



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Arboricidad por vértices en gráficas planas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Andrés Carnero Bravo



DIRECTORA DE TESIS:

Dra. Adriana Hansberg Pastor

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Carnero
Bravo
Andrés
55735104
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304501010

2. Datos de la tutora

Dra.
Hansberg
Pastor
Adriana

3. Datos del sinodal 1

Dra.
Montejano
Cantoral
Amanda

4. Datos del sinodal 2

Dra.
Guevara
Aguirre
Mucuy-Kak del Carmen

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Salazar
Anaya
Gelasio

6. Datos del sinodal 4

Dra.
Araujo
Pardo
Martha Gabriela

7. Datos del trabajo escrito

Arboricidad por vértices en gráficas planas
65 p.
2016

Índice general

Índice general	III
Agradecimientos	1
Introducción	2
1. Terminología y resultados básicos	4
1.1. Gráficas y multigráficas	4
1.2. Conexidad y conjuntos de corte	7
1.2.1. Conexidad	7
1.2.2. Conjuntos de corte	11
1.2.3. Espacio de ciclos y espacio de cortes	12
1.3. Arboricidad	19
1.4. Gráficas isomorfas	21
2. Gráficas planas	23
2.1. Prerrequisitos topológicos	23
2.2. Conceptos y resultados básicos	24
2.3. El método de descarga	33
3. Arboricidad en gráficas planas	37
3.1. La arboricidad de una gráfica plana	37
3.2. Gráficas planas sin ciclos de cierta longitud	38
3.3. Caracterización de las gráficas planas con arboricidad dos	58
Conclusiones	60
Bibliografía	61

Agradecimientos

Primero que a nadie, quiero agradecer a mi madre, la primera persona que me enseñó matemáticas. A ella, que cuando todo el mundo me cuestionó el porque estudiar otra carrera me apoyó e impulsó a estudiar matemáticas, sin su apoyo no estaría aquí. A mi hermano y a mi padre, que siempre han estado cuando los he necesitado.

A todos lo sinodales por sus observaciones y correcciones, así como por aceptar revisar este trabajo.

En especial quiero agradecer a mi tutora, la Dra. Adriana Hansberg, por haber aceptado dirigir esta tesis, por aceptar seguir siendo mi tutora en la maestría, por todo el apoyo que me ha dado y me sigue dando. Por todos sus comentarios y correcciones sin los que esta tesis no hubiera podido realizarse.

Investigación realizada con apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IA103915 *Domina-ción, independencia y descomposiciones de gráficas e hipergráficas*. Agradezco a la DGAPA-UNAM por la beca recibida.

Introducción

La presente tesis trata sobre la arboricidad por vértices en gráficas planas, es decir, cuántos colores son suficientes para colorear los vértices de una gráfica plana sin que haya ciclos de un solo color. El concepto de arboricidad por vértices, nombrado originalmente arboricidad puntual, fue definido por Chartrand, Kronk y Wall en [13], en donde los autores muestran que, para gráficas planas, la arboricidad es a lo más tres y mencionan que cualquier contraejemplo al Teorema de los cuatro colores [1, 2], en ese tiempo todavía una conjetura, tendría que tener cumplir esa cota. Aunque el Teorema de los cuatro colores es cierto, existen ejemplos de gráficas planas con arboricidad igual a tres. El objetivo de esta tesis es estudiar el estado del arte sobre la arboricidad por vértices en gráficas planas, enfocándonos principalmente en condiciones que garanticen que una gráfica plana tenga arboricidad a lo más dos.

Cabe destacar que la arboricidad por vértices cae dentro del área de descomposiciones de gráficas, en donde se busca descomponer por partes ya sea el conjunto de vértices o el de las aristas de tal forma que cada parte induzca una gráfica con ciertas características. Muchas veces a estas descomposiciones se les llama también coloraciones, ya que se suele visualizar a los elementos de cada parte pintados de determinado color y diferente a los de las demás partes. El lector interesado está invitado a hojear el libro de Jensen y Toft [20] sobre problemas de coloraciones de gráficas, así como literatura sobre descomposiciones similares a la arboricidad: descomposiciones relacionadas a la k -degeneración [21, 22, 28], descomposición por trayectorias [7, 8, 23], descomposición en subgráficas con el grado máximo acotado [6, 9].

La tesis está estructurada de la siguiente manera. En el primer capítulo se dan las definiciones y resultados básicos utilizados a lo largo de toda la tesis. Más precisamente, se definen y se dan resultados generales de dos espacios vectoriales asociados a una multigráfica, el espacio de ciclos y el espacio de cortes, los cuales servirán para demostrar, en el Capítulo 2, la Fórmula de Euler y más adelante, en el Capítulo 3, resultados relacionados con la gráfica dual de una gráfica plana. Además, se define el concepto principal de esta tesis, la arboricidad por vértices, y se dan resultados necesarios para el último capítulo.

En el segundo capítulo, después de una breve mención de los resultado topológicos necesarios,

se da la definición de gráfica plana y se revisan los resultados básicos para trabajar con gráficas planas. Además se ve la relación de los espacios vectoriales arriba mencionados de una gráfica plana con respecto a los mismos espacios de su gráfica dual, lo cual permite dar, en el Capítulo 3, una caracterización de las gráficas planas con arboricidad igual a dos. Al final de este capítulo se hace una breve revisión del método de descarga, el cual será una herramienta clave para los resultados principales de esta tesis.

En el tercer y último capítulo se da una demostración de la cota mencionada arriba, para luego pasar a estudiar, mediante el método de descarga, cómo la ausencia de ciclos de cierta longitud implica que la arboricidad es a lo más dos. Finalmente, se presenta una caracterización, demostrada por Hakimi y Schmeichel [17] en 1989, de las gráficas planas con arboricidad igual a dos.

Capítulo 1

Terminología y resultados básicos

En este capítulo se dan las definiciones y los resultados básicos sobre gráficas y multigráficas que se utilizan a lo largo de la tesis. La primera sección trata de resultados generales de gráficas y multigráficas. En la segunda sección se abordan resultados sobre la conexidad y, principalmente, sobre el espacio de ciclos y el espacio de cortes de una multigráfica. En la tercera parte se define la arboricidad por vértices de una gráfica, concepto principal de esta tesis, y se dan algunos resultados generales con respecto a éste. En la última sección se define qué significa que dos gráficas sean isomorfas y se dan algunos resultados al respecto, esto para justificar que en los próximos dos capítulos no se distinga a una gráfica planar de un encaje particular.

1.1. Gráficas y multigráficas

Una *gráfica simple* G es un par ordenado $(V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío y $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de $V(G)$. Los elementos de $V(G)$ son los *vértices* de la gráfica G y los elementos de $E(G)$ sus *aristas*. Si $E(G) = \emptyset$, se dice que G es la gráfica *vacía*. Dada una arista $e = \{u, v\}$, se dice que u y v son *adyacentes* y que e *incide* en u y v . Si dos aristas diferentes inciden en un mismo vértice, se dice que son *incidentes*. Dado v en $V(G)$, la *vecindad* de v , $N_G(v)$, es el conjunto de vértices adyacentes a v y todo vértice u en $N_G(v)$ se llama *vecino* de v . El *grado* de un vértice v es la cardinalidad de su vecindad y se denota con $d_G(v)$.

Ejemplo 1.1.1. Sea G la gráfica simple dada por $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$ (véase Figura 1.1(a)).

Una *multigráfica* G es una tripleta $(V(G), E(G), \psi_G)$, con $V(G)$ un conjunto finito no vacío, $E(G)$ un conjunto finito y ψ_G una función tal que

$$\psi_G : E(G) \longrightarrow \mathcal{P}_2(V(G)) - \{\emptyset\}$$

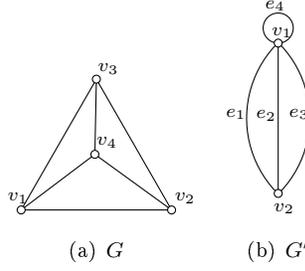


Figura 1.1: Ejemplos de gráfica simple y multigráfica

donde $\mathcal{P}_2(V(G))$ es el conjunto de subconjuntos con cardinalidad a lo más 2 del conjunto $V(G)$. Si $|\psi_G(e)| = 1$, con e en $E(G)$, e es un *lazo*. Dado v en $V(G)$, $d_G(v) = a + 2b$ donde b es el número de lazos que inciden en v y a el número de aristas que inciden en él y no son un lazo. Un vértice es un k -*vértice* si $d_G(v) = k$. Análogamente a una gráfica, se define la vecindad de un vértice de una multigráfica. Tomando la función identidad en el conjunto $E(G)$, toda gráfica simple es una multigráfica con tripleta $(V(G), E(G), Id_{E(G)})$. Si no se especifica más concretamente, cuando hablemos de una "gráfica", nos referiremos a una gráfica simple.

Ejemplo 1.1.2. Sea G' la multigráfica dada por $V(G') = \{v_1, v_2\}$, $E(G') = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y con función $\psi_{G'}$, tal que $\psi_{G'}(e_1) = \psi_{G'}(e_2) = \psi_{G'}(e_3) = \{v_1, v_2\}$ y $\psi_{G'}(e_4) = \{v_1\}$ (véase Figura 1.1(b)).

Una consecuencia de la definición del grado de un vértice es que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|.$$

Dada una multigráfica G , el *grado mínimo* de G es el menor de los grados de sus vértices y se le denotará por $\delta(G)$. El *grado máximo* de G es el mayor de los grados de sus vértices y se le denotará por $\Delta(G)$.

Una multigráfica H es *subgráfica* de G si $V(H)$ es subconjunto de $V(G)$, $E(H)$ es subconjunto de $E(G)$ y $\psi_{G|_{E(H)}} = \psi_H$. Dado S un subconjunto de $V(G)$, la *subgráfica inducida* por S , $G[S]$, es la subgráfica con conjunto de vértices S y todas las aristas de G entre vértices de S . Así, $G - S = G[V(G) - S]$. En caso de que S conste de un solo vértice v , se escribirá $G - v$. Dado F subconjunto de $E(G)$, $G[F]$ es la subgráfica que tiene por vértices los vértices en los que inciden las aristas de F y $E(G[F]) = F$. Una subgráfica H es *generadora*, si $V(G) = V(H)$.

Dadas una multigráfica G y H_1, \dots, H_k subgráficas de G , definimos la *unión* $\bigcup_{i=1}^k H_i$ como la subgráfica H con $V(H) = \bigcup_{i=1}^k V(H_i)$ y $\bigcup_{i=1}^k E(H_i)$. Una *descomposición (por aristas)* de una multigráfica G , es una familia \mathcal{F} de subgráficas ajenas por aristas de G , tales que $E(F) \neq \emptyset$ para

toda $F \in \mathcal{F}$ y

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} E(F) = E(G).$$

Sea G una multigráfica. Un *camino* C en G es una sucesión de vértices y aristas $[v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k]$ tal que $\psi_G(e_j) = \{v_{j-1}, v_j\}$. La *longitud* del camino C es igual al número de aristas que contiene. Si $v_0 = v_k$, el camino es *cerrado*; en otro caso, el camino es *abierto*. Un *paseo* es un camino que no repite aristas. Una *trayectoria* es un camino abierto que no repite vértices. Un *ciclo* es un camino cerrado tal que los únicos vértices que se repiten son el primero y el último. Dada una gráfica G con al menos un ciclo, el *cuello* de G es la mínima longitud de sus ciclos. Un ciclo C es un *k-ciclo* si la longitud de C es igual a k .

Puesto que en una gráfica G , entre cada par de vértices solo puede haber una arista, los caminos pueden ser dados por una sucesión de vertices.

Una *uv-trayectoria* es una trayectoria que tiene por vértice inicial y final a u y v respectivamente. En dicho caso, se dice que la trayectoria *conecta* a u con v . Dados A y B subconjuntos de $V(G)$, una trayectoria T es una *AB-trayectoria* si existen un par de vértices u y v en A y B , respectivamente, tales que T es una *uv-trayectoria*. Un *bosque* es una gráfica sin ciclos. A un vértice v en $V(G)$ tal que $d_G(v) = 1$, se le llama *hoja*.

Proposición 1.1.3. *Sea G una multigráfica. Si todos sus vértices tienen grado por lo menos dos, entonces existe un ciclo C en G .*

Demostración: Supóngase que no es cierto. Sea T una trayectoria en G de longitud máxima. Supóngase que $T = [v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k]$. Como $d_G(v_k) \geq 2$, existe un vértice u y una arista f tales que $\psi_G(f) = \{v_k, u\}$, y como G no tiene ciclos se tiene que $u \neq v_i$ para toda $1 \leq i \leq k$. Definimos $T' = [v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k f u]$ una trayectoria de longitud mayor a la de T , lo que contradice que T fuera de longitud máxima. Por lo tanto existe un ciclo C en G . ■

Corolario 1.1.4. *Sea G un bosque con al menos una arista. Entonces G tiene al menos dos hojas.*

Demostración: Si $\delta(G) > 1$, por la proposición anterior G tendría un ciclo. Por lo tanto $\delta(G) \leq 1$.

Mostraremos por inducción sobre $|V(G)|$ que G tiene al menos dos hojas. Si G tiene dos vértices u y v , ambos tienen grado igual a 1. Supóngase que la hipótesis es cierta para todo bosque G con a lo más n vértices. Sea G un bosque con $n + 1$ vértices y sean v_1, \dots, v_{n+1} sus vértices. Sin pérdida de la generalidad, supóngase que v_{n+1} es una hoja o un vértice aislado. Sea $G' = G - v_{n+1}$, bosque con n vértices. Por hipótesis de inducción, G' tiene dos hojas u_1 y u_2 . Como el grado de v_{n+1} es a lo más uno, solo puede ser adyacente a u_1 ó a u_2 . Por lo tanto G tiene dos hojas. ■

Dada una gráfica G , una *k-coloración* de G es una función $\gamma : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Las *clases cromáticas* de la coloración son los conjuntos V_1, \dots, V_k , donde $V_i = \gamma^{-1}(i)$. Si para toda clase

cromática V_i , $G[V_i]$ es vacía, la coloración es *propia*. Al mínimo natural r para el cual existe una r -coloración propia se le llama el *número cromático* de G . A éste se le denotará $\chi(G)$.

Dada una gráfica G , ésta es k -degenerada si para toda subgráfica H se tiene que $\delta(H) \leq k$. De lo anterior se tiene que, si G es k -degenerada, entonces $\delta(G) \leq k$.

Sea G una gráfica, definimos $mad(G)$, el *máximo grado medio* (maximum average degree en inglés), como

$$mad(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|} : H \text{ es subgráfica de } G \right\}$$

Lema 1.1.5. [18] *Si G es una gráfica tal que $mad(G) = q$, entonces G es $\lfloor q \rfloor$ -degenerada.*

Demostración: Supóngase que no es cierto. Entonces existe H subgráfica de G tal que $\delta(H) > \lfloor q \rfloor$. Si q está en \mathbb{Z}^+ , entonces $\delta(H) \geq q + 1 > q$. Si q está en $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, entonces $\delta(H) \geq \lceil q \rceil > q$. Por lo que

$$q = mad(G) \geq \frac{2|E(H)|}{|V(H)|} \geq \frac{\sum_{i=1}^{|V(H)|} \delta(H)}{|V(H)|} = \delta(H) > q$$

Por lo tanto G es $\lfloor q \rfloor$ -degenerada. ■

1.2. Conexidad y conjuntos de corte

1.2.1. Conexidad

Una multigráfica G es *conexa* si todo par de vértices está conectado por una trayectoria. Una gráfica conexa sin ciclos es un *árbol*, mientras que una gráfica sin ciclos se llama *bosque*.

Teorema 1.2.1. *Sea G un árbol. Entonces $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*

Demostración: Demostraremos el teorema por inducción en $|V(G)|$. Si $|V(G)| = 1$, se tiene que $|E(G)| = 0$. Supóngase que $|E(G)| = |V(G)| - 1$ para todo árbol G con $|V(G)| \leq n$. Sea ahora G un árbol con $|V(G)| = n + 1$. Todo árbol es un bosque, por lo que G tiene una hoja v . Consideremos ahora $G - v$. Sean $u_1, u_2 \in V(G) - \{v\}$ dos vértices. Entonces toda $u_1 u_2$ -trayectoria T en G , no contiene a v pues éste tiene grado uno. Por lo tanto, $G - v$ es conexa. Como evidentemente $G - v$ no tiene ciclos, entonces $G - v$ es un árbol con $|V(G - v)| = n$. Por hipótesis de inducción, $|E(G - v)| = |V(G - v)| - 1$. Por lo tanto $|E(G)| = |E(G - v)| + 1 = |V(G - v)| = |V(G)| - 1$. ■

Una multigráfica G es k -conexa si para todo par de vértices u y v existen k uv -trayectorias que tienen a u y v como únicos vértices en común, llamadas *trayectorias internamente ajenas*, es decir, existen T_1, \dots, T_k uv -trayectorias tales que $V(T_i) \cap V(T_j) = \{u, v\}$ si $i \neq j$. Al máximo número de

trayectorias internamente ajenas entre dos vértices u y v se denotara por $p(u, v)$. Las *componentes conexas* de G son las subgráficas maximales bajo la propiedad de ser conexas y $c(G)$ es el número de componentes conexas de G . Si para un vértice v se tiene que $G - v$ tiene más componentes conexas que G , v es un *vértice de corte*. Un *punte* es una arista e tal que $G - e$ tiene más componentes conexas que G .

Corolario 1.2.2. *Sea G un bosque. Entonces $|E(G)| \leq |V(G)| - 1$.*

Demostración: Si G es un árbol, por el Teorema 1.2.1, se tiene la igualdad. Supóngase que G no es conexas. Sean C_1, \dots, C_r las componentes conexas de G . Sean v_1, \dots, v_r vértices en $V(C_1), \dots, V(C_r)$, respectivamente. Definimos G' como $(V(G), E(G) \cup_{i=2}^r \{v_1 v_i\})$. Entonces G' es un árbol y G es una subgráfica de G' . Por lo tanto $|E(G)| < |E(G')| = |V(G)| - 1$. ■

Proposición 1.2.3. *Sean G una multigráfica y $e \in E(G)$. Entonces, e es un punte si y sólo si e no pertenece a ningún ciclo.*

Demostración: Supóngase que e es un punte, entonces e no puede ser un lazo. Sean $x, y \in V(G)$ tales que $\psi_G(e) = \{x, y\}$. Como $G - e$ tiene más componentes conexas, no puede existir una xy -trayectoria T en $G - e$, y por lo tanto e no puede estar en un ciclo.

Ahora, supóngase que e no está en ningún ciclo. Como no pertenece a ningún ciclo, e no puede ser un lazo, entonces existen $x, y \in V(G)$ diferentes, tales que $\psi_G(e) = \{x, y\}$. Si $G - e$ no tuviera más componentes conexas, existiría una xy -trayectoria $T = [x e_1 v_1 \dots e_k y]$. Entonces $C = [x e_1 v_1 \dots e_k y e x]$ sería un ciclo en G . Por lo tanto $G - e$ tiene más componentes conexas y e es un punte. ■

Dados dos vértices v, u no adyacentes de una multigráfica G , un uv -corte es un conjunto de vértices S , tal que en $G - S$ no existe ninguna uv -trayectoria. La cardinalidad mínima de un uv -corte se denota con $c(u, v)$.

A continuación presentamos el Teorema de Menger, un resultado clásico y de gran importancia en Teoría de Gráficas. Sin embargo, debido a su extensión y a que su metodología e ideas no son relevantes para la presentación de los resultados principales de esta tesis, no daremos la demostración de este teorema.

Teorema 1.2.4. (Teorema de Menger, véase [4], p. 208) *Sea G una multigráfica. Si u y v son vértices distintos no adyacentes, entonces $p(u, v) = c(u, v)$.*

Dada una multigráfica k -conexas G , se tiene por el Teorema de Menger que, para todo par de vértices no adyacentes u y v , $c(u, v) \geq k$, pues $p(u, v) \geq k$.

Una multigráfica conexas G es *separable* si existe una descomposición de ella en dos subgráficas conexas con un único vértice en común. A tal vértice se le llama *vértice de separación* y a la

descomposición se le llama *separación* de G . En otro caso se dice que la multigráfica G es *no separable*.

Todo vértice de corte es un vértice de separación, pero no todo vértice de separación es un vértice de corte. En el Ejemplo 1.1.2 (véase Figura 1.1(b)), la multigráfica G' no tiene vértices de corte y es 2-conexa. Pero el vértice v_1 es un vértice de separación, por lo que G' es separable. En este ejemplo la multigráfica es separable por el lazo y, de hecho, los lazos son el único impedimento para que una multigráfica 2-conexa sea no separable, lo cual veremos a continuación.

Proposición 1.2.5. *Sea G multigráfica. Si G es 2-conexa y separable, entonces G tiene un lazo.*

Demostración: Supóngase que no es cierta la proposición. Sea G una multigráfica 2-conexa, separable y sin lazos. Sean G_1 y G_2 las subgráficas de una separación de G , y sea v el vértice de separación asociado. Como G no tiene lazos, $|(N_G(v) - \{v\}) \cap V(G_i)| > 0$ para $i = 1, 2$. Sean v_1 y v_2 vértices en $V(G_1)$ y en $V(G_2)$ respectivamente. Como G es 2-conexa, existen dos v_1v_2 -trayectorias T y T' internamente ajenas. Si alguna de las dos no contuviera a v , existiría una arista en $E(G)$ incidente a un vértice de $V(G_1)$ y a uno de $V(G_2)$. Entonces existiría una arista que no está contenida ni en $E(G_1)$, ni en $E(G_2)$. Pero como $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$, entonces tenemos que v está en ambas trayectorias, lo que contradice que sean internamente ajenas. Por lo tanto, $|(N_G(v) - \{v\}) \cap V(G_i)| = 0$ para alguna $1 \leq i \leq 2$, por lo que v tiene al menos un lazo. ■

Siguiendo un razonamiento similar se puede probar el siguiente corolario.

Corolario 1.2.6. *Todo vértice de separación que no tenga lazos es un vértice de corte.*

Dada una gráfica G , un *bloque* es una subgráfica maximal bajo la propiedad de ser no separable.

Proposición 1.2.7. *(véase [4], p. 120) Sea G una multigráfica. Entonces:*

- (a) *Cualesquiera dos bloques tienen a lo más un vértice en común.*
- (b) *Los bloques de G generan una descomposición por aristas de G .*
- (c) *Todo ciclo está contenido en un bloque.*

Demostración: (a) Supóngase que existen bloques B_1, B_2 que comparten al menos dos vértices. Como un vértice junto con un lazo incidente a él es un bloque y B_1 y B_2 tienen al menos dos vértices, ni B_1 ni B_2 tiene lazos. Si $V(G) = \{v_1, v_2\}$, entonces $V_1 \subsetneq V_2$, contradicción a la definición de bloque. Por lo tanto, $|V(B_1)| > 2$. Análogamente, $|V(B_2)| > 2$. Entonces, como ambos son no separables (gráficas conexas y sin vértices de corte), sin lazos y con más de tres vértices, B_1 y B_2 son gráficas 2-conexas. Sea $B = B_1 \cup B_2$ y sea v un vértice de B . Como $B_1 - v$ y $B_2 - v$ son conexas y comparten por lo menos un vértice, se tiene que $B - v$ es conexa. Entonces B no tiene vértices

de corte ni lazos, por lo que es no separable y contiene a B_1 y a B_2 , lo cual es una contradicción con la maximalidad de B_1 y B_2 .

(b) Cada arista induce una subgráfica no separable, por lo que está contenida en un bloque. Debido a (a), cada arista está en un solo bloque.

(c) Un ciclo es una multigráfica no separable, por lo que tiene que estar contenido en un bloque. ■

Una multigráfica es *bipartita* si existe una partición V_1, V_2 de sus vértices tal que $G[V_i]$ tiene por conjunto de aristas al conjunto vacío para $i = 1, 2$. Una caracterización de las multigráficas bipartitas es la siguiente.

Proposición 1.2.8. (véase [5], p. 12) *Una multigráfica G es bipartita si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar.*

Dada una multigráfica G , se le asocia una gráfica bipartita $B(G)$, llamada el *árbol de bloques* con bipartición \mathcal{B}, \mathcal{S} , donde \mathcal{B} es el conjunto de bloques de G y \mathcal{S} el conjunto de vértices de separación en la gráfica G y donde un vértice $s \in \mathcal{S}$ es adyacente a un bloque $B \in \mathcal{B}$ si y sólo si $s \in V(B)$. Ahora, $B(G)$ no puede tener ciclos, pues de existir un ciclo C , éste implicaría la existencia de un ciclo que pasa por diferentes bloques de G , pero, por la Proposición 1.2.7, todo ciclo está contenido en un bloque. Por lo tanto, se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.2.9. (véase [4], p. 120) *Sea G una multigráfica conexa. Entonces $B(G)$ es un árbol.*

Una multigráfica G es *euleriana* si existe un paseo cerrado C en G tal que $E(C) = E(G)$. La caracterización clásica de las multigráficas eulerianas es la siguiente.

Teorema 1.2.10. (**Teorema de Euler**, véase [4], p. 88) *Una multigráfica conexa G es euleriana si y sólo si todos los vértices tienen grado par.*

Sin embargo, es de mayor interés para nosotros la siguiente caracterización, la cual nos permitirá relacionar el conjunto de aristas de una subgráfica euleriana de G con el espacio de ciclos de G , del cual hablaremos en la última parte de esta sección. Aunque el siguiente teorema es demostrado para gráficas en [12], la demostración es exactamente la misma para multigráficas.

Teorema 1.2.11. (véase [12], p. 96) *Una multigráfica conexa no vacía G es euleriana si y sólo si existe una descomposición $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_k\}$ de G tal que G_i es un ciclo para toda $1 \leq i \leq k$.*

Demostración: Sea G euleriana. Demostraremos el teorema por inducción en $m = |E(G)|$. Para $m = 1, 2, 3$ se cumple. Supongamos ahora que para toda $m \leq k$ se cumple. Sea G una gráfica euleriana con $m = k + 1$. Entonces, por el Teorema de Euler, todo vértice tiene grado par, por lo que, por Proposición 1.1.3, existe un ciclo C en G . Si $E(C) = E(G)$, entonces la descomposición trivial de $\mathcal{F} = \{G\}$ cumple. Supóngase entonces que $E(C)$ es subconjunto propio de $E(G)$ y sea

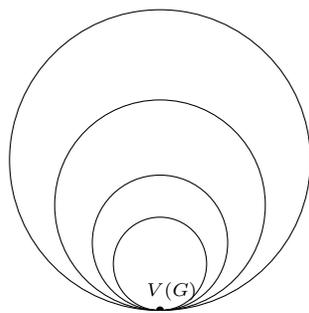


Figura 1.2: Contracción de G'

$G' = G - E(C)$. Como a cada vértice se le quitan ya sean 2 aristas ó un lazo, se tiene que $d_{G'}(v) = 2k$ para algún entero $k \geq 0$. Entonces cada componente conexa de G' es euleriana con menos de $k + 1$ aristas. Por hipótesis de inducción, para cada componente existe una descomposición con la condición buscada. La unión de todas estas descomposiciones junto con $\{C\}$ dan la descomposición buscada.

Por otro lado, supóngase que existe una descomposición $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_k\}$ de G tal que G_i es un ciclo para toda $i = 1, \dots, k$. Entonces, para tódo vértice v , los lazos incidentes a v contribuyen en 2 a su grado y, por cada arista e incidente a v que no es un lazo existe una i tal que e está en E_i y existe otra arista e' en E_i incidente a v . Esto implica que el grado de todo vértice es par, por lo que G es una gráfica par conexa y, por lo tanto, es euleriana. ■

Sea G una multigráfica. Una *contracción* de G es una multigráfica $H = (\mathcal{Q}, E(G), \psi_H)$, donde \mathcal{Q} es el conjunto de partes de una partición de $V(G)$ tal que para toda Q en \mathcal{Q} , se tiene que $G[Q]$ es conexa y $\psi_H(e) = \{U, V\}$ si $\psi_G(e) = \{u, v\}$, con u en U y v en V .

Ejemplo 1.2.12. La multigráfica $H = (\mathcal{Q}, E(G'), \psi_H)$ (véase figura 1.2), tomando G' la multigráfica del Ejemplo 1.1.2 (véase figura 1.1(b)) y $\mathcal{Q} = \{V(G')\}$, es una contracción de G' .

1.2.2. Conjuntos de corte

Dados dos subconjuntos no vacíos de vértices $V_1, V_2 \subseteq V(G)$ de una multigráfica G , $E(V_1, V_2)$ es el conjunto de todas las aristas de G tales que un extremo está en V_1 y el otro en V_2 . Un conjunto de aristas F es un *corte* si existe una partición no trivial de $V(G)$ en dos conjuntos V_1, V_2 tales que $F = E(V_1, V_2)$. Para un vértice v , $E(v) = E(\{v\}, V(G) - \{v\})$ es un corte llamado el *cociclo* de v . Un *corte minimal* es un corte no vacío que es minimal en cuanto a contención.

Proposición 1.2.13. Sea G una multigráfica conexa. Entonces $F = E(V_1, V_2)$ es un corte minimal si y sólo si $G[V_1]$ y $G[V_2]$ son conexas.

Demostración: Sea $F = E(V_1, V_2)$ un corte minimal. Supóngase que $G[V_1]$ no es conexa. Entonces existe una componente conexa C de $G[V_1]$ tal que $V_1 - V(C) \neq \emptyset$ y $E(V(C), V_2) \neq \emptyset$. Sea $F' = E(V_1 - V(C), V_2 \cup V(C))$. Entonces F' es un subconjunto propio de F , lo que es una contradicción a que F sea un corte minimal, por lo tanto, $G[V_1]$ es conexa. Análogamente, $G[V_2]$ es conexa.

Por otro lado, supóngase que $G[V_1]$ y $G[V_2]$ son conexas. Si existiera un corte $F' = E(V_1', V_2')$ subconjunto propio de F , tal que $G[V_1']$ y $G[V_2']$ son conexas, la V_1', V_2' partición de $V(G)$ sería diferente de V_1, V_2 . Entonces existiría un par de vértices v, u tales que ambos están en V_1 ó ambos en V_2 y están en partes diferentes de la partición V_1', V_2' . Sin pérdida de generalidad supóngase que $v, u \in V_1$. Como $G[V_1]$ es conexa, existe una uv -trayectoria T en $G[V_1]$, por lo que T no contiene aristas de F . Entonces T es una $V_1'V_2'$ -trayectoria, para la cual al menos una arista está en F' y por lo tanto en F , lo que es una contradicción. Por lo tanto, F es un corte minimal. ■

1.2.3. Espacio de ciclos y espacio de cortes

En esta sección estudiaremos el espacio de ciclos y el espacio de cortes de una multigráfica. Estos espacios junto con los resultados presentados aquí servirán para probar la Fórmula de Euler, fórmula que es la base del método de descarga, así como para dar una caracterización, en el Capítulo 3, de las gráficas planas con arboricidad dos, caracterización que es uno de los objetivos principales de esta tesis.

Dada una gráfica G , se puede definir un espacio vectorial $\mathcal{E}(G)$ como el espacio dado por los subconjuntos de $E(G)$ con la diferencia simétrica como operación sobre el campo finito $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Es decir, $\mathcal{E}(G) = \mathcal{P}(E(G))$ y para cualesquiera F_1, F_2 en $\mathcal{E}(G)$, $F_1 + F_2 = F_1 \Delta F_2$, $1F_1 = F_1$ y $0F_1 = \emptyset$. Si $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$, entonces el conjunto $\{\{e_1\}, \dots, \{e_m\}\}$ es un conjunto generador de $\mathcal{E}(G)$ y como para todas $i, j \in \{1, \dots, m\}$ diferentes, los conjuntos $\{e_i\}$ y $\{e_j\}$ son ajenos, se tiene que $\dim(\mathcal{E}(G)) = m$.

Dado $F \in \mathcal{E}(G)$, puede tomarse a F como $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, con $\lambda_i \in \mathbb{F}_2$ para toda $i \in \{1, \dots, m\}$ y $\lambda_i = 1$ si e_i está en F y $\lambda_i = 0$ si no está en F . Dados $F, F' \in \mathcal{E}(G)$, con $F = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ y $F' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$, definimos el siguiente producto:

$$\langle F, F' \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \lambda'_i.$$

Como el campo es de característica dos, $\langle F, F' \rangle = 0$ si y sólo si $|F \cap F'|$ es par (por lo que no es un producto interior).

Dado \mathcal{F} subespacio de $\mathcal{E}(G)$, definimos $\mathcal{F}^\perp = \{F' \in \mathcal{E}(G) : \langle F, F' \rangle = 0 \forall F \in \mathcal{F}\}$.

Proposición 1.2.14. *Sea \mathcal{F} subespacio de $\mathcal{E}(G)$. Entonces \mathcal{F}^\perp es subespacio de $\mathcal{E}(G)$ y $\dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{F}^\perp) = \dim(\mathcal{E}(G))$*

Demostración: Sea $\{F_1, \dots, F_k\}$ una base de \mathcal{F} . Definimos la transformación lineal

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{pmatrix}$$

con $\text{Ker}(F) = \mathcal{F}^\perp$. Entonces \mathcal{F}^\perp es subespacio de $\mathcal{E}(G)$. Por el teorema de la dimensión (ver [16], p. 70), tenemos que

$$\dim(\mathcal{F}^\perp) + \dim(\text{Im}(F)) = m,$$

donde $\dim(\text{Im}(F)) = \text{rang}(F) = k = \dim(\mathcal{F})$. ■

Definimos $C(G)$ como el subespacio de $\mathcal{E}(G)$ generado por los conjuntos de aristas de los ciclos de G . $C(G)$ es el *espacio de ciclos* de G , donde $\dim(C(G))$ es llamado el *número ciclomático* de G .

Análogamente se pueden definir $\mathcal{E}(G)$ para una multigráfica G (así como el producto y los diferentes subespacios arriba definidos).

Aunque todos los resultados de esta sección tomados de [14] están formulados y demostrados para gráficas, se pueden, como el autor menciona en p. 109, tomar las demostraciones sin cambio alguno para multigráficas.

Proposición 1.2.15. (véase [14], p. 24) *Sea G una multigráfica y F un subconjunto de $E(G)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) F está en $C(G)$.
- (ii) F es una unión disjunta (posiblemente vacía) de conjuntos de aristas de ciclos.
- (iii) Todos los vértices en la multigráfica $H(F) = (V(G), F, \psi_G|_F)$ tienen grado par.

Demostración: Para cualquier $F \in \mathcal{E}(G)$, sea $H(F) = (V(G), F, \psi_G|_F)$.

(i) *implica* (iii). Sea $F \in C(G)$ y sea $n_C(F)$ el mínimo número de ciclos necesarios para generar F . Demostraremos por inducción sobre $n_C(F)$ que todos los vértices en la multigráfica $H(F)$ tienen grado par. Si $n_C(F) = 0$ ó $n_C(F) = 1$, claramente todos los vértices de $H(F)$ tienen grado cero ó dos por lo que se cumple (iii). Supóngase que para toda $F \in C(G)$ con $n_C(F) \leq k$ se cumple (iii). Sea $F \in C(G)$ tal que $n_C(F) = k + 1$. Sean C_1, \dots, C_{k+1} ciclos en G que generan a F y sea $F' = C_1 + \dots + C_k$. Por hipótesis de inducción, se tiene que todo vértice en $H(F')$ tiene grado par. Para todo vértice $v \in V(H(F))$, si $v \notin V(C_{k+1})$, entonces $d_{H(F)}(v) = d_{H(F')}(v)$. Sea $v \in V(H(F)) \cap V(C_{k+1})$. Si C_{k+1} es un lazo, por la minimalidad del conjunto generador, se tiene que $d_{H(F)}(v) = d_{H(F')}(v) + 2$. Supóngase que C_{k+1} no es un lazo. Ahora, las aristas de C_{k+1} que inciden en v pueden ó no estar en F' , pues C_{k+1} puede compartir aristas con algún otro C_i , por lo

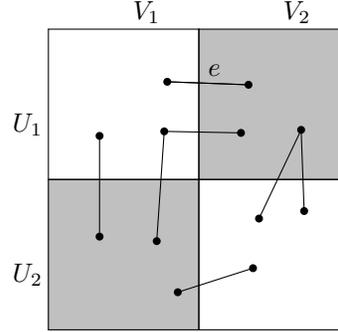


Figura 1.3: $D = D_1 + D_2$

que $d_{H(F)}(v) = d_{H(F')}(v) + 2$ ó $d_{H(F)}(v) = d_{H(F')}(v)$ ó $d_{H(F)}(v) = d_{H(F')}(v) - 2$ dependiendo si no comparten ninguna arista, comparte una o comparten dos. Por lo tanto todos los vértices de $H(F)$ tienen grado par.

(iii) *implica* (ii). Sea $F \in \mathcal{E}(G)$ tal que todos los vértices de $H(F)$ tienen grado par. Demostremos por inducción sobre $|F|$ que F es la unión disjunta de conjuntos de aristas de ciclos. Si $|F| = 0$ ó $|F| = 1$ esto se cumple, pues F es vacío o consta de un lazo. Supóngase que, para toda $F \in \mathcal{E}(G)$ tal que $|F| \leq k$ y tal que todos los vértices de $H(F)$ tienen grado par, F es la unión disjunta de conjuntos de aristas de ciclos. Sea $F \in \mathcal{E}(G)$ con $|F| = k + 1$ y tal que todos los vértices en la multigráfica $H(F)$ tienen grado par. Como todos los vértices tienen grado par y $F \neq \emptyset$, por la Proposición 1.1.3 existe un ciclo C en $H(F)$. Entonces el conjunto $F' = F - E(C)$ tiene a lo más k aristas, y para todo vértice v de la multigráfica $H(F')$ su grado es igual que en $H(F)$ ó $d_{H(F')}(v) = d_{H(F)}(v) - 2$. Por hipótesis de inducción, F' es la unión disjunta de ciclos. Sean C_1, \dots, C_r estos ciclos. Como $F' \cap E(C) = \emptyset$, entonces $F = \bigcup_{i=1}^r E(C_i) \cup E(C)$, donde la unión es disjunta.

(ii) *implica* (i). Se obtiene por definición de $C(G)$. ■

Del inciso (ii) de la Proposición 1.2.15 y del Teorema 1.2.11, se tiene que H , una subgráfica conexa de G , es euleriana si y sólo si $E(H) \in C(G)$.

Proposición 1.2.16. (véase [14], p. 25) *Junto con el conjunto vacío, el conjunto de cortes $C^*(G)$ de una multigráfica G es un subespacio de $\mathcal{E}(G)$. Este subespacio está generado por los cortes de la forma $E(v)$.*

Demostración: Sea $C^*(G)$ el conjunto que contiene a \emptyset y a todos los cortes de G . Como $D + D = \emptyset$ y $D + \emptyset = D$ para todo D en $C^*(G)$, solo falta ver que $D_1 + D_2$ está en $C^*(G)$ para cualesquiera dos cortes distintos D_1 y D_2 . Sean V_1, V_2 y U_1, U_2 particiones de $V(G)$ tales que $D_1 = (V_1, V_2)$

y $D_2 = (U_1, U_2)$. Sea $D = D_1 + D_2$. D es el conjunto de aristas tales que están en uno de los cortes y no en el otro (figura 1.3). Sea $e \in D$, entonces e está en D_1 y no está en D_2 o está en D_2 y no está en D_1 . Supóngase que e está en D_1 y no está en D_2 . Entonces e está en $G[U_1]$ ó en $G[U_2]$. Por lo tanto e está en $E(V_1 \cap U_1, V_2 \cap U_1)$ ó en $E(V_1 \cap U_2, V_2 \cap U_2)$. Análogamente, si e está en D_2 , se tiene que e está en $E(V_1 \cap U_1, V_1 \cap U_2)$ ó en $E(V_2 \cap U_1, V_2 \cap U_2)$. Por lo tanto $D = ((V_1 \cap U_2) \cup (V_2 \cap U_1), (V_1 \cap U_1) \cup (V_2 \cap U_2))$. Entonces D esta en $C^*(G)$.

Sea $D = (V_1, V_2)$ un corte. Definimos

$$D' := \sum_{v \in V_1} E(v).$$

Toda arista e en D tiene un extremo en V_1 y otro en V_2 , por lo que hay un único v en V_1 tal que e está $E(v)$. Por lo tanto, e está en D' . Si una arista e está en D' , implica que solamente uno de sus extremos incide en V_1 , por lo que el otro tiene que incidir en V_2 . Por lo tanto $D = D'$. ■

Al espacio $C^*(G)$ se le llama el *espacio de cortes* o el *espacio de cociclos* de G . El siguiente lema da una caracterización del espacio de cortes análoga al inciso (ii) de la Proposición 1.2.15. Estas dos caracterizaciones serán de gran utilidad en los próximos capítulos.

Lema 1.2.17. (véase [14], p. 25) *Sea G una multigráfica conexa. Entonces $C^*(G)$ está generado por los cortes minimales y todo elemento en F de $C^*(G)$ es la unión ajena de cortes minimales.*

Demostración: Sea $F = E(V_1, V_2)$ un corte. Supóngase que F no es un corte minimal. Como G es conexa y $V_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$, se tiene que $F \neq \emptyset$. Sea C una componente conexa de $G[V_1]$ y sean D_1, \dots, D_k componentes conexas de $G - V(C)$ con $k \geq 1$ (Figura 1.4). Nótese que $V(D_i) \subseteq V_2$ para toda $1 \leq i \leq k$. Sea $G_i = G - V(D_i)$ para toda $i \in \{1, \dots, k\}$. Para cada i , G_i es conexa, por lo que, por la Proposición 1.2.13 $E(V(C), V(D_i)) = E(V(D_i), V(G_i))$ es un corte minimal. Como estos conjuntos son ajenos, tenemos que

$$E(V(C), V_2) = \bigcup_{i=1}^k E(V(C), V(D_i)) = \sum_{i=1}^k E(V(C), V(D_i)).$$

Si C_1, \dots, C_r son las componentes conexas de $G[V_1]$, tenemos que $E(V(C_i), V_2)$ es la unión ajena de cortes minimales para toda i en $\{1, \dots, r\}$. Como $E(V(C_1), V_2), \dots, E(V(C_r), V_2)$ son ajenos, se tiene que

$$E(V_1, V_2) = \bigcup_{i=1}^r E(V(C_i), V_2) = \sum_{i=1}^r E(V(C_i), V_2). \quad \blacksquare$$

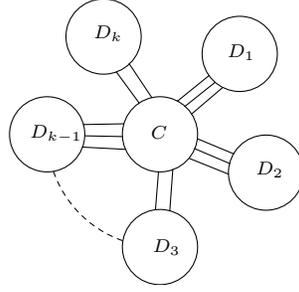


Figura 1.4: Multigráfica G y las componentes conexas de $G - V(C)$

Teorema 1.2.18. (véase [5], p. 14) Sea S subconjunto de $E(G)$. Entonces S está en $C^*(G)$ si y sólo si $|S \cap C|$ es par para todo C en $C(G)$.

Demostración: Sea $S \in C^*(G)$. Por la Proposición 1.2.15 solo es necesario mostrar que $|S \cap C|$ para todo conjunto $C \in C(G)$ de aristas de un ciclo. Si $S = \emptyset$, se tiene que $|S \cap C| = 0$ para todo ciclo C en G . Supóngase que $S \neq \emptyset$.

Supóngase que S está en $C^*(G)$. Por la definición de $C^*(G)$ S no contiene lazos y por la Proposición 1.2.16, se tiene que existen $v_1, \dots, v_k \in V(G)$ tales que

$$S = \sum_{i=1}^k E(v_i).$$

Entonces

$$\langle S, C \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k E(v_i), C \right\rangle = \sum_{i=1}^k \langle E(v_i), C \rangle$$

para todo conjunto $C \in C(G)$ de aristas de un ciclo. Ahora, $\langle E(v_i), C \rangle = 0$ para toda $i \in \{1, \dots, k\}$ y para todo conjunto $C \in C(G)$ de aristas de un ciclo, pues por definición $E(v_i)$ no contiene lazos y las aristas de C no inciden en v_i ó solamente dos inciden en él. Entonces $\langle S, C \rangle = 0$ y por la definición del producto se tiene que $|S \cap C|$ es par.

Por otro lado, sea $S \subseteq E(G) - \{\emptyset\}$ y supóngase que $|S \cap C|$ es par para todo C en $C(G)$. Sea K una componente conexas de $G - S$. Como un lazo es un ciclo de longitud uno, S no puede contener ninguno. Si existiera una arista $e \in E(G[V(K)]) \cap S$, entonces $e = \{u, v\}$ para algún par de vértices diferentes. Como K es conexas existe una vu -trayectoria P en K . Entonces, $P \cup \{e\}$ es un ciclo tal que $|S \cap (P \cup \{e\})| = 1$. Por lo tanto $E(G[V(K)]) \cap S = \emptyset$ para toda componente conexas K de $G - S$ y $G - S$ no es conexas. Sean K_1, \dots, K_r las componentes conexas de $G - S$, donde $r \geq 2$. Sea $\mathcal{Q} = \{V(K_1), \dots, V(K_r)\}$. Definimos $G' = (\mathcal{Q}, S, \psi_{G'})$, donde $\psi_{G'}(e) = \{V(K_i), V(K_j)\}$ si y sólo si $\psi_G(e) = \{v_i, v_j\}$ con $v_i \in V(K_i)$ y $v_j \in V(K_j)$. Probaremos que G' es una multigráfica

bipartita. Si G' no tiene ciclos, claramente es bipartita. Supóngase que G' tiene al menos un ciclo y sea $C' = [v_0e_1v_1 \cdots v_{k-1}e_kv_k]$ un ciclo en G' . Como cada v_i es un conjunto de vértices de una componente conexa K_j en $G - S$ para alguna $1 \leq j \leq r$ y S no tiene lazos, para cada v_i , con $1 \leq i \leq k$, existe una trayectoria T_i en la correspondiente componente conexa la cual conecta los extremos de las aristas e_i y e_{i+1} , donde $e_{k+1} = e_1$. Entonces existe un ciclo C en G tal que $C' = C' \cap S = C \cap S$. Entonces, por hipótesis, C' tiene longitud par. Por lo que G' es bipartita. Sea V'_1, V'_2 la partición de $V(G')$ y, para $i = 1, 2$, sea

$$V_i = \bigcup_{v_j \in V'_i} V(K_j).$$

Entonces $S = E(V_1, V_2) \in C^*(G)$. ■

Ahora podemos ver cuál es la relación entre $C(G)$ y $C^*(G)$ y cómo se determinan el uno al otro.

Teorema 1.2.19. (véase [14], p. 26) *Sea G una multigráfica. Entonces $C(G) = C^{*\perp}(G)$ y $C^*(G) = C^\perp(G)$.*

Demostración: Como consecuencia del Teorema 1.2.18, tenemos que $S \in C^*(G)$ si y sólo si $\langle S, C \rangle = 0$ para todo $C \in C(G)$, por lo tanto se tiene que $C^*(G) = C^\perp(G)$ y que $C(G)$ es subconjunto de $C^{*\perp}(G)$. Por la Proposición 1.2.15, si F subconjunto de $E(G)$ no está en $C(G)$, entonces existe un vértice v tal que un número impar de aristas de F inciden en él. Por lo tanto $\langle E(v), F \rangle = 1$. Entonces, como $E(v)$ está en $C^*(G)$, F no está en $C^{*\perp}(G)$. Por lo tanto, $C^{*\perp}(G) \subseteq C(G)$. ■

Teorema 1.2.20. (véase [5], p. 19) *Sea G una multigráfica. Entonces $\dim(C^*(G)) = |V(G)| - c(G)$.*

Demostración: Sean G_1, \dots, G_k las componentes conexas de G . Sean $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ los vértices de G . Sin pérdida de generalidad, supóngase que $v_i \in V(G_i)$ para toda $i \in \{1, \dots, k\}$. Sea $B = \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ y definimos $\mathcal{B} = \{E(v_{k+1}), \dots, E(v_n)\}$. Mostraremos que \mathcal{B} es una base de $C^*(G)$. Por contradicción, supóngase que existen escalares $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ no todos cero tales que

$$\sum_{i=k+1}^n \alpha_i E(v_i) = \emptyset$$

Sea T el subconjunto de B formado por todos los vértices v_i tales que $\alpha_i \neq 0$, $i \in \{k+1, k+2, \dots, n\}$. Como, para todo $v \in B$, v está en algún $V(G_i)$ junto con v_i y G_i es conexa, se tiene que $d_G(v) > 0$. Por lo tanto $E(v) \neq \emptyset$ para todo v en B . Sean T_1, \dots, T_k subconjuntos de T , donde $T_i = T \cap V(G_i)$.

Entonces

$$\emptyset = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i E(v_i) = \sum_{v \in T} E(v) = \sum_{v \in T_1} E(v) + \cdots + \sum_{v \in T_k} E(v)$$

Ahora, si para alguna $i \in \{1, \dots, k\}$

$$\sum_{v \in T_i} E(v) \neq \emptyset,$$

existiría $e \in E(G)$ tal que $e \in E(v)$ y $e \in E(u)$ con $v \in T_i$ y $u \in T_j$, $i \neq j$, pues la suma total de los cociclos de los vértices de T es igual a \emptyset . Entonces existiría una arista entre G_i y G_j componentes conexas diferentes. Por lo tanto

$$\sum_{v \in T_i} E(v) = \emptyset$$

para toda $1 \leq i \leq k$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $T_1 \neq \emptyset$. Entonces $G[T_1]$ es subgráfica de G_1 . Si $T_1 \neq V(G_1)$, entonces

$$\emptyset \neq \sum_{v \in T_1} E(v) = E(T_1, V(G_1) - T_1)$$

pues G_1 es conexas. Por lo tanto $T_1 = V(G_1)$, lo que implica que $V(G_1)$ es subconjunto de B , lo cual es una contradicción pues, por construcción, v_1 no está en B . Por lo tanto, \mathcal{B} es un conjunto linealmente independiente. Como

$$E(v_i) = E(\{v_i\}, V(G_i) - \{v_i\}) = E(\{v_i\}, B \cap V(G_i)) = \sum_{v \in B \cap V(G_i)} E(v),$$

se tiene que \mathcal{B} genera todos los cortes y, por lo tanto, es base de $C^*(G)$. Por lo que $\dim(C^*(G)) = |\mathcal{B}| = |V(G)| - c(G)$. ■

Corolario 1.2.21. (véase [5], p. 19) Sea G una multigráfica. Entonces $\dim(C(G)) = |E(G)| - |V(G)| + c(G)$.

Demostración: Por la Proposición 1.2.14 y el Teorema 1.2.19 tenemos que

$$|E(G)| = \dim(C(G)) + \dim(C^*(G))$$

y del Teorema 1.2.20 se obtiene que

$$\dim(C(G)) = |E(G)| - |V(G)| + c(G).$$
■

1.3. Arboricidad

En esta sección definiremos la arboricidad por vértices de una gráfica, concepto llamado originalmente "arboricidad puntual" por Chartrand, Kronk y Wall [13]. En este artículo los autores demostraron que la arboricidad de una gráfica plana es a lo más tres. En 1969, Chartrand y Kronk [11], muestran una gráfica plana que alcanza tal cota. El objetivo de esta tesis es presentar los resultados que hay a la fecha sobre gráficas planas con arboricidad a lo más dos. Antes de hacer esto, daremos en esta sección algunos resultados necesarios sobre la arboricidad en gráficas en general.

Dada una gráfica G , la *arboricidad (por vértices)* de G se define como el mínimo natural r tal que existe una descomposición $V(G) = V_1 \cup V_2 \cdots \cup V_r$, donde $G[V_i]$ es acíclica para toda $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Esto es equivalente a que exista una *r -coloración acíclica*, es decir, una r -coloración tal que las clases cromáticas induzcan subgráficas acíclicas. Se denotará con $a(G)$ la arboricidad de G . Hay que decir que generalmente se entiende por coloración acíclica una coloración propia tal que no hay ciclos bicromáticos. Como toda gráfica acíclica es bipartita y todas las clases cromáticas de una coloración propia generan gráficas vacías, se tiene que $a(G) \leq \chi(G) \leq 2a(G)$ [13]. Para toda subgráfica H , una coloración acíclica γ de G da una coloración acíclica γ_H de H , por lo que $a(H) \leq a(G)$.

Lema 1.3.1. *Sea G una gráfica y sean C_1, \dots, C_r sus componentes conexas. Entonces $a(G) = \max_{1 \leq i \leq r} \{a(C_i)\}$.*

Demostración: Para cada componente conexa C_i , con $1 \leq i \leq r$, sea $B_1^i, \dots, B_{a(C_i)}^i$ una partición de $V(C_i)$ dada por una $a(C_i)$ -coloración acíclica. Sea $k = \max_{1 \leq i \leq r} \{a(C_i)\}$. Definimos B_1, \dots, B_k partición de $V(G)$, donde $B_j = \bigcup_{i=1}^r B_j^i$ y $B_j^i = \emptyset$ si $j > a(C_i)$. Para cada $1 \leq j \leq k$, $G[B_j]$ es acíclica, pues cada $G[B_j^i]$ es acíclica y, de existir un ciclo, éste tendría que pasar por al menos dos componentes diferentes. Por lo tanto $a(G) \leq \max_{1 \leq i \leq r} \{a(C_i)\}$. Como la arboricidad de una subgráfica de G es menor o igual a la de G , se tiene que $\max_{1 \leq i \leq r} \{a(C_i)\} \leq a(G)$ y, por lo tanto, $a(G) = \max_{1 \leq i \leq r} \{a(C_i)\}$. ■

Lema 1.3.2. *Sea G una gráfica y sean B_1, \dots, B_k sus bloques. Entonces $a(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{a(B_i)\}$.*

Demostración: Demostraremos el lema por inducción sobre el número de bloques de G . Si G consta de un sólo bloque no hay nada que probar. Supóngase que el lema es cierto para toda gráfica G con a lo más k bloques. Sea G gráfica con $k + 1$ bloques. Si G no es conexa, cada componente conexa tiene menos de $k + 1$ bloques. Por hipótesis de inducción, para cada componente C se cumple que su arboricidad es igual al máximo de las arboricidades de sus bloques. Por el lema anterior se tiene que la arboricidad de G es igual a la mayor de las arboricidades de sus componentes, que es igual a la mayor de las arboricidades de sus bloques. Supóngase que G es conexa. Sean B_1, \dots, B_k, B_{k+1} sus bloques y sin pérdida de generalidad, supóngase que B_{k+1} es una hoja en

el árbol de bloques de G . Definimos $G' = G \left[\bigcup_{i=1}^k V(B_i) \right]$ gráfica con k bloques. Por hipótesis de inducción, $a(G') = \max_{1 \leq i \leq k} \{a(B_i)\}$. Hay dos posibilidades: $a(G') \leq a(B_{k+1})$ o $a(B_{k+1}) \leq a(G')$. Sean γ_1 y γ_2 coloraciones acíclicas de G' y B_{k+1} , respectivamente. Sea v el vértice de corte en B_{k+1} . Supóngase que $\gamma_1(v) = i$ y $\gamma_2(v) = j$. Definimos

$$\gamma(u) = \begin{cases} \gamma_1(u) & \text{si } u \in V(G') \\ \sigma_{ji}(\gamma_2(u)) & \text{si } u \in V(B_{k+1}) \end{cases}$$

donde σ_{ji} es la permutación de j con i en $S_{\max\{i,j\}}$ grupo de permutaciones. Sin importar si $i \leq j$ o $i \geq j$, se obtiene una coloración acíclica con el máximo de las dos arboricidades. Como toda coloración acíclica de G tiene que ser una coloración acíclica para toda subgráfica de G , no puede haber otra coloración con menos colores. ■

De los dos lemas anteriores se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 1.3.3. [13] *Sea G una gráfica. Si C_1, \dots, C_r son sus componentes conexas y B_1, \dots, B_k sus bloques, entonces $a(G) = \max_{1 \leq i \leq r} \{a(C_i)\} = \max_{1 \leq i \leq k} \{a(B_i)\}$.*

El siguiente lema muestra la relación entre la k -degeneración de una gráfica y su arboricidad. Después de que demos una cota para el grado mínimo de una gráfica plana, este lema nos permitirá dar una demostración de la cota para la arboricidad de una gráfica plana.

Lema 1.3.4. [25] *Sea $k \geq 1$ un entero. Si G es k -degenerada entonces $a(G) \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$.*

Demostración: Demostraremos el lema por inducción sobre $|V(G)|$. Si $|V(G)| = 1$ se tiene que $a(G) \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$. Supóngase que $a(G) \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ para toda gráfica G con $|V(G)| \leq n$. Sea G una gráfica k -degenerada con $|V(G)| = n + 1$. Sea $v \in V(G)$ tal que $\delta(G) = d_G(v) \leq k$. Sea $G' = G - v$ gráfica k -degenerada de orden n . Por hipótesis de inducción $a(G') \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$. Si $a(G') < \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ tómesese la partición de $V(G')$ en $a(G')$ partes e inclúyase el conjunto $\{v\}$, con lo cual se tiene una $a(G') + 1$ partición de $V(G)$ con las condiciones buscadas, por lo que $a(G) \leq a(G') + 1 \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$. Supóngase ahora que $a(G') = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$. Sea $A_1, \dots, A_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$ una partición de $V(G')$ tal que $G'[A_i]$ es acíclica para toda $i \in \{1, \dots, \lceil \frac{k+1}{2} \rceil\}$. Si $|A_i \cap N_G(v)| \geq 2$ para toda $i \in \{1, \dots, \lceil \frac{k+1}{2} \rceil\}$ entonces $d_G(v) \geq 2 \lceil \frac{k+1}{2} \rceil \geq k + 1$. Por lo tanto, existe $i \in \{1, \dots, a(G')\}$ tal que $|A_i \cap N_G(v)| \leq 1$, por lo que agregar v en esa partición no genera un ciclo en la correspondiente subgráfica inducida. Por lo tanto $a(G) \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$. ■

1.4. Gráficas isomorfas

En esta sección damos algunos resultados sobre isomorfismos de gráficas, esto con el objetivo de justificar que, en los resultados que presentaremos sobre gráficas planas, aunque la demostración se base en un encaje particular, el resultado no depende del encaje.

Dos multigráficas G y H son *isomorfas* si existen dos funciones biyectivas

$$\theta : V(G) \longrightarrow V(H)$$

y

$$\vartheta : E(G) \longrightarrow E(H)$$

tales que $\psi_G(e) = \{u, v\}$ si y sólo si $\psi_H(\vartheta(e)) = \{\theta(u), \theta(v)\}$. En tal caso se escribirá $G \cong H$. De la definición de isomorfismo es fácil ver que se cumple la siguiente proposición.

Proposición 1.4.1. *Sean G y H dos multigráficas tales que $G \cong H$. Entonces:*

- (a) $d_G(v) = d_H(\theta(v))$ para todo $v \in V(G)$. En particular $\Delta(G) = \Delta(H)$ y $\delta(G) = \delta(H)$.
- (b) $C = [v_0 e_1 v_1 \cdots e_k v_k]$ es un camino (una trayectoria, un ciclo) si y sólo si $C' = [\theta(v_0) \vartheta(e_1) \theta(v_1) \cdots \vartheta(e_k) \theta(v_k)]$ es un camino (una trayectoria, un ciclo).
- (c) $|V(G)| = |V(H)|$ y $|E(G)| = |E(H)|$.
- (d) $\chi(G) = \chi(H)$.

Corolario 1.4.2. *Sean G y H dos multigráficas tales que $G \cong H$. Entonces G es conexa si y sólo si H es conexa.*

Demostración: Por la Proposición 1.4.1, T es una uv -trayectoria si y sólo si T' es una $\theta(u)\vartheta(v)$ -trayectoria. ■

Corolario 1.4.3. *Sean G y H dos multigráficas tales que $G \cong H$. Entonces $a(G) = a(H)$.*

Demostración: Sea $V(G) = V_1, \dots, V_{a(G)}$ una descomposición tal que $G[V_i]$ es acíclica para toda $i \in \{1, \dots, a(G)\}$. Si $H[\theta(V_i)]$ tiene un ciclo C' para alguna $i \in \{1, \dots, a(G)\}$, entonces sería de la forma $[\theta(v_0) \vartheta(e_1) \theta(v_1) \cdots \vartheta(e_k) \theta(v_k)]$ para algunos $v_0, \dots, v_k \in V(G)$ y para algunas $e_1, \dots, e_k \in E(G)$. Por el inciso (b) de la Proposición 1.4.1, $C = [v_0 e_1 v_1 \cdots e_k v_k]$ sería un ciclo. Por lo tanto $H[\theta(V_i)]$ es acíclica para toda $i \in \{1, \dots, a(G)\}$, por lo que $a(H) \leq a(G)$. Análogamente $a(G) \leq a(H)$ y, por lo tanto, $a(G) = a(H)$. ■

Lema 1.4.4. Sean G y H dos multigráficas tales que $G \cong H$. Entonces $\hat{\vartheta} : \mathcal{E}(G) \longrightarrow \mathcal{E}(H)$, con $\hat{\vartheta}(F) = \{\vartheta(e)\}_{e \in F}$, es un isomorfismo.

Demostración: Como $|E(G)| = |E(H)|$, se tiene que $\dim(\mathcal{E}(G)) = \dim(\mathcal{E}(H))$ y como $\hat{\vartheta}(F) = \emptyset$ implica que $F = \emptyset$, se tiene que, si $\hat{\vartheta}$ es una transformación lineal, $\hat{\vartheta}$ es un isomorfismo (véase [16], p.71). Como el campo es \mathbb{F}_2 , sólomente se necesita ver que abre sumas. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{E}(G)$. Si $e \in F_1 + F_2$, entonces $e \notin F_1$ y $e \in F_2$ ó $e \notin F_2$ y $e \in F_1$, por lo que $\vartheta(e) \notin \hat{\vartheta}(F_1)$ y $\vartheta(e) \in \hat{\vartheta}(F_1)$ ó $\vartheta(e) \notin \hat{\vartheta}(F_2)$ y $\vartheta(e) \in \hat{\vartheta}(F_2)$. En cualquier caso $\vartheta(e) \in \hat{\vartheta}(F_1) + \hat{\vartheta}(F_2)$, por lo que $\hat{\vartheta}(F_1 + F_2) \subseteq \hat{\vartheta}(F_1) + \hat{\vartheta}(F_2)$. Ahora, sea $e' \in \hat{\vartheta}(F_1) + \hat{\vartheta}(F_2)$, entonces $e' \in \hat{\vartheta}(F_1)$ ó $e' \in \hat{\vartheta}(F_2)$. Como ϑ es biyectiva, existe $e \in F_1$ ó $e \in F_2$, tal que $\vartheta(e) = e'$, por lo que $e \in F_1 + F_2$. Entonces $\vartheta(e) = e' \in \hat{\vartheta}(F_1 + F_2)$, por lo que $\hat{\vartheta}(F_1) + \hat{\vartheta}(F_2) \subseteq \hat{\vartheta}(F_1 + F_2)$. Por lo tanto $\hat{\vartheta}(F_1 + F_2) = \hat{\vartheta}(F_1) + \hat{\vartheta}(F_2)$ y $\hat{\vartheta}$ es un isomorfismo. ■

Corolario 1.4.5. Sean G y H dos multigráficas tales que $G \cong H$. Entonces $C \in C(G)$ si y sólo si $\hat{\vartheta}(C) \in C(H)$.

Demostración: Por la Proposición 1.2.15, sólo es necesario considerar conjuntos de aristas de ciclos. Por el inciso (b) de la Proposición 1.4.1, C es el conjunto de aristas de un ciclo si y sólo si $\hat{\vartheta}(C)$ es el conjunto de aristas de un ciclo. ■

Proposición 1.4.6. Sean G y H dos multigráficas tales que $G \cong H$. Entonces $F \in C^*(G)$ si y sólo si $\hat{\vartheta}(F) \in C^*(H)$.

Demostración: Por el Lema 1.2.16 y el Lema 1.4.4, sólo es necesario considerar cortes de la forma $E(v)$ para algún vértice v . Demostraremos que $\hat{\vartheta}(E(v)) = E(\theta(v))$. Sea $e \in E(v)$, entonces existe $u \in V(G) - \{v\}$ tal que $\psi_G = \{v, u\}$, y como $G \cong H$, se tiene que $\psi_H(\vartheta(e)) = \{\theta(v), \theta(u)\}$. Por lo tanto $\vartheta(e) \in E(\theta(v))$, lo que implica que $\hat{\vartheta}(E(v)) \subseteq E(\theta(v))$. Ahora, sea $e' \in E(\theta(v))$. Entonces existe $u' \in V(H)$, tal que $\psi_H(e') = \{\theta(v), u'\}$. Como θ y ϑ son biyectivas, existe un único $u \in V(G)$ tal que $\theta(u) = u'$ y existe una única $e \in E(G)$ tal que $\vartheta(e) = e'$. Por lo tanto $\psi_H(e') = \psi_H(\vartheta(e)) = \{\theta(v), \theta(u)\}$, lo que implica que $\psi_G = \{v, u\}$. Entonces, $e \in E(v)$, por lo que $\hat{\vartheta}(E(v)) \subseteq E(\theta(v))$. ■

Como consecuencia del Corolario 1.4.5 y la Proposición 1.4.6 se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 1.4.7. Sean G y H multigráficas. Si $G \cong H$, entonces $C(G)$ es isomorfo a $C(H)$ y $C^*(G)$ es isomorfo a $C^*(H)$.

Capítulo 2

Gráficas planas

En este capítulo se revisan los resultados concernientes a gráficas planas, necesarios para el estudio de la arboricidad en el próximo capítulo. Una gráfica plana es una gráfica que se puede dibujar en el plano de tal forma que las aristas sólo se intersequen en los vértices. La definición precisa de lo anterior involucra necesariamente a la topología de \mathbb{R}^2 . La siguiente sección contiene definiciones y resultados de topología necesarios para el tratamiento de gráficas planas. Como estos caen fuera de la Teoría de Gráficas, los enunciaremos mas no daremos prueba alguna de ellos. En la segunda sección se da la definición formal de gráfica plana, así como la de gráfica dual. Una vez que se dan algunos resultados básicos se pasa a estudiar la relación entre el espacio de ciclos y el espacio de cortes de una gráfica plana y el espacio de ciclos y el espacio de cortes de su dual. De esta relación deduciremos la Fórmula de Euler. En la última sección se hace una revisión del método de descarga, método que juega un papel fundamental en el próximo capítulo.

2.1. Prerrequisitos topológicos

Un espacio topológico X es *inconexo* si existen conjuntos abiertos ajenos no vacíos U_1 y U_2 en X , tales que $X = U_1 \cup U_2$. Se dice que X es *conexo* si no es inconexo. Dado un espacio topológico X , sus *componentes conexas* son sus subespacios conexos maximales en cuanto a contención.

Dado un espacio topológico X y $U \subseteq X$, la *cerradura* de U se denotará con \bar{U} . Una *curva simple* C en X es la imagen de una función $f : [0, 1] \rightarrow X$ continua e inyectiva. Se dice que la curva $C = f([0, 1])$ conecta a sus *extremos* $f(0)$ y $f(1)$. Una *curva cerrada simple* C es la imagen de una función $f : [0, 1] \rightarrow X$ continua tal que $f(0) = f(1)$ y la restricción de f a $(0, 1)$ es inyectiva. Dada una curva C y su función f , el *interior* de la curva es el conjunto $f((0, 1))$ y se denota por $\overset{\circ}{C}$. Un espacio topológico X es *conectable por trayectorias* si, para cualesquiera dos puntos en X , existe una curva simple C que los conecta.

Una *base local de vecindades* de un punto $x \in X$ es una familia B_x de vecindades de x tal que para toda vecindad U de x existe una vecindad $V \in B_x$ tal que $V \subseteq U$.

Un espacio topológico es *localmente conectable por trayectorias* si cada punto $x \in X$ tiene una base local formada por vecindades conectables por trayectorias.

Un conjunto C *separa* a X si $X - C$ no es conectable por trayectorias. Las *componentes conectable por trayectorias* o *regiones* de $X - C$ son las clases de equivalencia de la relación definida de la siguiente manera: dos puntos u y v de $X - C$ están relacionados si existe una curva simple que los conecte.

Proposición 2.1.1. (véase [24], p. 158) *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes*

- X es localmente conectable por trayectorias.
- Para todo abierto $U \subseteq X$, las componentes conectables por trayectorias de U son abiertas.

Teorema 2.1.2. (**Teorema de la curva de Jordan**, véase [24], p. 360) *Toda curva simple cerrada C en el plano lo divide en exactamente dos regiones. Ambas regiones tienen por frontera a C .*

Dada una curva simple cerrada C en el plano, a la región no acotada, denotada por $ext(C)$, le llamaremos región *exterior*; y a la acotada, denotada por $int(C)$, le llamaremos región *interior*.

Una curva simple f en \mathbb{R}^n es *poligonal* si existen $x_1, \dots, x_r \in (0, 1)$ tales que $f([x_i, x_{i+1}])$ es un segmento de recta para toda $i \in \{0, 1, \dots, r\}$, donde $x_0 = 0$ y $x_{r+1} = 1$.

Lema 2.1.3. (véase [24], p. 352) *Si $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto y conectable por trayectorias, entonces cualesquiera dos puntos en U se pueden unir por una trayectoria poligonal.*

Proposición 2.1.4. (véase [10], p.141) *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto conexo, cuya frontera ∂U está formada por líneas poligonales. Sean $x_1 \in \partial U$, $x_2 \in \bar{U}$ y P una curva poligonal que conecta a x_1 con x_2 tal que, $\dot{P} \subseteq U$.*

- (a) *Si x_1 y x_2 están en la misma componente conexa de ∂U , entonces $U - \dot{P}$ tiene dos componentes conexas y P está en la frontera de cada una de estas componentes.*
- (b) *Si x_1 y x_2 están en componentes conexas diferentes de ∂U , entonces $U - P$ es conexo.*

2.2. Conceptos y resultados básicos

Una multigráfica G es *planar* si se puede dibujar en \mathbb{R}^2 de tal forma que las aristas sólo se intersequen en los vértices, es decir si se puede tomar un punto x_v en el plano por cada vértice v (puntos diferentes para vértices diferentes) y una curva simple dada por una función $f_e : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ por cada arista e tal que:

- (i) Los extremos de la curva son los vértices en los que incide la arista e . Es decir, si $\psi_G(e) = \{v, u\}$, entonces $f_e(0) = x_v$ y $f_e(1) = x_u$ ó $f_e(0) = x_u$ y $f_e(1) = x_v$.
- (ii) Para cualesquiera dos aristas diferentes e, e' , $f_e((0, 1)) \cap f_{e'}((0, 1)) = \emptyset$.
- (iii) Para toda $e \in E(G)$, $x_v \notin f_e((0, 1))$ para todo $v \in V(G)$.

A este dibujo se le llama *encaje* de G en el plano. Una multigráfica *plana* \hat{G} es un encaje de una multigráfica planar G . El encaje es un conjunto compacto de \mathbb{R}^2 , ya que es la unión finita de conjuntos compactos. Por lo tanto $\mathbb{R}^2 - \hat{G}$ es abierto y, por la Proposición 2.1.1 sus regiones son conjuntos abiertos. Dado un encaje \hat{G} de G , las *caras* de éste son las regiones de $\mathbb{R}^2 - \hat{G}$, que tienen por frontera caminos de \hat{G} o la unión ajena de caminos de \hat{G} . Al conjunto de caras de un encaje \hat{G} se le denotará por $F(\hat{G})$. Dada una cara f en $F(\hat{G})$, a su frontera se le llamara *camino frontera*, y a este se le denotara con $\partial(f)$. A la región no acotada de $\mathbb{R}^2 - \hat{G}$ se le llama *cara exterior*. Si para toda $e \in E(G)$, f_e es poligonal, se dice que el encaje es *poligonal*.

Aunque la demostración del siguiente lema no es muy complicada, es puramente topológica, motivo por el cual la omitiremos.

Lema 2.2.1. (véase [10], p. 135) *Si G es planar, entonces existe un encaje poligonal \hat{G} .*

Dados G una multigráfica planar y \hat{G} un encaje de G , entonces \hat{G} es efectivamente una multigráfica, tomando la tripleta $(V(\hat{G}), E(\hat{G}), \psi_{\hat{G}})$, donde $V(\hat{G}) = \{x_v\}_{v \in V(G)}$, $E(\hat{G}) = \{f_e([0, 1])\}_{e \in E(G)}$ y $\psi_{\hat{G}}(f_e) = \{f_e(0), f_e(1)\}$. Además, por como fue definido un encaje, se tiene que $|V(G)| = |V(\hat{G})|$, $|E(G)| = |E(\hat{G})|$ y $\psi_G(e) = \{u, v\}$ si y sólo si $\psi_{\hat{G}}(f_e) = \{x_u, x_v\}$ (es decir G es isomorfa a \hat{G}).

De ahora en adelante no distinguiremos entre una multigráfica planar G y un encaje particular \hat{G} . Y por el Lema 2.2.1, supondremos que todos los encajes son poligonales.

Lema 2.2.2. (véase [10], p. 145) *Sea G una multigráfica plana y sea $e \in E(G)$. Entonces se cumple lo siguiente:*

- (i) *Si e está en un ciclo C de G , entonces e está en la frontera de exactamente dos caras diferentes de G .*
- (ii) *Si e no está en ningún ciclo, entonces e está en la frontera de una única cara de G .*

Demostración: (i) Si e está en un ciclo C , sin pérdida de la generalidad, supóngase que es un ciclo minimal, es decir, que $G[V(C)] = C$. Obsérvese que e está en una cara U de $G - e$. Como C es un ciclo, los vértices $x_1, x_2 \in \psi_G(e)$ están en la misma componente conexa de $\partial(U)$ y $C - e \subseteq \partial(U)$. Entonces, por el inciso (a) de la Proposición 2.1.4, $U - e$ tiene dos componentes conexas que son las caras en cuyas fronteras está e .

(ii) Si e no está en ningún ciclo, por la Proposición 1.2.3, e es un puente. Sean x_1 y x_2 los vértices en los que incide e . e está en una cara U de $G - e$. Como e es un puente, se tiene que

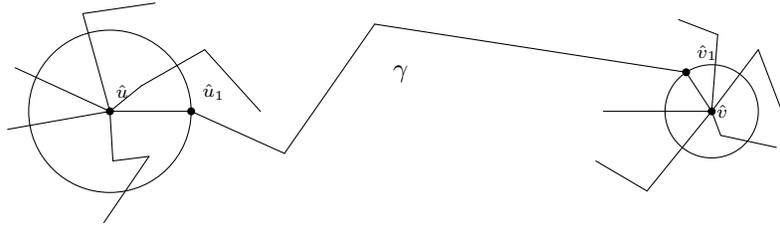


Figura 2.1:

$G - e$ tiene dos componentes conexas G_1 y G_2 tales que $x_i \in V(G_i)$ para $i = 1, 2$, es decir, están en componentes conexas diferentes de $\partial(U)$. Entonces, por el inciso (b) de la Proposición 2.1.4, se tiene que e no desconecta a U , es decir, $U - e$ es conexo. Por lo tanto, e está en la frontera de una única cara de G . ■

Dada una gráfica plana G y $f \in F(G)$, definimos el *grado* de f como $d_G(f) = a + 2b$, donde a es el número de aristas en su frontera que no son un puente y b el número de puentes en su frontera. Una cara f es una k -cara si $d_G(f) = k$. G es una *triangulación* si $d_G(f) = 3$ para toda $f \in F(G)$. De la definición y del Lema 2.2.2 se tiene que

$$\sum_{f \in F(G)} d_G(f) = 2|E(G)|.$$

Si una arista $e \in E(G) \cap E(\partial(f))$, se dice que f *incide* en e . Si un vértice $v \in V(G) \cap V(\partial(f))$, se dice que f *incide* en v . Si $f_1, f_2 \in F(G)$ son tales que $E(\partial(f_1)) \cap E(\partial(f_2)) \neq \emptyset$, se dice que las caras son *adyacentes*. Una gráfica plana G es plana maximal si no existe ninguna gráfica plana G' tal que $V(G) = V(G')$ y $E(G) \subsetneq E(G')$.

Proposición 2.2.3. (véase [10], p. 147) *Todo bosque G es planar y cualquier encaje de G tiene una sola cara.*

Demostración: Demostraremos la proposición por inducción sobre $|E(G)|$. Si $|E(G)| = 0$, el bosque claramente es plano y sólo tiene una cara. Supóngase cierto para todo bosque G con $|E(G)| \leq k$. Sea G bosque con $|E(G)| = k + 1$. Sea $e \in E(G)$. Definimos $G' = G - e$, bosque con $|E(G')| = k$. Por hipótesis de inducción, existe un encaje \hat{G}' de G' con una sola cara f . Entonces $\mathbb{R}^2 - \hat{G}'$ es un abierto conectable por trayectorias. Como G es un bosque, e no es un lazo (de hecho es un puente) y si $e = \{u, v\}$, entonces u y v están en diferentes componentes conexas de G' . Sean $\hat{u}, \hat{v} \in \mathbb{R}^2$ los puntos del encaje correspondientes a u y v , respectivamente. Sean ε_1 y ε_2 , tales que existen puntos \hat{u}_1 y \hat{v}_1 en $\partial(B_\varepsilon(\hat{u}))$ y en $\partial(B_\varepsilon(\hat{v}))$, respectivamente y que los radios a esos puntos no cruzan a \hat{G}'

mas que en los centros de las bolas (ver Figura 2.1). Entonces \hat{u}_1 y \hat{v}_1 están en $\mathbb{R}^2 - \hat{G}'$. Por el Lema 2.1.3 existe una trayectoria poligonal γ en $\mathbb{R}^2 - \hat{G}'$ que conecta a \hat{u}_1 y \hat{v}_1 . Tomando el radio $\hat{u}\hat{u}_1$, luego γ y por último el radio $\hat{v}\hat{v}_1$ obtenemos una trayectoria poligonal de \hat{u} a \hat{v} que no cruza por otros puntos a \hat{G}' . Por lo tanto, existe un encaje de G en el plano. Sea \hat{G} este encaje. Como \hat{u} y \hat{v} están en componentes conexas diferentes de la frontera de $\mathbb{R}^2 - \hat{G}'$, se tiene, por el inciso (b) de la Proposición 2.1.4, que $\mathbb{R}^2 - \hat{G}$ es conexo, y por lo tanto \hat{G} tiene una sola cara. ■

Proposición 2.2.4. (véase [10], p. 149) *Sea G una multigráfica plana. Si existe $f \in F(G)$ tal que $\partial(f)$ no contiene ningún ciclo, entonces G es un bosque.*

Demostración: Sea $f \in F(G)$ tal que $\partial(f)$ no contenga ningún ciclo. Entonces $\partial(f)$ es un bosque, el cual, por la Proposición 2.2.3, tiene una sola cara $U = \mathbb{R}^2 - \partial(f)$. Si G tuviera otra cara $f' \in F(G)$, entonces $f' \subseteq U$. Sean $x \in f$ y $x' \in f'$. Como U es conectable por trayectorias, existe una curva simple α que conecta x con x' . Entonces α corta a f y a U , pues $f' \subseteq U$. Como α es la imagen de una función continua del intervalo $[0, 1]$ a \mathbb{R}^2 y, por definición, se tiene que f y f' están en diferentes componentes conectables por trayectorias, se tiene que $\alpha \cap \partial(f) \neq \emptyset$. Entonces $\partial(f) \cap U \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $F(G) = \{f\}$. Si G tuviera un ciclo C , por el Lema 2.2.2, toda $e \in E(C)$ estaría en la frontera de dos caras diferentes. Por lo tanto G es un bosque. ■

Se obtiene como consecuencia de la proposición anterior que, si una gráfica plana G no es un bosque, entonces todas sus caras deben contener al menos un ciclo en su frontera.

La demostración de la siguiente proposición es sencilla, pero requiere algunos resultados sobre descomposición por orejas de gráficas 2-conexas, que no son necesarios para ninguna otra parte de esta tesis, por lo cual no la presentaremos.

Proposición 2.2.5. (véase [4], p. 251) *Si G es una multigráfica plana no separable, diferente de K_1 y K_2 , entonces $\partial(f)$ es un ciclo para toda $f \in F(G)$.*

Como una gráfica plana maximal con al menos tres vértices tiene que ser 2-conexa, toda cara tiene por frontera un ciclo. Debido a que las caras son abiertos conectables por trayectorias, si alguna cara no fuera una 3-cara, se podría agregar una arista. Esto prueba la ida de la siguiente proposición. El regreso es una consecuencia del Corolario 2.2.15 (que se prueba más adelante), el cual nos da una cota superior para el número de aristas de una gráfica plana y nos dice que sólo las triangulaciones la alcanzan.

Proposición 2.2.6. (véase [14], p. 94) *Una gráfica plana G con al menos tres vértices es plana maximal si y sólo si G es una triangulación.*

Dada una multigráfica plana G y $e \in E(G)$, el *interior* de la arista e es $f_e((0, 1))$, donde f_e es la función asociada a la curva e . Se denotará con \hat{e} . Dada G multigráfica plana, definimos la

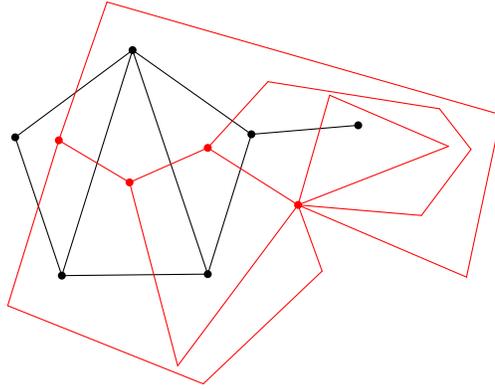


Figura 2.2: Multigráfica G (en negro) y su dual G^* (en rojo)

multigráfica *dual* G^* como la multigráfica dada por $(F(G), E(G), \psi_{G^*})$, donde $\psi_{G^*}(e) = \{f_1, f_2\}$ si y sólo si $e \in E(\partial(f_1)) \cap E(\partial(f_2))$. La multigráfica G^* es planar, ya que por cada $f \in F(G)$ podemos tomar un punto $x_f \in f$, por cada $e \in E(G)$ podemos tomar un punto $x_e \in \mathring{e}$ y trazamos una curva poligonal e^* entre x_f y $x_{f'}$ que pase por x_e si $e \in E(\partial(f)) \cap E(\partial(f'))$, donde las curvas asociadas a las aristas de la multigráfica dual cumplen que:

1. Sólomente se intersecan en los puntos x_f correspondientes a los vértices.
2. Sólomente intersecan a G en los puntos x_e seleccionados en el interior de las aristas. Es decir toda arista e , se tiene que $e \cap e^* = e^* \cap G = e \cap G^* = \{x_e\}$.

Además, para todo punto x_e , existe una vecindad V_e tal que $V_e \cap e$ y $V_e \cap e^*$ son un segmento de recta (véase la Figura 2.2). De ahora en adelante, cuando se hable de la multigráfica dual de una multigráfica plana se estará considerando un encaje como el que se acaba de describir. De la definición es claro que existen biyecciones $\nu_G : F(G) \rightarrow V(G^*)$ y $\varepsilon_G : E(G) \rightarrow E(G^*)$. Dada una gráfica plana G y su dual G^* , la función $\phi_G : \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G^*)$, con $\phi_G(F) = \{e^* \in E(G^*) : e \in F\}$ es un isomorfismo. Dado $F \subseteq E(G)$, escribiremos $F^* = \phi_G(F)$.

Proposición 2.2.7. (véase [4], p. 253) *La multigráfica dual G^* de cualquier multigráfica plana G es conexa.*

Demostración: Sea G multigráfica plana y G^* su dual. Para cualesquiera par de vértices de G^* existe una curva simple C en $\mathbb{R}^2 - V(G)$ que los conecta. La sucesión de caras y aristas de G que atraviesa C corresponde a un camino en G^* que conecta a los vértices. ■

Proposición 2.2.8. (véase [4], p. 257) *Sea G una multigráfica plana y G^* su dual. Sea C un ciclo en G y X^* el conjunto de vértices de G^* que están en $\text{int}(C)$. Entonces $G^*[X^*]$ es conexa.*

Demostración: Por el Teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.1.2), se tiene que $\text{int}(C)$ es conectable por trayectorias. Sean f y f' vértices en X^* . Entonces existe una curva C' en $\text{int}(C) - V(G)$ que conecta a f con f' . Por lo tanto, $G^*[X^*]$ es conexa. ■

En la demostración anterior se puede sustituir $\text{int}(C)$ por $\text{ext}(C)$ y la prueba será válida. Por lo tanto se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.2.9. *Sea G una multigráfica plana y G^* su dual. Sea C un ciclo en G y X^* el conjunto de vértices de G^* que están en $\text{ext}(C)$. Entonces $G^*[X^*]$ es conexa.*

En el siguiente teorema y sus corolarios mostraremos la relación entre los espacios $C(G)$ y $C^*(G)$ de una gráfica plana G y los espacios $C(G^*)$ y $C^*(G^*)$ de su dual G^* . Con esta relación se dará, en el próximo capítulo, una caracterización de las gráficas planas con arboricidad igual a dos.

Teorema 2.2.10. *(véase [14], p. 109) Sea G una multigráfica plana y sea G^* su dual. Entonces E es el conjunto de aristas de un ciclo si y sólo si $\phi_G(E) = E^*$ es un corte minimal en G^* .*

Demostración: Por la forma del encaje de G^* , dos vértices $\nu_G(f_1)$ y $\nu_G(f_2)$ están en la misma componente conexa de $G^* - E^*$ si y sólo si f_1 y f_2 están en la misma región de $\mathbb{R}^2 - E$. Es decir, toda $\nu_G(f_1)\nu_G(f_2)$ -trayectoria en $G^* - E^*$ es una curva poligonal entre f_1 y f_2 en $\mathbb{R}^2 - E$ y toda curva poligonal P entre f_1 y f_2 en $\mathbb{R}^2 - E$ define una $\nu_G(f_1)\nu_G(f_2)$ -trayectoria en $G^* - E^*$.

Sea C un ciclo de G y sea $E = E(C)$. Como $\mathbb{R}^2 - G \subseteq \mathbb{R}^2 - C$, por el Teorema de la curva de Jordan tenemos que $V_1^* = \{\nu_G(f) \in V(G^*) : f \in F(G) \text{ y } f \subseteq \text{int}(C')\}$, $V_2^* = \{\nu_G(f) \in V(G^*) : f \in F(G) \text{ y } f \subseteq \text{ext}(C')\}$ es una partición de $V(G^*)$. Por lo tanto, $E^* = E(V_1, V_2)$ es un corte de G^* . Por las Proposiciones 2.2.8 y 2.2.9, $G^*[V_i]$ es conexa para $i = 1, 2$, y, por la Proposición 1.2.13, se tiene que C^* es un corte minimal.

Ahora, sea $E(V_1^*, V_2^*) = E^* \in C^*(G^*)$ un corte minimal. E tiene que contener el conjunto de aristas de un ciclo C . Si $G[E]$ es un bosque, por la Proposición 2.2.3, $G[E]$ sólo tiene una cara y, por lo tanto, para todo par de caras $f_1, f_2 \in F(G)$ existe una curva poligonal P entre ellas y, por lo visto más arriba, existe una $\nu_G(f_1)\nu_G(f_2)$ -trayectoria en G^* . En particular, esto se cumple para todo par de vértices $\nu_G(f_1) \in V_1^*$ y $\nu_G(f_2) \in V_2^*$. Entonces existe una arista e^* entre V_1^* y V_2^* que no está en $E(V_1^*, V_2^*)$, cosa que no puede pasar. Por lo tanto, existe un ciclo C en G tal que $E(C) \subseteq E$. Si $E(C) \subsetneq E$, entonces $\phi_G(E(C)) \subsetneq E^*$, donde $\phi_G(E(C))$ es un corte de G^* , por lo visto más arriba, y E^* es un corte minimal. Por lo tanto $E(C) = E$. ■

Corolario 2.2.11. *(véase [5], p. 115) Sea G una multigráfica plana y sea G^* su dual.*

- (a) $E \in C(G)$ si y sólo si $\phi_G(E) = E^* \in C^*(G^*)$.
- (b) $E \in C^*(G)$ si y sólo si $\phi_G(E) = E^* \in C(G^*)$.

Demostración: (a) Por la Proposición 1.2.15, $E \in C(G)$ si y sólo si es la unión disjunta de conjuntos de aristas de ciclos. Por la Proposición 2.2.7, G^* es conexa. Entonces, por el Lema 1.2.17, $E^* \in C^*(G^*)$ si y sólo si es la unión disjunta de cortes minimales. Por el Teorema 2.2.10, E es el conjunto de aristas de un ciclo en G si y sólo si E^* es un corte minimal en G^* . Por lo tanto, $E \in C(G)$ si y sólo si $E^* \in C^*(G^*)$.

(b) Por el Teorema 1.2.19, $\langle E, C \rangle = 0$ para todo $E \in C^*(G)$ y todo $C \in C(G)$. Por el inciso (a), se tiene que $C \in C(G)$ si y sólo si $C^* \in C^*(G^*)$. Entonces, para todo $E \in C^*(G)$, $\langle E^*, C^* \rangle = 0$ para todo $C^* \in C^*(G^*)$. Por lo tanto, por el Teorema 1.2.19, se tiene que $E \in C^*(G)$ si y sólo si $E^* \in C(G^*)$. ■

Corolario 2.2.12. *Sea G una multigráfica plana y sea G^* su dual.*

(a) $C(G)$ es isomorfo a $C^*(G^*)$.

(b) $C^*(G)$ es isomorfo a $C(G^*)$.

Demostración: (a) Tomando la función ϕ_G restringida a $C(G)$, por el Corolario 2.2.11, da el isomorfismo deseado.

(b) Tenemos que $\mathcal{E}(G)$ es isomorfo a $\mathcal{E}(G^*)$ y, por (a), que $C(G)$ es isomorfo a $C^*(G^*)$. Entonces, por la Proposición 1.2.14 y el Teorema 1.2.19, se tiene que

$$\dim(C(G)) + \dim(C^*(G)) = \dim(\mathcal{E}(G)) = \dim(\mathcal{E}(G^*)) = \dim(C(G^*)) + \dim(C^*(G^*)).$$

Entonces, como $\dim(C(G)) = \dim(C^*(G^*))$, se tiene que $\dim(C^*(G)) = \dim(C(G^*))$. Como ϕ_G es un isomorfismo, manda conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes. Entonces, si $\beta = \{E_1, \dots, E_k\}$ es una base de $C^*(G)$, se tiene que, por el Corolario 2.2.11, $\beta^* = \{E_1^*, \dots, E_k^*\}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathcal{E}(G^*)$. Como $\dim(C^*(G)) = \dim(C(G^*))$, se tiene que β^* es una base de $C(G^*)$. Por lo tanto, ϕ_G restringida a $C^*(G)$ da el isomorfismo deseado. ■

Corolario 2.2.13. *(véase [4], p. 257) Sea G una multigráfica plana. Entonces para todo corte minimal $E \in C^*(G)$, $E^* \in C(G^*)$ es el conjunto de aristas de un ciclo.*

Demostración: Sea $E \in C^*(G)$ un corte minimal. Entonces $E \neq \emptyset \neq E^*$. Si E^* no es el conjunto de aristas de un ciclo de G^* , como no es vacío, por la Proposición 1.2.15, existen $E_1^*, \dots, E_k^* \in C(G^*)$ conjuntos ajenos de aristas de ciclos tales que

$$E^* = \bigcup_{i=1}^k E_i^*.$$

Como $C^*(G) \cong C(G^*)$, entonces $\phi_G^{-1}(E^*_i)$ es un corte para toda $1 \leq i \leq k$ tal que es un subconjunto propio de E corte minimal. Por lo tanto E^* es el conjunto de aristas de un ciclo de G^* . ■

Una consecuencia de la relación entre $C(G^*)$ y $C^*(G)$ es la Fórmula de Euler, la cual es necesaria para el método de carga que se verá en la proxima sección.

Teorema 2.2.14. (Fórmula de Euler, véase [4], p. 259) Sea G una gráfica planar. Entonces $n - m + f = 1 + c(G)$ para cualquier encaje \hat{G} de G , donde $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ y $f = |F(\hat{G})|$.

Demostración: Por el Corolario 2.2.12, el Teorema 1.2.20 y el Corolario 1.2.21 se tiene que

$$m - f + 1 = \dim(C(G^*)) = \dim(C^*(G)) = n - c(G)$$

y por lo tanto $n - m + f = 1 + c(G)$. ■

Teniendo ya la Fórmula de Euler, podemos acotar el número de aristas de una gráfica plana en términos del número de vértices.

Corolario 2.2.15. Sea G gráfica plana conexa con $|V(G)| \geq 3$. Entonces $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ con igualdad si y sólo si G es una triangulación.

Demostración: Si G fuera un árbol, por el Lema 2.2.3, su única cara tendría grado igual a $2|E(G)| = 2|V(G)| - 2 \geq 4$. Si G no fuera un árbol, por la Proposición 2.2.4, para toda cara $f \in F(G)$, $\partial(f)$ contendría un ciclo y, por lo tanto, $d_G(f) \geq 3$. En cualquier caso, se tendría que

$$3|F(G)| \leq \sum_{f \in F(G)} d_G(f) = 2|E(G)|. \quad (1)$$

De la Fórmula de Euler se obtiene que $|F(G)| = 2 + |E(G)| - |V(G)|$ y, por lo tanto,

$$6 + 3|E(G)| - 3|V(G)| \leq 2|E(G)|,$$

lo cual implica que $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$. Hay que notar que en (1) se cumple la igualdad si y sólo si G es una triangulación. ■

Corolario 2.2.16. Sea G una gráfica plana. Entonces $\delta(G) \leq 5$.

Demostración: Sólo es necesario probarlo para gráficas conexas pues, si G no fuera conexa, cada componente conexa lo cumpliría. Supóngase entonces que G es conexa. Si $\delta(G) > 5$, por el Corolario

2.2.15 se tendría que

$$6|V(G)| \leq \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)| \leq 6|V(G)| - 12,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\delta(G) \leq 5$. ■

Como último resultado de esta sección, daremos una cota superior para $mad(G)$, el máximo grado medio (definido en la sección 1.1) de una gráfica plana G , en términos de su cuello. Este lema, el cual hace uso de la Fórmula de Euler, servirá en el próximo capítulo para uno de los resultados principales de esta tesis.

Lema 2.2.17. [18] *Si G es una gráfica plana con $|V(G)| \geq 3$ y cuello $g \geq 3$, entonces $mad(G) < \frac{2g}{g-2}$.*

Demostración: Sea H una subgráfica de G . Si H es un bosque, se tiene por el Corolario 1.2.2 que $|E(H)| \leq |V(H)| - 1$. De esto se obtiene que $2|E(H)| \leq 2|V(H)| - 2$ y, por lo tanto, $\frac{2|E(H)|}{|V(H)|} \leq 2 - \frac{2}{|V(H)|} < 2$. Ahora, la función $f(x) = \frac{2x}{x-2}$, con $x \geq 3$, es decreciente pues

$$f'(x) = \frac{-4}{(x-2)^2} < 0$$

para toda $x \geq 3$ y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2,$$

por lo que $\frac{2|E(H)|}{|V(H)|} < 2 < \frac{2g}{g-2}$. Supóngase ahora que H no es un bosque. Como H es plana, por la Fórmula de Euler se tiene que $|V(H)| - |E(H)| + |F(H)| = 1 + c(H) \geq 2$ de donde $|F(H)| \geq 2 - |V(H)| + |E(H)|$. Por la Proposición 2.2.4, el camino frontera $\partial(f)$ de cada cara f contiene un ciclo, el cual tiene longitud al menos g , por lo que $g \leq d_G(f)$ para toda $f \in F(G)$. Entonces $g|F(H)| \leq 2|E(H)|$ por lo que

$$g(2 - |V(H)| + |E(H)|) \leq g|F(H)| \leq 2|E(H)|,$$

lo cual es equivalente a $(g-2)|E(H)| \leq g(|V(H)| - 2)$.

Con ésto, obtenemos

$$\frac{2|E(H)|}{|V(H)|} \leq \frac{2g}{g-2} \left(\frac{|V(H)| - 2}{|V(H)|} \right) < \frac{2g}{g-2}.$$

Por lo tanto, $mad(G) < \frac{2g}{g-2}$. ■

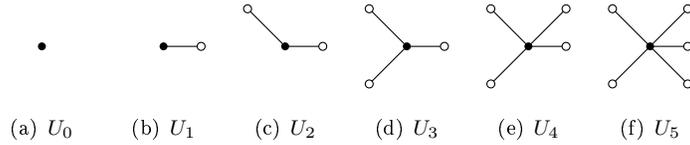


Figura 2.3: \mathcal{U} del Ejemplo 2.3.1

2.3. El método de descarga

El método de descarga es una herramienta muy utilizada en el manejo de gráficas planas. Mediante este método se han probado importantes resultados de descomposición de gráficas planas. En particular, fue utilizado por Appel y Haken para probar el Teorema de los cuatro colores [1],[2]. Este método será una parte clave en la demostración de algunos resultados del próximo capítulo, por lo que haremos una breve revisión de él.

Dada una clase \mathcal{F} de gráficas planas y una estructura U de vértices y aristas (por ejemplo un ciclo de cierta longitud o una arista con extremos de ciertos grados), se dice que la estructura es una *configuración inevitable* si para toda gráfica $G \in \mathcal{F}$, G contiene un conjunto de vértices y aristas con estructura U . Dada una clase \mathcal{F} de gráficas planas, un conjunto de estructuras \mathcal{U} es un *conjunto de configuraciones inevitables en \mathcal{F}* si, para toda gráfica $G \in \mathcal{F}$, existe una $U \in \mathcal{U}$ tal que es una estructura de G . Por ejemplo: \mathcal{F} la clase de todas las gráficas planas y \mathcal{U} los vértices de grado 1, 2, 3, 4, 5. Por el Corolario 2.2.16, el conjunto de estructuras \mathcal{U} es conjunto de configuraciones inevitables en \mathcal{F} .

Dada una gráfica plana G , una *función de carga* es una función w de $V(G) \cup F(G)$ a \mathbb{Z} , donde $w(x)$ es la *carga* de x . Se buscan funciones de carga tales que la Fórmula de Euler permita determinar un entero al que es igual la suma de todas las cargas.

Dada una clase \mathcal{F} de gráficas planas, una función de carga puede ser utilizada para encontrar un conjunto de configuraciones inevitables. Para ilustrar esto, daremos otra forma de expresar y demostrar el Corolario 2.2.16.

Ejemplo 2.3.1. [26] Sea \mathcal{F} la clase de gráficas planas conexas. El conjunto $\mathcal{U} = \{U_0, \dots, U_5\}$, donde $U_i = (\{v_0, v_1, \dots, v_i\}, \{\{v_0, v_1\}, \dots, \{v_0, v_i\}\})$, es un conjunto de configuraciones inevitables.

Demostración: Sea $G \in \mathcal{F}$. Si G tiene menos de 3 vértices es claro que se cumple. Supóngase que $|V(G)| \geq 3$. Entonces $d_G(f) \geq 3$ para toda $f \in F(G)$. Definimos una función de carga

$$w : V(G) \cup F(G) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

$$\text{con } w(x) = d_G(x) - 6, \text{ si } x \in V(G),$$

$$\text{y } w(x) = 2d_G(x) - 6, \text{ si } x \in F(G).$$

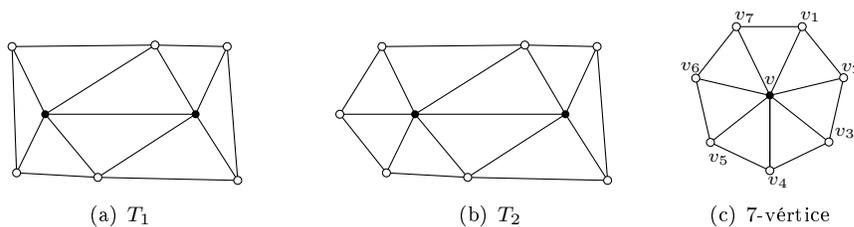


Figura 2.4:

De la Fórmula de Euler se obtiene que

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w(x) = \sum_{x \in V(G)} d_G(x) - 6 + \sum_{x \in F(G)} 2d_G(x) - 6 =$$

$$6|E(G)| - 6|V(G)| - 6|F(G)| = -12.$$

Como $d_G(f) \geq 3$ para toda $f \in F(G)$, se tiene que $w(f) \geq 0$. Para todo k -vértice v , con $k \geq 6$, se tiene que $w(v) \geq 0$. Como la suma de todas la cargas es negativa, G forzosamente tiene que tener un k -vértice con $k \leq 5$. Por lo tanto, \mathcal{U} es un conjunto de configuraciones inevitables. ■

Dado el dibujo de una configuración, cuando un vértice esté marcado con negro, querrá decir que el grado del vértice es el mismo en la gráfica que en la configuración. Si, en cambio, está marcado con blanco, no se sabe qué grado tiene en la gráfica. Por ejemplo, véase la Figura 2.3, donde se muestran la configuraciones de \mathcal{U} del Ejemplo 2.3.1.

Dada una gráfica plana G y una función de carga w de la cual se sepa a qué es igual la suma de todas las cargas, una *redistribución* de la carga es un conjunto de reglas, las *reglas de descarga*, que indican cuánto *dona* ó *descarga* de su carga un elemento x del dominio de w a otro elemento y del dominio. Es decir, cada regla da un número k que se restará de $w(x)$ y se sumará a $w(y)$. Esto se denotará con $\tau(x \rightarrow y) = k$. La carga final de cada elemento después de aplicar todas las reglas se denotará con $w'(x)$ para todo x en el dominio de w . Estas nuevas cargas cumplen

$$\sum_{x \in Dom(w)} w(x) = \sum_{x \in Dom(w)} w'(x).$$

Ilustraremos esto mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.2. [4] Sea \mathcal{F} la clase de triangulaciones con grado mínimo igual a 5. Entonces el conjunto $\mathcal{U} = \{T_1, T_2\}$ es un conjunto inevitable, donde:

- (a) T_1 es un 5-vértice adyacente a otro 5-vértice (véase Figura 2.4(a)).
- (b) T_2 es un 5-vértice adyacente a un 6-vértice (véase Figura 2.4(b)).

Demostración: Sea $G \in \mathcal{F}$. Tomamos, w la función de carga igual que en el Ejemplo 2.3.1. Sólo habrá una regla de descarga:

(R1) Todo 5-vértice v donará equitativamente su carga entre sus vecinos ($\tau(v \rightarrow u) = -\frac{1}{5}$ para todo $u \in N_G(v)$).

Como G es una triangulación, para toda $f \in F(G)$ se tiene que $w(f) = w'(f) = 0$. Mostraremos que $w'(v) \geq 0$ para todo vértice v salvo si v aparece en una configuración como T_1 o T_2 .

Sea $v \in V(G)$ un k -vértice.

Si $k \geq 8$, entonces se tiene que

$$w'(v) \geq w(v) - \frac{1}{5}d_G(v) = \frac{4}{5}d_G(v) - 6 \geq \frac{32}{5} - 6 > 0.$$

Sea $k = 7$. Si v tiene a lo más 4 vecinos de grado 5, entonces $w'(v) \geq 1 - \frac{4}{5} > 0$. Sean $\{v_1, \dots, v_7\}$ los vecinos de v ordenados en sentido de las manecillas del reloj tal como aparecen en el encaje (véase Figura 2.4(c)). Si v tiene más de 4 vecinos de grado 5, al menos dos de estos son adyacentes y $w'(v) \leq 0$.

Sea $v \in V(G)$ un 6-vértice. Si v no tiene vecinos de grado 5, entonces $w'(v) = w(v) = 0$. Si tiene al menos un vecino de grado 5, entonces $w'(v) \leq -\frac{1}{5}$.

Sea $v \in V(G)$ un 5-vértice. Si v no tiene vecinos de grado 5, entonces $w'(v) = 0$. Si tiene al menos un vecino de grado 5 entonces $w'(v) < 0$.

Como

$$\sum_{v \in V(G)} w'(v) = \sum_{v \in V(G)} w(v) = -12$$

tiene que haber al menos $v \in V(G)$ tal que $w'(v) < 0$. Por lo tanto \mathcal{U} es un conjunto de configuraciones inevitables de G . ■

Dada una clase \mathcal{F} de gráficas planas, una configuración U y una propiedad \mathcal{P} , se dice que es una *configuración reducible* si un contraejemplo mínimo de \mathcal{F} a la propiedad \mathcal{P} no puede tener a U como estructura. El método de descarga se utiliza para lo siguiente:

- (a) Encontrar un conjunto de configuraciones inevitables tal que todas sus configuraciones sean reducibles con respecto a una propiedad \mathcal{P} y así probar que no existe un contraejemplo mínimo.
- (b) Suponer que existe un contraejemplo mínimo sin ciertas configuraciones reducibles y llegar a que la suma de las cargas después de la descarga es diferente para llegar a una contradicción.

Ejemplo 2.3.3. [4] Sea G una gráfica plana sin ciclos de longitud k , con $4 \leq k \leq 11$. Entonces G es 3-coloreable.

Demostración: Supóngase que no es cierto y sea G un contraejemplo mínimo. Por minimalidad, G tiene que ser 2-conexa y $\delta(G) \geq 3$. Definimos una función de carga

$$w : V(G) \cup F(G) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

$$\text{con } w(x) = d_G(x) - 6, \text{ si } x \in V(G),$$

$$\text{y } w(x) = 2d_G(x) - 6, \text{ si } x \in F(G).$$

Por el Ejemplo 2.3.1 sabemos que

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w(x) = -12$$

Como G es 2-conexa, por la Proposición 2.2.5, $\partial(f)$ es un ciclo para toda $f \in F(G)$. Habrá solo una regla de descarga:

(R1) Para toda $f \in F(G)$, si $d_G(f) \geq 12$, entonces $\tau(f \rightarrow v) = \frac{3}{2}$ para todo $v \in V(\partial(f))$.

Debido a que G no tiene ciclos de longitud k , $4 \leq k \leq 11$, las caras de G tienen grado 3 o mayor o igual a 12. Como G no tiene 4-ciclos, no puede haber dos 3-caras adyacentes, por lo que para todo vértice v , el número de k -caras, con $k \geq 12$, incidentes a él es por lo menos $\left\lceil \frac{d_G(v)}{2} \right\rceil$. Sea $w'(x)$ la carga después de aplicar (R1).

(i) Si x es una 3-cara, entonces $w'(x) = w(x) = 0$

(ii) Si x es una k -cara, con $k \geq 12$, entonces $w'(x) = 2d_G(x) - 6 - \frac{3}{2}d_G(x) = \frac{1}{2}d_G(x) - 6 \geq 0$.

(iii) Si x es un vértice, entonces $w'(x) \geq d_G(x) - 6 + \frac{3}{2} \left\lceil \frac{d_G(v)}{2} \right\rceil$. Como $d_G(v) \geq 3$, entonces $w'(x) \geq 3 - 6 + 3 = 0$.

De esto se obtiene que

$$-12 = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w'(x) \geq 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, tal contraejemplo no puede existir. ■

Hay que observar que, en la demostración del ejemplo anterior, se demostró que una configuración inevitable de la clase de las gráficas planas 2-conexas sin ciclos de longitud de 4 a 11 es un 2-vértice, configuración que es reducible con respecto a la propiedad de ser 3-coloreable.

Hay que mencionar que este método puede llegar a ser muy complicado, Appel y Haken obtuvieron 1818 configuraciones (después lo redujeron a 1476) y utilizaron más de 400 reglas de descarga (véase [3]) en su demostración del Teorema de los cuatro colores.

Capítulo 3

Arboricidad en gráficas planas

En este capítulo se abordará la arboricidad en gráficas planas. Es decir, dada una gráfica plana G , queremos encontrar el mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de G de tal forma que no haya ciclos monocromáticos. En la primera sección se mostrará que la arboricidad de las gráficas planas es a lo más tres. En la segunda sección se verá que la ausencia de ciclos de cierta longitud implica que la arboricidad es a lo más dos. En la tercera sección se dará una caracterización de las gráficas planas con arboricidad dos a través de la gráfica dual.

3.1. La arboricidad de una gráfica plana

Como se muestra en el siguiente teorema, demostrado por Chartrand, Kronk y Wall en 1968, el conjunto de vértices de cualquier gráfica plana puede partirse en tres partes de tal forma que cada una induzca una gráfica acíclica.

Teorema 3.1.1. [13] Si G es una gráfica plana entonces $a(G) \leq 3$.

Demostración: Si G es plana se tiene que G es 5-degenerada, pues por el Corolario 2.2.16 para toda gráfica plana G , $\delta(G) \leq 5$. Por el Lema 1.3.4 se tiene que

$$a(G) \leq \left\lceil \frac{6}{2} \right\rceil = 3.$$

■

Si G es una gráfica plana con $a(G) \leq 2$, entonces toda bicoloración de sus vértices de tal forma que cada color induzca una gráfica acíclica es, en particular, una descomposición de G en dos gráficas bipartitas, por lo que cada una de éstas tiene una coloración propia con dos colores. De esta manera obtenemos $\chi(G) \leq 4$. Por esta razón, en [13] se plantea que cualquier contraejemplo al

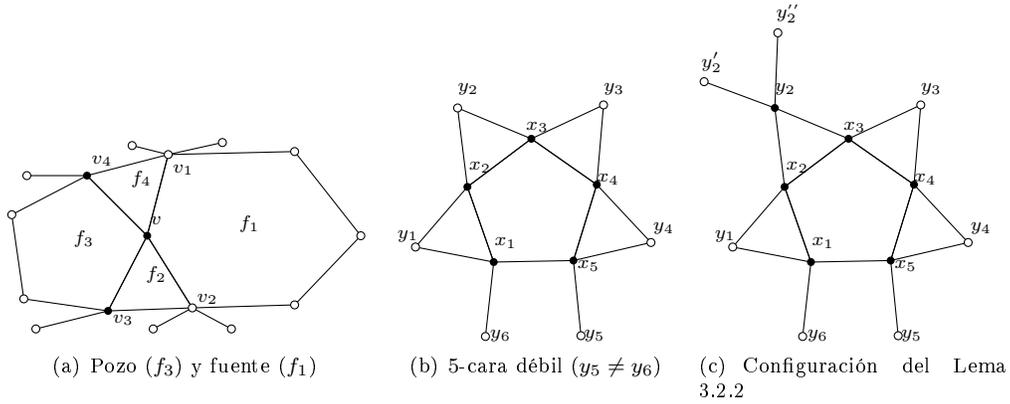


Figura 3.1:

Teorema de los cuatro colores, en ese tiempo una conjetura, tendría que tener arboricidad igual a 3. En 1969, Chartrand y Kronk [11] dan dos ejemplos de gráfica planas con arboricidad igual a 3 (en sí, sostenían que uno de ellos tenía arboricidad 3 y el otro arboricidad 2, error del que se da cuenta Stein [27]). Sin embargo, evidentemente, ninguno de estos dos ejemplos contradecía el Teorema de los cuatro colores.

3.2. Gráficas planas sin ciclos de cierta longitud

En esta sección veremos cómo la ausencia de ciclos de cierta longitud implica que la arboricidad no puede ser mayor a dos. Empezaremos por los 3-ciclos.

Teorema 3.2.1. [25] *Sea G una gráfica plana sin 3-ciclos, entonces $a(G) \leq 2$.*

Demostración: Si G es un bosque se tiene que $a(G) = 1$. Supóngase que G no es un bosque. Entonces su cuello $g \geq 4$, de donde se obtiene que $g - 2 \geq 2$. Ahora, $\frac{2g}{g-2} = 2 + \frac{4}{g-2} \leq 2 + 2 = 4$, por lo que el Lema 2.2.17 implica que $mad(G) < 4$. Entonces del Lema 1.1.5 se deduce que G es 3-degenerada y, por el Lema 1.3.4, $a(G) \leq 2$. ■

Dada G una gráfica plana, un k -vértice (k -cara) se dice *menor* si $k \leq 4$, en otro caso se dice que es *mayor*. Dado $v \in V(G)$, $F(v) \subseteq F(G)$ es el conjunto de caras incidentes en v y $F_k(v) \subseteq F(v)$ es el conjunto formado por las k -caras incidentes en v . Dada $f \in F(G)$, entonces denotaremos con $m(f)$ al número de 3-caras adyacentes a f . Dada f en $F(G)$ y $\partial(f) = [u_1 u_2 \cdots u_r]$, su camino frontera en sentido de las manecillas del reloj, decimos que f es una $(m_1 m_2 \dots m_r)$ -cara si $d_G(u_i) = m_i$ para $i = 1, 2, \dots, r$.

Sea G una gráfica plana sin 4-ciclos y 2-conexa tal que $\delta(G) = 4$. Sea $v \in V(G)$ tal que $d_G(v) = 4$,

entonces f_i es la cara incidente en v con las aristas $\{v, v_i\}$ y $\{v, v_{i+1}\}$ en su frontera, con $i = 1, 2, 3, 4$ y los índices módulo 4. Diremos que f_1 es *fuelle* de f_3 , y f_3 *pozo* de f_1 , si $d_G(f_2) = d_G(f_4) = 3$, $d_G(f_3) = 5$, $d_G(f_1) \geq 5$, $d_G(v_3) = d_G(v_4) = 4$, y $d_G(v_i) \geq 5$ para $i = 1, 2$ (figura 3.1(a)). Una 5-cara es *débil* si es una $(4, 4, 4, 4, 4)$ -cara y es adyacente a exactamente a cuatro 3-caras (Figura 3.1(b)).

En el siguiente lema se encontrará una configuración inevitable para la familia de gráficas planas 2-conexas con grado mínimo al menos 4 y sin 4-ciclos. Esta configuración (un tipo particular de cara débil) es una configuración reducible con respecto a la propiedad de tener arboricidad a lo más dos, lo cual se verá en la demostración del Teorema 3.2.4.

Lema 3.2.2. [25] *Sea G gráfica plana 2-conexa con $\delta(G) \geq 4$ y sin 4-ciclos. Entonces G contiene una 5-cara $[x_1x_2x_3x_4x_5]$ adyacente a cuatro 3-caras $[x_1y_1x_2]$, $[x_2y_2x_3]$, $[x_3y_3x_4]$ y $[x_4y_4x_5]$ tal que $d_G(y_2) = 4 = d(x_i)$ para toda i en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (Figura 3.1(c)).*

Demostración: Supóngase que el lema es falso y sea G un contraejemplo mínimo. Entonces G es una gráfica plana 2-conexa con $\delta(G) \geq 4$, sin 4-ciclos y sin una 5-cara como la del enunciado. Como G es 2-conexa, por la Proposición 2.2.5, la frontera de toda cara es un ciclo. Como G no tiene 4-ciclos, no tiene 4-caras ni dos 3-caras adyacentes. Definimos una función de carga

$$w : V(G) \cup F(G) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

$$w(x) = d(x) - 4.$$

De la Fórmula de Euler se obtiene que

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} (d(x) - 4) = 4|E(G)| - 4(|V(G)| + |F(G)|) = -8$$

Ahora se definirán algunas reglas de descarga. Una vez concluida la descarga, para cada $x \in V(G) \cup F(G)$ se denotará con $w'(x)$ su carga después de la redistribución. La contradicción estará en que, para toda x en $V(G) \cup F(G)$, $w'(x) \geq 0$. Dados x, y en $V(G) \cup F(G)$, $\tau(x \longrightarrow y)$ denotará la cantidad de carga que dona x a y . Las reglas de descarga son las siguientes (véase también la Tabla 3.1)

(R1) Toda cara $f \in F(G)$ tal que $d(f) \geq 6$, dona $\frac{1}{3}$ a cada 3-cara adyacente, $\frac{1}{5}$ a cada 5-cara débil adyacente y $\frac{2}{15}$ a cada pozo (véase Figura 3.2(a)).

(R2) Sean $v \in V(G)$ tal que $d(v) \geq 6$ y $f \in F(G)$ una cara mayor incidente en v .

1. Si f es adyacente a dos 3-caras en $F_3(v)$, entonces $\tau(v \longrightarrow f) = \frac{2}{3}$.

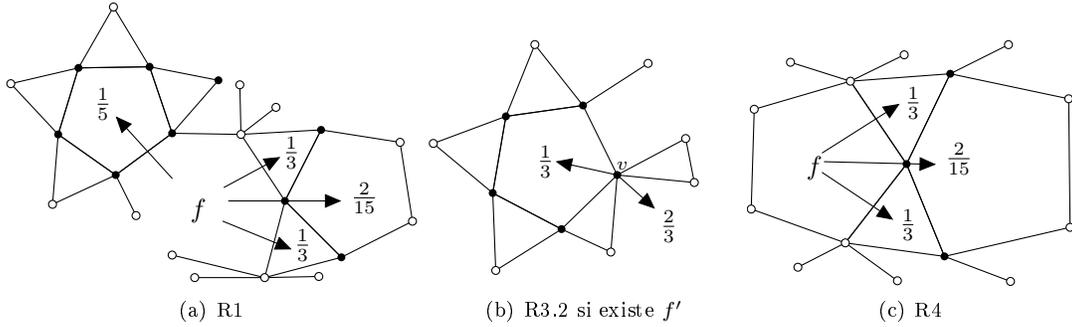


Figura 3.2: Descarga

2. Si f es adyacente exactamente a una 3-cara en $F_3(v)$, entonces $\tau(v \rightarrow f) = \frac{1}{3}$.

(R3) Sea v un 5-vértice. Sean f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 las caras incidentes en v , ordenadas en sentido de las manecillas del reloj.

1. Si $F_3(v) = \{f_i\}$ para alguna $i \in \{1, \dots, 5\}$, entonces $\tau(v \rightarrow f_{i-1}) = \tau(v \rightarrow f_{i+1}) = \frac{1}{3}$, tomando los índices módulo 5.
2. Si $|F_3(v)| = 2$, con $\{f_{i-1}, f_{i+1}\} = F_3(v)$, entonces $\tau(v \rightarrow f_i) = \frac{2}{3}$. Luego, si existe una única $(4, 4, 4, 4, 5)$ -cara $f' \in \{f_{i+2}, f_{i+3}\}$ con $m(f') = 4$, entonces $\tau(v \rightarrow f') = \frac{1}{3}$ (véase Figura 3.2(b)). En otro caso $\tau(v \rightarrow f_{i+2}) = \tau(v \rightarrow f_{i+3}) = \frac{1}{6}$.

(R4) Toda 5-cara f dona $\frac{1}{3}$ a cada 3-cara adyacente y $\frac{2}{15}$ a cada pozo de ésta (véase Figura 3.2(c)).

Sea $s(f)$ el número de 5-caras débiles adyacentes a f y sea $p(f)$ el número de pozos de f . Sea $\beta(f)$ la carga de una 5-cara f después de realizar la descarga acorde con las reglas (R1)-(R4).

(R5) Sea f una 5-cara tal que $m(f) \leq 2$ y $s(f) > 0$, entonces f dona $\beta(f)/s(f)$ a cada 5-cara débil adyacente a f .

Ahora se demostrará que, para todo $x \in V(G) \cup F(G)$, $w'(x) \geq 0$. Sea $v \in V(G)$ con $d(v) \geq 4$. Desglosaremos la prueba de que $w'(v) \geq 0$ en tres casos: $d(v) = 4$, $d(v) = 5$ y $d(v) \geq 6$.

Caso 1: $d(v) = 4$. Entonces $w(v) = w'(v) = 0$

Caso 2: $d(v) = 5$. Entonces $w(v) = 1$. Como G no tiene dos 3-caras adyacentes, se tiene que $|F_3(v)| \leq 2$, pues por cada 3-cara incidente en v hay dos k -caras incidentes en v adyacentes a la 3-cara con $k \geq 5$. Si $|F_3(v)| \leq 1$, por R3.1 se tiene que $w'(v) \geq \frac{1}{3}$. Si $|F_3(v)| = 2$, por R3.2 se tiene que $w'(v) = 0$.

Regla	elemento de $V(G) \cup F(G)$	dona a	carga
R1	k -cara, $k \geq 6$	3-cara	$1/3$
		5-cara débil	$1/5$
		pozo	$2/15$
R2	k -vértice, $k \geq 6$	f cara mayor, si es adyacente a dos 3-caras de $F_3(v)$	$2/3$
		f cara mayor, si es adyacente a exactamente una 3-cara de $F_3(v)$	$1/3$
R3.1	5-vértice con $F(v) = \{f_1, \dots, f_5\}$ y $F_3(v) = \{f_i\}$	f_{i-1}	$1/3$
		f_{i+1}	$1/3$
R3.2	5-vértice con $F(v) = \{f_1, \dots, f_5\}$ y $F_3(v) = \{f_{i-1}, f_{i+1}\}$	f_i	$2/3$
		(4, 4, 4, 4, 5)-cara $f' \in \{f_{i+2}, f_{i+3}\}$ con $m(f') = 4$	$1/3$
		f_{i+2} , si no existe f'	$1/6$
		f_{i+3} , si no existe f'	$1/6$
R4	5-cara	3-cara	$1/3$
		pozo	$2/15$
R5	5-cara f , con $m(f) \leq 2$ y $s(f) > 0$	5-cara débil	$\frac{\beta(f)}{s(f)}$

Tabla 3.1: Reglas de descarga del Lema 3.2.2

Caso 3: $d(v) \geq 6$. Sea t_k , con $k \in \{1, 2\}$, el número de caras de $F(v)$ que son adyacentes a exactamente k 3-caras de $F_3(v)$. Como $d(v) \geq |F_3(v)| + t_2 + t_1$ y puesto que $|F_3(v)| \geq t_2$, se tiene que $d(v) \geq 2t_2 + t_1$. Por lo anterior se tiene mediante R2 que:

$$w'(v) \geq w(v) - \frac{1}{3}t_1 - \frac{2}{3}t_2 = d(v) - 4 - \frac{1}{3}t_1 - \frac{2}{3}t_2 =$$

$$d(v) - 4 - \frac{1}{3}(t_1 + 2t_2) \geq d(v) - 4 - \frac{1}{3}d(v),$$

y, por lo tanto, $w'(v) \geq \frac{2}{3}d(v) - 4 = \frac{2}{3}(d(v) - 6) \geq 0$.

Ahora, sea $f \in F(G)$. Distinguiremos también en cuanto al grado de f . Como G no tiene 4-ciclos, $d(f) \neq 4$.

- Si $d(f) = 3$, todas las caras adyacentes a f le donan $\frac{1}{3}$ por (R1) o por (R4), por lo que $w'(f) = -1 + 1 = 0$.

Para $d(f) \geq 5$,

$$d(f) \geq m(f) + s(f) \quad (1)$$

puesto que f puede ser adyacente a caras que no sean 3-caras ni 5-caras débiles. Por cada pozo del cual f es fuente, hay dos 3-caras adyacentes a f , pero cada 3-cara sólo puede ser adyacente a

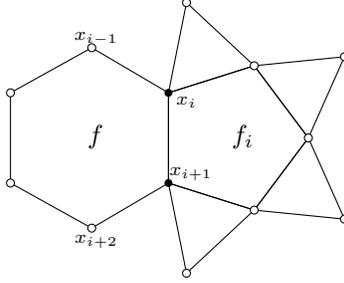


Figura 3.3:

un pozo de f puesto que, de los dos vértices que inciden tanto en f como en la 3-cara, uno tiene grado mayor o igual a 5 y, para que pudiera haber otro pozo de f adyacente a la 3-cara, este vértice debería tener grado igual a 4. Por lo tanto, f tiene a lo más $\lfloor \frac{m(f)}{2} \rfloor \left(\leq \lfloor \frac{d(f)}{2} \rfloor \leq \frac{d(f)}{2} \right)$ pozos. Es decir,

$$p(f) \leq \frac{d(f)}{2} \quad (2)$$

Si $d(f) \geq 6$, por (R1) se tiene que

$$w'(f) \geq w(f) - \left(\frac{1}{3}m(f) + \frac{1}{5}s(f) + \frac{2}{15}p(f) \right) \quad (3)$$

Si $d(f) = 5$, por (R4) se tiene que

$$\beta(f) \geq 1 - \left(\frac{1}{3}m(f) + \frac{2}{15}p(f) \right) \quad (4)$$

Caso 1: $d(f) \geq 7$. Entonces, por (1), (2) y (3), $w'(f) \geq w(f) - \left(\frac{1}{3}m(f) + \frac{1}{5}s(f) + \frac{2}{15}p(f) \right) \geq d(f) - 4 - \frac{1}{3}(m(f) + s(f)) - \frac{1}{15}d(f) \geq d(f) - 4 - \frac{1}{3}d(f) - \frac{1}{15}d(f) = d_G(f) - \frac{6}{15}d(f) - 4 = \frac{3}{5}d(f) - 4 > 0$.

Caso 2: $d(f) = 6$. Entonces se tiene que $w(f) = 2$. Sea $\partial(f) = [x_1 x_2 \dots x_6]$ y f_i la cara adyacente a f que incide en los vértices x_i y x_{i+1} , tomando los índices módulo 6. Si f_i es una 5-cara débil, entonces $d(x_i) = d(x_{i+1}) = 4$, lo que implica que hay únicamente 4 caras que inciden en cada vértice x_i y x_{i+1} , de las cuales tres son f , f_i y un triángulo adyacente a f_i (véase Figura 3.3). La cuarta cara incidente en x_i y x_{i+1} es f_{i-1} y f_{i+1} , respectivamente. Entonces f_{i-1} y f_{i+1} son adyacentes a un triángulo de la 5-cara débil f_i , por lo que $d(f_{i-1}) = d(f_{i+1}) \geq 5$, pues, si fueran 3-caras, se formaría un 4-ciclo. Esto implica que si f es adyacente a una 5-cara débil,

entonces $m(f) \leq 3$. O, en otras palabras, $m(f) \geq 4$ implica que

$$s(f) = 0 \quad (5)$$

Subcaso 2.1: $m(f) \leq 4$. Entonces, por (2), $p(f) \leq 2$. Por (3) se tiene que

$$\begin{aligned} w'(f) &\geq 2 - \frac{1}{3}m(f) - \frac{1}{5}s(f) - 2 \cdot \frac{2}{15} \geq \\ &2 - \frac{1}{3}m(f) - \frac{1}{5}(6 - m(f)) - \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

La última desigualdad se da por (1). Entonces

$$w'(f) \geq 2 - \frac{1}{3}m(f) - \frac{1}{5}(6 - m(f)) - \frac{4}{15} = \frac{4}{5} - \frac{4}{15} - \frac{2}{15}m(f) = \frac{8}{15} - \frac{2}{15}m(f) \geq 0.$$

Subcaso 2.2: $m(f) = 5$. Entonces, por (5), tenemos $s(f) = 0$ y, por (2), f tiene a lo más dos pozos. Por (3) se tiene que $w'(f) \geq 2 - 5 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$.

Subcaso 2.3: $m(f) = 6$. Entonces, por (2) y (5), $p(f) \leq 3$ y $s(f) = 0$. Si f incide en un vértice v de grado al menos 5, por (R2) o (R3), según sea el caso, $\tau(v \rightarrow f) = \frac{2}{3}$, de donde obtenemos, junto con (R1),

$$w'(f) \geq 2 + \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}m(f) + \frac{1}{5}s(f) + \frac{2}{15}p(f) \right) \geq 2 + \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15}.$$

Si f es una $(4, 4, \dots, 4)$ -cara, entonces $p(f) = s(f) = 0$ (una fuente requiere dos 5-vértices) y, por lo tanto, con (3), $w'(f) \geq 2 - 6 \cdot \frac{1}{3} = 0$.

Caso 3: $d(f) = 5$. Entonces $w(f) = 1$. Sea $\partial(f) = [x_1 x_2 \dots x_5]$.

Subcaso 3.1: $m(f) \leq 2$. Entonces $p(f) \leq 1$, por lo que por (R4),

$$\beta(f) \geq w(f) - \left(\frac{1}{3}m(f) + \frac{2}{15}p(f) \right) \geq 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{15} = \frac{1}{5}.$$

Si f no es adyacente a 5-caras débiles, $\beta(f) = w'(f) > 0$. Si f es adyacente a 5-caras débiles, $w'(f) = 0$ debido a (R5). Por lo tanto, $w'(f) \geq 0$ en ambos casos.

Subcaso 3.2: $m(f) = 3$. Entonces $p(f) \leq 1$ y $w'(f) = \beta(f)$. Si f no tiene pozo, entonces $w'(f) = \beta(f) \leq 1 - 3 \cdot \frac{1}{3}$ por (4) y (R4). Si $p(f) = 1$, sin pérdida de generalidad supóngase que $d(f_1) = d(f_2) = 3$, $d(x_2) = 4$ y la cara incidente en x_2 pero no adyacente con f es una 5-cara (véase

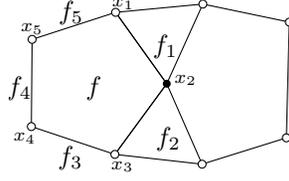


Figura 3.4:

Figura 3.4). Entonces $d(x_i) \geq 5$ para $i \in \{1, 3\}$ por definición de pozo. Como $m(f) = 3$, de las tres caras restantes $\{f_3, f_4, f_5\}$, una es una 3-cara.

- Supóngase que $d(f_3) = 3$ (el caso $d(f_5) = 3$ es análogo). Entonces $f_2, f_3 \in F_3(x_3)$, por lo que $|F_3(x_3)| \geq 2$ y, entonces, $\tau(x_3 \rightarrow f) = \frac{2}{3}$ por (R2) ó (R3). Entonces

$$\beta(f) \geq w(f) + \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}m(f) + \frac{2}{15}p(f) \right) \geq 1 + \frac{2}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{8}{15}.$$

Como $d(x_1) \geq 5$, f_5 no puede ser una 5-cara débil pero f_4 tampoco, puesto que (análogamente a como se vio para el caso $d(f) = 6$), si f_4 fuera una 5-cara débil, $d(x_4) = 4$ y se tendría un 4-ciclo. Entonces se tiene que $s(f) = 0$. Por lo tanto, $w'(f) = \beta(f) > 0$.

- Supóngase que $d(f_4) = 3$, entonces $s(f) = 0$ pues $d(x_1) = d(x_3) \geq 5$, lo que impide que f_5 y f_3 sean 5-caras débiles. Por lo tanto, $\beta(f) = w'(f)$. Si $d(x_1) \geq 6$ o $d(x_3) \geq 6$, por (R2) $\tau(x_1 \rightarrow f) = \frac{1}{3}$ o $\tau(x_3 \rightarrow f) = \frac{1}{3}$ de donde

$$w'(f) \geq w(f) + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}m(f) + \frac{2}{15}p(f) \right) \geq 1 + \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{1}{5}.$$

Supóngase que $d(x_1) = d(x_3) = 5$. Si $|F_3(x_1)| = 1$, f_1 es la única 3-cara incidente en x_1 , por lo que, por (R3), se tiene que

$$w'(f) \geq w(f) + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}m(f) + \frac{2}{15}p(f) \right) \geq 1 + \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{1}{5}.$$

El caso $|F_3(x_3)| = 1$ es análogo. Supóngase que $|F_3(x_1)| = 2$. Si $d(f_5) \geq 6$ o $d(f_5) = 5$ con $m(f_5) \leq 3$, por (R3) $\tau(x_1 \rightarrow f) = \frac{1}{6}$. Si $d(f_5) = 5$ con $m(f_5) = 4$, como $d(f_4) = 3$, entonces $d(x_5) \geq 5$ (si no habría un 4-ciclo). Por lo tanto, por (R3), $\tau(x_1 \rightarrow f) = \frac{1}{6}$, pues f_5 es adyacente a dos vértices de grado al menos 5. En cualquiera de los tres casos anteriores se obtiene que $w'(f) \geq w(f) + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}m(f) + \frac{2}{15}p(f) \right) \geq 1 + \frac{1}{6} - 3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{1}{30}$.

Subcaso 3.3: $m(f) = 4$. Sin pérdida de la generalidad, supóngase que $d(f_1) = d(f_2) = d(f_3) = d(f_4) = 3$ (véase Figura 3.5(a)). Por (2), $p(f) \leq 2$. Por otro lado, $s(f) = 0$, pues, si f_5 fuera una 5-cara

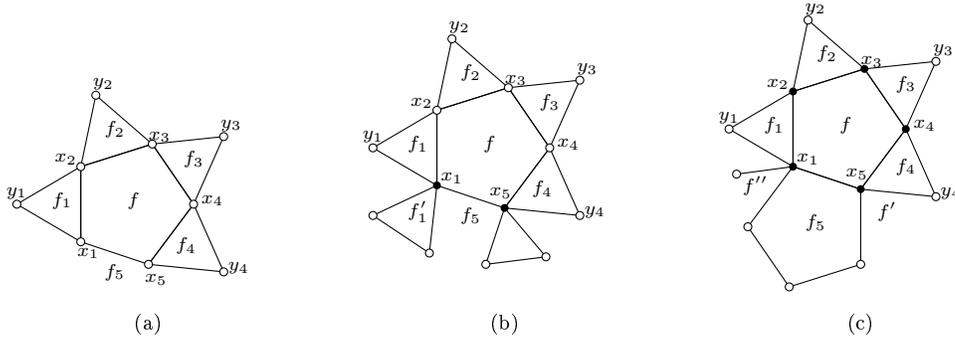


Figura 3.5:

débil, $d(x_1) = d(x_5) = 4$ y otra 3-cara no adyacente a f incidiría en cada uno de x_1 y x_5 . Estas 3-caras serían adyacentes a las 3-caras adyacentes a f e incidentes en x_1 y x_5 , con lo que se formarían dos 4-ciclos. Por lo tanto, $\beta(f) = w'(f)$ y entonces

$$w'(f) \geq w(f) + v(f) - \left(\frac{1}{3}m(f) + \frac{2}{15}p(f) \right) = 1 + v(f) - \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{15}p(f) \right) = v(f) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{15}p(f) \right),$$

donde $v(f)$ es la carga que recibe de otros vértices o caras. Si mostramos que $v(f) \geq \frac{1}{3} + \frac{2}{15}p(f)$, obtendremos $w'(f) \geq 0$. Sea y_i el tercer vértice de la frontera de f_i tal que $\partial(f_i) = [x_i y_i x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq 4$.

- Si existe $u \in \{x_2, x_3, x_4\}$ con $d(u) \geq 5$, por (R2) o(R3), obtendremos que $v(f) \geq \tau(u \rightarrow f) = \frac{2}{3}$. Como $p(f) \leq 2$, se tiene que $\frac{1}{3} + \frac{2}{15}p(f) \leq \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} < \frac{2}{3}$. Por lo tanto, $v(f) \geq \frac{1}{3} + \frac{2}{15}p(f)$.
Si $d(u) = 4$ para todo $u \in \{x_2, x_3, x_4\}$, entonces $p(f) = 0$. Por lo tanto, sólo es necesario mostrar que $v(f) \geq \frac{1}{3}$.
- Si $d(x_1) \geq 6$, como f es adyacente a una sola de las 3-caras que inciden en x_1 , entonces, por (R2), f recibe $\frac{1}{3}$ de carga por parte de x_1 , por lo que $v(f) \geq \frac{1}{3}$. Lo mismo ocurre si $d(x_5) \geq 6$.
- Si $d(x_1) = d(x_5) = 5$ y $|F_3(x_i)| = 1$ para algún $i \in \{1, 5\}$, $\tau(x_i \rightarrow f) = \frac{1}{3}$ por (R3), por lo que $v(f) \geq \frac{1}{3}$.
- Si $d(x_1) = d(x_5) = 5$ y $|F_3(x_1)| = |F_3(x_5)| = 2$, hay una 3-cara f'_1 incidente en x_1 que es adyacente a f_5 y no a f ni a f_1 (como en la Figura 3.5(b)). Como ni f ni f_5 son $(4, 4, 4, 4, 5)$ -caras, x_1 les dona a cada una $\frac{1}{6}$ por (R3). Análogamente x_5 dona $\frac{1}{6}$ a f , por

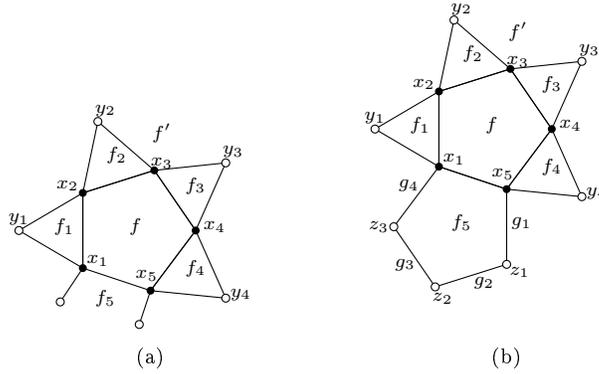


Figura 3.6:

lo que $v(f) \geq \frac{1}{3}$.

- Si $d(f_5) \geq 6$, $d(x_1) = 5$ y $d(x_i) = 4$ para toda $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, entonces $|F_3(x_1)| \leq 2$. Si $|F_3(x_1)| = 1$, por (R3) $\tau(x_1 \rightarrow f) = \frac{1}{3}$. Si $|F_3(x_1)| = 2$, como f es una $(4, 4, 4, 4, 5)$ -cara con $m(f) = 4$, por (R3), $\tau(x_1 \rightarrow f) = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, en cualquier caso, tenemos que $v(f) \geq \frac{1}{3}$. El caso $d(x_5) = 5$ con $d(x_i) = 4$ para toda $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ es análogo.
- Supóngase que $d(f_5) = 5$, $d(x_1) = 5$ y $d(x_i) = 4$ para toda $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Sea f' la cara incidente a x_5 diferente de f , f_4 y f_5 (véase Figura 3.5(c)). Como no hay 4-ciclos, se tiene que $d(f') \geq 5$, lo que implica que $m(f_5) \leq 3$. Si $|F_3(x_1)| = 1$, por (R3), $\tau(x_1 \rightarrow f) = \frac{1}{3}$. Si $|F_3(x_1)| = 2$, sea f'' la 3-cara incidente en x_1 diferente de f_1 (véase figura 3.5(c)), la cual es adyacente a f_5 y no a f_1 (pues no hay 4-ciclos). Como f es una $(4, 4, 4, 4, 5)$ -cara con $m(f) = 4$, por (R3), $\tau(x_1 \rightarrow f) = \frac{1}{3}$. En cualquier caso $v(f) \geq \frac{1}{3}$. El caso $d(f_5) = 5$, $d(x_5) = 5$ con $d(x_i) = 4$ para toda $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ es análogo.
- Por último supóngase que f es una 5-cara débil. Como estamos suponiendo que G es un contraejemplo al lema, se tiene que $d(y_2) \geq 5$ y $d(y_3) \geq 5$. Sea f' la cara con las aristas y_2x_3 y x_3y_3 en su frontera (véase Figura 3.6(a)). Como no hay 4-ciclos, se tiene que $d(f') \geq 5$ por lo que f es pozo de f' . Por lo tanto, por (R1) ó (R4), $\tau(f' \rightarrow f) = \frac{2}{15}$ (6). Ahora nos hace falta mostrar que f recibe aun $\frac{1}{5}$ de carga de otros vértices o caras. Si $d(f_5) \geq 6$, por (R1) $\tau(f_5 \rightarrow f) = \frac{1}{5}$, por lo que $v(f) \geq \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3}$. Supóngase que $d(f_5) = 5$ y $\partial(f_5) = [x_5z_1z_2z_3x_1]$. Sean g_1, g_2, g_3 y g_4 las caras adyacentes a f_5 en las aristas x_5z_1, z_1z_2, z_2z_3 y z_3x_1 , respectivamente (véase Figura 3.6(b)). Como no hay dos 3-ciclos adyacentes y $d(x_1) = d(x_5) = 4$, se tiene que $d(g_1) \geq 5$ y $d(g_4) \geq 5$. Esto implica que $m(f_5) \leq 2$. Por lo tanto, f_5 tiene a lo más un pozo.
Si $m(f_5) = 0$, entonces f_5 no tiene pozos, de donde obtenemos $\beta(f_5) = w(f_5) = 1$. Como $1 \leq s(f_5) \leq 5$, se tiene por (R5) que $1 \geq \tau(f_5 \rightarrow f) \geq \frac{1}{5}$, por lo que $v(f) \geq \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3}$.

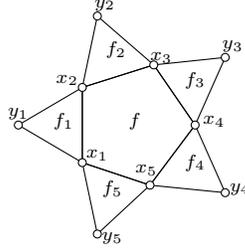


Figura 3.7: $m(f) = 5$

Supóngase que $m(f_5) = 1$. Entonces $p(f_5) = 0$ y, sin pérdida de generalidad, $d(g_2) = 3$ y $d(g_3) \geq 5$. Si $d(z_1) \geq 5$ o $(g_1) > 5$ o $m(g_1) \leq 3$ entonces g_1 no puede ser una 5-cara débil, por lo que las únicas 5-caras débiles adyacentes a f_5 posibles son f , g_3 y g_4 , por lo que $s(f_5) \leq 3$. Como

$$\beta(f_5) \geq w(f_5) - \left(\frac{1}{3}m(f_5) + \frac{2}{15}p(f_5) \right) = 1 - \frac{1}{3},$$

$$\tau(f_5 \rightarrow f) = \frac{\beta(f_5)}{s(f_5)} \geq \frac{(1 - \frac{1}{3})}{3} = \frac{2}{9} > \frac{1}{5}.$$

Por lo tanto, $v(f) \geq \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3}$. Si $d(z_1) = 4$ y $d(g_1) = 5$, se tiene que $m(g_1) \leq 3$ pues, como $d(z_1) = 4$ y G no tiene dos 3-ciclos adyacentes, la cara adyacente tanto a g_1 como a g_2 , incidente en z_1 y diferente de f_5 no puede ser una 3-cara. Por lo tanto $v(f) \geq \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3}$ como en el caso anterior.

Supóngase que $m(f_5) = 2$, es decir, $d(g_2) = d(g_3) = 3$. Observemos que ni g_1 ni g_4 puede ser una 5-cara débil. Si $d(z_2) \geq 5$, entonces $\tau(z_2 \rightarrow f_5) = \frac{2}{3}$ por (R2) o (R3). Como ni g_1 ni g_4 son 3-caras, f_5 no tiene ni es un pozo, por lo que

$$\beta(f_5) \geq w(f_5) - \left(\frac{1}{3}m(f_5) + \frac{2}{15}p(f_5) \right) + \tau(z_2 \rightarrow f_5) = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Como la única 5-cara débil adyacente a f_5 es f , se tiene que $\tau(f_5 \rightarrow f) = \beta(f_5) > \frac{1}{5}$. Por lo tanto, $v(f) \geq \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3}$. Supóngase que $d(z_2) = 4$, entonces $\beta(f_5) \geq 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{15} = \frac{1}{5}$ (f_5 podría tener un pozo). Como su única 5-cara débil es f , entonces $\tau(f_5 \rightarrow f) \geq \frac{1}{5}$. Por lo tanto, $v(f) \geq \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3}$.

Subcaso 3.4: $m(f_5) = 5$. Sea $\partial(f_i) = [x_i y_i x_{i+1}]$ cara adyacente a f que incide en x_i y x_{i+1} (véase Figura 3.7). Entonces f tiene a lo más dos pozos y $s(f) = 0$, por lo que $w'(f) = \beta(f)$. Si $p(f) = 1$, supóngase que la cara incidente en los vértices y_1 , x_2 y y_2 es el pozo. Entonces se tiene que $d(x_1) \geq 5$ y $d(x_3) \geq 5$. Por (R2) o (R3) x_1 y x_3 le donan cada uno $\frac{2}{3}$ de su carga a

f , por lo que

$$w'(f) \geq w(f) - \left(\frac{1}{3}m(f) + \frac{2}{15}p(f) + \frac{4}{3} \right) 1 - \frac{5}{3} - \frac{4}{15} = \frac{2}{5} + \frac{4}{3}.$$

Supóngase entonces que f no tiene pozos. Si f incide en un vértice de grado al menos 5, supóngase, sin pérdida de la generalidad, que $d(x_1) \geq 5$. Entonces, por (R2) o (R3), $\tau(x_1 \rightarrow f) = \frac{2}{3}$, por lo que

$$w'(f) \geq w(f) + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}m(f) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{5}{3} = 0.$$

Supóngase que $d(x_i) = 4$ para toda $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Entonces para cada x_i existe una única cara g_i incidente en él y diferente de f , f_{i-1} y f_i , la cual no puede ser una 3-cara. Por lo tanto, $d(g_i) \geq 5$ para toda $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Por lo anterior f es un pozo de g_i para toda $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de donde se obtiene que $\tau(g_i \rightarrow f) = \frac{2}{15}$ para toda $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Por lo tanto,

$$w'(f) = w(f) + \frac{10}{15} - \frac{1}{3}m(f) = 1 + \frac{10}{15} - \frac{5}{3} = 0.$$

Entonces $w'(x) \geq 0$ para toda x en $V(G) \cup F(G)$ y, por lo tanto,

$$-8 = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w'(x) \geq 0,$$

lo cual es una contradicción. Esto significa que no existe ningún contraejemplo al lema, por lo cual éste es cierto. ■

Antes de probar que la arboricidad de una gráfica plana sin 4-ciclos es a lo más dos, necesitamos probar el siguiente lema que acota el grado mínimo de una gráfica plana sin 4-ciclos.

Lema 3.2.3. *Si G es una gráfica plana sin 4-ciclos, entonces $\delta(G) \leq 4$.*

Demostración: Supóngase que el lema es falso y sea G un contraejemplo mínimo. Entonces G es conexa, tiene por lo menos un ciclo y, por el Corolario 2.2.16, $\delta(G) = 5$. Definimos una función de carga

$$w : V(G) \cup F(G) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

$$w(x) = d(x) - 4.$$

Por la demostración del Lema 3.2.2 sabemos que

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w(x) = -8.$$

Definimos una única regla de descarga

(R1) Para todo vértice $v \in V(G)$, v reparte equitativamente su carga entre todas las 3-caras en $F_3(v)$.

Como G no tiene 4-ciclos, para todo vértice v se tiene que

$$|F_3(v)| \leq \left\lfloor \frac{d(v)}{2} \right\rfloor \leq \frac{d(v)}{2}.$$

Por lo tanto, para todo vértice v y para toda $f \in F_3(v)$

$$2 \frac{d(v) - 4}{d(v)} \leq \frac{d(v) - 4}{|F_3(v)|} = \tau(v \rightarrow f),$$

y, como $d(v) \geq 5$, se tiene que

$$\tau(v \rightarrow f) \geq 2 \frac{d(v) - 4}{d(v)} = 2 - \frac{8}{d(v)} \geq 2 - \frac{8}{5} = \frac{2}{5} \quad (1)$$

Sea $w'(x)$ la carga de $x \in V(G) \cup F(G)$ después de aplicar (R1). Demostraremos que $w'(x) \geq 0$ para todo $x \in V(G) \cup F(G)$.

- Sea $v \in V(G)$. Por (R1), se tiene que $w'(v) \geq 0$.
- Sea $f \in F(G)$ tal que $d(f) \geq 5$. Entonces $w'(f) = w(f) > 0$.
- Sea $f \in F(G)$ una 3-cara. Por (1), los tres vértices en los que incide le donan al menos $\frac{2}{5}$ de carga. Por lo tanto, $w'(f) \geq w(f) + \frac{6}{5} = -1 + \frac{6}{5} > 0$.

Entonces $w'(x) \geq 0$ para toda x en $V(G) \cup F(G)$ y, por lo tanto,

$$-8 = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w'(x) \geq 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no puede existir un contraejemplo al lema. ■

Ahora ya podemos probar que la ausencia de 4-ciclos implica que la arboricidad no puede ser mayor a dos.

Teorema 3.2.4. [25] Si G es una gráfica plana sin 4-ciclos, entonces $a(G) \leq 2$.

Demostración: La demostración será por inducción sobre $|V(G)|$. Si $|V(G)| \leq 1$, entonces $a(G) = 1$ pues la gráfica no puede tener ciclos y, por lo tanto, es un bosque. Si $3 \leq |V(G)| \leq 4$, podemos partir a $V(G)$ en dos partes tales que una contenga dos vértices y la otra los vértices restantes, obteniendo así dos subgráficas acíclicas, por lo tanto $a(G) \leq 2$. Supóngase que para toda gráfica plana G sin 4-ciclos y tal que $|V(G)| \leq k-1$, se tiene que $a(G) \leq 2$. Sea G una gráfica plana sin 4-ciclos y tal que $|V(G)| = k$. Supongamos que existe v en $V(G)$ con $d(v) \leq 3$. Sea $H = G[V(G) - v]$. Entonces $|V(H)| = k-1$ y, por hipótesis de inducción, se tiene que $a(H) \leq 2$, es decir existe $\gamma : V(H) \rightarrow \{1, 2\}$ una 2-coloración acíclica de H . Como $d(v) \leq 3$, existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $|N(v) \cap \gamma^{-1}(i)| \leq 1$. Definiendo $\gamma(v) = i$, se puede extender γ a G y por lo tanto $a(G) \leq 2$. Entonces, por el Corolario 3.2.3, podemos suponer que $\delta(G) = 4$. Si G no es 2-conexa, por hipótesis de inducción y por el Lema 1.3.2, cada bloque de G tiene una 2-coloración acíclica, por lo que G tiene una 2-coloración acíclica.

Supóngase que G es 2-conexa. Entonces, por el Lema 3.2.2, G contiene una 5-cara $[x_1x_2x_3x_4x_5]$ adyacente a cuatro 3-caras $[x_1y_1x_2]$, $[x_2y_2x_3]$, $[x_3y_3x_4]$ y $[x_4y_4x_5]$ tal que $d(y_2) = 4 = d(x_i)$ para toda $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sea y_5 el vecino de x_5 diferente a x_1, x_4 y y_4 , sea y_6 el vecino de x_1 diferente a x_5, x_2 y y_1 , y sean y'_2 y y''_2 los vecinos de y_2 diferentes a x_2 y x_3 (véase Figura 3.1(c)). Sea $H = G[V(G) - y_2]$. Entonces H es una gráfica plana sin 4-ciclos con $|V(H)| = k-1$. Por hipótesis de inducción, H tiene una 2-coloración acíclica γ , la cual, digamos, usa los colores **1** y **2**. Si $|\gamma^{-1}(i) \cap N(y_2)| \geq 3$ para alguna $i \in \{1, 2\}$, entonces, asignando el otro color a y_2 , tenemos que es una hoja o un vértice aislado en la subgráfica inducida por la clase cromática de dicho color y, por lo tanto, γ se puede extender a G . Supóngase que $|\gamma^{-1}(i) \cap N(y_2)| = 2$ para toda i en $\{1, 2\}$. Para dar una 2-coloración acíclica a G a partir de γ , modificando los colores de los vértices en $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, sólo es necesario evitar que se formen trayectorias monocromáticas en $G[B]$, con $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y'_2, y''_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$, entre los vértices $\{y_1, y'_2, y''_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$. Tenemos dos casos:

Caso 1: $\gamma(y'_2) = \gamma(y''_2) = 1$ y $\gamma(x_2) = \gamma(x_3) = 2$.

Como la 3-cara $[x_1x_2y_1]$ esta en H , a lo más uno de los vértices x_1 y y_1 está coloreado con el color **2**. Supóngase que $\gamma(x_1) = 2$ y $\gamma(y_1) = 1$ (Figura 3.8(a)). En este caso se colorea a y_2 con **2** y se cambia el color de x_2 a **1** (Figura 3.8(b)). Esta coloración no genera ciclos monocromáticos en G , pues tanto x_2 como y_2 son hojas en las respectivas subgráficas generadas por las clases cromáticas. Lo mismo sucede si $\gamma(x_1) = 1$ y $\gamma(y_1) = 2$. Análogamente, a lo más uno de los vértices x_4 y y_3 recibe el color **2**. De la misma forma, si $\gamma(x_4) = 2$ o $\gamma(y_3) = 2$, se puede extender la coloración γ a G cambiando el color de x_3 y coloreando y_2 de color **2**. Entonces podemos asumir que $\gamma(x_1) = \gamma(y_1) = \gamma(x_4) = \gamma(y_3) = 1$ (Figura 3.8(c)). Si $\gamma(y_6) = 1$ se puede colorear y_2 con **2** y cambiar los colores de x_1 y x_2 (Figura 3.8(d)), con lo cual son hojas en las respectivas subgráficas inducidas por las clases cromáticas. Por lo tanto, podemos

asumir que $\gamma(y_6) = 2$ (Figura 3.8(e)). Si $\gamma(x_5) = 1$ se hace lo mismo que cuando $\gamma(y_6) = 1$ (Figura 3.8(f)), donde x_1 , x_2 y y_2 son hojas en las respectivas subgráficas inducidas por las clases cromáticas. Así que también podemos suponer que $\gamma(x_5) = 2$. Si $\gamma(y_4) = 1$, se puede cambiar el color a x_4 y a x_3 , y colorear a y_2 con **2** (Figura 3.8(h)), donde x_4 , x_3 y y_2 son hojas en las subgráficas monocromáticas. Supóngase entonces que $\gamma(y_4) = 2$. Si $\gamma(y_5) = 2$ se puede colorear y_2 con **2** y cambiar el color a los vértices x_3 , x_4 y x_5 (Figura 3.8(j)). Con esta coloración no hay trayectorias monocromáticas entre los vértices $\{y_1, y_3, y_4, y_5, y'_2, y''_2\}$ que solo contengan vértices de la estructura en consideración, por lo que en las subgráficas monocromáticas no se forman ciclos. Por último supóngase $\gamma(y_5) = 1$. En este caso se colorea y_2 con **2** y se cambia el color a los vértices x_1 , x_3 , x_4 y x_5 (Figura 3.8(l)): nuevamente no hay trayectorias monocromáticas entre los vértices $\{y_1, y_3, y_4, y_5, y'_2, y''_2\}$.

Caso 2: $\gamma(y'_2) = \gamma(x_2) = 1$ y $\gamma(y''_2) = \gamma(x_3) = 2$.

Para $i \in \{1, 2\}$ sea $S(i)$ el subconjunto de elementos de $\{y_1, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ que reciben el color i en la coloración γ . Sin pérdida de generalidad, supóngase que $|S(1)| \leq |S(2)|$, por lo que $0 \leq |S(1)| \leq 2$. Borrarnos el color de los vértices x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Asígnese el color **1** a y_2 . Según los elementos de $\{y_1, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ que se encuentren en $S(1)$ se colorearán los vértices x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 de forma que no se formen trayectorias monocromáticas en $G[B]$ entre los vértices $\{y_1, y'_2, y''_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$.

- Si $|S(1)| = 0$, se colorean x_1, x_2, x_4, x_5 con **1** y x_3 con **2** (Figura 3.9(a)).
- Si $S(1) = \{y_1\}$, se colorean x_3, x_4, x_5 con **1** y x_1, x_2 con **2** (Figura 3.9(b)).
- Si $S(1) = \{y_3\}$, se colorean x_1, x_2, x_5 con **1** y x_3, x_4 con **2** (Figura 3.9(c)).
- Si $S(1) = \{y_4\}$ o $S(1) = \{y_5\}$, se colorean x_1, x_2, x_4 con **1** y x_3, x_5 con **2** (Figuras 3.9(d) y 3.9(e)).
- Si $S(1) = \{y_6\}$, se colorean x_2, x_4, x_5 con **1** y x_1, x_3 con **2** (Figura 3.9(f)).
- Si $S(1) = \{y_1, y_3\}$, se colorean x_1, x_5 con **1** y x_2, x_3, x_4 con **2** (Figura 3.9(g)).
- Si $S(1) = \{y_1, y_4\}$ o $S(1) = \{y_1, y_5\}$ o $S(1) = \{y_3, y_5\}$, se colorean x_1, x_4 con **1** y x_2, x_3, x_5 con **2** (Figuras 3.9(h), 3.9(i) y 3.10(a)).
- Si $S(1) = \{y_1, y_6\}$, se colorean x_4, x_5 con **1** y x_1, x_2, x_3 con **2** (Figura 3.10(b)).
- Si $S(1) = \{y_3, y_4\}$, se colorean x_1, x_2 con **1** y x_3, x_4, x_5 con **2** (Figura 3.10(c)).
- Si $S(1) = \{y_3, y_6\}$, se colorean x_2, x_5 con **1** y x_1, x_3, x_4 con **2** (Figura 3.10(d)).
- Si $S(1) = \{y_4, y_5\}$, se colorean x_1, x_2, x_4 con **1** y x_3, x_5 con **2** (Figura 3.10(e)).
- Si $S(1) = \{y_5, y_6\}$, se colorean x_2, x_4, x_5 con **1** y x_1, x_3 con **2** (Figura 3.10(f)).

- Si $S(1) = \{y_4, y_6\}$, se cambia el color de y_2 , se colorean x_2, x_3, x_5 con 1 y con x_1, x_4 2 (Figura 3.10(g)).

Por lo tanto $a(G) = 2$, con lo que queda demostrado el teorema. ■

La siguiente longitud de ciclo a tratar es cinco, pero, para demostrar que toda gráfica plana sin 5-ciclos tiene arboricidad a lo más dos, se utilizará el siguiente lema.

Lema 3.2.5. [29] *Si G es plana, sin 5-ciclos y tal que $\delta(G) \geq 3$, entonces existe una arista $\{x, y\}$ con $d_G(x) = 3$ y $d_G(y) \leq 5$.*

Demostración: Supóngase que el lema es falso. Sea G un contraejemplo al lema, es decir, una gráfica plana, sin 5-ciclos y con $\delta(G) \geq 3$ de tal forma que todo 3-vértice es adyacente a vértices de grado al menos 6. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que G es conexa. Por el Corolario 1.1.4, G no puede ser un árbol y, por la Proposición 2.2.4, para toda $f \in F(G)$, $\partial(f)$ contiene un ciclo. Entonces $\partial(f)$ es un 4-ciclo para toda 4-cara f . Como G no tiene 5-ciclos y $\delta(G) \geq 3$, G no tiene las siguientes estructuras.

(C1) Una 4-cara adyacente a una 3-cara (Figura 3.11(a)).

(C2) Tres 3-caras f_1, f_2 y f_3 con $\partial(f_1) = [v_1v_2v_3]$, $\partial(f_2) = [v_1v_4v_2]$ y $\partial(f_3) = [v_1v_5v_4]$, donde $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$ (véase Figura 3.11(b)).

Sea $w : V(G) \cup F(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ función de carga, tal que:

$$w(x) = \begin{cases} 2d(x) - 6, & \text{si } x \in V(G), \\ d(x) - 6, & \text{si } x \in F(G), \end{cases}$$

de donde, por la Fórmula de Euler, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w(x) &= \sum_{x \in V(G)} (2d(x) - 6) + \sum_{x \in F(G)} (d(x) - 6) = \\ &4|E(G)| - 6|V(G)| + 2|E(G)| - 6|F(G)| = -12. \end{aligned}$$

Ahora, se distribuye la carga de los vértices de acuerdo a las siguientes reglas:

(R1) Si $4 \leq d(v) \leq 5$, entonces $\tau(v \rightarrow f) = 1$ para toda $f \in F_3(v)$ y $\tau(v \rightarrow f) = \frac{1}{2}$ para toda $f \in F_4(v)$.

(R2) Si $d(v) \geq 6$, entonces $\tau(v \rightarrow f) = \frac{3}{2}$ para toda $f \in F_3(v)$ y $\tau(v \rightarrow f) = 1$ para toda $f \in F_4(v)$.

Sea $w'(x)$ la carga después de aplicar (R1) y (R2) para todo $x \in V(G) \cup F(G)$. Mostraremos a continuación que $w'(x) \geq 0$ para todo $x \in V(G) \cup F(G)$. Sea $f \in F(G)$.

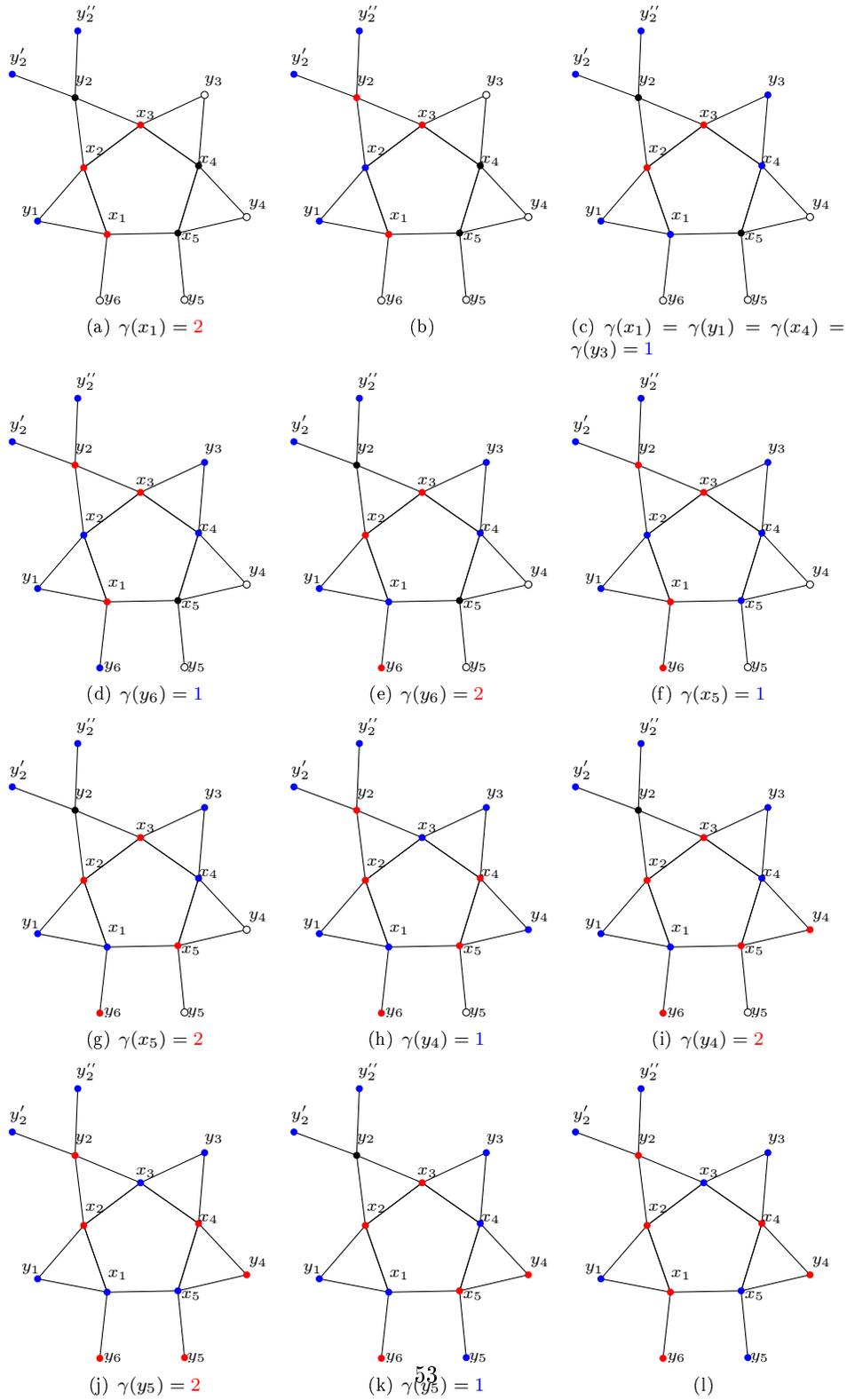


Figura 3.8: *Caso 1*

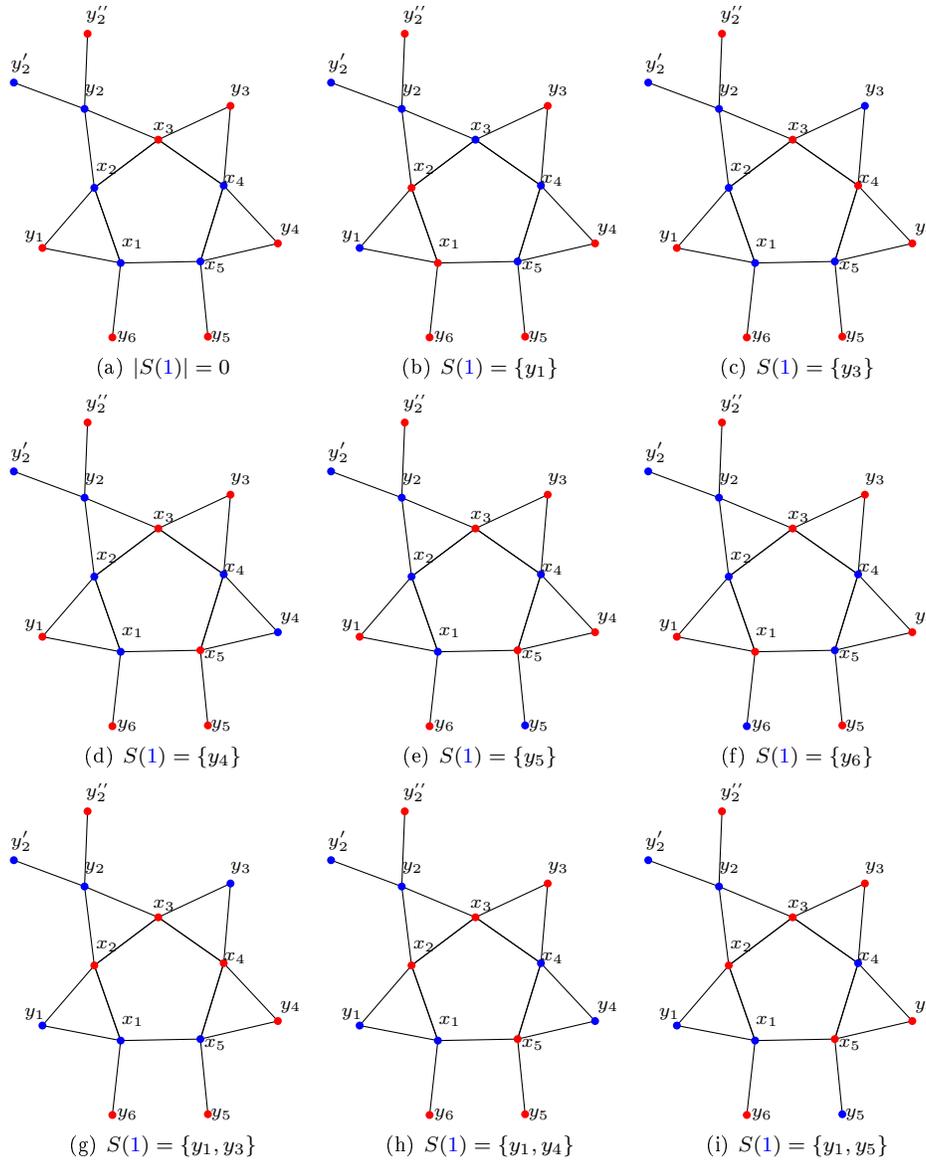


Figura 3.9: *Caso 2*

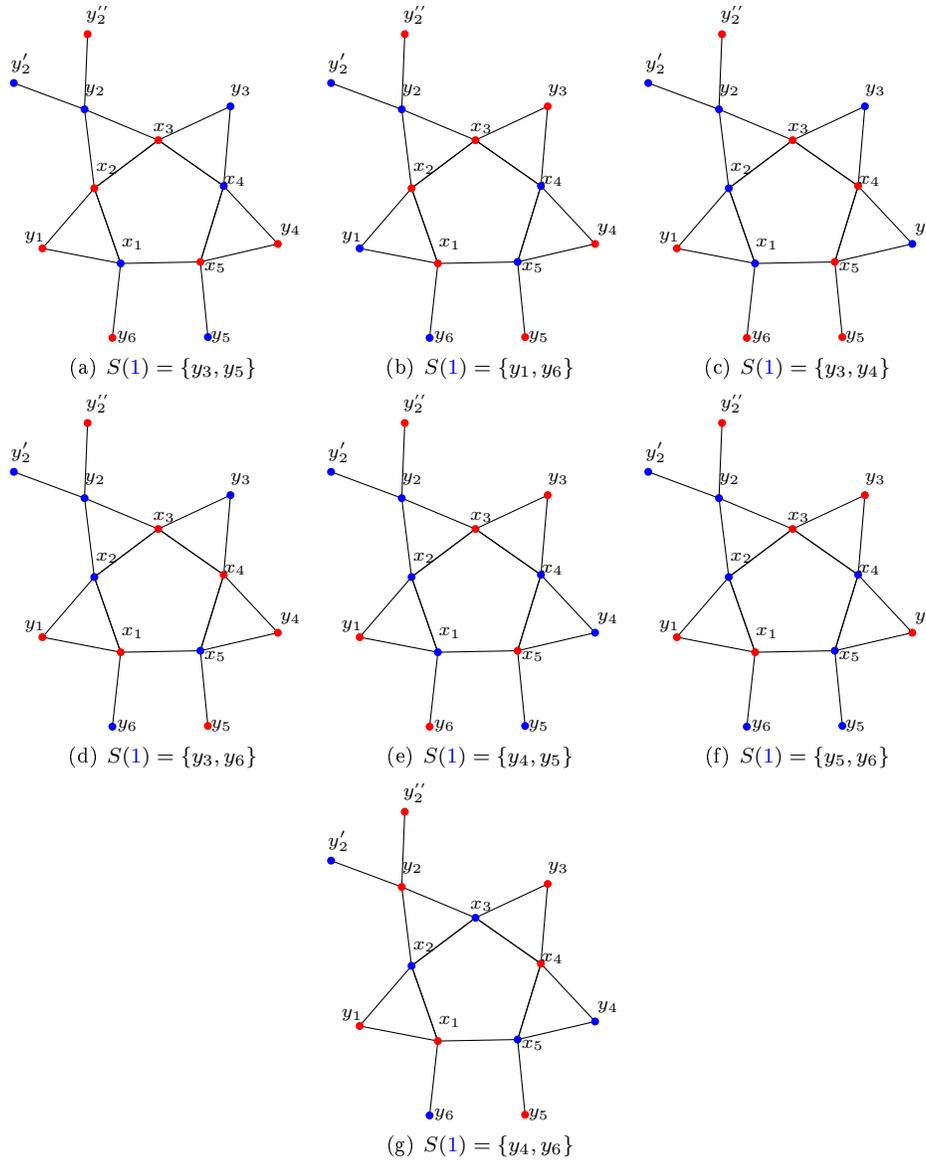


Figura 3.10: *Caso 2 (continuación)*

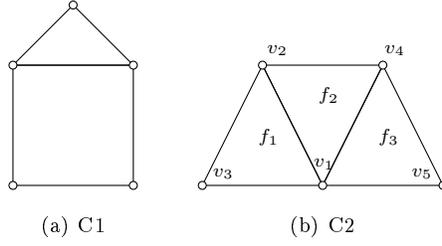


Figura 3.11: Estructuras prohibidas

- Si $d(f) = 3$, entonces $w(f) = -3$. Si f incide en un 3-vértice, los otros dos tienen grado al menos 6 y, por (R2), cada uno le da $\frac{3}{2}$ a f , por lo que $w'(f) \geq -3 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 0$. Si f no incide en ningún 3-vértice, por (R1) y (R2), cada vértice en el que incide f le da al menos 1, por lo que $w'(f) \geq -3 + 3 = 0$.
- Si $d(f) = 4$, entonces $w(f) = -2$. Si f incide en un 3-vértice, entonces f incide en dos vértices con grado al menos 6, los cuales dan 1 a f , por (R2); si f no incide en ningún 3-vértice, cada vértice le da al menos $\frac{1}{2}$ por (R1) o (R2), por lo que, en ambos casos, $w'(f) \geq -2 + 2 = 0$.
- Si $d(f) \geq 6$, entonces $w(f) = w'(f) \geq 0$.

Sea v en $V(G)$. Por hipótesis $d(v) \geq 3$.

- Si $d(v) = 3$, entonces $w(v) = w'(v) = 0$.
- Si $d(v) = 4$, entonces $w(v) = 2$ y, por (C2), $|F_3(v)| \leq 2$. Si $|F_3(v)| = 0$, entonces, por (R1), $w'(v) \geq 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$. Si $|F_3(v)| = 1$, por (C1) $|F_4(v)| \leq 1$, con lo que, por (R1), $w'(v) \geq 2 - 1 - \frac{1}{2} > 0$. Si $|F_3(v)| = 2$, entonces, por (C1), $|F_4(v)| = 0$, por lo que (R1) da $w'(v) = 2 - 2 = 0$.
- Si $d(v) = 5$, entonces $w(v) = 4$ y, por (C2), $|F_3(v)| \leq 3$. Si $|F_3(v)| = 0$, entonces $|F_4(v)| \leq 5$ y, por (R1), $w'(v) \geq 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$. Si $|F_3(v)| = 1$, entonces $|F_4(v)| \leq 2$ y, por (R1), $w'(v) \geq 4 - 2 = 2$. Si $|F_3(v)| = 2$, entonces $|F_4(v)| \leq 1$ y $w'(v) \geq 4 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Si $|F_3(v)| = 3$, entonces $|F_4(v)| = 0$ y $w'(v) \geq 4 - 3 = 1$.
- Si $d(v) \geq 6$, entonces

$$\begin{aligned}
 w'(v) &= w(v) - |F_4(v)| - \frac{3}{2}|F_3(v)| \\
 &= (d(v) - 6) + d(v) - |F_4(v)| - \frac{3}{2}|F_3(v)| \geq \\
 &= d(v) - |F_4(v)| - \frac{3}{2}|F_3(v)|. \quad (*)
 \end{aligned}$$

Sea $f_{3,2}$ el número de los pares de 3-caras adyacentes que inciden en v (por (C2)) dadas dos 3-caras adyacentes e incidentes en v , no puede haber otra 3-cara incidente a v y adyacente a alguna de las dos 3-caras adyacentes) y sea $f_{3,1} = |F_3(v)| - 2f_{3,2}$, el número de 3-caras incidentes en v que no son adyacentes a otra 3-cara. Por (C1), por cada par de 3-caras adyacentes que inciden en v existen dos k -caras en $F(v)$, con $k \geq 6$, cada una adyacente a una 3-cara diferente. (C1) también implica que, por cada 3-cara que incide en v hay dos caras k -caras en $F(v)$, con $k \geq 6$, adyacentes a la 3-cara. Por lo que,

$$|F_4(v)| \leq d(v) - |F_3(v)| - (f_{3,1} + f_{3,2}) = d(v) - 2f_{3,1} - 3f_{3,2}.$$

De esto se infiere

$$\begin{aligned} d(v) - |F_4(v)| - \frac{3}{2}|F_3(v)| &= d(v) - |F_4(v)| - \frac{3}{2}(f_{3,1} + 2f_{3,2}) \\ &\geq 2f_{3,1} + 3f_{3,2} - \frac{3}{2}(f_{3,1} + 2f_{3,2}) \\ &= \frac{1}{2}f_{3,1} \geq 0, \end{aligned}$$

por lo que, con (*), obtenemos $w'(v) \geq 0$.

Entonces

$$0 \leq \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w'(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} w(x) = -12$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe ningún contraejemplo al lema, por lo que éste es cierto. ■

Hay que observar que una consecuencia del lema anterior es que toda gráfica plana sin 5-ciclos es 3-degenerada. Si G es una gráfica plana sin 5-ciclos y con $\delta(G) \geq 3$, por el Lema 3.2.5, G tiene una arista incidente en un vértice de grado tres. Para toda subgráfica H de G , tal que $\delta(H) \geq 3$, el Lema 3.2.5 nos garantiza que tiene un 3-vértice.

Teorema 3.2.6. [25] *Si G es una gráfica plana sin 5-ciclos, entonces $a(G) \leq 2$.*

Demostración: Sea G una gráfica plana sin 5-ciclos, por la observación previa a este teorema, G es 3-degenerada, por lo que, por el Lema 1.3.4, $a(G) \leq 2$. ■

Al igual que con los 5-ciclos, la ausencia de 6-ciclos también implica que una gráfica plana es 3-degenerada. La prueba de esto es larga, por lo que sólo citaremos el resultado.

Teorema 3.2.7. [15] *Toda gráfica plana sin 6-ciclos es 3-degenerada.*

Corolario 3.2.8. [25] *Si G es una gráfica plana sin 6-ciclos, entonces $a(G) \leq 2$.*

Demostración: Sea G una gráfica plana sin 6-ciclos, por el teorema anterior, G es 3-degenerada, por lo que, por el Lema 1.3.4, $a(G) \leq 2$. ■

Huang, Shiu y Wang [19] probaron que la ausencia de 7-ciclos implica que la arboricidad es a los más dos. Dada la longitud de la prueba no la reproduciremos aquí.

Teorema 3.2.9. [19] *Si G es una gráfica plana sin 7-ciclos, entonces $a(G) \leq 2$.*

Queda la pregunta de cual es el mayor entero positivo k tal que la ausencia de k -ciclos implique que la arboricidad es a lo más dos. Raspaud y Wang [25] mostraron que $k \leq 21$. Sin embargo, no se sabe aún si la cota es justa.

3.3. Caracterización de las gráficas planas con arboricidad dos

En [17], Hakimi y Schmeichel dan la siguiente caracterización de las gráficas planas con arboricidad dos.

Teorema 3.3.1. [17] *Sea G una gráfica plana. Entonces $a(G) = 2$ si y sólo si G^* tiene una subgráfica generadora euleriana y con $|V(G^*)| > 1$.*

Demostración: Supóngase que $a(G) = 2$. Sea V_1, V_2 partición de $V(G)$ tal que $G[V_i]$ es acíclica para $i = 1, 2$. Sean $E = E(V_1, V_2)$ y $\phi_G(E) = E^*$. Como $E \in C^*(G)$, por el Corolario 2.2.11, tenemos que $E^* \in C(G^*)$. Sea $H = (V(G^*), E^*, \psi_{G^*|E^*})$. Por la Proposición 1.2.15, todos los vértices de H tienen grado par. Como la arboricidad es dos, G tiene al menos un ciclo y, por la Proposición 2.2.4, $\partial(f)$ contiene un ciclo para toda f en $F(G)$. Por otro lado, todo ciclo de G tiene al menos 2 aristas en E , pues E rompe todos los ciclos. Entonces $d_H(v) > 0$ para todo $v \in V(H)$. Si H no fuera conexa, sean H_1, \dots, H_k sus componentes conexas y sea $F^* = (V(H_1), V(H_2) \cup \dots \cup V(H_k))$. Entonces F^* sería un corte en $C^*(G^*)$ tal que $F^* \cap E^* = \emptyset$. Por el Lema 1.2.17, $F^* = F_1^* \cup \dots \cup F_k^*$, con F_i^* corte minimal para $1 \leq i \leq k$. Entonces F_1, \dots, F_k serían ciclos contenidos en $G[V_1]$ o $G[V_2]$, que son acíclicas por hipótesis. Por lo tanto H es conexa y como todos los vértices tienen grado par, podemos concluir que H es euleriana.

Ahora supóngase que G^* tiene al menos 2 vértices y que tiene una subgráfica generadora H euleriana. Sea $E^* = E(H)$. Como H es euleriana, por el Teorema 1.2.11, E^* es la unión ajena de ciclos en G^* . Por la Proposición 1.2.15, $E^* \in C(G^*)$. Por lo tanto, por el Corolario 2.2.11, E es un corte en G . Sea V_1, V_2 la partición de $V(G)$ tal que $E = E(V_1, V_2)$. Si G fuera un bosque, por la Proposición 2.2.3, $|V(G^*)| = 1$. Por lo tanto, G tiene al menos un ciclo. Sea C un ciclo de G . Por el Teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.1.2), $\mathbb{R}^2 - C$ tiene dos regiones, $ext(C)$ e $int(C)$. El camino euleriano de H tiene que pasar por lo menos por 2 aristas de C para pasar de $ext(C)$

a $int(C)$ y a $ext(C)$ otra vez. Por lo tanto, todo ciclo C en G tiene por lo menos 2 aristas en E , es decir, E parte todos los ciclos. Entonces $G[V_i]$ es acíclica para $i = 1, 2$. Por lo tanto, $a(G) \leq 2$. Como G tiene al menos un ciclo C , se tiene que $2 = a(C) \leq a(G) \leq 2$, por lo que $a(G) = 2$. ■

Como consecuencia de este teorema, Hakimi y Schmeichel prueban el siguiente teorema, el cual da una caracterización de las triangulaciones con arboricidad dos.

Teorema 3.3.2. [27] *Sea G una gráfica plana maximal con cuatro o más vértices. Entonces $a(G) = 2$ si y sólo si G^* es hamiltoniana.*

Demostración: Como G es plana maximal, se tiene que G^* es cúbica.

Supóngase que $a(G) = 2$. Entonces, por el Teorema 3.3.1, G^* tiene una subgráfica euleriana generadora H , lo que implica que $2 \leq d_H(f) \leq 3$ para toda f en $V(H)$. Como todos los vértices de H deben tener grado par, se tiene que $d_H(f) = 2$ para toda f en $V(H)$, por lo que el camino euleriano sólo pasa una vez por cada vértice de H . Al ser H subgráfica generadora esto implica que el camino es hamiltoniano.

Supóngase que G^* es hamiltoniana y sea $C \leq G^*$ el ciclo hamiltoniano. Entonces C es una subgráfica euleriana generadora de G^* , lo que implica, por el Teorema 3.3.1, que $a(G) = 2$. ■

Otra consecuencia obtenida en [17] es el Teorema de Tait.

Teorema de Tait. (véase [17]) *Sea G plana maximal. Si G^* es Hamiltoniana entonces G es 4-coloreable.*

Demostración: Como G^* es Hamiltoniana, se tiene que $a(G) = 2$. Entonces G es 4-coloreable. ■

Conclusiones

En esta tesis, los resultados principales que se presentan son los siguientes. Primero que nada, se muestra que toda gráfica plana tiene, a lo más, arboricidad igual a tres. Además, se menciona que esta cota es justa y se da una caracterización de las gráficas planas con arboricidad dos en términos de su gráfica dual. Finalmente, se presentan diversas condiciones que garantizan que la arboricidad sea dos. En particular se expone que, si G es una gráfica plana sin k -ciclos, donde k es un entero no menor que 3 ni mayor que 7, entonces su arboricidad es a lo más dos [15, 19, 25].

Para concluir, queremos subrayar que la pregunta sobre cuál es el mayor entero k para el cual toda gráfica plana sin k -ciclos tenga arboricidad dos está aún abierta, aunque sí se sabe que k es un entero entre 7 y 21 [19, 25].

Bibliografía

- [1] APPEL, K. Y HAKEN, W. Every planar map is four colorable. I. Discharging. *Illinois J. Math.* **21**(3):429–490 (1977)
- [2] APPEL, K., HAKEN, W., Y KOCH, J. Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility. *Illinois J. Math.* **21**(3):491–567 (1977)
- [3] APPEL, K. Y HAKEN, W. *Every Planar Map is Four Colorable, Contemporary Mathematics*, tomo 98. American Mathematical Society (1989)
- [4] BONDY, J. Y MURTY, U. *Graph Theory*. Springer (2008)
- [5] BONNINGTON, C.P. Y LITTLE, C.H. *The Foundations of Topological Graph Theory*. Springer (1995)
- [6] BORODIN, O.V., IVANOVA, A.O., MONTASSIER, M., OCHEM, P., Y RASPAUD, A. Vertex Decompositions of Sparse Graphs into an Edgeless Subgraph and a Subgraph of Maximum Degree at Most k . *Journal of Graph Theory* **65**(2):83–93 (2010)
- [7] BORODIN, O.V. Y IVANOVA, A.O. Planar Graphs Without 4-Cycles Adjacent to 3-Cycles Are List Vertex 2-Arborable. *Journal of Graph Theory* **62**(3):234–240 (2009)
- [8] BORODIN, O.V. Y IVANOVA, A.O. List Strong Linear 2-Arboricity of Sparse Graphs. *Journal of Graph Theory* **67**(2):83–90 (2010)
- [9] BORODIN, O., IVANOVA, A., MONTASSIER, M., Y RASPAUD, A. (k, j) -coloring of sparse graphs. *Discrete Applied Mathematics* **159**(17):1947–1953 (2011)
- [10] BRETTO, A., FAISANT, A., Y HENNECART, F. *Éléments de théorie des graphes*. Springer (2012)
- [11] CHARTRAND, G. Y KRONK, H. The point-arboricity of planar graphs. *Journal London Mathematical Society* **44**:612–616 (1969)

- [12] CHARTRAND, G. Y LESNIAK, L. *Graphs and Digraphs*. Chapman & Hall/CRC (2000)
- [13] CHARTRAND, G., KRONK, H., Y WALL, C. The point-arboricity of a graph. *Israel Journal of Mathematics* **6**(2):169–175 (1968)
- [14] DIESTEL, R. *Graph Theory*. Springer (2010)
- [15] FIJAVŽ, G., JUVAN, M., MOHAR, B., Y ŠKREKOVSKI, R. Planar graphs without cycles of specific lengths. *European Journal of Combinatorics* **23**:377–388 (2002)
- [16] FRIEDBERG, S.H., INSEL, A.J., Y SPENCE, L.E. *Linear Algebra*. Prentice Hall (2003)
- [17] HAKIMI, S. Y SCHMEICHEL, E. A note on the vertex arboricity of a graph. *SIAM Journal of Discrete Mathematics* **2**(1):64–67 (1989)
- [18] HANSBERG, A. Y MONTEJANO, A. Notas del proyecto “Misteriosas descomposiciones en gráficas” (2014). I Taller de Matemáticas Discretas.
- [19] HUANG, D., SHIU, W.C., Y WANG, W. On the vertex-arboricity of planar graphs without 7-cycles. *Discrete Mathematics* **312**(15):2304–2315 (2012)
- [20] JENSEN, T.R. Y TOFT, B. *Graph Coloring Problems*. Wiley (1994)
- [21] LICK, D.R. Y WHITE, A.T. k -degenerate graphs. *Canadian Journal of Mathematics* **22**:1082–1096 (1970)
- [22] MOHAR, B. Y ŠPACAPAN, S. Degenerate and star colorings of graphs on surfaces. *European Journal of Combinatorics* **33**(3):340–349 (2012)
- [23] POH, K. On the Linear Vertex-Arboricity of a Planar Graph. *Journal of Graph Theory* **14**(1):73–75 (1990)
- [24] PRIETO, C. *Topología básica*. Fondo de Cultura Económica (2013)
- [25] RASPAUD, A. Y WANG, W. On the vertex-arboricity of planar graphs. *European Journal of Combinatorics* **29**(4):1064–1075 (2008)
- [26] SALAVATIPOUR, M. *Graph Colouring via the Discharging Method*. Tesis Doctoral, University of Toronto (2003)
- [27] STEIN, S. B-set and planar maps. *Pacific Journal of Mathematics* **37**(1):217–224 (1971)
- [28] THOMASSEN, C. Decomposing a Planar Graph into an Independent Set and a 3-Degenerate Graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **83**(2):262–271 (2001)
- [29] WANG, W. Y LIH, K.W. Choosability and Edge Choosability of Planar Graphs without Five Cycles. *Applied Mathematics Letters* **15**:561–565 (2002)