UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA LÓGICA DE LA CIENCIA

C.S. PEIRCE Y EL ÁLGEBRA DE RELACIONES: UN CASO DE ESTUDIO EN LA TRADICIÓN ALGEBRAICISTA DE LA LÓGICA

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

PRESENTA:

FERNANDO CANO JORGE

TUTOR:

DR. J.J. MAX FERNÁNDEZ DE CASTRO TAPIA, UAM-I

CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE 2016

Para Abue.

Agradezco a la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca académica que me otorgó desde agosto de 2014 hasta agosto de 2016, tiempo durante el cual fue elaborado este trabajo.

Agradezco al Dr. Max Fernández por su dirección y apoyo en la elaboración de este proyecto, al Dr. Luis Estrada y al Dr. Raymundo Morado por su revisión y comentarios, al Dr. Mario Gómez y al Dr. Cristian Gutiérrez por su lectura y su participación en mi jurado, y a la Dra. Atocha Aliseda por sus consejos.

Extiendo también un especial agradecimiento al Dr. José Luis Rivera por introducirme al estudio de la lógica y a la filosofía de Peirce. Igualmente, agradezco a la comunidad de la Universidad Panamericana.

Agradezco a mis padres y a mis hermanos por su apoyo, paciencia y cariño; por todos esos sacrificios, desmañanadas y desveladas; y, especialmente, por nuestra estrecha unión que, sin duda, es aquello que nos ha hecho salir adelante.

Gracias, también, a mis amigos —Azul Santibañez, Juan Pablo Ahumada, Agustín Ojeda, Moisés Macías y Jorge Hernández— por su diálogo y compañía.

Índice general

Introducción

El siglo XIX fue de tremenda importancia para el desarrollo de la lógica matemática. Los cálculos lógicos y otros lenguajes formales que conocemos hoy pasaron por numerosas modificaciones y replanteamientos antes de llegar a satisfacer los ideales para los cuales fueron creados. Con frecuencia encontramos en los textos y cursos de lógica moderna una clasificación historiográfica de los movimientos que impulsaron el desarrollo de la lógica moderna: por un lado, en el continente europeo, el movimiento *logicista* —encabezado por Gottlob Frege y Bertrand Russell—, cuya pretención era fundamentar o reducir la aritmética —o incluso la matemática entera— a la lógica pura y la teoría de conjuntos; y, por otro lado, tanto en el continente europeo como en el americano, el movimiento *algebraicista* —encabezado por George Boole, Augustus De Morgan, y muchos otros—, cuya pretención —ciertamente, más modesta— era diseñar un lenguaje formal de tipo algebraico capaz de expresar y trabajar nociones y métodos propios de la lógica. Sin embargo, creemos que esta clasificación de los movimientos filosóficos y matemáticos que impulsaron el desarrollo de la lógica moderna no es del todo afortunada.

Aunque un análisis exhaustivo de los primeros acercamientos a una lógica simbólica podría llevarnos hacia la época de Gottfried Leibniz o incluso hasta la escolástica tardía, no parece demasiado aventurado afirmar que los trabajos que inauguraron exitosamente el estudio matemático de la lógica fueron (Boole 1847 y 1854). El nacimiento del álgebra booleana tuvo una recepción positiva en la comunidad matemática de su tiempo y pasó muy poco tiempo para que matemáticos y filósofos como Augustus De Morgan, William Stanley Jevons, Charles S. Peirce, Ernst Schröder, y otros, desarrollaran sus propias álgebras de la lógica. Sin embargo, aunque a los autores recién mencionados se les conoce como impulsores del movimiento algebraicista de la lógica, debemos tener en mente que los trabajos de Boole llegaron a Frege y lo sacudieron de forma tal que obras como la *Begriffschrift* o —más adelante, cuando Russell lee a Frege— los *Principia Mathematica*, vieron la luz del día gracias a la idea original de George Boole: diseñar un álgebra para la lógica.

Sin embargo, decir que la importancia del movimiento algebraicista estuvo en el hecho de haber influenciado a matemáticos como Frege y Russell, es decir muy poco. Ciertamente, es fácil justificar la afirmación anterior desde el impacto que tuvieron las obras de George Boole. Pero es muy poco conocido en la literatura filosófica e historiográfica de la lógica el hecho de que el movimiento algebraicista tuvo una influencia mucho más importante que la simple inspiración de la matematización de la lógica moderna. Y es todavía menos conocido el hecho de que pensadores distintos a Boole, dentro del movimiento algebraicista, fueron especialmente importantes en el desarrollo de la lógica moderna.

Charles S. Peirce fue un filósofo y científico estadounidense del siglo XIX frecuentemente reconocido por ser el fundador del pragmatismo. Sin embargo, la obra de este pensador es tan extensa y variada que la afirmación anterior está tremendamente lejos de caracterizarle adecuadamente. Peirce escribió sobre todas las ramas de la filosofía —generó, de hecho, su propio sistema filosófico—, e incluso contribuyó a la matemática —particularmente, en la teoría de la probabilidad—, la física y la química. Sin embargo, dentro de todas las áreas de interés de Peirce, la lógica resalta como la más importante. Sus contribuciones a la lógica incluyen escritos sobre la teoría de la verdad, la silogística, la abducción, la inducción probabilística, el álgebra de la lógica, la lógica proposicional, la lógica de primer y segundo orden, la teoría de conjuntos axiomatizada, las lógicas diagramáticas e, incluso, lógicas no-clásicas como las lógicas modales y las lógicas multivaluadas.

Peirce fue uno de los primeros estudiosos del álgebra booleana en el continente americano y de inmediato reconoció la importancia y el potencial que el trabajo de Boole poseía. Aproximadamente a partir de 1867 y después de leer las contribuciones de Augustus De Morgan, Peirce comienza a desarrollar sistemas algebraicos de la lógica modificando y añadiendo principios y notaciones con el fin de ampliar la expresividad de estos lenguajes formales. En particular, el hecho de que el álgebra de Boole fuera incapaz de expresar adecuadamente las proposiciones particulares motivó a Peirce a diseñar otro tipo de sistemas y notaciones. Después de casi veinte años desde sus primeras publicaciones sobre el tema, Peirce publica "On the Algebra of Logic" en 1885, un notable artículo que presenta de manera adecuada el álgebra o *lógica de relaciones*.

El álgebra de relaciones —o de relativos— parte de la idea de que no todas las proposiciones quedan adecuadamente capturadas en términos de clases simples e inclusiones, como se hacía en el álgebra de Boole. Peirce reconoce la existencia y la importancia de proposiciones que emplean términos relativos o relacionales, es decir, términos cuya función es enlazar al menos dos objetos entre sí. En ese sentido, términos como "amante de", "dador de algo a alguien", etc., son términos relativos. Fue precisamente este cambio de enfoque el que llevó a Peirce a desarrollar un lenguaje formal para la lógica que, como estudiaremos en el presente trabajo, dio lugar a múltiples descubrimientos y avances en el campo de la lógica matemática.

Dentro de las aportaciones que encontramos en (Peirce 1885), se encuentran:

1. El diseño de un álgebra equivalente a lo que hoy conocemos como lógica proposicional, y la propuesta de una axiomatización completa y correcta para este lenguaje.

2. El diseño de dos álgebras de relaciones equivalentes a lo que hoy conocemos como lógica de primer orden y lógica de segundo orden.

3. La invención de la teoría de la cuantificación y la distinción de órdenes, en este contexto.

4. La propuesta de una teoría de conjuntos axiomatizada, empotrada en su sistema de lógica de segundo orden.

Sin embargo, decir que todos estos logros fueron innovaciones del (Peirce 1885) es tan sólo una parte de la tesis que pretendemos mostrar aquí. Sería insatisfactorio señalar la existencia de un artículo en la obra de Peirce en el que se dan los logros arriba mencionados sin decir, también, cuál fue el impacto de este artículo. Ciertamente, los lectores de Peirce (1885) fueron matemáticos muy relevantes en la historia de la lógica —tales como Ernst Schröder— y se vieron influenciados por él de manera tal que adoptaron y heredaron los formalismos de Peirce. Este hecho histórico es, sin duda, poco conocido y tremendamente importante.

Que los trabajos de un lógico algebraicista como Peirce hayan llegado a influenciar a matemáticos que, a su vez, influenciaron a los logicistas en Europa sin duda pone en tela de juicio la validez de la distinción historiográfica que opone al movimiento algrebraicista con el movimiento logicista. Decíamos que esta distinción era poco afortunada precisamente por el hecho de que los trabajos de algunos lógicos, considerados dentro del movimiento algebraicista, fueron relevantes en el desarrollo de las obras normalmente consideradas dentro del movimiento logicista, de manera que más que una dicotomía parece haber una progresión o continuidad entre ellas. Más aún, tras estudiar las metas y los logros de los algebraicistas —al menos en Peirce—, y comparando estos con los propios de los logicistas, parece menos claro aún que exista una distinción tan tajante entre estas corrientes de investigación del siglo XIX.

Sin embargo, también sería insatisfactorio decir simplemente que las investigaciones algebraicistas influenciaron y culminaron en buena parte del trabajo logicista sin preguntarse, también, si existió algún compromiso filosófico, como sí lo hubo en el logicismo, que impulsara esta agenda. Parece que los compromisos filosóficos de Peirce, especialmente los de su propia sistematización de las ciencias y la filosofía, pueden dar cuenta de una motivación para el proyecto de diseñar álgebras para la lógica. Así como el logicismo está comprometido con cierta filosofía de la lógica y cierta filosofía de la matemática, las ideas de Peirce al respecto permiten comprender por qué fue natural que las investigaciones en lógica se tornaran, también, hacia la formalización.

Pero asumir que las agendas algebraicista y logicista tuvieron una filosofía de trasfondo similar o común y que esa es la razón por la que derivaron en ideales y logros compartidos es, como pretendemos mostrar, equivocado. En realidad, los compromisos de Peirce eran casi opuestos a los de Frege y Russell. Un breve análisis de las posturas filosóficas de Peirce y de los logros obtenidos por sus investigaciones lógicas permite derivar la notable conclusión de que el logicismo no fue condición necesaria, aunque sí suficiente, para desarrollar la lógica matemática como se hizo en el siglo XIX. Es decir, aunque los compromisos logicistas sin duda impulsaron las investigaciones lógicas hasta lo que hoy conocemos como lógica matemática, otra clase de compromisos filosóficos —incluso casi opuestos a los logicistas— también permitieron obtener resultados equivalentes o muy cercanos a lo que los logicistas desarrollaron.

En ese sentido, la tesis que defendemos es la siguiente: (**T**) *existe al menos un ejemplo del desarrollo de la lógica matemática en la traidición algebraicista —el trabajo de Charles S. Peirce— que muestra que los compromisos filosóficos del logicismo no eran el único camino para llegar a cálculos completos y correctos de la lógica proposicional y al desarrollo de una teoría axiomática de conjuntos y las lógicas de primer y segundo orden.*

Como sustento o premisas para la tesis (**T**), se encuentran: (**T1**) dentro de la tradición algebraicista de la lógica, existe al menos un estudioso de la lógica —Charles S. Peirce— cuyas poco conocidas investigaciones en lógica matemática fueron tan innovadoras y produjeron casi tantos resultados como los de las investigaciones logicistas; (**T2**) los logros de Peirce fueron relevantes para otros matemáticos notables del siglo XIX y ellos, a su vez, heredaron a otros investigadores los descubrimientos y notaciones de Peirce; y (**T3**) el trabajo de Peirce fue impulsado por compromisos filosóficos distintos y casi opuestos a los del movimiento logicista.

Nuestra exposición de la parte (**T1**) de la tesis se desarrolla en el Capítulo 1 del presente trabajo. Hemos optado por dedicar un capítulo entero del trabajo a la reconstrucción y sistematización del prolífico (Peirce 1885) por dos motivos: por un lado, para ofrecer al lector un acercamiento indirecto —tan leal al texto original como nos es posible— al (Peirce 1885); y, por otro lado, para construir el resto del trabajo en torno a esta exposición como punto de referencia. Presentamos en este capítulo los sistemas de lógica proposicional, lógica de primer orden, lógica de segundo orden y la teoría de conjuntos de Peirce.

La parte (**T2**) de la tesis está expuesta en el Capítulo 2 de este trabajo. Comenzamos explorando el papel de Boole y De Morgan en el álgebra de la lógica para avanzar hacia la influencia del trabajo de Peirce en Schröder, Löwenheim y Skolem. Posteriormente, estudiamos por qué, cómo, cuándo y a través de quiénes se originó la teoría de la cuantificación en la lógica de Peirce. Presentamos, después de esto, un par de pruebas metalógicas de la corrección y la completud del sistema de deducción natural que se desprende de la lógica proposicional de Peirce. Y, finalmente, estudiamos de manera breve la teoría de conjuntos axiomatizada de Peirce comparándola con los principios de Zermelo-Fraenkel (más Elección) y comentando un intento por axiomatizar la estructura de los números naturales utilizando esta teoría de conjuntos.

La parte (**T3**) de la tesis se discute en el Capítulo 3 de este trabajo. La exposición comienza con una somera presentación de los compromisos filosóficos de Peirce en cuanto a las ciencias, la filosofía, la lógica y la matemática, resaltando la importancia de su clasificación de las ciencias.

Posteriormente, nos preguntamos si Peirce era, en algún sentido, un logicista y respondemos negativamente a esto a través de los trabajos de Haack (1993) y Houser (1993) con el objetivo de afirmar, al término del capítulo, que las álgebras de Peirce fueron consecuencia de sus propios compromisos filosóficos cuyas diferencias frente a los compromisos logicistas son muy claras.

Capítulo 1

On the Algebra of Logic (1885)

Este capítulo tiene por objetivo dar una presentación sistemática del extenso, prolífico y poco estudiado artículo “On the Algebra of Logic: A contribution to the philosophy of notation” (1885)[1] de C.S. Peirce. En capítulos sucesivos de este trabajo proveeremos un análisis de los tópicos más relevantes que aparecen en el artículo de Peirce —principalmente, su sistema de lógica proposicional, sus sistemas de lógica de primer y segundo orden, y su axiomatización de una teoría de conjuntos, misma que será estudiada en paralelo a una axiomatización de la aritmética, también propia de Peirce aunque perteneciente a otro artículo. En ese sentido, se pretende que este capítulo sea el punto de referencia de la discusión filosófica e histórica que entablaremos en el resto del trabajo.

1.1. Los Objetivos de OAL

OAL comienza con una clara enunciación de los objetivos que se persiguen en la investigación del álgebra de la lógica:

> In this paper, I purpose to develop an algebra adequate to the treatment of all problems of deductive logic, showing as I proceed what kinds of signs have necessarily to be employed at each stage of the development. I shall thus attain three objects. The first is the extension of the power of logical algebra over the whole of its proper realm. The second is the illustration of principles which underlie all algebraic notation. The third is the enumeration of the essentially different kinds of necessary inference; for when the notation which suffices for exhibiting one inference is found inadequate for explaining another, it is clear that the latter involves an inferential element not present to the former. Accordingly, the procedure contemplated should result in a list of categories of reasoning, the interest of which is not dependent upon the algebraic

[1] Abreviaremos el título de este artículo como “OAL” de ahora en adelante.

way of considering the subject. I shall not be able to perfect the algebra sufficiently to give facile methods of reaching logical conclusions: I can only give a method by which any legitimate conclusion may be reached and any fallacious one avoided. But I cannot doubt that others, if they will take up the subject, will succeed in giving the notation a form in which it will be highly useful in mathematical work. I even hope that what I have done may prove a first step toward the resolution of one of the main problems of logic, that of producing a method for the discovery of methods in mathematics (Peirce, 1885, 3.364).

De forma general, el artículo propone un álgebra de la lógica que persigue:

OAL1 Una extensión en el poder —presumiblemente— expresivo y demostrativo de las álgebras booleanas hasta entonces conocidas;

OAL2 Encontrar y formular claramente algunos principios generales de las álgebras de la lógica; y

OAL3 Distinguir y explicar modos de razonamiento que sólo pueden darse explicitando nociones inferenciales.

En el análisis que llevaremos a cabo en otro capítulo de este trabajo, evaluaremos si Peirce cumple con estos objetivos y dilucidaremos cómo es que este proyecto aporta algo al interés principal de producir métodos para la matemática. A continuación, damos una presentación modernamente estructurada del OAL —donde es posible— y respetamos, *grosso modo*, el orden en el que Peirce presenta sus descubrimientos.

1.2. Un Sistema de Lógica Proposicional

En esta sección introducimos sistemáticamente el sistema de álgebra proposicional *Non-Relative Logic* (NRL) que Peirce traza en OAL.

1.2.1. Sintaxis de NRL

Los signos del lenguaje son:

NRL1 Variables proposicionales: x, y, z, etc.

NRL2 La barra sobre una variable representa la negación de esa proposición: $\bar{x}$.

NRL3 El signo de *suma lógica*: $+$

NRL4 El signo de *producto lógico*, representado por la adjunción de dos variables proposicionales: xy

NRL5 La *cópula*[2], denotada por $\prec$ y definida como: $x \prec y \overset{df}{=} \bar{x} + y$.

NRL6 Signos de agrupación: (,).

Sean α y β dos metavariables que representan cualquier fórmula de NRL. Las reglas de formación del lenguaje son:

NRLF1 Cualquier variable proposicional es una fórmula bien formada (fbf).

NRLF2 $\bar{\alpha}$ es una fbf.

NRLF3 Si α y β son fbf's, entonces $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ y $\alpha \prec \beta$ son fbf's.

NRLF4 Nada más es una fbf.

1.2.2. Semántica de NRL

NRLS1 Existen dos valores constantes: verdadero ($\mathbf{v}$) y falso ($\mathbf{f}$).

NRLS2 El valor de una variable proposicional es $\mathbf{v}$ si la proposición es verdadera, y $\mathbf{f}$ si la proposición es falsa.

NRLS3 Que una proposición es verdadera o falsa puede escribirse algebraicamente como la ecuación[3] $(x - \mathbf{f})(\mathbf{v} - x) = 0$; y, con este mismo método algebraico, la negación se define como $\bar{x} \overset{df}{=} \mathbf{f} + \mathbf{v} - x = 1 - x$.[4] Alternativamente, existe una función de verdad $\phi : FBF \to \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$, donde FBF es el conjunto de fbf's de NRL, tal que:

NRLS3.1 $\phi(x) = \mathbf{v}$ si x es verdadera; $\phi(x) = \mathbf{f}$ si x es falsa.

NRLS3.2 $\phi(\bar{x}) = \mathbf{v}$ si $\phi(x) = \mathbf{f}$; $\phi(\bar{x}) = \mathbf{f}$ si $\phi(x) = \mathbf{v}$.

NRLS3.3 $\phi(x + y) = \mathbf{v}$ si $\phi(x) = \mathbf{v}$ ó $\phi(y) = \mathbf{v}$ ó ambas; $\phi(x + y) = \mathbf{f}$ si $\phi(x) = \phi(y) = \mathbf{f}$.

NRLS3.4 $\phi(xy) = \mathbf{v}$ si $\phi(x) = \phi(y) = \mathbf{v}$; $\phi(xy) = \mathbf{f}$ en cualquier otro caso.

NRLS3.5 $\phi(x \prec y) = \mathbf{v}$ si $\phi(x) = \mathbf{f}$ ó $\phi(y) = \mathbf{v}$ ó ambas; $\phi(x \prec y) = \mathbf{f}$ si $\phi(x) = \mathbf{v}$ y $\phi(y) = \mathbf{f}$.

Notemos que a partir de NRLS3 sabemos que la implicación $x \prec y$ queda definida semánticamente por la ecuación $(x - \mathbf{f})(\mathbf{v} - y) = 0$, pues de ahí obtenemos que $(x - \mathbf{f}) = 0$ y $(\mathbf{v} - y) = 0$, es decir que $x = \mathbf{f}$, por un lado, y $y = \mathbf{v}$, por otro, lo cual nos dice que x es falso o y es verdadero,

[2] Este signo opera como implicación; Peirce también lo llama "inclusión" cuando trabaja las variables como clases, en sentido booleano.

[3] Esta ecuación es la forma factorizada de una ecuación de segundo grado, donde $\mathbf{v}$ y $\mathbf{f}$ son las raíces de la ecuación $x^2 + -x(\mathbf{v} + \mathbf{f}) - \mathbf{fv} = 0$ que Peirce factoriza como $(x - \mathbf{f})(\mathbf{v} - x) = 0$, de donde se sigue que $(x - \mathbf{f}) = 0$ implica que $x = \mathbf{f}$ y que $(\mathbf{v} - x) = 0$ implica que $x = \mathbf{v}$.

[4] El número 1 en la ecuación representa la clase universal. Vemos que la clase universal resulta de la unión de lo verdadero con lo falso. Similarmente, la clase nula será el 0.

es decir $\bar{x} + y$, que es lo mismo que x implica y. Notemos, también, que $\bar{x}$ puede definirse como $x \prec \mathbf{f}$ por argumentos similares.

Aunque Peirce sólo proporciona definiciones de ϕ para las fórmulas atómicas (NRLS3.1), la negación (NRLS3.2) y para la cópula (NRLS3.5), fácilmente podemos extender ϕ para el producto y la suma. Lo que Peirce *sí* proporciona es un método general de decidibilidad —por reducción al absurdo— basado en la concepción veritativo-funcional que hemos presentado:

> A proposition of the form
>
> $$x \prec y$$
>
> is true if $x = \mathbf{f}$ or $y = \mathbf{v}$. It is only false if $y = \mathbf{f}$ and $x = \mathbf{v}$. A proposition written in the form
>
> $$(x \overline{\prec} y)$$
>
> is true if $x = \mathbf{v}$ and $y = \mathbf{f}$, and is false if either $x = \mathbf{f}$ or $y = \mathbf{v}$. Accordingly, to find whether a formula is necessarily true substitute $\mathbf{f}$ and $\mathbf{v}$ for the letters and see whether it can be supposed false by any such assignment of values. Take, for example, the formula
>
> $$(x \prec y) \prec ((y \prec z) \prec (x \prec z))$$
>
> To make this false we must take
>
> $$(x \prec y) = \mathbf{v}$$
>
> $$((y \prec z) \prec (x \prec z)) = \mathbf{f}.$$
>
> The last gives
>
> $$(y \prec z) = \mathbf{v}, (x \prec z) = \mathbf{f}, x = \mathbf{v}, z = \mathbf{f}.$$
>
> Substituting these values in
>
> $$(x \prec y) = \mathbf{v}, (y \prec z) = \mathbf{v}$$
>
> we have
>
> $$(\mathbf{v} \prec y) = \mathbf{v}, (y \prec \mathbf{f}) = \mathbf{v},$$
>
> which cannot be satisfied together. (1885, 3.387)

Es interesante notar que Peirce ya habla aquí de *satisfacibilidad* en el mismo sentido en el que hoy lo hacemos. Peirce mismo considera que el método veritativo-funcional es mucho más sencillo que el método algebraico. Como ejemplo del funcionamiento de este último, consideremos la prueba que da Peirce para el silogismo BARBARA:

Ejemplo 1. *x implica y; y implica z; por tanto, x implica z.*

Demostración. Tomamos la premisa mayor como $(x - \mathbf{f})(\mathbf{v} - y) = 0$ y la premisa menor como $(y - \mathbf{f})(\mathbf{v} - z) = 0$. Multiplicando la premisa mayor por $(\mathbf{v} - z)$, obtenemos $(x - \mathbf{f})(\mathbf{v} - y)(\mathbf{v} - z) = 0$; y multiplicando la premisa menor por $(x - \mathbf{f})$, obtenemos $(x - \mathbf{f})(y - \mathbf{f})(\mathbf{v} - z) = 0$. Sumando las últimas dos ecuaciones, que tienen por factor común a $(x - \mathbf{f})$ y a $(\mathbf{v} - z)$, obtenemos $(x - \mathbf{f})(\mathbf{v} - z)((\mathbf{v} - y) + (y - \mathbf{f})) = 0$; cancelando y y $-y$, obtenemos $(x - \mathbf{f})(\mathbf{v} - z)(\mathbf{v} - \mathbf{f}) = 0$. Finalmente, dividimos ambos lados por $(\mathbf{v} - \mathbf{f})$ y obtenemos el resultado deseado: $(x - \mathbf{f})(\mathbf{v} - z) = 0$, que dice que x implica z. □

1.2.3. Maquinaria Deductiva para NRL

Peirce enlista una serie de axiomas para su álgebra de proposiciones.[5] A estas leyes lógicas él las llama *íconos*, en virtud de un cierto uso del término en su teoría de los signos —misma que no abordaremos aquí.

(I1) Identidad: $x -\!\!< x$

(I2) Transposición de Antecedentes: $(x -\!\!< (y -\!\!< z)) -\!\!< (y -\!\!< (x -\!\!< z))$

(I3) Transitividad: $(x -\!\!< y) -\!\!< ((y -\!\!< z) -\!\!< (x -\!\!< z))$

(I4) *Ex falso quodlibet*: $\mathbf{f} -\!\!< x$

(I5) Ley de Peirce[6]: $((x -\!\!< y) -\!\!< x) -\!\!< x$

Estos cinco axiomas son adecuados para construir un sistema de deducción natural para el cálculo proposicional. Es posible probar su completud y su corrección de manera análoga a como se hace con la lógica proposicional estándar (LP). A manera de ejemplo, probemos el teorema $\vdash_{NRL} x -\!\!< ((x -\!\!< y) -\!\!< y)$ (que Peirce llama *Modus Ponens*):

$$\begin{array}{r|ll}
1 & (x -\!\!< y) -\!\!< (x -\!\!< y) & \text{I1} \\
2 & x -\!\!< ((x -\!\!< y) -\!\!< y) & \text{I2, 1}
\end{array}$$

Similarmente, $x -\!\!< y \vdash_{NRL} \bar{y} -\!\!< \bar{x}$ (Contraposición):

$$\begin{array}{r|lll}
1 & x -\!\!< y & & \text{Hip.} \\
\hline
2 & & \bar{y} & \text{Hip.} \\
3 & & y -\!\!< \mathbf{f} & \text{DfNeg, 2} \\
4 & & x -\!\!< \mathbf{f} & \text{I3, 1, 3} \\
5 & & \bar{x} & \text{DfNeg, 4} \\
6 & \bar{y} -\!\!< \bar{x} & & \text{Intro} -\!\!<\text{, 2–5}
\end{array}$$

[5] Véase (Prior 1958) para una exposición más técnica.

[6] Equivalente al principio de tercero excluso.

Y $x \prec y, \bar{y} \vdash_{NRL} \bar{x}$ (*Modus Tollens*):

1	$x \prec y$	Hip.
2	$\bar{y}$	Hip.
3	$y \prec \mathbf{f}$	DfNeg, 2
4	$x \prec \mathbf{f}$	I3, 1, 3
5	$\bar{x}$	DfNeg, 4

Claramente, podemos mostrar que $\{\prec, ^{-}\}$ es un conjunto adecuado de conectivas para NRL y definir la suma y el producto en términos de estas operaciones:

$$xy \overset{df}{=} (\overline{x \prec \bar{y}})$$

$$x + y \overset{df}{=} \bar{x} \prec y$$

para las cuales valen los teoremas de DeMorgan,

$$\overline{(xy)} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$\overline{(x + y)} = \bar{x}\bar{y}$$

y también todas las leyes del álgebra (1885, 3.390) y, en particular, las siguientes leyes:

1. Tercero excluso: $x + \bar{x} = \mathbf{v}$
2. Contradicción: $\bar{x}x = \mathbf{f}$
3. Absorción 1: $y + x\bar{x} = y$
4. Absorción 2: $y(x + \bar{x}) = y$
5. Distribución: $xy + z = (x + z)(y + z)$

que son características de un álgebra booleana.

1.3. Un Sistema de Lógica de Primer Orden

Tras un rápido recorrido por el álgebra de proposiciones o lógica no-relativa, Peirce introduce al lector a la lógica que verdaderamente le interesa desarrollar: el álgebra de relaciones denominada *First-Intentional Logic of Relatives* (FILR). Es interesante, ya desde el título de esta sección del OAL, que Peirce distinga lo que hoy denominamos *orden* de una lógica pues, como se verá más adelante, su álgebra se extiende hasta segundo orden. A manera de motivación de este sistema, tomemos el siguiente pasaje:

> The algebra of Boole affords a language by which anything may be expressed which can be said without speaking of more than one individual at a time. It is true that it can assert that certain characters belong to a whole class, but only such characters as belong to each individual separately. The logic of relatives considers statements involving two and more individuals at once. Indices are here required. Taking, first, a degenerate form of relation, we may write $x_i y_j$ to signify that x is true of the individual i while y is true of the individual j. (1885, 3.392)

En primer lugar, vemos cómo Peirce separa su sistema del de Boole señalando que éste toma individualmente a los términos con respecto a las clases, mientras que en el álgebra de Peirce se trabajará con *términos relativos* o relaciones. Los términos relativos son aquellos enunciados que son satisfechos por dos (o más) objetos, tales como "amante de" o "sirviente de ", etc. Para estos términos, de acuerdo con Peirce, no existía un álgebra booleana que expresara adecuadamente las relaciones lógicas que existen detrás de esas expresiones. Para construir tal sistema, Peirce adopta una notación particular: dado un término relativo x, escribiremos como subíndices del mismo aquellos objetos que satisfagan la relación especificada, de manera que si x es la relación "padre de" e i y j son objetos de un universo de discurso, el enunciado "i es padre de j" se escribe como x_{ij}.

Lo que hace de FILR un álgebra única es su uso prenexo de los cuantificadores universal (Π) y existencial (Σ), mismos que cuantifican sobre objetos (i, j, etc.) de un dominio o universo de discurso, lo cual muestra que esta lógica pertenece a la clase de lenguajes de primer orden.[7]

1.3.1. Sintaxis de FILR

Los signos del lenguaje son:

FILR1 Variables de objetos: i, j, k, etc., pertenecientes a un dominio de cuantificación $\mathcal{U}$ definido.

FILR2 Variables de relativos: x, y, z, etc., con aridad mínima de 2.[8]

FILR3 Cuantificador universal y cuantificador existencial: Π y Σ, respectivamente.

FILR4 Operadores de negación, suma, producto y cópula, igual que en NRL.

FILR5 Signos de agrupación: (,).

Sean α y β dos metavariables que representan cualquier fórmula de FILR. Las reglas de formación del lenguaje son:

[7] Véase el excelente tratamiento de Byrnes (1998) al respecto.

[8] Estrictamente hablando, un relativo no sólo es una relación binaria (de aridad 2), sino que cualquier relación de aridad $n \geq 2$ es un término relativo; Peirce trabaja con relativos binarios generalmente.

FILRF1 Cualquier variable de relativos subindicada por variables de objetos[9] es una fórmula bien formada (fbf).

FILRF2 $\bar{\alpha}$ es una fbf.

FILRF3 Si α y β son fbf's y si i es una variable de objetos, entonces $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, $\alpha \prec \beta$, $\Pi_i\alpha$ y $\Sigma_i\alpha$ son fbf's.

FILRF4 Nada más es una fbf.

Los cuantificadores Π y Σ son similares al (aunque no son exactamente) producto generalizado y la sumatoria, respectivamente —decimos que "no exactamente" porque los individuos del universo de cuantificación pueden ser no-numerables (1885, 3.393). Así que

$$\Sigma_i x_i = x_i + x_j + x_k + \ldots$$

y

$$\Pi_i x_i = x_i x_j x_k \ldots$$

Peirce ejemplifica cómo usar la notación para capturar algunos enunciados del lenguaje natural (1885, 3.394):

$$\Pi_i \Sigma_j l_{ij} b_{ij}$$

dice que "todos son amantes y benefactores de alguien";

$$\Pi_i \Sigma_j l_{ij} b_{ji}$$

dice que "todos son amantes de quien los beneficia";

$$\Sigma_i \Sigma_k \Pi_j (l_{ij} + b_{jk})$$

dice que "alguien ama a todos o todos benefician a otro" —nótese el uso de paréntesis para indicar el alcance de los cuantificadores—;

$$\Sigma_i \Pi_j (g_i l_{ij} + \bar{c}_j)$$

dice que "si hay quimeras, entonces algún grifo las ama a todas" —nótese que la proposición condicional está escrita con negaciones y sumas—;

$$\Pi_j \Sigma_i (g_i (l_{ij} + \bar{c}_j))$$

dice que "existe un grifo que ama a todas las quimeras"; y

$$\Pi_j \Sigma_i (g_i l_{ij} + \bar{c}_j)$$

[9] Es decir, cualquier fórmula atómica de la forma x_{ij}.

dice que "cada quimera es amada por un grifo" —compárese este enunciado con $\Sigma_i\Pi_j(g_il_{ij}+\bar{c}_j)$, anteriormente escrito, para notar que el orden de los cuantificadores altera el significado del enunciado, tal y como ocurre con la lógica de primer orden que conocemos—. En ningún momento se define el $\mathcal{U}$ particular para los ejemplos, sino que Peirce sobreentiende que toma a la humanidad o a las criaturas mitológicas como universo de discurso.

1.3.2. Cuantificación en FILR

No existe en OAL el uso ni la mención de los conceptos de "variable libre" y "variable ligada"; todas las variables de objeto aparecen ligadas en cada fórmula que aparece en el artículo. Sin embargo, una característica notable de la cuantificación en FILR es que sus fórmulas siempre se dan en *forma normal prenexa*[10], es decir, con los cuantificadores precediendo a la expresión booleana (1885, 3.396). Peirce muestra que la conjunción de dos fórmulas prenexas es equivalente a una fórmula prenexa, según las siguientes identidades:

$$\Pi_ix_i\Pi_jx_j = \Pi_i\Pi_jx_ix_j$$

$$\Sigma_ix_i\Pi_jx_j = \Sigma_i\Pi_jx_ix_j$$

$$\Sigma_ix_i\Sigma_jx_j = \Sigma_i\Sigma_jx_ix_j$$

que, claramente, corresponden a las siguientes expresiones de la lógica de primer orden (FOL) que conocemos:

$$\forall iX(i) \land \forall jX(j) = \forall i\forall j(X(i) \land X(j))$$

$$\exists iX(i) \land \forall jX(j) = \exists i\forall j(X(i) \land X(j))$$

$$\exists iX(i) \land \exists jX(j) = \exists i\exists j(X(i) \land X(j))$$

En segundo lugar, Peirce señala cuándo es posible conmutar los cuantificadores:

$$\Pi_i\Pi_jx_{ij} = \Pi_j\Pi_ix_{ij}$$

$$\Sigma_i\Sigma_jx_{ij} = \Sigma_j\Sigma_ix_{ij}$$

$$\Sigma_i\Pi_jx_iy_j = \Pi_j\Sigma_ix_iy_j$$

[10]En FOL, una fórmula está en forma normal prenexa cuando el enunciado tiene la forma $Q_1x_1, \ldots, Q_nx_n\alpha$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ y α no contiene cuantificadores. Toda fórmula de FOL puede escribirse en forma normal prenexa convirtiendo las fórmulas a formas normales conjuntivas o formas normales disyuntivas y aplicando las siguientes equivalencias: $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha, \neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha, (\forall x\alpha) \land \beta \equiv \forall x(\alpha \land \beta), (\exists x\alpha) \land \beta \equiv \exists x(\alpha \land \beta), (\forall x\alpha) \lor \beta \equiv \forall x(\alpha \lor \beta), (\exists x\alpha) \lor \beta \equiv \exists x(\alpha \lor \beta)$.

lo cual, claramente, corresponde a las siguientes expresiones de FOL:

$$\begin{aligned}\forall i \forall j X(i,j) &= \forall j \forall i X(i,j)\\ \exists i \exists j X(i,j) &= \exists j \exists i X(i,j)\\ \exists i \forall j (X(i) \land Y(j)) &= \forall j \exists i (X(i) \land Y(j))\end{aligned}$$

pero Peirce advierte que $\Sigma_i \Pi_j x_{ij} \neq \Pi_j \Sigma_i x_{ij}$) —es decir, $\exists i \forall j X(i,j) \neq \forall j \exists i X(i,j)$— aunque $\Sigma_i \Pi_j x_{ij} \prec \Pi_j \Sigma_i x_{ij}$ —es decir, $\exists i \forall j X(i,j) \Rightarrow \forall j \exists i X(i,j)$, lo cual también es estándar en FOL.

De estas consideraciones surge la convención de colocar los cuantificadores existenciales lo más a la izquierda posible, de suerte que dos fórmulas

$$\Pi_i \Sigma_j \Pi_k \alpha,\ \Sigma_x \Pi_y \Sigma_z \beta$$

pueden unificarse de dos maneras posibles:

$$\Sigma_x \Pi_y \Sigma_z \Pi_i \Sigma_j \Pi_k \alpha \beta,\ \Sigma_x \Pi_i \Sigma_j \Pi_y \Sigma_z \Pi_k \alpha \beta.$$

Posteriormente, Peirce introduce un método sumamente particular para realizar un cambio de variable en las fórmulas (1885, 3.396), apelando a algo que podríamos llamar "niveles en el dominio de cuantificación": dado un cuantificador Σ_x en el que queremos reemplazar x por i en virtud de que todos los x son i, entonces es posible escribir el reemplazo multiplicando los x por i. E.g.: si $\Sigma_w a_w$ significa "alguna mujer es un ángel", entonces podemos capturar la misma idea en $\Sigma_i w_i a_i$. En el caso de una fórmula cuantificando universalmente, Π_x, convendrá sumar $\bar{x}_i$, pues i pertenece a un rango más grande. E.g.: tenemos "todos los perros son vertebrados", que escribimos como $\Pi_d v_d$ y se puede reescribir como $\Pi_i(\bar{d}_i + v_i)$.

El proceso de cambio de variable que recién describimos apela a una idea que normalmente no encontramos en la formulación estándar de FOL. Peirce está considerando que, dentro de un universo $\mathcal{U}$, existen ciertas clases de objetos que comprenden a otras clases a su vez. Es decir, dentro del universo de los animales, por ejemplo, existe la clase $V = \{v | v \text{ es un vertebrado}\}$ que, a su vez, comprende a la clase $D = \{d | d \text{ es un perro}\}$ —que también está en el universo—, es decir $D \subset V$. Por esta razón, el cambio de variable está permitido —que parece ser más bien una maniobra para escribir las fórmulas de manera más específica o para incluir nuevos factores o sumandos en las expresiones para manipularlos después.

Finalmente, Peirce indica que si una fórmula tiene cuantificadores con índices que no aparecen en la fórmula, pueden descartarse los cuantificadores. Además, muestra cómo instanciar cuantificadores universales:

$$\Sigma_i \Pi_j l_{ij} \prec \Sigma_i l_{ii}$$

Peirce no proporciona axiomas para FILR ni leyes que permitan, como en NRL, construir directamente un sistema de deducción natural. Tampoco proporciona una semántica para el lenguaje. Sin embargo, muestra cómo pueden deducirse ciertas conclusiones utilizando las nociones que hemos estudiado sobre la cuantificación en FILR.

Ejemplo 2. Eliminar s a partir de las premisas $\Sigma_h\Pi_i\Sigma_j\Pi_k(a_{hik} + s_{jk}l_{ji})$ y $\Sigma_u\Sigma_v\Pi_x\Pi_y(e_{uyx} + \bar{s}_{yv}b_{vx})$. (1885, 3.397)

Demostración. Primero deben multiplicarse las premisas y generar una sola fórmula prenexa, procurando que los cuantificadores existenciales estén lo más a la izquierda posible:

$$\Sigma_u\Sigma_v\Sigma_h\Pi_i\Sigma_j\Pi_x\Pi_k\Pi_y((a_{hik} + s_{jk}l_{ji})(e_{uyx} + \bar{s}_{yv}b_{vx})).$$

Instanciamos Π_k con v y Π_y con j y obtenemos:

$$\Sigma_u\Sigma_v\Sigma_h\Pi_i\Sigma_j\Pi_x((a_{hiv} + s_{jv}l_{ji})(e_{ujx} + \bar{s}_{jv}b_{vx}))$$

. Finalmente, se realiza la multiplicación y se reduce hasta llegar a la fórmula

$$\Sigma_u\Sigma_v\Sigma_h\Pi_i\Sigma_j\Pi_x(a_{hiv}e_{ujx} + a_{hiv}b_{vx} + e_{ujx}l_{ji})$$

—lo cual fue posible porque s_{jv} y $\bar{s}_{jv}$ se suman tras hacer la multiplicación de la fórmula anterior y su suma es equivalente a **v**, que desaparece de la expresión por leyes de absorción. □

1.4. Un Sistema de Lógica de Segundo Orden

Peirce nota que su álgebra puede extenderse para cuantificar no sólo sobre objetos sino también sobre relaciones o propiedades e introduce su *Second-Intentional Logic* (SIL). Hasta donde sabemos, Peirce ofrece el primer sistema lógica de segundo orden como tal (Putnam, 1982).[11] Peirce comienza introduciendo la igualdad o identidad como una noción de segundo orden:

> Let us now consider the logic of terms taken in collective senses. Our notation, so far as we have developed it, does not show us even how to express that two indices i and j denote one and the same thing. We may adopt a special token of second intention, say 1, to express identity, and may write 1_{ij}. (1885, 3.398)

La relación 1 tiene propiedades especiales. La primera, que

$$\Pi_i\Pi_j(\bar{1}_{ij} + \bar{x}_i + x_j)$$

[11] Aunque la *Begriffschrift* de Frege ya cuantifica sobre objetos de segundo orden en 1881, Frege no reconcía diferencia alguna entre cuantificar sobre una variable de individuo y una variable de relación. Así, no sólo es que el término "segundo orden" sea introducido por primera vez en (Peirce, 1885), sino que, además, parece ser la primera vez que se le aisla como una lógica distinta —cosa que Frege no hizo.

lo cual es un axioma de identidad, clásico en FOLid (lógica de primer orden con identidad):

$$\begin{aligned}\Pi_i\Pi_j(\bar{1}_{ij} + \bar{x}_i + x_j) &= \forall i\forall j(i \neq j \vee (\neg X(i) \vee X(j))) \\ &= \forall i\forall j(i \neq j \vee (X(i) \Rightarrow X(j))) \\ &= \forall i\forall j(i = j \Rightarrow (X(i) \Rightarrow X(j)))\end{aligned}$$

Después, Peirce introduce una notación especial para escribir el converso de la fórmula anterior. La relación q tiene dos posibles interpretaciones: al escribir q_{ki} decimos que i tiene la propiedad k, o bien que i pertenece a la clase k; en ese sentido, q hace la misma labor que las notaciones $P(x)$ en FOL o $x \in P$ en teoría de conjuntos. De acuerdo con esto, la fórmula conversa que buscamos es

$$\Pi_i\Pi_j\Sigma_k(1_{ij} + \bar{q}_{ki}q_{kj}),$$

y podemos traducirla de dos maneras:

$$\begin{aligned}\Pi_i\Pi_j\Sigma_k(1_{ij} + \bar{q}_{ki}q_{kj}) &= \forall i\forall j\exists K(i = j \vee (\neg K(i) \wedge K(j))) \\ &= \forall i\forall j\exists K(i = j \vee \neg(K(i) \vee \neg K(j))) \\ &= \forall i\forall j\exists K(i = j \vee \neg(K(j) \Rightarrow K(i))) \\ &= \forall i\forall j\exists K((K(j) \Rightarrow K(i)) \Rightarrow i = j)\end{aligned}$$

que ya es una fórmula de la lógica de segundo orden (SOL) por cuantificar sobre la propiedad K; y

$$\begin{aligned}\Pi_i\Pi_j\Sigma_k(1_{ij} + \bar{q}_{ki}q_{kj}) &= \forall i\forall j\exists K(i = j \vee (i \notin K \wedge j \in K)) \\ &= \forall i\forall j\exists K(i = j \vee \neg(i \in K \vee j \notin K)) \\ &= \forall i\forall j\exists K(i = j \vee \neg(j \in K \Rightarrow i \in K)) \\ &= \forall i\forall j\exists K((j \in K \Rightarrow i \in K) \Rightarrow i = j)\end{aligned}$$

que se asemeja mucho al axioma de extensionalidad de ZFC.

Tomando ambas fórmulas, la identidad queda definida como

$$1_{ij} = \Pi_k(q_{ki}q_{kj} + \bar{q}_{ki}\bar{q}_{kj})$$

para el uso de clases; es decir

$$1_{ij} = \Pi_k(q_{ki}q_{kj} + \bar{q}_{ki}\bar{q}_{kj}) \quad = \quad \forall K(i \in K \Leftrightarrow j \in K)$$

y para el uso de relativos simples[12]:

$$1_{ij} = \Pi_x(x_ix_j + \bar{x}_i\bar{x}_j),$$

[12]Un relativo simple es una relación unaria, como la relación o los predicados que aplican a un sólo sujeto.

es decir,

$$1_{ij} = \Pi_k(q_{ki}q_{kj} + \bar{q}_{ki}\bar{q}_{kj}) \quad = \quad \forall K(K(i) \Leftrightarrow K(j))$$

Peirce está tomando como base de su SIL la Ley de Leibniz: dos objetos son idénticos si y sólo si tienen las mismas propiedades: $\forall P((P(x) \Leftrightarrow P(y)) \Leftrightarrow x = y)$.

1.4.1. Las Propiedades de q, r y c: Hacia una Teoría de Conjuntos

Peirce introduce tres símbolos especiales en SIL: q, r y c. Explicaremos cada una y mostraremos, siguiendo el orden de OAL, qué papel juegan tanto en el lenguaje como en lo que sería una teoría axiomática de conjuntos que se desprende de SIL.

Predicación y Pertenencia: q ó $\in$

Para mostrar que SIL permite lo que llamamos *cuantificación restringida*[13] o restricta, interpretando q como la relación de pertenencia a una clase, Peirce introduce la fórmula

$$(\Pi_\alpha \Pi_{i_\alpha})(\Pi_\beta \Pi_{j_\beta})\Sigma_k(\Pi_\alpha \Sigma_{i'_\alpha})\Pi_l q_{ki_\alpha}(\bar{q}_{kj_\beta} + q_{li'_\alpha}q_{lj_\beta} + \bar{q}_{li'_\alpha}\bar{q}_{lj_\beta}).$$

Y explica:

> This notation presents indices of indices. The $\Pi_\alpha \Pi_{i_\alpha}$ shows that we are to take any collection whatever of i's, and then any i of that collection. We are then to do the same with the j's. We can then find a quality k such that the i taken has it, and also such that the j taken wants it unless we can find an i that is identical with the j taken. The necessity of some kind of notation of this description in treating of classes collectively appears from this consideration: that in such discourse we are neither speaking of a single individual (as in the non-relative logic) nor of a small number of individuals considered each for itself, but of a whole class, perhaps an infinity of individuals. (1885, 3.399)

Podemos traducir la fórmula anterior como sigue:

$$\forall A \forall x \in A \forall B \forall y \in B \exists C \exists x' \in A \forall D(x \in C \wedge (y \in C \Rightarrow (x' \in D \Leftrightarrow y \in D)))$$

Sorprendentemente, al estudiar q ó $\in$ en SIL, Peirce formula 4 axiomas teórico-conjuntistas, algunos de los cuales podemos reconocer en ZFC u otras teorías de conjuntos. Esto es notable,

[13] Se dice que existe cuantificación restringida en una fórmula de un lenguaje cuantificacional cuando uno o más cuantificadorers (si los hay) de la fórmula ligan variables que pertenecen a un conjunto específico y la fórmula hace mención de ello, ya sea en el cuantificador mismo —abusando de la notación— o adjuntando esa información a la fórmula. E.g. $\forall x \exists y(P(x) \Rightarrow Q(y) \wedge x \in A \wedge y \in B)$ ó $\forall x \in A \exists y \in B(P(x) \Rightarrow Q(y)$.

ya que muestra un profundo entendimiento de que la lógica de segundo orden permite capturar adecuadamente parte de la matemáticas, en particular cuando se formaliza el lenguaje de manera conjuntista como se ha hecho en la matemática moderna.

El primer axioma —que Peirce llama "noveno ícono"— es un axioma del conjunto unitario:

$$\Pi_i \Sigma_k \Pi_j q_{ki}(\bar{q}_{kj} + 1_{ij})$$

que podemos traducir como

$$\forall i \exists \{i\} \forall j (i \in \{i\} \wedge (j \in \{i\} \Rightarrow i = j)).$$

Lo que nos dice el axioma es que hay un conjunto k para cada i al cual sólo esa i pertenece, a saber $\{i\}$; de manera que si j perteneciera a k, i y j tendrían que ser una y la misma cosa.

En segundo lugar, aparece el décimo ícono o un axioma del conjunto complemento:

$$\Pi_l \Sigma_k \Pi_i (q_{li}\bar{q}_{ki} + \bar{q}_{li} q_{ki})$$

que podemos traducir como

$$\forall A \exists A^{\complement} \forall i \neg (i \in A \Leftrightarrow i \in A^{\complement}).$$

Lo que nos dice el axioma es que una i pertenece a l o a k, pero no a ambos, donde k es el conjunto complemento.

En tercer lugar, se propone el onceavo ícono o un axioma de unión:

$$\Pi_l \Pi_m \Sigma_k \Pi_i (q_{li} q_{ki} + q_{mi} q_{ki} + \bar{q}_{li} \bar{q}_{mi} \bar{q}_{ki})$$

que podemos traducir como

$$\forall A \forall B \exists A \cup B \forall i ((i \in A \vee i \in B \vee i \in A \cup B) \Rightarrow ((i \in A \wedge i \in A \cup B) \vee (i \in B \wedge i \in A \cup B))).$$

Lo que nos dice el axioma es que i está el l y en k, o bien i está en m y también en k, o i no está ni en l, ni en m, ni en k.

Finalmente, el doceavo ícono es presentado pero no es claro qué pretende Peirce con su introducción[14]:

$$\Pi_l \Pi_m \Pi_i \Sigma_k \Pi_j (q_{li} + \bar{q}_{mi} + q_{ki}(q_{kj} + \bar{q}_{lj})).$$

Aquí nos limitaremos a la traducción:

$$\forall A \forall B \forall i \exists K \forall j (i \in L \vee i \notin M \vee i \in K \wedge (j \in K \vee j \notin L)).$$

[14] Brady (2000, p.136) sugiere que puede tratarse de un axioma de sucesor, pero se manifiesta dudosa y señala que es difícil ver la razón para introducirlo a SIL.

Cardinalidad: r **ó** $\leq$

Después de haber explicado q y de proponer algunos axiomas teórico-conjuntistas, Peirce introduce el símbolo r:

> Just as q signifies the relation of predicate to subject, so we need another token, which may be written r, to signify the conjoint relation of a simple relation, its relate and its correlate. That is, $r_{j\alpha i}$ is to mean that i is in the relation α to j. Of course, there will be a series of properties of r similar to those of q. But it is singular that the uses of the two tokens are quite different. Namely, the chief use of r is to enable us to express that the number of one class is at least as great as that of another. (1885, 3.401)

Lo que este pasaje muestra es el interés por hacer uso del concepto de *cardinalidad* de una clase y de definir la relación $\leq$. La noción de cardinalidad no es rigurosamente definida en el lenguaje; Peirce trabaja con una noción intuitiva de cardinalidad y define rigurosamente la relación "menor o igual que":

$$\Sigma_\alpha \Pi_i \Sigma j \Pi_h (\bar{a}_i + b_j r_{j\alpha i}(\bar{r}_{j\alpha h} + \bar{a}_h + 1_{ih}))$$

que se lee como "existe una relación α tal que si i está en a, entonces hay una j en b con la cual i está α-relacionado, y si h también está en a, entonces el hecho de que h esté α-relacionado con j implica que i y h son idénticos"; su traducción puede ser:

$$\exists \leq \forall i \exists j \forall h (i \in A \Rightarrow (j \in B \wedge i \leq j \wedge (h \leq j \Rightarrow (h \in A \Rightarrow h = i)))).$$

Inmediatamente después de intentar dar una definición rigurosa de $\leq$, Peirce introduce un nuevo signo que simplifica la tarea: c.

Correspondencia uno-a-uno y Finitud: c

Peirce introduce la noción de "correspondencia uno-a-uno" para facilitar y mejorar la definición de $\leq$ que intentó dar usando sólo r:

> However, the best way to express such a proposition is to make use of the letter c as a token of a one-to-one correspondence. That is to say, c will be defined by the three formulae:
>
> $$\Pi_\alpha \Pi_u \Pi_v \Pi_w (\bar{c}_\alpha + \bar{r}_{u\alpha v} + \bar{r}_{u\alpha w} + 1_{vw})$$
>
> $$\Pi_\alpha \Pi_u \Pi_v \Pi_w (\bar{c}_\alpha + \bar{r}_{u\alpha w} + \bar{r}_{v\alpha w} + 1_{uv})$$
>
> $$\Pi_\alpha \Sigma_u \Sigma_v \Sigma_w (c_\alpha + r_{u\alpha v} r_{u\alpha w} \bar{1}_{vw} + r_{u\alpha w} r_{v\alpha w} \bar{1}_{uv})$$
>
> Making use of this token, we may write the proposition we have been considering in the form
>
> $$\Sigma_\alpha \Pi_i \Sigma_j c_\alpha (\bar{a}_i + b_j r_{j\alpha i})$$

(1885, 3.401)

Evidentemente, "the proposition we have been considering" se refiere a la definición de $\leq$. Acerca de las fórmulas que definen c, Brady (2000, p.138) sostiene que la primera afirma que si α está en c, entonces α es uno-a-uno; la segunda que si α está en c, entonces α tiene un sólo valor (*single-valued*); y la tercera que si α es uno-a-uno y tiene un sólo valor, entonces α está en c. Además, Brady ofrece la siguiente traducción para la definición de $\leq$ de Peirce:

$$\exists f \forall i \forall h (i \in a \Rightarrow (f(i) \in b) \wedge ((f(i) = f(h)) \wedge (h \in a \Rightarrow h = i))),$$

es decir, que f es una función uno-a-uno de a a b.

Finitud

Para concluir su OAL, Peirce utiliza la noción de correspondencia uno-a-uno para dar una definición de finitud o clase finita, muy similar a la de Dedekind:

> Now, to say that a lot of objects is finite, is the same as to say that if we pass through the class from one to another we shall necessarily come round to one of those individuals already passed; that is, if every one of the lot is in any one-to-one relation to one of the lot, then to every one of the lot some one is in this same relation. This is written thus:
>
> $$\Pi_\beta \Pi_u \Sigma_v \Sigma_s \Pi_t (\bar{c}_\beta + \bar{x}_u + x_v r_{u\alpha v} + x_s(\bar{x}_t + \bar{r}_{t\beta s}))$$
>
> (1885, 3.402)

De acuerdo con Brady (2000, p.141), la noción de finitud que ofrece Peirce utiliza la hoy conocida prueba de que toda función uno-a-uno es sobreyectiva cuando tanto su dominio como su rango son finitos; además, Brady sostiene que, a pesar de la similitud que guardan, la definición de finitud de Peirce es totalmente independiente de la de Dedekind, pues apareció 3 años antes de que ésta fuese publicada.

Capítulo 2

Los Logros del OAL y su Relevancia en la Historia de la Lógica

Este capítulo tiene dos objetivos: 1) ofrecer una serie de anotaciones de carácter histórico que emergen de las inovaciones presentadas en el OAL (secciones 2.1. y 2.2.); y 2) resaltar algunos puntos técnicos que encontramos en el OAL en cuanto a lógica proposicional, lógica de primer orden, lógica de segundo orden y teoría de conjuntos (secciones 2.3. y 2.4.).

Para cumplir el primer objetivo, ofrecemos una contextualización del álgebra de la lógica y la influencia de Peirce hacia otros pensadores, y presentamos una discusión sobre el origen de la teoría de la cuantificación desde las álgebras FIL y SIL del OAL. Para cumplir el segundo objetivo, estudiamos brevemente algunas propiedades metalógicas del sistema de lógica proposicional que surge del álgebra NRL en el OAL y analizamos la teoría de conjuntos que se desprende del sistema de lógica de segundo orden presentado como el álgebra SIL en el OAL.

2.1. El Desarrollo del Álgebra Booleana desde los Trabajos de Peirce

El álgebra de la lógica nació con los trabajos del matemático británico George Boole (1815-1864), tales como su (1847) y, principalmente, su (1854). Boole perseguía el objetivo de aplicar el simbolismo y los métodos propios de la matemática a la lógica o las *leyes del pensamiento* que, hasta entones, habían sido estudiadas de manera no-formal —entiéndase: no-simbólica, no-matematizada— por los filósofos desde la atigüedad. Esta inovación metodológica no sólo cambió nuestra manera de entender la lógica sino que instauró un nuevo campo de estudio: la lógica matemática.

Los trabajos de Boole dieron lugar a lo que conocemos hoy como *álgebra booleana*, una estructura matemática $\mathfrak{B} = \langle 1, 0, *, +, ' \rangle$ donde 1 es la clase universal, 0 la clase nula, $*$ la operación binaria de conjunción/multiplicación/adjunción, $+$ la operación binaria de disyunción/suma/unión, y $'$ es la operación unaria de negación/complementación y $\mathfrak{B}$ es tal que satisface axiomas de conmutación, asociación, distribución y absorción para sus operaciones aplicadas a clases de objetos —es decir, a grupos o colecciones de cosas.

En general, los métodos booleanos representaban proposiciones como *ecuaciones*. Cualquier proposición contradictoria o imposible era idéntica a la clase nula; por ejemplo: $a * a' = 0$. Cualquier proposición tautológica o necesaria era idéntica a la clase universal; por ejemplo: $a+a' = 1$. También se indicaba con ecuaciones que dos proposiciones generan una y la misma clase; por ejemplo: $a*(b+c) = a*b+a*c$; $a+a' = (a'*a)'$, etc.

Estos trabajos fueron estudiados y desarrollados por otros matemáticos y estudiosos de la lógica en el s.XIX e inicios del s.XX: Augustus De Morgan (1806-1871), William Stanley Jevons (1835-1882), Charles Sanders Peirce (1839-1914), Ernst Schröder (1841-1902), y Edward Vermilye Huntington (1874-1952) son, quizá, los principales exponentes de la así llamada *tradición algebraicista de la lógica*.

En realidad, este último término es desafortunado; compartimos la opinión de Ahmed (2005):

> Historians of mathematical logic frequently tell us that there are two traditions, the algebraic tradition of Boole, Schröder, De Morgan, and Peirce, arising from the algebraization of analysis as opposed to the quantification-theoretical (or logistic) tradition of Peano, Frege, and Russell arising from the development of the theory of functions. It is said that these two traditions, together with the independent set-theoretic tradition of Cantor, Dedekind, and Zermelo, arising out of the search for a foundation for real analysis in the work of Cauchy, Weierstrass and others, were united by Whitehead and Russell in ther Principia Mathematica to create mathematical logic. However, the dual *algebraic* and *quantification-theoretic* traditions, as a matter of historical fact, did not exist for logicians in the turn of the century. It is a false retrospective duality which derives from the Principia and is post Principia phenomena. There was no such dichotomy in the nineteenth century, algebraic logic was simply *the* mathematical logic of its time. (p.467)

De hecho, uno podría abogar en favor de la entrañable cercanía entre las álgebras de la lógica y los cálculos o lenguajes lógicos estándar —quizá hasta el punto de sostener que las diferencias son mínimas y que extensionalmente son idénticas—, pues múltiples lenguages lógicos tienen un álgebra de Lindenbaum-Tarski[1] correspondiente (Rasiowa 1974), como podemos ver en el Cuadro 2.1.

[1]Un álgebra de Lindenbaum-Tarski de un lenguaje lógico L consiste en la clase de equivalencia de enunciados de L; es el cociente bajo la relación de clase de equivalencia $\sim$, definida como $\alpha \sim \beta$ sii $L \vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$, donde α y β

Lenguaje Lógico	**Álgebra de Lindenbaum-Tarski**
Lógica proposicional clásica	Álgebra booleana de dos elementos
Lógica proposicional intuicionista	Álgebra de Heyting
Lógica Łukasiewicz	Álgebra multivaluada
Lógica modal K	Álgebra modal
Lógica modal S_4	Álgebra interior
Lógica modal S_5; lógica de predicados monádicos	Álgebra booleana monádica
Lógica de primer orden	Álgebra poliádica
Lógica de primer orden con identidad	Álgebra cilíndrica
Teoría de conjuntos	Álgebra de relaciones

Cuadro 2.1: Ejemplos de equivalencia entre sistemas: lenguajes lógicos y sus álgebras de Lindenbaum-Tarski correspondientes.

Así, como es ampliamanente conocido, los trabajos de Boole marcaron un hito en la historia de la lógica; sin embargo, pocos libros, artículos y cursos de lógica matemática hablan del crucial papel que jugó Peirce en el proceso de mejora y difusión del álgebra de la lógica. Geraldine Brady (1997 y 2000) es quizá la más notable referencia en esta poco conocida rama de investigación; en particular, ella sostiene la siguiente tesis historiográfica:

> [...] and although modern foundation literature ascribes first-order logic primarly to Frege's fundamental paper (1879), we support the case that it was Peirce's work, as systematized and extended by Schröder (1895), that was a primary influence on Löwenheim (1915) and Skolem (1920, 1923), as reflected by their notations and methods. (1997, p.173)

A lo largo de las secciones siguientes de este apartado —y durante el capítulo en general— hablaremos de qué fue lo que recibió Peirce de Boole y De Morgan, qué desarrolló desde estos

son fórmulas de L (Monk y Bonnet 1989, pp.11-2). Este método es sumamente general y provechoso; en palabras de Czelakowski (2001):

> The process of identification of equivalent sentences relative to the theories of a logic C defines a class of abstract algebras. [...] This approach, based on Lindenbaum-Tarski algebras, turns out to be particularly important because it bridges the gap between logic and algebra, and therefore makes it possible to apply the powerful methods of the contemporay algebra in metalogic.
>
> If C is a classical consequence (logic), then the relation: $\alpha \equiv_T \beta$ iff $\alpha \Leftrightarrow \beta \in C(T)$ defines, for any theory T, a congruence on the algebra of sentences (formulas). The resulting class of Lindenbaum-Tarski algrebras coincides with the class of Boolean algebras. (p.3)

aportes, y qué heredó a otros grandes matemáticos como Schröder, Löwenheim, y Skolem.

2.1.1. Boole, De Morgan y Peirce

Peirce recibió de Boole el álgebra booleana $\mathfrak{B}$ que recién describimos. Además de las nociones y métodos que incorporan los trabajos de Boole, Peirce heredó algunos problemas, como el problema notacional de expresar proposiciones existenciales adecuadamente: "Boole had devised a poor system for representing existential assertions, upon which Peirce sough to improve" (Brady 1997, p.173) y los resultados ofrecidos en el OAL surgen como respuesta a este problema. Hablaremos de esta solución con detalle en la sección 2.2.2.

El objetivo booleano de hacer de la lógica una rama de las matemáticas tuvo como fuente las obras fundacionales de Aristóteles. En ese sentido, el álgebra booleana debía incorporar los métodos y construcciones silogísticas que Aristóteles desarrolló en la antigüedad. Sin embargo, $\mathfrak{B}$ era, por sí sola, incapaz de expresar los 19 modos válidos del silogismo aristotélico; en particular, aquellos que involucraban proposiciones existenciales.

De Morgan, por su lado, incursionó también en el álgebra de la lógica y buscó soluciones al problema notacional que recién describimos —particularmente en su (1860). Los métodos de De Morgan fueron estudiados por Peirce (1870), quien lo consideró como uno de los más grandes lógicos y a quien llegó a conocer en persona en 1870 a través del favor de su padre, Benjamin Peirce (Grattan-Guinness 1997, p.38).[2] Con el encuentro del joven C.S. Peirce y el viejo De Morgan, Peirce descubre que él no fue el primero en investigar la lógica de relaciones:

> I was not the first discoverer [of the logic of relatives]; but I tought I was, and had complemented Boole's algebra so far as to render it adequate to all reasoning about dyadic relations, before Professor De Morgan sent me his epoch-making memoir in which he attacked the logic of relatives by another method in harmony with his own logical system. (Peirce 1898, 4.4)

El método al que Peirce se refiere en el pasaje recién citado es el uso de ecuaciones funcionales, sobre las cuales encontró propiedades importantes tales como $f(m+n) = f(m) + f(n)$ para cualesquiera m y n, y para ciertas f, etc. El estudio de funciones inversas llevó a De Morgan a utilizar exponenciaciones e involuciones para tratar de solucionar el problema notacional que dejó Boole a sus herederos, aunque este método no era del todo correcto y es analizado por Peirce en su (1870).

Con todo, el contacto entre Peirce y De Morgan inauguró el estudio de la lógica de relaciones, y el desarrollo de este sistema, así como su difusión, no terminó en 1870. Notablemente, como

[2]Un estudio cuidadoso de la relación entre De Morgan y Peirce en torno a la lógica de relaciones se encuentra en (Merrill 1978). Véase también (Martin 1976b).

veremos ahora, los trabajos de Peirce cayeron veinte años después en manos de matemáticos sobresalientes y las consecuencias de estos hechos históricos son considerables.

2.1.2. La Influencia de Peirce sobre Schröder, Löwenheim y Skolem

En la introducción de su (1890), Schröder reconoce su deuda con Peirce y su escuela:

> vor allem durch die Arbeiten des Amerikaners Charles S. Peirce und seine Schule. (vol. 1, p. iii)

Múltiples nociones y técnicas de Peirce son utilizadas y estudiadas a lo largo del (Schröder, 1890); por ejemplo, la definición de producto y suma (vol. I, p.190) —tanto para operaciones aritméticas como para operaciones lógicas, basado en las nociones de (Peirce 1870)—, o el estudio riguroso y sistemático de la lógica de relaciones (1895, vol. III) que, como hemos visto, aparece en el OAL.

La lógica de relaciones de Peirce fue desarrollada sistemáticamente por Schröder (1895), quien sostenía que este sistema era adecuado para una labor de fundamentación para las las matemáticas (Brady 1997, p.190). El desarrollo de la lógica de predicados y la distinción de primer y segundo orden se encuentra presente en el trabajo de Schröder, y las aportaciones de Peirce y su OAL son tremendamente fructíferas en sus manos:

> Along with the systematization of Peirce's calculus of relatives, Schröder's other major contribution to the development of logic was the application of the calculus of relatives to specific problems of mathematical interest, in particular to Dedekind's work on justifying definitions by induction. Schröder showed that Dedekind's chain theory could be carried out in the calculus of relatives, and converted the latter into a possible foundation for mathematics. Schröder should also be regarded as the forgotten originator of what we now know of as Skolem functions, through his notion of "solving" relational equations. (Brady 2000, p.144)

Respecto al origen de las funciones de Skolem en Schröder, Brady se refiere a las "soluciones generales" de Schröder (1895, p.150). Esta noción puede servir como evidencia histórica de la existencia de un "puente" entre los trabajos de Peirce y Schröder, y los trabajos de Löwenheim y Skolem.

Una fórmula de primer orden en forma normal prenexa puede ser *skolemizada* (Chang y Lee 1973, p.47) eliminando las ocurrencias de sus cuantificadores existenciales y sustituyendo con *funciones de Skolem* los términos ligados por los cuantificadores eliminados. Sea φ una fórmula en forma normal prenexa $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)M$, donde M —la *matriz* de φ— está en forma normal conjuntiva y $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. Supongamos que Q_r es un cuantificador existencial que aparece en el prefijo $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)$ con $1 \leq r \leq n$; si ningún cuantificador universal aparece antes que Q_r, elegimos una nueva constante c (que no ocurría en M) y reemplazamos todas las x_r con c en M para eliminar $(Q_r x_r)$ del prefijo. Por ejemplo: dada $\exists x P(x)$, la skolemización correspondiente es $P(c)$, donde c es una constante nueva. Si $Q_{s_1}, \dots Q_{s_m}$ son todos cuantificadores universales precediendo a Q_r, con $1 \leq s_1 < s_2 \dots < s_m < r$, elegimos un nuevo símbolo de función f de m lugares —llamado *función de Skolem*— diferente de otros símbolos de función en M y reemplazamos toda ocurrencia de x_r en M con $f(x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_m})$ y eliminamos $(Q_r x_r)$ del prefijo. Por ejemplo: dada $\forall x \exists y (P(x, y))$ la skolemización correspondiente es $\forall x (P(x, f(x)))$; dada $\exists x \forall y \exists z (P(x, y, z, f_1(z)))$, la skolemización correspondiente es $\forall y (P(c, y, f_2(y), f_1(f_2(y))))$. Una vez que todos los cuantificadores existenciales hayan sido eliminados con el proceso recién descrito, se llega a la *forma normal de Skolem* de φ. El proceso de skolemización es sumamente útil, ya que una fórmula y su correspondiente skolemización, aunque no siempre sean equivalentes, son *equisatisfacibles* —es decir, los mismos modelos que satisfacen a una fórmula en forma normal prenexa satisfacen a la skolemización correspondiente de esa fórmula. Este proceso fue empleado por Skolem en la prueba mejorada del teorema de Löwenheim.

Por otro lado, las soluciones generales de Schröder (1895, V) se refieren a la solución general $f(u) = x$ para una ecuación $F(x) = 0$. De acuerdo con la presentación de Brady (2000, p.152), Schröder pretende imitar las soluciones generales de las escuaciones algebraicas con coeficientes como parámetros. El objetivo perseguido es que $f(u)$ sea una función multivaluada expresada en su cálculo que tenga como rango el conjunto de aquellas x que satisfacen $F(x) = 0$. Dicha función f es un relativo y puede ser vacío. Para Schröder, es irrelevante cuál es el valor de $f(u)$ pues cualquier elección será adecuada. La intención es que f sea una variable de función que tenga como rango todas las funciones f_1 tales que, para toda u con la cual $f_1(u)$ es definida, $F(f_1(u)) = 0$. Podemos ver desde aquí que existe una similitud con las funciones de Skolem. Así, dado que u es cualquier variable de relación diferente de x en F, el hecho de tomar cualquier variable y reemplazarla por una función permite eliminar aquellas x que originalmente aparecen en $F(x) = 0$ y la solución a esta ecuación se reduce a las soluciones $f_1, \dots, f_n$ de las funciones que sustituyen esas x.

Al respecto, Brady (2000) concluye:

> When regarded as a function of the parameter relatives in the expression for F, this comes very close to introducing a Skolem function, $f(u)$, with value relative x, with the relatives in F as parameters . It is not, however, a Skolem function over the domain of individuals. (p.153)

Pero, por otro lado, tomando en cuenta lo anterior y considerando el hecho de que la notación de los cuantificadores del OAL que Schröder y Löwenheim heredan es de forma normal prenexa, Brady (2000) lanza dos conjeturas que consideramos poco disparatadas:

> Combining these examples from Schröder, it was perfectly reasonable to ask whether there are also first-order statements that have only uncountable models. We conjecture that this question is the source of Löwenheim's theorem, and we base this conjecture on Löwenheim's detailed use of Schröder's distinctive notation, which is quite unlike that of Frege or Russell. [. . .] We conjecture that Skolem saw how to use function symbols rather than these relation symbols as witnesses, and that this was the origin of Skolem's proofs (p.169)

Así, aunque Leopold Löwenheim es conocido por su teorema modelo-teorético de 1915 —si una teoría de primer orden es consistente, entonces tiene al menos un modelo con dominio finito o numerable (Hunter 1971, 45.18)—, resulta que ciertas piezas y líneas historiográficas podrían sugerir influencias algebraicistas en el nacimiento de su celebrado teorema —posteriormente mejorado por Skolem en 1920. De hecho, es poco conocido que Löwenheim fue un estudioso de la lógica de relaciones desarrollada por Peirce y Schöder. Su (1940) es un ejemplo de esto y de acuerdo con Brady (2000):

> Löwenheim, in his 1940 paper on Schröder's relative calculus, tried to argue that Peirce and Schröder were able to incorporate mathematics into the higher order theory of relatives. Löwenheim also argued that it is natural and convenient to do mathematics in the higher order theory of relatives. (p.142)

En su (1940), podemos ver que Löwenheim tiene una considerable preferencia por el uso del sistema SIL de segundo orden para codificar enunciados de la matemática —posición que sigue siendo relevante en discusiones contemporáneas como Shapiro (1991). El hecho de que Löwenheim haya sido un estudioso de la lógica Peirce-Schröder se ve reflejado no sólo en trabajos posteriores a su (1915) —el notable artículo donde prueba su famoso teorema—, sino también en el hecho de que la notación utilizada para probar el teorema era la misma que propuso Peirce en el OAL.

Esto pone de manifiesto dos puntos importantes con los que concluiremos nuestra discusión: por un lado, las propuestas del OAL, particularmente las de los sistemas FIL y SIL de lógica de primer y segundo orden, tuvieron un gran impacto como podemos notar en los trabajos de Schröder y Löwenheim; y, por otro lado, es necesario reconocer la importancia de Schröder como difusor de la lógica de relaciones de Peirce. Es Schröder quien, históricamente hablando, sirve de puente entre Peirce y Löwenheim, quien, a su vez, influye a Skolem y otros.

2.2. El Nacimiento de la Cuantificación

No parece demasiado aventurado afirmar que la aportación más relevante de Peirce y su OAL a la lógica moderna es una adecuada noción de cuantificación. Las álgebras booleanas desarrolladas antes de Peirce carecían de esta noción. Explicaremos aquí cómo fue que Peirce, junto a O.H. Mitchell —su alumno más brillante—, desarrolló la teoría de la cuantificación en la lógica matemática; discutiremos cuáles fueros las aportaciones de cada uno; y abordaremos el descubrimiento de la cuantificación de orden superior y diremos en qué posición se encuentran las aportaciones de Peirce frente a las de Frege.

2.2.1. El Descubrimiento de Mitchell

El poco reconocido matemático norteamericano Dr. Oscar Howard Mitchell (1851-1889) fue el más notable alumno de C.S. Peirce en la Universidad de John Hopkins (Dipert 1994, pp.515-19). Peirce le atribuye en el OAL haber dado con la noción adecuada de cuantificación de variables para el álgebra booleana (1885, 3.393). Si bien los resultados de Mitchell (1883) no son idénticos a los que Peirce da en el OAL como solución final al problema notacional de la cuantificación —como discutimos en la siguiente sección—, sí se aproximan bastante a la noción moderna que conocemos y que surgió del OAL. A continuación exponemos cuál fue el descubrimiento de Mitchell en torno a la teoría de la cuantificación y hacemos notar la opinión de Dipert (1994), quien, a diferencia de Peirce, no elogia a Mitchell por su trabajo en teoría de la cuantificación.

Mitchell (1883, pp.73-4) utiliza U para representar el universo de los términos de clases —mismo que puede o no ser limitado— y escribe "Todo U es F" como F_1 y "Algún U es F" como F_u. El subíndice 1 significa que el término de clase F es verdadero para todos los miembros del universo de términos de clase, y el subíndice u significa que es verdadero de algunos miembros. Con esto en mente, Mitchell realiza la siguiente formalización de los juicios categóricos de la lógica aristotélica:

1. "Todo a es b": $(\bar{a}+b)_1$ (es decir, $\bar{a}+b$ es verdadero de todo en U).
2. "Ningún a es b": $(\bar{a}+\bar{b})_1$ (es decir, $\bar{a}+\bar{b}$ es verdadero de todo en U).
3. "Algún a es b": $(ab)_u$ (es decir, ab es verdadero de algo en U).
4. "Algún a no es b": $(a\bar{b})_u$ (es decir, $a\bar{b}$ es verdadero de algo en U).

Sin embargo, aunque la tarea de expresar los juicios categóricos de la lógica aristotélica dentro del álgebra booleana parecía haberse cumplido satisfactoriamente con la notación de Mitchell, es fácil ver las limitaciones de la misma. Si dos proposiciones tienen U como subíndice, ¿se refieren a la misma porción del universo? Mitchell indica que no necesariamente (1883, p.77); pero si uno quisiera referirse múltiples veces a la misma porción del universo en una sola proposición, tendría problemas. Beatty (1969, p.72) realiza este diagnóstico y propone un ejemplo: el enunciado "todos aman a alguien que beneficia a todos" tendría una formalización incorrecta —si no de suyo imposible—, como $1_{1u}b_{u1}$, en la cual se expresaría que "todos aman a alguien y alguien beneficia a todos” pero el problema de esa formalización es que “todos” no necesariamente aman a ese mismo “alguien” que los beneficia.

Como vemos, aunque ciertamente hay en (Mitchel 1883) una noción de cuantificación, aún no completamente operativa. G. Brady (2000) ofrece una expliación simple de por qué la solución de Peirce es superior a la de Mitchell:

> In his paper, Mitchell develops a recognizable notion of and notation for existential and universal quantifiers, but does not have the general concept of a formula and therefore of bound or free occurrences of variables. (p.75)

mientras que R.M. Martin (1976), además de reconocer que la versión correcta o final de la noción de cuantificación aparece en el OAL, señala las deficiencias del acercamiento de Mitchell frente al de Peirce:

> It is not until we arrive at the 1885 paper [OAL], however, that the quantifiers are introduced on their own, and not in terms of the numerical functions and coefficients, which was more or less a complete failure, as Peirce himself commented. Peirce credits his student, O.H. Mitchell, whith showing how the distinction between “some” and “all” is to be effected within the “Boolian” framework. However, Mitchell’s method is limited to monadic quantification and his notation is still hampered by following “too much in the footsteps of ordinary numerical algebra”. Peirce’s notation is surely superior and is capable of handling iterated quantifiers in all possible ways. (p.242)

Tomando esto en cuenta, uno puede entender medianamente por qué Peirce da crédito a Mitchell en el OAL por la noción de cuantificación y por qué es que de ahí pudo surgir la cuantificación como en el OAL. Sin embargo, es posible tener una lectura de Mitchell menos elogiosa que la de Peirce. Dipert (1994), tras analizar otros logros de Mitchell, parece darle menos relevancia a los avances del (Mitchell 1883) e incluso coloca los trabajos de Peirce y su OAL por encima de los de Frege (1879):

> Mitchell’s contribution to the expression of particular statements, which had also received Peirce’s accolades, turns out to be much less significant than Peirce’s remarks might indicate. Peirce himself had in 1870 earlier solved the major problem of expressing particular statements by (among other techniques) using “indices”, and logical products and sums over the indices —a move which anticipated Frege’s more systematic account. That is, Peirce would write:
>
> $$\Sigma_i F_i > 0$$

> meaning the logical sum (union) of all i's which are F is greater than the null class. He later proposed dropping the "> 0", resulting in
>
> $$\Sigma_i F_i$$
>
> meaning, of course, "Something is F". [...] The result, by 1885, is a system which is equivalent to Frege's system of 1879. It was almost certainly developed independently from Frege's. In fact, it now appears that our modern notation for predicate logic arose from Peirce's work, through Schröder and Peano, and not from Frege's —whose work was carefully read only much later and whose notational system was never used by anyone else. (p.529)

De cualquier manera, todas estas opiniones, considerando especialmente la de Peirce mismo, apuntan al mismo hecho: O.H. Mitchell tiene un lugar importante en la historia de la teoría de la cuantificación y su (1883) influyó fuertemente en Peirce, quien, a través de otros desarrollos que exploraremos en la siguiente sección, llega a la noción de cuantificación que utilizamos hoy en los lenguajes formales. En cuanto al desarrollo paralelo de Frege y su (1879), independiente al de Peirce y Mitchell, existe suficiente literatura al respecto y no abundaremos en ello; tomamos ese punto de referencia para señalar, simplemente, que la escuela algebraicista de la lógica —particularmente la escuela norteamericana—, generó sus propios avances en la materia y por vías completamente distintas a las de la *Begriffsschrift*.

2.2.2. Los Desarrollos de Peirce

Para comprender el nacimiento de la teoría de la cuantificación hay que plantear dos problemas que formaron parte de la agenda filosófica de Peirce. Por un lado, hablaremos del problema metafísico de la teoría de las categorías como uno de los impulsos que motivaron la investigación de la lógica de relaciones; y, por otro lado, hablaremos del problema notacional que, ya desde Boole, embargaba al álgebra de la lógica.

El problema metafísico de la teoría de las categorías se refiere a lo siguiente: basado en los trabajos de Kant, Peirce investigó durante años la teoría de las categorías y desarrolló múltiples listas de nociones metafísicas generales que pretendían fundar una arquitectónica —a la manera de Kant—, una teoría general del ser. Como vemos en (1867b), Peirce propone tres categorías supremas —Primeridad o cualidad, Segundidad o relación, y Terceridad o regularidad— y se convence de que un desarrollo adecuado de esta teoría habría de darse a través del estudio de la lógica.

Fue principalmente esta convicción la que sirvió como motivación para desarrollar la lógica de relaciones; en esencia, las álgebras booleanas trabajaban con Primeridad o cualidades al tratar sistemáticamente los objetos matemáticos conocidos como "clases", pero carecían de un tratamiento particular para la Segundidad o las relaciones. Así, Peirce se da a la tarea de extender el álgebra de la lógica hacia la Segundidad y obtener así la Terceridad o regularidades que una metafísica apropiada requeriría.

Por otro lado, el problema notacional se refiere a lo siguiente: ya desde Boole y las primeras álgebras de la lógica existían dificultades para expresar la cuantificación; en particular, la notación era insuficiente para enunciados particulares. Boole mismo hace un intento para solucionar este problema proponiendo una letra arbitraria para representar una clase indeterminada, pero esto no funcionó, de acuerdo con Beatty (1969) y Peirce mismo:

> That which first led me to seek for the present extension of Boole's logical notation was the consideration that as he left his algebra, neither hypothetical propositions nor particular propositions could be properly expressed. It is true that Boole was able to express hypothetical propositions in a way which answered some purposes perfectly. [...] As for particular propositions, Boole could not accurately express them at all. He did undertake to express them and wrote
>
> $$\text{Some Y's are X's: } v, y = b, x;$$
> $$\text{Some Y's are not X's: } v, y = v, (1 - x)$$
>
> The letter v is here used, says Boole, for an "indefinite class symbol". This betrays a radical misapprehension of the nature of a particular proposition. To say that some Y's are X's, is not the same as saying that a logical species of Y's are X's. (1870, 3.138)

Peirce hereda este problema notacional —o quizá más que notacional— y comienza a tratarlo desde su (1870).[3] Las principales estrategias que Peirce empleó para solucionar este problema fueron: *a*) la teoría de los juicios categóricos; *b*) matrices inspiradas en el álgebra lineal; y *c*) sumas y productos lógicos sobre individuos de un universo —la estrategia ganadora. Ahora discutiremos brevemente estos tres desarrollos.

Juicios Categóricos

El primer intento de Peirce para expresar proposiciones particulares se dio a través del estudio de los juicios categóricos de la lógica aristotélica y medieval; es decir, incorporando a la notación de un álgebra los juicios universales afirmativos, universales negativos, particulares afirmativos y particulares negativos.

[3] Esta álgebra es bastante interesante; véase (Martin 1978).

	Juicios Afirmativos	**Juicios Negativos**
Juicios Universales	Todo S es P $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$ $s,(1-p)=0$	Ningún S es P $\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$ $s,p=0$
Juicios Particulares	Algún S es P $\exists x(S(x) \wedge P(x))$ $0^{s,p}=0$	Algún S no es P $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$ $0^{s,(1-p)}=0$

Cuadro 2.2: El clásico cuadro de oposición de los juicios categóricos y (Peirce 1870).

En su caótico (1870), Peirce ofrece múltiples aproximaciones al problema. En primer lugar, resaltamos la siguiente:

> Particular propositions are expressed by the consideration that they are contradictory of universal propositions. Thus, as $h,(1-b)=0$ means every horse is black, so $0^{h,(1-b)}=0$ means that some horse is not black; and as $h,b=0$ means that no horse is black, so $0^{h,b}=0$ means that some horse is black. (1870, 3.141)

En el pasaje citado, h es la clase de los caballos, b es la clase de lo negro, la coma entre los términos representa el producto lógico de las clases, $-$ representa la diferencia relativa de clases, 1 representa la clase universal y 0 representa la clase nula. Como podemos ver en el Cuadro 2.2, el proceso de exponenciación sobre la clase nula se presenta como una operación que invierte, niega o contradice las fórmulas.

Esta aproximación a la cuantificación particular fue abonada con el uso de desigualdades: las expresiones del tipo $x,y>0$ pretendían expresar que la clase de las cosas que son x e y no es la clase nula, lo cual parece aproximarse a la idea de cuantificación existencial ("existe al menos un objeto tal que…").

Otra aproximación del (Peirce 1870, 3.146) fue interpretar los términos de una clase t como si estuviesen separados en sus individuos T_1, T_2, T_3, etc., de manera que la suma lógica $T_1 +_, T_2 +_, \cdots +_, T_n$ (donde $+_,$ representa adición lógica, i.e. disyunción incluyente) signifique "algún T" y ello quede capturado en t. Esto se acerca mucho a la solución final que revisaremos dentro de poco —sumas lógicas sobre índices—, pero es inadecuada por lo siguiente: la suma lógica $T_1 +_, T_2 +_, \cdots +_, T_n$ actúa como una cuantificación existencial pero está limitada a los individuos de una clase en específico (la clase t); no parece ser todavía un método general que cuantifique sobre todo el universo de discurso. (Beatty 1969, p.66)

La interpretación de clases como la suma lógica de sus individuos dio lugar a un intento de cuantificación universal: las expresiones exponenciadas como x^y pretendían representar ideas como “la x de toda y”, (donde x es un término relativo del tipo “la x de ___”) propias de la noción de “términos relativos” investigada en (Peirce 1870, 3.77).

Y un intento más en (Peirce 1870, 3.175) utilizó la cópula $-\!\!<$, que puede interpretarse como signo de inclusión entre clases o como implicación material. Tomando $A -\!\!< B$ como “Todo A es B”, se tiene que $A \overline{-\!\!<} B$ expresa la contradictoria, es decir “Alguna A no es B”. Similarmente, si $A -\!\!< \bar{B}$ representa “Ningún A es B”, entonces $A \overline{-\!\!<} \bar{B}$ representa la contradictoria “Algún A es B”.

Como podemos ver, estas primeras aproximaciones a la noción de cuantificación, aunque interesantes, eran imprecisas y algunas de ellas hasta notacionalmente complicadas. Sin embargo, este breve vistazo a los primeros intentos de cuantificación —en particular, el intento de suma lógica de individuos de una clase— sirve para comprender de dónde salió la noción de cuantificación que aparece en el OAL y que utilizamos ahora de manera estándar —como argumentamos más adelante.

Matrices

Antes de estudiar la solución final al problema de la cuantificación, hacemos mención del método matricial que Peirce implementa en los inicios de su teoría de la cuantificación. El matemático norteamericano Benjamin Peirce (1809-1880) —el padre de Charles— fue también un desarrollador del álgebra; sin embargo, sus investigaciones no estaban acotadas al mundo de las álgebras booleanas, pues sus contribuciones se dirigieron al álgebra lineal. Peirce se inspira en los desarrollos de su padre e implementa un metodo matricial para la cuantificación en un álgebra de relaciones previa a la del OAL.

Suponiendo que $A, B, C, D, \ldots$ son los objetos individuales de un universo, es posible hacer un arreglo de todos los pares individuales (todas las relaciones) en un bloque o matriz:

$$\begin{array}{ccccc}
A:A & A:B & A:C & A:D & \ldots \\
B:A & B:B & B:C & B:D & \ldots \\
C:A & C:B & C:C & C:D & \ldots \\
D:A & D:B & D:C & D:D & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

donde la notación $X : Y$ representa que la clase X está en relación con la clase Y. A partir de este método, Peirce describe una manera de producir enunciados universales:

> A general relative may be conceived as a logical aggregate of a number of such individual relatives. Let l denote “lover”; then we may write
>
> $$l = \Sigma_i \Sigma_j (l)_{ij} (I : J)$$

where $(l)_{ij}$ is a numerical coefficient, whose value is 1 in case I is a lover of J, and 0 in the opposite case, and where the sums are to be taken for all individuals in the universe. (1883, 3.329)

Con estas manipulaciones, Peirce da con una idea muy cercana a la solución final que estudiaremos en el siguiente apartado.

> [...] it is often advantageous to recur to the numerical coefficients mentioned in [1883, 3.329]. Any proposition whatever is equivalent to saying that some complexus of aggregates and products of such numerical coefficients is greater than zero. Thus,
>
> $$\Sigma_i \Sigma_j l_{ij} > 0$$
>
> means that something is a lover of something; and
>
> $$\Pi_i \Sigma_j l_{ij} > 0$$
>
> means that everything is a lover of something. We shall, however, naturally omit, in writing the inequalities, the > 0 which terminates them all. (1883, 3.351)

El método matricial, entonces, parece ordenar todas las posibles relaciones existentes entre objetos individuales de un universo para que una proposición universal se refiera al producto de todos estos agregados de la matriz, o bien para que una proposición particular se refiera a la suma de todos estos agregados de la matriz.

> The explanation of how that formula can be said to express that proposition is the following: "I" and "J" represent all the individuals in the universe of discourse, only we use two different letters since they do not necessarily represent the same individual at the same time. If there is no pair of individuals, I and J, such that I loves J, then the coefficients of all the pairs, $I : J$, are always zero, and the sum of these coefficients is also zero. If there is at least one pair, $I : J$, such that I loves J, then the coefficient of this pair is one. And a sum of coefficients at least one of which has the value "one" will always be equivalent to one, i.e., it will be greater than zero. Thus, if the complexus of sums "$\Sigma_i \Sigma_j l_{ij}$" is greater than zero, there must be something which loves something. (Beatty 1969, p.71)

En ese sentido, Π_i y Σ_i operan sobre elementos i de una matriz M de relaciones entre individuos; en caso de que la suma de los componentes i arroje 1, la proposición particular es verdadera, y en caso de que el producto de los componentes i arroje 1, la proposición universal es verdadera.

Podemos ver que este método es cercano a la idea de cuantificación que se encuentra en el OAL; refiriéndose al último pasaje que citamos, Beatty apunta: "This is a very significant development.

Peirce is only a step away from the notion of predicate logic and quantification" (1969, p. 71). No dejamos de mencionar que el intento a través de matrices es sumamente particular y hacemos notar la opinión de Alan J. Iliff con respecto al uso de matrices importado del álgebra lineal: "To an extent heretofore unrecognized, Peirce's discovery of the quantifiers was based on his expertise in sophisticated techniques of abstract algebra; it was not merely a simple generalization of the Boolean sum and product" (1997, p.201).

Sumas y Productos Lógicos sobre Individuos

Es sólo hasta la aparición del OAL, 1885, que Peirce da finalmente con la noción adecuada de cuantificación; de hecho, en el parágrafo 3.393 del OAL encontramos el primer uso del término *cuantificador* y una explicación de por qué los intentos anteriores que recién estudiamos fueron fallidos (Beatty 1969, p.71). De acuerdo con Peirce, fue el trabajo de su alumno O.H. Mitchell —que analizamos en la sección 2.2.1.— el que le permitió dar con la noción de cuantificación del OAL:

> All attempts to introduce this distinction [todo vs. algún] into the Boolian algebra were more or less complete failures until Mr. Mitchell showed how it was to be effected. His method really consists in making the whole expression of the proposition consist of two parts, a pure Boolian expression referring to an individual and a Quantifying part saying what individual this is (1885, 3.393).

La solución al problema notacional de la cuantificación fue tomar un universo $\mathcal{U}$ de individuos i, j, etc. y utilizar Σ y Π como la suma lógica generalizada y el producto lógico generalizado, respectivamente, operando sobre individuos del universo de discurso (Beatty 1969, p.72). Recordemos que $\Sigma_i x_i = x_h + x_i + x_j + \ldots$ y que $\Pi_i x_i = x_h x_i x_j \ldots$ y notemos especialmente que esa maniobra es cualitativamente distinta a la del uso de matrices, donde Σ y Π tomaban factores (con valor 1 ó 0) de una matriz de relaciones entre individuos:

> Peirce reinterpreted his coefficient expressions as quantified expressions of predicate logic. Since the suscript is now taken as a variable ranging over the members of the universe of discourse, the coefficient symbol is naturally reinterpreted as a predicate or relation. (Beatty 1969, p.75)

Así pues, el método del OAL es más general, elegante y es, verdaderamente, el mismo método cuantificacional que utilizamos en FOL u otras lógicas cuantificacionales de manera estándar hoy día.

Grafos Existenciales: el otro camino

A manera de *addenda* a la discusión sobre teoría de la cuantificación, hacemos una rápida mención a un notable desarrollo independiente de los métodos algebraicos que analizamos y muy posterior a ellos: los grafos existenciales.

Peirce conocía los trabajos de Venn y Euler en lo referente a diagramas lógicos y en su (1908b, 4.347-4.530), donde estudia los métodos de Venn y Euler, encontramos tres sistemas *diagramáticos* de la lógica, englobados en lo que él denomina *grafos existenciales*. Estos tres sistemas son los sistemas Alfa, Beta y Gama de grafos existenciales; el sistema Alfa es una lógica diagramática para la lógica proposicional, el sistema Beta es una lógica diagramática para la lógica de primer orden, y el sistema Gama es una lógica diagramática para la lógica modal.

Los trabajos de Don D. Roberts (1973) y Sun-Joo Shin (2002) son excelentes tratamientos sistemáticos del tema y son importantes referencias en las discusiones de semiótica y lógicas gráficas o de razonamiento visual y diagramático. En este breve apartado ofrecemos algunas imágenes que ilustran el funcionalmiento del sistema Beta de grafos existenciales con el fin de señalar que Peirce tuvo otros desarrollos no-algebraicos para la cuantificación.

Los grafos Beta son diagramas que utilizan predicados, líneas y cortes. Todo lo que se diagrama está cuantificado existencialmente, las líneas se usan como variables de individuo y los cortes como negaciones. Las Figuras 2.1, 2.2 y 2.3 muestran ejemplos de juicios particulares y universales, así como del uso de las líneas que enlazan predicados y los cortes que niegan las propiedades y los enlaces. La Figura 2.4 muestra que la conectiva de la conjunción se representa como dos grafos juntos, mientras que la disyunción se construye a través de conjunciones y negaciones. La Figura 2.5 muestra cómo podemos emplear más de una variable de individuo introduciendo nuevas líneas que pueden o no relacionarse con los predicados de otras proposiciones.

Lo interesante de estos ejemplos radica no sólo en la discusión del nacimiento de la teoría de la cuantificación, sino en la distinción de los cálculos lógicos —aquellos sistemas como los que encontramos en el OAL— y los sistemas diagramáticos. Peirce observa esta distinción con los diagramas de Venn: no son un cálculo lógico sino un método gráfico de ciertas nociones lógicas; y, a partir de esto, construye un método gráfico para la lógica de primer orden capturada en su cálculo FIL.

Shin (2006) y Roberts (1973) exploran las propiedades metalógicas que se desprenden de estos métodos gráficos y discuten adecuadamente por qué no son cálculos lógicos como NRL ó FIL, etc. Nuestro interés en señalar este desarrollo de Peirce era reconocer un camino paralelo a las álgebras en la historia de la teoría de la cuantificación; nótese, además, la posible comparación entre la notación fregeana de la *Begriffsschrift* y los grafos existenciales Beta de Peirce.

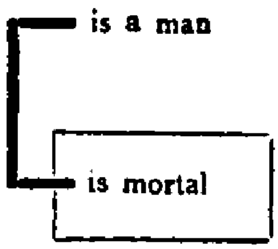

Figura 2.1: Algún hombre no es mortal: $\exists x(H(x) \wedge \neg M(x))$. (Peirce 1908b, 4.407)

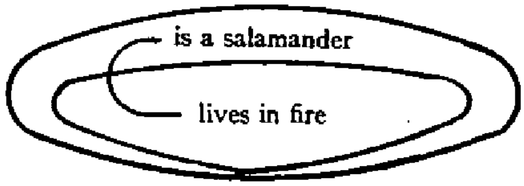

Figura 2.2: Toda Salamandra vive en el fuego: $\neg\exists x(S(x) \wedge \neg F(x)) \equiv \forall x(S(x) \Rightarrow F(x))$. (Peirce 1908b, 4.449)

Figura 2.3: Algo es bueno y feo: $\exists x(B(x) \wedge F(x))$; algo es bueno y feo y útil: $\exists x(B(x) \wedge F(x) \wedge U(x))$; todo lo bueno es feo: $\neg\exists x(B(x) \wedge \neg U(x)) \equiv \forall x(B(x) \Rightarrow F(x))$. (Shin 2002, p.39)

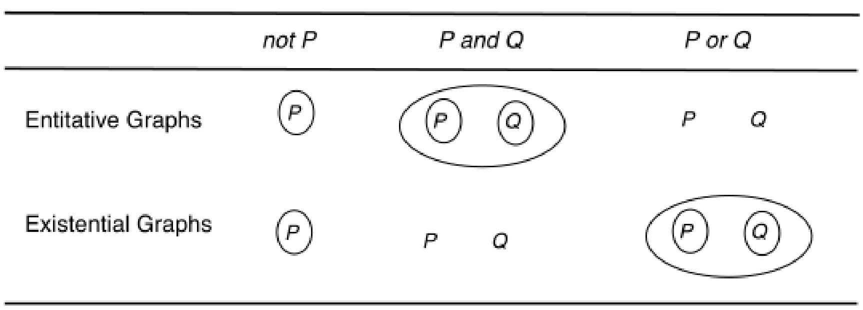

Figura 2.4: Conectivas lógicas y grafos existenciales. (Shin 2002, p.53)

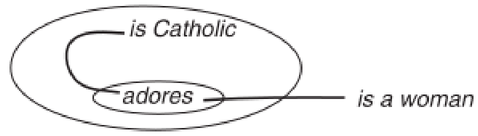

Figura 2.5: Todo católico adora a una mujer: $\neg\exists x(C(x) \wedge \neg\exists y(A(x,y))) \equiv \forall x(C(x) \Rightarrow \exists y(A(x,y)))$. (Shin 2002, p.58)

2.2.3. Orden Superior o lo que Frege Pasó por Alto

La mayoría de los historiadores de la lógica matemática atribuyen a Frege (1879) el descubrimiento de los cuantificadores. Hemos mostrado en las discusiones anteriores que los trabajos de Mitchell (1883) y Peirce (1885), aunque son cronológicamente posteriores a los de Frege, emergen de manera distinta —por consideraciones algebraicas y métodos propios— y más de una opinión apunta a que los trabajos de Mitchell y Peirce se dieron de manera independiente a los de Frege. Asimismo, más de una opinión apunta a que el hecho de que (Frege 1879) sea anterior a (Mitchell 1883) y (Peirce 1885) no implica que su recepción haya sido mejor a la de éstos; de hecho, parece que (Frege 1879) no fue leído sino hasta inicios del s.XX por Russell y otros. La opinión de Putnam (1982) al respecto es notable:

> Although Frege discovered the quantifier in 1879 and Peirce's student Mitchell independently discovered it only in 1883, it was Mitchell's discovery (as modified and disseminated by Peirce) that made the quantifier part of logic. And neither Löwenheim's theorem nor Zermelo set-theory depended on Frege's work at all, but only on the work of the Boole-Peirce school. (p.290)

De hecho, parte de la evidencia a favor de la tesis de que los trabajos de Peirce y su escuela tuvieron mejor recepción que los de Frege hasta antes de los trabajos de Russell y Whitehead se encuentra en el hecho de que matemáticos como Schröder, Löwenheim, Skolem y Zermelo utilizan la notación Peirce (a veces con modificaciones) y no la de Frege:

> Well, Schröder does *mention* Frege's discovery, though just barely. But he does not *explain* Frege's notation at all. The notation he both explains and adopts (with credit to Peirce and his students, O.H. Mitchell and Christine Ladd-Franklin) is Peirce's. And this is no accident: Frege's notation (like one of Peirce's schemes, the system of existential graphs) repelled everyone (although Whitehead and Russell were to study it with consequential results). (Putnam 1982, p.296)

> While, to my knowledge, no one except Frege ever published a single paper in Frege's notation, many famous logicians adopted Peirce-Schröder notation and famous

> results and systems were published in this notation. Löwenheim stated and proved the Löwenheim theorem (later reproved and strengthened by Skolem, whose name became attached to it together with Löwenheim's) in Peircian notation. In fact, there is no reference in Löwenheim's paper to any logic other than Peirce's. To cite another example, Zermelo presented his axioms for set theory in Peirce-Schröder notation, and not, as one might have expected, in Russell-Whitehead notation. (p.297)

Con base en lo que estudiamos en las secciones anteriores de este trabajo y en los señalamientos recién citados, compartimos la conclusión de Putnam (1982, p.297) al respecto: "Frege did 'discover' the quantifier in the sense of having the rightful claim to priority. But Peirce and his students discovered it in the effective sense".

Si bien hemos visto que la discusión sobre el nacimiento de la cuantificación conlleva una poco estudiada polémica sobre la influencia de los trabajos de Peirce y su escuela frente a los de Frege —misma que no exploraremos más, pues al respecto existe (Brady 2000), una notable referencia relativamente reciente—, tenemos, en contraste, un hecho histórico menos cuestionable: la distinción de *órdenes* en las lógicas cuantificacionales se debe a Peirce y ella surge en el OAL.

> In fact —and this may surprise you as it surprised me— the term "first order logic" is due to Peirce! (It has nothing to do with either Russell's theory of types or Russell's theory of *orders*, although the way Peirce distinguished between first-order and second-order formulas —by whether the "relative" is quantified over or not— obviously has something to do with a logical type). (Putnam 1982, p.296)

La discusión sobre el origen de la distinción entre órdenes de cuantificación de nuevo trae consigo una polémica Peirce-Frege: si Frege utiliza cuantificación de orden superior ya desde la *Begriffsschrift* —por ejemplo, al cuantificar sobre conjuntos y relaciones, además de variables de objeto—, ¿cómo podemos decir que Peirce es el legítimo padre de la noción de orden cuantificacional? Personas como Nino Cocchiarella (1986, p.198) han atribuido este logro a Frege.

La posible respuesta a este problema es simple, en cierto sentido. Peirce está completamente consciente de que FIL y SIL son sistemas completamente distintos debido a que SIL permite cuantificar términos relativos (lo que hoy tomamos como predicados y funciones en FOL, SOL y otras), y FIL no. Frege —particularmente en (Frege 1893)—, en cambio, escribe fórmulas explícitamente en orden superior (Hintikka y Sandu 1992, p.298) y no hace ninguna distinción al cuantificar objetos, conjuntos, relaciones, propiedades, etc. Dummett (1973) es contundente al respecto:

> For Frege had not the slightest qualm about the legitimacy or intelligibility of higher-level quantification: he used it from the first, in *Begriffsschrift*, freely and without

apology, and did not even see first-order logic as constituting a fragment having any special significance. (p.223)

Que en SIL, y sólo en SIL, surga una proto-teoría de conjuntos a partir del uso de cuantificación de segundo orden es una evidencia más a favor del hecho de que Peirce tenía en claro que dicha cuantificación traía diferencias con respecto a la cuantificación de primer orden y que sólo así podían tratarse cierta clase de objetos matemáticos y enunciados complejos. Esta claridad —que Frege no gozaba, en la opinión de Hintikka y Sandu (1992)— da a Peirce un logro más en la historia de la lógica, por un lado, y, por otro, arroja luz sobre las dificultades que sobrevinieron al programa de Frege:

> As we have seen, Frege's failure to grasp the idea of the standard interpretation of higher-order logic turns his entire foundational project into a a hopeless daydream. [...] Frege was far too myopic [...] It is likely to turn out that some of his contemporaries can offer far better ideas for future work in the foundations of mathematics than Frege did. (p.315)

2.3. Propiedades Metalógicas de NRL

En esta sección ofrecemos un breve análisis de las propiedades metalógicas de completud y corrección para el álgebra NRL. Como será evidente a partir de las pruebas que ahora daremos, existe una notable similitud con la lógica proposicional estándar (LP).

Vimos, en la sección 1.2.2., que NRL posee una semántica bivalente y veritativo-funcional a partir de la cual es posible evaluar cualquier fbf de NRL. Como discutimos en la sección 1.2.3., NRL presenta una axiomatización —lo que Peirce denomina *íconos*— que podemos emplear para diseñar un sistema de deducción natural. Sea $\vdash_{NRL}$ este sistema. Asúmase *Modus Ponens* como la única regla de inferencia en NRL. A continuación daremos algunos argumentos generales que dependen de esta semántica y este sistema de deducción natural.

2.3.1. Completitud para NRL

Teorema 1 (Teorema de la Deducción para NRL)**.** *Si* Γ *es un conjunto de fbf's y* φ *y* ψ *son fbf's y* $\Gamma, \varphi \vdash_{NRL} \psi$*, entonces* $\Gamma \vdash_{NRL} \varphi \prec \psi$*. En particular, si* $\varphi \vdash_{NRL} \psi$*, entonces* $\vdash_{NRL} \varphi \prec \psi$*.*

Demostración. Sea $\psi_1, \ldots, \psi_n$ una demostración de ψ desde $\Gamma \cup \{\varphi\}$, donde ψ_n es ψ. Probaremos por inducción sobre j que $\Gamma \vdash_{NRL} \varphi \prec \psi_j$ para $1 \leq j \leq n$. Primero, ψ_1 debe estar en Γ o ser un axioma de NRL o ser φ misma. Usando el teorema $\vdash_{NRL} \beta \prec (\alpha \prec \beta)$, sabemos que $\psi_1 \prec (\varphi \prec \psi_1)$ y, en consecuencia, los casos donde ψ_1 está en Γ o es un axioma garantizan (por

Modus Ponens) que $\Gamma \vdash_{NRL} \varphi \prec \psi_1$. En el tercer caso, cuando ψ_1 es φ, es claro que tenemos $\Gamma \vdash_{NRL} \varphi \prec \psi_1$ en virtud del axioma (I1). Eso en cuanto al caso $j = 1$.

Supongamos ahora que $\Gamma \vdash_{NRL} \varphi \prec \psi_k$ para $k < j$. O bien ψ_j es un axioma, o está en Γ, o es φ, o se sigue por *Modus Ponens* de alguna ψ_l y ψ_m, donde $l < j$, $m < j$ y ψ_m es de la forma $\psi_l \prec \psi_j$. Para los primeros tres casos, concluimos $\Gamma \vdash_{NRL} \varphi \prec \psi_j$ de la misma forma en la que $j = 1$. Para el último caso, tenemos, por hipótesis inductiva, que $\Gamma \vdash_{NRL} \varphi \prec \psi_l$ y $\Gamma \vdash_{NRL} \varphi \prec (\psi_l \prec \psi_j)$. Pero el teorema $\vdash_{NRL} (\alpha \prec (\beta \prec \gamma)) \prec ((\alpha \prec \beta) \prec (\alpha \prec \gamma))$ nos dice que $\vdash_{NRL} (\varphi \prec (\psi_l \prec \psi_j)) \prec ((\varphi \prec \psi_l) \prec (\varphi \prec \psi_j))$, de manera que por *Modus Ponenes* con la hipótesis inductiva obtenemos $\Gamma \vdash_{NRL} \varphi \prec \psi_j$. □

Lema 1. *Sea φ una fbf y sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ las variables proposicionales que ocurren en φ. Para una asignación de valores de verdad para $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, diremos que φ_j' es φ_j si φ_j toma el valor* **v***; y diremos que φ_j' es $\bar{\varphi}_j$ si φ_j toma el valor* **f**. *Permítase, además, que φ' sea φ si φ toma el valor* **v** *bajo la asignación, y que φ' sea $\bar{\varphi}$ si φ toma el valor* **f**. *Entonces, $\varphi_1', \ldots, \varphi_k' \vdash_{NRL} \varphi'$.*

Demostración. Probaremos por inducción sobre el número n de ocurrencias de $^-$ y $\prec$ en φ (asumiremos que φ está escrita en términos de este par de conectivas[4]). Si $n = 0$ φ es una variable proposicional φ_1 y el lema se reduce a $\varphi_1 \vdash_{NRL} \varphi_1$ y $\bar{\varphi}_1 \vdash_{NRL} \bar{\varphi}_1$. Ahora supongamos que el lema vale para toda $j < n$.

Caso 1. φ es $\bar{\psi}$. Entonces, ψ tiene menos de n ocurrencias de $^-$ y $\prec$.

a) Supongamos que ψ toma el valor **v** bajo la asignación. Entones φ toma el valor **f**. En consecuencia, ψ' es ψ y φ' es $\bar{\varphi}$. Por la hipótesis inductiva aplicada a ψ, tenemos que $\varphi_1', \ldots, \varphi_k' \vdash_{NRL} \psi$. Evidentemente, lo anterior implica que $\varphi_1', \ldots, \varphi_k' \vdash_{NRL} \bar{\bar{\psi}}$ y $\bar{\bar{\psi}}$ es φ'.

b) Supongamos que ψ toma el valor **f**. Entonces φ toma el valor **v**. En consecuecia, ψ' es $\bar{\psi}$ y φ' es φ. Por hipótesis inductiva, $\varphi_1', \ldots, \varphi_k' \vdash_{NRL} \bar{\psi}$. Pero $\bar{\psi}$ es φ'.

Caso 2. φ es $\psi \prec \omega$. Entonces ψ y ω tienen menos ocurrencias de $^-$ y $\prec$ que φ. Así, por hipótesis inductiva, $\varphi_1', \ldots, \varphi_k' \vdash_{NRL} \psi'$ y $\varphi_1', \ldots, \varphi_k' \vdash_{NRL} \omega'$.

a) ψ toma el valor **f**. Entonces φ toma el valor **v**. Así, ψ' es $\bar{\psi}$ y φ' es φ. En consecuencia, $\varphi_1', \ldots, \varphi_k' \vdash_{NRL} \bar{\psi}$. Pero si eso es así, claramente $\varphi_1', \ldots, \varphi_k' \vdash_{NRL} \psi \prec \omega$ y $\psi \prec \omega$ es φ'.

b) ω toma el valor **v**. Entones φ toma el valor **v**. En consecuencia, ω' es ω y φ' es φ. Por tanto, $\varphi_1', \ldots, \varphi_k' \vdash_{NRL} \omega$ y de ello se sigue que $\varphi_1', \ldots, \varphi_k' \vdash_{NRL} \psi \prec \omega$ y $\psi \prec \omega$ es φ'.

c) ψ toma el valor **v** y ω toma el valor **f**. Entonces φ toma el valor **f**. Así, ψ' es ψ, ω' es $\bar{\omega}$, y φ' es $\bar{\varphi}$. Por tanto, $\varphi_1', \ldots, \varphi_k' \vdash_{NRL} \psi$ y $\varphi_1', \ldots, \varphi_k' \vdash_{NRL} \bar{\omega}$. Pero esto implica que $\varphi_1', \ldots, \varphi_k' \vdash_{NRL} \psi \overline{\prec} \omega$ y $\psi \overline{\prec} \omega$ es φ'.

[4] Evidentemente, $\{\neg, \Rightarrow\}$, y su equivalente en OAL, $\{^-, \prec\}$, son conjuntos adecuados de conectivas. Asumimos esta escritura para simplificar la demostración

x	$\prec$	x
v	**v**	**v**
f	**v**	**f**

Cuadro 2.3: (I1) es tautología.

□

Teorema 2. *Si una fbf φ de NRL es una tautología, entonces φ es un teorema de $\vdash_{NRL}$.*

Demostración. Supongamos que φ es una tautología y sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ las variables proposicionales de φ. Para cualquier asignación de valores de verdad de $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ tenemos, por el Lema 1, que $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_k \vdash_{NRL} \varphi$ (nótese que φ' es φ porque φ toma siempre el valor **v** si es una tautología). Cuando φ'_k toma el valor **v**, obtenemos $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{k-1}, \varphi_k \vdash_{NRL} \varphi$; y, cuando φ'_k toma el valor **f**, obtenemos $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{k-1}, \bar{\varphi}_k \vdash_{NRL} \varphi$. Entonces, por el teorema de la deducción, $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{k-1} \vdash_{NRL} \varphi_k \prec \varphi$ y $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{k-1} \vdash_{NRL} \bar{\varphi}_k \prec \varphi$. Pero esto implica $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{k-1} \vdash_{NRL} \varphi$. De manera similar, podemos elegir φ_{k-1} como **v** ó **f** y eliminar φ'_{k-1} tal y como eliminamos φ'_k. Después de k pasos, obtenemos $\vdash_{NRL} \varphi$. □

2.3.2. Corrección para NRL

Lema 2. *Si φ y $\varphi \prec \psi$ son tautologías, entonces ψ también es una tautología.*

Demostración. Supongamos que φ y $\varphi \prec \psi$ son tautologías. Si ψ tomara el valor **f** en alguna asignación de valores de verdad para φ y ψ, entonces, puesto que φ es tautología, φ tendría el valor **v** y, en consecuencia, $\varphi \prec \psi$ tendría el valor **f**. Pero eso contradice la hipótesis de que $\varphi \prec \psi$ es tautología. En consecuencia, ψ también es tautología. □

Teorema 3. *Si una fbf φ de NRL es un teorema de $\vdash_{NRL}$, entonces φ es una tautología.*

Demostración. Observamos (Cuadros 2.3-7) que los axiomas (I1)–(I5) son tautologías. Por el Lema 2, *Modus Ponens* nos lleva de unas tautologías a otras. Por tanto, todo teorema de NRL es una tautología. □

2.4. Peirce y la Teoría de Conjuntos

En su OAL, Peirce provee una modesta lista de axiomas teórico-conjuntistas codificados en SIL. El surgimiento de este grupo de leyes se da en el entorno de una lógica de relaciones que permite interpretar los términos relativos también como clases —a la manera de las álgebras booleanas. Pero el rasgo distintivo de esta formulación es doble: a) por un lado, la utilización

$(x$	$-\!\!\prec$	$(y$	$-\!\!\prec$	$z))$	$-\!\!\prec$	$(y$	$-\!\!\prec$	$(x$	$-\!\!\prec$	$z))$
v	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**
v	**f**	**v**	**f**	**f**	**v**	**v**	**f**	**v**	**f**	**f**
v	**v**	**f**	**v**	**v**	**v**	**f**	**v**	**v**	**v**	**v**
v	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**v**	**f**	**f**
f	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**f**	**v**	**v**
f	**v**	**v**	**f**	**f**	**v**	**v**	**v**	**f**	**v**	**f**
f	**v**	**f**	**v**	**v**	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**v**
f	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**

Cuadro 2.4: (I2) es tautología.

$(x$	$-\!\!\prec$	$y)$	$-\!\!\prec$	$((y$	$-\!\!\prec$	$z)$	$-\!\!\prec$	$(x$	$-\!\!\prec$	$z))$
v	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**
v	**v**	**v**	**v**	**v**	**f**	**f**	**v**	**v**	**f**	**f**
v	**f**	**f**	**v**	**f**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**
v	**f**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**	**f**	**v**	**f**	**f**
f	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**f**	**v**	**v**
f	**v**	**v**	**v**	**v**	**f**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**
f	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**v**	**v**	**f**	**v**	**v**
f	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**	**v**	**f**

Cuadro 2.5: (I3) es tautología.

f	$-\!\!\prec$	x
f	**v**	**v**
f	**v**	**f**

Cuadro 2.6: (I4) es tautología.

$((x$	$-\!\!\prec$	$y)$	$-\!\!\prec$	$x)$	$-\!\!\prec$	x
v	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**	**v**
v	**f**	**f**	**v**	**v**	**v**	**v**
f	**v**	**v**	**f**	**f**	**v**	**f**
f	**v**	**f**	**f**	**f**	**v**	**f**

Cuadro 2.7: (I5) es tautología.

de términos relativos q, r, α y c para representar las relaciones conjuntistas de $\in$, $\leq$, $\langle x, y\rangle$ (una relación cualquiera) y $f : A \longmapsto B$ (una función uno-a-uno), respectivamente; y b) el reconocimiento de la necesidad de cuantificación de segundo orden para tratar objetos matemáticos como las clases, las relaciones y la identidad.

No es posible sostener que el trabajo de Peirce en torno a los conjuntos era completamente novedoso de acuerdo con lo que hemos visto en OAL. El trabajo de Cantor ya había sido difundido para entonces y Peirce conocía la teoría de los *Mengen*. Sin embargo, parece que, históricamente hablando, OAL sí ofrece uno de los primeros acercamientos axiomáticos a la teoría de conjuntos. No diremos que en OAL se encuentra el primer intento de axiomatización de la teoría de conjuntos, pero sostenemos que en el trabajo de Peirce encontramos un tratamiento riguroso que da lugar a algunas observaciones interesantes que señalaremos a continuación.

2.4.1. Álgebra de Conjuntos

En primer lugar, los axiomas de extensionalidad[5], unitario, complemento y unión, permiten la construcción de un *álgebra de conjuntos*. Uno puede definir la operación de intersección a partir de las definiciones del conjunto unión y complemento como sigue:

$$\Pi_a \Pi_b \Pi_i \Sigma k(q_{ki} q_{\overline{(\bar{A} \cup \bar{B})}i} + \bar{q}_{ki} \bar{q}_{\overline{(\bar{A} \cup \bar{B})}i})$$

es decir,

$$\forall A \forall B \forall i \exists K(i \in K \Leftrightarrow x \in (A^{\complement} \cup B^{\complement})^{\complement})$$

donde K es el conjunto intersección de A y B. Y, a partir de los conjuntos garantizados por los axiomas y a partir de la definición del conjunto intersección, podemos plantear la siguiente lista de axiomas para un álgebra booleana de conjuntos $\mathfrak{BS} = \langle \{\emptyset, 1\}, ^{\complement}, \cup, \cap\rangle$ para cualesquiera conjuntos A, B y C:

(C1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(C2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(C3) $A \cup \emptyset = A$

(C4) $A \cap 1 = A$

(C5) $A \cup B = B \cup A$

[5]Aunque Peirce no lo enuncia como tal, su definición para la relación de identidad 1_{ij} implica el axioma de extensionalidad tal y como se formula en ZFC. Dado que Peirce ofrece una definición de identidad tanto para términos relativos como para clases, tomamos la licencia en este punto para sostener que podemos encontrar un axioma de extensionalidad en el desarrollo de la SIL de Peirce.

(C6) $A \cap B = B \cap A$

(C7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(C8) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(C9) $A \cup A^{\complement} = 1$

(C10) $A \cap A^{\complement} = \emptyset$

La importancia de una teoría de conjuntos capaz de generar un álgebra como $\mathfrak{BS}$ no es menor, pues uno esperaría que una teoría de conjuntos permitiera el surgimiento de estructuras matemáticas tan elementales como un álgebra de conjuntos para atender los problemas conjuntistas más rudimentarios. Más aún, si tomamos en cuenta que esta teoría no sólo cuenta con un álgebra $\mathfrak{BS}$ sino que ya cuenta con relaciones, funciones e identidad—por tratarse de primitivas en SIL—, podría argumentarse en favor de la suficiencia de la teoría para atender problemas matemáticos sistemáticamente —es decir, argumentar que se tiene en el OAL una de las primeras teorías de conjuntos que entrega lo que de ella se espera para realizar trabajo matemático.

Sin embargo, a primera vista, podría plantearse la objeción de que la teoría de conjuntos que encontramos en OAL presenta una axiomatización insuficiente para realizar el trabajo matemático para el cual fue desarrollada la teoría de conjuntos en la tradición cantoriana; es decir, si tomamos ZF o, más aún, ZFC como la teoría estándar de conjuntos y comparamos las axiomatizaciones de ésta y la que encontramos en OAL, parecería que Peirce no da cuenta de ciertas nociones elementales del concepto de “conjunto”. Específicamente: la axiomatización del OAL no presenta axiomas equivalentes al del conjunto par, al del conjunto potencia, ni tampoco al de separación, reemplazo, infinitud, buena fundación ni elección.

2.4.2. Una Ampliación de la Teoría de Conjuntos del OAL

De esta objeción deberíamos obtener al menos dos conclusiones: i) por un lado, desde el punto de vista histórico, el trabajo de Peirce califica como una *proto-teoría* de conjuntos frente a otras teorías en competencia que son consideradas hoy como teorías maduras que incluso gozan del carácter de “estándar”, de manera que los logros de matemáticos como Zermelo, Fraenkel, von Neumann, Barnays, Gödel y otros estudiosos de las axiomatizaciones de la teoría de conjuntos, se encuentran por encima de los de Peirce en esta área particular de la matemática; y ii) por otro lado, desde el punto de vista técnico, uno podría ampliar la lista de axiomas del OAL lo suficiente como para cubrir de manera equivalente todo lo que ZFC cubre, bajo la hipótesis metalógica de que los lenguajes cuantificacionales subyacentes a ambas teorías son equivalentes, distintos sólo en notación y primitivas.[6]

Para motivar la última conclusión, y finalizar esta breve discusión, considérese la siguiente lista de axiomas como posible ampliación a la teoría de conjuntos que encontramos en OAL:

1. **Axioma del conjunto par**: $\forall x \forall y \exists A \forall z (z \in A \Leftrightarrow z = x \vee z = y)$ en ZFC; $\Pi_x \Pi_y \Sigma_a \Pi_z (q_{az}(1_{zx} + 1_{zy}) + \overline{q_{az}(1_{zx} + 1_{zy})})$ en la posible ampliación de la teoría de Peirce.

2. **Axioma del conjunto potencia**: $\forall x \exists A \forall y (y \in A \Leftrightarrow \forall z (z \in y \Rightarrow z \in x))$ en ZFC; $\Pi_x \Sigma_a \Pi_y \Pi_z (q_{ay}(\bar{q}_{yz} + q_{xz}) + \overline{q_{ay}(\bar{q}_{yz} + q_{xz})}$ en la posible ampliación de la teoría de Peirce.

3. **Axioma de separación**: $\forall x \exists A \forall y (y \in A \Leftrightarrow y \in x \wedge \varphi(y))$ en ZFC (donde φ es una propiedad); $\Pi_x \Sigma_a \Pi_y \Pi_p (q_{ay} q_{xy} p_y + \overline{q_{ay} q_{xy} p_y})$ en la posible ampliación de la teoría de Peirce.[7]

4. **Axioma de reemplazo**: $\forall x \forall y \forall z (\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \Rightarrow y = z) \Rightarrow \forall u \exists v \forall w (w \in u \Leftrightarrow \exists t (t \in u \wedge \varphi(t, w)))$ en ZFC (donde φ es una función); $\Pi_x \Pi_y \Pi_z \Pi_u \Sigma_v \Pi_w \Sigma_t (\overline{(\overline{(f_{xy} f_{xz})} + 1_{yz})} + (q_{vw} q_{ut} f_{tw} + \overline{q_{vw} q_{ut} f_{tw}}))$ en la posible ampliación de la teoría de Peirce.

5. **Axioma de infinitud**: $\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$ en ZFC; $\Sigma_x \Pi_y (q_{x0}(\bar{q}_{xy} + q_{xy \cup \hat{y}}))$ en la posible ampliación de la teoría de Peirce (donde usamos $\cup$ como se define en el axioma de unión que da Peirce originalmente en OAL, y donde $\hat{y}$ denota al conjunto unitario de y, tal y como se establece en el axioma del conjunto unitario que Peirce da en OAL.

6. **Axioma de buena fundación**: $\forall x (x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge \forall z (z \in y \Rightarrow z \notin x)))$ en ZFC; $\Pi_x \Sigma_y \Pi_z (1_{x0} + q_{xy}(\bar{q}_{yz} + \bar{q}_{zx}))$ en la posible ampliación de la teoría de Peirce.

7. **Axioma de elección**: $\forall x \exists f : x \longrightarrow \bigcup x \forall a (a \in x \wedge a \neq \emptyset \Rightarrow f(a) \in a)$ en ZFC; $\Pi_x \Sigma_f \Pi_a (\overline{q_{xa} \bar{1}_{a0} d_{fx} i_{f \bigcup x}} + q_{af(a)})$ en la posible ampliación de la teoría de Peirce (donde d relaciona al conjunto x como dominio de f e i relaciona a $\bigcup x$ como imagen de f).

2.4.3. El Problema del Continuo: Hacia la Topología

El hecho de que encontremos en el trabajo de Peirce una proto-teoría de conjuntos que, como hemos pretendido mostrar, es lo suficientemente rica como para vislumbrar dentro sus alcances

[6] Esta posible respuesta a la objeción requiere un fuerte trabajo que no realizaremos aquí. Habría que mostrar, primero, que SIL y SOL son equivalentes, y, posteriormente, que T es un teorema de ZFC si y sólo si T es un teorema de la teoría *ampliada* de conjuntos de Peirce. Nos limitamos a señalar esto como una posible ruta de investigación.

[7] Nótese Π_p, la cuantificación universal sobre una propiedad p. Esto está permitido porque la lógica subyacente a la teoría de Peirce es de segundo orden, mientras que en ZFC φ tiene un carácter discutible —por ejemplo, el de variable libre de segundo orden.

algunas de las discusiones contemporáneas de la matemática, invita a preguntar si Peirce discutió la noción de "continuidad" como lo hizo Cantor.

Efectivamente, Peirce investigó el problema de la naturaleza filosófica y matemática del continuo; sin embargo, su aproximación es distinta a la de otros pensadores. Consciente de los trabajos de Cantor y Dedekind, como podemos observar en (Peirce 1896, 1898, 1900, 1908), una de las aproximaciones de Peirce al concepto de continuidad se dio a través de la *topología*:

> Topology, or, as I prefer to call it, topical geometry, or, still better, *geometrical topics* [...] In this field of thought we still suppose objects to move about in Space. But we suppose that, at will, any of these objecs can be made to expand, to contract, to bend, to twist, and in sort to move free from any law, excepting only that it is nowhere to be broken or welded; —or, to state the condition precisely, that no two parts or limits of it shall [be able] at one instant to occupy one and the same place and at another instant separate places. [...] Now this connection of parts, which is the sole law of topical moveables, is a property of the very Space itself. (Peirce 1904, p.121-2)

Si bien existe una interesante discusión en los textos recién citados acerca de si la definición cantoriana de continuidad es apropiada o no a los ojos de Peirce, no profundizaremos más en esto. Nos limitamos, entonces, a señalar que la teoría de conjuntos que se desprende del OAL ya es suficiente para definir las nociones de *topología* y *espacio topológico* como se hace actualmente. Un espacio topológico es el par $\langle X, \tau\rangle$ donde X es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de X (la topología de X) cuyos elementos se llaman *conjuntos abiertos* y son tales que:

(T1) $\emptyset, X \in \tau$

(T2) $\forall i \in I(O_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I} O_i \in \tau)$

(T3) $\forall i \in I(O_i \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} O_i \in \tau)$

Este punto es notable ya que, históricamente hablando, en OAL encontramos una de las primeras aproximaciones axiomáticas a la teoría de conjuntos en un lenguaje de segundo orden que ya es lo suficientemente expresivo como para modelar las nociones que, a finales del s. XIX y a inicios del s. XX, surgen en la matemática moderna, tales como el álgebra de conjuntos, los espacios topológicos y, como veremos ahora, la aritmética axiomatizada.

2.4.4. Una Axiomatización para la Estructura de los Números Naturales

En (Peirce 1881) encontramos un breve pasaje en donde Peirce presenta las ideas de una axiomatización para la estructura de los números naturales empleando las nociones que desarrolló en sus lógicas de relaciones. Si bien OAL es posterior —fechado en 1885—, el uso de cuantificadores, términos relativos e implicaciones ya estaba presente en algunos desarrollos previos, tales como el que Peirce utiliza en (1881). Aquí mostraremos brevemente cómo fue que, a través de la lógica de relaciones, Peirce da lo que, según Paul Shields (1997, p.43), es probablemente el primer intento exitoso de axiomatización para los números naturales.

De acuerdo con la reconstrucción de Shields (1997, p.44), la axiomatización de Peirce precede a las de Dedekind (1888) y Peano (1889), y puede plantearse como sigue: Sea N un conjunto, R una relación en N, y 1 un elemento de N; asúmanse las definiciones de "mínimo", "máximo" y "predecesor" con respecto a R y N; entonces:

(N1) N está parcialmente ordenado por R. (Peirce 1881, 3.253)

(N2) N está conectado por R. (3.354)

(N3) N está cerrado bajo predecesores. (3.256)

(N4) 1 es el mínimo de N; N no tiene máximo. (3.257)

(N5) La inducción matemática vale para N. (3.258)

Shields advierte, sin embargo, que no es así como Peirce expone su axiomatización. En realidad, la presentación original se vale del uso de términos relativos —aquellas relaciones descritas por FIL o SIL, por ejemplo— y, por este motivo, consideramos importante e ilustrativo para nuestros propósitos reparar en la exposición puntual de Peirce.

El axioma N1) describe una relación capturada por un término relativo q tal que q es transitiva, antisimétrica y reflexiva; es decir, q es una relación de orden parcial, como $\leq$. Evidentemente, queremos que q ordene a N:

> Then q may be called a fundamental relative of quantity; its properties being, first, that it is transitive; second, that everything in the system is q of itself, and, third, that nothing is both q of and q'd by anything except itself. (1881, 3.253)

El axioma N2) añade el requerimiento de conexión, lo cual haría que nuestra relación de orden fuera un orden simple al cubrir los requerimientos de conexión y orden parcial[8]:

> A system in which quantities may be q's of or q'd by the same quantity without being either q's of or q'd by each other is called multiple; a system in which of every two quantities one is a q of the other is termed simple. (1881, 3.254)

[8] Una relación de orden simple es una relación de orden parcial que además cumple conexión. Una relación de orden parcial es una relación que cumple transitividad, antisimetría y reflexividad. Una relación R cumple conexión sii $\forall x \forall y(xRy \vee yRx)$. Una relación R cumple transitividad sii $\forall x \forall y \forall z((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$. Una relación R cumple antisimetría sii $\forall x \forall y((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y)$. Una relación R cumple reflexividad sii $\forall x(xRx)$.

El axioma N3) describe la propiedad de un sistema de cantidades en el cual todas, excepto el mínimo, tienen un predecesor:

> A system of simple quantity is either continuous, discrete, or mixed. [...] A discrete system is one in which every quantity greater than another is next greater than some quantity (that is, greater than without being greater than something greater than). (3.256)

El axioma N4) expone la necesidad de un mínimo en un sistema semi-limitado como lo es la estructura de los naturales:

> A simple system of discrete quantity is either limited, semi-limited, or unlimited. A limited system is one which has an absolute maximum and an absolute minimum quantity; a semi-limited system has one (generally considered a minimum) without the other; an unlimited has neither. (3.257)

Y, finalmente, el axioma N5) describe el principio de inducción matemática que caracteriza la axiomatización de los naturales:

> In other words, an infinite, discrete, simple, system is one in which, if the quantity next greater than an attained quantity is itself attained, then any quantity greater than an attained quantity is attained; and by the class of attained quantities is meant any class whatever which satisfies these conditions. So that we may say that an infinite class is one in which if it is true that every quantity next greater than a quantity of a given class itself belongs to that class, then it is true that every quantity greater than a quantity of that class belongs to that class. Let the class of numbers in question be the numbers of which a certain proposition holds true. Then, an infinite system may be defined as one in which from the fact that a certain proposition, if true of any number, is true of the next greater, it may be inferred that that proposition if true of any number is true of every greater. (3.258)

Si la reconstrucción de Shields es correcta y los pasajes recién citados realmente apoyan (N1)–(N5), entonces podemos decir que la teoría de conjuntos del OAL es lo suficientemente expresiva como para generar la siguiente axiomatización para la estructura de los números naturales: sea n el conjunto de los números naturales, sea $q_{n\mathbb{1}}$, y sean m la propiedad "mínimo", x la propiedad "máximo" y p la función "predecesor"; entonces,

(N1') Sea α una relación tal que $\Pi_u(q_{nu}\alpha_{uu})$ y $\Pi_u\Pi_v(q_{nu}q_{nv}(\overline{(\alpha_{uv}\alpha_{vu})} + 1_{uv}))$ y $\Pi_u\Pi_v\Pi_w(q_{nu}q_{nv}q_{nw}(\overline{(\alpha_{uv}\alpha_{vw})} + \alpha_{uw}))$; es decir, α es un orden parcial sobre n

(N2') $\Pi_u\Pi_v(q_{nu}q_{nv}(\alpha_{uv} + \alpha_{vu}))$, es decir, α es, además, un orden simple sobre n.

(N3') $\Pi_u(\overline{(q_{nu}\bar{1}_{\mathbb{1}u})} + q_{np_u})$

(N4') $m_{\mathbb{1}n}$ y $\Pi_u(\bar{q}_{nu} + \bar{x}_{un})$ —nótese que $\mathbb{1}$ denota al elemento mínimo de n y no debe confundirse con 1, que es la relación de identidad.

(N5') $\Pi_a\Pi_k\Pi_u(\overline{\overline{(q_{nk}a_{\mathbb{1}}a_{p_k})} + a_k} + q_{nu}a_u)$, donde a es una propiedad arbitraria.

Sin embargo, ni Shields (1997) ni Peirce (1881) hablan de axiomas para la aritmética de los naturales; es decir, los axiomas de suma y producto, que sí encontramos en Peano (1889) —por ejemplo—, no son propuestos hasta donde hemos observado. En ese sentido, (N1')–(N5') describe la estructura de los números naturales —es decir, nos muestra cómo es este conjunto en particular— pero no nos proporciona aún una serie de operaciones aritméticas sobre el conjunto. De nuevo, hemos de reconocer en este punto que la axiomatización de Peirce es una *proto-teoría* de los números naturales y que ella se ve superada por la de Peano[9].

No obstante, nuevamente podríamos sugerir una ampliación a la axiomatización de Peirce y proponer lo siguiente:

(N6') $\Pi_u\Pi_v(\overline{(q_{nu}q_{nv}1_{p_up_v})} + 1_{uv})$, para incluir la igualdad y describir mejor p.[10]

(N7') $\Pi_u(p_u \oplus \mathbb{1} = u)$, donde $\oplus$ es la suma aritmética; se asume que todas las variables cuantificadas en este axioma y los suscesivos pertenecen a n; usamos $=$ en vez de 1 para simplificar la notación.

(N8') $\Pi_u\Pi_v(u \oplus p_v = p_{u\oplus v})$

(N9') $\Pi_u(u \otimes \mathbb{1} = u)$, donde $\otimes$ es el producto aritmético.

(N10') $\Pi_u\Pi_v(u \otimes v = (u \otimes p_v) \oplus u)$

[9] Putnam (1982, p.298) dice que Peano no sólo conocía la lógica de Peirce y Schröder, sino que además entabló correspondencia con Peirce y que esto permitiría sugerir que las aportaciones de Peano a la lógica y la matemática se deben a la tradición algebraicista de la cual Peirce forma parte. Desafortunadamente, Putnam no proporciona referencias para comprobar esta notable afirmación.

[10] Es interesante notar que, a diferencia de Peano, quien usa la función sucesor en su axiomatización de los naturales y su aritmética, Peirce utiliza la función predecesor y la lista de axiomas que presentamos aquí se diferencia de la Peano precisamente en el uso de p.

Capítulo 3

El Marco Filosófico del OAL

En los capítulos anteriores hemos tratado, por un lado, de brindar una reconstrucción sistemática del OAL para facilitar la investigación de las lógicas presentadas en el artículo de 1885 de Peirce; y, por otro lado, hemos trazado, a grandes rasgos, algunas implicaciones históricas y técnicas que se desprenden de una lectura diacrónica del OAL. En el presente y último capítulo, reparamos en las motivaciones filosóficas que impulsaron las investigaciones lógicas de Peirce. Desde nuestro punto de vista, la filosofía de la lógica y de la matemática que sostenía Peirce influyó profundamente en el proyecto algebraicista de la lógica. Como veremos, los trabajos de Peirce en el álgebra de la lógica no obedecen a un proyecto fundacionista —como en el caso de Frege, Russell y Whitehead—, sino que son una consecuencia natural de sus propias convicciones acerca de la lógica y la matemática.

3.1. Peirce y la Filosofía de las Matemáticas y la Lógica

En esta primera sección ofrecemos un rápido panorama filosófico de la matemática y la filosofía de acuerdo con Peirce. Abordaremos aquellas definiciones que, en la opinión del filósofo norteamericano, agotan la naturaleza de estas ciencias formales; y, adicionalmente, revisaremos cuál es la relación que Peirce sugiere que guardan entre sí las matemáticas y la lógica, así como con otras ciencias naturales o filosóficas en una concepción general del conocimiento científico. El objetivo de esta sección es, entonces, sentar las bases que permitirán montar un discurso en torno a la motivación filosófica de los trabajos algebraicistas de Peirce.

3.1.1. Entre Lógica y Matemáticas: interrelación de las ciencias

Para comprender el proyecto filosófico de Peirce, tanto en general como en los casos particulares de la matemática y la lógica, es necesario remitirse a su clasificación de las ciencias. Peirce (1903b, 1.180-202) propone una manera de jerarquizar las ciencias en función de su nivel de abstracción y la construcción que realiza deja ver de qué manera se relacionan las ciencias entre sí: su dependencia epistemológica y su aportación a otras ramas del conocimiento. Cabe notar, empero, que no se trata de una clasificación estricta que pretenda ser a prueba de contrapropuestas; se trata, más bien, de un modelo conveniente para hacer filosofía de la ciencia. Es provechoso seguir a Atkins (2006) y a Wells (1987) en este tema.

La clasificación de las ciencias está dividia en tres grandes rubros: las ciencias del descubrimiento; las ciencias de revisión; y las ciencias prácticas. Para efectos de nuestra investigación, hablaremos únicamente de las *ciencias del descubrimiento*, cuya función es añadir nuevo conocimiento al edificio de las ciencias (Peirce 1903b, 1.181).

En las ciencias del descubrimiento encontramos tres grandes ramas: la matemática; la filosofía; y las ciencias empíricas. Las subramas respetan un orden que va de lo menos concreto —matemática— a lo más concreto —ciencias empíricas—. (Peirce 1903b, 1.183) Nos concentraremos en la *matemática* y la *filosofía* exclusivamente.

De acuerdo con la clasificación de Peirce, la matemática tiene ciertas subramas que no mencionaremos aquí porque consideramos que Peirce deja fuera muchas áreas relevantes de esta ciencia; señalaremos únicamente que una de las ramas que Peirce toma en cuenta es la de la *matemática de la lógica* (Peirce 1903b, 1.185). Volveremos a este punto cuando hablemos de la lógica en los siguientes apartados.

La filosofía, por su parte, está subdividida de una manera muy interesante: la fenomenología; las ciencias normativas; y la metafísica (Peirce 1903b, 1.186). Nos interesan las *ciencias normativas*, pues ellas son, la estética, la ética y la *lógica* (1.191). Peirce considera que estas ramas de la filosofía son ciencias normativas porque ellas determinan qué es correcto o incorrecto en función de determinados ideales. En el caso de la estética, se determina qué objeto es bello y cuál no; en el caso de la ética se determina qué acción es moralmente buena y cuál no; y en el caso de la lógica se determina qué razonamientos son válidos y cuáles no.

De manera general, es interesante notar, primeramente, que la matemática se encuentra posicionada *antes* que la filosofía y esto implica una diferencia notable: el nivel de abstracción de la matemática es superior al de la filosofía en el entendido de que la matemática no está constreñida a un discurso en torno a realidades concretas. La anterioridad de la matemática frente a la lógica es de carácter epistémico, no cronológico, pedagógico u otro; es decir, la matemática es más general y pura —en el sentido de ofrecer conocimiento apodíctico. En particular, Peirce ofrce la siguiente razón: “Mathematics studies what is and what is not logically possible, without making itself responsible for its actual existence” (1903b, 1.184).

En segundo lugar, el hecho de que la filosofía *suceda* a la matemática en la jerarquía de Peirce, implica que la filosofía toma algo de la matemática, a saber, el pensamiento deductivo. Esto es especialmente el caso para la lógica, como veremos más a detalle en las siguientes secciones.

En ese sentido, como queremos resaltar en este apartado, la clasificación de las ciencias ofrece una idea interesante para nuestro tema de interés: la relación entre la matemática y la lógica es tal que la una tiene prioridad epistémica sobre la otra. Dado que la lógica está planteada como una rama de la filosofía, veremos que esta construcción tiene fuertes implicaciones *antilogicistas*.

Con este somero modelo de interdependiencia de las ciencias, podemos enfocarnos en la filosofía de las matemáticas y la lógica bajo el entendido de que ésta no precede ni fundamenta a aquella en el esquema de Peirce.

3.1.2. Filosofía de las Matemáticas

Charles Peirce no sólo siguió los pasos de su padre en el terreno del álgebra, como vimos en la sección 2.2.2 al hablar del método de matrices para cuantificadores. Benjamin Peirce influyó también en el concepto de *matemática* que Charles sostuvo a lo largo de su vida. Al respecto, C.S. Peirce escribe:

> It was Benjamin Peirce, whose son I boast myself, that in 1870 first defined mathematics as "the science which draws necessary conclusions". This was a hard saying at the time; but today, students of the philosophy of mathematics generally acknowledge its substantial correctness. (1902b, 4.229)

Peirce mantiene esta definición de *matemática* en prácticamente todos sus trabajos en torno al tema y a partir de esta simple caracterización extrae una serie de cualidades interesantes de la matemática. Seleccionamos sólo un par de pasajes de manera representativa:

> Mathematics is the most abstract of all the sciences. For it makes no external observations, nor asserts anything as a real fact. When the mathematician deals with facts, they become for him mere "hypotheses"; for with their truth he refuses to concern himself. The whole science of mathematics is a science of hypotheses; so that nothing could be more completely abstracted from concrete reality. (1896b, 3.428)
>
> The first is mathematics, which does not undertake to ascertain any matter of fact whatever, but merely posits hypotheses, and traces out their consequences. It is observational, in so far as it makes constructions in the imagination according to abstract precepts, and then observes these imaginary objects, finding in them relations of parts not specified in the precept of construction. This is truly observation, yet certainly in a very peculiar sense; and no other kind of observation would at all answer the purpose of mathematics. (1902, 1.240)

Podemos caracterizar las observaciones anteriores como sigue:

M1) La matemática es la ciencia que obtiene conclusiones necesarias a partir de hipótesis o idealizaciones.

M2) La matemática propone hipótesis de trabajo como punto de partida. Esto quiere decir que el matemático comienza sus consideraciones partiendo de una idealización de un estado de cosas que pretende estudiar.

M3) Más allá de las relaciones necesarias o estructurales entre los elementos de los objetos de estudio que se modelan matemáticamente, la matemática no pone consideración especial alguna en cómo son de hecho las cosas. Esto quiere decir que el matemático, a diferencia del físico o el biólogo, se encuentra en un estado privilegiado pues no requiere investigar cómo se comportan determinados sistemas o entidades del mundo para obtener las conclusiones que persigue.

M4) La inferencia que realiza el matemático tiene carácter necesario y es, por tanto, deductiva. Esto quiere decir que de aceptar como verdadera la hipótesis de trabajo en cuestión, es imposible que las conclusiones que de ella se derivan sean falsas o inaceptables.

M5) La matemática es una ciencia observacional. Esto quiere decir que, a partir del planteamiento de la o las hipótesis de trabajo, el matemático realiza una serie de construcciones en la forma de diagramas o cadenas de símbolos que, tras su observación o examinación, conducen a explicitar las relaciones necesarias que sostienen los elementos de la construcción observada.

Nos encontramos, entonces con una filosofía de las matemáticas que define esta ciencia con singular generalidad y simplicidad. Lejos de encontrar una definición que hable, por ejemplo, de estructuras como el objeto de estudio de la matemática, o la cantidad como objeto de estudio de la matemática, nos encontramos con una definición que pone especial énfasis en dos cosas: la práctica de postular supuestos o hipótesis que representen de manera ideal un estado de cosas que se pretende estudiar, y la naturaleza del razonamiento que a partir de ellas se puede realizar.

De acuerdo con Peirce, la *deducción* es la clase de argumento explicativo y de carácter necesario que examina las relaciones no explícitas en las premisas y las concluye necesariamente exhibiendo su conexión. Como razonamiento necesario que se gesta en la matemática, la deducción comienza con una hipótesis regulativa de un estado de cosas expresado de manera abstracta que, de ser verdad, conducirá invariablemente a una conclusión verdadera sobre las relaciones implícitas en las premisas, sin descubrir o añadir nuevo con respecto al contenido.

> Deduction is that mode of reasoning which examines the state of things asserted in the premisses, forms a diagram of that state of things, perceives in the parts of that diagram relations not explicitly mentioned in the premisses, satisfies itself by mental

> experiments upon the diagram that these relations would always subsist, or at least would do so in a certain proportion of cases, and concludes their necessary, or probable, truth. (1896c, 1.66).
>
> Deduction is the only necessary reasoning. It is the reasoning of mathematics. It starts from a hypothesis, the truth or falsity of which has nothing to do with the reasoning; and of course its conclusions are equally ideal. (1903, 5.145).

En ese sentido, que Peirce defina la matemática como lo hace tiene sentido si observamos la construcción general que se nos propone en la clasificación de las ciencias. La matemática ocupa el primer lugar en esa jerarquía de dependencia epistémica y ello se debe al grado de generalidad y necesidad de la matemática. Una definición que dé cuenta de este par de cualidades adecuadamente debería ser, a su vez, simple y general, es decir, una definición que se limite únicamente a aquello que podemos deducir.

Sin embargo, salta a la vista que el papel de la deducción tenga tanta importancia en la definición de la matemática, pues, regularmente, se habla de deducción estrictamente dentro del campo de la lógica. Como veremos a continuación, la teoría de la deducción sí pertenece exclusivamente a la lógica; sin embargo, el énfasis de Peirce en su definición de matemática tiene el objetivo de establecer que la matemática es una ciencia exclusivamente deductiva.

3.1.3. Filosofía de la Lógica

La filosofía de la lógica en Peirce, al igual que su filosofía de las matemáticas, es bastante singular. De acuerdo con la clasificación de las ciencias, Peirce considera que la lógica es una rama de la filosofía que entra en la categoría de las ciencias normativas bajo el entendido de que, en esencia, la lógica califica la corrección de los argumentos. Sin embargo, la caracterización de Peirce no es así de simple.

En primer lugar, en conformidad con ciertas clasificaciones escolásticas, Peirce distingue la *logica utens* —es decir, la "lógica de uso" o el sentido común con el cual cuentan todos los seres humanos sin haber realizado estudios críticos en lógica— y la *logica docens* —es decir, la lógica formal, regida por cánones bien establecidos y que se adquiere a través del estudio crítico de esta ciencia. Es en la *logica docens* donde encontramos, de acuerdo con la noción tradicional de *lógica*, el objetivo de distinguir los razonamientos correctos de los incorrectos:

> That part of logic, that is, of *logica docens*, which, setting out with such assumptions as that every assertion is either true or false, and not both, and that some propositions may be recognized to be true, studies the constituent parts of arguments and produces a classification of arguments such as is above described, is often considered to embrace the whole of logic. (Peirce 1902c, 2.205)

No obstante, lo que caracteriza a Peirce como filósofo de la lógica es un replanteamiento de esta ciencia en términos de teoría de los signos o *semiótica*. La convicción de Peirce de que todo pensamiento es un *signo* lo llevó a reformar su concepción de la ciencia de la lógica:

> The term "logic" is unscientifically by me employed in two distinct senses. In its narrower sense, it is the science of the necessary conditions of the attainment of truth. In its broader sense, it is the science of the necessary laws of thought, or, still better (thought always taking place by means of signs), it is general semeiotic. (Peirce 1896d, 1.444)

Este giro filosófico da lugar a una construcción mucho más comprensiva que la tradicional, puesto que Peirce reconoce que la tarea de determinar las condiciones necesarias y suficientes para la corrección de un razonamiento y su clasificación corresponde a tan sólo una rama de su lógica-semiótica —la *crítica*:

> All thought being performed by means of signs, logic may be regarded as the science of the general laws of signs. It has three branches: (1) *Speculative Grammar*, or the general theory of the nature and meanings of signs, whether they be icons, indices, or symbols; (2) *Critic*, which classifies arguments and determines the validity and degree of force of each kind; (3) *Methodeutic*, which studies the methods that ought to be pursued in the investigation, in the exposition, and in the application of truth. Each division depends on that which precedes it. (Peirce 1903b, 1.191)

Así, la teoría de la deducción, cuyo papel era importante en la definición de *matemática* que Peirce sostiene, se encuentra dentro de la crítica. Peirce (1878, 2.623) distingue dos clasificaciones generales de argumentos: los argumentos *analíticos* o *explicativos*, en donde encontramos todo argumento deductivo; y los argumentos *sintéticos* o *ampliativos*, en donde encontramos todo argumento inductivo y todo argumento abductivo. La motivación de esta división es que no todos los argumentos proporcionan conocimiento nuevo, pues algunos otros simplemente explicitan las relaciones entre las premisas.

Si bien existe en la obra de Peirce todo un tratamiento de la naturaleza de estos tres tipos de argumento, y existe, también, un extenso desarrollo de la teoría de los signos, deberá bastar con esta primera aproximación a la filosofía de la lógica de Peirce para sentar sólo un par de precedentes que nos interesan para efectos de la presente investigación: (1) aunque la matemática queda definida como una ciencia deductiva, no estudia la deducción —de esto se encarga una rama de la lógica; y (2) Peirce pretende que la lógica abarca mucho más que la teoría de la deducción y el objetivo general de su filosofía de la lógica es la generación de una semiótica. En ese sentido, podemos ver que la caracterización de la lógica en Peirce presenta muchas cualidades que hablan de un interés propio y difícilmente comparable con los intereses de otros lógicos —particularmente, como veremos, de los logicistas.

3.2. ¿Fue el Desarrollo del Álgebra de Relaciones de Peirce una Consecuencia de Compromisos de Cáracter Logicista?

El objetivo histórico de este trabajo fue resaltar las poco conocidas virtudes técnicas de las álgebras de Peirce de 1885 y notar su impacto e influencia en otros pensadores clave del desarrollo de la lógica matemática en los siglos XIX y XX. Queda por perseguir nuestro objetivo filosófico, es decir, estudiar la siguiente pregunta: ¿qué motivaciones filosóficas originan el trabajo algebraicista de Peirce? ¿Fue el álgebra de relaciones una manera de afirmar una tesis de corte logicista (en algún sentido) o es consecuencia de otra tesis filosófica? Parece que, históricamente hablando, los compromisos logicistas de Frege y Russell sirvieron como impulso al desarrollo de la lógica matemática en el XIX y el XX, de manera que resultaría natural preguntarse si las álgebras de la lógica se desarrollan en función de una agenda filosófica similar. En el presente apartado abordaremos esta pregunta desde una reformulación más simple del problema: ¿fue Peirce un logicista?

3.3. Peirce como Logicista: la Interpretación de Susan Haack

> Was Peirce a logicist? If one has to give a simple answer, certainly it must be 'no'; but the issue is sufficiently far from straightforward that a simple answer is not fully adequate. (Haack 1993, p.33)

Una manera de responder a la pregunta "¿fue Peirce un logicista?" es planteando cuáles son las tesis principales de la propuesta logicista e investigar si Peirce coincide con ellas de manera general. En consecuencia, Haack (1993, p.35) ofrece el siguiente análisis —somero, en realidad— del logicismo como propuesta filosófica:

LA) El logicismo *en sentido amplio* está involucrado directamente con la relación que guarda la matemática como un todo con la lógica en general. El logicismo de Russell y Whitehead es de este corte.

LR) El logicismo *en sentido restringido* está involucrado únicamente con la relación que guarda específicamente la aritmética con la lógica en general. El logicismo de Frege es de este corte.

L1) Tanto para **LA** como para **LR**, una tesis central del logicismo es que la matemática/aritmética es *reductible* a la lógica.

L2) Tanto para **LA** como para **LR**, una tesis central del logicismo es que los *fundamentos epistémicos* de la matemática residen en la lógica.

Parece que Frege (1893, p.29) estaba comprometido con la idea de que **L1** y **L2** se implicaban mutuamente; es decir, que no es posible que la aritmética fuera reductible a la lógica sin que la lógica tuviera prioridad epistémica sobre ella, así como no es posible que los principios epistemológicos de la lógica sean más fundamentales que los de la aritmética sin que ésta pueda reducirse a aquella.

Sin embargo, Haack (1993, p.36) sostiene que Peirce simpatizaba con una postura como **L1** al tiempo que rechazaba firmemente la posición **L2**, oponiéndose, entonces, a la idea de Frege de que ambas tesis viven o perecen juntas.

Los argumentos de Haack para mostrar la presunta afinidad de Peirce para con **L1** son, principalmente, documentales. Haack nos refiere a pasajes de la obra de Peirce donde ella lee que:

a) Peirce afirma que las verdades de la matemática son lógicamente deducibles:

> The object of this paper is to show that there are certain general propositions from which the truths of mathematics follow syllogistically, and that these propositions may be taken as definitions of the objects under the consideration of the mathematician. (Peirce 1867c, 3.20)

b) Peirce afirma que la aritmética puede surgir de la lógica:

> Nobody can doubt the elementary propositions concerning number [...] The object of this paper is to show that they are strictly syllogistic[1] consequences from a few primary propositions [...] which I here regard as definitions. (Peirce 1881, 3.252)

c) Peirce niega que las verdades matemáticas sean sintéticas *a priori*, sino que, como Frege, afirma que tienen carácter analítico *a priori*, aunque apunta que no por ello son obvias:

> [...] an indefinitely complicated [mathematical] proposition, very far from obvious, may [...] be deduced [...] by the logic of relatives, from a definition of the utmost simplicity [...]; and this may contain many notions not implicit in the definition. (Peirce [sin fecha], 2.361)

En general, las anotaciones de Haack pretenden afirmar que Peirce simpatiza con **L1** bajo **LR** dado que existen múltiples pasajes en la obra de Peirce en los que encontramos diversos diseños

[1]En este contexto, como Haack (1993, p.38) apunta, "syllogistic" se refiere a derivaciones realizadas en el álgebra de relaciones.

de álgebras de la lógica y otros lenguajes simbólicos en los que se pretende capturar nociones elementales de aritmética y mostrar cómo se puede deducir lógicamente una proposición como $7 + 5 = 12$.

De hecho, decimos que Haack (1993) sostiene que Peirce simpatiza con **L1** bajo **LR**, sin mencionar **LA**, por lo siguiente:

> One diagnosis that suggests itself, since the passages which indicate sympathy with something like (L1) seem to be concerned with the reducibility of *arithmetic* to logic, while the passages repudiating (L2) seem to be concerned with the epistemic priority of *mathematics* over logic, is that Peirce sympathizes with (L1) in the narrow interpretation ("arithmetic is reducible to logic") but rejects (L2) in the broad interpretation ("the epistemic foundations of mathematics lie in logic"). (pp.42-3)

El análisis de Haack sobre el alcance de **L1** y **L2** en Peirce parece ser adecuado, pues los pasajes que cita —algunos de los cuales hemos reproducido aquí— así lo afirman y, además, porque esa lectura es consecuente con otras ideas de Peirce. Por ello recalca con total tranquilidad que "Peirce was strenuously opposed to the thesis that mathematics is founded epistemologically on logic" (p.41). El argumento principal para sustentar el rechazo de Peirce a **L2** utiliza la clasificación de las ciencias, que discutimos en la sección 3.1.1. de este trabajo.

Haack (1993, pp.41-2) despliega una lista de citas que sustentan una idea más bien *anti-logicista*, entendiendo por esto que la dependencia epistémica entre la lógica y la matemática es tal que la primera se subordina a la segunda. Como discutimos en 3.1.1., la matemática es la ciencia con mayor prioridad epistémica —entendiendo por esto que sus principios o fundamentos son más básicos que los de la filosofía (dentro de ella, la lógica) o las ciencias empíricas. Esto se debe, de acuerdo con Peirce, a que la matemática no acude a otra ciencia para auxiliarse —como sí lo hace la física, la sociología o la lógica (que acude a la matemática para estudiar el razonamiento por medio de lenguajes formales)—, y a que la matemática es la más abstracta de todas las ciencias —pues no se involucra con la verdad de sus hipótesis de trabajo sino exclusivamente con la tarea de probar si una proposición se deduce o no de tales supuestos.

Sin embargo, para aclarar la exposición del tipo de logicismo al que se presuntamente se apega Peirce, Haack (1993, p.45) apunta que "lógica" es un término equívoco en la obra de Peirce, pues en ciertos casos se entiende por ella una teoría del razonamiento —sentido que Haack etiqueta como LOGIC—, y en ciertos otros se entiende por ella la formalización matemática del razonamiento necesario —lo que Haack etiqueta como *logic*. Con esta distinción en mano, Haack concluye:

> The evidence considered thus far might now be reconstrued as indicating that Peirce holds that mathematics is reducible to *logic*, but denies that mathematics is epistemically subordinate to LOGIC. (p.46)

Sin embargo, creemos que Haack fue demasiado lejos con esa última afirmación, pues en ella está sugiriendo que Peirce se compromete parcialmente con **LA**, cuando más bien ha dado evidencia de que una lectura logicista de la filosofía de Peirce tendría que limitarse a algo como **LR**. Más aún, creemos, junto con Nathan Houser (1993), que la lectura de Haack no es del todo adecuada y que, más bien, es difícil sostener que Peirce se apegara a algún tipo de agenda de corte logicista.

3.4. Peirce como No-Logicista: la Respuesta de Nathan Houser a Susan Haack

Nathan Houser (1993) está de acuerdo con Haack (1993) en que Peirce no sostenía un logicismo **L2** —lo cual parece quedar claro a lo largo de la obra de Peirce—, pero está en desacuerdo con ella en que Peirce sostuviera un logicismo **L1**; su réplica se basa en lo siguiente:

> I hesitate to accept Haack's conclusion that Peirce was an L1 logicist, for two reasons. First, because I am inclined to accept half of the Frege-Russell view that L1 and L2 stand or fall together, namely, that if theory B is reductible to theory A, then theory A has epistemic priority over theory B. It seems to me that whatever epistemic virtue a theory has, must also pertain to, and derive from, any theory it can be reduced to —any weaker sense of "reduction" would surely not be very interesting. In my opinion, then, while I could, in principle, accept L2 without L1, I cannot accept L1 without L2. So, having agreed that Peirce was not an L2 logicist, I cannot grant that he accepted L1. (Houser 1993, p.58)

En ese sentido, el presupuesto importante en el contra-argumento de Houser es una noción adecuada de *reductibilidad*. Aunque Houser no define el concepto de reductibilidad, considera que una consecuencia de la noción debe involucrar las virtudes epistémicas de las teorías en cuestión. Sean A y B dos teorías[2] cualesquiera y sean $v[A]$ y $v[B]$ las clases de virtudes epistémicas[3] de A

[2]Para efectos de la discusión, podemos pensar estos objetos como conjuntos consistentes de enunciados que pretenden modelar un fenómeno natural o formar un marco conceptual que exponga las condiciones generales de un objeto de estudio. Houser (1993) no hace ninguna observación al respecto.

[3]De nuevo, Houser (1993) no ofrece un comentario a la naturaleza de estas virtudes. Podemos usar diversas teorías de la epistemología de la virtud para dar cuenta de la noción que pretendemos utilizar en el argumento. Sin embargo, no nos comprometeremos con una teoría en específico, pues el argumento de Houser pretende ser general. A manera de ejemplo, considérese el acercamiento de Bas van Fraassen (1980, p.87) al respecto: "When a theory is advocated, it is praised for many features other than empirical adequacy and strength: it is said to be mathematically elegant, simple, of great scope, complete in certain respects: also of wonderful use in unifying our account of hitherto disparate phenomena, and most of all, explanatory". Así, por ejemplo, para una teoría X, la clase $v[X]$ de virtudes epistémicas de X es el conjunto "simplicidad, adecuación empírica, elegancia, amplitud",

y B, respectivamente; entonces, para alguna relación R de reductibilidad, se cumple:

H) *Tesis de Houser.* Si B es R-reductible a A, entonces $v[B] \subseteq v[A]$.

Cualquier otro sentido de reductibilidad que no implique **H** es, para Houser (1993), irrelevante. Así, por ejemplo, si existe una reducción R entre la teoría A de la aritmética y la teoría L de lógica de primer orden, entonces las virtudes epistémicas $v[A]$ derivan de $v[L]$ y están contenidas, también, en $v[L]$. La pregunta, para el logicismo **LR**, es si esto es el caso.

Sentado el presupuesto **H**, Houser (1993) esgrime algunos argumentos que sugieren que la interpretación de Haack (1993) es incorrecta. Por ejemplo, en la sección anterior etiquetamos como "*a*)" la tesis de Haack que afirma que las verdades de la matemática son lógicamente deducibles, según Peirce; a esto, Houser (1993, p.60) responde: "Note that Peirce's remark that mathematical demonstration can be reduced to syllogism focuses on the nature of mathematical reasoning, not on the nature of the fundamental propositions of mathematics". Por si fuera poco, respecto a lo que etiquetamos en la sección anterior como "*b*)", a saber, que Haack sostiene que la aritmética puede surgir de la lógica, según Peirce, Houser apunta: "But I think it can be explained along the above lines to simply indicate that in order to prove the fundamental theorems of arithmetic, the science of deductive reasoning has to be developed to a sufficiently high level. In particular, Peirce claimed that without a logic of relations one could not prove his axioms of number" (p.61).

Además de mostrar argumentos exegéticos que contradicen las posturas de Haack, Houser (1993) observa que la clasificación **L1** de Haack lleva implícita dos cláusulas. La reconstrucción de Houser (1993, p.63) es como sigue:

L1 (the formal thesis): mathematics/arithmetic is reducible to logic.

Clause 1: all special concepts of mathematics/arithmetic are definable in purely logical terms.

Clause 2: all theorems of mathematics/arithmetic are derivable from purely logical principles.

L2 (the epistemological thesis): the epistemological foundation of mathematics/arithmetic lies in logic.

Houser (1993, p.63) duda sobre si Peirce aceptaba la cláusula 2 de **L1**; sin embargo, está seguro de que Peirce rechazaba la cláusula 1, en virtud de la clasificación de las ciencias que Peirce construye, y en virtud de que los conceptos y axiomas más elementales de la matemática son esencialmente descriptivos o designativos. Así, dado que se deben sostener ambas cláusulas para ser un logicista **L1**, Houser concluye que Peirce no es un logicista **L1**; y, dado que es claro que Peirce no era un logicista **L2**, todo apunta a que Peirce no era un logicista en ningún sentido, de acuerdo con Houser.

etc.

3.5. Resolución de la Dialéctica Haack-Houser

Hemos ponderado argumentos a favor y en contra de la idea de que Peirce era, en algún sentido, un logicista. A continuación, proporcionamos un argumento que recupera la dialéctica Haack-Houser al respecto y que concluye la posición que defendemos en este trabajo, a saber, que Peirce no era un logicista, al menos en los sentidos aquí estudiados.

P1) La tesis logicista es adecuadamente reconstruida con la distinción **L1**-**L2**.

P2) Peirce rechaza **L2**.

P3) Frege tiene razón en afirmar que **L1** y **L2** se implican mutuamente, o Frege se equivoca.

P4) Si Frege tiene razón al sostener que **L1** y **L2** se implican mutuamente, entonces:

- P4.1) **L1** y **L2** son el caso; pero Peirce rechaza **L2**, así que Peirce no es un logicista ni en sentido **LA** ni en sentido **LR**.
- P4.2) Ni **L1** ni **L2** son el caso; pero si esto es así, no hay logicismo en lo absoluto y la pregunta "¿era Peirce un logicista?" no tiene sentido.

P5) Si Frege se equivoca al sostener que **L1** y **L2** se implican mutuamente, entonces:

- P5.1) **L1** puede ser el caso sin que **L2** lo sea; esto implicaría que Peirce es un logicista en sentido **LR**, como Haack sugiere, a menos de que aceptemos (como hacemos) el argumento de Houser:
  - P5.1.1) Cualquier noción de reductibilidad con la cual valga la pena comprometerse filosóficamente involucra afirmar **H**; esto implica, junto con la clasificación de las ciencias y el rechazo a la Cláusula 1, que la matemática/aritmética no es reductible a la lógica y, por tanto, que Peirce no es un logicista ni en sentido **LA** ni en sentido **LR**.
- P5.2) **L2** puede ser el caso sin que **L1** lo sea; pero Peirce rechaza **L2**, así que Peirce no es un logicista ni en sentido **LA** ni en sentido **LR**.

C) Por lo tanto, Peirce no es un logicista ni en sentido **LA** ni en sentido **LR**.

3.6. El Álgebra de Relaciones como Consecuencia de la Posición de Peirce

Si nuestro argumento es correcto y Peirce no es un logicista ni en sentido **LA** ni en sentido **LR**, hemos encontrado un caso en el que una filosofía *no-logicista* de la lógica y de las matemáticas impulsó el desarrollo de la lógica matemática de igual manera (al menos) en que la filosofía logicista de Frege, Russell y Whitehead impulsó el desarrollo de la lógica matemática. En favor de esta postura, encontramos los hechos técnicos e históricos que hemos explorado a lo largo de este trabajo:

1. El desarrollo de una lógica proposicional.
2. La implementación de una semántica veritativo-funcional en la lógica proposicional.
3. La propuesta de una axiomatización completa y correcta para la lógica proposicional.
4. El desarrollo de una lógica de primer orden.
5. La invención de los cuantificadores.
6. El uso de una noción adecuada de cuantificación que distingue órdenes.
7. El desarrollo de una lógica de segundo orden.
8. Una primera aproximación a la teoría axiomática de conjuntos.
9. La propuesta de una axiomatización para la estructura de los números naturales.
10. La influencia directa e indirecta de las álgebras del OAL en Schröder, Löwenheim, Skolem y Zermelo.

En consecuencia, resulta evidente que los compromisos logicistas no eran condición necesaria, aunque sí suficiente, para impulsar el desarrollo de la lógica matemática en los siglos XIX y XX.

Sin embargo, ¿será que la filosofía de Peirce —conducida, en particular, por su clasificación de las ciencias— implica de alguna manera un *anti-logicismo* (la idea de que la lógica es reductible a la matemática)? La pregunta es extraña de suyo. Si bien los argumentos revisados que apoyan el rechazo de Peirce a la tesis **L2** podrían, en principio, ser utilizados para defender tal idea, tendríamos que distinguir, de nuevo, los aspectos formales y epistémicos involucrados. Por un lado, no existe en la obra de Peirce intento alguno por reducir la teoría del razonamiento correcto a sistemas matemáticos y, ciertamente, el álgebra de relaciones no es un intento de este tipo —más bien, se trata de una aplicación de la matemática a la lógica. Aunque, por otro lado, la clasificación de las ciencias y diversos pasajes en la obra de Peirce sí parecen sugerir que la lógica tiene una dependencia epistémica sobre la matemática en tanto que la primera toma parte de sus principios de la segunda, lo cual parecería ser una versión anti-logicista de **L2**.

Si esto es así, es decir, si Peirce sostenía un anti-logicismo de corte epistémico y sólo epistémico, entonces podríamos conjeturar que el surgimiento del álgebra de relaciones —o el de las diversas álgebras y sistemas gráficos de lógica diseñados por Peirce, para tener un argumento más general—

está dado por este compromiso filosófico. Es decir, la justificación o motivación filosófica para aplicar el simbolismo y los métodos de la matemática en el campo de la lógica se encuentra en el compromiso filosófico de la prioridad epistémica de la matemática sobre la lógica. Parece, entonces, que la lógica puede (y tal vez debe) acudir a la matemática para perfeccionarse y heredar de ella algunas virtudes epistémicas. Esta idea es consecuente con el hecho de que la filosofía y la matemática moderna han dedicado mucho esfuerzo en los últimos siglos a diseñar álgebras y cálculos para la lógica, esfuerzo que nos ha llevado a una mejor comprensión de la naturaleza del razonamiento en general.

En ese sentido, el álgebra de relaciones, a diferencia de la lógica de la *Begriffschrift* y de los *Principia Mathematica*, surge de compromisos no-logicistas e incluso de compromisos epistémicos anti-logicistas. Se trata de un esfuerzo por mejorar nuestra comprensión de la ciencia de la lógica, no de un ejercicio de fundamentación o reducción. Y lo más notable, en nuestra opinión, es que el álgebra de relaciones de Peirce fue un movimiento simultáneo y paralelo al de los logicistas que llegó, sin embargo, a las mismas consecuencias técnicas en el campo de la lógica. Nos encontramos con dos filosofías diferentes (y casi opuestas) de la matemática y de la lógica que realizan movimientos similares, que atienden problemas comunes y que llegan a resultados equivalentes. Si los argumentos históricos y filosóficos que hemos ofrecido en este trabajo han sido en algún sentido convincentes, debemos reconocer que la así llamada "tradición algebraicista" de la lógica —particularmente impulsada por el trabajo de C.S. Peirce— no fue una reacción opuesta al logicismo sino un movimiento autónomo, paralelo y, respecto a algunos logros técnicos, equivalente.

Conclusiones

Aunque no consideramos del todo correcta la distinción historiográfica que opone a la tradición algebraicista y la tradición logicista en el siglo XIX, hemos aprovechado esta distinción para abordar los trabajos de Charles S. Peirce de manera tal que pudiera realizarse un estudio del impacto y de los logros de este pensador en el campo de la lógica.

Paradójicamente, asumir que tal distinción existe conlleva a dudar de su misma validez. Uno puede, como hemos hecho, rastrear cómo fue que las álgebras booleanas se expandieron y mejoraron en manos de diversos filósofos y matemáticos del siglo XIX hasta encontrar, como hemos pretendido mostrar aquí, al menos un caso donde deja de ser claro que las metas y los alcances de la tradición algebraicista fueran completamente diferentes a los de la tradición logicista.

El trabajo de Charles S. Peirce es precisamente el caso al que nos referimos. Si bien los métodos, notaciones y compromisos filosóficos de este pensador estadounidense difieren de los de Gottlob Frege o Bertrand Russell, existe evidencia de que un algebraicista como Peirce persiguió y llegó a algunos objetivos iguales, equivalentes o parecidos a los que se obtuvieron a través de la agenda logicista.

Así como la *Begriffschrift* de Frege y los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead presentan los primeros cálculos proposicionales, las primeras lógicas cuantificacionales de primer orden, y las primeras teorías axiomáticas de conjuntos, hemos visto en el Capítulo 1 de este trabajo que "On the Algebra of Logic" (OAL) hace lo propio —en mayor o menor medida— en 1885 y, presumiblemente, de manera independiente.

En el Capítulo 1 presentamos nuestra reconstrucción de OAL para exponer al lector a los lenguajes formales que Peirce diseñó a partir del álgebra booleana. Vimos que en función de la noción de *término relativo* se distingue entre una lógica no-relativa —que equivale a lo que conocemos hoy como lógica proposicional— y dos lógicas relativas o de relaciones —donde encontramos sistemas equivalentes a lo que conocemos hoy como lógica de primer y de segundo orden.

De nuestra exposición del OAL en el Capítulo 1, resaltan cuatro logros del trabajo de Peirce:

C1.1) La aparición de una lógica proposicional que cuenta con una axiomatización que permite construir un sistema de deducción natural que, como probamos más adelante (sección 2.3 de este trabajo), resulta ser completo y correcto.

C1.2) La aparición de una lógica de primer orden que introduce la cuantificación de manera adecuada —y prácticamente tal y como la usamos hoy— y que presenta la forma prenexa de cuantificadores para fórmulas de primer orden.

C1.3) La aparición de una lógica de segundo orden que responde adecuadamente a la noción de cuantificación de orden superior y que permite capturar conceptos como la identidad entre objetos, la pertenencia a conjuntos, los órdenes parciales, funciones uno-a-uno, cardinalidad de un conjunto, etc.

C1.4) La aparición de una teoría axiomática de conjuntos que captura ideas como las del axioma de extensionalidad (al definir la identidad con la Ley de Leibniz), y de los axiomas del conjunto complemento, conjunto unitario y el axioma de unión, presentes en ZFC o en otras teorías como NBG.

Cara a nuestra tesis (**T**), creemos que estos cuatro puntos sustentan la premisa (**T1**) —que dentro de la tradición algebraicista de la lógica, el trabajo de Charles S. Peirce fue tan innovador y produjo casi tantos resultados como los de las investigaciones logicistas— por lo siguiente:

a) Los trabajos de los principales logicistas produjeron cálculos proposicionales que, además, contaban con axiomatizaciones completas y correctas; pero este logro también está presente en el trabajo de Peirce. De hecho, Dipert (1981) explica quiénes son los precursores del cálculo proposicional —donde incluye a Peirce— y sostiene que Frege no lo desarrolló *ex nihilo*.

b) Los trabajos de los principales logicistas produjeron lógicas de primer orden sobre las cuales se edificaron nociones de la aritmética; pero este logro también está presente en el trabajo de Peirce. De hecho, Peirce obtiene independientemente la noción de cuantificación y distingue entre órdenes de cuantificación de manera explícita, a diferencia de lo que ocurre en el trabajo de Frege. Incluso hemos visto que Peirce propone una axiomatización para la estructura de los números naturales muy similar a la que propuso Peano.

c) Los trabajos de los principales logicistas produjeron teorías axiomáticas de conjuntos o permitieron que otros como Zermelo y Fraenkel produjeran teorías axiomáticas de conjuntos; pero de hecho encontramos en el trabajo de Peirce un intento por diseñar una teoría axiomática de conjuntos —seguramente influenciado por la obra de Cantor, la cual conocía—, independientemente de las múltiples carencias de su presentación.

Estos hallazgos de inmediato sugieren una pregunta: ¿cuál fue el impacto o la recepción de OAL en la comunidad matemática y filosófica del siglo XIX? Parece que los historiadores de la lógica atribuyen con frecuencia la invención o el descubrimiento de nociones y sistemas como los reflejados en C1.1) – C1.4) a pensadores mucho más reconocidos que Peirce, tales como Frege, Russell, Whitehead, Cantor, Zermelo y Fraenkel.

La pregunta anterior, en conjunto con una investigación sobre la teoría de la cuantificación de Peirce y la naturaleza de la teoría de conjuntos presentada en el OAL, impulsaron las investigaciones del Capítulo 2 de este trabajo. Vimos, fundamentalmente, tres ideas importantes:

C2.1) Peirce recibió los trabajos de Boole y De Morgan, así como los problemas notacionales o de expresividad de estas álgebras, y trabajó sobre ellos para desarrollar su propia álgebra de la lógica que culmina en los sistemas presentados en el OAL.

C2.2) Los sistemas de lógica de primer y segundo orden presentados en el OAL, es decir, FIL y SIL, fueron de especial importancia para el trabajo de Schröder, quien adopta estas álgebras y notaciones y las desarrolla sistemáticamente. Dada la importancia de la obra de Schröder, el hecho de que (Schröder 1890) llegara a otros matemáticos importantes de la época permitió que los logros de Peirce llegaran (in)directamente a, al menos, Löwenheim, Skolem y Zermelo.

C2.3) Si bien es Frege quien descubre o presenta por vez primera la noción de *cuantificador* en 1879, Peirce y su escuela —notando, especialmente, a O.H. Mitchell— también desarrollaron la noción entre 1879 y 1885 de manera independiente. Sin embargo, la notación de Peirce y su cuidadosa distinción entre órdenes de cuantificación permiten afirmar que nuestra idea y uso actual de los cuantificadores es más cercana a la propuesta de Peirce que a la de Frege.

Cara a nuestra tesis (**T**), creemos que estos tres puntos sustentan la premisa (**T2**) —que los logros de Peirce fueron relevantes para otros matemáticos notables del siglo XIX y ellos, a su vez, heredaron a otros investigadores los descubrimientos y notaciones de Peirce— por lo siguiente:

a) Peirce mantuvo contacto con los más importantes algebraicistas de su época, tales como Augustus De Morgan, Willian Stanley Jevons, Ernst Schröder y Edward Vermilye Huntington, cuyos trabajos no sólo fueron ampliamente conocidos por la comunidad académica de su tiempo sino que además citan a Peirce de manera directa o indirecta.

b) La notación Peirce-Schröder se convirtió en la notación estándar para matemáticos alemanes como Leopold Löwenheim y Ernst Zermelo, y para el matemático noruego Thoralf Skolem. Ellos conocieron la sistematización del álgebra de relaciones que propuso Peirce en 1885 a través de la presentación y ampliación de Schröder en 1890. Es notable que la presentación de muchos de sus trabajos importantes ocupara notación Peirce-Schröder y no la notación de los *Principia Mathematica*.

c) Frege es el primero en descubrir o utilizar la cuantificación en lógica; sin embargo, la *Begriffschrift* no sólo vivió sus primeros años sin ser leída por otros matemáticos importantes de su tiempo sino que, además, presentó una notación que nunca fue utilizada más que por Frege mismo. Por otro lado, las innovaciones de O.H. Mitchell y Peirce dieron con el uso y la notación que conocemos hoy y que fue adoptada por la comunidad académica a finales del XIX e inicios del XX —aunque ciertamente, más adelante, la notación de los *Principia Mathematica* se volvería el nuevo estándar. Lo notable de este hecho histórico es que, al menos como lo sugiere la evidencia con la que contamos, ni Mitchell ni Peirce conocieron el trabajo de Frege.

Sin embargo, C2.1) – C2.3) invitan a preguntarnos por los compromisos filosóficos que impulsaron el programa algebraicista de Peirce, ya que en la tradición logicista existió una agenda clara que impulsó fuertemente el desarrollo de la lógica matemática hasta objetivos muy concretos. De hecho, la pregunta se torna más interesante si uno imagina que Peirce produjo álgebras de la lógica y teorías axiomáticas de conjuntos precisamente porque compartía compromisos logicistas.

El Capítulo 3 pretende dar una rápida respuesta al problema anterior. En función de la pregunta "¿fue Peirce un logicista, en algún sentido?", sentamos los conocimientos básicos de la filosofía que rodea el trabajo lógico y matemático de Peirce y exploramos sus consecuencias. Vimos, principalmente, los siguientes tres puntos:

C3.1) Peirce propone una clasificación de las ciencias que captura lo que, en su opinión, es un orden de dependencia epistémica que debe ser utilizado como argumento en contra de una de las tesis logicistas —la tesis que presentamos como **L2**.

C3.2) Existe una lectura del trabajo de Peirce que sugiere cierto sentido de logicismo, a saber, la idea de que la aritmética puede capturarse en un lenguaje lógico a través de axiomas y definiciones que permitan deducir lo que esperamos de una teoría de la aritmética. Esta es la lectura de Susan Haack (1993).

C3.3) Existe, también, una lectura del trabajo de Peirce que no sugiere algún sentido de logicismo en virtud de que los compromisos de dependencia epistemológica reflejados en la clasificación de las ciencias de Peirce prohibe que la matemática se subsuma a la lógica. Esta es la lectura de Nathan Houser (1993) y coincidimos con los argumentos que él presenta.

Cara a nuestra tesis (**T**), creemos que estos tres puntos sustentan la premisa (**T3**) —que el trabajo de Peirce fue impulsado por compromisos filosóficos distintos y casi opuestos a los del movimiento logicista— por lo siguiente:

a) La clasificación de las ciencias —que es un andamiaje que Peirce utiliza en la construcción de su edificio filosófico— sugiere una idea contraria a los compromisos logicistas, a saber, que la lógica depende epistemológicamente de la matemática y no al contrario. Dado que los fundadores del logicismo se comprometían con esa tesis epistémica, vemos no sólo que las ideas de Peirce son distintas, sino hasta contrarias.

b) Que algunos pasajes de la obra de Peirce sugieran un logicismo restringido de corte formal —es decir, **LR** con **L1**— puede explicarse a partir de la filosofía de las matemáticas de Peirce: no es que Peirce pretenda deducir la aritmética entera desde la lógica y unas cuantas definiciones; se trata, más bien, de resaltar que la aritmética y la matemática misma son ciencias plenamente deductivas aunque no estén restringidas a lo que la lógica permita. Esto, ciertamente, es distinto a los compromisos logicistas.

c) Parece, como apunta Houser (1993), que una noción de reducibilidad como la que se busca en el logicismo debería involucrar la idea de que cuando una teoría B que se reduce a una teoría A es porque la teoría B depende epistémicamente de la teoría A —por la generalidad de sus principios u otras virtudes epistémicas—; esto nos lleva a pensar que la tesis logicista no puede ser solamente formal, sino que debe ser, también epistémica. Así, si Peirce rechaza categóricamente la posición epistémica, no puede hablarse de logicismo o ningún otro tipo de trabajo de reducción entre matemáticas y lógica dentro de la obra de Peirce. Esta es una posición casi contraria al logicismo.

Así, la evidencia histórica recolectada y los argumentos presentados a lo largo de este trabajo permiten sostener las premisas (**T1**), (**T2**) y (**T3**) conjuntamente. Estas últimas dan sustento a la tesis (**T**) de este trabajo, a saber, que el trabajo de Charles S. Peirce, dentro de la tradición algebraicista, es un contraejemplo a la arraigada lectura unilateral de la historia del desarrollo de la lógica matemática —la lectura que afirma que el logicismo, y sólo el logicismo, se erige como *la* agenda filosófica que permitió la generación de cálculos lógicos como la lógica proposicional, la lógica de primer orden, la lógica de segundo orden y la teoría axiomática de conjuntos.

En ese sentido, 1) (**T**) permite una relectura de la historia de la lógica matemática y reivindica la tradición algebraicista con Charles S. Peirce como su más prolífico, influyente e, irónicamente, inadvertido exponente; y, más aún, 2) (**T**) permite comprender que no fue necesario, en general, sostener los compromisos filósoficos del logicismo para llevar a la lógica matemática hasta sus más notables desarrollos en los siglos XIX y XX. El punto 1) da cuenta de la originalidad de (**T**) en general y el punto 2) da cuenta de la relevancia de (**T**) y la investigación que aquí hemos presentado.

Pensamos que los resultados de nuestra investigación sugieren, además, que los trabajos de Charles S. Peirce requieren mayor atención de la que se les ha dado en la literatura filosófica y matemática contemporánea. No sólo se puede encontrar en la obra de Peirce los elementos que permitieron realizar el presente trabajo, sino que existe, también, material que podría sugerir que

Peirce diseñó el primer lenguaje formal equivalente a una lógica modal[4] (Peirce 1906 4.510) y el primer lenguaje formal equivalente a una lógica multivaluada o polivalente[5]. Estos son tan sólo un par de ejemplos de las diversas exploraciones originales de Peirce en el mundo de la lógica y, ciertamente, son muy poco conocidas.

Esta últimas afirmaciones tienen el objetivo de señalar, de nuevo, que prácticamente toda la atención de la comunidad académica fue recibida por los matemáticos de la tradición logicista cuando, de hecho, existe mucho material original y poco explorado en la obra de Peirce que sugiere un replanteamiento de nuestros conocimientos sobre la historia de la lógica matemática.

En ese sentido, el trabajo de Charles S. Peirce invita a pensar que la división historiográfica trazada para las tradiciones algebraicista y logicista es, más bien, artificial. Aunque esta división se muestra útil para hacer filosofía e historia de la lógica, Peirce resulta ser un caso de estudio que demuestra que existieron pensadores en el movimiento algebraicista que llegaron (casi) tan lejos como los logicistas y que arribaron a descubrimientos similares o equivalentes. Así, parece más bien que la historia de la lógica no estuvo, en ningún momento, dividida por movimientos o agendas de investigación en competencia, sino que los desarrollos se dieron de forma espontánea en manos de pensadores con diversos compromisos filosóficos.

[4] Véase, especialmente, (Ramharter y Gottschall 2011).

[5] Este material no está compilado en (Hartshorne et al 1931-1958); sin embargo, considérese lo siguiente:

> Some hitherto unpublished Peircean fragments now give what appears to be conclusive evidence that by February 23, 1909, Peirce had already succeeded in extending to the case of triadic logic the matrix method which he originated for the ordinary two-valued logic and for which he is now given full credit. If our evidence is as conclusive as it seems, this means that Peirce not only originated a matrix method for two-valued logic, but he also originated a matrix method for three-valued logic. In this latter regard, therefore, Peirce anticipated similar work by Łukasiewicz and Post by at least ten years. (Fisch y Turquette 1966, p.72)

El artículo reproduce los manuscritos no publicados de Peirce a los que se hace referencia.

Bibliografía

- AHMED, T.S. (2005): "Algebraic Logic, Where Does It Stand Today?". *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 11, no. 4, pp. 465-516.

- ANDRÉKA, I. y NÉMETI, S. (2013): "Algebraic Logic". GABBAY, D., GUENTHNER, F. (eds) (2013): *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 2. Springer Science and Business Media.

- ANELLIS, I.H. (1997): "Tarski's Development of Peirce's Logic of Relations". HOUSER N. et al (1997): *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce.* Indiana: Indiana University Press.

- ATKINS, R.K. (2006): "Restructuring the Sciences: Peirce's Categories and His Classifications of the Sciences". *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. 42, no. 4, pp. 483-500.

- BEATTY, R. (1969): "Peirce's Development of Quantifiers and of Predicate Logic". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. X, no. 1, pp. 64-76.

- BOOLE, G. (1847): *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*, Cambridge: Macmillan, Barclay, & Macmillan; reimpreso en Oxford: Basil Blackwell, 1951.

- BOOLE, G. (1854): *An Investigation of The Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, London: Macmillan; reimpreso en Dover 1958.

- BRADY, G. (1997): "From the Algebra of Relations to the Logic of Quantifiers". HOUSER N. et al (1997): *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce.* Indiana: Indiana University Press.

- BRADY, G. (2000): *From Peirce to Skolem: a neglected chapter in the history of logic (Studies in the history and philosophy of mathematics, vol.4).* Amsterdam, North-Holland: Elsevier.

- BRINK, C. (1978): "On Peirce's Notation for the Logic of Relatives". *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. 14, no. 4, pp. 285–304.

- Burch, R.W. (1997): "Peirce on the Application of Relations to Relations". Houser N. et al (1997): *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*. Indiana: Indiana University Press.
- Burris, S. y Legris, J. (2015): "The Algebra of Logic Tradition", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), `http://plato.stanford.edu/entries/algebra-logic-tradition/`.
- Byrnes, J. (1998): "Peirce's First-Order Logic of 1885". *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. 34, no. 4, pp. 949–976.
- Chang, C.L y Lee, R.C.T. (1973): *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. New York: Academic Press.
- Cocchiarella, N. (1986): "Frege, Russell and Logicism: A Logical Reconstruction". Haaparanta, L. y Hintikka J. (eds.) (1986): *Frege Synthesized*. Boston: Reidel.
- Czelakowski, J. (2001): *Protoalgebraic Logics*. Springer.
- De Morgan, A. (1847): *Formal Logic: or, the Calculus of Inference, Necessary and Probable*, London: Taylor and Walton; reimpreso en London: The Open Court Company 1926.
- De Morgan, A. (1860): "On the Sylogism: IV; and on the Logic of Relations". *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 10: pp. 331-358.
- Dedekind, R. (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen?*. Vieweg: Braunschweig.
- Dipert, R.R. (1981): "Peirce's Propositional Logic". *The Review of Metaphysics*, vol. 34, no. 3, pp. 569–595.
- Dipert, R.R. (1994): "The Life and Logical Contributions of O.H. Mitchell, Peirce's Gifted Student". *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. 30, no. 3, pp- 515-542.
- Dipert, R.R. (1997): "Peirce's Philosophical Conception of Sets". Houser N. et al (1997): *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*. Indiana: Indiana University Press.
- Dummett, M. (1973). *Frege's Philosophy of Language*. London: Duckworth.
- Fisch, M. y Turquette, A. (1966): "Peirce's Triadic Logic". *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. 2, no. 2, pp. 71-85.
- Frege, G. (1879): *Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle.

- Frege, G. (1893): *Grundgesetze der Arithmetik.* Band I (1893); Band II (1903). Jena: Verlag Hermann Pohle. Recientemente se publicó una traducción: Ebert, P.A. y Rossberg, M. (trads.) (2013): *Basic Laws of Arithmetic.* Oxford: Oxford University Press.
- Gabbay, D. y Woods, J. (eds.) (2004): *Handbook of the History of Logic. Volume 3, The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, Amsterdam et al.: Elsevier North Holland.
- Grattan-Guinness, I. (1997): "Peirce Between Logic and Mathematics". Houser N. et al (1997): *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce.* Indiana: Indiana University Press.
- Haack, S. (1993): "Peirce and Logicism: notes towards an exposition". *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. XXIX, no. 1, pp. 33-56.
- Haaparanta, L. y Hintikka J. (eds.) (1986): *Frege Synthesized.* Boston: Reidel.
- Haaparanta, L. (ed.) (2009): *The Development of Modern Logic*, New York y Oxford: Oxford University Press.
- Hartshorne, N. et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Hintikka, J. y Sandu, G. (1992). "The Skeleton in Frege's Cupboard: The Standard Versus Nonstandard Distinction". *The Journal of Philosophy*, vol. 89, no. 6, pp. 290-315.
- Hodges, W. (1997): *A Shorter Model Theory.* Cambridge University Press.
- Houser, N. (1987): "Peirce's Early Work on the Algebra of Logic: Remarks on Zerman's Account". *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. 23, no. 3, pp. 425–440.
- Houser, N. (1993): "On 'Peirce and Logicism'. A Response to Haack". *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. XXIX, no. 1, pp.57-67.
- Houser, N. et al (1997): *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce.* Indiana: Indiana University Press.
- Hunter, G. (1971): *Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First-Order Logic.* University of California Press.
- Iliff, A.J. (1997): "The Role of the Matrix Representation in Peirce's Development of the Quantifiers". Houser N. et al (1997): *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce.* Indiana: Indiana University Press.
- Jevons, W.S. (1883): *The Elements of Logic*, New York and Chicago: Sheldon & Co.

- KERR-LAWSON, A. (1997): “Peirce’s Pre-Logistic Account of Mathematics”. HOUSER N. et al (1997): *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*. Indiana: Indiana University Press.
- LÖWENHEIM, L. (1915): “Über möglichkeiten im Relativkalül”. *Mathematische Annalen*, 76(4), pp. 447–470.
- LÖWENHEIM, L. (1940): “Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkul”. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 5, no. 1, pp.1-15.
- MARTIN, R.M. (1976): “On Individuality and Quantification in Peirce’s Published Logical Papers”. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. 12, no. 3, pp. 231-245.
- MARTIN, R.M. (1976b): “Some Comments on De Morgan, Peirce, and the Logic of Relatives”. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. 12, no. 3, pp. 223–230.
- MARTIN, R.M. (1978): “Of Servants, Lovers, and Benefactors: Peirce’s Algebra of Relatives of 1870”. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 7, no. 1, pp. 27–48.
- MERRILL, D.D. (1978): “De Morgan, Peirce and the Logic of Relations”. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. 14, no. 4, pp. 247–284.
- MERRILL, D.D. (1997): “Relations and Quantification in Peirce’s Logic”. HOUSER N. et al (1997): *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*. Indiana: Indiana University Press.
- MITCHELL, O.H. (1883): “On a New Algebra of Logic”. Peirce, C.S. (ed.) (1883) *Studies in Logic by Members of the John Hopkins University*. Boston: Little, Brown.
- MONK, J.D. y BONNET, R. (eds.) (1989): *Handbook of Boolean algebras*. 3 volúmenes. Amsterdam: North-Holland.
- PEANO, G. (1889). *Arithmetices Principia Nova Methodo Expositia*. Bocca: Turin.
- PEIRCE, C.S. (1867): “On an Improvement in Boole’s Calculus of Logic”. Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- PEIRCE, C.S. (1867b): “On a New List of Categories”. Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- PEIRCE, C.S. (1867c): “Upon the Logic of Mathematics”. HARTSHORNE et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Peirce, C.S. (1870): “Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole’s calculus of logic”. Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Peirce, C.S. (1878): “Deduction, Induction, and Hypothesis”. Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Peirce, C.S. (1881): “On the Logic of Number”. Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Peirce, C.S. (1883): “The Logic of Relatives”. Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Peirce, C.S. (1885): “On the Algebra of Logic: a contribution to the philosophy of notation”. Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Peirce, C.S. (1896): “On Quantity [The Continuity of Time and Space]”. Moore, M.E. (2010) (ed.). *Philosophy of Mathematics: selected writings of Charles S. Peirce*. Indiana: Indiana University Press.
- Peirce, C.S. (1896b): “The Regenerated Logic”. Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Peirce, C.S. (1896c): “Lessons of the History of Science”. Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Peirce, C.S. (1896d): “Logic of Mathematics: An attempt to develop my categories from within”. Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Peirce, C.S. (1898): “The Logic of Continuity”. Moore, M.E. (2010) (ed.). *Philosophy of Mathematics: selected writings of Charles S. Peirce*. Indiana: Indiana University Press.
- Peirce, C.S. (1900): “Infinitesimals”. Moore, M.E. (2010) (ed.). *Philosophy of Mathematics: selected writings of Charles S. Peirce*. Indiana: Indiana University Press.

- Peirce, C.S. (1902): "Minute Logic: Chapter II. Prelogical Notions. Section I. Classification of the Sciences (Logic II)". Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Peirce, C.S. (1902b): "Minute Logic: Chapter III. The Simplest Mathematics". Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Peirce, C.S. (1902c): "Logic". Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Peirce, C.S. (1903): "Harvard Lectures on Pragmatism: Lecture V". Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Peirce, C.S. (1903b): "A Syllabus of Certain Topics of Logic: An Outline Classification of the Sciences". Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Peirce, C.S. (1904): "Topical Geometry". Moore, M.E. (2010) (ed.). *Philosophy of Mathematics: selected writings of Charles S. Peirce*. Indiana: Indiana University Press.

- Peirce, C.S. (1906): "The Gamma Part of Existential Graphs". Hartshorne et al (eds.) (1931-1958): *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. I-VIII. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Peirce, C.S. (1908): "Addition [on Continuity]". Moore, M.E. (2010) (ed.). *Philosophy of Mathematics: selected writings of Charles S. Peirce*. Indiana: Indiana University Press.

- Peirce, C.S. (1908b): "Existential Graphs". Moore, M.E. (2010) (ed.). *Philosophy of Mathematics: selected writings of Charles S. Peirce*. Indiana: Indiana University Press.

- Prior, A.N. (1958): "Peirce's Axioms for Propositional Calculus". *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 23, no. 2, pp. 135-6.

- Putnam, H. (1982): "Peirce the Logician". *Historia Mathematica*, no. 9, pp. 290–301.

- Ramharte, E. y Gottschall, C. (2011): "Peirce's Search for a Graphical Modal Logic (Propositional Part)". *History and Philosophy of Logic*, no. 32, pp. 153–76.

- Rasiowa, H. (1974): *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*. North-Holland Publishing Company.

- Roberts, D.D. (1973): *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*. Mouton.
- Schröder, E. (1890): *Vorlesungen über die Algebra der Logik*. Teubner: Leipzig. (Vol. I 1890; Vol. II.1 1891; Vol. III.1 1895; Vol. II.2 1905) Vol. II, 2a ed. 1966. Chelsea: Bronx, NY.
- Shapiro, S. (1991): *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*. Oxford University Press.
- Shin, S. (2002): *The Iconic Logic of Peirce's Graphs*. MIT Press.
- Shields, P. (1997): "Peirce's Axiomatization of Arithmetic". Houser N. et al (1997): *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*. Indiana: Indiana University Press.
- Tarski, A. (1941): "On the calculus of relations". *The Journal of Symbolic Logic*, 6(3), pp. 73–89.
- Van Evra, J. (1997): "Logic and Mathematics in Charles Sanders Peirce's 'Description of a Notation for the Logic of Relatives'". Houser N. et al (1997): *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*. Indiana: Indiana University Press.
- van Fraassen, B. (1980): *The Scientific Image*. Oxford University Press.
- Wells, C.H. (2006): "Peirce's Conception of Philosophy: Its Method and Its Program", *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. 23, no. 2, pp. 289-307.
- Zeman, J.J. (1986): "Peirce's Philosophy of Logic". *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, vol. 22, no. 1, pp. 1–22.