UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL MÓDULO INCLINANTE CARACTERÍSTICO ASOCIADO A UN ÁLGEBRA ESTÁNDARMENTE ESTRATIFICADA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

ANDRES BAREI BUENO

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. EDITH CORINA SÁENZ VALADEZ

2016

Ciudad universitaria, CDMX

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno	
Apellido paterno	Barei
Apellido materno	Bueno
Nombre	Andres
Teléfono	271 71 2 11 50
Universidad	UNAM
Facultad	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	414003693
2. Datos del tutor	
Grado	Dra.
Nombres	Edith Corina
Apellido paterno	Sáenz
Apellido materno	Valadez
3. Datos del sinodal 1	
Grado	Dr.
Nombre	Octavio
Apellido paterno	Mendoza
Apellido materno	Hernández
4. Datos del sinodal 2	
Grado	Dr.
Nombre	Valente
Apellido paterno	Santiago
Apellido materno	Vargas
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Dra.
Nombres	Edith Corina
Apellido paterno	Sáenz
Apellido materno	Valadez
6. Datos del sinodal 4	
Grado	Dra.
Nombre	Diana
Apellido paterno	Avella
Apellido materno	Alaminos
7. Datos del sinodal 5	
Grado	Dr.
Nombre	Daniel
Apellido paterno	Labardini
Apellido materno	Fragoso

Índice general

Introducción

Las álgebras casihereditarias fueron introducidas en los años 80 por E. Cline, B. Parshall y L. Scott en sus estudios de categorías de peso máximo (ver [CPS1] y [CPS2]). Estas categorías aparecen en el contexto de álgebras de Lie, grupos algebraicos y categorías trianguladas.

En 1992, V. Dlab y C. M. Ringel establecieron el concepto de módulo estándar y dieron la definición de álgebra casihereditaria de dimensión finita en términos de estos. Más tarde, I. Agoston, V. Dlab y E. Lukács introdujeron el concepto de álgebra estándarmente estratificada a la izquierda. Este nuevo concepto es una generalización de la noción de álgebra casihereditaria (ver [ADL]). Estos conceptos surgen naturalmente del estudio de las categorías de peso máximo. Es bien sabido que bajo condiciones de finitud adecuadas, toda categoría de peso máximo con pesos linealmente ordenados es isomorfa a la categoría de módulos finitamente generados sobre un álgebra casihereditaria. Más aun, dicha álgebra es única (hasta isomorfismo).

Dada un álgebra de dimensión finita Λ, denotamos por $\Delta = \{\Delta(1), \Delta(2), \dots, \Delta(n)\}$ al conjunto de los módulos estándar, donde n es el número de Λ-módulos simples y $\leq$ es el orden natural en el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ que indexa a los módulos simples (ver la definición 3.1).

Asociadas al conjunto Δ de los módulos estándar se tienen las siguientes categorías:

1. La categoría $\mathcal{F}(\Delta)$, que es la subcategoría plena de Λ-mod cuyos objetos son los Λ-módulos Δ-filtrados. Se le conoce como la categoría de los módulos Δ-buenos (ver la definición 3.6).

2. La subcategoría plena de Λ-mod que consta de los módulos Ext-inyectivos relativos a $\mathcal{F}(\Delta)$, es decir, $\mathcal{Y}(\Delta) := \{M \in \Lambda\text{-mod} \mid \operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}(\Delta), M) = 0\}$.

3. La subcategoría plena de Λ-mod, $\omega(\Delta) := \mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{Y}(\Delta)$.

Decimos que Λ es estándarmente estratificada (a la izquierda) con respecto al orden natural $\leq$, si ${}_{\Lambda}\Lambda \in \mathcal{F}(\Delta)$.

Dada un álgebra estándarmente estratificada (a la izquierda) con respecto al orden natural $\leq$, se sabe que la categoría $\omega(\Delta)$ está completamente determinada por un módulo inclinante generalizado T (ver [AHLU2] y [X]). Específicamente se tiene que $\omega(\Delta) = \operatorname{add}(T)$ (ver el teorema 3.23).

En general, este módulo inclinante generalizado T no es coinclinante, pero C. Xi demostró en [X] que T es un módulo coinclinante si, y solo si el álgebra Λ es de Gorenstein (ver el teorema 3.34).

Resulta que las álgebras casihereditarias son de Gorenstein (tal como se muestra en [DR]) y, como ya mencionamos, las álgebras estándarmente estratificadas y de Gorenstein satisfacen algunas propiedades especiales (ver el teorema 3.34).

El objetivo de este trabajo es dar una demostración detallada de los teoremas 3.23 y 3.34.

Ahora bien, el trabajo está organizado como sigue. En el primer capítulo estudiamos los conceptos y resultados preliminares que son necesarios para el desarrollo del trabajo, los cuales conforman una parte de la teoría básica de módulos y álgebras de dimensión finita. En el segundo capítulo, introducimos los conceptos de álgebras de carcaj y carcajes ordinarios asociados a un álgebra, estudiando algunas propiedades que satisfacen; esto con el fin de tener una satisfactoria fuente de ejemplos para el siguiente capítulo y también porque en la teoría de álgebras de dimensión finita, el teorema de Gabriel (ver el teorema 2.19) es fundamental. El en tercer y último capítulo, el objetivo principal de este trabajo, estudiamos las álgebras estándarmente estratificadas: primero vemos algunas propiedades básicas que cumplen, después, mostramos la existencia del módulo inclinante característico y derivamos otros resultados a partir de este. En particular, analizamos el caso en el que el álgebra es de Gorenstein.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo consiste de una recopilación, como su nombre lo indica, de definiciones y resultados básicos que serán fundamentales para el desarrollo del trabajo. Se comienza con álgebras sobre un campo dado y sus módulos enunciando algunas de sus propiedades, entre las cuales encontramos diversos teoremas de estructura. Más adelante recordamos varias propiedades sobre las categorías de módulos.

Cabe notar que desde el inicio se presupone un conocimiento superficial sobre la teoría de anillos, módulos y categorías, como el que se obtiene en los cursos de álgebra impartidos en la Facultad de Ciencias.

1.1. Álgebras y Módulos

En esta sección se da la definición de álgebra sobre un campo y se muestran propiedades básicas de estas, así como de sus módulos. Supondremos siempre que los anillos tienen uno; además, se entenderá que al hablar de un módulo, hablamos en realidad de un módulo izquierdo a menos que se indique lo contrario.

Definición 1.1. Sea K un campo. Una K-álgebra o álgebra sobre K, es un anillo Λ que posee estructura de K espacio vectorial tal que $k(\lambda\mu) = (k\lambda)\mu = \lambda(k\mu)$ para cualesquiera $k \in K$ y $\lambda, \mu \in \Lambda$.

El campo K puede verse como subanillo de Λ gracias al monomorfismo $K \overset{\iota}{\hookrightarrow} \Lambda$ definido por $\iota(k) = k1_\Lambda$. Por esto y a partir de ahora, asumiremos siempre que el campo se encuentra contenido en Λ, y además, por definición de Λ tenemos que $K \subseteq Z(\Lambda)$ (K es central en Λ).

Algunos ejemplos de álgebras sobre un campo K son los siguientes.

Ejemplo 1.2. K es una K-álgebra.

Ejemplo 1.3. El anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$ es una K-álgebra definiendo la multiplicación por escalar distribuyendo sobre cada coeficiente.

Antes del siguiente ejemplo, es importante notar que cuando hablemos de cualquier orden, llamaremos máximo a un objeto que no tiene cotas superiores distintas a él y mayor a un objeto que es mayor que cualquier otro. Análogamente para los términos mínimo y menor.

Ejemplo 1.4. El anillo de polinomios con variables no conmutativas, $K\langle x_1,\dots,x_n\rangle$, es una K-álgebra con una operación análoga a la del ejemplo anterior. Nótese que si S es el ideal generado por $\{x_ix_j - x_jx_i \mid i,j = 1,\dots,n\}$, entonces

$$\frac{K\langle x_1,\dots,x_n\rangle}{S} \cong K[x_1,\dots,x_n]$$

ya que S es el menor ideal tal que las variables conmutan y $K[x_1,\dots,x_n]$ es el mayor cociente tal que las variables conmutan.

Ejemplo 1.5. Si Λ es una $K-$álgebra, entonces $M_n(\Lambda)$ también lo es con las operaciones matriciales usuales y el producto por escalares distribuyéndose sobre todas las entradas.

Ejemplo 1.6. Sea G un grupo, definimos KG como el K espacio vectorial con base G. KG es un anillo con la multiplicación distributiva tal que el producto de básicos es el producto en G. De esta forma, KG es también una K-álgebra.

Definición 1.7. Un morfismo entre dos K-álgebras Λ y Λ' es una función entre estas que es morfismo de K espacios vectoriales y morfismo de anillos con uno simultáneamente.

Denotaremos por Λ-Mod a la categoría de Λ-módulos izquierdos y por Λ-mod a la subcategoría plena de Λ-Mod que consta de los módulos finitamente generados. Es importante notar que si Λ es una K-álgebra, entonces Λ-Mod es una subcategoría de K-Mod puesto que todo Λ-módulo es un K-módulo y todo Λ-morfismo es un K-morfismo ya que $K \subseteq \Lambda$. Además, si Λ es de dimensión finita, todo Λ-módulo finitamente generado tiene K-dimensión finita. Lo último se tiene ya que todo espacio vectorial con un subconjunto generador finito es de dimensión finita y si ${}_\Lambda M = {}_\Lambda\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ y $\{k_1,\dots,k_m\}$ es una K-base de ${}_K\Lambda$, entonces $\{k_1a_1, k_2a_1,\dots,k_ma_n\}$ es un conjunto generador finito de ${}_KM$.

Observación 1.8. Dada una K-álgebra Λ, K es un Λ-módulo si, y solo si $K = \Lambda$. Como $K \subset \Lambda$, K es un Λ-módulo si, y solo si K es ideal izquierdo de Λ, pero $\Lambda K = K$ si, y solo si $K = \Lambda$ pues 1_K es neutro para los elementos de Λ.

Definición 1.9. Un Λ-módulo M es neteriano si satisface la condición ascendente de cadena en submódulos, es decir, si toda cadena ascendente de submódulos de M es estacionaria; Λ es un anillo neteriano si es neteriano como Λ-módulo.

Dualmente, un Λ-módulo M es artiniano si satisface la condición descendente de cadena en submódulos, es decir, si toda cadena descendente de submódulos de M es estacionaria; Λ es un anillo artiniano si es artiniano como Λ-módulo.

Lema 1.10. *Tanto la clase de los módulos neterianos como la clase de los módulos artinianos son cerradas bajo submódulos, cocientes y extensiones (en particular bajo sumas directas finitas).*

Demostración. Lo primero es evidente y lo segundo se sigue directamente del teorema de la correspondencia. Para la cerradura bajo extensiones, consideremos la sucesión exacta $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ con N y M/N artinianos. La prueba para módulos neterianos es análoga.

Sea $N_1 \geq N_2 \geq \ldots$ una cadena de submódulos de M. Podemos entonces considerar las cadenas $N \cap N_1 \geq N \cap N_2 \geq \ldots$ y $N + N_1 \geq N + N_2 \geq \ldots$ que se estacionan por hipótesis. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N + N_n = N + N_m$ y $N \cap N_n = N \cap N_m$ para cualquier $m \geq n$. Entonces, por la propiedad modular tenemos que para cualquier $m \geq n$, $N_m = (N_m \cap N) + N_m = (N_n \cap N) + N_m = (N_m + N) \cap N_n = (N_n + N) \cap N_n = N_n$. Con esto tenemos que la cadena $N_1 \geq N_2 \geq \ldots$ se estaciona, así que M es artiniano. □

Proposición 1.11. *Un módulo es neteriano si, y solo si todos sus submódulos son finitamente generados.*

Demostración. Sea M un Λ-módulo. Si M es neteriano, como la clase de los módulos neterianos es cerrada bajo submódulos, basta ver que M es finitamente generado. Si esto no fuera cierto, podríamos construir una cadena $\langle m_1 \rangle < \langle m_1, m_2 \rangle < \ldots$ con $m_{i+1} \notin \langle m_1, \ldots, m_i \rangle$, cosa que es imposible pues M es neteriano. Entonces, M debe ser finitamente generado.

Conversamente, si todo submódulo de M es finitamente generado, consideremos una cadena $M_0 \leq M_1 \leq \ldots$ de submódulos de M. Sea $N := \sum\{M_i\}_{\mathbb{N}}$: N es un submódulo de M pues es la unión de una cadena. Por hipótesis, N debe ser finitamente generado, digamos por el conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Para cada a_i, debe existir $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $a_i \in M_{k_i}$, así que si $k := \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq M_k$. Esto quiere decir que $N = M_k$, por lo que la cadena debe estacionarse. Concluimos entonces que M es neteriano. □

Ejemplo 1.12. Si Λ es una K-álgebra de dimensión finita, entonces Λ es un anillo neteriano y artiniano. Este hecho se sigue inmediatamente de que toda cadena de Λ-módulos es, en particular, una cadena de K-módulos.

Definición 1.13. El anulador de un Λ-módulo M es $(0 : M) := \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda m = 0, \forall m \in M\}$.

Proposición 1.14. *Para cualquier Λ-módulo M, $(0 : M)$ es un ideal bilateral de Λ y M es un Λ/I-módulo para cualquier I subideal bilateral de $(0 : M)$.*

Demostración. Sean $\lambda, \mu \in \Lambda$, $a \in (0 : M)$ y $m \in M$. Calculando, $\lambda a \mu m = \lambda a(\mu m) = \lambda 0 = 0$ pues $\mu m \in M$. Por lo tanto, $\Lambda(0 : M)\Lambda \subseteq (0 : M)$, es decir, $(0 : M)$ es un ideal bilateral de Λ.

Consideremos ahora I un subideal bilateral de $(0 : M)$. Definimos el producto $(\lambda + I)m = \lambda m$, $\forall m \in M$, $\forall \lambda + I \in \Lambda/I$. Este producto se encuentra bien definido, pues dados, $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ tales que $\lambda - \lambda' \in I$, tenemos que $(\lambda - \lambda')m = 0\ \forall m \in M$ pues $I \leq (0 : M)$. Las propiedades que debe de cumplir este producto para que M sea un Λ/I-módulo las hereda de su producto como Λ-módulo. □

1.2. Descomposición en módulos inescindibles

En esta sección definimos el concepto de módulo inescindible y probamos que todo módulo finitamente generado sobre una K-álgebra de dimensión finita se descompone en una suma directa de submódulos inescindibles. Después, observamos algunas propiedades sencillas pero muy importantes de los módulos inescindibles. Finalmente, analizamos un resultado que nos permite trabajar con álgebras básicas (definidas en su momento) sin perder generalidad. En este proceso, caracterizamos las clases de isomorfía de los módulos proyectivos inescindibles finitamente generados y vemos que hay un número finito de estas clases cuando el álgebra es de dimensión finita.

Definición 1.15. Diremos que un Λ-módulo M no nulo es inescindible si no tiene sumandos directos no triviales. Es decir, que si $M = U \oplus V$, entonces $U = 0$ o $V = 0$.

Lema 1.16. *Sea M un Λ-módulo no nulo. Si M es artiniano o neteriano, entonces M admite una descomposición en submódulos inescindibles $M = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$*

Demostración. Supongamos que M no se puede descomponer en submódulos inescindibles, entonces existen $0 \neq A_1, B_1 \leq M$ tales que $A_1 \oplus B_1 = M$. Como esta no puede ser una descomposición en inescindibles, podemos suponer sin pérdida de generalidad que A_1 se descompone como $A_2 \oplus B_2$. Inductivamente, podemos seguir con este proceso obteniendo cadenas $A_1 > A_2 > A_3 > \ldots$ y $B_1 < B_1 \oplus B_2 < B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 < \ldots$. Por lo tanto, M no puede ser ni artiniano ni neteriano. □

Lema 1.17. *Sea M un Λ-módulo artiniano y neteriano. Si $\varphi \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $M = \mathrm{Nuc}(\varphi^n) \oplus \mathrm{Im}(\varphi^n)$.*

Demostración. Consideremos las cadenas $\mathrm{Nuc}(\varphi) \leq \mathrm{Nuc}(\varphi^2) \leq \ldots$ y $\mathrm{Im}(\varphi) \geq \mathrm{Im}(\varphi^2) \geq \ldots$. Como M es artiniano, las cadenas se estacionan, digamos que en n_1 y n_2 respectivamente. Veamos primero que $\mathrm{Nuc}(\varphi^{n_1}) \cap \mathrm{Im}(\varphi^{n_1}) = 0$. Sea $x \in (\mathrm{Nuc}(\varphi^{n_1}) \cap \mathrm{Im}(\varphi^{n_1}))$, entonces existe $y \in M$ tal que $\varphi^{n_1}(y) = x$ y $\varphi^{n_1}(x) = 0$. Pero $\mathrm{Nuc}(\varphi^{n_1}) = \mathrm{Nuc}(\varphi^{2n_1})$, por lo que $0 = \varphi^{n_1}(x) = \varphi^{2n_1}(y)$ nos asegura que $y \in \mathrm{Nuc}(\varphi^{n_1})$, es decir, $0 = \varphi^{n_1}(y) = x$. Por lo tanto, $\mathrm{Nuc}(\varphi^{n_1}) \cap \mathrm{Im}(\varphi^{n_1}) = 0$. Ahora veamos que $\mathrm{Nuc}(\varphi^{n_2}) + \mathrm{Im}(\varphi^{n_2}) = M$. Sea $m \in M$, $\varphi^{n_2}(m) \in \mathrm{Im}(\varphi^{n_2}) = \mathrm{Im}(\varphi^{2n_2})$, por lo que existe $n \in M$ tal que $\varphi^{2n_2}(n) = \varphi^{n_2}(m)$. Entonces, $\varphi^{n_2}(n) - m \in \mathrm{Nuc}(\varphi^{n_2})$, es decir, existe $k \in \mathrm{Nuc}(\varphi^{n_2})$ tal que $m = \varphi^{n_2}(n) + k$. Por lo tanto, $\mathrm{Nuc}(\varphi^{n_2}) + \mathrm{Im}(\varphi^{n_2}) = M$.

Definamos ahora $n := \max\{n_1, n_2\}$. Tenemos que $\mathrm{Nuc}(\varphi^n) + \mathrm{Im}(\varphi^n) = \mathrm{Nuc}(\varphi^n) + \mathrm{Im}(\varphi_2^n) \geq \mathrm{Nuc}(\varphi^{n_2}) + \mathrm{Im}(\varphi^{n_2}) = M$ y $\mathrm{Nuc}(\varphi^n) \cup \mathrm{Im}(\varphi^n) = \mathrm{Nuc}(\varphi^{n_1}) \cup \mathrm{Im}(\varphi^n) \leq \mathrm{Nuc}(\varphi^{n_1}) \cup \mathrm{Im}(\varphi^{n_1}) = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Nuc}(\varphi^n) \oplus \mathrm{Im}(\varphi^n) = M$. □

Lema 1.18. ***(Fitting)*** *Sea M un Λ-módulo inescindible. Si $\varphi \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$, entonces φ es nilpotente o es un isomorfismo. Además, el conjunto de los endomorfismos nilpotentes es cerrado bajo la suma.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$, por el lema anterior existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $\mathrm{Nuc}(\varphi^n) \oplus \mathrm{Im}(\varphi^n) = M$. Como M es inescindible, $\mathrm{Nuc}(\varphi^n) = M$ o $\mathrm{Im}(\varphi^n) = M$. El primer caso significa que $\varphi^n = 0$, es decir, que φ es nilpotente. El segundo caso asegura que

$\mathrm{Im}(\varphi) \geq \mathrm{Im}(\varphi^n) = M$ y $\mathrm{Nuc}(\varphi) \leq \mathrm{Nuc}(\varphi^n) = 0$, lo que quiere decir que φ es un isomorfismo.

Consideremos ahora $f, g \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$ nilpotentes, es decir, no invertibles, y supongamos que $h := f + g$ sí es invertible. Notemos que hf^{-1} no puede ser invertible, pues si s fuera el inverso de $h^{-1}f$, tendríamos que $\mathrm{Id}_M = h^{-1}fs$ y por ende, $f = hs^{-1}$, cosa que significaría que f sí es invertible. Análogamente, concluimos que $h^{-1}g$ tampoco es invertible. Entonces, $h^{-1}g$ debe ser nilpotente, por lo que existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $(h^{-1}g)^n = 0$. Entonces,

$$0 = (h^{-1}g)^n = (\mathrm{Id}_M - h^{-1}f)^n = \mathrm{Id}_M - h^{-1}f + (h^{-1}f)^2 - \ldots + (-1)^n(h^{-1}f)^n,$$

por lo que

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_M &= h^{-1}f - (h^{-1}f)^2 + \ldots + (-1)^n(h^{-1}f)^n \\ &= (h^{-1}f)(-h^{-1}f + (h^{-1}f)^2 - \ldots + (-1)^n(h^{-1}f)^{n-1}) \\ &= (-h^{-1}f + (h^{-1}f)^2 - \ldots + (-1)^n(h^{-1}f)^{n-1})(h^{-1}f).\end{aligned}$$

Esto último quiere decir que $h^{-1}f$ es invertible, una clara contradicción. Por lo tanto, $f + g$ es nilpotente. Con esto concluimos que el conjunto de los endomorfismos nilpotentes es cerrado bajo la suma. □

Lema 1.19. *Sean M un Λ-módulo no nulo y N un Λ-módulo inescindible. Si $f\colon M \longrightarrow N$ y $g\colon N \longrightarrow M$ son Λ-morfismos tales que gf es un isomorfismo, entonces f y g son isomorfismos.*

Demostración. Como gf es un isomorfismo, g es un epimorfismo y f es un monomorfismo, por lo que las siguientes sucesiones son exactas:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \mathrm{Conuc}(f) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Nuc}(g) \longrightarrow N \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0.$$

Además, estas sucesiones se escinden pues $((gf)^{-1}g)f = \mathrm{Id}_M$ y $g(f(gf)^{-1}) = \mathrm{Id}_M$. Entonces, $N \cong M \oplus \mathrm{Conuc}(f) \cong M \oplus \mathrm{Nuc}(g)$, pero como $M \neq 0$ y N es inescindible, $\mathrm{Nuc}(g) = 0$ y $\mathrm{Conuc}(f) = 0$. Esto quiere decir que f es un epimorfismo y g es un monomorfismo, por lo que ambos son isomorfismos. □

Teorema 1.20. ***(Krull-Schmidt)*** *Sea M un Λ-módulo artiniano y neteriano. Entonces, M admite una descomposición en submódulos inescindibles $M = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$. Más aun, si $M = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ para algunos V_i inescindibles, entonces $n = m$ y existe una permutación σ tal que $U_i \cong V_{\sigma(i)}$ para cualquier $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre n. Para el caso en que $n = 1$, como U_1 es inescindible, $m = 1$ y $U_1 \cong V_1$. Supongamos entonces que se cumple el enunciado para $n - 1 \geq 1$. Sean $\iota_i\colon U_i \longrightarrow M$ y $\iota'_j\colon V_j \longrightarrow M$ las inclusiones naturales y $\pi_i\colon M \longrightarrow U_i$ y $\pi'_j\colon M \longrightarrow V_j$ las proyecciones naturales. Definimos $f_{i,j} = \pi_i \iota'_j \pi'_j \iota_i$.

Notemos que existe j tal que $f_{n,j}$ es un isomorfismo, pues de lo contrario, por el lema de Fitting, tendríamos que

$$\sum_{j=1}^{m} f_{n,j} = \sum_{j=1}^{m} \pi_n \iota'_j \pi'_j \iota_n = \pi_n (\sum_{j=1}^{m} \iota'_j \pi'_j) \iota_n = \pi_n \, \mathrm{Id}_M \, \iota_n = \mathrm{Id}_{U_n}$$

es nilpotente, cosa que es imposible. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que dicho j es m. Entonces, por el lema anterior, $\pi'_m \iota_n$ es un isomorfismo entre U_n y V_m. Entonces, tenemos por el segundo teorema de isomorfía que

$$U_1 \oplus \ldots \oplus U_{n-1} \cong \frac{M}{U_n} \cong \frac{M}{V_m} \cong V_1 \oplus \ldots \oplus V_{m-1}.$$

Por hipótesis de inducción, $m-1 = n-1$ y existe una permutación σ' tal que $U_i \cong V_{\sigma'(i)}$ para toda $i = 1, \ldots, n-1$. Por lo tanto, $n = m$ y $\sigma := \sigma' \cup \{(n,n)\}$ es tal que $U_i \cong V_{\sigma(i)}$ para toda $i = 1, \ldots, n$, con lo que se concluye la demostración. □

El corolario siguiente nos dice que la descomposición en inescindibles de una K-álgebra de dimensión finita Λ forma una lista completa de representantes de las clases de isomorfía de los módulos proyectivos finitamente generados e inescindibles.

Corolario 1.21. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Entonces, Λ se puede descomponer de forma única (hasta isomorfía) como suma directa de submódulos proyectivos inescindibles $\Lambda = P_1 \oplus \ldots \oplus P_t$. Además, todo Λ-módulo proyectivo finitamente generado e inescindible es isomorfo a algún P_i.*

Demostración. La existencia de la descomposición es inmediata del teorema de Krull-Schmidt. Recordemos que un módulo es proyectivo si, y solo si es sumando directo de un módulo libre, por lo que la descomposición en inescindibles de Λ está, en efecto, compuesta únicamente por módulos proyectivos. Solo falta probar la segunda afirmación. Sea P un Λ-módulo proyectivo finitamente generado e inescindible. Sabemos que existen un Λ-módulo M y $n \in \mathbb{N}$ tal que $P \oplus M \cong \Lambda^n$. Como Λ^n es neteriano y artiniano y M se sumerge en este, M también es neteriano y artiniano. Entonces, por el teorema de Krull-Schmidt, M admite una descomposición en inescindibles $M = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$. Así, tenemos que

$$P \oplus U_1 \oplus \ldots \oplus U_k \cong P \oplus M \cong \Lambda^n \cong \bigoplus_{i=1}^{n} P_1 \oplus \ldots \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} P_t.$$

Por lo tanto, por el teorema de Krull-Schmidt tenemos que $P \cong P_i$ para alguna $i = 1, \ldots, t$. □

Proposición 1.22. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita con descomposición en inescindibles ${}_\Lambda\Lambda = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$. Si $1 = e_1 + \ldots + e_n$ con $e_i \in P_i$, entonces $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un sistema completo ($e_1 + \ldots + e_n = 1$) de idempotentes primitivos (si f y g son idempotentes tales que $fg = 0$ y $f + g = e_i$, entonces $f = 0$ o $g = 0$) ortogonales ($e_i e_j = 0$ si $i \neq j$). Más aun, si $\{f_1, \ldots, f_m\}$ es un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales, entonces ${}_\Lambda\Lambda = \Lambda f_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda f_m$ y esta es una descomposición en submódulos inescindibles.*

Demostración. Por definición, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es completo. Ahora, como $e_i = e_i 1 = e_i e_1 + \ldots + e_i e_n$, y la descomposición de un elemento en términos de sumandos directos es única, tenemos que $e_i e_i = e_i$ y $e_i e_j = 0$ para $j \neq i$. Esto asegura que tratamos con idempotentes ortogonales. Por esto, también tenemos que $\Lambda e_i \leq P_i$. Además, dado $x \in P_i$, $x = x1 = xe_1 + \ldots xe_n$, así que por las misma razón que antes, $x = xe_i$. Por lo tanto, $P_i = \Lambda e_i$. Supongamos entonces que f y g son un par de idempotentes ortogonales tales que $e_i = f + g$. Se sigue que $\Lambda f \cap \Lambda g = 0$, ya que si $x = \lambda_1 f = \lambda_2 g$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, entonces $x = \lambda_1 f = \lambda_1 f^2 = \lambda_2 g f = 0$. También, como $e_i = f + g$, $\Lambda e_i \leq \Lambda f \oplus \Lambda g$ y si $\lambda_1 f + \lambda_2 g \in \Lambda f \oplus \Lambda g$, entonces, $\lambda_1 f + \lambda_2 g = \lambda_1 f^2 + \lambda_2 g^2 + \lambda_1 f g + \lambda_2 g f = (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(f+g) = (\lambda_1 f + \lambda_2 g) e_i$, es decir, $\lambda_1 f + \lambda_2 g \in \Lambda e_i$. Esto quiere decir que $P_i = \Lambda e_i = \Lambda f \oplus \Lambda g$, así que $f = 0$ o $g = 0$. Por lo tanto, $\{e_1 \ldots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales.

Por el mismo argumento que acabamos de usar, $\Lambda f_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda f_m = \Lambda 1 = \Lambda$. Además, cada Λf_i es inescindible, pues si no lo fueran, podríamos descomponer cada uno de estos en suma directa de inescindibles, obteniendo una descomposición de Λ. Por la primera parte de esta proposición, existirían idempotentes ortogonales $g_1, \ldots, g_k$ con $k > 1$ tales que para alguna i, $f_i = g_1 + \ldots + g_k$. Esto no es posible pues cada f_i es primitivo. Por lo tanto, cada Λf_i es, en efecto, inescindible. □

Proposición 1.23. *Sea M un Λ-módulo. Una descomposición $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ define un sistema completo de endomorfismos idempotentes ortogonales de M, llamados proyecciones, $\pi_1, \ldots, \pi_n$, definidos por $\pi_i(m_1 + \ldots + m_n) = m_i$ con $m_j \in M_j$. Recíprocamente, un sistema completo de endomorfismos idempotentes ortogonales de M, $p_1, \ldots, p_m$ define una descomposición $M = p_1(M) \oplus \ldots \oplus p_m(M)$.*

Demostración. Claramente las proyecciones forman un sistema completo de idempotentes ortogonales.

Notemos que como $p_1, \ldots, p_m$ son idempotentes ortogonales, entonces $p_i(M) \cap p_j(M) = 0$ para cualesquiera $i \neq j$ porque $p_j p_i(M) = 0 = p_i p_j(M)$. Además, como el sistema es completo, $\mathrm{Id}_M = p_1 + \ldots + p_m$, así que $M = \mathrm{Id}_M(M) = (p_1 + \ldots + p_m)(M) = p_1(M) \oplus \ldots \oplus p_m(M)$. □

Corolario 1.24. *Un Λ-módulo M es inescindible si, y solo si los únicos idempotentes en $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ son Id_M y 0.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la proposición anterior. □

Lema 1.25. *Sean Λ una K-álgebra y $e \in \Lambda$ idempotente.*

***1)** Si M es un Λ-módulo, entonces $\phi\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e, M) \longrightarrow eM$ definido por $\phi(f) = f(e)$ es un isomorfismo de K espacios vectoriales.*

***2)** $\phi\colon \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda e) \longrightarrow (e\Lambda e)^{op}$, definido como en **1)**, es también un morfismo de K-álgebras.*

Demostración. **1)** Notemos primero que el ϕ se encuentra correctamente definido porque dado $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e, M)$, $\phi(f) = f(e) = f(e^2) = ef(e) \in eM$. Es inmediato que ϕ es un K-morfismo. Ahora, ϕ es monomorfismo, pues si $\phi(f) = f(e) = 0$, entonces $f(\lambda e) = \lambda f(e) = 0$ para cualquier $\lambda e \in \Lambda e$, es decir, $f = 0$. También, ϕ es epimorfismo pues dado $em \in eM$, $\phi(- \cdot m) = em$. Por lo tanto, ϕ es un isomorfismo de K espacios vectoriales.

2) Recordemos que la unidad en $(e\Lambda e)^{op}$ es e. Como ϕ es morfismo de espacios vectoriales, es aditivo, así que basta ver que es multiplicativo y que $\phi(\mathrm{Id}_{\Lambda e}) = e$. Por supuesto que lo segundo se da. Consideremos entonces $f, g \in \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda e)$, calculando, $\phi(gf) = gf(e) = g(ef(e)) = g(f(e)e) = f(e)g(e) = \phi(f)\phi(g)$; esto coincide con la multiplicación en $(e\Lambda e)^{op}$, por lo que ϕ es multiplicativo. Por lo tanto ϕ es también un morfismo de K-álgebras. □

Corolario 1.26. *Sean Λ una K-álgebra y $e \in \Lambda$ idempotente. El anillo $e\Lambda e$ tiene como únicos idempotentes a e y 0 si, y solo si e es primitivo.*

Demostración. De la proposición 1.22, el corolario 1.24 y el lema 1.25, tenemos que $e\Lambda e$ tiene como únicos idempotentes a e y 0 si, y solo si $\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda e)$ tiene como únicos idempotentes a $\mathrm{Id}_{\Lambda e}$ y 0, que sucede si, y solo si $e\Lambda$ es inescindible, que a su vez pasa si, y solo si e es primitivo. □

Definición 1.27. Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita con descomposición en inescindibles $M = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$. Decimos que Λ es básica si $P_i \ncong P_j$ cuando $i \neq j$.

Dada una K-álgebra Λ con descomposición en inescindibles $\Lambda = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$, puede ocurrir que algunos de estos submódulos sean isomorfos entre ellos. Podemos entonces considerar $P := P_{i_1} \oplus \ldots \oplus P_{i_m}$ tal que $P_{i_j} \ncong P_{i_k}$ si $i_j \neq i_k$ y además para cada $1 \leq i \leq n$ existe i_r tal que $P_i \cong P_{i_r}$. Sea $\{e_1 \ldots, e_n\}$ el sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales definidos por la descomposición de Λ que dimos en la proposición 1.22; definamos $e := e_{i_1} + \ldots + e_{i_m}$. A $e\Lambda e$ le llamaremos el álgebra básica asociada a Λ. Podemos notar que esta álgebra no depende de la elección de $i_1, \ldots, i_m$, pues si $j_1, \ldots, j_k$ son tales que se cumple todo lo anterior y $f := e_{j_1} + \ldots + e_{j_k}$, entonces, por el corolario recién visto, $e\Lambda e \cong \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda e) \cong \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda f) \cong f\Lambda f$.

El siguiente teorema, aunque muy importante, no lo demostraremos. Una prueba puede encontrarse en [ASS]. Recordemos que un funtor aditivo es aquel que respeta la suma de morfismos, y que dos anillos son morita equivalentes si existe una equivalencia aditiva entre sus categorías de módulos. Si además los anillos son K-álgebras, pediremos que la equivalencia sea K-lineal, es decir, que respete la multiplicación por escalar también.

Teorema 1.28. *Toda K-álgebra de dimensión finita es morita equivalente a su K-álgebra básica asociada. Más aun, si dos K-álgebras de dimensión finita son morita equivalentes, entonces sus K-álgebras básicas asociadas son isomorfas.*

Demostración. Ver [ASS], sección I, corolario 6.10. □

Corolario 1.29. *El álgebra básica asociada a una K-álgebra de dimensión finita es básica.*

Demostración. Del teorema anterior, esto es inmediato, pues las equivalencias reflejan isomorfismos y preservan sumas directas. □

1.3. Álgebras inescindibles

A continuación definimos el concepto de álgebra inescindible o conectada y vemos algunas de sus propiedades. El objetivo de esta sección es mostrar que es posible limitarse a trabajar con álgebras de este tipo sin perder generalidad alguna.

Definición 1.30. Sean $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n$ K-álgebras. La suma directa de estas álgebras, $\Lambda_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \Lambda_n$, es la suma directa de estas como K espacios vectoriales y en donde se multiplica coordenada a coordenada. Diremos que una K-álgebra es inescindible (como K-álgebra) si no puede ser expresada como la suma directa de dos K-álgebras.

Recordemos que un elemento de un anillo es central, si conmuta con el resto de los elementos de este.

Lema 1.31. *Sea Λ una K-álgebra. Si $e \in \Lambda$ es idempotente central, entonces $\Lambda = \Lambda e \dot{+} \Lambda(1-e)$.*

Demostración. Observemos primero que si $x \in \Lambda$, entonces $x = ex + (1-e)x$. Después, notemos que si $x \in (\Lambda e \cap \Lambda(1-e))$, entonces existen $y, z \in \Lambda$ tales que $x = ye = z(1-e)$, de donde $z = (y+z)e$, así que $x = z(1-e) = (y+z)e(1-e) = (y+z)(e-e^2) = 0$. Por lo tanto, tenemos que $\Lambda e \oplus \Lambda(1-e)$ tanto como Λ-módulos como K espacios vectoriales. Como e es central, $\Lambda e = \Lambda e^2 = e\Lambda e$ y $\Lambda(1-e) = \Lambda(1-e)^2 = (1-e)\Lambda(1-e)$ de modo que estos son anillos, en donde e es el uno de Λe y $1-e$ es el uno de $\Lambda(1-e)$. Para asegurar que su suma es en realidad una suma directa de K-álgebras, hay que ver que la multiplicación se hace coordenada a coordenada. Ciertamente, la multiplicación se hace de esta forma, pues para $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \Lambda$, $(\lambda_1 e + \lambda_2(1-e))(\mu_1 e + \mu_2(1-e)) = \lambda_1 e \mu_1 e + \lambda_1 e \mu_2(1-e) + \lambda_2(1-e)\mu_1 e + \lambda_2(1-e)\mu_2(1-e) = \lambda_1\mu_1 e + \lambda_2\mu_2(1-e)$. Con esto concluimos que $\Lambda = \Lambda e \dot{+} \Lambda(1-e)$. □

El siguiente resultado nos proporciona una caracterización de las K-álgebras inescindibles.

Lema 1.32. *Una K-álgebra Λ es inescindible (como K-álgebra) si, y solo si sus únicos idempotentes centrales son* 0 *y* 1.

Demostración. Sea $e \in \Lambda$ un idempotente central. Por el lema anterior, $\Lambda = \Lambda e \dot{+} \Lambda(1-e)$, así que si Λ es inescindible, $e = 0$ o $e = 1$.

Los siguientes teoremas muestran que podemos trabajar con K-álgebras inescindibles.

Conversamente, supongamos $\Lambda = \Lambda_1 \dot{+} \Lambda_2$. Tenemos entonces que $(1_{\Lambda_1}, 0_{\Lambda_1})$ es distinto de $0_\Lambda = (0_{\Lambda_1}, 0_{\Lambda_2})$ y de $1_\Lambda = (1_{\Lambda_1}, 1_{\Lambda_2})$. Además, $(1_{\Lambda_1}, 0_{\Lambda_2})$ es idempotente central, pues $(1_{\Lambda_1}, 0_{\Lambda_2})^2 = (1^2_{\Lambda_1}, 0^2_{\Lambda_2}) = (1_{\Lambda_1}, 0_{\Lambda_2})$ y para cualquier $(a,b) \in \Lambda_1 \dot{+} \Lambda_2$, $(1_{\Lambda_1}, 0_{\Lambda_2})(a,b) = (1_{\Lambda_1} a, 0_{\Lambda_2} b) = (a1_{\Lambda_1}, b0_{\Lambda_2}) = (a,b)(1_{\Lambda_1}, 0_{\Lambda_2})$. Por lo tanto, 1_Λ y 0_Λ no son lo únicos idempotentes centrales en Λ. □

Teorema 1.33. *Toda K-álgebra de dimensión finita es isomorfa a la suma directa de un número finito de K-álgebras inescindibles de dimensión finita.*

Demostración. Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Si Λ no es inescindible, por el lema anterior existe un idempotente central $e \in \Lambda$ tal que $\Lambda = \Lambda e \dotplus \Lambda(1-e)$. Podemos decir lo mismo de Λe y $\Lambda(1-e)$. Podemos seguir con este proceso hasta obtener idempotentes centrales $e_1, \ldots, e_n$ (entre los cuales se encontrarían e y $(1-e)$ tales que $\Lambda = \Lambda e_1 \dotplus \ldots \dotplus \Lambda e_n$ y Λe_i es inescindible para cualquier i. Este proceso debe terminar, pues Λ es de dimensión finita y cada álgebra que sea su sumando directo es un K espacio vectorial de dimensión estrictamente menor. □

Lema 1.34. *Sean Λ una K-álgebra tal que $\Lambda = \Lambda_1 \dotplus \ldots \dotplus \Lambda_n$ y M un Λ-módulo. Entonces, ${}_\Lambda M = \Lambda_1 M \oplus \ldots \oplus \Lambda_n M$.*

Demostración. Por inducción, reducimos el argumento a $n = 2$. Claramente $\Lambda_1 M + \Lambda_2 M = M$, pues dado $m \in M$, $m = 1_\Lambda m = (1_{\Lambda_1} + 1_{\Lambda_2})m = 1_{\Lambda_1} m + 1_{\Lambda_2} m$. Por otra parte, si $x \in (\Lambda_1 M \cap \Lambda_2 M)$, entonces existen $y, z \in M$, $\lambda \in \Lambda_1$ y $\mu \in \Lambda_2$ tales que $x = \lambda y = \mu z$. Entonces, $x = 1_{\Lambda_1} x + 1_{\Lambda_2} x = 1_{\Lambda_1} \mu z + 1_{\Lambda_2} \lambda y = 0$, así que $\Lambda_1 M \cap \Lambda_2 M$. Por lo tanto, $M = \Lambda_1 M \oplus \Lambda_2 M$. □

Teorema 1.35. *Si Λ es una K-álgebra tal que $\Lambda = \Lambda_1 \dotplus \ldots \dotplus \Lambda_n$, entonces existe una equivalencia K-lineal entre Λ-Mod y Λ_1-Mod $\times \ldots \times \Lambda_n$-Mod.*

Demostración. Definamos las asignaciones

$$F\colon \Lambda\text{-Mod} \longrightarrow \Lambda_1\text{-Mod} \times \ldots \times \Lambda_n\text{-Mod}$$
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (\Lambda_1 M, \ldots, \Lambda_n M) \arrow[d, "(\pi_1 f \iota_1, \ldots, \pi_n f \iota_n)"] \\ N \arrow[r, mapsto] & (\Lambda_1 N, \ldots, \Lambda_n N) \end{tikzcd}$$

$$G\colon \Lambda_1\text{-Mod} \times \ldots \times \Lambda_n\text{-Mod} \longrightarrow \Lambda\text{-Mod}$$
$$\begin{tikzcd} (M_1, \ldots, M_n) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "(f_1, \ldots, f_n)"'] & M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \arrow[d, "f_1 \oplus \ldots \oplus f_n"] \\ (N_1, \ldots, N_n) \arrow[r, mapsto] & N_1 \oplus \ldots \oplus N_n \end{tikzcd}$$

donde $\iota_i\colon \Lambda_i M \hookrightarrow M$ son inclusiones y $\pi_i\colon M = \Lambda_i M \oplus \ldots \oplus \Lambda_n M \longrightarrow \Lambda M_i$ las proyecciones naturales. Es claro que F y G son funtores K-lineales porque en ambos se suman y componen morfismos coordenada a coordenada. También, por el lema anterior, y porque para cualquier Λ-morfismo f, $\pi_1 f \iota_1 \oplus \ldots \oplus \pi_n f \iota_n \cong f$, tenemos que $GF \cong 1_{\Lambda\text{-Mod}}$. Por otra parte, como

$$\begin{aligned} FG(f_1, \ldots, f_n) &= (\pi_1(f_1 \oplus \ldots \oplus f_n)\iota_1, \ldots, \pi_n(f_1 \oplus \ldots \oplus f_n)\iota_n) \\ &\cong (f_1, \ldots, f_n) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
FG(M_1,\ldots,M_n) &= (\Lambda_1(M_1\oplus\ldots\oplus M_n),\ldots,\Lambda_n(M_1\oplus\ldots\oplus M_n))\\
&\cong (\Lambda_1(\Lambda_1 M_1\oplus\ldots\oplus\Lambda_n M_n),\ldots,\Lambda_n(\Lambda_1 M_1\oplus\ldots\oplus\Lambda_n M_n))\\
&\cong (\Lambda_1\Lambda_1 M_1\oplus\ldots\oplus\Lambda_1\Lambda_n M_n),\ldots,\Lambda_n\Lambda_1 M_1\oplus\ldots\oplus\Lambda_n\Lambda_n M_n))\\
&\cong (\Lambda_1 M_1,\ldots,\Lambda_n M_n) = (M_1,\ldots,M_n),
\end{aligned}$$

tenemos que $FG \cong 1_{\Lambda_1\text{-Mod}\times\ldots\times\Lambda_n\text{-Mod}}$. Esto prueba que los funtores F y G definen equivalencias K-lineales. □

Observación 1.36. Si además, $\Lambda,\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n$ son álgebras finitamente generadas, los funtores F y G definidos en el teorema anterior se pueden restringir y correstringir a las subcategorías Λ-mod y Λ_1-mod $\times\ldots\times\Lambda_n$-mod para obtener una equivalencia K-lineal entre ambas. Esto está correctamente definido pues en este caso, $\Lambda,\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n$ son anillos neterianos, por lo que tanto submódulos como sumas finitas de módulos finitamente generados siguen siendo finitamente generados.

1.4. Series de composición

Las series de composición serán esenciales para que podamos trabajar más adelante: entenderlas adecuadamente es el propósito de esta sección. Para ello, probaremos el teorema de Jordan-Hölder.

Recordemos que se les llama módulos simples a aquellos cuyos únicos submódulos son él mismo y el módulo trivial.

Definición 1.37. Sea M un Λ-módulo. Una serie de composición de M es una cadena de submódulos $M = M_0 > M_1 > \ldots > M_n = 0$ tal que M_i/M_{i+1} es simple para toda $i = 0,\ldots,n-1$. Se dice que esta serie de composición tiene longitud n.

Diremos que dos series de composición, $M = M_0 > M_1 > \ldots > M_n = 0$ y $M = N_0 > N_1 > \ldots > N_m = 0$, son equivalentes si $n = m$ y existe una permutación σ tal que $M_i/M_{i+1} \cong N_{\sigma(i)}/N_{\sigma(i)+1}$ para toda $i = 0,\ldots,n-1$.

En vista del lema 1.10, sabemos que las clases de módulos artinianos y neterianos son cerradas bajo submódulos, cocientes y extensiones. Podemos reformular esto en el siguiente lema.

Lema 1.38. *Un Λ-módulo M es artiniano (neteriano) si y solo si N y M/N son artinianos (neterianos) para algún $N \leq M$.*

□

Tenemos entonces los dos siguientes teoremas.

Teorema 1.39. *Un Λ-módulo M admite una serie de composición si, y solo si es artiniano y neteriano.*

Demostración. Supongamos primero que M admite una serie de composición $M = M_0 > M_1 > \ldots > M_n = 0$. Como cada cociente M_i/M_{i+1} es simple, cada cociente es en particular artiniano y neteriano; por el lema anterior, M es artiniano y neteriano.

Conversamente, supongamos que M es artiniano y neteriano. Como M es neteriano, $\{N < M\}$ tiene un máximo M_1. Si $M_1 \neq 0$, siguiendo el mismo argumento también el conjunto $\{N < M_1\}$ tiene un máximo M_2. Podemos seguir con este proceso hasta llegar a $M_n = 0$ para alguna $n \in \mathbb{N}$: esto debe pasar porque M es artiniano. Como M_{i+1} es máximo en M_i, tenemos que M_i/M_{i+1} es simple, por lo que $M := M_0 < M_1 < \ldots < M_n = 0$ es una serie de composición de M. □

Teorema 1.40. ***(Jordan-Hölder)*** *Cualesquiera dos series de composición de un módulo son equivalentes.*

Demostración. Sean M un módulo, denotaremos por $m(M)$ a la menor longitud de las series de composición de M. Demostraremos el resultado por inducción sobre $m(M)$. Para el caso en que $m(M) = 1$, M debe ser simple, en cuyo caso es claro que solo existe una serie de composición.

Supongamos entonces que $m(M) = n > 1$ y que cualesquiera dos series de composición de un módulo con longitud menor que n son equivalentes. Sean $M = M_0 > M_1 > \ldots > M_n = 0$ y $M = N_0 > N_1 > \ldots > N_t = 0$ dos series de composición. Por hipótesis de inducción, tenemos que si $N_0 = M_0$, entonces las series deben ser equivalentes, así que supongamos que $N_0 \neq M_0$.

Como M_1 y N_1 son submódulos máximos de M, por el segundo teorema de isomorfismo tenemos que

$$\frac{M_1}{M_1 \cap N_1} \cong \frac{M_1 + N_1}{M_1} = \frac{M}{M_1} \quad \text{y} \quad \frac{N_1}{M_1 \cap N_1} \cong \frac{M_1 + N_1}{N_1} = \frac{M}{N_1}$$

son simples. Por lo tanto, dada $M_1 \cap N_1 = L_0 > L_1 > \ldots > L_s = 0$ una serie de composición de $M_1 \cap N_1$, obtenemos las series de composición de M_1 y N_1, $M_1 > L_0 > \ldots > L_s$ y $N_1 > L_0 > \ldots > L_s$ respectivamente. Por hipótesis de inducción, las series de composición $M_1 > M_2 > \ldots > M_n$ y $M_1 > L_0 > \ldots > L_s$ son equivalentes, así que $s = n - 1$. Usando el mismo argumento, también $N_1 > N_2 > \ldots > N_t$ y $N_1 > L_0 > \ldots > L_s$ son equivalentes, así que $t = n - 1$. Finalmente, como ya sabemos que $M_1/L_0 \cong M/N_1$ y $N_1/L_0 \cong M/M_1$, tenemos que las dos series de composición de M con las que iniciamos son equivalentes. □

Como consecuencia del teorema anterior, definimos la longitud de un módulo M como la longitud de alguna serie de composición (si este admite una) y esta la denotaremos por $l(M)$.

Corolario 1.41. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Entonces, todo Λ-módulo finitamente generado admite una única serie de composición (hasta equivalencia).*

Demostración. Esto es claro de los últimos dos teoremas porque toda K-álgebra de dimensión finita es un anillo artiniano y neteriano. □

Corolario 1.42. *Sean Λ una K-álgebra de dimensión finita y M un Λ-módulo finitamente generado. Si $N < M$, entonces N se encuentra contenido en un submódulo máximo de M.*

Demostración. El resultado se sigue inmediatamente del corolario anterior. $\square$

1.5. El radical de Jacobson

En esta sección, estudiamos el radical de Jacobson de un módulo y, en particular, de un anillo. Veremos algunas de sus propiedades elementales, lo cual nos permitirá obtener propiedades muy interesantes respecto de las álgebras de dimensión finita.

Definición 1.43. El radical o radical de Jacobson de un Λ-módulo M es $\mathcal{J}(M) := \bigcap\{N < M \mid N \text{ es máximo en } M\}$.

Dada una función $f\colon A \longrightarrow B$ tal que $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$, denotamos la restricción de f a A' como $f^{|A'}$ y la correstricción de f a B' (cuando tenga sentido) como $f_{|B'}$.

Lema 1.44. *Sean M y N Λ-módulos y $f\colon M \longrightarrow N$ un Λ-morfismo. Entonces, $f(\mathcal{J}(M)) \subseteq \mathcal{J}(N)$. Esta afirmación nos asegura que $\mathcal{J}(f) := f^{|\mathcal{J}(N)}_{|\mathcal{J}(M)}$ se encuentra bien definido. Además, si Λ es una K-álgebra de dimensión finita M y N son finitamente generados y f es un epimorfismo, entonces $\mathcal{J}(f)$ es un epimorfismo.*

Demostración. Sea L un submódulo máximo de N, queremos ver que $f(\mathcal{J}(M)) \leq L$, y para esto, basta notar que si $\pi\colon N \longrightarrow N/L$ es la proyección, entonces $\pi f(\mathcal{J}(M)) = 0$. Como L es máximo, N/L es simple. Entonces, si $\pi f(M) = N/L$, $M/\operatorname{Nuc}(\pi f) \cong N/L$, es decir, $M/\operatorname{Nuc}(\pi f)$ es simple, por lo que $\operatorname{Nuc}(\pi f)$ es máximo en M; esto significa que $\mathcal{J}(M) \leq \operatorname{Nuc}(\pi f)$. En otro caso, $\pi f(\mathcal{J}(M)) \leq \pi f(M) = 0$. Por lo tanto, $f(\mathcal{J}(M)) \subseteq \mathcal{J}(N)$.

Ahora, si f es un epimorfismo Λ es una K-álgebra de dimensión finita, y M y N son finitamente generados, por el teorema de la correspondencia y el corolario 1.42, el resultado se sigue inmediatamente. $\square$

El lema anterior motiva la siguiente definición.

Definición 1.45. Una asignación $r\colon \Lambda\text{-Mod} \longrightarrow \Lambda\text{-Mod}$ que cumple que $r(M) \leq M$ para cualquier módulo y $f(r(M)) \subseteq r(N)$ para cualquier morfismo $f\colon M \longrightarrow N$ es llamado un prerradical.

Observación 1.46. Todo prerradical es un funtor: esto se debe a que se define en morfismos como una restricción y correstricción.

Corolario 1.47. *Para cualquier Λ-módulo M,*

$$\mathcal{J}\left(\frac{M}{\mathcal{J}(M)}\right) = 0.$$

Demostración. Sea N un submódulo de M, por el teorema de la correspondencia, $N/\mathcal{J}(M)$ es máximo en $M/\mathcal{J}(M)$ si, y solo si N es máximo en M. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}\left(\frac{M}{\mathcal{J}(M)}\right) &= \bigcap\{N/\mathcal{J}(M) \mid N/\mathcal{J}(M) \text{ es máximo en } M/\mathcal{J}(M)\} \\
&= \bigcap\{N/\mathcal{J}(M) \mid N \text{ es máximo en } M\} \\
&= \frac{\bigcap\{N \mid N \text{ es máximo en } M\}}{\mathcal{J}(M)} = \frac{\mathcal{J}(M)}{\mathcal{J}(M)} = 0
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.48. *Sea $\{M_i\}_I$ una familia de Λ-módulos y r un prerradical. Entonces,*

$$r(\prod_I M_i) \text{ se sumerge en } \prod_I r(M_i) \quad y \quad r(\bigoplus_I M_i) \cong \bigoplus_I r(M_i)$$

Demostración. Veamos primero la propiedad con el producto. Como r es prerradical, para cada $i \in I$, se encuentra correctamente definido $r(\pi_i)$, donde π_i es la proyección del producto de $\{M_i\}_I$ sobre M_i. Entonces, por la propiedad universal del producto, existe un único morfismo

$$\varphi\colon r(\prod_I M_1) \longrightarrow \prod_i r(M_i)$$

tal que $p_i\varphi = r(\pi_i)$ para cada $i \in I$, donde p_i es la proyección del producto de $\{r(M_i)\}_I$ sobre $r(M_i)$. Ciertamente φ es un monomorfismo, pues $0 = \varphi(x)$ si, y solo si $0 = p_i\varphi(x) = r(\pi_i)(x) = \pi(x)\ \forall i \in I$, lo que significa que $x = 0$ (por la propiedad universal del producto).

Análogamente al caso del producto, como r es prerradical, $r(\iota_i)$ se encuentra correctamente definido para toda $i \in I$, donde ι_i es la inclusión de M_i en la suma directa de $\{M_i\}_I$. Entonces, por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo

$$\gamma\colon \bigoplus_I r(M_i) \longrightarrow r(\bigoplus_I M_i)$$

tal que $\gamma j_i = r(\iota_i)$ para cada $i \in I$, donde j_i es la inclusión de $r(M_i)$ en la suma directa de $\{r(M_i)\}_I$. Tenemos que γ es un monomorfismo, pues $0 = \gamma(x)$ si, y solo si $0 = \gamma j_i(x) = r(\iota_i)(x) = \iota(x)\ \forall i \in I$, lo que significa que $x = 0$ (por la propiedad universal del coproducto). Además, resulta que γ es también un epimorfismo; para ver esto, supongamos que f y g son dos morfismos tales que $f\gamma = g\gamma$. Entonces para cada $i \in I$, $fr(\iota_i) = f\gamma j_i = g\gamma j_i = gr(\iota_i)$. Podemos entonces extender f y g a

$$\overline{f}\colon \bigoplus_I M_i \longrightarrow \mathrm{Cod}(f) \quad \text{y} \quad \overline{g}\colon \mathrm{Cod}(g)$$

respectivamente (donde Cod representa el codominio de una función), como

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in r(\bigoplus_I M_i) \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad \overline{g}(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \in r(\bigoplus_I M_i) \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, para toda $i \in I$, $\overline{f}\iota_i = \overline{g}\iota_i$, y por la propiedad universal del coproducto, $\overline{f} = \overline{g}$; en particular, $f = g$, lo que significa que γ es un epimorfismo. Por lo tanto, γ es un isomorfismo. □

Corolario 1.49. *Sean r un prerradical y $\mathbb{F}_r := \{_\Lambda M \mid r(M) = 0\}$. Entonces, $\mathbb{F}_r$ es una clase cerrada bajo submódulos y productos. Más aun, si Λ es una K-álgebra de dimensión finita, entonces la clase $\mathbb{F}_{\mathcal{J}} \cap \Lambda$-mod es cerrada bajo cocientes (en donde el preradical $\mathcal{J}$ asocia a cada módulo su radical).*

Demostración. De su definición, se sigue inmediatamente que $\mathbb{F}_r$ es cerrada bajo submódulos, y del lema anterior, que es cerrada bajo productos. Para $\mathcal{J}(M)$, la cerradura bajo cocientes viene de la segunda parte del lema 1.44. $\square$

Lema 1.50. *Para cualquier Λ-módulo M, $\mathcal{J}(\Lambda)M \leq \mathcal{J}(M)$.*

Demostración. Sea $x \in M$, por el lema 1.44, el morfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(- \cdot x) \colon \mathcal{J}(\Lambda) &\longrightarrow \mathcal{J}(M) \\ y &\longmapsto yx \end{aligned}$$

se encuentra bien definido. Entonces, para cualquier $x \in M$, $\mathcal{J}(\Lambda)x \leq \mathcal{J}(M)$, así que $\mathcal{J}(\Lambda)M \leq \mathcal{J}(M)$. $\square$

Lema 1.51. *La asignación $\mathcal{J}(\Lambda)\cdot - \colon \Lambda\text{-Mod} \longrightarrow \Lambda\text{-Mod}$, dada por $\mathcal{J}(\Lambda)\cdot - \ (M) = \mathcal{J}(\Lambda)M$, es un prerradical.*

Demostración. Es claro que para cualquier Λ-módulo M, $\mathcal{J}(\Lambda)M \leq M$, así que consideremos un Λ-morfismo $f \colon L \longrightarrow N$. Tenemos que $f(\mathcal{J}(\Lambda)L) = \mathcal{J}(\Lambda)f(L) \leq \mathcal{J}(\Lambda)N$, por lo que la asignación sí es un prerradical. $\square$

Una consecuencia importante de este lema es que $\mathcal{J}(\Lambda)$ es un ideal bilateral de Λ.

Teorema 1.52. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Para cualquier Λ-módulo finitamente generado M, $\mathcal{J}(M) = \mathcal{J}(\Lambda)M$.*

Demostración. Una contención ya la tenemos por el lema 1.50, así que solo probaremos la otra. Nos interesa ver que

$$0 = \mathcal{J}\left(\frac{M}{\mathcal{J}(\Lambda)M}\right).$$

Sabemos que existe un epimorfismo $f \colon \Lambda^n \longrightarrow M$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por el lema anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos en donde $\mathcal{J}(\Lambda)\cdot f$ es epimorfismo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{J}(\Lambda)(\Lambda^n) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathcal{J}(\Lambda)f"'] & \Lambda^n \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \frac{\Lambda^n}{\mathcal{J}(\Lambda)(\Lambda^n)} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J}(\Lambda)M \arrow[r, hook] & M \arrow[r] & \frac{M}{\mathcal{J}(\Lambda)M} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pero el lema anterior también nos asegura que

$$\mathcal{J}(\Lambda)\Lambda^n = (\mathcal{J}(\Lambda)\Lambda)^n = \mathcal{J}(\Lambda)^n$$

y así,

$$\frac{\Lambda^n}{\mathcal{J}(\Lambda)\Lambda^n} = \frac{\Lambda^n}{\mathcal{J}(\Lambda)^n} \cong \left(\frac{\Lambda}{\mathcal{J}(\Lambda)}\right)^n.$$

Entonces, por la propiedad del paso al conúcleo, existe un epimorfismo g que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{J}(\Lambda)^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathcal{J}(\Lambda)f"'] & \Lambda^n \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & (\frac{\Lambda}{\mathcal{J}(\Lambda)})^n \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J}(\Lambda)M \arrow[r, hook] & M \arrow[r] & \frac{M}{\mathcal{J}(\Lambda)M} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora, como $\mathbb{F}_{\mathcal{J}} \cap \Lambda$-mod es una clase cerrada bajo submódulos, cocientes y productos, y $\mathcal{J}(\Lambda/\mathcal{J}(\Lambda)) = 0$, tenemos que

$$\left(\frac{\Lambda}{\mathcal{J}(\Lambda)}\right)^n \in \mathbb{F}_{\mathcal{J}} \cap \Lambda\text{-mod},$$

y como g es un epimorfismo,

$$\frac{M}{\mathcal{J}(\Lambda)M} \in \mathbb{F}_{\mathcal{J}}.$$

Con esto concluimos que

$$0 = \mathcal{J}\left(\frac{M}{\mathcal{J}(\Lambda)M}\right).$$

Ahora consideremos la proyección

$$\pi\colon M \longrightarrow \frac{M}{\mathcal{J}(\Lambda)M}.$$

Por el lema 1.44, $\mathcal{J}(\pi)$ es un epimorfismo, por lo que

$$0 = \mathcal{J}\left(\frac{M}{\mathcal{J}(\Lambda)M}\right) = \mathcal{J}(\pi)(\mathcal{J}(M)) = \pi|^{\mathcal{J}(M)}_{\mathcal{J}\left(\frac{M}{\mathcal{J}(\Lambda)M}\right)}(\mathcal{J}(M)) = \pi(\mathcal{J}(M)),$$

es decir, $\mathcal{J}(M) \leq \mathrm{Nuc}(\pi) = \mathcal{J}(\Lambda)M$. □

Corolario 1.53. ***(Lema de Nakayama)*** *Sean Λ una K-álgebra de dimensión finita, I un ideal contenido en $\mathcal{J}(\Lambda)$ y M un Λ-módulo finitamente generado. Si $IM = M$, entonces $M = 0$.*

Demostración. Por definición, el radical de un módulo finitamente generado no nulo siempre es un submódulo propio de este. Por esto, si $M = IM \leq \mathcal{J}(\Lambda)M = \mathcal{J}(M) \leq M$, entonces $M = 0$. □

Observación 1.54. Si S es un Λ-módulo simple, entonces el radical de S es nulo; consecuentemente, un Λ-módulo es simple si, y solo si es simple como $\Lambda/\mathcal{J}(\Lambda)$-módulo.

Definición 1.55. Un ideal izquierdo de Λ es llamado nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n = 0$. El índice de nilpotencia de I es el menor de estos números naturales.

Observación 1.56. Un ideal I es nilpotente con índice de nilpotencia n si, y solo si el producto de cualesquiera n elementos de este se anula. Esto es inmediato de la definición del producto de ideales.

Lema 1.57. *La suma de dos ideales izquierdos nilpotentes es un ideal nilpotente.*

Demostración. Sean I y J dos ideales izquierdos nilpotentes con índice de nilpotencia n y m respectivamente. El producto de cualesquiera $n+m$ elementos de $I+J$ se anula, pues al ser expresados todos como suma de elementos en I y J, su producto es una suma donde cada sumando tiene al menos m factores en J o al menos n factores en I. □

Teorema 1.58. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Λ contiene un ideal que contiene a todos los ideales izquierdos nilpotentes de Λ y que es a su vez es nilpotente. Además, este ideal coincide con $\mathcal{J}(\Lambda)$.*

Demostración. Probemos primero la existencia de dicho ideal. Sea U un ideal izquierdo nilpotente de Λ con K-dimensión máxima. Si existiera un ideal izquierdo nilpotente I tal que $I \nleq U$, tendríamos, por el lema anterior, que $U+I$ es un ideal nilpotente que contiene propiamente a U: esto es absurdo pues implica que $\dim_K(U) < \dim_K(U+I)$. Entonces U es nilpotente y contiene a cualquier otro ideal izquierdo nilpotente.

Ahora, vemos que $\mathcal{J}(\Lambda)$ es nilpotente. Como Λ es de dimensión finita, la cadena $\mathcal{J}(\Lambda) \geq \mathcal{J}(\Lambda)^2 \geq \ldots$ se estaciona, supongamos que lo hace en $\mathcal{J}(\Lambda)^n$. Esto quiere decir que $\mathcal{J}(\Lambda)^n = \mathcal{J}(\Lambda)^{n+1} = \mathcal{J}(\Lambda)\mathcal{J}(\Lambda)^n$, así que por el lema de Nakayama, $\mathcal{J}(\Lambda)^n = 0$. Esto asegura que $\mathcal{J}(\Lambda) \leq U$.

Finalmente, veamos que $\mathcal{J}(\Lambda) \geq U$. Supongamos que existe un ideal izquierdo M máximo en Λ tal que $U \nleq M$. Como M es máximo, $U+M=\Lambda$, así que existen $m \in M$ y $u \in U$ tales que $1 = m+u$. Como U es nilpotente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 - m + \ldots + (-1)^k m^k = (1-m)^k = u^k = 0$. Entonces, $1 = m - m^2 + \ldots + (-1)^k m^k = m(1 - m + \ldots + (-1)^k m^{k-1}) = (1 - m + \ldots + (-1)^k m^{k-1})m$; esto es una contradicción pues asegura que m es invertible, pero los elementos de ningún ideal propio pueden ser invertibles. Por lo tanto, $\mathcal{J}(\Lambda) \geq U$. Con esto concluimos que $\mathcal{J}(\Lambda)$ coincide con el mayor ideal izquierdo nilpotente de Λ. □

Teorema 1.59. *Sean Λ una K-álgebra de dimensión finita e I un ideal bilateral de Λ. $\mathcal{J}(\Lambda) \leq I$ si, y solo si $\mathcal{J}(\Lambda/I) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $I \geq \mathcal{J}(\Lambda)$. Por el tercer teorema de isomorfismo, tenemos que

$$\frac{\Lambda}{I} \cong \frac{\frac{\Lambda}{\mathcal{J}(\Lambda)}}{\frac{I}{\mathcal{J}(\Lambda)}}.$$

Sabemos que $\mathcal{J}(\Lambda/\mathcal{J}(\Lambda)) = 0$ y que $\mathbb{F}_{\mathcal{J}} \cap \Lambda$-mod es cerrada bajo cocientes, por lo que $\mathcal{J}(\Lambda/I) = 0$.

Supongamos ahora que $\mathcal{J}(\Lambda/I) = 0$. Por el teorema de la correspondencia,

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{J}(\Lambda/I) &= \bigcap\{L < \Lambda/I \mid L \text{ es máximo en } \Lambda/I\} \\ &= \bigcap\{N/I \mid N \geq I \text{ y } N \text{ es máximo en } \Lambda\} \\ &= \frac{\bigcap\{N \mid N \geq I \text{ y } N \text{ es máximo en } \Lambda\}}{I}. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $I = \bigcap\{N \mid N \geq I \text{ y } N \text{ es máximo en } \Lambda\} \geq \mathcal{J}(\Lambda)$. □

1.6. Álgebras simples y semisimples

En esta sección describimos las álgebras simples y semisimples, enunciamos los teoremas de Wedderburn-Artin y analizamos algunas de sus consecuencias.

Definición 1.60. Una K-álgebra Λ es simple si sus únicos ideales bilaterales son 0 y Λ. Una K-álgebra que puede expresarse como la suma directa de K-álgebras simples es llamada semisimple.

Recordemos que un módulo es semisimple si puede expresarse como suma directa de módulos simples.

Observación 1.61. Todo módulo semisimple tiene radical cero. Esto es obvio porque los prerradicales se distribuyen sobre sumas directas (proposición 1.48) y los módulos simples tienen radical cero.

Lema 1.62. *Sea M un Λ-módulo artiniano. Si $\{N_i\}_I$ es una familia de submódulos de M tales que $\bigcap\{N_i\}_I = 0$, entonces existe $F \subseteq I$ finito tal que $\bigcap\{N_i\}_F = 0$.*

Demostración. Supongamos que ningún subconjunto finito F de I cumple $\bigcap\{N_i\}_F = 0$. Entonces, dado algún N_{i_0}, existe N_{i_1} tal que $0 < N_{i_0} \cap N_{i_1} < N_{i_0}$. Entonces también existe N_{i_2} tal que $0 < N_{i_0} \cap N_{i_1} \cap N_{i_2} < N_{i_0} \cap N_{i_1}$. Dichos submódulos deben existir, pues de lo contrario, no podría ser que $\bigcap\{N_i\}_I = 0$. Procediendo inductivamente, obtenemos una cadena infinita estrictamente decreciente, cosa que es absurda, pues M es artiniano. □

Antes de demostrar el teorema siguiente, recordemos que se caracterizan los módulos semisimples como aquellos módulos cuyos submódulos son a su vez sumandos directos de este. De esto se sigue directamente que la clase de los módulos semisimples es cerrada bajo submódulos y cocientes. Esto también asegura que si ${}_\Lambda\Lambda$ es semisimple, entonces todo Λ-módulo es semisimple porque ${}_\Lambda\Lambda$ es un generador de Λ-Mod.

Teorema 1.63. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Entonces, ${}_\Lambda\Lambda$ es semisimple si, y solo si $\mathcal{J}(\Lambda) = 0$.*

Demostración. Por la observación 1.61, basta ver que si suponemos que $\mathcal{J}(\Lambda) = 0$ entonces ${}_\Lambda\Lambda$ es semisimple. Como $0 = \mathcal{J}(\Lambda) = \bigcap\{M <_\Lambda \Lambda \mid M \text{ es máximo en } {}_\Lambda\Lambda\}$, por el lema anterior tenemos que existen ideales izquierdos máximos $M_1, \ldots, M_n$ de

Λ tales que $M_1 \cap \ldots \cap M_n = 0$. Entonces, si $\pi_i \colon \Lambda \longrightarrow \Lambda / M_i$ es la proyección canónica para cada i, por la propiedad universal del producto, existe un morfismo $f \colon \Lambda \longrightarrow \Lambda / M_1 \times \ldots \times \Lambda / M_n$ cuyo núcleo es $\mathrm{Nuc}(f) = \mathrm{Nuc}(\pi_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Nuc}(\pi_n) = M_1 \cap \ldots \cap M_n = 0$. Esto quiere decir que ${}_\Lambda\Lambda$ se sumerge en un semisimple, por lo que también es semisimple (la clase de los módulos semisimples es cerrada bajo submódulos). □

Para la prueba de los siguientes dos teoremas, véase [AF].

Teorema 1.64. ***(Wedderburn-Artin)*** *Una K-álgebra Λ es semisimple si, y solo si es semisimple como Λ-módulo.*

Demostración. Ver [AF], teorema 13.6. □

Teorema 1.65. ***(Wedderburn-Artin)*** *Toda K-álgebra simple de dimensión finita es isomorfa a un álgebra de matrices con entradas en una K-álgebra con división de dimensión finita.*

Demostración. Ver [AF], teorema 13.4. □

Los resultados siguientes complementan los teoremas anteriores. Recordemos que un campo K es algebraicamente cerrado si todo polinomio con coeficientes en K tiene tantas raíces en K como su grado (incluyendo raíces múltiples), o equivalentemente, que todo polinomio con coeficientes en K se puede factorizar como producto de polinomios lineales.

Proposición 1.66. *Si K es algebraicamente cerrado, entonces toda K-álgebra con división de dimensión finita coincide con K.*

Demostración. Sea D una K-álgebra con división de dimensión $\dim_K(D) = n$. Sea $d \in D$, el conjunto $\{1, d, d^2, \ldots, d^n\}$ es linealmente dependiente por tener $n+1$ elementos. Esto significa que existen coeficientes $a_0, \ldots, a_n \in K$ no todos cero tales que $a_0 + a_1 d + \ldots + a_n d^n = 0$, es decir, d es una raíz del polinomio $a_0 + a_1 x^1 + \ldots a_n x^n$. Concluimos entonces que como K es algebraicamente cerrado, $d \in K$, así que $D = K$. □

Corolario 1.67. *Si K es algebraicamente cerrado, entonces toda K-álgebra simple de dimensión finita es isomorfa a un álgebra de matrices con entradas en K.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la proposición anterior y del segundo teorema de Wedderburn-Artin. □

1.7. Cubiertas proyectivas y módulos simples

El resultado más importante del capítulo se encuentra al final de esta sección, el cual describen todas las clases de isomorfía de módulos simples de una K-álgebra de dimensión finita. En esta sección también definimos el concepto de cubierta proyectiva y vemos que todo módulo finitamente generado sobre un álgebra de dimensión finita admite una.

Definición 1.68. Sean M y N Λ-módulos.

1) Sea $f\colon M \longrightarrow N$ un epimorfismo. Decimos que f es superfluo si dado un morfismo $g\colon L \longrightarrow M$ tal que fg es epimorfismo, entonces g es epimorfismo.

2) Una cubierta proyectiva de M es un módulo proyectivo P junto con un epimorfismo superfluo $\phi\colon P \longrightarrow M$.

Lema 1.69. *Si existe una cubierta proyectiva para un módulo, esta es única salvo isomorfismo. En caso de existir, podemos entonces hablar de la cubierta proyectiva de un módulo M, a la cual denotaremos $P(M)$.*

Demostración. Sea M un Λ-módulo y supongamos que $\phi\colon P \longrightarrow M$ y $\phi'\colon P' \longrightarrow M$ son cubiertas proyectivas. Como P es proyectivo, existe $f\colon P \longrightarrow P'$ tal que $\phi' f = \phi$. Entonces, porque ϕ' es superfluo y P' proyectivo, f es epimorfismo y se escinde; el inverso derecho de f también debe de ser epimorfismo porque ϕ es superfluo. Por lo tanto, $P \cong P'$. □

Resulta que en general, no todo módulo sobre un anillo arbitrario tiene cubierta proyectiva. Por completitud y a manera de ejemplo, mencionamos que $\mathbb{Z}_p$ no tiene cubierta proyectiva en $\mathbb{Z}$-Mod.

El siguiente resultado es una reformulación muy útil del lema de Nakayama expuesto anteriormente.

Corolario 1.70. ***(Lema de Nakayama)*** *Sean Λ una K-álgebra de dimensión finita e I un ideal bilateral contenido en $\mathcal{J}(\Lambda)$. Entonces, para cualquier Λ-módulo M, la proyección $M \longrightarrow M/IM$ es un epimorfismo superfluo.*

Demostración. Sean M un Λ-módulo, $\pi\colon M \longrightarrow M/IM$ la proyección y $f\colon N \longrightarrow M$ tal que πf es un epimorfismo. Esto significa que $\pi(\mathrm{Im}(f) = M/IM$, es decir, $\mathrm{Im}(f) + IM = M + IM = M$. Entonces,

$$I\left(\frac{M}{\mathrm{Im}(f)}\right) = \frac{IM + \mathrm{Im}(f)}{\mathrm{Im}(f)} = \frac{M}{\mathrm{Im}(f)}.$$

Por la primera versión del lema de Nakayama, $M/\mathrm{Im}(f) = 0$, lo que significa que f es un epimorfismo, con lo que concluimos que π es superfluo. □

Lema 1.71. ***1)*** *La suma directa de epimorfismos superfluos es un epimorfismo superfluo.*

2) *Si $f\colon M \longrightarrow N$ y $g\colon N \longrightarrow L$ son dos epimorfismos cuya composición, gf, es un epimorfismo superfluo, entonces f es superfluo.*

Demostración. 1) Esto es inmediato, pues la composición de la suma directa de morfismos es la composición coordenada a coordenada.

2) Sea $h\colon B \longrightarrow M$ un morfismo tal que fh es epimorfismo. Como g es epimorfismo, gfh es también un epimorfismo, y como gf es superfluo, h es epimorfismo. Por lo tanto, f es un epimorfismo superfluo. □

Lema 1.72. *Un epimorfismo $f\colon M \longrightarrow N$ es superfluo si, y solo si $f|_L$ no es epimorfismo para ningún $L < M$.*

Demostración. Comencemos suponiendo que f es superfluo y sea $L \leq M$ tal que $f|_L$ es un epimorfismo. Sea $\iota\colon L \hookrightarrow M$ la inclusión, como $f\iota = f|_L$ y f es superfluo, ι es epimorfismo. Por lo tanto, $L = M$.

Conversamente, supongamos que $f|_L$ no es epimorfismo para ningún $L < M$ y sea $g\colon M' \longrightarrow M$ tal que fg es epimorfismo. Claramente, g es sobre, pues $fg = f|_{\mathrm{Im}(g)}g$. Por lo tanto, f es superfluo. □

Recordemos que decimos que un elemento $x \in \Lambda/\mathcal{J}(\Lambda)$ se levanta a $e \in \Lambda$ si $e + \mathcal{J}(\Lambda) = x$.

Lema 1.73. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales en $\Lambda/\mathcal{J}(\Lambda)$ se levanta a un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales en Λ.*

Demostración. Lo que haremos será ver que cualquier idempotente en $\Lambda/\mathcal{J}(\Lambda)$ se levanta a un idempotente en Λ, esto es equivalente a lo que queremos como puede verse en [AF], proposición 27.4.

Sea $x+\mathcal{J}(\Lambda) \in \Lambda/\mathcal{J}(\Lambda)$ idempotente, es decir, $x+\mathcal{J}(\Lambda) = x^2+\mathcal{J}(\Lambda)$. Por el teorema 1.58, $\mathcal{J}(\Lambda)$ es nilpotente, así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x-x^2)^n = 0$. Desarrollando esto, obtenemos que

$$\begin{aligned}
0 = (x-x^2)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}(-x^2)^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} x^{n+i} = x^{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} x^{i-1} \\
&= x^n - x^{n+1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} x^{i-1}.
\end{aligned}$$

Definiendo

$$y := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} x^{i-1},$$

tenemos que $x^n = x^{n+1}y$ y que $xy = yx$. Entonces, $e := x^n y^n = (x^{n+1}y)y^n = x^{n+1}y^{n+1} = x^{n+2}y^{n+2} = \ldots = x^{2n}y^{2n} = e^2$ y $e+\mathcal{J}(\Lambda) = x^n y^n + \mathcal{J}(\Lambda) = (xy)^n + \mathcal{J}(\Lambda) = (xy+\mathcal{J}(\Lambda))^n = ((x+\mathcal{J}(\Lambda))(y+\mathcal{J}(\Lambda)))^n = ((x^{n+1}+\mathcal{J}(\Lambda))(y+\mathcal{J}(\Lambda)))^n = (x^{n+1}y+\mathcal{J}(\Lambda))^n = (x^n+\mathcal{J}(\Lambda))^n = x+\mathcal{J}(\Lambda)$. Por lo tanto, x se levanta a e.

Ahora sea $\{x_1+\mathcal{J}(\Lambda),\ldots,x_m+\mathcal{J}(\Lambda)\}$ un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales en $\Lambda/\mathcal{J}(\Lambda)$. Por lo que vimos, esto se levanta a un conjunto de idempotentes $\{e_1,\ldots,e_m\}$ en Λ. Claro que estos idempotentes son primitivos, pues si $e_i = f+g$ con f,g idempotentes ortogonales, entonces $x_i - f + g \in \mathcal{J}(\Lambda)$, así que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $(x_i - f + g)^r = (x_i - f + g) = 0$ □

Ahora, presentamos el resultado que mencionamos al inicio de la sección, del cual dependeremos enormemente en cuanto lleguemos al tercer capítulo.

Teorema 1.74. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita con un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales $\{e_1,\dots,e_n\}$. Entonces,*

$$\left\{\frac{\Lambda e_1}{\mathcal{J}(\Lambda)e_1},\dots,\frac{\Lambda e_n}{\mathcal{J}(\Lambda)e_n}\right\}$$

es una lista completa de representantes de las clases de isomorfía de los Λ-módulos simples. Más aun,

$$\frac{\Lambda e_i}{\mathcal{J}(\Lambda)e_i}\cong\frac{\Lambda e_j}{\mathcal{J}(\Lambda)e_j}\ \text{si, y solo si}\ \Lambda e_i\cong\Lambda e_j.$$

Demostración. Lo primero que podemos ver es que

$$\begin{aligned}\frac{\Lambda}{\mathcal{J}(\Lambda)}&=\frac{\Lambda e_1\oplus\dots\oplus\Lambda e_n}{\mathcal{J}(\Lambda e_1\oplus\dots\oplus\Lambda e_n)}\\&=\frac{\Lambda e_1\oplus\dots\oplus\Lambda e_n}{\mathcal{J}(\Lambda)e_1\oplus\dots\oplus\mathcal{J}(\Lambda)e_n}\\&\cong\frac{\Lambda e_1}{\mathcal{J}(\Lambda)e_1}\oplus\dots\oplus\frac{\Lambda e_n}{\mathcal{J}(\Lambda)e_n}.\end{aligned}$$

Pero sabemos que $\Lambda/\mathcal{J}(\Lambda)$ es una K-álgebra semisimple. Entonces, si algún sumando no fuera simple, al descomponerla en módulos inescindibles, obtendríamos un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales de al menos $n+1$ elementos. Esto es imposible, pues por el lema anterior, este sistema se levantaría a un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales en Λ de al menos n+1 elementos. Con esto hemos asegurado que cada $\Lambda e_i/\mathcal{J}(\Lambda)e_i$ es, en efecto, simple.

Ahora veremos que tenemos ya un representante de cada clase de isomorfía de módulos simples finitamente generados. Como cada $\Lambda e_i/\mathcal{J}(\Lambda)e_i$ es simple,

$$\frac{\Lambda}{\mathcal{J}(\Lambda)}=\frac{\Lambda e_1}{\mathcal{J}(\Lambda)e_1}\oplus\dots\oplus\frac{\Lambda e_n}{\mathcal{J}(\Lambda)e_n}$$

es una descomposición en submódulos inescindibles en $\Lambda/\mathcal{J}(\Lambda)$-Mod. Ciertamente todo $\Lambda/\mathcal{J}(\Lambda)$-módulo proyectivo inescindible debe ser simple, así que

$$\left\{\frac{\Lambda e_1}{\mathcal{J}(\Lambda)e_1},\dots,\frac{\Lambda e_n}{\mathcal{J}(\Lambda)e_n}\right\}$$

es una lista completa de representantes de la clase de isomorfía de los módulos simples de $\Lambda/\mathcal{J}(\Lambda)$-Mod. Como sabemos que coinciden los Λ-módulos simples con los $\Lambda/\mathcal{J}(\Lambda)$-módulos simples, este conjunto también es una lista completa de las clases de isomorfía de los módulos simples en Λ-Mod.

Finalmente, notemos que

$$\frac{\Lambda e_i}{\mathcal{J}(\Lambda)e_i}\cong\frac{\Lambda e_j}{\mathcal{J}(\Lambda)e_j}\ \text{si, y solo si}\ \Lambda e_i\cong\Lambda e_j.$$

En efecto, por el lema de Nakayama y como para cualquier i, Λe_i es proyectivo, la proyección $\Lambda e_i\longrightarrow\Lambda e_i/\mathcal{J}(\Lambda)e_i$ es una cubierta proyectiva. Como la cubierta proyectiva de un módulo es única salvo isomorfismo, tenemos lo que queremos. $\square$

Nótese que al final de la prueba anterior, mostramos que todo Λ-módulo simple tiene una cubierta proyectiva. Este hecho lo usaremos para demostrar el teorema siguiente. Además, en la prueba anterior también notamos que Λe_i es la cubierta proyectiva de $\Lambda e_i/(\mathcal{J}(\Lambda)e_i)$: esto será fundamental más adelante.

Teorema 1.75. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Todo Λ-módulo finitamente generado tiene una cubierta proyectiva finitamente generada.*

Demostración. Sea M un Λ-módulo finitamente generado. Consideremos la proyección canónica $\pi\colon M \longrightarrow M/\mathcal{J}(M)$ que es un epimorfismo superfluo (lema de Nakayama). $M/\mathcal{J}(M)$ es semisimple: digamos que $M/\mathcal{J}(M) = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ con cada S_i simple. Del teorema anterior, sabemos que cada S_i tiene cubierta proyectiva $\phi_i\colon P_i \longrightarrow S_i$. Por el lema 1.71, el epimorfismo

$$\phi := \bigoplus_{i=1}^{n} \phi_i \colon P := \bigoplus_{i=1}^{n} P_i \longrightarrow \frac{M}{\mathcal{J}(M)}$$

es superfluo. Entonces, como la suma directa de módulos proyectivos es proyectiva, existe $f\colon P \longrightarrow M$ tal que $\pi f = \phi$. Como π es superfluo, f es un epimorfismo, y como ϕ es superfluo, por el lema 1.71, f también es superfluo. Por lo tanto, $P\colon \longrightarrow M$ es cubierta proyectiva. □

1.8. Dualidad y cápsulas inyectivas

Una dualidad entre dos categorías es una equivalencia contravariante entre estas. Así, si tenemos dos categorías duales entre sí, un resultado en términos de propiedades categóricas en una se valdrá en la otra dualizándolo.

En esta sección estableceremos una dualidad entre Λ-mod y Λ^{op}-mod (en donde Λ es una K-álgebra de dimensión finita) y de ello desprenderemos varios resultados.

Antes de dar el siguiente resultado, recordemos que un Λ^{op}-módulo izquierdo es en realidad un Λ-módulo derecho y viceversa. Esto simplificará la siguiente demostración.

Teorema 1.76. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Existe una dualidad entre las categorías Λ-mod y Λ^{op}-mod.*

Demostración. Sea D el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_K(-,K)$ restringido a Λ-mod. Abusaremos un poco de la notación refiriéndonos también a $\mathrm{Hom}_K(-,K)$ restringido a Λ^{op}-mod como D. Es claro que las restricciones se encuentran correctamente definidas, pues dado un Λ-módulo izquierdo finitamente generado M, $\mathrm{Hom}_K(M,K)$ adquiere estructura de módulo derecho mediante la operación $fk(m) = f(km)$ para $m \in M$, $k \in K$ y $f \in \mathrm{Hom}_K(M,K)$ y es finitamente generado por ser un K espacio vectorial de dimensión finita ($\dim_K(\mathrm{Hom}_K(M,K)) = \dim_K(M)$); análogamente para el otro funtor. Ciertamente, es claro que $DD \cong 1$ (en cualquier caso) pues, vistos como K espacios vectoriales, $DDM = (M^*)^*$. Con esto concluimos que D es una dualidad. □

A continuación veremos algunas consecuencias de esta dualidad.

Definición 1.77. Sean M y N Λ-módulos.

1) Sea $f\colon M \longrightarrow N$ un monomorfismo. Decimos que f es esencial si dado un morfismo $g\colon N \longrightarrow L$ tal que gf es monomorfismo, entonces g es monomorfismo.

2) Una cápsula inyectiva de M es un módulo inyectivo E junto con un monomorfismo esencial $\phi\colon M \longrightarrow E$.

Lema 1.78. *Si existe una cápsula inyectiva de un módulo, entonces esta es única salvo isomorfismo. Así, podemos hablar de la cápsula inyectiva de un módulo si esta existe.*

Demostración. La prueba es análoga a la del lema 1.69. El lector puede verificar esto por su cuenta. □

Es bien sabido que todo módulo sobre cualquier anillo tiene cápsula inyectiva; una prueba puede encontrarse en [AF] (teorema 18.10). Sin embargo, en nuestro caso, esto no es todo: podemos asegurar que si Λ es una K-álgebra de dimensión finita, entonces todo Λ-módulo finitamente generado tiene cápsula inyectiva finitamente generada. Lo anterior se sigue inmediatamente de la dualidad D y del teorema 1.75. Es decir, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.79. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Todo Λ-módulo finitamente generado tiene una cápsula inyectiva finitamente generada.*

Demostración. Se sigue directamente del teorema 1.75. □

Nótese que el teorema anterior no es válido en general, como es el caso de $\mathbb{Z}$, cuya cápsula inyectiva en $\mathbb{Z}$-Mod es $\mathbb{Q}$.

El siguiente resultado también es una consecuencia inmediata de la dualidad.

Corolario 1.80. *Sea Λ una K álgebra de dimensión finita y $\Lambda^{op} = P'_1 \oplus \ldots \oplus P'_n$ la descomposición de Λ^{op} en módulos inescindibles proyectivos en la categoría Λ^{op}*-mod. *Entonces, $\{DP'_1, \ldots, DP'_n\}$ es una lista completa de representantes de las clases de isomorfía de los Λ-módulos inyectivos e inescindibles, donde D es la dualidad entre* Λ^{op}-mod *y* Λ-mod. *Además, $DP'_i \cong DP'_j$ si, y solo si $P'_i \cong P'_j$.*

Demostración. Esto es inmediato pues el ser inescindible es una propiedad que se preserva bajo dualidad. □

1.9. Propiedades de la categoría abeliana de los módulos

A pesar de su título, en esta sección no ahondaremos en las propiedades de las categorías abelianas, ni siquiera las definiremos; en caso de estar interesado, el lector puede consultar la definición en [Ma]. Lo que haremos será observar las propiedades de las categorías de módulos por el hecho de ser abelianas. Lo que se presenta en esta sección tiene como objetivo principal sentar las bases para poder definir el funtor Ext más adelante, pero por tener relevancia propia, vale la pena exponerlo antes. En esta sección, Λ_1, Λ_2 denotarán anillos posiblemente distintos.

Proposición 1.81. *La imagen bajo cualquier funtor aditivo del módulo trivial es el módulo trivial. Lo mismo pasa con los morfismos nulos.*

Demostración. Sea F un funtor aditivo. Como F restringido a los grupos de morfismos es una función aditiva, debe de enviar morfismos nulos en morfismos nulos. De esto se sigue que la imagen del módulo trivial es trivial, pues es el único módulo en el que coinciden la identidad y el morfismo nulo. □

Definición 1.82. Sean $F\colon \Lambda_1\text{-Mod} \longrightarrow \Lambda_2\text{-Mod}$ un funtor covariante aditivo, $G\colon \Lambda_1\text{-Mod} \longrightarrow \Lambda_2\text{-Mod}$ un funtor contravariante aditivo y $f\colon L \longrightarrow M$ y $g\colon M \longrightarrow N$ Λ_1-morfismos.

1) F es exacto izquierdo si la exactitud de $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ implica la exactitud de $0 \longrightarrow FL \xrightarrow{Ff} FM \xrightarrow{Fg} FN$.

2) F es exacto derecho si la exactitud de $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ implica la exactitud de $FL \xrightarrow{Ff} FM \xrightarrow{Fg} FN \longrightarrow 0$.

3) F es exacto si es exacto derecho y exacto izquierdo.

4) G es exacto izquierdo si la exactitud de $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ implica la exactitud de $0 \longrightarrow GN \xrightarrow{Gg} GM \xrightarrow{Gf} GL$.

5) G es exacto derecho si la exactitud de $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ implica la exactitud de $GL \xrightarrow{Gf} GM \xrightarrow{Gg} GN \longrightarrow 0$.

6) G es exacto si es exacto derecho y exacto izquierdo.

Proposición 1.83. *Sea M un Λ-módulo. Los funtores* $\operatorname{Hom}_\Lambda(M,-)\colon \Lambda\text{-Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ *y* $\operatorname{Hom}_\Lambda(-,M)\colon \Lambda\text{-Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ *son aditivos y exactos izquierdos. Además, el primero es exacto si, y solo si M es proyectivo, y el segundo es exacto si, y solo si M es inyectivo.*

Demostración. Sean $f,g\colon M \longrightarrow M'$ $h\colon M' \longrightarrow M''$ Λ-morfismos. Calculando, $\operatorname{Hom}_\Lambda(M, f+g)(h) = (f+g)h = fh + gh = \operatorname{Hom}_\Lambda(M,f)(h) + \operatorname{Hom}_\Lambda(M,g)(h)$, por lo que $\operatorname{Hom}_\Lambda(M,-)$ es aditivo. Consideremos ahora una sucesión exacta en Λ-Mod

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C,$$

queremos ver que la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(M,A) \xrightarrow{\alpha_*} \operatorname{Hom}_\Lambda(M,B) \xrightarrow{\beta_*} \operatorname{Hom}_\Lambda(M,C)$$

también es exacta. Sean $\gamma,\gamma' \in \operatorname{Hom}_\Lambda(M,A)$, como α es un monomorfismo, si $\gamma \neq \gamma'$, entonces $\alpha_*(\gamma) = \alpha\gamma \neq \alpha\gamma' = \alpha_*(\gamma')$, es decir, α_* es un monomorfismo. Por otro lado, si dado $f \in \operatorname{Hom}(M,B)$, $\beta f = \beta_*(f) = 0$, por la propiedad del núcleo, existe $g \in \operatorname{Hom}(M,A)$ tal que $\alpha g = f$, es decir, $f \in \operatorname{Im}(\alpha_*)$. Esto significa esta última sucesión es exacta, que es lo que queríamos probar.

Ahora, si

$$A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C \longrightarrow 0$$

es exacta, tenemos que M es proyectivo si, y solo si para cualquier Λ-morfismo $p\colon M \longrightarrow C'$ existe otro morfismo $p'\colon M \longrightarrow B'$ tal que $p = \beta' p'$, lo que sucede si, y solo si para cualquier $p \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, C')$ existe $p' \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, B')$ tal que $p = \beta'_*(p')$, es decir, β'_* es un epimorfismo. Entonces, concluimos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, -)$ es exacto derecho si, y solo si M es proyectivo.

La prueba para el otro funtor es análoga. □

Definición 1.84. Sea M un Λ-módulo.

1) Una resolución proyectiva de M es una sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

donde cada P_i es proyectivo.

2) Una resolución inyectiva de M es una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d^0} I_0 \xrightarrow{d^1} I_1 \xrightarrow{d^2} I_2 \longrightarrow \dots$$

Teorema 1.85. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Todo módulo tiene una resolución proyectiva y una resolución inyectiva. Además, si un módulo es finitamente generado, entonces tiene una resolución proyectiva de módulos finitamente generados y una resolución inyectiva de módulos finitamente generados.*

Demostración. Sea M un Λ-módulo. Comencemos con las resoluciones proyectivas. Los módulos libres son proyectivos, así que basta encontrar un resolución de módulos libres. Como todo módulo es cociente de un libre, existen un conjunto X_0 y un epimorfismo $d_0\colon P_0 := \Lambda^{(X_0)} \longrightarrow M$ (donde $\Lambda^{(X_0)}$ es la suma directa de tantas copias de Λ como la cardinalidad de X_0). Por la misma razón, existen un conjunto X_1 y un epimorfismo $f_1\colon P_1 := \Lambda^{(X_1)} \longrightarrow \mathrm{Nuc}(d_0)$. Definiendo $d_1 := \iota_0 f_1$, donde ι_0 es la inclusión $\mathrm{Nuc}(d_0) \hookrightarrow P_0$, podemos repetir este argumento obteniendo la sucesión

$$\dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

que es exacta por definición. Esta es una resolución proyectiva de M. Notemos que si M es finitamente generado, podemos escoger X_0 tal que sea finito y como Λ es de dimensión finita, todos los Λ-módulos finitamente generados son neterianos. Por lo tanto, $\mathrm{Nuc}(d_0)$ es finitamente generado y también podemos escoger X_1 finito. Repitiendo esto, obtenemos que la resolución proyectiva de M está compuesta únicamente por módulos finitamente generados.

Para el caso de los inyectivos, notemos que la dualidad ya expuesta nos asegura que existen resoluciones inyectivas compuestas únicamente por módulos finitamente generados para módulos finitamente generados. Solo falta verificar el caso general. Sabemos que todo módulo tiene cápsula inyectiva. Así, sea $d^0 := \iota_0\colon M \hookrightarrow E(M) := I_0$ la inclusión. Definimos entonces $d^1 := \iota_1 \pi_0$, donde $\pi_0\colon E(M) \longrightarrow I_0/M$ es la proyección y $\iota_1\colon I_0/M \hookrightarrow E(I_0/M) := I_1$ es la inclusión. Podemos repetir el argumento para obtener una sucesión

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d^0} I_0 \xrightarrow{d^1} I_1 \xrightarrow{d^2} I_2 \longrightarrow \dots$$

que es exacta por definición. Esta es una resolución inyectiva de M. □

Nótese que en la prueba del teorema anterior, la hipótesis de que Λ sea una K-álgebra de dimensión finita se utilizó solamente para los casos de los módulos finitamente generados. La existencia de las resoluciones inyectivas y proyectivas se vale en cualquier anillo.

Definición 1.86. Definimos la dimensión proyectiva de un módulo M como el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que existe una resolución proyectiva

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

y lo denotamos $\mathrm{dp}(M)$. Si no existe $n \in \mathbb{N}$ que cumpla lo anterior, decimos que la dimensión proyectiva de M es infinita.

Dualmente, definimos la dimensión inyectiva de un módulo y la denotamos $\mathrm{di}(M)$.

Claramente, un módulo es proyectivo si, y solo si su dimensión proyectiva es 0; y es inyectivo si, y solo si su dimensión inyectiva es 0.

1.10. El funtor Ext

Esta sección está dedicada a definir el bifuntor Ext y ver sus propiedades principales. La construcción de este es larga y técnica, así que en su mayoría, solo enunciaremos los resultados. Una versión más detallada de lo que presentamos se puede ver en [A].

Lema 1.87. *Sean M y M' Λ-módulos con resoluciones proyectivas*

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0,$$

$$\ldots \longrightarrow P'_2 \xrightarrow{d'_2} P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{d'_0} M' \longrightarrow 0.$$

Si $f\colon M \longrightarrow M'$ es un Λ-morfismo, entonces existen morfismos $f_i\colon P_i \longrightarrow P'_i$ tales que $f d_0 = d'_0 f_0$ y $f_i d_{i+1} = d'_{i+1} f_{i+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Esto se llama un levantamiento del morfismo f. Lo mismo puede hacerse con resoluciones inyectivas, en cuyo caso se le llama un prolongamiento del morfismo.

Demostración. Ver [A], sección IX, teorema 2.1. □

Fijemos primero un Λ módulo N y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos ahora otro Λ-módulo M con una resolución proyectiva

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

Definimos

$$E_n(M,N) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Nuc}(Hom_\Lambda(d_n,N))}{\mathrm{Im}(Hom_\Lambda(d_{n+1},N))} = \dfrac{\mathrm{Nuc}(d_n^*)}{\mathrm{Im}(d_{n+1}^*)} & \text{si } n > 0 \\ \dfrac{\mathrm{Hom}_\Lambda(P_0,N)}{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_\Lambda(d_1,N))} = \dfrac{\mathrm{Hom}_\Lambda(P_0,N)}{\mathrm{Im}(d_1^*)} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Ahora, si $f\colon M \longrightarrow M'$ es un Λ-morfismo y M' tiene una resolución proyectiva

$$\dots \longrightarrow P_2' \xrightarrow{d_2'} P_1' \xrightarrow{d_1'} P_0' \xrightarrow{d_0'} M' \longrightarrow 0,$$

sabemos que f se levanta a una familia de morfismos $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$. Definimos entonces $E_n(f,N)\colon E_n(M,N) \longrightarrow E_n(M',N)$ como $E_n(f,N)(x+\mathrm{Im}(d_{n+1}^*)) = f_n^*(x)+\mathrm{Im}(d_{n+1}'^*)$. Sea $x \in \mathrm{Im}(d_{n+1}^*)$, entonces existe $y \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_n,N)$ tal que $d_{n+1}^*(y) = x$. Así, como f_n es parte de un levantamiento de f, $f_n(x) = f_n^* d_{n+1}^*(y) = (f_n d_{n+1})^*(y) = (d_{n+1}' f_{n+1})^*(y)$ $= d_{n+1}'^* f_{n+1}^*(y) \in \mathrm{Im}(d_{n+1}'^*)$. Esto nos asegura que el morfismo $E_n(f,N)$ se definió de forma adecuada.

En lo anterior, sucede que sin importar el levantamiento de f que tomemos, el morfismo $E_n(f,N)$ es el mismo, además, $E_n(M,N)$ tampoco depende de la resolución proyectiva escogida (en este caso, solo se logra un isomorfismo). Esto nos asegura que $E_n(-,N)$ es una asignación correctamente definida módulo isomorfismo. Resulta que esta asignación es además un funtor aditivo. Más aun, si Λ es una K-álgebra, dicho funtor es K-lineal.

Se hace una construcción análoga para obtener los funtores covariantes $E^n(N,-)$ para N un Λ-módulo y $n \in \mathbb{N}$.

De la construcción, se sigue inmediatamente el lema del corrimiento.

Lema 1.88. ***(Lema del corrimiento)*** *Sean M y N dos Λ-módulos*

$$\dots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{g_0} I_0 \xrightarrow{g_1} I_1 \xrightarrow{g_2} \dots$$

resoluciones proyectiva e inyectiva respectivamente. Entonces, tenemos isomorfismos

$$E_{n+1}(M,N) \cong E_n(\mathrm{Nuc}(f_0),N) \cong \dots \cong E_1(\mathrm{Nuc}(f_{n-1}),N)$$

y

$$E^{n+1}(M,N) \cong E^n(M,\mathrm{Im}(g_1)) \cong \dots \cong E^1(M,\mathrm{Im}(g_n)).$$

Demostración. Ver [A], sección IX, lema 3.3. □

Para los funtores recién definidos, se tiene el siguiente resultado relacionándolos.

Teorema 1.89. *Para cualesquiera Λ-módulos M y N y cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $E^n(M,N) = E_n(M,N)$. Definimos este valor común como $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(M,N)$.*

Demostración. Ver [A], sección IX, teorema 3.4. □

El teorema anterior, nos define los bifuntores Ext^n_Λ, los cuales tienen varias propiedades básicas y bien conocidas que mencionaremos a continuación. Cuando no haya posibilidad de confusión, omitiremos el subíndice Λ.

Teorema 1.90. *Sea* $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta de* Λ*-módulos. Entonces, cualquier otro* Λ*-módulo* A *induce sucesiones exactas*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \operatorname{Ext}^0(A,L) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0(A,M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0(A,N) \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}^1(A,L) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(A,M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(A,N) \longrightarrow \ldots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \operatorname{Ext}^0(N,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0(M,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0(L,A) \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}^1(N,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(M,A) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(L,A) \longrightarrow \ldots. \end{aligned}$$

Demostración. Ver [A], sección IX, teorema 3.5. □

La siguiente proposición enuncia varias propiedades del funtor Ext: la mayoría de ellas se demuestra fácilmente a partir de la definición de este.

Proposición 1.91. *Sean* M *y* N Λ*-módulos.*

1) $Hom_\Lambda(M,N) \cong \operatorname{Ext}^0(M,N)$.

2) *Son equivalentes:*

a) *M es proyectivo,*

b) $\operatorname{Ext}^k(M,L) = 0$ *para toda* $k > 0$ *y cualquier* Λ*-módulo* L*,*

c) $\operatorname{Ext}^1(M,L) = 0$ *para cualquier* Λ*-módulo* L*.*

3) *Son equivalentes:*

a) *M es inyectivo,*

b) $\operatorname{Ext}^k(L,M) = 0$ *para toda* $k > 0$ *y cualquier* Λ*-módulo* L*,*

c) $\operatorname{Ext}^1(L,M) = 0$ *para cualquier* Λ*-módulo* L*.*

4) *Son equivalentes:*

a) $\operatorname{dp}(M) \leq n$*,*

b) $\operatorname{Ext}^k(M,L) = 0$ *para toda* $k > n$ *y cualquier módulo* L*,*

c) $\operatorname{Ext}^{n+1}(M,L) = 0$ *para cualquier módulo* L*,*

d) *toda sucesión exacta* $0 \longrightarrow L \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *con cada* P_i *proyectivo cumple que* L *es proyectivo.*

5) *Son equivalentes:*

a) $\operatorname{di}(M) \leq n$*,*

b) $\operatorname{Ext}^k(L,M) = 0$ *para toda* $k > n$ *y cualquier módulo* L*,*

c) $\operatorname{Ext}^{n+1}(L,M) = 0$ *para cualquier módulo* L*,*

d) *toda sucesión exacta* $0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *con cada* I_i *inyectivo cumple que* L *es inyectivo.*

6) $\sup\{\operatorname{dp}({}_\Lambda M)\} = \sup\{\operatorname{di}({}_\Lambda M)\}$

7) *Si* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta, entonces*

a) $\operatorname{dp}(A) \leq \max\{\operatorname{dp}(B), \operatorname{dp}(C) - 1\}$ *y la igualdad se alcanza si* $\operatorname{dp}(B) \neq \operatorname{dp}(C)$*,*

b) $\operatorname{dp}(B) \leq \max\{\operatorname{dp}(A), \operatorname{dp}(C)\}$ *y la igualdad se alcanza si* $\operatorname{dp}(C) \neq \operatorname{dp}(A) + 1$*,*

c) $\operatorname{dp}(C) \leq \max\{\operatorname{dp}(B), \operatorname{dp}(A) + 1\}$ *y la igualdad se alcanza si* $\operatorname{dp}(B) \neq \operatorname{dp}(A)$*.*

8 *Si* $\{L_i\}I$ *es una familia de* Λ*-módulos, entonces*

$$\operatorname{Ext}^n(\bigoplus_I L_i, M) \cong \prod_I \operatorname{Ext}^n(L_i, M) \text{ y } \operatorname{Ext}^n(M, \prod_I L_i) \cong \prod_I \operatorname{Ext}^n(M, L_i).$$

Demostración. **1)** Ver [A], sección IX, lema 3.1.
2) y **3)** Ver [A], sección IX, teorema 3.6.
4) Ver [A], sección X, teorema 1.2.
5) Ver [A], sección X, teorema 1.7.
6) Ver [A], sección X, corolario 2.2.
7) Ver [A], sección X, corolario 1.4.
8) Ver [A], sección IX, teorema 3.7. □

Corolario 1.92. *Si existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow N_0 \xrightarrow{f_0} N_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{i-1}} N_i \xrightarrow{f_i} M \xrightarrow{f_{i+1}} N_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} N_{n-1} \xrightarrow{f_n} N_n \longrightarrow 0$$

en donde cada N_j tiene dimensión proyectiva finita, entonces M también tiene dimensión proyectiva finita. De igual forma, si cada N_j tiene dimensión inyectiva finita, entonces M tiene dimensión inyectiva finita.

Demostración. Basta descomponer a la sucesión exacta en las sucesiones exactas $0 \longrightarrow \mathrm{Nuc}(f_j) \longrightarrow \mathrm{Dom}(f_j) \longrightarrow \mathrm{Im}(f_j) \longrightarrow 0$ y aplicar el inciso **7)** de la proposición 1.91. □

Corolario 1.93. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita. Entonces, el supremo de las dimensiones proyectivas de los Λ-módulos finitamente generados coincide con el supremo de las dimensiones inyectivas de los Λ-módulos finitamente generados, y a su vez coinciden con el máximo de las dimensiones proyectivas de los Λ-módulos simples. Este valor común se define como la dimensión global de Λ.*

Demostración. Ver [A], sección X, teorema 2.8. □

Teorema 1.94. *Sean M y N Λ-módulos,* $\mathrm{Ext}^1(M,N) = 0$ *si, y solo si toda sucesión exacta de la forma* $0 \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *se escinde.*

Demostración. Ver [A], sección IX, teorema 5.4. □

Capítulo 2

Álgebras de carcaj

En este capítulo definimos lo que son las álgebras de carcaj, estas son muy importantes para nosotros por ser una gigantesca fuente de ejemplos. Además mencionamos el teorema de Gabriel, ya que caracteriza de manera muy exitosa una gran cantidad de álgebras de dimensión finita.

En este capítulo se supone cierta familiaridad con algunos conceptos básicos usados en teoría de gráficas.

2.1. Carcajes y su álgebra asociada

Esta sección trata sobre la definición del álgebra asociada a un carcaj, así como algunas propiedades elementales de esta.

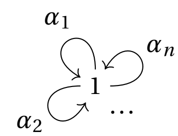
Definición 2.1. Un carcaj C es una digráfica finita, es decir, sus conjuntos de vértices y flechas son finitos. Denotaremos $V(C)$ al conjunto de vértices de C y $A(C)$ al conjunto de flechas de C.

Definición 2.2. Un camino en un carcaj C es una sucesión de flechas de C (no necesariamente finita y posiblemente vacía) tal que el vértice inicial de cualquier flecha es el vértice final de la flecha que la precede (si esta existe); en caso de que un camino sea finito, este debe venir equipado con un vértice de salida (lo que permite que haya distintos caminos triviales). Un ciclo es un camino que comienza y termina en el mismo vértice. Llamaremos e_v al camino trivial de longitud cero (sucesión vacía) en un vértice v.

Sea C un carcaj, denotaremos KC al K espacio vectorial con base $\Gamma = \{\gamma \mid \gamma \text{ es un camino en } C\}$. Definimos el producto de dos caminos como su concatenación si esta existe y 0 en otro caso; la concatenación de caminos se hace de derecha a izquierda, de forma similar a las funciones. Podemos extender linealmente este producto a todo KC para verlo como K-álgebra, donde el uno es la suma de todos los caminos triviales (es claro que esta suma es el uno para el producto que recién definimos). Entonces, le llamaremos a KC, el álgebra de Carcaj asociada a C. Claramente, KC es de dimensión finita si, y solo si C no tiene ciclos.

Algunos ejemplos de carcajes junto con sus respectivas álgebras asociadas se muestran a continuación.

Ejemplo 2.3. Sea C_1 el carcaj de un vértice con n lazos:



Evidentemente, $KC_1 \cong K\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Ejemplo 2.4. Sea C_2 el siguiente carcaj:

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} n+1$$

Un cálculo simple muestra que KC_2 es isomorfa al álgebra de matrices cuadradas triangulares superiores de tamaño $n+1$. Un isomorfismo se da mediante la asignación

$$\gamma\colon k \longrightarrow k' \qquad \longmapsto \qquad (A)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = k' \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Gracias al resultado siguiente, nos interesaremos principalmente en carcajes conexos. Recordemos que una componente conexa de una digráfica es una subdigráfica conexa máxima.

Teorema 2.5. *Si C es un carcaj con componentes conexas $C_1, \ldots, C_n$, entonces $KC = KC_1 \dotplus \ldots \dotplus KC_n$.*

Demostración. Sean $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ los conjuntos de caminos de $C, C_1, \ldots, C_n$ respectivamente. Como los caminos se encuentran contenidos en sus componentes conexas, $\Gamma = \Gamma_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \Gamma_n$, y por definición, ${}_K KC = {}_K K^{(\Gamma)} = {}_K K^{(\Gamma_1)} \oplus \ldots \oplus {}_K K^{(\Gamma_n)} = {}_K KC_1 \oplus \ldots \oplus {}_K KC_n$ (donde ${}_K K^{(\Gamma_i)}$ es el K espacio vectorial de base Γ_i). Ahora, como componentes conexas distintas no comparten vértices, el producto de cualesquiera caminos en componentes distintas es 0, por lo que concluimos que $KC = KC_1 \dotplus \ldots \dotplus KC_n$. □

Ahora veremos algunas propiedades importantes de las álgebras de carcaj que nos permiten entender mejor su estructura.

Proposición 2.6. *El conjunto de los caminos triviales de un carcaj C forma un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales de KC.*

Demostración. De la definición de la multiplicación en KC tenemos automáticamente que $\{e_v\}_{V(C)}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales. Ahora veremos que son también primitivos, para lo cual basta asegurar que para $v \in V(C)$, $e_v KC e_v$ tiene como únicos idempotentes a 0 y e_v (corolario 1.26). Sea $0 \neq f \in e_v KC e_v$

idempotente, como no es anulado por e_v (por ningún lado), f debe ser combinación lineal de caminos que comienzan y terminan en v, es decir, $f = ke_v + \lambda$, donde $k \in K$ y λ es una combinación lineal de ciclos que comienzan en v. Entonces, $0 = f - f^2 = ke_v + \lambda - (ke_v)^2 - ke_v\lambda - \lambda ke_v - \lambda^2 = (k - k^2)e_v + (1 - 2k)\lambda - \lambda^2$. Esto quiere decir que $k = k^2$, así que $k = 0$ o $k = 1$ y que $\lambda = 1 - 2k$. Como λ es combinación lineal de ciclos, $\lambda = 0$, así que $f = e_v$ (supusimos que $f \neq 0$). Por lo tanto, los únicos idempotentes en e_vKCe_v son 0 y e_v. □

Teorema 2.7. *Si C es un carcaj conexo, entonces KC es una K-álgebra inescindible.*

Demostración. Por el lema 1.32 basta ver que los únicos idempotentes centrales de KC son 0 y e_v, así que sea $0 \neq f \in KC$ idempotente. Como f es central, $fe_v = e_vf$ para cualquier $v \in V(C)$, esto significa que al descomponer a f como combinación lineal, se anula cualquier camino que no sea un ciclo o trivial, ya que dado un camino α con vértice inicial x y vértice final y tales que $x \neq y$, $\alpha y = 0 \neq \alpha = y\alpha$. Entonces, al ser f una combinación lineal de caminos cerrados (que comienzan y terminan en el mismo vértice), $f^2 = f$ se calcula componente a componente de la descomposición

$$KC = \bigoplus_{V(C)} KCe_v,$$

lo que significa que fe_v es idempotente en e_vKCe_v para cada $v \in V(C)$. Por la conclusión que obtuvimos en la prueba de la proposición anterior, tenemos que f debe ser la suma de caminos triviales. Como $f \neq 0$, f tiene al menos un camino trivial como sumando, veremos que no puede ser que le falte alguno, por lo que tendremos que $f = 1$. Si e_u es un sumando de f, y z es tal que existe una flecha α de z a u, entonces, como f es central, $\alpha e_z = \alpha = e_u\alpha = f\alpha = \alpha f$, así que e_z es un sumando de f. De la misma forma se tiene que e_z es sumando de f si existe una flecha de u a z. Como C es conexo, con esto cubrimos todos vértices de C, así que todo camino trivial es sumando de f. □

2.2. Ideales admisibles

Ahora presentamos ciertos ideales de las álgebras de carcaj. Solo enunciaremos algunas de sus propiedades y en la siguiente sección observaremos cuán importantes son.

Definición 2.8. Sea C un carcaj. Definimos $\mathfrak{F}(KC)$ como el ideal izquierdo generado por las flechas de C. Claramente, $\mathfrak{F}(KC)$ es un ideal bilateral y coincide con el K espacio vectorial generado por los caminos dirigidos no triviales de C.

La siguiente proposición nos permite calcular fácilmente el radical de las álgebras de carcaj de dimensión finita, es decir, cuando el carcaj C no tiene ciclos.

Proposición 2.9. *Si C es un carcaj sin ciclos, entonces $\mathcal{J}(KC) = \mathfrak{F}(KC)$.*

Demostración. Como C no tiene ciclos, KC tiene dimensión finita, por lo que si probamos que $\mathfrak{F}(KC)$ es nilpotente máximo, entonces tendremos que $\mathcal{J}(KC) =$

$\mathfrak{F}(KC)$. Es claro que $\mathfrak{F}(KC)$ es nilpotente, pues como C no tiene ciclos, la longitud de todos los caminos se encuentra acotada, digamos por n y por lo tanto el producto de cualesquiera $n+1$ flechas de C es 0. Por otra parte, como $\mathfrak{F}(KC)$ es el espacio vectorial generado por los caminos dirigidos no triviales, cualquier ideal que contenga a $\mathfrak{F}(KC)$ debe tener al menos una combinación lineal de caminos triviales que no puede ser nilpotente (los caminos triviales son idempotentes distintos de cero). Por lo tanto, concluimos que en efecto, $\mathcal{J}(KC) = \mathfrak{F}(KC)$. □

Definición 2.10. Sea C un carcaj. Decimos que un ideal bilateral I de KC es admisible si $I \leq \mathfrak{F}(KC)^2$ y existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $I \geq \mathfrak{F}(KC)^n$. Cuando fijamos un ideal admisible para un carcaj, también le llamamos carcaj con relaciones.

Observación 2.11. Para un carcaj C, $\mathfrak{F}(KC)^n$ es admisible para cualquier $n \geq 2$ y 0 es admisible si, y solo si KC es de dimensión finita.

El siguiente resultado enuncia algunas de las propiedades que satisface el álgebra KC/I donde I es un ideal admisible de KC.

Teorema 2.12. *Sean C un carcaj e I un ideal admisible de KC.*

1) $\{\overline{e_v} \mid v \in V(C)\}$ *es un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales en KC/I.*

2) *El álgebra KC/I es inescindible si, y solo si C es conexo.*

3) *KC/I es de dimensión finita.*

4) $\mathcal{J}(KC/I)^m = (F+I)^m$.

5) *KC/I es básica.*

Demostración. Una prueba de estos hechos puede encontrarse en [ASS], sección II, lema 2.4, lema 2.5, proposición 2.6, corolario 2.11 y lema 2.10, respectivamente. □

Corolario 2.13. *Sea C un carcaj. Si KC es de dimensión finita, entonces KC es básica.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la observación y del teorema anterior. □

2.3. Carcaj ordinario de un álgebra

En esta sección, daremos la construcción del carcaj ordinario asociado a un álgebra y mencionaremos el teorema de Gabriel que nos asegura que podemos describir toda K-álgebra básica de dimensión finita en términos de un carcaj y un ideal admisible de este.

Lema 2.14. *Si Λ es una K-álgebra de dimensión finita, entonces $\mathcal{J}(\Lambda)/(\mathcal{J}(\Lambda)^2)$ es un Λ-bimódulo de K-dimensión finita.*

Demostración. Como Λ es de K-dimensión finita, también lo es $\mathcal{J}(\Lambda)$ y por lo tanto también $\mathcal{J}(\Lambda)/(\mathcal{J}(\Lambda)^2)$. Por otra parte, la estructura de bimódulo se obtiene mediante $\lambda \overline{j} \mu = \overline{\lambda j \mu}$, para cualesquiera $j \in \mathcal{J}(\Lambda)//\mathcal{J}(\Lambda)^2)$ y $\lambda, \mu \in \Lambda$. □

Definición 2.15. Sean Λ una K-álgebra de dimensión finita básica y $\{e_1,\dots,e_n\}$ un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales de esta. El carcaj ordinario o carcaj de Gabriel de Λ, C_Λ, es el carcaj con vértices $V(C_\Lambda)=\{e_1,\dots,e_n\}$ y tantas flechas de e_i a e_j como
$$\dim_k\left(e_j\frac{\mathcal{J}(\Lambda)}{\mathcal{J}(\Lambda)^2}e_i\right).$$

Proposición 2.16. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita básica. El carcaj C_Λ no depende del sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales escogido.*

Demostración. Por el teorema de Krull-Schmidt, sabemos que $V(C_\Lambda)$ no depende de la elección del sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales elegido, así que basta verificarlo para flechas. Sean $\{e_1,\dots,e_n\}$ y $\{f_1,\dots,f_n\}$ con estas propiedades. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\Lambda e_i\cong\Lambda f_i$ para cualquier i. Ya sabemos que si $e\in\Lambda$ es un idempotente y M un Λ-módulo izquierdo, entonces $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda e,M)\cong eM$ vistos como K espacios vectoriales. Para el caso en que N sea un Λ-módulo derecho, tenemos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(e\Lambda,N)\cong Ne$ vistos como K espacios vectoriales. Entonces, para cualesquiera i y j,
$$\begin{aligned}e_i\frac{\mathcal{J}(\Lambda)}{\mathcal{J}(\Lambda)^2}e_j&\cong\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\Lambda e_i,\frac{\mathcal{J}(\Lambda)}{\mathcal{J}(\Lambda)^2}e_j\right)\cong\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\Lambda f_i,\frac{\mathcal{J}(\Lambda)}{\mathcal{J}(\Lambda)^2}e_j\right)\\&\cong f_i\frac{\mathcal{J}(\Lambda)}{\mathcal{J}(\Lambda)^2}e_j\cong\mathrm{Hom}_\Lambda\left(e_j\Lambda,f_i\frac{\mathcal{J}(\Lambda)}{\mathcal{J}(\Lambda)^2}\right)\\&\cong\mathrm{Hom}_\Lambda\left(f_j\Lambda,f_i\frac{\mathcal{J}(\Lambda)}{\mathcal{J}(\Lambda)^2}\right)\cong f_i\frac{\mathcal{J}(\Lambda)}{\mathcal{J}(\Lambda)^2}f_j.\end{aligned}$$

En particular, las dimensiones coinciden, por lo que concluimos que $A(C_\Lambda)$ tampoco depende de la elección del sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales elegido. □

Ejemplo 2.17. Sea $\Lambda=KC/I$, donde C es un carcaj con $V(C)=\{1,\dots,n\}$ e I es un ideal admisible de KC. Por el teorema 2.12, Λ es de dimensión finita y básica con el sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$ y $\mathcal{J}(\Lambda)$ coincide con $\mathfrak{F}(KC)/I$. Entonces, $\mathcal{J}(\Lambda)/(\mathcal{J}(\Lambda)^2)$ está generado por las clases módulo $\mathcal{J}(\Lambda)^2$ de las clases módulo I de las flechas de C. Es entonces claro que $C_\Lambda=C_{KC/I}\cong C$.

Proposición 2.18. *Sea Λ una K-álgebra de dimensión finita básica. Si además, Λ es inescindible, entonces C_Λ es conexo.*

Demostración. La prueba de esta proposición es técnica y puede encontrarse en [ASS], sección II, corolario 3.4. El argumento consiste en ver que si los vértices de KC no tienen relación entre ellos, es decir, se encuentran en distintas componentes conexas, entonces no tienen relación los idempotentes que los definen. □

Si Λ es una K-álgebra de dimensión finita, inescindible y básica, donde K es un campo algebraicamente cerrado, se puede construir un epimorfismo de K-álgebras $KC_\Lambda\longrightarrow\Lambda$ cuyo núcleo es admisible en KC_Λ. Esto, a grandes rasgos, es la prueba del siguiente resultado, que muestra una de las razones por las que las álgebras de carcaj son tan importantes. Una demostración completa puede encontrarse en [ASS], sección II, lema 3.7.

Teorema 2.19. ***(Gabriel)*** *Sea K un campo algebraicamente cerrado. Toda K-álgebra de dimensión finita, inescindible y básica es isomorfa al cociente de un álgebra de carcaj con un ideal admisible de esta.*

$\square$

Capítulo 3

El módulo inclinante característico de un álgebra estándarmente estratificada

En este capítulo damos una breve introducción al estudio de las álgebras estándarmente estratificadas, las cuales son una generalización de las álgebras casihereditarias. Para esto, vemos qué significa que un álgebra sea estándarmente estratificada y observamos algunas de sus propiedades básicas. Luego vemos la relación entre este tipo de álgebras y la teoría generalizada de módulos inclinantes, en particular vemos que dada un álgebra estándarmente estratificada, le corresponde un módulo inclinante básico, llamado el módulo inclinante característico asociado a Λ. Finalmente aplicamos lo anterior en el estudio de las álgebras de Gorenstein estándarmente estratificadas. El material presentado se encuentra, en su mayor parte, contenido en [X].

Haremos algunas aclaraciones respecto a la notación que usaremos de ahora en adelante. Λ denotará una K-álgebra básica de dimensión finita y $S_1,\ldots,S_n$ una lista (ordenada) de los módulos simples no isomorfos en Λ-mod (ver el teorema 1.74). Fijaremos el orden natural $\leq$ en el conjunto $\{1,\ldots,n\}$ que indexa a los módulos simples. Además, P_i y E_i serán respectivamente la cubierta proyectiva y cápsula inyectiva de S_i para $i = 1,\ldots,n$. También tenemos un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales, $\{e_1,\ldots,e_n\}$, tales que $P_i = \Lambda e_i$, lo cual también determina que $S_i = \Lambda e_i/(\mathcal{J}(\Lambda)e_i)$.

3.1. Los módulos estándar

Esta sección comienza describiendo los módulos estándar los cuales serán fundamentales para poder definir la noción de álgebra estándarmente estratificada. Posteriormente estudiaremos algunas de las propiedades básicas que cumplen estas álgebras y la categoría de los módulos buenos (los cuales definimos a continuación).

Usaremos la mayor parte de los resultados de esta sección para desarrollar la teoría expuesta en la siguiente.

Definición 3.1. Para $i = 1, \dots, n$, sea

$$U_i := \sum_{j>i} \sum \{\operatorname{Im} f \mid f \in \operatorname{Hom}_\Lambda(P_j, P_i)\}.$$

Definimos el i-ésimo módulo estándar $\Delta(i) := P_i/U_i$ y Δ como el conjunto de los módulos estándar. En caso de ser necesario, agregaremos subíndices que representen el álgebra a la que nos referimos, por ejemplo ${}_\Lambda\Delta(i)$.

Observación 3.2. Cada U_i es un submódulo propio de P_i, consecuentemente ningún módulo estándar es trivial. Para ver esto, supongamos que $e_i \in U_i$, es decir, existen funciones $f_1, \dots, f_k \in \bigcup_{j>i} \operatorname{Hom}_\Lambda(P_j, P_i)$ y $m_1 \in \operatorname{Dom}(f_1), \dots, m_k \in \operatorname{Dom}(f_k)$ tales que $e_i = f_1(m_1) + \dots + f_k(m_k)$. Entonces,

$$\bigoplus_{j=1}^{k} f_j \colon \bigoplus_{j=1}^{k} \operatorname{Dom}(f_j) \longrightarrow P_i$$

es un epimorfismo, y como P_i es proyectivo, se escinde. Esto es absurdo, pues asegura que existe P_j con $j > i$ tal que $P_i \cong P_j$ debido a que P_i es inescindible.

Ahora caracterizaremos a los módulos estándar. Recordemos que podemos ordenar los cocientes de un módulo M como $M/N \geq M/L$ si, y solo si $L \geq N$. Además, por el tercer teorema de isomorfismo, tenemos que si $L \geq N$, entonces la proyección $M \longrightarrow M/L$ se factoriza a través de la proyección $M \longrightarrow M/N$. A partir de ahora, siempre que comparemos dos cocientes de un módulo, estaremos usando esta relación.

Teorema 3.3. *El módulo estándar $\Delta(i)$ es el mayor cociente de P_i tal que todo factor de composición S_j de $\Delta(i)$ cumple que $j \leq i$.*

Demostración. Lo primero que debemos hacer es asegurarnos que si S_j es un factor de composición de $\Delta(i)$, entonces $j \leq i$. Sea

$$\Delta(i) = \frac{M_0}{U_i} > \frac{M_1}{U_i} > \dots > \frac{M_k}{U_i} = 0$$

una serie de composición. Supongamos que

$$\frac{M_t/U_i}{M_{t+1}/U_i} \cong S_j$$

con $j > i$. Consideremos entonces las proyecciones $\pi \colon P_j \longrightarrow S_j$, $\pi' \colon M_t/U_i \longrightarrow S_j$ y $\pi'' \colon M_t \longrightarrow M_t/U_i$, como P_j es proyectivo, existe $f \colon P_j \longrightarrow M_t$ tal que $\pi'\pi'' f = \pi$. Extendiendo el codominio de f, obtenemos $\overline{f} \colon P_j \longrightarrow P_i$, así que por la definición de U_i, $\operatorname{Im}(f) \leq U_i$; esto significa que $0 = \pi''\pi' f = \pi$, una contradicción.

Ahora veremos que $\Delta(i)$ es, en efecto, el mayor cociente con la propiedad que deseamos. Sea $A \leq P_i$ tal que P_i/A tiene solo factores de composición S_j con $j \leq i$.

Queremos ver que $U_i \leq A$, es decir, que si $f: P_j \longrightarrow P_i$ es un morfismo con $j > i$, entonces $\mathrm{Im}(f) \leq A$. Como $P_j / \mathcal{J}(P_j)$ es simple, $\mathcal{J}(P_j)$, que es la intersección de los máximos en P_j, también es máximo en P_j. Entonces, por el primer teorema de isomorfismo y el teorema de la correspondencia, S_j es un factor de composición de $\mathrm{Im}(f) \cong P_j / \mathrm{Nuc}(f)$ que es cociente del máximo módulo propio en $\mathrm{Im}(f)$ en cualquier serie de composición de este último. Como P_i / A no tiene factores de composición con $j > i$, la proyección de $\mathrm{Im}(f)$ sobre P_i / A es 0, es decir, $\mathrm{Im}(f) \leq A$. Con esto concluimos que $\Delta(i)$ es el mayor cociente de P_i cuyos factores de composición son solo simples S_j con $j \leq i$. □

Observación 3.4. $\Delta(n)$ es proyectivo ya que $P_n/0 \cong P_n$ tiene solo factores de composición S_j con $j \leq n$.

Proposición 3.5. ***1)*** *Para cualesquiera $i > j$,* $\mathrm{Hom}(\Delta(i), \Delta(j)) = 0$.
2) *Para cualesquiera $i \geq j$,* $\mathrm{Ext}^1(\Delta(i), \Delta(j)) = 0$

Demostración. **1)** Esto es claro, ya que si $i > j$, entonces $\Delta(j)$ no tiene factores de composición S_i pero todo cociente de $\Delta(i)$ sí, porque $S_i = P_i / \mathcal{J}(P_i)$ y todo cociente de $\Delta(i)$ es un cociente de P_i.

2) Sean $i \geq j$, antes de probar que $\mathrm{Ext}^1(\Delta(i), \Delta(j)) = 0$, veremos que $\mathrm{Hom}(U_i, \Delta(j)) = 0$. Sea $f \in \mathrm{Hom}(U_i, \Delta(j))$, $\mathrm{Im}(f) \cong U_i / \mathrm{Nuc}(f)$ solo tiene factores de composición S_k con $k \leq j \leq i$, pero entonces los factores de composición de $P_i / \mathrm{Nuc}(f)$ son únicamente S_k con $k \leq i$; de la maximalidad de $\Delta(i)$ concluimos que $\mathrm{Nuc}(f) = U_i$, es decir $f = 0$. Ahora sí, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(-, \Delta(j)$ a la sucesión exacta $0 \longrightarrow U_i \longrightarrow P_i \longrightarrow \Delta(i) \longrightarrow 0$, obtenemos la sucesión exacta $0 = \mathrm{Hom}(U_i, \Delta(j)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Delta(i), \Delta(j)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_i, \Delta(j)) = 0$ (P_i es proyectivo). Esto asegura que $\mathrm{Ext}^1(\Delta(i), \Delta(j)) = 0$. □

Definición 3.6. Denotamos por $\mathcal{F}(\Delta)$ a la subcategoría plena de Λ-mod que consta de los módulos M tales que admiten una Δ-filtración, es decir, existe una cadena

$$M = M_0 > M_1 \ldots > M_t = 0$$

tal que $M_j / M_{j+1} \cong \Delta(i)$ para alguna i y para toda $j = 0, \ldots, t-1$. A estos módulos los llamamos Δ-buenos. Definimos entonces la multiplicidad de $\Delta(i)$ en M como el número de veces que aparece $\Delta(i)$ como cociente en una Δ-filtración de M y lo denotamos $[M : \Delta(i)]$.

Observación 3.7. La multiplicidad de los módulos estándar para módulos en $\mathcal{F}(\Delta)$ se encuentra correctamente definida. Esto lo tenemos porque $\Delta(n)$ es el único módulo estándar con factor de composición S_n, así que la cantidad de factores de composición S_n en un módulo Δ-bueno determina la multiplicidad de $\Delta(n)$. Esto a su vez determina la multiplicidad de $\Delta(n-1)$ pues $\Delta(n)$ y $\Delta(n-1)$ son los únicos módulos estándar con factor de composición S_{n-1}. Siguiendo con esto, vemos que la multiplicidad de todos los módulos en Δ está correctamente definido.

Lema 3.8. *Si M es un módulo bueno, entonces admite una Δ-filtración $M = M_0 > M_1 > \ldots > M_k = 0$ tal que si $i \geq j$, entonces $a \leq b$, en donde $\Delta(a) \cong M_i / M_{i+1}$ y $\Delta(b) \cong M_j / M_{j+1}$.*

Demostración. Sea $M = M_0 > M_1 > \ldots > M_k = 0$ una Δ-filtración y supongamos que tenemos $M_i/M_{i+1} \cong \Delta(a)$ y $M_{i+1}/M_{i+2} \cong \Delta(b)$. Si suponemos que $a > b$, entonces $\mathrm{Ext}^1(\Delta(a), \Delta(b)) = 0$, así que la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \frac{M_{i+1}}{M_{i+2}} \hookrightarrow \frac{M_i}{M_{i+2}} \longrightarrow \frac{M_i/M_{i+2}}{M_{i+1}/M_{i+2}} \longrightarrow 0$$

se escinde porque

$$\frac{M_{i+1}}{M_{i+2}} \cong \Delta(b) \text{ y } \frac{M_i/M_{i+2}}{M_{i+1}/M_{i+2}} \cong \frac{M_i}{M_{i+1}} \cong \Delta(a).$$

Esto significa que $M_i/M_{i+2} \cong \Delta(a) \oplus \Delta(b)$, así que podemos obtener una nueva Δ-filtración $M = M_0 > M_1 > \ldots > M_i > M'_{i+1} > M'_{i+2} > M_{i+3} > \ldots > M_0 = 0$ en donde $\Delta(a) \cong M'_{i+1}/M'_{i+2}$ y $\Delta(b) \cong M_i/M'_{i+1}$. Por lo tanto, procediendo inductivamente obtenemos la filtración buscada. $\square$

Definición 3.9. Decimos que Λ es estándarmente estratificada (a la izquierda) si ${}_\Lambda\Lambda$ es un módulo Δ-bueno. Si además el anillo de endomorfismos de cada módulo estándar es simple, diremos que Λ es casihereditaria.

Dado que la definición de los módulos estándar depende del orden $\leq$ que fijamos en los módulos simples, tenemos que la noción de álgebra estándarmente estratificada depende fuertemente de dicho orden. Por ello, algunas veces se acostumbra denotar $(\Lambda, \leq)$ es estándarmente estratificada (a la izquierda). Por simplicidad, escribiremos Λ es estándarmente estratificada cuando el orden sea claro. En los ejemplos, el orden de los módulos simples será, a menos que indiquemos lo contrario, el orden natural dado por los vértices ($1 < 2 < \ldots < n$). En el ejemplo 3.29 ejemplificamos la importancia de este orden.

Ejemplo 3.10. Sea C el carcaj siguiente e $I = \langle \alpha_2\alpha_1, \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_1 - \beta_2\alpha_2, \alpha_2\beta_2 \rangle$:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha_1"] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta_1"] \arrow[r, bend left, "\alpha_2"] & 3 \arrow[l, bend left, "\beta_2"] \end{tikzcd}$$

Nos interesa describir los posibles cocientes de cada sumando proyectivo inescindible de $\Lambda = KC/I$. Por simplicidad, simplemente nos referiremos a $x + I$ como x para cualquier $x \in KC$. Vistos como espacio vectorial, podemos expresar $\Lambda e_1 = Ke_1 \oplus K\alpha_1 \oplus K\beta_1\alpha_1$, $\Lambda e_2 = Ke_2 \oplus K\beta_1 \oplus K\alpha_2 \oplus K\beta_2\alpha_2$ y $\Lambda e_3 = Ke_3 \oplus K\beta_2$. Los diagramas siguientes nos ayudarán a entender la estructura de cada módulo proyectivo.

$$
\begin{array}{ccc}
\Lambda e_1 & \Lambda e_2 & \Lambda e_3 \\
\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\alpha_1"'] \\ 2 \arrow[d, "\beta_1"'] \\ 1 \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\beta_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ 1 \arrow[dr, "\alpha_1"'] & & 3 \arrow[dl, "\beta_2"] \\ & 2 & \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\beta_2"] \\ 2 \end{tikzcd}
\end{array}
$$

Los diagramas nos muestran de forma gráfica y detallada cuáles son los submódulos y cocientes de cada proyectivo inescindible. Comencemos interpretando el primer diagrama. El primer 1 representa a $Ke_1 \cong S_1$, el 2 representa a $K\alpha_1 \cong S_2$ y el segundo 1 representa a $K\beta_1\alpha_1 \cong S_1$. Con esto, no es difícil convencerse que los únicos submódulos propios no nulos de Λe_1 son $K\beta_1\alpha_1$ y $K\beta_1\alpha_1 \oplus K\alpha_1$, de modo que sus cocientes no triviales son Λe_1, $K\overline{e_1} \oplus K\overline{\alpha_1}$ y $K\overline{e_1}$. De donde tenemos que $\Delta(1) \cong S_1$. Similarmente vemos que los submódulos propios no nulos de Λe_2 son exactamente $K\alpha_1\beta_1 = K\beta_2\alpha_2$, $K\alpha_1\beta_1 \oplus K\beta_1$, $K\beta_2\alpha_2 \oplus K\alpha_2$, $K\beta_2\alpha_2 \oplus K\alpha_2 \oplus K\beta_1$. Entonces, los cocientes no nulos de Λe_2 son Λe_2, $K\overline{e_2} \oplus K\overline{\alpha_2} \oplus K\overline{\beta_1}$, $K\overline{e_2} \oplus K\overline{\alpha_2}$, $K\overline{e_2} \oplus K\overline{\beta_1}$ y $K\overline{e_2}$. Esto significa que $\Delta(2) \cong K\overline{e_2} \oplus K\overline{\beta_1}$. Por lo tanto, $\Delta = \{\Delta(1) \cong S_1, \Delta(2) \cong K\overline{e_2} \oplus K\overline{\beta_1}, \Delta(3) \cong \Lambda e_3\}$. Al igual que los módulos proyectivos, podemos describir los módulos estándar como sigue:

$$
\begin{array}{ccc}
\Delta(1) & \Delta(2) & \Delta(3) \\
1
&
\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\beta_1"'] \\ 1 & \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\beta_2"] \\ 2 \end{tikzcd}
\end{array}
$$

Ya habiendo descrito al álgebra Λ y su conjunto de módulos estándar, veremos que es estándarmente estratificada y casihereditaria (con el orden $1 < 2 < 3$). Para asegurar lo primero, basta probar que Λe_1, Λe_2 y Λe_3 son módulos Δ-buenos. Obviamente Λe_3 lo es. También, tenemos la filtración $\Lambda e_1 > K\beta_1\alpha_1 \oplus K\alpha_1 > 0$, donde $K\alpha_1 \oplus K\beta_1\alpha_1 \cong \Delta(2)$ y $\Lambda e_1/(K\alpha_1 \oplus K\beta_1\alpha_1) = S(1) = \Delta(1)$, por lo que Λe_1 es un módulo Δ-bueno. Finalmente, $\Lambda e_2 > K\beta_2\alpha_2 \oplus K\alpha_2 > 0$ es una Δ-filtración ya que $\Lambda e_2/(K\beta_2\alpha_2 \oplus K\alpha_2) \cong \Delta(2)$ y $K\beta_2\alpha_2 \oplus K\alpha_2 \cong \Delta(3)$. Con esto concluimos que Λ es estándarmente estratificada.

Solo queda demostrar que Λ es casihereditaria. Como $\Delta(1) \cong S_1$, $\mathrm{End}_\Lambda(\Delta(1))$ es un anillo simple. Consideremos ahora $f \in \mathrm{End}_\Lambda(\Delta(2))$. Si f no es invertible pero tampoco es 0, entonces debe tener núcleo e imagen no triviales y contenidos propiamente en $\Delta(2)$, de donde $S_1 = \mathrm{Im}(f) \cong \Delta(2)/S_1 \cong S_2$, una clara contradicción.

Concluimos entonces que todo elemento de $\mathrm{End}_\Lambda(\Delta(2))$ es invertible, de donde es simple. Análogamente se ve que $\mathrm{End}_\Lambda(\Delta(3))$ es simple. Por lo tanto, tenemos que Λ es casihereditaria.

Ejemplo 3.11. Si C es un carcaj con al menos un lazo e I es un ideal admisible de KC, entonces $KC/I = \Lambda$ no es casihereditaria bajo ningún orden de los módulos simples. Para probar esto, supongamos que el vértice x tiene un lazo α y que $\Lambda e_x = P_j$. Como solo trabajaremos en Λ, como antes, simplificaremos la notación denotando por z a $z + I$ para cualquier $z \in KC$.

Podemos notar que $\Lambda\alpha > U_j$ porque $\alpha \notin \Lambda(e_{j+1} + \ldots + e_n)\Lambda e_j = U_j$; esto asegura que $0 \neq \overline{\alpha} \cdot - \in \mathrm{End}(\Delta(j))$ (donde $\overline{\alpha} \cdot -(x) = \overline{\alpha} x$). Veremos que $\mathrm{End}(\Delta(j))$ no puede ser un anillo simple, de donde tenemos Λ no puede ser casihereditaria. Como I es un ideal admisible, $\alpha^k = 0$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, en particular, $(\overline{\alpha} \cdot -)^k = 0$: esto asegura que $\mathrm{End}(\Delta(j))$ no es un anillo simple. Por lo tanto Λ no es casihereditaria.

Ejemplo 3.12. Este ejemplo también se encuentra desarrollado en [AHLU2]. Sea Λ es álgebra asociada al siguiente carcaj con las relaciones $\beta\gamma = \gamma^2 = \alpha\beta = 0$:

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[loop left, "\gamma"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 1 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Los módulos proyectivos y estándar son los siguientes:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & P_1 & & & P_2 & & \Delta(1) & & \Delta(2) & \\ & 1 \arrow[d] & & & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 1 & & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 2 & & 1 & & 2 & & 1 \\ 2 & & 1 & & & & & & & \end{tikzcd}$$

Claramente Λ es estándarmente estratificada, y por el ejemplo 3.11, no es casihereditaria.

A continuación, hacemos una sencilla observación que nos resultará muy útil.

Observación 3.13. Si Λ es estándarmente estratificada, entonces el álgebra $\overline{\Lambda} := \Lambda/\Lambda e_n \Lambda$ también lo es, donde ${}_{\overline{\Lambda}}\Delta = \{\Delta(1), \ldots, \Delta(n-1)\}$. Además, como $\Lambda e_n \Lambda$ es la traza de Λe_n sobre Λ, por el lema 3.8 y porque $\mathrm{Ext}^1(\Delta(n), \Delta(n)) = 0$, $\Lambda e_n \Lambda \cong \Delta(n)^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por la misma razón, si $M \in \mathcal{F}(\Delta)$, entonces tenemos la sucesión exacta $0 \longrightarrow \Lambda e_n M \longrightarrow M \longrightarrow M/\Lambda e_n M \longrightarrow 0$ con $\Lambda e_n M \cong \Delta(n)^s$ para algún $s \in \mathbb{N}$ y $M/\Lambda e_n M \in \mathcal{F}(\Delta(1), \ldots, \Delta(n-1))$. Con los mismos argumentos, fijando $\varepsilon_i = e_{i+1} +$

$\ldots + e_n$, también tenemos sucesiones exactas $0 \longrightarrow \Lambda\varepsilon_i M \longrightarrow M \longrightarrow M/\Lambda\varepsilon_i M \longrightarrow 0$ con $\Lambda\varepsilon_i M \in \mathcal{F}(\Delta(i+1),\ldots,\Delta(n))$ y $M/\Lambda\varepsilon_i M \in \mathcal{F}(\Delta(1),\ldots,\Delta(i))$. En particular, tenemos álgebras estándarmente estratificadas $\Lambda_i := \Lambda/\Lambda\varepsilon_i\Lambda$ con módulos estándar ${}_{\Lambda_i}\Delta = \{\Delta(1),\ldots,\Delta(i)\}$.

Teorema 3.14. *$\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, extensiones y sumandos directos.*

Demostración. Es trivial que $\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada bajo extensiones, y la prueba de que $\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos puede verse en [G] y [X], aunque agregamos una demostración más.

Para ver la cerradura bajo sumandos directos, procederemos por inducción sobre el número de módulos simples, n. Cuando $n = 1$, el resultado es inmediato porque $\Delta(1)$ es inescindible y $\mathrm{Ext}^1(\Delta(1),\Delta(1)) = 0$. Supongamos entonces que el resultado vale para $n-1$. Sean $M \in \mathcal{F}(\Delta)$ tal que $M = A \oplus B$ y $\overline{\Lambda} = \Lambda/\Lambda e_n\Lambda$. Por la observación anterior, $M/\Lambda e_n M \in \mathcal{F}({}_{\overline{\Lambda}}\Delta)$, pero $M/\Lambda e_n M = (A/\Lambda e_n A) \oplus (B/\Lambda e_n B)$, así que por hipótesis de inducción, $(A/\Lambda e_n A), (B/\Lambda e_n B) \in \mathcal{F}({}_{\overline{\Lambda}}\Delta)$. Además, como $\Delta(n)$ es inescindible y para alguna $k \in \mathbb{N}$ $\Delta(n)^k \cong \Lambda e_n M = \Lambda e_n(A \oplus B) = \Lambda e_n A \oplus \Lambda e_n B$, concluimos también que $\Lambda e_n A, \Lambda e_n B \in \mathcal{F}(\Delta(n))$. Por lo tanto, $A, B \in \mathcal{F}(\Delta)$. Con esto concluye la inducción.

Finalmente, para ver que $\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, sea $p\colon M \to N$ un epimorfismo con $M, N \in \mathcal{F}(\Delta)$. Procederemos por inducción sobre el menor entero i tal que $N \in \mathcal{F}(\Delta(1),\ldots,\Delta(i))$. Si $i = 1$, como $\mathrm{Hom}(\Delta(j),\Delta(1)) = 0$ para $j > 1$, existe un epimorfismo $g\colon M/\Lambda\varepsilon_1 M \to N$ tal que $p = g\pi$, donde π es la proyección canónica. Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo con columnas y renglones exactos:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & & & \\
 & C \arrow[u] \arrow[r] & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[u] \arrow[r] & M \arrow[u] \arrow[r, "p"] & N \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda\varepsilon_1 M \arrow[u] \arrow[r] & M \arrow[u, equal] \arrow[r] & \frac{M}{\Lambda\varepsilon_1 M} \arrow[u, "g"] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & K' \arrow[u] & \\
 & & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

en donde $K' \cong C$ por el lema de la serpiente. Además, $N \cong \Delta(1)^t$ para algún $t \in \mathbb{N}$, así que por ser $\Delta(1)$ proyectivo en Λ_1, g se escinde. Entonces, como $\mathcal{F}({}_{\Lambda_1}\Delta)$ es cerrada bajo sumandos directos, $K' \in \mathcal{F}(\Delta(1))$. También sabemos que $\Lambda\varepsilon_1 M \in \mathcal{F}(\Delta)$ por lo que $K \in \mathcal{F}(\Delta)$. Supongamos ahora que el resultado vale para $j < i$, y que i es el mayor entero tal que $N \in \mathcal{F}(\Delta(1), \dots, \Delta(i))$; entonces podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo con columnas y renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda\varepsilon_{i-1}N \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "\pi p"] \arrow[d] & \frac{N}{\Lambda\varepsilon_{i-1}N} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Ahora, por el lema de la serpiente, $\Lambda\varepsilon_{i-1}N \cong C$ y por hipótesis de inducción, $K' \in \mathcal{F}(\Delta)$. Así, como $\Lambda\varepsilon_{i-1}N \cong \Delta(i)^t$ para algún $t \in \mathbb{N}$ (porque $\operatorname{Ext}^1(\Delta(i), \Delta(i)) = 0$), hemos reducido el problema al caso en que $N \cong \Delta(i)^t$ para algún $t \in \mathbb{N}$: este caso es análogo al de la base de la inducción. Con esto concluimos que $\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos. □

Recordemos que si $\mathcal{C}$ es una subcategoría plena de Λ-mod, decimos que $f\colon C \longrightarrow X$ es una $\mathcal{C}$ aproximación derecha de X si para cualquier morfismo $g\colon C' \longrightarrow X$ existe $h\colon C' \longrightarrow C$ tal que $g = fh$; decimos que $\mathcal{C}$ es contravariantemente finita si para cualquier $X \in \Lambda$-mod existe una $\mathcal{C}$ aproximación derecha. Dualmente, tenemos la noción de $\mathcal{C}$ aproximación izquierda y de categoría covariantemente finita. Si $\mathcal{C}$ resulta ser covariante y contravariantemente finita, decimos que es funtorialmente finita.

Teorema 3.15. *La categoría $\mathcal{F}(\Delta)$ es funtorialmente finita.*

Demostración. La demostración de este hecho se puede consultar en [R] (Teorema 2). □

Lema 3.16. *Sea $\overline{\Lambda} = \Lambda/\Lambda e\Lambda$, donde e es idempotente y ${}_\Lambda\Lambda e\Lambda$ es proyectivo. Si M es un $\overline{\Lambda}$-módulo con $\operatorname{dp}_{\overline{\Lambda}}(M)$ finita, entonces $\operatorname{dp}_\Lambda(M) \leq \operatorname{dp}_{\overline{\Lambda}}(M) + 1$.*

Demostración. Sea $M \in \overline{\Lambda}$-mod con $\mathrm{dp}_{\overline{\Lambda}}(M) = s < \infty$, procederemos por inducción sobre s. De la sucesión exacta $0 \longrightarrow \Lambda e \Lambda \hookrightarrow \Lambda \longrightarrow \overline{\Lambda} \longrightarrow 0$, tenemos que $\mathrm{dp}_{\Lambda}(\overline{\Lambda}) \leq \max\{\mathrm{dp}_{\Lambda}(\Lambda), \mathrm{dp}_{\Lambda}(\Lambda e \Lambda)+1\} = 1$. De donde, para el caso en que $s = 0$, es decir, cuando ${}_{\overline{\Lambda}}M$ es proyectivo, tenemos que existe N tal que $M \oplus N = \overline{\Lambda}^k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\mathrm{dp}_{\Lambda}(M) \leq \mathrm{dp}_{\Lambda}(\overline{\Lambda}) \leq 1$.

Supongamos entonces que el resultado vale para cualquier $0 \leq m < s$. Consideremos entonces una resolución proyectiva de M:

$$0 \longrightarrow N_s \longrightarrow \ldots \longrightarrow N_0 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0.$$

Esto nos da una resolución proyectiva para $\mathrm{Nuc}(f)$, a saber,

$$0 \longrightarrow N_s \longrightarrow \ldots \longrightarrow N_1 \longrightarrow \mathrm{Nuc}(f) \longrightarrow 0,$$

de donde $\mathrm{dp}_{\Lambda}(\mathrm{Nuc}(f)) \leq \mathrm{dp}_{\overline{\Lambda}}(\mathrm{Nuc}(f)) + 1 \leq s$. Por lo tanto, tenemos que $\mathrm{dp}_{\Lambda}(M) \leq \max\{\mathrm{dp}_{\Lambda}(N_0), \mathrm{dp}_{\Lambda}(\mathrm{Nuc}(f)) + 1\} \leq s + 1$, que es lo que queríamos probar. □

Proposición 3.17. *Si* Λ *es estándarmente estratificada, entonces* $\mathrm{dp}(X) \leq n - 1$ *para cualquier* $X \in \mathcal{F}(\Delta)$, *donde* n *es el número de módulos simples no isomorfos en* Λ-mod.

Demostración. Por la definición de $\mathcal{F}(\Delta)$, es claro que basta ver que $\mathrm{dp}(\Delta(j)) \leq n-1$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Además, es claro que $\mathrm{dp}\,\Delta(n) = 0$ porque $\Delta(n) = P_n$. Sea $\overline{\Lambda} = \Lambda / \Lambda e_n \Lambda$, tengamos en cuenta lo que notamos en la observación 3.13. De esto, como $\Lambda e_n \Lambda \cong \Delta(n)^k = P_n^k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, $\Lambda e_n \Lambda$ es proyectivo. Ahora, obtenemos de forma inductiva y gracias al lema anterior que $\mathrm{dp}\,\Delta(i) \leq n - i$. □

Recordemos que la dimensión finitista de Λ es $\sup\{\mathrm{dp}(M) \mid M \in \Lambda\text{-mod y } \mathrm{dp}(M) < \infty\}$. Con esto en mente, podemos enunciar el siguiente teorema, cuya prueba puede verse en [AHLU]. Lo enunciamos aquí, ya que lo necesitaremos más adelante.

Teorema 3.18. *Si* Λ *es estándarmente estratificada, entonces la dimensión finitista de* Λ *es a lo más* $2n - 2$.

Demostración. Ver [AHLU], teorema 3.1. □

3.2. El módulo inclinante característico

La teoría de módulos inclinantes ha sido sumamente fructífera: en esta sección la relacionamos directamente con el estudio de las álgebras estándarmente estratificadas. Nótese que la definición que damos de módulo inclinante no es la usual que se presenta en [ASS], sino una generalización introducida por Miyashita en [M].

Dado un módulo M, denotamos por $\mathrm{add}(M)$ a la subcategoría plena de Λ-mod que consta de todos los módulos que son suma directa de sumandos directos de M.

Definición 3.19. Diremos que un Λ-módulo finitamente generado T es inclinante si

1) $\mathrm{Ext}^i(T,T)=0$ para toda $i>0$,

2) $\mathrm{dp}(T)$ es finita,

3) existe una sucesión exacta $0\longrightarrow\Lambda\longrightarrow T_0\longrightarrow\ldots\longrightarrow T_s\longrightarrow 0$ con cada T_i en $\mathrm{add}(T)$.

Dualmente, decimos que T es coinclinante si

1) $\mathrm{Ext}^i(T,T)=0$ para toda $i>0$,

2) $\mathrm{di}(T)$ es finita,

3) existe una sucesión exacta $0\longrightarrow T_s\longrightarrow\ldots\longrightarrow T_1\longrightarrow T_0\longrightarrow D\Lambda^{op}\longrightarrow 0$ con cada T_i en $\mathrm{add}(T)$ (D es la dualidad descrita en el teorema 1.76).

Un hecho muy conocido y muy importante, que se encuentra demostrado en [M], es el siguiente; haremos referencia a él un par de veces.

Teorema 3.20. *Si T es un módulo inclinante, entonces* $\mathrm{add}(T)$ *tiene exactamente n módulos inescindibles no isomorfos, donde n es el número de módulos simples en* Λ-mod.

Demostración. Ver [M], teorema 1.19. □

También necesitamos del siguiente teorema que se encuentra probado en [AR].

Lema 3.21. *Sean $\mathcal{C}$ una subcategoría plena de* Λ-mod, $\mathcal{D}=\{{}_\Lambda Y\mid \mathrm{Ext}^1(\mathcal{C},Y)=0\}$, *y* $\omega=\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$. *Si $\mathcal{C}$ es contravariantemente finita, contiene a todos los módulos proyectivos, y es cerrada bajo extensiones y núcleos de epimorfismos, entonces*

1) *ω es auto-ortogonal, es decir,* $\mathrm{Ext}^i(X,Y)=0$ *para cualesquiera $X,Y\in\omega$ e $i>0$,*

2) *para cualquier $X\in\mathcal{C}$ existe una sucesión exacta* $0\longrightarrow X\longrightarrow W\longrightarrow X'\longrightarrow 0$ *con $W\in\omega$ y $X'\in\mathcal{C}$,*

3) *para cualquier $Y\in\mathcal{D}$ existe una sucesión exacta* $0\longrightarrow Y'\longrightarrow W\longrightarrow Y\longrightarrow 0$ *con $W\in\omega$ y $Y'\in\mathcal{D}$.*

Demostración. Probaremos únicamente el inciso **1)**, dado que su demostración será importante en lo sucesivo. Para los incisos **2)** y **3)**, solo hacemos la referencia al artículo original (ver [AR], proposición 3.4).

Siendo más generales, veremos por inducción que para cualesquiera $X\in\mathcal{C}$ y $Y\in\mathcal{D}$ se tiene que $\mathrm{Ext}^i(X,Y)=0$ para cualquier $i>0$, de donde se sigue inmediatamente lo que queremos. Por inducción sobre i, el caso $i=1$ es obviamente cierto por la definición de $\mathcal{D}$. Supongamos entonces que esto es cierto para alguna $i\geq 1$, y consideremos la sucesión exacta $0\longrightarrow K\hookrightarrow P\longrightarrow X\longrightarrow 0$ en donde P es la cubierta proyectiva de X. Como $\mathcal{C}$ contiene a todos los proyectivos y es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, $P\in\mathcal{C}$ y por lo tanto también $K\in\mathcal{C}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(-,Y)$, obtenemos $0=\mathrm{Ext}^i(P,Y)\longrightarrow\mathrm{Ext}^i(K,Y)\longrightarrow\mathrm{Ext}^{i+1}(X,Y)\longrightarrow\mathrm{Ext}^{i+1}(P,Y)=0$, y como por hipótesis de inducción $\mathrm{Ext}^i(K,Y)=0$, entonces también $Ext^{i+1}(X,Y)=0$.

□

Nótese que si Λ es estándarmente estratificada, entonces $\mathcal{F}(\Delta)$ satisface las hipótesis del teorema anterior, ver los teoremas 3.14 y 3.15. Denotaremos $\mathcal{Y}(\Delta):=\{{}_\Lambda Y\mid\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}(\Delta),Y)=0\}$ y $\omega(\Delta):=\mathcal{F}(\Delta)\cap\mathcal{Y}(\Delta)$.

Observación 3.22. Algo que debemos notar, es que $\omega(\Delta)$ es cerrada bajo sumandos directos. Ya sabemos que $\mathcal{F}(\Delta)$ es cerrada bajo sumandos directos, así que solo basta ver que $\mathcal{Y}(\Delta)$ también. Esto último se sigue inmediatamente de la definición de $\mathcal{Y}(\Delta)$ y del hecho que el funtor Ext se distribuye sobre sumas directas finitas.

A continuación, enunciamos uno de los resultados centrales de este trabajo.

Teorema 3.23. *Si Λ es estándarmente estratificada, entonces existe un módulo inclinante T tal que* $\operatorname{add}(T) = \omega(\Delta)$*, y este es único hasta multiplicidad de sumandos directos inescindibles.*

Demostración. Como $X_{-1} := {}_\Lambda\Lambda \in \mathcal{F}(\Delta)$, por el lema anterior podemos construir inductivamente sucesiones exactas $\eta_i \colon 0 \longrightarrow X_{i-1} \longrightarrow W_i \longrightarrow X_i \longrightarrow 0$ con cada $W_i \in \omega(\Delta)$ y $X_i \in \mathcal{F}(\Delta)$. Para cada η_i, aplicando el funtor $\operatorname{Hom}(X_{n-1}, -)$ obtenemos, $0 = \operatorname{Ext}^j(X_{n-1}, W_i) \longrightarrow \operatorname{Ext}^j(X_{n-1}, X_i) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{j+1}(X_{n-1}, X_{i-1}) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{j+1}(X_{n-1}, W_i) = 0$ para cualquier j, ya que $W_i \in \omega(\Delta) = \mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{Y}(\Delta)$ y $X_{n-1} \in \mathcal{F}(\Delta)$. Por lo tanto, como $\operatorname{dp} X_{n-1} \leq n-1$ por el teorema 3.17, tenemos que

$$0 = \operatorname{Ext}^n(X_{n-1}, X_{-1}) \cong \operatorname{Ext}^{n-1}(X_{n-1}, X_0) \cong \ldots \cong \operatorname{Ext}^1(X_{n-1}, X_{n-2}).$$

Por lo tanto, se escinde la sucesión exacta η_{n-1}, de donde X_{n-2} es sumando directo de W_{n-1}. Por la observación anterior, tenemos que $X_{n-2} \in \omega(\Delta)$.

De las sucesiones exactas anteriores, obtenemos

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow T_{n-1} \longrightarrow 0$$

con cada $T_i \in \omega(\Delta)$, donde $T_i = W_i$ si $i < n-2$ y $T_{n-1} = X_{n-2}$. Definimos $T = \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_i$. Por construcción, $T \in \omega(\Delta)$, así que $\operatorname{Ext}^i(T, T) = 0$ para cualquier $i > 0$ por el lema 3.21 y $\operatorname{dp}(T)$ es finita por el teorema 3.17, así que T es inclinante y claramente $\operatorname{add}(T) \subseteq \omega(\Delta)$.

Sea $M \in \omega(\Delta)$, veremos que $M \in \operatorname{add}(T)$. Obviamente $T \oplus M$ es inclinante también, así que $\operatorname{add}(T)$ y $\operatorname{add}(T \oplus M)$ tienen exactamente el mismo número de submódulos inescindibles no isomorfos (ver el teorema 3.20), esto significa que coinciden. Así, concluimos que $\operatorname{add}(T) = \omega(\Delta)$.

Nótese que la unicidad de T es inmediata de que $\operatorname{add}(T) = \omega(\Delta)$. □

Gracias al lema anterior, cuando Λ es estándarmente estratificada, podemos encontrar un único módulo inclinante básico, el cual se conoce como el módulo inclinante característico asociado a Λ; a partir de ahora, T siempre denotará este módulo. A continuación, damos ejemplos del módulo inclinante característico asociado a ciertas álgebras estándarmente estratificadas.

Ejemplo 3.24. Sea Λ como en el ejemplo 3.10. Veremos que $T = S_1 \oplus \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_2 = \Delta(1) \oplus \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_2$ es inclinante y tal que $\operatorname{add}(T) = \omega(\Delta)$. Consideremos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_2 \oplus \Lambda e_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\Lambda e_1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\Lambda e_2} & 0 \\ 0 & 0 & \iota \end{pmatrix}} \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_2 \oplus \Lambda e_2 \longrightarrow \Delta(2) \longrightarrow 0$$

(donde ι es la inmersión $\Delta(3) \longrightarrow \Lambda e_2$) y

$$0 \longrightarrow \Delta(2) \longrightarrow \Lambda e_1 \longrightarrow \Delta(1) \longrightarrow 0.$$

De estas sucesiones obtenemos, fijando $T_0 = \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_2 \oplus \Lambda e_2$, $T_1 = \Lambda e_1$ y $T_2 = \Delta(1)$,

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow 0$$

con cada $T_i \in \operatorname{add}(T)$. Veamos que $T \in \omega(\Delta)$, de donde se sigue inmediatamente que T es inclinante (porque $\operatorname{dp}(\mathcal{F}(\Delta)) \leq 3-1$) y $\operatorname{add}(T) = \omega(\Delta)$ (como se ve en la prueba del teorema anterior). Claramente $T \in \mathcal{F}(\Delta)$, y para ver que $T \in \mathcal{Y}(\Delta)$, basta probar que $\operatorname{Ext}^1(\Delta, T) = 0$; en todos los casos, el cálculo es fácil, pues Λe_1 y Λe_2 son inyectivos. De hecho, los módulos inyectivos inescindibles son:

$$E_1 = P_1 \qquad\qquad E_2 = P_2 \qquad\qquad E_3 = P_3$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] \\
2 \arrow[d] \\
1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
1 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] \\
 & 2 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
3 \arrow[d] \\
2
\end{tikzcd}$$

Vale la pena notar que para construir T, estamos siguiendo los mismos pasos que en la demostración del teorema 3.23.

Ejemplo 3.25. Sea Λ el álgebra de caminos dada por el siguiente carcaj con las relaciones $\beta^2 = \alpha\beta = 0$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"] & 2
\end{tikzcd}$$

Entonces, los módulos proyectivos inescindibles son

$$P_1 \qquad\qquad P_2$$

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
1 & & 2
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
2$$

los módulos inyectivos inescindibles son

$$
\begin{array}{ccc}
E_1 & \qquad & E_2 \\
\begin{tikzcd} 1 \arrow[d] \\ 1 \end{tikzcd} & & \begin{tikzcd} 1 \arrow[d] \\ 2 \end{tikzcd}
\end{array}
$$

y los módulos estándar son

$$
\begin{array}{ccc}
\Delta(1) & \qquad & \Delta(2) \\
\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \\ 1 & \end{tikzcd} & & 2
\end{array}
$$

Es claro que Λ es estándarmente estratificada. Veremos que el módulo inclinante característico asociado a Λ es $T := \Delta(1) \oplus P_1$. Notemos que tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{P_1} & 0 \\ 0 & \iota \end{pmatrix}} P_1 \oplus P_1 \longrightarrow \Delta(1) \longrightarrow 0$$

en donde ι es la inmersión $P_2 = \Delta(2) \longrightarrow P_1$. Claramente $T \in \mathcal{F}(\Delta)$, así que análogamente al ejemplo anterior, basta ver que $\mathrm{Ext}^1(\Delta, T) = 0$. Comencemos observando que al aplicar $\mathrm{Hom}(\Delta(1), -)$ a la sucesión exacta $0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow E_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$, obtenemos un isomorfismo $\mathrm{Ext}^1(\Delta(1), S_1) \cong \mathrm{Ext}^2(\Delta(1), S_1)$ en donde $\mathrm{Ext}^2(\Delta(1), S_1) = 0$, pues sabemos por el teorema 3.17 que $\mathrm{dp}\,\Delta(1) \leq 2-1 = 1$. Entonces, como E_2 es inyectivo y hay una sucesión exacta $0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$, tenemos que $\mathrm{Ext}^1(\Delta(1), P_1) = 0$. Así, como P_1 y $\Delta(2)$ son proyectivos, concluimos que $\mathrm{Ext}^1(\Delta(2), T) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1(\Delta(1), T) = \mathrm{Ext}^1(\Delta(1), \Delta(1)) \oplus \mathrm{Ext}^1(\Delta(1), P_1) = 0$. Por lo tanto, T es, en efecto, el módulo inclinante característico asociado a Λ. Notemos también, que para encontrar T, usamos el algoritmo presentado en el teorema 3.23.

3.3. Álgebras de Gorenstein

En esta sección aplicaremos lo que hemos demostrado al estudio de las álgebras de Gorenstein. Resulta muy interesante la relación que hay entre estas álgebras y las álgebras estándarmente estratificadas. Una de las motivaciones de este estudio es el siguiente corolario.

Corolario 3.26. *Si Λ es estándarmente estratificada, entonces son equivalentes*

1) $D\Lambda^{op} \in \mathcal{F}(\Delta)$ *y*

2) $\omega(\Delta) = \mathrm{add}(D\Lambda^{op})$.

Demostración. claramente **1)** se sigue de **2)**. Supongamos que $D\Lambda^{op} \in \mathcal{F}(\Delta)$. Entonces, como $D\Lambda^{op}$ es inyectivo, $D\Lambda^{op} \in \mathcal{Y}(\Delta)$ y por lo tanto se tiene que $\mathrm{add}(D\Lambda^{op}) \subseteq \omega(\Delta)$. Por otra parte, ya sabemos, por los teoremas 3.20 y 3.23, que $\mathrm{add}(T) = \omega(\Delta)$ tiene exactamente n módulos inescindibles no isomorfos, pero $\mathrm{add}(D\Lambda^{op})$ tiene también exactamente n módulos inescindibles no isomorfos (a saber, $E_1, \ldots, E_n$), por lo tanto $\omega(\Delta) \subseteq \mathrm{add}(D\Lambda^{op})$. □

Ejemplo 3.27. El álgebra expuesta en el ejemplo 3.10 satisface las condiciones presentadas en el corolario anterior, y es fácil de ver porque ya calculamos sus módulos inyectivos inescindibles en el ejemplo 3.24.

Ejemplo 3.28. Sea Λ el álgebra de caminos dada por el siguiente carcaj con la relación $\beta^2 = 0$ (note que aunque mostramos el mismo carcaj que en el ejemplo 3.25, el álgebra no es la misma):

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"] & 2 \end{tikzcd}$$

Entonces, los módulos proyectivos inescindibles son

$$P_1 \qquad\qquad P_2$$

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[d] & & 2 \\ 2 & & \end{tikzcd} \qquad\qquad 2$$

los módulos inyectivos inescindibles son

$$E_1 \qquad\qquad E_2$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d] \\ 1 \arrow[d] \\ 2 \end{tikzcd}$$

y los módulos estándar son

$$
\begin{array}{ccc}
\Delta(1) & \qquad & \Delta(2) \\
\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \\ 1 & \end{tikzcd} & & 2
\end{array}
$$

Es entonces claro que Λ es estándarmente estratificada y satisface las hipótesis del corolario anterior, es decir, $D\Lambda^{op} \in \mathcal{F}(\Delta)$.

Ejemplo 3.29. Ahora describimos un álgebra estándarmente estratificada que no satisface las condiciones del corolario anterior. Consideremos el álgebra Λ dada por el siguiente carcaj con la relación $\alpha\delta = 0$:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, bend right, "\gamma"'] & 2 \arrow[l, bend left, "\delta"] \arrow[d, "\beta"] \\
& 3
\end{tikzcd}
$$

Los módulos proyectivos inescindibles son

$$
\begin{array}{ccc}
P_1 & P_2 & P_3 \\
\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ 3 & & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & 1 \arrow[d] & & 3 \\ & 3 & & \end{tikzcd} &
\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[d] & & 3 \\ 3 & & \end{tikzcd} &
3
\end{array}
$$

los módulos inyectivos inescindibles son

$$E_1 \qquad\qquad E_2 \qquad\qquad E_3$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d] \\ 2 \arrow[d] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d] \\ 2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d] & & \\ 2 \arrow[d] & & 1 \arrow[d] \\ 1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \\ & 3 & \end{tikzcd}$$

y los módulos estándar son

$$\Delta(1) \qquad\qquad \Delta(2) \qquad\qquad \Delta(3)$$

$$1 \qquad \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl] \\ 1 & \end{tikzcd} \qquad 3$$

Es claro que Λ es estándarmente estratificada, pero $D\Lambda^{op} \notin \mathcal{F}(\Delta)$. Además, es sencillo verificar que Λ solo es estándarmente estratificada con el orden natural, pues para cualquier otro de los 5 órdenes posibles, no lo es.

Definición 3.30. Diremos que Λ es un álgebra de Gorenstein si $\mathrm{di}(\Lambda_\Lambda)$ y $\mathrm{di}({}_\Lambda\Lambda)$ son finitas.

Corolario 3.31. *Sea Λ estándarmente estratificada. Si $\omega(\Delta) = \mathrm{add}(D\Lambda^{op})$, entonces Λ es de Gorenstein.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{add}(D\Lambda^{op}) = \omega(\Delta)$. Como $D\Lambda^{op} \in \mathcal{F}(\Delta)$, tenemos que $\mathrm{dp}(D\Lambda^{op}) \leq n-1$ (teorema 3.17), es decir, $\mathrm{di}(\Lambda_\Lambda) \leq n-1 < \infty$. Por otra parte, como $\mathrm{add}(D\Lambda^{op}) = \mathrm{add}(T)$, existe una sucesión exacta $0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow T_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow T_s \longrightarrow 0$ con cada $T_i \in \mathrm{add}(D\Lambda^{op})$, que es exactamente la clase de todos los inyectivos en Λ-mod. Por lo tanto, la sucesión exacta anterior es un resolución inyectiva, de donde $\mathrm{di}({}_\Lambda\Lambda) \leq s < \infty$. Concluimos entonces que Λ es un álgebra de Gorenstein. □

Lema 3.32. *Si $\mathrm{di}(\Lambda_\Lambda) < \infty$ y la dimensión finitista de Λ es finita, entonces Λ es de Gorenstein.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{di}(\Lambda_\Lambda)$ y que la dimensión finitista de Λ es finita, y sea $0 \longrightarrow_\Lambda \Lambda \xrightarrow{f_0}_\Lambda I_0 \xrightarrow{f_1}_\Lambda I_1 \longrightarrow \dots$ una resolución inyectiva mínima. Como $\mathrm{di}(\Lambda_\Lambda) < \infty$, $\mathrm{dp}(D\Lambda^{op}) < \infty$, así que $\mathrm{dp}(\mathrm{Im}(f_i)) < \infty$ para cada i (por la sucesiones exactas $0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{i-1} \longrightarrow \mathrm{Im}(f_i) \longrightarrow 0$). Más aun, $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{Im}(f_i), \Lambda) \neq 0$ si $\mathrm{Im}(f_i) \neq 0$, pues si $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{Im}(f_i), \Lambda) = 0$, por el lema del corrimiento (1.88), $0 = \mathrm{Ext}^i(\mathrm{Im}(f_i), \Lambda) \cong \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Im}(f_i), \mathrm{Im}(f_{i-1}))$, cosa que asegura que $0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f_{i-1}) \longrightarrow I_{i-1} \longrightarrow \mathrm{Im}(f_i) \longrightarrow 0$ se escinde, de donde $\mathrm{Im}(f_{i-1})$ es inyectivo y $\mathrm{Im}(f_i) = 0$. Entonces, es claro que $\mathrm{di}({}_\Lambda\Lambda) < \infty$, es decir, Λ es de Gorenstein. □

Lema 3.33. *Si Λ es un álgebra de Gorenstein, entonces la clase de los módulos de dimensión proyectiva finita coincide con la clase de los módulos de dimensión inyectiva finita.*

Demostración. Si $\mathrm{di}({}_\Lambda\Lambda) < \infty$, $\mathrm{di}(\mathrm{add}(\Lambda)) < \infty$. Entonces, si M es un módulo con $\mathrm{dp}(M) = k < \infty$, se tiene una resolución proyectiva $0 \longrightarrow A_k \longrightarrow \dots \longrightarrow A_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ con cada $A_i \in \mathrm{add}({}_\Lambda\Lambda)$. Así, para cada i, $\mathrm{di}(A_i) < \infty$, por lo que, $\mathrm{di}(M) < \infty$ en vista del corolario 1.92.

Análogamente, vemos que si $\mathrm{dp}(D\Lambda^{op}) = \mathrm{di}(\Lambda^{op}) < \infty$, entonces todo módulo de dimensión inyectiva finita tiene dimensión proyectiva finita, de donde concluimos el resultado deseado. □

Teorema 3.34. *Si Λ es estándarmente estratificada, entonces son equivalentes:*

1) *T es un módulo coinclinante,*

2) $\mathrm{di}(\Lambda_\Lambda) < \infty$,

3) *Λ es de Gorenstein.*

Demostración. Comencemos suponiendo que T es un módulo coinclinante. Entonces, existe una sucesión exacta $0 \longrightarrow T_s \longrightarrow \dots \longrightarrow T_0 \longrightarrow D\Lambda^{op} \longrightarrow 0$ con cada $T_i \in \mathrm{add}(T) \subseteq \mathcal{F}(\Delta)$. Esto significa que $\mathrm{dp}(D\Lambda^{op}) < \infty$ (por el corolario 1.92) porque para cada $0 \le i \le s$, $\mathrm{dp}(T_i) \le n-1 < \infty$ (por el teorema 3.17). Por lo tanto, $\mathrm{di}(\Lambda_\Lambda) < \infty$.

Supongamos ahora que $\mathrm{di}(\Lambda_\Lambda) = m < \infty$, es decir, $\mathrm{dp}(D\Lambda^{op}) = m < \infty$. Por el lema 3.21, dado $Y_{-1} = D\Lambda^{op}$, podemos construir inductivamente sucesiones exactas $\eta_i : 0 \longrightarrow Y_i \longrightarrow W_i \longrightarrow Y_{i-1} \longrightarrow 0$ con cada $Y_i \in \mathcal{Y}(\Delta)$ y $W_i \in \omega(\Delta)$. Para cualquier $j \ge 1$, aplicando $\mathrm{Hom}(-, Y_m)$ a η_i, obtenemos la sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^j(W_i, Y_m) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j(Y_i, Y_m) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{j+1}(Y_{i-1}, Y_m) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{j+1}(W_i, Y_m) = 0.$$

Entonces, como $\mathrm{dp}(D\Lambda^{op}) = m$, tenemos que $0 = \mathrm{Ext}^{m+1}(Y_{-1}, Y_m) = \mathrm{Ext}^m(Y_0, Y_m) = \dots = \mathrm{Ext}^1(Y_{m-1}, Y_m)$, de modo que η_m se escinde. Esto significa que Y_{m-1} es sumando directo de W_{m-1}, por lo que $Y_{m-1} \in \omega(\Delta)$. Entonces, definiendo $Z_i = W_i$ para $0 \le i \le m-1$ y $Z_m = Y_{m-1}$ y a partir de las sucesiones exactas $\eta_0, \dots, \eta_{m-1}$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Z_m \longrightarrow \dots \longrightarrow Z_0 \longrightarrow D\Lambda^{op} \longrightarrow 0$$

con cada $Z_i \in \omega(\Delta) = \mathrm{add}(T)$. Veremos que $T' := \bigoplus_{i=0}^m Z_j$ es coinclinante, para lo cual solo basta ver que $\mathrm{di}(T') < \infty$. Por el teorema 3.18 y el lema 3.32, tenemos que $\mathrm{di}({}_\Lambda\Lambda) < \infty$ así que Λ es de Gorenstein. Más aun, por el lema anterior, $\mathrm{di}(T') < \infty$

pues $\mathrm{dp}(T') \leq n-1 < \infty$; por la misma razón, $\mathrm{di}(T) < \infty$. Con esto, hemos mostrado que T' es un módulo coinclinante y de donde se sigue que también T es un módulo coinclinante, ya que $\mathrm{add}(T') \subseteq \mathrm{add}(T)$.

Con esto termina la demostración, pues por definición, **3)** implica **2)**.

□

El siguiente ejemplo nos muestra un álgebra que si satisface las condiciones del teorema anterior, pero no cumple las condiciones presentadas en el corolario 3.26. Para ver esto, tengamos en cuenta el corolario 1.93, es decir, que el supremo de las dimensiones proyectivas de los Λ-módulos finitamente generados coincide con el máximo de las dimensiones proyectivas de los Λ-módulos simples.

Ejemplo 3.35. Sea Λ el álgebra descrita en el ejemplo 3.29. Ya verificamos que $D\Lambda^{op} \notin \mathcal{F}(\Delta)$, pero veremos que la dimensión inyectiva de Λ_Λ es finita. En efecto, podemos construir resoluciones proyectivas

$$\begin{gathered}
0 \longrightarrow P_3 \oplus P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0, \\
0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \oplus P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0, \\
0 \longrightarrow P_3 \longrightarrow S_3 \longrightarrow 0,
\end{gathered}$$

de donde $\mathrm{dp}(S_1) = 1$, $\mathrm{dp}(S_2) = 2)$ y $\mathrm{dp}\, S(3) = 0$. Por lo tanto, la dimensión proyectiva de $D\Lambda^{op}$ es a lo más 2, así que la dimensión inyectiva de Λ_Λ es finita.

Bibliografía

[A] I. Assem. *Algèbres et modules*. Presses de l'Université d'Ottawa, 1997, 330 páginas.

[ADL] I. Ágoston, V. Dlab & E. Lukács. *Stratified algebras*. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 20 (1998), pp. 22–28.

[AF] F. W. Anderson & K. R. Fuller. *Rings and categories of modules*, segunda edición. Springer-Verlag, 1992, 376 páginas.

[AHLU] I. Ágoston, D. Happel, E. Lukács & L. Unger. *Finitistic dimension of standardly stratified algebras*. Comm. Algebra 28 (2000), pp 2745-2752.

[AHLU2] I. Ágoston, D. Happel, E. Lukács & L. Unger. *Standardly stratified algebras and tilting*. J. Algebra 226 (2000), pp 144-160.

[AR] M. Auslander & I. Reiten, *Applications of contravariantly finite subcategories*. Adv. Math. 86 (1991), pp 111-152.

[ASS] I. Assem, D. Simson & A. Skowronsky. *Elements of the representation theory of associative algebras*. Cambridge University Press, 2006, 472 páginas.

[CPS1] E. Cline, B. J. Parshall & L. L. Scott. *Finite dimensional algebras and highest weight categories*. J. Reine. Angew. Math. 391 (1988), pp 85–99.

[CPS2] E. Cline, B. J. Parshall & L. L. Scott. *Stratifying endomorphism algebras*. Memoirs of the AMS 591 (1996).

[DR] V. Dlab & C. M. Ringel. *Quasi-hereditary algebras*. Illinois J. Math 35 (1989), pp 280-291.

[G] E. García. *La categoría de los módulos buenos, de un álgebra estándarmente estratificada, es resolvente* (Tesis de licenciatura). UNAM, 2016, 52 páginas.

[M] Y. Miyashita. *Tilting modules of finite projective dimension*. Mathematische Zeitschrift 193 (1986), pp 113-146.

[Ma] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*. Springer New York, 1998, 317 páginas.

[R] C. M. Ringel. *The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences*. Math. Z. 208 (1991), pp 209-223.

[V] J. E. Vega. *El conjunto de los módulos estándar es un sistema estratificante* (Tesis de licenciatu ra). UNAM, 2014, 89 páginas.

[X] C. Xi. *Standardly stratified algebras and cellular algebras*. Math. Proc. Camb. Phil. 133 (2002), pp 37-53.