UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMA DE VITALI, CONJUNTOS DE BERNSTEIN Y BASES DE HAMEL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

SALVADOR CÉSAR ESQUIVEL CALZADA

TUTOR :

DR. GUILLERMO GRABINSKY STEIDER

Ciudad Universitaria, Cd. Mx, 2016

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno	
Apellido Paterno:	Esquivel
Apellido Materno:	Calzada
Nombre:	Salvador César
Teléfono:	57520049
Universidad:	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad:	Facultad de Ciencias
Carrera:	Matemáticas
Número de Cuenta:	309024426
2. Datos del tutor	
Grado:	Dr.
Nombre:	Guillermo
Apellido Paterno:	Grabinsky
Apellido Materno:	Steider
3. Datos del sinodal 1	
Grado:	Dra.
Nombre:	María Emilia
Apellido Paterno:	Caballero
Apellido Materno:	Acosta
4. Datos del sinodal 2	
Grado:	Dr.
Nombre:	Miguel Ángel
Apellido Paterno:	García
Apellido Materno:	Álvarez
5. Datos del sinodal 3	
Grado:	Dra.
Nombre:	Ana
Apellido Paterno:	Meda
Apellido Materno:	Guardiola
6. Datos del sinodal 4	
Grado:	M. en C.
Nombre:	Julio César
Apellido Paterno:	Cedillo
Apellido Materno:	Sánchez
7. Datos del trabajo escrito	
Título:	Teorema de Vitali, Conjuntos de Bernstein y Bases de Hamel
Número de Páginas:	152
Año:	2016

Índice general

Introducción

A principios del siglo XX Lebesgue [17] desarrollo una teoría de integración la cual resuelve algunos de los problemas que presentaba la integral de Riemann, principalmente aquellos relacionados con las series de Fourier. Esta teoría de integración esta basada en lo que hoy se conoce como teoría de la medida y esta no sólo es una herramienta de gran importancia en el análisis, sino que es la base de la teoría moderna de la probabilidad. En un principio, Lebesgue no sabía si su teoría resolvía completamente el problema de integración, sin embargo no paso mucho tiempo antes de que Vitali [30] exhibiera la existencia de un conjunto el cual no es Lebesgue medibles lo cual lleva a una función no Lebesgue medible. En su demostración Vitali utilizaba el Axioma de Elección, del cual Lebesgue era un firme opositor y por lo cual el rechazaba estos resultados como contraejemplos a su teoría. Esto llevo a la búsqueda de una demostración sobre la existencia de conjuntos no Lebesgue medibles sin utilizar el Axioma de Elección. Esta búsqueda termino en 1970 cuando Solovay [28] publicó un modelo de la teoría de conjuntos en el cual todos los subconjuntos eran Lebesgue medibles.

En este trabajo nos enfocaremos en algunas las repercusiones del Axioma de Elección en el análisis matemático, sobre todo estudiando algunas clases de conjuntos no Lebesgue medibles que se construyen por medio de este. La estructura de este trabajo esta basada en los primeros capítulos del libro “Nonmeasurable sets and functions” por Kharazishvili [13]. Se agrega el material necesario para poder desarrollar claramente estas ideas, se resuelven algunos de los problemas propuestos y se extiende el material con otras referencias.

Nuestro punto de partida en el capítulo 2 es el Teorema de Vitali. Estudiando esta demostración vemos que estas ideas se pueden generalizar en el contexto de las medidas de Haar en grupos topológicos. Se desarrollan los conceptos necesarios y se demuestran generalizaciones al Teorema de Vitali en estos espacios. Más adelante se introducen las analogías que existen entre la teoría de la medida y la teoría de la categoria de Baire y se demuestran versiones análogas del teorema de Vitali para categoría.

En el siguiente capítulo se estudia la construcción de Bernstein. Esta construcción no sólo es de gran importancia en el análisis matemático ya que también tiene un papel muy importante en la topología general. Estos resultados se generalizan a espacios Polacos y se demuestra que estos conjuntos son patológicos en varios contextos. Al final de este capítulo se desarrolla la teoría de espacios Polacos necesaria para estudiar estos conjuntos, de especial atención son el Teorema de Alexandroff y el Teorema de Cantor-Bendixson.

Por último, se incluye un capítulo acerca de las bases de Hamel. Este capítulo esta desarrollado exclusivamente para espacios euclideanos. Se empieza estudiando propiedades de medibilidad de las bases de Hamel y algunas construcciones asociadas a estas bases. Posteriormente se estudia la ecuación funcional de Cauchy, la cual nos lleva al desarrollo de teoría de funciones convexas y una versión mas débil de convexidad. Con esto se define una clase de conjuntos que incluye a los conjuntos abiertos, los Lebesgue medibles con medida positiva y los de segunda categoría con la propiedad de Baire, por lo cual esta clase establece una nueva noción de tamaño que en cierto modo generaliza las de medida y categoría.

Preliminares y Notación

A lo largo se este texto estaremos trabajando en una teoría de conjuntos axiomatizada por los Axiomas de Zermelo-Fraenkel y el Axioma de Elección (**ZFC**) al menos de que se especifique lo contrario. Se suponen conocidas las diferentes formas de equivalencia del Axioma de Elección entre las que cabe destacar el Principio del Buen Orden, la existencia de bases para cualquier espacio vectorial y el Teorema de Tychonoff.

La notación utilizada es la usual aunque cabe recalcar ciertos puntos. Si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos se denotara su unión como $\bigcup \mathcal{F}$ en lugar de la notación $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$, análogamente para su intersección. El conjunto de los número naturales $\{0, 1, 2, \dots\}$ se denota como ω y la notación $k < \omega$ es equivalente a $k \in \omega$. Se denotan por $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a los conjuntos de los números enteros, los números racionales y los números reales respectivamente. Se supone que el lector tiene conocimientos de teoría de la medida y topología general. En estos ámbitos se utiliza notación estándar. Más aun, todas las medidas con las que se trabajan se suponen no triviales, es decir, no nulas. También se supone que todos nuestros espacios topológicos son de Hausdorff salvo que se indique lo contrario.

1 | Teorema de Vitali

La primera construcción de un conjunto de números reales el cual no es Lebesgue medible fue dada por Vitali en 1905 [30]. Este conjunto no solo resulto ser un contraejemplo para la teoría de la medida sino que también lo es para la teoría de la categoría de Baire. En este capítulo presentamos un par de generalizaciones a esta construcción.

1.1. Teorema de Vitali clásico

Sea $(G, \cdot)$ un grupo y $H \subseteq G$ un subgrupo de este. Introduzcamos la relación $R \subseteq G \times G$ definida de la siguiente manera:

$$(x, y) \in R \iff xy^{-1} \in H$$

El hecho de que H sea un subgrupo de G hace que R sea una relación de equivalencia en G. Denotemos por $\{V_i \mid i \in I\}$ a la partición de G asociada a R. Nos referiremos a esta partición como la partición de Vitali asociada a H. De aquí en adelante también se utilizara la notación $x \sim_H y$ para referirnos que $(x, y) \in R$.

A continuación enunciamos la forma del Axioma de Elección que se requiere para la construcción de Vitali.

Axioma de Elección. *Para todo conjunto $\mathcal{F}$ el cual consta de conjuntos disjuntos no vacíos existe un conjunto X tal que $card(X \cap F) = 1$ para toda $F \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.1.1. *Sea $(G, \cdot)$ un grupo y H un subgrupo de este. A $X \subseteq G$ se le llama un conjunto de Vitali para H o un H-selector si X contiene exactamente un representante de cada clase de equivalencia definida por la relación $\sim_H$.*

La existencia de los conjuntos de Vitali esta garantazida por el Axioma de Elección. El siguiente enunciado nos da algunas propiedades de los conjuntos de Vitali.

Lema 1.1.2. *Sea $(G, \cdot)$ un grupo y H un subgrupo de G. Si X es un conjunto de Vitali para H. Entonces, la familia $\{gX \mid g \in H\}$ es una partición numerable de G.*

Demostración. Primero veamos que:

$$G = \bigcup \{gX \mid g \in H\}.$$

Sea $x \in G$, como X contiene un elemento de cada elemento de la partición existe $g \in X$ tal que $x \sim_H g$, es decir, existe $h \in H$ tal que $xg^{-1} = h$, por lo que:

$$x = hg \in hX \subseteq \bigcup \{hX \mid h \in H\}.$$

Ahora veamos que la familia $\{gX \mid g \in H\}$ consta de conjuntos ajenos. Sean $g, h \in H$ tales que:

$$\emptyset \neq gX \cap hX.$$

Entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $hx_1 = gx_2$, es decir, $x_1 x_2^{-1} = h^{-1}g \in H$ por lo que $x_1 \sim_H x_2$. Como X contiene exactamente un elemento de cada clase de equivalencia se tiene que $x_1 = x_2$ y por lo tanto $h = g$. $\square$

En este momento nos enfocaremos en el caso de $\mathbb{R}$ como grupo aditivo. El siguiente teorema es una generalización del teorema de Vitali clásico.

Teorema 1.1.3. *Sea Γ un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ denso y numerable. Sea μ una medida definida en alguna σ-álgebra de conjuntos de $\mathbb{R}$ y supongamos que se satisfacen las siguientes tres condiciones:*

i) *μ es una medida invariante respecto a Γ, es decir, para todo $g \in \Gamma$ se satisface que $g + Z \in \operatorname{dom}(\mu)$ si $Z \in \operatorname{dom}(\mu)$ y $\mu(Z) = \mu(g + Z)$;*

ii) $[0, 1] \in \operatorname{dom}(\mu)$;

iii) $0 < \mu([0, 1]) < +\infty$.

Entonces, todo conjunto de Vitali para Γ no es μ-medible.

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que X, un conjunto de Vitali para Γ, es μ-medible. Por el Lema 1.1.2 $\{g + X \mid g \in H\}$ es una partición de G la cual es numerable y consta de conjuntos μ-medibles.Como μ es Γ-invariante:

$$0 < \mu([0,1]) \leqslant \mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigcup\{g + X \mid g \in H\}\right) = \sum_{g\in\Gamma} \mu(g + X) = \sum_{g\in\Gamma} \mu(X),$$

por lo que $\mu(X) > 0$.

Por otro lado, como Γ es denso se tiene que

$$\mathbb{R} = \bigcup\{g + [0,1] \mid g \in \Gamma\}$$

y por la continuidad de μ existe $A \subseteq \Gamma$ finito tal que

$$\mu\left(X \cap \bigcup\{g + [0,1] \mid g \in A\}\right) > 0.$$

Sean

$$Y = X \cap \bigcup\{g + [0,1] \mid g \in A\} \text{ y } Z = \bigcup\{g + Y \mid g \in \Gamma \cap (0,1)\}.$$

Como Γ es denso y numerable, $\operatorname{card}(\Gamma \cap (0,1)) = \omega$. Con esto y como $\mu(Y) > 0$:

$$\mu(Z) = \sum_{g\in\Gamma\cap(0,1)} \mu(g + Y) = \sum_{g\in\Gamma\cap(0,1)} \mu(Y) = +\infty.$$

Sea $z \in Z$, entonces existen $y \in Y$, $g \in \Gamma$ con $0 < g < 1$ tal que $z = g + y$. Más aun, existe $h \in A$ de tal forma que $y \in h + [0,1]$, es decir, $h \leqslant y \leqslant h + 1$. Como $0 < g < 1$, obtenemos:

$$h < g + h \leqslant g + y = z \leqslant g + h + 1 < h + 2$$

y como A es finito:

$$-\infty < \text{mín}\{h \mid h \in A\} \leqslant z \leqslant \text{máx}\{h + 2 \mid h \in A\} < +\infty$$

para todo $z \in Z$, es decir, Z es acotado.

Sea $g \in \Gamma$ positivo, como Z es acotado existe $n < \omega$ tal que

$$Z \subseteq [-ng, ng] \subseteq \bigcup\{kg + [0,1] \mid k \in \mathbb{Z}, -n \leqslant k \leqslant n\} \in \operatorname{dom}(\mu).$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}+\infty = \mu(Z) &\leqslant \mu\left(\bigcup\{kg + [0,1] \mid k \in \mathbb{Z}, -n \leqslant k \leqslant n\}\right)\\ &\leqslant \sum_{k=-n}^{n} \mu(kg + [0,1]) = \sum_{k=-n}^{n} \mu([0,1]) < +\infty,\end{aligned}$$

lo cual nos da una contradicción. □

En el caso en que $\Gamma = \mathbb{Q}$ y μ es igual a la medida de Lebesgue, λ, obtenemos el teorema de Vitali clásico.

1.2. Medidas de Haar

Dos de las propiedades más importantes de la medida de Lebesgue son su regularidad y el ser invariante bajo isometrías, en particular bajo traslaciones. La regularidad es una noción topológica mientras que el ser invariante bajo traslaciones refleja su estructura de grupo, por lo que los espacios que resultan naturales para estudiar una generalización de la medida de Lebesgue son los grupos topológicos.

Grupos topológicos

Definición 1.2.1. *Se dice que $(G, \cdot, \mathcal{T})$ es un grupo topológico si $(G, \cdot)$ es un grupo y $\mathcal{T}$ es una topología en G tal que las funciones:*

$$\begin{aligned} &f : G \times G \to G && (x, y) \mapsto xy \\ &g : G \to G && x \mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

son continuas, donde $G \times G$ es considerado con la topología producto.

Cuando no presente confusión se hará referencia al conjunto G como el grupo topológico sin hacer explicita su operación y su topología. También supondremos que todas nuestras topologías son de Hausdorff y denotaremos al elemento neutro del grupo por e.

La condición para ser un grupo topológico es bastante fuerte por lo que debe reflejar las simetrías del grupo en su topología. Una de las principales, al ser las traslaciones homeomorfismos, es que las vecindades de cualquier elemento no son otra cosa mas que traslaciones de vecindades del neutro. Los siguientes lemas nos muestran algunas otras de las simetrías que existen en estos espacios.

Lema 1.2.2. *Sea $(G, \cdot, \mathcal{T})$ un grupo topológico y U una vecindad abierta de e, el elemento neutro. Entonces existen:*

i) V vecindad abierta del neutro tal que $VV \subseteq U$;

ii) V vecindad abierta simétrica de e tal que $W \subseteq U$;

iii) V vecindad abierta del neutro tal que $VV^{-1} \subseteq U$.

Demostración.

i) Por la continuidad de la función $(x, y) \mapsto xy$,

$$W = \{(x, y) \mid xy \in U\} \subseteq G \times G$$

es abierto y $(e, e) \in W$, por lo que existen $V_1, V_2 \subseteq G$ vecindades abiertas de e tales que:

$$V_1 \times V_2 \subseteq W$$

entonces $V = V_1 \cap V_2$ es vecindad abierta de e y $VV \subseteq U$.

ii) Como la función $x \mapsto x^{-1}$ es un homeomorfismo, entonces U^{-1} es vecindad abierta del neutro. Si $V = U \cap U^{-1}$ entonces V es una vecindad abierta del e tal que $V = V^{-1}$.

iii) Por *i*) y *ii*) existen V y W vecindades abiertas de e tales que

$$V = V^{-1} \subseteq W \subseteq WW \subseteq U.$$

Sean $v, v' \in V$, entonces $v^{-1} \in V$, por lo que $v', v^{-1} \in V \subseteq W$ y $v'v^{-1} \in WW \subseteq U$, es decir, $VV^{-1} \subseteq U$. □

Lema 1.2.3. *Sea $(G, \cdot, \mathcal{T})$ un grupo topológico, K un subconjuto compacto de G y U un abierto que contiene a K. Entonces, existe V vecindad del neutro tal que $VK \subseteq U$.*

Demostración. Para cada $x \in K$ existe un abierto U^x tal que $e \in U^x$ y $U^x x \subseteq U$, y por el lema 1.2.2 existe V^x vecindad abierta del neutro tal que $V^x V^x \subseteq U^x$ entonces

$\{V^x x \mid x \in K\}$ es una cubierta abierta de K, por lo cual existe $F \subseteq K$ finito tal que $K \subseteq \bigcup \{V^x x \mid x \in F\}$.

Sea $V = \bigcap \{V^x \mid x \in F\}$, entonces V es abierto por ser intersección finita de abiertos. Sean $v \in V$, $k \in K$, entonces existe $x \in F$ tal que $k \in V^x x$, es decir, existe $v' \in V^x$ tal que $k = v'x$ entonces $vk = vv'x \in VV^x x \subseteq V^x V^x x \subseteq U^x x \subseteq U$, es decir, $VK \subseteq U$. □

Regularidad

La noción de regularidad de una medida es una manera de ligar la topología del espacio a nuestra σ-álgebra de tal manera que cualquier conjunto de esta se pueda aproximar en medida por abiertos y por compactos. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ denotaremos por $\mathscr{B}_\tau(X)$ a la mínima σ-álgebra que contiene a la topología los cuales son llamados borelianos, es decir, $\mathscr{B}_\tau(X) = \sigma(\mathcal{T})$.

Definición 1.2.4. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y μ una medida definida sobre $\mathcal{S}$ una σ-álgebra que contiene a $\mathscr{B}_\tau(X)$. Se dice que μ es localmente finita si para todo $x \in X$ existe $V \in \mathcal{S}$ vecindad de x tal que $\mu(V) < +\infty$ y se dice que μ es regular si para todo $A \in \mathcal{S}$:*

i) $\mu(A) = \text{ínf}\,\{\mu(U) \mid U \in \mathcal{T} \text{ y } A \subseteq U\}$;

ii) $\mu(A) = \sup\,\{\mu(K) \mid K \text{ es compacto y } K \subseteq A\}$.

Más aun, si $\operatorname{dom}(\mu) = \mathscr{B}_\tau(X)$, *$\mu$ es localmente finita y regular entonces μ se dice una medida de Radon.*

Es inmediato verificar que si la topología en $(X, \mathcal{T})$ es localmente compacta y μ es localmente finita, entonces todos los subconjuntos compactos tienen medida finita.

Definición 1.2.5. *Sean $(G, \cdot, \mathcal{T})$ un grupo topológico localmente compacto y ν una medida de Radon. Si para todo $g \in G$ y para todo $A \in \mathscr{B}_\tau(G)$ se cumple que $gA \in \mathscr{B}_\tau(G)$ y $\nu(A) = \nu(gA)$, entonces se dice que ν es una medida de Haar.*

Uno de los resultados más importantes es la existencia y unicidad de la medida de Haar, el cual enunciamos sin demostración. Existen diversas pruebas de resultado, siendo la original de André Weil [31], y pueden encontrarse un par de estas en [11].

Teorema 1.2.6. *Sea $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto, entonces existe ν una medida de Haar definida en $\mathscr{B}_\tau(G)$, Más aun, si μ es otra medida de Haar en $\mathscr{B}_\tau(G)$ existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mu = c\nu$.*

En el sentido topológico un conjunto abierto es considerado grande, mientras que para la medida esto lo cumplen los conjuntos de medida positiva. Las medidas de Haar reflejan parcialmente esta simetría de las teorías en el siguiente enunciado.

Teorema 1.2.7. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto, ν una medida de Haar en $\mathscr{B}_\tau(G)$ σ-finita y $U \subseteq G$ abierto, entonces $\nu(U) > 0$.*

Demostración. Por regularidad existe un subconjunto K de G compacto tal que $\nu(K) > 0$. La familia $\{xU \mid x \in G\}$ es una cubierta abierta de K y por lo tanto existe $F \subseteq G$ finito tal que:

$$K \subseteq \bigcup \{xU \mid x \in F\}$$

Entonces se tiene:

$$0 < \nu(K) \leqslant \nu\left(\bigcup \{xU \mid x \in F\}\right) \leqslant \sum_{x \in F} \nu(xU) = \sum_{x \in F} \nu(U)$$

y por lo tanto $\nu(U) > 0$. $\square$

Transformaciones

Dada la invarianza bajo traslaciones de las medidas de Haar nos interesan buscar transformaciones que preserven medida. Los siguientes enunciados nos dan un par de ellas.

Lema 1.2.8. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto y μ, ν medidas de Haar en $\mathscr{B}_\tau(G)$. Las funciones $R\,, S\,, T : G \times G \to G \times G$ dados por $R(x, y) = (y, x)$, $S(x, y) = (x, xy)$ y $T = R^{-1}SR = RSR$ son $\mathscr{B}_\tau(G) \otimes \mathscr{B}_\tau(G)$-medibles, además S y T preservan la medida $\mu \times \nu$.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathscr{B}_\tau(G)$, entonces $R^{-1}[A \times B] = B \times A$ de lo cual se sigue la medibilidad de R y la de S se sigue de la bicontinuidad del producto en G. Por otro lado, dado $E \subseteq G \times G$ denotemos por:

$$(E)_x = \{y \in G \mid (x, y) \in E\} \qquad (E)^y = \{x \in G \mid (x, y) \in E\}$$

a las secciones de E, entonces $(S[E])_x = x(E)_x$ y $(T[E])^y = y(E)^y$ y por definición de $\mu \times \nu$:

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(S[E]) &= \int \nu((S[E])_x)\, d\mu(x) \\ &= \int \nu(x(E)_x)\, d\mu(x) \\ &= \int \nu((E)_x)\, d\mu(x) \\ &= (\mu \times \nu)(E),\end{aligned}$$

análogamente:

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(T[E]) &= \int \mu((T[E])^y)\, d\nu(y) \\ &= \int \mu(y(E)^y)\, d\nu(y) \\ &= \int \mu((E)^y)\, d\nu(y) \\ &= (\mu \times \nu)(E).\end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.9. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topólogico localmente compacto, R, S como en el Lema 1.2.8 y $Q = S^{-1}RS$. Entonces:*

$$(Q[A \times B])_{x^{-1}} = xA \cap B^{-1} \ \text{ y } \ (Q[A \times B])^{y^{-1}} = \begin{cases} Ay & si \quad y \in B \\ \emptyset & si \quad y \in G \setminus B \end{cases}$$

Demostración. Observemos que $Q(x, y) = (xy, y^{-1})$ y $Q = Q^{-1}$. Tenemos que:

$$\chi_{Q[A\times B]}(x^{-1}, y) = \chi_{A\times B}(x^{-1}y, y^{-1}) = \chi_{xA}(y)\chi_B(y^{-1})$$

y $y \in (Q[A \times B])_x^{-1}$ si y solo si $\chi_{Q[A\times B]}(x^{-1}, y) = 1$ y $y \in xA \cap B^{-1}$ si y solamente si $\chi_{xA}(y)\chi_B(y^{-1}) = 1$, de lo cual se sigue la primera afirmación. La segunda afirmación se sigue de que:

$$\chi_{Q[A\times B]}(x, y^{-1}) = \chi_{A\times B}(xy^{-1}, y) = \chi_{Ay}(x)\chi_B(y).$$

□

Teorema 1.2.10. *Sean* $(G, \cdot, \mathcal{T})$ *un grupo topológico localmente compacto,* ν *una medida de Haar en* $\mathscr{B}_\tau(G)$, $A \in \mathscr{B}_\tau(G)$ *(y con medida positiva) y* $y \in G$*, entonces* $Ay \in \mathscr{B}_\tau(G)$ *(y tiene medida positiva) y* $A^{-1} \in \mathscr{B}_\tau(G)$ *(y tiene medida positiva).*

Demostración. Por el Teorema 1.2.9 Ay y A^{-1} son secciones, más especificamente,

$$Ay = (Q(A \times G))^{y^{-1}} \text{ y } A^{-1} = (Q(G \times A))_y$$

y por lo tanto pertenecen a $\mathscr{B}_\tau(X)$. Como Q preserva la medida $\nu \times \nu$ y $\nu(A) > 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 < \nu(A)\nu(A) &= (\nu \times \nu)(A \times A) = (\nu \times \nu)(Q(A \times A)) \\ &= \int \nu(x^{-1}A \cap A^{-1})\, d\nu(x), \end{aligned}$$

por lo que existe $x \in G$ tal que $\nu(x^{-1}A \cap A^{-1}) > 0$ y por lo tanto $\nu(A^{-1}) > 0$. Por la invarianza izquierda de ν,

$$0 < \nu(A^{-1}) = \nu(y^{-1}A^{-1}) = \nu((Ay)^{-1})$$

y por lo anterior $\nu(Ay) > 0$. □

Propiedad de Steinhaus

Uno de los Teoremas con mayor utilidad en el Análisis Real es el Teorema de Steinhaus, el cual nos dice que si un conjunto A tiene medida de Lebesgue positiva, entonces el conjunto de sus diferencias,

$$A \ominus A = \{x - y \mid x, y \in A\},$$

resulta ser una vecindad del cero. Como veremos más adelante este resultado sigue siendo valido para medidas de Haar.

Los siguientes resultados nos muestran algunas propiedades de continuidad de las medidas de Haar.

Lema 1.2.11. *Sean* $(G, \cdot, \mathcal{T})$ *un grupo topológico localmente compacto,* ν *una medida de Haar en* $\mathscr{B}_\tau(G)$ *y* $A \in \mathscr{B}_\tau(G)$*. Entonces para toda* $\epsilon > 0$ *existe* V *vecindad del neutro tal que* $\nu(A \triangle xA) < \epsilon$ *para toda* $x \in V$*.*

Demostración. Sean $A \in \mathscr{B}_\tau(G)$ compacto y $\epsilon > 0$. Por la regularidad de ν existe un abierto $U \subseteq G$ tal que $A \subseteq U$ y $\nu(U \setminus A) < \frac{\epsilon}{2}$. Por el Lema 1.2.3 existe $V \subseteq G$ vecindad abierta del elemento neutro tal que $VA \subseteq U$ y por el Lema 1.2.2 podemos suponer que V es simétrica. Entonces para toda $x \in V$:

$$\begin{aligned}\nu(xA \vartriangle A) &= \nu(xA \setminus A) + \nu(A \setminus xA)\\ &= \nu(xA \setminus A) + \nu(x^{-1}A \setminus A)\\ &\leqslant \nu(U \setminus A) + \nu(U \setminus A) < \epsilon.\end{aligned}$$

Sean $A \in \mathscr{B}_\tau(G)$ y $\epsilon > 0$. Por la regularidad de ν existe un compacto K tal que $K \subseteq A$ y $\nu(A \setminus K) < \frac{\epsilon}{3}$. Por el caso anterior existe $V \subseteq G$ vecindad del neutro tal que $\nu(xK \vartriangle K) < \frac{\epsilon}{3}$ para toda $x \in V$. Entonces para toda $x \in V$:

$$\begin{aligned}\nu(A \vartriangle xA) &\leqslant \nu(A \vartriangle K) + \nu(K \vartriangle xK) + \nu(xK \vartriangle xA)\\ &\leqslant \nu(A \setminus K) + \nu(K \vartriangle xK) + \nu(x(A \setminus K))\\ &\leqslant 2\nu(A \setminus K) + \nu(K \vartriangle xK)\\ &< 2\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.12. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto, ν una medida de Haar en $\mathscr{B}_\tau(G)$ σ-finita y $A \in \mathscr{B}_\tau(G)$. Entonces,*

$$\lim_{x \to e} \nu(A \cap xA) = \nu(A).$$

Demostración. Sea $A \in \mathscr{B}_\tau(G)$ con $\nu(A) < +\infty$ y $\epsilon > 0$. Por el Lema 1.2.11 existe $V \subseteq G$ vecindad del neutro tal que $\nu(A \vartriangle xA) < \epsilon$ para todo $x \in V$. Entonces para todo $x \in V$:

$$|\nu(A \cap xA) - \nu(A)| \leqslant \nu(A \vartriangle (A \cap xA)) = \nu(A \cap (A \vartriangle xA)) \leqslant \nu(A \vartriangle xA) < \epsilon.$$

Sea $A \in \mathscr{B}_\tau(G)$ con $\nu(A) = +\infty$ y sea $\{G_n \mid n < \omega\} \subseteq \mathscr{B}_\tau(G)$ tal que:

$$G = \bigcup \{G_n \mid n < \omega\}, G_n \subseteq G_{n+1} \text{ y } \nu(G_n) < +\infty \text{ para toda } n < \omega.$$

Sea $M > 0$, como $\infty = \nu(A) = \lim_{n \to \infty} \nu(A \cap G_n)$ existe $k < \omega$ tal que:

$$M < \nu(A \cap G_k) < +\infty.$$

Por el caso anterior existe una vecindad V del neutro tal que para toda $x \in V$:

$$\nu(A \cap G_k \cap x(A \cap G_k)) > M,$$

de manera que para toda $x \in V$:

$$\nu(A \cap xA) \geqslant \nu(A \cap xA \cap G_k \cap xG_k) = \nu(A \cap G_k \cap x(A \cap G_k)) > M$$

Por lo tanto para todo $A \in \mathscr{B}_\tau(G)$:

$$\lim_{x \to e} \nu(A \cap xA) = \nu(A).$$

$\square$

Corolario 1.2.13. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto, ν una medida de Haar en $\mathscr{B}_\tau(G)$ σ-finita y $E, F \in \mathscr{B}_\tau(G)$ con $\nu(E), \nu(F) < +\infty$, entonces:*

$$\lim_{g \to e} \nu(E \cap xF) = \nu(E \cap F).$$

Demostración. Por el Lema 1.2.11 para toda $\epsilon > 0$ existe $V \subseteq G$ vecindad del neutro tal que para toda $g \in V$, $\nu(F \triangle gF) < \epsilon$. Entonces para toda $g \in V$:

$$|\nu(E \cap gF) - \nu(E \cap F)| \leqslant \nu(E \cap (F \triangle gF)) \leqslant \nu(F \triangle gF) < \epsilon.$$

$\square$

Definición 1.2.14. *Sea $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico. Una función $f : G \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua por la izquierda (por la derecha) si para toda $\epsilon > 0$ existe una vecindad $V \subseteq G$ del neutro tal que para todo $x, y \in G$, $y^{-1}x \in V (xy^{-1} \in V)$ implica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Claramente toda función uniformemente continua por la izquierda o por la derecha es continua.

Teorema 1.2.15. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto, ν una medida de Haar en $\mathscr{B}_\tau(G)$ σ-finita y $E, F \in \mathscr{B}_\tau(G)$ con $\nu(E), \nu(F) < +\infty$, entonces la función definida por*

$$f : G \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \nu(E \cap xF)$$

es uniformemente continua por la izquierda.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por el Lema 1.2.12 existe V vecindad del neutro tal que para todo $g \in V$, $\nu(F \triangle gF) < \epsilon$. Sean $x, y \in G$ tales que $y^{-1}x \in V$, entonces:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |\nu(E \cap xF) - \nu(E \cap yF)| \\
&\leqslant \nu(E \cap (xF \triangle yF)) \\
&\leqslant \nu(xF \triangle yF) \\
&= \nu(y^{-1}xF \triangle F) < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.16 (Propiedad de Steinhaus)**.** *Sean $(G, \cdot, \mathcal{T})$ un grupo topológico localmente compacto, ν una medida de Haar en $\mathscr{B}_\tau(G)$ σ-finita y $A, B \in \mathscr{B}_\tau(G)$ con $0 < \nu(A)\nu(B)$. Entonces, existe una vecindad V del neutro tal que $V \subseteq AA^{-1}$ y AB tiene interior no vacío.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.12, existe una vecindad V de e tal que $0 < \nu(A \cap gA)$ para toda $g \in V$. En particular $A \cap gA \neq \emptyset$, es decir, existen $x, x' \in A$ tal que $x' = gx$ por lo que $g = x'x^{-1} \in AA^{-1}$ para todo $g \in V$, es decir, $V \subseteq AA^{-1}$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\nu(A \cap xB^{-1}) &= \int \chi_{A \cap xB^{-1}}(y)\, d\nu(y) = \int \chi_A(y)\chi_{xB^{-1}}(y)\, d\nu(y) \\
&= \int \chi_A(y)\chi_{B^{-1}}(x^{-1}y)\, d\nu(y) = \int \chi_A(y)\chi_B(y^{-1}x)\, d\nu(y) \\
&= \int \chi_A(y)\chi_{y^{-1}B}(x)\, d\nu(y);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \nu(A \cap xB^{-1})\, d\nu(x) &= \int\int \chi_A(y)\chi_{y^{-1}B}(x)\, d\nu(y)\, d\nu(x) \\
&= \int\int \chi_A(y)\chi_{y^{-1}B}(x)\, d\nu(x)\, d\nu(y) \\
&= \int \chi_A(y) \int \chi_{y^{-1}B}(x)\, d\nu(x)\, d\nu(y) \\
&= \int \chi_A(y)\nu(y^{-1}B)\, d\nu(y) \\
&= \int \chi_A(y)\nu(B)\, d\nu(y) \\
&= \nu(B) \int \chi_A(y)\, d\nu(y) \\
&= \nu(B)\nu(A) > 0,
\end{aligned}$$

por lo que existe $x_0 \in G$ tal que

$$\mu(A \cap x_0 B^{-1}) > 0.$$

Por la primera parte de este Teorema existe una vecindad V de e tal que

$$V \subseteq (A \cap x_0 B^{-1})(A \cap x_0 B^{-1})^{-1}.$$

Por último observemos que

$$(A \cap x_0 B^{-1})(A \cap x_0 B^{-1})^{-1} \subseteq A(x_0 B^{-1})^{-1} = ABx_0^{-1},$$

por lo que Vx_0, siendo una vecindad de x_0, esta contenida en AB. □

Es claro, utilizando núcleos medibles, que la Propiedad de Steinhaus sigue siendo valida si consideramos no solo borelianos sino también conjuntos medibles con respecto a la compleción de la medida ν.

Ergodicidad

Lema 1.2.17. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto, ν una medida de Haar en $\mathscr{B}_\tau(G)$ σ-finita, $D \subseteq G$ denso y $E, F \in \mathscr{B}_\tau(G)$ con $0 < \nu(E)\nu(F)$. Entonces, existe $g \in D$ tal que $\nu(E \cap gF) > 0$.*

Demostración. Si $\nu(F) < +\infty$ entonces la función:

$$f : G \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \nu(E \cap xF)$$

es continua por el Teorema 1.2.15. Entonces, por el Teorema 1.2.10 $\nu(F^{-1}) > 0$:

$$\begin{aligned}
\int f \, d\nu &= \int \nu(A \cap xF) \, d\nu(x) \\
&= \int \int \chi_E(y) \chi_{xF}(y) \, d\nu(y) \, d\nu(x) \\
&= \int \int \chi_E(y) \chi_F(x^{-1}y) \, d\nu(x) \, d\nu(y) \\
&= \int \chi_E(y) \int \chi_{yF^{-1}}(x) \, d\nu(x) \, d\nu(y) \\
&= \int \nu(yF^{-1}) \chi_E(y) \, d\nu(y) \\
&= \int \nu(F^{-1}) \chi_E(y) \, d\nu(y) = \nu(F^{-1})\nu(E) > 0
\end{aligned}$$

por lo que f es no nula. Por la continuidad de f existe $V \subseteq G$ un abierto no vacío tal que $V \subseteq f^{-1}[(0,\infty)]$. Como D es denso existe $x \in D \cap V$, es decir,

$$0 < f(x) = \nu(E \cap xF).$$

En el caso que $\nu(F) = +\infty$ sea $\{G_n \mid n < \omega\} \subseteq \mathscr{B}_\tau(G)$ tal que

$$G = \bigcup \{G_n \mid n < \omega\}, G_n \subseteq G_{n+1} \text{ y } \nu(G_n) < +\infty \text{ para toda } n < \omega,$$

entonces existe $k < \omega$ tal que

$$0 < \nu(F \cap G_k) < +\infty$$

y por el caso anterior existe $x \in D$ tal que $\nu(E \cap x(F \cap G_k)) > 0$ y por lo tanto

$$\nu(E \cap xF) > 0.$$

□

Teorema 1.2.18. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto, ν una medida de Haar en $\mathscr{B}_\tau(G)$ σ-finita, $E \in \mathscr{B}_\tau(G)$. Supongamos que $\nu(E \triangle (xE)) = 0$ para todo x en un subconjunto denso de G, entonces $\nu(E) = 0$ o $\nu(G \setminus E) = 0$.*

Demostración. Sea $E \subseteq G$ tal que $\nu(E \triangle (xE)) = 0$ para toda $x \in D$ con $D \subseteq G$ denso. Observemos que para todo $x \in G$:

$$E \cap (x(G \setminus E)) = E \cap (G \setminus (xE)) = E \setminus (xE) \subseteq E \triangle xE,$$

por lo que para toda x en el denso D se tiene que

$$\nu(E \cap (x(G \setminus E))) = 0$$

y por el Teorema 1.2.17 se concluye que

$$\nu(E) = 0 \text{ ó } \nu(G \setminus E) = 0.$$

□

Teorema 1.2.19. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto, ν una medida de Haar en $\mathscr{B}_\tau(G)$ σ-finita y $D \subset G$ denso y numerable. Si $F \in \mathscr{B}_\tau(G)$ y $\nu(F) > 0$ entonces $\nu(G \setminus \bigcup \{gF \mid g \in D\}) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $\nu(G \setminus \bigcup \{gF \mid g \in D\}) > 0$, por el Teorema 1.2.17 existe $h \in D$ tal que

$$\nu\left(\left(G \setminus \bigcup \{gF \mid g \in D\}\right) \cap hF\right) > 0.$$

En particular:

$$hF \cap \left(G \setminus \bigcup \{gF \mid g \in D\}\right) \neq \emptyset,$$

lo cual no es posible. □

Teorema 1.2.20. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto, ν una medida de Haar en $\mathscr{B}_\tau(G)$ σ-finita y $D \subset G$ denso y numerable. Sea $f : G \to \mathbb{R}$ $\mathscr{B}_\tau(G)$-medible tal que $f(dx) = f(x)$ para todo $x \in G$ y $d \in D$, entonces f es constante c.d. relativo a ν.*

Demostración. Para cada $n < \omega$ y $k \in \mathbb{Z}$ definamos:

$$F(k,n) = \left\{x \in G \;\middle|\; \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\} = f^{-1}\left[\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right].$$

Entonces para cada $n < \omega$, $k, k' \in \mathbb{Z}$, $k \neq k'$ $F(k,n) \cap F(k'n) = \emptyset$ y

$$\mathbb{R} = \bigcup \{F(k,n) \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

por lo que para cada $n < \omega$ existe $k_n \in \mathbb{Z}$ tal que $\nu(F(k_n, n)) > 0$.

Sea $F_n = F(k_n, n)$. Como $f(dx) = f(x)$ para toda $x \in G$ y $d \in D$, $x \in F_n$ si y solo si $x \in d^{-1}F_n$,es decir, $F_n = d^{-1}F_n$ para todo $d \in D$. Además D^{-1} es denso y numerable, por lo que por el Teorema 1.2.19

$$0 = \nu\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup \left\{d^{-1}F_n \mid d \in D\right\}\right) = \nu\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup \{F_n \mid d \in D\}\right) = \nu\left(\mathbb{R} \setminus F_n\right).$$

Con esto vemos que $\left\{\left[\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n}\right) \mid n < \omega\right\}$ es una sucesón de intervalos anidados, cuya longitud tiende a cero. Sean

$$\{c\} = \bigcap \left\{\left[\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n}\right] \;\middle|\; n < \omega\right\} \text{ y } F = \bigcap \{F_n \mid n < \omega\}.$$

Entonces,

$$\nu(\mathbb{R} \setminus F) = \nu\left(\bigcup \{\mathbb{R} \setminus F_n \mid n < \omega\}\right) \leqslant \sum_{n<\omega} \nu(\mathbb{R} \setminus F_n) = 0.$$

Además, para todo $x \in F$, se tiene que $x \in F_n$ para todo $n < \omega$, por lo cual

$$f(x) \in \bigcap \left\{ \left[\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n + 1}{2^n} \right) \,\middle|\, n < \omega \right\} \subseteq \{c\},$$

es decir, $f(x) = c$ para todo $x \in F$ y como $\nu(\mathbb{R} \setminus F) = 0$, $f = c$ c.d. relativo a ν. □

Definición 1.2.21. *Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, G un grupo de transformaciones de X y H un subgrupo denso y numerable. Se dice que μ es métrica transitiva con respecto a H si para todo $F \in \mathcal{S}$ con $\mu(F) > 0$ se satisface:*

$$\mu\left((G \setminus \bigcup \{ g[F] \mid g \in D \}) \right) = 0.$$

El Teorema 1.2.19 nos dice que una medida de Haar es métrica transitiva con respecto a cualquier subgrupo denso y numerable, considerando que el grupo actúa en si mismo por medio de traslaciones izquierdas.

Compacidad y finitud

Como hemos visto en estos últimos resultados la σ-finitud de un medida resulta ser muy importante, por lo que resulta indispensable tener algunos resultados concernientes a esta característica. Por la manera que esta construida la medida de Haar existen condiciones topológicas que aseguran esta condición. Relativo a esto tenemos los siguientes teoremas.

Teorema 1.2.22. *Sea $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto y ν una medida de Haar en G. Entonces ν es finita si y solo si G es compacto.*

Demostración. En el caso que G sea finito no hay nada que demostrar pues ν es finita sobre compactos al ser localmente finita.

Supongamos que G no es compacto. Sea K una vecindad compacta de e. Por el Teorema 1.2.2 existe U vecindad simétrica de e tal que $UU \subseteq K$. Como G no es compacto ningún numero finito de trasladados de K cubre a G. Construyamos $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ una sucesión en G tal que

$$x_n \in G \setminus \bigcup \{ x_k K \mid k < n \}.$$

Veamos que $x_i U \cap x_j U = \emptyset$ si $i \neq j$. Supongamos que existen $i < j < \omega$ tales que $\emptyset \neq x_i U \cap x_j U$, entonces existen $u, v \in U$ tales que $x_i u = x_j v$ y por lo tanto

$$x_j = x_i u v^{-1} \in x_i U U^{-1} = x_i U U \subseteq x_i K,$$

lo cual contradice nuestra elección de x_j.

Por el Teorema 1.2.7 $\nu(x_nU) = \nu(U) > 0$ y como la familia $\{x_nU \mid n < \omega\}$ es disjunta tenemos que:

$$\nu(G) \geqslant \nu\left(\bigcup\{x_nU \mid n < \omega\}\right) = \sum_{n<\omega} \nu(x_nU) = \sum_{n<\omega} \nu(U) = +\infty$$

lo que concluye el resultado. □

Una de las características más importante de los espacios de medida σ-finitos es que tenemos una cota sobre la cardinalidad de una familia disjunta que conste de conjuntos de medida positiva: esta familia es a lo más numerable. Esta condición se conoce como la condición de Souslin.

Definición 1.2.23. *Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. Se dice que μ satisface la condición de Souslin si para toda familia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ de conjuntos disjuntos la condición $\mu(C) > 0$ para todo $C \in \mathcal{C}$ implica que $\mathcal{C}$ es a lo más numerable.*

Teorema 1.2.24. *Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. Si μ es una medida σ-finita entonces μ satisface la condición de Souslin.*

Demostración. Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito y $\{G_n \mid n < \omega\} \subseteq \mathcal{S}$ tales que $\bigcup\{G_n \mid n < \omega\} = X$ y $\mu(G_n) < +\infty$ para toda $n < \omega$. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ una familia ajena con $\mu(C) > 0$ para toda $C \in \mathcal{C}$. Para cada $k, n < \omega$ sea:

$$D_k^{(n)} = \left\{C \,\middle|\, C \in \mathcal{C} \text{ y } \mu(C \cap G_n) \geqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Como cada $D_k^{(n)}$ es finito, entonces:

$$D_n = \bigcup\left\{D_k^{(n)} \,\middle|\, k < \omega\right\} = \{C \mid C \in \mathcal{C} \text{ y } \mu(C \cap G_n) > 0\}$$

es a lo más numerable. Más aun, como $\mu(C) > 0$ para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $n < \omega$ tal que $\mu(C \cap G_n) > 0$, es decir:

$$\mathcal{C} = \bigcup\{D_n \mid n < \omega\}$$

el cual es a lo más numerable. □

Motivados por el Teorema 1.2.22 se espera que existan condiciones similares para espacios σ-finitos y así es, la condición que se requiere es la de σ-compacidad.

Definición 1.2.25. *Un grupo topológico G es llamado ω-precompacto si para toda vecindad V del elemento neutro existe $C \subseteq G$ a lo más numerable tal que $G = CV$.*

Lema 1.2.26. *En un grupo topológico localmente compacto es equivalente ser ω-precompacto a ser σ-compacto.*

Demostración. Sea $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto y supongamos que G es ω-precompacto. Sea V una vecindad compacta del elemento neutro, entonces existe un subconjunto numerable C de G tal que $G = CV$, ademas cV es compacto para todo $c \in C$, por lo que $\{cV \mid c \in C\}$ es una familia numerable de conjuntos compactos tal que:

$$\bigcup \{cV \mid c \in C\} = \{cv \mid c \in C, v \in V\} = CV = G$$

por lo que G es sigma compacto.

Si G es sigma compacto y V una vecindad del elemento neutro, entonces $U = int(V)$ es un abierto no vacío. Consideremos la cubierta abierta $\{gU \mid g \in G\}$. Todo espacio σ-compacto es Lindelöf por lo que existe $A \subseteq G$ numerable tal que $G = \bigcup \{aU \mid a \in A\}$ y como $U \subseteq V$ entonces $G = \bigcup \{aV \mid a \in A\}$ por lo que G es ω-precompacto. $\square$

Teorema 1.2.27. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto y ν una medida de Haar en G. Entonces ν es σ-finita si y solo si G es σ-compacto.*

Demostración. Si G es σ-compacto existe $\{K_i \mid i \in I\}$ una familia a lo más numerable de compactos tal que $G = \bigcup \{K_i \mid i \in I\}$. Como ν es finita en los compactos, $\nu(K_i) < +\infty$ para toda $i \in I$, por lo que ν es σ-finita.

Supongamos que G no es σ-compacto, entonces por el Lema 1.2.26 G no es ω-precompacto por lo que existe una vecindad U del elemento neutro tal que para todo conjunto numerable $C \subseteq G$, $\bigcup \{cU \mid c \in C\} \subsetneq G$. Sea $V \subseteq U$ vecindad del neutro tal que $VV^{-1} \subseteq U$.

Construyamos recursivamente una ω_1-sucesión $\langle x_\xi \rangle_{\xi < \omega_1}$ en G tal que:

$$x_\alpha V \cap x_\beta V = \emptyset \text{ si } \alpha < \beta < \omega_1.$$

Supongamos que para $\beta < \omega_1$ la β-sucesión $\langle x_\xi \rangle_{\xi < \beta}$ está definida. Entonces, como ω_1 es el primer ordinal no numerable, $\{x_\xi \mid \xi < \beta\}$ es numerable por lo que $\bigcup \{x_\xi U \mid \xi < \beta\} \subsetneq G$. Sea $x \in G \setminus \bigcup \{x_\xi U \mid \xi < \beta\}$ y definamos $x_\beta = x$.

Supongamos que $x_\xi V \cap x_\beta V \neq \emptyset$ para alguna $\xi < \beta$. Entonces existen $u, v \in V$ tales que $x_\xi u = x_\beta v$, o equivalentemente $x_\beta = x_\xi u v^{-1} \in x_\xi V V^{-1} \subseteq x_\xi U$, lo cual no es posible por la definición de x_β, por lo que $x_\beta V$es ajeno a la colección $\{x_\xi V \mid \xi < \beta\}$.

Entonces existe A un subconjunto no numerable de G tal que $\{aV \mid a \in A\}$ es una familia de conjuntos ajenos. Además $0 < \nu(V) = \nu(aV)$ para toda $a \in A$ por ser ν positiva sobre abiertos no vaciós e invariante bajo traslaciones izquierdas. Entonces $\{aV \mid a \in A\}$ es una familia no numerable de conjuntos ajenos y de medida positiva, es decir, ν no satisface la condición de Souslin y por el Teorema 1.2.24 no es σ-finita. $\square$

1.3. Teorema de Vitali para medidas de Haar

Con toda la herramienta desarrollada en la sección anterior es posible dar una generalización al Teorema de Vitali, en esta no solo se demuestra que existen conjuntos no medibles para la medida de Haar sino que estos conjuntos se pueden encontrar dentro de cualquier conjunto de medida positiva.

Teorema 1.3.1. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto, ν una medida de Haar σ-finita en G, H un subgrupo numerable de G y $A \subseteq G$ ν-medible y de medida positiva. Entonces, si e es un punto de acumulación de H existe $A' \subseteq A$ tal que A' no es ν-medible.*

Demostración. Sea $\{H_i \mid i \in I\}$ la subfamilia de la partición de Vitali asociada a H la cual consta de los elementos cuya intersección con A es no vacía, la cual es no vacía por A ser no vacío. Sea A' un conjunto selector de la familia $\{A \cap H_i \mid i \in I\}$, la cual consta de conjuntos no vacíos y ajenos, es decir, para todo $i \in I$:

$$\operatorname{card}(A' \cap A \cap H_i) = 1.$$

Supongamos por un momento que A' es ν-medible. De manera análoga al Lema 1.1.2 se prueba que $\{gA' \mid g \in H\}$ es una familia ajena cuya unión contiene a A. Como H es numerable

$$0 < \nu(A) \leqslant \nu\left(\bigcup \{gA' \mid g \in H\}\right) = \sum_{g \in H} \nu(gA') = \sum_{g \in H} \nu(A')$$

por lo que $\nu(A') > 0$. La propiedad de Steinhaus (Teorema 1.2.16) nos dice que $A'A'^{-1}$ es vecindad de e. Como H se acumula en e existe $x_0 \in H \setminus \{e\}$ tal que $x_0 \in A'A'^{-1}$, es decir, existen $a_1, a_2 \in A'$ tales que $x_0 = a_1 a_2^{-1}$, es decir, $x_0 a_2 = a_1$ y por lo tanto $a_1 \in A' \cap x_0 A'$ lo que contradice que $e \neq x_0$. Por lo tanto A' no es ν-medible □

Recordemos que los conjuntos selectores de la partición asociada a las clases laterales izquierdas de un subgrupo H se les conoce como conjuntos de Vitali para H. Si consideramos únicamente las clases que intersectan a un conjunto A diremos que V es un conjunto de Vitali en A para H.

El Teorema anterior es una generalización al Teorema de Vitali a medidas de Haar, sin embargo este Teorema tiene una gran limitación: la existencia de un subgrupo numerable que se acumule en e. El resultado sigue siendo valido sin esta restricción aunque para esto necesitaremos otras herramientas.

Definición 1.3.2. *Sean $(G, \cdot, \mathcal{T})$ un grupo topológico localmente compacto ν una medida de Haar. Un conjunto $A \subseteq G$ se dice cubierto infinitamente por $H \subseteq G$ si:*

i) $\operatorname{card}(H) = \omega$*;*

ii) Existe $B \subseteq G$ ν-medible de medida finita tal que todo elemento de A esta en una infinidad de los conjuntos $\{hB \mid h \in H\}$. En otras palabras, si $H = \{h_n \mid n < \omega\}$ entonces:

$$A \subseteq \bigcap \left\{ \bigcup \{h_m B \mid m > n\} \;\middle|\; n < \omega \right\} = \limsup \{h_n B \mid n < \omega\}.$$

Más aun, se dice que A es cubierto infinitamente si existe $H \subseteq G$ tal que A es cubierto infinitamente por H.

Recordemos que dada μ es una medida μ_* y μ^* denotan la medida interior y la medida exterior asociada a esta, es decir, $\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \in \operatorname{dom}(\mu) \text{ y } B \subseteq A\}$ y $\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) \mid B \in \operatorname{dom}(\mu) \text{ y } A \subseteq B\}$

Lema 1.3.3. *Sean $(G, \cdot, \mathcal{T})$ un grupo topológico localmente compacto y ν una medida de Haar. Más aun, sean $A \subseteq G$ y $H \subseteq G$ tales que A es cubierto infinitamente por H. Si V es un conjunto de Vitali para H', con H' algún subgrupo de G que contiene a H, entonces*

$$\hat{\nu}_*(V \cap A) = 0.$$

para cualquier medida invariante bajo traslaciones izquierdas $\hat{\nu}$ que extienda a ν.

Demostración. Por definición $\mathrm{card}(H) = \omega$ por lo que podemos escribirlo de manera inyectiva como
$$H = \{h_n \mid n < \omega\}.$$
Sea H' el subgrupo que contiene a H para el cual V es un conjunto de Vitali. Sea $B \subseteq G$ ν-medible con $\nu(B) < +\infty$ tal que
$$A \subseteq \text{lím sup}\{h_n B \mid n < \omega\}.$$
Sea $A' \subseteq A \cap V$ un conjunto $\hat{\nu}$-medible y sea $V_n = A' \cap h_n B$ para cada $n < \omega$. De esta manera tenemos que
$$\bigcup \left\{h_n^{-1} V_n \mid n < \omega\right\} \subseteq B.$$

Veamos que $h_n^{-1}V_n \cap h_m^{-1}V_m = \emptyset$ para todo $n < m < \omega$. Para esto sean $n < m < \omega$ y $v \in V_n$, $v' \in V_m$ tales que $h_n^{-1}v_n = h_m^{-1}v_m$, entonces $v_n v_m^{-1} = h - nh_m^{-1} \in H'$ por lo que v_m y v_m pertenecen a la misma clase de equivalencia y como $V_n \subseteq A' \subseteq V$ se tiene que $v_m = v_n$, $h_n = h_m$ y $m = n$.

Con esto obtenemos que
$$\sum_{n<\omega} \hat{\nu}(V_n) = \sum_{n<\omega} \hat{\nu}(h_n^{-1}V_n) = \hat{\nu}\left(\bigcup \left\{h_n^{-1}V_n \mid n < \omega\right\}\right) \leqslant \nu(B) < +\infty$$
y por el Lema de Borel-Cantelli:
$$\hat{\nu}(A') = \hat{\nu}\left(A' \cap \text{lím sup}\{B_n \mid n < \omega\}\right) = \hat{\nu}\left(\text{lím sup}\{V_n \mid n < \omega\}\right) = 0,$$
es decir, $\hat{\nu}(A') = 0$ para todo $A' \subseteq A \cap V$ $\hat{\nu}$-medible y por lo tanto $\hat{\nu}_*(A \cap V) = 0$. □

Lema 1.3.4. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico localmente compacto y ν una medida de Haar. Si $A \subseteq G$ contiene un conjunto A' ν-medible de medida positiva el cual es cubierto infinitamente por H, para algún $H \subseteq G$, entonces, existe un conjunto de Vitali en A el cual no es $\hat{\nu}$-medible para cualquier medida invariante bajo traslaciones izquierdas $\hat{\nu}$ que extienda a ν.*

Demostración. Sea H' el subgrupo generado por H, el cual también es numerable, y sea V' un conjunto de Vitali en A' para H'. Claramente podemos extender V' a un conjunto V de Vitali en G para H. Supongamos por un momento que $A \cap V$ es $\hat{\nu}$-medible, entonces $A \cap V \cap A' = A' \cap V = V'$ también es ν-medible. Por V' ser un conjunto de Vitali en A' para H' se tiene que
$$A' \subseteq \bigcup \{hV' \mid h \in H'\}.$$

Entonces,

$$0 < \hat{\nu}(A') \leqslant \sum_{h\in H'} \hat{\nu}(hV') = \sum_{h\in H} \hat{\nu}(V'),$$

por lo que $\hat{\nu}(V') > 0$. Por otro lado el Lema 1.3.3 nos dice que:

$$0 = \hat{\nu}_*(V \cap A') = \nu_*(V'),$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 1.3.5. *Sea $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico no numerable localmente compacto, ν una medida de Haar σ-finita y $A \subseteq G$ ν-medible de medida positiva, entonces existe $B \subseteq A$ ν-medible de medida positiva y cubierto infinitamente.*

Demostración. Como μ es σ-finita existe una familia $\{X_n \mid n < \omega\}$ de subconjuntos ν-medibles de G tales que $\nu(X_n) < +\infty$ para todo $n < \omega$ y $G = \bigcup \{X_n \mid n < \omega\}$.

Como $\nu(A) > 0$ existe $k_0 < \omega$ tal que $0 < \nu(A \cap X_{k_0}) < +\infty$. Definimos $A' = A \cap X_{k_0}$ y para cada $n < \omega$

$$G_n = \{h \in G \mid \nu(A' \cap hX_n) > 0\}.$$

Si $\operatorname{card}(G_n) = \omega$ para todo $n < \omega$ entonces, como unión numerable de conjuntos numerables es numerable, existe $h \in G \setminus \bigcup \{G_n \mid n < \omega\}$ por G ser no numerable, por lo que

$$0 < \nu(A') = \nu(hG \cap A') = \nu\left(\bigcup \{hX_n \cap A' \mid n < \omega\}\right) \leqslant \sum_{n<\omega} \nu(hX_n \cap A') = 0,$$

lo cual no es posible y por lo tanto existe $k < \omega$ tal que G_k es no numerable.

Como G_k es no numerable existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\operatorname{card}(\{h \in G \mid \nu(A' \cap hX_k) \geqslant \epsilon\}) \geqslant \omega,$$

por lo que existe $\{h_n \mid n < \omega\}$ tales que $h_n \neq h_m$ si $n \neq m$ y $\nu(A \cap h_n X_k) \geqslant \epsilon$ para toda $n < \omega$. Como $\nu(A') < +\infty$ se satisface que

$$\begin{aligned}\nu\left(A' \cap \limsup \{h_n X_k \mid n < \omega\}\right) &= \inf\left\{\nu\left(A' \cap \bigcup \{h_m X_k \mid m > n\}\right) \,\Big|\, n < \omega\right\} \\ &\geqslant \inf\left\{\nu\left(A' \cap h_{n+1} X_k\right) \mid n < \omega\right\} \geqslant \epsilon > 0.\end{aligned}$$

Sea $B = A' \cap \limsup \{h_n X_k \mid n < \omega\}$. Como $B \subseteq \limsup \{h_n X_k \mid n < \omega\}$ y X_k es ν-medible y de medida finita B es cubierto infinitamente por $\{h_n \mid n < \omega\}$. Además $B \subseteq A$ y $\nu(B) > 0$. $\square$

Para el caso en que G es numerable se tiene que cualquier medida de Haar es un múltiplo escalar de la medida de conteo, la cual se puede extender a todos los subconjuntos de G por cual este caso no nos resulta de interés. Con los Lemas anteriores es posible demostrar el resultado que estábamos buscando.

Teorema 1.3.6. *Sea $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico no numerable localmente compacto, ν una medida de Haar σ-finita y $A \subseteq G$ ν-medible de medida positiva, entonces existe $A' \subseteq A$ el cual no es $\hat{\nu}$-medible para cualquier medida invariante bajo traslaciones izquierdas $\hat{\nu}$ que extienda a ν.*

Demostración. Por el Lema 1.3.5 existe $B \subseteq A$ ν-medible y de medida positiva el cual es cubierto infinitamente y por el Lema 1.3.4 existe V un conjunto de Vitali en B el cual no es $\hat{\nu}$-medible para cualquier medida invariante bajo traslaciones izquierdas $\hat{\nu}$ que extienda a ν. □

1.4. Categoría de Baire

En esta sección se estudian los conceptos topológicos de categoría y sus principales analogías con la medida de Lebesgue.

Conjuntos densos en ninguna parte

Definición 1.4.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que $N \subseteq X$ es denso en ninguna parte en X si $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(N)) = \emptyset$.*

Si el contexto es claro solo se dira que un conjunto es denso en ninguna parte sin especificar el espacio X, aunque es necesario recalcar que no es lo mismo ser denso en ninguna parte en un conjunto o en otro.

Un conjunto denso en ninguna parte es tal que, topologicamente hablando, esta "lleno de hoyos", pues ni siquiera al "pegarle todo lo que esta cerca", es decir, cerrarlo, consigue tener alguna vecindad de alguno de sus puntos. Esta clase de conjuntos es cerrado bajo algunas operaciones como veremos a continuación.

Teorema 1.4.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces:*

i) Subconjuntos de un conjunto denso en ninguna parte son densos en ninguna parte;

ii) Union finita de conjuntos densos en ninguna parte es denso en ninguna parte;

iii) La cerradura de un conjunto denso en ninguna parte es denso en ninguna parte

Demostración.

i) Sea $N \subseteq X$ denso en ninguna parte y $M \subseteq N$. Por monotonía de los operadores interior y cerradura tenemos que

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(M)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(N)) = \emptyset$$

y por lo tanto M es denso en ninguna parte.

ii) Sea $n < \omega$ y $\{N_i \mid i < n\}$ subconjuntos de X denso en ninguna parte. Como unión finita de cerrados es cerrado y unión de abiertos es abierto tenemos que

$$\mathrm{int}\left(\mathrm{cl}\left(\bigcup\{N_i \mid i < n\}\right)\right) = \mathrm{int}\left(\bigcup\{\mathrm{cl}(N_i) \mid i < n\}\right) = \bigcup\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(N_i)) \mid i < n\} = \emptyset$$

por lo cual $\bigcup\{N_i \mid i < n\}$ es denso en ninguna parte.

iii) Sea $N \subseteq X$ denso en ninguna parte, entonces

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(N))) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(N)) = \emptyset$$

por lo que $\mathrm{cl}(N)$ es denso en ninguna parte. □

Los encisos i) y ii) del Teorema 1.4.2 nos dicen que la familia de los subconjuntos densos en ninguna parte de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ forman un ideal. Aunque estos conjuntos no necesariamente formaran un σ-ideal, son la base para definir una clase que si lo hará.

Conjuntos de primera categoría

Definición 1.4.3. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un conjunto $P \subseteq X$ se dice de primera categoría en X si existe una familia $\{N_n \mid n < \omega\}$ de subconjuntos de X densos en ninguna parte en X tales que $P = \bigcup\{N_n \mid n < \omega\}$. Los conjuntos que no son de primera categoría se dicen de segunda categoría.*

Denotaremos por $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(X)$ a la familia de subconjuntos de X de primera categoría en X. Esta familia goza de mejores propiedades que la de los conjuntos densos en ninguna parte. Cuando el contexto sea claro nos referiremos a estos conjuntos como de primera categoría

Teorema 1.4.4. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, entonces $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(X)$ forma un σ-ideal de subconjuntos de X. Más aun, para todo $P \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}(X)$ existe $F \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}(X)$ del tipo $\mathcal{F}_\sigma$ tal que $P \subseteq F$.*

Demostración.

i) Sea $P \subseteq X$ de primera categoría y $Q \subseteq P$. Sea $\{N_n \mid n < \omega\}$ una familia de subconjuntos de X densos en ninguna parte en X tales que

$$P = \bigcup \{N_n \mid n < \omega\}.$$

Por el Teorema 1.4.2 $N_n \cap Q$ es denso en ninguna parte en X para todo $n < \omega$ y

$$Q = \bigcup \{N_n \cap Q \mid n < \omega\},$$

por lo que Q es de primera categoría en X.

ii) Sea $\{P_n \mid n < \omega\}$ una familia de subconjuntos de X de primera categoría en X. Para cada $n < \omega$ existe una familia $\left\{ N_i^{(n)} \,\middle|\, i < \omega \right\}$ de subconjuntos densos en ninguna parte en X tal que

$$P_n = \bigcup \left\{ N_i^{(n)} \,\middle|\, i < \omega \right\}.$$

La familia $\left\{ N_i^{(n)} \,\middle|\, i, n < \omega \right\}$ es numerable y

$$\bigcup \{P_n \mid n < \omega\} = \bigcup \left\{ N_i^{(n)} \,\middle|\, i, n < \omega \right\}$$

por lo que $\bigcup \{P_n \mid n < \omega\}$ es de primera categoría en X.

Por último para cada $P \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}(X)$ existe $\{N_n \mid n < \omega\}$ una familia de conjuntos densos en ninguna parte tales que

$$P = \bigcup \{N_n \mid n < \omega\},$$

entonces $F = \bigcup \{\mathrm{cl}(N_n \mid n < \omega\}$ es de primera categoría, del tipo $\mathcal{F}_\sigma$ y $P \subseteq F$. $\square$

Teorema de Baire

Una de las principales aplicaciones de la topología en el análisis es para demostrar la existencia de algún objeto y una de las herramientas más importantes para esto es el Teorema de la categoría de Baire.

Teorema 1.4.5 (Teorema de Baire)**.** *Sea (X,ρ) un espacio métrico completo. Si $A \subseteq X$ es de primera categoría en X entonces $X \setminus A$ es denso en X.*

Demostración. Sea $\{A_n \mid n<\omega\}$ una familia de conjuntos densos en ninguna parte en X tales que $A = \bigcup\{A_n \mid n<\omega\}$. Sea $S \subseteq X$ un abierto no vacío.

Construiremos una sucesión de bolas abiertas $\langle B_{r_n}(x_n)\rangle_{n<\omega}$ tal que para todo $n<\omega$, $r_n < \frac{1}{n+1}$ y

$$\mathrm{cl}(B_{r_{n+1}}(x_{n+1})) \subseteq B_{r_n}(x_n) \setminus A_{n+1}.$$

Como S es abierto y A_0 denso en ninguna parte su cerradura tiene interior vacío y $S \setminus \mathrm{cl}(A_0)$ es un abierto no vacío, por lo que existe una bola abierta $B_{r_0}(x_0)$ tal que $B_{r_0}(x_0) \subseteq S \setminus \mathrm{cl}(A_0) \subseteq S \setminus A_0$. Supongamos que para $n<\omega$ tenemos definida la familia $\{B_{r_k}(x_k) \mid k \leqslant n\}$ que satisface las condiciones requeridas. Como A_{n+1} es denso en ninguna parte su cerradura tiene interior vacío, entonces $B_{r_n}(x_n)\setminus \mathrm{cl}(A_{n+1})$ es abierto y no vacío. Sea $x_{n+1} \in B_{r_n}(x_n) \setminus \mathrm{cl}(A_{n+1})$ y $r>0$ tal que $B_r(x_{n+1}) \subseteq B_{r_n}(x_n) \setminus \mathrm{cl}(A_{n+1})$ y definimos $r_{n+1} = \mathrm{mín}\left\{r, \frac{1}{n+1}\right\}$. Con esto queda definida la sucesión y en particular tenemos que

$$\mathrm{cl}(B_{r_n}(x_n)) \subseteq S \setminus A_n$$

Consideremos la sucesión $\langle x_n\rangle_{n<\omega}$, entonces para $i,j,n<\omega$ tales que $i,j \geqslant n$ tenemos que $x_i, x_j \in B_{r_n}(x_n)$ y por lo tanto

$$\rho(x_i,x_j) \leqslant \rho(x_i,x_n) + \rho(x_n,x_j) < 2r_n < \frac{2}{n+1}$$

por lo que la sucesión es de Cauchy. Como (X,ρ) es completo, existe $x \in X$ al cual converge la sucesión. Como $x_i \in \mathrm{cl}(B_{r_n}(x_n)$ para todo $i \geqslant n$, entonces $x \in \mathrm{cl}(B_{r_n}(x_n))$ para todo $n<\omega$ por lo que:

$$x \in \bigcap\{\mathrm{cl}(B_{r_n}) \mid n<\omega\} \subseteq \bigcap\{S \setminus A_n \mid n<\omega\} = S \setminus \bigcup\{A_n \mid n<\omega\} = S \setminus A,$$

es decir, $S \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ para todo S abierto no vacío y por lo tanto $X \setminus A$ es denso en X. $\square$

Motivados por el Teorema de Baire para espacios métricos completos se define la noción de espacio de Baire.

Definición 1.4.6. *Un espacio topológico se dice un espacio de Baire si el complemento de todo conjunto de primera categoría es denso. Más aun, en estos espacios el complemento de un conjunto de primera categoría es llamado residual.*

Teorema 1.4.7. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Baire si y solamente si todo abierto no vacío es de segunda categoría en X.*

Demostración. Sea $G \subseteq X$ un abierto no vacío de primera categoría, entonces $X \setminus G \subsetneq X$ es cerrado y por lo tanto no es denso, es decir, $(X, \mathcal{T})$ no es un espacio de Baire.

Por otra lado sea $P \subseteq X$ de primera categoría en X tal que $X \setminus P$ no es denso, entonces existe $G \subseteq X$ un abierto no vacío tal que $G \subseteq X \setminus (X \setminus P) = P$ y por lo tanto G es de primera categoría. □

Teorema 1.4.8. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio de Baire y $E \subseteq X$, entonces E es residual si y solamente si E contiene un subconjunto de X denso y de tipo $\mathcal{G}_\delta$.*

Demostración. Supongamos que $\{G_n \mid n < \omega\}$ es una familia de abiertos tales que

$$G = \bigcap \{G_n \mid n < \omega\} \subseteq E$$

y G es denso, entonces G_n es denso para todo $n < \omega$ y

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(X \setminus G_n)) = X \setminus \operatorname{cl}(\operatorname{int}(G_n)) = X \setminus \operatorname{cl}(G_n) = X \setminus X = \emptyset,$$

por lo que $X \setminus G_n$ es denso en ninguna parte. Como

$$X \setminus E \subseteq X \setminus G = \bigcup \{X \setminus G_n \mid n < \omega\}$$

se tiene que $X \setminus E$ es de primera categoría.

Por otro lado, si E es residual existe $\{A_n \mid n < \omega\}$ una familia de conjuntos densos en ninguna parte tal que

$$X \setminus E = \bigcup \{A_n \mid n < \omega\}.$$

Sea $G = \bigcap \{X \setminus \operatorname{cl}(A_n) \mid n < \omega\}$, entonces G es del tipo $\mathcal{G}_\delta$, $G \subseteq E$ y

$$X \setminus G = \bigcup \{\operatorname{cl}(A_n) \mid n < \omega\}$$

es de primera categoría. Como X es un espacio de Baire, G es denso al ser el complemento de un conjunto de primera categoría. □

Teorema 1.4.9. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio de Baire, $A \subseteq H \subseteq X$ tales que H es del tipo $\mathcal{G}_\delta$ y $H \setminus A$ es de primera categoría, entonces existe $B \subseteq A$ tal que $B \in \mathcal{G}_\delta$ y $H \setminus B$ es de primera categoría.*

Demostración. Sea $A_1 = A \cup (X \setminus H)$. Como $X \setminus A_1 \subseteq H \setminus A$ y $H \setminus A$ es de primera categoría tenemos que A_1 es residual y por lo tanto existe un subconjunto $F \subseteq X$ de primera categoría y del tipo $\mathcal{F}_\sigma$ tal que $X \setminus A_1 \subseteq F$. De esta manera $X \setminus F$ es un conjunto residual del tipo $\mathcal{G}_\delta$ tal que $X \setminus F \subseteq A_1$.

Sea $B = (X \setminus F) \cap H$, entonces B es del tipo $\mathcal{G}_\delta$ por ser intersección de dos conjuntos de este tipo y como $X \setminus F \subseteq A_1 = A \cup (X \setminus H)$ entonces:

$$B \subseteq H \cap (A \cup (X \setminus H)) = H \cap A = A.$$

Por último,

$$H \setminus B = H \setminus (H \cap (X \setminus F)) = H \cap F \subseteq F$$

y $X \setminus F$ es residual, es decir, F es de primera categoría y por lo tanto $H \setminus B$ es de primera cateogoría. $\square$

Los espacios de Baire son importantes ya que los conjunto que son abiertos y de primera categoría parecieran ser contradictorios pues por un lado los abiertos son conjuntos “grandes” para la topología mientras que los de primera categoría son conjuntos “pequeños”. Una patología de estos conjuntos se ve en el siguiente resultado.

Teorema 1.4.10 (Teorema de la Categoría de Banach). *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos abiertos de X tal que U es de primera categoría en X para toda $U \in \mathcal{U}$, entonces $\bigcup \mathcal{U}$ es de primera categoría en X.*

Demostración. Sea

$$\mathscr{P} = \left\{ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} \;\middle|\; \begin{array}{l} i) \text{ Para todo } F \in \mathcal{F} \text{ existe } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } F \subseteq U; \\ ii) \text{ Para todo } F, G \in \mathcal{F} \text{ se tiene que } F \cap G = \emptyset. \end{array} \right\}$$

Esta clase no es vacía pues contiene a los singuletes de $\mathcal{U}$. Además para toda cadena $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}$ es claro que $\bigcup \mathscr{C} \in \mathscr{P}$ y además esta es cota superior de $\mathscr{C}$. Por el Lema de Zorn existe $\mathcal{F} \in \mathscr{P}$ maximal.

Supongamos que el conjunto $\mathrm{cl}\left(\bigcup\mathcal{U}\right)\setminus\bigcup\mathcal{F}$ no es denso en ninguna parte en X. Como $\mathrm{cl}\left(\bigcup\mathcal{U}\right)\setminus\bigcup\mathcal{F}$ es cerrado, entonces:

$$V = \mathrm{int}\left(\mathrm{cl}\left(\bigcup\mathcal{U}\right)\setminus\bigcup\mathcal{F}\right)\neq\emptyset.$$

Sea $x\in V\subseteq\mathrm{cl}\left(\bigcup\mathcal{U}\right)$, entonces, como V es vecindad de x, se tiene que:

$$\emptyset\neq V\cap\left(\bigcup\mathcal{U}\right)=\bigcup\{U\cap V\mid U\in\mathcal{U}\}$$

por lo que existe $U_0\in\mathcal{U}$ tal que $V\cap U_0\neq\emptyset$. Dicho de otra manera existe un abierto $W=V\cap U_0\neq\emptyset$ tal que $W\subseteq U$ para alguna $U\in\mathcal{U}$ y

$$W\cap F\subseteq W\cap\bigcup\mathcal{F}\subseteq V\cap\bigcup\mathcal{F}\subseteq\left(\mathrm{cl}\left(\bigcup\mathcal{U}\right)\setminus\bigcup\mathcal{F}\right)\cap\bigcup\mathcal{F}=\emptyset$$

por lo cual la familia $\mathcal{F}\cup\{W\}$ esta en $\mathscr{P}$, lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{F}$.

Por otro lado, para toda $F\in\mathcal{F}$ existe $U\in\mathcal{U}$ tal que $F\subseteq U$, $\mathcal{F}$ es una colección de conjuntos abiertos no vacíos, ajenos y de primera categoría, por lo que existen colecciones, para cada $F\in\mathcal{F}$, de subconjuntos densos en ninguna parte $\left\{N_n^F \mid n<\omega\right\}$ tales que:

$$V_F=\bigcup\left\{N_n^F \mid n<\omega\right\}$$

para todo $F\in\mathcal{F}$. Sea $n<\omega$ y definimos

$$N_n=\bigcup\left\{N_n^F \mid F\in\mathcal{F}\right\}.$$

Si un abierto V interseca a N_n, entonces interseca a algun N_n^F el cual es denso en ninguna parte, y como $V\cap F$ es abierto, existe un abierto W contenido en:

$$(V\cap F)\setminus N_n^F\subseteq V\setminus N_n^F\subseteq V\setminus N_n$$

pues como la familia $\mathcal{F}$ es ajena, también lo es la familia $\left\{N_n^F \mid F\in\mathcal{F}\right\}$ y por lo tanto N_n es denso en ninguna parte en X para toda $n<\omega$.

Por útlimo observemos que

$$\bigcup\mathcal{U}\subseteq\left(\mathrm{cl}\left(\bigcup\mathcal{U}\right)\setminus\bigcup\mathcal{F}\right)\cup\bigcup\{N_n\mid n<\omega\}$$

es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte por lo que $\bigcup\mathcal{U}$ es de primera categoría en X. □

Propiedad de Baire

Hemos visto que $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(X)$, la familia de todos los conjuntos de primera categoría en X, forman un σ-ideal de anillos al igual que los conjuntos nulos de un espacio de medida. Recordemos que en el caso real una caracterización de los conjuntos Lebesgue medibles es que estos son precisamente la σ-álgebra generada por los abiertos y los conjuntos nulos por lo que resulta natural estudiar a la σ-álgebra generada por los abiertos y los conjuntos de primera categoría. En esta sección probaremos que estos coinciden con aquellos que tienen la propiedad de Baire.

Definición 1.4.11. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que $A \subseteq X$ tiene la propiedad de Baire si existen $G, P \subseteq X$, G abierto y P de primera categoría en X tales que $A = G \triangle P$.*

Esta descripción no tiene por que ser única, de hecho el conjunto abierto en la definición puede cambiarse por un conjunto cerrado.

Teorema 1.4.12. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces A tiene la propiedad de Baire si y solamente si existen $C, P \subseteq X$, C cerrado y P de primera categoría en X tales que $A = C \triangle P$.*

Demostración. Si A tiene la propiedad de Baire existen G abierto y P de primera categoría en X tales que $A = G \triangle P$. Como todo abierto contenido en $\mathrm{cl}(G)$ debe intersectar a G tenemos que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(G) \setminus G)$ es vacío y como $\mathrm{cl}(G) \setminus G$ es cerrado, es denso en ninguna parte en X. Sea $N = \mathrm{cl}(G) \setminus G$ y $Q = N \triangle P \subseteq N \cup P$, entonces Q es de primera categoría. Sea $F = \mathrm{cl}(G)$, entonces

$$A = G \triangle P = (\mathrm{cl}(G) \triangle (\mathrm{cl}(G) \setminus G)) \triangle P = (F \triangle N) \triangle P = F \triangle (N \triangle P) = F \triangle Q$$

Por otro lado si $A = F \triangle Q$ con F cerrado y P de primera categoría en X, entonces $N = F \setminus \mathrm{int}(F)$ es cerrado y tiene interior vacío, por lo que N es denso en ninguna parte en X y $P = N \triangle Q$ es de primera categoría en X. Sea $G = \mathrm{int}(F)$, entonces

$$A = F \triangle Q = (\mathrm{int}(F) \triangle (F \setminus \mathrm{int}(F))) \triangle Q = (G \triangle N) \triangle Q = G \triangle (N \triangle Q) = G \triangle P$$

□

Definición 1.4.13. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, denotaremos por $\mathcal{B}_{\tau}(X)$ a la familia de subconjuntos de X con la propiedad de Baire.*

Teorema 1.4.14. *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, entonces $\mathcal{B}_\tau(X)$ es una σ-álgebra. Más aun, esta coincide con la σ-álgebra generada por los abiertos y los conjuntos de primera categoría.*

Demostración. Sea $P \subseteq X$ de primera categoría en X, entonces $P = \emptyset \triangle P$ y como $\emptyset$ es abierto $P \in \mathcal{B}_\tau(X)$, es decir, $\mathcal{K}_\mathcal{T}(X) \subseteq \mathcal{B}_\tau(X)$.

Si $G \subseteq X$ es abierto, entonces $G = G \triangle \emptyset$ y $\emptyset$ es de primera categoría $G \in \mathcal{B}_\tau(X)$, es decir, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}_\tau(X)$. En particular tenemos que $\emptyset, X \in \mathcal{B}_\tau(X)$.

Sean $A \in \mathcal{B}_\tau(X)$ y $G, P \subseteq X$ abierto y de primera categoría en X respectivamente tales que $A = G \triangle P$, entonces $X \setminus A = X \setminus (G \triangle P) = (X \setminus G) \triangle P$ y por el Teorema 1.4.12 $X \setminus A \in \mathcal{B}_\tau(X)$.

Sea $\{A_n \mid n < \omega\} \subseteq \mathcal{B}_\tau(X)$ y sean $\{G_n \mid n < \omega\} \subseteq \mathcal{T}, \{P_n \mid n < \omega\} \subseteq \mathcal{K}_\mathcal{T}(X)$ tales que $A_n = G_n \triangle P_n$ para todo $n < \omega$. Sea $G = \bigcup\{G_n \mid n < \omega\}$, $P = \bigcup\{P_n \mid n < \omega\}$ y $A = \bigcup\{A_n \mid n < \omega\}$, entonces G es abierto, P es de primera categoría y

$$G \setminus P \subseteq A \subseteq G \cup P.$$

Esto implica que $G \triangle A \subseteq P$, por lo que $G \triangle A$ es de primera categoría y como

$$A = \emptyset \triangle A = (G \triangle G) \triangle A = G \triangle (G \triangle A)$$

se tiene que A tiene la propiedad de Baire, es decir, $A \in \mathcal{B}_\tau(X)$.

Con esto tenemos que $\mathcal{B}_\tau(X)$ es una σ-álgebra que contiene a los conjuntos abiertos y a los de primera categoría por lo que contiene a la σ-álgebra generada por estos. Por otro lado todo conjunto de primera categoría es la diferencia simétrica de un conjunto abierto y uno de primera categoría y esta diferencia simétrica se queda en la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos y los de primera categoría. Esto prueba que $\mathcal{B}_\tau(X)$ coincide con la σ-álgebra generada por los abiertos y los conjuntos de primera categoría. □

Este Teorema resalta la analogía que hay entre los conjuntos medibles y los conjuntos con la Propiedad de Baire. Con estas analogías en mente tenemos la siguiente definicón para funciones.

Definición 1.4.15. *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$. Se dice que f tiene la propiedad de Baire si $f^{-1}[B] \in \mathcal{B}_\tau(X)$ para todo $B \in \mathscr{B}_\tau(\mathbb{R})$.*

Teorema de Banach-Kuratowski-Pettis

Motivados por las analogías entre medida y categoría el objetivo de esta sección es probar un resultado análogo al Teorema de Steinhaus (Teorema 1.2.16). Recordemos que este Teorema fue probado en el contexto de grupos topológicos y medidas de Haar, por lo que el contexto para este análogo son los grupos topológicos.

Lema 1.4.16. *En un grupo topológico de segunda categoría sus subconjuntos abiertos no vacíos son de segunda categoría.*

Demostración. Sea U un abierto no vacío de primera categoría del grupo topológico G y $h \in U$ fijo. Entonces para todo $g \in G$, $gh^{-1}h = g$ es decir $g \in gh^{-1}U$ por lo cual:

$$G = \bigcup \{gU \mid g \in G\}$$

Como U es abierto y de primera categoría, gU también lo es para todo $g \in G$, entonces por el Teorema de la categoría de Banach(Teorema 1.4.10), $\bigcup \{gU \mid g \in G\}$ también es de primera categoría, es decir, G es de primera categoría. □

En virtud de el Teorema 1.4.7 el resultado anterior nos dice que los grupos topológicos de segunda categoría son espacios de Baire.

Teorema 1.4.17 (Teorema de Banach-Kuratowski-Pettis). *Sea $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico y $A, B \subseteq G$ con la propiedad de Baire. Si A y B no son de primera categoría, entonces el conjunto BA tiene interior no vacío y en particular el conjunto AA^{-1} es vecindad del elemento neutro en G.*

Demostración. Como A es de segunda categoría, G también lo es. Además A y B tienen la propiedad de Baire por lo que existen U_1, U_2 abiertos no vacíos y F_1, F_2 de primera categoría, tales que $A = U_1 \triangle F_1$ y $B = U_2 \triangle F_2$. Veamos que el abierto U_1U_2, se queda contenido en BA. Sea $x \in U_1U_2$, entonces:

$$(xU_1^{-1} \cap U_2) \setminus (xF_1^{-1} \cup F_2) \subseteq (xA^{-1} \cap B)$$

y $xU_1^{-1} \cap U_2$ es un abierto no vacío, en un grupo topológico de segunda categoría, y $xF_1^{-1} \cup F_2$ es de primera categoría, entonces por el Lema 1.4.16

$$(xU_1^{-1} \cap U_1) \setminus (xF_1^{-1} \cup F_2) \neq \emptyset.$$

Sea $y \in xA^{-1} \cap B$, entonces existe $z \in A^{-1}$ tal que $y = xz$ o equivalentemente $x = yz^{-1} \in BA$, por lo que $U_1U_2 \subseteq BA$. Para el caso $B = A^{-1}$ podemos elegir $U_2 = U_1^{-1}$ de lo que se sigue que AA^{-1} es vecindad del neutro. □

1.5. Conjuntos de Vitali y la propiedad de Baire

En la sección anterior hemos vistos las analogías que existen entre medida y categoría, en particular el de medibilidad y tener la propiedad de Baire, por lo que es natural cuestionarse sobre la existencia de conjuntos sin la propiedad de Baire.

Las analogías vistas entre medida y categoría nos hacen preguntarnos sobre la existencia de conjuntos sin la propiedad de Baire.

Teorema 1.5.1. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un grupo topológico de segunda categoría y $\Gamma \subseteq X$ un subgrupo a lo más numerable el cual no es discreto. Si V es un conjunto de Vitali para Γ, entonces V no tiene la propiedad de Baire.*

Demostración. Sea V un conjunto de Vitali para Γ y procedamos por reducción al absurdo suponiendo que V que tiene la propiedad de Baire en $(X, \mathcal{T})$. Como $\operatorname{card}(\Gamma) \leq \omega$ y $(X, \mathcal{T})$ es de segunda categoría, de la identidad

$$X = \bigcup \{gV \mid g \in \Gamma\}$$

se concluye que gV no es de primera categoría para algún $g \in \Gamma$ y por lo tanto, como V es homeomorfo a gV, V es de segunda categoría. Por el Teorema 1.4.17 existe una vecindad del neutro U tal que:

$$U \subseteq VV^{-1} = \left\{yz^{-1} \,\middle|\, y \in V, z \in V\right\}.$$

Como Γ no es discreto y $e \in \Gamma$, existe $h \in (\Gamma \cap (U \setminus \{e\}))$. Más aun,

$$(\Gamma \cap (U \setminus \{e\})) \subseteq U \subseteq VV^{-1},$$

por lo cual existen $x, y \in V$ tales que $xy^{-1} = h$, es decir, $x \sim_\Gamma y$, pero ambos pertenecen a V el cual es un conjunto de Vitali por lo que $x = y$ y por lo tanto $h = e$, una contradicción. $\square$

En particular obtenemos que existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ los cuales no tienen la propiedad de Baire.

Otros conjuntos

Cabe resaltar que la prueba del teorema de Vitali esta basada fuertemente en el Axioma de Elección. De hecho se sabe, por un resultado de Solovay [28], que la existencia de conjuntos no Lebesgue medibles no se puede probar, en **ZF**, con una versión numerable del Axioma de Elección. En particular no se puede probar en la teoría **ZF** & **DC**, donde **DC** es el Axioma de Elecciones Dependientes, el cual es suficiente para el desarrollo de gran parte del Análisis. De hecho este enunciado es equivalente al Teorema de Baire para espacios métricos completos (ver [3]).

Axioma de Elecciones Dependientes (DC). *Sea X un conjunto no vacío y $R \subseteq X \times X$ de tal manera que para todo $x \in X$ existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in R$. Entonces existe un conjunto $\{x_n \mid n < \omega\} \subseteq X$ tal que $(x_n, x_{n+1}) \in R$ para todo $n < \omega$.*

Ahora veremos bajo que condiciones podemos encontrar subconjuntos no Lebesgue medibles en la teoría **ZF** & **DC**. Notemos que el argumento en la siguiente demostración, atribuido a Banach, no utiliza ninguna forma del Axioma de Elección, por lo cual es un resultado de la teoría **ZF**.

Teorema 1.5.2. *Sean A y B dos conjuntos, $f : A \to B$ y $g : B \to A$ dos funciones inyectivas. Entonces existen conjuntos A_1, A_2, B_1, B_2 que satisfacen las siguientes condiciones:*

i) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 = A$;

ii) $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \cup B_2 = B$;

iii) $f|_{A_1}$ *es una biyección entre* A_1 *y* B_1;

iv) $g|_{B_2}$ *es una biyección entre* B_2 *y* A_2.

En particular podemos definir una biyección entre los conjuntos A y B.

Demostración. Definamos una función entre subconjuntos de A:

$$\phi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \qquad C \longmapsto A \setminus (g\,[B \setminus f\,[C]])$$

Donde:

$$f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B) \qquad f[C] = \{f(x) \in B \mid x \in C\}$$

y

$$f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A) \qquad f^{-1}[C] = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$$

Como f y g son inyectivas tenemos que para toda familia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$:

$$\begin{aligned}
\phi\left[\bigcup \mathcal{C}\right] &= A \setminus \left(g\left[B \setminus f\left[\bigcup \mathcal{C}\right]\right]\right) \\
&= A \setminus \left(g\left[B \setminus \bigcup \{f[C] \mid C \in \mathcal{C}\}\right]\right) \\
&= A \setminus \left(\bigcap \{g[B \setminus f[C]] \mid C \in \mathcal{C}\}\right) \\
&= \bigcup \{A \setminus (g[B \setminus f[C]]) \mid C \in \mathcal{C}\} \\
&= \bigcup \{\phi[C] \mid C \in \mathcal{C}\}
\end{aligned}$$

Definamos:

$$C = \bigcup \{\phi^n[\emptyset] \mid n < \omega\} = \emptyset \cup \phi[\emptyset] \cup \phi^2[\emptyset] \cdots ,$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\phi[C] &= \bigcup \left\{\phi^{n+1}[\emptyset] \;\middle|\; n < \omega\right\} \\
&= \phi[\emptyset] \cup \phi^2[\emptyset] \cup \phi^3[\emptyset] \cdots \\
&= \emptyset \cup \phi[\emptyset] \cup \phi^2[\emptyset] \cup \phi^3[\emptyset] \cdots \\
&= \bigcup \{\phi^n[\emptyset] \mid n < \omega\} \\
&= C
\end{aligned}$$

Es decir:

$$C = A \setminus (g[B \setminus f[C]]) \text{ y } A \setminus C = g[B \setminus f[C]] .$$

Sean:

$$A_1 = C, A_2 = A \setminus C, B_1 = f[C], B_2 = B \setminus f[C] .$$

Como:

$$A_2 = g(B \setminus f(C))$$

es claro que estos conjuntos cumplen las condiciones requeridas. □

El siguiente teorema, también conocido como el teorema del matrimonio, esta basado en el Axioma de Elección al requerir el Teorema de Tychonoff, el cual se enuncia a continuación.

Teorema de Tychonoff. *El producto topológico de cualquier familia* $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ *de espacios topológicos compactos es un espacio topológico compacto.*

Teorema 1.5.3 (Teorema del Matrimonio de Hall). *Sean A y B conjuntos y $F : A \to \mathcal{P}(B)$ que satisface las siguientes condiciones:*

i) $F(a)$ es finito para todo $a \in A$;

ii) Si $X \subseteq A$ finito, entonces $\operatorname{card}(X) \leqslant \operatorname{card}\left(\bigcup \{F(x) \mid x \in X\}\right)$.

Entonces existe $f : A \to B$ inyectiva tal que $f(a) \in F(a)$ para todo $a \in A$

Demostración. La demostración cuando A es finito es un sencillo procedimiento de inducción. Asi que supongamos cierto el teorema cuando A es finito.

Supongamos que el conjunto A es infinito y para cada $a \in A$ dotemos con la topología discreta, $\tau_a = \mathcal{P}(F(a))$, a cada conjunto finito $F(a)$, con lo cual cada espacio topológico $\{(F(a), \tau_a)\}_{a \in A}$ es compacto. Por el teorema de Tychonoff el espacio topológico $\left(\prod_{a \in A} F(a), \tau_p\right)$, con τ_p la topología producto, es un espacio topológico compacto.

Para cada $G \subseteq A$ sea

$$S_G = \left\{ f \in \prod_{a \in A} F(a) \;\middle|\; f|_G \text{ es inyectiva} \right\}.$$

Veamos que $S_G \neq \emptyset$ para cualquier $G \subseteq A$ finito. Es claro que $F|_G : G \to \mathcal{P}(B)$ cumple las hipótesis del teorema con G finito, por lo que existe $g : G \to B$ inyectiva de forma que $g(a) \in F|_G(a) = F(a)$ para todo $a \in G$. Utilizando el Axioma de Elección podemos extender g a una función

$$f \in \prod_{a \in A} F(a).$$

Entonces como $f|_G = g$ se concluye que $f \in S_G$, es decir, $S_G \neq \emptyset$.

Por otro lado sea $f \in \prod_{a \in A} F(a) \setminus S_G$, entonces existen $a_1, a_2 \in G$ distintos de manera que $f(a_1) = f(a_2)$. Sea:

$$U = \rho_{a_1}^{-1}\left(\{f(a_1)\}\right) \cap \rho_{a_2}^{-1}\left(\{f(a_2)\}\right),$$

el cual es una básico en τ_p ya que los factores tienen la topología discreta y $f \in U$. Para toda $g \in U$

$$g|_G(a_i) \in \{f(a_i)\} \text{ para } i \in \{1, 2\} \text{ y } f(a_1) = f(a_2),$$

entonces $g|_G(a_1) = g|_G(a_2)$ y $a_1 \neq a_2$, es decir $g \notin S_G$ para toda $g \in U$, por lo cual S_G es cerrado.

Si $f|_{G_1 \cup G_2}$ es inyectiva entonces $f|_{G_1}$ y $f|_{G_2}$ son inyectivas, por lo que

$$S_{G_1 \cup G_2} \subseteq S_{G_1} \cap S_{G_2}.$$

Por lo anterior $\mathcal{F} = \{S_G \mid G \subseteq A \text{ finito}\}$ es una familia centrada de conjuntos cerrados no vacíos. Por la compacidad existe $f \in \bigcap \mathcal{F}$. Como $F(a) \subseteq B$, la podemos considerar como una función $f : A \to B$ tal que $f(a) \in F(a)$.

Solo falta ver que f es inyectiva. Sean $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, entonces $\{a_1, a_2\} \subseteq A$ es finito, por lo que $f \in S_{\{a_1,a_2\}}$, es decir $f|_{\{a_1,a_2\}}$ es inyectiva, y

$$f(a_1) = f|_{\{a_1,a_2\}}(a_1) \neq f|_{\{a_1,a_2\}}(a_2) = f(a_2),$$

por lo tanto f es inyectiva. □

Definición 1.5.4. *Sean $n < \omega$, A y B conjuntos y $G \subseteq A \times B$. Se dice que G es una $(n - n)$-correspondencia entre A y B si se satisface:*

i) card $(\{b \in B \mid (a, b) \in G\}) = n$ para todo $a \in A$

ii) card $(\{a \in A \mid (a, b) \in G\}) = n$ para todo $b \in B$

Teorema 1.5.5. *Sea $0 < n < \omega$, A y B conjuntos y G una $(n-n)$-correspondencia entre A y B. Entonces existe una biyección $h : A \to B$ de tal manera que la gráfica de h esta contenida en G.*

Demostración. Definimos dos funciones:

$$\begin{aligned} F : A \to \mathcal{P}(B) \qquad & a \mapsto \{b \in B \mid (a, b) \in G\} \\ H : B \to \mathcal{P}(A) \qquad & b \mapsto \{a \in A \mid (a, b) \in G\} \end{aligned}$$

Es claro que estas funciones satisfacen las hipótesis del Teorema 1.5.3, por lo cual existen funciones inyectivas $f : A \to B$ y $h : B \to A$ tales que $f(a) \in F(a)$ y $h(b) \in H(b)$ para todo $a \in A$, $b \in B$. Por el Teorema 1.5.2, existen $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ tales que $f|_{A_1} : A_1 \to B_1$ y $h|_{B \setminus B_1} : B \setminus B_1 \to A \setminus A_1$ son biyectivas.
Definamos $g : A \to B$ como $g(a) = f(a)$ si $a \in A_1$ ó $g(a) = h^{-1}(a)$ si $a \in B \setminus B_1$. Entonces g es biyectiva.

Por útlimo veamos que la gráfica de g esta contenida en G. Si $a \in A_1$, $g(a) = f(a) \in F(a) = \{b \in B \mid (a,b) \in G\}$ por lo que $(a, g(a)) \in G$.
Si $a \in A \setminus A_1$, $g(a) = h^{-1}(a)$, $a = h(g(a)) \in H(g(a)) = \{a' \in A \mid (a', g(a)) \in G\}$, por lo cuál $(a, g(a)) \in G$.
En cualquier caso para $a \in A$, $(a, g(a)) \in G$, es decir, $\text{graf}(g) \subseteq G$. □

Teorema 1.5.6. *En **ZF** & **DC**, el Teorema 1.5.5 implica la existencia de una función la cual no es Lebesgue medible.*

Demostración. Sea $\{V_i \mid i \in I\}$ la particíon de Vitali de $\mathbb{R}$, recordemos que $\mathbb{Q}$ es un elemento de esta partición. Sea $\{W_i \mid i \in I\} = \{V_i \mid i \in I\} \setminus \{\mathbb{Q}\}$

Veamos que para toda $j \in I$ se cumple que $-W_j \in \{W_i \mid i \in I\}$ y $-W_j \neq W_j$. Sea $x \in -W_j$ fijo entonces $-x \in W_j$. Vemos que $y \in -W_j$ si y solo si $-y \in W_j$ si y solo si $-y \sim_{\mathbb{Q}} -x$ si y solo si $-y - (-x) = x - y \in \mathbb{Q}$ si y solo si $x \sim_{\mathbb{Q}} y$. Por esto $-W_j$ es una clase de equivalencia módulo $\sim_{\mathbb{Q}}$, por lo que $-W_j \in \{W_i \mid i \in I\}$. Supongamos que $-W_j \cap W_j \neq \emptyset$, entonces por ser elementos de una partición son iguales por lo que $-x, x \in W_j$ y $2x = x - (-x) \in \mathbb{Q}$ por lo cual $x \in \mathbb{Q}$ y como $\mathbb{Q}$ también es parte de la particion $\{V_i \mid i \in I\}$ se tendria que $W_j = \mathbb{Q}$, una contradicción. De esta manera si $i, j \in I$ y $-W_i \cup W_i = -W_j \cup W_j$, entonces $W_i = W_j$ o $W_i = -W_j$.

Definamos los siguiente conjuntos:

$$A = \{W_i \mid i \in I\} \qquad B = \{-W_j \cup W_j \cup \{t\} \mid j \in I, t \in \{0,1\}\}$$

y definamos una relación G entre A y B definida para cada $W_i \in A$ por:

$$G(W_i) = \{-W_i \cup W_i \cup \{t\} \mid t \in \{0,1\}\}$$

Entonces para $-W_i \cup W_i \cup \{t\} \in B$ se satisface:

$$G^{-1}(-W_i \cup W_i \cup \{t\}) = \{-W_i, W_i\}$$

por lo que G es una $(2-2)$-correspondencia.

Supongamos valido el Teorema 1.5.5, entonces existe una biyección $g : A \to B$ cuya gráfica se queda contenida en G, es decir, para toda $i \in I$ existe $t_i \in \{0,1\}$ tal que $g(W_i) = -W_i \cup W_i \cup \{t_i\}$. Definamos una función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue. Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existe un único $i \in I$ tal que $x \in W_i$, hagamos $\phi(x) = t_i$ donde $t_i \in \{0,1\}$ es tal que $g(W_i) = -W_i \cup W_i \cup \{t_i\}$. Si $x \in \mathbb{Q}$ hagamos $\phi(x) = 0$.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se cumple $x + q \sim_{\mathbb{Q}} x$, entonces $x + q, x \in W_i$ para alguna $i \in I$, por lo que por definición de g, $\phi(x + q) = \phi(x)$. Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $x + q \in \mathbb{Q}$ y $\phi(x) = 0 = \phi(x+q)$. Por lo tanto $\phi(x+q) = \phi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Q}$, es decir, ϕ es $\mathbb{Q}$-invariante.

Vemoas que para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se tiene la igualdad $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$. Si $x \in W_i$, entonces $-x \in -W_i$ y dado que $-W_i \neq W_i$, $-W_i \in A$ y g es biyectiva:

$$\begin{aligned} -W_i \cup W_i \cup \{\phi(x)\} = g(W_i) \neq g(-W_i) &= -(-W_i) \cup -W_i \cup \{\phi(-x)\} \\ &= -W_i \cap W_i \cap \{\phi(-x)\} \end{aligned}$$

por lo que $\phi(x) \neq \phi(-x)$, y como ϕ toma valores en $\{0, 1\}$, $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$.

Supongamos por un momento que ϕ es Lebesgue medible. Como λ es métrica transitiva (Teorema 1.2.19), se satisface que cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue medible y $\mathbb{Q}$-invariante, es constante c.d. rel. a λ (Teorema 1.2.20). Por lo cual ϕ es constante c.d. rel λ y además $\mathrm{Im}(\phi) = \{0, 1\}$. Asumamos que $\phi = t$ c.d. rel. λ, $t \in \{0, 1\}$, entonces el conjunto

$$C = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid \phi(x) \neq t\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid \phi(x) = 1 - t\}$$

es λ-nulo, por lo que $\lambda(-C) = 0$, pues λ es invariante bajo isometrías, pero $\phi(-c) = 1 - \phi(c) = t$ para toda $c \in C$, por lo que tendríamos la siguiente descomposición de $\mathbb{R}$ en conjuntos nulos,

$$\mathbb{R} = -C \cup C \cup \mathbb{Q}$$

y tendríamos el absurdo de que $\mathbb{R}$ es λ-nulo y por lo tanto ϕ no es Lebesgue medible. □

Definición 1.5.7. *Se dice que una partición de $\mathbb{R}$ es λ-medible si existe una función Lebesgue medible $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(y)$ si y solo si tanto x como y estan en el mismo elemento de la partición.*

Teorema 1.5.8. *La partición de Vitali de $\mathbb{R}$ no es λ-medible.*

Demostración. Sea $\{V_i \mid i \in I\}$ la partición de Vitali y supongamos que existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue medible tal que $f|_{V_i}(x) = c_i$ para toda $x \in V_i$ y $c_i \neq c_j$ si $i \neq j$, $i, j \in I$.

Como para toda $x \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Q}$ se tiene que $x + q - x \in \mathbb{Q}$ entonces, por definición de la partición de Vitali, $x + q$ y x estan en el mismo elemento de la partición, por lo tanto $f(x+q) = f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y toda $q \in \mathbb{Q}$. Por el Teorema 1.2.20 f es constante c.d. rel. λ, es decir, existe $i \in I$ tal que

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq c_i\}) = 0.$$

Como para toda $j \in I,\ j \neq i,\ x \in V_j$ se tiene que $f|_{V_j}(x) = c_j \neq c_i$, entonces

$$V_j \subset \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq c_i\}$$

para toda $j \in I \setminus \{i\}$ por lo cual:

$$\bigcup \{V_j \mid j \in J \setminus \{i\}\} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq c_i\},$$

el cual es λ-nulo y como V_i es numerable $\lambda(V_i) = 0$.

Por otro lado,

$$\mathbb{R} = \bigcup \{V_i \mid i \in I\} = \bigcup \{V_j \mid j \in I \setminus \{i\}\} \cup V_i,$$

por lo que $\mathbb{R}$ es union de dos subconjuntos λ-nulos y por lo tanto λ-nulo, un absurdo. Por lo tanto no existe tal función que haga a $\{V_i \mid i \in I\}$ una partición medible. $\square$

2 | Conjuntos de Bernstein

Este capítulo esta dedicado a la segunda clase más conocida de conjuntos no Lebesgue medibles. Esta construcción, debida a Bernstein [2], nos proporciona también ejemplos de conjuntos sin la propiedad de Baire. Por supuesto esta construcción esta basada en una forma de el Axioma de Elección, el que la familia de todos los subconjuntos cerrados y no numerables de $\mathbb{R}$ tiene un buen orden.

Definición 2.0.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $E \subseteq X$. Se dice que E es totalmente imperfecto en X si E no contiene ningún subconjunto perfecto no vacío de X. Más aun, se dice que E es de Bernstein si E y $X \setminus E$ son totalmente imperfectos en X.*

Es claro de la definición que un conjunto es de Bernstein si y solo si tanto el como su complemento intersectan a cualquier conjunto perfecto no vacío. Además, por la simetría de la definición un conjunto es de Bernstein si y solo si su complemento es de Bernstein. Por otro lado es claro que ser un conjunto de Bernstein es una propiedad topológica, es decir, se preserva bajo homeomorfismos.

Para el estudio de estos conjuntos, aun en el caso real, es necesario el uso de resultados concernientes a espacios Polacos. De hecho algunas de estas construcciones pueden generalizarse del caso real a espacios Polacos en general. Por esto se recomienda al lector no familiarizado con estos espacios consultar antes la sección 2.3 en donde se incluye el desarrollo de la teoría necesaria para este capítulo.

2.1. Conjuntos de Bernstein en $\mathbb{R}$

Como cualquier subconjunto perfecto de un espacio Polaco tiene cardinalidad del continuo (Teorema 2.3.12) cualquier subconjuto de un espacio Polaco con cardinalidad estrictamente menor que la del continuo es totalmente imperfecto, por lo que la verdadera interrogante es sobre la existencia de conjuntos totalmente imperfectos con cardinalidad del continuo, el cual resulta ser un resultado nada trivial y que para su demostración requerimos formas no numerables del Axioma de Elección.

Como primer paso presentamos la contrucción de Bernstein en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.1. *Existen subconjuntos en $\mathbb{R}$ de Bernstein. Más aun cualquier subconjunto de Bernstein no es Lebesgue medible ni tiene la propiedad de Baire.*

Demostración. Bajo el Axioma de Elección sea α el primer ordinal con cardinalidad del continuo. Sea $\mathscr{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la familia de todos los subconjuntos perfectos no vacíos de $\mathbb{R}$. Como $(-\infty, x] \in \mathscr{P}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\mathfrak{c} \leqslant \operatorname{card}(\mathscr{P})$. Por otro lado, todo subconjunto perfecto es cerrado y $\mathcal{T}$, la topología usual de $\mathbb{R}$, es segundo numerable. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable, entonces

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} \,\middle|\, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B} \right\},$$

es decir,

$$\operatorname{card}(\mathcal{T}) \leqslant \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathcal{B})) = 2^{\operatorname{card}(\mathcal{B})} = \mathfrak{c}.$$

Como la cardinalidad de la familia de todos los conjuntos cerrados es la misma que la de la topología entonces, $\operatorname{card}(\mathscr{P}) \leqslant \mathfrak{c}$. Por el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein $\operatorname{card}(\mathscr{P}) = \mathfrak{c}$.

Por lo anterior podemos considerar que α bien ordena a la familia $\mathscr{P}$, es decir,

$$\mathscr{P} = \{P_\xi \mid \xi < \alpha\}.$$

Utilizaremos inducción transfinita para construir α-sucesiónes inyectivas $\langle x_\xi \rangle_{\xi<\alpha}$, $\langle y_\xi \rangle_{\xi<\alpha}$ tales que $x_\xi, y_\xi \in P_\xi$ y $x_\xi \neq y_\xi$ para todo $\xi < \alpha$. Supongamos que para $\beta < \alpha$ tenemos definidas las β-sucesiónes $\langle x_\xi \rangle_{\xi<\beta}, \langle y_\xi \rangle_{\xi<\beta}$. Como $\operatorname{card}(P_\beta) = \mathfrak{c}$ (Teorema 2.3.12) y $\operatorname{card}(\beta) < \operatorname{card}(\alpha) = \mathfrak{c}$, entonces

$$\operatorname{card}(P_\beta \setminus (\{x_\xi \mid \xi < \beta\} \cup \{y_\xi \mid \xi < \beta\})) = \mathfrak{c},$$

por lo que podemos elegir $x, y \in P_\beta \setminus (\{x_\xi \mid \xi < \beta\} \cup \{y_\xi \mid \xi < \beta\})$ distintos y hacer $x_\beta = x$ y $y_\beta = y$. De esta manera tenemos definidas las α-sucesiónes requeridas. Definamos $B = \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$, entonces se sigue de la construcción que $B \subseteq \mathbb{R}$ es de Bernstein.

Ahora sea $B \subseteq \mathbb{R}$ de Bernstein y supongamos que es Lebesgue medible, entonces $\mathbb{R} \setminus B$, que también es de Bernstein, es Lebesgue medible y alguno de ellos tiene medida positiva, sin perdida de generalidad supongamos que $\lambda(B) > 0$. Entonces por regularidad de la medida de Lebesgue existe $F \subseteq B$ cerrado con $\lambda(F) > 0$ y por lo tanto $\mathrm{card}(F) > \omega$. Por el Teorema de Alexandroff (Teorema 2.3.4) F es un espacio Polaco no numerable y por el Teorema de Cantor-Bendixon (Teorema 2.3.25) el conjunto $F^\bullet \subseteq F \subseteq B$ de puntos de condensación de F es perfecto y no vacío, lo cual contradice que B sea de Bernstein.

Por otro lado supongamos que B tiene la propiedad de Baire, entonces $\mathbb{R} \setminus X$ tambien la tiene y alguno de ellos no es de primera categoría. Supongamos que B no es de primera categoría, entonces existen $V, Y \subseteq \mathbb{R}$, V abierto no vacío y Y de primera categoría tales que

$$B = V \triangle Y = (V \setminus Y) \cup (Y \setminus V).$$

Sean $\{N_n \mid n < \omega\}$ conjuntos densos en ninguna parte tales que:

$$Y = \bigcup \{N_n \mid n < \omega\}.$$

Por el Teorema de Baire (Teorema 1.4.5) y el Lema 1.4.16 V es de segunda categoría. Entonces

$$G = V \setminus \bigcup \{cl_X(N_n) \mid n < \omega\} = \bigcap \{V \setminus \mathrm{cl}_X(N_n) \mid n < \omega\}$$

es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$ de segunda categoría y por lo tanto no numerable. Por el Teorema de Alexandroff (Teorema 2.3.4), G es un espacio Polaco no numerable. Más aun, por el Teorema 2.3.26, G contiene un subconjunto homeomorfo a 2^ω, el cual es perfecto. Como $G \subseteq V \setminus Y \subseteq B$ esto contradice que B sea de Bernstein. $\square$

Teorema 2.1.2. *Si $B \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto de Bernstein entonces:*

$$\lambda_*(B) = 0 \qquad y \qquad \lambda_*(\mathbb{R} \setminus B) = 0$$

Demostración. Como B es de Bernstein si y solamente si $\mathbb{R} \setminus B$ es de Bernstein y por la regularidad de la medida de Lebesgue es suficiente ver que $\mu(F) = 0$ para todo $F \subseteq B$ cerrado. Por los Teoremas de Alexandroff (2.3.4) y de Cantor-Bendixson (2.3.25) todo subconjunto cerrado contenido en un conjunto de Bernstein es numerable y por lo tanto λ-nulo. $\square$

Ahora ya conocemos dos clases de conjuntos en $\mathbb{R}$ que no son Lebesgue medibles ni tienen la propiedad de Baire, los conjuntos de Vitali y los de Bernstein. El siguiente enunciado nos dice que estas clases no son excluyentes.

Teorema 2.1.3. *Existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ que es de Vitali y de Bernstein.*

Demostración. Sea α el primer ordinal tal que $\mathrm{card}(\alpha) = \mathfrak{c}$. Como $\mathrm{card}(\mathcal{T}) = \mathfrak{c}$, donde $\mathcal{T}$ denota a la topología usual de $\mathbb{R}$, y para cada $x \in X$ se tiene que $(-\infty, x]$ es cerrado y no numerable podemos bien ordena a la familia de todos los subconjuntos cerrados y no numerables de $\mathbb{R}$ como $\{F_\beta \mid \beta < \alpha\}$.

Supongamos que para algún $\beta < \alpha$ tenemos definida una β-sucesión inyectiva $\langle x_\xi \rangle_{\xi<\beta}$ de tal manera que $x_\xi \in P_\xi$ para todo $\xi < \beta$, fijémonos en el conjunto

$$Z_\beta = \bigcup \{x_\xi + \mathbb{Q} \mid \xi < \beta\},$$

entonces

$$\mathrm{card}(Z_\beta) \leqslant \mathrm{card}(\beta) \cdot \omega < \mathfrak{c},$$

por lo que existe $x \in P_\beta \setminus Z_\beta$, definimos $x_\beta = x$. De esta manera obtenemos el conjunto $X' = \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Se sigue de la construcción que el conjunto $\mathbb{R} \setminus X'$ es totalmente imperfecto y que X' contiene a lo más un elemento de cada clase de equivalencia de la partición de Vitali. Por medio del Axioma de Elección podemos extender X' a un conjunto de Vitali X.

Como $\mathbb{R} \setminus X \subseteq \mathbb{R} \setminus X'$, se tiene que $\mathbb{R} \setminus X$ es totalmente imperfecto. Sea $q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$ entonces $(\mathbb{R} \setminus X) + q$ es totalmente imperfecto,

$$(X + q) \cap X = \emptyset \qquad \text{y} \qquad R \setminus (X + q) = (\mathbb{R} \setminus X) + q,$$

de donde obtenemos que $X \subseteq (\mathbb{R} \setminus X) + q$ y por lo tanto X es totalmente imperfecto lo cual prueba que X es de Bernstein. □

2.2. Conjuntos de Bernstein en espacios Polacos

En esta sección se presentan generalizaciones a algunas construcciones y resultados de la sección anterior para espacios Polacos.

Definición 2.2.1. *Una familia no vacía $\mathcal{I}$ de subconjutos de un conjunto X se llama un σ-ideal si $\mathcal{I}$ es un σ-anillo, $X \notin \mathcal{I}$ y para todo $A \in \mathcal{I}$, $B \subseteq A$ entonces $B \in \mathcal{I}$.*

Definición 2.2.2. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un σ-ideal. Se dice que $\mathcal{I}$ tiene base de Borel si para todo $A \in \mathcal{I}$ existe $B \in \mathcal{I} \cap \mathscr{B}_\tau(X)$ tal que $A \subseteq B$.*

Lema 2.2.3. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico de segunda categoría, entonces el ideal $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(X)$, de conjuntos de primera categoría en X, tiene base de Borel.*

Demostración. Para cada $E \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}(X)$ existen $\{N_n \mid n < \omega\}$ tales que

$$E = \bigcup \{N_n \mid n < \omega\} \subseteq \bigcup \{cl_X(N_n) \mid n < \omega\}$$

y este último es un $\mathcal{F}_\sigma$ de primera categoría por lo que $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(X)$ tiene base de Borel. □

Lema 2.2.4. *Sea (X, d) un espacio métrico y μ una medida de Borel no nula y finita, entonces μ es regular y $\mathcal{N}(\mu)$, el ideal de subconjuntos μ-nulos, tiene base de borel.*

Demostración. Definamos

$$\mathcal{L}_1 = \{A \in \mathscr{B}_{\mathcal{T}_d}(X) \mid \mu(A) = \sup \{\mu(F) \mid F \subseteq A, F \text{ cerrado}\}\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{A \in \mathscr{B}_{\mathcal{T}_d}(X) \mid \mu(A) = \text{ínf} \{\mu(G) \mid A \subseteq G, G \text{ abierto}\}\}$$

Como todo subconjunto A cerrado en un espacio métrico es un $\mathcal{G}_\delta$, entonces $A \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, por lo que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ contiene a todos los subconjuntos cerrados. Veamos que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ es una σ-álgebra. Tiene al total por este ser cerrado. Dado $A \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mu(X \setminus A) &= \mu(X) - \mu(A) \\
&= \mu(X) - \sup \{\mu(F) \mid F \subseteq A, F \text{ cerrado}\} \\
&= \text{ínf} \{\mu(X \setminus F) \mid F \subseteq A, F \text{ cerrado}\} \\
&= \text{ínf} \{\mu(G) \mid A \subseteq G, G \text{ abierto}\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(X \setminus A) &= \mu(X) - \mu(A) \\
&= \mu(X) - \text{ínf} \{\mu(G) \mid A \subseteq G, G \text{ abierto}\} \\
&= \text{ínf} \{\mu(X \setminus G) \mid A \subseteq G, G \text{ abierto}\} \\
&= \sup \{\mu(F) \mid F \subseteq A, F \text{ cerrado}\},
\end{aligned}$$

es decir, $X \setminus A \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Sea $\{A_n \mid n < \omega\} \subseteq \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Para cada $\epsilon > 0$ y $n < \omega$ existen $F_n \subseteq A_n \subseteq G_n$ tales que F_n son cerrados, G_n son abiertos y

$$\mu(G_n \setminus A_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+2}} \qquad \text{y} \qquad \mu(A_n \setminus F_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+2}}.$$

Por un lado $\bigcup\{G_n \mid n<\omega\}$ es abierto y

$$\mu\left(\bigcup\{G_n \mid n<\omega\} \setminus \bigcup\{A_n \mid n<\omega\}\right) \leq \mu\left(\bigcup\{G_n \setminus A_n \mid n<\omega\}\right) \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

mientras que

$$\mu\left(\bigcup\{A_n \mid n<\omega\} \setminus \bigcup\{F_n \mid n<\omega\}\right) \leq \mu\left(\bigcup\{A_n \setminus F_n \mid n<\omega\}\right) \leqslant \frac{\epsilon}{2},$$

es decir,

$$\mu\left(\bigcup\{F_n \mid n<\omega\}\right) > \mu\left(\bigcup\{A_n \mid n<\omega\}\right) - \epsilon$$

y por continuidad existe $k<\omega$ tal que

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{k} F_n\right) > \mu\left(\bigcup\{A_n \mid n<\omega\}\right) - \epsilon,$$

equivalentemente, existe un cerrado $F \subseteq A$ tal que

$$\mu\left(\bigcup\{A_n \mid n<\omega\} \setminus F\right) = \mu\left(\bigcup\{A_n \mid n<\omega\}\right) - \mu(F) < \epsilon,$$

por lo que $\bigcup\{A_n \mid n<\omega\} \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. De esta forma $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ es una σ-álgebra que contiene a todos los cerrados y por lo tanto contiene a $\mathscr{B}_{\mathcal{T}_d}(X)$, es decir, μ es regular.

Por último veamos que $\mathcal{N}(\mu)$ tiene base de Borel. Para todo $N \in \mathcal{N}(\mu)$ y $n<\omega$ existe, por regularidad, G_n un abierto que contiene a N tal que

$$\mu(G_n \setminus N) < \frac{1}{n}.$$

Entonces $G = \bigcap\{G_n \mid n<\omega\}$ es un conjunto del tipo $\mathcal{G}_\delta$ que contiene a A, más aun, para todo $n<\omega$

$$\mu(G) \leqslant \mu(G_n) = \mu(G_n \setminus A) + \mu(A) < \frac{1}{n}$$

y por lo tanto $G \in \mathcal{N}(\mu)$. □

Lema 2.2.5. *Sea (X,d) un espacio métrico y μ una medida no nula de Borel y σ-finita, entonces el σ-ideal de subconjuntos nulos $\mathcal{N}(\mu)$ tiene base de Borel.*

Demostración. Sea $\{G_n \mid n < \omega\} \subseteq \mathscr{B}_\tau(X)$ tales que $G_n \subseteq G_{n+1}$ y $\mu(G_n) < +\infty$ para todo $n < \omega$ y $\bigcup \{G_n \mid n < \omega\} = X$. Para cada $n < \omega$ sea $\mu_n : \mathscr{B}_\tau(X) \to \mathbb{R}$ dada por $\mu_n(A) = \mu(A \cap G_n)$, entonces μ es una medida de borel finita. Más aun, para todo $n < \omega$

$$\mu_n(A) \leqslant \mu_{n+1}(A) \leqslant \mu(A)$$

y para todo $A \in \mathscr{B}_\tau(X)$

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A),$$

por lo que $\mu(A) = 0$ si y solamente si $\mu_n(A) = 0$ para todo $n < \omega$, es decir,

$$\mathcal{N}(\mu) = \bigcap \{\mathcal{N}(\mu_n) \mid n < \omega\}.$$

Sea $A \in \mathcal{N}(\mu)$ y $n < \omega$, entonces $A \in \mathcal{N}(\mu_n)$ el cual tiene base de Borel por el Lema 2.2.4, es decir, existe $B_n \in \mathscr{B}_\tau(X) \cap \mathcal{N}(\mu_n)$ tal que $A \subseteq B_n$. Sea $B = \bigcap \{B_n \mid n < \omega\} \in \mathscr{B}_\tau(X)$, entonces $A \subseteq B$ y

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(B) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu_n(B_n) = 0,$$

es decir, $B \in \mathcal{N}(\mu)$. Por lo tanto $B \in \mathscr{B}_\tau(X) \cap \mathcal{N}(\mu)$ y $A \subseteq B$, es decir, $\mathcal{N}(\mu)$ tiene base de Borel. □

El siguiente teorema nos muestra que los conjuntos de Bernstein son patológicos en cualquier espacio Polaco por lo que no es algo característico de la recta real. De hecho veremos que en este caso el no ser medibles o no tener la propiedad de Baire es por un motivo común.

Teorema 2.2.6. *Sea (X, τ) un espacio Polaco no numerable y sea $\mathcal{I}$ un σ-ideal de subconjuntos de X tal que:*

i) $\mathcal{I}$ contiene a todos los singuletes;

ii) $\mathcal{I}$ tiene base de Borel.

Además denotemos por $\mathcal{S}$ a la σ-álgebra generada por $\mathscr{B}_\tau(X) \cup \mathcal{I}$, entonces ningún conjunto de Bernstein pertenece a $\mathcal{S}$.

Demostración. Sea $Z \subseteq X$ un conjunto de Bernstein y supongamos que $Z \in \mathcal{S}$. Como $X \notin \mathcal{I}$, tenemos que

$$Z \notin \mathcal{I} \text{ o } X \setminus Z \notin \mathcal{I}$$

y ambos son de Bernstein por lo que podemos suponer sin perdida de generalidad que $Z \notin \mathcal{I}$.

Como $Z \in \mathcal{S}$ existen $B \in \mathscr{B}_\tau(G)$ y $N \in \mathcal{I}$ tales que

$$Z = B \triangle N$$

y por $\mathcal{I}$ tener base de Borel existe $Y \in \mathscr{B}_\tau(X) \cap \mathcal{I}$ tal que $N \subseteq Y$ por lo que

$$B \setminus Y \subseteq B \setminus N \subseteq Z.$$

Como $B \setminus Y \in \mathscr{B}_\tau(X)$ y Z no contiene subconjuntos perfectos no vaciós tenemos, por el Teorema 2.3.33, que $\mathrm{card}(B \setminus Y) \leq \omega$. Por la condición $i)$, $B \setminus Y \in \mathcal{I}$ por lo que

$$Z \subseteq Y \cup (B \setminus Y) \in \mathcal{I},$$

una contradicción. Por lo tanto el conjunto de Bernstein Z no pertenece a $\mathcal{S}$. $\square$

Teorema 2.2.7. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio Polaco no numerable sin puntos aislados, entonces ningún conjunto de Bernstein en X posee la propiedad de Baire.*

Demostración. El ideal $\mathcal{K}_\mathcal{T}(X)$ tiene base de Borel (Teorema 2.2.3) y la familia de conjuntos con la propiedad de Baire coincide con la σ-álgebra generada por $\mathscr{B}_\tau(X) \cup \mathcal{K}_\mathcal{T}(X)$ (Teorema 1.4.14). En virtud del Teorema 2.2.6 es suficiente ver que $\{x\} \in \mathcal{K}_\mathcal{T}(X)$ para todo $x \in X$. Dado $x \in X$ tenemos que $\mathrm{cl}(\{x\}) = \{x\}$ por ser metrizable la topología, además $\mathrm{int}(\{x\}) = \emptyset$ pues X no contiene puntos aislados, por lo tanto $\{x\}$ es denso en ninguna parte y por lo tanto $\{x\} \in \mathcal{K}_\mathcal{T}(X)$. $\square$

Teorema 2.2.8. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio Polaco y μ una medida no nula de Borel σ-finita y difusa en X, entonces cualquier conjunto de Bernstein es no medible con respecto a la compleción de μ.*

Demostración. El ideal $\mathcal{N}(\mu)$ tiene base de Borel (Teorema 2.2.5) y la familia de los conjuntos medibles para la compleción de μ coincide con la σ-álgebra generada por $\mathscr{B}_\tau(X) \cup \mathcal{N}(\mu)$. Más aun, como μ es difusa $\{x\} \in \mathcal{N}(\mu)$ para todo $x \in X$ y como μ es no nula se tiene que X es no numerable. De esta manera el resultado se sigue por el Teorema 2.2.6. $\square$

Hemos mostrado que los conjuntos de Bernstein en espacios Polacos son patológicos desde el punto de vista de la medida y de la categoría, sin embargo no hemos visto la existencia de estos. Más adelante no solo demostraremos que existen estos conjuntos sino que podemos encontrar una familia con cardinalidad del continuo que consta de conjuntos de Bernstein ajenos.

Lema 2.2.9 (Lema de Sierpinski sobre conjuntos ajenos)**.** *Sea X un conjunto infinito y sea $\{X_i \mid i \in J\}$ una familia de subconjuntos de X con* $\operatorname{card}(J) \leqslant \operatorname{card}(X)$ *y* $\operatorname{card}(X_j) = \operatorname{card}(X)$ *para todo $j \in J$. Entonces existe una familia disjunta $\{Y_j \mid j \in J\}$ tal que $Y_i \subseteq X_i$ y* $\operatorname{card}(Y_i) = \operatorname{card}(X)$ *para todo $i \in J$.*

Demostración. Sea α el primer ordinal con $\operatorname{card}(\alpha) = \operatorname{card}(X)$ y sin perdida de generalidad supongamos que $\operatorname{card}(J) = \operatorname{card}(X)$. Bien ordenemos a la familia $\{X_i \mid i \in J\}$ por α, es decir,

$$\{X_i \mid i \in J\} = \{X_\xi \mid \xi < \alpha\}.$$

Por otro lado, por el Axioma de Elección existe $\phi : \alpha \to \alpha \times \alpha$ una biyección. Sean $\phi_1, \phi_2 : \alpha \to \alpha$ las composiciones de ϕ con las proyecciones, es decir, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$.

Supongamos que para $\beta < \alpha$ tenemos definida una β-sucesión inyectiva $\langle x_\xi \rangle_{\xi<\beta}$ de tal manera que $x_\xi \in X_{\phi_1(\xi)}$ para todo $\xi < \beta$. Como $\beta < \alpha$, entonces

$$\operatorname{card}(\{x_\xi \mid \xi < \beta\}) = \operatorname{card}(\beta) < \operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(X_{\phi_1(\beta)}),$$

por lo que

$$X_{\phi_1(\beta)} \setminus \{x_\xi \mid \xi < \beta\} \neq \emptyset.$$

Sea $x \in X_{\phi_1(\beta)} \setminus \{x_\xi \mid \xi < \beta\}$ y hagamos $x_\beta = x$, de esta forma queda definida, por inducción transfinita, la α-sucesión inyectiva $\langle x_\xi \rangle_{\xi<\alpha}$ tal que $x_\beta \in X_{\phi_1(\beta)}$ para todo $\beta < \alpha$.

Para cada $\beta < \alpha$ sea $Y_\beta = \{x_\xi \mid \phi_1(\xi) = \beta\}$, entonces $Y_\beta \subseteq X_\beta$. Más aun, tenemos que

$$\{\xi < \alpha \mid \phi_1(\xi) = \beta\} = \{\xi < \alpha \mid \phi(\xi) = (\beta, \gamma) \text{ para algun } \gamma < \alpha\}$$

y como ϕ es una biyección entonces

$$\operatorname{card}(Y_\beta) = \operatorname{card}(\{\xi < \alpha \mid \phi_1(\xi) = \beta\}) = \operatorname{card}(\alpha) = \operatorname{card}(X).$$

Por último dados $\beta' < \beta < \alpha$, al ϕ ser biyección, tenemos que el conjunto

$$\{\xi < \alpha \mid \phi(\xi) = (\beta, \gamma) \text{ para algun } \gamma < \alpha\} \cap \{\xi < \alpha \mid \phi(\xi) = (\beta', \gamma) \text{ para algun } \gamma < \alpha\}$$

es no vacío y por lo tanto

$$\{\xi \mid \phi_1(\xi) = \beta\} \cap \{\xi \mid \phi_1(\xi) = \beta'\} = \emptyset,$$

es decir, $Y_\beta \cap Y'_\beta = \emptyset$. De esta manera la familia $\{Y_\beta \mid \beta < \alpha\}$ cumple las condiciones requeridas. $\square$

Lema 2.2.10. *Sea X un conjunto infinito y $\{X_j \mid j \in J\}$ una familia de subconjuntos de X tales que:*

i) $\text{card}(J) \leqslant \text{card}(X)$*;*

ii) $\text{card}(X_j) = \text{card}(X)$ *para todo $j \in J$.*

Entonces existe una familia disjunta $\{Y_j \mid j \in J\}$ de subconjuntos de X tal que $\text{card}(X_j \cap Y_i) = \text{card}(X)$ *para todo $j, i \in J$.*

Demostración. Por el Lema 2.2.9 existe $\{Z_j \mid j \in J\}$ una familia disjunta tal que $Z_j \subseteq X_j$ y $\text{card}(Z_j) = \text{card}(X)$ para todo $i \in J$. Como cada Z_i es infinito, por el Axioma de Elección, existe una familia disjunta $\{U_{i,k} \mid k \in J\}$ tal que $\text{card}(U_{i,j}) = \text{card}(Z_i)$ para toda $j \in J$ y

$$Z_i = \bigcup \{U_{i,j} \mid j \in J\}$$

para todo $i \in I$. Definimos la familia $\{Y_j \mid j \in J\}$ haciendo para cada $j \in J$

$$Y_j = \bigcup \{U_{i,j} \mid i \in J\}$$

la cual cumple los requisitos. □

Teorema 2.2.11. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio Polaco no numerable, entonces existe una familia disjunta $\{Y_j \mid j \in J\}$ de subconjuntos X la cual consiste de subconjuntos de Bernstein en X con* $\text{card}(J) = \mathfrak{c}$.

Demostración. Consideremos a $\{X_i \mid i \in J\}$ la familia de todos los subconjuntos cerrados no numerables de X, entonces $\text{card}(J) = \mathfrak{c}$ (ver la demostración del Teorema 2.1.3). Por el Lema 2.2.10 existe una familia disjunta $\{Y_j \mid j \in J\}$ de subconjuntos de X tal que $\text{card}(Y_j \cap X_i) = \mathfrak{c}$ para todo $i, j \in J$. Sea P un subconjunto perfecto no vacío de X, entonces P es cerrado y no numerable por lo que $P \cap Y_j \neq \emptyset$ para todo $j \in J$ y $X \setminus Y_j$ es totalmente imperfecto para todo $j \in J$. Más aun, como $Y_i \subseteq X \setminus Y_j$ para todo $i, j \in J$ con $i \neq j$ entonces Y_j tambien es totalmente imperfecto y Y_j es de Bernstein para todo $j \in J$. □

2.3. Espacios Polacos

Definición 2.3.1. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es Polaco si es separable y si existe una métrica ρ en X compatible con la topología tal que (X, ρ) es un espacio métrico completo.*

Cabe recalcar que como los espacios Polacos son metrizables las nociones de separabilidad, segunda numerabilidad y Lindelöf son equivalentes.

Teorema de Alexandroff

Saber cuando un subespacio de un espacio Polaco es un espacio Polaco no es algo tan trivial como dar una métrica y ver si su restricción es o no completa puesto que puede existir otra métrica compatible con la cual el subespacio es completo. El siguiente resultado nos muestra un poco de esto.

Teorema 2.3.2. *Los subespacios cerrados o abiertos de un espacio Polaco son espacios Polacos.*

Demostración. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio Polaco y $A \subseteq X$. Sea $\{U_n \mid n < \omega\}$ una base para $\mathcal{T}$, entonces $\{U_n \cap A \mid n < \omega\}$ es una base para la topología de subespacio de A, la cual tambien es metrizable y por lo tanto es separable, por lo que basta ver que si A es abierto o cerrado entonces existe una métrica completa en A compatible con su topología de subespacio.

Sea d una métrica completa para X compatible con $\mathcal{T}$. Si A es cerrado entonces la restricción de d en A es completa por lo que A es un espacio Polaco.

Supongamos que A es abierto. Más aun, supongamos que $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$. Recordemos que la distancia de un punto x al conjunto no vacío $B \subseteq X$ esta definida como

$$d(x, B) = \inf \{d(x, b) \mid b \in B\}.$$

Por la desigualdad del triángulo se tiene para $x_1, x_2 \in X$

$$d(x_1, B) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, B)$$

y por lo tanto

$$|d(x_1, B) - d(x_2, B)| \leqslant d(x_1, x_2)$$

por lo que la función $d(\_, B) : X \to \mathbb{R}$ es continua, de hecho es uniformemente continua.

Sea $d_0 : A \times A \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_0(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, B)} - \frac{1}{d(y, B)} \right|$$

donde $B = X \setminus A$.

Como A es abierto, $B = X \setminus A$ es cerrado y por lo tanto $d(x, B) > 0$ para todo $x \in A$ por lo que d_0 esta bien definida. Claramente $d_0(x, y) = 0$ si y solamente si $x = y$, además $d(x, y) = d(y, x)$. Sean $x, y, z \in A$, entonces $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ por d ser métrica. Más aun,

$$\left| \frac{1}{d(x, B)} - \frac{1}{d(z, B)} \right| \leqslant \left| \frac{1}{d(x, B)} - \frac{1}{d(y, B)} \right| + \left| \frac{1}{d(y, B)} - \frac{1}{d(z, B)} \right|$$

por lo que $d_0(x, z) \leqslant d_0(x, y) + d_0(y, z)$ y d_0 es una métrica en A.

Como $d(x, y) \leqslant d_0(x, y)$ para todo $x, y \in A$ se tiene que toda sucesión en A d_0-convergente es d-convergente. Por otro lado, sea $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ una sucesión en A d-convergente a $x \in A$. Como $d(\_, B)$ es continua y positiva en A $\left\langle \frac{1}{d(x_n, B)} \right\rangle_{n<\omega}$ converge a $\frac{1}{d(x, B)}$ y por lo tanto $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ es d_0-convergente a $x \in A$. Esto prueba que d_0 es una métrica en A compatible con la topología de subespacio de A dada por la restricción de la métrica d a A.

Por último veamos que d_0 es completa. Sea $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ una sucesión d_0-Cauchy. Como d_0 domina a d esta sucesión tambien es d-Cauchy y por esta ser completa en X existe $x \in X$ tal que $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ es d-convergente a x. Como d-convergencia es equivalente a d_0-convergencia basta ver que $x \in A$. Supongamos que $x \in B$, entonces $\lim_{n \to \infty} d(x_n, B) = d(x, B) = 0$ y

$$+\infty = \limsup_{n,m \to \infty} \left| \frac{1}{d(x_n, B)} - \frac{1}{d(x_m, B)} \right| \leqslant \limsup_{n,m \to \infty} d_0(x_n, x_m),$$

lo que contradice que $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ es d_0-Cauchy. Por lo tanto $x \in A$ y d_0 es completa, con lo que vemos que A es un espacio Polaco. $\square$

La clase de espacio Polacos no solo se preserva bajo subespacios abiertos o cerrados, el producto topológico numerable de espacios Polacos vuelve a ser un espacio Polaco.

Teorema 2.3.3. *Sea $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ una familia a lo más numerable de espacios Polacos. Entonces el producto topológico $\prod_{i\in I} X_i$ es un espacio Polaco.*

Demostración. Sin perdida de generalidad supongamos que $I \subseteq \mathbb{Z}^+$. Para cada $i \in I$ sea d_i una métrica completa en X_i. Más aun, supongamos que $d_i(x,y) \leqslant 1$ para todo $x, y \in X_i$ para todo $i \in I$.

Primero veamos que $\prod_{i\in I} X_i$ es segundo numerable. Para cada $i \in I$ sea $\mathcal{U}_i$ una base numerable para la topología en X_i. Para cada $N < \omega$ y cada $U_{i_n} \in \mathcal{U}_{i_n}$, $i_n \in I$, $n \leqslant N$ definimos el conjunto

$$U(U_{i_1}, \ldots, U_{i_N}) = \left\{ x \in \prod_{i\in I} X_i \;\middle|\; x(i_n) \in U_{i_n} \text{ para todo } n \leqslant N \right\}.$$

La colección

$$\mathcal{U} = \{U(U_{i_1}, \ldots, U_{i_N}) \mid U_{i_n} \in \mathcal{U}_{i_n}, i_n \in I, n \leqslant N, N < \omega\}$$

es la base numerable buscada.

Definamos $d : \prod_{i\in I} X_i \times \prod_{i\in I} X_i \to \mathbb{R}$ como:

$$d(x,y) = \sum_{i\in I} \frac{1}{2^i} d_i(x(i), y(i)),$$

entonces d es una métrica en $\prod_{i\in I} X_i$.

Veamos que d metriza la topología producto. Sea $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ una sucesión d-convergente a $x \in \prod_{i\in I} X_i$. Como $d_i(y(i), z(i)) \leqslant 2^i d(y,z)$ para todo $y, z \in \prod_{i\in I} X_i$ y para todo $i \in I$ entonces $\langle x_n(i) \rangle_{n<\omega}$ es una sucesión d_i-convergente a $x(i) \in X_i$ para todo $i \in I$ y por lo tanto $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ converge a x en la topología producto. Por otra lado sea $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ una sucesión convergente en la topología producto a $x \in \prod_{i\in I} X_i$, entonces $\langle x_n(i) \rangle_{n<\omega}$ es d_i-convergente a $x(i)$ para cada $i \in I$. Dada $\epsilon > 0$ existe $n_0 < \omega$ tal que

$$\sum_{n>n_0} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$$

y para cada $k \leqslant n_0$ existe $n_k < \omega$ tal que $d_k(x_n(k), x(k)) < 2^k \frac{\epsilon}{2n_0}$ para todo $n > n_k$.

Sea $N = \text{máx}\{n_k \mid k \leqslant n_0\} < \omega$. Entonces para toda $N < n < \omega$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \sum_{i\in I} \frac{1}{2^i} d_i(x_n(i), x(i)) \\ &\leqslant \sum_{i\in I, i\leqslant n_0} \frac{1}{2^i} d_i(x_n(i), x(i)) + \sum_{i>n_0} \frac{1}{2^i} \\ &< \sum_{i\in I, i\leqslant n_0} \frac{\epsilon}{2n_0} + \frac{\epsilon}{2} \leqslant \epsilon, \end{aligned}$$

es decir, $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ es d-convergente a x. Por lo tanto d metriza la topología producto.

Sea $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ una sucesión d-Cauchy en $\prod_{i\in I} X_i$. Como $d_i(x_n(i), x_m(i)) \leqslant 2^i d(x, y)$ para toda $n, m < \omega$ se tiene que $\langle x_n(i) \rangle_{n<\omega}$ es d_i-Cauchy en X_i para todo $i \in I$. Para cada $i \in I$ d_i es completa en X_i por lo que existe $x_i \in X_i$ tal que $\langle x_n(i) \rangle_{n<\omega}$ es d_i-convergente a x_i. Sea $x : I \to \bigcup\{X_i \mid i \in I\}$ dada por $x(i) = x_i \in X_i$ para cada $i \in I$, entonces $x \in \prod_{i\in I} X_i$ y como cada proyección de $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ es d_i-convergente a la proyección de x se tiene que $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ converge en la topología producto a x. Por lo tanto d es completa. □

Teorema 2.3.4 (Teorema de Alexandroff)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio Polaco entonces un subespacio de este es Polaco si y solamente si es del tipo $\mathcal{G}_\delta$.*

Demostración. Sea $\{U_n \mid n < \omega\}$ una familia de subconjuntos abiertos de $(X, \mathcal{T})$ y sea $Y = \bigcap\{U_n \mid n\omega\}$. Por los Teoremas 2.3.2 y 2.3.3 $\prod_{n<\omega} U_n$ es un espacio Polaco. Definimos:

$$\Delta = \left\{ x \in \prod_{n<\omega} U_n \,\middle|\, x(i) = x(j) \text{ para todo } i, j < \omega \right\}$$

Si $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ una sucesión en Δ convergente a $x \in \prod_{n<\omega} U_n$ entonces, $\langle x_n(i) \rangle_{n<\omega}$ converge a $x(i)$ en U_i para todo $i < \omega$, pero las sucesiones $\langle x_n(i) \rangle_{n<\omega}$, $\langle x_n(j) \rangle_{n<\omega}$ son iguales para todo $i, j < \omega$ y por lo tanto $x(i) = x(j)$ para todo $i, j < \omega$, es decir, $x \in \Delta$. Por lo tanto Δ es un subespacio cerrado en el producto. Por el Teorema 2.3.2 Δ es un espacio Polaco.

Para cada $y \in Y$ sea $f(y) : \omega \to \bigcup\{U_n \mid n < \omega\}$ dada por $f(y)(i) = y \in U_i$ para todo $i < \omega$, entonces $f(y) \in \prod_{n<\omega} U_n$. Más aun, $f(y) \in \Delta$, por lo que podemos considerar a f como $f : Y \to \Delta$. Sean $x, y \in Y$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces para toda $i < \omega$ se cumple que $x = f(x)(i) = f(y)(i) = y$ y por lo tanto f es inyectiva. Sea $g \in \Delta$ y $x = g(0)$, entonces $x = g(i)$ para todo $i < \omega$. Más aun, $x = g(i) \in U_i$ para todo $i < \omega$ y por lo tanto $x \in \bigcap\{U_n \mid n < \omega\} = Y$. Además, $f(x)(i) = x = g(i)$

para todo $i \in I$, es decir, $f(x) = g$. Por lo tanto f es suprayectiva y f es una biyección.

Veamos que f es un homeomorfismo. Sea $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ una sucesión en Y convergente a $y \in Y$. Como $y_n = f(y_n)(i)$ para todo $i < \omega$ y $Y \subseteq U_n$ se tiene que $\langle f(y_n)(i)\rangle_{n<\omega}$ es una sucesión en U_i convergente a $f(y)(i) = y \in U_i$ para todo $i < \omega$ por lo que la sucesión $\langle f(y_n)\rangle_{n<\omega}$ en Δ converge a $f(y) \in \Delta$ en la topología que hereda de la topología producto, es decir, f es continua. Por otro lado sea $\langle g_n \rangle_{n<\omega}$ una sucesión en Δ que converge a $g \in \Delta$, entonces la sucesión $\langle g_n(i)\rangle_{n<\omega}$ en U_i converge a $g(i) \in U_i$ para todo $i < \omega$. Como $g_n(i) = g_n(j)$ y $g(i) = g(j)$ para todo $i, j < \omega$ se tiene que $\langle g_n(i)\rangle_{n<\omega}$ es una sucesión en $Y = \bigcap \{U_n \mid n < \omega\}$ convergente a $g(i) \in Y$ para todo $i < \omega$. Fijemos $i < \omega$ y observemos que $g_n(i) = f^{-1}(g_n)$ y $g(i) = f^{-1}(g)$, entonces $\langle f^{-1}(g_n)\rangle_{n<\omega}$ es una sucesión en Y convergente a $f^{-1}(g)$. Por lo tanto f^{-1} es continua y f es un homeomorfismo. Como Y es homeomorfo a Δ y este es un espacio Polaco entonces Y es un espacio Polaco.

Ahora supongamos que Y es un subespacio Polaco de $(X, \mathcal{T})$. Sean d una métrica compatible con la topología en X y d_0 una métrica completa en Y compatible con su topología de subespacio. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ sea

$$V_n = \bigcup \left\{ W \subseteq X \;\middle|\; W \in \mathcal{T}, \mathrm{diam}_d(W) \leqslant \frac{1}{n}, W \cap Y \neq \emptyset, \mathrm{diam}_{d_0}(W \cap Y) \leqslant \frac{1}{n} \right\},$$

donde $\mathrm{diam}_\rho(A) = \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in A\}$ el diámetro de $A \subseteq X$ bajo la metríca ρ y denotemos por $B_r^\rho(x)$ a la bola abierta de radio r con centro en x en el espacio que esta definida ρ . Entonces V_n es abierto en X para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Dado $y \in Y$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, como d y d_0 generan la misma topología en Y existe $r > 0$ tal que

$$B_r^{d_0}(y) \subseteq B^d_{\frac{1}{2n}}(y) \cap Y.$$

Sea $r' = \mathrm{mín}\{r, \frac{1}{2n}\} > 0$, entonces existe $r'' > 0$ tal que

$$B^d_{r''}(y) \cap Y \subseteq B^{d_0}_{r'}(y).$$

Sea $W = B^d_{r'''}(y) \subseteq X$ con $r''' = \mathrm{mín}\{\frac{1}{2n}, r''\}$. Tenemos que W es abierto en X y $y \in W \cap Y$. Como $r''' \leqslant \frac{1}{2n}$ tenemos que

$$\mathrm{diam}_d(W) = \mathrm{diam}_d(B^d_{r'''}(y)) \leqslant 2r''' \leqslant \frac{1}{n}.$$

Por otro lado, como

$$W \cap Y \subseteq B^{d_0}_{r'}(y)$$

tenemos

$$\operatorname{diam}_{d_0}(W \cap Y) \leqslant \operatorname{diam}_{d_0}(B^{d_0}_{r'}(y)) \leqslant 2r' \leqslant \frac{1}{n}.$$

Con esto vemos que $W \subseteq V_n$ y $y \in W$, por lo que $y \in V_n$ para todo $y \in Y$, es decir, $Y \subseteq V_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto

$$Y \subseteq \bigcap \left\{ V_n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

Como $Y \subseteq \operatorname{cl}_X(Y)$ entonces

$$Y \subseteq \operatorname{cl}_X(Y) \cap \left(\bigcap \left\{ V_n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \right).$$

Sea $x \in \operatorname{cl}_X(Y) \cap (\bigcap \{V_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\})$, entonces existe $\{W_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ una familia de vecindades abiertas en X de x tales que $\operatorname{diam}_d(W_n) \leqslant \frac{1}{n}$, $\operatorname{diam}_{d_0}(W_n) \leqslant \frac{1}{n}$ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos

$$W'_n = \bigcap \{W_m \mid m \leqslant n\}$$

el cual es vecindad abierta de x y como $x \in \operatorname{cl}_X(Y)$ tenemos que $W'_n \cap Y \neq \emptyset$, de esta manera podemos construir una sucesión $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{Z}^+}$ en Y tal que $x_n \in W'_n$.

Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, como $W'_n \subseteq W_n$, tenemos que $x, x_n \in W_n$ y $\operatorname{diam}_d(W_n) \leqslant \frac{1}{n}$, entonces $d(x, x_n) \leqslant \frac{1}{n}$. Por lo tanto $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es d-convergente a x. Por otro lado, dados $N < \omega$ y $n, m > N$ tenemos que $W'_n, W'_m \subseteq W_N$ por lo que $x_n, x_m \in W_N \cap Y$ y, como $\operatorname{diam}_{d_0}(W_N \cap Y) \leqslant \frac{1}{N}$, entonces $d_0(x_n, x_m) \leqslant \frac{1}{N}$ para todo $n, m > N$, es decir, $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es una sucesión d_0-Cauchy en Y. Como d_0 es completa en Y existe $y \in Y$ tal que $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es d_0-convergente a y. Como las métricas d y d_0 generan la misma topología en Y, $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es d-convergente a y. Más aun, los límites son únicos en espacios métricos y $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{Z}^+}$ tambien converge a x por lo que $x = y \in Y$. Con esto se demuestra la contención $\operatorname{cl}_X(Y) \cap (\bigcap \{V_n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}) \subseteq Y$.

De esta manera obtenemos que:

$$\operatorname{cl}_X(Y) \cap \left(\bigcap \left\{ V_n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \right) = Y.$$

Como X es métrico los subconjuntos cerrados son del tipo $\mathcal{G}_\delta$ y por lo tanto Y es intersección de dos conjuntos del tipo $\mathcal{G}_\delta$ y por lo tanto es del tipo $\mathcal{G}_\delta$. $\square$

Conjunto de Cantor

Definición 2.3.5. *El discontinuo de Cantor es el producto topológico de una cantidad numerable de copias del conjunto* $\{0,1\}$ *con su topología discreta y se denota* 2^ω.

Observemos que la métrica discreta induce la topología discreta y esta métrica es completa pues toda sucesión de Cauchy es constante. En el caso en que el conjunto sea numerable el conjunto es separable, en particular tenemos que el conjunto $\{0,1\}$ con la topología discreta es un espacio Polaco y por el Teorema 2.3.3 el discontinuo de Cantor es un espacio Polaco. Más aun, por el Teorema de Tychonoff 2^ω es compacto, aunque no es necesario el Axioma de Elección para demostrar esto.

Teorema 2.3.6. *El discontinuo de Cantor es perfecto.*

Demostración. Sea $\alpha \in 2^\omega$ y $U \subseteq 2^\omega$ una vecindad abierta de α. Como 2^ω tiene la topología producto existe $N < \omega$ tal que $\alpha \in \bigcap \left\{\rho_i^{-1}[\{\alpha(i)\}] \,\middle|\, i < N\right\} \subseteq U$, donde $\rho_i : 2^\omega \to \{0,1\}$ es la proyección en el i-ésimo factor. Sea $\beta \in 2^\omega$ dada por

$$\beta(n) = \begin{cases} \alpha(n) & \text{si} \quad n < N \\ 1 - \alpha(N) & \text{si} \quad n = N \\ 0 & \text{si} \quad N < n < \omega \end{cases}$$

Entonces $\beta \in \bigcap \left\{\rho_i^{-1}[\{\alpha(i)\}] \,\middle|\, i < N\right\} \setminus \{\alpha\}$ y por lo tanto 2^ω es perfecto. $\square$

Recordemos que 2^ω es homeomorfo al conjunto ternario de Cantor en $\mathbb{R}$.

Definición 2.3.7. *El conjunto ternario de Cantor es el espacio topológico dado por:*

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0,1] \,\middle|\, x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^n}, a_i \in \{0,2\} \right\},$$

es decir, aquellos elementos cuya expansión en base 3 *se puede escribir con coeficientes en* $\{0,2\}$ *y la topología que hereda como subespacio de* $\mathbb{R}$ *con su topolgía usual.*

El discontinuo de Cantor es un espacio Polaco universal en el sentido en que todo espacio Polaco perfecto contiene una “copia” de este, es decir, contiene un subconjunto homeomorfo a este.

Definición 2.3.8. *Sean* (X, τ_X) *y* (Y, τ_Y) *dos espacios topológicos y* $f : X \to Y$. *Se dice que* f *es un encaje si* f *es inyectiva y* $f : X \to f[X]$ *es un homeomorfismo.*

Dado un espacio polaco perfecto (X, τ) podemos definir recursivamente para cada natural $n < \omega$ una familia $\{U_k \mid k < 2^n\}$ de abiertos de una manera análoga a la que se realiza en la construcción del conjunto ternario de Cantor en $\mathbb{R}$ por lo que pareciera que esta construcción nos llevara, de la misma manera que en caso real, al conjunto de Cantor deseado. Para demostrar esto se formaliza esta idea con los llamados esquemas.

Definición 2.3.9. *Dado un conjunto no vacío* A *se define* $A^{<\omega}$ *como el conjunto de sucesiones finitas en* A, *es decir:*

$$A^{<\omega} = \bigcup \{A^n \mid n < \omega\}.$$

Observemos que A^0 *solo continene la sucesión vacía.*

Dados $s \in A^n$, $t \in A^m$ *se define la longitud de* s *como* $|s| = n$ *y la concatenación de* s *y* t *como:*

$$s\hat{\ }t : n + m \to A \qquad s\hat{\ }t(k) = \begin{cases} s\hat{\ }t(k) = s(k) & si \quad k < n \\ s\hat{\ }t(k) = t(k-n) & si \quad n \leqslant k < n+m \end{cases}.$$

Más aun, si $\alpha \in A^\omega$ *y* $n < \omega$ *entonces* $\alpha|_n \in A^n$ *es la restricción de* α *a* n, *de la misma manera* $s|_k \in A^k$ *para* $s \in A^n$ *y* $k < n$.

Por otro lado, se dice que $s, t \in A^{<\omega}$ *son compatibles si existe* $n < \omega$ *tal que* $s|_n = t$ *ó* $t|_n = s$. *Se dice que son incompatibles si no son compatibles.*

Definición 2.3.10. *Sea* (X, τ) *un espacio Polaco y* d *una métrica en* X *completa compatible. Sea* A *un conjunto no vacío. Un esquema de Souslin es una familia* $\{F_s \mid s \in A^{<\omega}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *tal que:*

i) $\mathrm{cl}(F_{s\hat{\ }t}) \subseteq F_s$ *para todo* $s, t \in A^{<\omega}$;

ii) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\left(F_{\alpha|_n}\right) = 0$ *para todo* $\alpha \in A^\omega$.

Más aun, se dice que $\{F_s \mid s \in A^{<\omega}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es un esquema de Lusin si además de satisfacer i) y ii) satisface:*

iii) $F_s \cap F_t = \emptyset$ *para todo* $s, t \in A^{<\omega}$ *incompatibles.*

Por último, un esquema de Cantor es un esquema de Lusin $\{F_s \mid s \in A^{<\omega}\}$ *en donde* $A = \{0,1\} = 2$ *y* F_s *es un subconjunto cerrado y no vacío para todo* $s \in A^{<\omega}$.

Teorema 2.3.11. *Sea* $\{F_s \mid s \in A^{<\omega}\}$ *un esquema de Souslin y consideremos la topología producto en* A^ω *donde cada factor tiene la topología discreta. Entonces:*

i) El conjunto $D = \left\{\alpha \in A^\omega \;\middle|\; F_{\alpha|_n} \neq \emptyset \text{ para todo } n < \omega\right\}$ *es cerrado;*

ii) $\bigcap \left\{F_{\alpha|_n} \;\middle|\; n < \omega\right\} = \bigcap \left\{\operatorname{cl}\left(F_{\alpha|_n}\right) \;\middle|\; n < \omega\right\}$ *es un singulete para todo* $\alpha \in D$*;*

iii) Existe $f : D \to X$ *asociada al esquema* $\{F_s \mid s \in A^\omega\}$ *continua tal que:*

$$\{f(\alpha)\} = \bigcap \left\{F_{\alpha|_n} \;\middle|\; n < \omega\right\};$$

iv) Si $F_\emptyset = X$ *y para todo* $s \in A^{<\omega}$ *se cumple que* $F_s = \bigcup \{F_{s^\frown n} \mid n \in A\}$ *entonces* f *es suprayectiva;*

v) Si $\{F_s \mid s \in A^{<\omega}\}$ *es un esquema de Lusin, entonces* f *es inyectiva;*

vi) Si $\{F_s \mid s \in A^{<\omega}\}$ *es un esquema de Cantor, entonces* f *es un encaje.*

Demostración.

i) Sea $\alpha \in A^\omega \setminus D$, entonces existe $n < \omega$ tal que $F_{\alpha|_n} = \emptyset$. Para cada $i < \omega$ sea $\rho_i : A^\omega \to A$ la proyección en el i-ésimo factor. Sea $U = \bigcap \left\{\rho_i^{-1}[\{\alpha(i)\}] \;\middle|\; i < n\right\}$, entonces U es un básico en la topología producto y $\alpha \in U$. Sea $\beta \in U$, entonces $\beta|_n = \alpha|_n$ y por lo tanto $F_{\beta|_n} = F_{\alpha|_n} = \emptyset$, es decir, $\beta \in A^\omega \setminus D$. Por lo tanto $\alpha \in U \subseteq A^\omega \setminus D$ y $A^\omega \setminus D$ es abierto, es decir, D es cerrado.

ii) Para cada $\alpha \in D$ y cada $n < \omega$ se tiene que $\alpha|_n \in A^{<\omega}$, por lo que podemos considerar el elemento $F_{\alpha|_n} \neq \emptyset$, más aun, por la condición *i)* de la definción se tiene que $\bigcap \left\{F_{\alpha|_n} \;\middle|\; n < \omega\right\} = \bigcap \left\{\operatorname{cl}\left(F_{\alpha|_n}\right) \;\middle|\; n < \omega\right\}$ y por el Teorema de Intersección de Cantor, el cual se sigue de la completez, para cada $\alpha \in D$ existe $x \in X$ tal que $\{x\} = \bigcap \left\{F_{\alpha|_n} \;\middle|\; n < \omega\right\}$.

iii) Por *ii)* para cada $\alpha \in D$ existe $x \in X$ tal que $\{x\} = \bigcap \left\{F_{\alpha|_n} \;\middle|\; n < \omega\right\}$. Esto define una función $f : D \to X$ de tal manera que $\{f(\alpha)\} = \bigcap \left\{F_{\alpha|_n} \;\middle|\; n < \omega\right\}$. Para ver que f es continua es suficiente ver que para todo $\alpha \in D$ y $r > 0$ existe $U \subseteq A^\omega$ abierto tal que $\alpha \in U \subseteq f^{-1}(B_r(\alpha))$. Dada $r > 0$ y $\alpha \in A^\omega$ existe $n < \omega$ tal que $\operatorname{diam}\left(F_{\alpha|_n}\right) < r$. Entonces $\alpha \in \bigcap \left\{\rho_i^{-1}[\{\alpha(i)\}] \;\middle|\; i < n\right\}$ y este es un básico en A^ω.

Para todo $\beta \in \bigcap \left\{ \rho_i^{-1}[\{\alpha(i)\}] \,\middle|\, i < n \right\}$ se tiene que $\alpha|_n = \beta|_n$ y $f(\beta) \in F_{\beta|_n} = F_{\alpha|_n}$, por lo tanto $d(f(\beta), f(\alpha)) \leqslant \operatorname{diam}\left(F_{\alpha|_n}\right) < r$, es decir, $f(\beta) \in B_r(f(\alpha))$. Por lo tanto $\bigcap \left\{ \rho_i^{-1}[\{\alpha(i)\}] \,\middle|\, i < n \right\} \subseteq f^{-1}[B_r(f(\alpha))]$ y f es continua.

iv) Sea $x \in X$, definamos de manera inductiva una función $\alpha \in D \subseteq A^\omega$ tal que $x \in F_{\alpha|_n}$. Sea $n = 0$, entonces $X = F_\emptyset = \bigcup \{F_k \mid k \in A\}$ por lo que existe $k_0 \in A$ tal que $x \in F_{k_0}$, hagamos $\alpha(0) = k_0$. Supongamos que para $n < \omega$ esta definido $\alpha(n)$, entonces $x \in F_{\alpha|_n} = \bigcup \left\{ F_{\alpha|_n{}^\frown k} \,\middle|\, k \in A \right\}$ por lo que existe $k_{n+1} \in A$ tal que $x \in F_{\alpha|_n{}^\frown k_{n+1}}$, hagamos $\alpha(n+1) = k_{n+1}$. De esta manera queda definida $\alpha \in A^\omega$ y como $x \in F_{\alpha|_n{}^\frown k}$ tenemos que $F_{\alpha|_n{}^\frown k} \neq \emptyset$ para todo $n < \omega$, es decir, $\alpha \in D$. Más aun, $x \in \bigcap \left\{ F_{\alpha|_n} \,\middle|\, n < \omega \right\} = \{f(\alpha)\}$ y entonces $x = f(\alpha)$. Por lo tanto f es suprayectiva.

v) Sean $\alpha, \beta \in D$ distintos, entonces existe $n < \omega$ tal que $\alpha(n) \neq \beta(n)$. En particular, $\alpha|_{n+1}$ y $\beta|_{n+1}$ son incompatibles por lo que, al $\{F_s \mid s \in 2^\omega\}$ ser un esquema de Lusin, se tiene que $F_{\alpha|_n} \cap F_{\beta|_n} = \emptyset$. Como $f(\alpha) \in F_{\alpha|_n}$ y $f(\beta) \in F_{\beta|_n}$ se tiene que $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ son distintos. Por lo tanto f es inyectiva.

vi) Por *v)* f es inyectiva y por *iii)* f es continua. Consideremos $f : 2^\omega \to f[2^\omega]$, entonces f es una biyección y es continua, además toda función biyectiva y continua con dominio compacto y cuya imagen es de Hausdorff es un homeomorfismo. Como 2^ω es compacto y $f[2^\omega] \subseteq X$ es de Hausdorff por ser metrizable, entonces f es un encaje. □

Teorema 2.3.12. *Sea (X, τ) un espacio Polaco. Si X es perfecto entonces existe un encaje de 2^ω en X.*

Demostración. Sea d una métrica completa en X compatible con su topología. De manera inductiva, sobre la longitud de $s \in 2^\omega$, definamos un esquema de Souslin de abiertos no vacíos $\{U_s \mid s \in 2^{<\omega}\}$ de tal manera que $\operatorname{cl}(U_s) \cap \operatorname{cl}(U_t) = \emptyset$ para todo $s, t \in 2^{<\omega}$ incompatibles. Si $|s| = 0$, entonces s solamente puede ser la función vacia, definimos $U_s = X$. Supongamos que para cierta $s \in 2^{<\omega}$ U_s ha sido definido. Como X es perfecto no contiene puntos aislados, es decir, existen $x_0, x_1 \in U_s$ distintos. Como U_s es abierto existen $r_0, r_1 > 0$ tales que para $i \in \{0, 1\}$

$$\operatorname{cl}(B_{r_i}(x_i)) \subseteq U_s.$$

Sea $r = \text{mín}\left\{ \frac{1}{3} d(x_1, x_2), \frac{1}{2^{(|s|+1)}}, r_1, r_2 \right\}$ y sean $U_{s^\frown 0} = B_r(x_0)$ y $U_{s^\frown 1} = B_r(x_1)$. Entonces

$$\operatorname{cl}(U_{s^\frown i}) \subseteq U_s \qquad \text{y} \qquad \operatorname{diam}(U_{s^\frown i}) \leqslant \frac{1}{2^{|s|}}, U_{s^\frown i} \subseteq U_s$$

para $i \in \{0,1\}$ y $\mathrm{cl}(U_{s^\frown 0}) \cap \mathrm{cl}(U_{s^\frown 1}) = \emptyset$. De esta manera queda definida la familia $\{U_s \mid s \in 2^{<\omega}\}$ y claramente esta es un esquema de Souslin.

A partir de esta familia definimos $F_s = \mathrm{cl}(U_s)$ para todo $s \in 2^{<\omega}$. Entonces, como $\mathrm{cl}(U_s) \cap \mathrm{cl}(U_t) = \emptyset$ para todo $s,t \in 2^{<\omega}$ incompatibles, la familia $\{F_s \mid s \in 2^{<\omega}\}$ es un esquema de Cantor. Por el Teorema 2.3.11 la función $f : 2^\omega \to X$ asociada al esquema $\{F_s \mid s \in 2^{<\omega}\}$ es un encaje. $\square$

Por último veamos otra propiedad que hace al discontinuo de Cantor universal, esta es que todo espacio métrico compacto es imagen continua del discontinuo de Cantor.

Definición 2.3.13. *El cubo de Hilbert es el producto topológico* $\prod_{n<\omega} I = I^\omega$ *donde* I *denota al intervalo* $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ *con su topología usual.*

Lema 2.3.14. *Si* $(X,\mathcal{T})$ *es un espacio Polaco entonces existe* $f : X \to I^\omega$ *continua e inyectiva. Más aun, si* $(X,\mathcal{T})$ *es compacto* f *es un encaje.*

Demostración. Sin perdida de generalidad supongamos que $d \leqslant 1$ metriza la topología en X. Sea $D = \{x_n \mid n < \omega\} \subseteq X$ un subconjunto denso. Sea $f : X \to I^\omega$ tal que $(f(x))(n) = d(x, x_n)$, como $d \leqslant 1$ se tiene que f esta bien definida. Como cada proyección de f es de la forma $d(\_, x_n)$ para algún $n < \omega$, la cual es continua, se tiene que f es continua. Sean $x, y \in X$ tales que $f(x) = f(y)$ como D es denso existe una sucesón $\langle y_n \rangle_{k<\omega}$ en D convergente a x, es decir, $\lim_{n\to\infty} d(x, y_n) = 0$. Como $f(x) = f(y)$ y $y_n \in D$ para todo $n < \omega$ se tiene que $d(x, y_n) = d(y, y_n)$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} d(y, y_n) = 0$, es decir, $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ converge a y. Como X es métrico los límites son únicos, es decir, $x = y$ y por lo tanto f es inyectiva. Por último, si X es compacto entonces f es un homeomorfismo con su imagen al ser I^ω de Hausdorff, es decir, f es un encaje. $\square$

Lema 2.3.15. *El intervalo* $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ *es imagen continua del discontinuo de Cantor.*

Demostración. Sea $f : 2^\omega \to [0,1]$ dada por $\alpha \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{2^{n+1}}$. Como todo número se puede escribir en expansión binaria f es suprayectiva. Sea $\alpha \in 2^\omega$, $r > 0$ y $N < \omega$ tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < r.$$

Sea $U = \bigcap \{\rho_n^{-1}[\{\alpha(n)\}] \mid n < N\}$, entonces $\alpha \in U \subseteq 2^\omega$ y U es un básico en la topología producto. Sea $\beta \in U$, entonces $\alpha(n) = \beta(n)$ para todo $n < N$ y por lo tanto

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\alpha(n) - \beta(n)}{2^{n+1}} \right| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|\alpha(n) - \beta(n)|}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < r,$$

es decir, $\beta \in B_r(\alpha)$. Por lo tanto $f[U] \subseteq B_r(\alpha)$ y f es continua. □

Lema 2.3.16. *El producto topologíco $\prod_{n<\omega} 2^\omega$ es homeomorfo a 2^ω.*

Demostración. Para cada $n < \omega$ definimos el conjunto $D_n \subseteq \omega$ como:

$$D_n = \left\{ k < \omega \,\middle|\, 2^n \mid k \text{ y } 2^{n+1} \nmid k \right\}.$$

Por el Teorema Fundamental de la Aritmética $\{D_n \mid n < \omega\}$ es una partición de ω y como $2^n p \in D_n$ para todo p primo mayor que 2 se tiene que $\operatorname{card}(D_n) = \omega$. De esta manera se tiene que 2^ω es homeomorfo a $\prod_{k \in D_n} \{0, 1\}$ para cada $n < \omega$ y por lo tanto $\prod_{n<\omega} 2^\omega$ es homeomorfo a $\prod_{n<\omega} \prod_{k \in D_n} \{0, 1\}$. Por lo anterior es suficiente demostrar que este último es homeomorfo a 2^ω.

Sea: $f : \prod_{n<\omega} \prod_{k \in D_n} \{0, 1\} \to 2^\omega$ dada por $(f(\alpha))(k) = \sum_{n<\omega} (\alpha(n))(k) \chi_{D_n}(k)$ para cada $n < \omega$. Como $\{D_n \mid n < \omega\}$ es partición de ω la suma en $f(\alpha)$ solo contiene un termino no nulo por lo que f esta bien definida. Sean $\alpha, \beta \in \prod_{n<\omega} \prod_{k \in D_n} \{0, 1\}$ tales que $f(\alpha) = f(\beta)$. Sea $n < \omega$ y $k \in D_n$, entonces

$$(\alpha(n))(k) = (f(\alpha))(k) = (f(\beta))(k) = (\beta(n))(k).$$

Por lo tanto $(\alpha(n))(k) = (\beta(n))(k)$ para todo $n < \omega$ y para todo $k \in D_n$, es decir, $\alpha = \beta$ y por lo tanto f es inyectiva. Para $\beta \in 2^\omega$ sea $\alpha \in \prod_{n<\omega} \prod_{k \in D_n} \{0, 1\}$ tal que $(\alpha(n))(k)) = \beta(k)$ para cada $n < \omega$ y $k \in D_n$. Veamos que $f(\alpha) = \beta$ y para esto sea $k < \omega$, entonces

$$(f(\alpha))(k) = \sum_{n<\omega} (\alpha(n))(k) \chi_{D_n}(k) = \sum_{n<\omega} \beta(k) \chi_{D_n}(k) = \beta(k),$$

por lo que $\beta = f(\alpha)$, es decir, f es suprayectiva y por la tanto una biyección. Como $\prod_{n<\omega} \prod_{k \in D_n} \{0, 1\}$ es compacto y 2^ω es de Hausdorff es suficiente ver que f es continua para que f sea un homeomorfismo. Además, f es continua si y solamente si $\rho_k \circ f$ es continua para toda $k < \omega$, donde $\rho_i : 2^\omega \to \{0, 1\}$ es la proyección en el i-ésimo factor. Fijemos $k < \omega$, entonces existe un único $n < \omega$ tal que $k \in D_n$. Sean $\pi_n^1 : \prod_{m<\omega} \prod_{l \in D_m} \{0, 1\} \to \prod_{l \in D_n} \{0, 1\}$ y $\pi_k^2 : \prod_{l \in D_n} \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ las proyecciones correspondientes. Por un lado, para $\alpha \in \prod_{m<\omega} \prod_{l \in D_n} \{0, 1\}$

$$\rho_k \circ f\,(\alpha) = (f(\alpha))(k) = \sum_{i<\omega} (\alpha(i))(k) \chi_{D_i}(k) = (\alpha(n))(k).$$

Por otro lado para $j \in \{0,1\}$

$$(\pi_k^2)^{-1}[\{j\}] = \left\{ x \in \prod_{i \in D_n} \{0,1\} \,\middle|\, x(k) = j \right\}$$

es abierto en la topología producto de $\prod_{l \in D_n} \{0,1\}$ y por lo tanto $(\pi_n^1)^{-1}\left[(\pi_k^2)^{-1}[\{j\}]\right]$ es abierto en la topología producto de $\prod_{m<\omega} \prod_{l \in D_n} \{0,1\}$. Además, tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\pi_n^1)^{-1}\left[(\pi_k^2)^{-1}[\{j\}]\right] &= \left\{ \alpha \in \prod_{m<\omega} \prod_{l \in D_m} \{0,1\} \,\middle|\, \alpha(n) \in (\pi_k^2)^{-1}[\{j\}] \right\} \\
&= \left\{ \alpha \in \prod_{m<\omega} \prod_{l \in D_m} \{0,1\} \,\middle|\, (\alpha(n))(k) = j \right\} \\
&= \left\{ \alpha \in \prod_{m<\omega} \prod_{l \in D_m} \{0,1\} \,\middle|\, \rho_k \circ f\,(\alpha) = j \right\} \\
&= (\rho_k \circ f\,)^{-1}[\{j\}].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\rho_k \circ f\,)^{-1}[\{j\}]$ es abierto en la topología producto de $\prod_{m<\omega} \prod_{l \in D_m} \{0,1\}$ para todo $j \in \{0,1\}$, es decir, $\rho_k \circ f$ es continua para todo $k < \omega$. De esta forma se tiene que f es continua y por lo tanto un homeomorfismo. $\square$

Lema 2.3.17. *El cubo de Hilbert I^ω es imagen continua del discontinuo de Cantor.*

Demostración. Por el Lema 2.3.16 podemos considerara al discontinuo de Cantor como $\prod_{n<\omega} 2^\omega$. Por el Lema 2.3.15 existe $g : 2^\omega \to I$ continua y suprayectiva. Sea $f : \prod_{n<\omega} 2^\omega \to I^\omega$ tal que para cada $n < \omega$ se tiene que $(f(x))(n) = g(x(n))$. Como cada proyección de f es igual a la composición de una proyección de $\prod_{n<\omega} 2^\omega$, la cual es continua y suprayectiva, y g, la cual tambien es continua y suprayectiva, se tiene que f es continua y suprayectiva. $\square$

Definición 2.3.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $C \subseteq X$. Se dice que C es un retracto de X si existe $r : X \to C$ continua tal que $r|_C = id_C$ y en este caso se dice que r es una retracción.*

Lema 2.3.19. *Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff y $C \subseteq X$ un retracto de X, entonces C es cerrado.*

Demostración. Sea $r : X \to C$ una retracción y $x \in X \setminus C$, entonces $r(x) \in C$ por lo que $x \neq r(x)$. Como X es de Hausdorff existen $U, V \subseteq X$ abiertos en X tales que $x \in U$, $r(x) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como r es continua y $V \cap C$ es abierto en C se tiene que $W = r^{-1}[V \cap C] \cap U$ es abierto en X, más aun $x \in W$. Sea $y \in W$, entonces $y \in U$ y $r(y) \in V \cap C \subseteq V$ por lo que $y \neq r(y)$, como $r|_C = \mathrm{id}_C$ se tiene que $y \in X \setminus C$. Por lo tanto existe W una vecindad abierta de x tal que $W \subseteq X \setminus C$ para todo $x \in X \setminus C$, es decir, C es cerrado. □

El siguiente lema da un reciproco parcial al Lema 2.3.19.

Lema 2.3.20. *Sea $X = A^\omega$ con la topología producto de factores discretos. Entonces, todos los subconjuntos cerrados y no vaciós de X son retractos de X.*

Demostración. Sea $C \subseteq X$ un subconjunto cerrado no vacío. Para cada $s \in A^{<\omega}$ sea $U_s = \bigcap \left\{\rho_i^{-1}[\{s(i)\}] \,\middle|\, i < |s|\right\}$, donde $\rho_i : A^\omega \to A$ denota la proyección en el i-ésimo factor, entonces U_s es vecindad abierta de s en la topología producto de A^ω y $\left\{U_{\alpha|_n} \,\middle|\, n < \omega\right\}$ es una base local de α para cada $\alpha \in A^\omega$. Observemos que $U_\emptyset = X$.

Sea $B = \{s \in A^{<\omega} \mid U_s \cap C \neq \emptyset\}$ y $f : B \to C$ una función de elección de la familia $\{U_s \cap C \mid s \in B\}$ (si A es a lo más numerable esta familia tambien lo es, por lo que solo se requieren formas numerable del Axioma de Elección).

Definamos una función $r : X \to C$. Si $\alpha \in C$ entonces $r(c) = c$. Por otro lado, si $\alpha \in X \setminus C$ existe $k_0 < \omega$ un natural tal que $U_{\alpha|_{k_0}} \subseteq X \setminus C$ ya que los conjuntos de esta forma son una base para la topología producto. Sea $k < \omega$ el menor natural tal que $U_{\alpha|_k} \subseteq X \setminus C$. Como $\alpha|_0 = \emptyset$ y $U_\emptyset = X$ se tiene que $k > 0$, por lo tanto $k-1 < \omega$ y $U_{\alpha|_{k-1}} \cap C \neq \emptyset$, es decir, $\alpha|_{k-1} \in B$. En este caso definimos $r(\alpha) = f\left(\alpha|_{k-1}\right) \in C$ y de esta manera queda definida $r : X \to C$.

Veamos que r es continua. Sea $\alpha \in X \setminus C$, para todo $n < \omega$ y $\beta \in U_{\alpha|_n}$ se tiene que $\beta(i) = \alpha(i)$ para todo $i < n$, por lo que $\beta|_n = \alpha|_n$. Sea $k < \omega$ el menor natural tal que $U_{\alpha|_k} \subseteq X \setminus C$, entonces k es el menor natural tal que $U_{\beta|_k} \subseteq X \setminus C$ para todo $\beta \in U_{\alpha|_k}$, pues $\beta|_k = \alpha|_k$. Entonces, $r(\beta) = f\left(\beta|_k\right) = f\left(\alpha|_k\right) = r(\alpha)$, es decir, r es constante en una vecindad abierta de α y por lo tanto es continua en α. Por otro lado, si $\alpha \in C$, entonces $r(\alpha) = \alpha$ y es suficiente ver que $r\left[U_{\alpha|_k}\right] \subseteq U_{\alpha|_k} \cap C$ para todo $k < \omega$. Sea $k < \omega$ y $\beta \in U_{\alpha|_k}$, entonces $\beta|_k = \alpha|_k$. Si $\beta \in C$, entonces $r(\beta) = \beta \in U_{\alpha|_k} \cap C$. Si $\beta \in X \setminus C$ entonces existe $k_0 < \omega$ el menor natural tal que $U_{\beta|_{k_0}} \subseteq X \setminus C$ y como $\alpha \in U_{\alpha|_k} \cap C = U_{\beta|_k} \cap C$ tenemos que $k < k_0$. En este caso $r(\beta) = f\left(\beta|_{k_0}\right) \in U_{\beta|_{k_0}} \cap C$, entonces $\left(r(\beta)\right)(i) = \beta(i)$ para todo $i < k_0$. Como $k < k_0$ y $\alpha(i) = \beta(i)$ para todo $i < k$ tenemos que $\left(r(\beta)\right)(i) = \beta(i) = \alpha(i)$ para todo $i < k$ entonces, $r(\beta) \in U_{\alpha|_k} \cap C$ para todo $\beta \in U_{\alpha|_k}$, es decir, $r\left[U_{\alpha|_k}\right] \subseteq U_{\alpha|_k} \cap C$.

Con esto obtenemos que r es continua y por definición $r|_C = id_C$, es decir, r es una retracción y por lo tanto C es un retracto de X. □

Teorema 2.3.21. *Todo espacio métrico compacto es imagen continua del discontinuo de Cantor.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Por el Lema 2.3.14 existe $f : X \to I^\omega$ un encaje. Como f es continua, entonces $f[X]$ es compacto en I^ω, el cual es de Hausdorff y por lo tanto $f[X]$ es cerrado en I^ω. Entonces X es homeomorfo a un subconjunto cerrado de I^ω por lo que es suficiente probar el resultado para los subconjuntos cerrados de I^ω.

Sea $C \subseteq I^\omega$ un subconjunto cerrado no vacío. Por el Lema 2.3.17 existe $g : 2^\omega \to I^\omega$ continua y suprayectiva. Como g es continua y $C \subseteq X$ es cerrado, entonces $g^{-1}[C] \subseteq 2^\omega$ es cerrado. Por el Lema 2.3.20 existe un retracción $r : 2^\omega \to g^{-1}[C]$, en particular r es continua y suprayectiva. Entonces la composición $g \circ r : 2^\omega \to C$ es continua y suprayectiva, es decir, C es la imagen continua del discontinuo de Cantor. □

Teorema de Cantor-Bendixson

El Teorema de Cantor-Bendixson es una herramienta muy importante en la teoría descripitiva de conjuntos pues este nos da una descomposición de un espacio Polaco en terminos de un conjunto perfecto y uno a lo más numerable. Con este resultado se puede concluir que los conjuntos que aceptan una topología polaca cumplen la Hipótesis del Continuo.

Definición 2.3.22. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se dice que $x \in X$ es un punto de acumulación en A si para todo U vecindad de x se cumple $\emptyset \neq (U \setminus \{x\}) \cap A$ y al conjunto de todos estos se denota por*

$$A^d = \{x \in X \mid x \textit{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

Más aun, x es un punto de condensación de A si $\operatorname{card}(A \cap U) > \omega$ para toda U vecindad de x y denotamos como

$$A^\bullet = \{x \in X \mid x \textit{ es un punto de condensación de } A\}.$$

Empezamos con algunas propiedades básicas de los operadores ^{d} y $^\bullet$.

Lema 2.3.23. *Sea (X, τ) un espacio metrizable, $A, B \subseteq X$ y $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ entonces:*

i) $A^\bullet \subseteq A^d \subseteq \mathrm{cl}(A)$*;*

ii) $(A \cup B)^\bullet = A^\bullet \cup B^\bullet$ *y* $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$

iii)$A \subseteq B \Rightarrow A^\bullet \subseteq B^\bullet$

iv) $A^\bullet = \mathrm{cl}(A^\bullet)$

v) $A^{dd} \subseteq A^d$

vi) $\mathrm{cl}(A) = A \cup A^d$

vii) $\bigcup \left\{ A^d \mid A \in \mathcal{J} \right\} \subseteq \left(\bigcup \mathcal{J}\right)^d$

Demostración.

i) Si $x \in A^\bullet$ entonces toda vecindad de x intersecta a A en una cantidad no numerable de puntos, por lo tanto lo intersecta en más de un punto lo cual prueba que $A^\bullet \subseteq A^d$. Si $x \in A^d$ entonces toda vecindad de x intersecta a A al menos en un punto distinto a x y en particular intersecta a A por lo cual $A^d \subseteq \mathrm{cl}(A)$.

ii) Sea $x \in (A \cup B)^\bullet$. Supongamos que existe U vecindad de x tal que $\mathrm{card}(U \cap B) \leqslant \omega$ y en este caso veamos que $x \in A^\bullet$ (si no existe tal vecindad entonces $x \in B^\bullet$). Sea V otra vecindad de x, como $U \cap V$ es vecindad de x tenemos que:

$$\mathrm{card}((U \cap V) \cap (A \cup B)) > \omega,$$

y por lo tanto:

$$\mathrm{card}(U \cap V \cap A) > \omega \quad \text{o} \quad \mathrm{card}(U \cap V \cap B) > \omega.$$

Como $\mathrm{card}(U \cap V \cap B) \leqslant \mathrm{card}(U \cap B) \leqslant \omega$ se tiene que

$$\mathrm{card}(V \cap A) \geqslant \mathrm{card}(V \cap U \cap A) > \omega,$$

esto para toda vecindad V de x, es decir, $x \in A^\bullet$. Por lo tanto obtenemos que $(A \cup B)^\bullet \subseteq A^\bullet \cup B^\bullet$. La otra contención es inmediata puesto que si toda vecindad intersecta a A (o a B) en un conjunto no numerable entonces intersecta a la unión $(A \cup B)$ en un conjunto no numerable. El caso para el operador ^{d} es análogo.

iii) Supongamos que $A \subseteq B$. Sea $x \in A^\bullet$ y U una vecindad de x. Como $U \cap A \subseteq U \cap B$ entonces:

$$\omega < \operatorname{card}(U \cap A) \leqslant \operatorname{card}(U \cap B)$$

y por lo tanto $x \in B^\bullet$.

iv) Es sufiente ver que $\operatorname{cl}(A^\bullet) \subseteq A^\bullet$. Sea $x \in \operatorname{cl}(A^\bullet)$ y U una vecindad abierta de x, entonces existe $y \in A^\bullet \cap U$. Como U es vecindad de y y $y \in A^\bullet$ tenemos que $U \cap A$ es no numerable, es decir, toda vecindad U de x intersecta a A en un conjunto no numerable y $x \in A^\bullet$.

v) Sea $x \in A^{dd}$ y U una vecindad abierta de x, entonces existe $y \in (U \setminus \{x\}) \cap A^d$. Como U es vecindad de y y $y \in A^d$, entonces $\operatorname{card}(U \cap A) > 1$ para toda U vecindad abierta de x, es decir, $x \in A^d$.

vi) Primero veamos que $\operatorname{cl}(A) \subseteq A \cup A^d$. Sea $x \in \operatorname{cl}(A) \setminus A$ y U una vecindad de x. Como $x \in \operatorname{cl}(A)$ entonces U intersecta a A y como $x \notin A$ se tiene que $\emptyset \neq (U \setminus \{x\}) \cap A$, es decir, $x \in A^d$. Por otro lado $A \subseteq \operatorname{cl}(A)$ por lo que es sufiente ver que $A^d \subseteq \operatorname{cl}(A)$ pero toda vecindad de x que intersecta a A en un punto distinto de x intersecta a x. Por lo tanto $\operatorname{cl}(A) = A \cup A^d$.

vii) Sea $x \in \bigcup \left\{ A^d \,\middle|\, A \in \mathcal{J} \right\}$ y U una vecindad de x, entonces existe $A \in \mathcal{J}$ tal que $x \in A^d$ y por lo tanto

$$\emptyset \neq (U \setminus \{x\}) \cap A \subseteq (U \setminus \{x\}) \cap \bigcup \mathcal{J},$$

es decir, $x \in \left(\bigcup \mathcal{J}\right)^d$. □

Teorema 2.3.24. *Sea (X, ρ) un espacio métrico separable y $A \subseteq X$, entonces*

$$\operatorname{card}(A \setminus A^\bullet) \leqslant \omega.$$

Demostración. Sea $\{G_n \mid n < \omega\}$ una base numerable para la topología de (X, ρ). Para cada $x \in A \setminus A^\bullet$ existe un abierto U tal que $x \in U$ y $\operatorname{card}(U \cap A) \leqslant \omega$. Más aun, existe $n_x < \omega$ tal que $x \in G_{n_x} \subseteq U$ y por lo tanto $\operatorname{card}(G_{n_x} \cap A) \leqslant \omega$. Entonces

$$A \setminus A^\bullet \subseteq \bigcup \{G_{n_x} \cap A \mid x \in A \setminus A^\bullet\}.$$

Como hay una cantidad a lo más numerable de conjuntos $G_{n_x} \cap A$ esta es una unión a lo más numerable de conjuntos a lo más numerables y por lo tanto es a lo más numerable, es decir,

$$\operatorname{card}(A \setminus A^\bullet) \leqslant \operatorname{card}\left(\bigcup \{G_{n_x} \cap A \mid x \in A \setminus A^\bullet\}\right) \leqslant \omega.$$

□

Teorema 2.3.25 (Teorema de Cantor-Bendixson). *Si* (X, τ) *es un espacio separable y metrizable, entonces existe* $P \subseteq X$ *perfecto tal que* $\mathrm{card}(X \setminus P) \leqslant \omega$. *Más aun, si* (X, τ) *es Polaco entonces este conjunto es único.*

Demostración. Sea $P = X^\bullet$, entonces por el Lema 2.3.24 el conjunto $X \setminus P$ es a lo más numerable. Por el Lema 2.3.23 $\mathrm{cl}(X^\bullet) = X^\bullet$, es decir, P es cerrado, por lo que es suficiente demostrar que $P \subseteq P^d$. De hecho probaremos que $P \subseteq P^\bullet$. Sea $x \in P$ y U una vecindad de x, entonces es suficiente ver que $\mathrm{card}(U \cap P) > \omega$. Como x es punto de condensación de X se tiene que

$$\mathrm{card}(U) = \mathrm{card}(U \cap X) > \omega.$$

Por otro lado, $X \setminus P$ es a lo más numerable y $U = (P \cap U) \cup (U \cap (X \setminus P))$, por lo que

$$\mathrm{card}(U \cap P) > \omega.$$

Con esto hemos probado que $P = P^d = P^\bullet$ y P es el conjunto perfecto buscado.

Para probar la unicidad supongamos que (X, τ) es polaco y sea $P_1 \subseteq X$ perfecto tal que $\mathrm{card}(X \setminus P_1) \leqslant \omega$. Como todo conjunto perfecto es cerrado tenemos que $X \setminus P_1$ es abierto. Sea $x \in X \setminus P_1$ y U una vecindad abierta de x contenida en $X \setminus P_1$, entonces

$$\mathrm{card}(U \cap X) = \mathrm{card}(U) \leqslant \mathrm{card}(X \setminus P_1) \leqslant \omega$$

y por lo tanto x no es punto de condensación de X, es decir, $x \in X \setminus P$. Por lo tanto $X \setminus P_1 \subseteq X \setminus P$, es decir, $P \subseteq P_1$. Sea $x \in P_1$ y U una vecindad abierta de x. Como P_1 es perfecto es cerrado y por X ser metrizable es del tipo $\mathcal{G}_\delta$. Por el Teorema de Alexandroff (Teorema 2.3.4) podemos considerar a P_1, con su topología de subespacio, como un espacio Polaco. Entonces el conjunto $U \cap P_1$ es abierto en la topología de subespacio de P_1 y por lo tanto es del tipo $\mathcal{G}_\delta$ en el subespacio P_1. Por el Teorema de Alexandroff (Teorema 2.3.4) aplicado al conjunto $U \cap P_1$ en el espacio Polaco P_1 obtenemos que $U \cap P_1$ es un espacio Polaco y como $x \in U \cap P_1$ es no vacío. Veamos que $U \cap P_1$ es un espacio Polaco perfecto. Sea $y \in U \cap P_1$, entonces toda vecindad abierta de y en $U \cap P_1$ es de la forma $V \cap U \cap P_1$ con V una vecindad abierta de y en X. Sea V una vecindad abierta de y en X, entonces $V \cap U$ es vecindad abierta de y en X. Además, $y \in P_1$ y P_1 es perfecto en X, es decir, y es punto de acumulación de P_1 en X por lo que

$$\emptyset \neq ((V \cap U) \setminus \{y\}) \cap P_1 = ((V \cap U \cap P_1) \setminus \{y\}) \cap (U \cap P_1),$$

esto para toda V vecindad abierta de y en X, es decir, y es un punto de acumulación de $U \cap P_1$ en $U \cap P_1$. Como esto se cumple para todo $y \in U \cap P_1$ se tiene que $U \cap P_1$ es perfecto en si mismo. El Teorema 2.3.12 nos dice que existe $f : 2^\omega \to X$ un encaje, en particular f es inyectiva y por lo tanto $\mathrm{card}(U \cap P_1) \geqslant \mathrm{card}(2^\omega) = \mathfrak{c} > \omega$. Entonces

$$\mathrm{card}(U \cap X) = \mathrm{card}(U) \geqslant \mathrm{card}(U \cap P_1) > \omega,$$

es decir, $x \in X^\bullet = P$. Con esto vemos que $P_1 \subseteq P$ lo cual termina la prueba. □

Teorema 2.3.26. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio Polaco no numerable, entonces existe un encaje de 2^ω en X.*

Demostración. Por el Teorema de Cantor-Bendixson (Teorema 2.3.25), existe $P \subseteq X$ perfecto tal que $\mathrm{card}(X \setminus P) \leqslant \omega$. Como X es no numerable se tiene que $P \neq \emptyset$. Como P es perfecto es cerrado y por el Teorema 2.3.2, P es un espacio Polaco,es decir, P es un espacio Polaco perfecto. El Teorema 2.3.12 nos garantiza la existencia de un encaje de 2^ω en P, entonces la composición de este encaje con la inclusión de P en X es un encaje de 2^ω en X. □

Teorema 2.3.27. *Sea X un espacio Polaco no numerable, entonces* $\mathrm{card}(X) = \mathfrak{c}$.

Demostración. Por el Teorema 2.3.14 existe $f : X \to I^\omega$ inyectiva, es decir:

$$\mathrm{card}(X) \leqslant \mathrm{card}([0,1]^\omega) = \mathrm{card}(\mathfrak{c}^\omega) = \mathfrak{c}.$$

Por otro lado el Teorema 2.3.26 nos garantiza la existencia de un encaje $g : 2^\omega \to X$y como g es inyectiva:

$$\mathfrak{c} = \mathrm{card}(2^\omega) \leqslant \mathrm{card}(X).$$

Por el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein $\mathrm{card}(X) = \mathfrak{c}$. □

Conjuntos Borelianos

En esta sección se desarrollan algunos resultados sobre la familia $\mathscr{B}_\tau(X)$ de un espacio Polaco $(X, \mathcal{T})$. Más concretamente se demuestra que la cardinalidad de esta familia es igual a la del continuo y que todo boreliano no numerable contiene un subconjunto perfecto no vacío. Estos resultados se consiguen dotando a cualquier boreliano con una topología de espacio Polaco.

Definición 2.3.28. *Sea $\langle (X_i, \tau_i) \rangle_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. La suma topológica de estos espacios se denota por $\sum_{i \in I} X_i$ y esta dada por la unión ajena de estos conjuntos (si no son ajenos se identifica a X_i con $X_i \times \{i\}$ para cada $i \in I$) y la topológia en la cual un conjunto es abierto si su intersección con cada X_i es abierto.*

Lema 2.3.29. *Sea $\langle (X_i, \tau_i) \rangle_{i \in I}$ una familia a lo más numerable de espacios Polacos. Entonces la suma topológica $\sum_{i \in I} X_i$ es un espacio Polaco.*

Demostración. Sin perdida de generalidad supongamos que los conjuntos $\{X_i \mid i \in I\}$ son ajenos. Para cada $i \in I$ sea $D_i \subseteq X_i$ un subconjunto denso en X_i a lo más numerable y d_i una métrica completa en X_i. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $d_i(x, y) \leqslant 1$ para todo $x, y \in X_i$ y para todo $i \in I$.

Veamos que $D = \bigcup \{D_i \mid i \in I\}$ es denso en $\sum_{i \in I} X_i$. Sea $U \subseteq \sum_{i \in I} X_i$ abierto no vacío, entonces existe $i \in I$ tal que $X_i \cap U \neq \emptyset$ y por definición $U \cap X_i$ es abierto en X_i por lo que $\emptyset \neq D_i \cap U \cap X_i \subseteq D \cap U$, es decir, D es denso en $\sum_{i \in I} X_i$. Más aun, D es numerable por ser la unión ajena numerable de conjuntos a lo más numerables y por lo tanto $\sum_{i \in I} X_i$ es separable.

Definamos $d : \sum_{i \in I} X_i \times \sum_{i \in I} X_i \to \mathbb{R}$ como

$$d(x, y) = \begin{cases} d_i(x, y) & \text{si } x, y \in X_i \text{ para alguna } i \in I \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Claramente d es una métrica en $\sum_{i \in I} X_i$. Como la restricción de d a cada X_i coincide con d_i y cada X_i es abierto en $\sum_{i \in I} X_i$ se tiene que d metriza la topología en $\sum_{i \in I} X_i$.

Por otro lado, si $\langle x_n \rangle_{n < \omega}$ es una sucesión d-Cauchy, existe $n_0 < \omega$ tal que $d(x_n, x_m) < 1$ para todo $n, m > n_0$ y por lo tanto existe $j \in I$ tal que $x_n \in X_j$ para todo $n > n_0$. La sucesión $\langle x_{n+n_0} \rangle_{n < \omega}$ es d_j-Cauchy pues la restriccón de d a X_j coincide con d_j, la cual es completa. Por lo tanto existe $x \in X_j$ tal que $\langle x_{n+n_0} \rangle_{n < \omega}$ es d_j-convergente a x, esto implica que $\langle x_n \rangle_{n < \omega}$ es d-convergente a x y por lo tanto d es completa. $\square$

Lema 2.3.30. *Sea (X, τ) un espacio Polaco y $F \subseteq X$ cerrado, entonces existe $\tau' \subseteq \mathcal{P}(X)$ una topología polaca en X mas fina que τ tal que $F, X \setminus F \in \tau'$ y $\mathscr{B}_\tau(X) = \mathscr{B}_{\tau'}(X)$.*

Demostración. Sea $F \subseteq X$ cerrado. Por el Teorema de Alexandroff (Teorema 2.3.4) tenemos que F y $X \setminus F$ son espacios Polacos con sus topologías de subespacio.

Como F y $X \setminus F$ son ajenos se tiene que su suma topológica es una topología en X la cual denotaremos como $(X, \mathcal{T}')$. Por el Lema 2.3.29 $(X, \mathcal{T}')$ es un espacio Polaco. Además para todo $U \in \mathcal{T}$ tenemos que $U \cap F$, $U \cap (X \setminus F) \in \mathcal{T}'$ y por lo tanto $U = (U \cap F) \cup (U \cap (X \setminus F)) \in \mathcal{T}'$, es decir, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Más aun, como $X \in \mathcal{T}$ y $F = F \cap X$, $X \setminus F = X \setminus F \cap X$ tenemos que $F, X \setminus F \in \mathcal{T}'$.

Sabemos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ y que $F \in \mathcal{T}'$, veamos que $\mathcal{T}'$ es la menor topología en X que contiene a $\mathcal{T} \cup \{F\}$. Para esto sea $\mathcal{T}''$ otra topología en X que contiene a $\mathcal{T} \cup \{F\}$ y $A \in \mathcal{T}'$, entonces existen $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ tales que:

$$A = (A_1 \cap F) \cup (A_2 \cap (X \setminus F)).$$

Como F es $\mathcal{T}$-cerrado tenemos que $A_2 \setminus F \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}''$. Más aun, $A_1 \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}''$ y $F \in \mathcal{T}''$ por lo que $A_1 \cap F \in \mathcal{T}''$ con lo que vemos que $A \in \mathcal{T}''$, es decir, $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}''$.

Por último veamos que $\mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X) = \mathscr{B}_{\mathcal{T}'}(X)$. Como $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}' \subseteq \mathscr{B}_{\mathcal{T}'}(X)$ y $\mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$ es la menor σ-álgebra que contine a $\mathcal{T}$ tenemos que $\mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X) \subseteq \mathscr{B}_{\mathcal{T}'}(X)$. Por otro lado, $\mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{T} \cup \{F\}$ por lo que $\mathcal{T} \cup \{F\} \subseteq \mathcal{T}' \cap \mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$. Veamos que $\mathcal{T}' \cap \mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$ es una topología en X. Como $\mathcal{T}'$ es topología y $\mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$ una σ-álgebra se tiene que $\emptyset, X \in \mathcal{T}' \cap \mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$ y para cualesquiera $A_1, A_2 \in \mathcal{T}' \cap \mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$ entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}' \cap \mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$. Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}' \cap \mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$, entonces $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}'$ por esta ser topología. Por otro lado, $(X, \mathcal{T})$ es metrizable y separable, por lo tanto es hereditariamente Lindelöf y la cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $\bigcup \mathcal{U}$ admite una subcubierta numerable $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$, es decir, $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}'$. Más aun, $\bigcup \mathcal{U}' \in \mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$ pues $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$ y $\mathcal{U}'$ es numerable. De esta forma $\mathcal{T}' \cap \mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$ es una topología en X que contiene a $\mathcal{T} \cup \{F\}$, como $\mathcal{T}'$ es la menor de estas topologías tenemos que $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}' \cap \mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$, es decir, $\mathcal{T}' \subseteq \mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$ y por lo tanto $\mathscr{B}_{\mathcal{T}'}(X) \subseteq \mathscr{B}_{\mathcal{T}}(X)$. □

Lema 2.3.31. *Sea X un conjunto no vacío y $\{\mathcal{T}_n \mid n < \omega\}$ una familia de topologías polacas en X de tal manera que $\bigcap \{\mathcal{T}_n \mid n < \omega\}$ es una topología de Hausdorff, entonces la topología $\mathcal{T}$ generada por $\bigcup \{\mathcal{T}_n \mid n < \omega\}$ es polaca.*

Demostración. Sea $f : X \to X^\omega$ dada por $(f(x))(n) = x$ para todo $n < \omega$. Consideremos a X^ω con la topología producto de la familia $\langle (X, \mathcal{T}_n) \rangle_{n<\omega}$ y a X con la topología $\mathcal{T}$. Como cada proyección es igual a la identidad y $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}$ entonces f es continua. Para ver que f es un encaje es suficiente ver que $f : X \to f[X]$ es abierta. Sea $n < \omega$, $A \in \mathcal{T}_n$ y $\alpha \in f[A]$, entonces

$$W = \{\beta \in X^\omega \mid \beta(n) \in A\}$$

es abierto en la topología producto y $\alpha \in W$. Veamos que $W \cap f[X]$, un abierto en $f[X]$ se queda contenido en $f[A]$. Sea $\beta \in W \cap f[X]$, entonces existe $x \in X$ tal que

$f(x) = \beta \in W$ y por lo tanto $x = (f(x))(n) = \beta(n) \in A$, es decir, existe $x \in A$ tal que $f(x) = \beta$. De esta forma tenemos $f[A]$ es abierto para todo $A \in \bigcup\{\tau_n \mid n < \omega\}$. Como $f : X \to f[X]$ es biyectiva y $\bigcup\{\tau_n \mid n < \omega\}$ es una subbase para τ tenemos que f es abierta y por lo tanto f un encaje.

Veamos que $f[X]$ es cerrado y para esto sea $\alpha \in X^\omega \setminus f[X]$, entonces existen $n, m < \omega$ tales que $\alpha(n) \neq \alpha(m)$. Por hipótesis existen $U, V \in \bigcap\{\tau_n \mid n < \omega\}$ ajenos tales que $\alpha(n) \in U$ y $\alpha(m) \in V$. Sea $W = \{\beta \in X^\omega \mid \beta(n) \in U \text{ y } \beta(m) \in V\}$, entonces W es abierto en X^ω, $\alpha \in W$ y $W \subseteq X \setminus f[X]$ pues $\beta(n) \neq \beta(m)$ para todo $\beta \in W$.

Por el Teorema 2.3.3 X^ω con la topología producto de la familia $\langle (X, \tau_n) \rangle_{n<\omega}$ es un espacio Polaco y por el Teorema de Alexandroff (Teorema 2.3.4) $f[X]$ es un espacio Polaco. Por lo tanto X es un espacio Polaco al ser homeomorfo a $f[X]$. $\square$

Lema 2.3.32. *Sea (X, τ) un espacio Polaco y $B \in \mathscr{B}_\tau(X)$, entonces existe τ_B una topología polaca en X mas fina que τ tal que $B, X \setminus B \in \tau_B$ y $\mathscr{B}_\tau(X) = \mathscr{B}_{\tau_B}(X)$.*

Demostración. Sea $\mathscr{B}$ el conjunto de borelianos para los cuales el enunciado es cierto. Por el Lema 2.3.30 los subconjuntos cerrados de X pertenecen a $\mathscr{B}$ y como estos generan a los borelianos es suficiente ver que $\mathscr{B}$ es una σ-álgebra. Como X es cerrado, $X \in \mathscr{B}$. Más aun, $B \in \mathscr{B}$ si y solamente si $X \setminus B \in \mathscr{B}$ (la misma topología sirve para ambos) por lo que basta ver que es cerrada bajo uniones numerables.

Sea $\{B_n \mid n < \omega\} \subseteq \mathscr{B}$, $B = \bigcup\{B_n \mid n < \omega\}$ y para cada $n < \omega$ sea τ_n una topología polaca en X mas fina que τ tal que $B_n, X \setminus B_n \in \tau_n$ y $\mathscr{B}_{\tau_n}(X) = \mathscr{B}_\tau(X)$. De esta manera $B \in \tau'$ donde τ' es la topología generada por $\bigcup\{\tau_n \mid n < \omega\}$. Como $\tau \subseteq \bigcap\{\tau_n \mid n < \omega\}$ y τ es de Hausdorff entonces $\bigcap\{\tau_n \mid n < \omega\}$ es de Hausdroff, por el Lema 2.3.31 τ' es una topología polaca y $B \in \tau'$. De esta forma $X \setminus B$ es un subconjunto cerrado del espacio Polaco (X, τ') y por el Lema 2.3.30 existe τ_B una topología polaca mas fina que τ' (y por lo tanto mas fina que τ) tal que $B, X \setminus B \in \tau_B$ y $\mathscr{B}_{\tau_B}(X) = \mathscr{B}_{\tau'}(X)$.

Por lo anterior solo resta verificar que $\mathscr{B}_{\tau'}(X) = \mathscr{B}_\tau(X)$. Como $\tau \subseteq \tau' \subseteq \mathscr{B}_{\tau'}(X)$, entonces $\mathscr{B}_\tau(X) \subseteq \mathscr{B}_{\tau'}(X)$. Por otro lado, $\tau \subseteq \tau_n \subseteq \tau'$ y $\mathscr{B}_{\tau_n}(X) = \mathscr{B}_\tau(X)$ para cada $n < \omega$, por lo tanto $\bigcup\{\tau_n \mid n < \omega\} \subseteq \mathscr{B}_\tau(X) \cap \tau'$. Veamos que $\mathscr{B}_\tau(X) \cap \tau'$ es una topología en X. Claramente $\emptyset, X \in \mathscr{B}_\tau(X) \cap \tau'$ y esta es cerrada bajo intersecciones finitas. Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{B}_\tau(X) \cap \tau'$, entonces $\bigcup \mathcal{U} \in \tau'$ por esta ser topología. Por otro lado, (X, τ) es metrizable y separable, por lo tanto es hereditariamente Lindelöf y la cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $\bigcup \mathcal{U}$ admite una subcubierta numerable $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$, es decir, $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}'$. Más aun, $\bigcup \mathcal{U}' \in \mathscr{B}_\tau(X)$ pues

$\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathscr{B}_\tau(X)$y $\mathcal{U}'$ es numerable. De esta forma $\mathcal{T}' \cap \mathscr{B}_\tau(X)$ es una topología en X que contiene a $\bigcup\{\mathcal{T}_n \mid n < \omega\}$, como $\mathcal{T}'$ es la menor de estas topologías tenemos que $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}' \cap \mathscr{B}_\tau(X)$, es decir, $\mathcal{T}' \subseteq \mathscr{B}_\tau(X)$ y por lo tanto $\mathscr{B}_{\tau'}(X) \subseteq \mathscr{B}_\tau(X)$. $\square$

Teorema 2.3.33. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio Polaco y $B \in \mathscr{B}_\tau(X)$ con* $\operatorname{card}(B) > \omega$, *entonces existe un encaje $f : 2^\omega \to B$. En particular* $\operatorname{card}(B) = \mathfrak{c}$.

Demostración. Por el Teorema 2.3.32 existe una topología polaca $\mathcal{T}'$ mas fina que $\mathcal{T}$ tal que B es $\mathcal{T}'$-cerrado. Por el Teorema de Alexandroff (Teorema 2.3.4) B con la topología de subespacio de $\mathcal{T}'$ es un espacio Polaco y por hipótesis es no numerable. El Teorema 2.3.26 nos garantiza la existencia de un encaje $f : 2^\omega \to B$. Basta ver que f es un encaje con respecto a la topologá de subespacio de $\mathcal{T}$. Sea $\mathcal{T}_1$ la topología en $f[2^\omega]$ que hereda de $\mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}_2$ la topología en $f[2^\omega]$ que hereda de $\mathcal{T}$, entonces $(f[2^\omega], \mathcal{T}_1)$ es compacto por ser un encaje, $(f[2^\omega], \mathcal{T}_2)$ es metrizable y por lo tanto de Hausdorff. Más aun $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ pues $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ por lo que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ y por lo tanto f es un encaje con respecto a la topología de subespacio de $\mathcal{T}$. $\square$

Por último tenemos un resultado sobre la cardinalidad de la familia de todos los borelianos de un espacio polaco.

Teorema 2.3.34. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio Polaco entonces* $\operatorname{card}(\mathscr{B}_\tau(X)) \leqslant \mathfrak{c}$. *Más aun si X no es finito, entonces* $\operatorname{card}(\mathscr{B}_\tau(X)) = \mathfrak{c}$.

Demostración. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ una base a lo más numerable para $\mathcal{T}$, entonces:

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} \,\middle|\, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B} \right\},$$

por lo que

$$\operatorname{card}(\mathcal{T}) \leqslant \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathcal{B})) = 2^{\operatorname{card}(\mathcal{B})} \leqslant 2^\omega = \mathfrak{c}.$$

Dado $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$ denotamos por

$$\mathcal{C}^c = \{X \setminus C \mid C \in \mathcal{C}\} \text{ y } \mathcal{C}^* = \left\{ \bigcup \mathcal{U} \,\middle|\, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^c \text{ y } \operatorname{card}(\mathcal{U}) = \omega \right\}.$$

De esta forma si $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{B}_\tau(X)$, entonces $\mathcal{C}^* \subseteq \mathscr{B}_\tau(X)$.

Definamos por inducción transfinita una familia $\{\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ como $\mathcal{B}_0 = \mathcal{T}$ y para $\alpha < \omega_1$

$$\mathcal{B}_\alpha = \left(\bigcup \{\mathcal{B}_\beta \mid \beta < \alpha\} \right)^*.$$

De esta manera tenemos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}_\beta \subseteq \mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathscr{B}_\tau(X)$.

Sea
$$\mathscr{B} = \bigcup \{\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}.$$
Veamos que $\mathrm{card}(\mathcal{B}_\alpha) \leqslant \mathfrak{c}$ para todo $\alpha < \omega_1$. Para $\alpha = 0$ esto es cierto pues $\mathcal{B}_0 = \mathcal{T}$. Sea $\alpha < \omega_1$ y supongamos que $\mathrm{card}(\mathcal{B}_\beta) \leqslant \mathfrak{c}$ para todo $\beta < \alpha$. Como $\alpha < \omega_1$, $\mathrm{card}(\alpha) < \omega_1 \leqslant \mathfrak{c}$ y por lo tanto

$$\mathrm{card}(\bigcup \{\mathcal{B}_\beta \mid \beta < \alpha\}) \leqslant \mathrm{card}(\alpha) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$ y $\mathrm{card}(\mathcal{C}) \leqslant \mathfrak{c}$, entonces $\mathrm{card}(\mathcal{C}^c \cup \mathcal{C}) \leqslant \mathfrak{c}$ y $f : (\mathcal{C}^c \cup \mathcal{C})^\omega \to C^*$ dada por $f(x) = \bigcup \{x(n) \mid n < \omega\}$ es una función suprayectiva por lo que
$$\mathrm{card}\,(C^*) \leqslant \mathrm{card}\,((\mathcal{C}^c \cup \mathcal{C})^\omega) = \mathrm{card}(\mathfrak{c}^\omega) = \mathfrak{c}.$$
De esta forma obtenemos que

$$\mathrm{card}(\mathcal{B}_\alpha) = \mathrm{card}\left(\left(\bigcup \{\mathcal{B}_\beta \mid \beta < \alpha\}\right)^*\right) \leqslant \mathfrak{c}.$$

Por inducción transfinita $\mathrm{card}(\mathcal{B}_\alpha) \leqslant \mathfrak{c}$ para todo $\alpha < \omega_1$ y por lo tanto

$$\mathrm{card}(\mathscr{B}) = \mathrm{card}\left(\bigcup \{\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}\right) \leqslant \omega_1 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Veamos que $\mathscr{B}$ es una σ-álgebra. Como $\mathcal{T} = \mathcal{B}_0 \subseteq \mathscr{B}$ entonces $\emptyset \in \mathscr{B}$. Dado $A \in \mathscr{B}$ existe $\alpha < \omega_1$ tal que $A \in \mathcal{B}_\alpha$, entonces $X \setminus A = \bigcup \{X \setminus A \mid n < \omega\} \in B_{\alpha+1} \subseteq \mathscr{B}$. Sea $\{A_n \mid n < \omega\} \subseteq \mathscr{B}$ y para cada $n < \omega$ sea $\alpha_n < \omega_1$ tal que $A_n \in \mathcal{B}_{\alpha_n}$. Sea $\alpha = \sup \{\alpha_n \mid n < \omega\}$, entonces $\alpha < \omega_1$ y $A_n \in \mathcal{B}_{\alpha_n} \subseteq \mathcal{B}_\alpha$ para todo $n < \omega$ por lo que $\bigcup \{A_n \mid n < \omega\} \in \mathcal{B}_{\alpha+1} \subseteq \mathscr{B}$.

Por todo lo anterior tenemos que $\mathscr{B}$ es una σ-álgebra, $\mathcal{T} \subseteq \mathscr{B}$ y $\mathrm{card}(\mathscr{B}) \leqslant \mathfrak{c}$. Por lo tanto $\mathcal{T} \subseteq \mathscr{B}_\tau(X) \subseteq \mathscr{B}$ y:

$$\mathrm{card}(\mathscr{B}_\tau(X)) \leqslant \mathrm{card}(\mathscr{B}) \leqslant \mathfrak{c}.$$

Para cada $x \in X$ tenemos que $\{x\}$ es cerrado y por lo tanto $\{x\} \in \mathscr{B}_\tau(x)$ De esta manera $\mathscr{B}_\tau(X)$ es una σ-álgebra infinita si X es infinito, pero toda σ-álgebra infinita tiene cardinalidad al menos igual a la del continuo. Por el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein $\mathrm{card}(\mathscr{B}_\tau(X)) = \mathfrak{c}$. $\square$

3 | Bases de Hamel

En este capítulo estudiaremos las bases de Hamel, las cuales nos ayudan a proporcionan una gran cantidad de ejemplos de conjuntos no medibles. Más adelante se utilizan estas bases para estudiar la ecuación funcional de Cauchy. Siguiendo por ese camino se estudian las funciones que cumplen la desigualdad de Jensen, también conocidas como convexas de punto medio. Estos resultados nos ayudan a desarrollar una noción del tamaño de un conjunto basado en la relación que existe entre acotación y continuidad para funciones aditivas y convexas de punto medio.

Hamel, en su artículo [9], fue el primero en considerar a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ y demostró, utilizando el Axioma de Elección, la existencia de una base para este espacio. En general, a cualquier base de $\mathbb{R}^d$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, $d \in \mathbb{Z}^+$, se le llama una base de Hamel. Además cialquiera de estas bases tiene la misma cardinalidad que la del continuo, $\mathfrak{c}$.

A lo largo de este capítulo nos fijaremos únicamente en espacios euclidianos $\mathbb{R}^d$ para alguna $d \in \mathbb{Z}^+$ y denotaremos por λ_d a la medida de Lebesgue d-dimensional.

3.1. Propiedades de las bases de Hamel

En esta sección se estudian algunos resultados y construcciones relacionadas a las bases de Hamel.

Teorema 3.1.1. *La existencia de una base de Hamel implica la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ el cual no es Lebesgue medible ni tiene la propiedad de Baire.*

Demostración. Sea H una base de Hamel y fijemos un elemento $h_0 \in H$. Sea V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^d$ sobre $\mathbb{Q}$ generado por $H \setminus \{h_0\}$.

Supongamos que V es Lebesgue medible o tiene la propiedad de Baire. Como

$$\mathbb{R}^d = \bigcup \{V + qh_0 \mid q \in \mathbb{Q}\},$$

$\lambda_d(V) = \lambda_d(V + qh_0)$ y V es homeomorfo $V + qh_0$ se tiene que $\lambda_d(V) > 0$ o V es de segunda categoría, en cualquier caso por la propiedad de Steinhaus (Teorema 1.2.16) o su análogo en categoría (Teorema 1.4.17), existe una vecindad U del cero tal que $U \subseteq V \ominus V$. Como $h_0 \neq 0$ y $\mathbb{Q}$ es denso existe $q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$ tal que $q \in \frac{1}{h_0}U$, es decir, $qh_0 \in U$. Entonces $qh_0 \in V \ominus V$ y como V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial

$$\frac{1}{q}(V \ominus V) \subseteq \frac{1}{q}V \subseteq V,$$

por lo cual $h_0 \in V$ lo cual contradice el que H sea linealmente independiente, por lo tanto V no es Lebesgue medible ni tiene la propiedad de Baire. □

En el Capítulo 1 obtuvimos generalizaciones al Teorema de Vitali para las medidas de Haar, las cuales son invariantes bajo traslaciones. Sin embargo uno se puede preguntar sobre la existencia de conjuntos no medibles para una medida que únicamente preserva conjuntos nulos bajo traslaciones. Mas precisamente:

Definición 3.1.2. *Sea X un conjunto y G un grupo de transformaciones de X, se dice que una medida μ en X es cuasi-invariante para G si:*

i) para todo $g \in G$ y para todo $Z \in \operatorname{dom}(\mu)$ se tiene que $g(Z) \in \operatorname{dom}(\mu)$;

ii) si $\mu(Z) = 0$ entonces $\mu(g(Z)) = 0$ para todo $g \in G$.

Con esto la pregunta es: ¿Existen subconjuntos no μ-medibles para cualquier medida μ en $\mathbb{R}^d$ σ-finita y cuasi-invariante bajo traslaciones?

Para dar una respuesta afirmativa a la pregunta anterior será necesario construir un conjunto, el cual buscamos que sea no μ-medible y que tenga ciertas propiedades algebraicas.

Iniciemos con H una base de Hamel, entonces todo elemento en $\mathbb{R}^d$ se escribe de manera única como $\mathbb{Q}$-combinación lineal de elementos de H, es decir,

$$x = \sum_{h \in H} q_h(x)h \qquad \operatorname{card}(\{i \in I \mid q_h(x) \neq 0\}) < \omega.$$

Definición 3.1.3. *Sea $\langle (G_i, +_i) \rangle_{i \in I}$ una familia de grupos conmutativos. La suma directa de estos se define como*

$$\sum_{i \in I} G_i = \left\{ g \in \prod_{i \in I} G_i \;\middle|\; \operatorname{card}(\{i \in I \mid g(i) \neq 0\} < \omega) \right\}$$

con la operación de grupo definida entrada por entrada.

Si consideramos que para cada $h \in H$ $Q_h = h\mathbb{Q} = \{hq \mid q \in \mathbb{Q}\}$ dotado con la suma es un grupo isomorfo a $(\mathbb{Q}, +)$ esta representación nos dice que $(\mathbb{R}^d, +)$ es una suma directa de $\mathrm{card}(H) = \mathfrak{c}$ grupos isomorfos a $\mathbb{Q}$, es decir,

$$\mathbb{R}^d = \sum_{h \in H} Q_h.$$

En particular tenemos que $(\mathbb{R}^d, +)$ es isomorfo como grupo a $(\mathbb{R}, +)$.

Teorema 3.1.4. *Sean $(G, +)$ un grupo conmutativo y μ una medida σ-finita y cuasi-invariante para G. Si G_0 es un subgrupo de G tal que $\mu^*(G_0) > 0$ y el grupo cociente G/G_0 es no numerable, entonces G_0 no es μ-medible.*

Demostración. Supongamos que $G_0 \in \mathrm{dom}(\mu)$, entonces $g + G_0 \in \mathrm{dom}(\mu)$. Más aun, como μ preserva conjuntos μ-nulos se tiene que $\mu(g + G_0) > 0$ para todo $g \in G$. Como G/G_0 es no numerable $\{g + G_0 \mid g \in G\}$ contiene una familia disjunta y no numerable de conjuntos con medida positiva, lo que contradice la condición de Souslin (Teorema 1.2.24) y por lo tanto G_0 no es μ-medible. □

Teorema 3.1.5. *Sean $(G, +)$ un grupo conmutativo y μ una medida σ-finita y cuasi-invariante para G. Si $\{G_n \mid n < \omega\}$ es una familia de subgrupos de G tal que:*

i) para cada $n < \omega$ el grupo cociente G/G_n es no numerable;

ii) $G = \bigcup \{G_n \mid n < \omega\}$,

entonces existe $n < \omega$ tal que G_n no es μ-medible

Demostración. Como

$$0 < \mu(G) = \mu\left(\bigcup \{G_n \mid n < \omega\}\right) \leqslant \sum_{n<\omega} \mu^*(G_n)$$

existe $n < \omega$ tal que $\mu^*(G_n) > 0$ y por el Teorema 3.1.4 G_n no es μ-medible. □

Teorema 3.1.6. *Sean $(G, +)$ un grupo conmutativo, H un subgrupo propio de G e I un conjunto. Consideremos las sumas directas de grupos $\sum_{i \in I} G_i$ y $\sum_{i \in I} H_i$ donde cada G_i es coincide con G y cada H_i coincide con H para cada $i \in I$. Entonces*

$$card\left(\sum_{i \in I} G_i \Big/ \sum_{i \in I} H_i\right) \geqslant card(I)$$

Demostración. Como H es un subgrupo propio de G existe $g_0 \in G \setminus H$. Sea D el conjunto

$$\left\{ g \in \sum_{i \in I} G_i \,\middle|\, g(i) \in \{0, g_0\} \text{ para toda } i \in I \right\},$$

entonces $\operatorname{card}(I) \leqslant \operatorname{card}(D)$. Sean $d, d' \in D$ tales que

$$d - d' \in \sum_{i \in I} H_i,$$

entonces para cada $i \in I$ $(d - d')(i) = d(i) - d(i') \in H_i$ y como $d(i) - d(i') \in \{0, g_0, -g_0\}$ y $-g_0, g_0 \in G \setminus H$ se tiene que $d_i - d'_i = 0$ para todo $i \in I$, es decir, $d = d'$.

Por último recordemos que para $d, d' \in \sum_{i \in I} G_i$, $d + \sum_{i \in I} H_i = d' + \sum_{i \in I} H_i$ si y solamente si $d - d' \in \sum_{i \in I} H_i$ por lo cual

$$\operatorname{card}\left(\sum_{i \in I} G_i \middle/ \sum_{i \in I} H_i \right) \geqslant \operatorname{card}(D) \geqslant \operatorname{card}(I).$$

□

Teorema 3.1.7. *Existe una familia $\{G_n \mid n < \omega\}$ de subgrupos aditivos de $\mathbb{R}^d$ tal que:*

i) $\mathbb{R}^d = \bigcup \{G_n \mid n < \omega\}$*;*

ii) Para cada $n < \omega$ el grupo cociente $\mathbb{R}^d / G_n$ es no numerable.

Demostración. Como $\mathbb{R}^d$ es un grupo isomorfo a $\mathbb{R}$ es suficiente probar el resultado para $\mathbb{R}$. Para cada $n < \omega$ sea

$$Q^{(n)} = \left\{ \frac{k}{n!} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

entonces $Q^{(n)}$ es un subgrupo de $\mathbb{Q}$.

Veamos que $Q^{(n)}$ esta contenido propiamente en $\mathbb{Q}$ para cada $n < \omega$. Sea $p \in \mathbb{Z}^+$ un primo tal que $p > n!$ y supongamos que $\frac{1}{p} \in Q^{(n)}$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{k}{n!} = \frac{1}{p}$ y por lo tanto $pk = n!$ en particular $p \,|\, n!$ y por lo tanto $p \leqslant n!$ contradiciendo nuestra elección de p.

Si $m < n < \omega$ entonces $m! \,|\, n!$, por lo cual existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m!k = n!$ y para todo $k' \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\frac{k'}{m!} = \frac{kk'}{n!} \in Q^{(n)},$$

por lo que $Q^{(m)} \subseteq Q^{(n)}$.

Por último veamos que $\mathbb{Q} = \bigcup \left\{ Q^{(n)} \,\middle|\, n < \omega \right\}$. Sea $q \in \mathbb{Q}$ y sean $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$ tales $q = \frac{m}{n}$. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $nk = n!$, entonces

$$q = \frac{m}{n} = \frac{km}{kn} = \frac{km}{n!} \in Q^{(n)}.$$

Entonces tenemos que $\left\{ Q^{(n)} \,\middle|\, n < \omega \right\}$ es una familia de subgrupos propios tales que $Q = \bigcup \left\{ Q^{(n)} \,\middle|\, n < \omega \right\}$. Recordemos que por la existencia de bases de Hamel $\mathbb{R} = \sum_{i \in I} Q_i$ donde Q_i coincide con $\mathbb{Q}$ para toda $i \in I$ y $card(I) = \mathfrak{c}$. Sea

$$G_n = \sum_{i \in I} Q_i^{(n)}$$

donde cada $Q_i^{(n)}$ coincide con $Q^{(n)}$. Por el Teorema 3.1.6

$$\mathbb{R}/G_n = \sum_{i \in I} Q_i \Big/ \sum_{i \in I} Q_i^{(n)}$$

es no numerable.

Por último, para cada $r \in \mathbb{R} = \sum_{i \in I} Q_i$ existe $J \subseteq I$ finito tal que $r(i) = 0$ para todo $i \in I \setminus J$. Para cada $j \in J$ existe $n_j < \omega$ tal que $r(j) \in Q^{(n_j)}$, sea $n = \text{máx}\{n_j \,|\, j \in J\} < \omega$, entonces $r \in \sum_{i \in I} Q_i^{(n)}$, es decir, $\mathbb{R} = \bigcup \{G_n \,|\, n < \omega\}$. $\square$

Teorema 3.1.8. *Para cualquier medida μ en $\mathbb{R}^d$ σ-finita y cuasi-invariante bajo el grupo de traslaciones de $\mathbb{R}^d$ existe un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}^d$ el cual no es μ-medible.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.7 existe $\{G_n \,|\, n < \omega\}$ una familia de sugrupos aditivos de $\mathbb{R}^d$ tales que $\mathbb{R}^d = \bigcup \{G_n \,|\, n < \omega\}$ y $\mathbb{R}^d/G_n$ es no numerable para todo $n < \omega$. Por el Teorema 3.1.5 existe $n < \omega$ tal que G_n no es μ-medible. $\square$

Hemos visto que la existencia de Bases de Hamel implica la existencia de conjuntos no Lebesgue medibles los cuales tienen propiedades algebraicas como ser subgrupos o subespacios vectoriales. Ahora nos preguntamos por la medibilidad de las bases de Hamel en si.

Teorema 3.1.9. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^d$ una base de Hamel. Si H es Lebesgue medible entonces $\lambda_d(H) = 0$. Más aun, si H tiene la propiedad de Baire entonces H es de primera categoría en $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. Veamos que H no tiene la propiedad de Steinhaus, entonces por los Teoremas 1.2.16 y 1.4.17 se sigue el resultado. Sea $h \in H$ fijo y $\epsilon > 0$, entonces por la densidad de $h\mathbb{Q}$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < |qh| < \epsilon$. Si $qh \in H \ominus H$ entonces existen $h_1, h_2 \in H$, $h_1 \neq h_2$ tales que $qh = h_1 - h_2$ por lo cual qh tiene dos expresiones distintas como combinación lineal de elementos de H, lo cual contradice la independencia lineal de H. Por lo tanto para toda $\epsilon > 0$ se tiene que:

$$(-\epsilon, \epsilon) \setminus (H \ominus H) \neq \emptyset$$

y por lo tanto $H \ominus H$ no contiene niguna vecindad del cero. $\square$

Ya que sabemos que las bases de Hamel Lebesgue medibles tienen medida de Lebesgue cero y aquellas con la propiedad de Baire son de primera categoría. Con esto en mente procedemos a construir una base de Hamel Lebesgue medible y con la propiedad de Baire.

Lema 3.1.10. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto ternario de Cantor, entonces $C + C = [0, 2]$.*

Demostración. Como $C \subseteq [0, 1]$ entonces $C + C \subseteq [0, 1] + [0, 1] = [0, 2]$. Para la otra contención sea $x \in [0, 1]$ y consideremos su expansión ternaria

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \text{ con } x_i \in \{0, 1, 2\}$$

Definamos para cada $i < \omega$

$$w_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_i = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x_i \in \{1, 2\} \end{cases}, \; w = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_i}{3^i},$$

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_i = 2 \\ 0 & \text{si} \quad x_i \in \{0, 1\} \end{cases}, \; z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z_i}{3^i}.$$

Entonces $z, w \in \frac{1}{2}C$ y $x = w + z$, es decir, $[0, 1] \subseteq \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C$ y por lo tanto $[0, 2] \subseteq C + C$. $\square$

Lema 3.1.11. *Existe $A \subseteq \mathbb{R}^d$ λ_d-nulo y de primera categoría tal que $A + A = \mathbb{R}^d$.*

Demostración. Para cada $k = (k_1, \dots, k_d) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^d$ sea

$$C_k = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, x_i \in k_i C \text{ para todo } i \in \{1, \dots, d\} \right\} = \prod_{i=1}^{d} k_i C,$$

en donde $C \subseteq \mathbb{R}$ es el conjunto ternario de Cantor. Recordemos que C es λ-nulo, entonces

$$\lambda_d(C_k) = \prod_{i=1}^{d} \lambda(k_i C) = \prod_{i=1}^{d} |k_i| \, \lambda(C) = 0.$$

Por otro lado, C es denso en ninguna parte y cada $k_i C$ es homeomorfo a C. Además, $k_i C$ es cerrado y por lo tanto C_k es cerrado al ser producto de conjuntos cerrados. Más aun, dado que las proyecciones son funciones abiertas y cada $k_i C$ tiene interior vacío se tiene que C_k tiene interior vacío. De esta forma tenemos que C_k es denso en niguna parte.

Definimos el conjunto A como

$$\bigcup \left\{ C_k \,\middle|\, k \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^d \right\},$$

entonces A es λ_d-nulo y de primera categoría en $\mathbb{R}^d$.

Por el Lema 3.1.10 $[0, 2] = C + C$, es decir, para todo $k = (k_1, \dots, k_d) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^d$

$$k_i[0, 2] = k_i(C + C) = k_i C + k_i C,$$

y por lo tanto

$$\prod_{i=1}^{d} k_i[0, 2] = \prod_{i=1}^{d} (k_i C + k_i C) = \prod_{i=1}^{d} k_i C + \prod_{i=1}^{d} k_i C = C_k + C_k \subseteq A + A$$

para todo $k \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^d$. Entonces,

$$\mathbb{R}^d = \bigcup \left\{ \prod_{i=1}^{d} k_i[0, 2] \,\middle|\, k \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^d \right\} \subseteq A + A.$$

□

Teorema 3.1.12. *Existe una base de Hamel con medida de Lebesgue cero y de primera categoría.*

Demostración. Sea A como en el Lema 3.1.11 y, como consecuencia del Lema de Zorn, sea H una familia maximal con respecto a la inclusión de conjuntos de vectores en A linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$.

Veamos que H es una base de Hamel para $\mathbb{R}^d$, para esto supongamos que existe $r \in \mathbb{R}^d$ que no pertenece al subespacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ generado por H. Como $\mathbb{R}^d = A + A$ existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 + a_2 = r$, por lo que, sin perdida de generalidad, a_1 no pertenece al subespacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ generado por H o equivalentemente $H \cup \{a_1\} \subseteq A$ es linealmente independiente, lo cual contradice la maximalidad de H en A.

Entonces H es una base de Hamel contenida en A, la cual es tiene medida de Lebesgue cero y de primera categoría, por lo que H también tiene medida de Lebesgue cero y es de primera categoría. $\square$

Hemos demostrado la existencia de bases de Hamel Lebesgue medibles y con la propiedad de Baire, las cuales necesariamente tienen medida de Lebesgue cero y son de primera categoría por el Teorema 3.1.9, por lo que se tiene la siguiente interrogante: ¿Son todas las bases de Hamel Lebesgue medibles y tienen la propiedad de Baire? Procederemos con la costrucción de una base de Hamel la cual no es Lebesgue medible ni tiene la propiedad de Baire por ser un conjunto de Bernstein (Teoremas 2.2.7 y 2.2.8).

Teorema 3.1.13. *Existe una base de Hamel para $\mathbb{R}^d$ la cual es un conjunto de Bernstein y por lo tanto no es Lebesgue medible ni tiene la propiedad de Baire.*

Demostración. La construcción es muy similar a la del Teorema 2.1.1. Sea α el primer ordinal con cardinalidad $\mathfrak{c}$ y hagamos que $\{P_\xi \mid \xi < \alpha\}$ sea la colección de todos los subconjuntos cerrados no numerables de $\mathbb{R}^d$. Supongamos que para $\beta < \alpha$ hemos definida una β-sucesión $\langle x_\xi \rangle_{\xi<\beta}$ de elementos en $\mathbb{R}^d$ la cual es linealmente independiente con respecto a $\mathbb{Q}$ y $x_\xi \in P_\xi$ para todo $\xi < \beta$. Sea T_β el subespacio lineal sobre $\mathbb{Q}$ generado por $\{x_\xi \mid \xi < \beta\}$. De esta manera

$$\operatorname{card}(T_\beta) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{Q}) \cdot \operatorname{card}(\beta) < \mathfrak{c}$$

por lo que podemos elegir $x \in P_\beta \setminus T_\beta$ y hacer $x_\beta = x$. Con esto tenemos construida una α-sucesión $\langle x_\xi \rangle_{\xi<\alpha}$ linealmente independiente con respecto a $\mathbb{Q}$ y con $x_\xi \in P_\xi$ para todo $\xi < \alpha$. Por el Lema de Zorn podemos extender $\{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$ a una base de Hamel H. Por construcción $\mathbb{R}^d \setminus H$ es totalmente imperfecto.

Observemos que para $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene que $(H+x) \cap H \neq \emptyset$ si y solo si $x = h_1 - h_2$ para algunos $h_1, h_2 \in H$ si y solo si, por la unicidad de la expansion en términos de la base, x es combinación lineal de dos elementos de H y por lo tanto existe $x \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$(H + x) \cap H = \emptyset,$$

o equivalentemente

$$H \subseteq \mathbb{R}^d \setminus (H + x) = (\mathbb{R}^d \setminus H) + x.$$

Como este último es totalmente imperfecto, H es totalmente imperfecto y H es de Bernstein. □

Estudiando propiedades algebráicas de los conjuntos podemos ver del Teorema 3.1.11 que la suma algebráica de conjuntos nulos o de primera categoría no tiene por que ser nulo ni de primera categoría, a continuación probaremos más, la suma de conjuntos nulos o de primera categoría no tiene por que ser medible o tener la propiedad de Baire.

Teorema 3.1.14. *Existen conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ con medida de Lebesgue cero tales que $A + B$ no es Lebesgue medible. Analogamente existen $A', B' \subseteq \mathbb{R}^d$ de primera categoría en $\mathbb{R}$ tales que $A' + B'$ no tiene la propiedad de Baire.*

Demostración. Sea $H \subseteq \mathbb{R}^d$ una base de Hamel con medida de Lebesgue cero y de primera categoría (Teorema 3.1.12). Para cada $x \in \mathbb{R}^d$ denotemos por $\sum_{h \in H} q_h(x) h$ a la representación única de x en términos de la base H con coeficientes $q_h(x) \in \mathbb{Q}$.

Sea $n < \omega$ y definamos el conjunto

$$E_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \operatorname{card}(\{h \in H \mid q_h(x) \neq 0\}) \leqslant n \right\}$$

de elementos en $\mathbb{R}^d$ que requieren a lo más n términos no nulos en su representación. Por ser H base, todo elemento en $\mathbb{R}^d$ es combinación lineal finita de elementos en H, es decir,

$$\mathbb{R}^d = \bigcup \{E_n \mid n < \omega\}$$

y $\{0\} = E_0$ y $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n < \omega$. Sea $m < \omega$ el primer natural tal que $(\lambda_d)^*(E_m) > 0$ y $m' < \omega$ el primer natural tal que $E_{m'}$ no es de primera categoría en $\mathbb{R}^d$. Por elección de la base de Hamel H esta es de primera cateogoría y $\lambda_d(H) = 0$ y como

$$E_1 = \mathbb{Q}H = \bigcup \{qH \mid q \in \mathbb{Q}\},$$

entonces E_1 es de primera categoría y

$$(\lambda_d)^*(E_1) \leqslant \sum_{q\in\mathbb{Q}} (\lambda_d)^*(qH) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda_d(qH) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} q\lambda_d(H) = 0,$$

es decir, $m, m' > 1$.

Veamos que E_n no tiene la propiedad de Steinhaus para todo $n < \omega$. Dado $n < \omega$ sean $\{h_1, \dots, h_{2n+1}\} \subseteq H$ elementos distintos de H y

$$h = \sum_{i=1}^{2n+1} h_i,$$

entonces $h \neq 0$ por la unicidad de la representación. Sea $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, entonces como cualquier elemento de $E_n + qh$ tiene por lo menos $n+1$ coeficientes no nulos en su representación en términos de H se tiene que:

$$E_n \cap (qh + E_n) = \emptyset.$$

Por el Teorema de Steinhaus (Teorema 1.2.16) y su análogo para categoría (Teorema 1.4.17) concluimos que E_n no es Lebesgue medible para ningún $m \leqslant n < \omega$ y no tiene la propiedad de Baire para ningún $m' \leqslant n < \omega$. Por definición de la colección $\{E_n \mid n < \omega\}$ se tiene que $E_{2n} = E_n + E_n$ y $E_{2n+1} = E_{2n} + E_1$ para todo $n < \omega$.

Si m es par, entonces $m = 2k$ para algún $k < \omega$ con $k < m$ por lo que E_k tiene medida de Lebesgue cero por definición de m y $E_m = E_k + E_k$ no es Lebesgue medible. Si m es impar, entonces $m = 2k+1$ para algún $k < \omega$, $2k < m$ por lo que E_{2k} tiene medida de Lebesgue cero por definición de m y $E_m = E_{2k} + E_1$ no es Lebesgue medible.

Si m' es par, entonces $m' = 2k$ para algún $k < \omega$ con $k < m'$, por lo que E_k es de primera categoría por definición de m' y $E_{m'} = E_k + E_k$ no tiene la propiedad de Baire. Si m' es impar, entonces $m' = 2k+1$ para algún $2k < \omega$, $k < m'$ por lo que E_{2k} es de primera categoría por definición de m' y $E_{m'} = E_{2k} + E_1$ no tiene la propiedad de Baire. $\square$

Ahora daremos otra construcción de conjuntos no medibles asociados a una base de Hamel. Sabemos que cualequier base de Hamel H tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$, por lo que podemos darle un buen orden a H de la forma $\{h_\xi \mid \xi < \alpha\}$ donde α denota el primer ordinal con cardinalidad $\mathfrak{c}$. Con esto en mente fijemos una base de

Hamel ordenada $H = \{h_\xi \mid \xi < \alpha\}$. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}^d$ tenemos una única representación de x como combinación lineal de elementos de H

$$x = \sum_{\xi<\alpha} q_\xi(x) h_\xi$$

con coeficientes $q_\xi(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $\xi < \alpha$ tales que

$$\operatorname{card}(\{\xi < \alpha \mid q_\xi(x) \neq 0\}) < \omega.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ y sea $\beta : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \alpha$ una función tal que $\beta(x) < \alpha$ es el mayor ordinal tal que $q_{\beta(x)}(x) \neq 0$. Esta función esta bien definida por tratarse de combinaciones lineales finitas. Definamos los conjuntos

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \,\middle|\, q_{\beta(x)}(x) > 0\right\} \text{ y } B = \left\{x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \,\middle|\, q_{\beta(x)}(x) < 0\right\}.$$

Tenemos que

$$A \cup B \cup \{0\} = \mathbb{R}^d, \qquad A \cap B = \emptyset, \qquad -A = B,$$

además,

$$\operatorname{card}(A \,\triangle (A + y)) < \mathfrak{c} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{card}(B \,\triangle (B + y)) < \mathfrak{c}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^d$. Esto último ya que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ con $\beta(x) > \beta(y)$ se tiene que $q_{\beta(x+y)}(x + y) = q_{\beta(x)}(x)$ por lo que

$$x \in A \Leftrightarrow x + y \in A \text{ y } x \in B \Leftrightarrow x + y \in B,$$

de lo cual se sigue la contención

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \xi(x) > \xi(y)\right\} \subseteq \left(\mathbb{R}^d \setminus (A \,\triangle (A + y))\right) \cap \left(\mathbb{R}^d \setminus (B \,\triangle (B + y))\right).$$

Más aun

$$\operatorname{card}(\left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \xi(x) \leqslant \xi(y)\right\}) \leqslant \operatorname{card}(\xi(y)) \cdot \omega < \mathfrak{c}.$$

Supongamos que alguno de los conjuntos A o B es Lebesgue medible, entonces como $A = -B$ se tiene que ambos son Lebesgue medibles. Más aun

$$\mathbb{R}^d = A \cup B \cup \{0\},$$

por lo que $\lambda_d(A) = \lambda_d(B) > 0$. Como λ_d es métrica-transitiva con respecto a $\mathbb{Q}^d$ (Teorema 1.2.19) se tiene que

$$\lambda\left(\mathbb{R}^d \setminus \bigcup \left\{A + q \,\middle|\, q \in \mathbb{Q}^d\right\}\right) = 0.$$

Por otro lado, todo cerrado $F \subseteq A \vartriangle (A+q)$ cumple que

$$\operatorname{card}(F) \leqslant \operatorname{card}(A \vartriangle (A+q)) < \mathfrak{c}$$

y por el Teorema de Cantor-Bendixson (Teorema 2.3.25) se tiene que $\operatorname{card}(F) \leqslant \omega$ y por lo tanto $\lambda_d(F) = 0$. Por la regularidad de λ_d, y dado que $A \vartriangle (A+q)$ es medible por A serlo, se tiene que $\lambda_d(A \vartriangle (A+q)) = 0$ para todo $q \in \mathbb{Q}^d$ y por lo tanto:

$$\lambda_d \left(\bigcup \{ A \vartriangle (A+q) \mid q \in \mathbb{Q} \} \right) = 0.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$, si $x \in A + q$ para alguna $q \in \mathbb{Q}^d$ entonces

$$x \in A \vartriangle (A+q) \subseteq \bigcup \left\{ A \vartriangle (A+q) \,\middle|\, q \in \mathbb{Q}^d \right\}.$$

Por otro lado, si $x \in \mathbb{R}^d \setminus (A+q)$ para toda $q \in \mathbb{Q}^d$ entonces

$$x \in \bigcap \left\{ \mathbb{R}^d \setminus (A+q) \,\middle|\, q \in \mathbb{Q}^d \right\} = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup \left\{ A + q \,\middle|\, q \in \mathbb{Q}^d \right\}.$$

Concluimos que

$$\mathbb{R}^d \setminus A \subseteq \left(\mathbb{R}^d \setminus \bigcup \left\{ A+q \,\middle|\, q \in \mathbb{Q}^d \right\} \right) \cup \bigcup \left\{ A \vartriangle (A+q) \,\middle|\, q \in \mathbb{Q}^d \right\}$$

por lo que $\mathbb{R}^d \setminus A$ es λ_d-nulo. Pero $B \subseteq \mathbb{R}^d \setminus A$ y $\lambda_d(B) > 0$, una contradicción, por lo tanto A y B no son Lebesgue medibles.

3.2. Ecuación funcional de Cauchy

Las bases de Hamel fueron desarrolladas para resolver un problema muy concreto, este problema era encontrar todas las soluciones de la ecuación funcional de Cauchy:

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Equivalentemente, encontrar todos lo morfismos de grupo $f : (\mathbb{R}^d, +) \to (\mathbb{R}, +)$.

Teorema 3.2.1. *Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una solución a la ecuación funcional de Cauchy. Entonces $f(qx) = qf(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}^d, q \in \mathbb{Q}$.*

Demostración. Como f es un morfismo de grupos,

$$f(kx) = kf(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{Z}.$$

Sea $k \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$f(x) = f\left(\frac{k}{k}x\right) = kf\left(\frac{1}{k}x\right),$$

es decir,

$$f\left(\frac{1}{k}x\right) = \frac{1}{k}f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{Z}.$$

Por último, para todo $k, m \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$

$$f\left(\frac{m}{k}x\right) = mf\left(\frac{1}{k}x\right) = \frac{m}{k}f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d,$$

por lo cual $f(qx) = qf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d, q \in \mathbb{Q}$. □

Este Teorema nos dice que las soluciones a la ecuación funcional de Cauchy son transformaciones $\mathbb{Q}$-lineales. Hoy en día es natural pensar que para encontrar todas las soluciones a la ecuación funcional de Cauchy hay que considerar a $\mathbb{R}^d$ como un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, con lo que precisamente las soluciones están dadas por las $\mathbb{Q}$-transformaciones lineales de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}$. De hecho, dada la existencia de una base de Hamel H para $\mathbb{R}^d$, podemos caracterizar todas las soluciones ya que estas están en correspondencia biyectiva de manera natural con las funciones $f : H \to \mathbb{R}$.

Este enfoque al problema no es el que se le dio originalmente al problema, ya que las únicas soluciones que se conocen explicitamente (sin utilizar el Axioma de Elección) son precisamente las transformaciones lineales, las cuales son, por el Teorema de representaciónde Riesz, de la forma $f(x) = \langle x, y\rangle$ para $y \in \mathbb{R}^d$ fijo. A cualquier solución de este tipo se le conoce como solución trivial.

Teorema 3.2.2. *Si f es una solución continua a la ecuacion funcional de Cauchy entonces f es una solución trivial.*

Demostración. Sea $y = (f(e_1), \ldots, f(e_d)) \in \mathbb{R}^d$ donde $\{e_i \mid i \in \{1, \ldots, d\}\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^d$, entonces la función $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \langle x, y\rangle$ es continua y por el Teorema 3.2.1 $f|_{\mathbb{Q}^d} = g|_{\mathbb{Q}^d}$. Como $\mathbb{Q}^n$ es denso y f, g continuas, entonces $f = g$. □

Basados en la existencia de una base de Hamel procedemos a exhibir una solución no trivial a la ecuación funcional de Cauchy.

Teorema 3.2.3. *Existen soluciones no triviales a la ecuación funcional de Cauchy.*

Demostración. Sea H una base de Hamel, entonces para cada $x \in \mathbb{R}^d$ existen coeficientes únicos $\{q_h(x) \mid h \in H\} \subseteq \mathbb{Q}$ tales que

$$x = \sum_{h \in H} q_h(x)h \qquad \operatorname{card}(\{h \in H \mid q_h(x) \neq 0\}) < \omega.$$

De esta manera tenemos definido para cada $h \in H$ la función $q_h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{Q}$.

Como

$$x + y = \sum_{h \in H} q_h(x)h + \sum_{h \in H} q_h(y)h = \sum_{h \in H} (q_h(x) + q_h(y))h$$

y por la unicidad de la representación tenemos que

$$q_h(x) + q_h(y) = q_h(x + y) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^d,$$

por lo que q_h es solución a la ecuación funcional de Cauchy. Más aun, $q_h(0) = 0$, $q_h(h) = 1$ y la imagen de q_h esta contenida en $\mathbb{Q}$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio f no es continua. □

El siguiente resultado muestra parte del asombroso comportamiento de las soluciones no triviales, al menos para el caso $d = 1$.

Teorema 3.2.4. *Para una solución $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la ecuación funcional de Cauchy es equivalente:*

i) la gráfica de f es densa en $\mathbb{R}^2$;

ii) f es una solución no trivial a la ecuación funcional de Cauchy.

Demostración.

i) $\Rightarrow$ ii) Si f es una solución trivial entonces su gráfica Γ_f es una linea recta en $\mathbb{R}^2$, la cual no es densa.

ii) $\Rightarrow$ i) Como f no es solución trivial existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \neq \frac{f(x_2)}{x_2}.$$

Sean $u = (x_1, f(x_1)), v = (x_2, f(x_2)) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\det(u, v) = x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1) \neq 0$$

por lo que u, v son elementos de la gráfica de f linealmente independientes. Esto quiere decir que

$$\{au + bv \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

y de esta manera el conjunto

$$D = \{q_1 u + q_2 v \mid q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\}$$

es denso en $\mathbb{R}^2$.

Como f es $\mathbb{Q}$-lineal (Teorema 3.2.1) para todo $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$,

$$q_1 + q_2 v = (q_1 x_1 + q_2 x_2, q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) = (q_1 x_1 + q_2 x_2, f(q_1 x_1 + q_2 x_2)) \in \Gamma_f,$$

es decir, $D \subseteq \Gamma_f$ y por lo tanto la gráfica de f es densa en $\mathbb{R}^2$. $\square$

Para poder seguir probando resultados sobre las soluciones a la ecuación de Cauchy es necesario tener condiciones equivalentes que garantizen la continuidad de funciones aditivas de $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}$.

Teorema 3.2.5. *Si f es solución a la ecuación funcional de Cauchy entonces es equivalente:*

i) f es continua en el cero;

ii) f es continua;

iii) f es acotada en alguna vecindad del cero.

Demostración.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Dada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ con $||x|| < \delta$ se tiene que

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| < \epsilon,$$

por lo que dado $x_0 \in \mathbb{R}^d$ fijo se tiene que para todo $y \in \mathbb{R}^d$ con $||x_0 - y|| < \delta$ se cumple:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - y)| < \epsilon$$

por lo que f es continua en x_0 para todo $x_0 \in \mathbb{R}^d$, es decir, f es continua *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* Por continuidad existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)| < 1$ si $|x| < \delta$, es decir f es acotada en la vecindad del cero $B_\delta(0)$, la bola abierta con centro en 0 y radio δ.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Sea $h > 0$ tal que f es acotada en $B_h(0)$, entonces existe $N < \omega$ tal que $|f(x)| < N$ para todo $x \in B_h(0)$. Dada $\epsilon > 0$ sea $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$, entonces para toda $x \in B_{\frac{h}{Nk}}(0)$ se tiene que $Nkx \in B_h(0)$ y por lo tanto $|f(Nkx)| < N$. Como f es aditiva y $Nk \in \mathbb{Z}^+$

$$Nk\,|f(x)| = |Nkf(x)| = |f(Nkx)| < N,$$

es decir, $|f(x)| < \frac{1}{k} < \epsilon$ y por lo tanto f es continua en cero. $\square$

Este resultado nos muestra que para una solucion de la ecuación funcional de Cauchy la condición de ser acotada en una vecindad del cero implica automáticamente la continuidad de la función. Siguiendo esta linea tenemos que a pesar de que la noción de medibilidad es bastante mas débil que la de continuidad resulta ser que si f es solución a la ecuación funcional de Cauchy Lebesgue medible, o con la propiedad de Baire, entonces f es solucíon trivial.

Teorema 3.2.6. *Sea f una solución a la ecuación funcional de Cauchy. Si f es Lebesgue medible, o tiene la propiedad de Baire, entonces f es solución trivial.*

Demostración. Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es solución a la ecuación de Cauchy y es Lebesgue medible o tiene la propiedad de Baire entonces, para cada $n < \omega$

$$f^{-1}[[-n,n]]$$

es Lebesgue medible o tiene la propiedad de Baire y como

$$\mathbb{R}^d = \bigcup \left\{ f^{-1}[[-n,n]] \,\middle|\, n < \omega \right\}$$

existe $n < \omega$ tal que $\lambda_d(f^{-1}[[-n,n]]) > 0$ ó $f^{-1}([-n,n])$ es de segunda categoría y por la propiedad de Steinhaus (Teoremas 1.2.16 y 1.4.17),

$$f^{-1}[[-n,n]] \ominus f^{-1}[[-n,n]]$$

es una vecindad del cero. Además, como f es aditiva

$$\begin{aligned} f(f^{-1}[[-n,n]] \ominus f^{-1}[[-n,n]]) &= f(f^{-1}[[-n,n]]) \ominus f(f^{-1}[[-n,n]]) \\ &\subseteq [-n,n] \ominus [-n,n] \\ &= [-2n,2n], \end{aligned}$$

por lo cual f es acotada en una vecindad del cero. Por los Teoremas 3.2.5 y 3.2.2 se concluye que f es solución trivial. $\square$

3.3. Desigualdad de Jensen y convexidad

Definición 3.3.1. *Se dice que $D \subseteq \mathbb{R}^d$ es C-convexo ($C \subseteq \mathbb{R}$) si para todo $x, y \in D$, $\alpha \in C \cap (0,1)$ se tiene que $\alpha x + (1-\alpha)y \in D$. Si $(0,1) \subseteq C$ simplemente se dice que D es convexo. Otros casos frecuentes son $C = \mathbb{Q}$ o $C = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.*

Definición 3.3.2. *Dado cualquier subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$ se denota por $C(A)$ al casco C-convexo de A ($C \subseteq \mathbb{R}$), el cual es el menor conjunto C-convexo que contiene a A.*

Definición 3.3.3. *Dado $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un subconjunto abierto y convexo, una función $f : D \to \mathbb{R}$ se dice convexa si para todo $x, y \in D$, $\alpha \in (0,1)$ ($C = (0,1)$) se tiene que*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Por otro lado, se dice que f cumple la desigualdad de Jensen si para todo $x, y \in D$ se cumple que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

tambien conocida como función convexa de punto medio ($C = \{\frac{1}{2}\}$).

Por el Teorema 3.2.1 tenemos que cualquier solución a la ecuación funcional de Cauchy satisface la desigualdad de Jensen en forma de igualdad. Además de que cualquier solución trivial es una función convexa, por lo que cual buscamos desarrollar en esta sección resultados análogos a la sección anterior, es decir, buscaremos condiciones bajo las cuales una función que satisface la desigualdad de Jensen es convexa. La condición mas general esta dada en el Teorema de Bernstein-Doetsch.

Teorema 3.3.4. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo y abierto. Si f satisface la desigualdad de Jensen entonces para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para todo $x_1, \ldots, x_n \in D$ se tiene que*

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Demostración. El caso $n = 1$ es la igualdad $f(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Supongamos que el resultado es cierto para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$. Sean $x_1, \ldots, x_{2n} \in D$

y para $i \in \{1, \dots, n\}$ sea $y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{2n-i}) \in D$. Entonces por hipótesis y la desigualdad de Jensen

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i\right) &= f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(y_i) \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f(x_i)+f(x_{2n-i})}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f(x_i). \end{aligned}$$

Por inducción el resultado es valido para 2^n con $n \in \mathbb{Z}^+$. Dados $k \in \mathbb{Z}^+$ y $x_1, \dots, x_k \in D$ sea $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $k < 2^n$. Definimos $x_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j \in D$ para $i \in \{k+1, \dots, 2n\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} x_i &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{2^n} x_{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(k\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i + (2^n-k)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(2^n\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right) &= f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} f(x_i) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{i=1}^{k} f(x_i) + (2^n-k) f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\right) \end{aligned}$$

es decir,

$$f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right) \leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(x_i)$$

la cual es la desigualdad deseada. □

Teorema 3.3.5. *Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ cumple la desigualdad de Jensen entonces para todo $q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$*

$$f(qx + (1-q)y) \leqslant qf(x) + (1-q)f(y).$$

Demostración. Sea $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, entonces existen $n, k \in \mathbb{Z}^+$ tales que $q = \frac{k}{n}$ y $0 < k < n$. Definimos $x_i = x$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $x_i = y$ para $i \in \{k+1, \ldots, n\}$. Por el Teorema 3.3.4:

$$\begin{aligned} f(qx + (1-q)y) &= f\left(\frac{kx + (n-k)y}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{(kf(x) + (n-k)f(y))}{n} \\ &= qf(x) + (1-q)f(y). \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.3.6. *Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es continua y cumple la desigualdad de Jensen entonces f es convexa.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \in (0,1)$ y $\langle q_n \rangle_{n<\omega} \subseteq \mathbb{Q} \cap (0,1)$ una sucesión convergente a α. Como f es continua

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \lim_{n\to\infty} f(q_n x + (1-q_n)y)$$

y por el Teorema 3.3.5

$$\lim_{n\to\infty} f(q_n x + (1-q_n)y) \leqslant \lim_{n\to\infty} q_n f(x) + (1-q_n)f(y) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y),$$

por lo tanto f es convexa. $\square$

Hemos visto que la continuidad garantiza la convexidad para una función que cumple la desigualdad de Jensen, sin embargo, como veremos más adelante, no se puede garantizar la continuidad para estas. A pesar de esto, como veremos en los siguientes resultados, existe una forma débil de continuidad que si satisfacen.

Lema 3.3.7. *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo, abierto, $x \in D$, $r \in \mathbb{R}^d$, $m, k \in \mathbb{Z}^+$ tales que $m < k$, $x \pm kr \in D$. Si $f : D \to \mathbb{R}$ satisface la desigualdad de Jensen entonces:*

$$\frac{f(x) - f(x-kr)}{k} \leqslant \frac{f(x) - f(x-mr)}{m} \leqslant \frac{f(x+mr) - f(x)}{m} \leqslant \frac{f(x+kr) - f(x)}{k}.$$

Demostración. Sean $x_i = x + kr$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $x_i = x$ para $i \in \{m+1, \ldots, k\}$, entonces por el Teorema 3.3.5

$$f\left(\frac{m(x+kr) + (k-m)x}{k}\right) \leqslant \frac{mf(x+kr) + (k-m)f(x)}{k},$$

es decir,

$$kf(x+kr) \leqslant mf(x+kr) + (k-m)f(x)$$

y

$$k(f(x+mr) - f(x)) \leqslant m(f(x+kr) - f(x))$$

lo que prueba la última desigualdad. La primer desigualdad se obtiene al remplazar r por $-r$.

La desigualdad central es consecuencia directa de que f satisface la desigualdad de Jensen, es decir,

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}((x+mr) + (x-mr))\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x+mr) + f(x-mr))$$

por lo que

$$f(x) - f(x-mr) \leqslant f(x+mr) - f(x),$$

lo cual prueba dicha desigualdad. $\square$

Lema 3.3.8. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo, abierto y sea $f : D \to \mathbb{R}$ que satisface la desigualdad de Jensen. Si f es acotada en un conjunto $A \subseteq D$ entonces f es acotada superiormente en $\mathbb{Q}(A)$ el casco $\mathbb{Q}$-convexo de A.*

Demostración. Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant M$ para todo $x \in A$ y

$$C = \{x \in D \mid f(x) \leqslant M\}$$

Sean $x, y \in C$ y $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, por el Teorema 3.3.5

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \leqslant M$$

entonces $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$ por lo que C es $\mathbb{Q}$-convexo. Como $A \subseteq C$ tenemos que $\mathbb{Q}(A) \subseteq C$, es decir f es acotada superiormente en $\mathbb{Q}(A)$. $\square$

Lema 3.3.9. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo, abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ que satisface la desigualdad de Jensen. Sean $x, y \in D$ entonces f es acotada inferiormente en $\mathbb{Q}(\{x,y\})$.*

Demostración. Dados $x, y \in D$ por el Lema 3.3.8 existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) \leqslant M$ para todo $t \in \mathbb{Q}(\{x,y\})$. Sea $t \in \mathbb{Q}(\{x,y\})$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ tal que

$$t = \lambda x + (1-\lambda)y.$$

Sean $u = \frac{1}{2}(x+y)$ y $v = 2u - t = \lambda y + (1-\lambda)x$, entonces $u, v \in \mathbb{Q}(\{x,y\})$. En particular $f(v) \leqslant M$. Como $u = \frac{1}{2}(v+t)$ entonces

$$f(u) \leqslant \frac{1}{2}(f(u) + f(t))$$

y por lo tanto

$$f(t) \geqslant 2f(u) - f(t) \geqslant 2f(u) - M.$$

Como u no depende de t vemos que f es acotada inferiormente en $\mathbb{Q}(\{x,y\})$. $\square$

Teorema 3.3.10. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo, abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ que satisface la desigualdad de Jensen. Sean $x, y \in D$, entonces $f|_{\mathbb{Q}(\{a,b\})}$ es uniformemente continua.*

Demostración. Sean $a, b \in D$. Si $a = b$ entonces $\mathbb{Q}(\{a,b\}) = \{a\}$ por lo que trivialmente $f|_{\mathbb{Q}(\{a,b\})}$ es uniformemente continua. Supongamos que $a \neq b$, como D es abierto existe $\rho \in \mathbb{Q}^+$ tal que

$$a' = a - \rho(b-a) \in D \qquad \text{y} \qquad b' = b + \rho(b-a) \in D.$$

Esto lo podemos escribir de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\rho) & -\rho \\ -\rho & (1+\rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

y como el determinante del sistema es igual a $(1+\rho)^2 - (-\rho)^2 = 1 + 2\rho > 0$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{1+2\rho} \begin{pmatrix} (1+\rho) & \rho \\ \rho & (1+\rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix},$$

por lo que tenemos expresados a a y b en terminos de a' y b' como

$$a = \frac{1+\rho}{1+2\rho}a' + \frac{\rho}{1+2\rho}b' \qquad \text{y} \qquad b = \frac{\rho}{1+2\rho}a' + \frac{1+\rho}{1+2\rho}b'.$$

Veamos que $\mathbb{Q}(\{a,b\}) \subseteq \mathbb{Q}(\{a',b'\})$. Dado $t \in \mathbb{Q}(\{a,b\})$ existe $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ tal que $t = \lambda a + (1-\lambda)b$ por lo que

$$\begin{aligned} t &= \lambda a + (1-\lambda)b = \lambda\left(\frac{1+\rho}{1+2\rho}a' + \frac{\rho}{1+2\rho}b'\right) + (1-\lambda)\left(\frac{\rho}{1+2\rho}a' + \frac{1+\rho}{1+2\rho}b'\right) \\ &= \frac{\lambda+\rho}{1+2\rho}a' + \frac{1+\rho-\lambda}{1+2\rho}b' = \frac{\lambda+\rho}{1+2\rho}a' + \left(1 - \frac{\lambda+\rho}{1+2\rho}\right)b' \end{aligned}$$

Como $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $\rho \in \mathbb{Q}^+$ esta última es una $\mathbb{Q}$-combinación lineal convexa de a' y b', es decir, $t \in \mathbb{Q}(\{a,b\})$.

Por los Lemas 3.3.8 y 3.3.9 existen $K, M \in \mathbb{R}$ tales que $K \leqslant f(x) \leqslant M$ para toda $x \in \mathbb{Q}(\{a',b'\})$. Dada $\epsilon > 0$ sea $k \in \mathbb{Z}^+$ la parte entera de $\frac{M-K}{\epsilon} + 1$, entonces

$$\frac{M-K}{\epsilon} < k.$$

Sean $\delta = \frac{\rho}{k} \left|\left|b-a\right|\right| > 0$ y $x, x' \in Q(\{a,b\})$ tales que $||x-x'|| < \delta$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ tales que

$$x' = \alpha a + (1-\alpha) b \qquad \text{y} \qquad x'' = \beta a + (1-\beta) b,$$

entonces $x' - x'' = (\beta - \alpha)(b-a)$ y por lo tanto

$$|\beta - \alpha| \left|\left|b-a\right|\right| = ||x-x'|| < \delta = \frac{\rho}{k} \left|\left|b-a\right|\right|,$$

es decir,

$$-\rho < k \left|\beta - \alpha\right| < \rho.$$

Para $i \in \{1,2\}$ sea

$$\mu_i = \frac{\rho + \alpha + (-1)^i k(\beta - \alpha)}{1 + 2\rho} \in \mathbb{Q},$$

entonces

$$0 \leqslant \frac{\alpha}{1+2\rho} < \mu_i < \frac{\alpha + 2\rho}{1+2\rho} \leqslant 1$$

y por lo tanto $\mu_i \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Además,

$$\begin{aligned}
\mu_i a' + (1-\mu_i) b' &= (\alpha + (-1)^i k(\beta-\alpha)) a + ((1-\alpha) + (-1)^{i+1} k(\beta - \alpha)) b \\
&= \alpha a + (1-\alpha) b + (-1)^i k(\beta - \alpha)(b-a) \\
&= x' + (-1)^i k(x' - x'')
\end{aligned}$$

por lo que $x' + (-1)^i k(x'-x'') \in \mathbb{Q}(\{a',b'\}) \subseteq D$ y por el Lema 3.3.7 aplicado a $x = x', r = x' - x''$ y $m = 1$ obtenemos que

$$\frac{K-M}{k} \leqslant \frac{f(x') - f(x'-kr)}{k} \leqslant f(x') - f(x'') \leqslant \frac{f(x'+kr) - f(x')}{k} \leqslant \frac{M-K}{k}$$

pues $x', x' \pm kr \in \mathbb{Q}(\{a',b'\})$ y $K \leqslant f(t) \leqslant M$ para todo $t \in \mathbb{Q}(\{a',b'\})$. Entonces,

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \frac{M-K}{k} < \epsilon$$

por lo que $f|_{\mathbb{Q}(\{a,b\})}$ es uniformemente continua. □

Como primer paso hemos obtenido que la continuidad de una función que satisface la desigualdad de Jensen garantiza la convexidad de ésta. En el Teorema 3.2.5 vimos que si una solución a la ecuación funcional de Cauchy es acotada en una vecindad del cero, entonces es una solución trivial. Como veremos a continuación, para el caso de convexidad esta condición se puede debilitar aún más.

Definición 3.3.11. *Dados $D \subseteq \mathbb{R}^d$ y $f : D \to \mathbb{R}$ se dice que f es localmente acotada, localmente acotada superiormente o localmente acotada inferiormente en $x_0 \in D$ si existe una vecindad $V \subseteq D$ de x_0 tal que f es acotada, acotada superiormente o acotada inferiormente, respectivamente, en V.*

Evidentemente f es localmente acotada en x_0 si y solamente si f es localmente acotada superiormente y localmente acotada inferiormente en x_0.

Teorema 3.3.12. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo, abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ que cumple la desigualdad de Jensen. Si f es localmente acotada superiormente en un punto $x_0 \in D$ entonces f es localmente acotada superiormente en x para todo $x \in D$.*

Demostración. Sea $x \in D \setminus \{x_0\}$ y $q \in \mathbb{Q}^+$ tal que $y = x - q(x_0 - x) \in D$, el cual existe por D ser abierto. Sea $\lambda = \frac{q}{q+1} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda x_0 + (1-\lambda)y &= \frac{q}{q+1}x_0 + \frac{1}{q+1}(x - q(x_0 - x)) \\ &= \frac{q}{q+1}x_0 + \frac{1}{q+1}((1+q)x - qx_0) = x \end{aligned}$$

es una $\mathbb{Q}$-combinacion lineal convexa de elementos en D. Por hipótesis existen $M, r > 0$ tal que $V = B_r(x_0) \subseteq D$ y $f(t) \leqslant M$ para todo $t \in V$. Sea $U = B_{\lambda r}(x)$, $u \in U$ y

$$t = \frac{u - (1-\lambda)y}{\lambda}.$$

Como $|u - \lambda x_0 - (1-\lambda)y| = |u - x| < \lambda r$, entonces

$$\left| \frac{u - (1-\lambda)y}{\lambda} - x_0 \right| < r,$$

es decir, $t \in V \subseteq D$. Por otro lado $u = \lambda t + (1-\lambda)y$, $t, y \in D$, $\lambda \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ y D es convexo, entonces $u \in D$, esto para todo $u \in U$, es decir, $U \subseteq D$. Por el Teorema 3.3.5

$$f(u) \leqslant \lambda f(t) + (1-\lambda)f(y) \leqslant \lambda M + (1-\lambda)f(y) \leqslant \max\{M, f(y)\},$$

por lo que f es acotada superiormente en la vecindad $U \subseteq \mathbb{R}^d$ de x y f es localmente acotada superiormente en x. $\square$

Tambien se tiene el análogo inferior.

Teorema 3.3.13. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo, abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ que cumple la desigualdad de Jensen. Si f es localmente acotada inferiormente en un punto $x_0 \in D$ entonces f es localmente acotada inferiormente en x para todo $x \in D$.*

Demostración. Sea $x \in D \setminus \{x_0\}$ y $q \in \mathbb{Q}^+$ tal que $y = x_0 - q(x - x_0) \in D$, el cual existe por D ser abierto. Sea $\lambda = \frac{q}{q+1} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ entonces

$$\begin{aligned}\lambda x + (1-\lambda)y &= \frac{q}{q+1}x + \frac{1}{q+1}(x_0 - q(x - x_0)) \\ &= \frac{q}{q+1}x + \frac{1}{q+1}((1+q)x_0 - qx) = x_0\end{aligned}$$

es una $\mathbb{Q}$-combinación lineal convexa de elementos en D. Por hipótesis existen $m, r > 0$ tal que $V = B_r(x_0) \subseteq D$ y $f(t) \geqslant m$ para todo $t \in V$. Podemos suponer que $r > 0$ es suficientemente pequeña para que $U = B_{\frac{r}{\lambda}}(x)$ este contenido en D. Sea $u \in U$ y $t = \lambda u + (1-\lambda)y$ entonces

$$|t - x_0| = |\lambda u + (1-\lambda)y - x_0| = |\lambda u - \lambda x| = \lambda\,|u - x| < r$$

por lo que $t \in V$. Por el Teorema 3.3.5

$$f(t) \leqslant \lambda f(u) + (1-\lambda)f(y)$$

y como $f(t) \geqslant m$

$$f(u) \geqslant \frac{1}{\lambda}f(t) - \frac{1-\lambda}{\lambda}f(y) \geqslant \frac{1}{\lambda}m - \frac{1-\lambda}{\lambda}f(y) = \left(1 + \frac{1}{q}\right)m - \frac{1}{q}f(y).$$

Como este último termino no depende de u se tiene que f es acotada inferiormente en una vecindad U de x para toda $x \in X$, es decir f es localmente acotada inferiormente. $\square$

Teorema 3.3.14. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo, abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ que cumple la desigualdad de Jensen. Si f es localmente acotada superiormente en un punto $x_0 \in D$ entonces f es localmente acotada en x para todo $x \in D$.*

Demostración. Por los Teoremas 3.3.12 y 3.3.13 es suficiente ver que f también es localmente acotada inferiormente en x_0.

Sean $r, M > 0$ tales que $f(t) \leqslant M$ para todo $t \in V = B_r(x_0)$. Sea $u \in V$ y definamos $t = 2x_0 - u$, de esta manera $x_0 = \frac{1}{2}(t+u)$ y $|t - x_0| = |u - x_0| < r$, lo que muestra que $t \in V$. Como f satisface la desigualdad de Jensen

$$f(x_0) \leqslant \frac{1}{2}(f(t) + f(u))$$

y como $f(t) \leqslant M$,

$$f(u) \geqslant 2f(x_0) - f(t) \geqslant 2f(x_0) - M$$

por lo que f es acotada inferiormente por $m = 2f(x_0) - M$ en U, es decir f es localmente acotada inferiormente en x_0. □

Teorema 3.3.15 (Teorema de Bernstein-Doetsch). *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo, abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ que satisface la desigualdad de Jensen. Si f es localmente acotada superiormente en algún punto $x_0 \in D$ entonces f es continua y por lo tanto convexa.*

Demostración. Por el Teorema 3.3.14 f es localmente acotada en x para toda $x \in D$. Fijemos $x_0 \in D$ y veamos que f es continua en x_0. Sean $M, r > 0$ tales que $|f(t)| \leqslant M$ para todo $t \in V = B_r(x_0)) \subseteq D$. Si $x \in V \setminus \{x_0\}$, entonces $0 < |x - x_0| < r$ por lo que existe $\lambda \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ tal que

$$\frac{|x - x_0|}{r} < \lambda < 2\frac{|x - x_0|}{r}.$$

Definamos $y = x_0 + \frac{1}{\lambda}(x - x_0)$ y $z = x_0 - \frac{1}{\lambda}(x - x_0)$, por la elección de λ se cumple que

$$|y - x_0| = \frac{1}{\lambda}|x - x_0| < r \text{ y } |z - x_0| = \frac{1}{\lambda}|x - x_0| < r$$

por lo que $y, z \in V$. Por otro lado, se tiene que $x = \lambda y + (1-\lambda)x_0$ y $x_0 = \frac{1}{\lambda+1}x + \frac{\lambda}{\lambda+1}z$ y por el Teorema 3.3.5

$$f(x) \leqslant \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x_0), \qquad f(x_0) \leqslant \frac{1}{\lambda+1} f(x) + \frac{\lambda}{\lambda+1} f(z),$$

es decir,

$$f(x) - f(x_0) \leqslant \lambda(f(y) - f(x_0)), \qquad f(x_0) - f(x) \geqslant \lambda(f(x_0) - f(z)).$$

De estas desigualdades y como $x_0, y, z \in V$, vecindad en la cual f esta acotada por $[-M, M]$, se tiene que

$$-2M\lambda \leqslant f(x) - f(x_0) < 2M\lambda$$

o equivalentemente,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant 2M\lambda.$$

Por elección de λ se tiene que

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{4M}{r} |x - x_0|$$

y dado que esta última desigualdad es valida para toda $x \in V$ esto prueba la continuidad de f en x_0. Como x_0 fue arbitraria, entonces f es continua. Por último, el Teorema 3.3.6 nos garantiza la convexidad de f. □

La condición de que f sea localmente acotada superiormente en algun punto x_0 del Teorema 3.3.15 no puede ser sustituida por la condición de ser localmente acotada inferiormente. Para ver esto consideremos la función exponencial $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, la cual es convexa, y sea f cualquier solución no trivial a la ecuación funcional de Cauchy (Teorema 3.2.3), entonces la composición $\exp \circ f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ cumple la desigualdad de Jensen y es acotada inferiormente por la constante 0, sin embargo esta composición no es continua. Como veremos a continuación toda función convexa es continua de manera automática (Teorema 3.3.18), por lo cual esta composición no es convexa y vemos que la convexidad y satisafacer la desigualdad de Jensen no son nociones equivalentes.

Se tienen las siguientes consecuencias de uso común del Teorema de Bernstein-Doetsch.

Corolario 3.3.16. *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo, abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ que satisface la desigualdad de Jensen. Si f es acotada superiormente en un abierto no vacío $U \subseteq D$ entonces f es continua.*

Demostración. Como U es no vacío existe $x \in U$ y U es una vecindad de x tal que f es acotada superiormente en U, por el Teorema 3.3.15 f es continua. □

Corolario 3.3.17. *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo, abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ que satisface la desigualdad de Jensen. Entonces f es continua en D o f es totalmente discontinua en D.*

Demostración. Si f es continua en algún punto $x_0 \in D$, entonces f es acotada en alguna vecindad de x_0, por el Teorema 3.3.15, f es continua. $\square$

Este resultado bien conocido lo obtenemos como consecuencia del Teorema de Bernstein-Doetsch.

Teorema 3.3.18. *Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es convexa entonces f es continua.*

Demostración. Como f es convexa, f satisface la desigualdad de Jensen. Supongamos que $\{e_i \mid i \in \{1, \ldots, d\}\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^d$ y sea $x_0 \in D$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0) \subseteq D$. Sean $y_i = x_0 + re_i,\ i \in \{1, \ldots, d\}$ y $y_{d+1} = x_0 - r\sum_{i=1}^n e_i$, donde $r > 0$ es tal que $y_i \in B_\epsilon(x_0)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por construcción el conjunto $\{y_1 - y_{i+1} \mid i \in \{1, \ldots, d\}\}$ es linealmente independiente, por lo que $\{y_i \mid i \in \{1, \ldots, d+1\}\}$ genera el simplejo de dimensión d

$$\Delta = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_i \;\middle|\; \lambda_i \geqslant 0 \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n+1\}, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\},$$

y como

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} y_i$$

Δ resulta ser vecindad de x_0.

Por otro lado, para todo $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_i \in \Delta$ y por f ser convexa se cumple que:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(y_i) \leqslant \text{máx}\,\{f(y_i) \mid i \in \{1, \ldots, n+1\}\} < +\infty,$$

es decir, f es acotada superiormente en Δ, una vecindad de x_0. Por el Teorema 3.3.15 f es continua. $\square$

Teorema 3.3.19. *Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es Lebesgue medible o tiene la propiedad de Baire y cumple la desigualdad de Jensen entonces f es convexa.*

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ consideremos el conjunto Lebesgue medible o con la propiedad de Baire

$$X_k = f^{-1}((-\infty, k]).$$

Como

$$\mathbb{R}^d = \bigcup \{X_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda(X_m) > 0$ o X_m es de segunda categoría. Por el Teorema de Steinhaus (Teorema 1.2.16) o su análogo en categoría (Teorema 1.4.17) existen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tales que

$$(a, b) \subseteq X_m + X_m.$$

Sea $t \in \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ entonces existen $x, y \in X_m$ tales que $t = \frac{x+y}{2}$ y por lo tanto

$$f(t) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2} \leqslant m,$$

lo cual nos dice que f es acotada superiormente por m en el intervalo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Por el Teorema 3.3.15 f es continua y por el Teorema 3.3.6 f es convexa. □

3.4. Acotación y continuidad en funciones convexas y aditivas

Como corolario del Teorema de Bernstein-Doetsch (Corolario 3.3.16) obtuvimos que los conjuntos abiertos tienen la propiedad de que para cualquier función f que satisfaga la desigualdad de Jensen y cuyo dominio contenga al abierto es suficiente que f sea acotada en el abierto para que f sea continua y por lo tanto convexa. Esto motiva la pregunta de que otros conjuntos T (el uso de la letra T es por ser conjuntos prueba o "test sets") satisfacen esta propiedad, para esto introducimos la siguientes clases:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U} = \{T \subseteq \mathbb{R}^d \mid\ & \text{Si } T \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^d \text{ es abierto, convexo, } f : D \to \mathbb{R} \text{ satisface la} \\
& \text{desigualdad de Jensen y } f \text{ es acotada superiormente en } T \\
& \text{entonces } f \text{ es continua}\}; \\
\mathfrak{B} = \{T \subseteq \mathbb{R}^d \mid\ & \text{toda función aditiva } f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ acotada superiormente en} \\
& T \text{ es continua}\}; \\
\mathfrak{C} = \{T \subseteq \mathbb{R}^d \mid\ & \text{toda función aditiva } f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ acotada en} \\
& T \text{ es continua}\}.
\end{aligned}$$

Como las funciones aditivas satisfacen la desigualdad de Jensen se sigue de la definicón que $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ y de hecho nuestro primer objetivo sera probar la igualdad $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}$.

Definición 3.4.1. *Un conjunto $T \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice $\mathbb{Q}$-radial en un punto $x_0 \in T$ si para todo $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ existe $\epsilon > 0$ tal que $x + \lambda y \in T$ para todo $\lambda \in \mathbb{Q} \cap (0, \epsilon)$.*

El siguiente Lema recuerda al que prepara el Teorema de Hahn-Banach sobre la extensión de operadores lineales acotados en un espacio vectorial normado con el cual podremos concluir un resultado similar.

Lema 3.4.2. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto $\mathbb{Q}$-convexo y $\mathbb{Q}$-radial en un punto $x_0 \in D$, $L \subsetneq \mathbb{R}^d$ un subespacio lineal sobre $\mathbb{Q}$ con $x_0 \in L$. Sean $f : D \to \mathbb{R}$ una función que satisface la desigualdad de Jensen y $g : L \to \mathbb{R}$ una función aditiva tal que para todo $x \in L \cap D$*

$$g(x) \leqslant f(x).$$

Sea $z \in \mathbb{R}^d \setminus L$ y denotemos por L_1 al subespacio lineal, sobre $\mathbb{Q}$, generado por $L \cup \{z\}$. Entonces existe una función aditiva $G : L_1 \to \mathbb{R}$ tal que

$$G(x) \leqslant f(x)$$

para todo $x \in L_1 \cap D$ y $G|_L = g$.

Demostración. Como f satisface la desigualdad de Jensen entonces f es $\mathbb{Q}$-convexa por el Teorema 3.3.5, y por el Teorema 3.2.1 g es $\mathbb{Q}$-lineal. Entonces para todo $x, y \in L$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ tales que $x + \mu z \in D$ y $y - \lambda z \in D$, se tiene que $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x + \frac{\mu}{\lambda+\mu}y \in D$ por D ser $\mathbb{Q}$-convexo y

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\lambda+\mu}g(x) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}g(y) &= g\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x + \frac{\mu}{\lambda+\mu}y\right) \\
&\leqslant f\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x + \frac{\mu}{\lambda+\mu}y\right) \\
&= f\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(x - \mu z) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(y - \lambda z)\right) \\
&\leqslant \frac{\lambda}{\lambda+\mu}f(x + \mu z) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}f(y - \lambda z)
\end{aligned}$$

Por lo cuál

$$\frac{g(x) - f(x + \mu z)}{\mu} \leqslant \frac{f(y - \lambda z) - g(x)}{\lambda}$$

y

$$\alpha = \sup\left\{\frac{g(x) - f(x + \mu z)}{\mu} \;\middle|\; (x, \mu) \in U\right\} \leqslant \inf\left\{\frac{f(y - \lambda z) - g(x)}{\lambda} \;\middle|\; (x, \lambda) \in V\right\} = \beta,$$

donde

$$U = \left\{(x,\mu) \in L \times \mathbb{Q}^+ \,\middle|\, x + \mu z \in D\right\}$$
$$V = \left\{(x,\lambda) \in L \times \mathbb{Q}^+ \,\middle|\, y - \lambda z \in D\right\}.$$

Como D es $\mathbb{Q}$-radial en x_0 tenemos que los conjuntos U y V son no vacíos y $-\infty < \alpha \leqslant \beta < \infty$, en particular $\emptyset \neq [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$.

Sea $c \in [\alpha,\beta]$. Todo $t \in L_1$ puede ser escrito de manera única como $t = x + \lambda z$ para alguna $\lambda \in \mathbb{Q}$ y $x \in L$, con esto definimos $G : L_1 \to \mathbb{R}$ como $G(t) = g(x) - c\lambda$ la cual es aditiva y $G|_L = g$. Ahora sea $t \in D \cap L_1$ y consideremos su representación $t = x + \lambda t$ con $x \in L$ y $\lambda \in \mathbb{Q}$. Para concluir veamos que $G(t) \leqslant f(t)$, consideremos tres casos:

i) Si $\lambda = 0$, entonces $t = x$, $t \in L$ y $G(t) = g(t) \leqslant f(t)$.

ii) Si $\lambda > 0$ entonces $(x,\lambda) \in U$. Como $c \geqslant \alpha$ tenemos que

$$\frac{g(x) - f(x + \lambda z)}{\lambda} \leqslant c$$

por lo que

$$G(t) = g(x) - \lambda c \leqslant f(x + \lambda z) = f(t).$$

*iii)*Si $\lambda < 0$ entonces $(x,-\lambda) \in V$. Como $c \leqslant \beta$ tenemos que

$$c \leqslant \frac{f(x - (-\lambda)z) - g(x)}{-\lambda}$$

por lo que

$$G(t) = g(x) - \lambda c \leqslant f(x + \lambda z) = f(t).$$

□

Teorema 3.4.3. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto $\mathbb{Q}$-convexo y $\mathbb{Q}$-radial en un punto $x_0 \in D$, sea $L \subsetneq \mathbb{R}^d$ un subespacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ con $x_0 \in L$. Sean $f : D \to \mathbb{R}$ una función que satisface la desigualdad de Jensen y $g : L \to \mathbb{R}$ una función aditiva tal que para todo $x \in L \cap D$*

$$g(x) \leqslant f(x).$$

Entonces existe una función aditiva $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tal que

$$G(x) \leqslant f(x)$$

para todo $x \in D$ y $G|_L = g$.

Demostración. Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de todas las parejas (X, A) tales que $L \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^d$, X es un subespacio lineal sobre $\mathbb{Q}$, $A : X \to \mathbb{R}$ es aditiva, $A|_X = g$ y $A(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in D \cap X$. Tenemos que $\mathcal{R} \neq \emptyset$ pues $(L, g) \in \mathcal{R}$.

Introducimos un orden parcial en $\mathcal{R}$ de la siguiente manera, $(X_1, A_1) \preceq (X_2, A_2)$ si y solamente si $X_1 \subseteq X_2$ y $A_2|_{X_1} = A_1$. Sea $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}$ una cadena y definamos

$$Y = \bigcup \{X \mid (X, A) \in \mathcal{I}\}$$

y $B : Y \to \mathbb{R}$ como $B(y) = A(y)$ si $y \in X$ y $(X, A) \in \mathcal{I}$, el argumento clásico sobre cadenas muestra que B esta bien definida, (Y, B) es cota superior de $(\mathcal{I}, \preceq)$ y $(Y, B) \in \mathcal{R}$. Entonces $\mathcal{R}$ satisface las condiciones del Lema de Zorn, por lo que existe $(Z, G) \in \mathcal{R}$ un elemento $\preceq$-maximal.

Para concluir hace falta ver que $Z = \mathbb{R}^d$ para esto supongamos que Z es un subconjunto propio de $\mathbb{R}^d$ y sea $z \in \mathbb{R}^d \setminus Z$, entonces Z, G y f cumplen las condiciones del Teorema 3.4.2 por lo que existe $G^* : L_1 \to \mathbb{R}$ aditiva, donde L_1 es el subespacio lineal sobre $\mathbb{Q}$ generado por $Z \cup \{z\}$, tal que $G^*|_Z = G$ y $G^*(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in D \cap L_1$, como $Z \subsetneq L_1$ esto contradice la maximalidad de (Z, G) en $(\mathcal{R}, \preceq)$. $\square$

Lema 3.4.4. *Sea $T \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto $\mathbb{Q}$-convexo y $\mathbb{Q}$-radial en $x_0 \in T$, entonces $T \in \mathfrak{B}$ si y solamente si T tiene interior no vacío.*

Demostración. Sea $T \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto $\mathbb{Q}$-convexo y $\mathbb{Q}$-radial en $x_0 \in T$. Si T tiene interior no vacío entonces toda función aditiva acotada superiormente en T es continua por el Corolario 3.3.16.

Por otro lado, supongamos que $\operatorname{int}(T) = \emptyset$, mostraremos que $T \notin \mathfrak{B}$. Primero trataremos el caso $x_0 = 0$. El caso $T = \{0\}$ es trivial pues cualquier función aditiva no continua es acotada en un punto por lo cual podemos considerar que existe $y \in T \cap \mathbb{R}^+$, ya que si no existe basta considerar el conjunto $-T$ el cual es $\mathbb{Q}$-convexo y $\mathbb{Q}$-radial en $-x_0 \in -T$. Como $\operatorname{int}(T) = \emptyset$ existe $x \in \mathbb{R} \setminus T$ tal que $0 < x < y$. Hagamos

$$S = \left\{(\xi, \eta) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ \,\middle|\, (1 + \xi)x + \eta y \in T\right\}$$

Como $y \in T$, $(-1, 1) \in S$ y por lo tanto $S \neq \emptyset$. Sea

$$s = \sup \left\{ \frac{\xi}{\eta} \,\middle|\, (\xi, \eta) \in S \right\},$$

entonces $-1 \leqslant s$. Más aun, por T ser $\mathbb{Q}$-radial en 0 y $y \neq 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que $-\alpha y \in T$ para todo $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, \epsilon)$. Supongamos que

$$s > \frac{1}{\epsilon},$$

entonces existen $(\xi, \eta) \in S$ tales que

$$0 < \frac{1}{\epsilon} < \frac{\xi}{\eta} \leqslant s$$

y como $\eta > 0$ necesariamente $\xi > 0$ por lo que

$$0 < \frac{\eta}{\xi} < \epsilon$$

Esto implica por elección de ϵ que $-\frac{\eta}{\xi} y \in T$ y, por definición de S, $(1+\xi)x + \eta y \in T$. Como T es $\mathbb{Q}$-convexo, tenemos que

$$x = \frac{1}{1+\xi}\left((1+\xi)x + \eta y\right) + \frac{\xi}{1+\xi}\left(-\frac{\eta}{\xi} y\right) \in T,$$

contradiciendo la elección de $x \in \mathbb{R} \setminus T$, esto prueba que

$$s \leqslant \frac{1}{\epsilon}.$$

Veamos que $\{x, y\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tales que $\alpha x + \beta y = 0$ y $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, entonces como $x > 0$ y $y > 0$, se debe tener que $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ y $\alpha\beta < 0$. Además, como $0 < x < y$ entonces $|\beta| < |\alpha|$. Por todo esto concluimos que $-\frac{\beta}{\alpha} \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ y como $0, y \in T$, el cual es $\mathbb{Q}$-convexo, tenemos que

$$x = -\frac{\beta}{\alpha} y = -\frac{\beta}{\alpha} y + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) 0 \in T$$

lo que contradice nuestra elección de $x \in \mathbb{R} \setminus T$ y por lo tanto x y y son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

Denotemos por L al sub-espacio lineal generado por $\{x, y\}$ sobre $\mathbb{Q}$. Por lo anterior $\{x, y\}$ es una base para L. Definamos $g : L \to \mathbb{R}$ como la única transformación $\mathbb{Q}$-lineal tal que $g(x) = 1$ y $g(y) = -s$.

Veamos que $g(z) \leqslant 1$ para todo $z \in T \cap L$. Para esto supongamos que existe $z \in T \cap L$ tal que $g(z) > 1$. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ únicos tales que $z = \lambda x + \mu y$, entonces $g(z) = \lambda - \mu s$, esto quiere decir, como $g(z) > 1$, que

$$\mu s < \lambda - 1.$$

Consideremos tres casos:

i) Si $\mu > 0$ entonces $(\lambda - 1, \mu) \in S$ y

$$s < \frac{\lambda - 1}{\mu}$$

lo que contradice la definición de s como supremo.

ii) Si $\mu = 0$ entonces $\lambda x = \lambda x + \mu y = z \in T$ y $\lambda = g(z) > 1$, por lo cual

$$x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) 0$$

es una combinación lineal $\mathbb{Q}$-convexa de elementos en T, el cual es $\mathbb{Q}$-convexo y por lo tanto $x \in T$ contradiciendo la elección de $x \in \mathbb{R} \setminus T$.

iii) Si $\mu < 0$ entonces

$$s > \frac{\lambda - 1}{\mu} = \frac{1 - \lambda}{-\mu}$$

pues $\mu s < \lambda - 1$. Por lo tanto existe $(\xi, \eta) \in S$ tal que

$$\frac{\xi}{\eta} > \frac{1 - \lambda}{-\mu} \;\Leftrightarrow\; -\mu\xi > \eta - \lambda\eta \;\Leftrightarrow\; \lambda\eta - \mu(1 + \xi) > \eta - \mu$$

Definiendo

$$\kappa = \frac{\lambda\eta - \mu(1 + \xi)}{\eta - \mu}$$

obtenemos que $\kappa > 1$ y como $(\xi, \eta) \in S$ tenemos que $(1 + \xi)x + \eta y \in T$, además $\lambda x + \mu y = z \in T$, entonces como $\kappa > 1$ y $0 \in T$

$$u = \frac{1}{\kappa}(\lambda x + \mu y) \in T \text{ y } v = \frac{1}{\kappa}((1 + \xi)x + \eta y) \in T,$$

finalmente como $\eta > 0$ y $-\mu > 0$ tenemos que la siguiente combinación $\mathbb{Q}$-convexa de elemento en T pertenece a T:

$$\begin{aligned}
\frac{\eta}{\eta - \mu}u + \frac{-\mu}{\eta - \mu}y =& \frac{\eta}{(\eta - \mu)} \frac{\eta - \mu}{\lambda\eta - \mu(1 + \xi)}(\lambda x + \mu y) \\
&+ \frac{-\mu}{\eta - \mu} \frac{\eta - \mu}{\lambda\eta - \mu(1 + \xi)}((1 + \xi)x + \eta y) \\
=& \frac{(\eta\lambda x + \eta\mu y - \mu x - \mu\xi x - \mu\eta y)}{\lambda\eta - \mu(1 + \xi)} \\
=& \frac{\lambda - \mu(1 + \xi)}{\lambda - \mu(1 + \xi)}x \\
=& x,
\end{aligned}$$

lo que contradice la elección de $x \in \mathbb{R} \setminus T$.

En cualquier caso obtenemos un absurdo al suponer que existe $z \in L \cap T$ tal que $g(z) > 1$, por lo tanto $g(z) \leqslant 1$ para todo $z \in T$. Por el Teorema 3.4.3 con $f : T \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ existe $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditiva tal que $G|_L = g$ y $G(z) \leqslant f(z) = 1$ para todo $z \in T$, es decir, G es acotada. Si G fuera continua entonces existiria $c \in \mathbb{R}$ tal que $G(t) = ct$ para toda $t \in \mathbb{R}$ (Teorema 3.2.1), en particular:

$$\frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x} = \frac{G(x)}{x} = c = \frac{G(y)}{y} = \frac{g(y)}{y} = \frac{-s}{y},$$

por lo que $-s = \frac{y}{x}$ y como $0 < x < y$, entonces $-s > 1$ lo que contradice que $-1 \leqslant s$. De esta manera se tiene que G no es continua y por lo tanto existe una función aditiva discontinua y acotada en T, es decir, $T \notin \mathfrak{B}$.

Si $x_0 \neq 0$ entonces el conjunto $T - x_0$ es $\mathbb{Q}$-convexo y $\mathbb{Q}$-radial en 0 y al igual que T tiene interior vacío, por lo probado anteriormente $T - x_0 \notin \mathfrak{B}$, es decir, existe $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada en $T - x_0$, digamos por M, y discontinua. Para todo $z \in T$ se tiene que $z - x_0 \in T - x_0$ y

$$G(z) = G(z - x_0) + G(x_0) \leqslant M + g(x_0)$$

por lo cual G es acotada en T por $M + G(x_0)$ y existe una función aditiva discontinua y acotada en T, es decir, $T \notin \mathfrak{B}$. $\square$

Lema 3.4.5. *Sea $T \subseteq \mathbb{R}^d$ un subconjunto $\mathbb{Q}$-convexo y $\mathbb{Q}$-radial en $x_0 \in T$. Sea $\{e_i \mid i \in \{1, \ldots, d\}\}$ una base para $\mathbb{R}^d$ sobre $\mathbb{R}$ y para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$ sea*

$$T_i = \{x \in \mathbb{R} \mid xe_i \in T\}.$$

Si $\operatorname{int}(T) = \emptyset$ entonces existe $i \in \{1, \ldots, d\}$ tal que $\operatorname{int}(T_i) = \emptyset$.

Demostración. Vemos que si $\operatorname{int}(T_i) \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ entonces $\operatorname{int}(T) \neq \emptyset$. Como $\operatorname{int}(T_i) \neq \emptyset$ existen intervalos $\emptyset \neq (a_i, b_i) = J_i \subseteq T_i \setminus \{0\}$ para $i \in \{1, \ldots, d\}$. Sea

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i e_i,\ \alpha_i \in \mathbb{Q} \cap (0,1),\ x_i \in J_i,\ i \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{i=1}^{d} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Fijemos $x \in G$, entonces existen $\alpha_i \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, $x_i \in J_i$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, tales que $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i = 1$ y $x = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i e_i$. Sean $r = \min\{|b_i - x_i|, |x_i - a_i| \mid i \in \{1, \ldots, d\}\}$, $\alpha = \min\{|\alpha_i| \, ||e_i|| \mid i \in \{1, \ldots, d\}\}$, $\epsilon = \frac{r\alpha}{2} > 0$. Sea $y \in \mathbb{R}^d$ con $||x - y|| < \epsilon$. Como

$\{x_1e_1, \ldots, x_de_d\}$ es base para $\mathbb{R}^d$ sobre $\mathbb{R}$ existen $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, d\}$ tales que $y = \sum_{i=1}^d \beta_i x_i e_i$. Entonces

$$y = x + \sum_{i=1}^{d}(\beta_i - \alpha_i)x_ie_i = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \left(x_i + \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i}x_i\right) e_i = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i y_i e_i$$

donde $y_i = x_i + \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i}x_i$. Además, para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$

$$|\beta_i - \alpha_i|\,|x_i|\,||e_i|| \leqslant ||y - x|| < \epsilon = \frac{r\alpha}{2} \leqslant \frac{r\,|\alpha_i|\,||e_i||}{2},$$

es decir,

$$|\beta_i - \alpha_i|\,|x_i| < \frac{r\,|\alpha_i|}{2}$$

y

$$|y_i - x_i| = \left|\frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i}\right| |x_i| < \frac{r}{2}.$$

Por lo tanto $y_i \in J_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$ y como $y = \sum_{i=1}^d \alpha_i y_i e_i$ entonces $y \in G$ y para todo $y \in \mathbb{R}$ tal que $||x - y|| < \epsilon$. De esta forma se tiene que G es abierto. Por otro lado dado $x = \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i e_i \in G$ se tiene que $x_i \in J_i \subseteq T_i$, entonces por definición de T_i se tiene que $x_ie_i \in T$ para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$, y como T es $\mathbb{Q}$-convexo, $\alpha_i \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$ entonces $x = \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i e_i \in T$, es decir, $G \subseteq T$. Por último se tiene que $\sum_{i=1}^d \frac{1}{d}\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) e_i \in G$ y por lo tanto T tiene interior no vacío. □

Teorema 3.4.6. *Sea $T \subseteq \mathbb{R}^d$ un subconjunto $\mathbb{Q}$-convexo y $\mathbb{Q}$-radial en $x_0 \in T$. Entonces $T \in \mathfrak{B}$ si y solamente si* $\operatorname{int}(T) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $T \subseteq \mathbb{R}^d$ un subconjunto $\mathbb{Q}$-convexo y $\mathbb{Q}$-radial en $x_0 \in T$. Si T tiene interior no vacío toda función aditiva acotada en T es continua por el Corolario 3.3.16.

Inversamente, supongamos que T tiene interior vacío y que $x_0 = 0$. Sea $\{e_1, \ldots, e_d\}$ una base para $\mathbb{R}^d$ sobre $\mathbb{R}$ y para $i \in \{1, \ldots, d\}$ sea

$$T_i = \{x \in \mathbb{R} \mid xe_i \in T\}.$$

Por el Lema 3.4.5, existe $i \in \{1, \ldots, d\}$ tal que $T_i \subseteq \mathbb{R}$ tiene interior vacío.

Veamos que T_i es $\mathbb{Q}$-convexo y $\mathbb{Q}$-radial en $0 \in T_i$. Sean $x, y \in T_i$ y $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ entonces $xe_i, ye_i \in T$ el cual es $\mathbb{Q}$-convexo por lo que

$$\alpha xe_i + (1-\alpha)ye_i = (\alpha x + (1-\alpha)y)e_i \in T,$$

es decir,

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in T_i.$$

Por otro lado $0 = 0e_i \in T$ por lo cual $0 \in T_i$. Veamos que T_i es $\mathbb{Q}$-radial en 0. Sea $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces como $ye_i \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ y T es $\mathbb{Q}$-radial en 0, existe $\epsilon > 0$ tal que $\alpha ye_i \in T$ para todo $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, \epsilon)$, es decir, $\alpha y \in T_i$ para todo $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, \epsilon)$ por lo que T_i es $\mathbb{Q}$-radial en 0.

De esta manera $T_i \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto $\mathbb{Q}$-radial en $0 \in T_i$, $\mathbb{Q}$-convexo y con interior vacío, por el Teorema 3.4.4 existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditiva, discontinua y acotada superiormente en T_i. Sea $L = \{xe_i \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^d$ el cual es un subespacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y por lo tanto sobre $\mathbb{Q}$. Definimos $G : L \to \mathbb{R}$ como $G(xe_i) = g(x)$ para todo $xe_i \in L$ con $x \in \mathbb{R}$. Para $x \in \mathbb{R}$, $xe_i \in T$ implica que $x \in T_i$ y como g es acotada superiormente en T_i tenemos que G es acotada superiormente en $L \cap T$. Claramente G es aditiva, entonces por el Teorema 3.4.3 existe $G' : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ aditiva tal que $G'|_L = G$ y G' es acotada en T. Como G es discontinua y $G'|_L = G$, entonces G' es discontinua. Con esto tenemos que G' es una función aditiva, discontinua y acotada superiormente en T y por lo tanto $T \notin \mathfrak{B}$.

Por último, si $x_0 \neq 0$ entonces el conjunto $T - x_0$ es $\mathbb{Q}$-convexo y $\mathbb{Q}$-radial en 0 y al igual que T tiene interior vacío. Por lo probado anteriormente $T - x_0 \notin \mathfrak{B}$, es decir, existe $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada en $T - x_0$, digamos por M, y discontinua. Para todo $z \in T$ se tiene que $z - x_0 \in T - x_0$ y

$$G(z) = G(z - x_0) + G(x_0) \leqslant M + g(x_0)$$

por lo cual G es acotada en T por $M + G(x_0)$ por lo que existe una función aditiva discontinua y acotada en T,es decir, $T \notin \mathfrak{B}$. □

Teorema 3.4.7. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo y abierto. Sean $f : D \to \mathbb{R}$ que satisface la desigualdad de Jensen y $M \in \mathbb{R}$ tal que $M > \inf \{f(x) \mid x \in D\}$, entonces el conjunto*

$$T = \{x \in D \mid f(x) < M\}$$

es $\mathbb{Q}$-convexo y $\mathbb{Q}$-radial en x para todo $x \in T$.

Demostración. Por la condición $M > \operatorname{ínf}\{f(x) \mid x \in D\}$ tenemos que $T \neq \emptyset$.

Dados $x, y \in T$ y $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, $\alpha x + (1-\alpha)y \in D$ por ser convexo y por el Teorema 3.3.5

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \leqslant \alpha M + (1-\alpha)M = M$$

por lo que $\alpha x + (1-\alpha)y \in T$, con esto vemos que T es $\mathbb{Q}$-convexo.

Sea $x \in T$ y $y \in \mathbb{R}^d$, por el Teorema 3.3.10

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in \mathbb{Q}}} f(x + \lambda y) = f(x) < M$$

esto pues para $\lambda \in \mathbb{Q}$, $x + \lambda y = (1-\lambda)x + \lambda(x+y) \in \mathbb{Q}(\{x, x+y\})$, por lo que existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x + \lambda y) < M$ para todo $\lambda \in \mathbb{Q} \cap (0, \epsilon)$, es decir, $x + \lambda y \in T$ para todo $\lambda \in \mathbb{Q} \cap (0, \epsilon)$ por lo que T es $\mathbb{Q}$-radial en x para todo $x \in T$. $\square$

Ahora estamos en condiciónes de demostrar la igualdad de dos las clases definidas en la página 108.

Teorema 3.4.8. $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}$

Demostración. Como toda función aditiva es convexa tenemos que $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}$. Por otro lado, sea $T \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $T \notin \mathfrak{U}$ y veamos que $T \notin \mathfrak{B}$. Como $T \notin \mathfrak{U}$ existe $D \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo y $f : D \to \mathbb{R}$ que satisface la desigualdad de Jensen y acotada superiormente en T digamos por $M \in \mathbb{R}$. Sea

$$T_0 = \{x \in D \mid f(x) < M\}$$

entonces $T \subseteq T_0$ y por el Teorema 3.4.7 T_0 es $\mathbb{Q}$-convexo y $\mathbb{Q}$-radial en cualesquiera de sus puntos. Si $\operatorname{int}(T_0) \neq \emptyset$ entonces f seria continua por el Corolario 3.3.16, por lo que $\operatorname{int}(T_0) = \emptyset$ y por el Teorema 3.4.6 se tiene que $T_0 \notin \mathfrak{B}$. De esta forma existe $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ aditiva, discontinua y acotada superiormente en T_0, como $T \subseteq T_0$ tambien es acotada superiormente en T_0 y por lo tanto $T \notin \mathfrak{B}$ $\square$

Definición 3.4.9. *Dada $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, F se dice un operador $\mathfrak{U}$-conservativa si para todo $T \subseteq \mathbb{R}^d$ y toda $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ aditiva se satisface que si f es acotada superiormente en T, entonces f es acotada superiormente en $F(T)$.*

Definición 3.4.10. *Dada $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, F se dice un operador $\mathfrak{C}$-conservativa si para todo $T \subseteq \mathbb{R}^d$ y toda $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ aditiva se satisface que si f es acotada en T, entonces f es acotada $F(T)$.*

Teorema 3.4.11. *Si $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ es $\mathfrak{U}$-conservativa y para $T \subseteq \mathbb{R}^d$ se tiene que $F(T) \in \mathfrak{U}$ entonces $T \in \mathfrak{U}$.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función aditiva acotada superiormente en T. Como f es $\mathfrak{U}$-conservativa y acotada superiormente en T, entonces es acotada superiormente en $F(T)$ y como $F(T) \in \mathfrak{U}$ entonces f es continua, es decir, $T \in \mathfrak{U}$. □

Teorema 3.4.12. *Si $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ es $\mathfrak{C}$-conservativa y para $T \subseteq \mathbb{R}^d$ se tiene que $F(T) \in \mathfrak{C}$ entonces $T \in \mathfrak{C}$.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función aditiva acotada en T. Como f es $\mathfrak{U}$-conservativa y acotada en T, entonces es acotada en $F(T)$ y como $F(T) \in \mathfrak{U}$ entonces f es continua, es decir, $T \in \mathfrak{U}$. □

Teorema 3.4.13. *Sea $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ tal que $F(T) \subseteq T$ para todo $T \subseteq \mathbb{R}^d$, entonces F es $\mathfrak{U}$-conservativa.*

Demostración. Sean $T \subseteq \mathbb{R}^d$ y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ aditiva acotada superiormente en T. Como $F(T) \subseteq T$ entonces f es acotada superiormente en $F(T)$ y por lo tanto F es $\mathfrak{U}$-conservativa. □

Teorema 3.4.14. *La operación $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dada por $F(T) = T + t$ para alguna $t \in \mathbb{R}^d$ fija es $\mathfrak{U}$-conservativa.*

Demostración. Sean $T \subseteq \mathbb{R}^d$ y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ aditiva tal que f es acotada en T. Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant M$ para todo $x \in T$. Dado $y \in T + t$ existe $x \in T$ tal que $y = x + t$ entonces

$$f(y) = f(x) + f(t) \leqslant M + f(t),$$

es decir, f es acotada en $F(T)$ y por lo tanto F es $\mathfrak{U}$-conservativa. □

Teorema 3.4.15. *Sea $n < \omega$, definimos la operación $S_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dada por $S_n(T) = \sum_{i=1}^{n} T$, entonces S_n es $\mathfrak{U}$-conservativa.*

Demostración. Sea $T \subseteq \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ aditiva y acotada superiormente en T por M. Se tiene que f es acotada en $S_n(T)$ debido a que para todo $\{t_1, \ldots, t_n\} \subseteq T$ y $y = \sum_{i=1}^{n} t_i$:

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \leqslant nM,$$

por lo que f es $\mathfrak{U}$-conservativa. □

Teorema 3.4.16. *Si $T \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene interior no vacío entonces $T \in \mathfrak{U}$*

Demostración. Por el Corolario 3.3.16 $\operatorname{int}(U) \in \mathfrak{U}$ y la operación $\operatorname{int} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ satisface que $\operatorname{int}(T) \subseteq T$ para todo $T \subseteq \mathbb{R}^d$. Entonces por el Teorema 3.4.13, int es $\mathfrak{U}$-conservativa y por el Teorema 3.4.11 $T \in \mathfrak{U}$. □

Teorema 3.4.17 (Teorema de Ostrowski, [20]). *Si $T \subseteq \mathbb{R}^d$ tiene medida interior de Lebesgue positiva entonces $T \in \mathfrak{U}$*

Demostración. Sea $A \subseteq T$ un núcleo medible de T, es decir, A es Lebesgue medible y tiene medida de Lebesgue positiva, entonces por el Teorema de Steinhaus (Teorema 1.2.16)

$$\emptyset \neq \operatorname{int}(A + A) = \operatorname{int}(S_2(A)) \subseteq \operatorname{int}(S_2(T)).$$

Por el Teorema 3.4.16 $S_2(T) \in \mathfrak{U}$ y como S_2 es $\mathfrak{U}$-conservativa (Teorema 3.4.15) el Teorema 3.4.11 implica que $T \in \mathfrak{U}$. □

Teorema 3.4.18 (Teorema de Mehdi, [19]). *Si $T \subseteq \mathbb{R}^d$ contiene un subconjunto de segunda categoría y con la propiedad de Baire entonces $T \in \mathfrak{U}$*

Demostración. Sea $A \subseteq T$ de segunda categoría y con la propiedad de Baire, entonces por el Teorema 1.4.17

$$\emptyset \neq \operatorname{int}(A + A) = \operatorname{int}(S_2(A)) \subseteq \operatorname{int}(S_2(T)).$$

Por el Teorema 3.4.16 $S_2(T) \in \mathfrak{U}$ y como S_2 es $\mathfrak{U}$-conservativa (Teorema 3.4.15) el Teorema 3.4.11 implica que $T \in \mathfrak{U}$. □

Los siguientes operadores nos serán de uitilidad más adelante

$$R : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \qquad T \mapsto T - T = \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, x = t_1 - t_2, \{t_1, t_2\} \subseteq T\right\}$$

$$U : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \qquad T \mapsto T+R(T) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, x = t_1 + t_2 - t_3, \{t_1, t_2, t_3\} \subseteq T\right\}$$

Teorema 3.4.19. *Los operadores R y U son $\mathfrak{C}$-conservativas.*

Demostración. Sea $T \subseteq \mathbb{R}^d$ y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ aditiva acotada en T por $M \in \mathbb{R}^+$. Sean $t_1, t_2, t_3 \in T$ entonces

$$|f(t_1 - t_2)| = |f(t_1) - f(t_2)| \leqslant |f(t_1)| + |f(t_2)| \leqslant 2M$$

$$|f(t_1 + t_2 - t_1)| = |f(t_1) + f(t_2) - f(t_3)| \leqslant |f(t_1)| + |f(t_2)| + |f(t_3)| \leqslant 3M$$

por lo que f es acotada en $R(T)$ y en $U(T)$, es decir, R y U son $\mathfrak{C}$-conservativas. □

Teorema 3.4.20. *Sea $T \subseteq \mathbb{R}^d$. Cualesquiera de las siguientes condiciones es suficientes para que $T \in \mathfrak{C}$:*

i) $R(T)$ tiene medida interior de Lebesgue positiva;

ii) $R(T)$ contiene un conjunto de segunda categoría y con la propiedad de Baire;

iii) $U(T)$ tiene medida interior de Lebesgue positiva;

iv) $U(T)$ contiene un conjunto de segunda categoría y con la propiedad de Baire.

Demostración. Por los Teoremas de Ostrowski y de Mehdi (Teoremas 3.4.17 y 3.4.18) se tiene que $R(T)$ o $U(T)$ pertenecerian a $\mathfrak{U}$. Como tenemos la contención $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{C}$ entonces $R(T)$ o $U(T)$ perteneceria a la clase $\mathfrak{C}$ y estas operaciones son $\mathfrak{C}$-conservativas (Teorema 3.4.19) y por el Teorema 3.4.12 tenemos que $T \in \mathfrak{C}$. □

3.5. Conos, bases de Burstin y conjuntos de Erdös

En esta sección utilizaremos las herramientas desarrolladas en la sección anterior para derivar más propiedades sobre las bases de Hamel y daremos construcciones de algunos conjuntos destacados asociados a estas bases.

Empezaremos viendo la relación entre bases de Hamel y las clases $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}$ (Teorema 3.4.8) y $\mathfrak{C}$. Para esto recordemos que las funciones aditivas son precisamente las transformaciones $\mathbb{Q}$-lineales (Teorema 3.2.1), por lo que cualquiera de estas queda determinada una vez definida en una base de Hamel.

Teorema 3.5.1. *Ninguna base de Hamel pertenece a alguna de la clases $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$.*

Demostración. Sea $H \subseteq \mathbb{R}^d$ una base de Hamel. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ aditiva definida en H como $f(h) = 1$ para todo $h \in H$. Entonces f toma unicamente valores racionales y $f \neq 0$ por lo que f es discontinua, carece de la propiedad del valor intermedio, y es acotada en H. Por lo tanto $H \notin \mathfrak{C}$. Como $\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{C}$ entonces $H \notin \mathfrak{U}$. □

Conos

Otro objeto algebráico de interés son los conos, los cuales definimos a continuación.

Definición 3.5.2. *Un subconjunto* $C \subseteq \mathbb{R}^d$ *es un cono sobre* $\mathbb{Q}$ *si para todo* $x, y \in C$, $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ *se tiene que* $x + y \in C$ *y* $\lambda x \in C$. *En este caso a* C *se le llama un* $\mathbb{Q}$*-cono.*

Dado $A \subseteq \mathbb{R}^d$ se denota por $E^+(A)$ al $\mathbb{Q}$-cono generado por A, es decir, el menor $\mathbb{Q}$-cono que contiene a A el cual coincide con el conjunto de $\mathbb{Q}$-combinaciones lineales con coeficiente no negativos. Análogamente a los espacios vectoriales existe una noción para una base de un $\mathbb{Q}$-cono.

Definición 3.5.3. *Dado* $C \subseteq \mathbb{R}^d$ *un* $\mathbb{Q}$*-cono y* $B \subseteq \mathbb{R}^d$ *se dice que* B *es base de cono para* C *si* B *es linealmente independiente sobre* $\mathbb{Q}$ *y* $E^+(B) = C$.

La existencia de una base de cono para un $\mathbb{Q}$-cono no es inmediata, a diferencia de las bases de subespacios, de hecho tenemos el siguiente resultado de Kuczma [16].

Teorema 3.5.4. *Sea* $C \subseteq \mathbb{R}^d$ *un* $\mathbb{Q}$*-cono. Si existe un base de* $\mathbb{Q}$*-cono para* C *entonces* $C \notin \mathfrak{B}$.

Demostración. Sea B un base de cono para C. Por ser B linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$ podemos extender B a una base de Hamel H. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la única función aditiva tal que $f(h) = -1$ para todo $h \in H$, de esta forma $f \neq 0$ y $\operatorname{Im}(f) \subseteq \mathbb{Q}$. Entonces f es discontinua por no tener la propiedad del valor intermedio.

Para todo $x \in C = E^+(B)$ existen $n < \omega$ y $x_, \ldots, x_n \in B$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

por lo que

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant 0.$$

Por lo tanto f es acotada superiormente en C y como f es discontinua, $C \notin \mathfrak{B}$. $\square$

Con este resultado vemos que los $\mathbb{Q}$-conos que tienen bases de cono tienen que ser "pequeños". De hecho por los Teoremas de Bernstein-Doetsch, de Ostrowski y de Mehdi (Teoremas 3.3.15, 3.4.17 y 3.4.18) si el $\mathbb{Q}$-cono tiene interior no vacío, medida interior positiva o contiene un conjunto de segunda categoría y con la propiedad de Baire, entonces $C \in \mathfrak{B}$, por lo que los $\mathbb{Q}$-conos sin base de cono son "pequeños" al menos en el sentido topológico, de medida y de categoría. En particular tenemos un ejemplo de un $\mathbb{Q}$-cono sin base de cono.

Corolario 3.5.5. $[0, \infty)$ *es un* $\mathbb{Q}$*-cono y no existe una base de cono para este.*

Demostración. Es claro que $[0, \infty)$ es un $\mathbb{Q}$-cono. Como $\operatorname{int}([0, \infty)) = (0, \infty) \neq \emptyset$, entonces no existe una base de cono para $[0, \infty)$. $\square$

También obtenemos como corolario el siguiente resultado de Aczél yErdös [1].

Corolario 3.5.6. *Existe* $T \subseteq \mathbb{R}^d$ *tal que* $T \notin \mathfrak{B}$ *y* $R(T) = \mathbb{R}^d$.

Demostración. Sea H una base de Hamel, entonces H es base de cono para $E^+(H)$ y por el Teorema 3.5.4 tenemos que $H \notin \mathfrak{B}$, sin embargo tenemos que

$$R(E^+(H)) = E^+(H) - E^+(H) = \mathbb{R}^d$$

Haciendo $T = E^+(H)$ obtenemos el resultado. $\square$

Asimismo obtenemos como corolario que la propiedad de Steinhaus no es suficiente para que un conjunto pertenezca a la clase $\mathfrak{B}$.

Corolario 3.5.7. *La condición* $\operatorname{int}(R(T)) \neq \emptyset$ *no es suficiente para que* $T \in \mathfrak{B}$.

Demostración. Basta tomar el conjunto T del Corolario 3.5.6 $\square$

Sabemos, por el Teorema 3.1.9, que si H es una base de Hamel Lebesgue medible entonces tiene medida de Lebesgue cero, sin embargo podemos decir algo más.

Teorema 3.5.8. *Sea* $H \subseteq \mathbb{R}^d$ *una base de Hamel entonces* H *tiene medida interior de Lebesgue cero.*

Demostración. Si H tuviera medida interior de Lebesgue positiva entonces por el Teorema 3.4.20 $H \in \mathfrak{C}$ lo que contradice el Teorema 3.5.1. $\square$

Teorema 3.5.9. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^d$ una base de Hamel y $T \subseteq H$ con la propiedad de Baire, entonces T es de primera categoría.*

Demostración. Si H contiene un subconjunto T de segunda categoría y con la propiedad de Baire, entonces por el Teorema 3.4.20 $H \in \mathfrak{C}$ lo que contradice el Teorema 3.5.1. □

Bases de Burstin

En el Teorema 3.1.12 vimos que existen bases de Hamel de primera categoría y nulas para a la medida de Lebesgue. Por otro lado, el Teorema 3.5.1 nos indica que las bases de Hamel no son lo suficientemente "grandes" como para pertenecer a algunas de las clases $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}$ o $\mathfrak{C}$. A pesar de esto existen, como veremos a continuación, bases de Hamel relativamente "grandes", esta noción corresponde a las llamadas bases de Burstin.

Definición 3.5.10. *Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice saturado no medible si*

$$(\lambda_d)_*(A) = (\lambda_d)_*(\mathbb{R}^d \setminus A) = 0.$$

Como el nombre lo indica, es claro que cualquier conjunto saturado no medible no es Lebesgue medible. Además, tenemos una noción anáoga para categoría.

Definición 3.5.11. *Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice saturado en categoría si para todo $B \subseteq \mathbb{R}^d$ con la propiedad de Baire y de segunda categoría se tiene*

$$A \cap B \neq \emptyset \ y \ (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap B \neq \emptyset.$$

Claramente cualquier subconjunto saturado en categoría no tiene la propiedad de Baire.

Definición 3.5.12. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Una base de Hamel $H \subseteq X$ se dice una base de Burstin relativa a X si H intersecta a todo boreliano no numerable de X considerado con la topología de subespacio. Si $X = \mathbb{R}^d$ entonces H se dice simplemente una base de Burstin.*

Teorema 3.5.13. *Si X es de medida completa, es decir, $\lambda_d(\mathbb{R}^d \setminus X) = 0$, entonces toda base Burstin relativa a X es saturada no medible*

Demostración. Sea H una base de Burstin relativa a X. Por el Teorema 3.5.8

$$(\lambda_d)_*(H) = 0.$$

Supongamos que H no es saturada no medible, es decir,

$$(\lambda_d)_*(\mathbb{R}^d \setminus H) > 0.$$

Por regularidad existe un compacto $F \subseteq \mathbb{R}^d \setminus H$ tal que $\lambda_d(F) > 0$. En particular F tiene medida de Lebesgue finita. Por otro lado, como $H \subseteq X$ entonces

$$\mathbb{R}^d \setminus H = \left(\mathbb{R}^d \setminus X\right) \cup (X \setminus H)$$

y por lo tanto

$$F = F \cap \left(\mathbb{R}^d \setminus H\right) = \left(F \cap \left(\mathbb{R}^d \setminus X\right)\right) \cup (F \cap (X \setminus H)).$$

Más aun, esta unión es ajena y por lo tanto

$$F \cap (X \setminus H) = F \setminus \left(F \cap \left(\mathbb{R}^d \setminus X\right)\right).$$

Por hipótesis $\lambda_d(\mathbb{R}^d \setminus X) = 0$ y por lo tanto $\lambda_d(F \cap \left(\mathbb{R}^d \setminus X\right)) = 0$. De esta forma se tiene que F y $F \cap (\mathbb{R}^d \setminus X)$ son Lebesgue medibles y por lo tanto $F \cap (X \setminus H)$ tambien lo es. Además,

$$\lambda_d(F \cap (X \setminus H)) = \lambda_d(F) - \lambda_d(F \cap (\mathbb{R}^d \setminus X)) = \lambda_d(F) > 0$$

y por regularidad existe un cerrado $E \subseteq F \cap (X \setminus H) \subseteq X \setminus H$ tal que $\lambda_d(E) > 0$. De esta forma se tiene que E es no numerable. Como $E \subseteq X \setminus H$, entonces E es un boreliano, relativo a X, no numerable el cual no intersecta a H, lo cual contradice el que H sea base Burstin relativa a X. Por lo tanto concluimos que

$$(\lambda_d)_*(\mathbb{R}^d \setminus H) = 0$$

y H es saturado no medible. □

Teorema 3.5.14. *Si $X \subseteq \mathbb{R}^d$ es residual entonces toda base de Burstin relativa a X es saturada en categoría.*

Demostración. Sea $H \subseteq X$ una base de Burstin relativa a X y supongamos que H no es saturada en categoría. En virtud del Teorema 3.5.9 tenemos que H no puede contener subconjuntos de segunda categoría y con la propiedad de Baire, por lo que

$\mathbb{R}^d \setminus H$ contiene un subconjunto E con la propiedad de Baire y de segunda categoría. Sean $G, P, R \subseteq \mathbb{R}^d$ tales que G es abierto, P y R son de primera categoría y

$$E = (G \cup P) \setminus R.$$

Entonces G es un abierto no vacío, ya que E es de segunda categoría, y en particular es del tipo $\mathcal{G}_\delta$. Como

$$G \setminus (G \cap E) = G \setminus E = G \cap \big((\mathbb{R}^d \setminus (G \cup P)) \cup R\big) \subseteq G \cap R \subseteq R,$$

por lo que $G \setminus (G \cap E)$ es de primera categoría. Por el Teorema 1.4.9 existe un conjunto $F \subseteq G \cap E \subseteq E$ tal que $F \in \mathcal{G}_\delta$ y $G \setminus F$ es de primera categoría. Además, por el Teorema de la categoría de Banach (Teorema 1.4.10) G es de segunda categoría y por lo tanto F tambien es de segunda categoría.

De esta forma tenemos que $F \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^d \setminus H$, por lo que

$$F = F \cap (\mathbb{R}^d \setminus H) = (F \cap (X \setminus H)) \cup \big(F \cap (\mathbb{R}^d \setminus X)\big)$$

y como esta unión es ajena, entonces

$$F \cap \big(\mathbb{R}^d \setminus X\big) = F \setminus (F \cap (X \setminus H)).$$

Como X es residual, $\mathbb{R}^d \setminus X$ es de primera categoría y por lo tanto $F \cap \big(\mathbb{R}^d \setminus X\big)$ tambien. Como F es de segunda categoría necesariamente $F \cap (X \setminus H)$ es de segunda categoría. Por el Teorema 1.4.9 existe $K \subseteq F \cap (X \setminus H) \subseteq F$ tal que $K \in \mathcal{G}_\delta$ y $F \setminus K$ es de primera categoría. Como F es de segunda categoría necesariamente K es de segunda categoría. En particular K es no numerable y además es de Borel por lo que, por H ser base de Burnstin, tenemos que $H \cap K \neq \emptyset$ lo que contradice que $K \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^d \setminus H$. Por lo tanto $\mathbb{R}^d \setminus H$ no contiene subconjuntos con la propiedad de Baire y de segunda categoría y H es saturado en categoría. □

Corolario 3.5.15. *Toda base de Burstin es saturada no medible y saturada en categoría.*

Demostración. Sea $X = \mathbb{R}^d$ entonces $\lambda_d(\mathbb{R}^d \setminus X) = \lambda(\emptyset) = 0$ y $\mathbb{R}^d$ es residual, por lo tanto el resultado se sigue de los Teoremas 3.5.13 y 3.5.14. □

El resultado anterior nos dice que las bases de Burstin serían bases relativamente "grandes" por lo que este resultado nos motiva a verificar la existencia de éstas. Procedemos a probar la existencia de bases de Burstin relativas a X para algunos $X \subseteq \mathbb{R}^d$.

Teorema 3.5.16. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^d$ un boreliano y sea $E(X)$ el subespacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ generado por X. Si $E(X) = \mathbb{R}^d$ entonces existe un base Burstin relativa a X.*

Demostración. Si X fuera numerable entonces $E(X)$ seria numerable pues este consiste de todas las $\mathbb{Q}$-combinaciones lineales de elementos en X y por lo cual $E(X) \neq \mathbb{R}^d$, por lo que por nuestra hipótesis tenemos que X es no numerable.

Sea α el primer ordinal con cardinalidad igual a $\mathfrak{c}$ y sea $\langle F_\xi \rangle_{\xi<\alpha}$ la familia de todos los borelianos no numerables de $\mathbb{R}^d$ (Teorema 2.3.34).

Consideremos a F_0 y elijamos $x_0 \in F_0 \setminus \{0\} = F_0 \setminus E(\emptyset)$. Supongamos que para cierta $\beta < \alpha$ tenemos definida la β-sucesión $\langle x_\xi \rangle_{\xi<\beta}$ de elementos en X de tal forma que

$$x_\gamma \in F_\gamma \setminus E(\{x_\xi \mid \xi < \gamma\})$$

para todo $\gamma < \beta$. Sea $B_\beta = E(\{x_\xi \mid \xi < \beta\})$ entonces

$$\operatorname{card}(B_\beta) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{Q}) \cdot \operatorname{card}(\beta) < \mathfrak{c},$$

por lo que $F_\beta \setminus B_\beta \neq \emptyset$ y podemos definir x_β como cualquier elemento de $F_\beta \setminus B_\beta$. Por el metodo de inducción transfinita obtenemos la familia $\langle x_\xi \rangle_{\xi<\alpha}$ con las propiedades arriba mencionadas.

Veamos que $B_\beta^* = B_\beta \cup \{x_\beta\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$ si $\beta < \alpha$. Para $\beta = 0$ tenemos que $B_\beta^* = \{x_0\} \neq \{0\}$ por lo que este es linealmente independiente. Ahora supongamos B_γ^* es linealmente independiente para todo $\gamma < \beta$, como $\left\{B_\gamma^* \,\middle|\, \gamma < \beta\right\}$ es una cadena se sigue que tambien $\bigcup \left\{B_\gamma^* \,\middle|\, \gamma < \beta\right\}$ es linealmente independiente. Ademas tenemos que

$$\bigcup \left\{B_\gamma^* \,\middle|\, \gamma < \beta\right\} = B_\beta.$$

Por construcción $x_\beta \in F_\beta \setminus E(B_\beta)$ por lo que $B_\beta^* = B_\beta \cup \{x_\beta\}$ es linealmente independiente.

Por lo anterior tenemos una cadena, $\left\{B_\beta^* \,\middle|\, \beta < \alpha\right\}$, de conjuntos linealmente independientes por lo que $B = \bigcup \left\{B_\beta^* \,\middle|\, \beta < \alpha\right\}$ es linealmente independiente. Como $B \subseteq X$ y $E(X) = \mathbb{R}^d$ podemos extender a B a una base de Hamel H tal que $B \subseteq H \subseteq X$. Todo boreliano de X es un boreliano de $\mathbb{R}$ intersectado con X, el cual es boreliano, por lo que los borelianos de X son borelianos de $\mathbb{R}^d$ con esto H resulta ser una base de Burstin relativa X. $\square$

Corolario 3.5.17. *Existen bases de Burstin.*

Demostración. Sea $X = \mathbb{R}^d$, el cual es un boreliano de $\mathbb{R}^d$ y $E(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d$, por el Teorema 3.5.16 existe una base de Burstin relativa a X la cual es una base de Burstin. $\square$

Conjuntos de Erdös

Definición 3.5.18. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^d$ una base de Hamel, definimos el conjunto $Z(H)$ como sigue:*

$$Z(H) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, x = \sum_{i=0}^{n-1} k_i h_i, k_i \in \mathbb{Z}, h_i \in H, i < n, n < \omega \right\}$$

el cual es conocido como el conjunto de Erdös asociado a H, el cual coincide con el subgrupo aditivo generado por H.

Teorema 3.5.19. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^d$ una base de Hamel, entonces*

$$\mathbb{R}^d = \bigcup \left\{ \frac{1}{k} Z(H) \,\middle|\, k < \omega \right\}$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^d$. Como H es base de Hamel existen $n < \omega$, $\{q_i \mid i < n\} \subseteq \mathbb{Q}$ y $\{h_i \mid i < n\} \subseteq H$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} q_i h_i.$$

Sea k el minimo común multiplo de los denominadores de $\{q_i \mid i < n\}$, entonces $kq_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i < n$. De esta forma

$$kx = \sum_{i=0}^{n-1} kq_i h_i \in Z(H),$$

es decir,

$$x \in \frac{1}{k} Z(H).$$

$\square$

Lema 3.5.20. *Sea $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entonces el subgrupo*

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x = p + q\xi,\ \ p, q \in \mathbb{Z}\}$$

es denso en $\mathbb{R}$.

Demostración. Para todo $n < \omega$ existe $p_n \in \mathbb{Z}$ tal que $p_n + n\xi \in (0,1)$. Sea $k < \omega$ y tomemos $k+1$ numeros naturales distintos $\{n_0, \ldots, n_k\} \subseteq \omega$ y los correspondiente $\{p_0, \ldots, p_k\} \subseteq \mathbb{Z}$ tales que para todo $i < k+1$

$$x_i = p_i + n_i\xi \in (0,1).$$

Si $x_i = x_j$ entonces $p_i - p_j = (n_j - n_i)\xi = p_i - p_j \in \mathbb{Z}$ y como ξ es irracional tenemos que $n_j - n_i = 0$, es decir, i=j. Con esto tenemos $k+1$ puntos distintos del intervalo $(0,1)$ y por el principio de las casillas existen distintos $r, s < k+1$ tales que $|x_r - x_s| < \frac{1}{k}$. Como

$$x_r - x_s = (p_{n_r} - p_{n_s}) + (n_r - n_s)\xi \in D$$

tenemos que para todo $k < \omega$ existe $x \in D \setminus \{0\}$ tal que $|x| < \frac{1}{k}$, es decir, 0 es un punto de acumulación de D y por lo tanto D no es un grupo cíclico. El resultado se sigue del hecho de que todo subgrupo de $\mathbb{R}$ es denso o cíclico. $\square$

Teorema 3.5.21. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^d$ una base de Hamel, entonces $Z(H)$ es denso en $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^d$. De esta forma $x, \sqrt{2}x \in \mathbb{R}^d$ y por el Teorema 3.5.19 existen $0 < k, l < \omega$ tales que $kx \in Z(H)$ y $l\sqrt{2}x \in Z(H)$. Entonces

$$pkx + ql\sqrt{2}x = k\left(p + q\frac{l}{k}\sqrt{2}\right)x \in Z(H)$$

para todo $p, q \in \mathbb{Z}$. Como $\frac{l}{k}\sqrt{2}$ es irracional el Lema 3.5.20 implica que

$$\left\{t \in \mathbb{R} \,\middle|\, t = p + q\frac{l}{k}\sqrt{2},\ \ p, q \in \mathbb{Z}\right\}$$

es denso, por lo que existen sucesiones de enteros $\langle p_n \rangle_{n<\omega}$ y $\langle q_n \rangle_{n<\omega}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty}\left(p_n + q_n\frac{l}{k}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{k}.$$

Esto implica que $\langle k(p_n + q_n \frac{l}{k}\sqrt{2})x\rangle_{n<\omega}$ es una sucesión en $Z(H)$ convergente y

$$\lim_{n\to\infty} k\left(p_n + q_n \frac{l}{k}\sqrt{2}\right)x = k\left(\lim_{n\to\infty}\left(p_n + q_n\frac{l}{k}\sqrt{2}\right)\right)x = k\frac{1}{k}x = x$$

Como $x \in \mathbb{R}^d$ fue arbitraria concluimos que $Z(H)$ es denso en $\mathbb{R}^d$. $\square$

Nuestro objetivo es probar que el conjunto $Z(H)$ asociado a cualquier base de Hamel no es Lebesgue medible y saturado no medible, para esto necesitamos algunos resultados, entre los cuales éstan los muy importantes Teorema de la cubierta de Vitali (Teorema 3.5.28) y Teorema de densidad de Lebesgue (Teorema 3.5.30), los cuales pueden encontrarse al final de esta sección.

Teorema 3.5.22. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^d$ una base de Hamel, entonces $Z(H)$ es saturado no medible y saturado en categoría.*

Demostración. Sea $h_0 \in H$. Por la unicidad de la representación en terminos de H tenemos que para todo $x \in Z(H)$, $\frac{1}{2}h_0 + x$ no pertenece a $Z(H)$, por lo que $Z(H)$ y $\frac{1}{2}h_0 + Z(H)$ son ajenos. Por el Lema 3.5.21 $Z(H)$ es denso y por lo tanto $\frac{1}{2}h_0 + Z(H)$ tambien es denso. Como $Z(H)$ no intersecta al denso $\frac{1}{2}h_0 + Z(H)$ tenemos que

$$\mathrm{int}(Z(H)) = \emptyset$$

y como $Z(H) + Z(H) = Z(H)$ el Teorema de Steinhauss (Teorema 1.2.16) y su análogo en categoría (Teorema 1.4.17) implican que $(\lambda_d)_*(Z(H)) = 0$ y $Z(H)$ no contiene ningún subconjunto con la propiedad de Baire y de segunda categoría. Sin embargo, $(\lambda_d)^*(Z(H)) > 0$ y $Z(H)$ es de segunda categoría por el Teorema 3.5.19, y por lo tanto $Z(H)$ no es Lebesgue medible y no tiene la propiedad de Baire.

Tenemos que $Z(H)$ es denso, tiene medida exterior de Lebesgue positiva, es de segunda categoría y $Z(H) + Z(H) = Z(H)$. Los Lemas 3.5.36 y 3.5.39 implican que

$$(\lambda_d)_*(\mathbb{R}^d \setminus Z(H)) = 0$$

y $\mathbb{R}^d \setminus Z(H)$ no contiene ningún sunconjunto con la propiedad de Baire y de segunda categoría y por lo tanto $Z(H)$ es saturado no medible y saturado en categoría. $\square$

Teorema 3.5.23. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^d$ una base de Hamel y $G \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto no vacío, entonces $Z(H) \cap G \in \mathfrak{U}$.*

Demostración. Supongamos que $0 \in G$. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función aditiva y discontinua. Como H es base de Hamel entonces H genera a $\mathbb{R}^d$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, por lo que existen $\{b_1, \dots b_d\} \subseteq H$ tales que estos forman una base sobre $\mathbb{R}$. Todo $x \in \mathbb{R}^d$ puede representarse de manera única como

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i b_i$$

con los coeficientes $\{x_i \mid i \in \{1, \dots, d\}\} \subseteq \mathbb{R}$ dependiendo de x de manera continua. Por otro lado, las funciónes $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ dadas por $\varphi_i(t) = tb_i$ son continuas, entonces

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i(x_i))$$

y como f es discontinua existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $f \circ \varphi_{i_0}$ es discontinua. Denotemos a esta composición discontinua como φ y sea $b = b_{i_0}$. Tenemos que φ es una función aditiva por ser composición de una aditiva y la función definida por la representación en términos de la base. Por ser φ discontinua existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(u) \neq \varphi(1)u$ y por lo tanto existe $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$\varphi(u) = \varphi(1)u + c.$$

Por la $\mathbb{Q}$-linealidad de φ (Teorema 3.2.1) tenemos que $u \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y por el Teorema 3.5.19 existe $k < \omega$ tal que $kub \in Z(H)$. Sea

$$D = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = p + qku, q, p \in \mathbb{Z}\},$$

entonces por el Lema 3.5.20 D es denso en $\mathbb{R}$ y por lo tanto existe $\langle \alpha_n \rangle_{n<\omega} \subseteq D \setminus \{0\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Además, $\alpha_n b \in Z(H)$ pues cada α_n es de la forma $p_n + q_n ku$ con $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$.

Como la sucesíon $\langle \alpha_n \rangle_{n<\omega}$ es convergente esta debe ser acotada. Si tuvieramos que la sucesión $\langle q_n \rangle_{n<\omega} \subseteq \mathbb{Z}$ fuera acotada entonces la sucesión $\langle p_n \rangle_{n<\omega}$ también debería de ser acotada y por lo tanto ambas sucesiones tomarían un número finito de valores distintos y lo mismo sería cierto para $\langle \alpha_n \rangle_{n<\omega}$, lo cual contradice el que esta se acumule en 0 y por lo tanto la sucesíon $\langle q_n \rangle_{n<\omega}$ no es acotada. Sin pérdida de generalidad supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} cq_n = +\infty,$$

pues de no ser así podemos pasar a una subsucesión que lo cumpla o cambiar la sucesión por $\langle -\alpha_n \rangle_{n<\omega} \subseteq D \setminus \{0\}$ la cual también converge a cero.

Para todo $n < \omega$ tenemos por la $\mathbb{Q}$-linealidad de f que

$$\begin{aligned} f(\alpha_n b) &= f(p_n b + q_n k u b) = p_n f(b) + q_n k f(ub) \\ &= p_n \varphi(1) + q_n k \varphi(u) \\ &= p_n \varphi(1) + q_n k(\varphi(1)u + c) \\ &= (p_n + q_n k u)\varphi(1) + q_n k c \\ &= \alpha_n \varphi(1) + k c q_n \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n b) = \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n\right)\varphi(1) + k \lim_{n\to\infty} c q_n = 0 + \infty = +\infty.$$

Como $0 \in G$ tenemos para $n < \omega$ suficientemente grande que $\alpha_n \in G$, por lo que $\alpha_n \in G \cap Z(H)$. Entonces como

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n b) = +\infty$$

tenemos que f no es acotada superiormente en $G \cap Z(H)$.

Por lo tanto hemos demostrado que toda función aditiva discontinua $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ no es acotada superiormente en $G \cap Z(H)$ y por lo tanto $G \cap H \in \mathfrak{B}$. Por el Teorema 3.4.8 tenemos que $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}$ y por lo tanto $G \cap Z(H) \in \mathfrak{U}$.

Ahora supongamos que $0 \in \mathbb{R}^d \setminus G$. Como $Z(H)$ es denso (Teorema 3.5.21)y G abierto existe $h \in G \cap Z(H)$, entonces $0 \in G - h$ y por el caso anterior tenemos que $(G - h) \cap Z(H) \in \mathfrak{U}$. Por otro lado como $Z(H)$ es subgrupo tenemos que $Z(H) + h = Z(H)$ y por lo tanto

$$((G - h) \cap Z(H)) + h = G \cap (Z(H) + h) = G \cap Z(H).$$

Como las traslaciones son operaciones $\mathfrak{U}$-conservativas (Teoremas 3.4.14 y 3.4.11) tenemos que $G \cap Z(H) \in \mathfrak{U}$. $\square$

El Teorema anterior nos da una idea de la estructura de $Z(H)$, nos dice que este intersecta a cualquier abierto en un conjunto suficientemente grande para pertenecer a la clase $\mathfrak{U}$. Este resultado se puede considerar un resultado topológico sobre el conjunto $Z(H)$, de hecho probaremos que existen las respectivas versiones de medida y categoría para este resultado.

Lema 3.5.24. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^d$ una base de Hamel y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función aditiva y discontinua, entonces para cada $M \in \mathbb{R}$ el conjunto*

$$A_M = \{x \in Z(H) \mid f(x) > M\}$$

es saturado no medible y saturado en categoría

Demostración. Por el Teorema 3.5.23 sabemos que $Z(H) \in \mathfrak{U}$ por lo que f no es acotada superiormente en $Z(H)$, en particular existe $x_0 \in Z(H)$ tal que $f(x_0) > 0$. Para $k \in \mathbb{Z}$ sea

$$B_k = \{x \in Z(H) \mid kf(x_0) < f(x) \leqslant (k+1)f(x_0)\}$$

Veamos que $B_{k+1} = B_k + x_0$. Sea $x \in Z(H)$, entonces $x - x_0 \in Z(H)$ por este ser subgrupo y por la $\mathbb{Q}$-linealidad de f tenemos:

$$\begin{aligned} x \in B_{k+1} &\Leftrightarrow (k+1)f(x_0) < f(x) \leqslant (k+2)f(x_0) \\ &\Leftrightarrow kf(x_0) < f(x) - f(x_0) \leqslant (k+1)f(x_0) \\ &\Leftrightarrow kf(x_0) < f(x - x_0) \leqslant (k+1)f(x_0) \\ &\Leftrightarrow x - x_o \in B_k \\ &\Leftrightarrow x \in B_k + x_0 \end{aligned}$$

Por lo anterior tenemos que los B_k tienen la misma medida exterior y la misma categoría. Como $(\lambda_d)^*(Z(H)) > 0$ por no ser Lebesgue medible (Teoremas 3.5.22), $Z(H)$ es de segunda categoría por no tener la propiedad de Baire (Teoremas 3.5.22) y

$$\bigcup \{B_k \mid k \in \mathbb{Z}\} = Z(H)$$

tenemos que todo B_k tiene medida exterior de Lebesgue positiva y es de segunda categoría para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Dado $M \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$ con $f(x_0)k \geqslant M$ tenemos que $B_k \subseteq A_M$ por lo cual $(\lambda_d)^*(A_M) > 0$ y A_M es de segunda categoría. Sea $G \subseteq \mathbb{R}^d$ es un abierto no vacío, entonces $G \cap A_M \neq \emptyset$ pues de lo contrario $G \subseteq \mathbb{R}^d \setminus A_M$, es decir, $G \cap Z(H) \subseteq Z(H) \setminus A_M = \{x \in Z(H) \mid f(x) \leqslant M\}$, por lo que f seria acotada superiormente en $G \cap Z(H)$ y por el Teorema 3.5.23 f seria continua, contrario a nuestra elección. De esta manera tenemos que A_M es denso en $\mathbb{R}^d$. Más aun,

$$A_{\frac{1}{2}M} + A_{\frac{1}{2}M} \subseteq A_M$$

ya que dados $x, y \in A_{\frac{1}{2}M}$, $f(x) > \frac{1}{2}M$ y $f(y) > \frac{1}{2}M$, entonces $x + y \in A_M$ pues

$$f(x+y) = f(x) + f(y) > \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M.$$

En resumen, para todo $M \in \mathbb{R}$ se tiene que $A_{\frac{1}{2}M}$ es denso, con medida exterior de Lebesgue positiva y de segunda categoría, entonces los Teorema 3.5.36 y 3.5.39 nos dicen que

$$(\lambda_d)_* \left(\mathbb{R}^d \setminus \left(A_{\frac{1}{2}M} + A_{\frac{1}{2}M}\right)\right) = 0$$

y $\mathbb{R}^d \setminus A$ no continene ningún conjunto con la propiedad de Baire y de segunda categoría. Como

$$A_{\frac{1}{2}M} + A_{\frac{1}{2}M} \subseteq A_M$$

entonces $\mathbb{R}^d \setminus A_M$ tiene medida de Lebesgue interior cero y no contiene ningún conjunto con la propiedad de Baire y de segunda categoría.

Por definición de A_M tenemos que $A_M \subseteq Z(H)$ y por el Teorema 3.5.22 $Z(H)$ tiene medida interior de Lebesgue cero y es de primera categoría por lo que tambien A_M tiene medida interior de Lebesgue cero y es de primera categoría, de esta forma se tiene que A_M es saturado no medible y saturado en categoría. $\square$

Teorema 3.5.25. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^d$ una base de Hamel y $A \subseteq \mathbb{R}^d$ Lebesgue medible con medida de Lebesgue positiva, entonces $A \cap Z(H) \in \mathfrak{U}$.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función aditiva discontinua y consideremos para $M \in \mathbb{R}$ los conjuntos

$$A_M = \{x \in Z(H) \mid f(x) > M\}.$$

El Teorema 3.5.24 nos dice que A_M es saturado no medible, por lo cual intersecta a todo conjunto Lebesgue medible de medida positiva, en particular

$$A \cap A_M \neq \emptyset,$$

es decir, para toda $M \in \mathbb{R}$ existe $h_M \in A \cap A_M \subseteq A \cap Z(H)$ el cual satisface

$$f(h_M) > M$$

por lo que f no es acotada superiormente en $A \cap Z(H)$.

Por lo tanto toda función aditiva discontinua es no acotada superiormente en $A \cap Z(H)$ por lo que $A \cap Z(H) \in \mathfrak{B}$. Por último el Teorema 3.4.8 implica que $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}$ y por lo tanto $A \cap Z(H) \in \mathfrak{U}$. $\square$

Teorema 3.5.26. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^d$ una base de Hamel y $A \subseteq \mathbb{R}^d$ con la propiedad de Baire y de segunda categoría, entonces $A \cap Z(H) \in \mathfrak{U}$.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función aditiva discontinua y consideremos para $M \in \mathbb{R}$ los conjuntos

$$A_M = \{x \in Z(H) \mid f(x) > M\}.$$

El Teorema 3.5.24 nos dice que A_M es saturado en categoría por lo cual intersecta a todo conjunto con la propiedad de Baire y de segunda categoría, en particular

$$A \cap A_M \neq \emptyset$$

es decir, para toda $M \in \mathbb{R}$ existe $h_M \in A \cap A_M \subseteq A \cap Z(H)$ el cual satisface

$$f(h_M) > M$$

por lo que f no es acotada superiormente en $A \cap Z(H)$.

Por lo tanto toda función aditiva discontinua es no acotada superiormente en $A \cap Z(H)$ por lo que $A \cap Z(H) \in \mathfrak{B}$. Por último el Teorema 3.4.8 implica que $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}$ y por lo tanto $A \cap Z(H) \in \mathfrak{U}$. $\square$

Lemas de categoría y medida

A continuación se demuestran los resultados que se utilizaron para demostrar que los conjuntos de Erdös asociados a una base de Hamel son saturados no medibles y saturados en categoría.

Definición 3.5.27 (Cubierta de Vitali)**.** *Sea $\mathcal{Q}$ la colección de todos los cubos $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ de la forma $Q = \Pi_{i=1}^n I_i$ donde $I_i \subseteq \mathbb{R}$ son intervalos cerrados de la misma longitud positiva a la cual denotaremos por $e(Q)$. Una subcolección $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Q}$ se dice una cubierta de Vitali para un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ si para todo $x \in E$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $Q \in \mathcal{V}$ tal que $x \in Q$ y $0 < e(Q) < \epsilon$.*

Teorema 3.5.28 (Teorema de la cubierta de Vitali)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$ no vacío y $\mathcal{V}$ una cubierta de Vitali para A entonces existe una familia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ a lo mas numerable tal que $\lambda_d (A \setminus \bigcup \mathcal{C}) = 0$.*

Demostración. Primero supongamos que A es acotado y sean $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto acotado que contenga a A y $\mathcal{V}_0 = \{V \in \mathcal{V} \mid V \subseteq U\}$. Por $\mathcal{V}$ ser una cubierta de

Vitali para A y U abierto se tiene que $\mathcal{V}_0$ es cubierta de Vitali para A. Procedemos inductivamente para construir una sucesión$\langle C_n\rangle_{n<\omega}$ de elementos ajenos de la cubierta de Vitali $\mathcal{V}_0$ de la siguiente manera. Primero elegimos cualquier $C_0 \in \mathcal{V}_0$. Supongamos que para $k<\omega$ tenemos definidos $\{C_i \mid i<k\} \subseteq \mathcal{V}_0$ ajenos dos a dos. Si

$$A \subseteq \bigcup \{C_i \mid i<k\},$$

entonces la familia $\{C_i \mid i<k\}$ satisface los requisitos del teorema. De otra manera, supongamos que existe $x \in A \setminus \bigcup \{C_i \mid i<k\}$ y sea

$$\delta_k = \sup \left\{ e(Q) \,\middle|\, Q \in \mathcal{V}_0, V \cap \bigcup \{C_i \mid i<k\} = \emptyset \right\}.$$

Como $\bigcup \{C_i \mid i<k\}$ es cerrado y $\mathcal{V}_0$ es cubierta de Vitali para A existe $Q \in \mathcal{V}_0$ vecindad de x tal que $Q \cap \bigcup \{C_i \mid i<k\} = \emptyset$ por lo que $0<\delta_k$. Más aun, como U es acotado y para todo $Q \in \mathcal{V}_0$ se tiene que $Q \subseteq U$ entonces $\delta_k \leqslant \operatorname{diam}(U) < +\infty$. Por lo tanto existe $C_k \in \mathcal{V}_0$ que satisface

$$\frac{\delta_k}{2} < e(C_k) \leqslant \delta_k, \qquad C_{n+1} \cap \bigcup \{C_i \mid i<k\} = \emptyset,$$

lo cual completa el paso inductivo.

Supongamos que tenemos definida la sucesión $\langle C_n\rangle_{n<\omega}$ descrita anteriormente, en caso contrario se construyo una cubierta con un número finito de elementos. Para todo $k<j<\omega$ $C_k \subseteq U$ es un cubo Lebesgue medible, $C_k \cap C_j = \emptyset$ y U es acotado, por lo que tenemos

$$\sum_{i<\omega} \lambda_d(C_i) = \lambda_d \left(\bigcup \{C_i \mid i<\omega\} \right) \leqslant \lambda_d(U) < +\infty,$$

es decir, la serie $\sum_{i<\omega} \lambda_d(C_i)$ es convergente, esto implica que

$$\lim_{i\to\infty} \lambda_d(C_i) = 0,$$

pero $\lambda(C_i) = e(C_i)^n$ y como $\delta_i < 2e(C_{i+1})$ para todo $i<\omega$ tambien tenemos que

$$\lim_{i\to\infty} \delta_i = 0.$$

Para cada $k<\omega$ denotemos por D_k al cubo con mismo centro que C_k pero con longitud de cada lado $e(D_k) = 5e(C_k)$. Entonces $\lambda_d(D_k) = 5^d \lambda_d(C_k)$ para todo $k<\omega$, por lo que

$$\sum_{i<\omega} \lambda_d(D_i) = 5^d \sum_{i\omega} \lambda_d(C_i) < +\infty.$$

Veamos que para cada $n < \omega$ se cumple que

$$A \setminus \bigcup \{C_i \mid i < n\} \subseteq \bigcup \{D_i \mid n \leqslant i < \omega\}.$$

Para esto fijemos $n < \omega$ y $x \in A \setminus \bigcup \{C_i \mid i < n\}$. Entonces, como $\bigcup \{C_i \mid i < n\}$ es cerrado y $\mathcal{V}_0$ es cubierta de Vitali para A, existe $C \in \mathcal{V}_0$ vecindad de x tal que $C \cap \bigcup \{C_i \mid i < n\} = \emptyset$. Como

$$\delta_k = \sup \left\{ e(C) \,\middle|\, C \in \mathcal{V}_0, V \cap \bigcup \{C_i \mid i < k\} = \emptyset \right\}$$

se debe tener que C intersecta a $\bigcup \{C_i \mid i < k\}$ para alguna $k < \omega$, pues de no hacerlo $0 < e(C) \leqslant \delta_k$ para todo $k < \omega$, lo cual contradice que $\lim_{i \to \infty} \delta_i = 0$. Sea $k_0 < \omega$ el menor natural k tal que $C \cap \bigcup \{C_i \mid i < k+1\} \neq \emptyset$, entonces $n \leqslant k_0$ y C intersecta a C_{k_0} pero no a C_i para $i < k_0$, por lo tanto $e(C) \leqslant \delta_{k_0}$. Como $\frac{\delta_{k_0}}{2} < e(C_{k_0})$ entonces $e(C) \leqslant 2e(C_{k_0})$. Veamos que $C \subseteq D_{k_0}$, para esto sean $y = (y_1, \ldots, y_d)$ el centro de C_{k_0}, que coincide con el de D_{k_0}, $z = (z_1, \ldots, z_d) \in C \cap C_{k_0}$ y escribamos a x como $(x_1, \ldots, x_d) \in C$. De esta forma, para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$ x_i, z_i pertenecen a un intervalo de longitud $e(C)$, z_i, y_i pertenecen a un intervalo de longitud $e(C_{k_0})$, del cual y_i es centro y por lo tanto

$$|x_i - y_i| \leqslant |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leqslant e(C) + \frac{1}{2} e(C_{k_0}) \leqslant \frac{5}{2} e(C_{k_0})$$

por lo que x_i pertenece al intervalo con centro en y_i y con longitud $5e(C_{k_0})$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, por lo que x pertenece al cubo con centro en y y longitud común de los vertices $5e(C_{k_0})$, es decir, $x \in D_{k_0}$. Por lo tanto

$$C \subseteq D_{k_0} \subseteq \bigcup \{D_i \mid n \leqslant i < \omega\}.$$

Por lo tanto tenemos la siguiente desigualdad para todo $n < \omega$:

$$\begin{aligned} (\lambda_d)^* \left(A \setminus \bigcup \{C_i \mid i < \omega\} \right) &\leqslant (\lambda_d)^* \left(A \setminus \bigcup \{C_i \mid i < n\} \right) \\ &\leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_d(D_i) \end{aligned}$$

y como $\sum_{i<\omega} \lambda_d(D_i) < +\infty$ entonces

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_d(D_i) = 0,$$

por lo que

$$\lambda_d\left(A \setminus \bigcup\{C_i \mid i < \omega\}\right) = 0.$$

Ahora consideremos el caso en que $A \subseteq \mathbb{R}^d$ no es acotado. Sea $I = \Pi_{i=1}^n (0,1)$ y consideremos para cada $k \in \mathbb{Z}^k$ a I_k el trasladado de I por k, es decir, $I_k = I + k$. entonces la familia $\mathcal{I} = \left\{I_k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}^k\right\}$ es disjunta, numerable y

$$\lambda_d\left(\mathbb{R}^d \setminus \bigcup \mathcal{I}\right) = 0$$

pues $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup \mathcal{I}$ es una unión numerable de hiperplanos de dimensión $d-1$.

Para cada $k \in \mathbb{Z}^k$ el conjunto $A_k = A \cap I_k$ es acotado, además de que $\mathcal{V}$, la cubierta de Vitali para A, sigue siendo una cubierta de Vitali para A_k y este último se queda contenido en el abierto acotado I_k. Por el resultado anterior existe $\mathcal{V}_k \subseteq \mathcal{V}$ una familia disjunta y a lo más numerable tal que

$$\lambda_d\left(A_k \setminus \bigcup \mathcal{V}_k\right) = 0, \qquad \bigcup \mathcal{V}_k \subseteq I_k.$$

Consideremos la familia

$$\mathcal{V}' = \bigcup \left\{\mathcal{V}_k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}^k\right\} \subseteq \mathcal{V}$$

la cual es unión numerable de conjuntos a lo más numerables y por lo tanto es a lo más numerable, además la familia es disjunta. Por último, como $\bigcup \mathcal{V}_k \subseteq I_k$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\lambda_d\left(A \setminus \bigcup \mathcal{V}'\right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^k} \lambda_d\left(A_k \setminus \bigcup \mathcal{V}'\right) + \lambda_d\left(A \cap \left(\mathbb{R}^d \setminus \bigcup \mathcal{I}\right)\right) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^k} \lambda_d\left(A_k \setminus \bigcup \mathcal{V}^k\right) = 0.
\end{aligned}$$

□

Definición 3.5.29. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Un punto $x \in \mathbb{R}^d$ es llamado un punto de densidad exterior de A si*

$$\lim_{r \to 0} \frac{(\lambda_d)^*(A \cap Q_r(x))}{\lambda_d(Q_r(x))} = 1$$

donde $Q_r(x)$ es el cubo cerrado con centro en x y con $e(Q_r(x)) = r$.

Observemos que para todo $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$

$$\frac{(\lambda_d)^*(A \cap Q_r(x))}{\lambda_d(Q_r(x))} \leqslant 1,$$

por lo que es equivalente el que x sea un punto de densidad exterior para A a que

$$\liminf_{r \to 0} \frac{(\lambda_d)^*(A \cap Q_r(x))}{\lambda_d(Q_r(x))} = 1.$$

Teorema 3.5.30 (Teorema de Densidad Exterior de Lebesgue)**.** *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *y*

$$A^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, x \text{ es punto de densidad exterior de } A \right\}.$$

Entonces, $\lambda_d(A \setminus A^*) = 0$*.*

Demostración. Para cada $x \in A \setminus A^*$ tenemos

$$\liminf_{r \to 0} \frac{(\lambda_d)^*(A \cap Q_r(x))}{\lambda_d(Q_r(x))} < 1.$$

Para cada $\alpha \in (0, 1)$ sea

$$H(\alpha) = \left\{ x \in A \,\middle|\, \liminf_{r \to 0} \frac{(\lambda_d)^*(A \cap Q_r(x))}{\lambda_d(Q_r(x))} < \alpha \right\}.$$

Como

$$A \setminus A^* = \bigcup \left\{ H\left(1 - \frac{1}{k}\right) \,\middle|\, 2 \leqslant k < \omega \right\}$$

es suficiente probar que $\lambda_d(H(\alpha)) = 0$ para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Primero supongamos que A es acotado. Fijemos un $\alpha \in (0, 1)$ y sea $H = H(\alpha)$. Dada $\epsilon > 0$ existe un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $H \subseteq G$ y

$$\lambda_d(G) \leqslant (\lambda_d)^*(H) + \epsilon.$$

Como $H \subseteq A$ es acotado $(\lambda_d)^*(H) < +\infty$. Sea $\mathcal{V}$ la familia de todos los cubos $Q \subseteq G$ cerrados y no triviales tales que

$$\frac{(\lambda_d)^*(A \cap Q)}{\lambda_d(Q)} < \alpha.$$

Por definición $\mathcal{V}$ es una cubierta de Vitali para H. Por el Teorema de la cubierta de Vitali (Teorema 3.5.28) existe una familia disjunta $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ a lo más numerable tal que

$$\lambda_d\left(H \setminus \bigcup \mathcal{V}_0\right).$$

Más aun,

$$H = \bigcup \{H \cap Q \mid Q \in \mathcal{V}_0\} \cup \left(H \setminus \bigcup \mathcal{V}_0\right) \subseteq \bigcup \{A \cap Q \mid Q \in \mathcal{V}_0\} \cup \left(H \setminus \bigcup \mathcal{V}_0\right),$$

por lo que

$$\begin{aligned}(\lambda_d)^*(H) &\leqslant (\lambda_d)^*\left(\bigcup \{A \cap Q \mid Q \in \mathcal{V}_0\}\right) + (\lambda_d)^*\left(H \setminus \bigcup \mathcal{V}_0\right)\\ &\leqslant \sum_{Q \in \mathcal{V}_0} (\lambda_d)^*(A \cap Q).\end{aligned}$$

Además, por definición de la cubierta $\mathcal{V}$, tenemos que $(\lambda_d)^*(A \cap Q) \leqslant \alpha\lambda(Q)$ y $Q \subseteq G$ para todo $Q \in \mathcal{V}_0$. Por lo tanto

$$(\lambda_d)^*(H) \leqslant \alpha \sum_{Q \in \mathcal{V}_0} \lambda(Q) = \alpha\lambda_d\left(\bigcup \mathcal{V}_0\right) \leqslant \alpha\lambda_d(G) \leqslant \alpha\left((\lambda_d)^*(H) + \epsilon\right).$$

Esto es para toda $\epsilon > 0$, por lo que

$$(\lambda_d)^*(H) \leqslant \alpha(\lambda_d)^*(H)$$

y como $\alpha \in (0, 1)$ entonces $(\lambda_d)^*(H) = 0$. De esta forma se tiene que H es Lebesgue medible y

$$\lambda_d(H) = 0.$$

Si $A \subseteq \mathbb{R}^d$ no es acotado, sea $I_k = (-k, k)^n$ para cada $k < \omega$ y $A_k = A \cap (I_{k+1} \setminus I_k)$, $k < \omega$. De esta manera $\bigcup \{A_k \mid k < \omega\} = A$. Como $A_k \subseteq A$ tenemos que

$$(\lambda_d)^*(A_k \cap Q^r) \leqslant (\lambda_d)^*(A \cap Q^r) \leqslant \lambda(Q^r)$$

para todo $r > 0$ y $k < \omega$, por lo que

$$\frac{(\lambda_d)^*(A_k \cap Q^r)}{\lambda_d(Q^r)} \leqslant \frac{(\lambda_d)^*(A \cap Q^r)}{\lambda_d(Q^r)}.$$

Esto quiere decir que si $x \in A_k$ es punto de densidad exterior para A_k entonces x tambien es punto de densidad exterior para A, es decir, $A_n^* \subseteq A^*$. Por lo tanto $A_k \setminus A^* \subseteq A_k \setminus A_k^*$ y de esta forma

$$A \setminus A^* = \bigcup \{A_k \setminus A^* \mid k < \omega\} \subseteq \bigcup \{A_k \setminus A_k^* \mid k < \omega\}.$$

Como A_k es acotado tenemos que $\lambda_d(A_k \setminus A_k^*) = 0$ para todo $k < \omega$ y por lo tanto

$$(\lambda_d)^*(A \setminus A^*) \leqslant \sum_{k<\omega} \lambda_d(A_k^* \setminus A_k) = 0,$$

es decir, $\lambda(A \setminus A^*) = 0$. $\square$

Lema 3.5.31. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $(\lambda_d)^*(A \cap I) = \lambda(I)$ para todo $I \subseteq \mathbb{R}^d$ de la forma $I = \Pi_{i=1}^n I_i$ donde cada $I_i \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto, entonces $(\lambda_d)_*(\mathbb{R}^d \setminus A) = 0$.*

Demostración. Para cada $k < \omega$ sea $J_k = (-k, k)^n \subseteq \mathbb{R}^d$, entonces $J_k \subseteq J_{k+1}$, $\lambda_d(J_k) < +\infty$ para toda $k < \omega$ y

$$\bigcup \{J_k \mid k < \omega\} = \mathbb{R}^d.$$

Supongamos que $(\lambda_d)_*(\mathbb{R}^d \setminus A) > 0$, entonces existe $F \subseteq \mathbb{R}^d \setminus A$ medible tal que $\lambda_d(F) > 0$. Más aun,

$$0 < \lambda_d(F) = \lambda_d\left(\bigcup \{F \cap J_k \mid k < \omega\}\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda_d(F \cap J_k),$$

por lo que existe $k_0 < \omega$ tal que $\lambda_d(F \cap J_{k_0}) > 0$.

Como $F \subseteq \mathbb{R}^d \setminus A$ tenemos que

$$A \cap J_{k_0} = (A \cap J_{k_0} \cap F) \cup ((A \cap J_{k_0}) \setminus F) = (A \cap J_{k_0}) \setminus F \subseteq J_{k_0} \setminus F,$$

por lo que tenemos

$$\begin{aligned}(\lambda_d)^*(J_{k_0} \cap A) &\leqslant (\lambda_d)^*(J_{k_0} \setminus F)\\ &= \lambda_d(J_{k_0} \setminus F)\\ &= \lambda_d(J_{k_0} \setminus (J_{k_0} \cap F))\\ &= \lambda_d(J_{k_0}) - \lambda_d(J_{k_0} \cap F)\\ &< \lambda_d(J_{k_0})\end{aligned}$$

Lo que prueba que existe un conjunto de la forma $J = \Pi_{i=1}^n I_i$ donde cada $I_i \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y $\lambda_d(J) \neq (\lambda_d)^*(J \cap A)$, lo cual prueba la afirmación. $\square$

Definición 3.5.32. *Dada una medida exterior ρ definida sobre un espacio métrico (E, d) se dice que ρ es una medida exterior métrica si para todo $A, B \subseteq E$ con $d(A, B) = \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\} > 0$ se tiene que*

$$\rho(A \cup B) = \rho(A) + \rho(B).$$

Lema 3.5.33. *Sea ρ una medida exterior definida sobre un espacio métrico (E, d) de tal manera que los borelianos son medibles, es decir, satisfacen la condición de Carathéodory, entonces ρ es medida exterior métrica.*

Demostración. Sean $A_1, A_2 \subseteq E$ con $d(A_1, A_2) > 0$. Definamos $\gamma = d(A_1, A_2) > 0$. Para cada $x \in A_1$ consideremos

$$B_{\frac{\gamma}{2}}(x) = \left\{ z \in E \,\middle|\, d(x, z) < \frac{\gamma}{2} \right\}$$

Sea

$$B = \bigcup \left\{ B_{\frac{\gamma}{2}}(x) \,\middle|\, x \in A_1 \right\}$$

entonces B es abierto, el cual satisface la condición de Carathedory, es decir, para todo $A \subseteq E$ se tiene que

$$\rho(A) = \rho(A \cap B) + \rho(A \setminus B).$$

Considerando esto para $A_1 \cup A_2$ tenemos que

$$\rho(A_1 \cup A_2) = \rho((A_1 \cup A_2) \cap B) + \rho((A_2 \cup A_2) \setminus B)$$

Si existiera $z \in ((A_1 \cup A_2) \cap B) \setminus A_1$ entonces $z \in A_2 \cap B$ por lo que existe $x_0 \in A_1$ tal que $z \in A_2 \cap B_{\frac{\gamma}{2}}(x_0)$, es decir,

$$\gamma = d(A_1, A_2) \leqslant d(z, x_0) < \frac{\gamma}{2}$$

lo cual no es posible y por lo tanto $(A_1 \cup A_2) \cap B = A_1$. Como A_1 y A_2 son ajenos tambien tenemos que $(A_2 \cup A_2) \setminus B = A_2$. Con esto tenemos que

$$\begin{aligned} \rho(A_1 \cup A_2) &= \rho((A_1 \cup A_2) \cap B) + \rho((A_2 \cup A_2) \setminus B) \\ &= \rho(A_1) + \rho(A_2), \end{aligned}$$

lo cual prueba que ρ es medida exterior métrica. □

Corolario 3.5.34. *La medida exterior de Lebesgue n-dimensional, $(\lambda_d)^*$, es una medida exterior métrica.*

Demostración. Los borelianos de $\mathbb{R}^d$ son Lebesgue medibles, entonces el Lema 3.5.33 implica el resultado. □

Lema 3.5.35. *Sea* $\{A_n \mid n < \omega\}$ *una colección de subconjuntos de* $\mathbb{R}^d$ *tales que* $d(A_i, A_j) > 0$ *para todo* $i < j < \omega$, *entonces*

$$(\lambda_d)^* \left(\bigcup \{A_n \mid n < \omega\}\right) = \sum_{n<\omega} (\lambda_d)^*(A_n)$$

Demostración. La subaditividad de la medida exterior nos da que

$$(\lambda_d)^* \left(\bigcup \{A_n \mid n < \omega\}\right) \leqslant \sum_{n<\omega} (\lambda_d)^*(A_n)$$

por lo que basta probar la otra desigualdad.

Probemos por inducción que para todo $k < \omega$ se cumple

$$\sum_{i=0}^{k-1} (\lambda_d)^*(A_i) \leqslant (\lambda_d)^* \left(\bigcup \{A_i \mid i < k\}\right).$$

El caso $k = 1$ es una igualdad. Supongamos que la afirmación es valida para cierta $k < \omega$ y sea

$$B = \bigcup \{A_i \mid i < k\}$$

entonces

$$d(A_k, B) \geqslant \text{mín}\, \{d(A_k, A_i) \mid i < k\} > 0$$

y como $(\lambda_d)^*$ es medida exterior métrica (Corolario 3.5.34) tenemos que

$$(\lambda_d)^*(A_k \cup B) = (\lambda_d)^*(A_k) + (\lambda_d)^*(B).$$

Nuestra hipótesis inductiva nos dice que

$$\sum_{i=0}^{k-1} (\lambda_d)^*(A_i) \leqslant (\lambda_d)^*(B)$$

por lo que tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} (\lambda_d)^*(A_i) &\leqslant (\lambda_d)^*(B) + (\lambda_d)^*(A_k) \\
&= (\lambda_d)^*(A_k \cup B) \\
&= (\lambda_d)^* \left(\bigcup \{A_i \mid i < k+1\}\right)
\end{aligned}$$

lo cual prueba el paso inductivo.

Por lo anterior tenemos que para todo $k < \omega$ se cumple

$$\sum_{i=0}^{k-1} (\lambda_d)^*(A_i) \leqslant (\lambda_d)^* \left(\bigcup \{A_i \mid i < k\} \right) \leqslant (\lambda_d)^* \left(\bigcup \{A_i \mid i < \omega\} \right)$$

y por lo tanto

$$\sum_{i<\omega} (\lambda_d)^*(A_i) \leqslant (\lambda_d)^* \left(\bigcup \{A_i \mid i < \omega\} \right),$$

la cual es la desigualdad deseada. □

Supongamos que tenemos un subconjunto abierto y otro subconjunto denso de $\mathbb{R}^d$, en este caso se tiene que su suma conjuntista es la unión de traslados del abierto indexados por un conjunto denso el cual claramente resulta ser todo $\mathbb{R}^d$. El siguiente resultado generaliza esta idea.

Lema 3.5.36. *Sean $B, D \subseteq \mathbb{R}^d$ tales que $(\lambda_d)^*(B) > 0$ y D es denso en $\mathbb{R}^d$. Sea $A = B + D$ entonces $(\lambda_d)_*(\mathbb{R}^d \setminus A) = 0$.*

Demostración. Por el Teorema de densidad de Lebesgue (Teorema 3.5.30) existe $x_0 \in B$ el cual es un punto de densidad exterior de B, es decir,

$$\lim_{r \to 0} \frac{(\lambda_d)^*(B \cap Q_r(x_0))}{\lambda_d(Q_r)} = 1$$

donde $Q_r(x_0)$ denota el cubo con centro en x_0 y aristas de longitud r. Tenemos que para toda $c \in (0, 1)$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $r < \delta$

$$(\lambda_d)^*(B \cap Q_r(x_0)) > c\lambda_d(Q_r(x_0)).$$

Hagamos $D_0 = D + x_0$ entonces todo $x \in D_0$ es de la forma $x = x_0 + y$ para algun $y \in D$. Como la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones tenemos que

$$(\lambda_d)^*((B + y) \cap Q_r(x)) = (\lambda_d)^* ((B \cap Q_r(x_0)) + y) = (\lambda_d)^*(B \cap Q_r(x_0))$$

y

$$\lambda(Q_r(x)) = \lambda_d(Q_r(x_0) + y) = \lambda(Q_r(x_0)),$$

por lo que para toda $r < \delta$ tenemos

$$(\lambda_d)^*((B + y) \cap Q_r(x)) > c\lambda_d(Q_r(x))$$

y esto se cumple para toda $x \in D_0$. Como

$$A = B + D = \bigcup \{B + y \mid y \in D\}$$

tenemos por monotonía

$$(\lambda_d)^*(A \cap Q_r(x)) \geqslant (\lambda_d)^*((B + y) \cap Q_r(x)),$$

es decir, para todo $x \in D_0$ y para todo $r < \delta$

$$(\lambda_d)^*(A \cap Q_r(x)) > c\lambda_d(Q_r(x)).$$

Sea $I \subseteq \mathbb{R}^d$ de la forma $I = \Pi_{i=1}^n I_i$ donde cada $I_i \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. Sea $\mathcal{F}$ la colección de cubos $Q_r(x) \subseteq I$ con $x \in D_0$ y $r < \delta$, entonces, por I ser abierto y D_0 ser denso, $\mathcal{F}$ es una cubierta de Vitali para I. Por el Teorema de la cubierta de Vitali (Teorema 3.5.28) existe una familia disjunta y a lo más numerable $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{F}$ tal que

$$\lambda_d\left(I \setminus \bigcup \mathcal{Q}\right) = 0.$$

Como $\{Q_i \mid i \in J\}$ es una familia de cubos cerrados y ajenos, entonces son compactos ajenos y por lo tanto se tiene que $0 < d(Q, Q') \leqslant d(A \cap Q, A \cap Q')$ para todo $Q, Q' \in \mathcal{Q}$. Por el Lema 3.5.33

$$(\lambda_d)^*\left(\bigcup \{A \cap Q \mid Q \in \mathcal{Q}\}\right) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} (\lambda_d)^*(A \cap Q)$$

y como $\bigcup \mathcal{Q} \subseteq I$ tenemos que $A \cap Q = A \cap I \cap Q$ para todo $Q \in \mathcal{Q}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\lambda_d(I) &\geqslant (\lambda_d)^*(I \cap A) \\
&= (\lambda_d)^*\left(A \cap \bigcup \mathcal{Q}\right) \\
&= (\lambda_d)^*\left(\bigcup \{A \cap Q \mid Q \in \mathcal{Q}\}\right) \\
&= \sum_{Q \in \mathcal{Q}} (\lambda_d)^*(A \cap Q) \geqslant \sum_{Q \in \mathcal{Q}} c\lambda_d(Q) \\
&= c\lambda_d\left(\bigcup \mathcal{Q}\right) = c\lambda_d(I)
\end{aligned}$$

Esto es valido para toda $c \in (0,1)$ por lo que tambien se satisface que

$$\lambda_d(I) \geqslant (\lambda_d)^*(A \cap I) \geqslant \lambda_d(I)$$

es decir,

$$\lambda_d(I) = (\lambda_d)^*(A \cap I).$$

Esta igualdad es valida para cualquier cubo abierto I de la forma $I = \Pi_{i=1}^n I_i$ donde cada $I_i \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. El Lema 3.5.31 nos dice que $(\lambda_d)_*(\mathbb{R}^d \setminus A) = 0$. □

Tambien podremos concluir un teorema análogo en categoría.

Definición 3.5.37. *Se dice que A es de primera categoría en un punto $x_0 \in X$ si existe U vecindad de x_0 tal que $A \cap U_x$ es de primera categoría. Más aun, se dice que A es de segunda categoría en un punto $x_0 \in X$ si no es de primera cateogría en x_0, es decir, si para todo U vecindad de x_0 se tiene que $A \cap U_x$ es de segunda categoría. Denotemos como*

$$D(A) = \{x \in A \mid A \text{ es de segunda cateogoría en } x\}$$

Lema 3.5.38. *Si X es separable y $A \cap D(A) = \emptyset$, entonces A es de primera categoría.*

Demostración. Como $\mathbb{R}^d$ es separable existe $\{B_k \mid k < \omega\}$ una base numerable para su topología. Como $A \cap D(A) = \emptyset$ para cada $x \in A$ existe $U_x \subseteq \mathbb{R}^d$ vecindad de x tal que $A \cap U_x$ es de primera categoría, entonces existe $k_x < \omega$ tal que $x \in B_{k_x} \subseteq U_x$ y por lo tanto $A \cap B_{k_x}$ es de primera categoría. Como

$$A = \bigcup \{A \cap B_{k_x} \mid x \in A\}$$

y solo hay una cantidad numerable de conjuntos B_{k_x} tenemos que esta unión es numerable y por lo tanto A es de primera categoría. □

Lema 3.5.39. *Sean $B, D \subseteq \mathbb{R}^d$ tales que B es de segunda categoría y D es denso. Sea $A = B + D$ entonces $\mathbb{R}^d \setminus A$ no contiene ningún conjunto con la propiedad de Baire y de segunda categoría.*

Demostración. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un subconjunto con la propiedad de Baire y de segunda categoría, entonces

$$E = (G \cap P) \setminus R$$

donde G es abierto y P y R son de primera categoría. Como E es de segunda categoría entonces $G \neq \emptyset$.

Como B es de segunda categoría, entonces $D(B) \neq \emptyset$ por el Lema 3.5.38. Sea $x_0 \in D(B)$, entonces por D ser denso existe $d \in D$ tal que $x_0 + d \in G$, es decir, $G - d$ es vecindad de x_0 y por lo tanto $B \cap (G - d)$ es de segunda categoría. Más aun,

$$(B \cap (G - d)) + d = (B + d) \cap G \subseteq (B + D) \cap G = A \cap G,$$

por lo que $A \cap G$ es de segunda categoría y como R es de primera categoría, entonces el conjunto $A \cap G$ tambien es de segunda categoría. Como

$$\emptyset \neq (A \cap G) \setminus R = A \cap (G \setminus R) \subseteq A \cap ((G \cup P) \setminus R) = A \cap E$$

tenemos que $A \cap E \neq \emptyset$. Por lo tanto A intersecta a todo subconjunto con la propiedad de Baire y de segunda categoría, es decir, $\mathbb{R}^d \setminus A$ no contiene ningún subconjunto con la propiedad de Baire y de segunda categoría. $\square$

4 | Conclusiones

En el capítulo 2 se generalizo en dos maneras el Teorema de Vitali (Teorema 1.1.3). En la primera, el resultado que se concluyo fue la no medibilidad con respecto a la medida de Haar de los conjuntos de Vitali en un grupo topológico. Para esto consideramos primero el caso en que existe un subgrupo numerable que se acumula en el neutro del grupo (Teorema 1.3.1) y en esta situación la demostración fue análoga al caso real gracias a que la Propiedad de Steinhaus (Teorema 1.2.16) sigue siendo valida en este contexto más general. Para quitarnos la restricción anterior fue necesario tomar un camino distinto (Teorema 1.3.6) y para esto nos basamos en los artículos [26], [27] de Solecki. Nuestra segunda generalización fue en el sentido de la categoría de Baire motivados por las analogías que existen entre esta y la teoría de la medida, las cuales se encuentran expuestas en [21] por Oxtoby. Se demuestra un análogo a la propiedad de Steinhaus en categoría para grupos topológicos, el Teorema de Banach-Kuratowski-Pettis (Teorema 1.4.17), el cual es suficiente para demostrar que los conjuntos de Vitali son patológicos tambien en esta teoría (Teorema 1.5.1).

El capítulo 3 se inició estudiando la construcción de Bernstein (Teorema 2.1.1) en el caso real para posteriormente demostrar con gran generalidad la patología de los conjuntos de Bernstein en espacios polacos con respecto a una familia de σ-álgebras (Teorema 2.2.6) entre las cuales se encuentran los conjuntos con la propiedad de Baire (Teorema 2.2.7), estudiados en el capítulo anterior, y la compleción de los conjuntos medibles para cualquier medida de Borel σ-finita y difusa (Teorema 2.2.8). Por último, se demuestra la existencia de una familia con cardinalidad del continuo la cual consta de conjuntos de Bernstein (Teorema 2.2.11). En este capítulo se incluyó una sección sobre espacios Polacos ya que para el desarrollo de este capítulo son fundamentales algunos resultados como el Teorema de Alexandroff (Teorema 2.3.4), un resultado sobre encajes del conjunto de Cantor en espacios Polacos perfectos (Teorema 2.3.12) y el Teorema de Cantor-Bendixson (Teorema 2.3.25). Tambien se incluye una sección sobre conjuntos borelianos, cuyo principal resultado es demostrar que la Hipótesis del Continuo es cierta para la familia de los conjuntos borelianos de un espacio Polaco (Teorema 2.3.33).

En el captulo 4 iniciamos con una construcción, basada en la existencia de bases de Hamel, de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ el cual no es Lebesgue medible (Teorema 3.1.1). Posteriormente se construye un subgrupo de $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de no ser medible para cualquier medida cuasi-invariante (Teorema 3.1.8). Se estudiaron propiedades de medibilidad de las bases de Hamel, se demuestra que son nulas o no medibles (Teorema 3.1.9) y se construyen ejemplos de ambas posibilidades (Teoremas 3.1.12 y 3.1.13). Se estudió la ecuación funcional de Cauchy y se fueron debilitando las condiciones para garantizar la continuidad de una solución, teniendo como condición mas débil la medibilidad (Teorema 3.2.6). Motivados por los resutados sobre la ecuación funcional de Cauchy se estudia la relación entre la desigualdad de Jensen y la convexidad, teniendo como principal resultado el Teorema de Bernstein-Doetsch (Teorema 3.3.15) y a partir de lo cual se introducen algunas clases de conjuntos para estudiar la relación entre acotación y continuidad en funciones aditivas y convexas de punto medio. Se estudian propiedades de estas clases, para lo cual es necesaria una versión racional del Teorema de Hahn-Banach (Teorema 3.4.3). Se demuestra a través de los Teoremas de Mehdi y Ostrowski (Teoremas 3.4.18 y 3.4.17) que estas clases son una posible generalización de las nociones de tamaño topológico, en medida y en categoría. Se estudian algunas construcciones relacionadas con estas clases entre las que destacan los conos, las bases de Burstin y los conjuntos de Erdös.

Bibliografía

[1] Aczél, J., and Erdős, P. The non-existence of a hamel-basis and the general solution of cauchy's functional equation for nonnegative numbers. *Publ. Math. Debrecen 12* (1965), 259–263.

[2] Bernstein, F. Zur theorie der trigonometrischen reihe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik 132* (1907), 270–278.

[3] Blair, C. Baire category theorem implies principle of dependient choice. *Notices of the American Mathematical Society 23*, 1 (1976), A19–A19.

[4] Cichoń, J., Kharazishvili, A., and Węglorz, B. On sets of vitali's type. *Proceedings of the American Mathematical Society 118*, 4 (1993), 1243–1250.

[5] Cichon, J., Kharazishvili, A., and Weglorz, B. *Subsets of the real line.* Wydawnictwo Uniwersytetu Lodzkiego, 1995.

[6] Cohn, D. L. *Measure Theory*, 1 ed. Birkhäuser, 1980.

[7] Grabinsky, G. *Teoría de la medida.* UNAM, 2009.

[8] Halmos, P. R. *Measure Theory*, 1 ed. Graduate Texts in Mathematics 18. Springer-Verlag New York, 1950.

[9] Hamel, G. Eine basis aller zahlen und die unstetigen lösungen der funktionalgleichung: f (x+ y)= f (x)+ f (y). *Mathematische Annalen 60*, 3 (1905), 459–462.

[10] Hernandez, F. *Teoría de la conjuntos: Una introducción.* Serie de Textos de Aportaciones Matemáticas, 2011.

[11] Joe Diestel, A. S. *The Joys of Haar Measure*, vol. 150 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, 2014.

[12] Kharazishvili, A. *Strange functions in real analysis*, 1 ed. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 229. Marcel Dekker, Inc, 2000.

[13] Kharazishvili, A. *Nonmeasurable Sets and Functions*, 1st ed ed. North-Holland mathematics studies 195. Elsevier, 2004.

[14] Kharazishvili, A. *Topics in Measure Theory and Real Analysis: The Measure Extension Problem and Related Questions*. Atlantis Studies in Mathematics volume 2. Atlantis Press, 2009.

[15] Kharazishvili, A. B. *Set Theoretical Aspects of Real Analysis*, 1 ed. Monographs & Research Notes in Mathematics. Chapman and Hall/CRC, 2014.

[16] Kuczma, M. Some remarks about additive functions on cones. *Aequationes Mathematicae 4*, 3 (1970), 303–306.

[17] Lebesgue, H. Sur une généralisation de l'intégrale définie. *CR Acad. Sci. Paris 132* (1901), 1025–1028.

[18] Marek Kuczma, A. G. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities: Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*, 2 ed. Birkhäuser Basel, 2009.

[19] Mehdi, M. On convex functions. *Journal of the London Mathematical Society 1*, 1 (1964), 321–326.

[20] Ostrowski, A. Mathematische miszellen. xiv. über die funktionalgleichung der exponentialfunktion und verwandte funktionalgleichungen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 38* (1929), 54–62.

[21] Oxtoby, J. C. *Measure and Category: A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces*, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1980.

[22] Paul Howard, Jean E, R. *Consequences of the axiom of choice*. Mathematical Surveys and Monographs 059. American Mathematical Society, 1998.

[23] Rao, K., and Rao, M. B. On the difference of two second category baire sets in a topological group. *Proceedings of the American Mathematical Society 47*, 1 (1975), 257–258.

[24] Ross, E. H. K. A. *Abstract harmonic analysis, v.2. Structure and analysis for compact groups*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Bd. 115, 152. Springer, 1970.

[25] Ross, E. H. K. A. *Abstract harmonic analysis, v.1. Structure of topological groups. Integration theory*, 2ed. ed. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 115. Springer, 1979.

[26] Solecki, S. Measurability properties of sets of vitali's type. *Proceedings of the American Mathematical Society 119*, 3 (1993), 897–902.

[27] Solecki, S., et al. On sets nonmeasurable with respect to invariant measures. *Proceedings of the American Mathematical Society 119*, 1 (1993), 115–124.

[28] Solovay, R. M. A model of set-theory in which every set of reals is lebesgue measurable. *Annals of Mathematics 92*, 1 (1970), 1–56.

[29] Srivastava, S. M. *A Course on Borel Sets*. Graduate Texts in Mathematics 180. Springer Berlin Heidelberg, 1998.

[30] Vitali, G. Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta. *Bologna, Italy* (1905).

[31] Weil, A. *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Deuxième édition*, 2nd ed. Hermann, 1979.