una figura geométrica y a partir de ello discurría sobre la figura y sus posibilidades de recomposición.

Con plena confianza se puede afirmar que las matemáticas medievales y las que se practicaban en los territorios árabes apelaban a la justificación/demostración geométrica debido a la influencia de la geometría de Euclides, donde todas las proposiciones eran demostradas con apego a los cánones aristotélicos de rigor lógico. Y sin embargo, lo que presenta al-Khwarizmi no se rige estrictamente por los resultados consagrados explícitamente en los *Elementos*. Con todo, las figuras a las que recurre y los argumentos a los que dan lugar se podrían construir y justificar fácilmente con base en razonamientos euclidianos. El autor del *Libro de álgebra* no pretende este nivel de rigor, debido posiblemente a que el público al que va dirigido el texto no suele poseer tal nivel de conocimientos, sin embargo sí puede comprender fácilmente lo que puede ser 'visto de inmediato', lo que desplazamientos intuitivamente claros de partes de una figura pueden generar en cuanto a nuevas correspondencias entre las magnitudes involucradas.

A pesar del énfasis que se ha puesto a lo largo de este trabajo en la parte geométrica, motivado por la idea de seguir una serie de razonamientos que se producen, con similitudes y contrastes, entre varias culturas separadas en el tiempo y el espacio geográfico, si bien con lazos que se extendieron entre ellas, lo cierto es que no todos los razonamientos o algoritmos presentes en las etapas primitivas de formación del pensamiento propiamente algebraico dependían de la geometría. Muchos de los procedimientos descritos en el manual de al-Khwarizmi no tienen necesariamente que contar con una figura geométrica que los represente, y es una lógica sustentada en la intuición matemática la que lo guía. Tal es el caso de los problemas en los que el coeficiente del cuadrado no es uno (por ejemplo el problema "*dos cuadrados y diez raíces iguales a cuarenta y ocho dírhems*"), en el que no aparecen pruebas geométricas dado que le parece que basta con reducir el problema al caso conocido –el que ya analizó previamente y que supone un solo cuadrado–, lo cual logra simplemente con la misma proporción y los valores de las magnitudes dadas.

Esto muestra que la prioridad de al-Khwarizmi no era encontrar las medidas de los lados de un cuadrado, sino más bien mostrar los métodos que permitieran encontrar las cantidades que satisficieran ciertas condiciones. A pesar de todo, aún necesita de dicha justificación en varios de los ejercicios, lo que parece indicar que el desarrollo de esta ciencia todavía no había finalizado; aun así al-Khwarizmi logró establecer un nuevo enfoque en la manera de resolver dichos problemas que, eventualmente, en el siglo XVI, se independizaría de las pruebas geométricas.

Ahora bien, falta discutir otro aspecto esencial del pensamiento algebraico y su ocurrencia en los planteamientos de al-Khwarizmi: las relaciones entre magnitudes y las transformaciones de dichas relaciones. Este tipo de elaboraciones están ausentes en Diofanto y el pensamiento babilónico, a no ser que medie la geometría en el segundo caso. A su vez, las relaciones cuantitativas entre magnitudes en una figura matemática son ajenas a la matemática euclidiana. Y sin embargo el desplazamiento en una expresión de los símbolos que representan magnitudes, otro de los rasgos fundamentales del álgebra, no aparece como tal en Diofanto pues su manera de resolver los problemas es apelando a razonamientos que por complicados que sean responden a una lógica ajustada a cada etapa de su desarrollo. El manejo ciego de operaciones con los símbolos, propio de lo que pudiera decirse representa la base del pensamiento algebraico, no está presente en la Aritmética.

Tomando en cuenta lo anterior cabe preguntarse lo siguiente: ¿qué tipo de argumentación fue la que ocupó entonces al-Khwarizmi para la justificación de sus pruebas?, ¿existe alguna clase de manejo simbólico y de relaciones en el trabajo de al-Khwarizmi?

Hay que tener en cuenta que las relaciones que pueden existir en una disciplina siempre están vinculadas con los objetos de estudio de la misma. Bajo este supuesto es importante precisar la naturaleza de dichos objetos. Como ya se mencionó, la finalidad de la obra era servir como herramienta para explicar problemas que se repetían una y otra vez en el seno de la organización administrativa y las prácticas comerciales del mundo árabe a fines del siglo IX. Es el mismo califa al-Mamun quien le encarga a al-Khwarizmi recoger en un texto dirigido a los ciudadanos comunes y corrientes[60] lo que fuera necesario para lidiar con cuestiones que los hombres necesitan resolver, como lo serían asuntos legales relacionados con herencias y partición de bienes, así como posibles problemas concernientes al comercio, es decir, los objetos de estudio en la obra no estaban del todo definidos. Lo importante es que la problemática admitía ser modelada, en tanto que se ocupaba de magnitudes y relaciones entre éstas, con áreas, longitudes, pesos, etc. Lo único que hacía falta, y esto lo percibe claramente al-Khwarizmi, seguramente basándose en prácticas más o menos establecidas, pero no por escrito en el mundo árabe, de que las relaciones entre magnitudes podían visualizarse reduciéndolas a modelos geométricos y gracias a ello resolverse en términos de una gramática propia de la geometría.

[60] Ver Rosen (1831), *The Algebra of Mohammed Ben Musa* p. viii.

Así, para seguir con esta idea, examinaré un ejemplo del tipo $ax^2 + c = bx$, el segundo que presenta al-Khwarizmi, y que es simplemente una variación en las relaciones que se pueden establecer entre cantidades.

CASO II

*'Cuadrados y números son iguales a raíces'*

Por ejemplo: *Un cuadrado y veintiuno en números son iguales a diez raíces del mismo cuadrado,*[61] es decir, *¿cuál debe ser la cantidad de un cuadrado, que cuando se le agregan veintiún dirhems se convierte en algo equivalente a diez raíces de ese cuadrado?*

Lo que vendría siendo equivalente en términos actuales a la ecuación: $x^2 + 21 = 10x$ Por su parte al-Khwarizmi procede a resolverlo de la siguiente manera:

*Toma la mitad del número de raíces; la mitad es cinco.*

*Multiplica esto por sí mismo; el producto es veinticinco. Sustrae de esto los veintiuno que están unidos con el cuadrado. Lo que queda es cuatro. Extrae su raíz; es dos. Sustrae esto de la mitad de las raíces, que es cinco: lo que queda es tres. Ésta es la raíz del cuadrado que tú requerías, y su cuadrado es nueve. O puedes añadir la raíz a la mitad de las raíces: la suma es siete; ésta es la raíz del cuadrado que buscabas, y el cuadrado mismo es cuarenta y nueve.*

Hoy día lo anterior se puede plantear y generalizar con la ecuación $x^2 + c = bx$, de modo que su proceder sería el siguiente

$$x^2 + c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

[61] Rosen (1831), *The Algebra of Mohammed Ben Musa*, p. 11.

$$x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = bx + \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c\right]$$

$$x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c\right]$$

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c\right]$$

$$x - \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

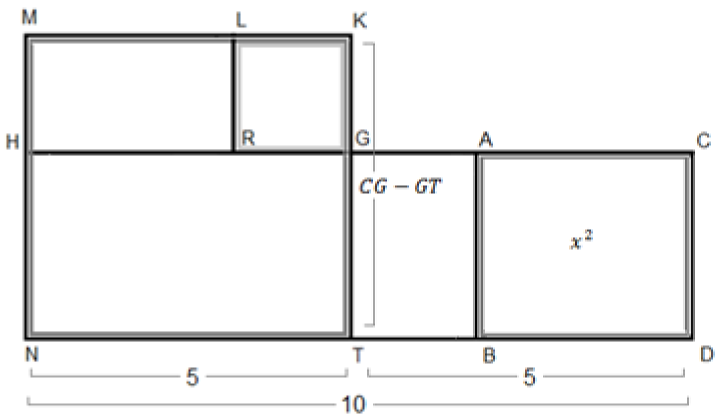
La demostración que más adelante ofrece al-Khwarizmi es la siguiente:

Demostración geométrica:[62] [cuando un cuadrado más veintiún *dirhems* son iguales a diez raíces] *representamos el cuadrado como una superficie cuadrada AD cuyos lados desconocemos. Entonces lo unimos a un paralelogramo HB cuya anchura, HN, es igual a uno de los lados de AD. La longitud de las dos figuras juntas es igual al lado HC. Sabemos que su longitud es diez en número ya que cada cuadrado tiene lados y ángulos iguales, y si uno de sus lados es multiplicado por uno, éste da la raíz del cuadrado, y si por dos, dos de sus raíces. Como se declaró que el cuadrado más veintiuno es igual a diez de sus raíces, podemos concluir que la longitud del lado HC es igual a diez en número, ya que el lado CD representa la raíz del cuadrado. Dividimos ahora la línea CH en dos partes iguales en el punto G. Entonces la línea HG es igual a la línea GC, y también es evidente que la línea GT es igual a la línea CD.*

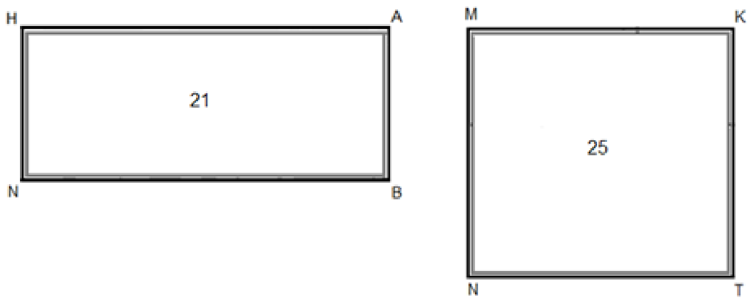
*Entonces extendemos la línea GT a una distancia igual a la diferencia entre la línea CG y la línea GT, para así completar el cuadrado. La línea TK*

[62] Rosen (1831), *The Algebra of Mohammed Ben Musa*, pp.16- 17.

*pasa entonces a ser igual a la línea KM, y tenemos ahora un nuevo cuadrado MT de lados y ángulos iguales.*




*Sabemos que la línea TK es igual a cinco, y por ende es también la longitud de los otros lados. La superficie del cuadrado es veinticinco, obtenida de la multiplicación de la mitad de la raíz por sí misma y puesto que cinco por cinco es igual a veinticinco. Sabemos que la superficie HB es el veintiuno que se añadió al cuadrado.*




*Hemos entonces cortado una pieza de la superficie HB de medida TK, uno de los lados de la superficie MT, dejando solo la superficie TA. Quitamos ahora de la línea KM la línea  KL que es igual a la línea GK. Sucede que la línea TG es igual a la línea ML, y que la línea KL, que fue cortada de la línea MK, es igual a la línea KG. Como consecuencia la superficie MR es igual a la superficie TA. Es entonces evidente que el cuadrángulo HT aumentado en el* *cuadrángulo MR es igual al cuadrángulo HB que representa veintiuno. Pero se había determinado que el cuadrángulo MT era veinticinco. Si ahora sustraemos de este cuadrado, la superficie HT y la superficie MR, que juntas son iguales a veintiuno, lo que queda es una pequeña superficie KR que representa la diferencia entre veinticinco y veintiuno, es decir, cuatro. Su raíz, representada por la línea RG, que es igual a la línea GA, es dos. Si sustraemos este dos de la línea CG, que es la mitad de las raíces, lo que resta es la línea AC, es decir, tres, que es la raíz del cuadrado original. Pero si se añade el número dos a la línea GC, que es una mitad de la raíz, entonces la suma es siete, representada por la línea RC, que es la raíz de un cuadrado más grande. Sin embargo, si añades veintiuno a este cuadrado, el resultado será igual a diez raíces del cuadrado original.*

Esta naciente disciplina, pretendía ser una ciencia aplicada, de modo que los objetos con los que se trabajaba, como ya se ha dicho, no quedaban especificados, por lo que podían ser objetos propios de la geometría como de la aritmética. No es casualidad que la terminología empleada fuera tal que pudiera referirse a ellos sin distinción. Esto se refleja, en el caso de la prueba anterior (así como en todas las demostraciones de al- Khwarizmi), en que el lenguaje empleado en la justificación de la prueba constaba únicamente de palabras, de modo que los objetos con los que se trabajaba aparecen dentro de oraciones completas de predicados intuitivos, que argumentan de manera lógica y apoyándose en lo visual, el razonamiento detrás del análisis, todo esto sin la presencia de ninguna clase de representación simbólica. Asimismo, todas las operaciones que se describen en la demostración vienen acompañadas de su equivalencia en términos geométricos. Esto es, si se considera en primera instancia la justificación del proceso de solución del problema $x^2 + 21 = 10x$ se puede observar que existe una notación que designa a los segmentos de línea así como a las figuras mismas, pero solo hace eso, identificar las figuras y sus partes. Por su parte, el razonamiento referido en los enunciados describe operaciones entre los segmentos, o mejor dicho, entre sus valores, pero sin que exista en la descripción escrita –o en la retórica– del proceso un simbolismo que las designe. Cabe entonces hacerse una pregunta que aclare lo que se hace: ¿Qué tipo de operaciones son las que se describen en el manuscrito? En el ejemplo anterior se puede encontrar la división de segmentos: "*Dividimos la línea CH en dos mitades por el punto G.*" La igualdad entre magnitudes: "*La línea TK se hace igual a la línea KM*…" que en este caso se puede decir que dos de ellas son iguales si éstas tienen la misma dimensión. Igual ocurre con la adición de segmentos: *"Entonces extendemos la línea GT a una distancia igual a la diferencia entre la línea CG y la línea GT",* entre otras operaciones. Así a pesar de carecer de un simbolismo capaz de describir las operaciones definidas en el trabajo de al-Khwarizmi, se puede encontrar también notación que designe a las magnitudes. Como se pudo apreciar en el ejercicio, las magnitudes de los segmentos pueden aparecer representadas por medio de letras, pero dicha representación solo se usa para eso, como ejemplo está la referencia a la línea *AB*.

En cuanto a las operaciones numéricas, uno no puede hallar ninguna representación para ellas. De hecho ni siquiera para los números mismos, pues a pesar de que en los enunciados de los problemas –véanse los dos casos tratados líneas atrás– lo que se tiene es una descripción que depende completamente de enunciados verbales en los que si bien se hace referencia a operar con números, la representación simbólica aún no tiene presencia en el texto escrito. De este modo, el operar con números implica que estos necesariamente tienen símbolos que los representan, los cuales permiten a su vez que la manipulación de estos tenga un cierto grado de abstracción –al considerar que cada símbolo para números tiene un significado por sí mismo–, pero las operaciones no rebasan el nivel de lo aritmético, i.e., son operaciones con números específicos. Por consiguiente, aunque es fácil dar una interpretación algebraica a los problemas por medio de la construcción de relaciones, en el texto no hay tal uso de éstas en la prueba.

En el álgebra usual las representaciones o abstracciones de los objetos de análisis permiten crear relaciones entre los objetos mismos, que ayudan en el análisis de la solución del problema que se ha planteado. Dichas relaciones, como ya se mencionó, constituyen otro de los elementos fundamentales del álgebra. Las ecuaciones son uno de los principales ejemplos de relaciones que encontramos en esta materia. Y sin embargo no son los únicos ejemplos, pues en la geometría también se puede encontrar cierta clase de relaciones como lo son proporciones entre líneas, magnitudes, figuras o áreas. Ahora regresemos una vez más a lo que al-Khwarizmi nos ha legado: ¿qué tipo de análisis es el que utiliza este autor en la justificación de sus pruebas? Para finalizar con esta problemática consideraré el tercero de los casos que a mi parecer requieren demostración:

CASO III

*'Raíces y números son iguales a cuadrado.'*

El ejemplo que resuelve es el siguiente: *"tres raíces y cuatro números son iguales a un cuadrado."* [63]

Este enunciado se puede interpretar mediante la ecuación $3\mathrm{x} + 4 = \mathrm{x}^2$. Para resolverlo al-Khwarizmi procedió de la siguiente manera: *partir a la mitad las raíces; la mitad es uno y un medio. Multiplicar ésta por sí misma; el producto es dos y un cuarto. Añadir ésta a cuatro; la suma es seis y un cuarto. Extraer su raíz; es dos y un medio. Añadir ésta a la mitad de las raíces, la cual fue uno y un medio; la suma es cuatro. Ésta es la raíz del cuadrado, y el cuadrado es dieciséis."*

En notación moderna el ejercicio se puede generalizar en la siguiente ecuación $x^2 = c + bx$ la cual se resuelve de la siguiente manera:

$$x^2 - bx = c$$

$$x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{2} + c$$

$$x - \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

[63] Rosen (1831), *The Algebra of Mohammed Ben Musa*, p. 12.

$$x = \sqrt{\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\right]} + \frac{b}{2}$$

Demostración geométrica:[64] *Deje que el cuadrado sea representado por un cuadrángulo, los lados del cual son desconocidos para nosotros, no obstante que ellos sean iguales entre sí y también los ángulos. Éste es el cuadrado AD, el cual comprende las tres raíces y los cuatro números mencionados en este ejemplo. Para todo cuadrado uno de sus lados, multiplicado por una unidad, es su raíz. Ahora cortamos el cuadrángulo HD del cuadrado AD y tomamos uno de sus lados HC como si midiera tres, que es el número de las raíces. El mismo es igual a RD. Se sigue entonces que el cuadrángulo HB representa el cuatro de los números que son añadidos a las raíces. Ahora dividimos a la mitad el lado CH, el cual es igual a tres raíces, en el punto G; de esta división construimos el cuadrado HT, que es el producto de la mitad de las raíces multiplicadas por sí mismas, es decir, dos y un cuarto. Añadimos entonces a la línea GT una pieza igual a la línea AH, a saber, la pieza TL; por consiguiente la línea GL se convierte en igual a AG, y la línea KN igual a TL; así aparece un nuevo cuadrángulo, con lados y ángulos iguales, a saber, cuadrángulo GM;  y encontramos que la línea AG es igual a ML, y la línea AG es igual a GL. De igual manera la línea CG permanece igual a NR, y la línea MN igual a TL, y del cuadrángulo HB se corta una pieza igual al cuadrángulo KL .*

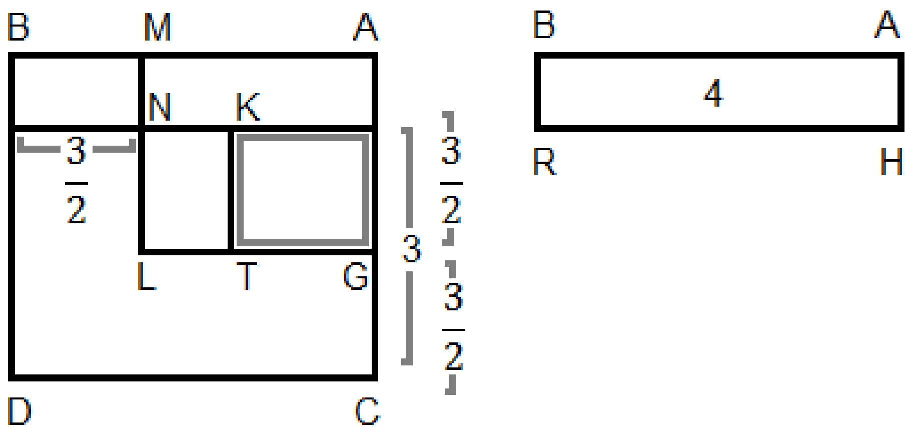
*Pero sabemos que el cuadrángulo AR representa el cuatro de los números que son añadidos a las tres raíces. El cuadrángulo AN y el cuadrángulo KL juntos son iguales al cuadrángulo AR, que representa al cuatro de los números.*

*Hemos visto, también, que el cuadrángulo GM comprende el producto de la mitad de las raíces, o de uno y un medio, multiplicado por sí mismo; es decir dos y un cuarto, junto con los cuatro números, los cuales son representados por los cuadrángulos AN y KL. Ahora queda, del lado del cuadrado grande original AD, que representa el cuadrado entero, solo la mitad de las raíces, es decir, uno y un medio, a saber, la línea GC. Si añadimos ésta a la línea AG,*

[64] Rosen (1831), *The Algebra of Mohammed Ben Musa*, p. 19.

*que es la raíz del cuadrado GM, siendo igual a dos y un medio, entonces ésta, junto con CG, o la mitad de las tres raíces, que es uno y un medio, nos da cuatro, que es la línea AC, o la raíz de un cuadrado que está representado por el cuadrado AD.*

A continuación en el texto en inglés aparece la figura que corresponde a lo anterior:




En la prueba al-Khwarizmi parte del hecho de que el problema efectivamente se puede resolver, a diferencia de las pruebas a las que se tenía como típicas de la geometría griega, representadas básicamente por la parte geométrica de los *Elementos* de Euclides. De este modo, como se pudo ver a lo largo de los diferentes ejemplos considerados hasta ahora, tanto la aritmética como la geometría tuvieron una profunda influencia en la constitución de esta disciplina que para fines del siglo IX aparecía bajo la presentación que de ella hizo al-Khwarizmi. Bajo el formato en que aparece en dicha obra los procedimientos de solución son propiamente 'aritméticos', y si bien no se ocupaba ningún tipo de representación para los objetos de estudio (ya fueran raíces, cuadrados o simples números, como él los clasifica), el conjunto de oraciones utilizadas en la demostración formaban un argumento consistente tomando los objetos conocidos para con ellos construir, mediante varias operaciones, un entramado que conducía a la solución. Estas mismas construcciones servirían, siglos más adelante, y casi calcadas pero traducidas o revestidas con el lenguaje simbólico, para constituir la solución algebraica. Ello justifica decir que al-Khwarizmi sentó pauta hacia la constitución de una nueva disciplina que eventualmente podría adquirir su propia autonomía.

Los lazos evidentes entre la geometría y las instrucciones que ofrece al-Khwarizmi para resolver problemas invitaban a recurrir a los *Elementos* y ver qué podrían estos ofrecer en cuanto a interpretar los manejos aritméticos o, por qué no, aportar alternativas de solución a los mismos problemas. Quien así lo hizo fue Abu Kamil, quien exhibe cómo teoremas contenidos en el Libro II de los *Elementos* parecen parafrasear soluciones a los problemas planteados por al-Khwarizmi. Mostrar esto es el propósito del capítulo siguiente.

# CAPÍTULO 4. EL *LIBRO DE ÁLGEBRA* DE ABU KAMIL.

## 4.1.- Antecedentes.

Tras el trabajo de al-Khwarizmi muchos otros matemáticos en el mundo árabe contribuyeron a fortalecer y ampliar el ámbito de esta nueva rama del saber, favoreciendo el fortalecimiento y consolidación de la misma, y entre ellos destaca Abu Kamil Shoja'ben Aslam ben Mohammed ben Shoja, conocido simplemente como Abu Kamil (ca. 850-ca. 930),[65] matemático egipcio que estudió a profundidad el trabajo de al-Khwarizmi, tomando como base los conceptos, nociones y definiciones establecidos por su antecesor. Conocido como el calculista egipcio, Abu Kamil estableció, con la ayuda de los *Elementos,* una sólida técnica basada en el estudio y configuración de la solución de los seis tipos de ecuaciones descritos en la obra de al-Khwarizmi, introduciendo a los irracionales como números sujetos a estar integrados en los problemas que planteó.

Abu Kamil fue un gran admirador de la obra de al-Khwarizmi, a la cual coloca en un pedestal. Tal vez lo hace como recurso retórico para engrandecer más su propio trabajo, pues en la introducción a su *Libro de álgebra* declara que su antecesor dejó algunos puntos oscuros que requerían ser aclarados, y que fue "Dios Todopoderoso…. y su benevolencia al otorgarle la capacidad de dominar el 'arte del cálculo' y gracias a ello penetrar en los secretos y elucidar sus misterios", los cuales le parecían "principios carentes de oscuridad con argumentos de ninguna manera inaccesibles". A lo que añade resolvió "numerosos problemas, la mayoría de los cuales conducían a los 6 tipos explicados por al-Khwarizmi,… y aclaré sus discusiones y llené los vacíos presentes en sus explicaciones y argumentos."[66]

La obra de Abu Kamil es indiscutiblemente de un calibre superior al de sus predecesores, pudiendo decirse que las presentaciones de al-Khwarizmi son un tanto elementales comparadas con las de Abu Kamil, 'ingenuas' las llama Puig en el contexto de una clasificación que utiliza para distinguir tres estadíos en las justificaciones de las soluciones que se presentan en los textos

[65] Sesiano (2009), *An Introduction to the History of Algebra*, p. 63.
[66] *Ibid*. p. 64.

que históricamente son situados en la línea del tiempo que conduce a la construcción del álgebra en el Renacimiento. En Infante (2009) se adopta una clasificación en tres grandes tipos de demostración, a los que se les da el nombre de 'ingenua', 'geométrica' y 'algebraica'. Esta clasificación no ha adquirido la universalidad requerida para ser utilizada sin explicaciones y por ello paso a describirlas, tal y como lo hace Infante:

"Se aplica el calificativo de 'ingenua' a una demostración cuya argumentación se apoya en una figura geométrica que está acompañada de letras, y en un discurso que se refiere a lo que se ve en la figura, y a acciones sobre ella o relaciones entre sus partes. La garantía de la verdad de lo que se dice es lo que se ve en la figura. El calificativo 'geométrica' se reserva, según esta clasificación, para las demostraciones que siguen el modelo euclídeo, en las que sigue habiendo figuras geométricas acompañadas de letras, pero en las que la garantía de la verdad ya no es lo que se ve en la figura, sino en el conjunto de la arquitectura del texto euclídeo, definiciones, nociones comunes, postulados y proposiciones… , se llaman 'algebraicas' a las demostraciones en las que las figuras geométricas han desaparecido, y el discurso demostrativo se apoya en las operaciones que se realizan con las expresiones algebraicas."[67]

Tomando esta clasificación como base las demostraciones de al-Khwarizmi son, como ya se mencionó, "ingenuas" también en este sentido, si bien habría un embrión de demostración "algebraica", pero ninguna demostración "geométrica" pues para lo que se usan las figuras geométricas es para convencer visualmente de la validez de una operación. Por su parte, y como veremos en la siguiente sección, Abu Kamil sí presenta demostraciones 'geométricas' en tanto que éstas apelan directamente a teoremas euclidianos contenidos en el Libro II de los *Elementos*. Por su parte, las demostraciones que más se acercan a ser calificadas de 'algebraicas' solo aparecerán en los textos matemáticos medievales de Al-Karajī (953-1029 d.C.), Omar Al-Khayyām (1048-1131 d. C.), As-Samaw'al and Ibn Al-Ha' (1130-1180 d.C.),

[67] Infante, 2009, "Demostraciones de los algoritmos de …", pp. 4-5.

Pero volvamos a Abu Kamil. A pesar de la falta de simbolismo en el lenguaje empleado para la descripción de los razonamientos en la obra, pues incluso los números son expresados por medio de palabras y sigue presente la dependencia con la geometría, Abu Kamil formó parte fundamental en la introducción del álgebra en Europa. Esto último ocurrió como efecto colateral de la conquista árabe del norte de África y de la península ibérica, trayendo como consecuencia la difusión de la tradición algebrista. Tocó a Leonardo de Pisa (ca. 1180-1240) [68] ser el primer matemático europeo en seguir con estas prácticas y difundirlas a través de su famoso libro *Liber Abaci* (*Líber Abaco*), en el que reúne y combina el conocimiento matemático de los *Elementos*, pero siguiendo las pautas presentes en la obra de Abu Kamil.

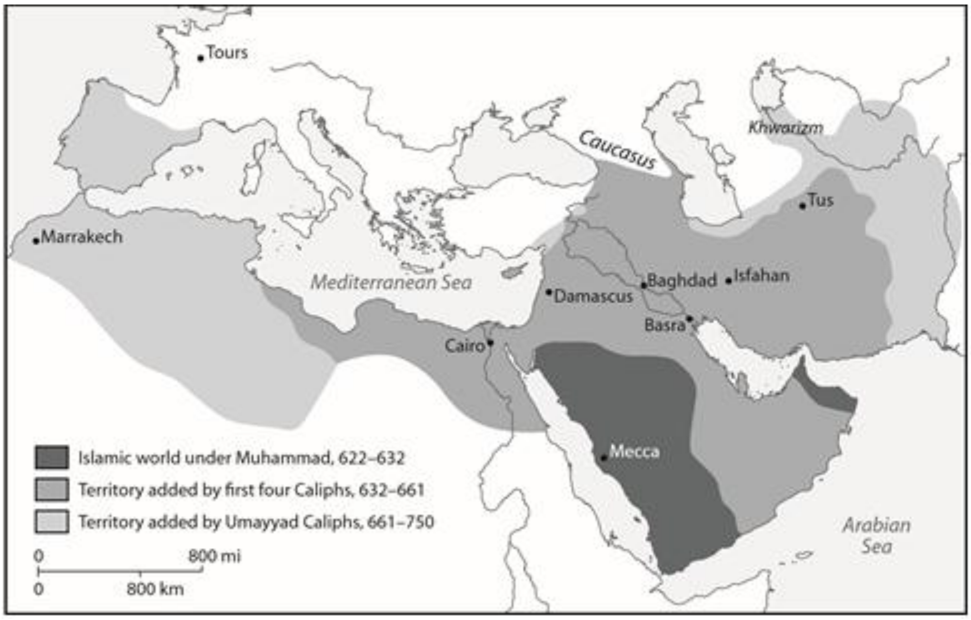



**Figura 5**. Mapa del islam medieval.[69]

[68] Bashmakova y Smirnova (2000), *The Beginnings and Evolution of Algebra*, p. 56
[69] Katz y Parshall (2014), *Taming the Unknown,* p. 133.

## 4.2.- Problemas.

Siguiendo los conceptos establecidos en la obra de al-Khwarizmi, Abu Kamil ofrece una explicación más clara y profunda de las pruebas realizadas por su predecesor. Con el propósito de esclarecer el análisis detrás de la obra de Al Khwarizmi, Abu Kamil se ocupa de examinar los problemas desde otro punto de vista, añadiendo algunas características de las obras de Euclides y Diofanto, aunque de este último no menciona explícitamente sus obras. Abu Kamil estudia los seis tipos de 'ecuaciones' que aparecen en el *Kitab al-jabr wa'l-muqābala,* además de examinar problemas que involucran números irracionales, cálculos relativos a polígonos, problemas indeterminados, así como varias aplicaciones del álgebra a la vida diaria.

Al igual que en el capítulo anterior, solo se examinarán las ecuaciones $x^2 + bx = c$, $x^2 + c = bx$ y $x^2 = c + bx$ respectivamente, las que al-Khwarizmi denominaba como aquellas en las que 'se extrae la mitad de la raíz', por éste el primer paso en la construcción de la solución.

Para llegar a expresar la solución de los tres tipos de ecuaciones descritos en el libro de al-Khwarizmi, y con ello sustentar su método sólidamente en la geometría, Abu Kamil se vale de la ayuda de dos proposiciones del libro II de *los Elementos* de Euclides. Éstas son la Proposición 5, que afirma lo siguiente: "*Si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera junto con el cuadrado de la recta que está entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.*" [70]

Aquí AB es la línea recta que se corta en segmentos iguales en el punto F y en segmentos desiguales en el punto D. En términos algebraicos lo que se afirma es que $\mathrm{AD}\,\mathrm{DB} + FD^2 = FB^2$.

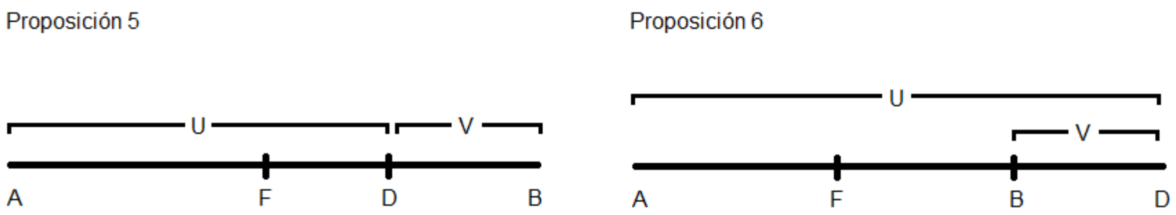
La otra es la proposición 6, que señala lo siguiente: "*Si se divide en dos partes iguales una línea recta y se le añade, en línea recta, el rectángulo comprendido por la (recta) entera con la (recta) añadida y la (recta) añadida*

[70] Euclides (1991), *Euclides Elementos Libros I- IV*, p. 272.

*junto con el cuadrado de la mitad es igual al cuadrado de la (recta) compuesta por la mitad y la (recta) añadida.*" [71]

Esto se traduce en la igualdad: $AD\,DB + FB^2 = FD^2$ , con AB como la línea recta que se divide en dos partes iguales en el punto F y DB representa la recta añadida a AB.

Estas identidades algebraicas se traducen, visualmente y en términos modernos, asignando al segmento $AD$ la letra $U$ y a la magnitud $DB$ la letra $V$, en lo siguiente:




Y dando como resultado la expresión $UV + \left(\frac{U-V}{2}\right)^2 = \left(\frac{U+V}{2}\right)^2$ que es válida para cualesquiera dos segmentos.

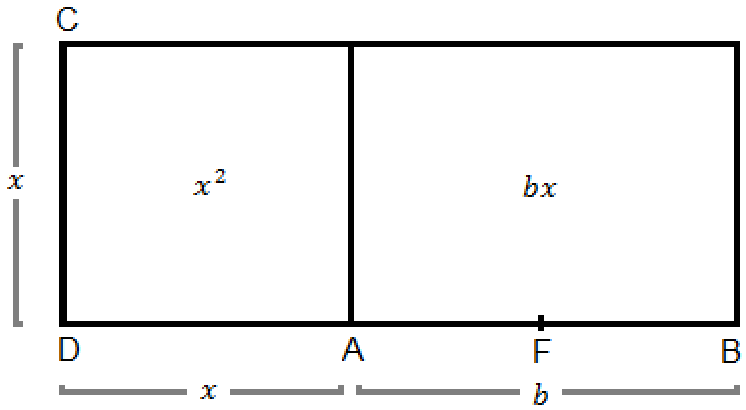
El uso de estas dos proposiciones para la solución de ecuaciones cuadráticas en la clasificación realizada por al-Khwarizmi, representó un avance en la constitución y consolidación del álgebra, pues permitió establecer y especificar un método que más adelante facilitaría el entendimiento de la resolución de las mismas.

Para analizar este cambio en los procedimientos empleados hasta ese entonces, a continuación se muestra la solución correspondiente a cada una de las tres diferentes ecuaciones descritas arriba, así como su respectivo ejemplo. Tómese el caso en que: $x^2 + bx = c$.

En la siguiente figura[72] sea AB una línea recta y sea esta recta la base de un rectángulo cuyo lado $x$ deberá determinarse bajo la condición de que

[71] Euclides (1991), *Euclides Elementos Libros I- IV*, p. 274.
[72] Modificada de Sesiano (2009), *An Introduction to the History of Algebra*, p. 66.

dicho rectángulo y el cuadrado de lado igual al que se busca determinar sean iguales a un cierto número *c*. En AB se toma F, su punto medio, y se le añade AD, una línea recta que mide lo mismo que el lado por determinar de la figura original. Considere pues a AC = $x^2$ y AB = *b*, entonces BC = *c*.




De la preposición 6 de los *Elementos*, Libro II [en términos algebraicos ($AD\ DB + FB^2 \ = \ FD^2$ )], se sigue que:

$AD\ DB$ = $x\ (x + b) = c$

$FB^2 = \ \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$FD^2 = \ \left(\frac{b}{2} + X\right)^2$

De donde se deduce la siguiente expresión:

$$c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + X\right)^2$$

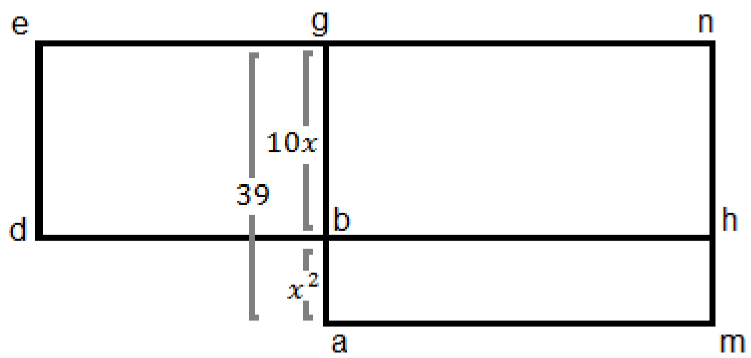
$$\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{2} + X$$

$$\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} = x$$

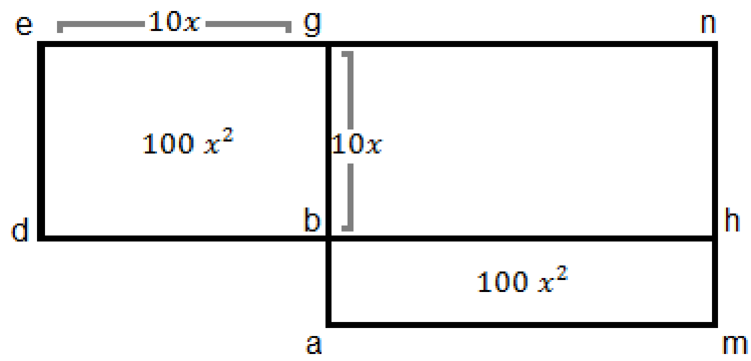
Para ejemplificar este método Abu Kamil presenta, al igual que su predecesor, el ejemplo siguiente: "*Un cuadrado y diez raíces de la misma cantidad iguales a treinta y nueve dírhems ¿cuál debe ser el cuadrado que, cuando se incrementó en diez de sus propias raíces, asciende a treinta y nueve?*" es decir, está retomando la ecuación $x^2 + 10x = 39$, la misma que había utilizado al-Khwarizmi en su ejemplo de este caso.

Abu Kamil resolvió dicho problema en dos formas diferentes, en la primera trata de conocer la raíz del cuadrado, es decir $x$. Dicho método es similar al presentado en el libro de al-Khwarizmi. Para la segunda técnica, en cambio, busca encontrar el cuadrado de la raíz, es decir, $x^2$ para lo cual presenta dos soluciones, una aritmética en la que solo trata con las cantidades, y una geométrica. La primera menciona lo siguiente: "*realmente el método que te conduce a conocer el cuadrado es aquel en el que multiplicas 10 raíces por sí mismas, dando 100. Esto a su vez lo multiplicas por 39, que es igual al cuadrado y las raíces, dando 3900. Ahora divide 100 a la mitad, dando 50, el cual multiplicas por sí mismo, dando 2500. Esto añádelo a 3900, dando 6400, y de este número toma la raíz, que es 80. A éste* (es decir 80) *substráelo de 50, que es la mitad de 100, y de 39, que es igual al cuadrado y la raíz, juntos dando 89, y los 9 restantes son el cuadrado.*" [73] Luego, para la segunda demostración, la inspirada en los *Elementos*, es necesario considerar la siguiente figura, donde la línea $ab$ es igual $x^2$ , y la línea $bg$ representa las 10 raíces, la línea $ag$ resultará ser de esta manera igual a 39 dírhems.

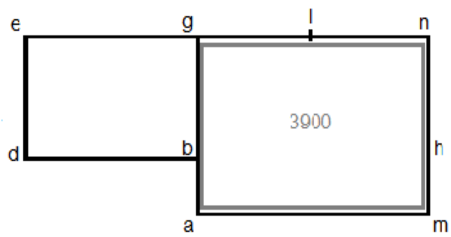
[73] Karpinski (1914), *The Algebra of Abu Kamil*, p. 40.

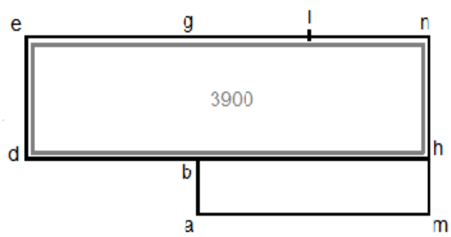



En el método descrito por Abu Kamail, como ya se mencionó, se busca conocer el valor del cuadrado de la raíz. Para encontrar dicho valor es necesario multiplicar la ecuación anterior por $100$ es decir $100x^2 + 1000x = 3900$. De esta manera sobre $bg$ se construye un rectángulo $degb = 100\ x^2$ y sobre $ab$ se compone la superficie $ah$ igual a la anterior.




Por consiguiente, la superficie $an$ llegará a ser igual a $3900$, ya que $ag\ = 39$ y $am\ = 100$. Pero como $ah$ se construyó igual a $be$, se tiene que $ah\ +\ bn\ =\ be\ +\ bn$, por lo que $dn$ también es igual a $3900$:



Pero $dn = (ne)\,(eg) = 3900$, y entonces si se divide $gn$ en dos por el punto $l$, y como $gn$ es igual a $100$, pues $am$ es igual a $100$, se tiene que $gl$ es igual a $50$. De este modo la proposición 6 se satisface, es decir, dada la línea $gn$ dividida en dos por el punto $l$ y a la cual se le añade en línea recta otra línea $ge$, entonces se sigue que $en\,eg + (lg)^2 = (le)^2$, y como $(le)^2 = 3900 + 2500 = 6400$ ( $lg^2$ = 2500 y $en\,eg = 100x^2$ . Esto en notación moderna sería $100x^2 + 1000x + 2500 = 3900 + 2500 = 6400$).

De lo anterior resulta que $le = 80$; pero $le = ge + gl$, y como $ge = gb$, se tiene que $le = gb + gl = 80$. Enseguida quitamos la línea $lg$ y $bg$, que valen $80$, de la línea $ag$, la cual valía $39$, es decir $(ab - bg) - (\mathrm{lg} - bg) = ab - \mathrm{lg} = 39 - 80$ . Entonces $ab = 39 - 80 + 50 = 9$ pues $lg = 50$. Esto se puede traducir como $(x^2 + 10x) - (10x + 50) = x^2 - 50 = 39 - 80$ de donde se obtiene que $x^2 = 9$.

De manera general el problema anterior se puede traducir en una expresión del tipo $x^2 + bx = c$ en la cual se siguió el siguiente método:[74]

Multiplicando por $b^2$ la ecuación anterior se obtiene que:

$$b^2x^2 + b^3x = cb^2$$

$$b^2x^2 + b^3x + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2 = cb^2 + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2$$

$$\left(bx + \frac{b^2}{2}\right)^2 = cb^2 + \frac{b^4}{4}$$

$$bx + \frac{b^2}{2} = \sqrt{cb^2 + \frac{b^4}{4}}$$

[74] Modificado de Karpinski (1914), *The Algebra of Abu Kamil*, p. 41.

La cual substraemos de $x^2 + bx = c$ y se obtiene

$$x^2 - \frac{b^2}{2} = c - \sqrt{cb^2 + \frac{b^4}{4}}$$

De modo que

$$x^2 = c + \frac{b^2}{2} - \sqrt{cb^2 + \frac{b^4}{4}}$$

Que es el resultado general.

El segundo tipo de ecuación es $x^2 + c = bx$ y Abu Kamil la resolvería como sigue:

En la siguiente figura,[75] sea AB una línea recta que es cortada en segmentos iguales en el punto F y en segmentos desiguales en el punto D; entonces si AC = $x^2$ y AB = $b$, se sigue que BC = c, y de la Proposición 5 (AD DB + FD$^2$= AF$^2$) de los *Elementos*, Libro II, se tiene que:

AD DB = $x\,(b - x)$ = $bx - x^2$ = c

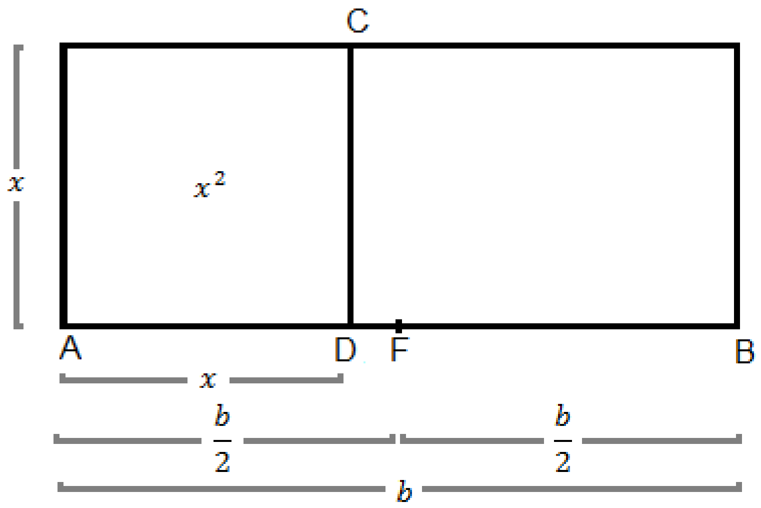
FD$^2$ = $\left(\frac{b}{2} - x\right)^2$

AF$^2$ = $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

De donde resulta:

AD DB + FD$^2$= AF$^2$ = $c + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2$ = $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

[75] Modificada de Sesiano (2009), *An Introduction to the History of Algebra*, p. 67.




Y entonces

$$\left(\frac{b}{2}-x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$\frac{b}{2}-x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

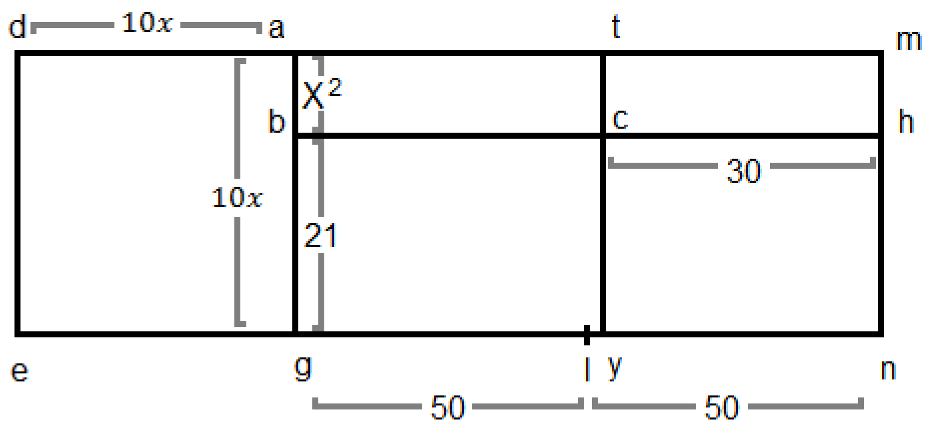
$$x = \frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Siguiendo una vez más los problemas formulados en el libro de al-Khwarizmi, Abu Kamil ofrece su versión de este caso con el siguiente ejemplo:

*"Un cuadrado y veintiún números son iguales a diez raíces del mismo número cuadrado, es decir ¿Cuál debe ser la cantidad de un cuadrado que cuando se agregan veintiún dirhems a él se convierte en el equivalente de diez raíces de ese cuadrado?"* (que en términos modernos representaríamos mediante la ecuación $x^2 + 21 = 10x$) Para el cual Abu Kamil presenta dos formas diferentes para su solución. Una de ellas conducía directamente al valor

de la raíz y la otra al valor del cuadrado de la raíz. Analizaré la demostración para este último caso.[76]

Colocamos la línea $ab$ para representar $x^2$ , y le añadimos las dracmas –dírhems en el caso de al-Khwarizmi– que lo acompañan, esto es, hacemos la línea $bg$ igual a $21$. Entonces la línea $ag$ es $10$ raíces de la línea $ab$. Es decir, $ab + bg = x^2 + 21 = 10x = ag$. Esto se ilustra en la figura:



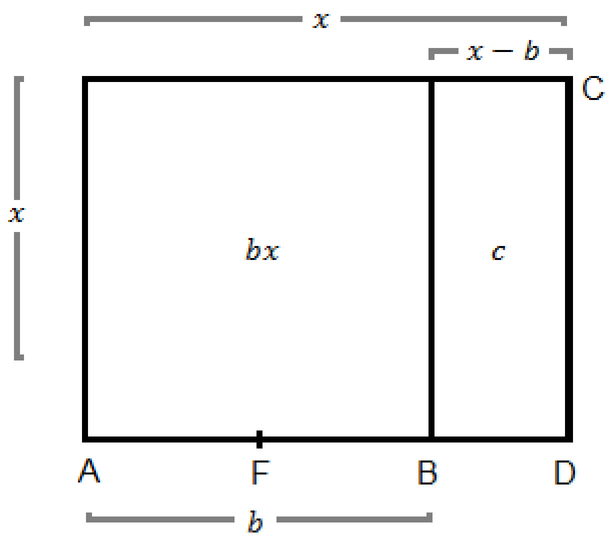

Sobre la línea $ag$ construimos el cuadrado $aged$, que es $100$ veces la línea $ab$. Ya que la línea $ag$ es 10 raíces de la línea $ab$, esto es, $aged = (10x)(10x) = 100x^2$, y a partir de ello construimos la superficie $ah$ igual al cuadrado $aged$ ($ah = aged$). Uno de sus lados es la línea $ab$. Por lo tanto el otro lado $bh$ es $100$. Ahora completamos la superficie $an$, y entonces la superficie $bn$ es $2100$ dado que la línea $bg$ es $21$ y la línea $gn$ es $100$. Construimos ahora la superficie $my$ igual a la superficie $ae$. La superficie $ae$ es igual a la superficie $ah$.

Quitamos entonces la superficie $th$, de modo que lo que resta es el área $cn$ que es igual al área $ca$, es decir: $my = th + cn = ac + th = = ah = ae$ pues $ae = ah = aged$, por lo tanto restando $th$ de ambas igualdades se tiene que $cn = ca$. Añadiendo entonces la superficie $by$ se tiene que la superficie total $ay$ es igual a la superficie $bn$ la cual es 2100 ( $ay = ca + by = cn + by = bn = 2100$).

[76] Karpinski (1914), *The Algebra of Abu Kamil*, p. 43.

Por lo tanto el área $ay$ es 2100, que es el producto de $gy$ por $yn$, ya que $yn$ es igual a $yt$ pues el área $tn$ es un cuadrado, esto es $ay = (gy)(yn) = 2100$. Dividimos entonces la línea $gn$ en dos partes iguales en el punto $l$ y en dos partes desiguales en el punto $y$. Por lo tanto de la Proposición 5 del Libro II de los *Elementos* de Euclides se sigue que el producto de $gy$ por $yn$, junto con el cuadrado sobre $ly$, es lo mismo que el producto de $ln$ por sí misma ( $(gy)\,(yn) + ly^2 = ln^2$ ). Pero $ln$ por sí misma da $2500$, pues $ln$ es 50, y el producto de $gy$ por $yn$ es $2100$. Así que el cuadrado sobre la línea $ly$ queda entonces en $400$ y la linea $ly$ es $20$. Pero como $ln$ es $50$ y $ly$ es 20, se obtiene de la resta de estas dos que $yn$ es igual $30$. Igualmente, como la línea $bg$ es $21$ y $yn$ es igual a $yt$, se sigue que $ab$ es igual a $9$, que es $ag$ menos $bg$, y como $ag$ es igual a $yt$ que es igual a $yn$, que a su vez es igual a $30$, y además $bg$ es igual a $21$, se tiene que $30$ menos $21$ es igual a $9$, que es igual a $ab$. Y 9 es el cuadrado. Y esto era lo que se deseaba explicar.

Por último están los problemas del tipo $x^2 = c + bx$. Para resolverlos Abu Kamil considera el siguiente cuadrado,[77] en el que $F$ es el punto medio que divide en dos a la línea AB, y BD una recta que se añade a la misma. Entonces si el cuadrado tiene por lados x y AB = b resulta que BC = c.




[77] Figura modificada de Sesiano (2009), *An Introduction to the History of Algebra*, p. 66.

De la Proposición 6 del Libro II de los *Elementos* (en términos algebraicos afirma $AD\ DB + FB^2 = FD^2$) tenemos que:

$AD\ DB = c$

$FB^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$FD^2 = \left(X - \frac{b}{2}\right)^2$

Así que

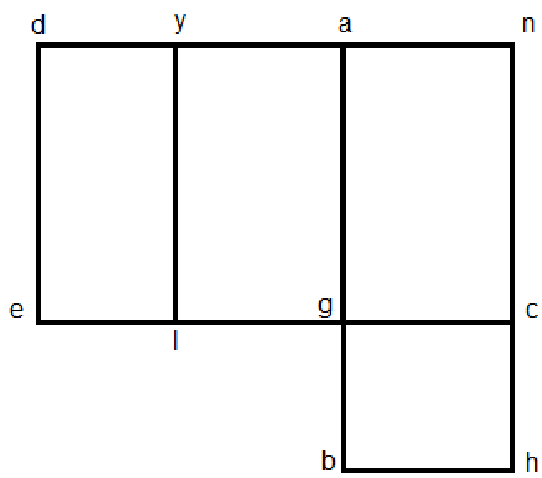
$$c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = x - \frac{b}{2}$$

$$\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2} = x$$

Para resolver este caso presentó el ejemplo. $3x + 4 = x^2$:[78]

Si se quiere encontrar el valor del cuadrado $x^2$ es conveniente considerar la siguiente figura:

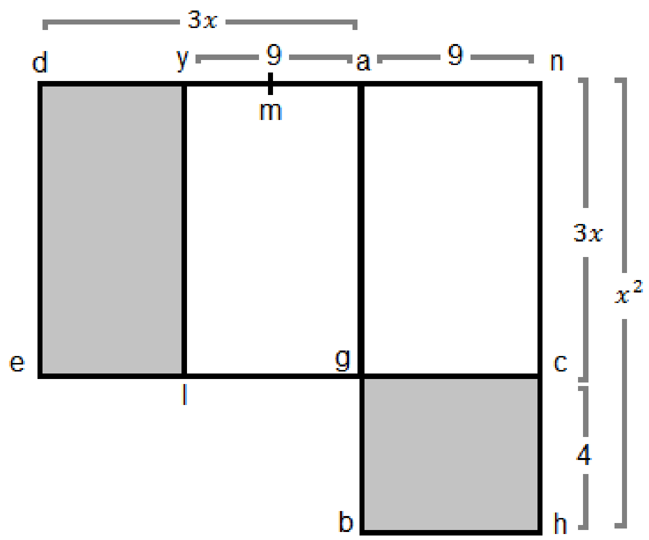



[78] Karpinski (1914), *The Algebra of Abu Kamil*, p. 44.

Donde la recta $ab$ es igual $x^2$ y sobre la línea $ag$ se construye un cuadrado $aged$ que representa a $9x^2$ (de donde $ag = ad = 3x$).

En seguida se hace el área $ah = ae$; de esta manera $ah = 9x^2$, con lo cual se tiene que $an = 9$ ya que $bg = 4$, y por lo tanto $gh = 36$.

Luego sobre la línea $ad$ se toma un punto $y$ tal que $ay = an = 9$ y se traza la línea $yl$ paralela a $de$, así el área $yg = ac$, y como el área $ae = ha$, se tiene que $ye = cb = 36$.




Divídase pues la línea $ay$ en dos partes iguales por el punto $m$, y sea la línea recta $yd$ la línea que se añade a ésta. Entonces, según la Proposición 6, Libro II de los *Elementos* de Euclides se sigue que $ad\,dy + (ym)^2 = (md)^2$, pero como $ad = de$ se tiene que $ad\,dy = de\,dy = ye = 36$. Por lo tanto $ad\,dy = 36$; además $(ym)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 20\frac{1}{4}$, por consiguiente $ad\,dy + (ym)^2 = 36 + 20\frac{1}{4} = 56\frac{1}{4} = (md)^2$. De esta manera $md = 7\frac{1}{2}$, pero $am = 4\frac{1}{2}$ y por ende $md + am = 12$. Se sigue que $ab = bg + ga = 4 + 12 = 16$ y finalmente que $x^2 = 16$.

Como se puede notar en estos tres ejemplos, los lectores a los cuales está dirigido este trabajo deben tener un conocimiento previo de los conceptos y definiciones que aparecen en la obra de Euclides y estar familiarizado con el material presente en el *Libro de álgebra* de Al Khwarizmi, para así poder comprender a cabalidad lo que aparece en el texto de Abu Kamil. Esto contrasta con la presentación de Al Khwarizmi, en el que los lectores no necesitaban conocimientos previos para comprender lo que presentaba el texto. El que la obra de este último haya sido dirigida a todo tipo de persona va de la mano con que exhiba un grado de abstracción menor que aquella en la que se requiere cierto tipo de conocimiento previo para alcanzar una forma de entendimiento menos intuitivo y a su vez más difícil de seguir. Hay que enfatizar también que el trabajo de Abu Kamil se presentaba elaborado únicamente con grupos de oraciones, de modo que aún no había un simbolismo que facilitara el análisis y seguimiento de sus procedimientos.

Asimismo, como se pudo ver en los ejemplos anteriores, la geometría no está ausente en el método utilizado por Abu Kamil. Para ilustrar este hecho y al mismo tiempo percibir la capacidad de resolver problemas un tanto complejos siguiendo las líneas de razonamiento geométrico de Abu Kamil, presento uno de sus ejemplos:

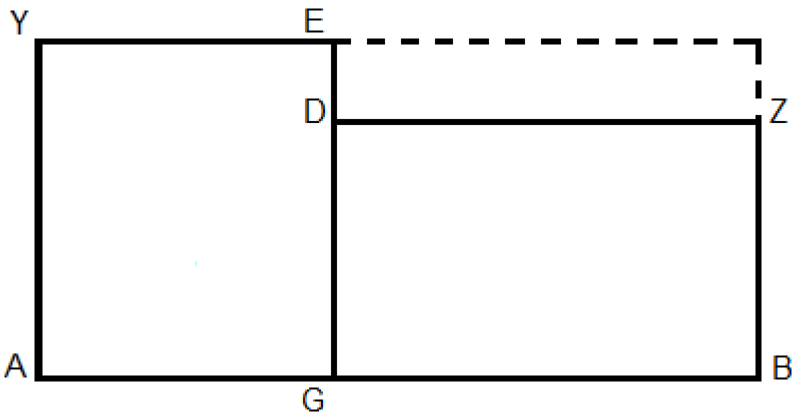
*"Dos hombres han adquirido 10 prendas por 72 dírhems, cada uno pagando el mismo precio, 36 dírhems, mientras que cada prenda para un hombre cuesta tres dírhems menos que las de su compañero."*[79]

Si renombramos por medio de letras las cantidades que aparecen en el ejercicio anterior, siendo $u$ el número de prendas del primer hombre, $v$ el número de prendas del segundo hombre, y $p$ el precio de cada prenda, se tendría el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u+v=10 \\ pu=(p-3)v=36 \end{cases}$$

Abu Kamil lo resuelve apelando a una figura como la que aparece a continuación:

[79] Sesiano (2009), *An Introduction to the History of Algebra*, p. 67.




La línea $AB$ representa las diez prendas que adquirieron los dos hombres, $AG$ las prendas del primer hombre, $GB$ las prendas del segundo hombre, además representa el precio de una de las prendas en $AG$ mediante $GE$, y el precio de una de las prendas en $GB$ como $GD$, de modo que $DE$ vale 3 y además $AE$ vale 36, al igual que $DB$. Si se representa a $GB$ como $x$ se sigue que $EZ$ es igual $3x$, con lo que $BY = 72 + 3x = AY\,AB$, pero como $AB = 10$ se tiene que $AY = \frac{36}{5} + \frac{3}{10}x$. Pero $AY = GD + 3$ y $GD = \frac{21}{5} + \frac{3}{10}x$ entonces $DB = GD\,GB = \frac{21}{5}x + \frac{3}{10}x^2 = 36$. Si se toma a 3 como factor común se obtiene $\frac{x^2}{10} + \frac{7}{5}x = 12$. Multiplicando por 10 esta ecuación se llega a que $x^2 + 14x = 120$, de modo que $x = 6$.

En notación algebraica el problema se plantearía de la siguiente manera: con $x$ y $x - 10$ como las partes, y $p - 3$ y $p$ como los respectivos precios, entonces debe satisfacerse la siguiente ecuación:

$72 = p(10 - x) + (p - 3)x$, de donde

$10p - px + px - 3x = 72$, de aquí que

$$10p = 72 + 3x$$

$$p = \frac{3}{10}x + \frac{36}{5}$$

$$p - 3 = \frac{3}{10}x + \frac{21}{5}$$

$$(p - 3)x = \frac{3}{10}x^2 + \frac{21}{5}x$$

Y como $(p-3)x = 36$ se sigue que:

$$(p-3)x = \frac{3}{10}x^2 + \frac{21}{5}x = 36$$

Por tanto $x = 6$.

Para llegar a la solución del problema, el método que utilizaba Abu Kamil requería de la geometría que se presenta en la cultura griega para justificar sus procedimientos. Lo mismo sucedía con su antecesor al-Khwarizmi, quien basaba su análisis en una serie de transformaciones geométricas que iniciaban con una figura dada cuyos segmentos (longitud y anchura) representaban las incógnitas, y seguía con una serie de pasos que terminaban convirtiendo dicha figura en un cuadrado cuya área fuera conocida; en esto es muy similar a lo que encontramos previamente en la solución de cierto tipo de problemas semejante a la que mostramos en el primer capítulo de esta tesis cuando analizamos contenidos de tablillas babilónicas. Esto muestra la importancia que aún tenía la geometría en las justificaciones que ofrecían los matemáticos de los procedimientos que utilizaban para resolver problemas. Asimismo se hace patente que a pesar de tener identificada ya en el siglo XI d.C., una escuela de solución de problemas, y por ende una disciplina de carácter matemático, ésta, en sus entrañas, seguía siendo dependiente de la antigua geometría.

## CAPÍTULO 5. EPÍLOGO: EL DESPERTAR DE LA MATEMÁTICA ÁRABE EN OCCIDENTE.

Las matemáticas asociadas con las escuelas de *abbacus* –latín para *abbaco* en italiano o *ábaco* en español– constituyen una serie de prácticas, métodos y enseñanzas que se enseñaban desde el siglo XIII hasta mediados del XVI en un corredor geográfico que abarca la zona desde Génova hasta Venecia, pasando por Milán, Florencia, Mantua y Padua y cuyas secuelas se pueden todavía vislumbrar en parte de los contenidos de nuestra enseñanza de la matemática en los niveles medio y medio superior. Su base social eran las llamadas 'escuelas de ábaco' a las que asistían los jóvenes que aspiraban a integrarse a los gremios de comerciantes, artesanos y los aún no llamados 'artistas', si bien en ocasiones también asistían a ellos los hijos de la aristocracia. Estos estudios duraban alrededor de dos años y los estudiantes se inscribían entre los 11 y los 13 años. Después de egresados podían, con lo aprendido, dedicarse a actividades propias de la clase burguesa-comerciante, a servir a personas adineradas que requerían administradores de sus negocios, o podían ingresar a alguna universidad para estudiar Leyes, Medicina o Filosofía, o también podían ingresar a una *botegga* o taller para dedicarse a la pintura, la escultura o la arquitectura/ingeniería.

Al referirse a estas escuelas casi siempre se supone que las matemáticas que ahí se enseñaban eran las herederas inmediatas, con pequeños añadidos, del *Liber abaci*[80] o de la *Practica de geometría*, obras de Leonardo de Pisa (c. 1170-1250), mejor conocido como Fibonacci, apodo póstumo y derivado de ser hijo de Guglielmo *Bonacci* (simple o bien intencionado). Se dice también que Fibonacci los escribe basándose en material recogido durante sus largos viajes a varios países en torno del Mediterráneo, en particular al puerto norafricano de Bugia alrededor de 1185. A esto habría que añadirle lo que habrá encontrado en sus periplos por el área ibero-provenzal en lo que se refiere a material matemático originado en las zonas ibéricas dominadas por la cultura árabe desde el siglo VIII. Y es en estas zonas donde algunos, como Høyrup, sostienen se debe buscar el origen de la

[80] Sigler, *Fibonacci*, 2003.

tradición abacista medieval, lo cual haría de Fibonacci solo un eslabón, si bien importante, en la cadena de transmisión de conocimientos matemáticos desde el mundo árabe al universo latino.[81] Esto hace del *Liber abaci* un fruto de la continuidad de una tradición que se alimenta de las aportaciones directas o indirectas de personajes como Juan Hispano, Pedro Alonso, Abraham ben Ezra, Abraham bar Hiyya, Adelardo de Bath y Gerardo de Cremona, todos ellos traductores al latín de obras griegas vertidas al árabe y disponibles en la península ibérica. Frente a esto palidecía el legado griego que transitaba por la vía latina: la *Institutio Arithmetica* de Boecio (524†), una adaptación un tanto pobre de la *Introductio Arithmeticae* de Nicómaco (100 d.C.), y su otra adaptación, igualmente rebajada, debida a Casiodoro (475-570), y la espectacular por su tamaño, pero poco confiable, *Etimologías* (c. 634) de Isidoro de Sevilla (c. 556-636).

Estos ejemplos de lo que acontecía en Occidente respecto de la transmisión o fomento del saber griego muestran un estancamiento, por demás evidente en el desarrollo de las matemáticas, de ahí que hasta el siglo XII no se presentó nada que pudiera representar un interés por la ciencia. Y las mismas *Etimologías* dan cuenta de este oscurantismo en cuanto al saber científico, pues de sus 20 libros solo 3 se ocupan de matemáticas, y ello con múltiples errores y muestras de falta de selectividad del material. Lo que hace patente es un alejamiento de una cultura que valoraba el conocimiento del mundo, y que veían en las matemáticas no algo con valor propio o práctico, sino solo porque para la teología resultaba una manifestación de los planes del Creador y que permitía describir parte de su obra. No por otra cosa este prototipo de enciclopedia formaba parte de los textos presentes en todo monasterio medieval de prestigio. Como contraparte a esta obra, en las islas británicas se intentó tener un nivel superior en cuanto a conocimientos científicos, y en esta empresa destacó Beda (673-735), llamado el Venerable, que además de sus trabajos sobre la elaboración de calendarios también fue el autor del *Aritmethicus Propositionibus*.

[81] Høyrup, 2005, "Leonardo Fibonacci and Abbaco culture …", p. 23-24.

Si volvemos nuestros ojos al califato árabe de Córdova y su área de influencia, encontramos a matemáticos vinculados con una llamada escuela que giraba en torno de Maslama, matemático madrileño, y que incluía nombres como el de Ibn al-Samh y al-Zaharawi, quienes durante el siglo X ya habían escrito 'aritméticas prácticas' del tipo de lo que en Occidente serían llamadas 'aritméticas comerciales' y que en árabe eran conocidas como *al-Muawalat* y hoy se refieren a transacciones financieras. Todavía confinados a los territorios andalusíes, en el siglo XI hubo prestigiados matemáticos como al-Mu'taman, Ibn-Sayyid y al-Yayyani, y a quienes se suma el desconocido autor del *Liber Mahameleth*,[82] (*Libro de las transacciones*) texto no muy estudiado hasta fechas recientes, pero que se sabe presenta la estructura de las aritméticas comerciales típicas de las escuelas italianas de ábaco.

La autoría del *Liber Mahameleth* no ha sido establecida de manera indiscutible. Hay quienes lo atribuyen a Domingo Gundisalvo, quien lo habría redactado en Castilla entre 1143 y 1153, y que trabajaba bajo la influencia de los intelectuales y traductores de la escuela de Toledo. La manera de presentar la parte aritmética lo sitúa dentro de las prácticas de estudio de las familias de comerciantes de la zona que elaboraban material de estudio para uso privado, el de las personas cercanas a su medio. Jacques Sesiano, en la introducción a la edición en inglés del *Liber*, atribuye su autoría a Juan de Sevilla, apoyándose en que muchos pasajes de su *Liber algorismi* son idénticos a partes del *Liber Mahameleth*.[83] Juan de Sevilla vivió en la parte mora de España y podía leer latín, al igual que muchos hebreos leían en árabe, lo cual fertilizó el intercambio de ideas e información entre las tres culturas. Su texto ilustra la manera de expresarse de una persona educada, lo cual contrasta con los burdos textos de, seguramente, otro Juan que vivió por la misma época, pero que siembra cierta duda sobre cuál de los Juanes fue el autor de este tratado.

El texto muestra una riqueza de información inusual para la época, atendiendo tanto a cuestiones teóricas como a las prácticas, presentes en partes separadas del escrito. De la primera lo importante es que se ocupa del

[82] Sesiano, 2014, *The Liber mahameleth*.

[83] *Ibid.* p. xix.

sistema de numeración posicional y de los algoritmos asociados con su uso operativo; también atiende a la teoría de proporciones y a lo que describiríamos como problemas asociados con la solución de ecuaciones de 1° y 2° grado. A su vez, la sección de la 'matemática práctica' presenta problemas que surgen en la vida cotidiana y que tratan de la compraventa de mercancías, cambios de monedas, equivalencias en sistemas de medidas espaciales o de pesos, mezcla de materiales, contrataciones de obreros, ganancias bajo ciertas condiciones, etc. La manera como presenta este material, sobretodo en la parte teórica, invoca una y otra vez la presencia de Euclides, señalando la necesidad de conocer el conjunto de su obra, y también hace reconocimientos a las aportaciones de Arquímedes y a las mucho más recientes de al-Khwarizmi y Abu Kamil. Si atiende uno a los comentarios de Sesiano al *Liber Mahameleth*, éste tuvo una pobre recepción, debido, seguramente, a que iba dirigido a un público culto y resultaba demasiado avanzado para sus lectores naturales, los comerciantes y administradores, y en contraste, falto del rigor euclidiano ante los ojos de los pocos especialistas en estos temas.

No sorprende que todavía para fines del siglo XII la obra de ilustres matemáticos árabes como Omar Khayyam,[84] no fuera conocida en Occidente. Su *Tesis sobre demostraciones de álgebra y comparación* (1170) –también conocido como *Sobre las demostraciones de los problemas del álgebra y la almucabala* y su franco reconocimiento a ser heredera intelectual de al-Khwarizmi– nos presenta el primer método de solución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas, superando con ello a al-Khwarizmi, a partir de intersecciones de secciones cónicas, lo cual le permitía encontrar una raíz positiva y a su vez le permite demostrar que dichos problemas admiten una segunda solución. Y en algo se adelantó a su tiempo, concibiendo la posibilidad de 'demostrar' que algo no es el caso refiriéndose a la construcción de soluciones de un problema. Su afirmación de que no se pueden hallar lo que hoy plantearíamos como las raíces de las ecuaciones de tercer grado mediante 'regla y compás' no era algo que formara parte del universo matemático. La existencia de soluciones para un problema se exhibía encontrando la solución, y si no se encontraba solo significaba que hasta el momento no había sido

[84] U Omar al-Jayyam u Omar ibn al-Jayyam (1048-1131).

posible hallarla, calcularla bajo las condiciones establecidas. La no existencia de soluciones de una ecuación de cierto tipo bajo la limitante de solo utilizar los postulados euclidianos fue algo que solo pudo ser demostrado hasta 750 años más tarde.

Omar Khayyam usó la numeración posicional y el *zephirum* o cero y, también trascendental para la constitución del álgebra en el sentido que la entendemos hoy, clasificó a las ecuaciones de tercer grado en 19 formas canónicas –en la manera como al-Khwarizmi clasificó en seis casos las ecuaciones de segundo grado– y planteó su solución general como intersecciones de cónicas. No era éste un ejercicio de solución de problemas concretos, como ocurría en los textos previos inmersos en esta tradición, sino es la abstracción, el afán de mostrar soluciones generales, lo que impulsa a Khayyam, es decir, es el interés de un matemático haciendo matemáticas 'puras'.

Sin embargo, el mayor impulso para difundir el uso de la simbología árabe-hindú y de procedimientos *cuasi*-algorítmicos para resolver problemas de índole matemática provino de las necesidades de la banca y el comercio y de las escuelas que con tal fin se crearon desde mediados del siglo XIII. En nuestra historia el papel más importante le es conferido a Leonardo de Pisa y a su *Liber abaci* –escrito alrededor de 1202 pero adoptando su forma final hasta 1228–, aunque en términos de difusión o fama en su momento, era superado por el *Carmen de Algorismo* (c. 1225) del francés Alexander de Villa Dei o Villedieu[85] (1175-1240), y el *Algorismo vulgaris* de Juan de Sacrobosco[86] (1195-1256), escrito entre 1225 y 1230, es el primer texto que introduce en el *curriculum* universitario el uso de los números indo-arábigos. El libro del francés estaba escrito en verso y esto facilitaba el aprendizaje de su contenido dado que los estudiantes recitaban de memoria sus estrofas y en caso de duda consultaban el escrito en prosa de Sacrobosco.

---

[85] Autor también de *De sphæra*, y de *De arte numerandi.*

[86] Johannes o Ioannis de Sacrobosco, o John of Holywood, autor del *Tractatus de Sphaera* (c. 1230), el libro de astronomía elemental más difundido y leído de la Edad Media.

Es en este panorama que aparece y se difunde el libro de Fibonacci, estructurado en 15 capítulos. En el primero presenta la numeración indo-arábiga y la notación posicional, en los siguientes 4 capítulos discute los algoritmos de la multiplicación, suma, resta y división, siguiendo este orden y, sorprendentemente también se ocupa de la descomposición en factores primos. Los capítulos 6 y 7 se ocupan de fracciones. Del 8 al 11 aparece la parte medular en cuanto a la importancia del texto, pues aquí están los problemas relevantes para los comerciantes: cuestiones de sociedades mercantiles, cambios de moneda, aleaciones y por último lo que se podría describir como matemáticas recreativas, algo que previamente no parecía merecer el ser incluido en un libro de matemáticas propiamente dicho. Los capítulos 12 y 13 vuelven a lo que les interesaría a los lectores matemáticos: la solución de ecuaciones indeterminadas. El 14 continúa con el cálculo de raíces cuadradas y cúbicas. Finalmente, el último capítulo regresa a las raíces del arte de la 'restauración' o 'recomposición' y de la 'oposición', retomando el camino ya trazado por al-Khwarizmi, y a esto le añade problemas geométricos y otros donde aparecen las fracciones continuas.

La recepción del tratado de Fibonacci no fue positiva al inicio. Hacía falta en su entorno un número crítico de personas que supieran valorar su importancia. Fibonacci había logrado conjuntar una colección de saberes, habilidades matemáticas, y procedimientos un tanto ajenos a la cultura latina del siglo XIII. Se enfrentaba, además, a la poca aceptación del gremio matemático posiblemente a causa de una serie de confusiones sobre la validez o desconfianza que suscitaba el uso de la numeración indo-arábiga. Y llegó a suceder que en los *Statuti dell'Arte del cambio di Firenze*, reglamento que regía las actividades comerciales en Florencia, se prohibió el uso, en documentos legales, de los símbolos y letras utilizados en los libros de ábaco para referirse a elementos matemáticos.

Finalmente este obstáculo fue superado una vez que se vieron las ventajas de la representación posicional y la sencillez de las operaciones aritméticas tal y como las ofrecía el *Liber abaci*, más aún si se comparaba con las retorcidas operaciones y la complejidad que revestía la representación en números romanos, y las dificultades asociadas con el sistema propuesto por

Gerberto de Aurillac, si bien éste último requería algún nivel de conocimiento de las cifras árabes.

Resulta paradójico que la misma clase mercante que a fin de cuentas mayores beneficios obtendría, era la que más se oponía al uso de la propuesta de Fibonacci. La aceptación primero y la voraz apropiación de los métodos de notación y de cálculo propuestos por los heraldos de una nueva forma de elaborar cuadernos de contabilidad tomó casi un siglo. La fuerza que impulsó esta transformación, y la simple práctica de realizar operaciones que resultaran más sencillas gracias a la nueva matemática difundida por los llamados maestros de ábaco –y Fibonacci parece haber sido el primero de ellos–, llevó irremediablemente a que se fundaran escuelas cuya tarea primordial era la enseñanza de estos métodos de cálculo y a plasmar sus resultados en los registros contables que, convertidos en moda al inicio, pasaron a ser indispensables primero y obligatorios posteriormente, tanto para llevar ordenadamente los aconteceres financieros del negocio como para rendir cuentas fiscales a la localidad. Así, llevar la contabilidad pasó de ser una ayuda a la memoria a instaurase como un instrumento de gestión, cada vez más sofisticado y funcional. Tal fue la confianza que adquirió el hecho de 'llevar la contabilidad' que pronto adquirió validez jurídica en cuestiones legales.[87]

La primera escuela de ábaco de la que se tiene noticia fue fundada en San Gimignano,[88] en 1279, a solo 50 años de la versión definitiva del *Liber abaci*. El registro de tal hecho sigue en los archivos de la localidad y revela que era financiado tanto por la ciudad como por los diferentes gremios de comerciantes, lo cual permitió que fuera una institución pública y no privada. A ella y a las que pronto se abrieron desde Florencia hasta Umbría, y desde Génova hasta Venecia, acudían los hijos de los comerciantes, artesanos y aún los de la burguesía ascendente y algunos hijos de la nobleza italiana. El término ábaco que identificaba la naturaleza de estas escuelas no se refería al instrumento para contar sino a la disciplina. Y de la mano de la aparición de estas escuelas vino la difusión del sistema árabe de manejo de cifras y

[87] Una historia interesante, aunque parcial, de los vínculos entre las matemáticas y los intereses de los comerciantes se puede ver en Hadden, 1994.

[88] Colli, 2012, p. 281.

símbolos y sus métodos de cálculo. Esto tuvo otro efecto colateral: el aumento de los niveles de alfabetización, puesto que dominar las técnicas de la matemática comercial requería saber leer y escribir, si bien estas dos últimas cosas se aprendían previamente en las escuelas de gramática. Esta organización de la enseñanza en el Medievo mantiene cierta influencia que se hace patente en que Inglaterra todavía denomina *Grammar School* al nivel inferior de la enseñanza, en el que se aprende a leer y escribir.

En torno de las escuelas de ábaco floreció una industria de producción de manuales o libros para beneficio de alumnos y practicantes de las artes matemáticas, en los cuales era evidente la influencia de Fibonacci, y a través de él las de al-Khwarizmi y Abu Kamil, de quienes se puede seguir la repetición de planteamientos y de ejemplos y ejercicios en los que ni siquiera se cambian los valores de los elementos o parámetros utilizados. Estos manuales constituían una verdadera vulgarización de las matemáticas árabes y aun de la compilación del pisano. Y la califico de 'vulgarización' en tanto que va dirigida al vulgo, al lector que no necesariamente poseía un entrenamiento clásico en las artes del cuadrivio.[89] Lo que caracterizaba a estos manuales era, por un lado, el bajo nivel del fundamento teórico, limitándose a las instrucciones de cómo resolver cierto tipo de problemas estándar, y a dejar de lado las partes más complicadas de tratados como el *Liber abaci* y los de la tradición árabe, y por el otro el estar escritos, las más de las veces, en los dialectos locales.

Pero los avances plasmados en los novedosos textos que dieron lugar a los libros de ábaco no serían olvidados, sino todo lo contrario. Iniciado el siglo XIII la puerta estaba abierta para que ilustres personajes como Jacopo da Firenze, quien nos heredara su *Tractatus algorismi* (1308), Paolo Gherardi, autor del *Libro di ragioni* (1328), y otros más cuyos nombres se pierden en la bruma de las bibliotecas y archivos europeos,[90] se ocuparan de los problemas

---

[89] El *cuadrivio* era la base de una formación matemática y comprendía el estudio de las cuatro disciplinas básicas: aritmética, geometría, astronomía y música o armonía. Los textos utilizados en la baja Edad Media eran las traducciones de los textos matemáticos griegos de la antigüedad, los comentarios a estos textos, y algunas contribuciones de autores medievales.

[90] En los últimos años Enrico Giusti y Elizbetta Ulivi han realizado estudios exhaustivos sobre la tradición matemática ligada con las escuelas de ábaco y sobre los avances en los terrenos del álgebra en ese periodo. Un texto por demás interesante sobre esta temática es ULIVI, E. (1994). *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*. E. GIUSTI, & C. MACCAGNI (Eds.). Giunti, Firenze.

algebraicos y las técnicas de solución que siglos adelante serían reconocidas como una nueva disciplina, a saber, el álgebra.

En 1344 el Maestro Dardi di Pisa[91] escribió el *Aliabraa argibra*, el tratado en lengua vernácula más antiguo que se conserva y que está dedicado exclusivamente al álgebra.

Esta sucinta historia de la introducción del pensamiento proto-algebraico en Europa, particularmente en Italia-, toca a su fin. En este epílogo ya no se pretendía analizar los detalles del pensamiento matemático, tal como se hizo en los capítulos precedentes. En este caso el interés era no dejar una historia del todo inconclusa, y con tal propósito en mente decidí cerrar la tesis presentando los efectos de los textos árabes en la construcción de una terminología y su manejo en el naciente ámbito de las matemáticas comerciales. En este contexto las sutilezas del ‘álgebra’ interesaban solo a unos cuantos espíritus adelantados a su época. Con todo, para fines del siglo XIV, la semilla algebraica había echado raíces y en dos siglos se verían los frutos.

[91] Van Egmond, *The algebra of master Dardi of Pisa*, 1983.

## CONCLUSIONES:

En este trabajo se examinaron diferentes etapas de construcción de lo que llegaría a ser identificado como el pensamiento algebraico. Esto se hizo analizando ejemplos representativos, extraídos de fuentes originales –aunque mediando una traducción a lenguas modernas-, que ilustran las formas de conceptualizar los problemas en distintas épocas y que quedaron plasmadas en textos que hoy se consideran clásicos o detonantes de nuevos enfoques.

Un sector importante de la historiografía más ortodoxa de mediados del siglo XX sitúa el nacimiento del pensamiento algebraico en los contenidos de algunos textos de la antigua Babilonia; por otra parte, hubo quienes sostuvieron que una especie de álgebra ya está presente como guía de los contenidos de las proposiciones que integran el Libro II de los *Elementos* de Euclides. Un sector de los estudiosos que sostiene esto también cree ver una influencia de la matemática babilónica sobre el 'álgebra' griega, y con el fin de entender esta posición se exploraron, en las partes relevantes, dos de las obras más importantes y representativas de la matemática griega: los *Elementos* de Euclides y la *Aritmética* de Diofanto. Como continuación de este estudio se abordó la contribución árabe a esta problemática, enfocando la atención en la que muchos consideran como la obra fundacional del álgebra, el *Kitāb al-jabr wa'lmuqābala* (*Libro de restauración y oposición*) de al-khwarizmi, y siguiendo con la obra más importante de las varias que adoptaron tanto el enfoque como la selección de contenidos de quien se tuvo como su heredero intelectual, el egipcio Abu Kamil. Se hizo notar el enfoque más sofisticado, por apelar directamente a los teoremas del Libro II de los *Elementos*, que adopta Abu Kamil, pues supera la etapa de la visualización, más intuitiva y dependiente de la construcción específica de figuras inspiradas por los contenidos de los problemas que se buscaba resolver. En lugar de ello Abu Kamil configura las soluciones apelando a los enunciados euclidianos.

A lo largo de estas revisiones se identificaron dos modos, estrechamente vinculados, de resolver los problemas: uno que se podría describir como algorítmico, y que está constituido por instrucciones verbales –

aunque se asienten mediante un sistema de escritura– que señalan paso a paso las operaciones que se deben realizar para obtener la solución. Y todo esto sin utilizar algún tipo de aparato metodológico que recurriera a símbolos y operaciones con estos. Más aún, durante las diferentes etapas o pasos que integran el proceso de solución no son objeto de explicación o justificación alguna. Son solo instrucciones a seguir. Más adelante, excepto en la obra de Diofanto, en los textos o tablillas analizados aparecen las justificaciones de carácter geométrico, sustentadas sobre la base de una especie de traducción de los problemas a situaciones geométricas, y en las que las operaciones verbales citadas previamente encuentran significado como operaciones donde se añaden o quitan líneas, o superficies, o se reacomodan partes en las que se subdividen los objetos originales. Pero todo esto obedece a lo que el lector instruido comprende a cabalidad siguiendo la lógica de los objetos espaciales que se agrupan, separan o reacomodan. Nada de lo aquí expuesto responde a lo que se considera las características esenciales del pensamiento algebraico constituido como tal según los criterios usuales. Habría una tercera etapa, no analizada en esta tesis, que es identificada como 'dinámica' por Katz *et a*l. en su excelente estudio histórico sobre el desarrollo del álgebra, y en el cual coloca el nacimiento del 'álgebra' en el momento en que se configura la sistematización de métodos de representación y análisis de curvas y ecuaciones que vino a ser conocido como geometría analítica.[92]

Después de haber comparado y analizado los procesos desarrollados en dichas obras para resolver los problemas propuestos en las mismas, con los métodos utilizados por el álgebra que actualmente conocemos, es posible concluir que a pesar de haber una estrecha relación entre la geometría, la aritmética y el álgebra, vincular esta última con la generación de soluciones de los ejemplos correspondientes a las dos primeras disciplinas mencionadas, no tiene sustento dado que supondría la utilización, en primera instancia, de 1) un lenguaje simbólico operativo, que no solamente fuera capaz de plantear problemas en sus propios términos, sino que además permitiera explicar o justificar los pasos a seguir para la solución del problema. Para ello debía traducir, sin distinción, términos geométricos y aritméticos, dando como

[92] Véase Katz y Parshall (2014), *The Taming of the Unknown*, pp. 7- 8.

resultado un estudio más amplio y abstracto que dependiera menos de la intuición. Esto llevaría, a su vez, a una segunda característica: 2) el uso de relaciones matemáticas expresadas simbólicamente, siendo las ecuaciones las principales representantes de éstas en el álgebra. Y finalmente 3) la posibilidad de resolver problemas únicamente con la utilización de herramientas y nociones propias de la disciplina, es decir, que adquiriera una identidad propia que, entendemos, marcaría la autonomía de la misma.

Los rasgos mencionados en el párrafo anterior determinan las tres principales características del pensamiento algebraico. Con los elementos presentados en este trabajo y las interpretaciones sustentadas en las evidencias históricas, sostengo que suponer la utilización del andamiaje algebraico en los casos examinados en esta tesis requeriría de la utilización de herramientas y nociones correspondientes a un conocimiento inexistente en aquellas épocas. Que algunos conocedores del álgebra actual quieran ver esta disciplina, o a una versión no completamente delineada de ella, como algo ya presente, si bien no completamente constituido como un sistema, es un anacronismo.

El origen de ello puede ser, como lo señala Rudman, el resultado del énfasis que los primeros estudiosos –Otto Neugebauer entre ellos–[93] pusieron en la preservación y traducción de los textos antiguos, con la premura que su rápido deterioro reclamaba, y que no les permitió analizar con calma las evidencias que iban rescatando antes de emitir juicios acerca de su significado y alcance. Era tal la estatura académica de varios de los primeros analistas de la herencia matemática de los babilonios, que sus primeras impresiones u opiniones fueron aceptadas sin que mediara el espíritu crítico que tales aseveraciones merecían. Con el tiempo, al no ser cuestionadas, estas interpretaciones pasaron a ser la ortodoxia de la interpretación de los alcances de la matemática babilónica y parte de la griega. A ello se sumó la posibilidad, y la facilidad evidente, que brinda el álgebra de traducir y explicar los procesos de solución que estos documentos nos comunicaban, así como la posible

[93] Neugebauer fue uno de los primeros estudiosos de la ciencia antigua, en particular de las matemáticas y la astronomía, que se ocuparon de aprender las lenguas en que fueron redactados los primeros escritos con contenido científico. Sobre el papel de Neugebauer en esta empresa de rescate del material de interés para los historiadores de la ciencia ver Rudman, 2010, p. 70.

identificación, en algunos casos, de identidades algebraicas en proposiciones y problemas. Así ocurre con algunas de las proposiciones encontradas en los *Elementos* de Euclides que, para evitar las complicaciones derivadas de seguir los razonamientos geométricos que las demuestran, quienes en nuestros días las presentan ante el alumnado prefieren explicarlas y justificarlas apelando a su traducción a la terminología algebraica y a las posibilidades operativas que esta disciplina ofrece.

Concluyo retomando una cita al trabajo de Nathan Sidoli, quien en 2013 escribió:

"El nuevo enfoque historiográfico en torno de la historia del álgebra [opuesto al de Neugebauer, Weil y demás creyentes en la existencia de un cuerpo de conocimiento que asimilan a lo algebraico] que fue motivo de tantos debates en los años 70, se ha convertido en la corriente principal. Hoy día ya no existen estudiosos serios que a la pregunta sobre cómo es que surgieron las matemáticas griegas recurran como respuesta a alguna probable perspectiva lógica o matemática [sin evidencias concretas] o que traten de entender la motivación para los métodos encontrados en Apolonio o Diofanto recurriendo a teorías matemáticas y conceptos desarrollados muchos siglos después de los tiempos en los que a estos matemáticos les tocó vivir."[94]

[94] Sidoli (2013), "Research on Ancient Greek Mathematical Sciences …", p. 43.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Aaboe, A. (1974). “Scientific astronomy in antiquity”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *276* (1257), pp. 21-42.

Arrighi, G. (1966). *Leonardo Fibonacci La Practica di Geometria Volgarizzata da Cristofano di Gherardo di Dino cittadino pisano dal codice 2186 della Biblioteca Riccardiana de Firenze*. Pisa: Domus Galilaeana (hereafter: Arrigi, Cristofano).

Bashmakova I. G.; Smirnova G. S. (2000). *The beginnings and evolution of algebra* (pp. 37- 56). United States of America: The Mathematical Association of America.

Calinger, R. (1996). *Vita mathematica. Historical research and integration with teaching* (pp. 45-49). The United States of America: Cambridge University Press.

Charbonneau, L. (1996). *From Euclides to Descartes: Algebra And Its Relation To Geometry*. (capítulo 2) en *Approaches To Algebra Perspectives for Reseach and Teaching* editado por Bednarz N., Kieran C. y Lee L. Netherlands.

Høyrup, J. (2012). *The history of mathematical proof in ancient traditions* (pp. 362- 383). New York: Cambridge University Press. Editado por Chemla K.

Christianidis, J. (2007). “The way of Diophantus: Some clarifications on Diophantus' method of solution”. *Historia Mathematica*, *34*(3), pp. 289-305.

Christianidis, J., & Oaks, J. (2013). “Practicing algebra in late antiquity: The problem-solving of Diophantus of Alexandria”. *Historia Mathematica*, *40*(2), 127-163.

Dzielska, M. (2009). *Hipatia de Alejandría* (Vol. 42). Siruela.

Eecke V.P. (1959). *Diofanto. Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones. Diophante d'Alexandrie,* Francia: Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.

Euclides (1991). Euclides Elementos Libros I- IV (vol. 81.). Madrid: Gredos. Introducción de Luis Vega. Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños.

Friberg, J. (2007). *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts: Manuscripts in the Schøyen Collection: Cuneiform Texts I*. Springer Science & Business Media.

Hadden, R. W. (1994). *On the shoulders of merchants: Exchange and the mathematical conception of nature in early modern Europe*. SUNY Press.

Heath L. T. (1910). *Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra*. Inglaterra: Cambridge University Press.

Høyrup, J. (1994). *In measure, number, and weight: Studies in mathematics and culture*. SUNY Press.

Høyrup, J. (1996). "Changing trends in the historiography of Mesopotamian mathematics: An insider's view". *History of science*, *34*(1), 1-32.

__________...(2001). "On a collection of geometrical riddles and their role in the shaping of four to six 'algebras' ". *Science in Context*, *14*(1-2), 85-131.

Høyrup, J. (2005). "Leonardo Fibonacci and Abbaco culture. A proposal to invert the roles". *Revue d'histoire des mathématiques*, *11*(1), 23-56.

__________ (2013). *Lengths, widths, surfaces: A portrait of old Babylonian algebra and its kin*. Springer Science & Business Media.

__________ (2016). “What is 'geometric algebra', and what has it been in historiography?” encontrado en http://forskning.ruc.dk/site/files/56534607/JH_PresentationParis.PDF

Infante, J. F., & Puig, L. (2009). “Demostraciones de los algoritmos de las ecuaciones de segundo grado en el kitâb al-jabr w'al-muqâbala de al-Khwârizmî.” *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM*. Santander.

Karpinski L. C. (1914), “The Algebra of Abu Kamil” en *The American Mathematical Monthly*, Vol. 21, (No. 2), 37- 48.

Katz, V. J., & Imhausen, A. (2007). *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook*. United States: Princeton University Press.

Katz, J.V.; Parshall, H.K. (2014). *Taming the unknown. A history of algebra from antiquity to the early twentieth century*. New Jersey: Princeton University Press.

Kerkhove, V. B. (editor) (2007). *New Perspectives on Mathematical Practices. Essays in Philosophy and History of Mathematics* (p. 10). Singapur: World Scientific Publishing.

Levey, M. (1966). *The Algebra of Abu Kamil. Kitab fı al-jabr (sic) wa’lmuqabal.* United States: University of Wisconsin Press.

Mahoney, M. S. (1994). *The mathematical career of Pierre de Fermat, 1601-1665*. United States: Princeton University Press.

Millán Gasca, Ana. (2004). *Euclides. La fuerza del razonamiento matemático*. España: Nivola.

Neugebauer, O. 1935–1937. *Mathematische Keilschrift-Texte I-III. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*. Reedición: Neugebauer, O. (2013). *Mathematische Keilschrift-Texte: mathematical cuneiform texts*. Berlin: Springer-Verlag.

Neugebauer, O., Sachs, A. J., & Götze, A. (1945). *Mathematical cuneiform texts* (Vol. 29). American Oriental Society.

Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity* (Vol. 9). New York: Courier Corporation.

Neugebauer, O. (1978). A history of ancient mathematical astronomy. *Journal for the History of Astronomy*, *9*, 201.

Puig, L. (2006). "La resolución de problemas en la historia de las matemáticas." *Matemáticas para el siglo XXI*, 39-57.

Puig, L. (2009). "Historias de al-Khwārizmī (3ª entrega). Orígenes del álgebra." *Suma*, *60*, 103-108.

__________ (2009b). Naïve, geometric and algebraic proof in ancient and modern times. Talk to the meeting *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics, and Mathematics Education (SemMHistEd) – 3rd Meeting*. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009.

Rashed, R.; Armstrong, Angela (1994). *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Paris: Springer.

Rashed, R. (Ed.). (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algebre.* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rosen F. (editor) (1831 y varias reediciones). *The algebra of Mohammed Ben Musa.* (p. 6). Londres: The Oriental Translation Fund.https://archive.org/details/algebraofmohamme00khuwuoft

Rudman P. S, (2010). *The Babylonian Theorem: The Mathematical Journey to Pythagoras and Euclid* (pp. 61- 84). New York: Grometheus Books.

____________ (2013). *Astronomy and history selected essays*. New York: Springer Science & Business Media.

Schappacher, N. (2005). *Diophantus of Alexandria: a Text and its History*. *Version en ligne: http://www-irma. u-strasbg. fr/~ schappa/NSch/Publications_files/1998cBis_ Dioph. pdf (consult. 6.10. 15)*.

Sesiano J. (2009). *An Introduction to the History of Algebra: Solving Equations from Mesopotamian Times to the Renaissance* (vol. 27, p. 63). U.S.A.: American Mathematical Society.

Sesiano, J. (2014). *The Liber mahameleth*. Switzerland: Springer International Publishing.

Sidoli, N. (2014). "Research on Ancient Greek Mathematical Sciences, 1998-2012". In *From Alexandria, Through Baghdad* Germany: (pp. 25-50). Springer Berlin Heidelberg.

Sigler, L. (2003). *Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation*. New York: Springer Science & Business Media.

Szabó, Á. (1969). *Anfänge der griechischen Mathematik*. Germany: Walter de Gruyter GmbH & Co KG.

Toomer, G. J. (1968). (BL van der) Waerden Die Anfänge der Astronomie. Greece: *The Journal of Hellenic Studies*, *88*, 192-194.

Ulivi, E. (1994). *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*. E. GIUSTI, & C. MACCAGNI (Eds.). Giunti: Firenze.

Unguru, S. (1975). On the need to rewrite the history of Greek mathematics. "*Archive for history of exact sciencesr"*, *15*(1), pp.67-114.

Unguru, S. (1979). "History of Ancient Mathematics Some Reflections on the State of the Art." *Isis*, 555-565.

Ur, J. A. (2010). "Cycles of civilization in northern Mesopotamia, 4400–2000 BC." *Journal of Archaeological Research*, *18*(4), 387-431.

Van Egmond, W. (1983). "The algebra of master Dardi of Pisa". En *Historia Mathematica*, *10*(4), pp. 399- 421.

Van der Waerden, B. L. (1954). *Science Awakening*, trans. *A Dresden. Noordhoff, Groningen*. Holland:

Weil, André. (1980). "History of mathematics: why and how." en *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Helsinki, 2 vols. 227-236.