



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA FÓRMULA DE RIEMANN-HURWITZ
PARA SUPERFICIES DE RIEMANN Y EL
TEOREMA DE RADÓ.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

ANAYELI TOMÁS ALVAREZ

TUTOR

DR. SANTIAGO ALBERTO VERJOVSKY
SOLÁ

Ciudad de México, Octubre 2016.

CDMX





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del alumno

Tomás
Alvarez
Anayeli
(55) 39977122
Universidad Nacional Autónoma
de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
309266309

Datos del tutor

Dr.
Verjovsky
Solá
Santiago Alberto

Datos del sinodal 1

Dr.
Rosales
González
Ernesto

Datos del sinodal 2

Dr.
Py
Pierre Casimir

Datos del sinodal 3

Dr.
Cabrera
Ocañas
Carlos Alfonso

Datos del sinodal 4

M. en C.
Juan
Zacarías
José

Datos del trabajo escrito

La fórmula de Riemann-Hurwitz para
superficies de Riemann y el Teorema
de Radó.
84p.
2016

*A la memoria
de mi padrino Mario.*

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a mi familia, mis padres que han sido mis principales pilares en la vida, en todo momento me han apoyado, brindado su confianza, amor y paciencia. Mi papá, que con su ejemplo, coraje y enseñanzas ha sido una guía en mi vida. Mi mamá, que no me ha dejado vencer cuando siento que ya no puedo continuar.

Mi hermano y mi cuñada por su cariño, preocuparse por mi bienestar, impulsarme y ayudarme a continuar con mis estudios. Mis sobrinos, Mateo y Luis que en los momentos más estresantes me han brindado muchas sonrisas y su inocencia.

Mi padrino Mario, por sus consejos, su entusiasmo y por las ganas que me inyectaba para realizar mis sueños.

Mis abuelos, Elvira y Francisco; a mis tías y tíos: Adriana, Isai, Lizeth, Francisco, Tomás, que han estado al pendiente de mí, de mis estudios y de mis pequeños viajes.

Mi profesor, Alberto Verjovsky, por dirigir mi tesis, aceptarme como su alumna, su enorme paciencia en todo momento, encender mi curiosidad, por todas sus enseñanzas dentro y fuera de la Matemática, por ser excelente profesor y ser humano.

Carlos Cabrera, por sus enseñanzas, su paciencia, sus pláticas, escucharme en cualquier duda que tuviera, recomendarme libros y personas que me ayudaran, estar al pendiente de mi bienestar, por sus regaños, y por llevarme con Alberto. De verdad, ¡muchas gracias!

Pierre Py, por toda su ayuda en todo el proceso de la tesis, sus comentarios y sugerencias tan atinadas.

Ernesto Rosales, por ser excelente profesor, ayudarme a reencontrar el cariño por las ecuaciones diferenciales y la variable compleja, permitirme ser su ayudante de Geometría Analítica I y tener siempre una puerta abierta en el IMATE CU para comentar mis dudas y avances de la tesis.

José Juan, por sus pláticas de matemáticas, acertados comentarios, especialmente por la cuidadosa lectura de esta tesis y toda la ayuda brindada en el proceso.

Igor Barahona, por su charla matutina al prepararnos el café, darme ánimos para terminar la tesis, alentarme a ser mejor matemática, corredora y persona.

Juan Pablo Díaz, por sus explicaciones, sus comentarios, consejos y por invitarme a sus emocionantes clases.

Héctor Ramos, que siempre me preguntó cómo iba en la tesis, darme ánimos para terminarla y su paciencia al explicarme matemáticas.

Mis compañeros del seminario, José, Héctor, Juan Manuel, Juan Pablo, Emigdio, Otto, por permitirme estar en su seminario y escuchar mis dudas durante el mismo, su excelente exposición y que en gran parte encendieron mi curiosidad y haya descubierto ahí, junto con Alberto, mi tema de tesis.

Mis compañeros del cubo 3 del IMATE CU: Erick, Andrés y Lupita por escuchar mis dudas cuando recién empezaba la tesis, a alguno de ustedes interrumpí para compartir algo.

Mis amigos de la facultad, Julio, Chuy, Brenda, Mario Medina, Manuel, José Luis, Gerardo, Eugenio, Mario Quiñones, Mario De Jesús, Ángel, Mitzi, Juanito, Madelyn, Roy, Steffy, Lupita, Evelyn, Minerva, Iván, Alberto, Jacob y Rolando. Porque en algún momento de la licenciatura compartí un poco de matemáticas, muchas risas y anécdotas.

Mis profesores de la facultad:

Jefferson King, por sus emocionantes clases de Cálculo y su clara exposición con las cuales pude convencerme de seguir en la carrera, su paciencia, su calidez, permitirme ser asesora de Cálculo y darme la oportunidad de hacer el servicio social.

Juan Morales, por ser el primer profesor de la facultad que depositó su confianza en mí como alumna, mirar mi desarrollo durante la licenciatura y alentarme a seguir.

Ana Irene Ramírez, por sus clases en las cuales siempre aprendí algo nuevo, todas las cosas de Geometría que aprendí que sirvieron de mucho en esta tesis y por sus regaños que me hicieron esforzarme más.

Ángel Carrillo, por su exposición tan clara durante los cuatro cursos de Análisis Matemático que cursé con él y su paciencia al resolver mis dudas.

Carlos Prieto, por enseñarme Topología Algebraica en la licenciatura y que me sirvió mucho en la realización de esta tesis, sus clases y las charlas en su cubículo.

Mis amigos del IMATE Cuernavaca; Diana por ser la primera persona en Cuernavaca con la que pude entablar una amistad; Elena, Ruth, Magdiel, Mayra y Mauricio, por recibirme como una compañera más en el diplomado; Adriana y Vanessa, por esos abrazos dados justo en los momentos exactos del estrés, hablarles un poco de lo que estuviera haciendo durante la tesis, sus libros y consejos; Alma, Haremy y Giovanna, por recibirme tan cálidamente en Cuernavaca, y ayudarme a encontrar casa; Dalid y Leonel, que aunque salimos de la misma facultad, venimos a conocernos en Cuernavaca, por su entrañable amistad; Miyagui, Malena, Lupita, Ángeles y Pilar por su plática en el Instituto. Mi roomie Itzel, gracias por aguantar mi mal humor en mis momentos de estrés estos últimos meses.

Los investigadores del IMATE Cuernavaca con los que hablé durante mi estancia en el instituto, Gregor Weingart, Fabiola Manjarrez, Peter Makienko, José Luis Cisneros y a Marcos López por aceptarme como oyente en el diplomado, verdaderamente fue una enorme ayuda.

Liz por encontrar siempre una sonrisa en su rostro, una plática tan amena, un abrazo y ayudar en todo lo que pueda.

Todos los que hacen funcionar el IMATE Cuernavaca, en verdad, muchas gracias, hicieron que me sintiera como en casa y propiciaron que mi estancia fuera lo más productiva y placentera.

Mi mejor amiga de toda la vida, Angélica, por estar siempre al pendiente de mí, de mis proyectos, sueños, y compartir tanto tiempo de amistad.

Sergio Gante, por la gran amistad que hemos formado, sus múltiples charlas, escuchar mis inquietudes, su paciencia, las risas compartidas e invitarme a correr en el Centenario.

La Facultad de Ciencias de la UNAM por permitirme ser una estudiante de sus salones, por sus profesores y brindarme la oportunidad de ser ayudante.

Agradezco el apoyo económico brindado por el *Proyecto CONACyT número 164447 Dinámica y Geometría Compleja* del Dr. José Antonio Seade Kuri.

A la cláusula 69 de la Facultad de Ciencias UNAM, apoyo con el cual pude mantenerme un semestre en Cuernavaca mientras escribía la tesis.

Agradezco el apoyo económico brindado por el programa de Ayudante de investigador nivel III del SNI del Dr. Santiago Alberto Verjovsky Solá.

Finalmente pero no menos importante, a la vida, que me ha puesto en lugares adecuados, me ha presentado personas extraordinarios y enseñado cosas tan buenas.

Índice general

| | |
|---|-----|
| | III |
| Agradecimientos | V |
| Introducción | XI |
| Capítulo 1. Superficies de Riemann. | 1 |
| 1. Definiciones básicas. | 1 |
| 2. Mapeos holomorfos. | 6 |
| 3. Cubrientes topológicos. | 10 |
| 4. Propiedades de los mapeos holomorfos. | 11 |
| Capítulo 2. Triangulaciones y la Característica de Euler. | 15 |
| 1. El Teorema de Radó. | 15 |
| 2. La característica de Euler. | 24 |
| Capítulo 3. La fórmula de Riemann-Hurwitz. | 27 |
| 1. Curvas afines. | 29 |
| 2. Curvas planas proyectivas lisas. | 31 |
| 3. La curva de Fermat. | 35 |
| Capítulo 4. La desigualdad de Hurwitz. | 39 |
| 1. Automorfismos de la esfera de Riemann. | 39 |
| 2. Automorfismos de toros complejos. | 45 |
| 3. Acciones de grupo. | 47 |
| Apéndice A. Descomposición en pantalones | 57 |
| 1. Clasificación de superficies no compactas | 57 |
| 2. Descomposición de superficies cerradas. | 61 |
| 3. Teoría de Morse en Superficies. | 63 |
| Bibliografía | 71 |
| Referencias | 71 |

Introducción

Distinguir dos superficies topológicas es una de las preguntas más importantes en topología. Por ejemplo, distinguir una esfera de un toro, es una pregunta un poco difícil de responder con las herramientas de topología general. Sin embargo, se puede buscar otro tipo de invariantes topológicos que ayuden a la distinción de este tipo de objetos. Por ejemplo, se pueden tapizar estas dos superficies con triángulos, ver la combinatoria y poder distinguirlas. A esta manera de entapizar las superficies es llamada una triangulación.

Este concepto fácil de entender es una herramienta poderosa en topología y la existencia de una triangulación de una superficie tiene implicaciones en diferentes áreas de las Matemáticas. La primera y quizá una de las importantes es el *Teorema de clasificación de superficies cerradas*, cuya demostración parte de la existencia de una triangulación, dicha prueba puede encontrarse en [20]. Otro resultado importante que une la teoría de superficies topológicas con la teoría de superficies de Riemann es que dada una superficie orientable y triangulable, tiene una estructura de superficie de Riemann dada por la triangulación, que se demuestra en esta tesis. (Ver Corolario 2.19).

Otro resultado importante de la existencia de una triangulación de una superficie en la teoría de superficies de Riemann es la *Fórmula de Riemann-Hurwitz*, que establece que dada una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann compactas hay una relación entre la característica de Euler de cada superficie, el grado de la aplicación y las multiplicidades de los puntos de ramificación. Esta fórmula descubierta por Hurwitz ha sido de interés pues es uno de los puentes entre la teoría de Superficies de Riemann, la teoría de números, la teoría de grupos finitos y la geometría algebraica.¹ A su vez, la fórmula de Riemann-Hurwitz, proporciona una cota para el orden de un grupo finito que actúa de manera holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann de género g mayor o igual a dos.

Estos resultados, basados en la existencia de una triangulación de una superficie producen la pregunta siguiente

¿Cualquier superficie topológica se puede triangular?

Esta pregunta fue uno de los problemas más importantes en topología y fue Radó [27] quien dio una respuesta afirmativa para el caso de superficies topológicas segundo numerables. Sin embargo, Alberto Verjovsky [34] dio

¹Revise el artículo introductorio [23] sobre espacios de Hurwitz para una mejor referencia.

una demostración alternativa de este teorema, usando el *Teorema del Mapeo de Riemann* y el *Teorema de extensión de Carathéodory*. El objetivo de esta tesis es detallar esta demostración y estudiar las consecuencias del Teorema de Radó anteriormente descritas. Para ello, hemos estructurado el siguiente trabajo de la siguiente forma:

En el Capítulo 1, se definen las superficies de Riemann como variedades complejas de dimensión 1, los mapeos holomorfos entre estas y se revisan sus propiedades básicas. En el Capítulo 2, se define *triangulación* de una superficie topológica. En este capítulo se expone una prueba detallada del teorema de Radó, inclusive para el caso de superficies no compactas, en la segunda sección del capítulo se habla de la característica de Euler y se concluye hablando de la clasificación de superficies compactas y orientables.

En el Capítulo 3, se demuestra la fórmula de Riemann-Hurwitz. Se definen las curvas planas proyectivas lisas para después estudiar la curva de Fermat, dar una primera aplicación de la fórmula y se concluye el capítulo demostrando la fórmula de Plücker.

En el Capítulo final, se estudian los automorfismos de la esfera de Riemann, del plano complejo y del disco unitario. Después, se estudian los automorfismos de los toros complejos, en seguida se generaliza el grupo de automorfismos $\text{Aut}(X)$ de una superficie de Riemann X de género $g \geq 2$. Por lo cual, en la Sección 4.3 se estudian acciones holomorfas y efectivas de grupos finitos en superficies de Riemann y usando la fórmula de Riemann-Hurwitz se demuestra que si G es un grupo finito que actúa holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta X de género $g \geq 2$, entonces:

$$(1) \quad |G| \leq 84(g - 1).$$

Esta desigualdad inmediatamente da una cota para el grupo $\text{Aut}(X)$.

En el Apéndice, se revisan cuestiones sobre la clasificación de superficies no compactas y se aborda un problema de descomposición en pantalones de superficies no compactas y orientables propuesta por Alberto Verjovsky.

Superficies de Riemann.

En este capítulo presentaremos las superficies de Riemann como variedades diferenciables con cierta estructura compleja; los mapeos holomorfos entre estas, y demostraremos que los mapeos holomorfos entre superficies de Riemann compactas fuera de un conjunto finito de puntos son un cubriente topológico.

1. Definiciones básicas.

Una variedad topológica (real) de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff, el cual es localmente homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Si deseamos una definición de una variedad compleja, debemos reemplazar \mathbb{R}^n por \mathbb{C}^n , y pedir más condiciones sobre los homeomorfismos locales con abiertos de \mathbb{C}^n . Para detallar estas condiciones necesitamos la noción de atlas.

DEFINICIÓN 1.1. Dado un espacio topológico X , una *carta* para X es un par (U, φ) donde $\varphi : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo, U es un abierto de X y V es un subconjunto abierto de \mathbb{C}^n para alguna n . Un *atlas holomorfo* para X es una colección de cartas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ con las siguientes propiedades:

1. La colección U_i cubre a X ;
2. Para cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la función

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

es holomorfa vista como función de variable compleja. Tales funciones son llamadas *cambios de coordenadas*.

Un atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ se dice *maximal* si cada vez que tenemos un abierto U de X , V un abierto de \mathbb{C}^n y $\psi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}^n$ un homeomorfismo tal que

$$\varphi_j \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha),$$

es holomorfa, entonces existe $\beta \in A$ con $U = U_\alpha$ y $\psi = \varphi_\alpha$.

Una *variedad compleja* de dimensión n es una pareja (X, \mathcal{A}) donde X es un espacio topológico Hausdorff y \mathcal{A} es un atlas holomorfo maximal. Si se modifica atlas holomorfo por atlas diferenciable, se pide que X sea segundo numerable y los cambios de coordenadas sean \mathcal{C}^∞ , entonces se obtiene una variedad diferenciable.

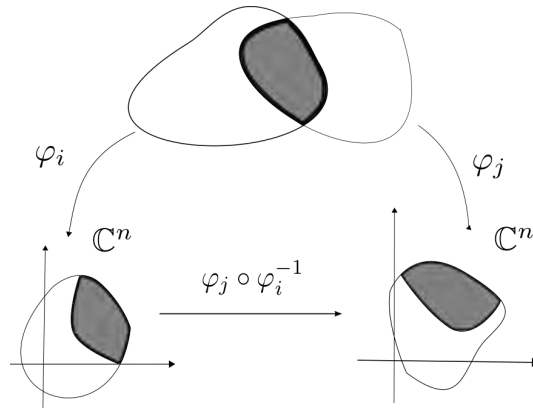


FIGURA 1. Cartas holomorfas compatibles

OBSERVACIÓN. La restricción a subconjuntos abiertos $V \subset U$ con (U, φ) carta coordenada, $(V, \varphi|_V)$ es también una carta.

Aunque la definición de una variedad compleja pide la maximalidad del atlas, es suficiente tener un atlas ya que siempre se puede completar.

DEFINICIÓN 1.2. Una *Superficie de Riemann* es una variedad compleja conexa de dimensión 1.

Un primer ejemplo de superficie de Riemann es el plano complejo con la carta (\mathbb{C}, id) .

Sea M una superficie de Riemann y consideremos $D \subset M$ abierto y conexo, D es nuevamente una superficie de Riemann tomando las respectivas restricciones.

Otros ejemplos más interesantes serían:

La *esfera de Riemann* $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con la topología $\mathcal{T} \cup \{A \subset \widehat{\mathbb{C}} | \infty \in A, \widehat{\mathbb{C}} \setminus A \subset \mathbb{C} \text{ compacto}\}$, donde \mathcal{T} es la topología usual en \mathbb{C} .

Para probar que $\widehat{\mathbb{C}}$ es Hausdorff consideremos dos puntos distintos $x, y \in \widehat{\mathbb{C}}$. Si $x, y \in \mathbb{C}$, como \mathbb{C} es Hausdorff existen vecindades ajenas de x y y respectivamente. Por simetría podemos suponer que $x = \infty$ y $y \in \mathbb{C}$, sea $B(y, 1)$ la bola abierta de radio 1, es un abierto que contiene a y en $\widehat{\mathbb{C}}$, por otro lado, si consideramos, $A = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{B(y, 2)}$, entonces $A \cap B(y, 1) = \emptyset$ y A es un abierto de $\widehat{\mathbb{C}}$ y $x \in A$. Por lo que $\widehat{\mathbb{C}}$ es Hausdorff. Para probar que $\widehat{\mathbb{C}}$ es conexo supongamos lo contrario, es decir, existen $A, B \subset \widehat{\mathbb{C}}$ abiertos, ajenos y no vacíos, tales que $A \cup B = \widehat{\mathbb{C}}$. Podemos suponer por simetría que $\infty \in A$, entonces $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A = B$ es un subconjunto de \mathbb{C} compacto, por lo que es cerrado y acotado. Entonces $B \subset \mathbb{C}$ es abierto y cerrado en \mathbb{C} , pero \mathbb{C} es conexo y no vacío, así $B = \mathbb{C}$, que implica que $A = \infty$, por la definición de la topología de $\widehat{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} es compacto, lo que es una contradicción. Luego $\widehat{\mathbb{C}}$ es conexo. Las cartas $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=1,2}$ donde:

$$U_1 = \mathbb{C} \quad U_2 = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\},$$

y

$$\varphi_1(z) = z, \quad z \in U_1 \quad \varphi_2(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in U_2.$$

Las dos funciones de transición son:

$$f_{kj} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad k \neq j, \quad j = 1, 2 \quad f_{kj}(z) = \frac{1}{z}.$$

La *recta proyectiva compleja*, denotada por $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, que es el conjunto de subespacios 1-dimensionales de \mathbb{C}^2 . Si (z, w) es un vector no cero en \mathbb{C}^2 , este genera un punto en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$; denotamos al generado de (z, w) por $[z : w]$. Cualquier punto de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ puede ser escrito de esta forma, como $[z, w]$, con z y w no cero simultáneamente, además

$$[z, w] = [\lambda z, \lambda w],$$

para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Si $p : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es la aplicación definida como $(z, w) \mapsto [z : w]$, definimos la topología de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ como la topología cociente.

A continuación definiremos una estructura compleja en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Sea $U_0 = \{[z : w] \mid z \neq 0\}$ y $U_1 = \{[z : w] \mid w \neq 0\}$. Claramente U_0 y U_1 cubren a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Definimos $\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ como $\phi_0[z : w] = w/z$; análogamente definimos $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ como $\phi_1[z : w] = z/w$ ambas aplicaciones son biyecciones. Además $\phi_i(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*$, el cual es abierto en \mathbb{C} . La composición $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$ manda s en $1/s$, y entonces las cartas son compatibles. Como U_0 y U_1 son conexos y su intersección es no vacía, su unión $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es conexo. Finalmente, para probar que $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es Hausdorff, tomamos p y q ambos en U_0 o U_1 podemos separarlos con vecindades ajenas, dado que U_0 y U_1 son Hausdorff. Supongamos que $p \in U_0 \setminus U_1$ y $q \in U_1 \setminus U_0$; entonces $p = [1 : 0]$ y $q = [0 : 1]$. Están separados por $\phi_0^{-1}(D)$ y $\phi_1^{-1}(D)$, donde D es el disco unitario en \mathbb{C} .

NOTA. De hecho, la esfera de Riemann y la recta proyectiva compleja son biholomorfas.

Los *toros complejos*. Fijemos ω_1 y ω_2 dos vectores complejos linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Definimos la retícula

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

La retícula L es un subgrupo aditivo de \mathbb{C} .

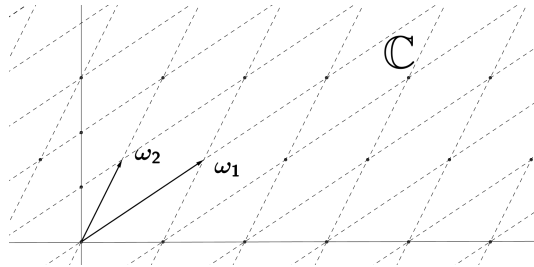


FIGURA 2. Retícula L .

Sea $X = \mathbb{C}/L$ el subgrupo cociente, con el mapeo proyección $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$. Observemos que vía π podemos definir una topología en X , definida de la siguiente forma, un conjunto $U \subset X$ es abierto sí y sólo sí $\pi^{-1}(U)$ es un abierto en \mathbb{C} . Esta definición hace continua a π , y como \mathbb{C} es conexo, entonces X también lo es. Cualquier conjunto abierto en X es la imagen de un conjunto abierto en \mathbb{C} , ya que si U es abierto en X , $U = \pi(\pi^{-1}(U))$. Además, π es un mapeo abierto, esto es, π manda cualquier conjunto abierto de \mathbb{C} en un conjunto abierto de X . Si V es un conjunto abierto en \mathbb{C} , entonces para demostrar que $\pi(V)$ es abierto en X debemos probar que $\pi^{-1}(\pi(V))$ es abierto en \mathbb{C} , pero

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in L} (\omega + V),$$

es la unión de trasladados de V , los cuales son todos subconjuntos abiertos de \mathbb{C} .

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$, definimos el paralelogramo:

$$P_z = \{z + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mid \lambda_i \in [0, 1]\}.$$

Notemos que cualquier punto de \mathbb{C} es congruente módulo L a un punto de P_z . Más aún, el mapeo proyección π mapea P_z en X . Pero P_z es compacto, entonces X también lo es.

La retícula L es un subconjunto discreto de \mathbb{C} , por lo tanto existe $\epsilon > 0$ tal que $|\omega| > 2\epsilon$ para cualquier número no cero $\omega \in L$. Fijemos una tal ϵ , y un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Consideremos el disco abierto $D = D(z_0, \epsilon)$ de radio ϵ alrededor de z_0 . Esta elección de ϵ asegura que dos elementos de D no difieren por un elemento de la retícula L . Por lo cual, para cada z_0 , y para tal ϵ , la restricción de la proyección π al disco abierto D mapea D homeomorfamente sobre el conjunto abierto $\pi(D)$. Claramente, $\pi|_D : D \rightarrow \pi(D)$ es sobre, continua y abierta (ya que π lo es). La inyectividad de π en D es resultado de la elección de ϵ . A continuación, definiremos un atlas complejo en X . Fijemos ϵ como antes. Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$, sea $D_{z_0} = D(z_0, \epsilon)$, y definamos $\phi_{z_0} : \pi(D_{z_0}) \rightarrow D_{z_0}$ la inversa del mapeo $\pi|_{D_{z_0}}$. Estas ϕ 's son cartas complejas en X . Para finalizar la construcción, debemos revisar que las cartas son compatibles dos a dos. Elijamos dos puntos z_1 y z_2 , y consideremos las dos cartas $\phi_1 = \phi_{z_1} : \pi(D_{z_1}) \rightarrow D_{z_1}$ y $\phi_2 = \phi_{z_2} : \pi(D_{z_2}) \rightarrow D_{z_2}$. Sea $U = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_2})$. Si U es vacío, no hay nada que probar. Si U es no vacío, sea $T(z) = \phi_2(\phi_1^{-1}(z)) = \phi_2(\pi(z))$ para cada $z \in \phi_1(U)$; debemos probar que T es holomorfa en $\phi_1(U)$. Notemos que $\pi(T(z)) = \pi(z)$ para todo $z \in \phi_1(U)$, entonces $T(z) - z = \omega(z) \in L$, para todo $z \in \phi_1(U)$. Esta función $\omega : \phi_1(U) \rightarrow L$ es continua, y L es discreto; por lo que ω es localmente constante en $\phi_1(U)$. (Es decir, es constante en las componentes conexas de U). Luego, localmente $T(z) = z + \omega$ para alguna $\omega \in L$, y esta es holomorfa. Por lo tanto las dos cartas ϕ_1 y ϕ_2 son compatibles y la colección de cartas $\{\phi_z \mid z \in \mathbb{C}\}$ es una atlas complejo en X .

La superficie X es compacta, y topológicamente es un toro. Esto es más fácil de ver si consideramos a X como la imagen del paralelogramo P_0 ; bajo el mapeo $\pi|_{P_0}$ que identifica los lados opuestos del paralelogramo. Estas superficies de Riemann (que dependen de la retícula L) son llamados *toros complejos*.

En el presente trabajo cuando nos refiramos a una superficie de Riemann (X, \mathcal{A}) omitiremos el símbolo \mathcal{A} , y entenderemos que hay una estructura compleja fija.

En esta última parte de la sección discutiremos la idea de orientación en una superficie diferenciable.

DEFINICIÓN 1.3. Una superficie diferenciable X es llamada orientable si es posible cubrirla con una familia de vecindades coordinadas en las que si un punto $p \in X$ está en dos vecindades de tal familia, entonces el cambio de coordenadas tiene Jacobiano positivo en p . La elección de una tal familia es llamada una *orientación* de X . En este caso X es llamada superficie *orientable*. Si una elección como antes mencionada no es posible, la superficie es llamada no orientable.

Existe una manera de definir orientabilidad para variedades topológicas, pero en este trabajo no se presentará, dicha definición se puede revisar en [12, p. 234].

Hay ejemplos de superficies no orientables, como la banda de Möbius, pero la siguiente proposición muestra que todas las superficies de Riemann son orientables.

PROPOSICIÓN 1.4. *Una superficie de Riemann, siempre es orientable como variedad diferenciable real de dimensión dos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X una superficie de Riemann. Tomamos dos cartas (U, φ) y (V, ψ) con $U \cap V \neq \emptyset$. Entonces, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ es holomorfa. Notemos que el jacobiano de la función $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ determinada por $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es $|f'(z)|^2$. Para probar esto, veamos que:

$$J_f = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Usando las ecuaciones de Cauchy- Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Tenemos:

$$J_f = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = |f'(z)|^2.$$

Así tenemos $J_{\psi \circ \varphi^{-1}} \geq 0$ y análogamente $J_{\varphi \circ \psi^{-1}} \geq 0$. Por el hecho $(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) = id$, tenemos que $J_{\psi \circ \varphi^{-1}}$ y $J_{\varphi \circ \psi^{-1}}$ son mayores que 0. Cualquier par de cartas de X están congruentemente orientadas, así X es orientable. \square

2. Mapeos holomorfos.

DEFINICIÓN 1.5. Un mapeo continuo $f : X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann es *holomorfo* o *analítico* en p si existe una carta coordenada local (U, φ) alrededor de p en X y una carta coordenada local (V, ψ) alrededor de $f(p)$ en Y tales que la función:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V),$$

es holomorfa en el sentido usual. Decimos que un mapeo f es holomorfo si es holomorfo en todo punto p de X .

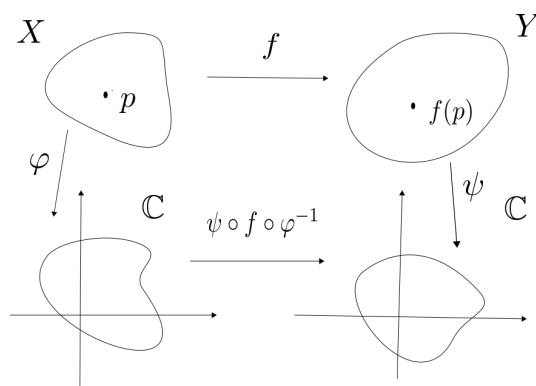


FIGURA 3. Mapeo holomorfo.

EJEMPLOS.

1. Todas las funciones holomorfas del plano complejo en sí mismo, son mapeos holomorfos si consideramos a \mathbb{C} con el atlas $\{id\}$.
2. El mapeo identidad $id : X \rightarrow X$ es holomorfo para cualquier superficie de Riemann.

Un mapeo holomorfo f es llamado *biholomorfismo* si es uno a uno y suprayectivo. En este caso $f^{-1} : Y \rightarrow X$ también es biholomorfismo; ya que en coordenadas locales, f es una función holomorfa e inyectiva, por lo que f' no se anula, luego del teorema de la función implícita se tiene que f^{-1} es también una función holomorfa.

Para el caso de mapeos holomorfos entre superficies de Riemann, tenemos muchos resultados heredados de las funciones holomorfas de variable compleja, como los siguientes:

1. Si f es un mapeo holomorfo, entonces f es de clase C^∞ .
2. La composición de dos mapeos holomorfos es un mapeo holomorfo: si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son mapeos holomorfos, entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ es un mapeo holomorfo.
3. (Teorema del mapeo abierto) Un mapeo holomorfo no constante entre superficies de Riemann, es abierto.

4. Una aplicación holomorfa inyectiva entre superficies de Riemann, es un biholomorfismo entre el dominio y su imagen.
5. (Teorema de la identidad) Sean f y g dos mapeos holomorfos entre superficies de Riemann X y Y . Si $f = g$ en un subconjunto S de X con un punto límite en X , entonces $f = g$.

La siguiente proposición no tiene análogo en la teoría de funciones holomorfas, ya que se trata de mapeos holomorfos con dominio compacto.

PROPOSICIÓN 1.6. *Sean X y Y superficies de Riemann con X compacto. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa. Entonces f es constante o suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Si f no es constante, por el tercer punto anteriormente visto, $f(X)$ es abierto y compacto ya que f es continua, pero Y es Hausdorff, entonces $f(X)$ es también cerrado y Y conexo. Por lo tanto $f(X) = Y$. □

Algunos ejemplos de mapeos holomorfos, son las llamadas funciones holomorfas, que no son otra cosa que mapeos holomorfos con contradominio el plano complejo \mathbb{C} .

DEFINICIÓN 1.7. Decimos que $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es una función *holomorfa* en p si existe una carta (V, ϕ) alrededor de p tal que la composición $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en $\phi(p)$. Decimos que f es holomorfa en X si es holomorfa para cada $p \in X$.

Si consideramos a f como un mapeo holomorfo entre superficies de Riemann, la definición que acabamos de exponer, coincide con la definición (1.5).

EJEMPLOS.

1. Si f, g son dos funciones holomorfas en p , entonces $f \pm g$ y fg son holomorfas en p . Además, si $g(p) \neq 0$ entonces f/g es holomorfa en p .
2. Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en ∞ sí y sólo sí $f(1/z)$ es holomorfa en $z = 0$. En particular, si $f = p/q$ con $p, q \in \mathbb{C}[z]$ entonces f es holomorfa en ∞ si $\deg(f) \leq \deg(q)$.

2.1. Singularidades. Sea X una superficie de Riemann, sea p un punto de X , y f una función compleja valuada definida en una vecindad punteada de p . (Una vecindad punteada de p es un conjunto de la forma $U \setminus \{p\}$, donde U es una vecindad de p .) El concepto de tipo de singularidad (removible, polo, esencial) para funciones de una variable compleja se extiende a funciones en superficies de Riemann.

DEFINICIÓN 1.8. Sea f una función holomorfa en una vecindad punteada de $p \in X$.

1. Decimos que f tiene una *singularidad removible* en p sí y sólo sí existe una carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$, tal que la composición $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad removible en $\phi(p)$.

2. Decimos que f tiene un *polo* en p sí y sólo sí existe una carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$, tal que la composición $f \circ \phi^{-1}$ tiene un polo en $\phi(p)$.
3. Decimos que f tiene una *singularidad esencial* en p sí y sólo sí existe una carta $\phi : U \rightarrow V$ con $p \in U$, tal que la composición $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad esencial en $\phi(p)$.

La definición de singularidad (removible, polo, o esencial) no depende de las cartas coordenadas que se tengan.

DEFINICIÓN 1.9. Sea X una superficie de Riemann, un punto $p \in X$ y V una vecindad punteada p , decimos que una función $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ es *meromorfa* en p si es una de las siguientes opciones:

1. f es holomorfa en p ,
2. f tiene una singularidad removible en p ; o bien
3. f tiene un polo en p .

Si f es meromorfa en todo punto de X , entonces f es llamada una función meromorfa.

De hecho, una función f es meromorfa sí y sólo sí $f : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ es holomorfa. Donde f es definida como

$$f(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \text{ no es polo de } f, \\ \infty & \text{si } z \text{ es polo de } f. \end{cases}$$

EJEMPLOS.

1. Una función $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Es una función meromorfa y de hecho la Definición 1.9 coincide con la definición usual.
2. Supongamos f y g dos funciones meromorfas en $p \in X$. Entonces $f \pm g$ y fg son meromorfas en p . Si g no es idénticamente cero, entonces f/g es meromorfa en p .

2.2. Series de Laurent. En esta sección extendemos la noción de serie de Laurent para funciones meromorfas definidas en superficies de Riemann.

Sea f una una función holomorfa definida en una vecindad punteada de $p \in X$. Sea $\phi : U \rightarrow V$ una carta en X con $p \in U$. Si pensamos a z como coordenada local alrededor de p , tal que $z = \phi(x)$ para x alrededor de p , tenemos que $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en una vecindad punteada de $z_0 = \phi(p)$. Por lo que podemos expandir a $f \circ \phi^{-1}$ en una serie de Laurent alrededor de z_0 :

$$(2) \quad f(\phi^{-1}(z)) = \sum_n c_n (z - z_0)^n.$$

Esta es llamada la *serie de Laurent* de f alrededor de p con respecto a la carta ϕ (o con respecto a la carta local z). Los coeficientes $\{c_n\}$ de la serie de Laurent son llamados los *coeficientes de Laurent*.

La serie de Laurent definitivamente depende de la elección de las cartas coordenadas locales, es decir, dependen de la elección de ϕ . Sin embargo uno puede usar la serie de Laurent para revisar la naturaleza de la singularidad de f en p . Esto está basado en el criterio usual de las funciones de variable compleja, y se ve en el siguiente

LEMA 1.10. *Con la notación anterior, f tiene una singularidad removible en p si y sólo si sus coeficientes de Laurent con índice negativo son cero. La función f tiene un polo en p si y sólo si tiene un número finito de coeficientes no cero y cuyo índice es negativo. La función f tiene una singularidad esencial en p si y sólo si una de sus series de Laurent tiene una infinidad de términos no cero cuyos índices son negativos.*

DEMOSTRACIÓN. Este lema se sigue inmediatamente de la teoría de funciones variable compleja. Si $f \circ \phi^{-1} = \sum_n c_n(z - z_0)^n$ aplicando el Corolario 1.18 [4, p.109]. \square

Con las series de Laurent no sólo podemos decidir la naturaleza de una singularidad, para una función meromorfa, podemos también definir el orden de un cero o un polo de cualquier serie de Laurent.

DEFINICIÓN 1.11. Sea f una función meromorfa en p , cuya serie de Laurent en coordenadas locales z es $\sum_n c_n(z - z_0)^n$. El orden de f en p denotado por $ord_p(f)$, es el mínimo exponente que aparece (con coeficiente no cero) en la serie de Laurent:

$$(3) \quad ord_p(f) = \min\{n | c_n \neq 0\}.$$

Necesitamos probar que $ord_p(f)$ está bien definido, es decir, no depende de la elección de la carta local usada.

Supongamos que $\psi : U' \rightarrow V'$ es otra carta con $p \in U'$, dando coordenadas locales $w = \psi(x)$ para x alrededor de p . Supongamos además $\psi(p) = w_0$. Considere el cambio de coordenadas holomorfo $T(w) = \phi \circ \psi^{-1}(w)$, la cual expresa z como una función holomorfa de w . Ya que T es invertible en w_0 , debemos tener $T'(w_0) \neq 0$. Si escribimos la serie de potencias de T , será de la forma

$$z = T(w) = z_0 + \sum_{n \geq 0} a_n(w - w_0)^n,$$

con el coeficiente del término lineal $a_1 \neq 0$.

Si $c_{n_0}(z - z_0)^{n_0} + (\text{otros términos de orden mayor})$ es la serie de Laurent para f en p en términos de la coordenada local z , con $c_{n_0} \neq 0$, entonces el orden de f calculado vía z es n_0 . Para obtener la serie de Laurent de f en términos de w , simplemente componemos la serie de Laurent con la expresión en serie de potencias $z - z_0 = \sum_{n \geq 0} a_n(w - w_0)^n$. Vemos inmediatamente que el término de orden más pequeño en la variable $w - w_0$ de la composición es $c_{n_0} a_1^{n_0} (w - w_0)^{n_0}$. Pero, tanto c_{n_0} como a_1 son distintos de cero. Por lo que el orden de f está en términos de w y es n_0 . Lo cual demuestra que el orden de f en p está bien definido.

El siguiente corolario es consecuencia inmediata de la definición de $ord_p(f)$ y el Lema 1.10.

COROLARIO 1.12. *Sea f una función meromorfa en p . Entonces f es holomorfa en p sí y sólo sí $ord_p(f) \geq 0$. En el caso $f(p) = 0$ sí y sólo sí $ord_p(f) > 0$. f tiene un polo en p sí y sólo sí $ord_p(f) < 0$. Además, f no tiene ni cero ni polo sí y sólo sí $ord_p(f) = 0$.*

3. Cubrientes topológicos.

Haremos un pequeño repaso de las aplicaciones cubrientes, esto para después estudiar propiedades globales de los mapeos holomorfos entre superficies de Riemann.

DEFINICIÓN 1.13. Sean X y E dos espacios topológicos no vacíos. Una *aplicación cubriente* sobre X es una aplicación $p : E \rightarrow X$, tal que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U que satisface:

- La imagen inversa de U , $p^{-1}(U)$ es la unión ajena de abiertos $V_j \subset E$, $j \in J$, donde J es algún conjunto de índices no vacío.
- Para cada $j \in J$, la restricción $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

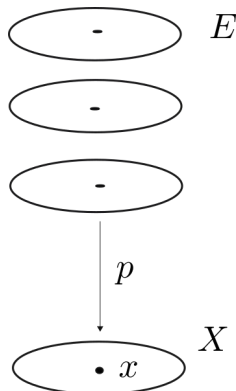


FIGURA 4. Cubriente topológico

EJEMPLO. Si $D = \{z : |z| < 1\}$ y $D^0 = D - \{0\}$ y $m \in \mathbb{Z}^+$, entonces $p : D^0 \rightarrow D^0$ dado por $p(w) = w^m$ es un cubriente de D^0 . Esto es cierto ya que, para cada punto $z \in D^0$ existe $\alpha \in D^0$ tal que $\alpha^m = z$. Si w es una raíz m -ésima primitiva de la unidad, existen vecindades ajenas U_i de $w^i \alpha$ que se mapean homeomorfamente a una vecindad V de z .

PROPOSICIÓN 1.14. *Sea $p : C \rightarrow X$ una aplicación cubriente tal que X es conexo. Si $x, y \in X$ entonces $p^{-1}(x)$ y $p^{-1}(y)$ tienen la misma cardinalidad. Puede ser infinita o finita.*

DEMOSTRACIÓN. De la definición, para cualquier punto $x \in X$, el conjunto de puntos de X cuyas fibras tienen la misma cardinalidad que $p^{-1}(x)$

es abierto. Supongamos que $y \in X$ y es tal que $p^{-1}(y)$ tiene otra cardinalidad, entonces también el conjunto de todos los puntos de X con cardinalidad distinta de la de $p^{-1}(x)$ es abierto y no vacío, lo que contradice la conexidad de X . \square

PROPOSICIÓN 1.15. *Sea E un espacio conexo por trayectorias, X simplemente conexo y $p : E \rightarrow X$ un cubriente, entonces p es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que p es inyectiva ya que p es suprayectiva y abierta, supongamos que no lo es, si e, e' son tales que $p(e) = p(e') = x_0$ y tenemos un camino $\omega : [0, 1] \rightarrow E$ un camino de e a e' entonces $p \circ \omega : [0, 1] \rightarrow X$ es un lazo en X , por hipótesis $p \circ \omega$ es homotópico a la constante k_{x_0} vía una homotopía que mantiene fijo a x_0 . Luego por el *Teorema de levantamiento de caminos* (Revise [25, p.484]), ω es homotópico a la constante k_e por medio de una homotopía que mantiene fijos los extremos, en particular, $e = k_e(1) = \omega(1) = e'$. \square

COROLARIO 1.16. *Si E es un espacio topológico, X es un espacio conexo y simplemente conexo, y $p : E \rightarrow X$ un cubriente, entonces E es unión ajena de copias homeomorfas a X .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto $\{E_i\}_{i \in I}$ de las componentes conexas de E , basta probar que cada componente conexa cubre a X . Sea $x \in X$, y $e \in E_i$ $p(e) \in X$, existe un camino $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ de $p(e)$ a x . Entonces, por el *Teorema de Levantamiento de caminos* existe un camino $\tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow E$ que comienza en e y tal que $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$, por lo que $p(\tilde{\sigma}(1)) = x$. Por otro lado la imagen de $\tilde{\sigma}$ es un conexo que contiene a e , entonces $\sigma(1) \in E_i$. \square

4. Propiedades de los mapeos holomorfos.

En esta primera parte de la sección presentaremos un concepto completamente local de los mapeos holomorfos, y estableceremos un invariante local, para continuar con propiedades globales de las aplicaciones holomorfas.

Un mapeo holomorfo entre superficies de Riemann tiene una forma local normal en algunas coordenadas locales; esencialmente, cualquier mapeo se ve como una potencia. Este hecho lo presentamos en el siguiente lema.

LEMA 1.17 (Forma Local Normal). *Sean X y Y superficies de Riemann, $f : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante y $P \in X$, entonces existen (U_P, ϕ) carta centrada en P y (U_Q, ψ) carta centrada en $Q = f(P)$ tal que $\psi(f(\phi^{-1}(z))) = z^m$ para alguna $m \in \mathbb{Z}^+$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que U_P y U_Q contienen al origen y además $\phi(P) = 0$ y $\psi(Q) = 0$. Esto es posible porque U_P y V_Q son abiertos y podemos componer ϕ y ψ con traslaciones apropiadas. Escribimos $\psi(f(\phi^{-1}(z))) = T(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ el número más chico tal que $a_m \neq 0$. Entonces $T(z) = z^m g(z)$ donde $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} z^k$, y

$g(0) \neq 0$. Entonces, $\frac{g(0)}{a_m} = 1$. La función raíz m -ésima está definida alrededor de 1, así $k(z) = \left(\frac{g(z)}{a_m}\right)^{\frac{1}{m}}$ es holomorfa en una vecindad de 0. También, $T(z) = z^m g(z) = (zk(z))^m$. La derivada $(zk(z))' = k(z) + zk'(z)$, entonces $(zk(z))'|_0 = k(0) \neq 0$, así $z \mapsto zk(z)$ es invertible y analítica en una vecindad alrededor de 0. Por el Teorema de la Función Inversa. Sea w su inversa, entonces $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(w) = (zk(z))^m = w^m$. □

De la demostración del teorema observamos que la restricción de $\psi f \phi^{-1}$ a $U_P - \{0\}$ es un cubriente con m hojas de $U_Q - \{0\}$. Pero ψ y ϕ son homeomorfismos, entonces preservan la ajenidad de las vecindades, y son biyectivas, entonces f es m a 1, y la preimagen bajo f de una vecindad $V_Q - \{Q\}$ es la unión ajena de m vecindades. Por eso, f restringido a $V_P - \{P\}$ es un cubriente de m hojas de $V_Q - \{Q\}$. Entonces, m no depende de la elección de ϕ y ψ . El número m será llamado *la multiplicidad* de f en P , denotado por $mult_P(f)$, y si $mult_P(f) > 1$, entonces P es llamado *punto de ramificación* de f , y su respectiva imagen será llamada *punto de bifurcación* de f .

OBSERVACIÓN. Si consideramos a f como una función diferenciable entre superficies diferenciables, entonces el conjunto de puntos de ramificación de f coincide con sus puntos críticos y el conjunto de puntos de bifurcación de f coincide con sus respectivos valores críticos.

El siguiente lema da una forma de hallar la multiplicidad de un punto p sin tener que hallar las cartas que llevan a la forma local normal a f .

LEMA 1.18. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann, $p \in X$ y h una representación local de f alrededor de p ; es decir z_0 corresponde a p y w_0 corresponde a $f(p)$, donde h es una función holomorfa. Entonces:*

$$(4) \quad mult_p(f) = 1 + ord_{z_0} \left(\frac{dh}{dz} \right).$$

En particular, la multiplicidad es el exponente más pequeño estrictamente positivo que aparece en la serie de Taylor de h . Si $h(z) = h(z_0) + \sum_{i=m}^{\infty} c_i (z - z_0)^i$ con $m \geq 1$ y $c_m \neq 0$, entonces $mult_p(f) = m$.

DEMOSTRACIÓN. Vimos en la prueba del Lema 1.17 que la multiplicidad es el exponente más pequeño que aparece en la serie de potencias de T para f cuando centramos las coordenadas locales usadas en p y en la imagen $f(p)$. Con la notación $z - z_0$ y $w - w_0$ con coordenadas locales centradas, veamos que la multiplicidad es el exponente del primer término no cero que aparece en la expansión en la serie de Taylor de $h(z) - h(z_0)$ alrededor de $z = z_0$. Por el Teorema de Taylor, este coincide con el orden de la derivada de h en z_0 como se estableció. □

El lema siguiente será importante para demostrar el Teorema 1.20 y es un hecho topológico para mapeos continuos y cerrados.

LEMA 1.19. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos y si f es cerrada entonces para toda $x \in X$ y cualquier subconjunto U que contiene $f^{-1}(x)$, existe un abierto V que contiene a x tal que $f^{-1}(V) \subset U$.*

DEMOSTRACIÓN. La imagen bajo f del complemento de U es cerrado porque es la imagen de un cerrado. Sea $F = f(X \setminus U)$. Como U contiene a la preimagen de x , x no puede estar en F . Tomamos como abierto $V = Y \setminus F$ que si contiene a x . Por construcción, un punto en la imagen inversa de V no puede proyectarse en F , es decir no puede estar en $X \setminus U$, entonces está en U . \square

TEOREMA 1.20. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas, entonces se cumplen los siguientes enunciados.*

1. *Para cualquier $Q \in Y$, $f^{-1}(Q)$ es finito.*
2. *Existen solamente un número finito de puntos de ramificación. Sea R el conjunto de puntos de ramificación, y el conjunto $S = f(R) \subset Y$.*
3. *La función f restringida a $X \setminus f^{-1}(S)$ es un cubriente de n hojas $Y \setminus S$ para alguna n . El número n es llamado el grado de f .*
4. *Para cualquier punto $Q \in Y$, $\sum_{P \in f^{-1}(Q)} \text{mult}_P(f) = n$.*

DEMOSTRACIÓN. Como X es compacto es suficiente probar que $f^{-1}(Q)$ es discreto para cualquier $Q \in Y$. Si $P_k \rightarrow P$ y $f(P_k) = Q$, entonces por el Teorema de la Identidad $f \equiv Q$, la aplicación constante Q .

Probaremos que R es discreto. Sea $P \in R$, entonces existen (U, φ) y (V, ψ) cartas locales centradas en P y $f(P)$ respectivamente, tal que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^n$. Dichas cartas existen por el Lema 1.17. Esta composición tiene únicamente un punto de ramificación. Como φ y ψ son homeomorfismos entonces f tiene a P en el abierto U como único punto de ramificación. Por lo tanto R es discreto.

Sea $Q \in Y \setminus S$. Es suficiente probar que existe una vecindad V de Q tal que su preimagen es la unión ajena de copias homeomorfas a V . Por la primera parte del teorema $f^{-1}(Q)$ es finito, entonces podemos considerar $f^{-1}(Q) = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Por el Lema 1.17 existe un abierto U_i que contiene a P_i y que f localmente es el mapeo $z \mapsto z$, en particular f restringido a U_i es un homeomorfismo sobre su imagen. Podemos suponer también que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Consideremos $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Observemos que por ser X compacto, Y Hausdorff y f continua, el Lema 1.19 asegura que existe V un abierto que contiene a Q y tal que $f^{-1}(V) \subset U$. Probaremos que V está cubierto parejamente. Definimos $\tilde{U}_i = U_i \cap f^{-1}(V)$, es un abierto y al restringir f a cada V_i es un homeomorfismo. Por construcción $f^{-1}(V) = \coprod_{i=1}^n \tilde{U}_i$. Luego V está cubierta parejamente.

Sea $Q \in Y$, $f^{-1}(Q) = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$. Entonces, existen vecindades U_i de P_i y V_i de Q tal que f en coordenadas locales es $mult_{P_i}(f)$ a 1 en $U_i \setminus \{P_i\}$ a $V_i \setminus \{Q\}$. Existe V vecindad de Q contenida en $\bigcap_{i=1}^m V_i$ tal que $V \cap S$ es vacío o a lo más tiene a Q , entonces por la tercera parte del teorema, f es n a 1 en $V \setminus \{Q\}$. Entonces, $\sum_{i=1}^m mult_{P_i}(f) = n$. \square

Al número n lo llamaremos el *grado de f* y lo denotaremos por $deg(f)$. Con este teorema podemos concluir que cualquier aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas, es un cubriente topológico fuera de los puntos de la imagen inversa de los puntos de bifurcación. El siguiente corolario es consecuencia inmediata del Teorema 1.20.

COROLARIO 1.21. *Un mapeo $f : X \rightarrow Y$ holomorfo no constante entre superficies de Riemann compactas de grado 1 es un biholomorfismo.*

Triangulaciones y la Característica de Euler.

En este capítulo demostraremos el teorema de Radó, que dice que toda superficie topológica segundo numerable se puede triangular, y daremos una prueba siguiendo el esbozo que dio Alberto Verjovsky [34] usando el Teorema del mapeo de Riemann y el Teorema de extensión de Carathéodory. Al final del capítulo definiremos la característica de Euler de una superficie compacta. En todo este capítulo trabajaremos con superficies conexas.

Dada una superficie X , una triangulación de X es una descomposición de X en triángulos topológicos que se intersecan a lo largo de una arista, un vértice, o no se intersecan. Esta idea la precisamos en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.1. Denotamos por T al triángulo de vértices $0, 1, e^{i\pi/3}$ en \mathbb{C} . Un 2-simplejo de una superficie M es un encaje $T \hookrightarrow M$. La imagen será nuevamente llamado un triángulo, con 3 aristas y 3 vértices. Diremos que M es triangulable si admite una *triangulación*, es decir, dados simplejos $f_i : T \hookrightarrow M$ donde las imágenes cubren a M y tales que para cada punto de $P \in M$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si P no está en una arista, aparece en un único triángulo $f_i(T)$, que es entonces una vecindad de P ;
2. Si P está en una arista a , pero no sobre un vértice, aparece exactamente en dos triángulos $t_i = f_i(T)$ y $t_j = f_j(T)$ tales que $t_i \cap t_j = a$ y $t_i \cup t_j$ sea una vecindad de P ;
3. Si P es un vértice, aparece exactamente en un número finito de triángulos t_i, \dots, t_k , estos tienen a P como vértice, y su unión es una vecindad de P , y t_i y t_{i+1} tiene exactamente una arista común.

Ejemplos de triangulaciones de superficies, podemos poner la esfera \mathbb{S}^2 y considerar un sólido platónico, por ejemplo el tetraedro y suponer que todos sus vértices se encuentran en la esfera, y después “inflamos” el tetraedro hasta tener las aristas dentro de la esfera. De esta manera, el tetraedro nos da una triangulación de \mathbb{S}^2 .

1. El Teorema de Radó.

Para la demostración del teorema de Radó haremos uso de algunos teoremas como el teorema del mapeo de Riemann y el teorema de extensión de Carathéodory, a continuación los enunciamos.

TEOREMA 2.2 (Mapeo de Riemann). *Sea G una región simplemente conexa del plano complejo, que no es todo el plano complejo y sea $a \in G$.*

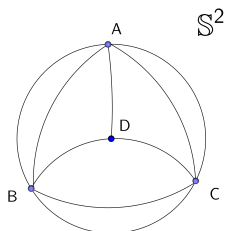


FIGURA 1. Esfera triangulada.

Entonces existe una única función holomorfa $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ con las propiedades:

1. $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$;
2. f es uno a uno ;
3. $f(G) = \mathbb{D}^2$.

Donde \mathbb{D}^2 es el disco unitario abierto con centro en el origen en el plano complejo.

La demostración de este teorema no la daremos en este trabajo pero puede revisarse en [4, p. 160, Teorema 4.2].

El siguiente teorema nos dice cuando un biholomorfismo del disco \mathbb{D}^2 a una región simplemente conexa $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ puede extenderse de manera continua a $\partial\mathbb{D}^2$. Aceptaremos este teorema sin demostración, puede revisarse en [24].

TEOREMA 2.3 (Extensión de Carathéodory). *Sea $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow G$ un biholomorfismo, entonces f se extiende homeomorficamente a $\overline{\mathbb{D}^2}$ si y sólo si ∂G es una curva de Jordan.*

Para poder entender la demostración del teorema de Radó hace falta discutir la idea de curva de Jordan y región de Jordan que presentamos a continuación.

DEFINICIÓN 2.4. Decimos que $\gamma \subset \mathbb{C}$ es una *curva de Jordan* en el plano o en la esfera si γ es la imagen de un encaje (topológico) de \mathbb{S}^1 al plano o en la esfera.

DEFINICIÓN 2.5. Un subconjunto abierto y conexo J del plano complejo es llamado *dominio o región de Jordan* si ∂J es una curva de Jordan.

TEOREMA 2.6. *Sea G un dominio de Jordan, $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow G$ un biholomorfismo, puede ser extendido de $\widehat{\mathbb{C}}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Definamos $G^* = \widehat{\mathbb{C}} \setminus G$ y $\mathbb{D}^{2*} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}^2$. Como, G es un subconjunto simplemente conexo del plano complejo, esto es, equivalente a que G y G^* sean conexos, y así, G^* es simplemente conexo. Entonces, por

el Teorema del mapeo de Riemann, existe $f^* : \mathbb{D}^{2*} \rightarrow G^*$ tal que $f^*(\infty) = \infty$. Entonces, por el teorema de extensión de Carathéodory, f y f^* pueden ser extendidas a mapeos continuos de $\overline{\mathbb{D}^2}$ en \overline{G} y $\overline{\mathbb{D}^{2*}}$ en $\overline{G^*}$. Si definimos $\varphi(\varsigma) = f^{*-1}(f(\varsigma))$ para $\sigma \in \partial\mathbb{D}^2$ y,

$$f(z) = \begin{cases} f^*(|z|\varphi\left(\frac{z}{|z|}\right)) & \text{si } |z| \geq 1 \\ f(z) & \text{si } |z| \leq 1 \end{cases}$$

Para $|z| \geq 1$ f es composición de homeomorfismos, por lo que f es homeomorfismo para $|z| \geq 1$. Si $|z| = 1$, $f^*(|z|\varphi\left(\frac{z}{|z|}\right)) = f^*(\varphi(z)) = f(z)$. Por lo tanto, f es homeomorfismo. \square

El siguiente teorema es un resultado importante de topología, el lector interesado puede revisar su demostración en [32].

TEOREMA 2.7 (Teorema de la Curva de Jordan). *Si C es una curva de Jordan contenida en el plano complejo, entonces $\mathbb{C} \setminus C$ tiene precisamente dos regiones, donde cada una tiene a C como frontera.*

COROLARIO 2.8. *Un mapeo continuo de una curva de Jordan a otra curva de Jordan contenidas en \mathbb{C} puede ser extendido a un homeomorfismo de \mathbb{C} en \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Sean f y g biholomorfismos de Δ en los dominios G y H de las curvas de Jordan y sea φ una biyección continua de ∂G en ∂H . Extendemos f y g de acuerdo al teorema precedente. Entonces $\Psi = g^{-1}\varphi f : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$. Si definimos:

$$\Psi(z) = \begin{cases} |z|\Psi\left(\frac{z}{|z|}\right) & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Entonces $g\Psi f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es un homeomorfismo, si $z \neq 0$ Ψ composición de homeomorfismos y si z_n es una sucesión tal que $z_n \rightarrow 0$ entonces $|z_n|\Psi\left(\frac{z_n}{|z_n|}\right) \rightarrow 0$, lo que prueba que es continua en 0, y por tanto homeomorfismo que extiende φ . \square

Para poder demostrar el Teorema de Radó nos interesa cubrir a una superficie X con discos cerrados cuya intersección de sus fronteras (que son curvas de Jordan) dos a dos sea topológicamente transversa, esto con el objetivo de usar sus intersecciones como puntos marcados. La intersección de dos curvas de Jordan en una superficie X a priori puede ser muy aparatosa, incluso pueden intersectarse en un conjunto de Cantor. Para poder arreglar estos problemas, buscaremos encajes isotópicos de discos cerrados que cumplan las condiciones que necesitamos.

DEFINICIÓN 2.9. Sean X, Y dos espacios topológicos y dos encajes topológicos $\phi_0, \phi_1 : Y \rightarrow X$. Decimos que una aplicación continua $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ es una isotopía entre ϕ_0 y ϕ_1 si para cada $t \in [0, 1]$ el mapeo definido como $H_t(z) = H(z, t)$ es un encaje topológico y $H_0 = \phi_0$ y $H_1 = \phi_1$.

DEFINICIÓN 2.10. Sean C_1 y C_2 dos curvas contenidas en el plano complejo. Decimos que C_1 y C_2 se intersectan *topológicamente transversalmente* si $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ o bien, cuando $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ se tiene que para cada $x \in C_1 \cap C_2$ existen V_x una vecindad de x y un homeomorfismo $h : V_x \rightarrow \Delta$ tal que $h(x) = 0$, $h(C_1) = \Delta \cap \text{Re}$ y $h(C_2) = \Delta \cap \text{Im}$.

La intersección topológicamente transversal entre dos curvas en el plano es, obviamente, una propiedad que se preserva bajo homeomorfismo.

LEMA 2.11. Sean $\phi_1, \phi_2 : \overline{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}$ dos encajes del disco cerrado de radio 1 al plano complejo. Sean $J_i = \phi_i(\Delta)$ y $\gamma_i = \partial J_i$ para $i = 1, 2$. Entonces existe un encaje $\widetilde{\phi}_2$ isotópico a ϕ_2 tal que si $\sigma_2 := \widetilde{\phi}_2(\partial \overline{\Delta})$, entonces σ_2 y γ_1 se intersectan topológicamente transversalmente.

DEMOSTRACIÓN. El Corolario 2.8 dice que existe un homeomorfismo $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que lleva γ_1 en la circunferencia unitaria con centro en el origen, y $\widehat{\gamma}_2 = \varphi(\gamma_2)$ sigue siendo una curva cerrada simple en el plano complejo. Por el teorema del mapeo de Riemann y el teorema de extensión de Carathéodory existe $\varphi : \overline{\Delta} \rightarrow h(\overline{J_2})$ biholomorfa en Δ que se extiende a $\overline{\Delta}$ como un homeomorfismo. Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña, observemos que la curva $C_\epsilon = \{\varphi((1 - \epsilon)e^{i\theta}) : \theta \in [0, 2\pi]\}$ es una curva diferenciable. Entonces, por el Teorema de Sard [17, p. 246], podemos suponer que $C_\epsilon \cap h(\gamma_1)$ es transversal, en particular su intersección es topológicamente transversal, y bajo h^{-1} se preserva esta propiedad. Definimos la aplicación $\widetilde{\varphi} = \varphi^{-1} \circ h \circ \phi_2$ y la siguiente isotopía $H : \overline{\Delta} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, como $H(z, t) = h^{-1}(\varphi((1 - \epsilon t)\widetilde{\varphi}(z)))$ que cumple $H(z, 0) = \phi_2$ y $H(z, 1) = h^{-1}(\varphi((1 - \epsilon)\widetilde{\varphi}(z)))$. Si tomamos $\widetilde{\phi}_2 = H_1$, entonces $\widetilde{\phi}_2$ verifica el teorema. □

LEMA 2.12. Sea X una superficie compacta. Entonces X tiene una cubierta \mathcal{U} con las propiedades siguientes:

1. Si dos elementos U_i y U_j de \mathcal{U} se intersectan, entonces existe una carta coordenada (W, ϕ) de X tal que $U_i \cup U_j \subset W$,
2. Tiene un número finito de elementos,
3. Cada elemento U de \mathcal{U} es homeomorfo a $\overline{\mathbb{D}^2}$,
4. Las imágenes de discos de radio 1/2 siguen cubriendo a X .

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{A} = \{(W_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ un atlas de X (no necesariamente maximal). Dado que X es una superficie, X es normal y Hausdorff, el teorema de metrizabilidad de Urysohn (Revise [25] pág. 270 Teorema IX.4.8) implica que X es metrizable. Ahora, como X es un espacio métrico compacto, entonces la cubierta $\{W_i\}_{i \in I}$ tiene número de Lebesgue $\delta > 0$. Si tomamos

para cada $x \in X$ la bola de radio $\delta/5$ con centro en x . Entonces para cada pareja de bolas $B_x = B(x, \delta/5)$ y $B_{x'} = B(x', \delta/5)$ cuya intersección es no vacía, se cumple que $\text{diam}(B_x \cup B_{x'}) < \delta$; ya que si $y \in B_x$, $z \in B_{x'}$ y $w \in B_x \cap B_{x'}$ entonces:

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, w) + d(w, x') + d(x', z) < \frac{4}{5}\delta.$$

Por lo que el $\text{diam}(B_x \cup B_{x'}) < \delta$, luego existe W_i dominio de alguna carta de \mathcal{A} tal que $B_x \cup B_{x'} \subset W_i$.

En resumen, podemos considerar para cada $x \in X$ una vecindad U_x de x y un homeomorfismo $h_x : \overline{U}_x \rightarrow \overline{\mathbb{D}^2}$, suficientemente pequeña para asegurar que si dos de estas vecindades \overline{U}_x y $\overline{U}_{x'}$ se intersectan, entonces existe una pareja (W_i, ϕ) elemento de \mathcal{A} cuyo dominio contiene a la unión $\overline{U}_x \cup \overline{U}_{x'}$.

Consideremos entonces, la colección de vecindades $\{V_x\}_{x \in X}$ donde cada $V_x = h_x(D(0, 1/2))$ que forma obviamente una cubierta de X . Por lo tanto tiene una subcubierta finita $\{V_{x_i}\}_{i=1}^n$. Si definimos $\mathcal{U} = \{\overline{U}_{x_i}\}_{i=1}^n$, entonces \mathcal{U} satisface las condiciones del lema. □

PROPOSICIÓN 2.13. *Una superficie (topológica) compacta X , puede ser cubierta por una colección de discos cerrados cuya intersección de sus fronteras dos a dos es topológicamente transversal.*

DEMOSTRACIÓN. El Lema 2.12 implica que una superficie compacta X puede ser cubierta por un número n de discos topológicos $\psi_j : \overline{\mathbb{D}^2} \rightarrow X$ con la propiedad de que si $\psi_j(\overline{\mathbb{D}^2}) \cap \psi_i(\overline{\mathbb{D}^2}) \neq \emptyset$ entonces existe una carta coordenada de X que contiene a la unión $\psi_j(\overline{\mathbb{D}^2}) \cup \psi_i(\overline{\mathbb{D}^2})$, además, la unión de las imágenes de discos de radio $1/2$ es X . Denotaremos $D_j = \psi_j(D_{1/2}(0))$.

Procederemos por inducción sobre k el número de discos.

Si $k = 2$. Sean ψ_1 y ψ_2 los encajes de dichos discos a la superficie X , el Lema 2.12 dice que existe una carta (W, ϕ) de X tal que W contiene a la unión. Aplicando el Lema 2.11, podemos cambiar $\psi_2(\overline{\mathbb{D}^2})$ por un disco topológico imagen de un encaje $\widetilde{\psi}_2$ isotópico a ψ_2 , y tal que $\partial(\widetilde{\psi}_2(\overline{\mathbb{D}^2})) \cap \partial(\psi_1(\overline{\mathbb{D}^2}))$ es topológicamente transversal. Supongamos que el teorema es cierto para $n - 1$ discos. Debemos mostrar que el teorema es válido para n discos. Sea U_1, \dots, U_{n-1} discos que cumplan que la intersección dos a dos de sus respectivas fronteras sea topológicamente transversal, sea U_n un disco extra, de la demostración del Lema 2.11 se ve que la transversalidad topológica es una condición abierta, entonces existe un disco U'_n tal que su frontera es topológicamente transversal a la frontera de cualquier disco que intersecte a U'_n . □

TEOREMA 2.14 (Teorema de Radó). *Sea X una superficie topológica y compacta, entonces X puede ser triangulada.*

DEMOSTRACIÓN. Una superficie compacta X puede ser cubierta por cartas coordenadas $\psi_j : \overline{\mathbb{D}^2} \rightarrow X$, tal que la colección $\{D_j\}$ donde $D_j = \psi_j(\overline{\mathbb{D}^2})$

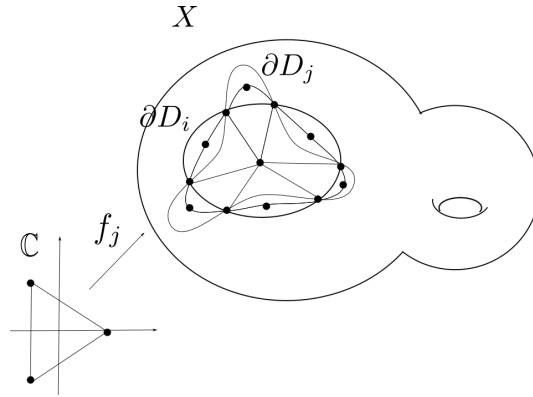


FIGURA 2. Subdivisión de celdas

es finita. Podemos también suponer que $D_i \not\subset D_j$ para cualquier $i \neq j$; ya que si $D_i \subset D_j$ como tal cubierta es finita, descartamos a todos los discos que estén contenidos en otros.

Supongamos que $\bigcup_{i \in I} \partial D_i$ la unión de arcos que se intersecan topológicamente transversalmente, diremos que $\bigcup \partial D_i$ es de tipo *transversal*. La Proposición 2.13 implica que siempre podemos encontrar una cubierta transversal y así se obtienen dos casos posibles:

Caso 1. Si $\partial D_i \subset D_j$, para alguna pareja (i, j) . Ya que D_i no está contenido en D_j . La región de Jordan complementaria a D_i . Entonces la superficie X es una esfera, y es por tanto triangulable.

Caso 2. Si $\partial D_i \not\subset D_j$ para cualquier pareja (i, j) . Entonces la unión de las imágenes de las fronteras de los discos dividen a la superficie en celdas con frontera una curva de Jordan, donde la intersección dos a dos de dichas curvas es topológicamente transversa y es un número finito de puntos marcados. En cada celda, podemos suponer que hay al menos tres de estos puntos marcados; supongamos que hay una celda que tiene sólo dos puntos marcados x_0 y x_1 . En este caso, tomamos un punto x_2 en el interior de la celda y trazamos curvas que vayan de x_2 a x_0 y de x_2 a x_1 . Usando estos puntos subdividimos cada celda para triangular la superficie X . Ver Figura 2. \square

El Teorema de Radó para el caso no compacto. La última parte de la sección la dedicaremos a probar el Teorema de Radó para el caso de superficies no compactas, las técnicas utilizadas son similares a las utilizadas en el caso compacto.

PROPOSICIÓN 2.15. *Sea X una superficie segundo numerable, entonces existe una sucesión de compactos $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$ tal que*

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta relativamente compacta de x , D_x , entonces $X = \cup_{x \in X} D_x$. Como X es segundo numerable, luego es un espacio Lindelöf, por lo que $\{D_x\}_{x \in X}$ tiene una subcubierta numerable $\{D_i\}_{i \geq 1}$. Ahora, definimos $K_1 = \overline{D_1}$. Por compacidad tenemos $K_1 \subset D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{i_1}$. Para algún número i_1 . Tomamos $K_2 = \overline{D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{i_1}}$. Entonces K_2 es compacto, y $K_1 \subset \overset{\circ}{K_2}$. Otra vez por compacidad tenemos que $K_2 \subset D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{i_2}$ para algún número $i_2 > i_1$. Tomamos $K_3 = \overline{D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{i_2}}$. Entonces K_3 es compacto y $K_2 \subset \overset{\circ}{K_3}$. Procediendo recursivamente, tenemos que $K_n = \overline{D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{i_{n-1}}}$. Y obtenemos la sucesión deseada. \square

LEMA 2.16. *Sea X una superficie segundo numerable, entonces X admite una cubierta \mathcal{U} con las siguientes propiedades.*

1. Cada elemento $U \in \mathcal{U}$ es homeomorfo a \mathbb{D}^2 ,
2. Las imágenes de discos de radio $1/2$ siguen cubriendo a X ,
3. La colección \mathcal{U} es numerable,
4. Si dos elementos U_i y U_j de \mathcal{U} se intersecan, entonces existe una carta coordenada (W, ϕ) de X tal que $U_i \cup U_j \subset W$,
5. Es localmente finita.

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 2.15 dice que X es unión numerable de compactos K_1, K_2, \dots tal que

$$K_1 \subset \overset{\circ}{K_2} \subset K_2 \subset \overset{\circ}{K_3} \subset \dots \subset K_n \subset \overset{\circ}{K_{n+1}} \subset \dots$$

Por otro lado, X es un espacio segundo numerable, Hausdorff y normal¹, entonces por el Teorema de metrabilidad de Urysohn [25, p. 270] X es metrizable. Como X es superficie tiene un atlas $\mathcal{A} = \{(W_i, \phi_i)\}_{i \in I}$. Entonces, para cada $n \geq 1$ existe $\delta_n > 0$ número de Lebesgue para el compacto K_n y la cubierta asociada al atlas \mathcal{A} .

Afirmación 1.

Existe una cubierta finita \mathcal{V}_n formada por discos abiertos relativamente compactos ($B \approx \mathbb{D}^2$ y $\overline{B} \approx \overline{\mathbb{D}^2}$) de $A_n = K_n \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{V}_0 \cup \dots \cup \mathcal{V}_{n-1}} B$ tal que

- a. $\bigcup_{B \in \mathcal{V}_n} B \subset K_{n+1}$,
- b. $\text{diam}(B \cap K_n) < \frac{1}{2} \min\{\delta_n, \delta_{n+1}, \delta_{n+2}\}$,
- c. $B \cap K_{n-1} = \emptyset$.

Definimos $K_0 = \emptyset$ y $A_0 = \emptyset$. Sea $x \in A_1 = K_1$, entonces existe B_x y un homomorfismo $h_x : \overline{B_x} \rightarrow \overline{\mathbb{D}^2}$ tal que B_x cumple los incisos b y c, por otro lado, como $K_1 \subset \overset{\circ}{K_2}$ entonces, podemos suponer B_x , tal que $B_x \subset K_2$. Luego $A_1 \subset \cup_{x \in A_1} B_x$ y tomamos una subcubierta finita \mathcal{V}_1 . Por construcción \mathcal{V}_1 cumple los incisos anteriores.

¹Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio *normal* si dados $A, B \subset X$ cerrados y ajenos, entonces existen U y vecindad de A y V vecindad de B ajenas.

Suponemos que hemos construido $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_{n-1}$ y construimos \mathcal{V}_n de la siguiente manera: sea $x \in A_n$, entonces existe un vecindad de x , B_x y un homomorfismo $h_x : \overline{B_x} \rightarrow \mathbb{D}^2$ tal que B_x cumple el inciso b, por otro lado, como $A_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, podemos tomar B_x de diámetro suficientemente pequeño para que $B_x \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. Además, como $x \notin K_{n-1}$ y K_{n-1} es cerrado, entonces podemos tomar B_x tal que $B_x \cap K_{n-1} = \emptyset$. Luego $A_n \subset \cup_{x \in A_n} B_x$, y A_n es compacto, extraemos una subcubierta finita \mathcal{V}'_n de la cubierta $\{B'_x\}_{x \in A_n}$ donde $B'_x := h_x^{-1}(D(0, 1/2))$ que cumple los incisos anteriores por construcción. Definimos $\mathcal{V}_n = \{B_x | B'_x \in \mathcal{V}'_n\}$ y consideramos entonces

$$\mathcal{U}' = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{V}_n,$$

y $\mathcal{U} = \{\overline{U} | U \in \mathcal{U}'\}$. A continuación probaremos que esta colección de discos cerrados es una cubierta que satisface el Lema 2.16.

Probemos primero que \mathcal{U} cubre a X . Para esto observemos que $X = \cup_{n \geq 0} A_n$; ya que $A_1 = K_1$ y supongamos que $K_n \subset \cup_{k=1}^n A_k$, por otro lado $K_{n+1} = (K_{n+1} \setminus \cup_{B \in \mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_n} B) \cup K_n \subset A_{n+1} \cup (\cup_{k=1}^n A_k)$. Consecuentemente \mathcal{U} es una cubierta de X . Los incisos 1, 2 y 3 se satisfacen obviamente por construcción. Para probar el inciso 4. supongamos que $B, B' \in \mathcal{U}$ son tales que $B \cap B' \neq \emptyset$, luego $\overset{\circ}{B} \in \mathcal{V}_i$ y $\overset{\circ}{B}' \in \mathcal{V}_j$. Por simetría podemos suponer $i \leq j$, por el inciso a. $\overset{\circ}{B} \subset K_{i+1}$ entonces $B' \cap K_{i+1} \neq \emptyset$ y $B' \cap K_{j-1} = \emptyset$, por lo que $i+1 \geq j$, y así hay dos casos: $i = j$ o $i = j+1$.

Si $j = i$, entonces $diam(B \cup B') < \delta_{i+1}$ y existe (W, ϕ) elemento de \mathcal{A} tal que $B \cup B' \subset W$.

Si $j = i+1$ entonces $diam(B) < \delta_{j+1}/2 = \delta_{i+2}/2$ por el inciso b y por otro lado $diam(B') < \delta_{i+2}/2$ por el inciso c, luego $diam(B \cup B') < \delta_{i+2}$. Consecuentemente existe (W_i, ϕ_i) elemento de \mathcal{A} tal que $B \cup B' \subset W$.

Para demostrar 5, basta probar que \mathcal{U}' es localmente finita. Sea $x \in X$ existe entonces $B \in \mathcal{U}'$ tal que $x \in B$, además $B \in \mathcal{V}_n$ para alguna n , así $B \subset K_{n+1}$ y sabemos que si $l \geq n+2$ entonces cualquier $B' \in \mathcal{V}_l$ cumple que $B' \cap K_{n+1} = \emptyset$. Por otro lado $\mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_{n+1}$ es una colección finita de discos abiertos que posiblemente tengan intersección no vacía con B . Por lo tanto \mathcal{U}' es localmente finita. □

PROPOSICIÓN 2.17. *Sea X una superficie segundo numerable. Entonces X tiene una cubierta $\mathcal{U} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ de tipo transversal, localmente finita y formada por discos cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. De la demostración del Lema 2.16 tenemos que $X = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$ tal que

$$K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2 \subset K_2 \subset \overset{\circ}{K}_3 \subset \dots \subset K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1} \subset \dots$$

y cada K_n es compacto y $K_n \subset \mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_n$. Es decir, K_n es cubierto por un número finito de discos cerrados con las siguientes propiedades:

1. Si dos de estos discos se intersectan, entonces la unión está contenida en el dominio de una carta coordenada,
2. $\bigcup_{k=1}^n \mathcal{V}_k \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$,
3. Si $B \in \mathcal{V}_n$, entonces $B \cap K_{n-1} = \emptyset$.

Probaremos que para cada $n \geq 1$ $K_n \subset \bigcup_{B \in \mathcal{U}_n} B$ donde la cubierta \mathcal{U}_n es de tipo transversal, $\mathcal{U}_{n-1} \subset \mathcal{U}_n$ y \mathcal{U}_n es refinamiento de $\mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_n$.

La prueba será por inducción sobre n . Sea $n = 1$. Definimos $K_0 = \emptyset$ y $\mathcal{U}_0 = \emptyset$. Por otro lado $K_1 \subset \bigcup_{B \in \mathcal{V}_1} B$. De la demostración del Teorema 2.14 observamos que para una cantidad finita de discos cerrados con la propiedad 1, existe un refinamiento \mathcal{U}_1 de \mathcal{V}_1 tal que \mathcal{U}_1 es de tipo transversal y $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$. Supongamos que para $l \leq n$ K_l tiene una cubierta transversal \mathcal{U}_l formada por discos, $\mathcal{U}_{l-1} \subset \mathcal{U}_l$ y \mathcal{U}_l es refinamiento de $\mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_l$. Entonces la unión $\mathcal{U}_l \cup \mathcal{V}_{l+1}$ forma una cubierta de K_{l+1} . Aplicando los Lemas 2.16 y 2.11 existe un refinamiento de \mathcal{V}_{l+1} a una colección \mathcal{V}'_{l+1} tal que $\mathcal{U}_{l+1} = \mathcal{U}_l \cup \mathcal{V}'_{l+1}$ es una cubierta de tipo transversal.

Si definimos $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$, entonces \mathcal{U} es una cubierta que satisface la proposición. □

TEOREMA 2.18 (Teorema de Radó). *Sea X una superficie topológica y segundo numerable. Entonces X puede ser triangulada.*

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 2.17 implica que X puede ser cubierta por una colección $\mathcal{U} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ numerable de discos cerrados cuya intersección de sus fronteras dos a dos es topológicamente transversa y es localmente finita. Podemos suponer que $B_j \not\subset B_i$ para cualquier pareja $i \neq j$. Entonces la unión de las fronteras de tales discos dividen a la superficie en celdas con frontera una curva de Jordan, donde la intersección dos a dos de dichas curvas es topológicamente transversa y es una cantidad numerable de puntos marcados sin puntos de acumulación; ya que \mathcal{U} es localmente finita y la intersección dos a dos de estas curvas de Jordan es topológicamente transversa. Usando estos puntos subdividimos cada celda para triangular la superficie X . □

COROLARIO 2.19. *Toda superficie topológica segundo numerable y orientable X tiene una estructura de superficie de Riemann*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi_i : t_i \rightarrow T = \langle 0, 1, \exp(i\pi/3) \rangle \subset \mathbb{C}$ una triangulación y una orientación de caminos coherente (revise [26]). Tomamos dos triángulos t_1 y t_2 con una arista común en X $p_1 p_2$. Existe una traslación d tal que $\varphi'_2 = d \circ \varphi_2$ envía t_2 en el triángulo T' que envía p_1 en $\varphi_1(p_1)$. Como la orientación es coherente, φ'_2 coincide también en p_2 . Sea P_1, P_2, P_3 el triángulo equilátero que tiene arista común $P_1 P_2$ con t_1 . Cambiamos φ_2 por ψ_2 definido así: un punto $q \in t_2$ determina un punto $Q \in T'$. La línea de P_3 a Q interseca a $P_1 P_2$ en un punto P . Entonces $P' = \varphi \circ \varphi_2^{-1}(P)$ y

determinamos el punto Q' tal que

$$\frac{\overline{P'_3Q'}}{\overline{P'_3P'}} = \frac{\overline{P_3Q}}{\overline{P_3P}}$$

y finalmente $\psi_2(q) = d^{-1}(Q') \in T$. Es claro, por construcción que φ_1 y $d \circ \varphi_2$ coinciden en la arista P_1P_2 . Por lo tanto podemos suponer que φ_1 y φ'_2 coinciden en tal arista. Además, como no modificamos φ_2 en las demás aristas, podemos hacer esta operación a todas las demás aristas comunes a una pareja de triángulos.

Ahora, podemos definir la estructura compleja: tomando $\varphi : \overset{\circ}{t}_i \rightarrow \overset{\circ}{T}$ como las cartas. Resta cubrir las aristas. Enviamos $(t_i \cup t_j)^\circ$ en $(T \cup T')^\circ$ por f_i y f'_j (que está bien definida gracias a nuestras modificaciones). El cambio de coordenadas con las cartas anteriores son la identidad en $\overset{\circ}{t}_i$ y una traslación $\overset{\circ}{t}_j$; que son analíticas.

Finalmente, si t_1, \dots, t_n son todos los triángulos que contienen a p como vértice, los enviamos por $\varphi_1, d^{(1)} \circ \varphi_2, d^{(1)} \circ d^{(2)} \circ \varphi_3, \dots$ en los triángulos T, T', T'', \dots donde $d^{(1)}, d^{(2)}, \dots$, son las traslaciones definidas anteriormente para las parejas $(t_1, t_2), (t_2, t_3), \dots$. Para que la aplicación construida esté bien definida en $t_1 \cup t_n$ y defina un homeomorfismo de $(t_1 \cup \dots \cup t_n)^\circ$ en una vecindad de 0, la componemos con $z \mapsto z^{6/n}$ ya que en el plano hacen falta seis triángulos equiláteros para completar una vecindad de 0; así la carta en la vecindad de p está dada por $\varphi_1^{6/n}$ en t_1 , $(d^{(1)} \circ \varphi_2)^{6/n}$ en t_2 , etc.. Los cambios de coordenadas con las cartas anteriores son traslaciones compuestas con $z \mapsto z^{6/n}$ (analíticas excepto en cero), por lo tanto siguen siendo analíticas en su dominio. □

2. La característica de Euler.

La característica de Euler de una superficie compacta es un invariante topológico importante, ayuda a la clasificación de las superficies y está relacionada con la triangulación de una superficie.

DEFINICIÓN 2.20. Sea X una superficie, definimos la característica de Euler, dada por la triangulación T , como

$$(5) \quad \chi(X, T) = V - A + C$$

donde V denota el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras de la triangulación.

Esta definición es un caso particular de la característica de Euler-Poincaré que no presentamos en este trabajo pero puede revisar en [12].

La siguiente proposición asegura que podemos definir la característica de Euler de una superficie X sin importar la triangulación.

PROPOSICIÓN 2.21. *La característica de Euler de una superficie X no depende de la triangulación.*

DEMOSTRACIÓN. Daremos un esbozo de la demostración. Sea T una triangulación de X . Un refinamiento elemental de T es otra triangulación T' de X que se obtiene de alguna de las siguientes formas:

Aumentando un vértice en algún punto del interior de un triángulo y tres aristas desde los vértices al nuevo vértice. Con ello se reemplaza un triángulo por tres, lo cual aumenta un vértice, tres aristas y dos caras. Observamos que:

$$\chi(X, T') = (V + 1) - (A + 3) + (C + 2) = V - A + C = \chi(X, T).$$

Notemos que la característica de Euler no se ve afectada.

Al tomar dos triángulos vecinos con una arista en común a ponemos un vértice en algún punto interior de a y dos aristas de cada uno de los vértices opuestos de los dos triángulos. Esencialmente esto biseca a los dos triángulos, aumentando un vértice, tres aristas y dos triángulos. Así:

$$\chi(X, T') = (V + 1) - (A + 3) + (C + 2) = V - A + C = \chi(X, T).$$

Podemos observar que estas dos operaciones no afectan la característica de Euler de X . Un refinamiento de T se obtiene por una sucesión finita de refinamientos elementales. Ahora, si tenemos dos triangulaciones T_1 y T_2 de X podemos sobreponer las triangulaciones y completar con los vértices y aristas que hagan falta para obtener una triangulación y tener un refinamiento común de T_1 y T_2 . Y así

$$\chi(X, T_1) = \chi(X, T) = \chi(X, T_2).$$

□

Describiremos como dar más ejemplos de superficies compactas formadas a partir de sumas conexas. Sean X_1 y X_2 dos superficies topológicas ajenas, su *suma conexa*, denotada por $X_1 \# X_2$ es formada por cortar pequeños hoyos circulares y pegando a lo largo de fronteras de los hoyos.

Escogemos dos subconjuntos $D_1 \subset X_1$ y $D_2 \subset X_2$ tal que D_1 y D_2 sean discos cerrados (i.e. homeomorfos a $\overline{\mathbb{D}^2}$). Sean X'_i , el complemento del interior del disco D_i en X_i para $i = 1, 2$. Escogemos un homeomorfismo h de la frontera del disco D_1 sobre la frontera del disco D_2 . Entonces $X_1 \# X_2$ es el espacio cociente de $X'_1 \cup X'_2$ obtenida de identificar los puntos de x y $h(x)$ para todos los puntos x en la frontera de D_1 . Es claro que $X_1 \# X_2$ es una superficie topológica.

NOTA. Se puede probar rigurosamente que la topología de $X_1 \# X_2$ no depende de la elección de los discos D_1 y D_2 ni del homeomorfismo h .

TEOREMA 2.22 (Clasificación). *Cualquier superficie compacta y orientable es homeomorfa a una esfera o suma conexa de toros.*

La demostración del teorema de clasificación es un hecho topológico que queda fuera del alcance de esta tesis pero puede revisarse en [20].

OBSERVACIÓN. El Teorema 2.22 nos dice que una superficie compacta y orientable X es homeomorfa a un toro con g asas. Con ayuda del grupo fundamental, podemos afirmar que si X es homeomorfo a un toro con g asas, entonces g es único y así definir el género de X como tal número g . Del teorema anterior y de la Proposición 1.4 se sigue que cualquier superficie de Riemann compacta es homeomorfa a una superficie de género g , para un entero $g \geq 0$.

En la Proposición 2.21 se vió que la característica de Euler de una superficie compacta X es un invariante topológico, y la observación anterior nos dice que el género es también un invariante topológico de las superficies compactas y orientables. A continuación demostraremos que estos dos invariantes topológicos están relacionados.

LEMA 2.23. *Sean X_1 y X_2 dos superficies compactas, entonces la característica de Euler de X_1 y X_2 y su suma conexa están relacionadas por la fórmula:*

$$(6) \quad \chi(X_1 \sharp X_2) = \chi(X_1) + \chi(X_2) - 2$$

DEMOSTRACIÓN. Asumamos que X_1 y X_2 están trianguladas y sus características de Euler están dadas por:

$$\chi(X_1) = V_1 - A_1 + C_1$$

$$\chi(X_2) = V_2 - A_2 + C_2$$

En cada superficie removemos el interior de un triángulo e identificamos aristas y vértices de los triángulos removidos. Así obtenemos la suma conexa de X_1 y X_2 y obtenemos una triangulación para $X_1 \sharp X_2$ dada por las triangulaciones de X_1 y X_2 . Para esta triangulación el número de vértices está dado por $V = V_1 + V_2 - 3$, el número de aristas $A = A_1 + A_2 - 3$ y el número de caras $C = C_1 + C_2 - 2$ y se tiene la fórmula deseada. \square

Usando este lema y haciendo inducción sobre el género g de una superficie compacta y orientable S_g se tiene:

$$\chi(S_g) = 2 - 2g.$$

La fórmula de Riemann-Hurwitz.

En este capítulo demostraremos la fórmula de Riemann-Hurwitz, presentaremos a las curvas proyectivas lisas (planas), y daremos un ejemplo de ellas; la curva de Fermat de grado d definida como los ceros del polinomio homogéneo $x^d + y^d + z^d$. Por último, con ayuda de la fórmula de Riemann-Hurwitz demostraremos una fórmula que relaciona el grado del polinomio que define a la curva de Fermat y su género.

Hemos estudiado hasta aquí cuatro números asociados a las superficies de Riemann compactas y los mapeos holomorfos entre ellas: el género, la característica de Euler de una superficie X , el grado de una aplicación holomorfa f entre superficies de Riemann y la multiplicidad de f en un punto. A continuación presentamos la fórmula de Riemann-Hurwitz que da una relación entre estos números.

TEOREMA 3.1 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo no constante entre superficies de Riemann compactas de grado d . Entonces:*

$$(7) \quad 2 - 2g(X) = d(2 - 2g(Y)) + \sum_{p \in X} (1 - \text{mult}_p(f)).$$

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar este teorema haremos uso del siguiente lema.

LEMA 3.2. *Si $f : X \rightarrow Y$ es un mapeo holomorfo entre superficies de Riemann compactas, supongamos que $\deg(f) = d$ y $\{\varphi_i : T_i \rightarrow Y\}_{i=1}^n$ es una triangulación de Y tal que los vértices de la triangulación contienen a S el conjunto de puntos de bifurcación de f , además cada arista contiene a sólo un punto de la bifurcación, entonces la imagen inversa de los triángulos en Y bajo f forman una triangulación en X .*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Las imágenes inversas de vértices de Y bajo f son claramente vértices en X , sea T una arista o una cara y φ el homeomorfismo de T con el intervalo o el triángulo. Sea T° la correspondiente arista abierta o cara abierta. Dado que cada punto de S es un vértice, $T^\circ \cap S = \emptyset$, entonces por el enunciado 3 del Teorema 1.20 f es un n cubriente de T° . Además T° es simplemente conexo, así f es un cubriente trivial aplicando el Corolario 1.16, así la preimagen de cada arista o cara abierta es la unión ajena de d aristas o d caras U_1, \dots, U_d . En el caso donde $T \cap S = \emptyset$, T sigue

siendo cubierta por f trivialmente, entonces la cerradura de cada componente U_i mapea a T y es homeomorfo con una arista o una cara a través de la composición $\varphi \circ f$. Si $T \cap S$ es no vacío, entonces contiene un punto Q , y $T \setminus \{Q\}$ es cubierto trivialmente por f y su preimagen es la unión ajena de $U_1 \setminus \{P\}, \dots, U_d \setminus \{P\}$, donde cada $U_i \setminus \{P\}$ es homeomorfo a través de $\varphi \circ f$ a una arista o una cara con un punto removido. Además, como T contiene sólo un punto de bifurcación, $\varphi \circ f$ se extiende a una biyección de T a un intervalo o triángulo, haciendo $\varphi \circ f(P) = \varphi(Q)$. Para demostrar que es un homeomorfismo, supongamos la situación del Lema de la forma local normal alrededor de P . Entonces, $|w_n| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |w_n^{\text{mult}_f(P)}| \rightarrow 0$ y $P_n \rightarrow P \Leftrightarrow \phi(P_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow f(P_n) \rightarrow Q$. Luego, U_i es homeomorfo al intervalo o triángulo y la preimagen de T bajo f son d aristas o d caras. La cerradura de estos triángulos cubren a X , por lo que forman una triangulación. \square

Sea τ una triangulación de Y , podemos refinarla para que los puntos de bifurcación de f sean vértices de τ . Supongamos que τ tiene V vértices A aristas y C caras. τ se levanta a una triangulación vía el mapeo f , y supongamos que tiene V' vértices, A' aristas y C' caras. Por el lema anterior cada arista se levantan en d aristas y cada cara se levanta en d caras. Sea v un vértice de Y , Y sea S el conjunto de puntos de ramificación de f y $R = f(S)$. Fijemos un vértice $v \in Y$. El número de preimagenes de v bajo f es $\#f^{-1}(v)$ y podemos reescribirlo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \#f^{-1}(v) &= \sum_{p \in f^{-1}(v)} 1, \\ &= d + \sum_{p \in f^{-1}(v)} (1 - \text{mult}_p(f)). \end{aligned}$$

Entonces el número total de preimagenes de vértices de τ , el cual es el número de vértices V' de X es:

$$\begin{aligned} V' &= \sum_{v \text{ vértice en } Y} (d + \sum_{p \in f^{-1}(v)} (1 - \text{mult}_p(f))), \\ &= \sum_{v \text{ vértice en } Y} d + \sum_{v \text{ vértice en } Y} \sum_{p \in f^{-1}(v)} (1 - \text{mult}_p(f)), \\ &= dV + \sum_{p \text{ vértice en } X} (1 - \text{mult}_p(f)). \end{aligned}$$

Luego calculamos la característica de Euler de X :

$$\begin{aligned} 2 - 2g(X) &= V' - A' + C', \\ &= dV + \sum_{p \text{ vértice en } X} (1 - \text{mult}_p(f)) - dA + dC, \\ &= d(2 - 2g(Y)) + \sum_{p \in X} (1 - \text{mult}_p(f)). \end{aligned}$$

Donde $g(X)$ denota el género de X . La última igualdad se sigue de que todo punto de ramificación de f es vértice de X \square

Los corolarios siguientes son consecuencia inmediata de la fórmula de Riemann-Hurwitz.

COROLARIO 3.3. *Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo holomorfo no constante entre superficies de Riemann compactas, entonces:*

$$g(Y) \leq g(X).$$

COROLARIO 3.4. *Si X y Y son superficies de Riemann de género uno, y $f : X \rightarrow Y$ es un mapeo holomorfo no constante. Entonces f es no ramificado.*

1. Curvas afines.

La gráfica de una función holomorfa definida en una región del plano complejo, tiene una estructura de superficie de Riemann heredada a partir del mapeo holomorfo que la define. Para probar esta afirmación hagamos las siguientes observaciones. Sea $V \subset \mathbb{C}$ una región del plano complejo, y sea f una función holomorfa definida en V . Consideremos la gráfica de f , como el subconjunto de \mathbb{C}^2 :

$$X = \{(z, f(z)) \mid z \in V\}.$$

Si dotamos a X con la topología de subespacio, y sea $\pi : X \rightarrow V$ la proyección en la primera entrada es un homeomorfismo, cuya inversa es mandar al punto $z \in V$ al par ordenado $(z, f(z))$. Entonces π es una carta compleja que cubre a X . Así $\{(X, \pi)\}$ es una atlas complejo para X , esto da una estructura de superficie de Riemann a X .

Una curva plana afín es en cierto sentido una generalización de la construcción de la gráfica de una función holomorfa f ; ya que localmente es la gráfica de una función holomorfa f definida en una región del plano complejo. Para precisar esta idea, consideremos un subconjunto X de \mathbb{C}^2 de manera que X sea localmente una gráfica pero no globalmente. Consideremos X un subconjunto de \mathbb{C}^2 definido por los ceros de un polinomio complejo en dos variables $f(z, w)$. Para garantizar que este conjunto es localmente la gráfica de una función, pediremos algunas condiciones, basadas en el *Teorema de la Función Implícita*.

TEOREMA 3.5 (Teorema de la función implícita). *Sea $P(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio, y sea $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = 0\}$ el conjunto de sus ceros. Sea (z_0, w_0) un punto en X . Suponga que $\partial P / \partial w(z_0, w_0) \neq 0$. Entonces existe un disco D_1 centrado en z_0 , y un disco D_2 centrado en w_0 y un mapeo holomorfo $\phi : D_1 \rightarrow D_2$ con $\phi(z_0) = w_0$ tal que:*

$$(8) \quad X \cap (D_1 \times D_2) = \{(z, \phi(z)) \mid z \in D_1\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para probar este teorema recordemos que si f es una función holomorfa en un conjunto abierto que contiene a la cerradura de

un disco D la cual no se anula en la frontera ∂D , entonces el número de soluciones de la ecuación $f(w) = 0$ en D , contando su multiplicidad, está dado por la integral sobre la frontera:

$$(9) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(w)}{f(w)} dw.$$

Si existe una única solución, w_1 está dado por la integral sobre la frontera

$$(10) \quad w_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{wf'(w)}{f(w)} dw.$$

Aplicamos estas fórmulas a la familia de funciones de la variable w : $P_z(w) = P(z, w)$, donde vemos a z como un parámetro. Primero tomamos $z = z_0$, entonces la hipótesis de que $\partial P / \partial w(z_0, w_0) \neq 0$ quiere decir que P'_{z_0} en w_0 no se anula. Por lo que P_{z_0} no es un polinomio constante, por otro lado P_{z_0} es una función holomorfa, por lo cual existe un disco D_2 centrado en w_0 tal que P_{z_0} no tiene otros ceros en la cerradura de D_2 . Como la frontera de D_2 es compacto, existe $\epsilon > 0$ tal que $|P_{z_0}| > 2\epsilon$ en ∂D_2 . Además, por continuidad de P , existe una $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|P(z, w) - P(z_0, w)| < \epsilon$. Sea $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$. Si $|P_z(w)| \leq \epsilon$ y $z \in D_1$, ya que $P_{z_0}(w)$ está fuera del disco de radio 2ϵ entonces la distancia de $P_z(w)$ a $P_{z_0}(w)$ es mayor o igual que ϵ , lo cual es una contradicción. Definimos la siguiente función:

$$(11) \quad g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \frac{P'_z}{P_z} dw.$$

La cual es continua. Si $z = z_0$, entonces $g(z_0) = 1$. Como g es una función continua del conexo D_1 a los enteros, entonces es constante y obtenemos que $P_z(w) = 0$ tiene una única solución para $w \in D_2$. Sabiendo esto, definimos para cada $z \in D_1$, $\phi(z)$ como la única raíz en D_2 de P_z . La fórmula (2.3) muestra que:

$$(12) \quad \phi(z) = \int_{\partial D_2} \frac{w}{P(z, w)} \frac{\partial P}{\partial w}(z, w) dw.$$

Que es holomorfa en la variable $z \in D_1$, y satisface (8). \square

Para el caso en que $\partial P / \partial z(z_0, w_0) \neq 0$ se tiene un resultado análogo.

DEFINICIÓN 3.6. Una *curva plana afín* es el conjunto de ceros de una función polinomial $f(z, w)$. Un polinomio es *no singular* en un cero p de f si alguna derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial z}$ o $\frac{\partial f}{\partial w}$ es no cero en p . Una curva plana afín X de f es *no singular* en p si f es no singular en p . Una curva es no singular o lisa, si es no singular en cada uno de sus puntos.

El teorema de la función implícita nos indica que cualquier curva plana afín lisa localmente se ve como la gráfica de una función holomorfa.

PROPOSICIÓN 3.7. *Sea X una curva plana afín lisa definida por un polinomio f , entonces las cartas definidas como en el Teorema 3.5 son compatibles.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f la función polinomial que define a X . Sean (D_1, π_z) y (D'_1, π_z) dos cartas como antes, tales que $V = D_1 \cap D'_1 \neq \emptyset$. Sea $p \in \pi_z(V)$, entonces: $\pi_z^{-1} \circ \pi_z^{-1}(z) = z$ que es la identidad y claramente es holomorfa. Análogamente si las cartas están dadas por la proyección en la segunda entrada. Sean (D_1, π_z) y (D'_1, π_w) dos cartas tales que $V = D_1 \cap D'_1 \neq \emptyset$, sea $p \in V$, tenemos que existe una función holomorfa $\phi : V \rightarrow \phi(V)$ tal que X en V es la gráfica de ϕ . Entonces $\pi_z^{-1}(z) = (z, \phi(z))$ para $z \in V$. Entonces la composición $\pi_z \circ \pi_w(z) = \phi(z)$ para toda $z \in V$, la cual es holomorfa. \square

Para saber si una curva plana afín lisa X es una superficie de Riemann hace falta probar la conexidad de X , pero esta no es inmediata. Por ejemplo, si X está dado por un polinomio f producto de dos factores lineales (por ejemplo $f(z, w) = (z+2w)(z+2w+1)$) entonces X es la unión de dos rectas complejas, que cada una es una superficie de Riemann, pero su unión no es conexa.

Podríamos suponer que f es un *polinomio irreducible*, esto es que f no puede ser factorizado no trivialmente como $f = gh$, donde g y h son polinomios no constantes.

TEOREMA 3.8. *Si f es un polinomio irreducible, entonces su conjunto de ceros X es conexo. Así, si f es no singular e irreducible, X es una superficie de Riemann.*

La prueba de este teorema no es elemental, requiere de maquinaria de la geometría algebraica. No demostraremos en este trabajo, pero puede revisar en [9].

2. Curvas planas proyectivas lisas.

A continuación definiremos las curvas planas proyectivas lisas que son el conjunto de ceros en \mathbb{CP}^2 de un polinomio homogéneo, no singular e irreducible en tres variables, para ello revisaremos unas definiciones previas.

La recta proyectiva compleja \mathbb{CP}^1 es de los primeros ejemplos de las superficies de Riemann. En seguida presentamos una generalización de \mathbb{CP}^1 .

DEFINICIÓN 3.9. El *plano proyectivo complejo* \mathbb{CP}^2 es el conjunto de subespacios lineales de dimensión 1 de \mathbb{C}^3 .

Si (x, y, z) es un vector no cero en \mathbb{C}^3 , su generado es denotado por $[x : y : z]$ es un punto en el plano proyectivo; cualquiera puede ser escrito de esta forma. Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, entonces:

$$[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z].$$

Entonces \mathbb{CP}^2 puede ser visto como el espacio cociente de $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ por la acción multiplicativa de \mathbb{C}^* . Sea $\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^2$ el mapeo cociente que

manda a cada elemento de $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ a su clase de equivalencia, entonces \mathbb{CP}^2 tiene la topología cociente. Las entradas en la notación $[x : y : z]$ son llamadas coordenadas homogéneas del correspondiente punto en el plano proyectivo, estas no son únicas.

El espacio \mathbb{CP}^2 puede ser cubierto por tres conjuntos abiertos:

(13)

$$U_0 = \{[x : y : z] \mid x \neq 0\}; U_1 = \{[x : y : z] \mid y \neq 0\}; U_2 = \{[x : y : z] \mid z \neq 0\}.$$

Consideremos el mapeo $\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido por mandar a cada $[x : y : z] \in U_0$ a $(y/x, z/x)$, observemos que está bien definido, es un homeomorfismo cuya inversa es $\psi_0 : \mathbb{C}^2 \rightarrow U_0$ que manda a cada $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ a $[1 : a : b] \in U_0$. Si definimos $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^2$, para $i = 1, 2$ de manera similar, estos nuevamente son homeomorfismos. Sean $[x : y : z], [x' : y' : z']$, dos puntos distintos \mathbb{CP}^2 , si ambos están en U_i para alguna $i = 0, 1, 2$, ya que U_i es homeomorfo a \mathbb{C}^2 vía ϕ_i ; entonces U_i es Hausdorff y podemos encontrar vecindades ajenas de $[x : y : z]$ y $[x' : y' : z']$ en U_i respectivamente. Además, U_i es abierto en \mathbb{CP}^2 , por lo que estas vecindades, son también vecindades de \mathbb{CP}^2 . Si $[x : y : z], [x' : y' : z']$ están en diferentes U_i . Por simetría podemos suponer que $[x : y : z] \in U_0 \setminus U_1$ y $[x' : y' : z'] \in U_1 \setminus U_0$ entonces hay representantes de la forma $[1 : 0 : z] \in U_0$ y $[0 : 1 : z'] \in U_1$. Consideremos el conjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| < 1\}$; entonces $\phi_0^{-1}(V)$ y $\phi_1^{-1}(V)$ son vecindades abiertas de los puntos $[1 : 0 : z]$ y $[0 : 1 : z']$ respectivamente. Si existiera $[x : y : z] \in \phi_0^{-1}(V) \cap \phi_1^{-1}(V)$ entonces $x \neq 0$ y $y \neq 0$ y $\phi_0[x : y : z], \phi_1[x : y : z] \in V$ luego $|y/x| < 1$ y $|x/y| < 1$, que es una contradicción. Análogamente se revisan los demás casos. Entonces \mathbb{CP}^2 es un espacio Hausdorff. Sea $D = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| \leq 1, |w| \leq 1\}$ luego

$$\mathbb{CP}^2 = \bigcup_{i=0}^2 \phi_i^{-1}(D),$$

lo que prueba que \mathbb{CP}^2 es compacto.

DEFINICIÓN 3.10. Un *polinomio homogéneo* F es un polinomio en el que cada monomio tiene el mismo grado en las variables, este grado es el grado del polinomio homogéneo.

Por ejemplo, $x^2y - 2xyz + 3z^3$ es homogéneo de grado 3 en dos variables. Un polinomio homogéneo $F(x, y, z)$ no está bien definido al evaluarlo en un elemento $[x_0 : y_0 : z_0] \in \mathbb{CP}^2$. Veamos:

$$F[\lambda x_0 : \lambda y_0 : \lambda z_0] = \lambda^d F[x_0 : y_0 : z_0]$$

y

$$[\lambda x_0 : \lambda y_0 : \lambda z_0] = [x_0 : y_0 : z_0].$$

Aunque $X = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 \mid F(x, y, z) = 0\}$ está bien definido. Más aún, X es un subconjunto cerrado de \mathbb{CP}^2 . Si $X_i = X \cap U_i$ es no vacío entonces X_i es exactamente una curva afín plana cuando la transportamos a \mathbb{C}^2 . Por

ejemplo, en U_0 , es decir, cuando $x \neq 0$ podemos transportar a \mathbb{C}^2 de la siguiente manera:

$$(14) \quad X_0 = X \cap U_0 \cong \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid F(1, a, b) = 0\},$$

el cual es una curva afín plana descrita por el polinomio $f(a, b) = F(1, a, b)$.

DEFINICIÓN 3.11. Un polinomio homogéneo $F(x, y, z)$ es *no singular* si no existen soluciones comunes al sistema de ecuaciones

$$(15) \quad F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

en el plano proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Probaremos que la condición de no singularidad del polinomio F es suficiente para dar a X una estructura de superficie de Riemann.

LEMA 3.12. *Supongamos que $F(x, y, z)$ es un polinomio homogéneo de grado d . Entonces F es no singular si y sólo si para cada $i = 0, 1, 2$, $X_i \neq \emptyset$ es una curva plana afín lisa en \mathbb{C}^2 .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que una de las cartas X_i no es suave; por simetría podemos suponer que X_0 no es lisa. Definimos $f(u, v) = F(1, u, v)$, entonces X_0 está definido por $f = 0$ en \mathbb{C}^2 . Por hipótesis X_0 no es lisa, existe una solución común (u_0, v_0) del sistema de ecuaciones:

$$(16) \quad f = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Probaremos que $[1 : u_0 : v_0]$ es una solución del sistema (15). Para esto, veamos que:

$$F[1 : u_0 : v_0] = f(u_0, v_0) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}[1 : u_0 : v_0] = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}[1 : u_0 : v_0] = \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = 0, \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}[1 : u_0 : v_0] = (dF - u_0 \frac{\partial F}{\partial y} - v_0 \frac{\partial F}{\partial z})[1 : u_0 : v_0] = 0.$$

La última igualdad se sigue de que F es un polinomio homogéneo que satisface la fórmula de Euler:

$$(17) \quad F = \frac{1}{d} \sum_i x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

El regreso de este teorema es fácil de ver haciendo cálculos similares. \square

LEMA 3.13. *Un polinomio homogéneo, no singular es automáticamente irreducible.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que P es un polinomio homogéneo reducible de grado d , es decir, existen polinomios F y G tales que $P = FG$, y ninguno de los dos es un polinomio constante. Si:

$$F = F_0 + F_1 + \dots + F_l \quad y$$

$$G = G_0 + G_1 + \dots + G_k.$$

Donde cada F_i, G_j denota la componente homogénea de grado i y j correspondiente. Observemos que al considerar el producto FG sólo queda la componente homogénea de grado d , y las demás son cero. Con lo que F y G son también polinomios homogéneos de grado estrictamente menor que d . Por otro lado, las parciales de P con respecto a cada variable son:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}G + \frac{\partial G}{\partial x}F;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}G + \frac{\partial G}{\partial y}F;$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z}G + \frac{\partial G}{\partial z}F.$$

Por el Teorema de Bézout (Revise [9, p. 31]), existe un punto $p_0 = [x_0 : y_0 : z_0] \in \mathbb{CP}^2$ tal que $F(p_0) = 0 = G(p_0)$. Entonces p_0 es un punto singular de P .

□

TEOREMA 3.14. *Sea X una curva plana proyectiva lisa, entonces las estructuras complejas de los abiertos X_i que cubren a X tienen estructuras complejas compatibles.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un punto $p_0 = [x_0 : y_0 : z_0] \in X_0$, con $x_0 \neq 0$. Recordemos que las cartas alrededor de p_0 en X_0 están dadas por las proyecciones en la primera o segunda entrada y en nuestro caso, vía el homeomorfismo ϕ_0 están dadas por los cocientes y/x y z/x para X_0 . Análogamente para los otros abiertos X_i . Supongamos que $p_0 \in X_0 \cap X_1$, con $x_0, y_0 \neq 0$. Supongamos que $\phi_0[x : y : z] = y/x$ es la carta alrededor de p_0 en X_0 y $\phi_1[x : y : z] = x/y$ es la carta alrededor de p_0 en X_1 . Debemos probar, entonces que $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$ es holomorfa, por otro lado $\phi_0^{-1}(w) = [1 : w : h(w)]$ para alguna función holomorfa h (recuerde que localmente X_0 es la gráfica de h). Entonces, $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(w) = h(w)/w$ que es holomorfa ya que $w \neq 0$. Análogamente se prueba para las demás cartas. □

NOTA. Daremos por cierto que las curvas proyectivas planas lisas son necesariamente conexas. El lector interesado puede revisar en la demostración de este hecho en el libro [9].

Así las curvas planas proyectivas lisas son superficies de Riemann, además por ser subconjuntos cerrados de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, entonces son compactas.

3. La curva de Fermat.

El polinomio homogéneo $F(x, y, z) = x^d + y^d + z^d$ define una curva algebraica plana lisa llamada *la curva de Fermat de grado d* , por el análisis hecho en la sección anterior, es una superficie de Riemann compacta. Usando el Teorema 3.1 hallaremos una fórmula explícita para el género de la curva de Fermat de grado d .

LEMA 3.15. *Sea X una curva plana afín definida por $f(x, y) = 0$. Definimos $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}$ como $\pi(x, y) = x$. Entonces π es ramificado en $p \in X$ sí y sólo sí $\partial f / \partial y(p) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $\partial f / \partial y(p) \neq 0$. Entonces π es un mapeo coordenado alrededor de p y ciertamente tiene multiplicidad 1. Ahora, supongamos que $\partial f / \partial y = 0$, como X es lisa, entonces $\partial f / \partial x(p) \neq 0$, así la función $[x, y] \mapsto y$ es una carta alrededor de p . Por el teorema de la función implícita, en una vecindad V de p , X es localmente la gráfica de una función holomorfa $g(y)$. Entonces $f(g(y), y)$ es idénticamente cero en V . Tomando la derivada con respecto a y , vemos que:

$$(18) \quad \frac{\partial f}{\partial x} g'(y) + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

en V . Por la suposición que hicimos el segundo término es cero al evaluarlo en p , y ya que $\partial f / \partial x(p) \neq 0$, entonces $g'(y_0) = 0$. Pero $y \mapsto g(y)$ es exactamente la fórmula local para el mapeo π , por el Lema 1.18 π es ramificado en p . \square

Del lema anterior se sigue directamente que si X es una curva plana proyectiva lisa definida por un polinomio homogéneo $F(x, y, z) = 0$ y el mapeo $G : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ definido por la proyección a la recta $z = 0$: $G[x : y : z] = [x : y]$. Entonces G es ramificado en $p \in X$ sí y sólo sí $\partial F / \partial z(p) = 0$. Este resultado se sigue directamente del lema anterior.

LEMA 3.16. *Sea X la curva de Fermat de grado d . El mapeo $G : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ definido como $G[x : y : z] = [x : y]$ es un mapeo holomorfo de grado d con d puntos de ramificación cada uno de multiplicidad d .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $[1 : 0] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, entonces los puntos de la forma $[1 : 0 : z] \in X$ bajo π van a dar a $[1 : 0]$ y z cumple: $z^d + 1 = 0$, por el Lema 3 los puntos de la forma $[1 : 0 : z]$ no son puntos de ramificación de G . Entonces por el Teorema 1.20 se tiene:

$$\deg(G) = \sum_{p \in G^{-1}[1:0]} \text{mult}_p(G) = \sum_{p \in G^{-1}[1:0]} 1 = d.$$

A continuación, hallaremos la multiplicidad de cada punto de ramificación. Por el lema anterior, los puntos de ramificación de G son de la forma $[1 : y : 0]$ y cumplen $1 + y^d = 0$, entonces G tiene d puntos de ramificación.

Ahora, hallaremos la multiplicidad de cada punto de ramificación. Sea $p = [1 : y : 0]$ un punto de ramificación, entonces $[1 : y : z] \mapsto z$ y $[1 : y] \mapsto y$ son cartas alrededor de p y $G(p)$ respectivamente. Pero la inversa de la primera carta esta dada por $u \mapsto [1 : h(u) : u]$. Por lo que G en coordenadas locales es $u \mapsto h(u)$. Para $d = 1$, $h(u) = -u - 1$ para $d > 1$, $h(u) = (-u - 1)^{1/d}$. Si hallamos la derivada con respecto a u de h obtenmos:

$$(19) \quad h(u) = (-u^d - 1)^{1/d-1} u^{d-1}.$$

Que tiene orden $d - 1$. Aplicando el Teorema 1.18 se tiene $\text{mult}_p(F) = d$. \square

Aplicando este lema y la fórmula de Riemann-Hurwitz (3.1) se obtiene el siguiente teorema.

TEOREMA 3.17. *La curva de Fermat de grado d es una superficie de Riemann compacta de género g dado por la fórmula siguiente*

$$(20) \quad g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Sin embargo, la fórmula (20) es un poco más general, y es conocida como la Fórmula de Plücker para curvas proyectivas planas lisas.

LEMA 3.18. *Sean X una curva proyectiva plana lisa de grado d y V_d la curva de Fermat de grado d . Entonces, X y V_d son isotópicas.*

DEMOSTRACIÓN. Daremos un esbozo de la demostración. Sea \mathcal{P} el espacio de los coeficientes de todos los polinomios homogéneos en 3 variables complejas de grado d . La ecuación homogénea general de grado d en 3 variables complejas es:

$$\sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = d} a_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} z_0^{\alpha_0} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} = 0.$$

Esta ecuación define un polinomio, y por lo tanto una curva proyectiva plana X . Por otro lado, dos polinomios homogéneos P y Q tales que $P = \lambda Q$ con $\lambda \in \mathbb{C}^*$ definen la misma curva proyectiva y dado un polinomio P no todos los coeficientes de P pueden ser cero para que defina una curva en \mathbb{CP}^2 . Por lo que la familia $\mathcal{C}(2, d)$ de todas las curvas proyectivas planas forman un espacio proyectivo complejo de dimensión $N = \binom{d+2}{2} - 1$ correspondiente al número de particiones del grado d en tres variables. En \mathcal{P} , los polinomios que definen una superficie singular en \mathbb{CP}^2 forman una subvariedad cerrada de codimensión compleja uno. Así, este complemento Ω es conexo. Entonces, cualquier curva lisa $X \subset \mathbb{CP}^2$ de grado d es isotópica a la curva de Fermat de grado d . \square

Aplicando el Lema 3.18 y la Fórmula (20) se tiene el siguiente corolario.

COROLARIO 3.19 (Fórmula de Plücker). *Una curva proyectiva plana lisa de grado d tiene género*

$$(21) \quad g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

La desigualdad de Hurwitz.

En este capítulo nos preguntamos por el conjunto de los automorfismos conformes que preservan la orientación de una superficie de Riemann compacta Σ denotado por $\text{Aut}(\Sigma)$. Veremos que si el género de Σ es mayor a dos, entonces dicho grupo tiene orden finito. Más aún, existe la llamada *desigualdad de Hurwitz* que proporciona una cota para el orden del grupo en términos del género de Σ . Por último estudiaremos la curva cuártica de Klein, como ejemplo de una superficie que realiza la cota.

Dada una superficie de Riemann Σ consideremos el conjunto de los automorfismos conformes que preservan orientación denotado por $\text{Aut}(\Sigma)$ con la operación composición. Entonces $(\text{Aut}(\Sigma), \circ)$ es un grupo. Observe que $f \in \text{Aut}(\Sigma)$ coincide exactamente con los biholomorfismos de Σ en sí mismo. Por ello usaremos ambos términos indistintamente.

1. Automorfismos de la esfera de Riemann.

Para determinar el grupo de automorfismos de la esfera de Riemann estudiaremos algunos resultados previos de las funciones meromorfas. Además, estudiaremos las transformaciones de Möbius.

Sabemos que cualquier función racional definida en la esfera de Riemann es una función meromorfa, el siguiente teorema asegura que cualquier función meromorfa definida en $\widehat{\mathbb{C}}$ es una función racional.

TEOREMA 4.1. *Cualquier función meromorfa definida en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ es una función racional.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función meromorfa en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Dado que $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacta, entonces f tiene un número finito de ceros y polos en el plano complejo, y suponga que $\text{ord}_{z=\lambda_i}(f) = e_i$. Considere la función racional:

$$(22) \quad r(z) = \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i}.$$

la cual tiene el mismo número de ceros y polos, y el mismo orden en cada uno. Sea $g(z) = f/r(z)$, entonces g es una función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$ que no tiene ni ceros ni polos en el plano complejo. Entonces, g no es suprayectiva, por lo tanto es constante y f es una función racional. \square

LEMA 4.2. *Sea f una función meromorfa sobre la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Entonces*

$$(23) \quad \sum_{x \in \widehat{\mathbb{C}}} \text{ord}_x(f) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Del Teorema 1.20 se tiene que

$$\sum_{p \in f^{-1}(0)} \text{ord}_p(f) = \text{deg}(f) = - \sum_{p \in f^{-1}(\infty)} \text{ord}_p(f).$$

Por lo tanto, se sigue la igualdad (23). \square

Dada una matriz A de 2×2 con entradas en \mathbb{C} no singular, podemos asociarle una función meromorfa en la esfera de Riemann de manera natural, dicha función es llamada una transformación de Möbius.

LEMA 4.3. *Sea $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ definimos una transformación*

$$T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

El mapeo $A \mapsto T_A$ depende solamente de la clase de equivalencia A bajo la relación $A \sim B$ si y sólo si $A = \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{C}^$. En otras palabras, la familia de todas las transformaciones de Möbius es:*

$$(24) \quad \text{PSL}(2, \mathbb{C}) = \text{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm id\}.$$

Tenemos que $T_A \circ T_B = T_{AB}$ y $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$. En particular toda transformación de Möbius es un automorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, y $B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ ambas matrices en $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Entonces

$$\begin{aligned} T_A \circ T_B(z) &= \frac{a(T_B(z)) + b}{c(T_B(z)) + d}, \\ &= \frac{a\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) + b}{c\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) + d}, \\ &= \frac{(aa' + bc')z + (ab' + d'b)}{(ca' + c'd)z + (cb' + dd')}, \\ &= T_{AB}(z). \end{aligned}$$

Por otro lado, $AA^{-1} = I$, donde I denota la matriz identidad de 2×2 , y debido al anterior cálculo es claro que $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$. En particular T_A tiene inversa conforme y es entonces un elemento de $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$.

Ahora supongamos que $T_A = T_B$ y $A, B \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, entonces

$$\frac{dT_A}{dz}(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{dT_B}{dz}(z) = \frac{a'd' - b'c'}{(c'z + d')^2},$$

pero $ad - bc = 1 = a'd' - b'c'$ luego $cz + d = \pm(c'z + d')$. Por lo tanto A y B son las mismas matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ salvo posiblemente por la elección del signo, que se establece en (24). \square

Este lema prueba que cualquier transformación de Möbius es un automorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$. Ahora consideremos $f \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, es en particular, una función meromorfa en $\widehat{\mathbb{C}}$, por el Lema 4.1 f es una función racional; $f = p/q$. Por otro lado, cualquier biholomorfismo entre superficies de Riemann compactas tiene grado 1. Entonces p y q tienen grado 1. Es decir, f es una transformación de Möbius. Hemos así demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA 4.4. *El grupo de automorfismos conformes de la esfera de Riemann es el conjunto de transformaciones de Möbius. Por lo tanto*

$$(25) \quad \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C}).$$

Un resultado interesante de las transformaciones de Möbius es que si tomamos tres puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ distintos de ∞ , z_1 , z_2 , z_3 . Existe una única transformación de Möbius T tal que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ y $T(z_3) = \infty$ dada por:

$$(26) \quad T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}.$$

Si $z_i = \infty$ para alguna $i = 1, 2, 3$ se tienen las siguientes transformaciones de Möbius:

$$(27) \quad T(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} \quad \text{si } z_1 = \infty, \quad T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \quad \text{si } z_2 = \infty,$$

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{si } z_3 = \infty.$$

Es decir, si tomamos dos tercias de puntos z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 existe una única transformación de Möbius tal que $T(z_j) = w_j$ para $j = 1, 2, 3$. En otras palabras, a cada tercia ordenada de puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$ le podemos asignar una única transformación de Möbius, o bien, un elemento de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$.

A continuación, veremos algunos subgrupos de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ como grupos de automorfismos de subconjuntos particulares del plano complejo. Comenzaremos por estudiar el grupo de automorfismos conformes del plano complejo.

PROPOSICIÓN 4.5. *El conjunto de automorfismos conformes del plano son precisamente las transformaciones lineales conformes e invertibles, es decir:*

$$(28) \quad \text{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si f es una transformación lineal conforme e invertible, obviamente es un automorfismo conforme del plano. Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, podemos extender esta función continuamente a $\widehat{\mathbb{C}}$, definiendo $f(\infty) = \infty$. Por el Teorema de extensión de Riemann, se extiende a un automorfismo de

la esfera de Riemann, que fija a ∞ . Se sigue de (27) que $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$. \square

A continuación, caracterizamos las transformaciones de \mathbb{D}^2 en sí mismo, antes de ello, enunciamos el Lema de Schwarz.

LEMA 4.6 (Lema de Schwarz). *Sea $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con*

1. $|f(z)| \leq 1$ para $z \in \mathbb{D}^2$,
2. $f(0) = 0$.

Entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}^2$. Si $|f'(0)| = 1$ o $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$ entonces existe $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$ tal que $f(z) = cz$ para todo $z \in \mathbb{D}^2$.

Consideremos una transformación de Möbius

$$(29) \quad \varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

donde a es un número complejo tal que $|a| < 1$. Esta transformación es holomorfa en $|z| < |a|$, entonces f es holomorfa en un abierto que contiene a \mathbb{D}^2 .

PROPOSICIÓN 4.7. *Si $|a| < 1$ entonces φ_a es inyectiva de \mathbb{D}^2 en sí mismo, el mapeo inverso de φ_a es φ_{-a} , $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2$ y $\varphi_a'(a) = (1 - |a|^2)^{-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$, tenemos que la composición:

$$\begin{aligned} \varphi_a \circ \varphi_{-a}(z) &= \varphi_a\left(\frac{z + a}{1 + \bar{a}z}\right) \\ &= \frac{\frac{z+a}{1+\bar{a}z} - a}{1 - \bar{a}\frac{z+a}{1+\bar{a}z}} \\ &= \frac{1 + |a|^2}{1 + |a|^2} z \end{aligned}$$

Análogamente $\varphi_{-a} \circ \varphi_a(z) = z$, por lo que $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$. Probaremos que $|\varphi_a(z)| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| < 1 \\ \Leftrightarrow &(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) < (1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z}) \\ \Leftrightarrow &|z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \\ \Leftrightarrow &0 < 1 - |a|^2 - |z|^2 + |a|^2|z|^2 \\ \Leftrightarrow &0 < (1 - |a|^2)(1 - |z|^2) \\ \Leftrightarrow &|z| < 1 \end{aligned}$$

La última equivalencia se debe a que $|a| < 1$. Es decir, $\varphi_a : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$. Para probar que $\varphi_a(\partial\mathbb{D}^2) = \partial\mathbb{D}^2$, sea $\theta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} |\varphi_a(e^{i\theta})| &= \left| \frac{e^{i\theta} - a}{1 - \bar{a}e^{i\theta}} \right|, \\ &= \left| \frac{e^{i\theta} - a}{e^{-i\theta} - a} \right|, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Es evidente que $\varphi_a(a) = 0$. Finalmente, si derivamos φ_a obtenemos:

$$\varphi'_a(z) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2},$$

Por lo tanto, $\varphi_a(0) = 1 - |a|^2$ y $\varphi'_a(a) = (1 - |a|^2)^{-1}$. \square

Sea $T : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $|T(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}^2$. Supongamos $|a| < 1$ y $T(a) = \alpha$ (entonces $|\alpha| < 1$ a menos de que T sea constante). Definamos

$$g = \varphi_\alpha \circ T \circ \varphi_{-a}$$

Notemos que $g : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $|g(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{D}^2$, $g(0) = 0$. Luego, g cumple las hipótesis del Lema de Schwarz. Entonces $|g'(0)| \leq 1$. Por otro lado, por la regla de la cadena tenemos que:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \varphi'_\alpha(\alpha)T'(a)\varphi'_{-a}(0) \\ &= \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - |\alpha|^2}T'(a) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(30) \quad |T'(a)| \leq \frac{1 - |T(a)|^2}{1 - |a|^2}.$$

Si $|g'(0)| = 1$ por el Lema de Schwarz se tiene que $g(z) = cz$. Por lo tanto:

$$(31) \quad T(z) = \varphi_{-\alpha}c\varphi_a(z).$$

PROPOSICIÓN 4.8. *Una función $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ es holomorfa y biyectiva. Sea $a \in \mathbb{D}^2$ tal que $f(a) = 0$. Entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| = 1$ y $f = c\varphi_a$.*

DEMOSTRACIÓN. Como f es holomorfa y biyectiva, existe $h : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ holomorfa y biyectiva tal que $h(f(z)) = z$ para $|z| < 1$. Aplicando la desigualdad (30) a f en a y a h en 0, tenemos que:

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{1 - |a|^2} \quad \text{y} \quad |h'(0)| \leq 1 - |a|^2.$$

Por otro lado, por la regla de la cadena $1 = h'(g(z))f'(z)$, luego $1 = h'(0)f'(a)$. Así $|f'(a)| = (1 - |a|^2)^{-1}$. Aplicando (31) obtenemos que:

$$f(z) = c\varphi_a(z).$$

□

Sea $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$ el hemiplano superior:

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\},$$

es al igual que los anteriores ejemplos, una superficie de Riemann. Y la transformación de Möbius

$$(32) \quad T(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

aplica conformemente \mathbb{H}^2 sobre \mathbb{D}^2 . Por lo tanto, si tomamos $f \in \text{Aut}(\mathbb{D}^2)$ entonces el mapeo $f \mapsto T^{-1} \circ f \circ T \in \text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ es un isomorfismo de grupos.

LEMA 4.9. *Una transformación de Möbius T deja invariante a \mathbb{H}^2 si y sólo si T tiene la forma*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{donde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ es claro que $T(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Sabemos que una transformación de Möbius queda determinada saber a dónde manda a tres puntos distintos de \mathbb{C} . Consideremos $0, 1, 2$ y sean $w_i = T(i) \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, 2$. Si consideramos $0, 1, 2 \in \mathbb{R}$ sabemos que existe una única transformación de Möbius que manda esta terna ordenada en $0, 1, \infty$, y es de la forma:

$$f(z) = \frac{-z}{z - 2}.$$

Por otro lado,

$$g(w) = \frac{(w - w_0)(w_1 - w_2)}{(w_0 - w_1)(w_2 - w)},$$

es la transformación que manda la terna w_0, w_1, w_2 en $0, 1, \infty$, entonces la composición $g^{-1} \circ f$ manda $0, 1, 2$ en w_0, w_1, w_2 y tiene coeficientes reales. Luego, por unicidad $T = g^{-1} \circ f$ y la proposición queda demostrada. □

Si denotamos por $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ al subgrupo de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ de las transformaciones de Möbius con coeficientes reales, obtenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 4.10. *Sea $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ el grupo de automorfismos conformes de \mathbb{H}^2 . Entonces:*

$$(33) \quad \text{Aut}(\mathbb{H}^2) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que vía la conjugación por la transformación (32) los grupos $\text{Aut}(\mathbb{D}^2) \cong \text{Aut}(\mathbb{H}^2)$. En particular, si $f \in \text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ entonces, existe $g \in \text{Aut}(\mathbb{D}^2)$ tal que $f = T^{-1} \circ g \circ T$. Observe que g y T son transformaciones de Möbius, entonces, por el Lema 4.3 f es una transformación de Möbius. Finalmente, aplicando el Lema 4.9 se obtiene el teorema. □

2. Automorfismos de toros complejos.

Los toros complejos construidos en el Capítulo 1, a partir de retículas del plano complejo, son superficies topológicas de género uno, en esta sección presentamos una manera de ver el grupo de automorfismos de estos objetos y mostraremos que el grupo de automorfismos conformes de estas superficies de Riemann dependen directamente de la retícula con la que fueron construidas.

PROPOSICIÓN 4.11. *Sean X y Y dos toros complejos dados por las retículas L y M respectivamente. Entonces cualquier mapeo holomorfo $F : X \rightarrow Y$ es inducido por un mapeo lineal $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma $G(z) = \gamma z + a$, donde γ es una constante tal que $\gamma L \subset M$. La constante a puede tomarse como cero sí y sólo sí F manda 0 en 0; en este caso el mapeo F es un homomorfismo de grupos. El mapeo holomorfo F es biholomorfismo sí y sólo sí $\gamma L = M$*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un número complejo $a \in \mathbb{C}$, y consideremos la traslación $z \mapsto z + a$. Este mapeo baja a un mapeo $T_a : Y \rightarrow Y$; más aún T_a depende solamente de $a \bmod M$, que es un punto $q \in Y$, y T_a es una automorfismo de Y con inversa T_{-a} . Tal automorfismo es usualmente denotado por T_q , y es llamado una traslación de Y ; que manda $y \in Y$ en $y + q$ (donde la suma es entendida como suma en el cociente). De acuerdo al Corolario 3.4 F es no ramificado. Como $F : X \rightarrow Y$ es un cubriente en el sentido topológico, y también la composición $F \circ \pi : \mathbb{C} \rightarrow Y$, además el dominio es simplemente conexo, entonces debe ser isomorfo al cubriente universal de Y (revise [25, pp. 492-493]), que es $\pi : \mathbb{C} \rightarrow Y$. Por esto último, existe un automorfismo $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$(34) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{G} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{F} & Y \end{array}$$

Entonces $G(z) = \gamma z + b$ por la Proposición 4.5, podemos asumir que $b = 0$, ya que la composición con una traslación por un punto de la retícula no afecta al mapeo proyección π , así $G(z) = \gamma z$.

Ya que G manda la retícula L en la retícula M , debemos tener que $\gamma L \subset M$. Esto en particular implica que el mapeo inducido por F es un homomorfismo de grupos.

Si F es un biholomorfismo es claro que $\gamma L = M$. Ahora, si $\gamma L = M$, entonces $\gamma^{-1}M = L$, entonces el mapeo $H(z) = \gamma^{-1}(z - a)$ induce un mapeo holomorfo de Y en Y que es el mapeo inverso de F . \square

Usando estas ideas y el siguiente lema podemos determinar todos los automorfismos de un toro complejo.

LEMA 4.12. *Sea $X = \mathbb{C}/L$ un toro complejo y F un automorfismo de X que fija a 0. Entonces F es inducido por un automorfismo del plano complejo de la forma $G(z) = \gamma z$, donde $\gamma = \pm 1$, o bien, γ es raíz cuarta o sexta de la unidad.*

DEMOSTRACIÓN. De la proposición anterior se sigue inmediatamente que F es inducido por una automorfismo del plano complejo, de la forma $G(z) = \gamma z$, para algún γ tal que $\gamma L = L$. Para probar que γ es una raíz segunda, cuarta o sexta de la unidad, lo probaremos en tres pasos.

Paso 1. Probaremos que $|\gamma| = 1$.

Sea $\omega \in L$, tal que $|\omega|$ es mínimo y no cero. Entonces:

$$|\omega| \leq |\gamma\omega| \Rightarrow 1 \leq |\gamma|.$$

Para probar la otra desigualdad, como $\gamma L = L$, existe $\omega' \in L$ tal que $\gamma\omega' = \omega$, así:

$$|\gamma\omega'| = |\omega| \leq |\omega'| \Rightarrow |\gamma| \leq 1.$$

Consecuentemente $|\gamma| = 1$.

Paso 2. Probaremos que γ es una raíz n -ésima de la unidad.

Sea $\omega \in L$ distinta de cero. Consideremos el siguiente conjunto

$$(35) \quad T = \{\gamma^k \omega \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Probaremos que T es finito. Como $\gamma L = L$, por inducción se tiene que $\gamma^k L = L$ y del paso 1 tenemos que $|\gamma| = 1$ luego T es subconjunto de $\partial D(0, |\omega|)$ un compacto y L un discreto. Por lo tanto, T es finito. Así existen $n, m \in \mathbb{Z}$, $m > n$, tales que $\gamma^m \omega = \gamma^n \omega$. Por lo tanto $\gamma^{m-n} = 1$, $m - n > 0$. Es decir γ es raíz de la unidad, para alguna $k \in \mathbb{N}$.

Paso 3. Probaremos que $k = 2, 4$ o 6 .

Si γ es real, entonces, $\gamma = \pm 1$ ya que $|\gamma| = 1$ y en tal caso $k = 2$. Supongamos que γ no es real. Sea $\omega \in L \setminus \{0\}$ tal que $|\omega|$ es mínimo. Entonces ω y $\gamma\omega$ generan a L sobre \mathbb{Z} . Por otro lado $\gamma^2\omega$ está también en L , entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\gamma^2\omega = a\gamma\omega + b\omega$. Dividiendo la anterior ecuación por ω , tenemos que γ satisface la ecuación cuadrática

$$(36) \quad z^2 - az - b = 0, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Si $k > 2$. Podemos suponer que γ es raíz primitiva de la unidad. Consideremos la extensión ciclotómica $\mathbb{Q}(\gamma)/\mathbb{Q}$, el polinomio mínimo de γ es

$$(37) \quad \Phi_k(x) = \prod_{1 \leq l \leq k, (l, k) = 1} (x - \exp(2\pi il/k)),$$

El cual tienen grado $\varphi(k)$, donde φ es la φ de Euler. Como γ anula a un polinomio cuadrático sobre \mathbb{Q} , se tiene que

$$[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}] = \deg \Phi_k(x) = \varphi(k) \leq 2.$$

Como $k > 2$ entonces $\varphi(k) \geq 2$, así $\varphi(k) = 2$. Luego, los únicos valores enteros k tales que $\varphi(k) = 2$ son $k = 3, 4, 6$. Pero $k \neq 3$, si $\gamma^3 = 1$ y γ no es real, no existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\gamma^2 - a\gamma - b = 0$, es decir, γ no es solución de (36).

Por último, si $a = -1, b = 0$, entonces $\gamma = i$ anula al polinomio (36). Si $a = 1$ y $b = -2$, entonces $\gamma = \exp(\pi i/3)$ es raíz de (36). Por lo tanto, $\gamma = \pm 1$ o bien γ es raíz cuarta, o sexta de la unidad.

□

Aplicando el lema anterior, se tiene inmediatamente la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.13. *Sea $X = \mathbb{C}/L$ un toro complejo. Entonces cualquier mapeo holomorfo $F : X \rightarrow X$ que fija 0 es inducido por una multiplicación por algún $\gamma \in \mathbb{C}$. Más aún, si F es un automorfismo, entonces:*

- a. L es una retícula cuadrada y γ es raíz cuarta de la unidad.
- b. L es una retícula hexagonal y γ es raíz sexta de la unidad.
- c. L no es hexagonal ni cuadrada y $\gamma = \pm 1$.

Si denotamos por $\text{Aut}_0(X)$ al grupo de automorfismos que fijan a 0, tenemos que:

$$\text{Aut}_0(X) \cong \mathbb{Z}_4 \text{ si } L \text{ es cuadrada;}$$

$$\text{Aut}_0(X) \cong \mathbb{Z}_6 \text{ si } L \text{ es hexagonal;}$$

$$\text{Aut}_0(X) \cong \mathbb{Z}_2 \text{ en otro caso.}$$

En particular, el toro complejo definido usando una retícula cuadrada no es biholomorfo a un toro complejo usando una retícula hexagonal. Claro que superficies de Riemann con diferente género no pueden ser biholomorfas, pero los toros complejos nos dan el primer ejemplo de superficies de Riemann no biholomorfas con el mismo género.

3. Acciones de grupo.

Una construcción básica para las superficies de Riemann es tomar una superficie de Riemann conocida y dividirla por la acción de un grupo. En esta sección desarrollaremos unas primeras ideas, para después probar que el orden de cualquier grupo finito que actúe holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta de género mayor o igual a dos, está dominado por una cota que depende del género. Este número es conocido como la *cota de Hurwitz*.

Sea G un grupo y X una superficie de Riemann. Supondremos que G es un grupo finito en toda esta sección:

Una acción de G en X es un mapeo $G \times X \rightarrow X$ que denotamos por $(g, p) \mapsto g \cdot p$, que satisface:

- a. $(gh) \cdot p = g(h \cdot p)$ para $g, h \in G$ y $p \in X$, y
- b. $e \cdot p = p$ para $p \in X$. donde $e \in G$ es la identidad.

Técnicamente, esta acción es llamada una *acción izquierda* de G en X . Para denotar que G actúa en X , escribiremos $G \curvearrowright X$.

Observemos que si fijamos $g \in G$, el mapeo que manda p a $g \cdot p$ es una biyección; con inversa el mapeo que manda p a $g^{-1} \cdot p$.

La *órbita* de un punto $p \in X$ es el conjunto $G \cdot p = \{g \cdot p | g \in G\}$. Si A es cualquier subconjunto de X , denotamos por $G \cdot A$ el conjunto de las órbitas de los puntos de A ; $G \cdot A = \{g \cdot a | g \in G \text{ y } a \in A\}$.

El *estabilizador* de un punto $p \in X$ es el subgrupo $G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$. El estabilizador es también llamado el *subgrupo de isotropía* de p .

Observe que los puntos en la misma órbita tienen estabilizadores conjugados; de hecho, $G_{g \cdot p} = gG_pg^{-1}$. Más aún, si G es un grupo finito, entonces el orden de las órbitas por el orden del estabilizador es igual al orden del grupo:

$$|G \cdot p| |G_p| = |G|.$$

El *núcleo* de una acción G en X es el subgrupo $K = \{g \in G \mid g \cdot p = p \text{ para todo } p \in X\}$. Es la intersección de todos los subgrupos estabilizadores. De hecho el núcleo es un subgrupo normal de G , y el grupo cociente G/K actúa en X con núcleo trivial y órbitas idénticas a las de la acción de G en X . Consecuentemente podemos suponer que el núcleo es trivial, una acción de este tipo es llamada una *acción efectiva*.

La acción es *continua*, respectivamente *holomorfa* si para cada $g \in G$ la biyección que manda p a $g \cdot p$ es continua, respectivamente holomorfa, el mapeo va de X en sí mismo. Si es holomorfa necesariamente es un automorfismo de X .

El espacio cociente X/G es el espacio de órbitas. Existe un mapeo cociente $\pi : X \rightarrow X/G$ que manda a cada punto en su órbita. Damos una topología a X/G declarando a cada subconjunto $U \subset X/G$ abierto sí y sólo sí $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X ; es la topología cociente en X/G . Claramente el mapeo cociente π es continuo; el mapeo cociente π es abierto si la acción es continua, en particular, si esta es holomorfa.

PROPOSICIÓN 4.14. *Sea G un grupo finito que actúa continuamente en una superficie de Riemann X , y el espacio de órbitas X/G tiene la topología cociente. Entonces los siguientes enunciados son válidos.*

- a. *El mapeo cociente $\pi : X \rightarrow X/G$ es abierto,*
- b. *X/G es Hausdorff,*
- c. *X/G es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar a. escogamos un subconjunto abierto A de X , como X/G tiene la topología cociente, debemos probar que $\pi^{-1}(\pi(A))$ es abierto en X . Basta observar que

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G_p} g \cdot A,$$

donde cada $g \cdot A$ es abierto en X ; ya que g es un homeomorfismo.

Para probar b. tomemos dos puntos distintos $G \cdot x$ y $G \cdot y$ de X/G , debemos demostrar que existen vecindades ajenas V y W de $G \cdot x$ y $G \cdot y$ respectivamente. Como G es finito, entonces $G \cdot x = \{g_1 \cdot x, \dots, g_n \cdot x\}$ y $G \cdot y = \{g_1 \cdot y, \dots, g_n \cdot y\}$. Como X es Hausdorff existen vecindades V_i de $g_i \cdot y$ y W_i de $g_i \cdot x$ y para $i = 1, \dots, n$ tales que $V_i \cap W_j = \emptyset$ para cualquier pareja (i, j) . Consideramos $V' = \bigcap_{i=1}^n (g_i^{-1}V_i)$ y $W' = \bigcap_{i=1}^n (g_i^{-1}W_i)$. Entonces $V = G \cdot V'$ y $W = G \cdot W'$ son vecindades de $G \cdot x$ y $G \cdot y$ respectivamente

en X/G . Las vecindades V y W son ajenas; de existir $G \cdot u \in V \cap W$, luego $g_i \cdot u \in \cap_{i=1}^n (g_i^{-1}V_i)$ y $g_j \cdot u \in \cap_{i=1}^n (g_i^{-1}W_i)$ para alguna pareja (i, j) , consecuentemente $u \in V_i \cap W_j$ que es una contradicción. Por lo tanto X/G es Hausdorff.

Finalmente, c. se sigue de que X es conexo y π es continua y suprayectiva. \square

Nuestro objetivo siguiente es dar una estructura compleja en X/G tal que el mapeo cociente π sea un mapeo holomorfo. Para entender este proceso, debemos entender los estabilizadores un poco mejor.

PROPOSICIÓN 4.15. *Sea G un grupo que actúa holomorfamente y efectivamente en una superficie de Riemann X , y un punto p de X . Suponga que el subgrupo estabilizador G_p es finito. Entonces G_p es un grupo cíclico de orden finito. En particular, si G es finito, todos los estabilizadores son subgrupos cíclicos.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos coordenadas locales z alrededor de p . Para cualquier $g \in G_p$, escribimos $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)z^n$; Esta serie de potencias no tiene término constante ya que $g(p) = p$. Más aún, observemos que $a_1(g) \neq 0$, dado que g es un automorfismo de X y tiene entonces multiplicidad 1 en todo punto, en particular en p .

Considere la función $a_1 : G_p \rightarrow \mathbb{C}^*$. Es un homomorfismo de grupos, para probarlo calculemos $a_1(gh)$ con la serie de potencias para $g(h(z))$, y ésta es:

$$\begin{aligned} g(h(z)) &= g\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(h)z^n\right); \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(h)z^n\right)^m; \\ &= a_1(g)a_1(h)z + \text{otros términos de grado mayor.} \end{aligned}$$

Entonces $a_1(gh) = a_1(g)a_1(h)$. Para finalizar la prueba, mostraremos que este homomorfismo es inyectivo. Esto es suficiente, porque todos los subgrupos finitos de \mathbb{C}^* son cíclicos. (Revise [39, p.28].)

Para ver que a_1 es inyectivo, considere un elemento del grupo que además esté en el núcleo de a_1 , esto quiere decir que $g(z) = z + \text{otros términos de grado mayor}$, para probar que el núcleo es trivial, debemos probar que de hecho $g(z) = z$, es decir el orden e los términos de potencias más grandes que 1 son cero. Supongamos que no, sea $m \geq 2$ el exponente del primer término no cero de la serie de g . Por eso $g(z) - z + az^m = p(z)z^{m+1}$ con $p(z)$ una serie. Es fácil ver que $g^k(z) = z + kaz^m + z^{m+1}q(z)$. Pero por hipótesis el estabilizador es finito, así este elemento g debe tener orden finito. Es decir, para algún k , g^k es la identidad, luego $g^k(z) = z$. Por eso para algún k , $ka = 0$. Forzando $a = 0$. Esta contradicción de hecho prueba que g es la identidad y se completa la prueba. \square

PROPOSICIÓN 4.16. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X . Entonces los puntos de X con estabilizador no trivial forman un conjunto discreto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe una sucesión que converge a p tal que cada p_i tiene estabilizador no trivial. Sea g_i un elemento no trivial de G_{p_i} . Dado que G es finito, podemos tomar una subsucesión y suponer que cada p_i es fijado por el mismo elemento no trivial g .

Como g es continua, esto dice que fija también al punto límite p . Pero, ya que g es un biholomorfismo de X , el Teorema de la Identidad implica que g es la identidad. Esta contradicción prueba que los puntos con estabilizador no trivial no pueden tener puntos de acumulación, en particular forman un conjunto discreto. \square

Al intentar dar una estructura compleja a la superficie cociente X/G , debemos encontrar cartas complejas. La siguiente proposición es fundamental para la construcción de dichas cartas.

PROPOSICIÓN 4.17. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X . Fijemos un punto $p \in X$. Entonces existe una vecindad abierta U de p tal que:*

- (a) U es invariante bajo el estabilizador G_p , es decir $g \cdot u \in U$ para todo $g \in G_p$ y $u \in U$;
- (b) $U \cap (g \cdot U) = \emptyset$ para cualquier $g \notin G_p$;
- (c) El mapeo natural $\alpha : U/G_p \rightarrow X/G$, inducido por mandar un punto p en U a su órbita, es un homeomorfismo sobre un subconjunto abierto de X/G ;
- (d) Ningún punto de U excepto p es fijado por algún elemento de G_p .

DEMOSTRACIÓN. Sea $G \setminus G_p = \{g_1, \dots, g_n\}$ elementos de G que no fijen p . Como X es Hausdorff, para cada $g_i \in G \setminus G_p$, podemos encontrar vecindades V_i , de p y W_i de $g_i \cdot p$ con $V_i \cap W_i = \emptyset$. Notemos que $g_i^{-1} \cdot W_i$ es una vecindad abierta de p para cada i . Sea $R_i = V_i \cap (g_i^{-1} \cdot W_i)$, $R = \bigcap R_i$, y

$$(38) \quad U = \bigcap_{g \in G_p} g \cdot R.$$

Claramente cada R_i es una vecindad abierta de p_i y por eso R y U son vecindades abiertas de p . Más aún, $g \cdot U = U$ para $g \in G_p$; los términos de la intersección que definen U están simplemente permutados aplicando g . Esto prueba (a).

Para probar (b), notemos que $R_i \cap (g_i \cdot R_i) \subset V_i \cap W_i = \emptyset$; para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Para la prueba de (c), el mapeo $\alpha : U/G_p \rightarrow X/G$ es inyectivo; ya que si $G_p \cdot u, G_p \cdot v$ tales que $G \cdot u = G \cdot v$, entonces existe $g \in G$ tal que $g \cdot u = v$, si $g_i \notin G_p$ entonces $v \in W_i$ y esto es una contradicción. Por lo que α es inyectivo. Es continuo y abierto ya que compuesto con $\pi \circ \alpha = \pi|_U$ el

cual es continuo y abierto. Luego es homeomorfismo sobre su imagen.

$$(39) \quad \begin{array}{ccc} U & & \\ \pi \downarrow & \searrow \pi|_U & \\ U/G_p & \xrightarrow{\alpha} & X/G \end{array}$$

Finalmente, (d) se sigue de que el conjunto de puntos con isotropía no trivial es discreto: simplemente hacemos U tan pequeño como sea necesario. \square

Con ayuda de la Proposición 4.17 definimos cartas en X/G , definimos cartas en U/G_p y transportamos estas cartas a X/G vía el mapeo α . Sea $\bar{p} \in X/G$, y supongamos que \bar{p} es la órbita de $p \in X$.

Supongamos primero que $|G_p| = 1$, entonces el estabilizador de p es trivial. Entonces la Proposición 4.17 implica que existe una vecindad U de p tal que $\pi|_U : U \rightarrow W \subset X/G$ es un homeomorfismo sobre una vecindad W de \bar{p} . Haciendo U tan pequeño como sea necesario, podemos suponer que U es el dominio de una carta $\phi : U \rightarrow V$ en X . Tomamos como una carta en X/G la composición $\psi = \phi \circ \pi|_U^{-1} : W \rightarrow V$. Ya que tanto ϕ como $\pi|_U$ son homeomorfismos, esta es una carta en X/G .

Para formar una carta alrededor de un punto \bar{p} con $m = |G_p| \geq 2$, debemos encontrar una carta apropiada de \bar{p} a \mathbb{C} . Usando nuevamente la Proposición 4.17, escogemos una vecindad U de p que sea G_p -invariante tal que el mapeo natural $\alpha : U/G_p \rightarrow W \subset X/G$ sea un homeomorfismo sobre una vecindad W de \bar{p} . Más aún, podemos suponer que el mapeo $U \rightarrow U/G_p$ es m a 1 fuera del punto p . Buscamos una aplicación $\phi : W \rightarrow \mathbb{C}$ que sirva como carta alrededor de \bar{p} . La composición de una tal aplicación con α y el mapeo cociente de U a U/G_p sería una función G_p -invariante $h : U \rightarrow U/G_p \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}$ en una vecindad de p . Encontraremos h para poder hallar ϕ .

Sea z una coordenada local centrada en p . Para cada $g \in G_p$, tenemos la función $\tilde{g}(z)$, donde \tilde{g} denota a g en coordenadas locales y la cual tiene multiplicidad uno en p . Definimos

$$(40) \quad h(z) = \prod_{g \in G_p} \tilde{g}(z).$$

Notemos que h tiene multiplicidad $m = |G_p|$ en p , y está definida en alguna vecindad de p G_p -invariante, podemos hacer U pequeña si es necesario y suponer que h está definida en U . Claramente h es holomorfa y G_p -invariante; aplicando un elemento de G_p simplemente permuta los factores en la definición de h . Consecuentemente h baja a una función continua $\bar{h} : U/G_p \rightarrow \mathbb{C}$.

$$(41) \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{h} & \\ U/G_p & & \end{array}$$

Más aún, ya que h es abierta, entonces \bar{h} también lo es. Finalmente \bar{h} es inyectiva. Esto es porque el mapeo holomorfo h tiene multiplicidad m , y de ahí que es m a 1 fuera de p ; por otro lado el mapeo de U a U/G_p fuera de p también es m a 1, luego \bar{h} es inyectiva.

Ya que \bar{h} es inyectiva, continua y abierta, es entonces un homeomorfismo sobre su imagen; componiéndola con la inversa de $\alpha : U/G_p \rightarrow W$ da un mapeo coordenado ϕ en W .

$$\phi : W \xrightarrow{\alpha^{-1}} U/G_p \xrightarrow{\bar{h}} V \subset \mathbb{C}.$$

Notemos que el primer caso donde la multiplicidad es uno es realmente un caso particular del segundo caso: si $m = 1$, entonces $h(z) = z$, y cubrimos las cartas descritas en el primer caso.

A continuación probaremos que estas cartas son compatibles y le dan una estructura compleja a X/G .

TEOREMA 4.18. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X . Entonces la construcción anteriormente hecha de las cartas complejas en X/G hace a X/G una superficie de Riemann. Más aún, el mapeo cociente $\pi : X \rightarrow X/G$ es holomorfa de grado $|G|$, y $\text{mult}_p(\pi) = |G_p|$ para cualquier punto $p \in X$.*

DEMOSTRACIÓN. Las cartas descritas anterioremente, obviamente cubren a X/G . Debemos revisar que todas sean compatibles, y dar un atlas complejo en X y de ahí una estructura compleja.

Ya que los puntos con estabilizador no trivial forman un conjunto discreto, podemos suponer que los dominios de cartas con el caso $m \geq 2$ no se intersecan; y entonces no hay nada que revisar.

Supongamos ahora que ambas cartas fueron construidas en el caso $m = 1$. Entonces estas son compatibles porque las cartas originales son compatibles. Finalmente, supongamos que tenemos una carta $\phi_1 : \bar{U}_1 \rightarrow V_1$ construida en el caso $m = 1$, y una $\phi : \bar{U}_2 \rightarrow V_2$ construida en el caso $m \geq 2$. Sean U_1 y U_2 los conjuntos abiertos en X usados para construir estas cartas. Escojamos un punto \bar{r} en la intersección $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$ de los dominios de las dos cartas. Levantamos \bar{r} a r en $U_1 \cap U_2$. (Si U_1 y U_2 no se intersecan, reemplazamos U_1 por un trasladado bajo la acción del grupo que interseca a U_2 .) Sea w la coordenada local en U_1 y z la coordenada local en U_2 . La coordenada local en \bar{U}_1 es también w , y la coordenada local en U_2 es $h(z)$, así construida. Pero h es una función holomorfa, y z y w son compatibles, entonces ϕ_1 y ϕ_2 son compatibles.

La Proposición 4.14 dice que X/G es un espacio topológico Hausdorff, conexo, Por lo tanto X/G es una superficie de Riemann.

Que π es holomorfa es inmediato de la definición de las cartas en X/G , de hecho, la función h anterioremente construida corresponde a π en coordenadas locales. Claramente el grado de π es el orden del grupo $|G|$. Finalmente, la multiplicidad de π en un punto p es exactamente la multiplicidad de la función $h(z)$ y esta es precisamente $|G_p|$.

□

El anterior análisis da un corolario interesante para la forma en la que puede actuar un grupo finito en una superficie de Riemann localmente. Pensamos este resultado como una versión de la Forma Local Normal (1.17).

COROLARIO 4.19 (Linealización de la acción). *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X . Fijemos un punto $p \in X$ con estabilizador no trivial de orden m . Sea $g \in G_p$ un generador del subgrupo estabilizador. Entonces existe una coordenada z en X centrada en p tal que $g(z) = \lambda z$, donde λ es una raíz primitiva m -ésima de la unidad. (Reemplazando g por un generador diferente de G_p , podemos obtener $\lambda = \exp(2\pi i/m)$).*

DEMOSTRACIÓN. Escojamos una coordenada local w en X/G alrededor de $G \cdot p$. El Lema 1.17 da la existencia de una coordenada local z alrededor de p tal que $w = z^m$ es la fórmula de π en esas coordenadas locales. Las preimágenes de puntos correspondientes valores no cero de w difieren exactamente por multiplicar m -ésimas raíces de la unidad en la coordenada z . Sin embargo estas preimágenes están también en la órbita bajo la acción de elementos del subgrupo estabilizador G_p . Consecuentemente, para z pequeña, esta órbita consiste de exactamente los puntos $\{\exp(2\pi i k/m)z \mid 0 \leq k \leq m-1\}$. Esto fuerza a $g(z) = \lambda z$ para alguna $\lambda = \exp(2\pi i k/m)$ como se estableció. □

LEMA 4.20. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X , con mapeo cociente $\pi : X \rightarrow Y = X/G$. Entonces para cualquier punto de bifurcación $y \in Y$ existe un entero $r > 2$ tal que $\pi^{-1}(y)$ consiste de exactamente $|G|/r$ puntos de X , y cada una de estas preimágenes tiene multiplicidad r .*

DEMOSTRACIÓN. Sean x_1, \dots, x_s los puntos de X que van a dar a y bajo π , estos forman una sola órbita para la acción de G en X . Ya que los x_i 's están todos en la misma órbita tienen subgrupo estabilizador conjugado, en particular cada subgrupo estabilizador tiene el mismo orden, digamos r . Para hallar el número s aplicamos el Teorema 4.18 y recordamos que $\text{mult}_{x_i}(\pi) = r$, luego

$$|G| = \sum_{i=1}^s \text{mult}_{x_i}(\pi) = sr.$$

Entonces $s = |G|/r$. □

Aplicando este lema y la fórmula de Riemann-Hurwitz (3.1) tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 4.21. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X , con mapeo cociente $\pi : X \rightarrow Y = X/G$. Supongamos que tiene k puntos de bifurcación y_1, y_2, \dots, y_k en Y y*

cada uno tiene multiplicidad r_i en los $|G|/r_i$ puntos que se proyectan en y_i .
Entonces:

$$(42) \quad 2g(X) - 2 = |G|(2g(X/G) - 2) + \sum_{i=1}^k \frac{|G|}{r_i}(r_i - 1).$$

El lema siguiente son cálculos con respecto a las multiplicidades y los puntos de bifurcación.

LEMA 4.22. *Suponga que k enteros r_1, \dots, r_k con $r_i \geq 2$ para cada i están dados. Sea $R = \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i})$.*

$$\begin{aligned} a. \quad R < 2 &\Leftrightarrow k, \{r_i\} = \begin{cases} k = 1, & \text{cualquier } r_1; \\ k = 2, & \text{cualquier } r_1, r_2; o \\ k = 3, & \{r_i\} = \{2, 2, \text{cualquier } r_3\}; o \\ k = 3, & \{r_i\} = \{2, 3, 3\}, \{2, 3, 4\}, o \{2, 3, 5\}, \end{cases} \\ b. \quad R = 2 &\Leftrightarrow k, \{r_i\} = \begin{cases} k = 3, & \{r_i\} = \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 4\}, o \{3, 3, 3\}; o \\ k = 4, & \{r_i\} = \{2, 2, 2, 2\}. \end{cases} \\ c. \quad Si \quad R > 2 &\quad \text{entonces de hecho } R \geq 2 + \frac{1}{42}. \end{aligned}$$

Aplicando estos cálculos a posibles grupos finitos que puedan actuar en la esfera de Riemann, obtenemos algunos resultados. Suponga que G es un grupo finito que actúa holomorfa y efectivamente en la esfera de Riemann. Como \mathbb{C} tiene género cero, tenemos que \widehat{C}/G también, la fórmula de Riemann-Hurwitz en este caso nos dice que

$$-2 = |G|(-2 + R),$$

donde $R = \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i})$. En particular, vemos que si $G \neq \{1\}$ entonces $R \neq 0$ y debe tener puntos de bifurcación, es decir, $k \geq 1$; además tenemos que $R < 2$, despejando $|G|$ vemos

$$|G| = \frac{2}{2 - R}$$

Para superficies de género 2 o más el Corolario 4.23 da una cota para el orden de un grupo G que actúe holomorfa y efectivamente. El siguiente teorema es debido a Hurwitz.

TEOREMA 4.23 (Hurwitz). *Sea G un grupo finito que actúa holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta X de género $g \geq 2$. Entonces:*

$$(43) \quad |G| \leq 84(g - 1).$$

DEMOSTRACIÓN. El Corolario 4.21 nos dice que

$$(44) \quad 2g - 2 = |G|(2g(X/G) - 2 + R),$$

donde $R = \sum_i (1 - \frac{1}{r_i})$.

Suponga primero que $g(X/G) \geq 1$. Si $R = 0$, entonces no hay puntos de ramificación para el mapeo cociente, entonces $g(X/G) \geq 2$, lo que implica que $|G| \leq g - 1$. Si $R \neq 0$, entonces, esto fuerza a que $R \leq 1/2$, entonces tenemos $|G| \leq 4(g - 1)$. Esto finaliza el caso $g(X/G) \leq 1$.

Supongamos que $g(X/G) = 0$. Entonces la fórmula (44) se reduce a

$$2g - 2 = |G|(-2 + R).$$

Esto fuerza $R > 2$. Por el Lema 4.22c. esto implica que $R - 2 \geq \frac{1}{42}$. Consecuentemente $|G| \leq 84(g - 1)$ como se quería demostrar. \square

De hecho, el grupo de todos los automorfismos conformes de una superficie de Riemann compacta de género al menos dos es un grupo finito. Este resultado está más allá de este trabajo, (para más detalles revise [22, p.243]), pero implica que para una tal superficie de Riemann, tenemos

$$(45) \quad |\text{Aut}(X)| \leq 84(g - 1).$$

Esto es debido a que el grupo $\text{Aut}(X)$ de automorfismos ciertamente actúa holomorfa y efectivamente en X .

En conclusión, hemos visto que para el caso de género mayor o igual a dos, el grupo de los automorfismos de X es finito, en comparación a lo que pasa con la esfera de Riemann o los toros complejos. Aún así, resta saber si la cota de los automorfismos es realizable para alguna g . Resulta que sí, dichas curvas que realizan la igualdad en la desigualdad (45) son llamadas *curvas de Hurwitz*.

La curva proyectiva Q definida por la ecuación homogénea en las variables $[x : y : z]$

$$(46) \quad x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

Es conocida como la curva *Cuártica de Klein*. Esta curva tiene género $g = 3$ según la fórmula de Plücker (21). Además, la desigualdad (45) dice que su grupo de automorfismos a lo más tiene $84(3 - 1) = 168$ elementos. Klein demostró [13] que tal curva tiene como grupo de automorfismos el grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$, que de acuerdo al Teorema 4.24 tiene 168 elementos. Es decir, Q realiza la cota de Hurwitz para $g = 3$.¹

TEOREMA 4.24. *Sea p un número primo. \mathbb{F}_p el campo de los números enteros módulo p . Denotamos por $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_p)$ el grupo especial de transformaciones lineales proyectivas. Entonces, el orden de $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_p)$ está dado por la siguiente fórmula:*

$$(47) \quad |\text{PSL}(2, \mathbb{F}_p)| = \frac{p(p^2 - 1)}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\text{GL}(2, \mathbb{F}_p)$ el grupo de transformaciones lineales no singulares del espacio vectorial \mathbb{F}_p^2 en sí mismo. Cada $T \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_p)$ está determinado por ver a dónde manda una base de \mathbb{F}_p^2 . Podemos tomar la base

¹Macleath [19] con ayuda de la cuártica de Klein demostró que existe una familia infinita de superficies de Riemann que realizan la cota de Hurwitz.

canónica $\{(1, 0), (0, 1)\}$ de \mathbb{F}_p^2 . Para $(1, 0)$ hay $p^2 - 1$ puntos; ya que \mathbb{F}_p^2 tiene p^2 elementos, pero T es no singular, por lo que descartamos el origen. Para el vector $(0, 1)$ tenemos $p^2 - 1 - (p - 1) = p^2 - p$ elecciones posibles; ya que en principio tenemos $p^2 - 1$ elecciones posibles, pero fijado $T(1, 0)$, debemos quitar los $p - 1$ puntos de la línea que genera $T(1, 0)$. Por lo que

$$|\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p).$$

Consideremos el epimorfismo de grupos

$$\det : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p) \rightarrow \mathbb{F}_p^*.$$

Entonces, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p) = \mathrm{Ker}(\det)$. Por lo tanto

$$|\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)| = p(p^2 - 1).$$

Definimos $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_p) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p) / \{\pm Id\}$. Entonces, para $p > 2$

$$|\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_p)| = \frac{p(p^2 - 1)}{2}.$$

□

OBSERVACIÓN. Cualquier terna $\{\sigma_2, \sigma_3, \sigma_7\}$ de elementos de $\mathrm{Aut}(Q)$ de orden 2, 3 y 7 respectivamente generan al grupo de automorfismos de la cuártica de Klein; ya que el orden de $\langle \sigma_2, \sigma_3, \sigma_7 \rangle$ debe ser divisible por 42 y $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_7)$ no contiene ningún subgrupo de tal orden [5]. Si $\omega = \exp(2\pi i/7)$ y consideramos las transformaciones de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ en sí mismo que preservan Q .

$$\sigma_2 = -\frac{1}{\sqrt{-7}} \begin{pmatrix} \omega - \omega^6 & \omega^2 - \omega^5 & \omega^4 - \omega^3 \\ \omega^2 - \omega^5 & \omega^4 - \omega^3 & \omega - \omega^6 \\ \omega^4 - \omega^3 & \omega - \omega^6 & \omega^2 - \omega^5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_7 = \begin{pmatrix} \omega^4 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

Tenemos que $\langle \sigma_2, \sigma_3, \sigma_7 \rangle = \mathrm{Aut}(Q)$.

Descomposición en pantalones

Descomponer un espacio en piezas que sean en algún sentido más fáciles de manejar, han sido técnicas utilizadas en muchas áreas de las matemáticas. La conjetura de Geometrización de Thurston, o la descomposición de Heegaard de una 3-variedad, son ejemplos claros y fascinantes de la importancia de descomponer los objetos de nuestro estudio. Este trabajo tiene el objetivo de exponer una descomposición de superficies abiertas en pantalones y cilindros infinitos propuesta por Alberto Verjovsky como una generalización de la descomposición en pantalones de una superficie compacta. Para ello, hemos expuesto la teoría de Morse necesaria en el caso de superficies y continuado con la gráfica de Reeb, que codifica en cierto sentido la forma de una superficie.

1. Clasificación de superficies no compactas

DEFINICIÓN A.1. Por una superficie entenderemos una variedad conexa de dimensión dos.

DEFINICIÓN A.2. Un subconjunto $A \subset S$ decimos que A es *acotado* en S si la cerradura en S es compacto.

DEFINICIÓN A.3. Por una *subsuperficie* de una superficie S entenderemos una región cerrada en S cuya frontera en S consiste de un número finito de curvas simples cerradas que no se intersecan.

Cuando nos refiéramos a una subsuperficie por sí sola, la llamaremos una superficie bordeada. (Aunque no es difícil dar una definición intrínseca de “superficie bordeada” pero no la necesitaremos.) Ahora, damos el teorema fundamental de clasificación de superficies bordeadas compactas. Este teorema se debe a Brahaná [2].

TEOREMA A.4. *Dos superficies bordeadas compactas y triangulables son homeomorfas sí y sólo sí ambas tienen el mismo número de curvas frontera, la misma característica de Euler, y si ambas son orientables o no orientables.*

DEFINICIÓN A.5. Definimos el *género reducido* g de una superficie bordeada compacta triangulable A con q curvas frontera y característica de Euler χ por $g = 1 - 1/2(\chi - q)$.

Si A y A' son superficies bordeadas compactas las cuales se juntan a lo largo de r componenetes frontera se sigue de la definición de χ que

$\chi(A \cup A') = \chi(A) + \chi(A')$; para ello supongamos que pegamos las dos superficies A y A' por la frontera de r 2-simplejos. Entonces no alteramos la característica de Euler de ninguna A y A' y tenemos $\chi(A \cup A') = \chi(A) + \chi(A')$. Luego

$$\begin{aligned} g(A \cup A') &= 1 - \frac{1}{2}(\chi(A \cup A') + q(A \cup A')), \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\chi(A) + \chi(A') + q(A) - r + q(A) - r), \\ &= g(A) + g(A') + (r - 1). \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. Una superficie bordeada de género reducido g es una esfera con g asas y algún número de “hoyos”. En el caso de una superficie bordeada del mismo género reducido g tiene $2g$ “cross caps” o equivalentemente, para cualquier $k < g$, k “asas” y $2g - 2k$ “cross caps”.

DEFINICIÓN A.6. Una superficie X se dice *plana* si para cualquier subsuperficie compacta X' es de género reducido cero (o equivalentemente de género cero).

Un ejemplo de una superficie no plana sería el el toro menos un disco abierto.

Un ejemplo de una superficie plana sería la esfera \mathbb{S}^2 menos un subconjunto de \mathbb{S}^2 homomorfo al Cantor.

Trabajaremos con superficies triangulables sin fronteras. Comenzaremos por explicar qué es el espacio de puntas.

DEFINICIÓN A.7. Una *punta* de una superficie S es una sucesión anidada $P_1 \supset P_2 \supset \dots$ de regiones no acotadas en S tal que

1. La frontera de P_n en S es compacta para toda n ;
2. Para cualquier subconjunto acotado A de S ; existe una n suficientemente grande para la cual $P_n \cap A$.

Ejemplo de una sucesión así. Considere el toro perforado $\mathbb{T}^2 \setminus \{p\}$ y una sucesión anidada de discos alrededor de p . Mire la Figura 1.

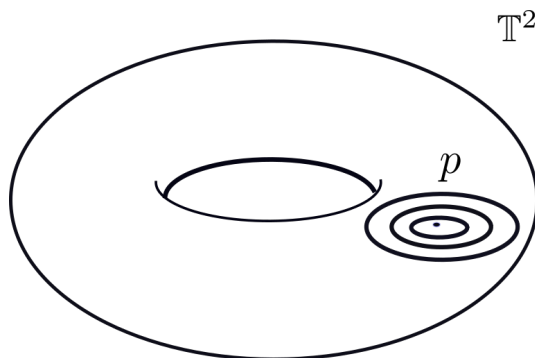


FIGURA 1. Toro perforado.

Decimos que dos puntas $P_1 \supset P_2 \supset \dots$ y $P'_1 \supset P'_2 \supset \dots$ son equivalentes si para cualquier n existe un correspondiente entero N tal que

$P_N \subset P'_n$ y viceversa. Claramente esta relación es una relación de equivalencia. Denotamos la clase de equivalencia como p^* de las puntas que contiene a $p = P_1 \supset P_2 \supset \dots$.

Intuitivamente el espacio de puntas da una descripción de una manera en la cual los subconjuntos compactos de S dividen a S en componentes no acotadas.

DEFINICIÓN A.8. La *frontera ideal* $B(S)$ de una superficie S es el espacio topológico que tiene a las clases de equivalencia de las puntas de S como elementos, y tiene la siguiente topología: para cualquier subconjunto U de S cuya frontera en S es compacta, definimos U^* como el conjunto de todas las puntas p^* representadas por algún $p = P_1 \supset P_2 \supset \dots$ tal que $P_n \subset U$ para algún n suficientemente grande; tomamos el conjunto de todos los U^* como una base para la topología de $B(S)$.

EJEMPLO. Tomemos la gráfica infinita siguiente: el árbol cuyos vértices tienen valencia tres (número de vértices adyacentes) excepto su raíz, que tendrá valencia 2. Mire la figura esquemática a) a continuación consideremos dicha gráfica encajada en \mathbb{R}^3 y engrosemos cada arista, para formar una superficie. Mire la figura esquemática b) Esta superficie es llamada *el árbol de la vida* y tiene como espacio de puntas el conjunto de Cantor ternario.

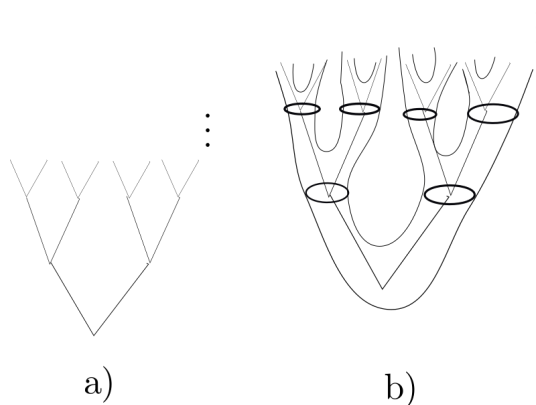


FIGURA 2. a) Gráfica infinita b) Árbol de la vida.

PROPOSICIÓN A.9. La colección de subconjuntos U^* de $B(S)$ descritos anteriormente cumplen los axiomas para ser base de una topología en $B(S)$

DEFINICIÓN A.10. Sea p^* representado por $p = P_1 \supset P_2 \supset \dots$, una punta de S . Decimos que p^* es *plana* si los conjuntos P_n son planos para n suficientemente grande.

DEFINICIÓN A.11. Sea p^* representado por $p = P_1 \supset P_2 \supset \dots$, una punta de S . Decimos que p^* es *orientable* si los conjuntos P_n son orientables para n suficientemente grande.

Es claro que las Definiciones A.10 y A.11 no dependen de la elección de los representantes en la clase de equivalencia p^* .

De acuerdo con las Definiciones A.10 y A.11 consideraremos el espacio de puntas como una terna anidada de conjuntos $B(S) \supset B'(S) \supset B''(S)$, donde $B(S)$ es la frontera ideal, $B'(S)$ la parte no plana y $B''(S)$ es la parte no orientable.

De la definición de estos subconjuntos se sigue directamente que $B'(S)$ y $B''(S)$ son subconjuntos cerrados de $B(S)$.

DEFINICIÓN A.12. Una superficie con frontera S es de *género infinito* si no existe subconjunto acotado A de S tal que $S \setminus A$ es de género cero.

DEFINICIÓN A.13. Una superficie con frontera S es *infinitamente no orientable* si no existe un subconjunto acotado A de S tal que $S \setminus A$ es orientable.

Claramente infinitamente no orientable implica género infinito.

DEFINICIÓN A.14. Definimos cuatro *clases de orientabilidad* de superficies:

1. Orientable;
2. Infinito no orientable;
3. No orientable impar;
4. No orientable par.

Si S no pertenece a ninguna de las dos primeras clases, entonces existe una subsuperficie compacta A tal que $S \setminus A$ son componentes conexas, cada una orientable, y A tiene un número finito de planos proyectivos. Si A tiene un número impar de planos proyectivos, entonces S es de clase no orientable par; si A tiene un número par de planos proyectivos, entonces S es de clase no orientable par. O equivalentemente A tiene género reducido la mitad de un entero o un entero.

Para aclarar un poco las definiciones, a continuación enunciamos algunos EJEMPLOS.

1. La esfera \mathbb{S}^2 con un número finito (O una sucesión convergente) de puntos removidos es una superficie plana.
2. Una suma conexa infinita de toros es una superficie orientable no plana.
3. Una suma conexa infinita de planos proyectivos es una superficie infinitamente no orientable.
4. La suma conexa de un plano proyectivo con la superficie descrita en (2) forma una superficie orientable impar.
5. la suma conexa de una botella de Klein con la superficie descrita en (2) forma una superficie orientable par.

A continuación presentamos dos proposiciones sin demostración

PROPOSICIÓN A.15. Si S_1 es una subsuperficie contenida en una superficie S , entonces la vecindad S_1^* en $B(S)$ contiene puntas no planas o no

orientables sí y sólo sí S_1 es de género infinito o infinitamente no orientable. De manera análoga, S_1^* es no vacía sí y sólo sí S_1 es no acotada.

PROPOSICIÓN A.16. *La frontera ideal de una superficie es totalmente disconexa, separable, y compacta.*

Aquí observamos que la frontera ideal es entonces un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor.

PROPOSICIÓN A.17. *Una superficie bordeada de género infinito contiene subsuperficies de género arbitrariamente grande.*

TEOREMA A.18. *Sea S y S' dos superficies separables del mismo género (finito o infinito) y clase de orientabilidad. Entonces S y S' son homeomorfas sí y sólo sí sus fronteras ideales (considerada como una terna de espacios) son homeomorfas.*

El teorema anterior es conocido como el teorema de Kerékjártó, y fue Richards [28] quien dio una prueba y completó el teorema como sigue:

TEOREMA A.19. *Sea (X, Y, Z) una terna de subconjuntos compactos, separables, totalmente disconexos con $X \subset Y \subset Z$. Entonces existe una superficie S la cual tiene como frontera ideal $(B''(S), B'(S), B(S))$ que es homeomorfa a la terna (X, Y, Z) .*

TEOREMA A.20. *Cualquier superficie es homeomorfa a una superficie formada de una esfera Σ por remover un conjunto X de Σ , después de remover el interior de una sucesión finita o infinita D_1, D_2, \dots de discos cerrados no traslapados en $\Sigma \setminus X$, y finalmente identificando estos discos en parejas. (Puede ser necesario identificar la frontera de un disco consigo mismo que produce un plano proyectivo.) La sucesión D_1, D_2, \dots se aproxima a X en el sentido que, para cualquier conjunto abierto U en Σ que contiene a X , excepto para un número finito de D_i están contenidos en U .*

2. Descomposición de superficies cerradas.

Por una superficie *cerrada* entenderemos una variedad de dimensión dos conexa, compacta y sin frontera. Por una superficie *abierta* entenderemos una superficie conexa, no compacta y sin frontera. En todo nuestro análisis asumiremos que las superficies son orientables.

DEFINICIÓN A.21. Definimos un *pantalón* como la superficie $\mathbb{S}^2 \setminus X$. Donde X es la unión de tres discos abiertos de \mathbb{S}^2 ajenos dos a dos.

DEFINICIÓN A.22. Dada una superficie S , por una *descomposición en pantalones* de S entendemos una colección numerable (o finita) P de encajes de círculos ajenos en S que cortan a S en piezas cada una homeomorfa a un pantalón.

De hecho, la figura 3 da una idea para descomponer una superficie cerrada Σ de género $g \geq 2$, en pantalones, de la siguiente manera:

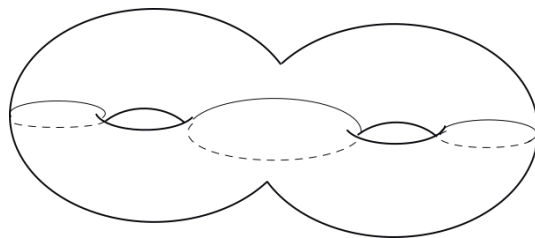


FIGURA 3. Descomposición en pantalones de un 2-toro.

Considere una superficie cerrada Σ , entonces, el teorema de clasificación de superficies cerradas y orientables (recuerde que Σ siempre la consideramos orientable) dice que Σ tiene género g . Podemos suponer que Σ se ve como en la figura. Luego, entre cada par consecutivo de “hoyos” de Σ encajamos un círculo en Σ , y por cada “hoyo” encajamos dos círculos en Σ . Como lo muestra la Figura 4.

En la Figura 3 tenemos $2(2) - 2$ pantalones en nuestra descomposición. Es decir, tenemos que el número de pantalones de tal descomposición del dos toro es igual a menos su característica de Euler. Si suponemos que Σ_g es una superficie cerrada de género g y la descomposición en pantalones descrita anteriormente tiene $2g - 2$ pantalones, por otro lado una superficie Σ_{g+1} entonces $\Sigma_{g+1} \cong \Sigma_g \# \Sigma_1$. Al reconstruir nuestra descomposición en pantalones se agregan dos pantalones a la descomposición de Σ_{g+1} . Es decir, si Σ_g es una superficie cerrada de género $g > 1$, entonces tal descomposición tiene $-\chi(\Sigma_g)$ pantalones. Este hecho no depende de la descomposición en pantalones. El lector ya habrá notado que la descomposición en pantalones no es única, sin embargo, el número de pantalones sí lo es.¹

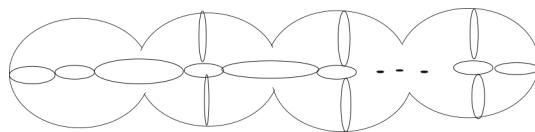
En el caso de superficies cerradas, sabemos que existe una descomposición en pantalones, una siguiente pregunta natural es, ¿existe una descomposición en pantalones para una superficie abierta? ¿O alguna descomposición que se le pueda asociar a una superficie abierta que en algún sentido generalice a la descomposición en pantalones?

En primera instancia, tenemos que descartar algunos casos en los que no encontraremos una descomposición en pantalones; el plano y el cilindro son superficies abiertas que no tienen una tal descomposición.

A continuación, pensemos en la superficie Σ formada por tomar la esfera \mathbb{S}^2 y retirar 3 puntos distintos. A primera vista no encontramos una descomposición en pantalones, sin embargo, podemos encajar tres círculos que descomponen a Σ en un pantalón y tres cilindros infinitos. Revise la Figura.

Recordemos que toda superficie topológica Σ admite una estructura diferenciable \mathcal{A} , y entonces a partir de ahora, supondremos que Σ es una superficie diferenciable. Con base en esta suposición comenzaremos a introducir

¹La prueba rigurosa de esta última afirmación la encontrará en [3]

FIGURA 4. Descomposición en pantalones de un g -toro.

elementos básicos de la teoría de Morse para encontrar una descomposición que generalice en algún sentido la descomposición en pantalones de una superficie cerrada que anteriormente describimos.

3. Teoría de Morse en Superficies.

La teoría de Morse es una importante herramienta en la topología de las variedades, proporciona una manera de "visualizar" las variedades; ofrece en primera instancia, una relación entre los espacios y las funciones; se interesa en saber cómo los puntos críticos de una función definida en un espacio se relaciona con la forma topológica del espacio y conversamente. El objetivo de esta sección es explicar conceptos básicos de la teoría de Morse en superficies, para utilizarlos como herramientas en nuestro objetivo de la descomposición de una superficie abierta.

DEFINICIÓN A.23. Sea Σ una superficie diferenciable, y $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, decimos que $p \in \Sigma$ es un *punto crítico* de f si existe una carta coordenada donde:

$$(48) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p = \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_p = 0.$$

Decimos que c_0 es un *valor crítico* de f si f toma el valor c_0 en algún punto crítico de f . Un tal punto crítico es *no degenerado* si

$$(49) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} \Big|_p & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_p \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \Big|_p & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} \Big|_p \end{pmatrix} \neq 0.$$

TEOREMA A.24 (Lema de Morse). *Sea p_0 un punto no degenerado de una función $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ entonces existen coordenadas locales (x_1, x_2) tales que la función f tiene una de las tres formas estándar:*

1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + c,$
2. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + c,$
3. $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + c.$

Este teorema dice que una función f cerca de un punto crítico no degenerado es muy simple. Es decir, es como las gráficas siguientes:

COROLARIO A.25. *Un punto crítico no degenerado de una función $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es aislado.*

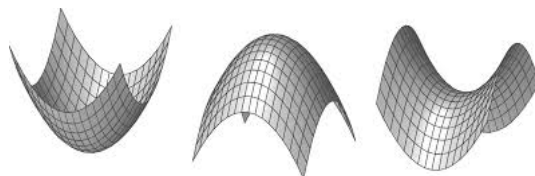


FIGURA 5. Puntos de índice 0,2 y 1 de izquierda a derecha

DEFINICIÓN A.26. Sea $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ y p_0 un punto crítico de f . Escogemos un sistema de coordenadas en una vecindad de p_0 tal que f tiene una forma estándar dada por el Teorema A.24. Entonces el *índice* de p_0 es 0, 1 y 2, respectivamente para $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + c$ y $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + c$.

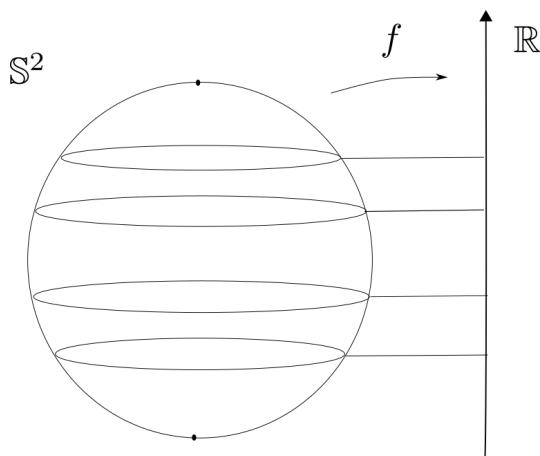


FIGURA 6. Función altura en la esfera

DEFINICIÓN A.27. Sea $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que todos sus puntos críticos son no degenerados. Entonces decimos que f es una función de *Morse*. Si f es de Morse, decimos que es *resonante* si puntos críticos distintos de f tienen valores críticos diferentes.

EJEMPLO. La función altura en la esfera.

Sea $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| = 1\}$ y $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $(x, y, z) \mapsto z$. Esta función tiene un mínimo en el polo sur $p_0 = (0, 0, -1)$ y un máximo en el polo norte $q_0 = (0, 0, 1)$. La función f es de Morse. Figura 6.

Como vemos en el ejemplo anterior, existe una función de Morse con exactamente dos puntos críticos no degenerados. De hecho, es cierto el enunciado converso.

TEOREMA A.28 (Reeb). *Sea Σ una superficie cerrada. Suponga que existe una función de Morse $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ con exactamente dos puntos críticos no degenerados (y ningún otro punto crítico). Entonces es difeomorfa a la esfera \mathbb{S}^2 .*

TEOREMA A.29. *Sea $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse y sea $[a, b]$ un intervalo real. El conjunto*

$$(50) \quad \Sigma_{[a,b]} = \{p \in \Sigma \mid a \leq f(p) \leq b\}.$$

Si f no tiene valores críticos en el intervalo $[a, b]$, entonces $\Sigma_{[a,b]}$ es difeomorfo al producto

$$(51) \quad f^{-1}(a) \times [0, 1].$$

Los teoremas anteriores son una pequeña muestra de la forma de analizar la topología de superficies dadas a partir de las funciones de Morse que las definen.

Hasta aquí hemos hablado de funciones de Morse sobre superficies, ¿será que siempre podremos encontrar una función de Morse definida en una superficie? Citaremos a continuación un teorema importante sobre existencia de funciones de Morse en superficies abiertas con propiedades interesantes. Sin embargo, el resultado es más general, el lector interesado puede revisarlo en [10].

TEOREMA A.30. *Sea Σ una superficie abierta. Entonces existe una función de Morse propia (si $K \subset \mathbb{R}$ compacto entonces $f^{-1}(K)$ es compacto) $f : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ con puntos críticos a_0, a_1, a_2, \dots y $c_i = f(a_i)$ tal que*

$$c_0 < c_1 < c_2 < \dots$$

y $\text{ind}_f(a_0) = 0$ e $\text{ind}_f(a_i) = 1$ para $i \geq 1$.

Tratemos de entender la importancia de este teorema con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO. Consideremos Σ como la superficie formada de tomar \mathbb{S}^2 y retirar un conjunto homeomorfo al conjunto de Cantor. A simple vista podría parecer complicado hallar una función de Morse que satisfaga las condiciones del teorema anterior. Es cierto que no es difícil encontrar una función de Morse para esta superficie, tome por ejemplo la restricción a Σ de la función altura, sin embargo, tiene un punto crítico de índice dos.

3.1. La gráfica de Reeb. La estructura de una función diferenciable en una superficie algunas veces da información de las superficies en la que está definida tal función, es el caso de las funciones de Morse definidas en superficies. La gráfica de Reeb es una herramienta visual que expresa la conectividad de los conjuntos de nivel y es obtenida por contraer componentes conexas.

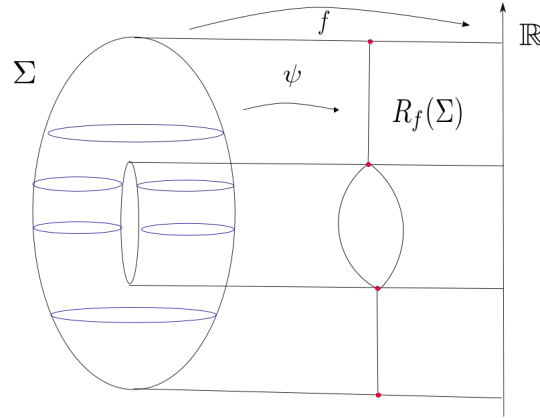


FIGURA 7. Gráfica de Reeb

DEFINICIÓN A.31. Sea X una superficie y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, definimos una relación de equivalencia \sim en X donde p y q están relacionados siempre que estén en la misma componente conexa de un conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ para algún real c . La *gráfica de Reeb* es el espacio cociente X/\sim con la topología cociente. Denotaremos por la gráfica de Reeb de X asociada a una función f como

$$R_f(X)$$

A una componente conexa de $f^{-1}(c)$ la llamaremos un *contorno* de f .

La gráfica de Reeb tiene un punto por cada contorno y la conexión está provista por el mapeo

$$\psi : X \rightarrow R_f(X).$$

Que es colapso continuo de un contorno de f .

Las gráficas de Reeb pueden dar más información sobre la forma de X cuando $X = \Sigma$ una superficie y $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse. Como es el caso del ejemplo anterior.

Cada punto $u \in R_f(\Sigma)$ es la imagen de una componente de un conjunto de nivel en Σ . Llamamos nodo de una gráfica de Reeb si $\psi^{-1}(u)$ contiene un punto crítico de f . De la definición de función de Morse resonante, los puntos críticos tienen valores funcionales distintos, que implica que hay una biyección entre los puntos críticos de f y los nodos de $R_f(\Sigma)$. El resto de la gráfica de Reeb corresponde a aristas que conectan a los nodos. Un mínimo comienza con un contorno de f que corresponde a un nodo de grado 1. Un punto de índice 1 (es decir un punto silla) corresponde a un nodo de grado 3. Análogamente, un máximo corresponde a un nodo de grado 1.

Consideremos una superficie abierta Σ , el Teorema A.30 implica que existe una función de Morse propia $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, según las observaciones anteriores, podemos asociarle una gráfica a Σ vía el mapeo f con un único nodo de grado 1 y los demás nodos de grado 3. Antes de continuar con nuestro análisis, notemos que $R_f(\Sigma)$ para el caso de superficies abiertas no

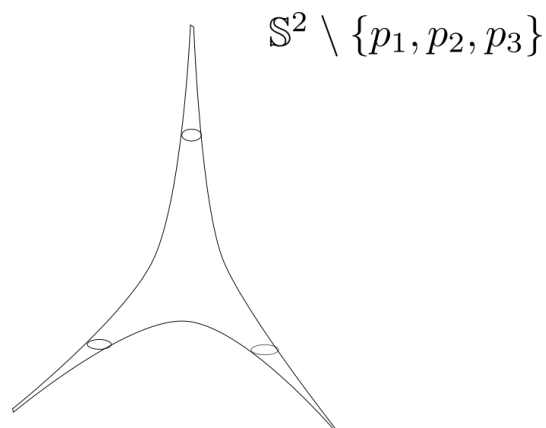


FIGURA 8. Esfera menos tres puntos con una descomposición en pantalones y cilindros.

es una gráfica “legítima”, pues esta puede tener aristas infinitas. Como es el caso de , permitiremos estas aristas infinitas en nuestras gráficas. Ver Figura 8.

Por otro lado, si consideramos una gráfica plana con nodos a_0, a_1, a_2, \dots , cada uno con grado 3 excepto por a_0 que tendrá grado podemos asociarle una superficie que es el “engordamiento” de la gráfica. Mire la Figura esquemática 9.

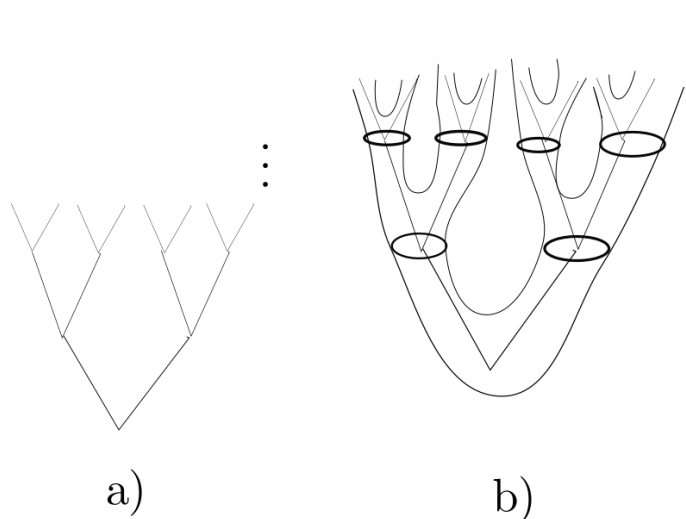


FIGURA 9. El árbol de la vida construido vía el engordamiento de una gráfica.

En resumen, tenemos el siguiente lema.

LEMA A.32. *Dada una superficie orientable (sin frontera) podemos asociarle una gráfica plana con nodos de grado 3 y un único nodo de grado 1, y dada una gráfica plana con nodos a_0, a_1, a_2, \dots , cada uno con grado 3 excepto por a_0 que tendrá grado 1 podemos asociarle una superficie orientable que es el “engordamiento” de la gráfica.*

OBSERVACIÓN. La sucesión de nodos puede ser finita aún cuando la superficie sea abierta; ya que permitiremos en nuestra definición de gráfica aristas infinitas.

OBSERVACIÓN. Las superficies obtenidas por “engordamiento” de una superficie no caracterizan a las superficies. Es decir, aún cuando a cada superficie podemos asociarle una gráfica vía la existencia de una función de Morse, puede haber gráficas no isomorfas que dan superficies homeomorfas. Sin embargo, tenemos una inyección de la colección de las gráficas planas con las propiedades descritas en el Lema A.32 módulo isomorfismo de gráficas, en la colección de superficies orientables módulo homeomorfismo.

TEOREMA A.33. *Sea Σ una superficie abierta y orientable distintas del plano y el cilindro. Entonces Σ admite una descomposición en pantalones y cilindros infinitos.*

DEMOSTRACIÓN. (Demostración sugerida por Alberto Verjovsky) Sea Σ una superficie abierta, entonces el Teorema A.30 dice que existe una función de Morse propia $f : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ con puntos críticos a_0, a_1, a_2, \dots , y valores críticos $c_i = f(a_i)$ para $i \geq 0$, $c_0 < c_1 < c_2 < \dots$, además, $\text{índ}(a_0) = 0$ e $\text{índ}(a_i) = 1$ para $i \geq 1$. Entonces, podemos asociar a Σ la gráfica de Reeb $R_f(\Sigma)$. [Figura] Como la función f es propia, entonces la imagen inversa de un valor regular o es vacío o es la unión ajena de subvariedades compactas de dimensión 1 de Σ , es decir, unión ajena de circunferencias encajadas en Σ . Consideremos entonces, valores intermedios $c_{i,i+1}$ en cada pareja consecutiva de valores críticos y la colección \mathcal{C} de circunferencias ajenas que son imagen inversa bajo f de los valores $c_{i,i+1}$. Consideremos $R_f(\Sigma)'$ la gráfica obtenida de agregar por cada circunferencia en \mathcal{C} un nodo a $R_f(\Sigma)$. En la gráfica de Reeb $R_f(\Sigma)$ se codifica de la siguiente forma: como partir la gráfica $R_f(\Sigma)$ en piezas cada una con un nodo con tres aristas o dos aristas (este es el caso de los cilindros infinitos) y una pieza correspondiente al nodo de grado 1. Como Σ es distinta del plano y del cilindro, entonces f tiene al menos dos puntos críticos de índice 1. Supongamos que $c_0 < c_1 < c_2$ son valores críticos de f , entonces $\Sigma_{[c_0, c_1]}$ es homeomorfa a un disco al que se le pega una banda, mire la Figura 10 (esto es resultado de descomposición en asas, revise [21]). En la colección \mathcal{C} tenemos la circunferencia $C = f^{-1}(c_{0,1})$, esta circunferencia la intercambiaremos por una dibujada en Σ sobre la “banda” de la Figura 10, del Teorema A.29 se sigue que si $R_f(\Sigma)$ tiene aristas infinitas, estas corresponden a cilindros infinitos. Por último, en la gráfica $R_f(\Sigma)'$, retiramos los nodos que tienen grado dos, lo cual en la superficie se traduce a retirar las circunferencias que se encuentran en cilindros infinitos. Por lo

tanto, la colección resultante da una descomposición en pantalones y cilindros infinitos de Σ .

□

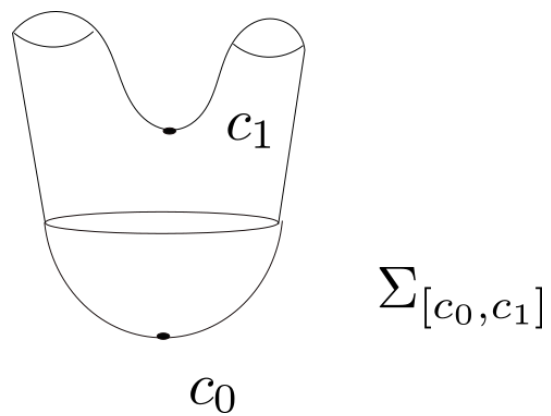


FIGURA 10. La superficie $\Sigma_{[c_0, c_1]}$.

Bibliografía

- [1] Ahlfors, Lars V. and Sario L. Riemann Surfaces. Princeton University Press, 1960
- [2] H. R. Brahana, Systems of circuits on two dimensional manifolds. Ann. of Mathematics. N. J. 1960
- [3] Casson A. J. et al. Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston. London Mathematical Society Student Texts 9. 1998
- [4] Conway, John B. Functions of one complex variable. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag. New York. 1978
- [5] Conway, John H. et. al. Atlas of finite Groups. Oxford University Press. Enysham 1985. Maximal subgroups and ordinary characteres for simple groups with computational assistance from J. G. Thackray.
- [6] do Carmo, Manfredo. Differential geometry of curves and surfaces. Prentice Hall, 1976
- [7] Donaldson S.K. Riemann Surfaces. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 22. Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [8] Doyle, P.H. and Moran D. A. A short proof that Compact 2-manifolds can be triangulated. Inventiones math. 5. 160-162. 1968
- [9] Fischer, Gerd. Algebraic Plane Curves. Heinrich-Heine-Universität-AMS, 2001.
- [10] Geiges H. h-Principles and Flexibility in Geometry. Memoirs of the American Mathematical Society. AMS. Vol. 164. Number 779. 2003.
- [11] Gunning, Robert. Lectures on Modular forms. Notes by Armand Brumer. Annals of Mathematics Studies. No. 48. Princeton University. Press, Princeton. N.J., 1962.
- [12] Hatcher, Allen. Algebraic Topology. Cambridge University Press. Cambridge. 2002.
- [13] Klein, Felix. Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen. Math. Ann., vol. 14, pp. 428-430, 1908.
- [14] Kirwan, Frances. Complex Algebraic Curves. London Mathematical Society Student Texts 23. Cambridge University Press. 1992.
- [15] Karunakaran V. Complex analysis. Segunda Edición. Alpha Science International. India. 2005
- [16] Lê, Dũng Tráng; Seade, José; Verjovsky, Alberto. Quadrics, orthogonal actions and involutions in complex projective space. Enseign. Math. (2) 49 pp. 173-203, 2003.
- [17] Lee, John. Introduction to smooth manifolds. Graduate Texts in Mathematics 202, Springer, 2000
- [18] Levy, Silvio. (ed.). The Eightfold Way: The Beauty of Klein's Quartic Curve, Mathematical Sciences Research Institute Publications, No. 35. Cambridge University Press, Cambridge. 1999.
- [19] Macbeath, A. M. On a theorem of Hurwitz. Proc. Glasgow Math. Assoc. 5 1961 90-96 1961.
- [20] Massey, William S. Algebraic topology: An introduction. Harcourt, Brace & World, Inc., New York, 1967.
- [21] Matsumoto Y. An introduction to Morse Theory. Translations of Mathematical Monographs. AMS. Vol. 208. 2002.
- [22] Miranda, Rick. Algebraic curves and Riemann surfaces. Colorado State University-AMS. 1995

- [23] Osserman, Brian. Branched Covers of the Riemann Sphere. <https://www.math.ucdavis.edu/~osserman/rfg/290W/branched-covers.pdf>
- [24] Pommerenke, Christian. Boundary Behavior of conformal maps. Springer-Verlag. New York. 1992.
- [25] Prieto de Castro, Carlos. Topología básica. Texto Científico Universitario. Fondo de Cultura Económica. México. 2013.
- [26] Reyssat, Eric. Quelques aspects des surfaces de Riemann. Progress in Mathematics. Birkhäuser Press. Boston 1989
- [27] Radó, T. Über den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acts. Litt. Sci. Szeged*, 2. 101-121. 1925.
- [28] Richards, Ian. On the classification of noncompact surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 106. 259–269. 1963.
- [39] Rotman Joseph. Introduction to the theory of groups. Cuarta Edición. Graduate Texts in Mathematics, 148. Springer-Verlag. New York, 1995.
- [30] Schlag, Wilhelm. A course in complex analysis and Riemann Surfaces. Graduate Texts in Mathematics, 154. AMS. 2014
- [31] Springer, George. Introduction to Riemann Surfaces. Second Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass. 1957. viii+307 pp
- [32] Thomassen, Carsten. The Jordan Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces. *Amer. Math. Monthly*, 99. no. 2, 116-130. 1992.
- [33] Verjovsky, Alberto. Introducción a la geometría y variedades hiperbólicas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Sexta Escuela Iationamericana en Matemáticas. 1982.
- [34] Verjovsky, Alberto. Commentaries on the paper solenoidal manifolds by Dennis Sullivan. *J. Singul.* 9, 245–251. 2014