



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ASPECTOS ALGEBRAICO-GEOMÉTRICOS DE SUPERFICIES RACIONALES Y  
UN CRITERIO PARA LAS SUPERFICIES DE HARBOURNE-HIRSCHOWITZ

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:  
JUAN BOSCO FRÍAS MEDINA

TUTOR PRINCIPAL DE TESIS  
DR. MUSTAPHA LAHYANE  
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

COTUTOR DE TESIS  
DR. CARLOS GALINDO PASTOR  
UNIVERSITAT JAUME I

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR  
DR. ISRAEL MORENO MEJÍA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS  
DR. OSVALDO OSUNA CASTRO  
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

MORELIA, MICH., SEPTIEMBRE DE 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A Naila*

---

## Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar la finitud de los monoides efectivos y de los anillos de Cox de algunas superficies racionales anticanónicas que tienen números de Picard muy grandes y que son construidas a partir de explosiones de una superficie de Hirzebruch en diferentes configuraciones de puntos que podrían ser infinitamente cercanos. Para realizar tal estudio, hemos introducido las nociones de superficie de Harbourne-Hirschowitz y de propiedad ortogonal anticanónica. De manera particular, la conjetura de Harbourne-Hirschowitz es verdadera para una superficie racional de Harbourne-Hirschowitz.

La finitud del monoide efectivo se estudia a través de condiciones numéricas que aseguren su finitud, además, en algunos casos presentaremos explícitamente los conjuntos generadores mínimos para tales monoides y una descomposición para cada clase efectiva. La finitud de los anillos de Cox se estudia usando un criterio que consiste en verificar si se satisface la propiedad ortogonal anticanónica. Además, para las superficies obtenidas como la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general, recuperaremos y extenderemos los resultados de Rosoff acerca de los conjuntos generadores mínimos de sus monoides efectivos, de Harbourne acerca de la regularidad de los divisores nef sobre tales superficies, y de Batyrev y Popov sobre la finitud de sus anillos de Cox.

**Palabras clave:** Superficie de Hirzebruch, transformación monoidal, monoide efectivo, anillo de Cox, conjetura de Harbourne-Hirschowitz, superficie racional anticanónica.

---

## Abstract

The aim of this work is to study the finiteness of the effective monoids and Cox rings of some anticanonical rational surfaces whose Picard numbers are very high and which are constructed as the blow-up of a Hirzebruch surface in different configurations of points that could be infinitely near. To do so, we have introduced the notions of Harbourne-Hirschowitz surface and anticanonical orthogonal property. Particularly, the Harbourne-Hirschowitz conjecture holds for a rational Harbourne-Hirschowitz surface.

The finiteness of the effective monoid is studied through numerical conditions that ensure its finiteness, in addition, in some cases we present the minimal generating set explicitly and a decomposition for every effective class. The finiteness of the Cox rings is studied using a criterion that consists in verify if the anticanonical orthogonal property is satisfied. In addition, for those surfaces obtained as the blow-up of the projective plane  $\mathbb{P}^2$  at most eight points in general position, we recover and extend the results of Rosoff about the minimal generating sets of their effective monoids, of Harbourne about the regularity of nef divisors on such surfaces, and of Batyrev and Popov about the finiteness of their Cox rings.

**Keywords:** Hirzebruch surface, monoidal transformation, effective monoid, Cox ring, Harbourne-Hirschowitz conjecture, anticanonical rational surface.

---

## AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi asesor el Dr. Mustapha Lahyane por todas sus enseñanzas a lo largo de todos estos años que iniciaron en aquel Verano de la Investigación Científica en el año 2008 donde tuve la oportunidad de conocer la belleza de la Geometría Algebraica. Por sus cursos, sus explicaciones pacientes, sus discusiones inspiradoras, sus comentarios, preguntas, ideas y por siempre brindarme su apoyo cuando lo necesité. Por todas las matemáticas y por todas las cosas de la vida que he aprendido de él durante todo este tiempo.

A la Dra. Brenda De La Rosa, Dra. Gioia Failla, Dr. Carlos Galindo, Dr. Francisco Monserrat y Dra. Rosanna Utano por haberme brindado la oportunidad de trabajar con ellos y adquirir nuevos conocimientos que ampliaron mi visión sobre algunos de los temas de mi investigación y que además me brindaron nuevas ideas para trabajos posteriores. Agradezco también al Dr. Jorge Olivares y al Dr. Israel Moreno por haber aceptado formar parte de mi mesa sinodal. Asimismo, agradezco a Timothy Magee y Rick Rischter por las charlas y discusiones que tuvimos donde pude conocer y aprender otros temas relacionados con la Geometría Algebraica.

Agradezco al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH) y al Centro de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por haberme brindado las condiciones adecuadas para poder continuar con mi formación académica. Asimismo, quiero agradecer a la M.A. Morelia Álvarez y a la C.P. Esperanza Jaramillo por su valiosa ayuda y disposición en la parte relacionada con trámites administrativos.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca número 339809 para realizar los estudios de Doctorado en Ciencias Matemáticas. Asimismo, a la Coordinación

---

del Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH, a la Coordinación de la Investigación Científica de la UMSNH, a la Secretaría General de la UMSNH y al Programa de Apoyo a los Estudiantes de Posgrado de la UNAM por los apoyos económicos brindados para poder participar en eventos académicos durante mi formación.

Agradezco a mi madre Guillermina Medina García, a mis hermanas Tere, Lupe y Rosa y a mi hermano Ramón por su apoyo incondicional durante estos últimos años. También quiero agradecer de manera especial a Gasde Hunedy por haberme dado la oportunidad de conocer una cara diferente de la Matemática, no sólo por todas las cosas que aprendí con él sobre la divulgación de matemáticas sino por los todos los buenos momentos que pasamos en las actividades de divulgación y por su gran amistad. A mis compañeros y profesores del Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH por todos los buenos momentos que pasé con ellos, tanto en la parte académica cuando hablábamos de matemáticas como en nuestro tiempo libre y reuniones donde platicamos de cualquier sobre cosa y pasamos muy buenos ratos, en especial a José Antonio Villa, Joel Sánchez, Oscar Sánchez, Enrique Rodríguez<sup>†</sup>, Camilo Ramírez, Luis Jorge Sánchez, Rubén Santaella, Liliana Esquivel, Leidy Celis y Karley Cardona. También agradezco esas tardes de juegos que se realizaron en compañía de Marco Rodríguez, Jessica Pereda, Antonio Montero, Daniel Pellicer, José Collins y Jorge Morales donde me divertí mucho y pasé muy buenos momentos.

Por último, quiero dar mi total agradecimiento a mi esposa Naila Angelina que durante todos estos años siempre ha estado a mi lado en todo momento apoyándome. Gracias por tu amor, cariño, comprensión, paciencia, y por esta vida llena de maravillosas singularidades.

# ÍNDICE GENERAL

	<b>Página</b>
Resumen	I
Abstract	III
Agradecimientos	V
Índice de figuras	XI
Introducción	XIII
Notación y terminología	XXI
Capítulo 1. Preliminares	1
1. Divisores	1
2. Superficies	6
2.1. Nociones Generales	6
2.2. Teoría de Intersección en Superficies	8
3. Transformaciones Monoidales y Contracciones	10
4. Superficies Regladas	13
4.1. Conceptos Básicos	13
4.2. Superficies de Hirzebruch	14
4.3. Transformaciones Elementales	16
Capítulo 2. Anillos de Cox de Superficies	19
1. El Anillo de Cox de una Superficie	19



---

2. Superficies Extremales	21
3. Un Criterio para la Finitud del Anillo de Cox de Superficies	25
Capítulo 3. Superficies de Harbourne-Hirschowitz y la Propiedad Ortogonal Anticanónica	29
1. La Conjetura de Harbourne-Hirschowitz y Superficies de Harbourne-Hirschowitz	29
2. Superficies Racionales Anticanónicas y la Propiedad Ortogonal Anticanónica	34
Capítulo 4. Explosión de $\Sigma_n$ en Puntos sobre $C_n$ y $\Gamma$ , I	39
1. Notación	40
2. Construcción	41
3. Finitud del Monoide Efectivo	43
4. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias	47
5. Ejemplos Concretos	48
Capítulo 5. Explosión de $\Sigma_n$ en Puntos sobre $C_n$ y $\Gamma$ , II	59
1. Construcción	60
2. Finitud del Monoide Efectivo	61
3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias	65
4. Ejemplos Concretos	67
Capítulo 6. Explosión de $\Sigma_n$ en Puntos sobre $C_n$ , $\Delta$ y una Fibra	69
1. Construcción	69
2. Finitud del Monoide Efectivo	71
3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias	77
4. Ejemplos Concretos	78
Capítulo 7. Explosión de $\Sigma_n$ en Puntos sobre el Mayor Número de Fibras	83
1. Construcción	84
2. Finitud del Monoide Efectivo	85
3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias	90
4. Ejemplos Concretos	92
Capítulo 8. Explosión de $\Sigma_n$ en Puntos Colineales	101
1. Construcción	102
2. Finitud del Monoide Efectivo	104
3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias	107
4. Ejemplos de Clases Efectivas	110

## Índice general

---

Capítulo 9. Explosión de $\Sigma_0$ en una Cadena	115
1. Constelaciones y Cadenas	116
2. Construcción	116
3. Finitud del Monoide Efectivo	118
4. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias	120
5. Ejemplos de Clases Efectivas	121
Capítulo 10. Explosión de $\Sigma_0$ en una Constelación	123
1. Construcción	123
2. Finitud del Monoide Efectivo	127
3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias	133
Capítulo 11. Explosión de $\Sigma_n$ en Puntos en Posición General	135
1. Explosión de $\mathbb{P}^2$ en Puntos en Posición General	136
1.1. Puntos en Posición General en $\mathbb{P}^2$	137
1.2. Finitud del Monoide Efectivo y del Anillo de Cox	137
1.3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias	141
2. Explosión de $\Sigma_n$ en Puntos en Posición General	144
2.1. Puntos en Posición General en $\Sigma_n$	145
2.2. Finitud del Monoide Efectivo	149
2.3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias	172
Capítulo 12. Conclusiones	177
Apéndice A. Códigos Usados en MATHEMATICA	181
1. Explosión de $\Sigma_n$ en $n + 3$ Puntos en Posición General con $n \leq 3$	181
2. Explosión de $\Sigma_1$ en Siete Puntos en Posición General	183
Bibliografía	185
Índice alfabético	191

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura</b>	<b>Página</b>
1.1. Superficie Reglada	13
1.2. Transformación elemental de $\Sigma_n$ cuando $p \in C_n$	17
1.3. Transformación elemental de $\Sigma_n$ cuando $p \notin C_n$	18
4.1. Configuración de puntos de $Z_n^r$	41
4.2. La superficie $Z_n^r$	42
5.1. Configuración de puntos de $Z_n^{r_1, r_2}$	58
5.2. La superficie $Z_n^{r_1, r_2}$	59
6.1. Configuración de puntos de $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$	68
6.2. La superficie $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$	69
7.1. Configuración de puntos de $Z_n^{t, s, r_1, \dots, r_{n+2}}$	82
7.2. La superficie $Z_n^{t, s, r_1, \dots, r_{n+2}}$	83
7.3. Configuración de puntos en tres rectas	97
8.1. Configuraciones de puntos colineales en $\Sigma_n$	100
8.2. La superficie $Y_n^r$	102
9.1. Construcción de la superficie $X_0^r$	115
9.2. La superficie $X_0^r$	116

---

10.1. Orígenes de las constelaciones de la superficie $Z$	122
10.2. La superficie $Z$	125
11.1. Tres y cuatro puntos en posición general en $\mathbb{P}^2$	135
11.2. Puntos en posición general en $\Sigma_n$	143
11.3. La superficie $W_n^r$	145
11.4. Transformación elemental de $\Sigma_n$ en el punto $p_r$	166

Entender la geometría birracional de una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$  de característica arbitraria es un problema interesante que hasta el día de hoy sigue abierto. Una manera para lograr tal objetivo es a través del estudio del *monoide efectivo* y del *anillo de Cox* de tal superficie.

Dada una superficie proyectiva lisa  $S$ , el monoide efectivo de  $S$  es el conjunto de clases de divisores efectivos en el grupo de Néron-Severi de  $S$ . Para entender el monoide efectivo es necesario determinar si éste es finitamente generado y en tal caso, determinar un conjunto generador mínimo y una descomposición para cada clase efectiva. Ambos cuestionamientos no son interrogantes que sean sencillas de responder. Por ejemplo, en 1960 Nagata muestra en [Nag60, Teorema 4a, p. 283] que la superficie obtenida como la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en al menos nueve puntos en posición general contiene un número infinito de curvas  $(-1)$ , éste hecho implica que los monoides efectivos de tales superficies no pueden ser finitamente generados. Por otro lado, si se determina que el monoide efectivo de  $S$  no es finitamente generado, entonces se tendría que el anillo de Cox de  $S$  tampoco sería finitamente generado (ver abajo la definición del anillo de Cox). Por tal motivo, el entender el monoide efectivo es un problema de gran interés en la actualidad.

Algunos trabajos recientes sobre este problema son los de Rosoff en [Ros80] y [Ros02]; Campillo y González-Sprinberg en [CG98]; Campillo, Piltant y Reguera en [CPR02] y [CPR05]; Monserrat en [Mon03]; Lahyane en [Lah04a], [Lah04b], [Lah05a], [Lah05b] y [Lah10]; Lahyane y Harbourne en [LH05]; Galindo y Monserrat en [GM04], [GM05b] y [GM16]; Failla, Lahyane y Molica en [FLM06], [FLM07a] y [FLM07b]; Cerda en [Cer12]; Taylor y Wang en [TW15]; y de De La Rosa en [DeL16].

---

Por otro lado, en [Cox95], Cox introduce la noción de coordenadas homogéneas para una variedad tórica  $X$  sobre  $\mathbb{C}$  y define el anillo de coordenadas homogéneas para tales variedades (ver página 19 de [Cox95]). Al considerar como ejemplo al espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$  (como variedad tórica) menciona que su anillo de coordenadas homogéneas coincide con el anillo de coordenadas homogéneas  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  con la graduación usual. Posteriormente, Hu y Keel en [HK00] definen el anillo de Cox para cualquier variedad proyectiva  $X$  tal que el grupo de Néron-Severi con coeficientes racionales sea igual al grupo de Picard con coeficientes racionales como

$$\text{Cox}(X) = \bigoplus_{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r} H^0(X, L_1^{n_1} + \dots + L_r^{n_r}),$$

donde  $L_1, \dots, L_r$  forman una base para  $\text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$  y cuyo casco afín está contenido en el cono de divisores efectivos de  $X$ . Además de mostrar que si el anillo de Cox de  $X$  es un anillo de polinomios, entonces  $X$  es una variedad tórica, muestran que existe una relación entre la finitud del anillo de Cox y el Programa del Modelo Mínimo (MMP por sus siglas en inglés). En efecto, en [HK00, Proposición 2.9, p. 342] prueban que si  $X$  es una variedad proyectiva  $\mathbb{Q}$ -factorial que satisface las condiciones de la definición del anillo de Cox, entonces son equivalentes la finitud del anillo de Cox y el hecho que el Programa del Modelo Mínimo pueda llevarse a cabo para cualquier divisor sobre  $X$ . Por este motivo, el problema de determinar si el anillo de Cox de una variedad proyectiva es finitamente generado es uno de los problemas abiertos de mayor interés dentro de la Geometría Algebraica en la actualidad.

Dentro de algunos trabajos recientes en el caso general de variedades se encuentran los de Elizondo, Kurano y Watanabe en [EKW04]; Castratév y Tevelev en [CT06] y [CT15]; Castratév en [Cas09]; Birkar, Cascini, Hacon y McKernan en [BCHM10]; Prendergast-Smith en [Pre09], [Pre10] y [Pre12]; Bernal en [Ber12]; de Fernex y Hacon en [dFH12]; Donten-Bury en [Don13]; González y Karu en [GK14]; Keicher en [Kei14]; Okawa en [Oka15]; Ottem en [Ott15]; Chen, Elizondo y Yang en [CEY16]; y de Hausen, Keicher y Laface en [HKL16]. Para el caso concreto de superficies, en la Sección 1 del Capítulo 2 mencionaremos con mayores detalles algunos trabajos realizados en dicho caso. Para conocer más acerca de los anillos Cox, Laface y Velasco en [LV09] y McKernan en [McK10] realizan una presentación general de los anillos de Cox y su relación con la Teoría de Invariantes Geométricos (GIT por sus siglas en inglés), los espacios soñados de Mori (MDS por sus siglas en inglés) y presentan algunos ejemplos de variedades con anillos de Cox finitamente generados. Además, el libro [ADHL15] de Arzhantsev, Derenthal, Hausen y Laface es una buena referencia para el estudio de los anillos de Cox.

El objetivo general de este trabajo es estudiar la finitud de los monoides efectivos y la finitud de los anillos de Cox de superficies proyectivas lisas racionales que provienen de considerar explosiones de una superficie de Hirzebruch en ciertas configuraciones de puntos que podrían ser infinitamente cercanos. Para el estudio de la finitud del monoide efectivo utilizaremos algunas condiciones numéricas que nos asegurarán la finitud de tales monoides, además, también será de nuestro interés encontrar explícitamente los conjuntos generadores mínimos para los monoide efectivos y una descomposición para cada clase efectiva. Es importante señalar que las técnicas que utilizaremos permiten determinar de forma explícita los conjuntos de las curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  sobre nuestras superficies en casos específicos y esto lleva a poder determinar concretamente el conjunto generador mínimo para sus monoides efectivos gracias al trabajo [LH05] de Lahyane y Harbourne. Respecto al estudio de los anillos de Cox, utilizaremos un criterio con el que bastará verificar si dichas superficies satisfacen la propiedad que llamaremos *propiedad ortogonal anticanónica*. Las características comunes de las superficies proyectivas lisas racionales que construiremos es que tienen números de Picard que podrían ser muy grandes, son anticanónicas, sus monoides efectivos son finitamente generados y satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica, en particular, serán *superficies de Harbourne-Hirschowitz* y tendrán anillos de Cox finitamente generados. Cabe mencionar que el concepto de superficies de Harbourne-Hirschowitz viene motivado de una manera natural de la conjetura de Harbourne-Hirschowitz (ver Conjetura 3.1). Además, de manera particular recuperaremos los resultados que mencionaremos a continuación. Sea  $X_r$  la superficie obtenida como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  puntos en posición general, donde  $r \leq 8$ .

- (a) La lista de las curvas  $(-1)$  sobre  $X_r$  determinada por Manin en [Man74, Teorema 26.2, p. 135]) y Demazure en [Dem80, Tabla 3, p. 35],
- (b) La lista de generadores del monoide efectivo de  $X_r$  encontrada por Rosoff en [Ros80, ver Teorema 1, p. 420],
- (c) La finitud del monoide efectivo de la superficie obtenida como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en cualquier posición mostrada por Rosoff en [Ros80, Teorema 2, p. 424],
- (d) La regularidad de los divisores nef sobre la superficie  $X_r$  obtenida por Harbourne en [Har96, Teorema I.1 (b), p. 727],
- (e) La finitud del anillo de Cox de  $X_r$  determinada por Batyrev y Popov en [BP04, Teorema 3.2, p. 6].
- (f) La lista de de las curvas  $(-1)$  sobre la superficie obtenida como la explosión de una superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  en a lo más  $n$  puntos en posición general determinada por Matsuzawa en [Mat88, Proposición 1.1, p. 426], y

- 
- (g) La finitud del monoide efectivo de una superficie racional lisa  $S$  con  $K_S^2 > 0$  asegurada por Lahyane en [Lah04a, Teorema 1.1, p. 875] y por Lahyane y Harbourne en [LH05, Proposición 4.3 (a), p. 109].

Debemos señalar que todas las figuras presentadas en este trabajo fueron elaboradas en el editor de gráficos vectoriales INKSCAPE [Ink11] y que algunos de los cálculos que desarrollamos fueron obtenidos usando el programa de lenguaje simbólico MATHEMATICA [Wol16]. En los siguientes párrafos mencionaremos de manera general cómo está constituido este trabajo.

El Capítulo 1 corresponde a los preliminares donde realizaremos un recordatorio de las nociones que necesitaremos a lo largo de este trabajo. En él realizamos una recopilación de algunos conceptos y resultados sobre divisores sobre esquemas, superficies y números de intersección, transformaciones monoidales y superficies regladas. Cabe mencionar que pondremos particular atención en las superficies de Hirzebruch que serán utilizadas en gran parte de este trabajo. El contenido de este capítulo se basa principalmente en [Har77] y también hemos considerado [Bad01] como referencia.

El objetivo del Capítulo 2 es presentar el anillo de Cox para una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$  de cualquier característica y un criterio geométrico para determinar cuándo dicho objeto es una  $k$ -álgebra finitamente generada. Después de mencionar en la Sección 1 algunos resultados conocidos sobre dicho objeto, en la Sección 2 presentaremos el concepto de *superficies extremales* (ver Definición 2.6) con el cual presentaremos en la Sección 3 el Teorema 2.13 que consiste en nuestro criterio para la finitud del anillo de Cox de una superficie proyectiva lisa; con dicho resultado también estableceremos un criterio en el caso de una superficie proyectiva lisa racional anticanónica en el Corolario 2.14. Los resultados de este capítulo están basados en el trabajo publicado [DFLMO15].

El Capítulo 3 será de gran importancia para nuestro trabajo. En la Sección 1 revisaremos los problemas que dieron origen a la *conjetura de Harbourne-Hirschowitz* (ver Conjetura 3.1) y hablaremos de algunos trabajos relacionados con tal problema. Posteriormente, en la Definición 3.2 introduciremos el concepto de *superficies de Harbourne-Hirschowitz* y mostraremos en el Teorema 3.3 que para las superficies proyectivas lisas racionales de Harbourne-Hirschowitz la conjetura de Harbourne-Hirschowitz es verdadera. La Sección 2 se encargará de introducir la noción de *propiedad ortogonal anticanónica* en la Definición 3.5. Tal propiedad tiene un buen comportamiento respecto de morfismos birracionales como se mostrará en la Proposición 3.6, aún más, para el caso de una superficie proyectiva lisa racional anticanónica  $S$ , dicha propiedad nos brindará un criterio para determinar si  $S$  es de



Harbourne-Hirschowitz y si  $S$  es extremal en los Teoremas 3.11 y 3.19 respectivamente, y consecuentemente un criterio para la finitud de los anillos de Cox de superficies proyectivas lisas racionales anticanónicas en el Teorema 3.20. Además de mostrar que el plano proyectivo y que las superficies de Hirzebruch satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica (ver Ejemplos 3.9 y 3.10 respectivamente), mencionaremos algunos de ejemplos de superficies racionales anticanónicas que han sido estudiadas con anterioridad y que satisfacen tal propiedad (ver Ejemplos 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 y 3.17).

La construcción de nuestra primera familia se realizará en la Sección 2 del Capítulo 4 y para llevarla a cabo fijaremos puntos en dos curvas racionales lisas de manera que podamos escribir a la clase anticanónica como la suma de las clases de tales curvas (ver Proposición 4.1). La segunda familia de superficies será construida en la Sección 1 del Capítulo 5 como una variante de las superficies anteriores al considerar las mismas dos curvas con una configuración de puntos distinta. La Sección 1 del Capítulo 6 se encargará de presentarnos nuestra siguiente familia construida al explotar una superficie de Hirzebruch en un número finito de puntos los cuales están distribuidos en tres curvas racionales lisas que nos permitirán descomponer a la clase de un divisor anticanónico como la suma de las clases de dichas curvas. Para la familia que se construirá en la Sección 1 del Capítulo 7, la configuración de puntos que tomaremos será de tal modo que podamos abarcar el mayor número de fibras que un divisor anticanónico puede contener. Para las familias de superficies anteriores, mostraremos que bajo una condición numérica existe un número finito de curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  sobre tales superficies (ver respectivamente los Teoremas 4.2, 5.2, 6.2 y 7.2); posteriormente, mostraremos que bajo cierta condición numérica tales superficies satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica (ver respectivamente los Teoremas 4.4, 5.4, 6.4 y 7.4). Como consecuencias de los resultados anteriores obtendremos que tales superficies tienen monoides efectivos finitamente generados, son de Harbourne-Hirschowitz y tienen anillos de Cox finitamente generados. Además, utilizando las técnicas desarrolladas para mostrar la finitud de las curvas  $(-1)$  y  $(-2)$ , presentaremos ejemplos concretos de los conjuntos generadores mínimos de los monoides efectivos para ciertas superficies de cada una de las familias mencionadas (ver Ejemplos 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 5.7, 5.8, 6.7, 6.8, 7.8 y 7.9). Los resultados del Capítulo 4 están basados principalmente en el trabajo publicado [DFL16a] mientras que los del Capítulo 5 se basan principalmente en [DFL16b].

El concepto de *puntos colineales* para una superficie de Hirzebruch será introducido en la Sección 1 del Capítulo 8 (ver Definición 8.1) y explotando puntos en tal configuración construiremos nuestra siguiente familia de superficies. Por otro lado, en la Sección 2 del Capítulo 9 presentaremos otra familia de superficies que provendrá de considerar la explosión de  $\Sigma_0$  en

---

una cadena en la dirección de una curva  $C_0$ . Para ambas familias de superficies, mostraremos la finitud de sus monoides efectivos presentando de forma explícita los conjuntos generadores mínimos y una descomposición para cada clase efectiva (ver respectivamente Teoremas 8.3 y 9.2); asimismo, mostraremos que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica (ver respectivamente Teoremas 8.4 y 9.4). Tales superficies serán de Harbourne-Hirschowitz y tendrán anillos de Cox finitamente generados como consecuencia de tales resultados. Es importante mencionar que no será necesario fijar condición numérica alguna para mostrar lo anterior. Por último, presentaremos algunos ejemplos de una descomposición de ciertas clases efectivas sobre tales superficies utilizando la descomposición brindada por nuestra descomposición y mostraremos que la efectividad de tales clases no puede ser obtenida como una consecuencia directa del teorema de Riemann-Roch (ver Ejemplos 8.8, 8.9, 8.10 y 9.8). El contenido del Capítulo 9 está basado principalmente en el trabajo [DFFLU16].

La familia de superficies que será construida en la Sección 1 del Capítulo 10 será construida a partir de una constelación con dos orígenes sobre la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_0$ . Para tales superficies, presentaremos la lista explícita de las clases de curvas  $(-1)$  y de las clases de curvas  $(-2)$  (ver respectivamente Teoremas 10.2 y 10.3) y como consecuencia presentaremos explícitamente el conjunto generador mínimo de sus monoides efectivos (ver Corolario 10.4). Además, verificaremos que estas superficies satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teorema 10.5). El que estas superficies sean de Harbourne-Hirschowitz y que tengan anillos de Cox finitamente generados será una consecuencia de lo anterior. Cabe señalar que no se requerirá de condiciones numéricas para mostrar tales resultados. El contenido de este capítulo está basado principalmente en el trabajo [DFFLU16].

El Capítulo 11 y último de este trabajo estudiará la familia de superficies que provienen de considerar la explosión de una superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  en puntos que se encuentran en *posición general*. En primer lugar, en la Sección 1 realizaremos un recordatorio de la noción de puntos en posición general en el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ , luego, en el Teorema 11.2 recordaremos el resultado de Rosoff acerca de cómo están conformados los conjuntos generadores mínimos de las superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en tal posición. Para finalizar dicha sección, presentaremos la clasificación de las superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en puntos en posición general que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica en los Teoremas 11.3 y 11.4, y algunas de sus implicaciones. De manera particular, recuperaremos los resultados (d) y (e) mencionados anteriormente (ver respectivamente Observación 11.6 y Corolario 11.7). A lo largo de la Sección 2 estudiaremos el caso de las superficies obtenidas como la explosión de  $\Sigma_n$  en puntos en posición general. Comenzaremos introduciendo la noción de puntos en posición general para una superficie de

Hirzebruch en la Definición 11.8 y posteriormente, en la Proposición 11.11 estudiaremos la clase anticanónica de ciertas superficies obtenidas como la explosión de  $\Sigma_n$  en puntos en posición general. Después, realizaremos la clasificación de este tipo de superficies a través de la finitud de sus monoides efectivos en los Teoremas 11.13, 11.14, 11.16, 11.17 y 11.25, y además presentaremos explícitamente los conjuntos generadores mínimos de los monoides efectivos que son finitamente generados. Particularmente, el primero de tales teoremas recupera el resultado (f), y considerando el caso  $n = 1$  en todos ellos recuperamos los resultados (a) y (b) (para el último ver Observación 11.18). Por otro lado, gracias a los primeros cuatro teoremas mostraremos en el Corolario 11.20 la finitud del monoide efectivo para las superficies obtenidas como la explosión de  $\Sigma_n$  en ciertas especializaciones de puntos, y como consecuencia recobramos los resultados (c) y (g) (ver Corolarios 11.21 y 11.22 respectivamente). Además, para el caso de las superficies obtenidas como la explosión de  $\Sigma_n$  en a lo más  $n + 3$  puntos o  $\Sigma_1$  en cinco puntos presentaremos una descomposición para cada clase efectiva en los Teoremas 11.13 y 11.15 respectivamente. Para concluir con este capítulo, en los Teoremas 11.29 y 11.30 presentaremos la clasificación de esta clase de superficies respecto a satisfacer la propiedad ortogonal anticanónica y posteriormente, mostraremos algunas implicaciones. En particular, recuperaremos nuevamente los resultados (d) y (e) (ver respectivamente Observaciones 11.33 y 11.35) y obtendremos la clasificación de este tipo de superficies respecto a la finitud de sus anillos de Cox (ver Corolarios 11.27 y 11.34). Los resultados de este capítulo están basados en el trabajo [FL16].

En el Capítulo 12 presentaremos nuestras conclusiones y sugeriremos algunos problemas para un estudio posterior en base a los resultados obtenidos en este trabajo.

Finalmente, el Apéndice A nos presentará los códigos que utilizamos en MATHEMATICA [Wol16] para realizar los cálculos de los sistemas de ecuaciones que nos permitieron determinar los conjuntos generadores mínimos de los monoides efectivos de las superficies obtenidas como la explosión de  $\Sigma_n$  en  $n + 5$  puntos en posición general con  $n \leq 3$  y como la explosión de  $\Sigma_1$  en siete puntos en posición general.

## NOTACIÓN Y TERMINOLOGÍA

A lo largo de este trabajo, fijaremos la siguiente notación y terminología:

La letras  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Z}$  denotarán respectivamente a los conjuntos de los números naturales y enteros, mientras que para referirnos al conjunto de los números enteros positivos junto con el cero utilizaremos el símbolo  $\mathbb{Z}_+$ .

El *espacio proyectivo de dimensión  $n$*  definido sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$  será denotado por  $\mathbb{P}^n$ , es decir,  $\mathbb{P}^n = \text{Proj}(k[x_0, x_1, \dots, x_n])$ . En particular, para el *plano proyectivo*  $\mathbb{P}^2$  se tiene que  $\mathbb{P}^2 = \text{Proj}(k[x_0, x_1, x_2])$ .

Una *variedad* sobre un campo algebraicamente  $k$  será un esquema entero, separado, de tipo finito sobre  $k$ .

Dada una gavilla invertible  $\mathcal{L}$  sobre una variedad  $X$ , el  *$i$ -ésimo grupo de cohomología* de  $\mathcal{L}$  será denotado por  $H^i(X, \mathcal{L})$  y su *dimensión* se denotará por  $h^i(X, \mathcal{L})$ .

El *género aritmético* de una curva  $C$  sobre una superficie será denotado por  $p_a(C)$ , de este modo,  $p_a(C) = 1 - \chi(\mathcal{O}_C)$ , donde  $\chi(\mathcal{O}_C)$  es la *característica de Euler-Poincaré* de  $C$ .

Todos los puntos que se considerarán en este trabajo serán *puntos cerrados*.

# CAPÍTULO 1

## PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es recordar los conceptos y nociones básicas que necesitaremos a lo largo de este trabajo. Comenzaremos realizando una revisión de los divisores de Weil, los divisores de Cartier, las gavillas invertibles y mencionaremos algunas de las relaciones entre los grupos que pueden definirse con dichos objetos. Posteriormente, en la segunda sección recordaremos el concepto de superficie, la noción de sistema lineal completo, sistema lineal, punto base y componente fija. Además, realizaremos una revisión de la forma de intersección sobre una superficie proyectiva lisa y en particular, recordaremos el teorema de Riemann-Roch y los conceptos de grupo de Néron-Severi, de monoide efectivo y de monoide nef que tendrán una gran importancia en los capítulos posteriores. En la tercera sección daremos un vistazo a las propiedades de una transformación monoidal y recordaremos el criterio de contractibilidad de Castelnuovo. Para concluir con este capítulo, realizaremos una revisión de las superficies regladas y algunas de sus propiedades básicas con especial énfasis en las superficies de Hirzebruch.

### 1. Divisores

En esta sección revisaremos las construcciones de los grupos de divisores de Weil, de Cartier y del grupo de Picard para un esquema en general. Posteriormente, recordaremos algunas relaciones que existen entre dichos grupos. Concluiremos este apartado con la noción de un divisor anticanónico sobre una variedad. El contenido de esta sección está basado en la Sección 6 del Capítulo II de [Har77].

**Definición 1.1.** Sea  $X$  un esquema noetheriano, entero, separado y regular en codimensión uno. Un **divisor primo** sobre  $X$  es un subesquema cerrado entero en codimensión uno. Un **divisor de Weil** es un elemento del  $\mathbb{Z}$ -módulo libre  $\text{Div}(X)$  generado por los divisores primos.

Por definición, un divisor de Weil  $D$  se escribe como  $\sum_{\text{finita}} n_i Y_i$  donde cada coeficiente  $n_i$  es un número entero y  $Y_i$  es un divisor primo. En el caso en que cada coeficiente en la descomposición anterior resulte ser un número entero no negativo,  $D$  es un **divisor efectivo**.

Para un esquema  $X$  noetheriano, entero, separado y regular en codimensión uno, consideremos un divisor primo  $Y$  sobre  $X$  y a su punto genérico  $\eta \in Y$ . Se tiene que  $\mathcal{O}_{Y,\eta}$  es un anillo de valoración discreta cuyo campo de fracciones es igual al campo de funciones racionales  $K(X)$  de  $X$ . Denotamos por  $\nu_Y$  a la valoración discreta asociada a  $Y$ . De esto se sigue la próxima definición:

**Definición 1.2.** Sea  $X$  un esquema noetheriano, entero, separado y regular en codimensión uno y sea  $f \in K(X)^*$ . El **divisor de  $f$**  es

$$(f) = \sum \nu_Y(f) Y,$$

donde la suma se toma sobre todos los divisores primos sobre  $X$ . Un **divisor principal** es un divisor de Weil que es igual al divisor asociado a un elemento de  $K(X)^*$ .

Notemos que no existe algún problema en la definición anterior puesto que dada una función racional no nula  $f$  sobre  $X$ , se tiene que  $\nu_Y(f) = 0$  para cada divisor primo  $Y$  sobre  $X$  a excepción de un número finito de ellos (ver [Har77, Lema 6.1, p. 131]).

Ahora, definiremos una relación sobre el grupo de divisores  $\text{Div}(X)$ : dados  $D$  y  $D'$  en  $\text{Div}(X)$ ,  $D$  está relacionado con  $D'$  si y sólo si  $D - D'$  es un divisor principal. En tal caso,  $D$  es **linealmente equivalente a  $D'$**  y denotamos este hecho por  $D \sim D'$ . Esta relación resulta ser una relación de equivalencia sobre  $\text{Div}(X)$  y se llama la **relación de equivalencia lineal**.

**Definición 1.3.** Sea  $X$  un esquema noetheriano, entero, separado y regular en codimensión uno. El **grupo de clases de divisores** sobre  $X$  es el cociente del grupo  $\text{Div}(X)$  por la relación de equivalencia lineal y es denotado por  $\text{Cl}(X)$ .

Las nociones anteriores sólo pueden definirse para esquemas que satisfagan las hipótesis anteriores, así que en esquemas arbitrarios no podemos definir la noción de divisores de

Weil. Sin embargo, existe una clase de divisores que sí pueden ser definidos sobre cualquier esquema, hablamos de los divisores de Cartier.

Sea  $X$  un esquema. Para cada abierto  $U$  no vacío de  $X$  definimos el conjunto multiplicativo  $\mathcal{R}(U)$  de  $\mathcal{O}_X(U)$  de la siguiente forma:

$$\mathcal{R}(U) = \{s \in \mathcal{O}_X(U) \mid s_p \text{ no es un divisor de cero para todo } p \in U\}.$$

Así, podemos considerar la localización de  $\mathcal{O}_X(U)$  en  $\mathcal{R}(U)$  que denotaremos por  $\mathcal{Q}^-(U)$ . De esta forma,  $\mathcal{Q}^-$  define una pregavilla sobre  $X$  donde  $\mathcal{Q}^-(\emptyset) = \{0\}$ , para cada abierto  $U$  no vacío de  $X$  se tiene que  $\mathcal{Q}^-(U) = \mathcal{R}(U)^{-1}\mathcal{O}_X(U)$  y donde las restricciones de  $\mathcal{Q}^-$  son las inducidas de manera natural por las restricciones de  $\mathcal{O}_X$ . Posteriormente, la **gavilla de cocientes totales**  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{O}_X$  es la gavilla asociada a la pregavilla  $\mathcal{Q}^-$ . Ahora, consideramos las gavillas  $\mathcal{O}_X^*$  y  $\mathcal{Q}^*$  de elementos invertibles de  $\mathcal{O}_X$  y  $\mathcal{Q}$  respectivamente. Considerando a  $\mathcal{O}_X^*$  como una subgavilla de  $\mathcal{Q}^*$  podemos considerar la gavilla cociente  $\frac{\mathcal{Q}^*}{\mathcal{O}_X^*}$ .

**Definición 1.4.** Un **divisor de Cartier** sobre un esquema  $X$  es una sección global de la gavilla  $\frac{\mathcal{Q}^*}{\mathcal{O}_X^*}$ . Un divisor de Cartier es **principal** si está en la imagen del homomorfismo  $\mathcal{Q}^*(X) \rightarrow \frac{\mathcal{Q}^*}{\mathcal{O}_X^*}(X)$ .

Puesto que un divisor de Cartier es una sección global de una gavilla cociente, podemos representarlo como una familia  $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$  donde  $\{U_i\}_{i \in I}$  es una cubierta abierta de  $X$  y donde  $f_i$  es una sección de  $\mathcal{Q}^*(U_i)$  para cada  $i \in I$ . Además, un divisor principal de Cartier se representa como  $(X, f)$  donde  $f$  es la sección global de  $\mathcal{Q}^*$  que da origen a dicho divisor principal. Por convención se utiliza la notación aditiva en el grupo de divisores de Cartier a pesar de que  $\frac{\mathcal{Q}^*}{\mathcal{O}_X^*}(X)$  es un grupo multiplicativo.

Luego, podemos definir una relación de equivalencia sobre el grupo de divisores de Cartier de la siguiente forma: dados  $D$  y  $E$  en  $\frac{\mathcal{Q}^*}{\mathcal{O}_X^*}(X)$ , se tiene que  $D$  está relacionado con  $E$  si y sólo si su diferencia es un divisor de Cartier principal. Dicha relación también se llama **relación de equivalencia lineal** y denotaremos al grupo de divisores de Cartier módulo dicha relación por  $\text{CaCl}(X)$ .

La ventaja de los divisores de Cartier es que pueden ser definidos sobre un esquema arbitrario a diferencia de los divisores de Weil. Además, en el caso de un esquema que satisface los requerimientos para definir los divisores de Weil, se tiene que el grupo de divisores de Cartier coincide con el grupo de divisores de Weil.

**Proposición 1.5.** *Sea  $X$  un esquema noetheriano, entero, separado y localmente factorial. El grupo de divisores de Weil  $\text{Div}(X)$  es isomorfo al grupo de divisores de Cartier  $\frac{\mathcal{Q}^*}{\mathcal{O}_X^*}(X)$ . Aún más, los divisores principales de Weil corresponden a los divisores principales de Cartier y consecuentemente los grupos  $\text{Cl}(X)$  y  $\text{CaCl}(X)$  son isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [Har77, Proposición 6.11, p. 141]. □

El siguiente grupo que construiremos para un esquema arbitrario será definido utilizando las **gavillas invertibles**, es decir, las gavillas localmente libres de rango uno sobre tal esquema. Una vez que construyamos dicho grupo, mostraremos su relación con los grupos de clases de divisores de Weil y de Cartier.

Consideremos un esquema arbitrario  $X$  y definamos el siguiente conjunto:

$$\Omega_X = \{ \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \text{ es una gavilla invertible sobre } X \}.$$

Luego, definimos una relación sobre  $\Omega_X$  al considerar las clases de isomorfismo de las gavillas invertibles: para elementos  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{M}$  de  $\Omega_X$ , tenemos que  $\mathcal{L}$  está relacionado con  $\mathcal{M}$  si y sólo si  $\mathcal{L}$  es isomorfa a  $\mathcal{M}$ . De manera inmediata tenemos que ésta es una relación de equivalencia, por ello, podemos tomar el cociente de  $\Omega_X$  por dicha relación y denotaremos por  $\text{Pic}(X)$  al conjunto resultante.

Por otro lado, recordemos que en general el producto tensorial de gavillas es asociativo, conmutativo y se tiene que  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{F}$ . Además, para gavillas invertibles se satisfacen los siguientes hechos (ver [Har77, Proposición 6.12, p. 143]):

1. El producto tensorial de gavillas invertibles es una gavilla invertible, y
2. Dada una gavilla invertible  $\mathcal{L}$  existe una gavilla invertible  $\mathcal{L}^{-1}$  tal que  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1} \cong \mathcal{O}_X$  (de hecho  $\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ ).

De dichas propiedades, usando el producto tensorial podemos dotar de una manera natural a  $\text{Pic}(X)$  con una estructura de grupo abeliano con la siguiente operación:

$$\begin{aligned} + : \text{Pic}(X) \times \text{Pic}(X) &\rightarrow \text{Pic}(X) \\ ([\mathcal{L}], [\mathcal{M}]) &\mapsto [\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}] \end{aligned}$$

**Definición 1.6.** El **grupo de Picard** de un esquema  $X$  es el grupo  $\text{Pic}(X)$ .

Lo que revisaremos a continuación es cómo construir una gavilla invertible a partir de un divisor de Cartier. Sea  $D = \{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$  un divisor de Cartier sobre  $X$ . Para cada  $i \in I$  consideramos la gavilla  $\mathcal{O}_X(D)_i$  sobre  $U_i$  generada por  $f_i^{-1}$ . Luego, para  $i, j \in I$  se tiene que



$f_i f_j^{-1}$  es invertible en la intersección  $U_i \cap U_j$  y de esto sigue que los  $\mathcal{O}_X$ -módulos generados por  $f_i^{-1}$  y  $f_j^{-1}$  coinciden; gracias a ello podemos realizar el pegado de las gavillas anteriores para construir la **gavilla asociada al divisor de Cartier**  $D$  que denotaremos por  $\mathcal{O}_X(D)$ . El siguiente resultado nos presenta algunas propiedades de este tipo de gavillas.

**Proposición 1.7.** *Sea  $X$  un esquema. Se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *Para cada divisor de Cartier  $D$ , la gavilla  $\mathcal{O}_X(D)$  es invertible. Además, la asignación que a cada divisor de Cartier lo envía a su correspondiente gavilla invertible induce una correspondencia 1-1 entre divisores de Cartier sobre  $X$  y las subgavillas invertibles de  $\mathcal{Q}$ .*
2. *Si  $D_1$  y  $D_2$  son divisores de Cartier, entonces  $\mathcal{O}_X(D_1 - D_2) \cong \mathcal{O}_X(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D_2)^{-1}$ .*
3. *Si  $D_1$  y  $D_2$  son divisores de Cartier,  $D_1$  es linealmente equivalente a  $D_2$  si y sólo si  $\mathcal{O}_X(D_1)$  es isomorfa a  $\mathcal{O}_X(D_2)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver [Har77, Proposición 6.13, p. 144]. □

Utilizando las propiedades anteriores obtenemos el siguiente resultado que establece una relación entre el grupo de clases divisores de Cartier y el grupo de Picard de un esquema.

**Proposición 1.8.** *Sea  $X$  un esquema. La asignación*

$$\begin{aligned} \text{CaCl}(X) &\rightarrow \text{Pic}(X) \\ [D] &\mapsto [\mathcal{O}_X(D)] \end{aligned}$$

*es un homomorfismo de grupos que es inyectivo. Aún más, si  $X$  es entero, entonces dicho homomorfismo es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. La primera parte se sigue de la Proposición 1.7. Para la segunda parte puede consultarse [Har77, Proposición 6.15, p. 145]. □

Como consecuencia al resultado anterior, de manera inmediata podemos establecer una relación entre el grupo de divisores de Weil módulo la equivalencia lineal y el grupo de Picard de un esquema.

**Corolario 1.9.** *Sea  $X$  un esquema noetheriano, entero, separado y localmente factorial. Existe un isomorfismo natural entre los grupos  $\text{Cl}(X)$  y  $\text{Pic}(X)$ .*

Para concluir esta sección, recordaremos la noción de un divisor canónico sobre una variedad. En el contexto general, dado un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$ , la **gavilla de**

**diferenciales de Kähler**  $\Omega_{X/Y}$  de  $X$  sobre  $Y$  es la gavilla casi coherente obtenida del pegado de las gavillas casi coherentes  $\widetilde{\Omega_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)}}$  donde  $V$  es un abierto afín de  $Y$  y  $U$  es un abierto afín de  $X$  de modo que  $f(U) \subseteq V$ . Para mayores detalles de éstas gavillas puede consultarse la Sección 8 del Capítulo II de [Har77].

En el caso particular que tenemos una variedad  $X$  sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$ , usando el morfismo  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  podemos considerar la gavilla de diferenciales de Kähler de  $X$  sobre  $\text{Spec}(k)$  que denotamos simplemente por  $\Omega_{X/k}$ . De esta manera, realizamos la siguiente definición:

**Definición 1.10.** Sea  $X$  una variedad lisa de dimensión  $n$  sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$ . La **gavilla canónica** de  $X$  denotada por  $\omega_X$  es la gavilla invertible  $\bigwedge^n \Omega_{X/k}$ , el  $n$ -ésimo producto exterior de la gavilla de diferenciales  $\Omega_{X/k}$ .

Puesto que en el caso de una variedad lisa  $X$  sabemos que el grupo de clases de divisores de Weil módulo la equivalencia lineal es isomorfo al grupo de gavillas invertibles módulo isomorfismo (ver Corolario 1.9), tenemos que a la clase de  $\omega_X$  le corresponde una clase de divisores de Weil. Un divisor en dicha clase es un **divisor canónico** y será denotado por  $K_X$ . Un **divisor anticanónico** es un divisor sobre  $X$  de la forma  $-K_X$  donde  $K_X$  es un divisor canónico.

## 2. Superficies

En esta sección nos enfocaremos en revisar algunos aspectos básicos de una superficie. Después de recordar la definición de dicho objeto, recordaremos las nociones de sistema lineal, punto base y componente fija. Luego, realizaremos una breve revisión del número de intersección, enunciaremos el teorema de Riemann-Roch y finalizaremos con las definiciones del grupo de Néron-Severi y de los monoides efectivo y nef.

**2.1. Nociones Generales.** Comenzaremos este apartado recordando la definición del objeto que da nombre a esta sección y posteriormente recordaremos algunas nociones relacionadas con una superficie.

**Definición 1.11.** Una **superficie** sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$  es un esquema entero, separado, de tipo finito sobre  $k$  y de dimensión dos. Una superficie es **racional** si es birracionalmente equivalente al plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ .

Las superficies que serán de nuestro interés durante el desarrollo de este trabajo serán las superficies proyectivas lisas definidas sobre un campo algebraicamente cerrado. Notemos

que en tal caso las nociones de divisores de Weil y divisores de Cartier coinciden, y tenemos que existe una correspondencia uno a uno entre clases de equivalencia de divisores (con la equivalencia lineal) y las clases de isomorfismo de gavillas invertibles. Así, podremos pasar sin problema alguno entre las clases de divisores de Weil, de Cartier y de gavillas invertibles. En adelante, una **curva** sobre una superficie proyectiva lisa será cualquier divisor efectivo no nulo sobre dicha superficie.

A continuación introduciremos la noción de sistema lineal, sus puntos base y presentaremos algunos ejemplos.

**Definición 1.12.** El **sistema lineal completo**  $|D|$  asociado a un divisor  $D$  sobre una superficie proyectiva lisa  $S$  es el conjunto

$$|D| = \{E \in \text{Div}(S) \mid E \text{ es efectivo y } E \sim D\},$$

donde  $\sim$  es la equivalencia lineal de divisores.

Observemos que un sistema lineal completo  $|D|$  está en correspondencia uno a uno con el conjunto  $(H^0(S, \mathcal{O}_S(D)) - \{0\})/k^*$  (ver por ejemplo [Har77, Proposición 7.7, p. 157]), de esta manera tenemos que  $|D|$  es un espacio proyectivo. En vista de este hecho, tenemos la siguiente definición:

**Definición 1.13.** Un **sistema lineal** es un subespacio lineal de un sistema lineal completo.

**Definición 1.14.** Sea  $D$  un divisor sobre una superficie proyectiva  $S$  y sea  $\mathfrak{d}$  un sistema lineal del sistema lineal completo  $|D|$ .

1. El **soporte** de  $D$  denotado por  $\text{Supp}(D)$  es la unión de todos los divisores primos que se encuentran en la descomposición de  $D$ .
2. Un punto  $p$  de  $S$  es un **punto base** de  $\mathfrak{d}$  si  $p \in \text{Supp}(E)$  para cada  $E \in \mathfrak{d}$ . El conjunto de puntos base de  $\mathfrak{d}$  se denota por  $\text{Bs}(\mathfrak{d})$ .

**Ejemplo 1.15.** Dada una recta  $L$  en el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ , se tiene que el conjunto de puntos base de  $|L|$  es vacío. En efecto, si existiese  $q \in \mathbb{P}^2$  de modo que  $q \in \text{Bs}(|L|)$ , entonces implicaría que cada recta en  $\mathbb{P}^2$  pasa por el punto  $q$  lo cual es imposible.

**Ejemplo 1.16.** Para un punto fijo  $p \in \mathbb{P}^2$ , sea  $\mathfrak{d}$  el sistema lineal formado por las rectas que pasan por  $p$ . Se tiene que  $\text{Bs}(\mathfrak{d}) = \{p\}$ .

**Ejemplo 1.17.** Sean  $p_1$  y  $p_2$  puntos distintos de  $\mathbb{P}^2$  y sea  $\mathfrak{d}$  el sistema lineal de las rectas que pasan por ambos puntos. Se tiene que  $\text{Bs}(\mathfrak{d})$  está formado por los puntos de la línea  $L_{p_1 p_2}$  que pasa a través de  $p_1$  y  $p_2$ . Esto se sigue del hecho que  $\mathfrak{d} = \{L_{p_1 p_2}\}$ .

Para concluir esta sección introduciremos la noción de componente fija y presentaremos algunos ejemplos.

**Definición 1.18.** Sea  $D$  un divisor sobre una superficie  $S$  y sea  $\mathfrak{d}$  un sistema lineal del sistema lineal completo  $|D|$ . **Una componente fija**  $F$  de  $\mathfrak{d}$  es un divisor efectivo sobre  $X$  tal que  $E - F$  es efectivo para cada  $E \in \mathfrak{d}$ .

Sea  $\mathfrak{d}$  un sistema lineal de un sistema lineal completo sobre  $S$ . En caso que  $\mathfrak{d}$  tenga una componente fija, existe una componente fija  $C$  de  $\mathfrak{d}$  de modo que  $C - F$  es efectivo para cada componente fija  $F$  de  $\mathfrak{d}$ . Dicha componente será llamada **la componente fija** de  $\mathfrak{d}$ .

**Ejemplo 1.19.** Dada una recta  $L$  en el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ , el sistema lineal completo  $|L|$  no tiene componentes fijas.

**Ejemplo 1.20.** Para un punto fijo  $p \in \mathbb{P}^2$ , sea  $\mathfrak{d}$  el sistema lineal formado por las rectas que pasan por  $p$ . Se tiene que  $\mathfrak{d}$  no tiene componentes fijas.

**Ejemplo 1.21.** Sean  $p_1$  y  $p_2$  puntos distintos de  $\mathbb{P}^2$  y sea  $\mathfrak{d}$  el sistema lineal de las rectas que pasan por ambos puntos. La componente fija del sistema lineal  $\mathfrak{d}$  es igual a  $L_{p_1 p_2}$ . Se sigue del hecho que  $\mathfrak{d} = \{L_{p_1 p_2}\}$ .

**2.2. Teoría de Intersección en Superficies.** En este apartado recordaremos la noción de número de intersección para divisores que se encuentran sobre una superficie proyectiva lisa. Dicha noción será fundamental en los capítulos posteriores. Asimismo, también enunciaremos el teorema de Riemann-Roch para una superficie proyectiva lisa en general y en el caso que ésta sea racional. Por último, introduciremos la equivalencia numérica en el grupo clases de divisores de Weil para definir el grupo de Néron-Severi de una superficie, la clase anticanónica y los monoides efectivo y nef.

**Definición 1.22.** Sean  $D$  y  $E$  divisores sobre una superficie proyectiva lisa  $S$  definida sobre un campo algebraicamente cerrado. El **número de intersección** de  $D$  y  $E$  está dado por

$$D.E = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(D)^{-1}) - \chi(\mathcal{O}_S(E)^{-1}) + \chi(\mathcal{O}_S(D)^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(E)^{-1}),$$

donde para una gavilla invertible  $\mathcal{L}$ , la **característica de Euler-Poincaré**  $\chi(\mathcal{L})$  es

$$\chi(\mathcal{L}) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_k H^i(S, \mathcal{L}).$$

Algunas de las propiedades que satisface el número de intersección se muestran a continuación (ver [Har77, Teorema 1.1, p. 357] para una demostración). Si  $D$ ,  $E$  y  $F$  son divisores sobre  $S$ , entonces se satisface lo siguiente:

1. Si  $D$  y  $E$  son curvas no singulares que se encuentran transversalmente, entonces  $D.E$  es el número de puntos de  $D \cap E$ ,
2. Simetría:  $D.E = E.D$ ,
3. Distributividad respecto a la suma de divisores:  $(D + E).F = D.F + E.F$ ,
4. Compatibilidad con la equivalencia lineal: si  $D$  es linealmente equivalente a  $E$ , entonces  $D.F = E.F$ .

**Teorema 1.23** (Teorema de Riemann-Roch). *Sea  $D$  un divisor sobre una superficie proyectiva lisa  $S$  definida sobre un campo algebraicamente cerrado. La siguiente igualdad se satisface:*

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(D)) - h^1(S, \mathcal{O}_S(D)) + h^2(S, \mathcal{O}_S(D)) = 1 + p_a(S) + \frac{1}{2}(D^2 - K_S.D),$$

donde  $p_a(S)$  es el género aritmético de  $S$  y  $K_S$  es un divisor canónico sobre  $S$ .

En el caso de una superficie proyectiva lisa racional que es el caso que será de nuestro mayor interés, puesto que su género aritmético es igual a cero, tenemos la siguiente versión del teorema de Riemann-Roch:

**Teorema 1.24** (Teorema de Riemann-Roch para superficies racionales). *Sea  $D$  un divisor sobre una superficie proyectiva lisa racional  $S$  definida sobre un campo algebraicamente cerrado. La siguiente igualdad se satisface:*

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(D)) - h^1(S, \mathcal{O}_S(D)) + h^2(S, \mathcal{O}_S(D)) = 1 + \frac{1}{2}(D^2 - K_S.D),$$

donde  $K_S$  es un divisor canónico sobre  $S$ .

**Definición 1.25.** Un divisor  $D$  sobre una superficie proyectiva lisa  $S$  es **numéricamente efectivo** (abreviado **nef** en adelante) si para cada curva entera  $E$  sobre  $S$  se tiene que  $D.E \geq 0$ .

A continuación presentamos algunas equivalencias a la definición de un divisor nef que nos serán de utilidad en lo posterior.

**Proposición 1.26.** *Sea  $D$  un divisor sobre una superficie proyectiva lisa  $S$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $D$  es nef.
2. Para cada divisor efectivo  $E$  sobre  $S$  se tiene que  $D.E \geq 0$ .

**Proposición 1.27.** *Sea  $D$  un divisor efectivo sobre una superficie proyectiva lisa  $S$  tal que  $D = \sum_{i=1}^t n_i E_i$ , donde  $t$  es un entero positivo,  $n_i$  es un entero no negativo y  $E_i$  es un divisor primo para todo  $i = 1, \dots, t$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $D$  es nef.
2.  $D.E_i$  es no negativo para cada  $i = 1, \dots, t$ .

Usando el número de intersección podemos definir una relación de equivalencia en el grupo de divisores de  $S$  de la siguiente forma: si  $D$  y  $E$  son divisores sobre  $S$ , entonces  $D$  está relacionado con  $E$  si y sólo si para cualquier divisor  $F$  se satisface que  $D.F = E.F$ . En tal caso,  $D$  y  $E$  son **numéricamente equivalentes** y denotamos este hecho por  $D \equiv E$ . Dicha relación se llama **relación de equivalencia numérica** y podemos tomar el cociente del grupo de divisores  $\text{Div}(S)$  por dicha relación.

**Definición 1.28.** El **grupo de Néron-Severi** de una superficie proyectiva lisa  $S$  es el grupo de divisores de  $S$  módulo la equivalencia numérica y se denota por  $\text{NS}(S)$ .

En capítulos posteriores, en algunas ocasiones denotaremos por  $[D]$  a la clase de un divisor  $D$  en el grupo de Néron-Severi  $\text{NS}(S)$ . La **clase canónica**  $\mathcal{K}_S$  es la clase de un divisor canónico en el grupo de Néron-Severi de  $S$  y de manera similar, la **clase anticanónica**  $-\mathcal{K}_S$  es la clase de un divisor anticanónico en el grupo de Néron-Severi de  $S$ . Una de las propiedades principales del grupo de Néron-Severi es que es un grupo finitamente generado.

**Teorema 1.29.** *El grupo de Néron-Severi  $\text{NS}(S)$  de una superficie proyectiva lisa  $S$  es un grupo abeliano libre de rango finito. El **número de Picard** de  $S$  denotado por  $\rho(S)$  es el rango de  $\text{NS}(S)$ .*

**Definición 1.30.** Sea  $S$  una superficie proyectiva lisa y sea  $\mathcal{D}$  una clase en el grupo de Néron-Severi  $\text{NS}(S)$ .

1.  $\mathcal{D}$  es **efectiva** si existe un divisor efectivo  $D$  tal que  $\mathcal{D}$  es igual a la clase de  $D$ .
2.  $\mathcal{D}$  es **nef** si existe un divisor nef  $D$  tal que  $\mathcal{D}$  es igual a la clase de  $D$ .

Ahora, consideraremos los siguientes subconjuntos del grupo de Néron-Severi:

$$\begin{aligned} \text{Eff}(S) &= \{ \mathcal{D} \in \text{NS}(S) \mid \mathcal{D} \text{ es una clase efectiva sobre } S \}, \\ \text{Nef}(S) &= \{ \mathcal{D} \in \text{NS}(S) \mid \mathcal{D} \text{ es una clase nef sobre } S \}. \end{aligned}$$

Por las propiedades de la equivalencia numérica es inmediato que ambos grupos tienen una estructura de monoide. De esta forma, realizamos la siguiente definición.

**Definición 1.31.** El **monoide efectivo** de  $S$  es  $\text{Eff}(S)$  y el **monoide nef** de  $S$  es  $\text{Nef}(S)$ .

### 3. Transformaciones Monoidales y Contracciones

En esta breve sección recordaremos algunas de las propiedades de una transformación monoidal, un tipo especial de explosión sobre una superficie. Asimismo, enunciaremos un criterio que bajo ciertas condiciones permite revertir este tipo de modificación. A lo largo de toda esta sección, una superficie será una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$ .

Siguiendo la terminología de [Har77, Capítulo 5], una **transformación monoidal** de una superficie es la explosión de ésta en un punto. El hecho de fijar esta definición tiene el fin de distinguir la explosión de una superficie en un punto de la explosión en subesquema cerrado arbitrario.

Sea  $S$  una superficie y consideremos un punto  $p$  en  $S$ . Denotaremos por  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$  a la transformación monoidal con centro en  $p$ . Luego, tenemos que  $\pi$  induce un isomorfismo entre  $\tilde{S} - \{\pi^{-1}(p)\}$  y  $S - \{p\}$ , y que la imagen inversa de  $p$  es una curva  $E$  que es llamada el **divisor excepcional** (o la **curva excepcional**) correspondiente a  $p$ . A continuación mencionaremos algunos resultados que se obtienen cuando realizamos una transformación monoidal.

**Proposición 1.32.** *La variedad  $\tilde{S}$  es una superficie proyectiva lisa. La curva  $E$  es isomorfa a  $\mathbb{P}^1$  y la autointersección de  $E$  en  $\tilde{S}$  es  $E^2 = -1$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver [Har77, Proposición 3.1, p. 386]. □

**Proposición 1.33.** *La aplicación*

$$\begin{aligned} \text{Pic}(S) \oplus \mathbb{Z} &\rightarrow \text{Pic}(\tilde{S}) \\ (\mathcal{L}, n) &\mapsto \pi^*\mathcal{L} + nE \end{aligned}$$

*es un isomorfismo de grupos. Además, la forma de intersección en  $\tilde{S}$  está definida de la siguiente forma:*

1. Si  $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in \text{Pic}(S)$ , entonces  $(\pi^*\mathcal{L}).(\pi^*\mathcal{M}) = \mathcal{L}.\mathcal{M}$ ,
2. Si  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(S)$ , entonces  $(\pi^*\mathcal{L}).E = 0$ ,
3.  $E^2 = -1$ ,

*además, si  $\pi_* : \text{Pic}(\tilde{S}) \rightarrow \text{Pic}(S)$  denota la proyección en el primer factor, entonces*

4. Si  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(S)$  y  $\mathcal{M} \in \text{Pic}(\tilde{S})$ , entonces  $(\pi^*\mathcal{L}).\mathcal{M} = \mathcal{L}.(\pi_*\mathcal{M})$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver [Har77, Proposición 3.2, p. 386]. □

**Proposición 1.34.** *Un divisor canónico sobre  $\tilde{S}$  está dado por  $K_{\tilde{S}} = \pi^*K_S + E$ , y consecuentemente  $K_{\tilde{S}}^2 = K_S^2 - 1$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver [Har77, Proposición 3.3, p. 387]. □

Lo siguiente que comentaremos es qué sucede con una curva bajo una transformación monoidal. Sea  $C$  una curva sobre  $S$ . La **transformada estricta**  $\tilde{C}$  de  $C$  bajo  $\pi$  es el subesquema cerrado de  $\tilde{S}$  obtenido de la explosión de  $C$  en  $p$ . Además, también es igual a la cerradura en  $\tilde{S}$  de  $\pi^{-1}(C \cap (S - \{p\}))$ . Así, tenemos que  $\tilde{C}$  puede obtenerse de  $\pi^*C$  al eliminar la curva excepcional  $E$  con la multiplicidad que tiene en  $\pi^*C$ .

**Proposición 1.35.** *Sea  $C$  un curva sobre  $S$ , sea  $p \in S$  un punto con multiplicidad  $r$  en  $C$  y sea  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$  la transformación monoidal con centro en  $p$ . Se tiene que  $\pi^*C = \tilde{C} + rE$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver [Har77, Proposición 3.6, p. 389]. □

**Corolario 1.36.** *Con las hipótesis de la proposición anterior, se tiene que  $\tilde{C}.E = r$  y que  $p_a(\tilde{C}) = p_a(C) - \frac{1}{2}r(r - 1)$ .*

**Observación 1.37.** Para una transformación monoidal  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$  con centro en  $p \in S$  identificaremos a los puntos que se encuentran en el abierto donde  $\pi$  es un isomorfismo, es decir, si  $q \in S - \{p\}$  y  $\tilde{q} \in \tilde{S} - \{\pi^{-1}(p)\}$  de modo que  $\pi(\tilde{q}) = q$ , entonces diremos que  $q$  es un punto de  $\tilde{S}$  en el entendido que realmente nos referimos al punto  $\tilde{q}$ .

**Definición 1.38.** Sea  $S$  una superficie. Cualquier punto de cualquier superficie  $S'$  obtenida a partir de  $S$  de una sucesión finita de transformaciones monoidales de  $S$  es un **punto infinitamente cercano de  $S$** . Si  $f : S'' \rightarrow S'$  es otra transformación monoidal y si  $q \in S''$  es un punto que se encuentra en el abierto donde  $f$  es un isomorfismo, entonces identificamos a  $q$  con  $f(q)$  como puntos infinitamente cercanos de  $S$ . En particular, todos los puntos ordinarios de  $S$  se encuentran entre los puntos infinitamente cercanos. Además,  $q$  es **infinitamente cercano a  $p$**  si  $q$  está en el divisor excepcional correspondiente al punto  $p$ . Asimismo, si  $C$  es una curva en  $S$  y  $q \in S'$  es un punto infinitamente cercano a  $S$ ,  $q$  es **infinitamente cercano a  $C$**  si  $q$  está en la transformada estricta de  $C$  en  $S'$ .

Ahora bien, una pregunta natural que puede surgir es si es posible revertir una transformación monoidal, es decir, si consideramos una superficie  $S$ , ¿existirá una superficie  $T$  de modo que la superficie obtenida de una transformación monoidal centrada en alguno de sus puntos sea igual a  $S$ ? El siguiente resultado nos brindará una respuesta a ésta interrogante.



**Teorema 1.39** (Criterio de Contractibilidad de Castelnuovo). *Sea  $C$  una curva sobre una superficie  $S$  tal que  $C \cong \mathbb{P}^1$  y  $C^2 = -1$ . Existe un morfismo  $f : S \rightarrow T$  a una superficie  $T$  y un punto  $p$  en  $T$  de modo que  $S$  es isomorfa vía  $f$  a la transformación monoidal de  $T$  en  $p$  y  $C$  es la curva excepcional.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [Har77, Teorema 5.7, p. 414]. □

Ahora presentaremos dos clases especiales de curvas que serán de gran importancia para nuestro estudio, una de dichas clases está motivada por las curvas utilizadas en el teorema anterior.

**Definición 1.40.** Sea  $C$  una curva sobre una superficie  $S$ .

1.  $C$  es una **curva**  $(-1)$  si  $C^2 = -1$  y  $C$  es isomorfa a  $\mathbb{P}^1$ .
2.  $C$  es una **curva**  $(-2)$  si  $C^2 = -2$  y  $K_S.C = 0$ , donde  $K_S$  es un divisor anticanónico sobre  $S$ .

Para finalizar esta sección, el siguiente resultado nos presenta una caracterización de las curvas  $(-1)$  sobre una superficie que nos será de gran utilidad.

**Lema 1.41.** *Sea  $C$  una curva sobre una superficie  $S$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $C$  es una curva  $(-1)$ .
2. Se tiene que  $C^2 = -1$  y  $p_a(C) = 0$ .
3. Se tiene que  $C^2 = -1$  y  $-K_S.C = 1$

## 4. Superficies Regladas

El objetivo de esta sección es recordar a las superficies regladas y algunas de sus propiedades. En particular, centraremos nuestra atención en las llamadas superficies de Hirzebruch. Recordemos que en todo momento una superficie será una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$ . El contenido de este apartado está basado en la Sección 2 del Capítulo V de [Har77] y el Capítulo 12 de [Bad01].

**4.1. Conceptos Básicos.** En este apartado revisaremos la noción de una superficie reglada y enunciaremos algunas de sus propiedades principales.

**Definición 1.42.** Una **superficie reglada** es una superficie  $S$  junto con un morfismo sobreyectivo  $\pi : S \rightarrow C$  a una curva lisa  $C$  tal que la fibra de cada punto de  $C$  es isomorfa a  $\mathbb{P}^1$  y tal que  $\pi$  admite una sección (es decir, un morfismo  $\sigma : C \rightarrow S$  tal que  $\pi \circ \sigma = \text{id}_C$ ).

La sección a la que se refiere la definición anterior es precisamente  $\sigma(C) \subseteq S$ . De este modo, cuando nos referimos a una “sección de la superficie reglada” estaremos hablando de  $\sigma(C)$  para alguna sección  $\sigma$ . Además, por una “fibra de la superficie reglada” nos referiremos a una fibra del morfismo  $\pi$ .

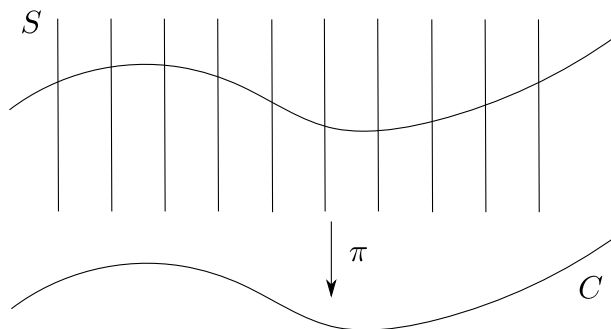


FIGURA 1.1. Superficie Reglada.

Una de las propiedades más relevantes de las superficies regladas es que dichas superficies siempre pueden ser construidas a partir de gavillas localmente libres de rango dos.

**Proposición 1.43.** Si  $\pi : S \rightarrow C$  es una superficie reglada, entonces existe una gavilla localmente libre de rango dos  $\mathcal{G}$  sobre  $C$  tal que  $S \cong \mathbb{P}(\mathcal{G})$  sobre  $C$ . Recíprocamente,  $\mathbb{P}(\mathcal{G})$  es una superficie reglada sobre  $C$ . Además, si  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}'$  son gavillas localmente libres de rango dos, entonces  $\mathbb{P}(\mathcal{G})$  y  $\mathbb{P}(\mathcal{G}')$  son isomorfas como superficies regladas sobre  $C$  si y sólo si existe una gavilla invertible  $\mathcal{L}$  tal que  $\mathcal{G}' \cong \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver [Har77, Proposición 2.2, p. 370]. □

**Proposición 1.44.** Sea  $\pi : S \rightarrow C$  una superficie reglada, sea  $C_0 \subset S$  una sección y sea  $F$  una fibra. Se tiene que  $\text{Pic}(S)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \pi^*(\text{Pic}(C))$ , donde  $\mathbb{Z}$  es generado por la clase de  $C_0$  bajo la equivalencia lineal. Además,  $\text{NS}(S)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}[C_0] \oplus \mathbb{Z}[F]$  y se satisface que  $C_0 \cdot F = 1$  y  $F^2 = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver por ejemplo [Har77, Proposición 2.3, p. 370]. □

**Proposición 1.45.** Dada una superficie reglada  $\pi : S \rightarrow C$  existe una gavilla localmente libre  $\mathcal{G}$  sobre  $C$  tal que  $S \cong \mathbb{P}(\mathcal{G})$  y de modo que  $H^0(C, \mathcal{G}) \neq \{0\}$  pero tal que para cualquier

gavilla invertible  $\mathcal{L}$  sobre  $C$  con  $\deg \mathcal{L} < 0$  se tiene que  $H^0(C, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}) = \{0\}$ . Así, el entero  $n = -\deg \mathcal{G}$  es un invariante de  $S$ . Además, existe una sección  $\sigma_0 : C \rightarrow S$  con imagen  $C_0$  de manera que  $\mathcal{O}_S(C_0) \cong \mathcal{O}_S(1)$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver [Har77, Proposición 2.8, p. 372]. □

Bajo las condiciones de la proposición anterior, consideremos al divisor  $\mathfrak{e}$  sobre  $C$  como el correspondiente a la gavilla invertible  $\bigwedge^2 \mathcal{G}$ , así  $n = -\deg \mathfrak{e}$ . Luego, fijamos una sección  $C_0$  de  $S$  de modo que  $\mathcal{O}_S(C_0) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{G})}(1)$ . Con éstas condiciones tenemos los siguientes resultados.

**Proposición 1.46.** *Sea  $D$  una sección de  $S$  correspondiente a un morfismo sobreyectivo  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}$ , donde  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S(\mathfrak{d})$  para algún divisor  $\mathfrak{d}$  sobre  $C$ . Se satisface que  $\deg \mathfrak{d} = C_0 \cdot D$  y que  $D$  es linealmente equivalente a  $C_0 + \pi^*(\mathfrak{d} - \mathfrak{e})$ . En particular,  $C_0^2 = \deg \mathfrak{e} = -n$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver [Har77, Proposición 2.9, p. 373]. □

**Lema 1.47.** *Un divisor canónico  $K_S$  sobre una superficie reglada  $\pi : S \rightarrow C$  es linealmente equivalente a  $-2C_0 + (K_C + \mathfrak{e})F$ , donde  $K_C$  es un divisor canónico sobre  $C$ . Consecuentemente, la clase canónica  $\mathcal{K}_S$  respecto a la equivalencia numérica es igual a  $-2[C_0] + (2g - n - 2)[F]$  donde  $g$  es el género de la curva  $C$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver Teorema 2.10 y Corolario 2.11 del Capítulo V de [Har77]. □

**4.2. Superficies de Hirzebruch.** En este apartado estudiaremos un caso especial de superficies regladas que serán las de mayor interés para nuestro estudio, hablamos de las superficies de Hirzebruch. Dicha clase de superficies es obtenida al considerar como base a la línea proyectiva  $\mathbb{P}^1$ .

**Definición 1.48.** La  $n$ -ésima superficie de Hirzebruch asociada a un entero no negativo  $n$  y denotada como  $\Sigma_n$  es la superficie reglada obtenida de la gavilla localmente libre de rango dos  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$  sobre  $\mathbb{P}^1$ .

El siguiente lema nos asegura la existencia de ciertas curvas lisas racionales sobre una superficie de Hirzebruch.

**Proposición 1.49.** *Consideremos la  $n$ -ésima superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  asociada a un entero no negativo  $n$ . Sean  $a$  y  $b$  números enteros. Se satisface lo siguiente:*

1. *Existe una sección linealmente equivalente a  $C_n + bF$  si y sólo si  $b = 0$  ó  $b \geq n$ . En particular, existe una sección  $C_\infty$  llamada **sección al infinito** que es linealmente equivalente a  $C_n + nF$ , no interseca a la curva  $C_n$  y satisface que  $C_\infty^2 = n$ .*

2. El sistema lineal completo  $|C_n + bF|$  es libre de puntos base si y sólo si  $b \geq n$ .
3. Para un divisor  $aC_n + bF$  sobre  $\Sigma_n$ , los siguientes enunciados son equivalentes:
  - a) El sistema lineal completo  $|aC_n + bF|$  contiene una curva lisa irreducible.
  - b) El sistema lineal completo  $|aC_n + bF|$  contiene una curva irreducible.
  - c) Sucede que o bien  $(a = 0 \text{ y } b = 1)$ , ó  $(a = 1 \text{ y } b = 0)$ , ó  $(a > 0 \text{ y } b > na)$ , ó  $(n > 0, a > 0 \text{ y } b = na)$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver el Teorema 2.17 y el Corolario 2.18 del Capítulo V de [Har77].  $\square$

Denotaremos por  $\mathfrak{F}$  al elemento de  $\text{NS}(\Sigma_n)$  asociado a cualquier fibra  $F$  del reglado de  $\Sigma_n$  si  $n > 0$ , y cualquier fibra de cualquier reglado de  $\Sigma_0$  en el caso  $n = 0$ . Además, denotaremos por  $\mathfrak{C}_n$  al elemento de  $\text{NS}(\Sigma_n)$  determinado por la única curva entera  $C_n$  de autointersección igual a  $-n$  si  $n > 0$ , o cualquier fibra  $F'$  del segundo reglado si  $n = 0$ .

De las Proposiciones 1.44 y 1.46 se sigue que el grupo de Néron-Severi  $\text{NS}(\Sigma_n)$  de  $\Sigma_n$  es un grupo abeliano libre generado por  $\mathfrak{C}_n$  y  $\mathfrak{F}$  y la forma de intersección inducida está dada en los generadores de la siguiente forma:

$$\mathfrak{C}_n^2 = -n, \quad \mathfrak{F}^2 = 0, \quad \text{y} \quad \mathfrak{C}_n \cdot \mathfrak{F} = 1.$$

Asimismo, del Lema 1.47 tenemos que la clase de un divisor anticanónico en el grupo de Néron-Severi  $\text{NS}(\Sigma_n)$  es igual a  $2\mathfrak{C}_n + (n + 2)\mathfrak{F}$ .

El siguiente resultado nos presenta una descripción de los monoides efectivo y nef de una superficie de Hirzebruch.

**Lema 1.50.** *Sea  $\Sigma_n$  la superficie de Hirzebruch asociada al entero no negativo  $n$ .*

1. El monoide efectivo  $\text{Eff}(\Sigma_n)$  de  $\Sigma_n$  es igual a  $\mathbb{Z}_+\mathfrak{C}_n + \mathbb{Z}_+\mathfrak{F}$ .
2. El monoide nef  $\text{Nef}(\Sigma_n)$  de  $\Sigma_n$  es igual a  $\mathbb{Z}_+(\mathfrak{C}_n + n\mathfrak{F}) + \mathbb{Z}_+\mathfrak{F}$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver [CFLO12, Lema 31, p. 5].  $\square$

**4.3. Transformaciones Elementales.** En este apartado recordaremos cómo es posible pasar de una superficie reglada a otra superficie reglada, ambas definidas sobre la misma base, a través de aplicaciones racionales. Como caso particular revisaremos qué sucede con las superficies de Hirzebruch.

Sea  $\pi : S \rightarrow C$  una superficie reglada, sea  $p$  un punto de  $S$  y sea  $F$  la fibra de  $\pi$  que contiene a  $p$ . Consideremos la transformación monoidal  $f : \tilde{S} \rightarrow S$  con centro en  $p$ . Denotamos por  $E$  a la curva excepcional correspondiente a  $p$ . Observemos que la transformada estricta  $\tilde{F}$  de

$F$  es isomorfa a  $\mathbb{P}^1$  y que  $\tilde{F}^2 = -1$ . En efecto, por un lado tenemos que  $p_a(F) = 0$  lo cual implica que  $p_a(\tilde{F}) = 0$ , y por otro lado el hecho que  $F^2 = 0$  y que  $\tilde{F} = f^*F - E$  implican que la autointersección de  $\tilde{F}$  es igual a menos uno. Así, por el criterio de contractibilidad de Castelnuovo podemos contraer la curva  $\tilde{F}$ , es decir, existe un morfismo  $g : \tilde{S} \rightarrow S'$  que envía  $\tilde{F}$  a un punto  $q$  de  $S'$  y de manera que  $g$  es la transformación monoidal de  $S'$  con centro en  $q$ . De esta forma, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{S} & \\
 f \swarrow & & \searrow g \\
 S & & S' \\
 \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\
 & C &
 \end{array}$$

Denotamos  $G = g(E)$ . Notemos que  $G \cong \mathbb{P}^1$  y que  $G^2 = 0$  puesto que respectivamente  $p_a(E) = 0$  y  $g^*G = E + \tilde{F}$ . Por otro lado, existe un isomorfismo  $\varphi : S' - G \rightarrow S - F$  que se construye a partir de los isomorfismos  $S' - \{q\} \cong \tilde{S} - \tilde{F}$  y  $S - \{p\} \cong \tilde{S} - E$  que son inducidos por las respectivas transformaciones monoidales. Luego, usando a los morfismos  $\pi$  y  $\varphi$  tenemos definida una aplicación racional  $\pi' : S' \rightarrow C$  que de hecho es un morfismo sobreyectivo. Aún más, todas las fibras de  $\pi'$  tienen género aritmético igual a cero lo cual implica que cada una de ellas es isomorfa a  $\mathbb{P}^1$ . Por último, usando la sección que admite  $\pi$  construimos una sección para  $\pi'$ . De esta forma, hemos construido una nueva superficie reglada sobre  $C$ , tal superficie reglada se llama la **transformación elemental de  $S$  con centro en  $p$**  y se denota por  $\text{elem}_p S$ .

En el caso de las superficies regladas que son de nuestro mayor interés, es decir las superficies de Hirzebruch, estudiaremos cuál es el comportamiento de sus transformaciones elementales. Consideremos la  $n$ -ésima superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  para un número entero no negativo  $n$  y fijemos un punto  $p$  en  $\Sigma_n$ . En primer lugar, observemos que si  $n = 0$ , es decir si estamos en  $\Sigma_0$ , entonces  $\text{elem}_p \Sigma_0$  es isomorfa a  $\Sigma_1$ . En efecto, en la explosión de  $\Sigma_0$  en un punto  $p$  se están generando tres curvas  $(-1)$ , el divisor excepcional correspondiente a  $p$ , la transformada estricta  $\tilde{F}$  de la fibra  $F$  del primer reglado que contiene a  $p$  y la transformada estricta  $\tilde{G}$  de la fibra  $G$  del segundo reglado que contiene a  $p$ . Luego, al contraer la curva  $\tilde{F}$  obtenemos que  $\tilde{G}$ , la curva en  $\text{elem}_p \Sigma_0$  cuya transformada estricta bajo la transformación monoidal inducida de la contracción de  $\tilde{F}$  es igual a  $\tilde{G}$ , es la única curva sobre  $\text{elem}_p \Sigma_0$  de autointersección  $-1$ . Puesto que  $\text{elem}_p \Sigma_0$  es una superficie reglada sobre  $\mathbb{P}^1$  con una única curva  $(-1)$  concluimos que debe ser isomorfa a  $\Sigma_1$ .

En segundo lugar, supongamos que  $n \geq 1$  y denotemos por  $F$  a la fibra que contiene a  $p$ . Denotaremos por  $\widetilde{C}_n$  (respectivamente, por  $\widetilde{C}_\infty$ ) a la transformada estricta de  $C_n$  (respectivamente, de  $C_\infty$ ) bajo la transformación monoidal centrada en  $p$ , y por  $\widetilde{\widetilde{C}}_n$  (respectivamente,  $\widetilde{\widetilde{C}}_\infty$ ) a la curva en  $\text{elem}_p \Sigma_n$  cuya transformada estricta bajo la transformación monoidal inducida de la contracción de  $\widetilde{F}$  es igual a  $\widetilde{C}_n$  (respectivamente, a  $\widetilde{C}_\infty$ ). Distinguiremos entre dos casos:

a)  $p \in C_n$ . Para este caso, observemos que se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\widetilde{C}_n^2 = -n - 1, \quad \widetilde{C}_\infty^2 = n, \quad \widetilde{\widetilde{C}}_n^2 = -n - 1, \quad \text{y} \quad \widetilde{\widetilde{C}}_\infty^2 = n + 1.$$

De esta forma, puesto que  $\text{elem}_p \Sigma_n$  debe ser una superficie de Hirzebruch, por lo anterior concluimos que  $\text{elem}_p \Sigma_n \cong \Sigma_{n+1}$  (ver Figura 1.2).

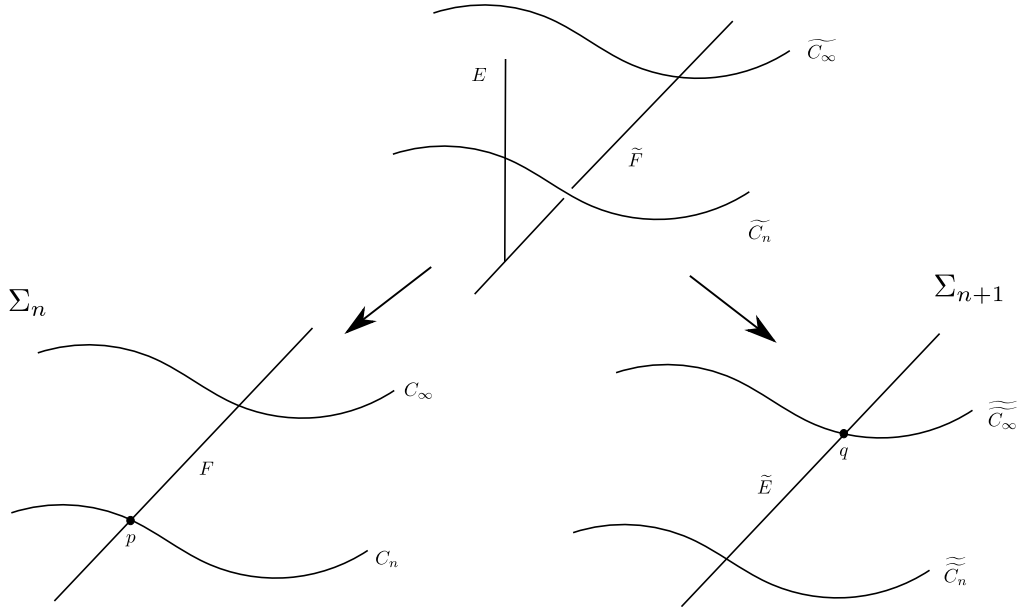


FIGURA 1.2. Transformación elemental de  $\Sigma_n$  cuando  $p \in C_n$ .

b)  $p \notin C_n$ . Puesto que el punto no está contenido en la curva negativa, sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $p$  se encuentra en la curva al infinito  $C_\infty$ . Luego, de forma análoga al caso anterior, tenemos que se cumplen las igualdades

$$\widetilde{C}_n^2 = -n, \quad \widetilde{C}_\infty^2 = n - 1, \quad \widetilde{\widetilde{C}}_n^2 = -n + 1, \quad \text{y} \quad \widetilde{\widetilde{C}}_\infty^2 = n - 1.$$

Así, como  $\text{elem}_p \Sigma_n$  tiene que ser alguna superficie de Hirzebruch, lo anterior implica que  $\text{elem}_p \Sigma_n \cong \Sigma_{n-1}$  (ver Figura 1.3).

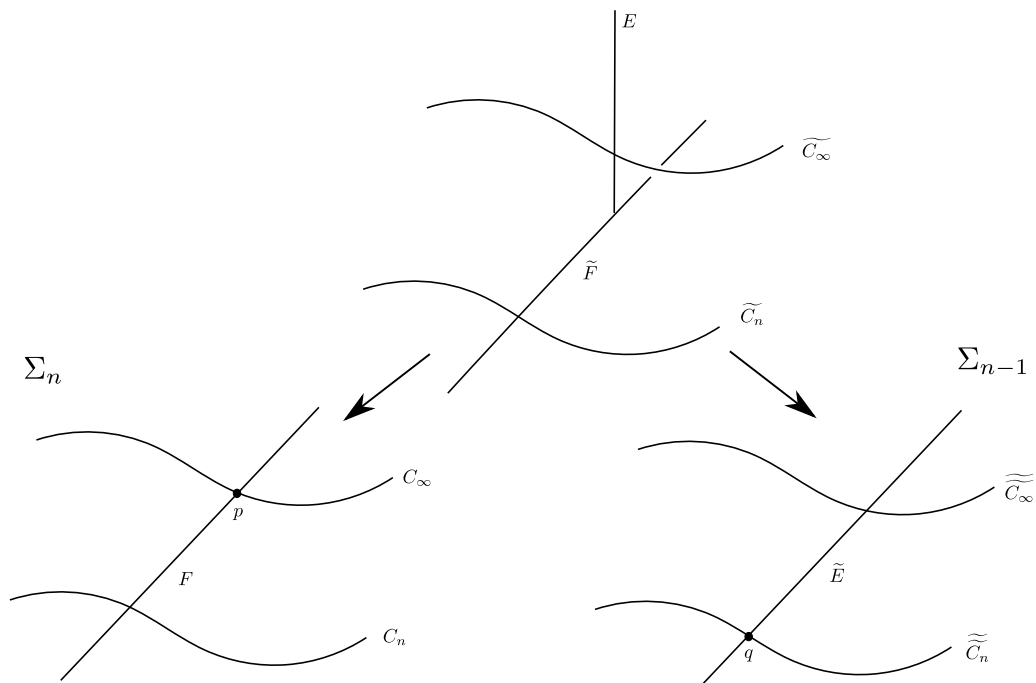


FIGURA 1.3. Transformación elemental de  $\Sigma_n$  cuando  $p \notin C_n$ .

Las transformaciones elementales de una superficie de Hirzebruch serán retomadas en la Sección 2.2 del Capítulo 11 (ver Lemas 11.23 y 11.24) y nos ayudarán en la clasificación de las superficies obtenidas como la explosión de una superficie de Hirzebruch en puntos en posición general que tienen monoides efectivos finitamente generados (ver Teoremas 11.13, 11.14, 11.16, 11.17 y 11.25).

## CAPÍTULO 2

# ANILLOS DE COX DE SUPERFICIES

El concepto del anillo de Cox de una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado (ver Definición 2.1) será introducido en este capítulo. Además de definir dicha álgebra en la primera sección, presentaremos un ejemplo, mencionaremos por qué es importante conocer si es finitamente generada y mencionaremos algunos trabajos recientes basados en dicho objeto. En la segunda sección introduciremos el concepto de *superficie extremal* (ver Definición 2.7), una clase especial de superficies proyectivas lisas que nos ayudarán a establecer un criterio para la finitud del anillo de Cox, y presentaremos algunos ejemplos. Para concluir, en la tercera sección presentaremos un criterio para la finitud del anillo de Cox de superficies proyectivas lisas (ver Teorema 2.13) y como una consecuencia obtendremos un criterio para el caso de una superficie proyectiva lisa racional anticanónica (ver Corolario 2.14).

### 1. El Anillo de Cox de una Superficie

En esta sección introduciremos el concepto de anillo de Cox para una superficie proyectiva lisa y mencionaremos algunos de los resultados conocidos sobre tal objeto.

**Definición 2.1.** Sea  $S$  una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$  tal que la equivalencia lineal y la equivalencia numérica en el grupo de divisores de Cartier son iguales. El **anillo de Cox** de  $S$  es la  $k$ -álgebra

$$\mathrm{Cox}(S) = \bigoplus_{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r} H^0(S, \mathcal{L}_1^{\otimes n_1} + \dots + \mathcal{L}_r^{\otimes n_r}),$$



donde  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{r-1}$  y  $\mathcal{L}_r$  constituyen una base para el  $\mathbb{Z}$ -módulo libre  $\text{Pic}(S)$  de rango  $r$ .

**Ejemplo 2.2.** Consideremos al plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ . Para determinar el anillo de Cox de  $\mathbb{P}^2$  en primer lugar debemos encontrar una base para su grupo de Picard. Por el Corolario 1.9 tenemos que  $\text{Cl}(\mathbb{P}^2)$  es isomorfo a  $\text{Pic}(\mathbb{P}^2)$ , además, puesto que  $\text{Cl}(\mathbb{P}^2)$  está generado por la clase del hiperplano  $V(x_0)$  se sigue que  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$  genera a  $\text{Pic}(\mathbb{P}^2)$ . De esta forma, si  $\mathcal{L}$  es una gavilla invertible sobre  $\mathbb{P}^2$  se sigue que existe un número entero  $n$  de modo que  $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$ . Por lo tanto, podemos describir al anillo de Cox de  $\mathbb{P}^2$  de la siguiente manera:

$$\text{Cox}(\mathbb{P}^2) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)).$$

Por último, recordando que la suma directa de todas las secciones globales de las gavillas invertibles de la forma  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$  (donde  $n$  es un entero) es precisamente el anillo de polinomios en tres variables sobre  $k$  (ver por ejemplo [Har77, Teorema 5.1, p. 225]), concluimos que las  $k$ -álgebras  $\text{Cox}(\mathbb{P}^2)$  y  $k[x_0, x_1, x_2]$  son isomorfas.

Uno de los problemas de mayor interés en la actualidad es determinar cuándo el anillo de Cox de una superficie proyectiva lisa es finitamente generado como  $k$ -álgebra y en tal caso, determinar explícitamente sus generadores y las relaciones entre ellos. En efecto, es de gran interés para el Programa del Modelo Mínimo (MMP por sus siglas en inglés) que una superficie tenga anillo de Cox finitamente generado ya que en este caso dicho programa puede ser llevado a cabo para cualquier divisor sobre la superficie (ver [HK00, Proposición 2.9, p. 342]).

A pesar que la definición anterior es muy concreta, el determinar si el anillo de Cox es finitamente generado puede ser un problema complicado; de igual forma, en caso de saber que tal álgebra es finitamente generada el calcular sus generadores y relaciones es un problema que está lejos de ser sencillo. En lo que resta de esta sección, comentaremos algunos de los resultados conocidos en relación con el anillo de Cox de superficies proyectivas lisas.

Una de las primeras clases de superficies estudiadas respecto a la finitud de sus anillos de Cox fue la de las superficies de Del Pezzo, es decir superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  puntos en posición general con  $r \leq 8$ . En [BP04], Batyrev y Popov muestran que el anillo de Cox de una superficie de Del Pezzo obtenida al explotar  $3 \leq r \leq 8$  puntos es finitamente generado y conjeturan que las relaciones para los generadores deben ser cuadráticas para cada  $4 \leq r \leq 8$ . Luego, Stillman, Testa y Velasco prueban en [STV07] tal conjetura para  $r = 4, 5$  y para  $r = 6$  cuando la superficie no tiene puntos de Eckart. Finalmente, Testa, Várilly-Alvarado y Velasco prueban tal conjetura de manera definitiva en [TVV09].

Galindo y Monserrat brindan un criterio para la finitud del anillo de Cox de una superficie proyectiva lisa en [GM05a] al demostrar que la finitud del anillo de Cox es equivalente a que el conjunto de las curvas de autointersección negativa sea finito junto con la existencia de cierta  $k$ -álgebra finitamente generada.

El caso de las superficies  $K3$  fue estudiado por Artebani, Hausen y Laface en [AHL10]. En dicho trabajo muestran la equivalencia entre la finitud del anillo de Cox de una superficie  $K3$  y el hecho de que su cono efectivo sea poliédrico. Aún más, en dicho trabajo determinan explícitamente el anillo de Cox algunas clases de este tipo de superficies. Posteriormente, Ottem extiende el estudio de los anillos de Cox para otras clases de superficies  $K3$  en [Ott13].

Regresando al caso de superficies racionales, en [Ott09] Ottem demuestra que el anillo de Cox de la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en un número finito de puntos colineales es finitamente generado, aún más, presenta los generadores y las relaciones para dicha álgebra (dicho resultado fue publicado posteriormente en [Ott11]).

Por otra parte, la finitud del anillo de Cox de una superficie racional proyectiva lisa  $S$  también ha sido estudiada a través de la dimensión anticanónica de Iitaka  $\kappa(-K_S)$ . En el caso en que  $\kappa(-K_S) = 1$ , en [AL11] Artebani y Laface muestran que el anillo de Cox de  $S$  es finitamente generado, si y sólo si el cono efectivo es poliédrico, si y sólo si  $S$  contiene un número finito de curvas  $(-1)$ . Cuando se tiene que  $\kappa(-K_S) = 2$ , Testa, Várilly-Alvarado y Velasco prueban en [TVV11] que el anillo de Cox siempre es finitamente generado.

Dentro de los trabajos más recientes, Derenthal realiza en [Der14] la clasificación de los anillos de Cox de las superficies generalizadas de Del Pezzo presentando sus generadores y relaciones. Derenthal, Hausen, Heim, Keicher y Laface determinan en [DHHKL15] los anillos de Cox de las superficies obtenidas de las resoluciones de superficies cúbicas con a lo más puntos dobles racionales, y de las superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en ciertas configuraciones de seis puntos que no están en posición general. En [HP14] y [HP15] Hwang y Park estudian los anillos de Cox de las superficies obtenidas de explosiones redundantes. En [GM16] una familia de superficies de dimensión anticanónica de Iitaka que no es finita cuyos anillos de Cox son finitamente generados fueron construidas por Galindo y Monserrat utilizando valoraciones divisoriales. Artebani, Garbagnati y Laface muestran en [AGL16] que las superficies racionales elípticas extremas (la noción de extremal en este trabajo es diferente de la que presentaremos en la próxima sección) tienen anillos de Cox finitamente generados y calculan sus generadores y sus relaciones.

En la Sección 3 presentaremos nuestro criterio para la finitud del anillo de Cox de una superficie proyectiva lisa utilizando la noción de superficie extremal que será introducida en la siguiente sección.

## 2. Superficies Extremales

El objetivo de esta sección es introducir nuestro concepto de superficies extremales, para ello necesitaremos introducir dos monoides especiales y posteriormente presentaremos algunos ejemplos de tales superficies. La importancia de las superficies extremales se verá en la próxima sección donde utilizaremos dicha noción para presentar un criterio para la finitud del anillo de Cox de una superficie proyectiva lisa. Los conceptos presentados en este apartado están basados en el trabajo publicado [DFLMO15]. A lo largo de esta sección, una superficie será una superficie proyectiva lisa que está definida sobre un campo algebraicamente cerrado de característica arbitraria.

Sea  $S$  una superficie. Consideremos el siguiente subconjunto de elementos del grupo de Néron-Severi de  $S$ :

$$\text{Char}(S) = \{ \mathcal{D} \in \text{NS}(S) \mid \exists D \text{ divisor efectivo tal que } \mathcal{D} = [D] \text{ y } \text{Bs}(|D|) = \emptyset \}.$$

Observemos que dicho conjunto tiene una estructura de monoide. En efecto, es claro que  $[0_{\text{Div}(S)}]$  es un elemento de dicho conjunto. Ahora, sean  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  elementos de  $\text{Char}(S)$ , así, existen divisores efectivos  $D_1$  y  $D_2$  sobre  $S$  tales que  $\mathcal{D}_1 = [D_1]$ ,  $\mathcal{D}_2 = [D_2]$  y de modo que  $\text{Bs}(|D_1|) = \text{Bs}(|D_2|) = \emptyset$ . Es claro que  $D_1 + D_2$  es un divisor efectivo. Ahora, supongamos que existe  $p \in S$  tal que  $p \in \text{Bs}(|D_1 + D_2|)$ . Como  $|D_1|$  no tiene puntos base, se tiene que existe un divisor efectivo  $D'_1$  que es linealmente equivalente a  $D_1$  tal que  $p \notin \text{Supp}(D'_1)$ ; de manera similar, como  $|D_2|$  no tiene puntos base, tenemos que existe un divisor efectivo  $D'_2$  que es linealmente equivalente a  $D_2$  tal que  $p \notin \text{Supp}(D'_2)$ . De esta forma,  $D'_1 + D'_2$  es un divisor efectivo linealmente equivalente a  $D_1 + D_2$  tal que  $p \notin \text{Supp}(D'_1 + D'_2)$  lo cual contradice que  $p$  es un punto base de  $|D_1 + D_2|$ . Por lo tanto,  $[D_1 + D_2] = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$  es un elemento de  $\text{Char}(S)$ .

Ahora, consideremos el siguiente subconjunto de elementos de  $\text{NS}(S)$ :

$$[\text{Char}(S) : \text{Nef}(S)] = \{ \mathcal{D} \in \text{NS}(S) \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ con } n\mathcal{D} \in \text{Char}(S) \}.$$

Este conjunto al igual que  $\text{Char}(S)$  también tiene una estructura de monoide. En efecto, es evidente que el elemento nulo está en  $[\text{Char}(S) : \text{Nef}(S)]$ . Luego, sean  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  elementos de  $[\text{Char}(S) : \text{Nef}(S)]$  y consideremos enteros positivos  $n_1$  y  $n_2$  de modo que  $n_1\mathcal{D}_1$  y  $n_2\mathcal{D}_2$  están

en  $\text{Char}(S)$ . Se sigue de inmediato que  $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$  es un elemento de  $[\text{Char}(S) : \text{Nef}(S)]$  pues  $n_1 n_2 (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)$  es un elemento de  $\text{Char}(S)$ .

**Definición 2.3.** Dada una superficie  $S$ , el **monoide característico** de  $S$  es el monoide  $\text{Char}(S)$  y el **monoide fraccional de las clases efectivas sin puntos base** de  $S$  es el monoide  $[\text{Char}(S) : \text{Nef}(S)]$ .

Antes de presentar una propiedad importante de los monoides que fueron definidos anteriormente, recordaremos el siguiente resultado que establece una relación entre componentes fijas y puntos base de un sistema lineal.

**Lema 2.4.** *Sea  $D$  un divisor sobre una superficie  $S$  y sea  $\mathfrak{d}$  un sistema lineal del sistema lineal completo  $|D|$ . Si el sistema lineal  $\mathfrak{d}$  tiene una componente fija, entonces  $\text{Bs}(\mathfrak{d})$  es no vacío.*

**Lema 2.5.** *Sea  $S$  una superficie. Se tienen las siguientes inclusiones de monoides:*

$$\text{Char}(S) \subseteq [\text{Char}(S) : \text{Nef}(S)] \subseteq \text{Nef}(S).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Por definición la inclusión de la izquierda se sigue de manera inmediata, por tanto, sólo resta mostrar que  $[\text{Char}(S) : \text{Nef}(S)]$  es un submonoide de  $\text{Nef}(S)$ . Sea  $\mathcal{D}$  un elemento de  $[\text{Char}(S) : \text{Nef}(S)]$ , así, existe un entero positivo  $n$  de modo que  $n\mathcal{D} \in \text{Char}(S)$ . Ahora, consideremos un divisor  $D = \sum_{i=1}^r a_i D_i$  tal que  $[D] = \mathcal{D}$ , donde  $r$  es un entero positivo,  $a_i$  es un número entero y  $D_i$  es un divisor primo para cada  $i = 1, \dots, r$ . Por hipótesis se tiene que  $nD$  es un divisor efectivo tal que  $\text{Bs}(|nD|) = \emptyset$ , aún más, podemos suponer que  $|nD|$  no tiene componentes fijas por el Lema 2.4. Consideremos una curva entera  $H$  sobre  $S$ , y sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $H$  es diferente de  $D_i$  para todo  $i = 1, \dots, r$ . De este modo, tenemos que  $nD.H \geq 0$  y esto implica que  $D.H \geq 0$ . Por lo tanto, concluimos que  $\mathcal{D}$  es una clase nef.  $\square$

El siguiente concepto será uno de nuestros principales ingredientes para establecer el criterio de finitud para el anillo de Cox de una superficie.

**Definición 2.6.** Una superficie  $S$  es **extremal** si se satisface la siguiente igualdad:

$$[\text{Char}(S) : \text{Nef}(S)] \cap \text{Eff}(S) = \text{Nef}(S) \cap \text{Eff}(S).$$

El siguiente resultado cuya demostración es obvia nos proporciona una herramienta para detectar si una superficie es extremal.

**Proposición 2.7.** *Sea  $S$  una superficie. Si  $\text{Char}(S) = \text{Nef}(S) \cap \text{Eff}(S)$ , entonces  $S$  es extremal.*

A continuación presentaremos algunos ejemplos de superficies extremales usando la proposición anterior.

**Ejemplo 2.8.** El plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  es una superficie extremal. Dada una línea  $L$  en  $\mathbb{P}^2$ , su clase  $\mathcal{E}_0$  genera al grupo de Néron-Severi de  $\mathbb{P}^2$ , es decir,  $\text{NS}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}\mathcal{E}_0$ . Aún más, se tiene que  $\text{Eff}(\mathbb{P}^2) = \text{Nef}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0$ . Ahora bien, puesto que  $|L|$  no tiene puntos base (ver Ejemplo 1.15) se sigue que  $\mathcal{E}_0$  es un elemento de  $\text{Char}(\mathbb{P}^2)$ , esto implica que  $\text{Char}(\mathbb{P}^2) = \text{Nef}(\mathbb{P}^2)$ .

**Ejemplo 2.9.** Sea  $X$  la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  puntos  $p_1, p_2, \dots, p_r$  colineales y ordinarios, donde  $r$  es un entero positivo. El grupo de Néron-Severi de  $X$  está generado por las clases  $\mathcal{E}_0, -\mathcal{E}_1, -\mathcal{E}_2, \dots, -\mathcal{E}_r$ , donde  $\mathcal{E}_0$  es la clase en  $\text{NS}(X)$  de la transformada estricta de una recta  $L$  en  $\mathbb{P}^2$  que no contiene a alguno de los  $r$  puntos y donde  $\mathcal{E}_i$  es la clase en  $\text{NS}(X)$  del divisor excepcional correspondiente a  $p_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . Además, para cada  $i = 1, \dots, r$  tenemos que  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i$  es la clase de la transformada estricta de una línea  $L_i$  en  $\mathbb{P}^2$  que contiene al punto  $p_i$  y que no contiene a alguno de los otros puntos. Se tiene que  $\mathcal{E}_0$  y  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i$  son clases nef para cada  $i = 1, \dots, r$ , de hecho, tenemos que  $\text{Nef}(X) = \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 + \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i)$ . Ahora bien, el hecho de que  $\text{Bs}(|L|) = \emptyset$  y el hecho de que  $\text{Bs}(|L_i|) = \{p_i\}$  para cada  $i = 1, \dots, r$  (ver Ejemplos 1.15 y 1.16) implican que  $\mathcal{E}_0$  y  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i$  son elementos de  $\text{Char}(X)$  para cualquier  $i = 1, \dots, r$ . Por lo tanto, tenemos que los monoides  $\text{Char}(X)$  y  $\text{Nef}(X)$  son iguales.

En el Capítulo 8 extenderemos el resultado del ejemplo anterior a las superficies de Hirzebruch (ver los Teoremas 8.4 y 3.19).

**Ejemplo 2.10.** Consideremos la  $n$ -ésima superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  asociada a un entero no negativo  $n$ . Sean  $\mathfrak{C}_n$  la clase de una sección  $C_n$  de  $\Sigma_n$  (que es única si  $n$  es positivo) y  $\mathfrak{F}$  la clase de una fibra  $F$  de  $\Sigma_n$ . Recordemos que dichas clases generan al grupo de Néron-Severi de  $\Sigma_n$  y que  $\text{Nef}(\Sigma_n) = \mathbb{Z}_+(\mathfrak{C}_n + n\mathfrak{F}) + \mathbb{Z}_+\mathfrak{F}$  (ver Lema 1.50). Observemos que  $\mathfrak{C}_n + n\mathfrak{F}$  (respectivamente,  $\mathfrak{F}$ ) es la clase del divisor efectivo  $C_n + nF$  (respectivamente,  $F$ ). Como los sistemas lineales completos  $|C_n + nF|$  y  $|F|$  no tienen puntos base (en vista de la Proposición 1.49 y del hecho que las fibras no se intersectan), se sigue que los elementos  $\mathfrak{C}_n + n\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{F}$  están en  $\text{Char}(\Sigma_n)$ . De este modo, se tiene que  $\text{Char}(\Sigma_n) = \text{Nef}(\Sigma_n)$  y esto implica que  $\Sigma_n$  es una superficie extremal.

El siguiente ejemplo nos presentará una superficies racional que no es extremal:

**Ejemplo 2.11.** Sea  $Y$  la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en veinte puntos genéricos que se encuentran sobre una curva entera lisa  $Q$  de grado cuatro. Consideramos al divisor  $F$  sobre  $Y$  definido como  $\tilde{Q} + \tilde{C}$ , donde  $\tilde{Q}$  y  $\tilde{C}$  son las transformadas estrictas de  $Q$  y de una cónica genérica  $C$  respectivamente. Sea  $\mathcal{F}$  la clase de  $F$  en el grupo de Néron-Severi de  $Y$ . Las igualdades  $\mathcal{F} \cdot [\tilde{Q}] = 4$  y  $\mathcal{F} \cdot [\tilde{C}] = 12$  nos aseguran que  $\mathcal{F}$  es una clase nef en  $\text{NS}(Y)$  (ver Proposición 1.27), además, tenemos que  $\text{Bs}(|nF|)$  no es vacío pues la componente fija de  $|nF|$  es igual a  $\{\tilde{Q}\}$  para cada entero positivo  $n$  (véase la construcción en la página 562 de [Zar62]). Por lo tanto,  $Y$  es una superficie que no es extremal.

La clave del ejemplo anterior donde presentamos una superficie que no es extremal es la construcción de un divisor nef sobre la superficie de manera que cada uno de sus múltiplos tiene la misma componente fija, de este modo dicho divisor no podrá pertenecer al monoide fraccional de las clases efectivas sin puntos base. Por consiguiente, la construcción mencionada en [Zar62] nos brinda una manera para construir superficies que no son extremales.

**Observación 2.12.** En el caso de las superficies racionales anticanónicas (ver Definición 3.4) se satisface que cada clase nef en el grupo de Néron-Severi de tal superficie también es una clase efectiva. Por lo tanto, para comprobar si una superficie racional anticanónica  $S$  es extremal es suficiente comprobar la igualdad  $\text{Nef}(S) = [\text{Char}(S) : \text{Nef}(S)]$

### 3. Un Criterio para la Finitud del Anillo de Cox de Superficies

Este apartado está dedicado a presentar un criterio para la finitud del anillo de Cox de una superficie proyectiva lisa usando el concepto de las superficies extremales. Al igual que en la sección anterior, una superficie será una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$ . Los resultados que se presentarán a continuación se encuentran en el trabajo publicado [DFLMO15]. Aquí, daremos una demostración de dichos resultados con mayores detalles.

**Teorema 2.13.** *Sea  $S$  una superficie. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- 1) *El anillo de Cox de  $S$  es finitamente generado.*
- 2)  *$S$  es extremal y su monoide efectivo es finitamente generado.*
- 3)  *$S$  es extremal y su monoide nef es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Comenzaremos mostrando que el enunciado 1) implica al enunciado 2). Supongamos que el anillo de Cox de  $S$  es finitamente generado y que el monoide efectivo  $\text{Eff}(S)$  no es finitamente generado. Así, consideremos un conjunto infinito mínimo  $I$  de curvas

### 3. Un Criterio para la Finitud del Anillo de Cox de Superficies

---

enteras que genera a  $\text{Eff}(S)$ , luego, la  $k$ -álgebra  $k \oplus \left( \bigoplus_{D \in I} H^0(S, \mathcal{O}_S(D)) \right)$  está contenida en  $\text{Cox}(S)$  y no es finitamente generada, lo cual es imposible. Consecuentemente, tenemos que  $\text{Eff}(S)$  es finitamente generado. Por otra parte, la finitud del anillo de Cox de  $S$  implica la igualdad entre los conos  $\text{Nef}(S)_{\mathbb{Q}}^1$  y  $\text{Sample}(S)^2$  (ver [BH07, Corolario 7.4, p. 1233]) y a su vez esto implica que cada elemento del monoide nef tiene un múltiplo entero que no tiene puntos base. Así, el monoide  $\text{Nef}(S)$  es igual al monoide  $\text{Char}(S)$  y consecuentemente  $S$  es extremal.

Ahora, asumamos el enunciado 2) para mostrar el enunciado 3). Puesto que  $\text{Eff}(S)$  es finitamente generado se sigue el cono que  $\text{NE}(S)^3$  es poliédrico, luego, se tiene que  $\overline{\text{NE}}(S)^4$  también es un cono poliédrico y puesto que el cono  $\text{Nef}(S)_{\mathbb{R}}^5$  es el dual de  $\overline{\text{NE}}(S)$  también es poliédrico (ver [Bry80, Proposición 3, p. 250]). Consecuentemente, se sigue que el monoide  $\text{Nef}(S)$  es finitamente generado.

Finalmente, mostraremos que el enunciado 3) implica el enunciado 1). Supongamos que  $S$  es extremal y que  $\text{Nef}(S)$  es finitamente generado. Observemos que el conjunto de las curvas de autointersección negativa sobre  $S$  es finito. En efecto, si no lo fuese tendríamos que el cono  $\text{NE}(S)$  no sería poliédrico, esto implicaría que el cono  $\overline{\text{NE}}(S)$  tampoco podría ser poliédrico y como consecuencia tendríamos que  $\text{Nef}(S)_{\mathbb{R}}$  no sería un cono poliédrico lo cual contradiría la hipótesis. Por otro lado, sabemos que existe un conjunto finito  $\Psi$  de clases nef de modo que generan a  $\text{Nef}(S)$ . Ahora, vamos a considerar el conjunto  $\{H_1, \dots, H_r\}$ , donde  $r$  es un entero positivo, formado por todas las clases efectivas de  $\Psi$ . Luego, usando el hecho de que  $S$  es una superficie extremal, de [HK00, Lema 2.8, p. 341] tenemos que la  $k$ -álgebra

$$\bigoplus_{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r} H^0(S, \mathcal{O}_S(n_1 H_1 + \dots + n_r H_r))$$

---

<sup>1</sup> $\text{Nef}(S)_{\mathbb{Q}}$  es el cono generado en  $\text{NS}(S)_{\mathbb{Q}}$  por las clases de divisores que son nef.

<sup>2</sup> $\text{Sample}(S)$  es el cono semiamplio definido como el cono generado en  $\text{NS}(S)_{\mathbb{Q}}$  por las clases de divisores que son libres de puntos base.

<sup>3</sup> $\text{NE}(S)$  es el cono de curvas definido como el cono generado en  $\text{NS}(S)_{\mathbb{R}}$  por las clases de curvas enteras.

<sup>4</sup> $\overline{\text{NE}}(S)$  es la cerradura topológica del cono  $\text{NE}(S)$  en  $\text{NS}(S)_{\mathbb{R}}$

<sup>5</sup> $\text{Nef}(S)_{\mathbb{R}}$  es el cono generado en  $\text{NS}(S)_{\mathbb{R}}$  por las clases de divisores que son nef.

es finitamente generada. Además, dicha  $k$ -álgebra contiene a las  $k$ -álgebras  $\Delta(S)^6$  y  $S^{bp}(S)^7$ . Consecuentemente, aplicando [GM05a, Teorema 1, p. 94] concluimos que  $\text{Cox}(S)$  es finitamente generado.  $\square$

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es un criterio para la finitud de los anillos de Cox de superficies racionales anticanónicas (ver Definición 3.4).

**Corolario 2.14.** *Sea  $S$  una superficie racional anticanónica tal que  $-\mathcal{K}_S \cdot \mathcal{H} \geq 1$  para cualquier elemento no nulo  $\mathcal{H}$  de  $\text{Nef}(S)$ , donde  $-\mathcal{K}_S$  es la clase anticanónica. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- 1) *El anillo de Cox de  $S$  es finitamente generado.*
- 2) *El monoide efectivo de  $S$  es finitamente generado.*
- 3)  *$S$  contiene un número finito de curvas  $(-1)$  y un número finito de curvas  $(-2)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Los enunciados 2) y 3) son equivalentes por [LH05, Corolario 4.2, p. 109], y el enunciado 1) implica al enunciado 2) en vista del Teorema 2.13. Únicamente resta mostrar que el enunciado 2) implica al enunciado 1). Asumamos que el monoide efectivo de  $S$  es finitamente generado. El hecho de que  $S$  es una superficie anticanónica implica que cada divisor nef es efectivo. Además, para cada clase nef no nula  $\mathcal{H}$  en el grupo de Néron-Severi de  $S$  por hipótesis se satisface que  $-\mathcal{K}_S \cdot (2\mathcal{H}) \geq 2$ , consecuentemente, se tiene que  $2\mathcal{H}$  no tiene puntos base por [Har97, Teorema III.1 (a), p. 1197]. De este modo,  $S$  es una superficie extremal y por el Teorema 2.13 concluimos que el anillo de Cox de  $S$  es finitamente generado.  $\square$

---

<sup>6</sup> $\Delta(S)$  es el conjunto de elementos homogéneos  $f$  en  $\text{Cox}(S)$  tal que cierto elemento  $D_n$  de  $\text{Pic}(S)$  es nef,  $K_S \cdot D_n \geq 0$ , y  $\text{div}_S(f) + D_n$  es un divisor primo, donde  $n$  es el grado de  $f$  (ver [GM05a, Definición 1, p. 93]).

<sup>7</sup> $S^{bp}(S)$  es la subálgebra de  $\text{Cox}(S)$  dada por  $\bigoplus H^0(S, \mathcal{O}_S(D_n))$ , donde la suma se toma sobre los  $n \in \mathbb{Z}^r$ , donde  $r$  es el rango de  $\text{Pic}(S)$  y de modo que  $|D_n|$  tiene a lo más un número finito de puntos base ver [GM05a, Definición 1, p. 93]).



## CAPÍTULO 3

# SUPERFICIES DE HARBOURNE-HIRSCHOWITZ Y LA PROPIEDAD ORTOGONAL ANTICANÓNICA

La conjetura de Harbourne-Hirschowitz (ver Conjetura 3.1), un problema abierto hasta el día de hoy, será discutida en este capítulo. En la primera sección revisaremos el origen de éste problema, daremos el enunciado de tal conjetura y mencionaremos algunos trabajos relacionados con ella. Además, presentaremos la definición de una *superficie de Harbourne-Hirschowitz* (ver Definición 3.2): una clase especial de superficies que en el caso racional cumplen con la conjetura antes mencionada. En la segunda sección presentaremos la noción de *propiedad ortogonal anticanónica* (ver Definición 3.5) y nos enfocaremos en aplicarla en el caso de una superficie racional anticanónica. Los resultados que obtendremos en dicho caso relacionarán tal propiedad con las superficies de Harbourne-Hirschowitz y la extremalidad. Asimismo, presentaremos algunos ejemplos de superficies racionales anticanónicas que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica y que han sido estudiadas con anterioridad. Siguiendo la convención que hemos tomado en los capítulos anteriores, por una superficie nos referiremos a una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$  de característica arbitraria.

## 1. La Conjetura de Harbourne-Hirschowitz y Superficies de Harbourne-Hirschowitz

En este apartado hablaremos sobre los trabajos que dieron origen a la conjetura de Harbourne-Hirschowitz y de algunos otros trabajos relacionados con tal problema. Posteriormente, introduciremos una clase de superficies que llamaremos *de Harbourne-Hirschowitz* y mostraremos cuál es su relación con la citada conjetura en el caso de superficies racionales.

A lo largo de esta sección, denotaremos por  $X_r$  a la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  puntos  $p_1, \dots, p_r$  genéricos (suficientemente generales), por  $\mathcal{E}_0$  a la clase en  $\text{Cl}(X_r)$  de la transformada total de una recta que no contiene a alguno de los puntos y por  $\mathcal{E}_i$  a la clase en  $\text{Cl}(X_r)$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . Observemos que los elementos  $\mathcal{E}_0, -\mathcal{E}_1, \dots, -\mathcal{E}_r$  forman una base para  $\text{Cl}(X_r)$ .

En [Har86], Harbourne estudia el problema de determinar la dimensión del espacio de secciones globales  $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(F))$  de la gavilla invertible  $\mathcal{O}_Y(F)$  asociada a un divisor  $F$  sobre la superficie  $Y$  obtenida como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en un número finito de puntos que se encuentran en una curva entera de grado menor o igual a tres, y logra dar una solución a dicho problema. En la Observación I.6.2 de dicho trabajo, menciona que los algoritmos para encontrar la dimensión del espacio deseado dependen principalmente de poder calcular la dimensión de  $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(G))$  para cada divisor nef  $G$  sobre  $Y$ .

Para un contexto más general, Harbourne realiza la siguiente conjetura que consta de dos partes (ver [Har86, Observación I.6.2, p. 102]):

**Conjetura** (Harbourne). Con la notación anterior,

1. Para una clase  $\mathcal{G}$  sobre  $X_r$ , se tiene que  $\mathcal{G}$  es una clase nef si y sólo si  $\mathcal{G}^2 \geq 0$  y  $\mathcal{G}$  es una **clase estándar**, es decir, para alguna configuración excepcional  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_r$  sobre  $X_r$  se tiene que  $\mathcal{G}$  es la suma no negativa de las clases  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1, 2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$  y  $3\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \dots - \mathcal{E}_i$  para cada  $i \geq 3$ .
2. Si  $F$  es un divisor sobre  $X_r$  de modo que su clase es estándar, entonces se tiene que  $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(F)) \cdot h^1(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(F)) = 0$ .

Además, puesto que para una clase estándar muestra que  $h^2(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(F)) = 0$ , la segunda conjetura implicaría que se podría determinar  $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(F))$ . Por último, menciona que al asumir la segunda conjetura como cierta podría suceder que ésta implicara a la primera.

Por otro lado, Hirschowitz en [Hir89] considera el problema de determinar la dimensión del sistema lineal completo de curvas con un grado fijo que pasan por un número finito de puntos suficientemente generales con una multiplicidad dada. Es decir, si  $d, m_1, \dots, m_{r-1}$  y  $m_r$  son números enteros positivos, ¿cuál es la dimensión del sistema lineal completo de curvas de grado  $d$  que pasan por los puntos  $p_1, \dots, p_r$  con multiplicidad  $m_i$  en el punto  $p_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$ ? Observemos que si  $D$  es un divisor sobre  $X_r$  de modo que su clase en  $\text{Cl}(X_r)$  es igual a  $d\mathcal{E}_0 - m_1\mathcal{E}_1 - \dots - m_r\mathcal{E}_r$ , entonces se tiene que la dimensión del correspondiente sistema lineal es igual a la dimensión del sistema de curvas planas de grado  $d$  que pasan por  $p_i$  con multiplicidad  $m_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . De esta forma, calcular la dimensión de  $H^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D))$  resuelve el problema planteado en este trabajo.

Para enunciar la conjetura propuesta en este trabajo, debemos de mencionar algunas nociones. De manera general, un divisor  $D$  sobre una superficie racional  $S$  es **especial** si dos de los tres grupos de cohomología  $H^0(S, \mathcal{O}_S(D))$ ,  $H^1(S, \mathcal{O}_S(D))$ ,  $H^2(S, \mathcal{O}_S(D))$  son no nulos, en caso contrario  $D$  es **no especial**. Una **clase excepcional ordenada** sobre  $S$  es la clase  $e_0\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^r e_i\mathcal{E}_i$  de una curva  $(-1)$  de modo que  $e_1 \geq \dots \geq e_r$ . Utilizando el lenguaje anterior, Hirschowitz realiza la siguiente conjetura (ver [Hir89, Conjetura 4, p. 209]):

**Conjetura** (Hirschowitz). Sea  $D$  un divisor sobre  $X_r$  cuya clase es igual a  $\mathcal{D} = d\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^m m_i\mathcal{E}_i$ , donde  $d \geq m_1 \geq \dots \geq m_r \geq 1$  son números enteros. La gavilla  $\mathcal{O}_{X_r}(D)$  es no especial sobre  $X_r$  si para toda clase excepcional ordenada  $\mathcal{E} = e_0\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^r e_i\mathcal{E}_i$  con  $e_0 \leq \frac{d}{2}$  se satisface que el número de intersección  $\mathcal{D}.\mathcal{E}$  es mayor que  $-1$ , es decir si  $de_0 - \sum_{i=1}^r m_i e_i > -1$ .

Posteriormente, en el mismo trabajo presenta otra conjetura que es equivalente a la anterior (ver [Hir89, Conjetura, p. 211]):

**Conjetura** (Hirschowitz). Sea  $D$  un divisor sobre  $X_r$  cuya clase es igual a  $d\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^m m_i\mathcal{E}_i$  donde  $d \geq m_1 \geq \dots \geq m_r \geq 1$  son números enteros de modo que  $d \geq m_1 + m_2 + m_3$ . Se tiene que la gavilla  $\mathcal{O}_{X_r}(D)$  es no especial sobre  $X_r$ .

Además de presentar algunas consecuencias de ésta conjetura, Hirschowitz menciona que dicha conjetura es equivalente a la propuesta por Harbourne en la Observación I.6.2 de [Har86]. A continuación presentaremos lo que se conoce como la conjetura de Harbourne-Hirschowitz.

**Conjetura 3.1** (Harbourne-Hirschowitz). *Los divisores efectivos  $D$  sobre  $X_r$  que son no especiales son aquellos que satisfacen la condición  $D.E \geq -1$  para cada curva excepcional  $E$  sobre  $X_r$ .*

Algunos trabajos relacionados con la conjetura de Harbourne-Hirschowitz serán mencionados a continuación.

Segre aborda en [Seg61] el problema de determinar el número de condiciones linealmente independientes para que un sistema lineal pase por un conjunto de puntos en posición genérica con multiplicidad dada en un espacio proyectivo de dimensión  $n$ , y se centra en estudiar el caso del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ . En particular, a partir de algunos ejemplos sugiere que el siguiente enunciado podría ser verdadero (ver [Seg61, p. 72]):

**Conjetura** (Segre). Un sistema lineal completo de curvas planas con un número finito de puntos base asignados en posición genérica que tiene dimensión virtual  $d \geq -1$ , es superabundante (y por tanto efectivo) y es necesario (pero no suficiente) que tenga alguna componente fija múltiple.

Posteriormente, Gimigliano presenta en [Gim89] de una manera global problemas relacionados con el estudio de los puntos gordos en  $\mathbb{P}^2$ . En particular, puesto que estudiar un punto gordo lleva al estudio de la función de Hilbert asociada al subesquema cerrado del tal punto gordo, y a su vez éste último se relaciona con los sistemas lineales de curvas en  $\mathbb{P}^2$  de grado fijo que tienen al menos una multiplicidad establecida en los puntos que dan origen al punto gordo, el estudio inicial está relacionado con las conjeturas de Hirschowitz y de Segre. De hecho, en la Sección 3 del trabajo citado se enuncia la conjetura de Segre haciendo mención que ésta fue reformulada de manera independiente por Hirschowitz en [Hir89] y por el autor en [Gim87]. La conjetura establecida en el último trabajo mencionado es la siguiente:

**Conjetura** (Gimigliano). Sea  $D$  un divisor efectivo sobre  $X_r$ . Se tienen las siguientes posibilidades:

1.  $h^1(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) = 0$  y
  - (a) El elemento genérico de  $|D|$  es una curva entera;
  - (b)  $|D|$  tiene componentes fijas y todas ellas son enteras y racionales si se tiene que  $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) > 1$ , y todas ellas son racionales excepto posiblemente por una si se tiene que  $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) = 1$ ;
  - (c)  $|D|$  está compuesto por curvas racionales que se mueven en un lápiz y, posiblemente, por algunas componentes fijas racionales enteras;
  - (d)  $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) = 1$  y el único elemento en  $|D|$  es un múltiplo de una curva elíptica;
2.  $h^1(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) > 0$  y  $|D|$  tiene una o más curvas racionales múltiples como componentes fijas.

Después de enunciar dicha conjetura en [Gim89, Conjetura 3.4, p. B29], Gimigliano muestra que tal conjetura es equivalente a la conjetura de Hirschowitz asumiendo que la característica del campo es igual a cero. Debido a las equivalencias existentes entre las diferentes conjeturas, es común que la conjetura de Harbourne-Hirschowitz también se conozca como *la conjetura de Harbourne-Hirschowitz-Segre-Gimigliano*.

Miranda presenta en [Mir99] una discusión de la conjetura de Harbourne-Hirschowitz y de algunos trabajos relacionados con ella usando como punto de partida el problema de la interpolación: dado un número finito de puntos en el plano, encontrar un polinomio de modo que tales puntos sean sus raíces. De forma similar, en [Cil01] Ciliberto motiva el estudio de los sistemas lineales de curvas con puntos base fijos con el problema de la interpolación de polinomios en varias variables. Luego, presenta la conjetura de Harbourne-Hirschowitz, su relación con otras conjeturas y algunos casos donde la conjetura de Harbourne-Hirschowitz es verdadera. Ciliberto y Miranda demuestran en [CM01] que la conjetura de Harbourne-Hirschowitz es equivalente a la conjetura de Segre (ver la Sección 4 de [CM01]), además, asumiendo que la conjetura de Segre es cierta, muestran algunos resultados sobre sistemas lineales de curvas planas con puntos base generales y multiplicidades dadas.

Alexander propone en [Ale01] una generalización de la conjetura de Harbourne-Hirschowitz para sistemas lineales sobre superficies racionales genéricas que separan  $k$ -conglomerados. En [Laf02], Laface reformula de una manera natural la conjetura de Harbourne-Hirschowitz para superficies de Hirzebruch y muestra que se satisface al considerar puntos base con multiplicidad dos y tres. Para todos los sistemas lineales de curvas planas sobre  $\mathbb{P}^2$  que tienen puntos base con multiplicidad a lo más siete, Yang prueba en [Yan07] que la conjetura de Harbourne-Hirschowitz es verdadera. Dumnicki muestra en [Dum10] que para una superficie de Hirzebruch la conjetura de Harbourne-Hirschowitz es verdadera al considerar puntos base impuestos con multiplicidad acotada por ocho.

Después de haber discutido el origen del problema y presentar una visión global del mismo, lo siguiente que realizaremos será introducir el concepto de superficie de Harbourne-Hirschowitz y mostraremos cuál es su relación con la conjetura anteriormente citada en el caso racional.

**Definición 3.2.** Una **superficie de Harbourne-Hirschowitz** es una superficie  $S$  tal que el primer grupo de cohomología  $H^1(S, \mathcal{O}_S(D))$  se anula para cada divisor  $D$  nef y efectivo sobre  $S$ .

**Teorema 3.3.** *Sea  $S$  una superficie racional. Si  $S$  es de Harbourne-Hirschowitz, entonces la conjetura de Harbourne-Hirschowitz es verdadera. Precisamente, si  $D$  es un divisor sobre  $S$ ,*

entonces se tiene que

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(D)) = \begin{cases} 0 & \text{si } D \text{ no es efectivo,} \\ 1 + \frac{1}{2}(M^2 - K_S.M) & \text{si } D \text{ es efectivo y } M \text{ es su parte movable.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $D$  un divisor sobre  $S$ . Si  $D$  no es efectivo, entonces  $H^0(S, \mathcal{O}_S(D))$  es nulo y por lo tanto su dimensión es igual a cero. Ahora bien, en el caso en que  $D$  es efectivo consideramos su descomposición  $D = M + F$ , donde  $M$  es su parte movable y  $F$  es su parte fija. Si  $D$  no tiene parte movable, entonces  $h^0(S, \mathcal{O}_S(D)) = 1$ . Por otro lado, en el caso que la parte movable de  $D$  no es nula tenemos que  $M$  es un divisor nef efectivo no nulo y que  $h^0(S, \mathcal{O}_S(D)) = h^0(S, \mathcal{O}_S(M))$ . Además, como  $S$  es racional  $h^2(S, \mathcal{O}_S(M)) = 0$ . De esta forma, por el teorema de Riemann-Roch y el hecho de que  $S$  es de Harbourne-Hirschowitz concluimos que  $h^0(S, \mathcal{O}_S(D)) = 1 + \frac{1}{2}(M^2 - K_S.M)$ .  $\square$

El determinar la dimensión del primer grupo de cohomología de una gavilla invertible asociada a un divisor nef no sólo es de interés para las superficies racionales. Por ejemplo, Ottem estudia en [Ott13] los anillos de Cox de ciertas superficies  $K3$  y en su estudio es importante identificar ciertos divisores nef de manera que la dimensión de su primer grupo de cohomología sea igual a cero (ver Sección 3.1 en dicho trabajo).

De esta manera, un problema interesante es el de clasificar todas las superficies que son de Harbourne-Hirschowitz. En la siguiente sección estudiaremos una clase de superficies anticanónicas que son de Harbourne-Hirschowitz.

## 2. Superficies Racionales Anticanónicas y la Propiedad Ortogonal Anticanónica

En este apartado nos enfocaremos en estudiar una condición para asegurar si una superficie racional anticanónica es una superficie de Harbourne-Hirschowitz. Después de recordar la noción de una superficie anticanónica, introduciremos el concepto de propiedad ortogonal anticanónica y mostraremos que en el caso de una superficie racional anticanónica tal propiedad implica que la superficie será de Harbourne-Hirschowitz. Asimismo, presentaremos algunos ejemplos de superficies anticanónicas que satisfacen dicha propiedad y que han sido estudiadas con anterioridad. Concluiremos este apartado presentando la relación entre la propiedad ortogonal anticanónica y la extremalidad en una superficie racional anticanónica.

**Definición 3.4.** Una superficie  $S$  es **anticanónica** si  $-K_S$  es un divisor efectivo para algún divisor canónico  $K_S$  sobre  $S$ .

El siguiente concepto que introduciremos nos brindará una herramienta para identificar superficies racionales anticanónicas de Harbourne-Hirschowitz.

**Definición 3.5.** Una superficie  $S$  tiene la **propiedad ortogonal anticanónica** si cada divisor nef sobre  $S$  que es ortogonal a un divisor anticanónico es el divisor cero.

Una propiedad interesante de la noción definida arriba es que tiene un buen comportamiento respecto a los morfismo birracionales.

**Proposición 3.6.** *Sea  $\pi : T \rightarrow S$  una transformación monoidal centrada en un punto  $p$  de una superficie  $S$ . Si  $T$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica, entonces  $S$  también la satisface.*

DEMOSTRACIÓN. Denotamos por  $E$  a la curva excepcional asociada a  $p$ . Sea  $H$  un divisor nef sobre  $S$  que es ortogonal a un divisor anticanónico  $-K_S$ . Considerando la aplicación inyectiva  $\pi^* : \text{Pic}(S) \rightarrow \text{Pic}(T)$ , se tiene que  $\pi^*(H)$  es un divisor nef sobre  $T$ . Luego, por las Proposiciones 1.34 y 1.33 se tiene que

$$-K_T.\pi^*(H) = (\pi^*(-K_S) - E).\pi^*(H) = \pi^*(-K_S).\pi^*(H) - E.\pi^*(H) = 0.$$

Consecuentemente, del hecho que  $T$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica se sigue que  $\pi^*(H) = 0$  y la inyectividad de  $\pi^*$  implica que  $H = 0$ . Por lo tanto,  $S$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica.  $\square$

**Corolario 3.7.** *Si  $T$  es una superficie que satisface la propiedad ortogonal anticanónica y existe un morfismo birracional entre  $T$  y una superficie  $S$ , entonces  $S$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica.*

**Observación 3.8.** Si  $S$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica y existe un morfismo birracional entre una superficie  $T$  y  $S$ , entonces  $T$  podría no satisfacer la propiedad ortogonal anticanónica. Por ejemplo, la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en ocho puntos en posición general satisface la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teorema 11.3) mientras que la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en nueve puntos en posición general no satisface dicha propiedad (ver Teorema 11.4).

A continuación presentaremos algunos ejemplos de superficies que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica. Además, en los próximos capítulos construiremos otras clases de superficies que también cuentan con tal propiedad.

**Ejemplo 3.9.** El plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  tiene la propiedad ortogonal anticanónica. Sea  $H$  un divisor nef sobre  $\mathbb{P}^2$  que es ortogonal a un divisor anticanónico de  $\mathbb{P}^2$ . Denotemos por  $\mathcal{H}$  a la

clase de  $H$  en el grupo de Néron-Severi de  $\mathbb{P}^2$ , así, existe un entero no negativo  $n$  de modo que  $\mathcal{H} = n\mathcal{E}_0$ , donde  $\mathcal{E}_0$  es la clase de una línea en  $\mathbb{P}^2$ . Puesto que la clase anticanónica  $-\mathcal{K}_{\mathbb{P}^2}$  es igual a  $3\mathcal{E}_0$ , por hipótesis tenemos que  $-\mathcal{K}_{\mathbb{P}^2}.\mathcal{H} = 0$ , es decir que  $3n\mathcal{E}_0^2 = 3n = 0$ , lo cual implica que  $n = 0$ . De este modo,  $\mathcal{H}$  es la clase nula y consecuentemente  $H$  es el divisor cero.

**Ejemplo 3.10.** Para cualquier número entero no negativo, la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica. En efecto, sea  $H$  un divisor nef sobre  $\Sigma_n$  que es ortogonal a un divisor anticanónico. Si  $\mathfrak{H}$  es la clase de  $H$  en el grupo de Néron-Severi de  $\Sigma_n$ , entonces existen enteros no negativos  $a$  y  $b$  tales que  $\mathfrak{H} = a(\mathfrak{C}_n + n\mathfrak{F}) + b\mathfrak{F}$  (ver Lema 1.50). La hipótesis implica que  $-\mathcal{K}_{\Sigma_n}.\mathfrak{H} = 0$ , luego, del hecho que  $-\mathcal{K}_{\Sigma_n} = 2\mathfrak{C}_n + (n+2)\mathfrak{F}$  se tiene la igualdad  $(n+2)a + 2b = 0$ . Como  $n$ ,  $a$  y  $b$  son no negativos, se sigue que  $a = b = 0$  y consecuentemente que  $\mathfrak{H}$  es la clase nula. Por lo tanto, el divisor  $H$  es igual a cero.

Uno de nuestros principales intereses es estudiar las superficies racionales anticanónicas que son de Harbourne-Hirschowitz. El siguiente resultado que presentaremos nos mostrará que en el caso anticanónico, el satisfacer la propiedad ortogonal anticanónica implica que la superficie es de Harbourne-Hirschowitz.

**Teorema 3.11.** *Sea  $S$  una superficie racional anticanónica. Si  $S$  tiene la propiedad ortogonal anticanónica, entonces  $S$  es de Harbourne-Hirschowitz.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $H$  un divisor nef sobre  $S$ . Si  $H = 0$ , entonces  $h^1(S, \mathcal{O}_S(H)) = h^1(S, \mathcal{O}_S) = q(S)$ , luego, como  $S$  es racional se tiene que su irregularidad es igual a cero. Ahora bien, si  $H$  es no nulo, por hipótesis tenemos que  $-K_S.H \geq 1$ , luego por [Har97, Teorema III.1 (a) y (b), p. 1197] se sigue que  $h^1(S, \mathcal{O}_S(H)) = 0$ . Por lo tanto,  $S$  es de Harbourne-Hirschowitz.  $\square$

Puesto que cada divisor nef sobre una superficie racional anticanónica es efectivo, podemos verificar de manera inmediata que la dimensión del espacio de las secciones globales de las gavillas invertibles asociadas a los divisores nef sobre la superficie es la natural.

**Corolario 3.12.** *Sea  $S$  una superficie racional anticanónica. Si  $S$  tiene la propiedad ortogonal anticanónica, entonces la dimensión del espacio de secciones globales  $H^0(S, \mathcal{O}_S(H))$  de la gavilla  $\mathcal{O}_S(H)$  es igual a  $1 + \frac{1}{2}(H^2 - K_S.H)$  para cada divisor nef  $H$  sobre  $S$ .*

A continuación mencionaremos algunos ejemplos de superficies racionales anticanónicas que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica y que han sido estudiadas con anterioridad.



**Ejemplo 3.13.** En [FLM07a], Failla, Lahyane y Molica introducen las superficies racionales platónicas  $S_{(p,q,r)}$ , donde  $p$ ,  $q$  y  $r$  son enteros no negativos, como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en  $p+q+r$  puntos donde se consideran respectivamente  $p$ ,  $q$  y  $r$  puntos en tres líneas distintas de modo que ellas formen un triángulo, cada punto tomado es liso y tal que o bien  $pqr = 0$  o bien  $pqr - pq - pr - qr < 0$ . En dicho trabajo se muestra que éstas superficies racionales son anticanónicas, que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica y posteriormente que son de Harbourne-Hirschowitz (ver respectivamente Lema 1.1 y Teorema 1.2 en dicho trabajo).

**Ejemplo 3.14.** Posteriormente en [LFM08], Lahyane, Failla y Moreno Mejía introducen las superficies  $\tilde{S}_{(n,m)}$  (que de hecho son una generalización de las superficies de tipo  $(n, m)$  que fueron definidas en [FLM06]) de la siguiente forma: se considera una cúbica degenerada que consiste de una línea y de una cónica entera. Luego, para enteros no negativos  $n$  y  $m$  tales que  $mn = 0$  ó  $mn - 4n - m < 0$ , la superficie  $\tilde{S}_{(n,m)}$  es la superficie que resulta de explotar  $\mathbb{P}^2$  en  $n$  puntos que están sobre la línea y  $m$  puntos que están sobre la cónica de manera que ninguno de ellos está en la intersección de ambas curvas. Tal tipo de superficies racionales también son anticanónicas, satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica y son de Harbourne-Hirschowitz (ver respectivamente Lema 1.1 y Teorema 1.2 en dicho trabajo).

**Ejemplo 3.15.** Dada una cúbica degenerada en  $\mathbb{P}^2$  que consiste de una recta y una cónica entera, su lugar singular puede ser un único punto o bien puede constar de dos puntos. Para cada uno de los casos anteriores, en [Lah10] Lahyane considera las superficies racionales  $X_1$  y  $X_2$  obtenidas respectivamente de los casos anteriores al considerar la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en una constelación cuyo origen es el único punto singular y una constelación con dos orígenes que corresponden a los dos puntos singulares. En dicho trabajo se muestra en el Lema 28 (respectivamente, Lema 40) que la superficie  $X_1$  (respectivamente, la superficie  $X_2$ ) es anticanónica y en el Teorema 37 (respectivamente, en el Teorema 48) se prueba que bajo ciertas condiciones numéricas es de Harbourne-Hirschowitz mostrando que se cumple la propiedad ortogonal anticanónica.

**Ejemplo 3.16.** Las superficies proyectivas armónicas fueron introducidas por Cerda en [Cer12] y resultan de considerar la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en una constelación armónica (ver Definición 4.10 en dicho trabajo). Luego, demuestra que tales superficies racionales son anticanónicas y usando la propiedad ortogonal anticanónica muestra que son de Harbourne-Hirschowitz (ver Proposiciones 4.12 y 4.9 en dicho trabajo).

**Ejemplo 3.17.** Sean  $p$  y  $q$  enteros no negativos. Consideremos dos líneas distintas  $L_1$  y  $L_2$  de  $\mathbb{P}^2$  y fijemos  $p$  puntos sobre  $L_1$  y  $q$  puntos sobre la cónica degenerada  $2L_2$  de modo que ninguno de ellos sea el punto de intersección de  $L_1$  con  $L_2$ . Recientemente, Cerda, Failla, Lahyane,

Moreno y Osuna muestran en [CFLMO13] que la superficie racional  $X_{(p,q)}$  obtenida como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en dichos puntos (que podrían ser infinitamente cercanos) es anticanónica, satisface la propiedad ortogonal anticanónica y es de Harbourne-Hirschowitz (ver Lema 1.4 y Teorema 1.5 en tal trabajo).

**Observación 3.18.** Los ejemplos anteriores que se encuentran en la literatura muestran la existencia de superficies racionales anticanónicas que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica (y por tanto, que son de Harbourne-Hirschowitz) de una manera natural. En los capítulos posteriores presentaremos otras nuevas familias de superficies racionales anticanónicas que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica con el objetivo de obtener una pauta para realizar la clasificación de las superficies racionales anticanónicas que satisfacen dicha propiedad.

Para concluir con esta sección, en el siguiente resultado se establece una relación entre la propiedad ortogonal anticanónica y la extremalidad en una superficie racional anticanónica.

**Teorema 3.19.** *Sea  $S$  una superficie racional anticanónica. Si  $S$  tiene la propiedad ortogonal anticanónica, entonces  $S$  es extremal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathcal{H}$  un clase nef no nula sobre  $S$ . Por hipótesis se sigue que  $-\mathcal{K}_S \cdot \mathcal{H}$  es al menos uno. Si  $-\mathcal{K}_S \cdot \mathcal{H} \geq 2$ , entonces por [Har97, Teorema III.1 (a), p. 1197] se sigue que  $\mathcal{H}$  es libre de puntos base. Ahora bien, en el caso que  $-\mathcal{K}_S \cdot \mathcal{H} = 1$ , usando [Har97, Teorema III.1 (b), p. 1197] tenemos que  $\mathcal{H}$  tiene un único punto base; luego, por [Zar62, Teorema 6.2, p. 579] se sigue que existe un número entero  $t$  suficientemente grande de modo que  $t\mathcal{H}$  es libre de puntos base.  $\square$

Una vez con el resultado anterior, podemos reescribir el Corolario 2.14 en términos de la propiedad ortogonal anticanónica.

**Teorema 3.20.** *Sea  $S$  una superficie racional anticanónica. Si  $S$  tiene la propiedad ortogonal anticanónica, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *El anillo de Cox de  $S$  es finitamente generado.*
2. *El monoide efectivo de  $S$  es finitamente generado.*
3.  *$S$  contiene un número finito de curvas  $(-1)$  y de curvas  $(-2)$ .*

## CAPÍTULO 4

### EXPLOSIÓN DE $\Sigma_n$ EN PUNTOS SOBRE $C_n$ Y $\Gamma$ , I

En este capítulo presentaremos la primera construcción de una familia de superficies racionales anticanónicas que tendrán números de Picard tan grandes como uno desee, monoide efectivo finitamente generado, satisfarán la propiedad ortogonal anticanónica y como consecuencia tendrán anillos de Cox finitamente generados. En la primera sección fijaremos la notación que utilizaremos en este capítulo y los posteriores de este trabajo para las construcciones que realizaremos y que provendrán de considerar la explosión de una superficie de Hirzebruch en un número finito de puntos que podrían ser infinitamente cercanos. Después, en la segunda sección presentaremos la construcción de nuestra familia a partir de una superficie de Hirzebruch de modo que la clase anticanónica pueda ser descompuesta como la suma de dos clases de curvas lisas racionales. En la tercera sección mostraremos que bajo cierta condición numérica tales superficies únicamente contienen un número finito de curvas  $(-1)$  y de curvas  $(-2)$  (ver Teorema 4.2), lo que implicará que sus monoideos efectivos son finitamente generados (ver Corolario 4.3). La cuarta sección se encargará de comprobar que bajo cierta condición numérica tales superficies satisfarán la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teorema 4.4), en particular serán de Harbourne-Hirschowitz (ver Corolario 4.5). Para finalizar con este capítulo, con las técnicas desarrolladas presentaremos en la quinta sección de forma explícita el conjunto generador mínimo del monoide efectivo de ciertas superficies construidas aquí: la explosión de  $\Sigma_n$  en ocho puntos particulares para  $n \geq 8$  (ver Ejemplo 4.8) y la explosión de  $\Sigma_1$  en dos, cuatro y seis puntos particulares (ver Ejemplos 4.9, 4.10 y 4.11 respectivamente). Los resultados presentados en este capítulo están basados principalmente en el trabajo publicado [DFL16a].

---

## 1. Notación

Como mencionamos en el Capítulo 3, en este capítulo y en los restantes presentaremos nuevas familias de superficies racionales anticanónicas que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica (ver Capítulo 3, Definición 3.5, p. 27), en particular, tales superficies serán extremales (ver Capítulo 2, Definición 2.6, p. 21) y de Harbourne-Hirschowitz (ver Capítulo 3, Definición 3.2, p. 26). Además, mostraremos la finitud de sus monoides efectivos y mostraremos que tales superficies tienen anillos de Cox finitamente generados. Dichas familias serán construidas explotando la superficie de Hirzebruch en ciertas configuraciones de puntos.

Las siguientes convenciones que tomaremos respecto a la notación serán utilizadas en los próximos capítulos a menos que se indique otra cosa.

Sea  $\Sigma_n$  la superficie de Hirzebruch asociada al entero no negativo  $n$ . Para un conjunto finito  $\Omega$  de puntos que están en  $\Sigma_n$  y que pueden ser ordinarios o infinitamente cercanos, consideremos la superficie  $X$  obtenida de la explosión de  $\Sigma_n$  en los puntos de  $\Omega$ . Por construcción se sigue que existe un morfismo proyectivo birracional sobreyectivo  $\pi : X \rightarrow \Sigma_n$  y además, se tiene que una base para el grupo de Néron-Severi de  $X$  está dada por los elementos  $\mathcal{C}_n$ ,  $\mathcal{F}$  y  $-\mathcal{E}_p$  con  $p \in \Omega$ , donde

1.  $\mathcal{C}_n$  es la clase de la transformada total  $\pi^*(C_n)$  de  $C_n$  bajo  $\pi$ ,
2.  $\mathcal{F}$  es la clase de la transformada total  $\pi^*(F)$  de cierta fibra  $F$  bajo  $\pi$ , y
3.  $\mathcal{E}_p$  es la clase del divisor excepcional correspondiente a un punto  $p$  de  $\Omega$ .

La forma de intersección en  $\text{NS}(X)$  es la inducida por el morfismo  $\pi$  siguiendo de manera iterada la forma de intersección inducida por cada transformación monoidal (ver Proposición 1.33).

Para finalizar esta sección realizaremos algunos comentarios acerca de las superficies que serán presentadas en las siguientes secciones. En [Loo81], Looijenga estudió las superficies racionales lisas con un ciclo anticanónico, es decir, aquellas con un divisor anticanónico  $-K$  reducido de manera que o bien  $-K$  es una curva racional irreducible con un nodo o bien las componentes irreducibles de  $-K$  son curvas racionales lisas que se intersectan entre ellas transversalmente y de manera que su diagrama de intersección forma un polígono. La mayor parte de sus resultados se enfocan en los ciclos anticanónicos reducidos que tienen a lo más cinco componentes. Recientemente, Friedman en [Fri13] extiende el estudio de las superficies racionales lisas con un ciclo anticanónico cuando éste es reducido y puede tener más de cinco componentes. Las nuevas familias de superficies que presentaremos en este capítulo y en los

Capítulos 5 y 6 extienden las superficies estudiadas en dichos trabajos: las superficies de las primeras dos familias tienen un divisor anticanónico reducido con dos componentes (ver Proposiciones 4.1 y 5.1 respectivamente) mientras que las superficies de la tercera familia tienen un divisor anticanónico reducido con tres componentes (ver Proposición 6.1).

A diferencia del tipo de superficies que mencionamos en el párrafo anterior, aquellas nuevas familias de superficies que presentaremos en los Capítulos 7, 8 y 9 son de una naturaleza distinta: tienen un divisor anticanónico que no es reducido, podría tener tantas componentes irreducibles como uno desee y algunas de ellas no se intersectan transversalmente (ver Proposiciones 7.1, 8.2 y 9.1 respectivamente). El tipo de nuevas superficies que se construirán en el Capítulo 10, tienen un divisor anticanónico que es reducido, podría tener tantas componentes irreducibles como uno desee y algunas de ellas no se intersectan transversalmente (ver Proposición 10.1).

Finalmente, para las de superficies que construiremos en el Capítulo 11 tendremos que se podrán presentar diferentes comportamientos para un divisor anticanónico: podrá tener diferente número de componentes irreducibles que dependerá de cierto parámetro, en algunos casos no será reducido y en algunos casos no será efectivo (ver Proposición 11.11).

## 2. Construcción

En esta sección presentaremos la primera familia de superficies racionales anticanónicas que tienen monoide efectivo finitamente generado y que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica que estudiamos y que motivó el estudio de las familias que se presentarán en los siguientes capítulos. Los resultados presentados en esta sección están basados en el trabajo publicado [DFL16a].

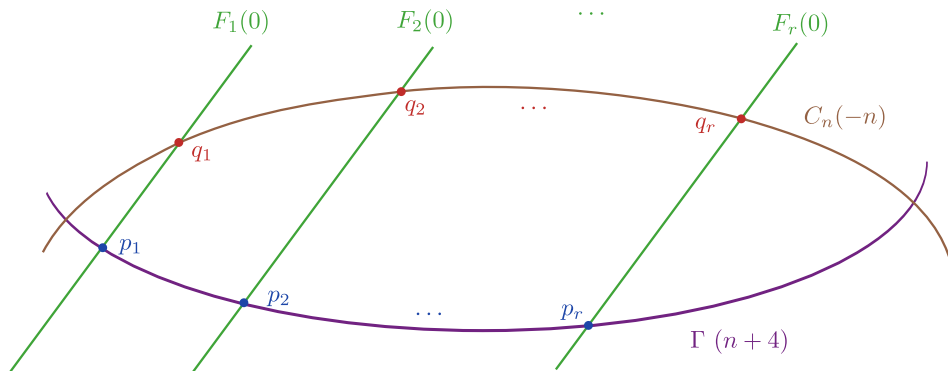


FIGURA 4.1. Configuración de puntos de  $Z_n^r$ .

Para la construcción de esta familia, fijaremos números enteros positivos  $n$  y  $r$ , y consideraremos la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  asociada a  $n$ . Luego, tomaremos una curva racional lisa  $\Gamma$  sobre  $\Sigma_n$  cuya clase en el grupo de Néron-Severi de  $\Sigma_n$  sea igual a  $\mathcal{C}_n + (n + 2)\mathfrak{F}$ , la existencia de tal curva está asegurada gracias a la Proposición 1.49. Ahora, fijaremos  $r$  fibras  $F_1, F_2, \dots, F_r$  del reglado natural de  $\Sigma_n$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$  vamos a denotar por  $p_i$  al único punto donde  $F_i$  y  $\Gamma$  se intersectan y de manera similar, denotaremos por  $q_i$  al único punto donde  $F_i$  y  $C_n$  se intersectan. Además, asumiremos que  $p_i$  es diferente de  $q_i$  para cualquier  $i = 1, \dots, r$ .

La superficie  $Z_n^r$  será la superficie proyectiva racional lisa obtenida de la explosión de  $\Sigma_n$  en el subesquema cerrado de dimensión cero  $\bigcup_{i=1}^r \{p_i, q_i\}$ . Por construcción, una base para el grupo de Néron-Severi de  $Z_n^r$  está dada por los elementos

$$\mathcal{C}_n, \mathcal{F}, -\mathcal{E}_{p_1}, \dots, -\mathcal{E}_{p_r}, -\mathcal{E}_{q_1}, \dots, -\mathcal{E}_{q_r}.$$

Asimismo, se tiene que la superficie  $Z_n^r$  tiene número de Picard igual a  $2(r + 1)$ . Aún más, el siguiente resultado nos muestra que dicha superficie es anticanónica:

**Proposición 4.1.** *Con la notación anterior, la clase del divisor anticanónico puede escribirse como la suma de dos curvas lisas racionales que se encuentran en dos puntos distintos. Consecuentemente,  $Z_n^r$  es una superficie anticanónica.*

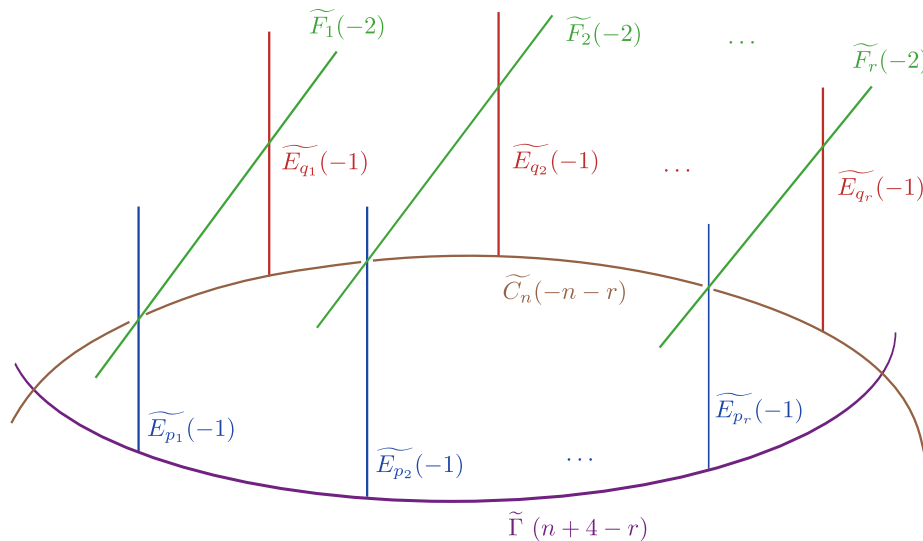


FIGURA 4.2. La superficie  $Z_n^r$ .

DEMOSTRACIÓN. La clase de  $\widetilde{C}_n$  en  $\text{NS}(Z_n^r)$  es igual a  $\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_{q_j}$  y la clase de  $\widetilde{\Gamma}$  en  $\text{NS}(Z_n^r)$  está dada por  $\mathcal{C}_n + (n + 2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_{p_i}$ . Además, tenemos que la intersección  $\widetilde{C}_n \cap \widetilde{\Gamma}$

consta de dos elementos (ver Figura 4.2):

$$[\widetilde{C}_n].[\widetilde{\Gamma}] = \left( \mathcal{C}_n - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_{q_i} \right) \cdot \left( \mathcal{C}_n + (n+2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_{p_i} \right) = 2.$$

Finalmente, como consecuencia de la Proposición 1.34 se tiene que la clase  $-\mathcal{K}_{Z_n^r}$  de un divisor anticanónico  $-K_{Z_n^r}$  en  $\text{NS}(Z_n^r)$  es igual a

$$\left( \mathcal{C}_n + (n+2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_{p_i} \right) + \left( \mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_{q_j} \right).$$

Por lo tanto, concluimos que  $Z_n^r$  es una superficie anticanónica.  $\square$

### 3. Finitud del Monoide Efectivo

En esta sección mostraremos que asumiendo una condición numérica se tiene que los monoides efectivos de las superficies construidas en la sección anterior son finitamente generados. Observemos que sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $r$  es mayor o igual que cinco. En efecto, si  $r \leq 4$ , entonces tendríamos que la superficie  $Z_n^r$  tiene número de Picard a lo más diez. Ahora bien, las superficies racionales con números de Picard menor o igual a nueve tienen monoides efectivos finitamente generados, aún más, se tiene que sus anillos de Cox son finitamente generados (ver [TVV11, Ejemplo 1, p. 96]). El caso de las superficies racionales con números de Picard igual a diez ha sido estudiado por ejemplo en los trabajos [Lah04b] y [Lah05a].

Puesto que la superficie  $Z_n^r$  es anticanónica, en vista de [LH05, Corolario 4.2, p. 109] tenemos que el monoide efectivo de  $Z_n^r$  es finitamente generado si y sólo si  $Z_n^r$  contiene un número finito de curvas  $(-1)$  y un número finito de curvas  $(-2)$ . Por ello, para mostrar que  $\text{Eff}(Z_n^r)$  es finitamente generado será suficiente mostrar la finitud de los conjuntos de curvas citados anteriormente.

**Teorema 4.2.** *Con la notación anterior, si los enteros  $n$  y  $r$  satisfacen la condición numérica  $n^2 + (4 - 2r)n + 4 > 0$ , entonces  $Z_n^r$  tiene un número finito de curvas  $(-1)$  y  $(-2)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Comenzaremos mostrando la finitud de las curvas  $(-1)$ . Sea  $\mathcal{E}$  la clase de una curva  $(-1)$  sobre  $Z_n^r$ , y asumiremos que dicha clase es diferente de las clases  $\mathcal{E}_{p_j}$  y  $\mathcal{E}_{q_j}$  de divisores excepcionales para cada  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Existen números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_r$  tales que

$$\mathcal{E} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_{p_1} - \dots - c_r\mathcal{E}_{p_r} - d_1\mathcal{E}_{q_1} - \dots - d_r\mathcal{E}_{q_r}.$$

Queremos mostrar que existe un número finito de posibilidades para tales enteros. Observemos que los siguientes números enteros son no negativos:  $\mathcal{E}.\mathcal{E}_{p_i}$ ,  $\mathcal{E}.\mathcal{E}_{q_i}$ ,  $\mathcal{E}.\left(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{q_i}\right)$ ,  $\mathcal{E}.\left(\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_{q_j}\right)$  y  $\mathcal{E}.\left(\mathcal{C}_n + (n+2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_{p_i}\right)$  para cualquier  $i = 1, \dots, r$ ; así, tenemos respectivamente las siguientes desigualdades:

$$(4.1) \quad c_i \geq 0 \text{ para cada } i = 1, \dots, r,$$

$$(4.2) \quad d_i \geq 0 \text{ para cada } i = 1, \dots, r,$$

$$(4.3) \quad a - c_i - d_i \geq 0 \text{ para cada } i = 1, \dots, r,$$

$$(4.4) \quad b - na - \sum_{j=1}^r d_j \geq 0, \text{ y}$$

$$(4.5) \quad b + 2a - \sum_{i=1}^r c_i \geq 0.$$

Ahora, usando las igualdades  $\mathcal{E}^2 = -1$  y  $\mathcal{E}.\mathcal{K}_{Z_n} = -1$  obtenemos respectivamente las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^r c_i^2 + \sum_{j=1}^r d_j^2 = -na^2 + 2ab + 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r c_i + \sum_{j=1}^r d_j = (-n+2)a + 2b - 1.$$

Para cada  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ , definimos  $\tilde{c}_i$  y  $\tilde{d}_j$  de la manera siguiente:

$$\tilde{c}_i = c_i - \frac{(-n+2)a + 2b - 1}{2r} \quad \text{y} \quad \tilde{d}_j = d_j - \frac{(-n+2)a + 2b - 1}{2r}.$$

Luego, observemos que tenemos la ecuación

$$\sum_{i=1}^r \tilde{c}_i^2 + \sum_{j=1}^r \tilde{d}_j^2 = -na^2 + 2ab + 1 - \frac{\left((-n+2)a + 2b - 1\right)^2}{2r},$$

y así se sigue la desigualdad

$$-2r + 2rna^2 + \left((-n+2)a - 1\right)^2 + 4\left((-n-r+2)a - 1\right)b + 4b^2 \leq 0,$$

de ella se concluirá que  $b$  está acotado por arriba. En efecto, simplificando términos obtenemos que

$$\left(b + \frac{(-n-r+2)a - 1}{2}\right)^2 \leq \frac{r((r-4)a^2 + 2a + 2)}{4},$$

consecuentemente se tiene la desigualdad:

$$(4.6) \quad b \leq \frac{1 + (n+r-2)a + \sqrt{r((r-4)a^2 + 2a + 2)}}{2}$$



y con ello que  $b$  está acotado en términos de  $a$ ,  $n$  y  $r$ . Ahora bien, las Ecuaciones (4.2) y (4.4) implican que  $na \leq b$ , y la cota superior que encontramos para  $b$  implica la desigualdad

$$(n^2 + (4 - 2r)n + 4)a^2 - 2(n + 2)a + (1 - 2r) \leq 0.$$

De este modo, tenemos la desigualdad

$$(4.7) \quad a \leq \frac{n + 2 + \sqrt{2r(n^2 + (5 - 2r)n + 4)}}{n^2 + (4 - 2r)n + 4}$$

y con ello que  $a$  está acotado en términos de  $n$  y  $r$ . Por tanto, existe un número finito de posibilidades para  $a$  puesto que  $a \geq 0$  (ver Ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3)). Aún más, las Ecuaciones (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4) implican que  $b \geq 0$ , y la Ecuación (4.6) determina que sólo existe un número finito de posibles valores para  $b$ . Por último, usando las Ecuaciones (4.2) y (4.4) y las Ecuaciones (4.1) y (4.5) obtenemos respectivamente las desigualdades

$$0 \leq \sum_{j=1}^r d_j \leq b - na \quad \text{y} \quad 0 \leq \sum_{j=1}^r c_j \leq b + 2a$$

de las cuales se concluye que  $c_i$  y  $d_i$  sólo pueden tomar un número finito de valores para cada  $i = 1, \dots, r$ . De esta forma, concluimos que  $Z_n^r$  contiene un número finito de curvas  $(-1)$ .

Enseguida, mostraremos que  $Z_n^r$  sólo contiene un número finito de curvas  $(-2)$ . Sea  $\mathcal{N}$  la clase de una curva  $(-2)$  sobre  $Z_n^r$ , así, para ciertos enteros  $a, b, c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_r$  se tiene que

$$\mathcal{N} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_{p_1} - \dots - c_r\mathcal{E}_{p_r} - d_1\mathcal{E}_{q_1} - \dots - d_r\mathcal{E}_{q_r}.$$

Queremos mostrar que hay un número finito de posibilidades para tales coeficientes. Vamos a suponer que  $\mathcal{N}$  es diferente de la clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{q_i}$  para cada  $i = 1, \dots, r$  y que no es una componente de  $-\mathcal{K}_{Z_n^r}$ . Comencemos observando que los números enteros  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{E}_{p_i}$ ,  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{E}_{q_i}$ ,  $\mathcal{N} \cdot (\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_{q_j})$ ,  $\mathcal{N} \cdot (\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{q_i})$ , y  $\mathcal{N} \cdot (\mathcal{C}_n + (n + 2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_{p_i})$  son no negativos para cualquier  $i = 1, \dots, r$ . Así, tenemos que se satisfacen respectivamente las desigualdades

$$(4.8) \quad c_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r,$$

$$(4.9) \quad d_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r,$$

$$(4.10) \quad b - na - \sum_{j=1}^r d_j \geq 0,$$

$$(4.11) \quad a - c_i - d_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r, \text{ y}$$

$$(4.12) \quad b + 2a - \sum_{i=1}^r c_i \geq 0.$$

Por otro lado, se tienen por hipótesis las igualdades  $\mathcal{N}^2 = -2$  y  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{K}_{Z_n^r} = 0$  mismas que implican respectivamente las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^r c_i^2 + \sum_{j=1}^r d_j^2 = -na^2 + 2ab + 2 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r c_i + \sum_{j=1}^r d_j = (-n + 2)a + 2b.$$

Ahora, consideramos  $\tilde{c}_i$  y  $\tilde{d}_j$  definidos como:

$$\tilde{c}_i = c_i - \frac{(-n + 2)a + 2b}{2r} \quad \text{y} \quad \tilde{d}_j = d_j - \frac{(-n + 2)a + 2b}{2r},$$

para cualesquier  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ . De este modo, obtenemos la igualdad

$$\sum_{i=1}^r \tilde{c}_i^2 + \sum_{j=1}^r \tilde{d}_j^2 = 2 + 2ab - na^2 - \frac{\left((-n + 2)a + 2b\right)^2}{2r}.$$

A partir de la ecuación anterior se deduce la desigualdad

$$-4r + \left((-n + 2)^2 + 2nr\right)a^2 - 4(r + n - 2)ab + 4b^2 \leq 0$$

y a su vez dicha condición implica que

$$(4.13) \quad b \leq \frac{(r + n - 2)a + \sqrt{r\left((r - 4)a^2 + 4\right)}}{2}.$$

Consiguientemente, tenemos una cota para  $b$  en términos de  $n$ ,  $r$  y  $a$ . Por otro lado, usando las Ecuaciones (4.9) y (4.10) tenemos que  $na \leq b$ , luego, usando la cota superior que hemos encontrado para  $b$  se sigue que

$$a^2 \leq \frac{4r}{n^2 + (4 - 2r)n + 4},$$

y posteriormente tenemos que

$$(4.14) \quad a \leq \sqrt{\frac{4r}{n^2 + (4 - 2r)n + 4}}.$$

Consecuentemente, obtenemos que  $a$  está acotado en términos de  $n$  y  $r$ , además, las Ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.11) nos muestran que  $a \geq 0$ . Con ello, tenemos que sólo existe un número finito de posibilidades para  $a$ . Una consecuencia inmediata de este hecho es que también existe un número finito de posibilidades para  $b$  en vista de la Ecuación (4.13). Por último, las Ecuaciones (4.9) y (4.10) y las Ecuaciones (4.8) y (4.12) nos dicen respectivamente que

$$0 \leq \sum_{j=1}^r d_j \leq b - na \quad \text{y} \quad 0 \leq \sum_{i=1}^r c_i \leq b + 2a.$$

De tales ecuaciones se sigue que únicamente existe un número finito de posibilidades para  $c_i$  y  $d_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . Finalmente, concluimos que el conjunto de las curvas  $(-2)$  sobre  $Z_n^r$  es finito y no vacío.  $\square$

**Corolario 4.3.** *Con la notación anterior, si los enteros  $n$  y  $r$  satisfacen la condición numérica  $n^2 + (4 - 2r)n + 4 > 0$ , entonces el monoide efectivo de  $Z_n^r$  es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 4.2 tenemos que los conjuntos de las curvas  $(-1)$  y las curvas  $(-2)$  son finitos. Así, por [LH05, Corolario 4.2, p. 109] concluimos que  $\text{Eff}(Z_n^r)$  es finitamente generado.  $\square$

#### 4. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias

A continuación probaremos que este tipo de superficies satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica asumiendo cierta condición numérica y mostraremos algunas de sus implicaciones.

**Teorema 4.4.** *Con la notación anterior, si los enteros  $n$  y  $r$  satisfacen la condición numérica  $n^2 + (4 - 2r)n \geq 0$ , entonces  $Z_n^r$  tiene la propiedad ortogonal anticanónica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $H$  un divisor nef sobre  $Z_n^r$  que es ortogonal a un divisor anticanónico. Denotamos por  $\mathcal{H}$  a la clase de  $H$  en  $\text{NS}(Z_n^r)$ , luego, consideramos números enteros no negativos  $a, b, c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_r$  de modo que  $\mathcal{H} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_{p_1} - \dots - c_r\mathcal{E}_{p_r} - d_1\mathcal{E}_{q_1} - \dots - d_r\mathcal{E}_{q_r}$ . Por la hipótesis de ortogonalidad, se tiene que  $-\mathcal{K}_{Z_n^r} \cdot \mathcal{H} = 0$  y utilizando la descomposición de la clase anticanónica de la Proposición 4.1 se sigue que  $[\tilde{\Gamma}].\mathcal{H} = 0$  y que  $[\tilde{C}_n].\mathcal{H} = 0$ . Luego, dichas igualdades implican respectivamente que

$$b + 2a = \sum_{i=1}^r c_i \quad \text{y} \quad b - an = \sum_{j=1}^r d_j.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales obtenemos que

$$(4.15) \quad a = \frac{1}{n+2} \left( \sum_{i=1}^r c_i - \sum_{j=1}^r d_j \right) \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{n+2} \left( n \sum_{i=1}^r c_i + 2 \sum_{j=1}^r d_j \right).$$

Por otro lado, el número de intersección  $(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{q_i}) \cdot \mathcal{H}$  es no negativo para cada  $i = 1, \dots, r$ , es decir que  $a - c_i - d_i \geq 0$  para cualquier  $i = 1, \dots, r$ . Consecuentemente, se tiene que

$$(4.16) \quad \sum_{i=1}^r c_i + \sum_{j=1}^r d_j \leq ra.$$

Ahora bien, usando la Ecuación (4.16) y el valor de  $a$  obtenido en la Ecuación (4.15) obtenemos la desigualdad

$$(4.17) \quad 0 \leq (r + n + 2) \sum_{j=1}^r d_j \leq (r - n - 2) \sum_{i=1}^r c_i.$$

Si  $\sum_{i=1}^r c_i > 0$ , entonces tendríamos que  $r \geq n + 2$  pero esto contradiría el hecho de que  $n^2 + (4 - 2r)n$  es no negativo. Así,  $\sum_{i=1}^r c_i = 0$  y como cada término en la suma es no negativo se sigue que  $c_i = 0$  para cualquier  $i = 1, \dots, r$ . Aún más, la Ecuación (4.17) implica que  $\sum_{j=1}^r d_j = 0$  y el hecho de que cada término en la suma es no negativo implica que  $d_j = 0$  para cada  $j = 1, \dots, r$ . Finalmente, por las igualdades que aparecen en la Ecuación (4.15) tenemos que tanto  $a$  como  $b$  son iguales a cero y con ello que  $\mathcal{H}$  es la clase nula. Por lo tanto,  $H = 0$ . □

**Corolario 4.5.** *Con la notación anterior, si los enteros  $n$  y  $r$  satisfacen la condición numérica  $n^2 + (4 - 2r)n \geq 0$ , entonces la superficie  $Z_n^r$  es de Harbourne-Hirschowitz.*

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 4.1 nos dice que  $Z_n^r$  es una superficie anticanónica y la condición numérica de la hipótesis implica que  $Z_n^r$  tiene la propiedad ortogonal anticanónica por el Teorema 4.4. Luego, por el Teorema 3.11 concluimos que  $Z_n^r$  es de Harbourne-Hirschowitz. □

**Corolario 4.6.** *Con la notación anterior, si los enteros  $n$  y  $r$  satisfacen la condición numérica  $n^2 + (4 - 2r)n \geq 0$ , entonces el anillo de Cox de  $Z_n^r$  es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta el Corolario 4.3 y el Teorema 4.4, la hipótesis implica respectivamente que la superficie anticanónica  $Z_n^r$  tiene monoide efectivo finitamente generado y que satisface la propiedad ortogonal anticanónica. Luego, el Teorema 3.20 implica que  $\text{Cox}(Z_n^r)$  es finitamente generado. □

A continuación presentamos dos familias de superficies dadas por la construcción anterior cuyos anillos de Cox son finitamente generados.

**Corolario 4.7.** *Sean  $m$  y  $t$  enteros positivos. Los anillos de Cox de las siguientes superficies son finitamente generados:*

1.  $Z_m^t$  con  $t$  a lo más  $\left\lfloor \frac{m+4}{2} \right\rfloor$ , donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  es la función piso.
2.  $Z_m^t$  con  $m$  al menos  $2t - 4$  y  $t$  al menos dos.

DEMOSTRACIÓN. En ambos casos, las condiciones impuestas en  $m$  y  $t$  implican que el número entero  $m^2 + (4 - 2t)m$  es positivo. En efecto, si  $t \leq \left\lfloor \frac{m+4}{2} \right\rfloor$  ó  $2t - 4 \leq m$ , entonces  $m + 4 - 2t$  es no negativo. Por lo tanto, el Corolario 4.6 implica que el anillo de Cox de  $Z_m^t$  es finitamente generado.  $\square$

## 5. Ejemplos Concretos

En esta sección vamos a determinar el conjunto generador mínimo del monoide efectivo  $\text{Eff}(Z_n^r)$  para ciertas superficies  $Z_n^r$ . Es importante señalar que utilizaremos la notación de la sección anterior.

**Ejemplo 4.8.** Para  $n \geq 8$ , consideremos la superficie  $Z_n^4$  con número de Picard  $\rho(Z_n^4) = 10$ . El conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(Z_n^4)$  está integrado por las siguientes trece clases de curvas negativas que aparecen naturalmente:

1. La clase  $\mathcal{E}_{p_i}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $i = 1, \dots, 4$ ,
2. La clase  $\mathcal{E}_{q_i}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_i$  para  $i = 1, \dots, 4$ ,
3. La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{q_i}$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por  $p_i$  y  $q_i$  para  $i = 1, \dots, 4$ , y
4. La clase  $\mathcal{C}_n - \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_{q_i}$  de la transformada estricta de la curva  $C_n$ .

En efecto, observemos que las clases de la lista anterior están en el conjunto generador de  $\text{Eff}(Z_n^4)$ . Lo que mostraremos a continuación es que no existen otras clases de curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  además de las ya mencionadas y concluiremos el resultado gracias a [LH05, Lema 4.1, p. 108]. Comenzaremos por las clases de las curvas  $(-2)$ . Sea  $\mathcal{N} = a\mathcal{C}_n + \mathcal{F} - \sum_{i=1}^4 c_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{i=1}^4 d_i \mathcal{E}_{q_i}$  la clase de una curva  $(-2)$  para ciertos números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_4, d_1, \dots, d_4$ . Supongamos que  $\mathcal{N}$  es diferente de las clases de las fibras que contienen a los puntos donde realizamos la explosión. En este caso, la Ecuación (4.14) nos diría que

$$a \leq \frac{4}{n-2}.$$

Así, como  $n$  es al menos ocho se seguiría que  $a = 0$ . Esto implicaría que  $\mathcal{N} = b\mathcal{F}$  la cual no sería la clase de una curva  $(-2)$ . Por lo tanto, no hay más clases de curvas  $(-2)$  además de las naturales.

Ahora, daremos paso al estudio de las clases de curvas  $(-1)$ . Consideremos la clase  $\mathcal{E} = a\mathcal{C}_n + \mathcal{F} - \sum_{i=1}^4 c_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{i=1}^4 d_i \mathcal{E}_{q_i}$  de una curva  $(-1)$  para ciertos números enteros

$a, b, c_1, \dots, c_4, d_1, \dots, d_4$ . Supongamos que  $\mathcal{E}$  es diferente de las clases de los divisores excepcionales. Se tendría que la Ecuación (4.7) se escribiría como

$$a \leq \frac{n + 2 + \sqrt{8n^2 - 24n + 32}}{(n - 2)^2},$$

y el número del lado derecho sería menor que uno pues  $n$  es al menos ocho. Esto implicaría que  $a = 0$  y consecuentemente se tendría que  $\mathcal{E} = b\mathcal{F}$ , pero esto no correspondería a la clase de una curva  $(-1)$ . Por lo tanto, no hay más clases de curvas  $(-1)$  además de las clases de curvas excepcionales.

Los siguientes ejemplos que presentaremos provendrán del caso  $n = 1$ , es decir, provendrán de la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en el nodo y en algunos puntos (ordinarios e infinitamente cercanos) de una cúbica entera.

**Ejemplo 4.9.** Consideremos la superficie  $Z_1^1$  que tiene número de Picard  $\rho(Z_1^1) = 4$ . El conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(Z_1^1)$  está dado por las siguientes cuatro clases de curvas:

1. La clase  $\mathcal{E}_{p_1}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_1$ ,
2. La clase  $\mathcal{E}_{q_1}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_1$ ,
3. La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{q_1}$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por  $p_1$  y  $q_1$ , y
4. La clase  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{E}_{q_1}$  de la transformada estricta de la curva  $C_1$ .

Observemos que cada elemento de la lista propuesta es un generador de  $\text{Eff}(Z_1^1)$ . Para concluir con el resultado usaremos el Lema 4.1 de [LH05] mostrando que no existen clases de curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  además de las ya mencionadas. En primer lugar, verificaremos que no hay más clases de curvas  $(-1)$  que aquellas que aparecen en la lista anterior. Sea  $\mathcal{E} = a\mathcal{C}_1 + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_{p_1} - d_1\mathcal{E}_{q_1}$  la clase de una curva  $(-1)$  donde  $a, b, c_1$  y  $d_1$  son números enteros. Supongamos que  $\mathcal{E}$  es diferente de las clases de las curvas excepcionales. La condición sobre  $a$  que se obtiene de la demostración del Teorema 4.2 es  $a \leq 1$  por lo que ahora tenemos dos casos:

- I)  $a = 1$ . En este caso, la condición de  $b$  obtenida de la Ecuación (4.6) está dada por  $b \leq 1$ . Así, tenemos dos subcasos:
  - I.1)  $b = 1$ . Puesto que en este caso  $d_1 = 0$ , tendríamos que  $c_1 \leq 1$ . Si  $c_1 = 1$ , entonces  $\mathcal{E} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1}$ , pero ésta no sería la clase de una curva  $(-1)$  pues  $\mathcal{E}^2 = 0$ . En el caso que  $c_1 = 0$ , se seguiría que  $\mathcal{E} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{F}$  y tampoco sería la clase de una curva  $(-1)$  puesto que  $\mathcal{E}^2 = 1$ .
  - I.2)  $b = 0$ . Este caso no podría suceder puesto que aparecería la condición  $d_1 \leq -1$ .
- II)  $a = 0$ . La condición  $c_1 + d_1 \leq a$  implicaría que  $c_1 = d_1 = 0$ , así, tendríamos que  $\mathcal{E} = b\mathcal{F}$  y consecuentemente descartaríamos éste caso.

De este modo, tenemos que no existen más clases de curvas  $(-1)$  sobre  $Z_1^1$  además de las ya mencionadas.

Ahora, probaremos que no existen clases de curvas  $(-2)$  además de  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{q_1}$  y de  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{E}_{q_1}$ . Sea  $\mathcal{N} = a\mathcal{C}_1 + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_{p_1} - d_1\mathcal{E}_{q_1}$  la clase de una curva  $(-2)$  para ciertos números enteros  $a, b, c_1$  y  $d_1$ . Supongamos que  $\mathcal{N}$  es diferente de  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{q_1}$  y  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{E}_{q_1}$ . En este caso, la cota superior para  $a$  obtenida de la prueba del Teorema 4.2 es  $a \leq 1$  por lo cual distinguimos dos casos:

- I')  $a = 1$ . Para este valor de  $a$ , la cota superior de la Ecuación (4.13) nos diría que  $b = 0$ . Sin embargo, descartaríamos este caso pues tendríamos la condición inconsistente  $d_1 \leq -1$ .
- II')  $a = 0$ . Esta condición implicaría que  $\mathcal{N} = b\mathcal{F}$  y no obtendríamos la clase de una curva  $(-2)$ .

Por lo tanto, tampoco existen otras clases de curvas  $(-2)$  sobre  $Z_1^1$ .

**Ejemplo 4.10.** Consideremos la superficie  $Z_1^2$  que tiene número de Picard  $\rho(Z_1^2) = 6$ . El conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(Z_1^2)$  está formado por las ocho clases de curvas que se presentan a continuación:

1. La clase  $\mathcal{E}_{p_i}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $i = 1, 2$ ,
2. La clase  $\mathcal{E}_{q_i}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_i$  para  $i = 1, 2$ ,
3. La clase  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_2}$  de la transformada estricta de la curva en  $|\mathcal{C}_1 + F|$  que pasa por  $p_1$  y  $p_2$ ,
4. La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{q_i}$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por  $p_i$  y  $q_i$  para  $i = 1, 2$ , y
5. La clase  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{E}_{q_1} - \mathcal{E}_{q_2}$  de la transformada estricta de la curva  $\mathcal{C}_1$ .

Las clases anteriores se encuentran en el conjunto generador del monoide efectivo. Lo que haremos ahora es mostrar que la única clase de una curva  $(-1)$  diferente de las que aparecen de manera natural es la clase  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_2}$  y que no hay otras clases de curvas  $(-2)$ , posteriormente, por [LH05, Lema 4.1, p. 108] tendremos el resultado. Comenzaremos por las clases de las curvas  $(-1)$ . Sea  $\mathcal{E} = a\mathcal{C}_1 + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_{p_1} - c_2\mathcal{E}_{p_2} - d_1\mathcal{E}_{q_1} - d_2\mathcal{E}_{q_2}$  la clase de una curva  $(-1)$  para ciertos números enteros  $a, b, c_1, c_2, d_1, d_2$  de modo que dicha clase es diferente de las clases de divisores excepcionales. De la demostración del Teorema 4.2 se sigue que  $a \leq 1$ , así que tenemos dos casos a considerar:

- I)  $a = 1$ . Fijando  $a$  como uno en la condición de  $b$  de la Ecuación (4.6), tenemos que  $b \leq 2$  y por ello también consideramos las siguientes posibilidades:

I.1)  $b = 2$ . Las otras condiciones que tenemos nos dicen que  $c_i + d_j \leq 1$  para  $i = 1, 2$ ,  $d_1 + d_2 \leq 1$  y  $c_1 + c_2 \leq 4$ . Usando la simetría de las condiciones, en la siguiente tabla se presenta los posibles valores de los coeficientes:

$d_1$	$d_2$	$c_1$	$c_2$	$\mathcal{E}^2$
1	0	0	1	1
1	0	0	0	2
0	0	1	1	1
0	0	1	0	2
0	0	0	0	3

Como puede verse, ninguna de las posibilidades nos brindaría una de las clases deseadas.

I.2)  $b = 1$ . Para este caso, las condiciones que tenemos nos dicen que  $d_1 = d_2 = 0$ ,  $c_1 \leq 1$ ,  $c_2 \leq 1$  y  $c_1 + c_2 \leq 3$ . En la siguiente tabla verificaremos los posibles valores de  $c_1$  y  $c_2$  usando la simetría de las condiciones:

$c_1$	$c_2$	$\mathcal{E}^2$
1	1	-1
1	0	0
0	0	1

De este modo, se sigue que la clase  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_2}$  es la clase de una curva  $(-1)$  por la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch.

I.3)  $b = 0$ . Aquí aparecería la condición  $d_1 + d_2 \leq -1$  que no es consistente.

II)  $a = 0$ . Este caso se descarta puesto que tendríamos que  $\mathcal{E} = b\mathcal{F}$ .

De esta forma, la única clase de una curva  $(-1)$  que aparece es  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_2}$ .

Continuaremos ahora con las clases de las curvas  $(-2)$ . Sea  $\mathcal{N} = a\mathcal{C}_1 + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_{p_1} - c_2\mathcal{E}_{p_2} - d_1\mathcal{E}_{q_1} - d_2\mathcal{E}_{q_2}$  la clase de una curva  $(-2)$  para ciertos números enteros  $a, b, c_1, c_2, d_1, d_2$ . Supongamos que  $\mathcal{N}$  es diferente de  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{q_i}$  para  $i = 1, 2$ . Puesto que en este caso la cota superior para  $a$  obtenida del Teorema 4.2 nos dice que  $a \leq 1$  distinguimos entre dos casos:

I')  $a = 1$ . Este valor de  $a$  aplicado en la condición para  $b$  de la Ecuación (4.13) implica que  $b \leq 1$ , así, tenemos dos casos:

I'.1)  $b = 1$ . Usando la tabla del Caso I.2), concluimos que no existen clases de curvas  $(-2)$ .

I'.2)  $b = 0$ . Esta posibilidad no podría suceder puesto que aparecería la condición numérica  $d_1 + d_2 \leq -1$ .



II')  $a = 0$ . Este caso se descarta de manera inmediata puesto que la hipótesis implicaría que  $\mathcal{N} = b\mathcal{F}$ .

Por lo tanto, concluimos que no aparecen clases de curvas  $(-2)$  además de las naturales.

**Ejemplo 4.11.** Consideremos la superficie  $Z_1^3$  que tiene número de Picard  $\rho(Z_1^3) = 8$ . Se tienen los siguientes casos:

1. Si existe una curva en  $|C_1 + F|$  que contiene a todos los puntos  $p_1, p_2$  y  $p_3$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(Z_1^3)$  está dado por las siguientes once clases de curvas:
  - (a) La clase  $\mathcal{E}_{p_i}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $i = 1, 2, 3$ ,
  - (b) La clase  $\mathcal{E}_{q_i}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_i$  para  $i = 1, 2, 3$ ,
  - (c) La clase  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_2} - \mathcal{E}_{p_3}$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_1 + F|$  que pasa por todos los puntos.
  - (d) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{q_i}$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por  $p_i$  y  $q_i$  para  $i = 1, 2, 3$ , y
  - (e) La clase  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{E}_{q_1} - \mathcal{E}_{q_2} - \mathcal{E}_{q_3}$  de la transformada estricta de la curva  $C_1$ .
2. Si no existe una curva en  $|C_1 + F|$  que contiene a todos puntos  $p_1, p_2$  y  $p_3$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(Z_1^3)$  está conformado por las siguientes trece clases de curvas:
  - (a) La clase  $\mathcal{E}_{p_i}$  del divisor excepcional correspondiente a  $p_i$  para  $i = 1, 2, 3$ ,
  - (b) La clase  $\mathcal{E}_{q_i}$  del divisor excepcional correspondiente a  $q_i$  para  $i = 1, 2, 3$ ,
  - (c) La clase  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{p_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_1 + F|$  que pasa por  $p_i$  y  $p_j$  para  $1 \leq i < j \leq 3$ ,
  - (d) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{q_i}$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por  $p_i$  y  $q_i$  para  $i = 1, 2, 3$ , y
  - (e) La clase  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{E}_{q_1} - \mathcal{E}_{q_2} - \mathcal{E}_{q_3}$  de la transformada estricta de la curva  $C_1$ .

Como puede observarse en ambos casos, las clases anteriores están en el conjunto generador de  $\text{Eff}(Z_1^3)$ . Lo que realizaremos a continuación será determinar las clases de las curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  que aparecen en la superficie además de las naturales, así, usando el Lema 4.1 de [LH05] concluiremos con el resultado. Por conveniencia determinaremos en primer lugar las clases de las curvas  $(-2)$  sobre  $Z_1^3$ . Para el caso en que  $r = 3$ , la demostración del Teorema 4.2 nos dice que  $a \leq 2$ . Consiguientemente, tenemos los siguientes casos:

- I)  $a = 2$ . Para este caso, la Ecuación (4.13) indicaría que  $b \leq 2$ , por ello, debemos de considerar los siguientes subcasos:

I.1)  $b = 2$ . Aquí, tendríamos las condiciones  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ ,  $\sum_{i=1}^3 c_i \leq 6$  y  $c_i \leq 2$  para cada  $i = 1, 2, 3$ . Consecuentemente, por simetría únicamente debemos comprobar los casos que aparecen en la siguiente tabla:

$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\mathcal{N}^2$
2	2	2	-8
2	2	1	-5
2	2	0	-4
2	1	1	-2
2	1	0	-1
2	0	0	0
1	1	1	1
1	1	0	2
1	0	0	3
0	0	0	4

Los valores de la cuarta fila nos indicarían que la clase  $\mathcal{N} = 2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_2} - \mathcal{E}_{p_3}$  podría ser una de las clases buscadas, sin embargo, dicha posibilidad es descartada pues  $-\mathcal{K}_{Z_1^3} \cdot \mathcal{N} = 2$ .

I.2)  $b = 1$  ó  $b = 0$ . Estos dos casos son desechados pues en ambos la condición numérica  $\sum_{i=1}^3 d_i \leq b - 2$  es inconsistente.

II)  $a = 1$ . Para este valor de  $a$ , la cota de  $b$  obtenida de la Ecuación (4.13) nos indica que  $b \leq 2$  y de este modo tenemos los casos siguientes:

II.1)  $b = 2$ . Bajo estas condiciones, ahora aparecen las desigualdades  $\sum_{i=1}^3 d_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^3 c_i \leq 4$  y  $c_i + d_i \leq 1$  para  $i = 1, 2, 3$ . Gracias a la primera condición y usando la simetría, es suficiente verificar los casos  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ ; y  $d_1 = 1$  y  $d_2 = d_3 = 0$ :

$d_1$	$d_2$	$d_3$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\mathcal{N}^2$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	3
1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	3

Se sigue de la información de la tabla que en este caso no encontraríamos otras clases de curvas  $(-2)$ .

II.2)  $b = 1$ . Las condiciones que se tiene en este caso implicarían que  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ ,  $\sum_{i=1}^3 c_i \leq 3$  y  $c_i \leq 1$  para  $i = 1, 2, 3$ . Así, por simetría es suficiente verificar los siguientes casos:

$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\mathcal{N}^2$
1	1	1	-2
1	1	0	-1
1	0	0	0
0	0	0	1

La clase de correspondiente a los valores de la primera fila, es decir cuando  $\mathcal{N} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_2} - \mathcal{E}_{p_3}$ , brindan la clase de una curva  $(-2)$  para el Caso 1) en vista de la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch; sin embargo, para el Caso 2) tal clase no es una clase de dicho tipo.

II.3)  $b = 0$ . Descartamos este caso pues la condición  $\sum_{i=1}^3 d_i \leq -1$  es inconsistente.  
 III)  $a = 0$ . Bajo esta condición sucedería que  $\mathcal{N} = b\mathcal{F}$ , pero es evidente que ésta no sería la clase de una curva  $(-2)$  sobre  $Z_1^3$ .

Por lo tanto, para el Caso 1) encontramos que  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_2} - \mathcal{E}_{p_3}$  es la clase de una curva  $(-2)$  mientras que para el Caso 2) no se tienen nuevas clases de curvas  $(-2)$ .

A continuación realizaremos un estudio de las clases de las curvas  $(-1)$ . Sea  $\mathcal{E}$  la clase de una curva  $(-1)$  y supongamos que es diferente de las clases de los divisores excepcionales. Existen números enteros  $a, b, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$  de modo que  $\mathcal{E} = a\mathcal{C}_1 + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^3 c_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{i=1}^3 d_i \mathcal{E}_{q_i}$ . En este caso, la cota para  $a$  que se obtiene de la demostración del Teorema 4.2 es  $a \leq 2$  y por ello tenemos los siguientes casos:

I')  $a = 2$ . Para este valor de  $a$ , a partir de la Ecuación (4.6) se deduce que  $b \leq 3$  por lo cual distinguimos entre tres casos:

I'.1)  $b = 3$ . Con estas condiciones tenemos que  $\sum_{i=1}^3 d_i \leq 1$ ,  $\sum_{i=1}^3 c_i \leq 7$  y  $c_i + d_i \leq 2$  para cada  $i = 1, 2, 3$ . Lo que haremos ahora será utilizar la condición  $\sum_{i=1}^3 d_i \leq 1$  para estudiar todos los posibles valores y por simetría, bastará con verificar los casos  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ ; y  $d_1 = 1$  y  $d_2 = d_3 = 0$ . La siguiente tabla muestra los valores que bastan a considerar:

$d_1$	$d_2$	$d_3$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\mathcal{E}^2$
0	0	0	2	2	2	-4
0	0	0	2	2	1	-1
0	0	0	2	2	0	0
0	0	0	2	1	1	2
0	0	0	2	1	0	3
0	0	0	2	0	0	4
0	0	0	1	1	1	5
0	0	0	1	1	0	6
0	0	0	1	0	0	7
0	0	0	0	0	0	8
1	0	0	1	2	2	-2
1	0	0	1	2	1	1
1	0	0	1	2	0	2
1	0	0	1	1	1	4
1	0	0	1	1	0	5
1	0	0	1	0	0	6
1	0	0	0	2	2	-1
1	0	0	0	2	0	2
1	0	0	0	0	0	7

Como puede apreciarse en la tabla anterior, las clases  $2\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_{p_1} - 2\mathcal{E}_{p_2} - \mathcal{E}_{p_3}$  y  $2\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_{p_2} - 2\mathcal{E}_{p_3} - \mathcal{E}_{q_1}$  son las que podrían pertenecer a las clases buscadas. Sin embargo, no es el caso pues para ambas clases la intersección con  $-\mathcal{K}_{Z_1^3}$  es igual a tres.

I'.2)  $b = 2$ . Utilizando la tabla del Caso I.1) obtenemos que la clase  $\mathcal{E} = 2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_2}$  satisface que  $\mathcal{E}^2 = -1$ . Sin embargo, dicha clase no es la clase de una curva  $(-1)$  pues  $-\mathcal{K}_{Z_1^3} \cdot \mathcal{E} = 3$ .

I'.3)  $b = 1$  ó  $b = 0$ . Similarmente al Caso I.2), ambos casos tampoco son considerados.

II')  $a = 1$ . Para este valor de  $a$  la Ecuación (4.6) implica que  $b \leq 3$ , así que distinguiremos entre cuatro casos:

II'.1)  $b = 3$ . Para el primer caso tendríamos las condiciones  $\sum_{i=1}^3 d_i \leq 2$ ,  $\sum_{i=1}^3 c_i \leq 5$  y  $c_i + d_i \leq 1$  para cada  $i = 1, 2, 3$ . Ahora, debemos comprobar los siguientes casos:

$d_1$	$d_2$	$d_3$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\mathcal{E}^2$
1	1	0	0	0	1	2
1	1	0	0	0	0	3
1	0	0	0	1	1	2
1	0	0	0	1	0	3
1	0	0	0	0	0	4
0	0	0	1	1	1	2
0	0	0	1	1	0	3
0	0	0	1	0	0	4
0	0	0	0	0	0	5

Así, descartaríamos todas las posibilidades que se presentarían.

II'.2)  $b = 2$ . Usando la tabla del Caso II.1) se tiene que no existen clases de curvas  $(-1)$  para estos valores de  $a$  y  $b$ .

II'.3)  $b = 1$ . Utilizando la tabla del Caso II.2) podemos ver que la clase  $\mathcal{E} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_2}$  satisface que  $\mathcal{E}^2 = -1$ . En el Caso 1) la clase  $\mathcal{E}$  no es una de las clases deseadas debido a la existencia de una curva en  $|C_1 + F|$  que contiene a los tres puntos. Sin embargo, puesto que en el Caso 2) no existe tal curva, se tiene que  $\mathcal{E}$  es la clase de una curva  $(-1)$  por la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch.

II'.4)  $b = 0$ . Este caso se descarta pues la condición  $\sum_{i=1}^3 d_i \leq -1$  es inconsistente.

III')  $a = 0$ . En este caso sucedería que  $\mathcal{E} = b\mathcal{F}$  y ésta no sería la clase de una curva  $(-1)$ .

De esta forma, hemos determinado todas las clases de curvas  $(-1)$  que pueden aparecer: para el Caso 1) no existen más clases de curvas  $(-1)$  mientras que para el Caso 2) encontramos tres clases más de curvas  $(-1)$ :

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_2}, \quad \mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_3} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_2} - \mathcal{E}_{p_3}.$$

Con esto concluimos el estudio de las clases de curvas  $(-1)$ .

**Observación 4.12.** Harbourne estudia en [Har85] y [Har98] ciertas superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en puntos lisos que se encuentran sobre una cúbica entera. El ejemplo anterior complementa el estudio de superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en puntos que están sobre una cúbica pues presenta un caso cuando explotamos el nodo de una cúbica entera. En el siguiente capítulo presentaremos otro ejemplo de éste tipo de superficies.

## CAPÍTULO 5

### EXPLOSIÓN DE $\Sigma_n$ EN PUNTOS SOBRE $C_n$ Y $\Gamma$ , II

En este capítulo presentaremos la construcción de nuestra segunda familia de superficies racionales anticanónicas cuyos números de Picard podrían ser tan grandes como uno desee, que tendrán monoides efectivos finitamente generados y que cumplirán con la propiedad ortogonal anticanónica, además, como consecuencia de tales propiedades sus anillos de Cox serán finitamente generados. Tales superficies serán construidas en la primera sección como una variante de las superficies que fueron introducidas en el capítulo anterior al considerar las mismas dos curvas con una configuración de puntos diferente. Después, probaremos en la segunda sección que bajo cierta condición numérica los conjuntos de las curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  sobre este tipo de superficies son finitos (ver Teorema 5.2) y esto implicará que sus monoides efectivos son finitamente generados (ver Corolario 5.3). La tercera sección se encarga de probar que dichas superficies satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica si una condición numérica se cumple (ver Teorema 5.4) y como consecuencia tendremos que son de Harbourne-Hirschowitz (ver Corolario 5.5). Para concluir con el capítulo, en la cuarta sección utilizando las técnicas que desarrollamos en la segunda sección presentaremos el conjunto generador mínimo del monoide efectivo de la superficie obtenida como la explosión de  $\Sigma_n$  en  $n + r_2$  puntos (donde  $n$  y  $r_2$  son números enteros positivos) en cierta configuración (ver Ejemplo 5.7) y como una consecuencia de tal ejemplo presentaremos el conjunto generador mínimo del monoide efectivo de la superficie obtenida de la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en ciertos puntos en una cúbica nodal (ver Ejemplo 5.8). Los resultados de este capítulo se basan principalmente en [DFL16b].

## 1. Construcción

Consideraremos una variante de la construcción presentada en la Sección 2 del Capítulo 4. Como puede observarse en la Figura 4.1, la configuración de puntos tomada previamente considera en términos generales fijar algunas fibras y tomar los puntos de intersección de dichas fibras con la curva negativa  $C_n$  y con la curva  $\Gamma$ . La configuración que consideraremos diferirá por el hecho de que únicamente consideraremos un punto por cada fibra fijada.

Vamos a tomar un número entero no negativo  $n$ , números enteros positivos  $r_1$  y  $r_2$ , de nueva cuenta consideraremos una curva  $\Gamma$  cuya clase en  $\text{NS}(\Sigma_n)$  sea igual a  $\mathcal{C}_n + (n + 2)\mathfrak{F}$  y fijaremos  $(r_1 + r_2)$  fibras  $F_{p_1}, \dots, F_{p_{r_1}}, F_{q_1}, \dots, F_{q_{r_2}}$  del reglado natural de  $\Sigma_n$ . Además, consideraremos los siguientes puntos en  $\Sigma_n$ :

- El punto  $p_i$  será el único punto de intersección entre  $F_{p_i}$  y la curva  $\Gamma$  para cada  $i = 1, \dots, r_1$ , y asumiremos que ninguno de estos puntos se encuentra sobre  $C_n$ .
- El punto  $q_j$  será el único punto de intersección entre  $F_{q_j}$  y la curva negativa  $C_n$  para cada  $j = 1, \dots, r_2$ , y asumiremos que ninguno de estos puntos se encuentra sobre  $\Gamma$ .

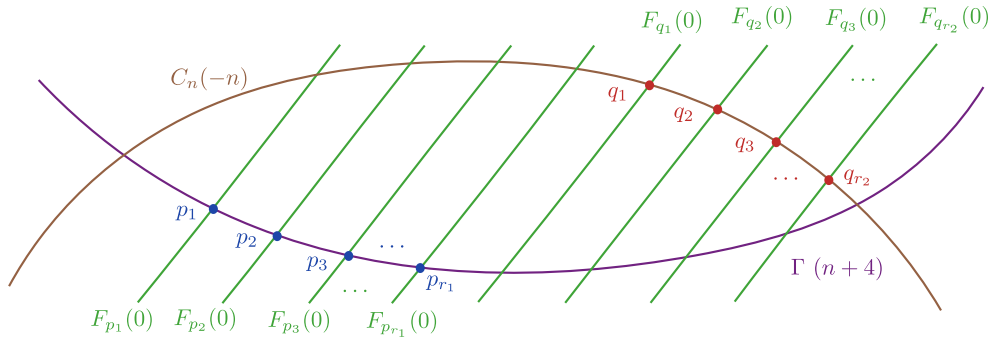


FIGURA 5.1. Configuración de puntos de  $Z_n^{r_1, r_2}$ .

La superficie obtenida como la explosión de  $\Sigma_n$  en el subesquema cerrado  $\bigcup_{i=1}^{r_1} \{p_i\} \cup \bigcup_{j=1}^{r_2} \{q_j\}$  será denotada por  $Z_n^{r_1, r_2}$ . De manera inmediata, tenemos que dicha superficie es racional y que su número de Picard  $\rho(Z_n^{r_1, r_2})$  es igual a  $(r_1 + r_2 + 2)$ . Asimismo, tenemos que cualquier elemento del grupo de Néron-Severi  $\text{NS}(Z_n^{r_1, r_2})$  puede escribirse en función de las clases

$$\mathcal{C}_n, \mathcal{F}, -\mathcal{E}_{p_1}, \dots, -\mathcal{E}_{p_{r_1}}, -\mathcal{E}_{q_1}, \dots, -\mathcal{E}_{q_{r_2}}.$$

Lo primero que mostraremos acerca de este tipo de superficies es que son anticanónicas.

**Proposición 5.1.** *Con la notación anterior, la superficie  $Z_n^{r_1, r_2}$  es anticanónica cuya clase anticanónica puede escribirse como la suma de las clases de dos curvas lisas racionales que se encuentran en dos puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Por construcción tenemos que la clase de la transformada estricta  $\widetilde{\Gamma}$  de la curva  $\Gamma$  es igual a  $\mathcal{C}_n + (n + 2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} \mathcal{E}_{p_i}$  mientras que la clase de la transformada estricta  $\widetilde{C}_n$  de la curva  $C_n$  es igual a  $\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^{r_2} \mathcal{E}_{q_j}$ . Luego, de la Proposición 1.34 se sigue de forma inmediata que la clase anticanónica  $-\mathcal{K}_{Z_n^{r_1, r_2}}$  es igual a

$$\left( \mathcal{C}_n + (n + 2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} \mathcal{E}_{p_i} \right) + \left( \mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^{r_2} \mathcal{E}_{q_j} \right),$$

es decir, tenemos que la clase anticanónica puede escribirse como la suma de las clases de las transformadas estrictas de las curvas  $\Gamma$  y  $C_n$  las cuales se intersectan en dos puntos.  $\square$

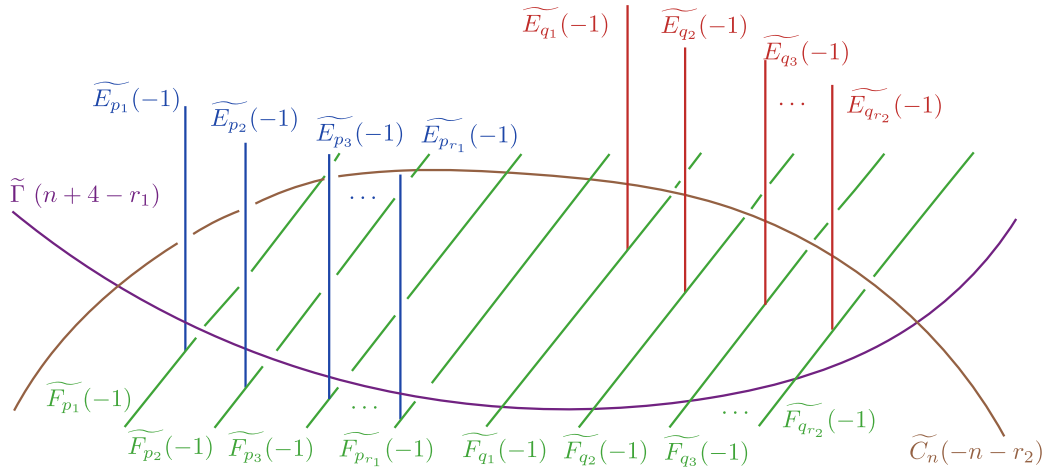


FIGURA 5.2. La superficie  $Z_n^{r_1, r_2}$ .

## 2. Finitud del Monoide Efectivo

Lo siguiente que realizaremos será estudiar los conjuntos de las curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  que se encuentran sobre  $Z_n^{r_1, r_2}$  considerando una condición numérica con el objetivo de mostrar que el monoide efectivo de  $Z_n^{r_1, r_2}$  es finitamente generado.

**Teorema 5.2.** *Con la notación anterior, si  $r_2$  es arbitrario y se satisface la condición numérica  $r_1 \leq n + 4$ , entonces los conjuntos de las curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  sobre  $Z_n^{r_1, r_2}$  son finitos.*



DEMOSTRACIÓN. Con el objetivo de simplificar algunas expresiones que aparecerán abajo, denotaremos por  $\zeta$  al siguiente número entero:

$$\zeta = (n + 2)^2 + r_2(n + 4) - r_1(n + r_2).$$

Comenzaremos mostrando que únicamente existe un número finito de curvas  $(-1)$  sobre  $Z_n^{r_1, r_2}$ . Sea  $\mathcal{E}$  la clase una curva  $(-1)$  sobre  $Z_n^{r_1, r_2}$  y supondremos que dicha clase es diferente de las clases  $\mathcal{E}_{p_i}$ ,  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i}$ ,  $\mathcal{E}_{q_j}$  y  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_j}$  para todo  $i = 1, \dots, r_1$  y  $j = 1, \dots, r_2$ . Existen números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_{r_1}, d_1, \dots, d_{r_2}$  tales que

$$\mathcal{E} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} c_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^{r_2} d_j \mathcal{E}_{q_j}.$$

Puesto que los números de intersección  $\mathcal{E}.\mathcal{E}_{p_i}$ ,  $\mathcal{E}.\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i}$ ,  $\mathcal{E}.\mathcal{E}_{q_j}$  y  $\mathcal{E}.\mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_j}$  son no negativos, tenemos respectivamente que  $c_i$ ,  $a - c_i$ ,  $d_j$  y  $a - d_j$  son no negativos para cada  $i = 1, \dots, r_1$  y  $j = 1, \dots, r_2$ . En particular, tenemos que  $a$  es no negativo. Por otro lado, puesto que  $\mathcal{E}.\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^{r_2} \mathcal{E}_{q_j}$  es un entero no negativo tenemos que  $na \leq b$ . El hecho de que  $\mathcal{E}$  es la clase de una curva  $(-1)$  implica las ecuaciones  $\mathcal{E}^2 = -1$  y  $-\mathcal{K}_{Z_n^{r_1, r_2}}.\mathcal{E} = 1$ . La primera de ellas nos dice que

$$\sum_{i=1}^{r_1} c_i^2 + \sum_{j=1}^{r_2} d_j^2 = 2ab - na^2 + 1.$$

Utilizando la descomposición de la clase anticanónica de la Proposición 5.1, la segunda ecuación puede reescribirse como  $[\tilde{\Gamma}].\mathcal{E} + [\tilde{\mathcal{C}}_n].\mathcal{E} = 1$ , así, vamos a distinguir entre dos casos:

- A)  $[\tilde{\Gamma}].\mathcal{E} = 1$  y  $[\tilde{\mathcal{C}}_n].\mathcal{E} = 0$ ; y
- B)  $[\tilde{\Gamma}].\mathcal{E} = 0$  y  $[\tilde{\mathcal{C}}_n].\mathcal{E} = 1$ .

Lo que haremos en ambos casos será mostrar que tanto  $a$  como  $b$  tienen cotas superiores y ellas nos ayudarán a concluir la existencia de un número finito de posibilidades para cada coeficiente de  $\mathcal{E}$ .

**Caso A)** Las condiciones que tenemos en este caso son respectivamente:

$$\sum_{i=1}^{r_1} c_i = b + 2a - 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{r_2} d_j = b - na.$$

Vamos a definir los números  $\tilde{c}_i$  y  $\tilde{d}_j$  de la siguiente forma:

$$\tilde{c}_i = c_i - \frac{b + 2a - 1}{r_1} \quad \text{y} \quad \tilde{d}_j = d_j - \frac{b - na}{r_2}$$

para  $i \in \{1, \dots, r_1\}$  y  $j \in \{1, \dots, r_2\}$ . Luego, tenemos que se satisface la ecuación

$$\sum_{i=1}^{r_1} \tilde{c}_i^2 + \sum_{j=1}^{r_2} \tilde{d}_j^2 = 2ab - na^2 + 1 - \frac{(b + 2a - 1)^2}{r_1} - \frac{(b - na)^2}{r_2}.$$

Dicha ecuación implica que

$$(r_1 + r_2)b^2 - 2((r_1(n + r_2) - 2r_2)a + r_2)b + (nr_1(n + r_2) + 4r_2)a^2 + r_2(1 - r_1 - 4a) \leq 0,$$

y a su vez dicha condición implica que

$$\left( b - \frac{(r_1(n + r_2) - 2r_2)a + r_2}{r_1 + r_2} \right)^2 \leq \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} \left( r_1 + r_2 - 1 - \zeta a^2 + 2(n + r_2 + 2)a \right).$$

De esta manera, se tiene una cota superior para  $b$ ,

$$(5.1) \quad b \leq \frac{(r_1(n + r_2) - 2r_2)a + r_2 + \sqrt{r_1 r_2 (r_1 + r_2 - 1 - \zeta a^2 + 2(n + r_2 + 2)a)}}{r_1 + r_2},$$

y la siguiente desigualdad:

$$0 \leq r_1 + r_2 - 1 - \zeta a^2 + 2(n + r_2 + 2)a.$$

De la última desigualdad se obtiene la siguiente cota superior para  $a$ :

$$(5.2) \quad a \leq \frac{n + r_2 + 2 + \sqrt{(r_1 + r_2 - 1)\zeta + (n + r_2 + 2)^2}}{\zeta}.$$

**Caso B)** Para este caso, las condiciones que tenemos respectivamente nos dicen que

$$\sum_{i=1}^{r_1} c_i = b + 2a \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{r_2} d_j = b - na - 1.$$

Para cada  $i = 1, \dots, r_1$  y  $j = 1, \dots, r_2$  definimos  $\tilde{c}_i$  y  $\tilde{d}_j$  como

$$\tilde{c}_i = c_i - \frac{b + 2a}{r_1} \quad \text{y} \quad \tilde{d}_j = d_j - \frac{b - na - 1}{r_2}.$$

A partir de estos números se obtiene la ecuación

$$\sum_{i=1}^{r_1} \tilde{c}_i^2 + \sum_{j=1}^{r_2} \tilde{d}_j^2 = 2ab - na^2 + 1 - \frac{(b + 2a)^2}{r_1} - \frac{(b - na - 1)^2}{r_2},$$

y posteriormente se sigue que

$$(r_1 + r_2)b^2 - 2((r_1 r_2 + nr_1 - 2r_2)a + r_1)b + (nr_1(n + r_2) + 4r_2)a^2 + r_1(na + 1 - r_2) \leq 0.$$

De esta forma, encontramos la desigualdad

$$\left( b - \frac{(r_1(n + r_2) - 2r_2)a + r_1}{r_1 + r_2} \right)^2 \leq \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} \left( r_1 + r_2 - 1 - \zeta a^2 - 2(n + 2 - r_1)a \right)$$

de la cual se deduce una cota superior para  $b$

$$(5.3) \quad b \leq \frac{(r_1(n+r_2) - 2r_2)a + r_1 + \sqrt{r_1 r_2 (r_1 + r_2 - 1 - \zeta a^2 - 2(n+2-r_1)a)}}{r_1 + r_2},$$

y asimismo, se deduce que

$$0 \leq r_1 + r_2 - 1 - \zeta a^2 - 2(n+2-r_1)a.$$

La última desigualdad implica la siguiente cota superior para  $a$ :

$$(5.4) \quad a \leq \frac{r_1 - n - 2 + \sqrt{(r_1 + r_2 - 1)\zeta + (n+2-r_1)^2}}{\zeta}.$$

En ambos casos, puesto que  $a$  es no negativo y las cotas superiores encontradas se encuentran en función de  $n$ ,  $r_1$  y  $r_2$  (ver Ecuaciones (5.2) y (5.4)), concluimos que  $a$  únicamente puede tomar un número finito de valores. Luego, puesto que  $na \leq b$  y las cotas superiores en las Ecuaciones (5.1) y (5.3) sólo dependen de  $a$ ,  $n$ ,  $r_1$  y  $r_2$ , se sigue que  $b$  sólo puede tomar un número finito de valores. Por último, el hecho de que en ambos casos sucede que  $0 \leq c_i \leq a$  y  $0 \leq d_j \leq a$  para cada  $i = 1, \dots, r_1$  y  $j = 1, \dots, r_2$  implica que para cada uno de tales números sólo hay un número finito de posibles valores. De esta forma, se concluye que el conjunto de las curvas  $(-1)$  sobre  $Z_n^{r_1, r_2}$  es finito.

Ahora, mostraremos que el conjunto de las curvas  $(-2)$  sobre  $Z_n^{r_1, r_2}$  es finito. Sea  $\mathcal{N}$  la clase de una curva  $(-2)$  sobre  $Z_n^{r_1, r_2}$ , así, existen números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_{r_1}, d_1, \dots, d_{r_2}$  tales que

$$\mathcal{N} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} c_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^{r_2} d_j \mathcal{E}_{q_j}.$$

Supongamos que  $\mathcal{N}$  no es una componente de la clase anticanónica. Observemos que tenemos que  $na \leq b$  puesto que  $\mathcal{N} \cdot (\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^{r_2} \mathcal{E}_{q_j})$  es no negativo. Además, tenemos que los números de intersección  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{E}_{p_i}$ ,  $\mathcal{N} \cdot (\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i})$ ,  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{E}_{q_j}$  y  $\mathcal{N} \cdot (\mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_j})$  son no negativos para cada  $i = 1, \dots, r_1$  y  $j = 1, \dots, r_2$ , tales condiciones implican que

$$(5.5) \quad 0 \leq c_i \leq a \quad \text{y} \quad 0 \leq d_j \leq a.$$

Del hecho de que  $\mathcal{N}$  es la clase de una curva  $(-2)$  tenemos que se satisfacen las igualdades  $\mathcal{N}^2 = -2$  y  $\mathcal{K}_{Z_n^{r_1, r_2}} \cdot \mathcal{N} = 0$ . La primera de ellas implica que

$$\sum_{i=1}^{r_1} c_i^2 + \sum_{j=1}^{r_2} d_j^2 = 2ab - na^2 + 2.$$

Usando la descomposición de la clase anticanónica tenemos que la segunda ecuación implica que  $[\tilde{\Gamma}].\mathcal{N} = 0$  y que  $[\tilde{C}_n].\mathcal{N} = 0$ , es decir, tenemos respectivamente las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{r_1} c_i = b + 2a \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{r_2} d_j = b - na.$$

Definimos los números  $\tilde{c}_i$  y  $\tilde{d}_j$  para cada  $i = 1, \dots, r_1$  y  $j = 1, \dots, r_2$  de la siguiente forma:

$$\tilde{c}_i = c_i - \frac{b + 2a}{r_1} \quad \text{y} \quad \tilde{d}_j = d_j - \frac{b - na}{r_2}.$$

Luego, tenemos que se satisface la ecuación

$$\sum_{i=1}^{r_1} \tilde{c}_i^2 + \sum_{j=1}^{r_2} \tilde{d}_j^2 = 2ab - na^2 + 2 - \frac{(b + 2a)^2}{r_1} - \frac{(b - na)^2}{r_2},$$

y posteriormente se sigue la desigualdad

$$(r_1 + r_2)b^2 - 2a(r_1(n + r_2) - 2r_2)b + (r_1n(n + r_2) + 4r_2)a^2 - 2r_1r_2 \leq 0.$$

La condición anterior implica que

$$\left( b - \frac{(r_1(n + r_2) - 2r_2)a}{r_1 + r_2} \right)^2 \leq \frac{r_1r_2}{(r_1 + r_2)^2} \left( 2(r_1 + r_2) - \zeta a^2 \right),$$

de esto se deriva una cota superior para  $b$ ,

$$(5.6) \quad b \leq \frac{(r_1(n + r_2) - 2r_2)a + \sqrt{r_1r_2(2(r_1 + r_2) - \zeta a^2)}}{(r_1 + r_2)},$$

y también la desigualdad

$$0 \leq 2(r_1 + r_2) - \zeta a^2.$$

Consecuentemente, encontramos una cota superior para  $a$ :

$$(5.7) \quad a \leq \sqrt{\frac{2(r_1 + r_2)}{\zeta}}.$$

Como  $a$  es no negativo tenemos que únicamente existen un número finito de posibilidades para dicho entero. La condición  $na \leq b$  y la cota superior de la Ecuación (5.6) para  $b$  implican que sólo existe un número finito de posibilidades para tal entero. Por último, de las desigualdades en la Ecuación (5.5) y del hecho que  $a$  sólo toma un número finito de valores se sigue que  $c_i$  y  $d_j$  sólo pueden tomar un número finito de valores para cada  $i = 1, \dots, r_1$  y  $j = 1, \dots, r_2$ . Por lo tanto, concluimos que el conjunto de las curvas  $(-2)$  sobre  $Z_n^{r_1, r_2}$  es finito.  $\square$

**Corolario 5.3.** *Con la notación anterior, si  $r_2$  es arbitrario y se satisface la condición numérica  $r_1 \leq n + 4$ , entonces el monoide efectivo de  $Z_n^{r_1, r_2}$  es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del Teorema 5.2 y de [LH05, Corolario 4.2, p. 109].  $\square$

### 3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias

Lo siguiente que realizaremos será mostrar que estas superficies satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica bajo una condición numérica. Posteriormente, revisaremos algunas de sus consecuencias.

**Teorema 5.4.** *Con la notación anterior, si  $n + 2$  es mayor que  $r_1 + r_2$ , entonces  $Z_n^{r_1, r_2}$  tiene la propiedad ortogonal anticanónica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $H$  un divisor nef sobre  $Z_n^{r_1, r_2}$  y supongamos que es ortogonal a un divisor anticanónico. Luego, denotamos por  $\mathcal{H}$  a la clase de  $H$  en el grupo de Néron-Severi de  $Z_n^{r_1, r_2}$  y tomamos números enteros no negativos  $a, b, c_1, \dots, c_{r_1}, d_1, \dots, d_{r_2}$  tales que  $\mathcal{H} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_{p_1} - \dots - c_{r_1}\mathcal{E}_{p_{r_1}} - d_1\mathcal{E}_{q_1} - \dots - d_{r_2}\mathcal{E}_{q_{r_2}}$ . Usando la descomposición de la clase anticanónica de la Proposición 5.1, el hecho que  $\mathcal{H}$  sea ortogonal a la clase anticanónica implica que  $\mathcal{H}.\tilde{[\Gamma]} = 0$  y que  $\mathcal{H}.\tilde{[\mathcal{C}_n]} = 0$ , así, tenemos respectivamente que

$$\sum_{i=1}^{r_1} c_i = b + 2a \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{r_2} d_j = b - na.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior obtenemos que

$$(5.8) \quad a = \frac{1}{n+2} \left( \sum_{i=1}^{r_1} c_i - \sum_{j=1}^{r_2} d_j \right) \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{n+2} \left( n \sum_{i=1}^{r_1} c_i + 2 \sum_{j=1}^{r_2} d_j \right).$$

Ahora bien, del hecho que los números de intersección  $\mathcal{H}.\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i}$  y  $\mathcal{H}.\mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_j}$  son no negativos se tiene respectivamente que  $a - c_i \geq 0$  y que  $a - d_j \geq 0$  para cualquier  $i = 1, \dots, r_1$  y  $j = 1, \dots, r_2$ . Consecuentemente, tenemos que  $\sum_{i=1}^{r_1} c_i \leq r_1 a$  y que  $\sum_{j=1}^{r_2} d_j \leq r_2 a$ , y esto implica que  $\sum_{i=1}^{r_1} c_i + \sum_{j=1}^{r_2} d_j \leq (r_1 + r_2)a$ . Luego, tomando el valor de  $a$  encontrado en la Ecuación (5.8) se sigue la desigualdad

$$0 \leq (r_1 + r_2 + n + 2) \sum_{j=1}^{r_2} d_j \leq (r_1 + r_2 - n - 2) \sum_{i=1}^{r_1} c_i.$$

La condición numérica de la hipótesis implica que  $\sum_{i=1}^{r_1} c_i = 0$ , y puesto que cada término en la suma es no negativo se sigue que  $c_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, r_1$ . Este hecho implica que  $\sum_{j=1}^{r_2} d_j = 0$  y de esta forma  $d_j = 0$  para cualquier  $j = 1, \dots, r_2$  pues cada término en la suma es no negativo. Finalmente, de la Ecuación (5.8) se sigue que tanto  $a$  como  $b$  deben ser iguales a cero. Por lo tanto, concluimos que  $\mathcal{H}$  es la clase nula y consecuentemente que  $H = 0$ .  $\square$

**Corolario 5.5.** *Con la notación anterior, si  $n + 2$  es mayor que  $r_1 + r_2$ , entonces  $Z_n^{r_1, r_2}$  es una superficie de Harbourne-Hirschowitz.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado se sigue del Teorema 3.11 pues  $Z_n^{r_1, r_2}$  es una superficie anticanónica (ver Proposición 5.1) y satisface la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teorema 5.4).  $\square$

**Corolario 5.6.** *Con la notación anterior, si  $n + 2$  es mayor que  $r_1 + r_2$ , entonces el anillo de Cox de  $Z_n^{r_1, r_2}$  es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. La condición numérica en la hipótesis implica que la superficie  $Z_n^{r_1, r_2}$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica por el Teorema 5.4. Asimismo, dicha condición implica que  $n + 4$  es mayor que  $r_1$  y por el Corolario 5.3 tenemos que el monoide efectivo  $\text{Eff}(Z_n^{r_1, r_2})$  es finitamente generado. Finalmente, concluimos que  $\text{Cox}(Z_n^{r_1, r_2})$  es finitamente generado en vista del Corolario 3.20.  $\square$

#### 4. Ejemplos Concretos

En esta sección presentaremos algunos ejemplos concretos del conjunto generador mínimo para el monoide efectivo  $\text{Eff}(Z_n^{r_1, r_2})$  de ciertas superficies  $Z_n^{r_1, r_2}$ . Para lo siguiente, utilizaremos la notación fijada anteriormente.

**Ejemplo 5.7.** Para números enteros positivos  $n$  y  $r_2$ , consideremos la superficie  $Z_n^{n, r_2}$  que tiene número de Picard  $\rho(Z_n^{n, r_2}) = n + r_2 + 2$ . El conjunto generado mínimo de  $\text{Eff}(Z_n^{n, r_2})$  está conformado por las siguientes  $(2(n + r_2) + 1)$  clases de curvas:

1. La clase  $\mathcal{E}_{p_i}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $i = 1, \dots, n$ ,
2. La clase  $\mathcal{E}_{q_j}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_j$  para  $j = 1, \dots, r_2$ ,
3. La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i}$  de la transformada estricta de la fibra que contiene al punto  $p_i$  para  $i = 1, \dots, n$ ,
4. La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_j}$  de la transformada estricta de la fibra que contiene al punto  $q_j$  para  $j = 1, \dots, r_2$ , y
5. La clase  $\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^{r_2} \mathcal{E}_{q_j}$  de la transformada estricta de la curva  $C_n$ .

Es claro que cada elemento de la lista propuesta es un generador de  $\text{Eff}(Z_n^{n, r_2})$ . Por otro lado, usando el Lema 4.1 de [LH05] y mostrando que no existen clases de curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  además de las ya mencionadas, concluiremos con el resultado. Por ello, comenzaremos mostrando que no existen clases de curvas  $(-1)$  salvo las que aparecen de forma natural. Sea  $\mathcal{E} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^{r_2} d_j \mathcal{E}_{q_j}$  la clase de una curva  $(-1)$  sobre  $Z_n^{n, r_2}$  donde cada

coeficiente es un número entero. Supongamos que  $\mathcal{E}$  es diferente de las clases  $\mathcal{E}_{p_i}$ ,  $\mathcal{E}_{q_j}$ ,  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i}$  y  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_j}$  para cada  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, r_2$ . Luego, tenemos que o bien  $a$  cumpliría con la Ecuación (5.2):

$$a \leq \frac{n + r_2 + 2 + \sqrt{4(n + r_2 - 1)(n + r_2 + 1) + (n + r_2 + 2)^2}}{4(n + r_2 + 1)} \quad (< 1),$$

o bien que  $a$  satisfaría la Ecuación (5.4):

$$a \leq \frac{-2 + \sqrt{4(n + r_2 - 1)(n + r_2 + 1) + 4}}{4(n + r_2 + 1)} \quad (< 1).$$

Puesto que en ambos casos se tendría que  $a = 0$ , se seguiría que  $\mathcal{E}$  es un múltiplo de  $\mathcal{F}$  lo cual no es posible. Por lo tanto, tal clase no existe.

A continuación mostraremos que la superficie  $Z_n^{n,r_2}$  no tiene curvas  $(-2)$  (salvo en el caso que  $r_2 = 2 - n$ ). Sea  $\mathcal{N} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^n c_i\mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^{r_2} d_j\mathcal{E}_{q_j}$  la clase de una curva  $(-2)$  sobre  $Z_n^{n,r_2}$  (diferente de  $\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^{2-n} \mathcal{E}_{q_j}$  en el caso  $r_2 = 2 - n$ ) donde cada coeficiente es un número entero. De la Ecuación (5.7) tendríamos que

$$a \leq \sqrt{\frac{2(n + r_2)}{4(n + r_2 + 1)}} \quad (< 1).$$

De esto se seguiría que  $a = 0$  y consecuentemente que  $\mathcal{N} = b\mathcal{F}$ , algo que no podría suceder. De esta forma, tenemos que tal clase no existe.

**Ejemplo 5.8.** Sea  $S$  la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en el punto singular  $p$  de una cúbica nodal, en un punto liso  $p_1$  en dicha cúbica y en  $r_2$  puntos  $q_1, \dots, q_{r_2}$  infinitamente cercanos al punto singular que no están en la dirección de la recta que pasa por  $p$  y  $p_1$ . Denotaremos por  $\mathcal{E}_0$  a la clase de la transformada total de una recta genérica en  $\mathbb{P}^2$  y por  $\mathcal{E}_w$  a la clase de la transformada total del divisor excepcional  $E_w$  correspondiente al punto  $w \in \{p, p_1, q_1, \dots, q_{r_2}\}$ . Notemos que  $\rho(S) = r_2 + 3$ . Tomando  $n = 1$  en el ejemplo anterior, podemos deducir que el conjunto generador mínimo del monoide efectivo de  $S$  está dado por las siguientes  $(2r_2 + 3)$  clases de curvas:

1. La clase  $\mathcal{E}_{p_1}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_1$ ,
2. La clase  $\mathcal{E}_{q_j}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_j$  para cada  $j = 1, \dots, r_2$ ,
3. La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_p - \mathcal{E}_{p_1}$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $p$  y  $p_1$ ,
4. La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_p - \mathcal{E}_{q_j}$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $p$  en dirección de  $q_j$  para cada  $j = 1, \dots, r_2$ , y
5. La clase  $\mathcal{E}_p - \sum_{j=1}^{r_2} \mathcal{E}_{q_j}$  de la transformada estricta del divisor excepcional  $E_p$ .

**Observación 5.9.** Al igual que en los Ejemplos 4.9, 4.10 y 4.11 del Capítulo 4, el ejemplo anterior presenta una clase de superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en el nodo de una cúbica nodal y en un número finito de puntos sobre dicha cúbica (algunos de ellos son infinitamente cercanos). Por ello, también extiende el tipo de superficies que fueron estudiadas por Harbourne en [Har85] y [Har98].



## CAPÍTULO 6

### EXPLOSIÓN DE $\Sigma_n$ EN PUNTOS SOBRE $C_n$ , $\Delta$ Y UNA FIBRA

Continuando con la construcción de familias de superficies racionales anticanónicas con monoídes efectivos finitamente generados y que satisfagan la propiedad ortogonal anticanónica, en este capítulo presentaremos una familia más construida al explotar una superficie de Hirzebruch en un número finito de puntos los cuales están distribuidos en tres curvas racionales lisas, dicha configuración de puntos permitirá descomponer la clase de un divisor anticanónico como la suma de tres clases de curvas racionales lisas. En la primera sección realizaremos la construcción de esta clase de superficies y como podrá verse, podrán tener números de Picard tan grandes como uno decida. En la segunda sección impondremos una condición numérica para mostrar la existencia de un número finito de curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  sobre tales superficies (ver Teorema 6.2) y con ello podremos asegurar la finitud del monoíde efectivo (ver Corolario 6.3). Como se verá en la tercera sección, bajo otra condición numérica mostraremos que tales superficies satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teorema 6.4) por lo que en particular serán de Harbourne-Hirschowitz (ver Corolario 6.5) y sus anillos de Cox serán finitamente generados (ver Corolario 6.6). Finalmente, usando las técnicas desarrolladas en la segunda sección, presentaremos el conjunto generador mínimo del monoíde efectivo de una de estas superficies construida a partir de la explosión de  $\Sigma_1$  en un número finito de puntos (ver Ejemplo 6.7) y como una aplicación de tal ejemplo presentaremos el conjunto generador mínimo del monoíde efectivo de la superficie obtenida de la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en un número finito de puntos ordinarios que se encuentran sobre una cónica irreducible (ver Ejemplo 6.8).

## 1. Construcción

La superficie que será estudiada en esta sección será obtenida al explotar una superficie de Hirzebruch en un número finito de puntos que se encuentran en tres curvas racionales lisas diferentes. Consideremos la  $n$ -ésima superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  donde  $n$  es un entero no negativo. Por la Proposición 1.49 podemos considerar una curva racional lisa  $\Delta$  que es linealmente equivalente a la curva  $C_n + (n + 1)F$ . Luego, consideramos números enteros no negativos  $r_1, r_2$  y  $r_3$  de manera que los tres no sean iguales a cero simultáneamente y fijaremos  $(r_1 + r_2 + 1)$  fibras diferentes  $F_{p_1}, \dots, F_{p_{r_1}}, F_{q_1}, \dots, F_{q_{r_2}}$  y  $F_o$ . Ahora, definimos los siguientes conjuntos de puntos:

- $P = \{p_1, \dots, p_{r_1}\}$ , donde  $p_i$  es el único punto de intersección entre  $\Delta$  y  $F_{p_i}$  y no se encuentra sobre  $C_n$  o  $F_o$  para cada  $i = 1, \dots, r_1$ ;
- $Q = \{q_1, \dots, q_{r_2}\}$ , donde  $q_i$  es el único punto de intersección entre  $C_n$  y  $F_{q_i}$  y no se encuentra sobre  $\Delta$  o  $F_o$  para cada  $i = 1, \dots, r_2$ ; y
- $O = \{o_1, \dots, o_{r_3}\}$ , donde  $o_i$  es un punto sobre la fibra  $F_o$  diferente de los puntos de intersección entre  $\Delta$  y  $F_o$  y entre  $C_n$  y  $F_o$  para cada  $i = 1, \dots, r_3$ .

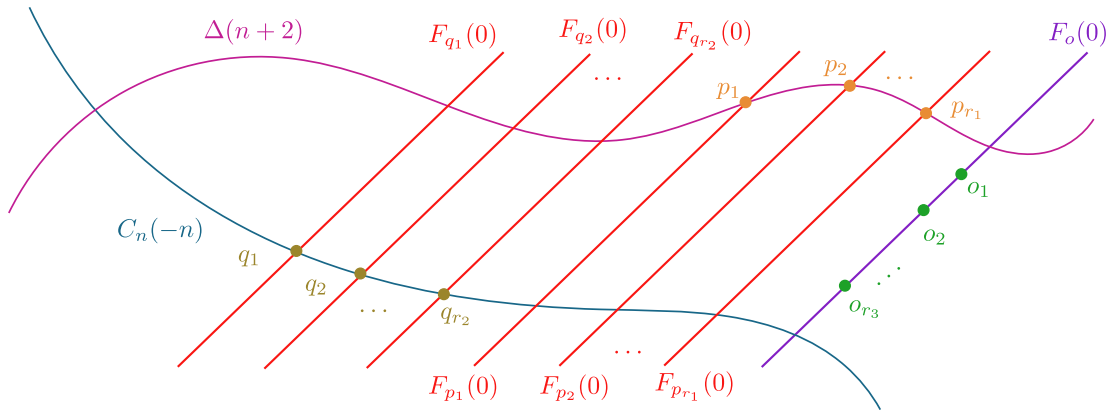


FIGURA 6.1. Configuración de puntos de  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$ .

La superficie  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  es la superficie obtenida de la explosión de  $\Sigma_n$  en el subesquema cerrado de dimensión cero  $P \cup Q \cup O$ . Observemos que por construcción  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  es una superficie racional cuyo número de Picard  $\rho(Z_n^{r_1, r_2, r_3})$  es igual a  $(r_1 + r_2 + r_3 + 2)$ . Además, cada elemento del grupo de Néron-Severi de  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  se escribe en función de las clases

$$C_n, \mathcal{F}, -\mathcal{E}_{p_1}, \dots, -\mathcal{E}_{p_{r_1}}, -\mathcal{E}_{q_1}, \dots, -\mathcal{E}_{q_{r_2}}, -\mathcal{E}_{o_1}, \dots, -\mathcal{E}_{o_{r_3}}.$$

Una de las propiedades de la superficie  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  es que su clase anticanónica es efectiva, en efecto, el siguiente resultado muestra este hecho.

**Proposición 6.1.** *Con la notación anterior, la superficie  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  es anticanónica cuya clase anticanónica puede escribirse como la suma de tres clases de curvas racionales lisas que dos a dos se encuentran en un sólo punto.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos que las clases de las transformadas estrictas  $\widetilde{\Delta}$ ,  $\widetilde{C}_n$  y  $\widetilde{F}_o$  en  $\text{NS}(Z_n^{r_1, r_2, r_3})$  están dadas respectivamente por  $\mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} \mathcal{E}_{p_i}$ ,  $\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^{r_2} \mathcal{E}_{q_j}$  y  $\mathcal{F} - \sum_{l=1}^{r_3} \mathcal{E}_{o_l}$ . Luego, como consecuencia directa de la Proposición 1.34 tenemos que la clase  $-\mathcal{K}_{Z_n^{r_1, r_2, r_3}}$  de un divisor anticanónico  $-K_{Z_n^{r_1, r_2, r_3}}$  puede escribirse como

$$\left( \mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} \mathcal{E}_{p_i} \right) + \left( \mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^{r_2} \mathcal{E}_{q_j} \right) + \left( \mathcal{F} - \sum_{l=1}^{r_3} \mathcal{E}_{o_l} \right).$$

De esto se sigue que  $-\mathcal{K}_{Z_n^{r_1, r_2, r_3}}$  es una clase efectiva. Por último, tenemos los siguientes números de intersección (ver Figura 6.2):

$$[\widetilde{C}_n].[\widetilde{\Delta}] = \left( \mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^{r_2} \mathcal{E}_{q_j} \right) \cdot \left( \mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} \mathcal{E}_{p_i} \right) = 1$$

$$[\widetilde{C}_n].[\widetilde{F}_o] = \left( \mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^{r_2} \mathcal{E}_{q_j} \right) \cdot \left( \mathcal{F} - \sum_{l=1}^{r_3} \mathcal{E}_{o_l} \right) = 1$$

$$[\widetilde{F}_o].[\widetilde{\Delta}] = \left( \mathcal{F} - \sum_{l=1}^{r_3} \mathcal{E}_{o_l} \right) \cdot \left( \mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} \mathcal{E}_{p_i} \right) = 1. \quad \square$$

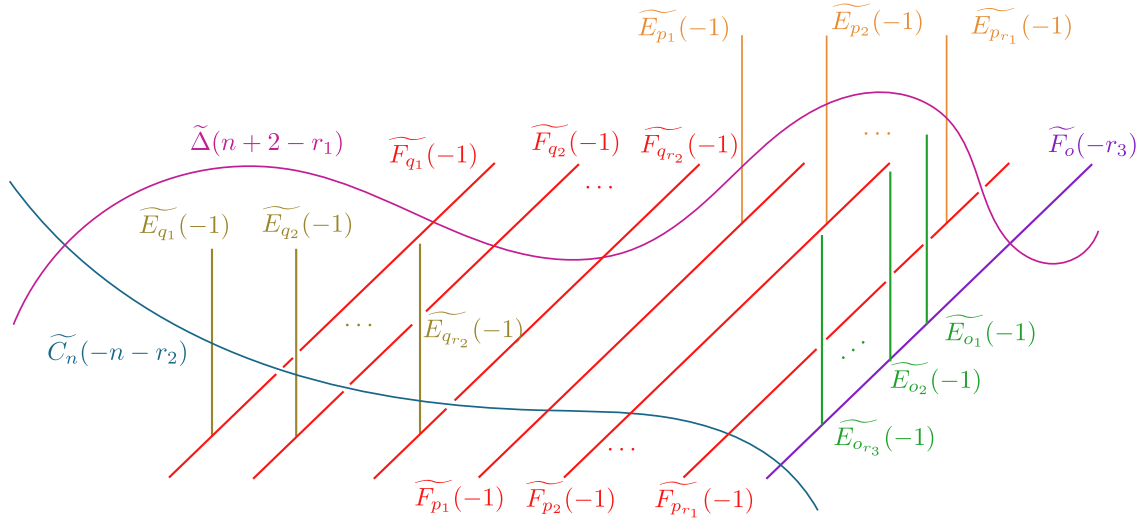


FIGURA 6.2. La superficie  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$ .

## 2. Finitud del Monoide Efectivo

Lo siguiente que realizaremos será mostrar la finitud del monoide efectivo de  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  al considerar una condición numérica. Lo anterior será realizado mostrando que los conjuntos de las clases de las curvas  $(-1)$  y de las clases de curvas  $(-2)$  son finitos.

**Teorema 6.2.** *Con la notación anterior, si  $r_2$  y  $r_3$  son arbitrarios y se satisfacen la condición numérica  $r_1 \leq n + 2$ , entonces la superficie  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  contiene un número finito de curvas  $(-1)$  y de curvas  $(-2)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Para simplificar expresiones que aparecerán más adelante, denotaremos como  $\xi$  al siguiente número entero:

$$\xi = r_3(n + 1)^2 + r_2r_3(n + 2) + r_1 + r_2 - r_1r_3(n + r_2).$$

Comenzaremos mostrando que el conjunto de las curvas  $(-1)$  es finito. Sea  $\mathcal{E}$  la clase de una curva  $(-1)$  y supongamos que  $\mathcal{E}$  es diferente de las clases excepcionales y de las clases de las transformadas estrictas de las fibras que contienen a los puntos de  $P$  y  $Q$ . Existen números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_{r_1}, d_1, \dots, d_{r_2}, e_1, \dots, e_{r_3}$  tales que

$$\mathcal{E} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} c_i\mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^{r_2} d_j\mathcal{E}_{q_j} - \sum_{l=1}^{r_3} e_l\mathcal{E}_{o_l}.$$

Nuestra hipótesis de que  $\mathcal{E}$  es diferente a las clases mencionadas anteriormente implica que  $c_i, d_j$ , y  $e_l$  son no negativos para todo  $i = 1, \dots, r_1, j = 1, \dots, r_2$ , y  $l = 1, \dots, r_3$ , y que  $a$  es mayor o igual que cada uno de los  $c_i$  y de los  $d_j$ . Por otro lado, la condición  $\mathcal{E}^2 = -1$  da como resultado la ecuación

$$\sum_{i=1}^{r_1} c_i^2 + \sum_{j=1}^{r_2} d_j^2 + \sum_{l=1}^{r_3} e_l^2 = 2ab - na^2 + 1,$$

y usando la descomposición de la clase anticanónica de  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  (ver Proposición 6.1) la condición  $-\mathcal{K}_{Z_n^{r_1, r_2, r_3}} \cdot \mathcal{E} = 1$  puede ser separada en tres casos:

- A)  $\mathcal{E} \cdot [\widetilde{\Delta}] = 1, \quad \mathcal{E} \cdot [\widetilde{\mathcal{C}}_n] = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{E} \cdot [\widetilde{\mathcal{F}}_o] = 0;$
- B)  $\mathcal{E} \cdot [\widetilde{\Delta}] = 0, \quad \mathcal{E} \cdot [\widetilde{\mathcal{C}}_n] = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{E} \cdot [\widetilde{\mathcal{F}}_o] = 0;$  y
- C)  $\mathcal{E} \cdot [\widetilde{\Delta}] = 0, \quad \mathcal{E} \cdot [\widetilde{\mathcal{C}}_n] = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{E} \cdot [\widetilde{\mathcal{F}}_o] = 1.$

Lo que mostraremos a continuación es que en cada caso  $a$  tiene una cota superior en términos de  $n, r_1, r_2$  y  $r_3$  y de manera similar, que  $b$  tiene una cota en términos de  $a, n, r_1, r_2$  y  $r_3$ .

**Caso A)** Para el primer caso, las condiciones impuestas implican respectivamente las igualdades

$$(6.1) \quad \sum_{i=1}^{r_1} c_i = b + a - 1, \quad \sum_{j=1}^{r_2} d_j = b - na \quad \text{y} \quad \sum_{l=1}^{r_3} e_l = a.$$

Luego, para cada  $i = 1, \dots, r_1$ ,  $j = 1, \dots, r_2$  y  $l = 1, \dots, r_3$  definimos

$$\tilde{c}_i = c_i - \frac{b + a - 1}{r_1}, \quad \tilde{d}_j = d_j - \frac{b - na}{r_2} \quad \text{y} \quad \tilde{e}_l = e_l - \frac{a}{r_3}.$$

Usando la ecuación

$$\sum_{i=1}^{r_1} \tilde{c}_i^2 + \sum_{j=1}^{r_2} \tilde{d}_j^2 + \sum_{l=1}^{r_3} \tilde{e}_l^2 = 2ab - na^2 + 1 - \frac{(b + a - 1)^2}{r_1} - \frac{(b - na)^2}{r_2} - \frac{a^2}{r_3}$$

y reduciendo términos semejantes de la misma, obtenemos la desigualdad

$$\begin{aligned} r_3(r_1 + r_2)b^2 + 2r_3((r_2 - r_1(r_2 + n))a - r_2)b \\ + (r_1r_2 + r_2r_3 + n^2r_1r_3 + nr_1r_2r_3)a^2 - r_2r_3(2a + r_1 - 1) \leq 0, \end{aligned}$$

y después se tiene que

$$\left( b + \frac{r_3((r_2 - r_1(n + r_2))a - r_2)}{r_3(r_1 + r_2)} \right)^2 \leq \frac{r_1r_2r_3}{r_3^2(r_1 + r_2)^2} \left( r_3(r_1 + r_2 - 1) - \xi a^2 + 2r_3(n + 1 + r_2)a \right).$$

Posteriormente, de la desigualdad anterior se siguen una cota superior para  $b$ ,

$$(6.2) \quad b \leq \frac{r_3((r_1(n + r_2) - r_2)a + r_2) + \sqrt{r_1r_2r_3(r_3(r_1 + r_2 - 1) - \xi a^2 + 2r_3(n + 1 + r_2)a)}}{r_3(r_1 + r_2)},$$

y la condición

$$0 \leq r_3(r_1 + r_2 - 1) - \xi a^2 + 2r_3(n + 1 + r_2)a.$$

La última nos da una cota superior para  $a$ :

$$(6.3) \quad a \leq \frac{(r_3(n + r_2 + 1) + \sqrt{r_3(r_1 + r_2 - 1)\xi + r_3^2(n + 1 + r_2)^2})}{\xi}.$$

**Caso B)** Las condiciones que tenemos en este caso implican respectivamente que

$$(6.4) \quad \sum_{i=1}^{r_1} c_i = b + a, \quad \sum_{j=1}^{r_2} d_j = b - na - 1 \quad \text{y} \quad \sum_{l=1}^{r_3} e_l = a.$$

Para cada  $i = 1, \dots, r_1$ ,  $j = 1, \dots, r_2$  y  $l = 1, \dots, r_3$  definimos  $\tilde{c}_i$ ,  $\tilde{d}_j$ , y  $\tilde{e}_l$  como

$$\tilde{c}_i = c_i - \frac{b + a}{r_1}, \quad \tilde{d}_j = d_j - \frac{b - na - 1}{r_2} \quad \text{y} \quad \tilde{e}_l = e_l - \frac{a}{r_3}.$$

Elevando al cuadrado cada elemento anterior y tomando la suma sobre los respectivos índices obtenemos la igualdad

$$\sum_{i=1}^{r_1} \tilde{c}_i^2 + \sum_{j=1}^{r_2} \tilde{d}_j^2 + \sum_{l=1}^{r_3} \tilde{e}_l^2 = 2ab - na^2 + 1 - \frac{(b+a)^2}{r_1} - \frac{(b-na-1)^2}{r_2} - \frac{a^2}{r_3}.$$

Dicha ecuación implica la desigualdad

$$\begin{aligned} r_3(r_1 + r_2)b^2 + 2r_3((r_2 - r_1(n + r_2))a - r_1)b \\ + (r_1r_2 + r_2r_3 + n^2r_1r_3 + nr_1r_2r_3)a^2 + r_1r_3(2na - r_2 + 1) \leq 0 \end{aligned}$$

que a su vez implica que

$$\left( b + \frac{r_3((r_2 - r_1(n + r_2))a - r_1)}{r_3(r_1 + r_2)} \right)^2 \leq \frac{r_1r_2r_3}{r_3^2(r_1 + r_2)^2} \left( r_3(r_1 + r_2 - 1) - \xi a^2 - 2r_3(n + 1 - r_1)a \right).$$

De este modo, obtenemos una cota superior para  $b$ ,

$$(6.5) \quad b \leq \frac{r_3((r_1(n + r_2) - r_2)a + r_1) + \sqrt{r_1r_2r_3(r_3(r_1 + r_2 - 1) - \xi a^2 - 2r_3(n + 1 - r_1)a)}}{r_3^2(r_1 + r_2)^2},$$

y también la condición

$$0 \leq r_3(r_1 + r_2) - r_3 - \xi a^2 - 2r_3(n + 1 - r_1)a.$$

Como consecuencia, una cota superior para  $a$  está dada de la siguiente forma:

$$(6.6) \quad a \leq \frac{-r_3(n + 1 - r_1) + \sqrt{r_3(r_1 + r_2 - 1)\xi + r_3^2(n + 1 - r_1)^2}}{\xi}.$$

**Caso C)** Para el último caso los números de intersección que tenemos implican respectivamente que

$$(6.7) \quad \sum_{i=1}^{r_1} c_i = b + a, \quad \sum_{j=1}^{r_2} d_j = b - na \quad \text{y} \quad \sum_{l=1}^{r_3} e_l = a - 1.$$

Consideramos  $\tilde{c}_i$ ,  $\tilde{d}_j$  y  $\tilde{e}_l$  definidos por

$$\tilde{c}_i = c_i - \frac{b+a}{r_1}, \quad \tilde{d}_j = d_j - \frac{b-na}{r_2} \quad \text{y} \quad \tilde{e}_l = e_l - \frac{a-1}{r_3}$$

para cada  $i = 1, \dots, r_1$ ,  $j = 1, \dots, r_2$  y  $l = 1, \dots, r_3$ . De los números definidos anteriormente se deriva la ecuación

$$\sum_{i=1}^{r_1} \tilde{c}_i^2 + \sum_{j=1}^{r_2} \tilde{d}_j^2 + \sum_{l=1}^{r_3} \tilde{e}_l^2 = 2ab - na^2 + 1 - \frac{(b+a)^2}{r_1} - \frac{(b-na)^2}{r_2} - \frac{(a-1)^2}{r_3},$$

y después de reagrupar términos obtenemos la desigualdad

$$r_3(r_1 + r_2)b^2 + 2r_3a(r_2 - r_1(n + r_2))b + (r_1r_2 + r_2r_3 + n^2r_1r_3 + nr_1r_2r_3)a^2 - r_1r_2(2a + r_3 - 1) \leq 0.$$

Luego, de la condición anterior se sigue que

$$\left(b + \frac{r_3(r_2 - r_1(n + r_2))a}{r_3(r_1 + r_2)}\right)^2 \leq \frac{r_1r_2r_3}{r_3^2(r_1 + r_2)^2} \left( (r_1 + r_2)(r_3 - 1) - \xi a^2 + 2(r_1 + r_2)a \right),$$

de ésta obtenemos una cota superior para  $b$ ,

$$(6.8) \quad b \leq \frac{r_3(r_1(n + r_2) - r_2)a + \sqrt{r_1r_2r_3((r_1 + r_2)(r_3 - 1) - \xi a^2 + 2(r_1 + r_2)a)}}{r_3(r_1 + r_2)},$$

y también la siguiente desigualdad:

$$0 \leq (r_1 + r_2)(r_3 - 1) - \xi a^2 + 2(r_1 + r_2)a.$$

Así, tenemos que  $a$  está acotado superiormente:

$$(6.9) \quad a \leq \frac{r_1 + r_2 + \sqrt{(r_1 + r_2)((r_3 - 1)\xi + (r_1 + r_2))}}{\xi}.$$

En los tres casos anteriores hemos encontrado una cota superior para  $a$  en función de  $n$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ , y  $r_3$  (ver las Ecuaciones (6.3), (6.6) y (6.9)), éste hecho junto con el hecho de que  $a$  es no negativo implican que sólo existe un número finito de posibilidades para tal entero. Además, en cada caso tenemos que  $na \leq b$  (pues el número de intersección  $\mathcal{E}\mathcal{C}_n$  es no negativo) y que  $b$  tiene una cota superior en función de  $a$ ,  $n$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ , y  $r_3$  (ver las Ecuaciones (6.2), (6.5) y (6.8)), de esto se sigue que únicamente existen un número finito de valores para dicho número. Por último, usando las Ecuaciones (6.1), (6.4) y (6.7) en su respectivo caso, obtenemos las desigualdades

$$0 \leq \sum_{i=1}^{r_1} c_i \leq b + a, \quad 0 \leq \sum_{j=1}^{r_2} d_j \leq b - na \quad \text{y} \quad 0 \leq \sum_{l=1}^{r_3} e_l \leq a$$

las cuales implican que sólo existe un número finito de posibilidades para  $c_i$ ,  $d_j$ , y  $e_l$  para cada  $i = 1, \dots, r_1$ ,  $j = 1, \dots, r_2$  y  $l = 1, \dots, r_3$ . Finalmente, concluimos que el conjunto de las curvas  $(-1)$  sobre  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  es un conjunto finito.

A continuación procederemos a mostrar la finitud de las curvas  $(-2)$ . Sea  $\mathcal{N}$  la clase una curva  $(-2)$  sobre  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  y asumiremos que  $\mathcal{N}$  no es una componente de la clase anticanónica. Existen números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_{r_1}, d_1, \dots, d_{r_2}, e_1, \dots, e_{r_3}$  de modo que

$$\mathcal{N} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} c_i\mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^{r_2} d_j\mathcal{E}_{q_j} - \sum_{l=1}^{r_3} e_l\mathcal{E}_{o_l}.$$

Comencemos observando que los números de intersección  $\mathcal{N}.\mathcal{E}_{p_i}$ ,  $\mathcal{N}.\mathcal{E}_{q_j}$  y  $\mathcal{N}.\mathcal{E}_{o_l}$  son no negativos lo que implica que los enteros  $c_i$ ,  $d_j$  y  $e_l$  son no negativos para cada  $i = 1, \dots, r_1$ ,  $j = 1, \dots, r_2$  y  $l = 1, \dots, r_3$ . Ahora bien, de la ecuación  $\mathcal{N}^2 = -2$  obtenemos la igualdad

$$\sum_{i=1}^{r_1} c_i^2 + \sum_{j=1}^{r_2} d_j^2 + \sum_{l=1}^{r_3} e_l^2 = 2ab - na^2 + 2.$$

Utilizando la descomposición de la clase anticanónica encontrada en la Proposición 6.1, la igualdad  $\mathcal{N}.\mathcal{K}_{Z_n^{r_1, r_2, r_3}} = 0$  implica que  $\mathcal{N}.[\tilde{\Delta}] = 0$ , que  $\mathcal{N}.[\tilde{C}_n] = 0$  y que  $\mathcal{N}.[\tilde{F}_o] = 0$ , de este modo, tenemos respectivamente las siguientes ecuaciones:

$$(6.10) \quad \sum_{i=1}^{r_1} c_i = b + a, \quad \sum_{j=1}^{r_2} d_j = b - na \quad \text{y} \quad \sum_{l=1}^{r_3} e_l = a.$$

Luego, definimos  $\tilde{c}_i$ ,  $\tilde{d}_j$ , y  $\tilde{e}_l$  como

$$\tilde{c}_i = c_i - \frac{b+a}{r_1}, \quad \tilde{d}_j = d_j - \frac{b-na}{r_2} \quad \text{y} \quad \tilde{e}_l = e_l - \frac{a}{r_3}$$

para cada  $i = 1, \dots, r_1$ ,  $j = 1, \dots, r_2$  y  $l = 1, \dots, r_3$ . De esta forma, se obtiene la ecuación

$$\sum_{i=1}^{r_1} \tilde{c}_i^2 + \sum_{j=1}^{r_2} \tilde{d}_j^2 + \sum_{l=1}^{r_3} \tilde{e}_l^2 = 2ab - na^2 + 2 - \frac{(b+a)^2}{r_1} - \frac{(b-na)^2}{r_2} - \frac{a^2}{r_3}$$

y de ella se sigue la desigualdad

$$r_3(r_1 + r_2)b^2 + 2ar_3(r_2 - r_1(n + r_2))b + (r_1r_2 + r_2r_3 + n^2r_1r_3 + nr_1r_2r_3)a^2 - 2r_1r_2r_3 \leq 0.$$

Así, se deriva la condición numérica

$$\left( b + \frac{r_3(r_2 - r_1(n + r_2))a}{r_3(r_1 + r_2)} \right)^2 \leq \frac{r_1r_2r_3(2r_3(r_1 + r_2) - \xi a^2)}{r_3^2(r_1 + r_2)^2}$$

de la cual se obtiene una cota superior para  $b$ ,

$$(6.11) \quad b \leq \frac{r_3(r_1(n + r_2) - r_2)a + \sqrt{r_1r_2r_3(2r_3(r_1 + r_2) - \xi a^2)}}{r_3(r_1 + r_2)},$$

y la desigualdad

$$0 \leq 2r_3(r_1 + r_2) - \xi a^2.$$

Por tanto, se sigue que

$$a \leq \sqrt{\frac{2r_3(r_1 + r_2)}{\xi}}.$$

De esta manera, hemos llegado a que  $a$  está acotado superiormente en función de  $n$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ , y  $r_3$ , y usando el hecho de que  $a$  es no negativo (pues por ejemplo  $\mathcal{N}.\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} \geq 0$ ) concluimos que sólo pueden existir un número finito de valores para dicho número. Además, el hecho que



$na \leq b$  (pues  $\mathcal{N.C}_n$  es no negativo) y la cota encontrada en la Ecuación (6.11) implican que sólo tenemos un número finito de posibilidades para tal entero. Por último, de la Ecuación (6.10) y de nuestras observaciones anteriores se tiene que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{r_1} c_i = b + a, \quad 0 \leq \sum_{j=1}^{r_2} d_j = b - na \quad \text{y} \quad 0 \leq \sum_{l=1}^{r_3} e_l = a.$$

Así, tenemos que sólo existe un número finito de posibilidades para  $c_i$ ,  $d_j$  y  $e_l$  para cada  $i = 1, \dots, r_1$ ,  $j = 1, \dots, r_2$  y  $l = 1, \dots, r_3$ . Por lo tanto, concluimos que sólo existe un número finito de curvas  $(-2)$  sobre  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$ .  $\square$

**Corolario 6.3.** *Con la notación anterior, si  $r_2$  y  $r_3$  son arbitrarios y se satisface la condición numérica  $r_1 \leq n + 2$ , entonces el monoide efectivo de  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 6.2 tenemos que el conjunto de las curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  es finito. Así, por [LH05, Corolario 4.2, p. 109] concluimos que  $\text{Eff}(Z_n^{r_1, r_2, r_3})$  es finitamente generado.  $\square$

### 3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias

La siguiente cualidad que mostraremos de la superficie  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  bajo una condición numérica es que satisface la propiedad ortogonal anticanónica. Luego, mostraremos algunas de las implicaciones de tal propiedad.

**Teorema 6.4.** *Con la notación anterior, si  $r_3$  es arbitrario y  $n + 1$  es mayor que  $r_1 + r_2$ , entonces  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  tiene la propiedad ortogonal anticanónica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $H$  un divisor nef sobre  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  que es ortogonal a un divisor anticanónico. Luego, denotaremos por  $\mathcal{H}$  a la clase de  $H$  en el grupo de Néron-Severi de  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  y consecuentemente existen números enteros no negativos  $a, b, c_1, \dots, c_{r_1}, d_1, \dots, d_{r_2}, e_1, \dots, e_{r_3}$  de modo que  $\mathcal{H} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} c_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^{r_2} d_j \mathcal{E}_{q_j} - \sum_{l=1}^{r_3} e_l \mathcal{E}_{o_l}$ . Utilizando la descomposición de la clase anticanónica de la Proposición 6.1, el que  $\mathcal{H}$  sea ortogonal a dicha clase se traduce en las siguientes igualdades:

$$\mathcal{H} \cdot \left( \mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} \mathcal{E}_{p_i} \right) = 0, \quad \mathcal{H} \cdot \left( \mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^{r_2} \mathcal{E}_{q_j} \right) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{H} \cdot \left( \mathcal{F} - \sum_{l=1}^{r_3} \mathcal{E}_{e_l} \right) = 0.$$

Dichas ecuaciones implican respectivamente que

$$b + a = \sum_{i=1}^{r_1} c_i, \quad b - na = \sum_{j=1}^{r_2} d_j \quad \text{y} \quad a = \sum_{l=1}^{r_3} e_l.$$

Tomando las primeras dos ecuaciones y resolviendo el sistema lineal obtenemos los siguientes valores para  $a$  y para  $b$ :

$$(6.12) \quad a = \frac{1}{n+1} \left( \sum_{i=1}^{r_1} c_i - \sum_{j=1}^{r_2} d_j \right) \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{n+1} \left( n \sum_{i=1}^{r_1} c_i + \sum_{j=1}^{r_2} d_j \right).$$

Por otro lado, tenemos que para cada  $i = 1, \dots, r_1$  y  $j = 1, \dots, r_2$  los enteros  $a - c_i$  y  $a - d_j$  son no negativos pues  $\mathcal{H}(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i})$  y  $\mathcal{H}(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_j})$  lo son. De este modo, se sigue que  $\sum_{i=1}^{r_1} c_i \leq r_1 a$  y que  $\sum_{j=1}^{r_2} d_j \leq r_2 a$ , y combinando ambas expresiones obtenemos que  $\sum_{i=1}^{r_1} c_i + \sum_{j=1}^{r_2} d_j \leq (r_1 + r_2)a$ . Luego, sustituyendo el valor de  $a$  obtenido en la Ecuación (6.12) y agrupando términos obtenemos la desigualdad

$$0 \leq (n+1+r_1+r_2) \sum_{j=1}^{r_2} d_j \leq (r_1+r_2-n-1) \sum_{i=1}^{r_1} c_i.$$

La condición numérica  $n+1 > r_1 + r_2$  implica que  $\sum_{i=1}^{r_1} c_i = 0$ , y como cada término que aparece en dicha suma es no negativo se sigue que  $c_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, r_1$ . Esto implica que  $\sum_{j=1}^{r_2} d_j = 0$  y usando de nueva cuenta que cada término en la suma es no negativo obtenemos que  $d_j = 0$  para todo  $j = 1, \dots, r_2$ . Con esto, las igualdades que aparecen en la Ecuación (6.12) implican que tanto  $a$  como  $b$  son iguales a cero. Por último, de la igualdad  $\sum_{l=1}^{r_3} e_l = 0$  se sigue que  $e_l = 0$  para todo  $l = 1, \dots, r_3$  pues cada término que aparece en dicha suma también es no negativo. Por lo tanto, concluimos que  $\mathcal{H}$  es la clase nula y consecuentemente que  $H$  es el divisor cero.  $\square$

**Corolario 6.5.** *Con la notación anterior, si  $r_3$  es arbitrario y  $n+1$  es mayor que  $r_1 + r_2$ , entonces  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  es una superficie de Harbourne-Hirschowitz.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la superficie  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  es anticanónica (ver Proposición 6.1) y tiene la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teorema 6.4), el resultado se sigue del Teorema 3.11.  $\square$

**Corolario 6.6.** *Con la notación anterior, si  $r_3$  es arbitrario y  $n+1$  es mayor que  $r_1 + r_2$ , entonces el anillo de Cox de  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. La condición  $n+1 > r_1 + r_2$  implica que  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica por el Teorema 6.4 y también implica que el monoide efectivo de  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$  es finitamente generado por el Corolario 6.3. Así, por el Teorema 3.20 obtenemos el resultado deseado.  $\square$

#### 4. Ejemplos Concretos

En esta sección nos encargaremos de presentar el conjunto generador mínimo del monoide efectivo  $\text{Eff}(Z_n^{r_1, r_2, r_3})$  para cierta familia de superficies  $Z_n^{r_1, r_2, r_3}$ . Durante este apartado, seguiremos utilizando la notación que fue fijada anteriormente.

**Ejemplo 6.7.** Para números enteros no negativos  $r_1$  y  $n$ , consideremos la superficie  $Z_n^{r_1, 0, 0}$  que tiene número de Picard  $\rho(Z_n^{r_1, 0, 0}) = r_1 + 2$ . Se tienen los siguientes casos:

1. Si  $r_1 \leq n$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $Z_n^{r_1, 0, 0}$  está conformado por las siguientes  $(2r_1 + 1)$  clases de curvas:
  - (a) La clase  $\mathcal{E}_{p_i}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para cualquier  $i = 1, \dots, r_1$ ,
  - (b) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i}$  de la transformada estricta de la fibra que contiene al punto  $p_i$  para cada  $i = 1, \dots, r_1$ , y
  - (c) La clase  $\mathcal{C}_n$  de la transformada estricta de la curva  $C_n$ ,
2. Si  $n + 1 \leq r_1 \leq n + 2$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $Z_n^{r_1, 0, 0}$  se forma por las siguientes  $\left(2r_1 + 1 + \binom{r_1}{n+1}\right)$  clases de curvas:
  - (a) La clase  $\mathcal{E}_{p_i}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para cualquier  $i = 1, \dots, r_1$ ,
  - (b) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i}$  de la transformada estricta de la fibra que contiene al punto  $p_i$  para cada  $i = 1, \dots, r_1$ , y
  - (c) La clase  $\mathcal{C}_n$  de la transformada estricta de la curva  $C_n$ ,
  - (d) La clase  $\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}_{p_{j_i}}$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_n + nF|$  que pasa por los puntos  $p_{j_1}, \dots, p_{j_{n+1}}$  donde  $j_i \in \{1, \dots, r_1\}$  y  $j_i \neq j_l$  si  $i \neq l$  para  $i, l = 1, \dots, n + 1$ .
3. Si  $r_1 \geq n + 3$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $Z_n^{r_1, 0, 0}$  está integrado por las siguientes  $\left(2(r_1 + 1) + \binom{r_1}{n+1}\right)$  clases de curvas:
  - (a) La clase  $\mathcal{E}_{p_i}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para cualquier  $i = 1, \dots, r_1$ ,
  - (b) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i}$  de la transformada estricta de la fibra que contiene al punto  $p_i$  para cada  $i = 1, \dots, r_1$ ,
  - (c) La clase  $\mathcal{C}_n$  de la transformada estricta de la curva  $C_n$ ,
  - (d) La clase  $\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}_{p_{j_i}}$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_n + nF|$  que pasa por los puntos  $p_{j_1}, \dots, p_{j_{n+1}}$  donde  $j_i \in \{1, \dots, r_1\}$  y  $j_i \neq j_l$  si  $i \neq l$  para  $i, l = 1, \dots, n + 1$ , y

(e) La clase  $\mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} \mathcal{E}_{p_i}$  de la transformada estricta de la curva  $\Delta$ .

Es claro que las clases anteriores están en el conjunto generador de  $\text{Eff}(Z_n^{r_1,0,0})$ . Lo que haremos para mostrar el resultado es determinar los conjuntos de las clases de curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  que existen además de las que aparecen naturalmente y después utilizar el Lema 4.1 de [LH05]. En primer lugar, determinaremos las clases de las curvas  $(-1)$ . Sea  $\mathcal{E}$  la clase de una curva  $(-1)$  diferente de  $\mathcal{E}_{p_i}$  y  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i}$  para cada  $i = 1, \dots, r_1$  (y diferente de  $\mathcal{C}_1$  en el caso  $n = 1$  y de  $[\tilde{\Delta}]$  en el caso  $r_1 = n + 3$ ). Existen números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_{r_1}$  tales que  $\mathcal{E} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} c_i \mathcal{E}_{p_i}$ . De la demostración del Teorema 6.2 distinguimos tres casos:

A) Utilizando las expresiones de la Ecuación (6.1) tenemos que se deben satisfacer las siguientes condiciones respectivamente:

$$b + a - 1 = \sum_{i=1}^{r_1} c_i, \quad b = na \quad \text{y} \quad a = 0.$$

Sin embargo, dichas condiciones no podrían satisfacerse y por tanto descartaríamos este caso.

B) Para este caso, las igualdades de la Ecuación (6.4) nos dirían respectivamente que

$$b + a = \sum_{i=1}^{r_1} c_i, \quad b = na + 1 \quad \text{y} \quad a = 0.$$

Esto implica que  $b = 1$  y que  $\sum_{i=1}^{r_1} c_i = 1$ . Sin embargo, puesto que también debería satisfacerse la condición  $c_i \leq a$  para todo  $i = 1, \dots, r_1$ , este caso tampoco podría suceder.

C) Para el último caso, las condiciones impuestas por las igualdades de la Ecuación (6.7) se traducen respectivamente en

$$b + a = \sum_{i=1}^{r_1} c_i, \quad b = na \quad \text{y} \quad a = 1.$$

Así, tenemos que  $b = n$  y por consiguiente la ecuación  $\sum_{i=1}^{r_1} c_i = n + 1$ . Por otro lado, recordemos que debe satisfacerse que  $c_i \leq 1$  para cada  $i = 1, \dots, r_1$ . Consecuentemente, si  $r_1 \leq n$ , entonces no podría satisfacerse tal ecuación. Si  $r_1 \geq n + 1$ , entonces se tiene que  $\mathcal{E} = \mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}_{p_{j_i}}$  para algunos puntos  $p_{j_1}, \dots, p_{j_{n+1}}$  donde  $j_i \in \{1, \dots, r_1\}$  y  $j_i \neq j_l$  si  $i \neq l$  para  $i, l \in \{1, \dots, n+1\}$ . Además, tal clase es la clase de una curva  $(-1)$  por la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch.

En conclusión, si  $r_1 \leq n$ , entonces no existen más clases de curvas  $(-1)$  además de las naturales; y si  $r_1 \geq n + 1$ , entonces tenemos que existen  $\binom{r_1}{n+1}$  clases de curvas  $(-1)$  diferentes de las naturales.

Lo que mostraremos ahora es que no existen clases de curvas  $(-2)$  sobre  $Z_n^{r_1,0,0}$ . Sea  $\mathcal{N}$  la clase de una curva  $(-2)$  (diferente de  $\mathcal{C}_2$  en el caso  $n = 2$  y de  $[\tilde{\Delta}]$  en el caso  $r_1 = n + 4$ ). Existen números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_{r_1}$  tales que  $\mathcal{N} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r_1} c_i \mathcal{E}_{p_i}$ . Las condiciones que tenemos de la Ecuación (6.10) se presentan a continuación respectivamente:

$$b + a = \sum_{i=1}^{r_1} c_i, \quad b = a \quad \text{y} \quad a = 0.$$

Esto nos diría que  $\mathcal{N}$  debería ser la clase nula, lo cual sería imposible. De esta forma, tenemos que no existe tal clase  $\mathcal{N}$ .

**Ejemplo 6.8.** Sea  $S$  la superficie obtenida de explotar el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en  $r_1 + 1$  puntos  $p, p_1, \dots, p_{r_1}$  sobre una cónica entera. Denotaremos por  $\mathcal{E}_0$  a la clase de la transformada total de una recta genérica en  $\mathbb{P}^2$  y por  $\mathcal{E}_w$  a la clase del divisor excepcional  $E_w$  correspondiente al punto  $w \in \{p, p_1, \dots, p_{r_1}\}$ . Observemos que  $\rho(S) = r_1 + 2$ . Usando el ejemplo anterior con  $n = 1$ , obtenemos los siguientes casos:

1. Si  $r_1 = 1$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(S)$  está formado por las  $(2r_1 + 1)$  clase de la siguiente lista:
  - (a) La clase  $\mathcal{E}_w$  del divisor excepcional correspondiente a  $w$  para  $w \in \{p, p_1, \dots, p_{r_1}\}$ ,
  - (b) La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_p - \mathcal{E}_w$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $p$  y  $w$  para  $w \in \{p_1, \dots, p_{r_1}\}$ .
2. Si  $2 \leq r_1 \leq 3$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(S)$  está formado por las siguientes  $\left(2r_1 + 1 + \binom{r_1}{2}\right)$  clases de curvas:
  - (a) La clase  $\mathcal{E}_w$  del divisor excepcional correspondiente a  $w$  para  $w \in \{p, p_1, \dots, p_{r_1}\}$ ,
  - (b) La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_p - \mathcal{E}_w$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $p$  y  $w$  para  $w \in \{p_1, \dots, p_{r_1}\}$ ,
  - (c) La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{w_1} - \mathcal{E}_{w_2}$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $w_1$  y  $w_2$  para  $w_1, w_2 \in \{p_1, \dots, p_{r_1}\}$  con  $w_1 \neq w_2$ .
3. Si  $r_1 \geq 4$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(S)$  está formado por las  $\left(2(r_1 + 1) + \binom{r_1}{2}\right)$  clases de curvas que se presenta a continuación:
  - (a) La clase  $\mathcal{E}_w$  del divisor excepcional correspondiente a  $w$  para  $w \in \{p, p_1, \dots, p_{r_1}\}$ ,
  - (b) La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_p - \mathcal{E}_w$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $p$  y  $w$  para  $w \in \{p_1, \dots, p_{r_1}\}$ ,

- 
- (c) La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{w_1} - \mathcal{E}_{w_2}$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $w_1$  y  $w_2$  para  $w_1, w_2 \in \{p_1, \dots, p_{r_1}\}$  con  $w_1 \neq w_2$ .
  - (d) La clase  $2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_p - \sum_{i=1}^{r_1} \mathcal{E}_{p_i}$  de la transformada estricta de la cónica que contiene todos los puntos.

**Observación 6.9.** El ejemplo anterior recupera en el caso de puntos ordinarios el Corolario 2 de [GM05b] donde se muestra que el cono de curvas de la explosión en puntos en  $\mathbb{P}^2$  que se encuentran en una cónica es poliédrico. Además, también complementa el Lema 3.1.1 de [Har98] donde se estudian las clases de autointersección negativa en la superficie obtenida de la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en puntos (que podrían ser infinitamente cercanos) en una cónica (no necesariamente lisa).

## CAPÍTULO 7

# EXPLOSIÓN DE $\Sigma_n$ EN PUNTOS SOBRE EL MAYOR NÚMERO DE FIBRAS

El objetivo de este capítulo es presentar una familia más de superficies racionales anticanónicas que pueden tener números de Picard muy grandes, cuyos monoides efectivos son finitamente generados y que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica, en particular, sus anillos de Cox serán finitamente generados. En esta ocasión construiremos tal tipo de superficies al considerar la explosión de una superficie de Hirzebruch en cualquier número finito de puntos en la curva negativa y en un número finito de puntos distribuidos en el mayor número de fibras que un divisor anticanónico puede contener. Dicha construcción será realizada en la primera sección. Posteriormente, fijando una condición numérica mostraremos en la segunda sección que tales superficies tienen un número finito de curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  (ver Teorema 7.2) y como consecuencia que sus monoides efectivos serán finitamente generados (ver Corolario 7.3). Además, en la tercera sección mostraremos que bajo la misma condición numérica tales superficies también tendrán la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teorema 7.4) y en particular, serán de Harbourne-Hirschowitz (ver Corolario 7.5) y sus anillos de Cox serán finitamente generados (ver Corolario 7.6). Para concluir el capítulo, usando las técnicas desarrolladas en la segunda sección presentaremos el conjunto generador mínimo del monoide efectivo de una superficie de este tipo obtenida de explotar  $\Sigma_1$  en  $(t + 14)$  puntos para cualquier número entero positivo  $t$  (ver Ejemplo 7.8) y de manera similar presentaremos el conjunto generador mínimo del monoide efectivo de la superficie obtenida al explotar el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en  $(t + 15)$  puntos que se encuentran en cierta configuración sobre una cúbica degenerada constituida de tres líneas diferentes (ver Ejemplo 7.9).

## 1. Construcción

La siguiente familia de superficies que presentaremos se construye al explotar una superficie de Hirzebruch en un número finito de puntos que se encuentran distribuidos en el mayor número de fibras que un divisor anticanónico puede contener y en un número finito de puntos sobre la curva  $C_n$ . Fijemos números enteros positivos  $n, r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$  y  $r_{n+2}$  y números enteros no negativos  $t$  y  $s$  de modo que  $s$  es menor o igual que  $n + 2$ . Para la  $n$ -ésima superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  tomaremos  $(t + n + 2)$  fibras distintas  $F_{p_1}, \dots, F_{p_t}, F_{q_1}, \dots, F_{q_s}, F_{q_{s+1}}, \dots, F_{q_{n+2}}$ . Luego, consideraremos los siguientes puntos de  $\Sigma_n$ :

- Los puntos  $p_1, p_2, \dots, p_t$ , donde  $p_i$  es el único punto de intersección entre  $C_n$  y  $F_{p_i}$  para cada  $i = 1, \dots, t$ ;
- Los puntos  $o_1, \dots, o_s$ , donde  $o_j$  es el único punto de intersección entre  $C_n$  y  $F_{q_j}$  para cada  $j = 1, \dots, s$ ; y
- Para cada  $m = 1, \dots, n + 2$ , los puntos  $q_{m,1}, q_{m,2}, \dots, q_{m,r_m}$ , donde  $q_{m,l}$  es un punto en la fibra  $F_{q_m}$  para cada  $l = 1, \dots, r_m$  y es diferente del punto de intersección entre  $C_n$  y  $F_{q_m}$ .

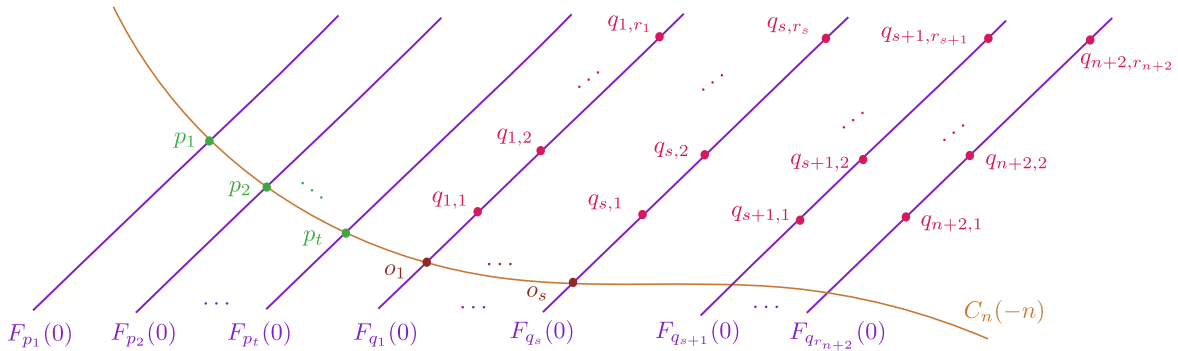


FIGURA 7.1. Configuración de puntos de  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$ .

La superficie  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  es la superficie racional obtenida de la explosión de  $\Sigma_n$  en el subesquema cerrado de dimensión cero  $\bigcup_{i=1}^t \{p_i\} \cup \bigcup_{j=1}^s \{o_j\} \cup \bigcup_{m=1}^{n+2} \{q_{m,1}, q_{m,2}, \dots, q_{m,r_m}\}$ . Así, por construcción tenemos que el número de Picard  $\rho(Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}})$  de  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  es igual a  $(t + s + r_1 + r_2 + \dots + r_{n+2} + 2)$  y que cada clase en el grupo de Néron-Severi de  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  está dada en función de las clases

$$C_n, \mathcal{F}, -\mathcal{E}_{p_1}, \dots, -\mathcal{E}_{p_t}, -\mathcal{E}_{o_1}, \dots, -\mathcal{E}_{o_s}, -\mathcal{E}_{q_{1,1}}, \dots, -\mathcal{E}_{q_{1,r_1}}, \dots, -\mathcal{E}_{q_{n+2,1}}, \dots, -\mathcal{E}_{q_{n+2,r_{n+2}}}.$$



El siguiente resultado nos confirma que la superficie  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  es anticanónica y muestra una forma de descomponer la clase anticanónica de una manera conveniente para nuestro estudio.

**Proposición 7.1.** *Con la notación anterior, la superficie  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  es anticanónica cuya clase anticanónica puede escribirse utilizando  $(n+3+t+s)$  clases de curvas racionales lisas.*

DEMOSTRACIÓN. Comencemos observando que la clase de la transformada estricta  $\widetilde{C}_n$  de  $C_n$  en  $\text{NS}(Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}})$  está dada por  $\mathcal{C}_n - \sum_{i=1}^t \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^s \mathcal{E}_{o_j}$ . Luego, para  $m = 1, \dots, s$ , la clase de la transformada estricta  $\widetilde{F}_{q_m}$  de  $F_{q_m}$  en  $\text{NS}(Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}})$  es igual a  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{o_m} - \sum_{l=1}^{r_m} \mathcal{E}_{q_{m,l}}$ . Por otro lado, para cada  $m = s+1, \dots, n+2$ , la clase de la transformada estricta  $\widetilde{F}_{q_m}$  de  $F_{q_m}$  en  $\text{NS}(Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}})$  es  $\mathcal{F} - \sum_{l=1}^{r_m} \mathcal{E}_{q_{m,l}}$ . Por último, notemos que podemos escribir a la clase anticanónica  $-\mathcal{K}_{Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}}$  como

$$2\left(\mathcal{C}_n - \sum_{i=1}^t \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^s \mathcal{E}_{o_j}\right) + \left(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{o_1} - \sum_{l=1}^{r_1} \mathcal{E}_{q_{1,l}}\right) + \dots + \left(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{o_s} - \sum_{l=1}^{r_s} \mathcal{E}_{q_{s,l}}\right) \\ + \left(\mathcal{F} - \sum_{l=1}^{r_{s+1}} \mathcal{E}_{q_{s+1,l}}\right) + \dots + \left(\mathcal{F} - \sum_{l=1}^{r_{n+2}} \mathcal{E}_{q_{n+2,l}}\right) + \sum_{i=1}^t \mathcal{E}_{p_i} + 2 \sum_{j=1}^s \mathcal{E}_{o_j}$$

como una consecuencia directa de la Proposición 1.34. □

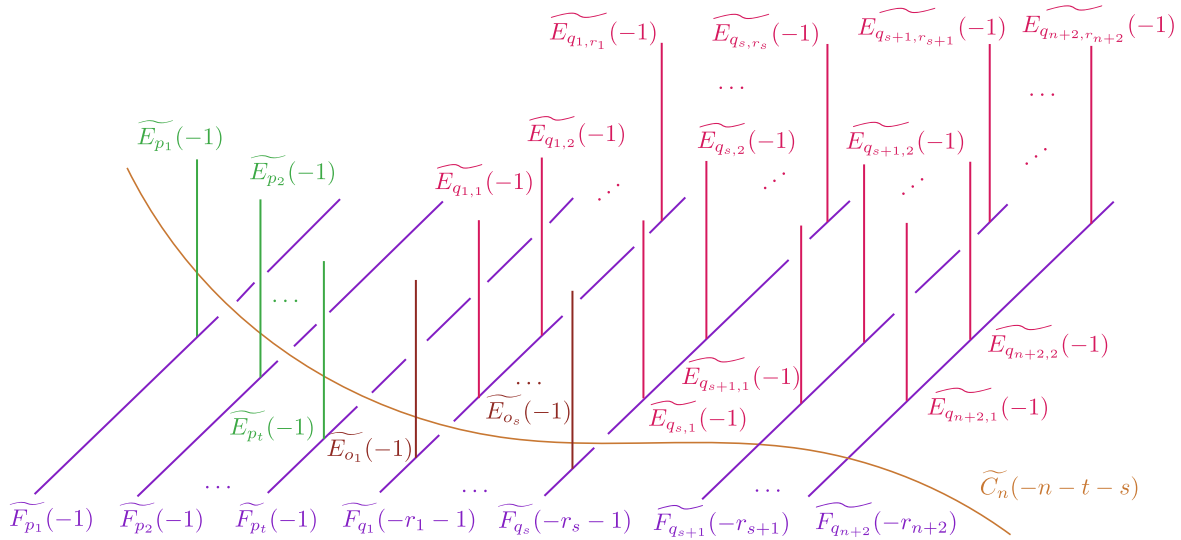


FIGURA 7.2. La superficie  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$ .

## 2. Finitud del Monoide Efectivo

Nuestro siguiente objetivo será mostrar que bajo una condición numérica el monoide efectivo de  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  es finitamente generado. Para ello, usando el hecho de que tal superficie es anticanónica bastará con mostrar que los conjuntos de las clases de las curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  son finitos.

**Teorema 7.2.** *Con la notación anterior, si  $\sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m}$  es mayor que  $n$ , entonces los conjuntos de las curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  sobre  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  son finitos.*

DEMOSTRACIÓN. Comenzaremos estudiando el conjunto de las curvas  $(-1)$ . Sea  $\mathcal{E}$  la clase de una curva  $(-1)$  sobre  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  y supongamos que  $\mathcal{E}$  es diferente de las clases excepcionales y de la clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i}$  para cada  $i = 1, \dots, t$ . Existen números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_t, d_1, \dots, d_s, e_{1,1}, \dots, e_{1,r_1}, \dots, e_{n+2,1}, \dots, e_{n+2,r_{n+2}}$  tales que

$$\mathcal{E} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^t c_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^s d_j \mathcal{E}_{o_j} - \sum_{l=1}^{r_1} e_{1,l} \mathcal{E}_{q_{1,l}} - \dots - \sum_{l=1}^{r_{n+2}} e_{n+2,l} \mathcal{E}_{q_{n+2,l}}.$$

La hipótesis de que  $\mathcal{E}$  es diferente de las clases excepcionales implica que los enteros  $c_i, d_j$  y  $e_{m,l}$  son no negativos para cada  $i = 1, \dots, t, j = 1, \dots, s, m = 1, \dots, n+2$  y  $l = 1, \dots, r_m$  pues los números de intersección  $\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}_{p_i}, \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}_{o_j}$  y  $\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}_{q_{m,l}}$  satisfacen dicha propiedad. Por otro lado, la condición  $\mathcal{E}^2 = -1$  implica que

$$(7.1) \quad \sum_{i=1}^t c_i^2 + \sum_{j=1}^s d_j^2 + \sum_{l=1}^{r_1} e_{1,l}^2 + \dots + \sum_{l=1}^{r_{n+2}} e_{n+2,l}^2 = 2ab - na^2 + 1.$$

Luego, utilizando la descomposición de la clase anticanónica de la Proposición 7.1, la condición  $-\mathcal{K}_{Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}} \cdot \mathcal{E} = 1$  puede reescribirse como

$$\begin{aligned} 1 &= \mathcal{E} \cdot \left( 2[\widetilde{\mathcal{C}}_n] + \sum_{i=1}^{n+2} [\widetilde{F}_{q_m}] + \sum_{i=1}^t \mathcal{E}_{p_i} + 2 \sum_{j=1}^s \mathcal{E}_{o_j} \right) \\ &= 2(\mathcal{E} \cdot [\widetilde{\mathcal{C}}_n]) + \sum_{i=1}^{n+2} (\mathcal{E} \cdot [\widetilde{F}_{q_m}]) + \sum_{i=1}^t (\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}_{p_i}) + 2 \sum_{j=1}^s (\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}_{o_j}). \end{aligned}$$

Así, debido a los coeficientes que aparecen en la igualdad anterior y a la simetría, bastará comprobar los siguientes dos casos:

- A)
  - $\mathcal{E} \cdot [\widetilde{\mathcal{C}}_n] = 0$ ,
  - Existe  $\ell \in \{1, \dots, n+2\}$  tal que  $\mathcal{E} \cdot [\widetilde{F}_{q_\ell}] = 1$ ,
  - $\mathcal{E} \cdot [\widetilde{F}_{q_j}] = 0$  para todo  $m \in \{1, \dots, n+2\} \setminus \{\ell\}$ ,

- $\mathcal{E}.\mathcal{E}_{p_i} = 0$  para todo  $i = 1, \dots, t$ , y
  - $\mathcal{E}.\mathcal{E}_{o_j} = 0$  para todo  $j = 1, \dots, s$ ;
- B)
- $\mathcal{E}.[\widetilde{C}_n] = 0$ ,
  - $\mathcal{E}.[\widetilde{F}_{q_m}] = 0$ , para todo  $m = 1, \dots, n + 2$ ,
  - Existe  $\ell \in \{1, \dots, t\}$  tal que  $\mathcal{E}.\mathcal{E}_{p_\ell} = 1$ ,
  - $\mathcal{E}.\mathcal{E}_{p_i} = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, t\} \setminus \{\ell\}$ , y
  - $\mathcal{E}.\mathcal{E}_{o_j} = 0$  para todo  $j = 1, \dots, s$ .

Lo que mostraremos a continuación es que bajo las condiciones anteriores, en ambos casos es posible obtener una cota superior para  $a$  y para  $b$ .

**Caso A)** En este caso, los números de intersección en las condiciones se traducen respectivamente en

$$\begin{aligned}
 b &= na, \\
 a - 1 &= \sum_{l=1}^{r_\ell} e_{\ell,l}, \\
 a &= \sum_{l=1}^{r_m} e_{m,l} \text{ para cada } m \in \{1, \dots, n + 2\} \setminus \{\ell\}, \\
 c_i &= 0 \text{ para cada } i = 1, \dots, t, \text{ y} \\
 d_j &= 0 \text{ para cada } j = 1, \dots, s.
 \end{aligned}$$

Además, con dichas condiciones la Ecuación (7.1) tiene la forma

$$\sum_{l=1}^{r_1} e_{1,l}^2 + \dots + \sum_{l=1}^{r_{n+2}} e_{n+2,l}^2 = na^2 + 1.$$

Ahora, definimos

$$\tilde{e}_{m,l} = e_{m,l} - \frac{a}{r_m} \quad \text{y} \quad \tilde{e}_{\ell,h} = e_{\ell,h} - \frac{a-1}{r_\ell}$$

para cualquier  $m \in \{1, \dots, n + 2\} \setminus \{\ell\}$ ,  $l = 1, \dots, r_m$  y  $h = 1, \dots, r_\ell$ . Luego, utilizando los números anteriores se sigue la ecuación

$$\sum_{l=1}^{r_1} \tilde{e}_{1,l}^2 + \dots + \sum_{l=1}^{r_{n+2}} \tilde{e}_{n+2,l}^2 = na^2 + 1 - \frac{(a-1)^2}{r_\ell} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq \ell}}^{n+2} \frac{a^2}{r_m},$$

y a su vez ésta implica la desigualdad

$$0 \leq \left( n - \sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m} \right) a^2 + \frac{2a}{r_\ell} + \frac{r_\ell - 1}{r_\ell}.$$

De esta forma, obtenemos una cota superior para  $a$ :

$$(7.2) \quad a \leq \frac{1 + \sqrt{r_\ell(r_\ell - 1) \left( \sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m} - n \right) + 1}}{r_\ell \left( \sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m} - n \right)}.$$

Por consiguiente, de ésta cota obtenemos una cota superior para  $b$ :

$$b \leq n \left( \frac{1 + \sqrt{r_\ell(r_\ell - 1) \left( \sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m} - n \right) + 1}}{r_\ell \left( \sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m} - n \right)} \right).$$

**Caso B)** Para este caso, las condiciones que tenemos tienen la siguiente forma respectivamente:

$$\begin{aligned} b &= na + 1, \\ a &= \sum_{l=1}^{r_m} e_{m,l} \text{ para cada } m \in \{1, \dots, n+2\}, \\ c_\ell &= 1, \\ c_i &= 0 \text{ para cada } i \in \{1, \dots, t\} \setminus \{\ell\}, \text{ y} \\ d_j &= 0 \text{ para cada } j = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Dichas condiciones aplicadas a la Ecuación (7.1) implican la igualdad

$$\sum_{l=1}^{r_1} e_{1,l}^2 + \dots + \sum_{l=1}^{r_{n+2}} e_{n+2,l}^2 = na^2 + 2a.$$

Ahora bien, definiendo

$$\tilde{e}_{m,l} = e_{m,l} - \frac{a}{r_m}$$

para cada  $m \in \{1, \dots, n+2\}$  y  $l = 1, \dots, r_m$ , obtenemos la ecuación

$$\sum_{l=1}^{r_1} \tilde{e}_{1,l}^2 + \dots + \sum_{l=1}^{r_{n+2}} \tilde{e}_{n+2,l}^2 = na^2 + 2a - \sum_{m=1}^{n+2} \frac{a^2}{r_m}.$$

De manera inmediata se deduce la desigualdad

$$0 \leq \left( n - \sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m} \right) a^2 + 2a,$$

y posteriormente la siguiente cota superior para  $a$ :

$$(7.3) \quad a \leq \frac{2}{\left(\sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m} - n\right)}.$$

Luego, dicha desigualdad implica una cota superior para  $b$ :

$$b \leq n \left( \frac{2}{\left(\sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m} - n\right)} \right) + 1.$$

Puesto que en ambos casos las cotas superiores encontradas están dadas en términos de  $n, r_1, \dots, r_{n+2}$ , usando la no negatividad de  $a$  (pues por ejemplo  $\mathcal{E} \cdot (\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1}) \geq 0$ ) concluimos que sólo pueden existir un número finito de valores para  $a$  y para  $b$ . Finalmente, tenemos que para cada  $m = 1, \dots, n+2$  y  $l = 1, \dots, r_m$ , el entero  $e_{m,l}$  tiene un número finito de posibilidades puesto que en ambos casos se satisface que  $0 \leq \sum_{l=1}^{r_m} e_{m,l} \leq a$ . De esta forma, concluimos que el conjunto de las curvas  $(-1)$  sobre  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  es finito.

A continuación probaremos la finitud del conjunto de las curvas  $(-2)$  sobre la superficie  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$ . Sea  $\mathcal{N}$  la clase de una curva  $(-2)$  y supongamos que tal clase no es una componente de la clase anticanónica. Tenemos que existen números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_t, d_1, \dots, d_s, e_{1,1}, \dots, e_{1,r_1}, \dots, e_{n+2,1}, \dots, e_{n+2,r_{n+2}}$  tales que

$$\mathcal{N} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^t c_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^s d_j \mathcal{E}_{o_j} - \sum_{l=1}^{r_1} e_{1,l} \mathcal{E}_{q_{1,l}} - \dots - \sum_{l=1}^{r_{n+2}} e_{n+2,l} \mathcal{E}_{q_{n+2,l}}.$$

Es importante notar que los enteros  $c_i, d_j$  y  $e_{m,l}$  son no negativos para cada  $i = 1, \dots, t, j = 1, \dots, s, m = 1, \dots, n+2$  y  $l = 1, \dots, r_m$  puesto que respectivamente los números de intersección  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{E}_{p_i}, \mathcal{N} \cdot \mathcal{E}_{o_j}$  y  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{E}_{q_{m,l}}$  son no negativos. De nueva cuenta, utilizando la descomposición de la clase anticanónica de la Proposición 7.1, de la ecuación  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{K}_{Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}} = 0$  obtenemos las condiciones

$$b = na,$$

$$a = \sum_{l=1}^{r_m} e_{m,l} \text{ para cada } m \in \{1, \dots, n+2\},$$

$$c_i = 0 \text{ para cada } i \in \{1, \dots, t\}, \text{ y}$$

$$d_j = 0 \text{ para cada } j = 1, \dots, s.$$

Utilizando las ecuaciones anteriores, la condición  $\mathcal{N}^2 = -2$  nos dice que

$$\sum_{l=1}^{r_1} e_{1,l}^2 + \cdots + \sum_{l=1}^{r_{n+2}} e_{n+2,l}^2 = na^2 + 2.$$

Definiendo

$$\tilde{e}_{m,l} = e_{m,l} - \frac{a}{r_m}$$

para cada  $m = 1, \dots, n+2$  y  $l = 1, \dots, r_m$ , obtenemos la ecuación

$$\sum_{l=1}^{r_1} \tilde{e}_{1,l}^2 + \cdots + \sum_{l=1}^{r_{n+2}} \tilde{e}_{n+2,l}^2 = na^2 + 2 - \sum_{m=1}^{n+2} \frac{a^2}{r_m},$$

e inmediatamente después se deduce la desigualdad

$$0 \leq 2 + \left( n - \sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m} \right) a^2.$$

Así,  $a$  está acotado superiormente:

$$(7.4) \quad a \leq \sqrt{\frac{2}{\left( \sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m} - n \right)}}.$$

Consiguientemente, tenemos que una cota superior para  $b$  está dada por

$$b \leq n \left( \sqrt{\frac{2}{\left( \sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m} - n \right)}} \right).$$

Del hecho que  $a$  es no negativo y de que las cotas superiores anteriores están en función de  $n, r_1, \dots, r_{n+2}$  se sigue que existen un número finito de posibles valores para  $a$  y para  $b$ . Además, la condición  $0 \leq \sum_{l=1}^{r_m} e_{m,l} = a$  para cada  $m = 1, \dots, n+2$  implica que  $e_{m,l}$  únicamente puede tomar un número finito de valores para cualquier  $m = 1, \dots, n+2$  y  $l = 1, \dots, r_m$ . Con esto, concluimos que el conjunto de las curvas  $(-2)$  sobre  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  es finito.  $\square$

**Corolario 7.3.** *Con la notación anterior, si  $\sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m}$  es mayor que  $n$ , entonces el monoide efectivo de  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que los conjuntos de las curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  sobre  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  son finitos por el Teorema 7.2. Consecuentemente,  $\text{Eff}(Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}})$  es finitamente generado por [LH05, Corolario 4.2, p. 109].  $\square$

### 3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias

El siguiente resultado nos mostrará que bajo la misma condición numérica utilizada para mostrar la finitud del monoide efectivo, la superficie  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica.

**Teorema 7.4.** *Con la notación anterior, si  $\sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m}$  es mayor que  $n$ , entonces  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un divisor nef  $H$  sobre  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  que es ortogonal a un divisor anticanónico y denotemos por  $\mathcal{H}$  a la clase de  $H$  en el grupo de Néron-Severi de  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$ . Sabemos que existen números enteros no negativos  $a, b, c_1, \dots, c_t, d_1, \dots, d_s, e_{1,1}, \dots, e_{1,r_1}, \dots, e_{n+2,1}, \dots, e_{n+2,r_{n+2}}$  de modo que

$$\mathcal{H} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^t c_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^s d_j \mathcal{E}_{o_j} - \sum_{l=1}^{r_1} e_{1,l} \mathcal{E}_{q_{1,l}} - \dots - \sum_{l=1}^{r_{n+2}} e_{n+2,l} \mathcal{E}_{q_{n+2,l}}.$$

La ortogonalidad de  $\mathcal{H}$  con la clase anticanónica implica que  $\mathcal{H}$  es ortogonal a cada una de las componentes de  $-\mathcal{K}_{Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}}$  de la descomposición brindada en la Proposición 7.1. Así, tenemos que se satisfacen las ecuaciones

$$(7.5) \quad b = na,$$

$$(7.6) \quad a = \sum_{l=1}^{r_m} e_{m,l} \text{ para cada } m \in \{1, \dots, n+2\},$$

$$c_i = 0 \text{ para cada } i \in \{1, \dots, t\}, \text{ y}$$

$$d_j = 0 \text{ para cada } j = 1, \dots, s.$$

Ahora bien, puesto que  $\mathcal{H}$  es una clase nef satisface que  $\mathcal{H}^2 \geq 0$ , así, se cumple que

$$\sum_{l=1}^{r_1} e_{1,l}^2 + \dots + \sum_{l=1}^{r_{n+2}} e_{n+2,l}^2 \leq na^2.$$

Considerando

$$\tilde{e}_{m,l} = e_{m,l} - \frac{a}{r_m}$$

para cada  $m = 1, \dots, n+2$  y  $l = 1, \dots, r_m$  se tiene la ecuación

$$\sum_{l=1}^{r_1} \tilde{e}_{1,l}^2 + \dots + \sum_{l=1}^{r_{n+2}} \tilde{e}_{n+2,l}^2 \leq na^2 - \sum_{m=1}^{n+2} \frac{a^2}{r_m},$$

y esto implica la condición

$$0 \leq \left( n - \sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m} \right) a^2.$$

La hipótesis  $\sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m} > n$  implica que  $a = 0$ . De manera inmediata, la Ecuación (7.5) implica que  $b = 0$  y puesto que cada sumando que aparece del lado derecho de la Ecuación (7.6) es no negativo, obtenemos que  $e_{m,l} = 0$  para cada  $m = 1, \dots, n+2$  y  $l = 1, \dots, r_m$ . Por lo tanto, concluimos que  $\mathcal{H}$  es la clase nula y consecuentemente que  $H = 0$ .  $\square$

**Corolario 7.5.** *Con la notación anterior, si  $\sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m}$  es mayor que  $n$ , entonces  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  es una superficie de Harbourne-Hirschowitz.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado se sigue del Teorema 3.11 puesto que  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  es una superficie anticanónica (ver Proposición 7.1) y tiene la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teorema 7.4).  $\square$

**Corolario 7.6.** *Con la notación anterior, si  $\sum_{m=1}^{n+2} \frac{1}{r_m}$  es mayor que  $n$ , entonces el anillo de Cox de  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia del Teorema 3.20 puesto que  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$  tiene monoide efectivo finitamente generado (ver Corolario 7.3) y además satisface la propiedad ortogonal anticanónica (ver Corolario 7.4).  $\square$

## 4. Ejemplos Concretos

En este apartado presentaremos algunos ejemplos concretos de los conjuntos generadores mínimos del monoide efectivo para ciertas clases de superficies  $Z_n^{t,s,r_1,\dots,r_{n+2}}$ . En adelante, utilizaremos la notación utilizada en las secciones anteriores.

El siguiente lema que es una consecuencia del Teorema de Bézout será utilizado en los siguientes ejemplos.

**Lema 7.7.** *Sean  $a$  y  $t$  números enteros positivos de modo que  $1 \leq a \leq 5$ . En la superficie  $Z_1^{t,3,1,5,5}$  existe una curva en  $|aC_1 + aF|$  (respectivamente, una curva en  $|aC_1 + (a+1)F|$ ) que pasa por  $q_{1,1}$ , por los puntos de un subconjunto de  $a$  elementos de  $\{q_{2,1}, \dots, q_{2,5}\}$  y por los puntos de un subconjunto de  $a$  elementos de  $\{q_{3,1}, \dots, q_{3,5}\}$  (respectivamente, pasa por  $q_{1,1}$ , por  $p_h$  para  $h \in \{1, \dots, t\}$ , por los puntos de un subconjunto de  $a$  elementos de  $\{q_{2,1}, \dots, q_{2,5}\}$*



y por los puntos de un subconjunto de  $a$  elementos de  $\{q_{3,1}, \dots, q_{3,5}\}$ ) y que tiene multiplicidad  $(a - 1)$  en  $q_{1,1}$  (respectivamente, multiplicidad  $a$  en  $q_{1,1}$ ).

**Ejemplo 7.8.** Sea  $t$  un número entero positivo. Consideremos la superficie  $Z_1^{t,3,1,5,5}$  cuyo número de Picard es igual a  $(t + 16)$ . Si no existe una curva en  $|C_1 + F|$  que pasa por los puntos  $q_{1,1}$ ,  $q_{2,i}$  y  $q_{3,j}$  para cualesquier  $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ , entonces el conjunto generador mínimo del monoide efectivo de  $Z_1^{t,3,1,5,5}$  está dado por las siguientes  $(253t + 279)$  clases:

1. La clase  $\mathcal{E}_{p_i}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $i = 1, \dots, t$ ,
2. La clase  $\mathcal{E}_{o_j}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $o_j$  para  $j = 1, 2, 3$ ,
3. La clase  $\mathcal{E}_{q_{1,1}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_{1,1}$ ,
4. La clase  $\mathcal{E}_{q_{2,l}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_{2,l}$  para  $l = 1, \dots, 5$ ,
5. La clase  $\mathcal{E}_{q_{3,l}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_{3,l}$  para  $l = 1, \dots, 5$ ,
6. La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i}$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por el punto  $p_i$  para  $i = 1, \dots, t$ ,
7. La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_{1,1}} - \mathcal{E}_{o_1}$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por los puntos  $q_{1,1}$  y  $o_1$ ,
8. La clase  $\mathcal{F} - \sum_{l=1}^5 \mathcal{E}_{q_{2,l}} - \mathcal{E}_{o_2}$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por los puntos  $q_{2,1}, \dots, q_{2,5}$  y  $o_2$ ,
9. La clase  $\mathcal{F} - \sum_{l=1}^5 \mathcal{E}_{q_{3,l}} - \mathcal{E}_{o_3}$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por los puntos  $q_{3,1}, \dots, q_{3,5}$  y  $o_3$ ,
10. La clase  $\mathcal{C}_1 - \sum_{i=1}^t \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^3 \mathcal{E}_{o_j}$  de la transformada estricta de la curva  $C_1$ ,
11. La clase  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_{1,1}} - \mathcal{E}_{q_{2,l}}$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_1 + F|$  que pasa por los puntos  $q_{1,1}$  y  $q_{2,l}$  para  $l = 1, \dots, 5$ ,
12. La clase  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_{1,1}} - \mathcal{E}_{q_{3,l}}$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_1 + F|$  que pasa por los puntos  $q_{1,1}$  y  $q_{3,l}$  para  $l = 1, \dots, 5$ .
13. La clase  $a\mathcal{C}_1 + a\mathcal{F} - (a - 1)\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{i=1}^a \mathcal{E}_{q_{2,l_i}} - \sum_{j=1}^a \mathcal{E}_{q_{3,m_j}}$  de la transformada estricta de la curva en  $|aC_1 + aF|$  que pasa por los puntos  $q_{1,1}, q_{2,l_1}, \dots, q_{2,l_a}, q_{3,m_1}, \dots, q_{3,m_a}$  y que tienen multiplicidad  $(a - 1)$  en el punto  $q_{1,1}$ , donde  $a, l_i, m_j \in \{1, \dots, 5\}$  tales que  $l_i \neq l_j$  y  $m_i \neq m_j$  cuando  $i \neq j$  para  $i, j = 1, \dots, a$ .
14. La clase  $a\mathcal{C}_1 + (a + 1)\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_h} - a\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{i=1}^a \mathcal{E}_{q_{2,l_i}} - \sum_{j=1}^a \mathcal{E}_{q_{3,m_j}}$  de la transformada estricta de la curva en  $|aC_1 + (a + 1)F|$  que pasa por los puntos  $p_h, q_{1,1}, q_{2,l_1}, \dots, q_{2,l_a}, q_{3,m_1}, \dots, q_{3,m_a}$  y que tiene multiplicidad  $a$  en el punto  $q_{1,1}$ , donde  $h \in \{1, \dots, t\}$  y  $a, l_i, m_j \in \{1, \dots, 5\}$  con  $l_i \neq l_j$  y  $m_i \neq m_j$  cuando  $i \neq j$  para  $i, j = 1, \dots, a$ .

Observemos que las clases anteriores se encuentran en el conjunto generador del monoide efectivo de  $Z_1^{t,3,1,5,5}$ . Lo que realizaremos a continuación para mostrar que la lista anterior

genera a  $\text{Eff}(Z_1^{t,3,1,5,5})$  es determinar las clases de las curvas  $(-1)$  y  $(-2)$  que aparecen sobre la superficie y que son diferentes de las clases que aparecen de forma natural, y posteriormente utilizaremos el Lema 4.1 de [LH05]. Comenzaremos estudiando el conjunto de las clases de las curvas  $(-2)$ . Sea  $\mathcal{N}$  la clase de una curva  $(-2)$  y supongamos que es diferente de la clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_{1,1}} - \mathcal{E}_{o_1}$ . Existen números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_t, d_1, d_2, d_3, e_{1,1}, e_{2,1}, \dots, e_{2,5}, e_{3,1}, \dots, e_{3,5}$  tales que

$$\mathcal{N} = a\mathcal{C}_1 + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^t c_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^3 d_j \mathcal{E}_{o_j} - e_{1,1} \mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^5 e_{2,l} \mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^5 e_{3,l} \mathcal{E}_{q_{3,l}}.$$

Del Teorema 7.2 sabemos que  $d_1 = d_2 = d_3 = c_i = 0$  para  $i = 1, \dots, t$  y que  $b = a$ , además, tenemos las ecuaciones

$$e_{1,1} = a, \quad \sum_{l=1}^5 e_{2,l} = a \quad \text{y} \quad \sum_{l=1}^5 e_{3,l} = a.$$

Por simplicidad, tomaremos la convención de que los enteros  $e_{2,l}$  y  $e_{3,l}$  que no aparezcan con un valor asignado explícitamente serán iguales a cero para  $l = 1, \dots, 5$ . Ahora, la Ecuación (7.4) nos dice que  $a \leq 2$ . De este modo, debemos de estudiar tres posibilidades:

- I)  $a = 2$ . Debido al valor de  $a$  de este caso, por simetría bastará con comprobar los siguientes tres casos:

$e_{2,1}$	$e_{2,2}$	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	$\mathcal{N}^2$
2	0	2	0	-8
2	0	1	1	-6
1	1	1	1	-4

De esta forma, descartamos las clases que aparecerían en este caso.

- II)  $a = 1$ . Por simetría, es suficiente estudiar únicamente el caso en que  $e_{2,1} = e_{3,1} = 1$ . Para dichos valores tendríamos que  $\mathcal{N} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_{1,1}} - \mathcal{E}_{q_{2,1}} - \mathcal{E}_{q_{3,1}}$ , además, tenemos que  $\mathcal{N}^2 = -2$ . Sin embargo, tal clase no es la clase de una curva  $(-2)$  por hipótesis.
- III)  $a = 0$ . Con este valor de  $a$  se seguiría que  $\mathcal{N}$  es la clase nula y no tendríamos la clase de una curva  $(-2)$ .

Por lo tanto, tenemos que no existen más clases de curvas  $(-2)$  sobre  $Z_1^{t,3,1,5,5}$  además de la clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_{1,1}} - \mathcal{E}_{o_1}$  que aparece naturalmente.

A continuación procederemos con el estudio de las clases de curvas  $(-1)$  sobre  $Z_1^{t,3,1,5,5}$ . Sea  $\mathcal{E}$  la clase de una curva  $(-1)$  y supongamos que es diferente de las clases de divisores

excepcionales y de la clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_i}$  para  $i = 1, \dots, t$ . Existen números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_t, d_1, d_2, d_3, e_{1,1}, e_{2,1}, \dots, e_{2,5}, e_{3,1}, \dots, e_{3,5}$  tales que

$$\mathcal{E} = a\mathcal{C}_1 + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^t c_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^3 d_j \mathcal{E}_{o_j} - e_{1,1} \mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^5 e_{2,l} \mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^5 e_{3,l} \mathcal{E}_{q_{3,l}}.$$

De manera similar al caso de las clases de curvas  $(-2)$ , convendremos que para cualquier  $l = 1, \dots, 5$  los valores de  $e_{2,l}$  y  $e_{3,l}$  serán iguales a cero si no están indicados explícitamente. Por el Teorema 7.2 debemos distinguir entre dos diferentes casos:

A) Dentro de este caso distinguiremos entre dos posibles valores por simetría:

A.1)  $r_\ell = r_2 = 5$ . En este caso se tiene que  $d_1 = d_2 = d_3 = c_i = 0$  para  $i = 1, \dots, t$ , que  $b = a$  y se tienen las ecuaciones:

$$e_{1,1} = a, \quad \sum_{l=1}^5 e_{2,l} = a - 1 \quad \text{y} \quad \sum_{l=1}^5 e_{3,l} = a.$$

Además, la Ecuación (7.2) implica que  $a \leq 2$ . De esta forma, debemos de comprobar tres posibilidades:

A.1.1)  $a = 2$ . Por las ecuaciones anteriores bastará con estudiar dos casos:

$e_{2,1}$	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	$\mathcal{E}^2$
1	2	0	-5
1	1	1	-3

De este forma, en este caso no encontraríamos clases de curvas  $(-1)$ .

A.1.2)  $a = 1$ . Para este valor de  $a$  se tiene que  $e_{2,l} = 0$  para cada  $l = 1, \dots, 5$ . Así, será suficiente revisar un único caso por simetría. Supongamos que  $e_{3,1} = 1$ . Se tiene que  $\mathcal{E} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_{1,1}} - \mathcal{E}_{q_{3,1}}$  y dicha clase es la clase de una curva  $(-1)$  por la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch.

A.1.3)  $a = 0$ . Este valor de  $a$  implicaría que  $\mathcal{E}$  es la clase nula lo cual no sería posible.

A.2)  $r_\ell = r_1 = 1$ . Para este caso se tienen las condiciones  $d_1 = d_2 = d_3 = c_i = 0$  para  $i = 1, \dots, t$ ,  $b = a$  y

$$e_{1,1} = a - 1, \quad \sum_{l=1}^5 e_{2,l} = a \quad \text{y} \quad \sum_{l=1}^5 e_{3,l} = a.$$

De este modo, tenemos que  $\mathcal{E}$  tiene la siguiente forma:

$$(7.7) \quad \mathcal{E} = a\mathcal{C}_1 + a\mathcal{F} - (a - 1)\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^5 e_{2,l} \mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^5 e_{3,l} \mathcal{E}_{q_{3,l}}.$$

Luego, puesto que la Ecuación (7.2) implica que  $a \leq 5$ , verificaremos los seis casos posibles:

A.2.1)  $a = 5$ . Para el primer valor de  $a$ , por la simetría en las condiciones será suficiente revisar veintiocho casos que se presentan en la siguiente tabla:

$e_{2,1}$	$e_{2,2}$	$e_{2,3}$	$e_{2,4}$	$e_{2,5}$	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	$e_{3,3}$	$e_{3,4}$	$e_{3,5}$	$\mathcal{E}^2$
5	0	0	0	0	5	0	0	0	0	-41
5	0	0	0	0	4	1	0	0	0	-33
5	0	0	0	0	3	2	0	0	0	-29
5	0	0	0	0	3	1	1	0	0	-27
5	0	0	0	0	2	2	1	0	0	-25
$e_{2,1}$	$e_{2,2}$	$e_{2,3}$	$e_{2,4}$	$e_{2,5}$	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	$e_{3,3}$	$e_{3,4}$	$e_{3,5}$	$\mathcal{E}^2$
5	0	0	0	0	2	1	1	1	0	-23
5	0	0	0	0	1	1	1	1	1	-21
3	2	0	0	0	3	2	0	0	0	-17
4	1	0	0	0	4	1	0	0	0	-25
4	1	0	0	0	3	2	0	0	0	-21
4	1	0	0	0	3	1	1	0	0	-19
4	1	0	0	0	2	2	1	0	0	-17
4	1	0	0	0	2	1	1	1	0	-15
4	1	0	0	0	1	1	1	1	1	-13
3	2	0	0	0	3	1	1	0	0	-15
3	2	0	0	0	2	2	1	0	0	-13
3	2	0	0	0	2	1	1	1	0	-11
3	2	0	0	0	1	1	1	1	1	-9
3	1	1	0	0	3	1	1	0	0	-13
3	1	1	0	0	2	2	1	0	0	-11
3	1	1	0	0	2	1	1	1	0	-9
3	1	1	0	0	1	1	1	1	1	-7
2	2	1	0	0	2	2	1	0	0	-9
2	2	1	0	0	2	1	1	1	0	-7
2	2	1	0	0	1	1	1	1	1	-5
2	1	1	1	0	2	1	1	1	0	-5
2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	-3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1

Luego, por el Lema 7.7 tenemos que  $\mathcal{E} = 5\mathcal{C}_1 + 5\mathcal{F} - 4\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^5 \mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^5 \mathcal{E}_{q_{3,l}}$  es la clase de una curva  $(-1)$ .

A.2.2)  $a = 4$ . En esta posibilidad por la simetría de las condiciones sólo debemos de revisar quince casos que se presentan en la siguiente tabla:

$e_{2,1}$	$e_{2,2}$	$e_{2,3}$	$e_{2,4}$	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	$e_{3,3}$	$e_{3,4}$	$\mathcal{E}^2$
4	0	0	0	4	0	0	0	-25
4	0	0	0	3	1	0	0	-19
4	0	0	0	2	2	0	0	-17
4	0	0	0	2	1	1	0	-15
4	0	0	0	1	1	1	1	-13
$e_{2,1}$	$e_{2,2}$	$e_{2,3}$	$e_{2,4}$	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	$e_{3,3}$	$e_{3,4}$	$\mathcal{E}^2$
3	1	0	0	3	1	0	0	-13
3	1	0	0	2	2	0	0	-11
3	1	0	0	2	1	1	0	-9
3	1	0	0	1	1	1	1	-7
2	2	0	0	2	2	0	0	-9
2	2	0	0	2	1	1	0	-7
2	2	0	0	1	1	1	1	-5
2	1	1	0	2	1	1	0	-5
2	1	1	0	1	1	1	1	-3
1	1	1	1	1	1	1	1	-1

Por tanto, tenemos que la clase  $\mathcal{E} = 4\mathcal{C}_1 + 4\mathcal{F} - 3\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^4 \mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^4 \mathcal{E}_{q_{3,l}}$  es una de las clases buscadas en vista del Lema 7.7.

A.2.3)  $a = 3$ . En este caso, por las simetrías de las condiciones bastará con estudiar seis posibles casos como se muestra en la siguiente tabla:

$e_{2,1}$	$e_{2,2}$	$e_{2,3}$	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	$e_{3,3}$	$\mathcal{E}^2$
3	0	0	3	0	0	-13
3	0	0	2	1	0	-9
3	0	0	1	1	1	-7
2	1	0	2	1	0	-5
2	1	0	1	1	1	-3
1	1	1	1	1	1	-1

De nueva cuenta, del Lema 7.7 se sigue que la clase  $\mathcal{E} = 3\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^3 \mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^3 \mathcal{E}_{q_{3,l}}$  es una de las clases requeridas.

A.2.4)  $a = 2$ . Para este valor de  $a$  bastará con verificar los siguientes tres casos:

$e_{2,1}$	$e_{2,2}$	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	$\mathcal{E}^2$
2	0	2	0	-5
2	0	1	1	-3
1	1	1	1	-1

Así, por el Lema 7.7 se sigue que  $\mathcal{E} = 2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^2 \mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^2 \mathcal{E}_{q_{3,l}}$  es una de las clases que buscamos.

A.2.5)  $a = 1$ . Para este caso será suficiente verificar una posibilidad gracias a la simetría. Supongamos que  $e_{2,1} = e_{3,1} = 1$ . Es claro que  $\mathcal{E} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_{q_{2,1}} - \mathcal{E}_{q_{3,1}}$  es la clase de una curva  $(-1)$  en vista de la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch.

A.2.6)  $a = 0$ . Para la última posibilidad se tendría que  $\mathcal{E}$  es la clase nula y por ello la descartaríamos.

B) Para el segundo caso que se presenta en las clases de curvas  $(-1)$ , gracias a la simetría podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $c_1 = 1$  y  $c_j = 0$  para  $j = 2, \dots, t$ . Además, tenemos las igualdades  $b = a + 1$ ,  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$  y

$$e_{1,1} = a, \quad \sum_{l=1}^5 e_{2,l} = a \quad y \quad \sum_{l=1}^5 e_{3,l} = a.$$

Observemos que las condiciones anteriores nos dicen que  $\mathcal{E}$  tiene la forma

$$\mathcal{E} = a\mathcal{C}_1 + (a + 1)\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - a\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^5 e_{2,l}\mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^5 e_{3,l}\mathcal{E}_{q_{3,l}}.$$

Por otro lado, la Ecuación (7.3) nos dice que  $a \leq 5$ . Aún más, observemos que la siguiente igualdad se satisface:

$$\mathcal{E}^2 = \left( a\mathcal{C}_1 + a\mathcal{F} - (a - 1)\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^5 e_{2,l}\mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^5 e_{3,l}\mathcal{E}_{q_{3,l}} \right)^2.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2 &= \left( \left( a\mathcal{C}_1 + a\mathcal{F} - (a - 1)\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^5 e_{2,l}\mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^5 e_{3,l}\mathcal{E}_{q_{3,l}} \right) + (\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{q_{1,1}}) \right)^2 \\ &= \left( a\mathcal{C}_1 + a\mathcal{F} - (a - 1)\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^5 e_{2,l}\mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^5 e_{3,l}\mathcal{E}_{q_{3,l}} \right)^2 + 2(a - (a - 1)) + (-1 - 1) \\ &= \left( a\mathcal{C}_1 + a\mathcal{F} - (a - 1)\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^5 e_{2,l}\mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^5 e_{3,l}\mathcal{E}_{q_{3,l}} \right)^2. \end{aligned}$$

De este modo, puesto que  $a \leq 5$  y  $\sum_{l=1}^5 e_{2,l} = a = \sum_{l=1}^5 e_{3,l}$  son las condiciones que nos indican todos los casos que debemos verificar, y puesto que la autointersección de  $\mathcal{E}$  coincide con la autointersección de la clase de la Ecuación (7.7), el Caso A.2) y el Lema 7.7 nos indican las clases de las curvas  $(-1)$  que aparecen para cada posible valor de  $a$  y que presentamos a continuación:

- B.1)  $a = 5$ . En este caso tenemos que  $\mathcal{E} = 5\mathcal{C}_1 + 6\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - 5\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^5 \mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^5 \mathcal{E}_{q_{3,l}}$  es la clase de una curva  $(-1)$ .
- B.2)  $a = 4$ . Aquí, tenemos que  $\mathcal{E} = 4\mathcal{C}_1 + 5\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - 4\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^4 \mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^4 \mathcal{E}_{q_{3,l}}$  es una de las clases deseadas.
- B.3)  $a = 3$ . La clase  $\mathcal{E} = 3\mathcal{C}_1 + 4\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - 3\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^3 \mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^3 \mathcal{E}_{q_{3,l}}$  es una de las clases que requerimos.
- B.4)  $a = 2$ . La clase de la curva  $(-1)$  que se obtiene en este caso está dada por  $\mathcal{E} = 2\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - 2\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{l=1}^2 \mathcal{E}_{q_{2,l}} - \sum_{l=1}^2 \mathcal{E}_{q_{3,l}}$ .
- B.5)  $a = 1$ . Para tal valor de  $a$  se tiene que la clase  $\mathcal{E} = \mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{q_{1,1}} - \mathcal{E}_{q_{2,1}} - \mathcal{E}_{q_{3,1}}$  es una de las clases deseadas.
- B.6)  $a = 0$ . Este caso se descartaría por sí mismo ya que implicaría que  $\mathcal{E}$  es la clase nula.

De esta manera, hemos determinado todas las clases de curvas  $(-1)$  que pueden aparecer.

**Ejemplo 7.9.** Consideremos tres rectas  $L_1, L_2$  y  $L_3$  en el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  que se intersecan en un punto  $p$ . Consideremos un punto  $q_{1,1}$  en  $L_1$  diferente de  $p$  y consideremos cinco rectas  $l_1, \dots, l_5$  diferentes de  $L_1$  que pasan por  $q_{1,1}$ . Luego, sean  $q_{2,i}$  el punto de intersección de  $l_i$  con  $L_2$  y  $q_{3,i}$  el punto de intersección de  $l_i$  con  $L_3$  para cada  $i = 1, \dots, 5$ . Sea  $S$  la superficie obtenida de la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en los puntos  $p, q_{1,1}, q_{2,1}, \dots, q_{2,5}, q_{3,1}, \dots, q_{3,5}$ , en los puntos  $o_1, o_2$  y  $o_3$  infinitamente cercanos a  $p$  en las direcciones de las rectas  $L_1, L_2$  y  $L_3$  respectivamente y en  $t$  puntos  $p_1, \dots, p_t$  (donde  $t$  es un número entero positivo) infinitamente cercanos a  $p$  en direcciones distintas a las de las rectas  $L_i$  y  $l_j$  para  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 1, \dots, 5$ . Notemos que el número de Picard de  $S$  es igual a  $(t + 16)$ . En la Figura 7.3 se muestra la configuración de los puntos ordinarios en  $\mathbb{P}^2$  que estamos considerando.

Puesto que la superficie  $S$  no es otra cosa que la superficie  $Z_1^{t,3,1,5,5}$  en una especialización de los puntos considerados, utilizando un análisis similar al del ejemplo anterior podemos determinar el conjunto de las clases de curvas  $(-1)$  y de curvas  $(-2)$  sobre  $S$  y consecuentemente al conjunto generador mínimo del monoide efectivo  $\text{Eff}(S)$  de  $S$ . En efecto, al denotar por  $\mathcal{E}_0$  a la clase de la transformada total de una línea genérica en  $\mathbb{P}^2$ , se tiene que el sistema generador mínimo de  $\text{Eff}(S)$  está dado por las  $(127t + 148)$  clases de la lista que presentamos a continuación:

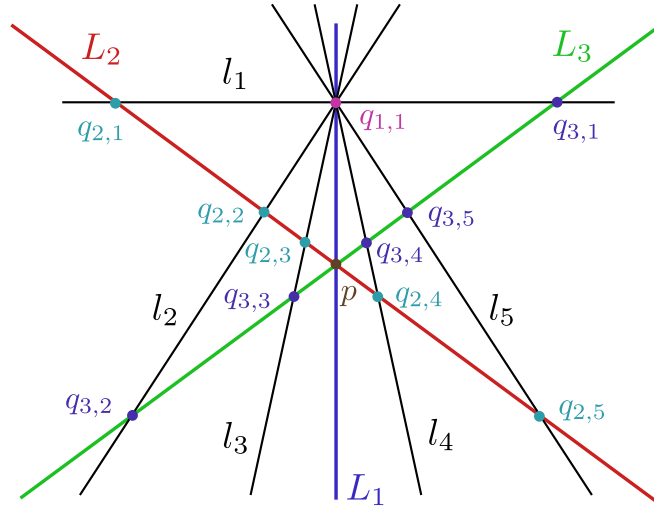


FIGURA 7.3. Configuración de puntos en tres rectas.

1. La clase  $\mathcal{E}_{p_i}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $i = 1, \dots, t$ ,
2. La clase  $\mathcal{E}_{o_j}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $o_j$  para  $j = 1, 2, 3$ ,
3. La clase  $\mathcal{E}_{q_{1,1}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_{1,1}$ ,
4. La clase  $\mathcal{E}_{q_{2,m}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_{2,m}$  para  $m = 1, \dots, 5$ ,
5. La clase  $\mathcal{E}_{q_{3,m}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_{3,m}$  para  $m = 1, \dots, 5$ ,
6. La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_p - \mathcal{E}_{q_{1,1}} - \mathcal{E}_{o_1}$  de la transformada estricta de la recta  $L_1$ ,
7. La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_p - \sum_{m=1}^5 \mathcal{E}_{q_{2,m}} - \mathcal{E}_{o_2}$  de la transformada estricta de la recta  $L_2$ ,
8. La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_p - \sum_{m=1}^5 \mathcal{E}_{q_{3,m}} - \mathcal{E}_{o_3}$  de la transformada estricta de la recta  $L_3$ ,
9. La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{q_{1,1}} - \mathcal{E}_{q_{2,i}} - \mathcal{E}_{q_{3,i}}$  de la transformada estricta recta  $l_i$  para  $i = 1, \dots, 5$ ,
10. La clase  $\mathcal{E}_p - \sum_{i=1}^t \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^3 \mathcal{E}_{o_j}$  de la transformada estricta del divisor excepcional correspondiente al punto  $p$ ,
11. La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_p - \mathcal{E}_{p_i}$  de la transformada estricta de la recta que pasa por  $p$  en dirección de  $p_i$  para  $i = 1, \dots, t$ ,
12. La clase  $a\mathcal{E}_0 - (a-1)\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{i=1}^a \mathcal{E}_{q_{2,n_i}} - \sum_{j=1}^a \mathcal{E}_{q_{3,m_j}}$  de una curva de grado  $a$  que pasa por los puntos  $q_{1,1}, q_{2,n_1}, \dots, q_{2,n_a}, q_{3,m_1}, \dots, q_{3,m_a}$  y que tiene multiplicidad  $(a-1)$  en el punto  $q_{1,1}$ , donde  $a \in \{1, 2\}$  y  $n_i, m_j \in \{1, \dots, 5\}$  son tales que  $n_i \neq n_j$  y  $m_i \neq m_j$  cuando  $i \neq j$ , y  $n_i \neq m_j$  para  $i, j = 1, a$ .
13. La clase  $(a+1)\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_p - \mathcal{E}_{p_h} - a\mathcal{E}_{q_{1,1}} - \sum_{i=1}^a \mathcal{E}_{q_{2,n_i}} - \sum_{j=1}^a \mathcal{E}_{q_{3,m_j}}$  de una curva en de grado  $(a+1)$  que pasa por los puntos  $p, p_h, q_{1,1}, q_{2,n_1}, \dots, q_{2,n_a}, q_{3,m_1}, \dots, q_{3,m_a}$  y que tiene multiplicidad  $a$  en el punto  $q_{1,1}$ , donde  $a \in \{1, 2\}$ ,  $h \in \{1, \dots, t\}$  y  $n_i, m_j \in \{1, \dots, 5\}$  satisfacen que  $n_i \neq n_j$  y  $m_i \neq m_j$  cuando  $i \neq j$ , y  $n_i \neq m_j$  para  $i, j = 1, a$ .



## CAPÍTULO 8

### EXPLOSIÓN DE $\Sigma_n$ EN PUNTOS COLINEALES

En este capítulo presentaremos otra de nuestras construcciones de superficies racionales anticanónicas que tienen números de Picard tan grandes como uno decida, cuyos monoïdes efectivos son finitamente generados y que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica. En particular, sus anillos de Cox son finitamente generados. Después de discutir el comportamiento de la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en un número finito de puntos colineales y su relación con la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_1$ , introduciremos el concepto de *puntos colineales* para una superficie de Hirzebruch (ver Definición 8.1) y explotando puntos en tal configuración construiremos nuestras superficies. Posteriormente, en la segunda sección mostraremos la finitud del monoïde efectivo (ver Teorema 8.3) mientras que en la tercera sección mostraremos que tales superficies satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teorema 8.4). Como consecuencia, tales superficies serán de Harbourne-Hirschowitz (ver Corolario 8.5) y sus anillos de Cox serán finitamente generados (ver Corolario 8.6). Además, el sistema lineal completo asociado a cada divisor nef no nulo será libre de puntos base (ver Teorema 8.4). Es importante mencionar que a diferencia de los capítulos anteriores en este capítulo no fijaremos condición numérica alguna para asegurar la finitud del monoïde efectivo y el cumplimiento de la propiedad ortogonal anticanónica, en cambio, presentaremos el conjunto generador mínimo del monoïde efectivo de dichas superficies y una descomposición para cada clase efectiva. Para finalizar el capítulo, presentaremos algunos ejemplos de una descomposición de ciertas clases efectivas sobre tales superficies utilizando la descomposición brindada por nuestro resultado y mostraremos que la efectividad de tales clases no puede ser obtenida como una consecuencia del teorema de Riemann-Roch (ver Ejemplos 8.8, 8.9 y 8.10).

### 1. Construcción

En esta sección construiremos una clase de superficies racionales anticanónicas a partir de una superficie de Hirzebruch y que viene motivada de la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en un conjunto finito de puntos colineales.

Para un número entero positivo  $r$ , consideremos  $r$  puntos  $p_1, p_2, \dots, p_r$  de  $\mathbb{P}^2$  que son colineales y denotemos por  $L$  a la línea recta que los contiene. Al considerar la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en  $p_1$ , la superficie obtenida no es otra cosa que la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_1$  donde el divisor excepcional es precisamente la curva negativa  $C_1$  y donde la transformada estricta  $\tilde{L}$  de  $L$  es una fibra en  $\Sigma_1$  que contiene a los puntos  $p_2, \dots, p_r$ . De esta forma, podemos pensar que la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en un conjunto de  $r$  puntos colineales puede obtenerse de la explosión de  $\Sigma_1$  en un conjunto de  $r - 1$  puntos que se encuentran sobre la misma fibra de manera que ninguno de ellos se encuentra sobre la curva negativa. Lo anterior sugiere introducir la siguiente definición para extender la noción de colinealidad en  $\Sigma_n$ .

**Definición 8.1.** Sea  $n$  un entero no negativo. Un número finito de puntos de  $\Sigma_n$  son **colineales** si todos ellos están contenidos en una fibra o todos ellos están contenidos en la curva  $C_n$ .

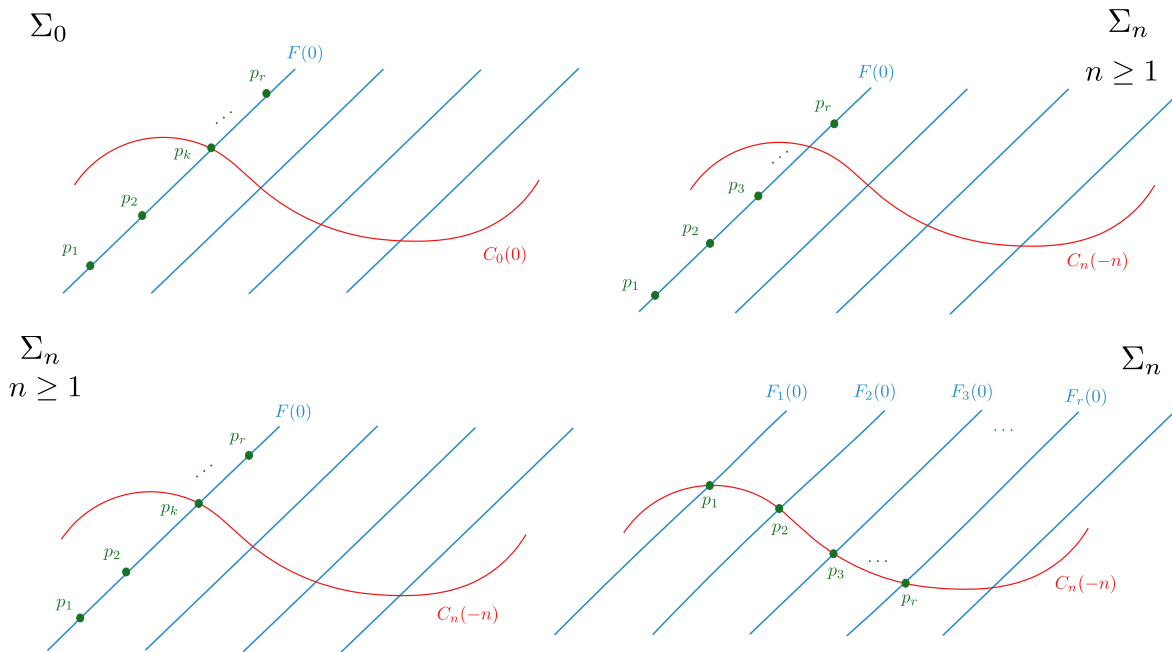


FIGURA 8.1. Configuraciones de puntos colineales en  $\Sigma_n$ .

Realizaremos algunos comentarios sobre la definición anterior respecto a las posibilidades de un conjunto de puntos colineales en  $\Sigma_n$ . En el caso que los puntos se encuentren sobre la curva  $C_n$ , no tenemos mucho que decir en cuanto a posibilidades se refiere. Ahora, hablemos del caso en que los puntos se encuentran sobre una fibra. En el caso en que los puntos se encuentren en  $\Sigma_0$ , puesto que siempre es posible encontrar una curva linealmente equivalente a  $C_0$  que pase por un punto dado, siempre podemos suponer que uno de nuestros puntos se encuentra sobre la curva  $C_0$ . Para el caso en que los puntos se encuentren sobre  $\Sigma_n$  cuando  $n \geq 1$ , puede suceder que ningún punto se encuentre sobre  $C_n$  o bien que algún punto se encuentre sobre  $C_n$ . La Figura 8.1 muestra los posibles casos que acabamos de discutir.

Ahora, denotaremos por  $Y_n^r$  a la explosión de la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  en  $r$  puntos  $p_1, p_2, \dots, p_r$  que son colineales, donde  $n$  es un número entero no negativo y  $r$  es un número entero positivo. Puesto que en este caso estamos trabajando con un mismo tipo de puntos, por simplicidad denotaremos a la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  por  $E_i$  y a su clase por  $\mathcal{E}_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . El grupo de Néron-Severi de  $Y_n^r$  está generado por las clases

$$\mathcal{C}_n, \mathcal{F}, -\mathcal{E}_1, \dots, -\mathcal{E}_r,$$

además, notemos que por construcción  $Y_n^r$  es una superficie racional cuyo número de Picard  $\rho(Y_n^r)$  es igual a  $(r+2)$ . Una de las propiedades que tienen este tipo de superficies es que son anticanónicas. En efecto, el próximo resultado confirma este hecho.

**Proposición 8.2.** *Con la notación anterior, la superficie  $Y_n^r$  es anticanónica. Además, podemos escribir a la clase anticanónica  $-\mathcal{K}_{Y_n^r}$  utilizando  $(r+2)$  clases de curvas racionales lisas de la siguiente forma:*

1. Si todos los puntos están contenidos en una fibra de  $\Sigma_0$ , entonces

$$-\mathcal{K}_{Y_0^r} = 2(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_1) + 2(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + 3\mathcal{E}_1 + \sum_{j=2}^r \mathcal{E}_j.$$

2. Si todos los puntos están contenidos en una fibra de  $\Sigma_n$ , donde  $n \geq 1$ , y ninguno de ellos se encuentra contenido en la curva negativa  $C_n$ , entonces

$$-\mathcal{K}_{Y_n^r} = 2\mathcal{C}_n + (n+2)(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + (n+1) \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j.$$

3. Si todos los puntos están contenidos en una fibra de  $\Sigma_n$ , donde  $n \geq 1$ , y el punto  $p_k$  está contenido en la curva negativa  $C_n$ , entonces

$$-\mathcal{K}_{Y_n^r} = 2(C_n - \mathcal{E}_k) + (n+2)(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + (n+3)\mathcal{E}_k + (n+1) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r \mathcal{E}_j.$$

4. Si todos los puntos están contenidos en la curva  $C_n$ , entonces

$$-\mathcal{K}_{Y_n^r} = 2(C_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + (n+2)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + (n+3)\mathcal{E}_1 + \sum_{j=2}^r \mathcal{E}_j.$$

DEMOSTRACIÓN. En cada caso, los elementos que aparecen del lado derecho de las igualdades son las clases de las transformadas estrictas  $\widetilde{C}_n$  y  $\widetilde{F}$  de la curva  $C_n$  y de una fibra adecuada respectivamente (para los Casos 1, 2 y 3 la fibra que contiene a todos los puntos, y para el Caso 4 la fibra que contiene al punto  $p_1$ ), y de las clases de las curvas excepcionales. Por tanto, cada una de las clases anteriores es efectiva. Luego, utilizando la Proposición 1.34 tenemos que para cada caso la descripción anterior es la clase anticanónica  $-\mathcal{K}_{Y_n^r}$ .  $\square$

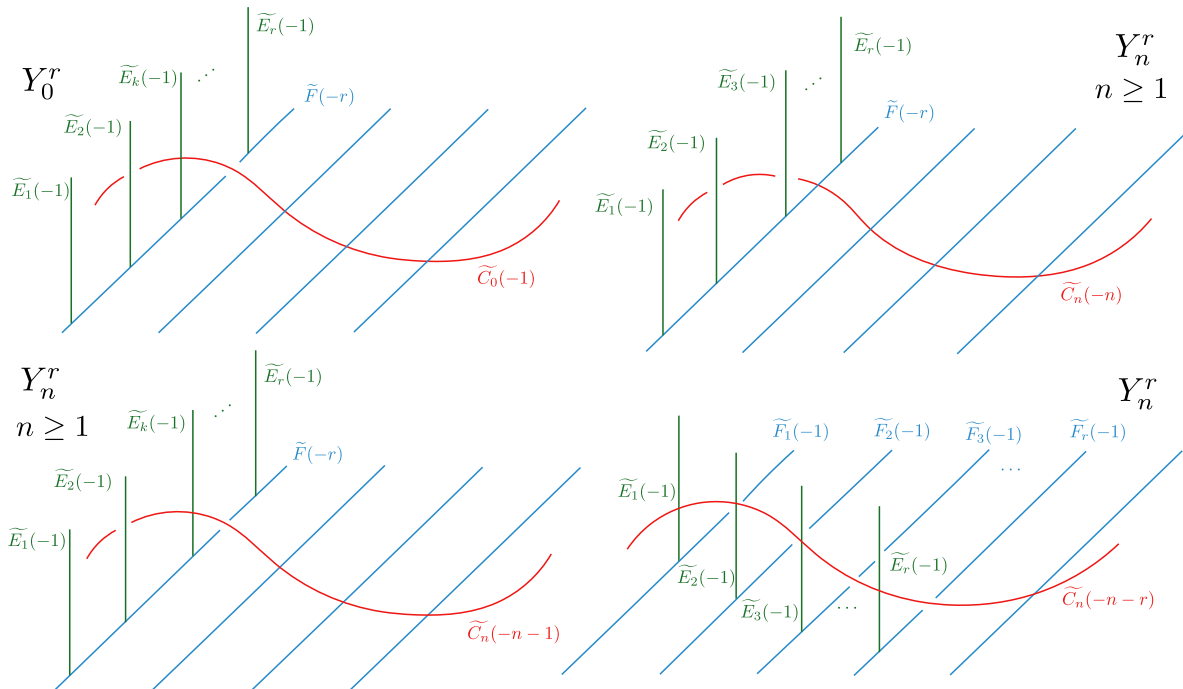


FIGURA 8.2. La superficie  $Y_n^r$ .

## 2. Finitud del Monoide Efectivo

A diferencia de las superficies estudiadas en los capítulos anteriores, lo que probaremos a continuación es que el monoide efectivo de  $Y_n^r$  es finitamente generado sin fijar alguna condición numérica, presentaremos su conjunto generador mínimo y una descomposición explícita para cada clase efectiva. Como podrá verse, las clases de las curvas negativas que aparecen de forma natural en la construcción de la superficie serán suficientes para generar todo el monoide  $\text{Eff}(Y_n^r)$ .

**Teorema 8.3.** *Con la notación anterior, el monoide efectivo  $\text{Eff}(Y_n^r)$  de  $Y_n^r$  es finitamente generado. Además, se tienen los siguientes casos:*

1. *Si todos los puntos están contenidos en una fibra de  $\Sigma_0$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(Y_0^r)$  consta de las siguientes  $(2r + 1)$  clases:*

- (a) *La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq r$ ,*
- (b) *La clase  $\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j$  de la transformada estricta de la fibra que contiene a todos los puntos, y*
- (c) *La clase  $\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de una sección que pasa por el punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq r$ .*

*Además, si  $\mathcal{D} = a\mathcal{C}_0 + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_r\mathcal{E}_r$  es una clase efectiva sobre  $Y_0^r$  donde  $a, b, c_1, \dots, c_r$  son números enteros y es diferente a las clases anteriores, entonces*

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{r-1} c_j(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_j) + (a - \sum_{j=1}^{r-1} c_j)(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_r) + b(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + b \sum_{j=1}^{r-1} \mathcal{E}_j + (a + b - \sum_{j=1}^r c_j)\mathcal{E}_r.$$

2. *Si todos los puntos están contenidos en una fibra de  $\Sigma_n$ , donde  $n \geq 1$ , y ninguno de ellos se encuentra contenido en la curva negativa  $C_n$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(Y_n^r)$  es conformado por las siguientes  $(r + 2)$  clases:*

- (a) *La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq r$ ,*
- (b) *La clase  $\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j$  de la transformada estricta de la fibra que contiene a todos los puntos, y*
- (c) *La clase  $\mathcal{C}_n$  de la transformada estricta de la curva negativa  $C_n$ .*

*Además, si  $\mathcal{D} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_r\mathcal{E}_r$  es una clase efectiva sobre  $Y_n^r$  donde  $a, b, c_1, \dots, c_r$  son números enteros y es diferente a las clases anteriores, entonces*

$$\mathcal{D} = a\mathcal{C}_n + b(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{j=1}^r (b - c_j)\mathcal{E}_j.$$

3. Si todos los puntos están contenidos en una fibra de  $\Sigma_n$ , donde  $n \geq 1$ , y el punto  $p_k$  está contenido en la curva negativa  $C_n$  para algún  $k \in \{1, \dots, r\}$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(Y_n^r)$  está formado por las siguientes  $(r + 2)$  clases:

- (a) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq r$ ,
- (b) La clase  $\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j$  de la transformada estricta de la fibra que contiene a todos los puntos, y
- (c) La clase  $\mathcal{C}_n - \mathcal{E}_k$  de la transformada estricta de la curva negativa  $C_n$ .

Además, si  $\mathcal{D} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_r\mathcal{E}_r$  es una clase efectiva sobre  $Y_n^r$  donde  $a, b, c_1, \dots, c_r$  son números enteros y es diferente a las clases anteriores, entonces

$$\mathcal{D} = a(\mathcal{C}_n - \mathcal{E}_k) + b(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r (b - c_j)\mathcal{E}_j + (b + a - c_k)\mathcal{E}_k.$$

4. Si todos los puntos están contenidos en una curva  $C_n$  (única si  $n \geq 1$ ), entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(Y_n^r)$  se conforma por las  $(2r + 1)$  clases de la lista que se presenta a continuación:

- (a) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq r$ ,
- (b) La clase  $\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j$  de la transformada estricta de la curva  $C_n$ ,
- (c) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por el punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq r$ .

Además, si  $\mathcal{D} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_r\mathcal{E}_r$  es una clase efectiva sobre  $Y_n^r$  donde  $a, b, c_1, \dots, c_r$  son números enteros y es diferente a las clases anteriores, entonces

$$\mathcal{D} = a(\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{j=1}^{r-1} c_j(\mathcal{F} - \mathcal{E}_j) + (b - \sum_{j=1}^{r-1} c_j)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_r) + a \sum_{j=1}^{r-1} \mathcal{E}_j + (a + b - \sum_{j=1}^r c_j)\mathcal{E}_r.$$

DEMOSTRACIÓN. En todos los casos se tiene que el monoide generado por los respectivos elementos propuestos está contenido en el monoide efectivo de  $Y_n^r$  pues dichos elementos son clases de divisores primos. Ahora, consideremos una clase efectiva  $\mathcal{D}$  sobre  $Y_n^r$ . Existen números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_r$  tales que  $\mathcal{D} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_r\mathcal{E}_r$ . Además, supondremos que dicha clase es diferente a los elementos de la lista de generadores propuestos en cada caso y sin pérdida de generalidad que es irreducible.

**Caso 1.** [Los puntos están sobre una fibra de  $\Sigma_0$ ] Comencemos observando que los números enteros  $a - \sum_{j=1}^r c_j$ ,  $c_i$  y  $b - c_i$  son no negativos debido a que los números de intersección  $\mathcal{D} \cdot (\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j)$ ,  $\mathcal{D} \cdot \mathcal{E}_i$  y  $\mathcal{D} \cdot (\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_i)$  son mayores o iguales que cero para cualquier  $i = 1, \dots, r$ .

Por otro lado, tenemos que  $\mathcal{D}$  puede escribirse de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^{r-1} c_j(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_j) + (a - \sum_{j=1}^{r-1} c_j)(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_r) + b(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + b \sum_{j=1}^{r-1} \mathcal{E}_j + (a + b - \sum_{j=1}^r c_j)\mathcal{E}_r,$$

y además, tenemos que los coeficientes en la representación anterior son no negativos.

**Caso 2.** [Los puntos están sobre una fibra de  $\Sigma_n$  y ninguno de ellos está en  $C_n$ , donde  $n \geq 1$ ] En este caso podemos escribir a  $\mathcal{D}$  como

$$a\mathcal{C}_n + b(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{j=1}^r (b - c_j)\mathcal{E}_j,$$

y cada coeficiente es un número no negativo puesto que  $\mathcal{D} \cdot (\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) = a - \sum_{j=1}^r c_j$ ,  $\mathcal{D} \cdot \mathcal{C}_n = b - na$  y  $\mathcal{D} \cdot \mathcal{E}_i = c_i$  son no negativos para cualquier  $i = 1, \dots, r$ .

**Caso 3.** [Los puntos están sobre una fibra de  $\Sigma_n$  y el punto  $p_k$  está en  $C_n$ , donde  $n \geq 1$ ] Bajo las condiciones de este caso tenemos que los números de intersección  $\mathcal{D} \cdot (\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j)$ ,  $\mathcal{D} \cdot (\mathcal{C}_n - \mathcal{E}_k)$  y  $\mathcal{D} \cdot \mathcal{E}_i$  son no negativos lo cual implica que  $a - \sum_{j=1}^r c_j \geq 0$ , que  $b - na - c_k \geq 0$  y que  $c_i \geq 0$  para todo  $i = 1, \dots, r$ . Luego, podemos escribir a  $\mathcal{D}$  como

$$a(\mathcal{C}_n - \mathcal{E}_k) + b(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r (b - c_j)\mathcal{E}_j + (b + a - c_k)\mathcal{E}_k$$

donde se tiene que cada coeficiente en dicha descomposición es no negativo.

**Caso 4.** [Los puntos se encuentran sobre  $C_n$ ] Por último, tenemos que en este caso la siguiente descomposición de  $\mathcal{D}$  tiene coeficientes que son no negativos:

$$a(\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{j=1}^{r-1} c_j(\mathcal{F} - \mathcal{E}_j) + (b - \sum_{j=1}^{r-1} c_j)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_r) + a \sum_{j=1}^{r-1} \mathcal{E}_j + (a + b - \sum_{j=1}^r c_j)\mathcal{E}_r.$$

En efecto, tenemos que los números enteros  $\mathcal{D} \cdot (\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) = b - na - \sum_{j=1}^r c_j$ ,  $\mathcal{D} \cdot \mathcal{E}_i = c_i$  y  $\mathcal{D} \cdot (\mathcal{F} - \mathcal{E}_i) = a - c_i$  son no negativos para cualquier  $i = 1, \dots, r$ .  $\square$

### 3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias

Utilizando la descomposición de la clase anticanónica en cada uno de los posibles casos y sin fijar condición numérica alguna, a continuación probaremos que estas superficies tienen la propiedad ortogonal anticanónica. Como consecuencia a este hecho tendremos que dichas superficies son de Harbourne-Hirschowitz y que sus anillos de Cox son finitamente generados.

Además, probaremos que el sistema lineal completo asociado a cada divisor nef no nulo es libre de puntos base.

**Teorema 8.4.** *Con la notación anterior,  $Y_n^r$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica. Además, si  $H$  es un divisor nef no nulo sobre  $Y_n^r$ , entonces el sistema lineal completo  $|H|$  es libre de puntos base.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $H$  un divisor nef sobre  $Y_n^r$ . Denotaremos por  $\mathcal{H}$  a la clase de  $H$  en  $\text{NS}(Y_n^r)$  y consideraremos números enteros no negativos  $a, b, c_1, \dots, c_r$  tales que  $\mathcal{H} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - \sum_{i=1}^r c_i\mathcal{E}_i$ . Para cada posible caso de puntos colineales, mostraremos en primer lugar que si  $H$  es ortogonal a un divisor anticanónico  $-K_{Y_n^r}$ , entonces  $H$  es el divisor cero. En segundo lugar, mostraremos que si  $H$  es no nulo, entonces necesariamente  $H$  interseca a un divisor anticanónico al menos en dos ocasiones. Para ello, consideraremos la descomposición de la clase anticanónica encontrada en la Proposición 8.2 para cada uno de los posibles casos de puntos colineales.

**Caso 1.** [Los puntos están sobre una fibra de  $\Sigma_0$ ] Asumamos que  $-K_{Y_0^r} \cdot \mathcal{H} = 0$ . Usando la descomposición de la clase anticanónica, de la ecuación  $-\mathcal{K}_{Y_0^r} \cdot \mathcal{H} = 0$  se siguen las igualdades  $(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_1) \cdot \mathcal{H} = 0$ ,  $(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) \cdot \mathcal{H} = 0$  y  $\mathcal{E}_i \cdot \mathcal{H} = 0$  para cualquier  $i \in \{1, \dots, r\}$ , esto implica respectivamente que  $b - c_1 = 0$ , que  $a - \sum_{j=1}^r c_j = 0$  y que  $c_i = 0$  para cualquier  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Por lo tanto, tenemos que cada coeficiente de  $\mathcal{H}$  es igual a cero y con ello que  $\mathcal{H}$  es la clase nula. Así,  $H = 0$ .

Ahora, supongamos que  $H$  es diferente del divisor cero. Consecuentemente, tenemos que el número de intersección de  $-\mathcal{K}_{Y_0^r}$  y  $\mathcal{H}$  es al menos uno. Probaremos que  $-\mathcal{K}_{Y_0^r} \cdot \mathcal{H} = 1$  no es posible. Supongamos que  $-\mathcal{K}_{Y_0^r} \cdot \mathcal{H} = 1$ , luego, el número de intersección de  $\mathcal{H}$  con sólo una de las componentes de  $-\mathcal{K}_{Y_0^r}$  sería igual a uno mientras que los demás números de intersección deberían ser iguales a cero. Debido a los coeficientes que aparecen en las componentes de  $-\mathcal{K}_{Y_0^r}$ , la única posibilidad es que existiese  $i \in \{2, \dots, r\}$  de modo que  $\mathcal{E}_i \cdot \mathcal{H} = 1$ ,  $\mathcal{E}_j \cdot \mathcal{H} = 0$  para  $j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i\}$ ,  $(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_1) \cdot \mathcal{H} = 0$  y  $(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) \cdot \mathcal{H} = 0$ . Esto implicaría que  $\mathcal{H} = \mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_i$ , pero esta no es una clase nef. Por lo tanto, concluimos que  $-\mathcal{K}_{Y_0^r} \cdot \mathcal{H} \geq 2$ .

**Caso 2.** [Los puntos están sobre una fibra de  $\Sigma_n$  y ninguno de ellos está en  $C_n$ , para  $n \geq 1$ ] Supongamos que  $H$  es ortogonal a  $-K_{Y_n^r}$ . Esto implica que el número de intersección de  $\mathcal{H}$  con cada componente de  $-\mathcal{K}_{Y_n^r}$  es igual a cero, es decir, tenemos que  $\mathcal{C}_n \cdot \mathcal{H} = 0$ , que  $(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) \cdot \mathcal{H} = 0$  y que  $\mathcal{E}_i \cdot \mathcal{H} = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, r\}$ . De esta forma, tenemos respectivamente las igualdades  $b = na$ ,  $a - \sum_{j=1}^r c_j = 0$  y  $c_i = 0$  para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ , como consecuencia se tiene que  $\mathcal{H}$  es igual a la clase nula y esto conlleva a que  $H = 0$ .



En el caso que  $H \neq 0$  tenemos que  $-\mathcal{K}_{Y_n^r} \cdot \mathcal{H} \geq 1$ . Ahora bien, supongamos que se cumple la igualdad  $-\mathcal{K}_{Y_n^r} \cdot \mathcal{H} = 1$ . Dicha hipótesis implicaría que el número de intersección de  $\mathcal{H}$  con alguna de las componentes de  $-\mathcal{K}_{Y_n^r}$  es igual a uno mientras que los demás números de intersección serían iguales a cero, pero esto no podría suceder debido a los coeficientes en la descomposición de la clase anticanónica. Así, se tiene que  $-\mathcal{K}_{Y_n^r} \cdot \mathcal{H} \geq 2$ .

**Caso 3.** [Los puntos están sobre una fibra de  $\Sigma_n$  y el punto  $p_k$  está en  $C_n$ , para  $n \geq 1$ ] Comencemos asumiendo que  $H$  es ortogonal a  $-\mathcal{K}_{Y_n^r}$ . Utilizando la descomposición de la clase anticanónica para este caso, la hipótesis de que  $\mathcal{H}$  y  $-\mathcal{K}_{Y_n^r}$  son ortogonales implica las igualdades  $(\mathcal{C}_n - \mathcal{E}_k) \cdot \mathcal{H} = 0$ ,  $(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) \cdot \mathcal{H} = 0$  y  $\mathcal{E}_i \cdot \mathcal{H} = 0$  para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ , en otras palabras, tenemos que  $b = na + c_k$ ,  $a - \sum_{j=1}^r c_j = 0$  y  $c_i = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, r\}$ . De esta forma, se tiene que  $\mathcal{H}$  es nula y consecuentemente que  $H$  es igual al divisor cero.

Enseguida, asumiremos que  $H$  no es el divisor cero y mostraremos que necesariamente  $-\mathcal{K}_{Y_n^r} \cdot \mathcal{H} \geq 2$ . Si  $-\mathcal{K}_{Y_n^r} \cdot \mathcal{H} = 1$ , entonces el número de intersección de  $\mathcal{H}$  con sólo una de las componentes de  $-\mathcal{K}_{Y_n^r}$  sería igual a uno mientras que el resto de los números de intersección tendrían que ser iguales a cero, sin embargo, de forma similar al caso anterior, este hecho no podría suceder debido a los coeficientes que aparecen en la descomposición de la clase anticanónica. De este modo,  $-\mathcal{K}_{Y_n^r} \cdot \mathcal{H} \geq 2$ .

**Caso 4.** [Los puntos se encuentran sobre  $C_n$ ] Supongamos que igualdad  $-\mathcal{K}_{Y_n^r} \cdot H = 0$  es verdadera. De esto se sigue que el número de intersección de  $\mathcal{H}$  con cada componente de  $-\mathcal{K}_{Y_n^r}$  es igual a cero, es decir que tenemos las igualdades  $(\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) \cdot \mathcal{H} = 0$ ,  $(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) \cdot \mathcal{H} = 0$  y  $\mathcal{E}_i \cdot \mathcal{H} = 0$  para todo  $i = 1, \dots, r$ , y esto a su vez implica respectivamente que  $b = na + \sum_{j=1}^r c_j$ , que  $a - c_1 = 0$  y que  $c_i = 0$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . Por consiguiente,  $\mathcal{H}$  es la clase nula y con ello  $H = 0$ .

Ahora bien, si  $H \neq 0$ , entonces se sigue que  $-\mathcal{K}_{Y_n^r} \cdot \mathcal{H} \geq 1$ . Aún más, tenemos que la igualdad  $-\mathcal{K}_{Y_n^r} \cdot \mathcal{H} = 1$  no puede satisfacerse. En efecto, la condición  $-\mathcal{K}_{Y_n^r} \cdot \mathcal{H} = 1$  implicaría que el número de intersección  $\mathcal{H}$  con sólo una de las componentes de  $-\mathcal{K}_{Y_n^r}$  debería ser igual a uno y que los números de intersección con las otras componentes deberían ser iguales a cero. La única posibilidad que podría ocurrir es que existiese  $i \in \{2, \dots, r\}$  de modo que  $\mathcal{E}_i \cdot \mathcal{H} = 1$ ,  $\mathcal{E}_j \cdot \mathcal{H} = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i\}$ ,  $(\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) \cdot \mathcal{H} = 0$  y  $(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) \cdot \mathcal{H} = 0$ . De esta forma, se tendría que  $\mathcal{H} = \mathcal{F} - \mathcal{E}_i$ , pero esta no sería una clase nef. Consecuentemente, tenemos que  $-\mathcal{K}_{Y_n^r} \cdot \mathcal{H} \geq 2$ .

Por lo tanto, en cada uno de los posibles casos tenemos que  $Y_n^r$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica y además que el número de intersección de cada divisor nef no nulo

con un divisor anticanónico es al menos dos. Finalmente, por el Teorema III.1 (a) de [Har97] concluimos que el sistema lineal completo asociado a cada divisor nef no nulo es libre de puntos base.  $\square$

**Corolario 8.5.** *Con la notación anterior, la superficie  $Y_n^r$  es de Harbourne-Hirschowitz.*

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 8.2 nos dice que  $Y_n^r$  es una superficie anticanónica mientras que el Teorema 8.4 que satisface la propiedad ortogonal anticanónica. Así, por el Teorema 3.11 se concluye el resultado.  $\square$

**Corolario 8.6.** *Con la notación anterior, el anillo de Cox de  $Y_n^r$  es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 8.3 tenemos que el monoide efectivo de  $Y_n^r$  es finitamente generado y el Teorema 8.4 asegura que  $Y_n^r$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica. El resultado se sigue del Teorema 3.20.  $\square$

**Observación 8.7.** Ottem muestra en [Ott11] que el anillo de Cox de la superficie obtenida como la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en puntos colineales es finitamente generado. El resultado anterior recupera este resultado y lo extiende para las superficies que se obtienen como la explosión de una superficie de Hirzebruch en puntos colineales.

#### 4. Ejemplos de Clases Efectivas

En esta sección presentaremos algunos ejemplos de una descomposición de clases efectivas de la superficie obtenida como la explosión de una superficie de Hirzebruch en puntos colineales utilizando la descomposición encontrada en el Teorema 8.3. Es importante observar que la efectividad de las siguientes clases no es una aplicación directa del teorema de Riemann-Roch. Cabe aclarar que por simplicidad, si  $\mathcal{D}$  es una clase efectiva sobre  $Y_n^r$ , entonces  $h^i(Y_n^r, \mathcal{D})$  denotará la dimensión del  $i$ -ésimo grupo de cohomología de las secciones globales correspondientes a la gavilla invertible asociada a un divisor efectivo en la clase de  $\mathcal{D}$  para  $i = 1, 2, 3$ .

**Ejemplo 8.8.** Con la notación del Teorema 8.3, para el Caso 1, los siguientes elementos de  $\text{NS}(Y_0^r)$  son efectivos:

1. La clase  $\mathcal{D} = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}\mathcal{C}_0 - \sum_{j=1}^r j^2\mathcal{E}_j$ . Usando la descomposición del Caso 1 del Teorema 8.3 podemos escribir

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{r-1} j^2(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_j) + r^2(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_r),$$

y de esto tenemos que  $\mathcal{D}$  es una clase efectiva. Ahora bien, del cálculo obtenido de utilizar el teorema de Riemann-Roch no podemos determinar si ésta es una clase efectiva. En efecto, tenemos que  $h^2(Y_0^r, \mathcal{D}) = 0$  pues  $\mathcal{F}$  es nef y  $\mathcal{F} \cdot (\mathcal{K}_{Y_0^r} - \mathcal{D}) < 0$ . Así, tenemos que

$$h^0(Y_0^r, \mathcal{D}) - h^1(Y_0^r, \mathcal{D}) = 1 + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^r (j^2 - j^4) \right)$$

y el número que aparece del lado derecho es negativo si  $r \geq 2$ .

2. La clase  $\mathcal{D} = (r^2 - 1)\mathcal{C}_0 + \mathcal{F} - \sum_{j=1}^r r\mathcal{E}_j$ . Utilizando la descomposición del Caso 1 del Teorema 8.3, tenemos que  $\mathcal{D}$  es una clase efectiva pues

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{r-1} r(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_j) + (r-1)(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_r) + (\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{j=1}^{r-1} \mathcal{E}_j.$$

Ahora, intentemos utilizar el teorema de Riemann-Roch para deducir la efectividad de la clase  $\mathcal{D}$ . Observemos que  $h^2(Y_0^r, \mathcal{D}) = 0$  pues  $\mathcal{F}$  es nef y  $\mathcal{F} \cdot (\mathcal{K}_{Y_0^r} - \mathcal{D}) < 0$ . Se sigue que

$$h^0(Y_0^r, \mathcal{D}) - h^1(Y_0^r, \mathcal{D}) = 1 + \frac{1}{2}(3r^2 - r^3 - 2)$$

y la expresión del lado derecho de la ecuación anterior es negativa si  $r \geq 4$ .

3. La clase  $\mathcal{D} = \frac{r(r+1)}{2}\mathcal{C}_0 + \mathcal{F} - \sum_{j=1}^r j\mathcal{E}_j$ . Por el Caso 1 del Teorema 8.3, puesto que

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{r-1} j(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_j) + r(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_r) + (\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j,$$

se sigue que  $\mathcal{D}$  es una clase efectiva. Intentemos llegar a esta conclusión usando el teorema de Riemann-Roch. Comencemos notando que  $h^2(Y_0^r, \mathcal{D}) = 0$  pues  $\mathcal{F}$  es nef y  $\mathcal{F} \cdot (\mathcal{K}_{Y_0^r} - \mathcal{D}) < 0$ . De esta forma, tenemos que

$$h^0(Y_0^r, \mathcal{D}) - h^1(Y_0^r, \mathcal{D}) = 1 + \frac{1}{2} \left( 2r(r+1) + 2 - \sum_{j=1}^r (j + j^2) \right),$$

y puesto que el número de la derecha es negativo si  $r \geq 5$ , no podemos concluir la efectividad de  $\mathcal{D}$ .

**Ejemplo 8.9.** Con la notación del Teorema 8.3, para los Casos 2 y 3, los siguientes elementos de  $\text{NS}(Y_n^r)$  son efectivos:

1. La clase  $\mathcal{D} = \mathcal{C}_n + \mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j$ . Usando en Teorema 8.3, para el Caso 2 tenemos que

$$\mathcal{D} = \mathcal{C}_n + (\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j),$$

y para el Caso 3 tenemos que

$$\mathcal{D} = (\mathcal{C}_n - \mathcal{E}_k) + (\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \mathcal{E}_k.$$

De este modo, en ambos casos  $\mathcal{D}$  es efectiva. Sin embargo, al intentar conseguir información de la efectividad usando el teorema de Riemann-Roch no podremos concluir algo. Sabemos que  $h^2(Y_n^r, \mathcal{D}) = 0$  pues  $\mathcal{F}$  es nef y  $\mathcal{F} \cdot (\mathcal{K}_{Y_n^r} - \mathcal{D}) < 0$ . Consecuentemente,

$$h^0(Y_n^r, \mathcal{D}) - h^1(Y_n^r, \mathcal{D}) = 4 - n - r,$$

y el lado derecho de la ecuación es negativo cuando  $n + r \geq 5$ . Por ejemplo, si  $r \geq 5$ , entonces  $4 - n - r$  es un entero negativo para cualquier  $n$ .

2. La clase  $\mathcal{D} = \mathcal{C}_n + r\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r j\mathcal{E}_j$ . En ambos casos,  $\mathcal{D}$  es una clase efectiva: en efecto, por el Teorema 8.3, para el Caso 2

$$\mathcal{D} = \mathcal{C}_n + r(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{j=1}^r (r - j)\mathcal{E}_j,$$

y para el Caso 3

$$\mathcal{D} = (\mathcal{C}_n - \mathcal{E}_k) + r(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r (r - j)\mathcal{E}_j + (r + 1 - k)\mathcal{E}_k.$$

Sin embargo, el teorema de Riemann-Roch no puede confirmarnos que dicha clase sea efectiva. Tenemos que  $h^2(Y_n^r, \mathcal{D}) = 0$  ya que  $\mathcal{F}$  es nef y  $\mathcal{F} \cdot (\mathcal{K}_{Y_n^r} - \mathcal{D}) < 0$ . Luego, como

$$h^0(Y_n^r, \mathcal{D}) - h^1(Y_n^r, \mathcal{D}) = 1 + \frac{1}{2} \left( (r + 1) \left( 2 - \frac{r}{2} \right) - n \right)$$

y el lado derecho de la ecuación es negativo si  $r \geq 4$ , no podemos concluir la efectividad del elemento  $\mathcal{D}$ .

3. La clase  $\mathcal{D} = \mathcal{C}_n + r^2\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r j^2\mathcal{E}_j$ . La efectividad de esta clase se sigue del Teorema 8.3. En efecto, para el Caso 2 se tiene que

$$\mathcal{D} = \mathcal{C}_n + r^2(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{j=1}^r (r^2 - j^2)\mathcal{E}_j,$$

y para el Caso 3 se tiene que

$$\mathcal{D} = (\mathcal{C}_n - \mathcal{E}_k) + r^2(\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r (r^2 - j^2)\mathcal{E}_j + (r^2 + 1 - k^2)\mathcal{E}_k.$$

Ahora, intentemos utilizar el teorema de Riemann-Roch para confirmar la efectividad de  $\mathcal{D}$ . Del hecho que  $\mathcal{F}$  es nef y que  $\mathcal{F} \cdot (\mathcal{K}_{Y_n^r} - \mathcal{D}) < 0$  se sigue que  $h^2(Y_n^r, \mathcal{D}) = 0$ . Así,

$$h^0(Y_n^r, \mathcal{D}) - h^1(Y_n^r, \mathcal{D}) = 2r^2 + 2 - n - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r (j^2 + j^4)$$

y tenemos que el lado derecho de la ecuación es negativo en general, por ejemplo, si  $r \geq 2$ .

**Ejemplo 8.10.** Con la notación del Teorema 8.3, para el Caso 4, los siguientes elementos de  $\text{NS}(Y_n^r)$  son efectivos:

1. La clase  $\mathcal{D} = \mathcal{C}_n + (r - 1)\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j$ . Usando la descomposición obtenida en el Teorema 8.3 para el Caso 4 tenemos que

$$\mathcal{D} = (\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{j=1}^{r-1} (\mathcal{F} - \mathcal{E}_j) + \sum_{j=1}^{r-1} \mathcal{E}_j.$$

Por lo tanto,  $\mathcal{D}$  es efectiva. Ahora bien, observemos que el teorema de Riemann-Roch no puede brindarnos dicha conclusión: se tiene que  $h^2(Y_n^r, \mathcal{D}) = 0$  pues  $\mathcal{F}$  es nef y  $\mathcal{F} \cdot (\mathcal{K}_{Y_n^r} - \mathcal{D}) < 0$ . De este modo, se sigue que

$$h^0(Y_n^r, \mathcal{D}) - h^1(Y_n^r, \mathcal{D}) = r - n$$

y el lado derecho de la ecuación es negativo si  $n \geq r + 1$ .

2. La clase  $\mathcal{D} = \mathcal{C}_n + (r^2 - 1)\mathcal{F} - \sum_{j=1}^r r\mathcal{E}_j$ . Puesto que

$$\mathcal{D} = (\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{j=1}^{r-1} r(\mathcal{F} - \mathcal{E}_j) + (r - 1)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_r) + \sum_{j=1}^{r-1} \mathcal{E}_j,$$

el Caso 4 del Teorema 8.3 implica que  $\mathcal{D}$  es una clase efectiva. Desafortunadamente, el teorema de Riemann-Roch no puede darnos tal conclusión: tenemos que  $h^2(Y_n^r, \mathcal{D}) = 0$  debido a que  $\mathcal{F}$  es nef y que  $\mathcal{F} \cdot (\mathcal{K}_{Y_n^r} - \mathcal{D}) < 0$ . De esta manera, sucede que

$$h^0(Y_n^r, \mathcal{D}) - h^1(Y_n^r, \mathcal{D}) = 1 + \frac{1}{2}(3r^2 - r^3 - 2n - 2)$$

y tenemos que el lado derecho de la ecuación es negativo en general, por ejemplo, cuando  $r \geq 4$ .

3. La clase  $\mathcal{D} = \mathcal{C}_n + 3r\mathcal{F} - \sum_{j=1}^{r-1} \mathcal{E}_j - r\mathcal{E}_r$ . Del Caso 4 del Teorema 8.3 se sigue que  $\mathcal{D}$  es una clase efectiva puesto que

$$\mathcal{D} = (\mathcal{C}_n - \sum_{j=1}^r \mathcal{E}_j) + \sum_{j=1}^{r-1} (\mathcal{F} - \mathcal{E}_j) + (2r + 1)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_r) + \sum_{j=1}^{r-1} \mathcal{E}_j + (r + 2)\mathcal{E}_r.$$

Sin embargo, el teorema de Riemann-Roch no puede llegar a la misma conclusión: como  $\mathcal{F}$  es nef y  $\mathcal{F} \cdot (\mathcal{K}_{Y_n} - \mathcal{D}) < 0$  se sigue que  $h^2(Y_n^r, \mathcal{D}) = 0$ . De esta forma, tenemos que

$$h^0(Y_n^r, \mathcal{D}) - h^1(Y_n^r, \mathcal{D}) = 1 + \frac{1}{2}(9r + 4 - r^2 - 2n)$$

y en general, el lado derecho de la ecuación es un número negativo, por ejemplo, cuando  $r \geq 10$ .

## CAPÍTULO 9

# EXPLOSIÓN DE $\Sigma_0$ EN UNA CADENA

Hasta ahora, todas las superficies que hemos construido y estudiado en los capítulos anteriores han provenido de explotar puntos ordinarios en una superficie de Hirzebruch. En este capítulo, la familia de superficies que presentaremos provendrá de explotar la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_0$  en puntos infinitamente cercanos, concretamente, en una *cadena* en la dirección de una curva  $C_0$ . La primera sección de encargará de recordar las nociones de constelación y de cadena que serán utilizadas para la construcción de nuestras superficies en este capítulo y en el próximo. La segunda sección de encargará de la construcción de nuestras superficies que son anticanónicas y que pueden tener números de Picard muy grandes. En la tercera sección mostraremos la finitud del monoide efectivo (ver Teorema 9.2) mientras que en la cuarta sección que tales superficies satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teorema 9.4). Como consecuencias de los hechos anteriores, los sistemas lineales completos asociados a los divisores nef no nulos serán libres de puntos base (ver Teorema 9.4) y tales superficies tendrán anillos de Cox finitamente generados (ver Corolario 9.6). Cabe mencionar que no será utilizada condición numérica alguna para probar las propiedades anteriores, que será presentado el conjunto generador mínimo para el monoide efectivo de tales superficies y además una descomposición para cada clase efectiva. En la quinta y última sección presentaremos algunos ejemplos de una descomposición de clases efectivas en términos del conjunto generador mínimo que hemos encontrado y mostraremos que la efectividad de tales clases no puede obtenerse de aplicar el teorema de Riemann-Roch (ver Ejemplo 9.8). Los resultados presentados en este capítulo se basan principalmente en el trabajo [DFFLU16].

## 1. Constelaciones y Cadenas

En este breve apartado revisaremos los conceptos de *constelación* y *cadena* que serán utilizados en la próxima sección y en la Sección 1 del Capítulo 10 para la construcción de superficies racionales anticanónicas con números de Picard que pueden ser muy grandes, cuyos monoides efectivos son finitamente generados y que además satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica.

Consideremos una superficie proyectiva lisa  $S$  definida sobre un campo algebraicamente cerrado y fijemos un punto  $p$  de  $S$ . Denotaremos  $S = S_1$  y  $\mathfrak{c}_1 = \{p\}$ . A partir de  $p$  realizaremos la siguiente construcción: fijemos un número entero positivo  $r$ . Consideremos la superficie  $S_2$  obtenida de la transformación monoidal de  $S_1$  en  $p_1$ , luego, definimos  $\mathfrak{c}_2$  como un conjunto finito no vacío de puntos de  $S_2$  de modo que cada punto está en el divisor excepcional correspondiente al punto  $p_1$ . A continuación, tomamos la superficie  $S_3$  obtenida de la iteración de las transformaciones monoidales de los elementos de  $\mathfrak{c}_2$ . Definimos el conjunto  $\mathfrak{c}_3$  como un subconjunto finito no vacío de puntos de  $S_3$  de modo que cada uno de ellos se encuentre en alguno de los divisores excepcionales generados por los puntos de  $\mathfrak{c}_2$ . Continuando de manera inductiva, para cada  $i = 2, \dots, r$  tenemos que  $\mathfrak{c}_i$  es un subconjunto finito de puntos de la superficie  $S_i$  de modo que cada punto de dicho conjunto se encuentra en el lugar excepcional obtenido de considerar de manera iterada las transformaciones monoidales en los puntos de  $\mathfrak{c}_{i-1}$ .

Una **constelación  $\mathfrak{c}$  con origen  $p$**  es  $\mathfrak{c} = \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{c}_i$ , donde  $\mathfrak{c}_1 = \{p\}$  y  $\mathfrak{c}_i$  está definido de la manera anterior para cada  $i = 2, \dots, r$ . Ahora bien, en el caso en que para cada  $i = 1, \dots, r$  sucede que  $\mathfrak{c}_i$  consiste de un único elemento,  $\mathfrak{c}$  es una **cadena**. Algunos ejemplos de superficies construidas a partir de constelaciones pueden consultarse en los trabajos [Lah10] y [Cer12].

## 2. Construcción

El siguiente tipo de superficies que vamos a construir se obtendrá al considerar la explosión de la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_0$  una cadena en dirección de una curva  $C_0$ .

Sea  $r$  un número entero positivo. Comencemos fijando un punto  $p = p_1$  que se encuentra en  $\Sigma_0$  y tomemos la explosión de dicha superficie en tal punto. Consideramos una sección  $C_0$  que pase por  $p_1$ . Ahora, vamos a considerar el punto de intersección de la transformada estricta de  $C_0$  con la curva excepcional  $E_1$  y lo llamaremos  $p_2$ . Luego, tomamos la explosión de la superficie en el punto  $p_2$ , y el nuevo punto a considerar para explotar que denotaremos por  $p_3$  será el punto de intersección entre la transformada estricta de  $\tilde{C}_0$  con la curva excepcional



$E_2$ . Continuaremos de esta manera hasta haber explotado  $r$  puntos. De este modo, la cadena  $\mathbf{c} = \bigcup_{i=1}^r \mathbf{c}_i$  está definida de modo que  $\mathbf{c}_i = \{p_i\}$  para cada  $i = 1, \dots, r$  donde cada uno de los puntos está definido de la manera anterior.

Así, la superficie  $X_0^r$  será la superficie obtenida de la explosión de  $\Sigma_0$  en la cadena  $\mathbf{c}$  definida anteriormente. Análogamente a la sección anterior, puesto que únicamente estamos trabajando con una clase de puntos y por simplicidad, denotaremos por  $E_i$  al divisor excepcional correspondiente al punto  $p_i$  y por  $\mathcal{E}_i$  a la clase de tal divisor para cada  $i = 1, \dots, r$ . Además, observemos que el grupo de Néron-Severi  $\text{NS}(X_0^r)$  está generado por las clases

$$\mathcal{C}_0, \mathcal{F}, -\mathcal{E}_1, \dots, -\mathcal{E}_r,$$

que  $X_0^r$  es racional y que su número de Picard  $\rho(X_0^r)$  es igual a  $(r + 2)$ . Aún más, tenemos que la superficie  $X_0^r$  es anticanónica.

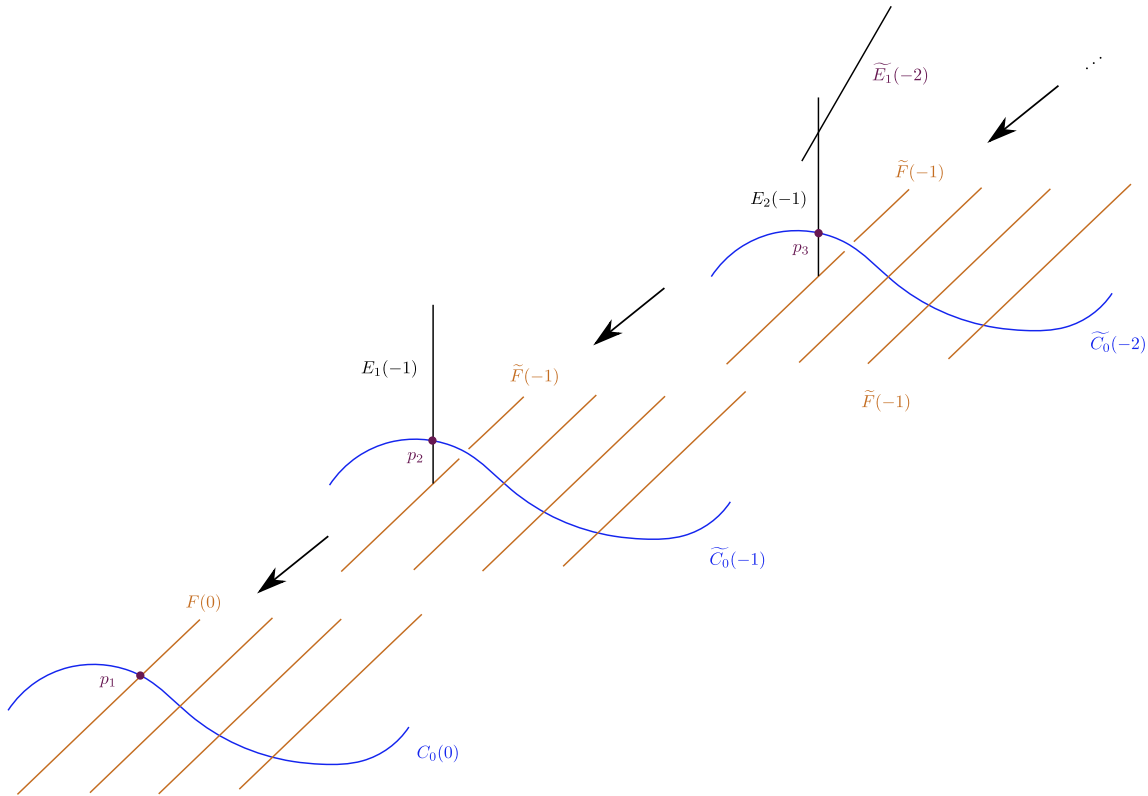


FIGURA 9.1. Construcción de la superficie  $X_0^r$ .

**Proposición 9.1.** *Con la notación anterior, la clase de un divisor anticanónico de  $X_0^r$  puede escribirse utilizando  $(r + 2)$  clases de curvas lisas racionales. Consecuentemente,  $X_0^r$  es una superficie racional anticanónica.*

DEMOSTRACIÓN. La clase de la transformada estricta  $\widetilde{C}_0$  de  $C_0$  es igual a  $\mathcal{C}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i$ , la clase de la transformada estricta de la fibra que contiene al punto  $p_1$  es  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_1$ , para cada  $i = 1, \dots, r-1$  la clase de la transformada estricta  $\widetilde{E}_i$  del divisor excepcional  $E_i$  es  $\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+1}$ , y la clase del divisor excepcional  $E_r$  es  $\mathcal{E}_r$ . Puesto que cada una de las clases anteriores es efectiva, por la Proposición 1.34 concluimos el resultado gracias a la igualdad

$$-\mathcal{K}_{X_0^r} = 2(\mathcal{C}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i) + 2(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + \sum_{i=1}^{r-1} (i+2)(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+1}) + (r+2)\mathcal{E}_r. \quad \square$$

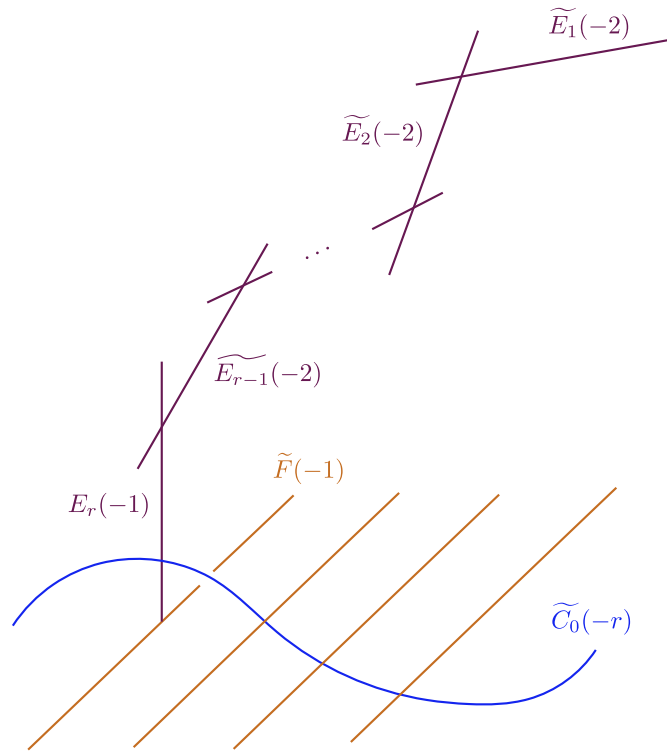


FIGURA 9.2. La superficie  $X_0^r$ .

### 3. Finitud del Monoide Efectivo

Lo que estudiaremos a continuación será la finitud del monoide efectivo de  $X_0^r$  y de forma similar a lo hecho en el capítulo anterior, el siguiente resultado muestra el conjunto generador mínimo para  $\text{Eff}(X_0^r)$  y una descomposición para cada clase efectiva. Observemos que aquí no se requerirá de alguna condición numérica y que las curvas negativas que aparecen de forma natural en la construcción de  $X_0^r$  serán suficientes para generar dicho monoide.

**Teorema 9.2.** *Con la notación anterior, el monoide efectivo de  $X_0^r$  es finitamente generado. Aún más, el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(X_0^r)$  está formado por las  $(r + 2)$  clases que se presentan a continuación:*

1. La clase  $\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_1 - \cdots - \mathcal{E}_r$  de la transformada estricta de una sección que pasa por todos los puntos,
2. La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_1$  de la fibra que pasa por el punto  $p_1$ ,
3. La clase  $\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+1}$  de la transformada estricta de curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq r - 1$ , y
4. La clase  $\mathcal{E}_r$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_r$ .

Además, si  $\mathcal{D} = a\mathcal{C}_0 + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \cdots - c_r\mathcal{E}_r$  es una clase efectiva sobre  $X_0^r$  para ciertos enteros  $a, b, c_1, \dots, c_r$  y es diferente de las clases anteriores, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & a(\mathcal{C}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i) + b(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + (a + b - c_1)(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + (2a + b - c_1 - c_2)(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) \\ & + \cdots + ((r - 1)a + b - \sum_{i=1}^{r-1} c_i)(\mathcal{E}_{r-1} - \mathcal{E}_r) + (ra + b - \sum_{i=1}^r c_i)\mathcal{E}_r. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que el monoide generado por las clases de la lista anterior está contenido en  $\text{Eff}(X_0^r)$  pues cada una de ellas es la clase de un divisor primo.

Por otro lado, consideremos un elemento efectivo  $\mathcal{D}$  de  $\text{NS}(X_0^r)$ . Existen números enteros  $a, b, c_1, c_2, \dots, c_r$  de modo que  $\mathcal{D} = a\mathcal{C}_0 + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \cdots - c_r\mathcal{E}_r$ . Sin pérdida de generalidad asumiremos que  $\mathcal{D}$  es irreducible y que es diferente de las clases de la lista propuesta. De este modo, tenemos que los números de intersección  $\mathcal{D}\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{D}\mathcal{C}_0$  y  $\mathcal{D}(\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_1 - \cdots - \mathcal{E}_r)$  son no negativos, así, tenemos que se satisfacen respectivamente las siguientes desigualdades:

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad \text{y} \quad b - c_1 - \cdots - c_r \geq 0.$$

Finalmente, observemos que podemos escribir a  $\mathcal{D}$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & a(\mathcal{C}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i) + b(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + (a + b - c_1)(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + (2a + b - c_1 - c_2)(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) \\ & + \cdots + ((r - 1)a + b - \sum_{i=1}^{r-1} c_i)(\mathcal{E}_{r-1} - \mathcal{E}_r) + (ra + b - \sum_{i=1}^r c_i)\mathcal{E}_r, \end{aligned}$$

y que cada coeficiente que aparece en dicha descomposición es no negativo gracias a las condiciones numéricas que se tienen. □

**Observación 9.3.** En el caso que la cadena a considerar consta de un único punto que es un punto ordinario de  $\Sigma_0$ , la superficie  $X_0^1$  coincide con la superficie  $Y_0^1$  (ver la Sección 1 del Capítulo 9) y tenemos que los conjuntos generados mínimos de los monoides efectivos coinciden, aún más, la descomposición presentada para las clases efectivas en cada una de las superficies también coincide.

#### 4. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias

A continuación vamos a comprobar que este tipo de superficies satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica y mostraremos algunas de las consecuencias de éste hecho. Además, probaremos que el sistema lineal completo asociado a cada divisor nef no nulo es libre de puntos base. Cabe señalar que no requeriremos de alguna condición numérica para mostrar los resultados de este apartado.

**Proposición 9.4.** *Con la notación anterior, la superficie  $X_0^r$  tiene la propiedad ortogonal anticanónica. Además, el sistema lineal completo asociado a cada divisor nef no nulo sobre  $X_0^r$  es libre de puntos base.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $H$  un divisor nef sobre  $X_0^r$ . Vamos a denotar por  $\mathcal{H}$  a la clase de  $H$  y vamos a considerar números enteros no negativos  $a, b, c_1, \dots, c_r$  de modo que  $\mathcal{H} = a\mathcal{C}_0 + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_r\mathcal{E}_r$ .

Supongamos que  $H$  es ortogonal a un divisor anticanónico. Por la Proposición 9.1 podemos escribir a la clase  $-\mathcal{K}_{X_0^r}$  como  $2(\mathcal{C}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i) + 2(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + \sum_{i=1}^{r-1} (i+2)(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+1}) + (r+2)\mathcal{E}_r$ . Luego, de la igualdad  $-\mathcal{K}_{X_0^r}.\mathcal{H} = 0$  sigue que

$$\begin{aligned} 2\left(\left(\mathcal{C}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i\right).\mathcal{H}\right) &= 0, \\ 2\left(\left(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1\right).\mathcal{H}\right) &= 0, \\ (i+2)\left(\left(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+1}\right).\mathcal{H}\right) &= 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r-1, \text{ y} \\ (r+2)\left(\mathcal{E}_r.\mathcal{H}\right) &= 0, \end{aligned}$$

y esto implica respectivamente las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} b - c_1 - \cdots - c_r &= 0, \\ a - c_1 &= 0, \\ c_i - c_{i+1} &= 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r-1, \text{ y} \\ c_r &= 0. \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores se concluye que  $\mathcal{H}$  es la clase nula y consecuentemente que  $H = 0$ . Por lo tanto,  $X_0^r$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica.

Ahora, supongamos que  $H$  es diferente del divisor cero. De este hecho tenemos que  $-\mathcal{K}_{X_0^r} \cdot \mathcal{H}$  es al menos igual a uno. Lo que mostraremos ahora es que el número de intersección de  $\mathcal{H}$  con la clase anticanónica no puede ser igual a uno. Asumamos que  $-\mathcal{K}_{X_0^r} \cdot \mathcal{H} = 1$ . Usando nuevamente la descomposición de la clase anticanónica obtendríamos la ecuación

$$2\left(\left(\mathcal{C}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i\right) \cdot \mathcal{H}\right) + 2\left(\left(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1\right) \cdot \mathcal{H}\right) + \sum_{i=1}^{r-1} (i+2)\left(\left(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+1}\right) \cdot \mathcal{H}\right) + (r+2)(\mathcal{E}_r \cdot \mathcal{H}) = 1,$$

pero dicha ecuación no puede satisfacerse debido a que cada uno de los coeficientes que aparecen en cada sumando del lado izquierdo es mayor que uno y al hecho que cada número de intersección que aparece es no negativo. Por lo tanto, tenemos que  $-\mathcal{K}_{X_0^r} \cdot \mathcal{H} \geq 2$  y por [Har97, Teorema III.1 (a), p. 1197] concluimos que el sistema lineal completo  $|H|$  es libre de puntos base.  $\square$

**Corolario 9.5.** *Con la notación anterior, la superficie  $X_0^r$  es de Harbourne-Hirschowitz.*

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 9.1 y el Teorema 9.4 implican respectivamente que  $X_0^r$  es anticanónica y que satisface la propiedad ortogonal anticanónica. Luego, del Teorema 3.11 se obtiene el resultado.  $\square$

**Corolario 9.6.** *Con la notación anterior, el anillo de Cox de  $X_0^r$  es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que  $X_0^r$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teorema 9.4) y tiene monoide efectivo finitamente generado (ver Teorema 9.2), del Teorema 3.20 obtenemos que  $\text{Cox}(X_0^r)$  es finitamente generado.  $\square$

**Observación 9.7.** Usando el hecho de que  $\Sigma_0$  es una superficie reglada que tiene dos reglados distintos, si cambiamos el reglado natural de  $\Sigma_0$ , entonces podemos reformular los resultados de esta sección en términos del segundo reglado.

### 5. Ejemplos de Clases Efectivas

En este apartado presentaremos algunos ejemplos de una descomposición de algunas clases efectivas que se encuentran sobre la superficie  $X_0^r$  utilizando la descomposición encontrada en el Teorema 9.2. Además, hemos de señalar que la efectividad de los siguientes ejemplos no puede ser deducida directamente del teorema de Riemann-Roch. De manera similar a lo realizado en la Sección 4 del Capítulo 8, para una clase efectiva  $\mathcal{D}$  sobre  $X_0^r$  denotaremos a la dimensión del  $i$ -ésimo grupo de cohomología de las secciones globales correspondientes a la gavilla invertible asociada a un divisor efectivo en la clase de  $\mathcal{D}$  como  $h^i(X_0^r, \mathcal{D})$  para  $i = 1, 2, 3$ .

**Ejemplo 9.8.** Con la notación anterior, los siguientes elementos de  $\text{NS}(X_0^r)$  son efectivos:

1. La clase  $\mathcal{D} = 2\mathcal{C}_0 + r\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{r-1} \mathcal{E}_i - r\mathcal{E}_r$ . En efecto, utilizando la descomposición encontrada en el Teorema 9.2 podemos escribir

$$2(\mathcal{C}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i) + r(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + \sum_{i=1}^{r-1} (i+r)(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+1}) + (r+1)\mathcal{E}_r,$$

y de esto se sigue que  $\mathcal{D}$  es una clase efectiva. Ahora, intentemos llegar a la misma conclusión usando el teorema de Riemann-Roch. Se tiene que  $h^2(X_0^r, \mathcal{D}) = 0$  puesto que  $\mathcal{F}$  es una clase nef y  $\mathcal{F} \cdot (\mathcal{K}_{X_0^r} - \mathcal{D}) < 0$ . Luego, en la ecuación

$$h^0(X_0^r, \mathcal{D}) - h^1(X_0^r, \mathcal{D}) = 1 + \frac{1}{2}(3r + 6 - r^2)$$

tenemos que el lado derecho es negativo si  $r \geq 5$ . De esta forma, no podemos asegurar la efectividad de  $\mathcal{D}$ .

2. La clase  $\mathcal{D} = \mathcal{C}_0 + r^2\mathcal{F} - \sum_{i=1}^r r\mathcal{E}_i$ . Puesto que podemos escribir a dicha clase como

$$(\mathcal{C}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i) + r^2(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + \sum_{i=1}^{r-1} (r^2 + i(1-r))(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+1}) + r\mathcal{E}_r,$$

del Teorema 9.2 se sigue que  $\mathcal{D}$  es una clase efectiva. Sin embargo, el cálculo natural obtenido del teorema de Riemann-Roch no puede brindarnos esta información. En efecto, tenemos que  $\mathcal{F}$  es una clase nef y que  $\mathcal{F} \cdot (\mathcal{K}_{X_0^r} - \mathcal{D}) < 0$ , esto implica que  $h^2(X_0^r, \mathcal{D}) = 0$ . Posteriormente,

$$h^0(X_0^r, \mathcal{D}) - h^1(X_0^r, \mathcal{D}) = 1 + \frac{1}{2}(3r^2 + 2 - r^3)$$

y observemos que el lado derecho de la ecuación es negativo si  $r \geq 4$ .

3. La clase  $\mathcal{D} = 2\mathcal{C}_0 + \frac{r(r+1)}{2}\mathcal{F} - \sum_{i=1}^r i\mathcal{E}_i$ . Del Teorema 9.2 tenemos que  $\mathcal{D}$  se puede escribir como

$$2(\mathcal{C}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i) + \frac{r(r+1)}{2}(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + \sum_{i=1}^{r-1} (2i + \frac{r(r+1) - i(i+1)}{2})(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+1}) + 2r\mathcal{E}_r,$$

por lo cual se sigue que  $\mathcal{D}$  es una clase efectiva. Desafortunadamente no podemos llegar a ésta conclusión usando el teorema de Riemann-Roch: el hecho que  $\mathcal{F}$  es una clase nef y que  $\mathcal{F} \cdot (\mathcal{K}_{X_0^r} - \mathcal{D}) < 0$  implican que  $h^2(X_0^r, \mathcal{D}) = 0$ . Así, puesto que

$$h^0(X_0^r, \mathcal{D}) - h^1(X_0^r, \mathcal{D}) = 1 + \frac{1}{2} \left( 3r(r+1) + 4 - \sum_{i=1}^r (i + i^2) \right)$$

y el lado derecho de la ecuación anterior es negativo si  $r \geq 8$ , no podemos concluir que  $\mathcal{D}$  sea una clase efectiva.

# CAPÍTULO 10

## EXPLOSIÓN DE $\Sigma_0$ EN UNA CONSTELACIÓN

Una familia más de superficies racionales anticanónicas con números de Picard que pueden ser muy grandes, con monoides efectivos finitamente generados y que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica, en particular de Harbourne-Hirschowitz con anillos de Cox finitamente generados, será construida en este capítulo. De forma similar al capítulo anterior, tal familia será construida considerando puntos infinitamente cercanos, de hecho, en este caso utilizaremos una constelación sobre la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_0$  que tendrá dos orígenes. Después de realizar la construcción de tales superficies en la primera sección y de verificar que son anticanónicas (ver Proposición 10.1), en la segunda sección mostraremos que sus monoides efectivos son finitamente generados (ver Corolario 10.4) y en la tercera sección mostraremos que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teorema 10.5). Cabe mencionar que para este tipo de superficies presentaremos la lista explícita de las clases de curvas  $(-1)$  y de las clases de curvas  $(-2)$  en el contexto general (ver Teoremas 10.2 y 10.3 respectivamente) y que los resultados que presentaremos a lo largo del capítulo no dependerán de alguna condición numérica. Los resultados presentados aquí están basados principalmente en el trabajo [DFFLU16].

### 1. Construcción

En esta sección construiremos una familia de superficies utilizando una constelación con dos orígenes sobre la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_0$ . Cabe mencionar que utilizaremos las convenciones acerca de la notación que fijamos al final de la Sección 3.2.



Fijaremos números enteros no negativos  $r, s, t, m_1, \dots, m_t, r', s', t', m'_1, \dots, m'_{t'}$ . Para comenzar, tomaremos dos puntos  $o$  y  $o'$  sobre  $\Sigma_0$  que serán fijos. Luego, consideraremos la única fibra  $V$  y la única curva racional lisa horizontal  $H$  que pasan por  $o$ ; de manera similar, consideraremos la única fibra  $V'$  y la única curva racional lisa horizontal  $H'$  que pasan por  $o'$ . Vamos a suponer que  $V \neq V'$  y que  $H \neq H'$ .

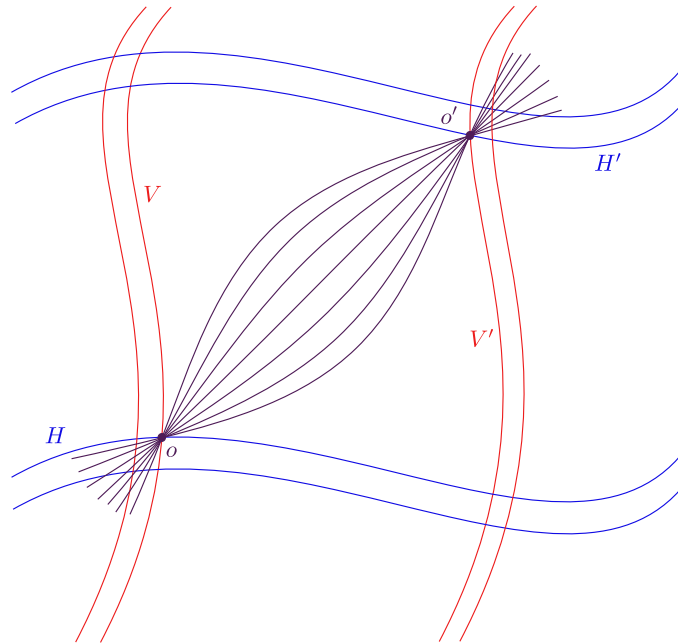


FIGURA 10.1. Orígenes de las constelaciones de la superficie  $Z$ .

Ahora, definimos a la constelación  $\mathfrak{c}$  con origen  $o$  como

$$\mathfrak{c} = \left\{ o, p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s, u_1, u_1^1, \dots, u_1^{m_1}, u_2, u_2^1, \dots, u_2^{m_2}, \dots, u_t, u_t^1, \dots, u_t^{m_t} \right\},$$

donde

- $p_1$  es el único punto en la primera vecindad infinitesimal de  $o$  determinado por la intersección de la transformada estricta de  $V$  y el divisor excepcional  $E_o$  correspondiente al punto  $o$ . Luego, para  $i = 2, \dots, r$ , el punto  $p_i$  es el único punto obtenido de la intersección de la primera vecindad infinitesimal de  $p_{i-1}$  y la transformada estricta de  $V$ ,
- $q_1$  es el único punto en la primera vecindad infinitesimal de  $o$  determinado por la intersección de la transformada estricta de  $H$  y el divisor excepcional  $E_o$ . Luego, para  $j = 2, \dots, s$ , el punto  $q_j$  es el único punto obtenido de la intersección de la primera vecindad infinitesimal de  $q_{j-1}$  y la transformada estricta de  $H$ ,

- Para  $\ell = 1, \dots, t$ ,  $u_\ell$  es un punto en la primera vecindad infinitesimal de  $o$  que es diferente de  $p_1$  y  $q_1$ , donde además,  $u_\ell \neq u_{\ell'}$  si  $\ell \neq \ell'$ . Luego, para  $j = 1, \dots, m_\ell$ , el punto  $u_\ell^j$  es el único punto determinado por la intersección de la primera vecindad infinitesimal de  $u_\ell^{j-1}$  y la transformada estricta del divisor excepcional  $E_o$  con la convención  $u_\ell^0 = u_\ell$ .

De manera similar, definimos a la constelación  $\mathbf{c}'$  con origen  $o'$  como

$$\mathbf{c}' = \left\{ o', p'_1, \dots, p'_{r'}, q'_1, \dots, q'_{s'}, u'_1, u'_1{}^1, \dots, u'_1{}^{m'_1}, u'_2, u'_2{}^1, \dots, u'_2{}^{m'_2}, \dots, u'_{t'}, u'_{t'}{}^1, \dots, u'_{t'}{}^{m'_{t'}} \right\},$$

donde

- $p'_1$  es el único punto en la primera vecindad infinitesimal de  $o'$  determinado por la intersección de la transformada estricta de  $V'$  y el divisor excepcional  $E_{o'}$  correspondiente al punto  $o'$ . Luego, para  $i = 2, \dots, r'$ , el punto  $p'_i$  es el único punto obtenido de la intersección de la primera vecindad infinitesimal de  $p'_{i-1}$  y la transformada estricta de  $V'$ ,
- $q'_1$  es el único punto en la primera vecindad infinitesimal de  $o'$  determinado por la intersección de la transformada estricta de  $H'$  y el divisor excepcional  $E_{o'}$ . Luego, para  $j = 2, \dots, s'$ , el punto  $q'_j$  es el único punto obtenido de la intersección de la primera vecindad infinitesimal de  $q'_{j-1}$  y la transformada estricta de  $H'$ , y
- Para  $\ell = 1, \dots, t'$ ,  $u'_\ell$  es un punto en la primera vecindad infinitesimal de  $o'$  que es diferente de  $p'_1$  y  $q'_1$ , donde además,  $u'_\ell \neq u'_{\ell'}$  si  $\ell \neq \ell'$ . Luego, para  $j = 1, \dots, m'_\ell$ , el punto  $u'_\ell{}^j$  es el único punto determinado por la intersección de la primera vecindad infinitesimal de  $u'_\ell{}^{j-1}$  y la transformada estricta del divisor excepcional  $E_{o'}$  con la convención  $u'_\ell{}^0 = u'_\ell$ .

De esta forma, la superficie  $Z$  es la superficie obtenida de la explosión de  $\Sigma_0$  en la constelación  $\mathbf{c} \cup \mathbf{c}'$ . De manera inmediata se sigue de la construcción que el número de Picard  $\rho(Z)$  de la superficie racional  $Z$  es igual a  $(4 + r + r' + s + s' + t + t' + \sum_{i=1}^t m_i + \sum_{j=1}^{t'} m'_j)$  y que cada elemento del grupo de Néron-Severi de  $Z$  se escribe en términos de las clases

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_0, \mathcal{F}, -\mathcal{E}_o, -\mathcal{E}_{p_1}, \dots, -\mathcal{E}_{p_r}, -\mathcal{E}_{q_1}, \dots, -\mathcal{E}_{q_s}, -\mathcal{E}_{u_1}, \dots, -\mathcal{E}_{u_t}, \dots, -\mathcal{E}_{u_t}{}^{m_t}, \\ & -\mathcal{E}_{o'}, -\mathcal{E}_{p'_1}, \dots, -\mathcal{E}_{p'_{r'}}, -\mathcal{E}_{q'_1}, \dots, -\mathcal{E}_{q'_{s'}}, -\mathcal{E}_{u'_1}, \dots, -\mathcal{E}_{u'_1}{}^{m'_1}, \dots, -\mathcal{E}_{u'_{t'}}, \dots, -\mathcal{E}_{u'_{t'}}{}^{m'_{t'}}. \end{aligned}$$

La primera cosa que podemos observar es que esta superficie es anticanónica, en efecto, el siguiente resultado nos muestra este hecho.

**Proposición 10.1.** *Con la notación anterior, la clase anticanónica de  $Z$  puede escribirse como la suma de  $(r + s + r' + s' + 6)$  clases de curvas racionales lisas. Así,  $Z$  es anticanónica.*

DEMOSTRACIÓN. Por construcción tenemos que se satisface lo siguiente:

- La clase en  $\text{NS}(Z)$  de la transformada estricta  $\widetilde{H}$  de la curva horizontal  $H$  es igual a  $\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_o - \sum_{j=1}^s \mathcal{E}_{q_j}$ ,
- La clase en  $\text{NS}(Z)$  de la transformada estricta  $\widetilde{V}$  de la curva vertical  $V$  es igual a  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_o - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_{p_i}$ ,
- La clase en  $\text{NS}(Z)$  de la transformada estricta  $\widetilde{E}_o$  de la curva excepcional  $E_o$  es igual a  $\mathcal{E}_o - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{q_1} - \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} \mathcal{E}_{u_j^i}$ ,
- Para cada  $i = 1, \dots, r-1$ , la clase en  $\text{NS}(Z)$  de la transformada estricta  $\widetilde{E}_{p_i}$  de la curva excepcional  $E_{p_i}$  es igual a  $\mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{p_{i+1}}$ ,
- Para cada  $j = 1, \dots, s-1$ , la clase en  $\text{NS}(Z)$  de la transformada estricta  $\widetilde{E}_{q_j}$  de la curva excepcional  $E_{q_j}$  es igual a  $\mathcal{E}_{q_j} - \mathcal{E}_{q_{j+1}}$ ,
- La clase en  $\text{NS}(Z)$  de la transformada estricta  $\widetilde{H}'$  de la curva horizontal  $H'$  es igual a  $\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_{o'} - \sum_{j=1}^{s'} \mathcal{E}_{q'_j}$ ,
- La clase en  $\text{NS}(Z)$  de la transformada estricta  $\widetilde{V}'$  de la curva vertical  $V'$  es igual a  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{o'} - \sum_{i=1}^{r'} \mathcal{E}_{p'_i}$ ,
- La clase en  $\text{NS}(Z)$  de la transformada estricta  $\widetilde{E}_{o'}$  de la curva excepcional  $E_{o'}$  es igual a  $\mathcal{E}_{o'} - \mathcal{E}_{p'_1} - \mathcal{E}_{q'_1} - \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} \mathcal{E}_{u_j'^i}$ ,
- Para cada  $i = 1, \dots, r'-1$ , la clase en  $\text{NS}(Z)$  de la transformada estricta  $\widetilde{E}_{p'_i}$  de la curva excepcional  $E_{p'_i}$  es igual a  $\mathcal{E}_{p'_i} - \mathcal{E}_{p'_{i+1}}$ , y
- Para cada  $j = 1, \dots, s'-1$ , la clase en  $\text{NS}(Z)$  de la transformada estricta  $\widetilde{E}_{q'_j}$  de la curva excepcional  $E_{q'_j}$  es igual a  $\mathcal{E}_{q'_j} - \mathcal{E}_{q'_{j+1}}$ .

Luego, por la Proposición 1.34 se sigue que

$$\begin{aligned}
 & \left( \mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_o - \sum_{j=1}^s \mathcal{E}_{q_j} \right) + \left( \mathcal{F} - \mathcal{E}_o - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_{p_i} \right) + \left( \mathcal{E}_o - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{q_1} - \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} \mathcal{E}_{u_j^i} \right) \\
 & + \sum_{i=1}^{r-1} (\mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{p_{i+1}}) + \mathcal{E}_{p_r} + \sum_{j=1}^{s-1} (\mathcal{E}_{q_j} - \mathcal{E}_{q_{j+1}}) + \mathcal{E}_{q_s} \\
 & + \left( \mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_{o'} - \sum_{j=1}^{s'} \mathcal{E}_{q'_j} \right) + \left( \mathcal{F} - \mathcal{E}_{o'} - \sum_{i=1}^{r'} \mathcal{E}_{p'_i} \right) + \left( \mathcal{E}_{o'} - \mathcal{E}_{p'_1} - \mathcal{E}_{q'_1} - \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} \mathcal{E}_{u_j'^i} \right) \\
 & + \sum_{i=1}^{r'-1} (\mathcal{E}_{p'_i} - \mathcal{E}_{p'_{i+1}}) + \mathcal{E}_{p'_r} + \sum_{j=1}^{s'-1} (\mathcal{E}_{q'_j} - \mathcal{E}_{q'_{j+1}}) + \mathcal{E}_{q'_{s'}}.
 \end{aligned}$$

es la clase de un divisor anticanónico. □

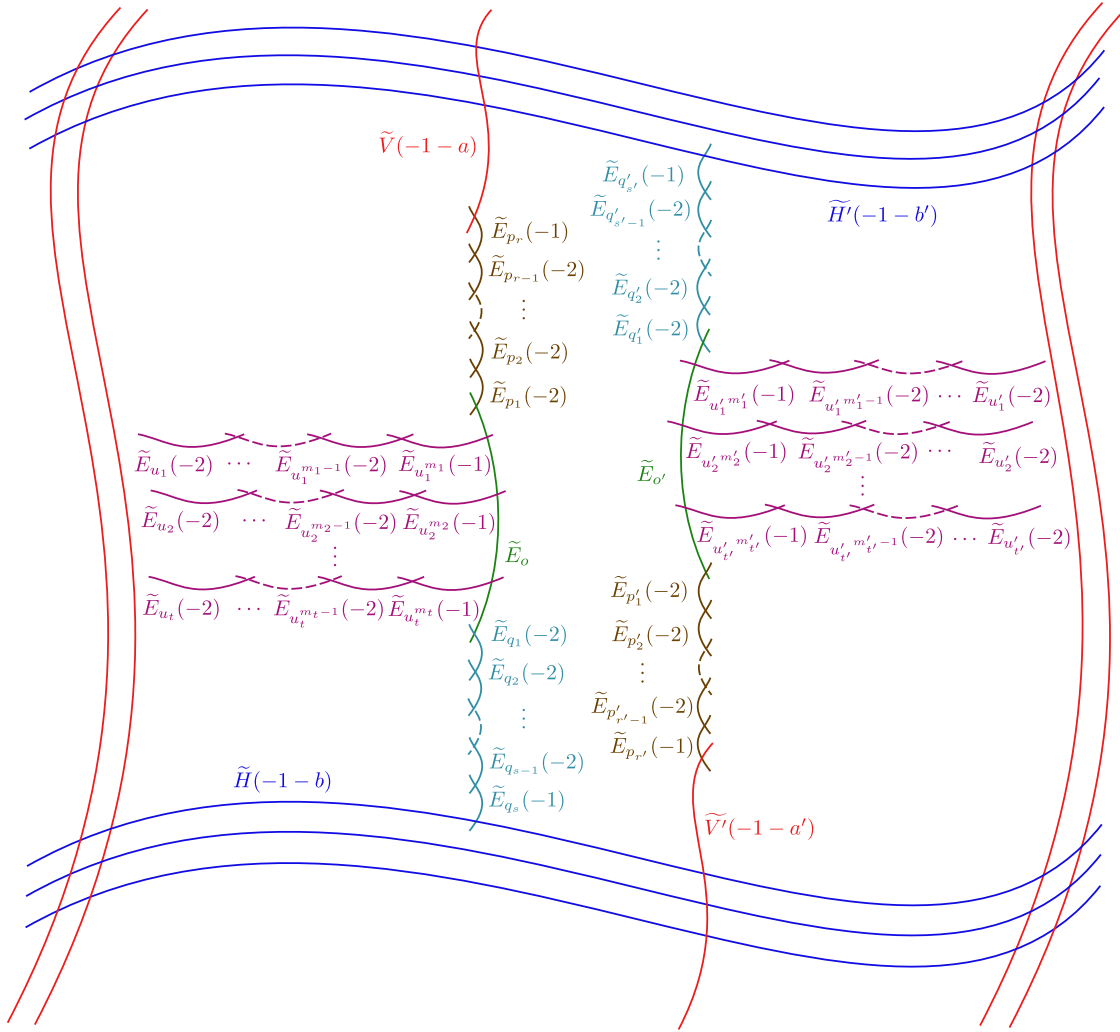


FIGURA 10.2. La superficie  $Z$ .

## 2. Finitud del Monoide Efectivo

A continuación determinaremos explícitamente los conjuntos de las clases de las curvas  $(-1)$  y de las curvas  $(-2)$  sobre  $Z$ , como consecuencia mostraremos la finitud su monoide efectivo y presentaremos a su conjunto generador mínimo. Cabe mencionar que no necesitaremos asumir que se satisfaga alguna condición numérica para mostrar dichos resultados.

**Teorema 10.2.** *Con la notación anterior, si  $\mathcal{E}$  es la clase de una curva  $(-1)$  en  $\text{NS}(Z)$ , entonces es alguna de las siguientes clases:*

1. La clase  $\mathcal{E}_{p_r}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_r$ ,
2. La clase  $\mathcal{E}_{q_s}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_s$ ,

3. La clase  $\mathcal{E}_{p'_{r'}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p'_{r'}$ ,
4. La clase  $\mathcal{E}_{q'_{s'}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q'_{s'}$ ,
5. La clase  $\mathcal{E}_{u_i^{m_i}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $u_i^{m_i}$  para  $i = 1, \dots, t$ ,
6. La clase  $\mathcal{E}_{u'_j{}^{m'_j}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $u'_j{}^{m'_j}$  para  $j = 1, \dots, t'$ ,
7. La clase  $\mathcal{C}_0 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_o - \mathcal{E}_{o'} - \mathcal{E}_{u_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_0 + F|$  que pasa por los puntos  $o, o'$  y  $u_i$  para  $i = 1, \dots, t$ , y
8. La clase  $\mathcal{C}_0 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_o - \mathcal{E}_{o'} - \mathcal{E}_{u'_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_0 + F|$  que pasa por los puntos  $o, o'$  y  $u'_j$  para  $j = 1, \dots, t'$ .

Así, existen  $2(2 + t + t')$  clases de curvas  $(-1)$  sobre  $Z$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la clase  $\mathcal{E}$  de una curva  $(-1)$  sobre  $Z$ . Existen números enteros  $a, b, c, d_1, \dots, d_r, e_1, \dots, e_s, f_1^0, f_1^1, \dots, f_1^{m_1}, \dots, f_t^0, f_t^1, \dots, f_t^{m_t}, c', d'_1, \dots, d'_r, e'_1, \dots, e'_s, f'_1{}^0, f'_1{}^1, \dots, f'_1{}^{m'_1}, \dots, f'_t{}^0, f'_t{}^1, \dots, f'_t{}^{m'_t}$  tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & a\mathcal{C}_0 + b\mathcal{F} - c\mathcal{E}_o - \sum_{i=1}^r d_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^s e_j \mathcal{E}_{q_j} - \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^i \mathcal{E}_{u_j^i} \\ & - c' \mathcal{E}_{o'} - \sum_{i=1}^{r'} d'_i \mathcal{E}_{p'_i} - \sum_{j=1}^{s'} e'_j \mathcal{E}_{q'_j} - \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j'^i \mathcal{E}_{u_j'^i}. \end{aligned}$$

Supongamos que tal clase es diferente de las clases de las curvas excepcionales. Utilizando la descomposición de la clase anticanónica de la Proposición 10.1 podemos escribir la condición  $-\mathcal{K}_Z \cdot \mathcal{E} = 1$  como

$$\begin{aligned} & [\tilde{H}].\mathcal{E} + [\tilde{V}].\mathcal{E} + [\tilde{E}_o].\mathcal{E} + \sum_{i=1}^{r-1} \left( [\tilde{E}_{p_i}].\mathcal{E} \right) + \mathcal{E}_{p_r}.\mathcal{E} + \sum_{j=1}^{s-1} \left( [\tilde{E}_{q_j}].\mathcal{E} \right) + \mathcal{E}_{q_s}.\mathcal{E} \\ & + [\tilde{H}'].\mathcal{E} + [\tilde{V}'].\mathcal{E} + [\tilde{E}_{o'}].\mathcal{E} + \sum_{i=1}^{r'-1} \left( [\tilde{E}_{p'_i}].\mathcal{E} \right) + \mathcal{E}_{p'_{r'}}.\mathcal{E} + \sum_{j=1}^{s'-1} \left( [\tilde{E}_{q'_j}].\mathcal{E} \right) + \mathcal{E}_{q'_{s'}}.\mathcal{E} = 1. \end{aligned}$$

Puesto que cada sumando en la ecuación anterior es un número entero no negativo, sólo uno de ellos puede ser igual a uno y los demás deben ser iguales a cero. De esta forma, por simetría es suficiente estudiar los siguientes tres casos:

- A)  $[\tilde{H}].\mathcal{E} = 1$  y los demás números de intersección son iguales a cero;
- B)  $[\tilde{E}_o].\mathcal{E} = 1$  y los demás números de intersección son iguales a cero; y
- C) Existe  $\ell \in \{1, \dots, r\}$  de modo que  $[\tilde{E}_{p_\ell}].\mathcal{E} = 1$  y los demás números de intersección son iguales a cero.

**Caso A)** En este caso, las condiciones que tenemos nos darían las igualdades

$$\begin{aligned} b - c = 1, & & b = c', \\ a = c, & & a = c', \\ c - \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^i = 0, & & c' - \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j^i = 0, \\ d_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r, & & d'_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r', \\ e_j = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, s, & & e'_j = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, s'. \end{aligned}$$

Luego, dichas ecuaciones implicarían que  $1 = b - c = 0$  lo cual es imposible. Por lo tanto, este caso no puede ocurrir.

**Caso B)** Para este caso, tenemos que se satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} b = c, & & b = c', \\ a = c, & & a = c', \\ c - \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^i = 1, & & c' - \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j^i = 0, \\ d_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r, & & d'_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r', \\ e_j = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, s, & & e'_j = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, s'. \end{aligned}$$

Así, tenemos que  $a = b = c = c'$ . Por otro lado, bajo estas condiciones la ecuación  $\mathcal{E}^2 = -1$  se escribe como

$$\sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^{i^2} + \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j^{i^2} = 1.$$

De esta forma pueden ocurrir dos posibilidades:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^{i^2} = 1, & \quad \text{y} & \quad \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j^{i^2} = 0, & \quad \text{ó} \\ \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^{i^2} = 0, & \quad \text{y} & \quad \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j^{i^2} = 1. \end{aligned}$$

Si ocurriera la primera posibilidad, entonces existiría  $\alpha \in \{1, \dots, t\}$  tal que  $f_\alpha = 1$ ,  $f_\alpha^i = 0$  para cada  $i = 1, \dots, m_\alpha$ ,  $f_j^i = 0$  para todo  $j \in \{1, \dots, t\} \setminus \{\alpha\}$  y para todo  $i = 0, \dots, m_j$ , y  $f_j^i = 0$  para todo  $j \in \{1, \dots, t'\}$  y para todo  $i = 0, \dots, m'_j$ . Luego, de las condiciones anteriores tendríamos que  $2 = c = c' = 0$  lo cual es imposible. De esta forma, la segunda posibilidad sucede y así tenemos que existe  $\beta \in \{1, \dots, t'\}$  tal que  $f'_\beta = 1$ ,  $f'_\beta^i = 0$  para cada  $i = 1, \dots, m_\beta$ ,  $f_j^i = 0$  para todo  $j \in \{1, \dots, t'\} \setminus \{\beta\}$  y para todo  $i = 0, \dots, m'_j$  y  $f_j^i = 0$  para todo  $j \in \{1, \dots, t\}$  y para todo  $i = 0, \dots, m_j$ . Consecuentemente, tenemos que  $1 = c' = a = b = c$  y por lo tanto que  $\mathcal{E} = \mathcal{C}_0 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_o - \mathcal{E}_{o'} - \mathcal{E}_{u'_\beta}$ . Tal clase es la clase de una curva  $(-1)$  por la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch.

De manera similar, en el caso simétrico a éste (es decir, cuando  $[\widetilde{E}_{\sigma'}].\mathcal{E} = 1$ ) se obtiene que existe  $\alpha \in \{1, \dots, t\}$  de manera que  $\mathcal{E} = \mathcal{C}_0 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_o - \mathcal{E}_{\sigma'} - \mathcal{E}_{u_\alpha}$ , y dicha clase también es la clase de una curva  $(-1)$  sobre  $Z$  por los mismos resultados.

**Caso C)** Para el último caso, las condiciones impuestas nos dirían que

$$\begin{array}{ll}
 b = c, & b = c' \\
 a - c = \ell, & a = c' \\
 c - \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^i = 1, & c' - \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j'^i = 0, \\
 e_j = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, s & e'_j = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, s', \\
 d_i = 1 \text{ para todo } i = 1, \dots, \ell, & d'_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r', \\
 d_i = 0 \text{ para todo } i = \ell + 1, \dots, r. &
 \end{array}$$

Del hecho que  $a = c' = b = c$  se seguiría que  $\ell = 0$ , pero esto no podría suceder puesto que  $\ell$  es un entero positivo. Por lo tanto, este caso tampoco es posible.  $\square$

**Teorema 10.3.** *Con la notación anterior, si  $\mathcal{N}$  es la clase de una curva  $(-2)$  sobre  $Z$ , entonces es alguna de las siguientes clases:*

1. La clase  $\mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{p_{i+1}}$  de la transformada estricta del divisor excepcional  $E_{p_i}$  correspondiente al punto  $p_i$  para  $i = 1, \dots, r - 1$ ,
2. La clase  $\mathcal{E}_{q_j} - \mathcal{E}_{q_{j+1}}$  de la transformada estricta del divisor excepcional  $E_{q_j}$  correspondiente al punto  $q_j$  para  $j = 1, \dots, s - 1$ ,
3. La clase  $\mathcal{E}_{p'_i} - \mathcal{E}_{p'_{i+1}}$  de la transformada estricta del divisor excepcional  $E_{p'_i}$  correspondiente al punto  $p'_i$  para  $i = 1, \dots, r' - 1$ ,
4. La clase  $\mathcal{E}_{q'_j} - \mathcal{E}_{q'_{j+1}}$  de la transformada estricta del divisor excepcional  $E_{q'_j}$  correspondiente al punto  $q'_j$  para  $j = 1, \dots, s' - 1$ ,
5. La clase  $\mathcal{E}_{u_j^i} - \mathcal{E}_{u_j^{i+1}}$  de la transformada estricta del divisor excepcional  $E_{u_j^i}$  correspondiente al punto  $u_j^i$  para  $j = 1, \dots, t$  e  $i = 0, \dots, m_j - 1$ , y
6. La clase  $\mathcal{E}_{u'_j^i} - \mathcal{E}_{u'_j^{i+1}}$  de la transformada estricta del divisor excepcional  $E_{u'_j^i}$  correspondiente al punto  $u'_j^i$  para  $j = 1, \dots, t'$  e  $i = 0, \dots, m'_j - 1$ .

Así, existen  $(r + s + r' + s' - 4 + \sum_{i=1}^t m_i + \sum_{j=1}^{t'} m'_j)$  clases de curvas  $(-2)$  sobre  $Z$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\mathcal{N}$  la clase de una curva  $(-2)$  sobre  $Z$  y sean  $a, b, c, d_1, \dots, d_r, e_1, \dots, e_s, f_1^0, f_1^1, \dots, f_1^{m_1}, \dots, f_t^0, f_t^1, \dots, f_t^{m_t}, c', d'_1, \dots, d'_r, e'_1, \dots, e'_s, f_1'^0, f_1'^1, \dots, f_1'^{m'_1}, \dots,$

$f_t^{r_0}, f_t^{r_1}, \dots, f_t^{m'_t}$  números enteros tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = & a\mathcal{C}_0 + b\mathcal{F} - c\mathcal{E}_o - \sum_{i=1}^r d_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^s e_j \mathcal{E}_{q_j} - \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^i \mathcal{E}_{u_j^i} \\ & - c' \mathcal{E}_{o'} - \sum_{i=1}^{r'} d'_i \mathcal{E}_{p'_i} - \sum_{j=1}^{s'} e'_j \mathcal{E}_{q'_j} - \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j'^i \mathcal{E}_{u_j'^i}. \end{aligned}$$

Supongamos que  $\mathcal{N}$  no es una componente de la clase anticanónica. Utilizando la descomposición de la clase anticanónica de la Proposición 10.1, la condición  $-\mathcal{K}_Z \cdot \mathcal{H} = 0$  implica que el número de intersección de  $\mathcal{N}$  con cada una de las clases en dicha descomposición es igual a cero y así obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} b = c, & & b = c', \\ a = c, & & a = c', \\ c - \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^i = 0, & & c' - \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j'^i = 0, \\ d_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r, & & d'_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r', \\ e_j = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, s, & & e'_j = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, s'. \end{aligned}$$

Por otro lado, de la condición  $\mathcal{N}^2 = -2$  se sigue la ecuación

$$\sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^{i^2} + \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j'^{i^2} = 2,$$

y consecuentemente sólo puede ocurrir uno de los siguientes tres casos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^{i^2} = 2, & \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j'^{i^2} = 0, & \quad \text{ó} \\ \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^{i^2} = 1, & \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j'^{i^2} = 1, & \quad \text{ó} \\ \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^{i^2} = 0, & \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j'^{i^2} = 2. \end{aligned}$$

Por simetría es suficiente estudiar los primeros dos casos. Asumiendo que el primero de ellos sucede, tendríamos que o bien existiría  $\alpha \in \{1, \dots, t\}$  de modo que  $f_\alpha = f_\alpha^1 = 1$ ,  $f_\alpha^i = 0$  para cada  $i = 2, \dots, m_\alpha$ ,  $f_j^i = 0$  para todo  $j \in \{1, \dots, t\} \setminus \{\alpha\}$  y para todo  $i = 0, \dots, m_j$ , y  $f_j'^i = 0$  para todo  $j \in \{1, \dots, t'\}$  y para todo  $i = 0, \dots, m'_j$ ; o bien que existirían  $\alpha_1, \alpha_2 \in \{1, \dots, t\}$  de modo que  $f_{\alpha_1} = f_{\alpha_2} = 1$ ,  $f_{\alpha_1}^i = 0$  para cada  $i = 1, \dots, m_{\alpha_1}$ ,  $f_{\alpha_2}^i = 0$  para cada  $i = 1, \dots, m_{\alpha_2}$ ,  $f_j^i = 0$  para todo  $j \in \{1, \dots, t\} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$  y para todo  $i = 0, \dots, m_j$ , y  $f_j'^i = 0$  para todo  $j \in \{1, \dots, t'\}$  y para todo  $i = 0, \dots, m'_j$ . En cualquiera de los casos, de las igualdades



anteriores se tendría que  $2 = c = c' = 0$  lo cual es absurdo. Por simetría, tenemos que el tercer caso tampoco ocurre.

Ahora, asumamos que el segundo caso sucede. Así, tendríamos que existiría  $\alpha \in \{1, \dots, t\}$  de modo que  $f_\alpha = 1$ ,  $f_\alpha^i = 0$  para cada  $i = 1, \dots, m_\alpha$  y  $f_j^i = 0$  para todo  $j \in \{1, \dots, t\} \setminus \{\alpha\}$  y para todo  $i = 0, \dots, m_j$ ; y que existiría  $\beta \in \{1, \dots, t'\}$  tal que  $f'_\beta = 1$ ,  $f'_\beta^i = 0$  para cada  $i = 1, \dots, m_\beta$  y  $f'_j{}^i = 0$  para todo  $j \in \{1, \dots, t'\} \setminus \{\beta\}$  y para todo  $i = 0, \dots, m'_j$ . Consecuentemente, tendríamos las igualdades  $1 = c = c' = a = b$  y de esto se seguiría que  $\mathcal{N} = \mathcal{C}_0 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_o - \mathcal{E}_{u_\alpha} - \mathcal{E}_{o'} - \mathcal{E}_{u'_\beta}$ . Sin embargo, esta posibilidad tampoco podría ocurrir debido a que los puntos  $u_1, \dots, u_t$  y  $u'_1, \dots, u'_{t'}$  son generales.  $\square$

**Corolario 10.4.** *Con la notación anterior, el monoide efectivo  $\text{Eff}(Z)$  de  $Z$  es finitamente generado. Aún más, el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(Z)$  está conformado por las siguientes  $(2(t + t' + 3) + r + s + r' + s' + \sum_{i=1}^t m_i + \sum_{j=1}^{t'} m'_j)$  clases de curvas:*

1. La clase  $\mathcal{E}_{p_r}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_r$ ,
2. La clase  $\mathcal{E}_{q_s}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q_s$ ,
3. La clase  $\mathcal{E}_{p'_{r'}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p'_{r'}$ ,
4. La clase  $\mathcal{E}_{q'_{s'}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $q'_{s'}$ ,
5. La clase  $\mathcal{E}_{u_i^{m_i}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $u_i^{m_i}$  para  $i = 1, \dots, t$ ,
6. La clase  $\mathcal{E}_{u'_j{}^{m'_j}}$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $u'_j{}^{m'_j}$  para  $j = 1, \dots, t'$ ,
7. La clase  $\mathcal{C}_0 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_o - \mathcal{E}_{o'} - \mathcal{E}_{u_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_0 + F|$  que pasa por los puntos  $o$ ,  $o'$  y  $u_i$  para  $i = 1, \dots, t$ ,
8. La clase  $\mathcal{C}_0 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_o - \mathcal{E}_{o'} - \mathcal{E}_{u'_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_0 + F|$  que pasa por los puntos  $o$ ,  $o'$  y  $u'_j$  para  $j = 1, \dots, t'$ ,
9. La clase  $\mathcal{E}_{p_i} - \mathcal{E}_{p_{i+1}}$  de la transformada estricta del divisor excepcional  $E_{p_i}$  correspondiente al punto  $p_i$  para  $i = 1, \dots, r - 1$ ,
10. La clase  $\mathcal{E}_{q_j} - \mathcal{E}_{q_{j+1}}$  de la transformada estricta del divisor excepcional  $E_{q_j}$  correspondiente al punto  $q_j$  para  $j = 1, \dots, s - 1$ ,
11. La clase  $\mathcal{E}_{p'_i} - \mathcal{E}_{p'_{i+1}}$  de la transformada estricta del divisor excepcional  $E_{p'_i}$  correspondiente al punto  $p'_i$  para  $i = 1, \dots, r' - 1$ ,
12. La clase  $\mathcal{E}_{q'_j} - \mathcal{E}_{q'_{j+1}}$  de la transformada estricta del divisor excepcional  $E_{q'_j}$  correspondiente al punto  $q'_j$  para  $j = 1, \dots, s' - 1$ ,
13. La clase  $\mathcal{E}_{u_j^i} - \mathcal{E}_{u_j^{i+1}}$  de la transformada estricta del divisor excepcional  $E_{u_j^i}$  correspondiente al punto  $u_j^i$  para  $j = 1, \dots, t$  e  $i = 0, \dots, m_j - 1$ ,
14. La clase  $\mathcal{E}_{u'_j{}^i} - \mathcal{E}_{u'_j{}^{i+1}}$  de la transformada estricta del divisor excepcional  $E_{u'_j{}^i}$  correspondiente al punto  $u'_j{}^i$  para  $j = 1, \dots, t'$  e  $i = 0, \dots, m'_j - 1$ .

15. La clase  $\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_o - \sum_{j=1}^s \mathcal{E}_{q_j}$  de la transformada estricta de la curva horizontal  $H$ ,
16. La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_o - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_{p_i}$  de la transformada estricta de la curva vertical  $V$ ,
17. La clase  $\mathcal{E}_o - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{q_1} - \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} \mathcal{E}_{u_j^i}$  de la transformada estricta de la curva excepcional  $E_o$  correspondiente al punto  $o$ ,
18. La clase  $\mathcal{C}_0 - \mathcal{E}_{o'} - \sum_{j=1}^{s'} \mathcal{E}_{q'_j}$  de la transformada estricta de la curva horizontal  $H'$ ,
19. La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_{o'} - \sum_{i=1}^{r'} \mathcal{E}_{p'_i}$  de la transformada estricta de la curva vertical  $V'$ , y
20. La clase  $\mathcal{E}_{o'} - \mathcal{E}_{p'_1} - \mathcal{E}_{q'_1} - \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} \mathcal{E}_{u'_j{}^i}$  de la transformada estricta de la curva excepcional  $E_{o'}$  correspondiente al punto  $o'$ .

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del hecho que  $Z$  es una superficie racional anticanónica (ver Proposición 10.1), del Lema 4.1 de [LH05] y de los Teoremas 10.2 y 10.3.  $\square$

### 3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias

Lo que mostraremos en esta sección es que las superficies construidas en la primera sección tienen la propiedad ortogonal anticanónica. Después, mostraremos algunas de las consecuencias que se tienen de éste hecho. De nueva cuenta, no será necesario fijar alguna condición numérica para mostrar tales resultados.

**Teorema 10.5.** *Con la notación anterior,  $Z$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $H$  un divisor nef sobre  $Z$  que es ortogonal a un divisor anticanónico. Luego, consideramos a la clase  $\mathcal{H}$  de  $H$  en  $\text{NS}(Z)$ , así, existen números enteros no negativos  $a, b, c, d_1, \dots, d_r, e_1, \dots, e_s, f_1^0, f_1^1, \dots, f_1^{m_1}, \dots, f_t^0, f_t^1, \dots, f_t^{m_t}, c', d'_1, \dots, d'_r, e'_1, \dots, e'_s, f_1^{\prime 0}, f_1^{\prime 1}, \dots, f_1^{\prime m_1}, \dots, f_t^{\prime 0}, f_t^{\prime 1}, \dots, f_t^{\prime m_t'}$  de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & a\mathcal{C}_0 + b\mathcal{F} - c\mathcal{E}_o - \sum_{i=1}^r d_i \mathcal{E}_{p_i} - \sum_{j=1}^s e_j \mathcal{E}_{q_j} - \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^i \mathcal{E}_{u_j^i} \\ & - c' \mathcal{E}_{o'} - \sum_{i=1}^{r'} d'_i \mathcal{E}_{p'_i} - \sum_{j=1}^{s'} e'_j \mathcal{E}_{q'_j} - \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j^{\prime i} \mathcal{E}_{u'_j{}^i}. \end{aligned}$$

Utilizando la descomposición de la clase anticanónica de la Proposición 10.1, la condición  $-\mathcal{K}_Z \cdot \mathcal{H} = 0$  implica las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll}
 b = c, & b = c', \\
 a = c, & a = c', \\
 c - \sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^i = 0, & c' - \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j^i = 0, \\
 d_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r, & d'_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r', \\
 e_j = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, s, & e'_j = 0 \text{ para todo } j = 1, \dots, s'.
 \end{array}$$

De esto se sigue que  $b = a = c = c'$ . Además, del hecho que  $\mathcal{H}$  es nef tenemos que  $\mathcal{H}^2 \geq 0$  y de esto se sigue la ecuación

$$\sum_{j=1}^t \sum_{i=0}^{m_j} f_j^{i2} + \sum_{j=1}^{t'} \sum_{i=0}^{m'_j} f_j^{i2} = 0.$$

Dicha ecuación implica que  $f_j^i = 0$  para cada  $j = 1, \dots, t$  e  $i = 0, \dots, m_j$ , y que  $f_j^i = 0$  para cada  $j = 1, \dots, t'$  e  $i = 0, \dots, m'_j$ . Así, se sigue que  $b = a = c = c' = 0$ . Por lo tanto, concluimos que  $\mathcal{H}$  es la clase nula y consecuentemente que  $H$  es el divisor cero.  $\square$

**Corolario 10.6.** *Con la notación anterior, la superficie  $Z$  es de Harbourne-Hirschowitz.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado se sigue del Teorema 3.11 puesto que  $Z$  es anticanónica (ver Proposición 10.1) y satisface la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teorema 10.5).  $\square$

**Corolario 10.7.** *Con la notación anterior, el anillo de Cox de  $Z$  es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Corolario 10.4 tenemos que  $\text{Eff}(Z)$  es finitamente generado y por el Teorema 10.5 tenemos que  $Z$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica. El resultado se sigue del Teorema 3.20.  $\square$

## CAPÍTULO 11

### EXPLOSIÓN DE $\Sigma_n$ EN PUNTOS EN POSICIÓN GENERAL

Rosoff estudia en su tesis doctoral [Ros78] principalmente la finitud de los monoides efectivos de las superficies obtenidas como la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general y determina el conjunto generador mínimo para cada uno de dichos monoides. Los elementos de tales conjuntos generadores son las clases de las curvas  $(-1)$  sobre tales superficies (excepto en el caso de ocho puntos en posición general donde además de las clases citadas es necesario agregar la clase anticanónica), dichas clases fueron determinadas por Manin en [Man74] y por Demazure en [Dem80]. Nuestro objetivo será recuperar los resultados mencionados anteriormente y extenderlos.

Así, en este capítulo presentaremos nuestra última familia de superficies racionales anticanónicas cuyos números de Picard pueden ser muy grandes, con monoides efectivos finitamente generados y que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica. Tales superficies serán obtenidas de considerar la explosión de una superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  en puntos que se encuentran en *posición general*. Para comenzar, en la primera sección recordaremos la noción de puntos en posición general en el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  y posteriormente, para las superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en puntos en tal posición, revisaremos cuáles de ellas tienen monoides efectivos finitamente generados y recordaremos el resultado de Rosoff (ver Teorema 11.2) sobre cómo están conformados sus conjuntos generadores mínimos. Para finalizar dicha sección, presentaremos la clasificación de las superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en puntos en posición general que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teoremas 11.3 y 11.4) y mostraremos algunas de sus implicaciones (ver Corolarios 11.5 y 11.7), en particular, recobramos los siguientes resultados bien conocidos:

- 
1. El resultado de Harbourne [**Har96**, Teorema I.1 (b), p. 727] acerca de la regularidad de los divisores nef sobre este tipo de superficies que será una consecuencia del Corolario 11.5, y
  2. En el Corolario 11.7 recuperaremos el resultado sobre la finitud de los anillos de Cox de tales superficies determinada por Batyrev y Popov en [**BP04**, Teorema 3.2, p. 6].

La segunda sección a lo largo de sus tres subsecciones se encargará de estudiar el caso de las superficies obtenidas como la explosión de  $\Sigma_n$  en puntos en posición general. Después de introducir la noción de puntos en posición general para una superficie de Hirzebruch (ver Definición 11.8), en la primera subsección estudiaremos la clase anticanónica de algunas superficies obtenidas como la explosión de  $\Sigma_n$  en puntos en posición general (ver Proposición 11.11). Posteriormente, en la segunda subsección realizaremos la clasificación de este tipo de superficies respecto a la finitud de sus monoïdes efectivos en los Teoremas 11.13, 11.14, 11.16, 11.17 y 11.25, y presentaremos explícitamente los conjuntos generadores mínimos para aquellos monoïdes que son finitamente generados. Como consecuencia, obtendremos los siguientes resultados que son bien conocidos:

1. En el caso  $n = 1$ , en los Teoremas 11.13, 11.14, 11.16 y 11.17 recuperaremos la lista de las curvas  $(-1)$  de la superficie obtenida como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general encontrada por Manin en [**Man74**, Teorema 26.2, p. 135] y Demazure en [**Dem80**, Tabla 3, p. 35], y la lista de generadores del monoïde efectivo dada por Rosoff en [**Ros80**, Teorema 1, p. 420]. Además, en el Corolario 11.21 recuperaremos el resultado de Rosoff [**Ros80**, Teorema 2, p. 424] sobre la finitud del monoïde efectivo de una superficie obtenida como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en cualquier posición.
2. Para la superficie obtenida como la explosión de  $\Sigma_n$  en a lo más  $n$  puntos en posición general, en el Teorema 11.13 recuperaremos la lista de las curvas  $(-1)$  sobre tal superficie dada por Matsuzawa en [**Mat88**, Proposición 1.1, p. 426], y
3. En el caso que  $S$  sea una superficie racional lisa con  $K_S^2 > 0$ , gracias al Corolario 11.20 recuperaremos el resultado que nos asegura la finitud del monoïde efectivo de tal superficie, ver el resultado de Lahyane en [**Lah04a**, Teorema 1.1, p. 875] y de Lahyane y Harbourne en [**LH05**, Proposición 4.3 (a), p. 109].

Además, cuando explotamos  $\Sigma_n$  en a lo más  $n + 3$  puntos ó  $\Sigma_1$  en cinco puntos, ambos casos en posición general, presentaremos una descomposición para cada clase efectiva en los Teoremas 11.13 y 11.15. Para concluir con este capítulo, en la tercera subsección presentaremos la clasificación de esta clase de superficies que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica

en los Teoremas 11.29 y 11.30. Posteriormente, revisaremos algunas de sus consecuencias en los Corolarios 11.32 y 11.34, y gracias a ello podremos realizar la clasificación de este tipo de superficies respecto a la finitud de sus anillos de Cox. Particularmente, recuperaremos nuevamente los resultados de Harbourne y de Batyrev y Popov mencionados anteriormente (ver Observaciones 11.33 y 11.35 respectivamente). Los resultados de esta sección están basados en el trabajo [FL16].

## 1. Explosión de $\mathbb{P}^2$ en Puntos en Posición General

En esta sección recordaremos el concepto de puntos en el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  que se encuentran en *posición general* y revisaremos los resultados acerca de la finitud del monoide efectivo de la superficie que resulta de considerar la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en puntos que están en dicha posición, en particular, serán de gran interés para nosotros los resultados obtenidos por Rosoff en ésta dirección (ver Teorema 11.2). Después de mencionar qué sucede con la finitud de los anillos de Cox de tales superficies, para concluir con esta sección realizaremos la clasificación de las superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en puntos en posición general que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica y mostraremos algunas de sus implicaciones, en particular, recuperaremos el resultado de Harbourne que nos habla acerca de la dimensión de las secciones globales de las gavillas invertibles asociadas a los divisores nef sobre una superficie racional obtenida como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general (ver Observación 11.6) y también recuperaremos el resultado de Batyrev y Popov acerca de la finitud de los anillos de Cox en tal caso (ver Corolario 11.7).

**1.1. Puntos en Posición General en  $\mathbb{P}^2$ .** Para introducir el concepto de puntos en posición general, en primer lugar será necesario hablar de las *transformaciones cuadráticas*. Recordemos que si consideramos el sistema lineal  $\mathfrak{d}$  de cónicas en  $\mathbb{P}^2$  con tres puntos base  $p_1, p_2, p_3$  asignados de manera que no sean colineales, entonces al considerar la superficie  $X$  obtenida como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en tales puntos se tendrá que el sistema lineal  $\mathfrak{e}$  en  $X$  que corresponde a  $\mathfrak{d}$  será libre de puntos base (ver [Har77, Proposición 4.1, p. 396]). Ahora bien, puesto que  $\mathfrak{e}$  es libre de puntos base se tiene que la aplicación  $\varphi_{\mathfrak{e}} : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  es un morfismo y al considerarlo como aplicación racional entre  $\mathbb{P}^2$  y  $\mathbb{P}^2$  no obtenemos otra cosa que la **transformación cuadrática**. Aún más, podemos pensar que  $\varphi_{\mathfrak{e}}$  es el morfismo dado por la explosión de los puntos  $p_1, p_2, p_3$  y la contracción de las rectas  $\widetilde{L}_{12}, \widetilde{L}_{13}, \widetilde{L}_{23}$  respectivamente a los puntos  $p'_3, p'_2$  y  $p'_1$ , donde  $\widetilde{L}_{ij}$  es la transformada estricta de la recta  $L_{ij}$  que pasa a través de  $p_i$  y  $p_j$  para  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  con  $i \neq j$  (ver [Har77, Ejemplo 4.2.3, p. 397]).

Luego, si consideramos  $r$  puntos en  $\mathbb{P}^2$  de manera que cualesquier tres de ellos no sean colineales, una **transformación admisible** es una transformación cuadrática centrada en tres de tales puntos. Notemos que después de aplicar una transformación admisible, en el “nuevo  $\mathbb{P}^2$ ” tendremos un conjunto de  $r$  puntos que serán precisamente las imágenes de los  $r$  puntos de los cuales partimos. Con esto, ya estamos listos para definir la noción de puntos en posición general en  $\mathbb{P}^2$ .

**Definición 11.1.** Un conjunto de  $r$  puntos en  $\mathbb{P}^2$  está en **posición general** si cualesquier tres de ellos no son colineales y al aplicar un número finito de transformaciones admisibles se tiene que en el conjunto de los  $r$  puntos formado por las imágenes de los  $r$  puntos originales no existen tres que sean colineales.

**1.2. Finitud del Monoide Efectivo y del Anillo de Cox.** Un problema natural que surge es determinar si los monoides efectivos de las superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en un número finito de puntos que están en posición general son finitamente generados. Este apartado se encargará de revisar la respuesta de tal problema. En adelante, denotaremos por  $X_r$  a la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  puntos  $p_1, \dots, p_r$  que se encuentran en posición general. Además, denotaremos por  $\mathcal{E}_0$  a la clase en  $\text{NS}(X_r)$  de la transformada total de una recta en  $\mathbb{P}^2$  que no contiene alguno de dichos puntos y por  $\mathcal{E}_i$  a la clase en  $\text{NS}(X_r)$  del divisor excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$ .

Nagata prueba en [Nag60, Teorema 4a, p. 283] la existencia de un número infinito de curvas  $(-1)$  sobre  $X_r$  en el caso que  $r \geq 9$ . Como consecuencia de este hecho, se tiene que el monoide efectivo de tales superficies no es finitamente generado.

Ahora bien, la situación es diferente cuando consideramos la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en un conjunto con a lo más ocho puntos en posición general. Notemos que por definición se sigue que un conjunto de  $r \leq 8$  puntos de  $\mathbb{P}^2$  está en posición general si (ver por ejemplo [Dem80, Teorema 1, p. 27]):

1. Cualesquier tres de ellos no son colineales,
2. Cualesquier seis de ellos no se encuentran sobre una cónica,
3. En caso que  $r = 8$ , una cúbica que pasa por todos los puntos no tiene multiplicidad dos en alguno de ellos.

En [Ros78], Rosoff estudia el monoide efectivo de  $X_r$  con  $r \leq 8$  y presenta el conjunto generador mínimo para  $\text{Eff}(X_r)$ , dichos resultados fueron posteriormente publicados en [Ros80]. Los elementos de dicho conjunto generador mínimo coinciden con la lista de las clases de curvas  $(-1)$  que Manin presenta en [Man74, Teorema 26.2, p. 135] y Demazure en [Dem80,

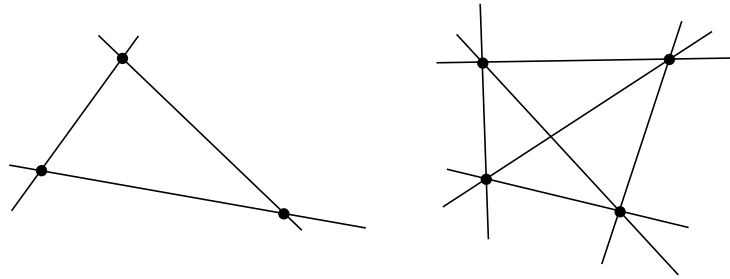


FIGURA 11.1. Tres y cuatro puntos en posición general en  $\mathbb{P}^2$ .

Tabla 3, p. 35], y en el caso de ocho puntos Rosoff agrega además la clase de un divisor anticanónico. A continuación presentaremos el resultado de Rosoff en relación con la finitud de  $\text{Eff}(X_r)$ :

**Teorema 11.2** (Rosoff). *Sea  $X_r$  la superficie obtenida de la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en los puntos  $p_1, \dots, p_r$  que se encuentran en posición general, donde  $r \leq 8$ . El monoide efectivo  $\text{Eff}(X_r)$  es finitamente generado, aún más:*

1. El conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(X_1)$  está formado por dos clases las cuales se presentan a continuación:
  - (a) La clase  $\mathcal{E}_1$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_1$ , y
  - (b) La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1$  de la transformada estricta de una línea que pasa por  $p_1$ .
2. El conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(X_2)$  está integrado por las siguientes tres clases:
  - (a) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 2$ , y
  - (b) La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $p_1$  y  $p_2$ .
3. El conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(X_3)$  está constituido por las seis clases de la siguiente lista:
  - (a) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 3$ , y
  - (b) La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $p_i$  y  $p_j$  para  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  con  $i \neq j$ .
4. El conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(X_4)$  se integra por las diez clases siguientes:
  - (a) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 4$ , y
  - (b) La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $p_i$  y  $p_j$  para  $i, j \in \{1, \dots, 4\}$  con  $i \neq j$ .
5. El conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(X_5)$  se forma por las siguientes dieciséis clases:
  - (a) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 5$ ,
  - (b) La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $p_i$  y  $p_j$  para  $i, j \in \{1, \dots, 5\}$  con  $i \neq j$ , y



- (c) La clase  $2\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la cónica que pasa por todos los puntos.
6. El conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(X_6)$  se constituye de las veintisiete clases que se presentan en la siguiente lista:
- (a) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 6$ ,
- (b) La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $p_i$  y  $p_j$  para  $i, j \in \{1, \dots, 6\}$  con  $i \neq j$ , y
- (c) La clase  $2\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1, i \neq j}^6 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la cónica que pasa por todos los puntos excepto por  $p_j$  para  $1 \leq j \leq 6$ .
7. El conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(X_7)$  se encuentra constituido por las siguientes cincuenta y seis clases:
- (a) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 7$ ,
- (b) La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $p_i$  y  $p_j$  para  $i, j \in \{1, \dots, 7\}$  con  $i \neq j$ ,
- (c) La clase  $2\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1, i \neq j, l}^7 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la cónica que pasa por todos los puntos excepto por  $p_j$  y  $p_l$  para  $j, l \in \{1, \dots, 7\}$  con  $j \neq l$ , y
- (d) La clase  $3\mathcal{E}_0 - 2\mathcal{E}_j - \sum_{i=1, i \neq j}^7 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la cúbica que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_j$  para  $1 \leq j \leq 7$ .
8. El conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(X_8)$  se encuentra formado por las doscientas cuarenta y un clases de la lista que se presenta a continuación:
- (a) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 8$ ,
- (b) La clase  $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j$  de la transformada estricta de la línea que pasa por  $p_i$  y  $p_j$  para  $i, j \in \{1, \dots, 8\}$  con  $i \neq j$ ,
- (c) La clase  $2\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1, i \neq j, l, m}^8 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la cónica que pasa por todos los puntos excepto por  $p_j$ ,  $p_l$  y  $p_m$  para  $j, l, m \in \{1, \dots, 8\}$  con  $j \neq l$ ,  $j \neq m$  y  $l \neq m$ ,
- (d) La clase  $3\mathcal{E}_0 - 2\mathcal{E}_j - \sum_{i=1, i \neq j, l}^8 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la cúbica que pasa por todos los puntos excepto por  $p_l$  y que tiene multiplicidad dos en  $p_j$  para  $j, l \in \{1, \dots, 8\}$  con  $j \neq l$ ,
- (e) La clase  $4\mathcal{E}_0 - 2\mathcal{E}_j - 2\mathcal{E}_l - 2\mathcal{E}_m - \sum_{i=1, i \neq j, l, m}^8 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la cuártica que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_j$ ,  $p_l$  y  $p_m$  para  $j, l, m \in \{1, \dots, 8\}$  con  $j \neq l$ ,  $j \neq m$  y  $l \neq m$ ,
- (f) La clase  $5\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_j - \mathcal{E}_l - 2 \sum_{i=1, i \neq j, l}^8 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la quíntica que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en todos ellos excepto por  $p_j$  y  $p_l$  para  $j, l \in \{1, \dots, 8\}$  con  $j \neq l$ ,

- (g) *La clase  $6\mathcal{E}_0 - 3\mathcal{E}_j - 2\sum_{i=1, i \neq j}^8 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la séxtica que pasa por todos los puntos, tiene multiplicidad tres en  $p_j$  y en el resto tiene multiplicidad dos para  $1 \leq j \leq 8$ ,*
- (h) *La clase  $3\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^8 \mathcal{E}_i$  de un divisor anticanónico.*

La demostración de este resultado puede consultarse en [Ros80, Teorema 1, p. 420]. Una observación importante es que a pesar de que dicho resultado presenta de una manera explícita al conjunto generador mínimo de  $X_r$ , su demostración únicamente muestra que no se necesitan más elementos de los listados anteriormente para generar a las clases efectivas, es decir, no muestra una descomposición explícita para ellas. La idea usada en la demostración es fijar un encaje de  $X_r$  en algún espacio proyectivo de dimensión al menos tres para hablar del grado de un divisor sobre  $X_r$  respecto al encaje, luego, mostrar que para cualquier divisor efectivo  $C$  sobre  $X_r$  se tiene que  $C - L$  es efectivo, donde  $L$  es una curva cuya clase se encuentra en la lista propuesta, y proceder por inducción en el grado. Además, como una consecuencia de éste resultado Rosoff también muestra que el monoide efectivo de la superficie obtenida como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en cualquier posición tiene monoide efectivo finitamente generado (ver [Ros80, Teorema 2, p. 424]).

Recientemente, Araujo y Massarenti en [AM15] muestran una descomposición para cada clase efectiva en el caso general de la variedad obtenida como la explosión del espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$  en  $r$  puntos en posición general cuando  $r \leq 2n$  y cuando ( $n = 3$  y  $r \leq 8$ ). En el caso del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ , dicho resultado brinda una descomposición explícita para las clases efectivas sobre la superficie que resulta de explotar  $\mathbb{P}^2$  en hasta cuatro puntos en posición general. Por otro lado, De La Rosa calcula en [DeL16] los sistemas generadores mínimos y la descomposición de cada clase efectiva sobre una superficie que tiene número de Picard a lo más cuatro, en particular, para la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en hasta tres puntos en posición general.

Para concluir este apartado, hablaremos brevemente acerca de la finitud de los anillos de Cox de estas superficies. Cuando  $r \geq 9$ , el hecho que el monoide efectivo de la superficie  $X_r$  no es finitamente generado implica que su anillo de Cox no puede ser finitamente generado. Para el caso en que  $r \leq 8$  tenemos que el monoide efectivo de  $X_r$  es finitamente generado y conocemos al conjunto generador mínimo, sin embargo, recordemos que la finitud del monoide efectivo no es suficiente para asegurar la finitud del anillo de Cox de una superficie (ver por ejemplo [AL11, Proposición 6.3, p. 5266]). En este caso, como mencionamos en la Sección 1 del Capítulo 2, Batyrev y Popov probaron en [BP04, Teorema 3.2, p. 6] que el anillo de Cox de la superficie  $X_r$  es finitamente generado cuando  $3 \leq r \leq 8$ .

**1.3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias.** En esta sección realizaremos la clasificación de las superficies obtenidas como la explosión del plano proyectivo en puntos en posición general que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica. Posteriormente, revisaremos algunas de las implicaciones para las superficies que satisfacen tal propiedad, particularmente, cuando  $r \leq 8$  recobramos el resultado de Harbourne acerca de la regularidad de los divisores nef sobre  $X_r$  y el resultado de Batyrev y Popov sobre la finitud del anillo de Cox de  $X_r$ .

**Teorema 11.3.** *Con la notación anterior, si  $r \leq 8$ , entonces  $X_r$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un divisor nef  $H$  sobre  $X_r$  que es ortogonal a un divisor anticanónico y denotemos a la clase de dicho divisor en el grupo de Néron-Severi  $\text{NS}(X_r)$  por  $\mathcal{H}$ . Así, existen números enteros no negativos  $a, b_1, \dots, b_r$  tales que  $\mathcal{H} = a\mathcal{E}_0 - b_1\mathcal{E}_1 - \dots - b_r\mathcal{E}_r$ . Vamos a considerar cada uno de los posibles valores de  $r$  y en cada caso utilizaremos cierta descomposición de la clase anticanónica  $-\mathcal{K}_{X_r}$  como suma de ciertas clases efectivas (a excepción del caso  $r = 8$  en el cual  $-\mathcal{K}_{X_8}$  es irreducible).

**Caso  $r = 1$ .** Para este caso tenemos que

$$-\mathcal{K}_{X_1} = 3(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) + 2\mathcal{E}_1.$$

Luego, la hipótesis de ortogonalidad implica que  $\mathcal{H} \cdot (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) = 0$  y que  $\mathcal{H} \cdot \mathcal{E}_1 = 0$ . Esto implica respectivamente que  $a = b_1$  y que  $b_1 = 0$ . De esta manera, tenemos que  $\mathcal{H}$  es nula y por tanto que  $H$  es el divisor cero.

**Caso  $r = 2$ .** Aquí, usaremos el hecho de que

$$-\mathcal{K}_{X_2} = 3(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + 2\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2.$$

Utilizando la descomposición anterior, el hecho de que  $\mathcal{H}$  sea ortogonal a  $-\mathcal{K}_{X_2}$  implica que  $\mathcal{H} \cdot (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = 0$ , que  $\mathcal{H} \cdot \mathcal{E}_1 = 0$  y que  $\mathcal{H} \cdot \mathcal{E}_2 = 0$ . Así, obtenemos respectivamente las igualdades  $a = b_1 + b_2$ ,  $b_1 = 0$  y  $b_2 = 0$ . De esto se sigue que  $\mathcal{H}$  es la clase nula y consecuentemente que  $H = 0$ .

**Caso  $r = 3$ .** La descomposición que consideraremos para la clase anticanónica será

$$-\mathcal{K}_{X_3} = (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3) + (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

Así, del hecho que  $-\mathcal{K}_{X_3} \cdot \mathcal{H} = 0$  se sigue que  $\mathcal{H} \cdot (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j) = 0$  para  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  con  $i \neq j$  y que  $\mathcal{H} \cdot \mathcal{E}_l = 0$  para cualquier  $l = 1, 2, 3$ , esto implica que  $a = b_1 + b_2 = b_1 + b_3 = b_2 + b_3$

y que  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ . Consiguientemente, tenemos que  $\mathcal{H}$  es la clase nula y por ello que  $H$  es el divisor cero.

**Caso  $r = 4$ .** Tomaremos la siguiente descomposición de la clase anticanónica:

$$-\mathcal{K}_{X_4} = (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4) + (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3) + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3.$$

Luego, la ecuación  $-\mathcal{K}_{X_4} \cdot \mathcal{H} = 0$  implica que  $\mathcal{H} \cdot (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = 0$ ,  $\mathcal{H} \cdot (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4) = 0$ ,  $\mathcal{H} \cdot (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3) = 0$ ,  $\mathcal{H} \cdot \mathcal{E}_1 = 0$  y  $\mathcal{H} \cdot \mathcal{E}_3 = 0$ . De esta forma, se tienen respectivamente las igualdades  $a = b_1 + b_2$ ,  $a = b_3 + b_4$ ,  $a = b_1 + b_3$ ,  $b_1 = 0$  y  $b_3 = 0$ , y de esto se deduce inmediatamente que  $\mathcal{H}$  es la clase nula. Por lo tanto,  $H$  es el divisor cero.

**Caso  $r = 5$ .** Ahora, descompondremos la clase anticanónica de la siguiente manera:

$$-\mathcal{K}_{X_5} = (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \left( 2\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i \right) + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

Las ecuaciones  $\mathcal{H} \cdot (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = 0$ ,  $\mathcal{H} \cdot (2\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i) = 0$ ,  $\mathcal{H} \cdot \mathcal{E}_1 = 0$  y  $\mathcal{H} \cdot \mathcal{E}_2 = 0$  se obtienen de  $-\mathcal{K}_{X_5} \cdot \mathcal{H} = 0$  y de ellas se derivan respectivamente las igualdades  $a = b_1 + b_2$ ,  $2a = \sum_{i=1}^5 b_i$ ,  $b_1 = 0$  y  $b_2 = 0$ . Consecuentemente, se tiene que  $\mathcal{H}$  es la clase nula y por ello  $H = 0$ .

**Caso  $r = 6$ .** Observemos que podemos escribir la clase anticanónica de la siguiente forma:

$$-\mathcal{K}_{X_6} = (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_6) + \left( 2\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i \right) + \mathcal{E}_1.$$

El hecho de que  $\mathcal{H}$  es ortogonal a la clase anticanónica implica que  $\mathcal{H} \cdot (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_6) = 0$ ,  $\mathcal{H} \cdot (2\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i) = 0$  y  $\mathcal{H} \cdot \mathcal{E}_1 = 0$ . Se siguen respectivamente las ecuaciones  $a = b_1 + b_6$ ,  $2a = \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i$  y  $b_1 = 0$ , así,  $a = b_6$ . Sea  $i \in \{1, \dots, 5\}$ . Usando el hecho de que  $\mathcal{H}$  es nef tenemos que

$$0 \leq \mathcal{H} \cdot (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_6) = a - b_i - b_6 = -b_i,$$

y esto implica que  $b_i = 0$ . De esto se sigue que  $a = 0$  y luego que  $\mathcal{H}$  es la clase nula. Por lo tanto,  $H$  es el divisor cero.

**Caso  $r = 7$ .** Sea  $j \in \{1, \dots, 7\}$ . Para este caso podemos escribir a la clase anticanónica como

$$-\mathcal{K}_{X_7} = \left( 3\mathcal{E}_0 - 2\mathcal{E}_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^7 \mathcal{E}_i \right) + \mathcal{E}_j.$$

Usando el hecho que  $\mathcal{H}$  y  $-\mathcal{K}_{X_7}$  son ortogonales se sigue que  $\mathcal{H} \cdot (3\mathcal{E}_0 - 2\mathcal{E}_j - \sum_{i=1, i \neq j}^7 \mathcal{E}_i) = 0$  y que  $\mathcal{H} \cdot \mathcal{E}_j = 0$ , y a su vez esto implica respectivamente que  $3a = 2b_j + \sum_{i=1, i \neq j}^7 b_i$  y que

$b_j = 0$ . Fijamos  $m \in \{1, \dots, 7\} \setminus \{j\}$ . Considerando la clase efectiva  $3\mathcal{E}_0 - 2\mathcal{E}_m - \sum_{i=1, i \neq m}^7 \mathcal{E}_i$  y usando el hecho que  $\mathcal{H}$  es una clase nef tenemos que

$$0 \leq \mathcal{H} \cdot \left( 3\mathcal{E}_0 - 2\mathcal{E}_m - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^7 \mathcal{E}_i \right) = 3a - 2b_m - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m, j}}^7 b_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^7 b_i - b_m - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^7 b_i = -b_m,$$

y de esto se sigue que  $b_m = 0$ . Usando el hecho que  $m$  fue arbitrario en  $\{1, \dots, 7\} \setminus \{j\}$ , obtenemos que  $b_i = 0$  para cualquier  $i = 1, \dots, 7$  y de esto se deriva que  $a = 0$ . Por consecuencia,  $\mathcal{H}$  es la clase nula y por consiguiente  $H = 0$ .

**Caso  $r = 8$ .** En este caso no podemos descomponer la clase anticanónica como suma de otras clases efectivas. La condición  $-\mathcal{K}_{X_8} \cdot \mathcal{H} = 0$  nos brinda la ecuación  $3a = \sum_{i=1}^8 b_i$ . Sean  $j, l \in \{1, \dots, 8\}$  tales que  $b_j = \max\{b_1, \dots, b_8\}$  y  $b_l = \min\{b_1, \dots, b_8\}$ . Consideramos la clase efectiva  $3\mathcal{E}_0 - 2\mathcal{E}_j - \sum_{i=1, i \neq j, l}^8 \mathcal{E}_i$ . Usando el hecho de que  $\mathcal{H}$  es nef tenemos que

$$0 \leq \mathcal{H} \cdot \left( 3\mathcal{E}_0 - 2\mathcal{E}_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j, l}}^8 \mathcal{E}_i \right) = 3a - 2b_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j, l}}^8 b_i = b_l - b_j,$$

esto implica que  $b_j \leq b_l$  y de esto se sigue que  $b_j = b_l$ . Así, tenemos que  $b_1 = b_2 = \dots = b_8$ . Fijando  $b = b_1$ , tenemos que se satisface la ecuación  $3a = 8b$ . Ahora, consideramos a la clase efectiva  $6\mathcal{E}_0 - 3\mathcal{E}_1 - 2 \sum_{i=2}^8 \mathcal{E}_i$ . De nueva cuenta, usando el hecho de que  $\mathcal{H}$  es nef se tiene que

$$0 \leq \mathcal{H} \cdot \left( 6\mathcal{E}_0 - 3\mathcal{E}_1 - 2 \sum_{i=2}^8 \mathcal{E}_i \right) = 6a - 3b_1 - 2 \sum_{i=2}^8 b_i = 6a - 17b = -b,$$

por lo cual se sigue que  $b = 0$  y como consecuencia que  $a = 0$ . Finalmente, tenemos que  $\mathcal{H}$  es la clase nula y por lo tanto, concluimos que  $H$  es el divisor cero.  $\square$

**Teorema 11.4.** *Con la notación anterior, la superficie  $X_r$  no satisface la propiedad ortogonal anticanónica si  $r \geq 9$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Basta probar el caso en que  $r = 9$  en vista de la Proposición 3.6. En tal caso, tenemos que la clase anticanónica  $-\mathcal{K}_{X_9} = 3\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \dots - \mathcal{E}_9$  es la clase de una curva irreducible, además, puesto  $\mathcal{K}_{X_9}^2 = 0$  se sigue que  $-\mathcal{K}_{X_9}$  es una clase nef. De esta forma, tenemos que existe un divisor nef que es ortogonal a un divisor anticanónico pero que no es el divisor cero.  $\square$

**Corolario 11.5.** *Con la notación anterior, si  $r \leq 8$ , entonces  $X_r$  es una superficie de Harbourne-Hirschowitz.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general es una superficie anticanónica, el resultado se sigue de manera inmediata de los Teoremas 11.3 y 3.11.  $\square$

**Observación 11.6.** El resultado anterior recupera el resultado de Harbourne que asegura que cada divisor nef  $H$  sobre una superficie racional  $Y$  obtenida como la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general satisface que  $h^1(Y, \mathcal{O}_Y(H)) = 0$  (ver [Har96, Teorema I.1 (b), p. 727]).

De estos resultados obtenemos una demostración alterna al hecho bien conocido de la finitud de los anillos de Cox de este tipo de superficies (ver [BP04, Teorema 3.2, p. 6]).

**Corolario 11.7.** *Con la notación anterior, si  $r \leq 8$ , entonces el anillo de Cox de  $X_r$  es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 11.2 sabemos que el monoide efectivo de  $X_r$  es finitamente generado, además, por el Teorema 11.3 tenemos que la superficie anticanónica  $X_r$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica. De esta manera, por el Teorema 3.20 concluimos que  $\text{Cox}(X_r)$  es finitamente generado.  $\square$

## 2. Explosión de $\Sigma_n$ en Puntos en Posición General

En esta sección nos encargaremos de estudiar a las superficies que son obtenidas como la explosión de una superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  en puntos que se encuentran en *posición general*. En el primer apartado introduciremos la noción de puntos en posición general para  $\Sigma_n$  y estudiaremos la clase anticanónica de algunas superficies que resultan de considerar la explosión de  $\Sigma_n$  en un conjunto de puntos en posición general. Cabe mencionar que la definición de puntos en posición general sobre  $\Sigma_n$  generalizará de una manera natural la noción de posición general de  $\mathbb{P}^2$ , además, no sólo nos permitirá recuperar los resultados de la sección anterior si no que podremos extenderlos como lo mencionaremos más adelante. En el segundo apartado realizaremos la clasificación de dichas superficies que tienen monoides efectivos finitamente generados y presentaremos los conjuntos generadores mínimos en tales casos. De manera particular, recobramos la lista de las curvas  $(-1)$  para la superficie obtenida como la explosión de  $\Sigma_n$  en a lo más  $n$  puntos en posición general determinada por Matsuzawa (ver Teorema 11.13) y la lista de los generadores del monoide efectivo de la superficie obtenida como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general (ver Observación 11.18). Otra de las consecuencias de dicha clasificación será que la superficie obtenida como la explosión de  $\Sigma_n$  en cierto número de puntos especializados tendrá un monoide efectivo

finitamente generado (ver Corolario 11.20). Consecuentemente, recobramos el resultado de Rosoff sobre la finitud del monoide efectivo de una superficie obtenida como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos arbitrarios (ver Corolario 11.21) y el resultado sobre la finitud del monoide efectivo de una superficie lisa racional  $S$  con  $K_S^2 > 0$  (ver Corolario 11.22). Para concluir, en el tercer apartado se determinará de una manera definitiva aquellas superficies obtenidas como la explosión de  $\Sigma_n$  en puntos en posición general que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica y revisaremos algunas consecuencias de éste hecho. De manera especial, recobramos de nueva cuenta el resultado de Harbourne sobre la regularidad de los divisores nef sobre la superficie obtenida como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general (ver Observación 11.33) y el resultado de Batyrev y Popov sobre la finitud de sus anillos de Cox (ver Observación 11.35). Otra de las consecuencias de la clasificación anterior es que podremos clasificar este tipo de superficies respecto a la finitud de sus anillos de Cox (ver Corolarios 11.27 y 11.34).

Es importante aclarar que a lo largo toda la sección,  $n$  será un número entero positivo.

**2.1. Puntos en Posición General en  $\Sigma_n$ .** El objetivo de esta sección es presentar una noción de puntos en posición general sobre una superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  que extienda de una manera natural la noción de posición general del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ . Además, mostraremos algunos casos en que la superficie obtenida como la explosión de  $\Sigma_n$  en puntos tal posición es anticanónica.

**Definición 11.8.** Un conjunto finito de puntos en  $\Sigma_n$  está en **posición general** si las curvas de autointersección negativa sobre la superficie obtenida de la explosión de  $\Sigma_n$  en tales puntos son únicamente las curvas  $(-1)$  y la curva  $(-n)$  de la transformada estricta de la curva  $C_n$ .

Notemos que de manera particular, la definición de puntos en posición general en una superficie de Hirzebruch nos dice que no puede haber una pareja de puntos que se encuentren sobre la misma fibra y que ningún punto puede estar sobre la curva negativa  $C_n$ .

**Observación 11.9.** De una manera natural, uno podría pensar que considerar únicamente puntos sobre  $\Sigma_n$  de modo que cualesquier par de ellos no se encuentran sobre la misma fibra y tal que ninguno de ellos se encuentra en la curva negativa  $C_n$  es adecuado para definir la noción de posición general (por ejemplo, como se hizo en el trabajo [Mat93]). Sin embargo, tal definición no refleja el concepto de posición general en  $\mathbb{P}^2$ , por ejemplo.

**Observación 11.10.** La definición de posición general que estamos considerando cuando  $n = 1$  recupera obviamente el concepto de puntos en posición general en  $\mathbb{P}^2$ .

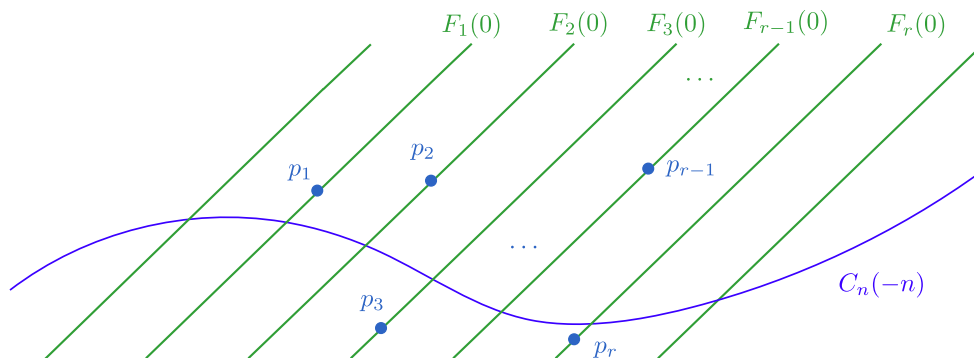


FIGURA 11.2. Puntos en posición general en  $\Sigma_n$ .

Ahora, denotaremos por  $W_n^r$  a la superficie racional obtenida de la explosión de  $\Sigma_n$  en  $r$  puntos  $p_1, \dots, p_r$  en posición general. De manera similar a la notación fijada en los Capítulos 8 y 9, denotaremos por  $\mathcal{E}_i$  a la clase en el grupo de Néron-Severi  $\text{NS}(W_n^r)$  del divisor excepcional  $E_i$  correspondiente al punto  $p_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . Además, tenemos que  $\text{NS}(W_n^r)$  está generado por las siguientes clases:

$$\mathcal{C}_n, \mathcal{F}, -\mathcal{E}_1, \dots, -\mathcal{E}_r,$$

y así, tenemos que el número de Picard  $\rho(W_n^r)$  de  $W_n^r$  es igual a  $(r + 2)$ . Lo primero que estudiaremos será la clase anticanónica de algunas de estas superficies.

**Proposición 11.11.** *Con la notación anterior, si  $r \leq n + 5$ , entonces la superficie  $W_n^r$  es anticanónica. En efecto, tenemos los siguientes casos:*

1. Si  $r \leq n$ , entonces

$$-\mathcal{K}_{W_n^r} = 2(\mathcal{C}_n) + \sum_{i=1}^r (\mathcal{F} - \mathcal{E}_i) + (n + 2 - r)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + (n + 2 - r)\mathcal{E}_1.$$

2. Si  $r = n + 1$ , entonces

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+1}} = (\mathcal{C}_n) + \left( \mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}_i \right) + (\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + (\mathcal{F} - \mathcal{E}_2) + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

3. Si  $r = n + 2$ , entonces

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+2}} = (\mathcal{C}_n) + \left( \mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}_i \right) + (\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + (\mathcal{F} - \mathcal{E}_{n+2}) + \mathcal{E}_1.$$

4. Si  $r = n + 3$ , entonces

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+3}} = (\mathcal{C}_n) + \left( \mathcal{C}_n + (n + 1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+3} \mathcal{E}_i \right) + (\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + \mathcal{E}_1.$$



5. Si  $r = n + 4$ , entonces

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+4}} = (\mathcal{C}_n) + \left( \mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+3} \mathcal{E}_i \right) + (\mathcal{F} - \mathcal{E}_{n+4}).$$

6. Si  $r = n + 5$ , entonces

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+5}} = (\mathcal{C}_n) + \left( \mathcal{C}_n + (n+2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+5} \mathcal{E}_i \right).$$

En el caso  $r = n + 6$ , para  $n = 1, 2$  la clase anticanónica es la clase de una curva irreducible (y por lo tanto es efectiva), y para  $n \geq 3$  la clase anticanónica no es la clase de una curva irreducible y no puede escribirse como combinación lineal no negativa de clases efectivas.

DEMOSTRACIÓN. El resultado es claro para  $r \leq n + 5$  en vista de la Proposición 1.34 y debido a que la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch nos aseguran la existencia de una curva en las clases que aparecen del lado derecho de las ecuaciones en cada uno de los casos. Sólo resta estudiar el caso en que  $r = n + 6$ .

Para  $n = 1$ , sabemos que existe una curva irreducible en  $|2C_1 + 3F|$  por la Proposición 1.49, aún más, por el teorema de Riemann-Roch tenemos que  $h^0(W_1^7, \mathcal{O}_{W_1^7}(2C_1 + 3F)) = 9$ . Así, podemos considerar una curva irreducible en  $|2C_1 + 3F|$  que pasa por los puntos  $p_1, \dots, p_7$  y la clase de dicha curva en  $\text{NS}(W_1^7)$  será precisamente  $-\mathcal{K}_{W_1^7}$ .

De manera similar al caso anterior, cuando  $n = 2$ , por la Proposición 1.49 tenemos que existe una curva irreducible en  $|2C_2 + 4F|$  y el teorema de Riemann-Roch nos dice que  $h^0(W_2^8, \mathcal{O}_{W_2^8}(2C_2 + 4F)) = 9$ . De esta manera, podemos considerar la curva irreducible en  $|2C_2 + 4F|$  que pasa por los puntos  $p_1, \dots, p_8$  y tendremos que su clase en  $\text{NS}(W_2^8)$  será igual a  $-\mathcal{K}_{W_2^8}$ .

Por último, consideremos el caso  $n \geq 3$ . Puesto que bajo esta condición se tiene que  $2n > n + 2$ , por la Proposición 1.49 y por el teorema de Riemann-Roch se sigue que  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+6}}$  no es la clase de una curva irreducible sobre  $\Sigma_n$ . Supongamos que la clase anticanónica puede descomponerse como suma de  $t \geq 2$  clases de curvas irreducibles (algunas de ellas podrían ser iguales). De esta forma, para cada  $j = 1, \dots, t$  sea  $\alpha_j \mathcal{C}_n + \beta_j \mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+6} \gamma_i^j \mathcal{E}_i$  una de dichas clases. Observemos que por hipótesis se tiene que  $n\alpha_j \leq \beta_j$  y que  $0 \leq \gamma_i^j \leq \alpha_j$  para cada  $j = 1, \dots, t$  e  $i = 1, \dots, n + 6$ . Así, nuestra hipótesis nos dice que

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+6}} = \sum_{j=1}^t \alpha_j \mathcal{C}_n + \sum_{j=1}^t \beta_j \mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+6} \sum_{j=1}^t \gamma_i^j \mathcal{E}_i,$$

y esto implica las ecuaciones  $\sum_{j=1}^t \alpha_j = 2$ ,  $\sum_{j=1}^t \beta_j = n + 2$  y  $\sum_{j=1}^t \gamma_i^j = 1$  para cada  $i = 1, \dots, n + 6$ . Por la simetría de la primera igualdad, bastará con verificar dos casos:

A)  $\alpha_1 = 2$  y  $\alpha_j = 0$  para  $j = 2, \dots, t$ . En este caso, tendríamos que  $2n \leq \beta_1$  y luego, como

$$2n + \sum_{j=2}^t \beta_j \leq \sum_{j=1}^t \beta_j = n + 2$$

se obtendría que  $\sum_{j=2}^t \beta_j \leq 2 - n$ , pero dicha condición no podría satisfacerse pues  $n \geq 3$ . Así, este caso se descarta.

B)  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  y  $\alpha_j = 0$  para  $j = 3, \dots, t$ . Bajo estas condiciones tendríamos que  $n \leq \beta_1$  y que  $n \leq \beta_2$ , esto implicaría que

$$2n + \sum_{j=3}^t \beta_j \leq \sum_{j=1}^t \beta_j = n + 2,$$

y consecuentemente tendríamos que  $\sum_{j=3}^t \beta_j \leq 2 - n$  lo cual sería imposible ya que  $n \geq 3$ . De este modo, éste caso también es descartado.

Por lo tanto, tenemos que la clase anticanónica  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+6}}$  no se puede descomponer como combinación lineal no negativa de clases efectivas.  $\square$

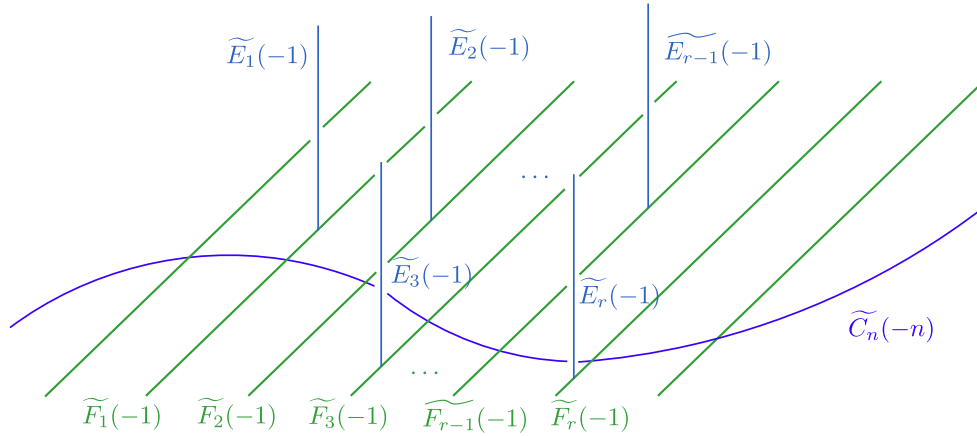


FIGURA 11.3. La superficie  $W_n^r$ .

**Observación 11.12.** En el caso en que consideramos  $r = n + 5$  se tiene que si  $n \geq 5$ , entonces la dimensión anticanónica de Iitaka de  $W_n^{n+5}$  es igual a cero ya que el sistema lineal completo  $| -mK_{W_n^{n+5}} |$  consta de un único elemento (ver [Iit82, Proposición 8.5, p. 269]).

**2.2. Finitud del Monoide Efectivo.** Al igual que en el caso de la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en puntos en posición general, una pregunta natural que surge al estudiar las superficies  $W_n^r$  obtenidas como la explosión de una superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  en  $r$  puntos en posición general es si sus monoides efectivos son finitamente generados. En este apartado daremos una respuesta a esta pregunta al realizar la clasificación de las superficies  $W_n^r$  que tienen monoides efectivos finitamente generados y presentaremos de manera explícita los conjuntos generadores mínimos de aquellos monoides que lo son. Además, revisaremos algunas consecuencias de tal clasificación.

Matsuzawa estudia en [Mat88] algunas propiedades de la superficie  $W_n^r$ , en particular, en [Mat88, Proposición 1.1, p. 426] muestra que para cada  $n \geq 2$  existen exactamente  $2r$  curvas  $(-1)$  sobre  $W_n^r$  si y sólo si  $n \geq r$ , y presenta la lista de dichas curvas. Dicho resultado brinda información acerca de algunos de los generadores de  $\text{Eff}(W_n^r)$ , sin embargo, Matsuzawa no determina si dichas clases son suficientes para generar al monoide efectivo de  $W_n^r$ . Aún más, no estudia las curvas  $(-1)$  para el caso en que  $r$  sea mayor que  $n$ .

En los siguientes resultados presentaremos de una manera definitiva la clasificación de las superficies  $W_n^r$  cuyos monoides efectivos son finitamente generados y presentaremos de manera concreta el conjunto generador mínimo de tales monoides. Además, presentaremos una descomposición explícita para cada clase efectiva cuando  $r \leq n + 3$ , y cuando  $(n = 1$  y  $r = 5)$ . En particular, cuando  $r \leq n$  recobramos la lista de las curvas  $(-1)$  encontrada en [Mat88], y cuando  $n = 1$  recuperaremos los conjuntos generadores mínimos encontrados por Rosoff en [Ros78] para la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general.

**Teorema 11.13.** *Con la notación anterior, el monoide efectivo  $\text{Eff}(W_n^r)$  de  $W_n^r$  es finitamente generado si  $r \leq n + 3$ . Aún más,*

1. Si  $r \leq n$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(W_n^r)$  está formado por las siguientes  $(2r + 1)$  clases:

(a) La clase  $\mathcal{C}_n$  de la transformada estricta de la curva negativa  $C_n$ ,

(b) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por el punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq r$ , y

(c) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq r$ .

Además, si  $\mathcal{D} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \cdots - c_r\mathcal{E}_r$  es una clase efectiva sobre  $W_n^r$  donde  $a, b, c_1, \dots, c_r$  son números enteros y es diferente a las clases anteriores, entonces

$$\mathcal{D} = a\mathcal{C}_n + (b - \sum_{j=2}^r c_j)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + c_2(\mathcal{F} - \mathcal{E}_2) + \cdots + c_r(\mathcal{F} - \mathcal{E}_r) + (b - \sum_{j=1}^r c_j)\mathcal{E}_1.$$

2. Si  $r = n + 1$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(W_n^{n+1})$  está integrado por  $2(n + 2)$  clases que consisten en:

- (a) La clase  $\mathcal{C}_n$  de la transformada estricta de la curva negativa  $C_n$ ,
- (b) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por el punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq n + 1$ ,
- (c) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq n + 1$ ,  
y
- (d) La clase  $\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_n + nF|$  que pasa por todos los puntos.

Además, si  $\mathcal{D} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_{n+1}\mathcal{E}_{n+1}$  es una clase efectiva sobre  $W_n^{n+1}$  donde  $a, b, c_1, \dots, c_{n+1}$  son números enteros y es diferente a las clases anteriores, y si  $\mu = \min\{c_1, \dots, c_{n+1}\}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & (a - \mu)\mathcal{C}_n + \sum_{i=1}^n (c_i - \mu)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_i) + (b - c_1 - \dots - c_n)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{n+1}) \\ & + (b - c_1 - \dots - c_{n+1} + \mu)\mathcal{E}_{n+1} + \mu(\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \mathcal{E}_1 - \dots - \mathcal{E}_{n+1}). \end{aligned}$$

3. Si  $r = n + 2$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(W_n^{n+2})$  está integrado por las  $(3n + 7)$  clases que se presentan a continuación:

- (a) La clase  $\mathcal{C}_n$  de la transformada estricta de la curva negativa  $C_n$ ,
- (b) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por el punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq n + 2$ ,
- (c) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq n + 2$ ,  
y
- (d) La clase  $\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j}^{n+2} \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_n + nF|$  que pasa por todos los puntos excepto por  $p_j$  para  $1 \leq j \leq n + 2$ .

Además, si  $\mathcal{D} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_{n+2}\mathcal{E}_{n+2}$  es una clase efectiva sobre  $W_n^{n+2}$  donde  $a, b, c_1, \dots, c_{n+2}$  son números enteros y es diferente a las clases anteriores, y si  $\mu = \min\{c_1, \dots, c_{n+2}\}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & (a - \mu)\mathcal{C}_n + \sum_{i=1}^{n+1} (c_i - \mu)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_i) + (b - c_1 - \dots - c_{n+1} + \mu)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{n+2}) \\ & + (b - c_1 - \dots - c_{n+2} + \mu)\mathcal{E}_{n+2} + \mu(\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \mathcal{E}_1 - \dots - \mathcal{E}_{n+1}). \end{aligned}$$

4. Si  $r = n + 3$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(W_n^{n+3})$  se encuentra constituido de las  $\left(2n + 8 + \binom{n+3}{2}\right)$  clases de la siguiente lista:

- (a) La clase  $\mathcal{C}_n$  de la transformada estricta de la curva negativa  $C_n$ ,

- (b) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por el punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq n+3$ ,
- (c) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq n+3$ ,
- (d) La clase  $\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j, l}^{n+3} \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_n + nF|$  que pasa por todos los puntos excepto por  $p_j$  y  $p_l$  para  $j, l \in \{1, \dots, n+3\}$  con  $j \neq l$ , y
- (e) La clase  $\mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+3} \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_n + (n+1)F|$  que pasa por todos los puntos.

Además, si  $\mathcal{D} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_{n+3}\mathcal{E}_{n+3}$  es una clase efectiva sobre  $W_n^{n+3}$  donde  $a, b, c_1, \dots, c_{n+3}$  son números enteros y es diferente a las clases anteriores, y si  $c_l = \min\{c_1, \dots, c_{n+3}\}$  y  $c_m$  es el siguiente de los  $c_i$  mayor o igual que  $c_l$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & (a - c_m)\mathcal{C}_n + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n+3} (c_i - c_m)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_i) + (b - c_1 - \dots - c_{n+3} + c_l + c_m)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_l) \\ & + (b - c_1 - \dots - c_{n+3} + 2c_m)\mathcal{E}_l + c_m(\mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \mathcal{E}_1 - \dots - \mathcal{E}_{n+3}). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Comencemos observando que además de las clases  $\mathcal{C}_n$ ,  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$  y  $\mathcal{E}_i$  que aparecen de forma natural para cada  $i = 1, \dots, r$ , la existencia de una curva en las demás clases propuestas está asegurada por la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch. Sea  $\mathcal{D}$  una clase efectiva sobre  $W_n^r$  diferente de las clases en la lista propuesta en cada uno de los respectivos casos y sin pérdida de generalidad supongamos que dicha clase es irreducible. Así, sean  $a, b, c_1, \dots, c_r$  números enteros tales que  $\mathcal{D} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_r\mathcal{E}_r$ .

**Caso  $r \leq n$ .** Para este caso tenemos que se satisfacen las condiciones  $b - na \geq 0$ ,  $a - c_i \geq 0$  y  $c_i \geq 0$  puesto que respectivamente los números de intersección  $\mathcal{D}.\mathcal{C}_n$ ,  $\mathcal{D}.\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$  y  $\mathcal{D}.\mathcal{E}_i$  son no negativos para cada  $i = 1, \dots, r$ . Observemos que

$$\mathcal{D} = a\mathcal{C}_n + (b - \sum_{j=2}^r c_j)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + c_2(\mathcal{F} - \mathcal{E}_2) + \dots + c_r(\mathcal{F} - \mathcal{E}_r) + (b - \sum_{j=1}^r c_j)\mathcal{E}_1,$$

y como se satisfacen las desigualdades  $\sum_{i=1}^r c_i \leq ra \leq na \leq b$ , tenemos que cada coeficiente en la descomposición anterior es no negativo.

**Caso  $r = n+1$ .** En este caso, puesto que los números de intersección  $\mathcal{D}.\mathcal{C}_n$ ,  $\mathcal{D}.\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{D}.\mathcal{E}_i$  y  $\mathcal{D}.\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}_i$  son no negativos para cada  $i = 1, \dots, n+1$ , tenemos respectivamente que  $b - na \geq 0$ ,  $a - c_i \geq 0$ ,  $c_i \geq 0$  y  $b - \sum_{j=1}^{n+1} c_j \geq 0$  para cualquier

$i = 1, \dots, n + 1$ . Sea  $\mu = \min\{c_1, \dots, c_{n+1}\}$ . Tenemos que se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & (a - \mu)\mathcal{C}_n + \sum_{i=1}^n (c_i - \mu)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_i) + (b - c_1 - \dots - c_n)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{n+1}) \\ & + (b - c_1 - \dots - c_{n+1} + \mu)\mathcal{E}_{n+1} + \mu(\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \mathcal{E}_1 - \dots - \mathcal{E}_{n+1}), \end{aligned}$$

y cada coeficiente del lado derecho de la ecuación anterior es un número entero no negativo.

**Caso  $r = n + 2$ .** Aquí, tenemos que los siguientes números de intersección son no negativos:  $\mathcal{D}.\mathcal{C}_n$ ,  $\mathcal{D}.\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{D}.\mathcal{E}_i$  y  $\mathcal{D}.\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{t=1, t \neq j}^{n+2} \mathcal{E}_t$  para cada  $i, j \in \{1, \dots, n + 2\}$ . Por consiguiente, tenemos respectivamente que  $b - na \geq 0$ ,  $a - c_i \geq 0$ ,  $c_i \geq 0$  y  $b - \sum_{t=1, t \neq j}^{n+2} c_t \geq 0$  para cualquier  $i, j \in \{1, \dots, n + 2\}$ . Fijemos  $\mu = \min\{c_1, \dots, c_{n+2}\}$ . Luego, se satisface la igualdad

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & (a - \mu)\mathcal{C}_n + \sum_{i=1}^{n+1} (c_i - \mu)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_i) + (b - c_1 - \dots - c_{n+1} + \mu)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{n+2}) \\ & + (b - c_1 - \dots - c_{n+2} + \mu)\mathcal{E}_{n+2} + \mu(\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \mathcal{E}_1 - \dots - \mathcal{E}_{n+1}) \end{aligned}$$

y cada uno de los coeficientes es un número entero no negativo.

**Caso  $r = n + 3$ .** Tenemos que los números enteros  $b - na$ ,  $a - c_i$ ,  $c_i$ ,  $b - \sum_{t=1, t \neq i, j}^{n+3} c_t$  y  $b + a - \sum_{t=1}^{n+3} c_t$  son no negativos puesto que respectivamente los números de intersección  $\mathcal{D}.\mathcal{C}_n$ ,  $\mathcal{D}.\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{D}.\mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{D}.\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{t=1, t \neq i, j}^{n+3} \mathcal{E}_t$  y  $\mathcal{D}.\mathcal{C}_n + (n + 1)\mathcal{F} - \sum_{t=1}^{n+3} \mathcal{E}_t$  son no negativos para cualesquier  $i, j \in \{1, \dots, n + 3\}$  con  $i \neq j$ . Consideremos  $c_l = \min\{c_1, \dots, c_{n+3}\}$  y  $c_m$  como el siguiente de los  $c_i$  mayor o igual que  $c_l$ . Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & (a - c_m)\mathcal{C}_n + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n+3} (c_i - c_m)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_i) + (b - c_1 - \dots - c_{n+3} + c_l + c_m)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_l) \\ & + (b - c_1 - \dots - c_{n+3} + 2c_m)\mathcal{E}_l + c_m(\mathcal{C}_n + (n + 1)\mathcal{F} - \mathcal{E}_1 - \dots - \mathcal{E}_{n+3}), \end{aligned}$$

y cada coeficiente es un número entero no negativo.  $\square$

**Teorema 11.14.** *Con la notación anterior, si  $r = n + 4$ , entonces el monoide efectivo  $\text{Eff}(W_n^{n+4})$  de  $W_n^{n+4}$  es finitamente generado cuyo conjunto generador mínimo está formado*

por las  $\left( 3n + 13 + \sum_{\substack{2 \leq t \leq n+3 \\ t \text{ es par}}} \binom{n+4}{t+1} \right)$  clases que se presentan a continuación:

- (a) La clase  $\mathcal{C}_n$  de la transformada estricta de la curva negativa  $\mathcal{C}_n$ ,
- (b) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por el punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq n + 4$ ,

- (c) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq n+4$ ,
- (d) La clase  $\mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j}^{n+4} \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|\mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos excepto por  $p_j$  para  $1 \leq j \leq n+4$ ,
- (e) La clase  $m\mathcal{C}_n + nm\mathcal{F} - (m-1)\sum_{i=1}^{t+1} \mathcal{E}_{u_i} - m\sum_{j=1}^{n+3-t} \mathcal{E}_{v_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|m\mathcal{C}_n + nm\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad  $(m-1)$  en  $p_{u_1}, \dots, p_{u_{t+1}}$  y multiplicidad  $m$  en  $p_{v_1}, \dots, p_{v_{n+3-t}}$ , donde  $m$  es un número entero tal que  $m \geq 1$ ,  $t = 2m$  y  $2 \leq t \leq n+3$ , y donde  $u_i, v_j \in \{1, \dots, n+4\}$  con  $u_i \neq v_j$  para  $i = 1, \dots, t+1$  y  $j = 1, \dots, n+3-t$  y con  $u_{i_1} \neq u_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  y  $v_{j_1} \neq v_{j_2}$  si  $j_1 \neq j_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, t+1\}$  y  $j_1, j_2 \in \{1, \dots, n+3-t\}$ .

DEMOSTRACIÓN. Puesto que  $W_n^{n+4}$  es una superficie anticanónica y no contiene curvas  $(-2)$ , para mostrar la finitud del monoide efectivo bastará con determinar todas las clases de curvas  $(-1)$  sobre tal superficie gracias al Lema 4.1 de [LH05]. Consideremos la clase  $\mathcal{E} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_{n+4}\mathcal{E}_{n+4}$  de una curva  $(-1)$  donde  $a, b, c_1, \dots, c_{n+4}$  son números enteros. Supongamos que  $\mathcal{E}$  es diferente de las clases  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_j$ ,  $\mathcal{E}_j$  y  $\mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j}^{n+4} \mathcal{E}_i$  para cada  $j = 1, \dots, n+4$  (y de  $\mathcal{C}_n$  cuando  $n = 1$ ). Utilizando la simetría que tiene la descomposición de la clase anticanónica y sin pérdida de generalidad, vamos a considerar que

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+4}} = (\mathcal{C}_n) + \left( \mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+3} \mathcal{E}_i \right) + (\mathcal{F} - \mathcal{E}_{n+4}).$$

Como  $\mathcal{E}$  es la clase de una curva  $(-1)$  tenemos que  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+4}}.\mathcal{E} = 1$ , así, tenemos que pueden ocurrir tres casos diferentes:

- A)  $\mathcal{E}.\mathcal{C}_n = 1$ ,  $\mathcal{E}.\left(\mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+3} \mathcal{E}_i\right) = 0$  y  $\mathcal{E}.\left(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{n+4}\right) = 0$ ;
- B)  $\mathcal{E}.\mathcal{C}_n = 0$ ,  $\mathcal{E}.\left(\mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+3} \mathcal{E}_i\right) = 1$  y  $\mathcal{E}.\left(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{n+4}\right) = 0$ ;
- C)  $\mathcal{E}.\mathcal{C}_n = 0$ ,  $\mathcal{E}.\left(\mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+3} \mathcal{E}_i\right) = 0$  y  $\mathcal{E}.\left(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{n+4}\right) = 1$ .

A continuación revisaremos lo que sucede en cada uno de los casos anteriores.

**Caso A)** Las condiciones de este caso nos dirían respectivamente que  $b = na + 1$ , que  $b + a = \sum_{i=1}^{n+3} c_i$  y que  $a = c_{n+4}$ . Sea  $j \in \{1, \dots, n+3\}$ . Por hipótesis, observemos que

$$0 \leq \mathcal{E} \cdot \left( \mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+4} \mathcal{E}_i \right) = b + a - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+4} c_i = \sum_{i=1}^{n+3} c_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+4} c_i = c_j - c_{n+4},$$

esto implicaría que  $c_{n+4} \leq c_j$ . Puesto que  $c_{n+4} = a$  y  $c_j \leq a$  (pues  $\mathcal{E}.\left(\mathcal{F} - \mathcal{E}_j\right) \geq 0$ ) se seguiría que  $a = c_j$ , luego,  $a = c_i$  para cualquier  $i = 1, \dots, n+4$ . Así, de la condición  $b + a = \sum_{i=1}^{n+3} c_i$

tendríamos que  $(n+1)a+1 = (n+3)a$  y por tanto que  $2a = 1$ , lo cual sería imposible. Por lo tanto, descartamos este caso.

**Caso B)** Las condiciones que son impuestas en este caso son respectivamente  $b = na$ ,  $b+a = 1 + \sum_{i=1}^{n+3} c_i$  y  $a = c_{n+4}$ . Fijamos  $j \in \{1, \dots, n+3\}$ . Por hipótesis tenemos que

$$0 \leq \mathcal{E} \cdot \left( \mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+4} \mathcal{E}_i \right) = b+a - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+4} c_i = 1 + \sum_{i=1}^{n+3} c_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+4} c_i = 1 + c_j - c_{n+4},$$

consecuentemente,  $c_{n+4} \leq 1 + c_j$ . Debido a que  $c_{n+4} = a$  y  $c_j \leq a$  (puesto que se satisface  $\mathcal{E} \cdot (\mathcal{F} - \mathcal{E}_j) \geq 0$ ), se sigue que  $c_j \leq a \leq 1 + c_j$ . De esta manera, se tiene que o bien  $c_j = a$  o bien que  $c_j = a - 1$ . Puesto que  $j$  fue un índice arbitrario en  $\{1, \dots, n+3\}$ , tal propiedad se satisface para cualquiera de tales índices. Ahora, sea  $s$  el número de términos que son iguales a  $a$  y sea  $t$  el número de términos que son iguales a  $(a-1)$ . Notemos que  $s$  y  $t$  son números enteros no negativos tales que  $s+t = n+3$ . De este modo, de la ecuación  $b+a = 1 + \sum_{i=1}^{n+3} c_i$  se sigue que

$$(n+1)a = 1 + sa + t(a-1) = (s+t)a + 1 - t = (n+3)a + 1 - t$$

y consecuentemente que  $2a = t - 1$ . Por lo tanto,  $t$  debe ser un número impar. Sea  $m$  un número entero no negativo tal que  $t = 2m + 1$  y  $t \leq n+3$ . Observemos que si  $m = 0$ , es decir si  $t = 1$ , entonces  $a = 0$  lo que nos llevaría a una contradicción. Así,  $m \geq 1$  y  $t \geq 3$ . De este modo,  $2a = t - 1 = 2m$  y por consiguiente  $a = m$ ,  $b = nm$ ,  $c_{u_i} = m - 1$  para  $i \in \{1, \dots, t\}$  y  $c_{n+4} = c_{v_j} = m$  para  $j \in \{1, \dots, n+3-t\}$ . Consecuentemente, se sigue que  $\mathcal{E} = m\mathcal{C}_n + nm\mathcal{F} - (m-1)\sum_{i=1}^t \mathcal{E}_{u_i} - m(\mathcal{E}_{n+4} + \sum_{j=1}^{n+3-t} \mathcal{E}_{v_j})$  es la clase de una curva  $(-1)$  sobre  $W_n^{n+4}$  por la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch.

**Caso C)** Para el último caso que debemos revisar, de las condiciones dadas se tiene respectivamente que  $b = na$ , que  $b+a = \sum_{i=1}^{n+3} c_i$  y que  $a = c_{n+4} + 1$ . Consideramos  $j \in \{1, \dots, n+3\}$ . De nuestra hipótesis se sigue que

$$0 \leq \mathcal{E} \cdot \left( \mathcal{C}_n + (n+1)\mathcal{F} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+4} \mathcal{E}_i \right) = b+a - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+4} c_i = \sum_{i=1}^{n+3} c_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+4} c_i = c_j - c_{n+4},$$

y luego se tiene que  $c_{n+4} \leq c_j$ . Del hecho que  $c_{n+4} = a - 1$  y  $c_j \leq a$  (pues  $\mathcal{E} \cdot (\mathcal{F} - \mathcal{E}_j) \geq 0$ ), se tiene que  $a - 1 \leq c_j \leq a$ . Así, tenemos que o bien  $c_j = a$  o bien que  $c_j = a - 1$  de manera similar al caso anterior. Asimismo, como  $j$  fue un índice arbitrario en  $\{1, \dots, n+3\}$ , tal propiedad se cumple para cualquiera de dichos índices. Sea  $s$  el número de términos que son iguales a  $a$  y sea  $t$  el número de términos que son iguales a  $(a-1)$ . Observemos que  $s$



y  $t$  son números enteros no negativos que satisfacen la igualdad  $s + t = n + 3$ . Usando la ecuación  $b + a = \sum_{i=1}^{n+3} c_i$  se tiene que

$$(n + 1)a = sa + t(a - 1) = (s + t)a - t = (n + 3)a - t$$

y como consecuencia que  $2a = t$ . De este modo,  $t$  debe ser un número par. Sea  $m$  un número entero no negativo tal que  $t = 2m$  y  $t \leq n + 3$ . Observemos que si  $m = 0$ , es decir si  $t = 0$ , entonces  $a = 0$  y esto nos llevaría a una contradicción. De esta manera,  $m \geq 1$  y  $t \geq 2$ . Consecuentemente,  $2a = t = 2m$  y esto implica que  $a = m$ ,  $b = nm$ ,  $c_{n+4} = c_{u_i} = m - 1$  para  $i \in \{1, \dots, t\}$  y  $c_{v_j} = m$  para  $j \in \{1, \dots, n + 3 - t\}$ . Finalmente, se sigue que  $\mathcal{E} = m\mathcal{C}_n + nm\mathcal{F} - (m - 1)(\mathcal{E}_{n+4} + \sum_{i=1}^t \mathcal{E}_{u_i}) - m \sum_{j=1}^{n+3-t} \mathcal{E}_{v_j}$  es la clase de una curva  $(-1)$  sobre  $W_n^{n+4}$  en vista de la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch.

Por último, observemos que la clase de la curva  $(-1)$  obtenida a partir de un número par  $t$  con  $2 \leq t \leq n + 3$  es igual a la clase de la curva  $(-1)$  obtenida del número impar  $(t + 1)$  si  $t + 1 \leq n + 3$ . □

El siguiente resultado nos presentará una descomposición para cada clase efectiva sobre la superficie  $W_1^5$ .

**Teorema 11.15.** *Con la notación anterior, sea  $\mathcal{D} = a\mathcal{C}_1 + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_5\mathcal{E}_5$  una clase efectiva sobre  $W_1^5$  diferente de las clases que se encuentran en el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(W_1^5)$  y donde  $a, b, c_1, \dots, c_5$  son números enteros tales que  $c_5 \leq c_4 \leq \dots \leq c_1$ . Se tienen los siguientes casos:*

1. Si  $a \leq c_3 + c_4$ , entonces se tiene la siguiente descomposición para  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & (a - c_3)(2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i) + (c_3 + c_4 - a)(\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_5) \\ & + (c_3 - c_4)(\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_5) + (c_1 - c_3)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + (c_2 - c_3)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_2) \\ & + (c_3 + c_4 - a)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_3) + (b + a - \sum_{i=1}^4 c_i)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_5) + (b + a - c_1 - c_2 - c_4 - c_5)\mathcal{E}_5. \end{aligned}$$

2. Si  $a > c_3 + c_4$ , entonces se tiene la siguiente descomposición para  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & (a - c_3 - c_4)\mathcal{C}_1 + c_4(2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i) + (c_3 - c_4)(\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_5) \\ & + (c_1 - c_3)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + (c_2 - c_3)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_2) + (b - c_1 - c_2)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_5) \\ & + (b - c_1 - c_2 + c_3 - c_5)\mathcal{E}_5. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\mathcal{D}$  es irreducible. Puesto que los números de intersección  $\mathcal{D}.\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{D}.\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{D}.\mathcal{E}_i$  y  $\mathcal{D}.\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_j - \mathcal{E}_l$  son no negativos para cada  $i, j, l \in \{1, \dots, 5\}$  con  $j \neq l$ , para tales índices se sigue respectivamente que  $b - a$ ,  $a - c_i$ ,  $c_i$  y  $b - c_j - c_l$  son enteros no negativos. Distinguiremos dos casos:

**Caso  $a \leq c_3 + c_4$ .** Para este caso, tenemos la siguiente descomposición de  $\mathcal{D}$  en función del conjunto generador mínimo:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & (a - c_3)(2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i) + (c_3 + c_4 - a)(\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_5) \\ & + (c_3 - c_4)(\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_5) + (c_1 - c_3)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + (c_2 - c_3)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_2) \\ & + (c_3 + c_4 - a)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_3) + (b + a - \sum_{i=1}^4 c_i)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_5) + (b + a - c_1 - c_2 - c_4 - c_5)\mathcal{E}_5, \end{aligned}$$

y cada uno de los coeficientes anteriores es no negativo.

**Caso  $a > c_3 + c_4$ .** Aquí, se tiene que  $\mathcal{D}$  puede descomponerse de la siguiente forma usando el conjunto generador mínimo:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & (a - c_3 - c_4)\mathcal{C}_1 + c_4(2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i) + (c_3 - c_4)(\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_5) \\ & + (c_1 - c_3)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) + (c_2 - c_3)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_2) + (b - c_1 - c_2)(\mathcal{F} - \mathcal{E}_5) \\ & + (b - c_1 - c_2 + c_3 - c_5)\mathcal{E}_5, \end{aligned}$$

además, cada coeficiente que aparece en la descomposición es un número entero no negativo.  $\square$

**Teorema 11.16.** *Con la notación anterior, si  $r = n + 5$  y  $n \leq 3$ , entonces el monoide efectivo  $\text{Eff}(W_n^{n+5})$  de  $W_n^{n+5}$  es finitamente generado. Además, se tiene lo siguiente:*

1. Si  $n = 1$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(W_1^6)$  está formado por las siguientes cincuenta y seis clases:
  - (a) La clase  $\mathcal{C}_1$  de la transformada estricta de la curva negativa  $C_1$ ,
  - (b) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por el punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 6$ ,
  - (c) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 6$ ,
  - (d) La clase  $\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_1 + 3F|$  que pasa por todos los puntos,
  - (e) La clase  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_1 + F|$  que pasa por los puntos  $p_i$  y  $p_j$  para  $i, j \in \{1, \dots, 6\}$  con  $i \neq j$ ,

- (f) La clase  $\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j, l}^6 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_1 + 2F|$  que pasa por todos los puntos excepto por  $p_j$  y  $p_l$  para  $j, l \in \{1, \dots, 6\}$  con  $j \neq l$ ,
- (g) La clase  $2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j}^6 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|2C_1 + 2F|$  que pasa por todos los puntos excepto por  $p_j$  para  $1 \leq j \leq 6$ , y
- (h) La clase  $2\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_j - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|2C_1 + 3F|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_{t_1}, \dots, p_{t_5}$ , donde  $t_i, j \in \{1, \dots, 6\}$  con  $t_i \neq j$  para  $i = 1, \dots, 5$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 5\}$ .
2. Si  $n = 2$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(W_2^7)$  está formado por las ciento ochenta y cuatro clases de curvas que se presentan a continuación:
- (a) La clase  $\mathcal{C}_2$  de la transformada estricta de la curva negativa  $C_2$ ,
- (b) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por el punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 7$ ,
- (c) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 7$ ,
- (d) La clase  $\mathcal{C}_2 + 4\mathcal{F} - \sum_{i=1}^7 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_2 + 4F|$  que pasa por todos los puntos,
- (e) La clase  $\mathcal{C}_2 + 2\mathcal{F} - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j - \mathcal{E}_l$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_2 + 2F|$  que pasa por los puntos  $p_i, p_j$  y  $p_l$  para  $i, j, l \in \{1, \dots, 7\}$  con  $i \neq j, i \neq l$  y  $j \neq l$ ,
- (f) La clase  $\mathcal{C}_2 + 3\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j, l}^7 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_2 + 3F|$  que pasa por todos los puntos excepto por  $p_j$  y  $p_l$  para  $j, l \in \{1, \dots, 7\}$  con  $j \neq l$ ,
- (g) La clase  $2\mathcal{C}_2 + 4\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_j - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|2C_2 + 4F|$  que pasa por los puntos  $p_j, p_{t_1}, \dots, p_{t_5}$  y que tiene multiplicidad dos en  $p_j$ , donde  $t_i, j \in \{1, \dots, 7\}$  con  $t_i \neq j$  para  $i = 1, \dots, 5$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 5\}$ ,
- (h) La clase  $2\mathcal{C}_2 + 5\mathcal{F} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i} - 2 \sum_{j=1}^2 \mathcal{E}_{m_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|2C_2 + 5F|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_{m_1}, p_{m_2}$ , donde  $t_i, m_j \in \{1, \dots, 7\}$  con  $t_i \neq m_j$  para  $i = 1, \dots, 5, j = 1, 2$ , y con  $m_1 \neq m_2$  y  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 5\}$ ,
- (i) La clase  $3\mathcal{C}_2 + 6\mathcal{F} - \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_{t_i} - 2 \sum_{j=1}^4 \mathcal{E}_{m_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|3C_2 + 6F|$  que pasa por todos los puntos y tiene multiplicidad dos en  $p_{m_1}, \dots, p_{m_4}$ , donde  $t_i, m_j \in \{1, \dots, 7\}$  con  $t_i \neq m_j$  para  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 1, \dots, 4$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  y  $m_{j_1} \neq m_{j_2}$  si  $j_1 \neq j_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3\}$  y  $j_1, j_2 \in \{1, \dots, 4\}$ ,
- (j) La clase  $3\mathcal{C}_2 + 7\mathcal{F} - \mathcal{E}_j - 2 \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|3C_2 + 7F|$  que pasa por todos los puntos con multiplicidad dos excepto por el punto  $p_j$ , donde  $t_i, j \in \{1, \dots, 7\}$  con  $t_i \neq j$  para  $i = 1, \dots, 6$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 6\}$ ,

- (k) La clase  $4\mathcal{C}_2 + 8\mathcal{F} - 3\mathcal{E}_j - 2\sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|4\mathcal{C}_2 + 8\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos con multiplicidad dos excepto por  $p_j$  que tiene multiplicidad tres, donde  $t_i, j \in \{1, \dots, 7\}$  con  $t_i \neq j$  para  $i = 1, \dots, 6$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 6\}$ .
3. Si  $n = 3$ , entonces el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(W_3^8)$  está formado por las dos mil trescientas noventa y cuatro clases de curvas de la lista que se presenta a continuación:
- (a) La clase  $\mathcal{C}_3$  de la transformada estricta de la curva negativa  $\mathcal{C}_3$ ,
- (b) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por el punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 8$ ,
- (c) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 8$ ,
- (d) La clase  $\mathcal{C}_3 + 5\mathcal{F} - \sum_{i=1}^8 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|\mathcal{C}_3 + 5\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos,
- (e) La clase  $\mathcal{C}_3 + 3\mathcal{F} - \mathcal{E}_{i_1} - \mathcal{E}_{i_2} - \mathcal{E}_{i_3} - \mathcal{E}_{i_4}$  de la transformada estricta de la curva en  $|\mathcal{C}_3 + 3\mathcal{F}|$  que pasa por los puntos  $p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4}$  para  $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, \dots, 8\}$  con  $i_j \neq i_l$  si  $j \neq l$  para  $j, l \in \{1, \dots, 4\}$ ,
- (f) La clase  $\mathcal{C}_3 + 4\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j, l}^8 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|\mathcal{C}_3 + 4\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos excepto por  $p_j$  y  $p_l$  para  $j, l \in \{1, \dots, 8\}$  con  $j \neq l$ ,
- (g) La clase  $2\mathcal{C}_3 + 6\mathcal{F} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i} - 2\sum_{j=1}^2 \mathcal{E}_{m_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|2\mathcal{C}_3 + 6\mathcal{F}|$  que pasa por los puntos  $p_{m_1}, p_{m_2}, p_{t_1}, \dots, p_{t_5}$  y que tiene multiplicidad dos en  $p_{m_1}, p_{m_2}$ , donde  $t_i, j \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq m_j$  para  $i = 1, \dots, 5$  y  $j = 1, 2$ , y con  $m_1 \neq m_2$  y  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 5\}$ ,
- (h) La clase  $2\mathcal{C}_3 + 7\mathcal{F} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i} - 2\sum_{j=1}^3 \mathcal{E}_{m_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|2\mathcal{C}_3 + 7\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_{m_1}, p_{m_2}, p_{m_3}$ , donde  $t_i, m_j \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq m_j$  para  $i = 1, \dots, 5$ ,  $j = 1, 2, 3$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  y  $m_{j_1} \neq m_{j_2}$  si  $j_1 \neq j_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 5\}$  y  $j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\}$ ,
- (i) La clase  $3\mathcal{C}_3 + 9\mathcal{F} - 2\sum_{j=1}^7 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|3\mathcal{C}_3 + 9\mathcal{F}|$  que pasa por los puntos  $p_{t_1}, \dots, p_{t_7}$  con multiplicidad dos, donde  $t_i \in \{1, \dots, 8\}$  y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 7\}$ ,
- (j) La clase  $3\mathcal{C}_3 + 9\mathcal{F} - 3\mathcal{E}_l - \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_{t_i} - 2\sum_{j=1}^4 \mathcal{E}_{m_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|3\mathcal{C}_3 + 9\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_{m_1}, \dots, p_{m_4}$  y multiplicidad tres en  $p_l$ , donde  $t_i, m_j, l \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq m_j$ ,  $t_i \neq l$  y  $m_j \neq l$  para  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 1, \dots, 4$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  y  $m_{j_1} \neq m_{j_2}$  si  $j_1 \neq j_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3\}$  y  $j_1, j_2 \in \{1, \dots, 4\}$ ,

- (k) La clase  $3\mathcal{C}_3 + 10\mathcal{F} - \mathcal{E}_j - 3\mathcal{E}_l - 2\sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|3\mathcal{C}_3 + 10\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_{t_1}, \dots, p_{t_6}$  y multiplicidad tres en  $p_l$ , donde  $t_i, j, l \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq j$ ,  $t_i \neq l$  y  $j \neq l$  para  $i = 1, \dots, 6$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 6\}$ ,
- (l) La clase  $4\mathcal{C}_3 + 12\mathcal{F} - \mathcal{E}_l - 2\sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_{t_i} - 3\sum_{j=1}^4 \mathcal{E}_{m_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|4\mathcal{C}_3 + 12\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_{t_1}, p_{t_2}, p_{t_3}$  y multiplicidad tres en  $p_{m_1}, \dots, p_{m_4}$ , donde  $t_i, m_j, l \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq m_j$ ,  $t_i \neq l$  y  $m_j \neq l$  para  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 1, \dots, 4$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  y  $m_{j_1} \neq m_{j_2}$  si  $j_1 \neq j_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3\}$  y  $j_1, j_2 \in \{1, \dots, 4\}$ ,
- (m) La clase  $4\mathcal{C}_3 + 12\mathcal{F} - 3\mathcal{E}_j - 4\mathcal{E}_l - 2\sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|4\mathcal{C}_3 + 12\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos con multiplicidad dos excepto en  $p_j$  que tiene multiplicidad tres y en  $p_l$  que tiene multiplicidad cuatro, donde  $t_i, j, l \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq j$ ,  $t_i \neq l$  y  $j \neq l$  para  $i = 1, \dots, 6$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 6\}$ ,
- (n) La clase  $4\mathcal{C}_3 + 13\mathcal{F} - 2\sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_{t_i} - 3\sum_{j=1}^5 \mathcal{E}_{m_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|4\mathcal{C}_3 + 13\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_{t_1}, p_{t_2}, p_{t_3}$  y multiplicidad tres en  $p_{m_1}, \dots, p_{m_5}$ , donde  $t_i, m_j \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq m_j$  para  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, \dots, 5$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  y  $m_{j_1} \neq m_{j_2}$  si  $j_1 \neq j_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3\}$  y  $j_1, j_2 \in \{1, \dots, 5\}$ ,
- (ñ) La clase  $5\mathcal{C}_3 + 15\mathcal{F} - 2\sum_{i=1}^2 \mathcal{E}_{t_i} - 3\sum_{j=1}^4 \mathcal{E}_{m_j} - 4\sum_{l=1}^2 \mathcal{E}_{s_l}$  de la transformada estricta de la curva en  $|5\mathcal{C}_3 + 15\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_{t_1}, p_{t_2}$ , multiplicidad tres en  $p_{m_1}, \dots, p_{m_4}$  y multiplicidad cuatro en  $p_{s_1}, p_{s_2}$ , donde  $t_i, m_j, s_l \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq m_j$ ,  $t_i \neq s_l$  y  $m_j \neq s_l$  para  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, \dots, 4$  y  $l = 1, 2$ , y con  $t_1 \neq t_2$ ,  $s_1 \neq s_2$  y  $m_{j_1} \neq m_{j_2}$  si  $j_1 \neq j_2$  para  $j_1, j_2 \in \{1, \dots, 4\}$ ,
- (o) La clase  $5\mathcal{C}_3 + 16\mathcal{F} - 3\sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i} - 4\sum_{j=1}^2 \mathcal{E}_{m_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|5\mathcal{C}_3 + 16\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad tres en  $p_{t_1}, \dots, p_{t_6}$  y multiplicidad cuatro en  $p_{m_1}, p_{m_2}$ , donde  $t_i, m_j \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq m_j$  para  $i = 1, \dots, 6$ ,  $j = 1, 2$ , y con  $m_1 \neq m_2$  y  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 6\}$ ,
- (p) La clase  $6\mathcal{C}_3 + 18\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_j - 3\mathcal{E}_l - 4\sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|6\mathcal{C}_3 + 18\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_j$ , multiplicidad tres en  $p_l$  y multiplicidad cuatro en  $p_{t_1}, \dots, p_{t_6}$ , donde  $t_i, j, l \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq j$ ,  $t_i \neq l$  y  $j \neq l$  para  $i = 1, \dots, 6$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 6\}$ ,

- (q) La clase  $6\mathcal{C}_3 + 18\mathcal{F} - 5\mathcal{E}_l - 3\sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_{t_i} - 4\sum_{j=1}^3 \mathcal{E}_{m_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|6\mathcal{C}_3 + 18\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad tres en  $p_{t_1}, \dots, p_{t_4}$ , multiplicidad cuatro en  $p_{m_1}, p_{m_2}, p_{m_3}$  y multiplicidad cinco en  $p_l$ , donde  $t_i, m_j, l \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq m_j$ ,  $t_i \neq l$  y  $m_j \neq l$  para  $i = 1, \dots, 4$  y  $j = 1, 2, 3$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  y  $m_{j_1} \neq m_{j_2}$  si  $j_1 \neq j_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 4\}$  y  $j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\}$ ,
- (r) La clase  $6\mathcal{C}_3 + 19\mathcal{F} - 3\mathcal{E}_j - 4\sum_{i=1}^7 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|6\mathcal{C}_3 + 19\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad tres en  $p_j$  y multiplicidad cuatro en  $p_{t_1}, \dots, p_{t_7}$ , donde  $t_i, j \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq j$  para  $i = 1, \dots, 7$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 7\}$ ,
- (s) La clase  $7\mathcal{C}_3 + 21\mathcal{F} - 3\mathcal{E}_l - 4\sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_{t_i} - 5\sum_{j=1}^3 \mathcal{E}_{m_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|7\mathcal{C}_3 + 21\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad tres en  $p_l$ , multiplicidad cuatro en  $p_{t_1}, \dots, p_{t_4}$  y multiplicidad cinco en  $p_{m_1}, p_{m_2}, p_{m_3}$ , donde  $t_i, m_j, l \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq m_j$ ,  $t_i \neq l$  y  $m_j \neq l$  para  $i = 1, \dots, 4$  y  $j = 1, 2, 3$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  y  $m_{j_1} \neq m_{j_2}$  si  $j_1 \neq j_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 4\}$  y  $j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\}$ ,
- (t) La clase  $8\mathcal{C}_3 + 24\mathcal{F} - 6\mathcal{E}_l - 4\sum_{i=1}^2 \mathcal{E}_{t_i} - 5\sum_{j=1}^5 \mathcal{E}_{m_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|8\mathcal{C}_3 + 24\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad cuatro en  $p_{t_1}, p_{t_2}$ , multiplicidad cinco en  $p_{m_1}, \dots, p_{m_5}$  y multiplicidad seis en  $p_l$ , donde  $t_i, m_j, l \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq m_j$ ,  $t_i \neq l$  y  $m_j \neq l$  para  $i = 1, 2$  y  $j = 1, \dots, 5$ , y con  $t_1 \neq t_2$  y  $m_{j_1} \neq m_{j_2}$  si  $j_1 \neq j_2$  para  $j_1, j_2 \in \{1, \dots, 5\}$ ,
- (u) La clase  $9\mathcal{C}_3 + 27\mathcal{F} - 5\sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_{t_i} - 6\sum_{j=1}^4 \mathcal{E}_{m_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|9\mathcal{C}_3 + 27\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad cinco en  $p_{t_1}, \dots, p_{t_4}$  y multiplicidad seis en  $p_{m_1}, \dots, p_{m_4}$ , donde  $t_i, m_j \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq m_j$  para  $i = 1, \dots, 4$  y  $j = 1, \dots, 4$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  y  $m_{j_1} \neq m_{j_2}$  si  $j_1 \neq j_2$  para  $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{1, \dots, 4\}$ , y
- (v) La clase  $10\mathcal{C}_3 + 30\mathcal{F} - 7\mathcal{E}_j - 6\sum_{i=1}^7 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|10\mathcal{C}_3 + 30\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad seis en  $p_{t_1}, \dots, p_{t_7}$  y multiplicidad siete en  $p_j$ , donde  $t_i, j \in \{1, \dots, 8\}$  con  $t_i \neq j$  para  $i = 1, \dots, 7$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 7\}$ .

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la superficie  $W_n^{n+5}$  es anticanónica y no contiene curvas  $(-2)$ , para mostrar que su monoide efectivo está generado por las clases de las respectivas listas bastará con determinar explícitamente todas las clases de las curvas  $(-1)$  sobre tal superficie gracias al Lema 4.1 de [LH05]. Sea  $\mathcal{E} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_{n+5}\mathcal{E}_{n+5}$  la clase de una curva  $(-1)$  donde  $a, b, c_1, \dots, c_{n+5}$  son números enteros. Mostraremos que sólo existen

un número finito de valores para tales enteros. Supongamos que  $\mathcal{E}$  es diferente de las clases  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_j$ ,  $\mathcal{E}_j$  y  $\mathcal{C}_n + (n+2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+5} \mathcal{E}_i$  para cualquier  $j = 1, \dots, n+5$  (y de  $\mathcal{C}_n$  en el caso  $n = 1$ ). En particular, tenemos que se satisface que  $0 \leq c_i \leq a$  para cada  $i = 1, \dots, n+5$ . Tomando la descomposición de la clase anticanónica encontrada en la Proposición 11.11, podemos reescribir la ecuación  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+5}}.\mathcal{E} = 1$  como

$$\left( \mathcal{E}.\mathcal{C}_n \right) + \left( \mathcal{E}.\left( \mathcal{C}_n + (n+2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+5} \mathcal{E}_i \right) \right) = 1,$$

y así, debemos considerar dos casos:

- A)  $\mathcal{E}.\mathcal{C}_n = 1$     y     $\mathcal{E}.\left( \mathcal{C}_n + (n+2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+5} \mathcal{E}_i \right) = 0$ ; y  
 B)  $\mathcal{E}.\mathcal{C}_n = 0$     y     $\mathcal{E}.\left( \mathcal{C}_n + (n+2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+5} \mathcal{E}_i \right) = 1$ .

Lo que realizaremos a continuación es estudiar cada uno de estos posibles casos.

**Caso A)** Observemos que las condiciones en éste caso nos dan respectivamente las ecuaciones  $b = na + 1$  y  $\sum_{i=1}^{n+5} c_i = b + 2a$ , luego, podemos reescribir la última de ellas como

$$(11.1) \quad \sum_{i=1}^{n+5} c_i = (n+2)a + 1.$$

Además, la ecuación  $\mathcal{E}^2 = -1$  implica que  $2ab - na^2 - \sum_{i=1}^{n+5} c_i^2 = -1$  y podemos reescribir tal igualdad como

$$(11.2) \quad \sum_{i=1}^{n+5} c_i^2 = na^2 + 2a + 1.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos la condición  $\left( \sum_{i=1}^{n+5} c_i \right)^2 \leq (n+5)\left( \sum_{i=1}^{n+5} c_i^2 \right)$ , esto implica que

$$\left( (n+2)a + 1 \right)^2 \leq (n+5)(na^2 + 2a + 1),$$

y reduciendo términos obtenemos  $(4-n)a^2 - 6a \leq n+4$ . Posteriormente, se sigue la condición

$$(11.3) \quad a \leq \frac{3 + \sqrt{25 - n^2}}{4 - n}.$$

Sustituyendo  $n = 1$  en la desigualdad anterior obtenemos  $a \leq 2$ , sustituyendo  $n = 2$  obtenemos que  $a \leq 3$  y sustituyendo  $n = 3$  obtenemos que  $a \leq 7$ . De esta forma, fijando el valor de  $n$  en las Ecuaciones (11.1) y (11.2) debemos de sustituir los posibles valores de  $a$  en el respectivo caso (salvo por  $a = 0$  que se descarta inmediatamente) y resolver los sistemas de ecuaciones para determinar los valores de  $c_i$  para cualquier  $i = 1, \dots, n+5$ . Hemos realizado los cálculos de la solución simultánea de las Ecuaciones (11.1) y (11.2) con la condición que  $0 \leq c_i \leq a$  para cada  $i = 1, \dots, n+5$  en el programa MATHEMATICA (ver Sección 1 del Apéndice A),

los resultados obtenidos hasta permutación de los índices junto con la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch implican la existencia de las clases de curvas  $(-1)$  que se muestran en la siguiente tabla:

$n$	$a$	$\mathcal{E}$
1	1	$\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j, l}^6 \mathcal{E}_i$
	2	$2\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i - 2\mathcal{E}_j$
2	1	$\mathcal{C}_2 + 3\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j, l}^7 \mathcal{E}_i$
	2	$2\mathcal{C}_2 + 5\mathcal{F} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i - 2 \sum_{j=1}^2 \mathcal{E}_{m_j}$
	3	$3\mathcal{C}_2 + 7\mathcal{F} - \mathcal{E}_j - 2 \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_i$
3	1	$\mathcal{C}_3 + 4\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j, l}^8 \mathcal{E}_i$
	2	$2\mathcal{C}_3 + 7\mathcal{F} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_i - 2 \sum_{j=1}^3 \mathcal{E}_{m_j}$
	3	$3\mathcal{C}_3 + 10\mathcal{F} - \mathcal{E}_j - 3\mathcal{E}_l - 2 \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_i$
	4	$4\mathcal{C}_3 + 13\mathcal{F} - 2 \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i - 3 \sum_{j=1}^5 \mathcal{E}_{m_j}$
	5	$5\mathcal{C}_3 + 16\mathcal{F} - 3 \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_i - 4 \sum_{j=1}^2 \mathcal{E}_{m_j}$
	6	$6\mathcal{C}_3 + 19\mathcal{F} - 3\mathcal{E}_j - 4 \sum_{i=1}^7 \mathcal{E}_i$
	7	No existe

**Caso B)** Las condiciones que se tienen en este caso nos dicen respectivamente que  $b = na$  y  $\sum_{i=1}^{n+5} c_i = b + 2a - 1$ , luego, podemos reescribir la última ecuación como

$$(11.4) \quad \sum_{i=1}^{n+5} c_i = (n+2)a - 1.$$

Ahora bien, la ecuación  $\mathcal{E}^2 = -1$  se traduce en  $2ab - na^2 - \sum_{i=1}^{n+5} c_i^2 = -1$  y posteriormente podemos escribirla como

$$(11.5) \quad \sum_{i=1}^{n+5} c_i^2 = na^2 + 1.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que  $(\sum_{i=1}^{n+5} c_i)^2 \leq (n+5)(\sum_{i=1}^{n+5} c_i^2)$ , esto implica que

$$((n+2)a - 1)^2 \leq (n+5)(na^2 + 1)$$

y reduciendo términos obtenemos que  $(4-n)a^2 - 2(n+2)a \leq n+4$ . Como consecuencia, tenemos la desigualdad

$$(11.6) \quad a \leq \frac{n+2+2\sqrt{n+5}}{4-n}.$$



Sustituyendo los valores  $n = 1, 2, 3$  en la desigualdad anterior obtenemos respectivamente que  $a \leq 2$ , que  $a \leq 4$  y que  $a \leq 10$ . Lo siguiente es fijar  $n$  para los valores anteriores y encontrar las soluciones simultáneas de las Ecuaciones (11.4) y (11.5) para cada posible valor de  $a$  con la condición  $0 \leq c_i \leq a$  para cada  $i = 1, \dots, n + 5$  (excepto el valor  $a = 0$  que no puede suceder). De manera similar al caso anterior, hemos usado el programa MATHEMATICA (ver Sección 1 del Apéndice A) para resolver tales ecuaciones y los resultados obtenidos hasta permutación de los índices junto con la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch implican la existencia de las siguientes clases de curvas  $(-1)$ :

$n$	$a$	$\mathcal{E}$
1	1	$\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j$
	2	$2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j}^6 \mathcal{E}_i$
2	1	$\mathcal{C}_2 + 2\mathcal{F} - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j - \mathcal{E}_l$
	2	$2\mathcal{C}_2 + 4\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_j - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i}$
	3	$3\mathcal{C}_2 + 6\mathcal{F} - \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_{t_i} - 2 \sum_{j=1}^4 \mathcal{E}_{m_j}$
	4	$4\mathcal{C}_2 + 8\mathcal{F} - 3\mathcal{E}_j - 2 \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$
3	1	$\mathcal{C}_3 + 3\mathcal{F} - \mathcal{E}_{i_1} - \mathcal{E}_{i_2} - \mathcal{E}_{i_3} - \mathcal{E}_{i_4}$
	2	$2\mathcal{C}_3 + 6\mathcal{F} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i} - 2 \sum_{j=1}^2 \mathcal{E}_{m_j}$
	3	$3\mathcal{C}_3 + 9\mathcal{F} - 2 \sum_{j=1}^7 \mathcal{E}_{t_i}$
		$3\mathcal{C}_3 + 9\mathcal{F} - 3\mathcal{E}_l - \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_{t_i} - 2 \sum_{j=1}^4 \mathcal{E}_{m_j}$
	4	$4\mathcal{C}_3 + 12\mathcal{F} - \mathcal{E}_l - 2 \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_{t_i} - 3 \sum_{j=1}^4 \mathcal{E}_{m_j}$
		$4\mathcal{C}_3 + 12\mathcal{F} - 3\mathcal{E}_j - 4\mathcal{E}_l - 2 \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$
	5	$5\mathcal{C}_3 + 15\mathcal{F} - 2 \sum_{i=1}^2 \mathcal{E}_{t_i} - 3 \sum_{j=1}^4 \mathcal{E}_{m_j} - 2 \sum_{l=1}^2 \mathcal{E}_{s_l}$
	6	$6\mathcal{C}_3 + 18\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_j - 3\mathcal{E}_l - 4 \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$
		$6\mathcal{C}_3 + 18\mathcal{F} - 5\mathcal{E}_l - 3 \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_{t_i} - 4 \sum_{j=1}^3 \mathcal{E}_{m_j}$
	7	$7\mathcal{C}_3 + 21\mathcal{F} - 3\mathcal{E}_l - 4 \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_{t_i} - 4 \sum_{j=1}^3 \mathcal{E}_{m_j}$
8	$8\mathcal{C}_3 + 24\mathcal{F} - 6\mathcal{E}_l - 4 \sum_{i=1}^2 \mathcal{E}_{t_i} - 5 \sum_{j=1}^5 \mathcal{E}_{m_j}$	
9	$9\mathcal{C}_3 + 27\mathcal{F} - 5 \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_{t_i} - 6 \sum_{j=1}^4 \mathcal{E}_{m_j}$	
10	$10\mathcal{C}_3 + 30\mathcal{F} - 7\mathcal{E}_j - 6 \sum_{i=1}^7 \mathcal{E}_{t_i}$	

De esta manera, hemos determinado todas las clases de las curvas  $(-1)$  sobre  $W_n^{n+5}$ . Por lo tanto, concluimos que el monoide efectivo  $\text{Eff}(W_n^{n+5})$  es finitamente generado y hemos determinado el conjunto generador mínimo en cada caso.  $\square$

**Teorema 11.17.** *Con la notación anterior, si  $r = 7$  y  $n = 1$ , entonces el monoide efectivo  $\text{Eff}(W_1^7)$  es finitamente generado y su conjunto generador mínimo está formado por las doscientas cuarenta y un clases de la siguiente lista:*

- (a) La clase  $\mathcal{C}_1$  de la transformada estricta de la curva negativa  $C_1$ ,
- (b) La clase  $\mathcal{F} - \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la fibra que pasa por el punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 7$ ,
- (c) La clase  $\mathcal{E}_i$  de la curva excepcional correspondiente al punto  $p_i$  para  $1 \leq i \leq 7$ ,
- (d) La clase  $2\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - \sum_{i=1}^7 \mathcal{E}_i$  de un divisor anticanónico,
- (e) La clase  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_1 + F|$  que pasa por los puntos  $p_i$  y  $p_j$  para  $i, j \in \{1, \dots, 7\}$  con  $i \neq j$ ,
- (f) La clase  $\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_1 + 2F|$  que pasa por los puntos  $p_{t_1}, p_{t_2}, p_{t_3}$  y  $p_{t_4}$  para  $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \{1, \dots, 7\}$  con  $t_i \neq t_j$  si  $i \neq j$  para  $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ ,
- (g) La clase  $\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j}^7 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|C_1 + 3F|$  que pasa por todos los puntos excepto por  $p_j$  para  $1 \leq j \leq 7$ ,
- (h) La clase  $2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|2C_1 + 2F|$  que pasa por los puntos  $p_{t_1}, \dots, p_{t_5}$ , donde  $t_i \in \{1, \dots, 7\}$  con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 5\}$ ,
- (i) La clase  $2\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_j - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|2C_1 + 3F|$  que pasa por los puntos  $p_j, p_{t_1}, \dots, p_{t_5}$  y que tiene multiplicidad dos en  $p_j$ , donde  $j, t_i \in \{1, \dots, 7\}$  con  $t_i \neq j$  para  $i = 1, \dots, 5$ , y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 5\}$ ,
- (j) La clase  $2\mathcal{C}_1 + 4\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_{s_1} - 2\mathcal{E}_{s_2} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|2C_1 + 4F|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_{s_1}, p_{s_2}$ , donde  $s_j, t_i \in \{1, \dots, 7\}$  con  $t_i \neq s_j$  para  $i = 1, \dots, 5$  y  $j = 1, 2$ , y con  $s_1 \neq s_2$  y  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 5\}$ ,
- (k) La clase  $3\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_j - \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$  de la curva en  $|3C_1 + 3F|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_j$ , donde  $j, t_i \in \{1, \dots, 7\}$  con  $j \neq t_i$  para  $i = 1, \dots, 6$  y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 6\}$ ,
- (l) La clase  $3\mathcal{C}_1 + 4\mathcal{F} - \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_{t_i} - 2\sum_{j=1}^3 \mathcal{E}_{s_j}$  de la transformada estricta de la curva en  $|3C_1 + 4F|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_{s_1}, p_{s_2}, p_{s_3}$ , donde  $t_i, s_j \in \{1, \dots, 7\}$  con  $t_i \neq s_j$  para  $i = 1, \dots, 4$  y  $j = 1, 2, 3$  y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  y  $s_{j_1} \neq s_{j_2}$  si  $j_1 \neq j_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 4\}$  y  $j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\}$ ,
- (m) La clase  $3\mathcal{C}_1 + 5\mathcal{F} - \mathcal{E}_{s_1} - \mathcal{E}_{s_2} - 2\sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|3C_1 + 5F|$  que pasa por todos los puntos y que tiene multiplicidad dos en  $p_{t_1}, \dots, p_{t_5}$ , donde  $s_j, t_i \in \{1, \dots, 7\}$  con  $t_i \neq s_j$  para  $i = 1, \dots, 5$  y  $j = 1, 2$  y con  $s_1 \neq s_2$  y  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 5\}$ ,
- (n) La clase  $3\mathcal{C}_1 + 6\mathcal{F} - 2\sum_{i=1}^7 \mathcal{E}_i$  de la transformada estricta de la curva en  $|3C_1 + 6F|$  que pasa por todos los puntos con multiplicidad dos,

(ñ) La clase  $4\mathcal{C}_1 + 5\mathcal{F} - \mathcal{E}_j - 2\sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|4\mathcal{C}_1 + 5\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos con multiplicidad dos salvo por  $p_j$ , donde  $j, t_i \in \{1, \dots, 7\}$  con  $j \neq t_i$  para  $i = 1, \dots, 6$  y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 6\}$ ,  
y

(o) La clase  $4\mathcal{C}_1 + 6\mathcal{F} - 3\mathcal{E}_j - 2\sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$  de la transformada estricta de la curva en  $|4\mathcal{C}_1 + 6\mathcal{F}|$  que pasa por todos los puntos con multiplicidad dos salvo en  $p_j$  que tiene multiplicidad tres, donde  $j, t_i \in \{1, \dots, 7\}$  con  $j \neq t_i$  para  $i = 1, \dots, 6$  y con  $t_{i_1} \neq t_{i_2}$  si  $i_1 \neq i_2$  para  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 6\}$ ,

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la superficie  $W_1^7$  no contiene curvas  $(-2)$  y es anticanónica, para concluir que la lista de clases propuesta es el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(W_1^7)$  bastará con determinar todas las clases de curvas  $(-1)$  sobre  $W_1^7$  en vista del Lema 4.1 de [LH05]. Sea  $\mathcal{E} = a\mathcal{C}_1 + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_7\mathcal{E}_7$  la clase de una curva  $(-1)$  sobre  $W_1^7$  para algunos números enteros  $a, b, c_1, \dots, c_7$ . Supongamos que  $\mathcal{E}$  es diferente de las clases  $\mathcal{C}_1, \mathcal{F} - \mathcal{E}_i$  y  $\mathcal{E}_i$  para cada  $i = 1, \dots, 7$ , de esta manera, tenemos respectivamente las condiciones  $a \leq b$ ,  $c_i \leq a$  y  $0 \leq c_i$  para todo  $i = 1, \dots, 7$ . De las ecuaciones  $-\mathcal{K}_{W_1^7} \cdot \mathcal{E} = 1$  y  $\mathcal{E}^2 = -1$  obtenemos respectivamente que

$$(11.7) \quad \sum_{i=1}^7 c_i = 2b + a - 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^7 c_i^2 = 2ab - a^2 + 1.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que  $(\sum_{i=1}^7 c_i)^2 \leq 7\sum_{i=1}^7 c_i^2$ , esto implica que

$$(2b + a - 1)^2 \leq 7(2ab - a^2 + 1)$$

y posteriormente se sigue la ecuación

$$(11.8) \quad \left(b - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}a + 1\right)\right)^2 \leq -\frac{7}{16}a^2 + \frac{7}{4}a + \frac{7}{4}.$$

La desigualdad anterior implica que

$$0 \leq -\frac{7}{16}a^2 + \frac{7}{4}a + \frac{7}{4},$$

y de tal desigualdad se sigue que  $a \leq 2 + \sqrt{8}$ . Por lo tanto, tenemos que  $a \leq 4$ .

Ahora bien, sustituyendo los posibles de valores de  $a$  en la Ecuación (11.8) para obtener una cota superior para  $b$  y recordando que  $a \leq b$ , obtenemos lo siguiente:

- Si  $a = 4$ , entonces  $4 \leq b \leq 6$ ,
- Si  $a = 3$ , entonces  $3 \leq b \leq 6$ ,
- Si  $a = 2$ , entonces  $2 \leq b \leq 4$ ,

- Si  $a = 1$ , entonces  $1 \leq b \leq 3$ , y
- Si  $a = 0$ , entonces  $0 \leq b \leq 1$ .

Lo siguiente que debemos realizar es fijar cada posible valor de  $a$  con cada uno de los respectivos y posibles valores de  $b$  en las igualdades de la Ecuación (11.7) y resolver tal sistema de ecuaciones para determinar la existencia de clases de curvas  $(-1)$ . Hemos utilizado el programa MATHEMATICA (ver Sección 2 del Apéndice A) para resolver tales sistemas de ecuaciones encontrando las clases de curvas  $(-1)$  que se presentan en la siguiente tabla:

$a$	$b$	$\mathcal{E}$
4	6	$4\mathcal{C}_1 + 6\mathcal{F} - 3\mathcal{E}_j - 2\sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$
	5	$4\mathcal{C}_1 + 5\mathcal{F} - \mathcal{E}_j - 2\sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$
	4	No existe
3	6	$3\mathcal{C}_1 + 6\mathcal{F} - 2\sum_{i=1}^7 \mathcal{E}_i$
	5	$3\mathcal{C}_1 + 5\mathcal{F} - \mathcal{E}_{s_1} - \mathcal{E}_{s_2} - 2\sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i}$
	4	$3\mathcal{C}_1 + 4\mathcal{F} - \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_{t_i} - 2\sum_{j=1}^3 \mathcal{E}_{s_j}$
	3	$3\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_j - \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_{t_i}$
2	4	$2\mathcal{C}_1 + 4\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_{s_1} - 2\mathcal{E}_{s_2} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i}$
	3	$2\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - 2\mathcal{E}_j - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i}$
	2	$2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \sum_{i=1}^5 \mathcal{E}_{t_i}$
1	3	$\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j}^7 \mathcal{E}_i$
	2	$\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{F} - \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_{t_i}$
	1	$\mathcal{C}_1 + \mathcal{F} - \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j$
0	1	No existe
	0	No existe

Observemos que cada clase en lista existe gracias a la Proposición 1.49 y al teorema de Riemann-Roch. De esta forma, concluimos que las clases de la lista propuesta forman el conjunto generador mínimo de  $\text{Eff}(W_1^7)$ .  $\square$

**Observación 11.18.** Para un número entero positivo  $r$  tal que  $r \leq 8$ , consideremos  $r$  puntos  $p_1, \dots, p_r$  en posición general sobre  $\mathbb{P}^2$ , consideramos la superficie  $X_r$  obtenida de la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en tales puntos, denotamos por  $\mathcal{E}'_0$  a la clase en  $\text{NS}(\mathbb{P}^2)$  de una línea en  $\mathbb{P}^2$  que no contiene alguno de tales puntos y por  $\mathcal{E}'_i$  a la clase en  $\text{NS}(\mathbb{P}^2)$  correspondiente a la curva excepcional del punto  $p_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . Luego, considerando a  $\Sigma_1$  como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en  $p_r$ , tenemos que los puntos  $p_1, \dots, p_{r-1}$  están en posición general sobre  $\Sigma_1$ . Además, notemos que existe un isomorfismo natural entre los grupos  $\text{NS}(W_1^{r-1})$  y  $\text{NS}(X_r)$  definido entre las

respectivas bases  $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{F}, -\mathcal{E}_1, \dots, -\mathcal{E}_{r-1}\}$  y  $\{\mathcal{E}'_0, -\mathcal{E}'_1, \dots, -\mathcal{E}'_r\}$  como  $\mathcal{C}_1 \mapsto \mathcal{E}'_r, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{E}'_0 - \mathcal{E}'_r$  y  $\mathcal{E}_i \mapsto \mathcal{E}'_i$  para cada  $i = 1, \dots, r-1$ . De esta manera, al utilizar tal isomorfismo tenemos que los conjuntos generadores mínimos de los monoides efectivos de las superficies  $W_1^{r-1}$  encontrados en los Teoremas 11.13, 11.14, 11.16 y 11.17 son enviados a los conjuntos generadores mínimos de los monoides efectivos que Rosoff determina para las superficies  $X_r$  (ver Teorema 11.2).

A continuación presentaremos algunas consecuencias inmediatas a los Teoremas 11.13, 11.14, 11.16 y 11.17.

**Lema 11.19.** *Con la notación anterior, sea  $W_n^{r'}$  la superficie obtenida como la explosión de  $\Sigma_n$  en  $r$  puntos  $p'_1, \dots, p'_r$  especializados donde  $r \leq n + 4$ , ó ( $r = n + 5$  y  $n \leq 3$ ), ó ( $r = 7$  y  $n = 1$ ). Existe un número finito de clases de curvas  $(-1)$  sobre  $W_n^{r'}$ .*

DEMOSTRACIÓN. En el grupo de Néron-Severi  $\text{NS}(W_n^{r'})$  de  $W_n^{r'}$ , denotaremos por  $\mathcal{C}'_n$  a la clase de la transformada total de la curva negativa  $C_n$ , por  $\mathcal{F}'$  a la clase de la transformada total de una fibra que no contiene alguno de los puntos y por  $\mathcal{E}'_i$  a la clase del divisor excepcional asociado al punto  $p'_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . Observemos que existe una biyección natural entre la base  $\{\mathcal{C}_n, \mathcal{F}, -\mathcal{E}_1, \dots, -\mathcal{E}_r\}$  de  $\text{NS}(W_n^r)$  y la base  $\{\mathcal{C}'_n, \mathcal{F}', -\mathcal{E}'_1, \dots, -\mathcal{E}'_r\}$  de  $\text{NS}(W_n^{r'})$  dada por  $\mathcal{C}_n \mapsto \mathcal{C}'_n, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}'$  y  $\mathcal{E}_i \mapsto \mathcal{E}'_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . Tal biyección se extiende a los grupos  $\text{NS}(W_n^r)$  y  $\text{NS}(W_n^{r'})$  y además preserva la forma de intersección. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\rho(W_n^{r'}) \geq 3$ .

Sea  $\mathcal{E}' = a'\mathcal{C}'_n + b'\mathcal{F}' - c'_1\mathcal{E}'_1 - \dots - c'_r\mathcal{E}'_r$  la clase de una curva  $(-1)$  sobre  $W_n^{r'}$ , donde  $a', b', c'_1, \dots, c'_r$  son números enteros. Observemos que la clase inducida  $\mathcal{E} = a'\mathcal{C}_n + b'\mathcal{F} - c'_1\mathcal{E}_1 - \dots - c'_r\mathcal{E}_r$  sobre  $W_n^r$  satisface que  $\mathcal{E}^2 = -1$  y que  $-\mathcal{K}_{W_n^r} \cdot \mathcal{E} = 1$ . Si  $\mathcal{E}$  no fuese una clase irreducible sobre  $W_n^r$ , entonces consideraríamos una de sus componentes irreducibles  $\mathcal{D}$ . Por el principio de semicontinuidad (ver el quinto párrafo en la página 342 de [Mon11]) tendríamos que la clase inducida  $\mathcal{D}'$  sobre  $W_n^{r'}$  sería una clase efectiva, aún más, tendríamos que sería igual a  $\mathcal{E}'$ . Esto implicaría que  $\mathcal{E}$  sería una clase irreducible y tendríamos una contradicción con nuestra hipótesis. Por lo tanto, descartamos tal caso.

Ahora bien, si  $\mathcal{E}$  es una clase irreducible, entonces tal elemento es la clase de una curva  $(-1)$  sobre  $W_n^r$ , luego, usando los Teoremas 11.13, 11.14, 11.16 y 11.17 tenemos que existen únicamente un número finito de ellas. En particular, podemos dar explícitamente los valores de sus coeficientes. Por lo tanto, existen un número finito de posibilidades para  $\mathcal{E}'$ .  $\square$

**Corolario 11.20.** *Sean  $n$  y  $r$  números enteros positivos. El monoide efectivo de la superficie  $W_n^{r'}$  obtenida como la explosión de la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  en  $r$  puntos en posición arbitraria con  $r \leq n + 4$ , como la explosión de  $\Sigma_n$  en  $n + 5$  puntos en posición arbitraria*

con  $n \leq 3$  y como la explosión de  $\Sigma_1$  en siete puntos en posición arbitraria es finitamente generado.

DEMOSTRACIÓN. Utilizaremos la notación que fue fijada en el primer párrafo del lema anterior y de nueva cuenta, supondremos sin pérdida de generalidad que  $\rho(W_n^{r'}) \geq 3$ .

Puesto que la superficie  $W_n^{r'}$  es una superficie racional anticanónica, por el Lema 4.1 de [LH05] sabemos que las clases de las curvas  $(-1)$ , las clases de las curvas  $(-2)$  y las componentes irreducibles de la clase anticanónica generan a  $\text{Eff}(W_n^{r'})$ . Mostraremos que existe un número finito de cada uno de los tipos de generadores.

Sea  $\mathcal{D}' = a\mathcal{C}'_n + b\mathcal{F}' - c_1\mathcal{E}'_1 - \cdots - c_r\mathcal{E}'_r$  un generador de  $\text{Eff}(W_n^{r'})$  donde  $a, b, c_1, \dots, c_r$  son números enteros. Si  $\mathcal{D}'$  es una componente irreducible de la clase anticanónica de  $W_n^{r'}$ , entonces claramente hay un número finito de posibilidades para  $\mathcal{D}'$ . Ahora bien, si  $\mathcal{D}'$  es la clase de una curva  $(-1)$ , entonces por el Lema 11.19 tenemos que hay un número finito de posibilidades para  $\mathcal{D}'$ .

Por último, supongamos que  $\mathcal{D}'$  es la clase de una curva  $(-2)$ . Para cada uno de los casos que queremos mostrar, vamos a considerar la descomposición de la clase anticanónica  $-\mathcal{K}_{W_n^{r'}}$  inducida por la descomposición de la clase anticanónica  $-\mathcal{K}_{W_n^r}$  del caso de puntos en posición general que se encuentra en la Proposición 11.11 (excepto por el caso  $r = 7$  y  $n = 1$  donde la clase anticanónica  $-\mathcal{K}_{W_n^r}$  es irreducible). En primer lugar, supongamos que el número de intersección de  $\mathcal{D}'$  con cada una de las clases en la descomposición de  $-\mathcal{K}_{W_n^{r'}}$  es no negativo. Puesto que  $\mathcal{D}'$  es la clase de una curva  $(-2)$  tenemos las ecuaciones  $-\mathcal{K}_{W_n^{r'}} \cdot \mathcal{D}' = 0$  y  $\mathcal{D}'^2 = -2$ , además, puesto que  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{E}'_i$  es no negativo se tiene que el entero  $c_i$  es no negativo para cada  $i = 1, \dots, r$ .

**Caso  $r \leq n$ .** En este caso, tenemos la siguiente descomposición inducida para la clase anticanónica:

$$-\mathcal{K}_{W_n^{r'}} = 2(\mathcal{C}'_n) + \sum_{i=1}^r (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_i) + (n+2-r)(\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_1) + (n+2-r)\mathcal{E}'_1.$$

Así, la hipótesis de ortogonalidad de  $\mathcal{D}'$  con  $-\mathcal{K}_{W_n^{r'}}$  implicaría que  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{C}'_n = 0$ , que  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{E}'_1 = 0$  y que  $\mathcal{D}' \cdot (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_i) = 0$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . De esta forma, se tendría respectivamente que  $b = na$ , que  $c_1 = 0$  y que  $a = c_i$  para cada  $i = 1, \dots, r$  y como consecuencia, se seguiría que  $\mathcal{D}'$  sería igual a la clase nula, algo que no podría suceder. Por lo tanto, la clase  $\mathcal{D}'$  no existe.

**Caso  $r = n + 1$ .** La descomposición de  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+1}'}$  que es inducida en este caso se presenta a continuación:

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+1}'} = (\mathcal{C}'_n) + \left( \mathcal{C}'_n + n\mathcal{F}' - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}'_i \right) + (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_1) + (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_2) + \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2.$$

Luego, la ecuación  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+1}'} \cdot \mathcal{D}' = 0$  implicaría que los números de intersección  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{C}'_n$ ,  $\mathcal{D}' \cdot (\mathcal{C}'_n + n\mathcal{F}' - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}'_i)$ ,  $\mathcal{D}' \cdot (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_1)$ ,  $\mathcal{D}' \cdot (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_2)$ ,  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{E}'_1$  y  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{E}'_2$  serían iguales a cero. Así, tendríamos respectivamente que  $b = na$ ,  $b = \sum_{i=1}^{n+1} c_i$ ,  $a = c_1$ ,  $a = c_2$ ,  $c_1 = 0$  y  $c_2 = 0$  y por consiguiente, que  $\mathcal{D}'$  sería la clase nula, una contradicción. De este modo, tal clase  $\mathcal{D}'$  no puede existir.

**Caso  $r = n + 2$ .** La descomposición inducida para la clase anticanónica de este caso está dada por

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+2}'} = (\mathcal{C}'_n) + \left( \mathcal{C}'_n + n\mathcal{F}' - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}'_i \right) + (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_1) + (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_{n+2}) + \mathcal{E}'_1.$$

Ahora bien, tendríamos que  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{C}'_n = 0$ ,  $\mathcal{D}' \cdot (\mathcal{C}'_n + n\mathcal{F}' - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}'_i) = 0$ ,  $\mathcal{D}' \cdot (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_1) = 0$ ,  $\mathcal{D}' \cdot (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_{n+2}) = 0$  y  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{E}'_1 = 0$  debido a la ortogonalidad de  $\mathcal{D}'$  con  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+2}'}$ . De esta manera, se obtendrían respectivamente las igualdades  $b = na$ ,  $b = \sum_{i=1}^{n+1} c_i$ ,  $a = c_1$ ,  $a = c_{n+2}$  y  $c_1 = 0$ , y consecuentemente tendríamos que  $\mathcal{D}'$  sería igual a la clase nula lo cual no podría suceder. Consiguientemente, la clase  $\mathcal{D}'$  no existe.

**Caso  $r = n + 3$ .** La descomposición de la clase anticanónica en este caso que es inducida por la clase anticanónica del caso de posición general está dada por

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+3}'} = (\mathcal{C}'_n) + \left( \mathcal{C}'_n + (n+1)\mathcal{F}' - \sum_{i=1}^{n+3} \mathcal{E}'_i \right) + (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_1) + \mathcal{E}'_1.$$

La condición  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+3}'} \cdot \mathcal{D}' = 0$  implicaría que  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{C}'_n = 0$ ,  $\mathcal{D}' \cdot (\mathcal{C}'_n + (n+1)\mathcal{F}' - \sum_{i=1}^{n+3} \mathcal{E}'_i) = 0$ ,  $\mathcal{D}' \cdot (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_1) = 0$  y  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{E}'_1 = 0$ , esto a su vez implicaría respectivamente que  $b = na$ , que  $b + a = \sum_{i=1}^{n+3} c_i$ , que  $a = c_1$  y que  $c_1 = 0$ . Se seguiría que  $\mathcal{D}' = 0$ , lo cual no podría suceder. Por lo tanto, tenemos que la clase  $\mathcal{D}'$  no puede existir.

**Caso  $r = n + 4$ .** La descomposición de  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+4}'}$  que está inducida por  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+4}}$  es la siguiente:

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+4}'} = (\mathcal{C}'_n) + \left( \mathcal{C}'_n + (n+1)\mathcal{F}' - \sum_{i=1}^{n+3} \mathcal{E}'_i \right) + (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_{n+4}).$$

De la ecuación  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+4}'} \cdot \mathcal{D}' = 0$  se sigue que  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{C}'_n = 0$ ,  $\mathcal{D}' \cdot (\mathcal{C}'_n + (n+1)\mathcal{F}' - \sum_{i=1}^{n+3} \mathcal{E}'_i) = 0$  y  $\mathcal{D}' \cdot (\mathcal{F}' - \mathcal{E}'_{n+4}) = 0$ , y como consecuencia obtenemos respectivamente las ecuaciones  $b = na$ ,

$b + a = \sum_{i=1}^{n+3} c_i$  y  $a = c_{n+4}$ . De este modo, se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n+4} c_i = (n+2)a.$$

Por otro lado, la ecuación  $\mathcal{D}'^2 = -2$  nos dice que  $2ab - na^2 - \sum_{i=1}^{n+4} c_i^2 = -2$ , y de esto se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n+4} c_i^2 = na^2 + 2.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que  $(\sum_{i=1}^{n+4} c_i)^2 \leq (n+4) \sum_{i=1}^{n+4} c_i^2$ , así, tenemos que  $(n+2)^2 a^2 \leq (n+4)(na^2 + 2)$  y como consecuencia que

$$a \leq \sqrt{\frac{n+4}{2}}.$$

De dicha condición tenemos que  $a$  únicamente puede tomar un número finito de valores. Asimismo, de la desigualdad anterior se deriva que

$$b \leq n \left( \sqrt{\frac{n+4}{2}} \right)$$

por lo cual  $b$  también tiene un número finito de posibilidades. Por último, de las ecuaciones  $\sum_{i=1}^{n+3} c_i = (n+1)a$  y  $c_{n+4} = a$  se sigue que  $c_i$  sólo puede tomar un número finito de valores para cada  $i = 1, \dots, n+4$ . Por lo tanto, tenemos que existe un número finito de posibilidades para  $\mathcal{D}'$ .

**Caso  $r = n + 5$  y  $n \leq 3$ .** La clase anticanónica cuando los puntos están en posición general con estas condiciones induce la siguiente descomposición de la clase anticanónica  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+5'}}$ :

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+5'}} = (\mathcal{C}'_n) + \left( \mathcal{C}'_n + (n+2)\mathcal{F}' - \sum_{i=1}^{n+5} \mathcal{E}'_i \right).$$

Gracias a la ortogonalidad de  $\mathcal{D}'$  con  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+5'}}$  se siguen las ecuaciones  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{C}'_n = 0$  y  $\mathcal{D}' \cdot (\mathcal{C}'_n + (n+2)\mathcal{F}' - \sum_{i=1}^{n+5} \mathcal{E}'_i) = 0$ , así, tenemos respectivamente las igualdades  $b = na$  y  $b + 2a = \sum_{i=1}^{n+5} c_i$ . De este modo, se tiene la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n+5} c_i = (n+2)a.$$



Notemos que en particular  $a$  es no negativo y por consiguiente  $b$  también es no negativo. Por otro lado, de la condición  $\mathcal{D}'^2 = -2$  se sigue que  $2ab - na^2 - \sum_{i=1}^{n+5} c_i^2 = -2$  y luego

$$\sum_{i=1}^{n+5} c_i^2 = na^2 + 2.$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que  $(\sum_{i=1}^{n+5} c_i)^2 \leq (n+5) \sum_{i=1}^{n+5} c_i^2$ , es decir, tenemos que  $(n+2)^2 a^2 \leq (n+5)(na^2 + 2)$ . Reduciendo términos se obtiene la desigualdad  $(4-n)a^2 \leq 2(n+5)$  y de ella se sigue que

$$a \leq \sqrt{\frac{2(n+5)}{4-n}}.$$

De esta forma,  $a$  sólo puede tomar un número finito de valores. Además, la desigualdad anterior implica que

$$b \leq n \left( \sqrt{\frac{2(n+5)}{4-n}} \right),$$

y consecuentemente tenemos que  $b$  sólo puede tomar un número finito de valores. Aún más, de la ecuación  $\sum_{i=1}^{n+5} c_i = (n+2)a$  obtenemos que  $c_i$  únicamente puede tomar un número finito de valores para cada  $i = 1, \dots, n+5$ . Por lo tanto, tenemos que hay un número finito de posibilidades para  $\mathcal{D}'$  en este caso.

**Caso  $r = 7$  y  $n = 1$ .** Para el último caso que resta a verificar, no tomaremos descomposición alguna de la clase anticanónica. De las igualdades  $-\mathcal{K}_{W_1^{7'}} \cdot \mathcal{D}' = 0$  y  $\mathcal{D}'^2 = -2$  se siguen respectivamente las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^7 c_i = 2b + a \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^7 c_i^2 = 2ab - a^2 + 2.$$

Consideremos a la clase  $(-1) \mathcal{C}'_1$ . Si  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{C}'_1 < 0$ , entonces  $\mathcal{D}'$  es una componente irreducible de  $\mathcal{C}'_1$  y sólo tiene un número finito de posibilidades. Así, asumamos que  $\mathcal{D}' \cdot \mathcal{C}'_1 \geq 0$ . En tal caso, tenemos que  $a \leq b$ . Observemos que si  $b < 0$ , entonces se seguiría que  $a < 0$  y esto contradiría el hecho que  $\sum_{i=1}^7 c_i = 2b + a$ . Por lo tanto,  $b \geq 0$ . Ahora bien, si  $b = 0$ , entonces la ecuación  $\sum_{i=1}^7 c_i = a$  implica que  $a \geq 0$ . Por último, consideremos el caso que  $b > 0$  y supongamos que  $a < 0$ . Bajo tales condiciones tendríamos que el lado izquierdo de la ecuación  $\sum_{i=1}^7 c_i^2 = 2ab - a^2 + 2$  sería un número no negativo mientras que el lado derecho sería un número negativo, algo que no podría suceder. Por consiguiente, si  $b > 0$ , entonces sucede que  $a \geq 0$ . De este modo, podemos asumir que tanto  $a$  como  $b$  son números enteros no negativos.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que  $(\sum_{i=1}^7 c_i)^2 \leq 7 \sum_{i=1}^7 c_i^2$ , de este modo, tenemos que  $(2b + a)^2 \leq 7(2ab - a^2 + 2)$ . Reduciendo términos obtenemos la desigualdad

$2b^2 - 5ab \leq -4a^2 + 7$  y de ella se sigue la condición

$$(11.9) \quad \left(b - \frac{5}{4}a\right)^2 \leq -\frac{7}{16}a^2 + \frac{7}{2}.$$

Tal desigualdad implica que

$$0 \leq -\frac{7}{16}a^2 + \frac{7}{2}$$

y de ella obtenemos que  $a \leq \sqrt{8}$ . Consecuentemente,  $a \leq 2$  y así tenemos que tiene un número finito de posibilidades. Ahora bien, puesto que de la Ecuación (11.9) se deduce que

$$b \leq \frac{5a + \sqrt{-7a^2 + 56}}{4},$$

se tiene que  $b$  únicamente puede tomar un número finito de valores. Finalmente, usando la ecuación  $\sum_{i=1}^7 c_i = 2b + a$  se deduce que  $c_i$  sólo puede tomar un número finito de valores para cada  $i = 1, \dots, 7$ . Por lo tanto, hemos llegado a que  $\mathcal{D}'$  tiene un número finito de posibilidades.

De esta forma, tenemos que en cada caso hay un número finito de posibilidades para la clase  $\mathcal{D}'$ . En segundo, lugar asumamos que existe una componente en la descomposición de  $-\mathcal{K}_{W_n^{r'}}$  tal que su número de intersección con  $\mathcal{D}'$  es negativo. En tal caso,  $\mathcal{D}'$  es una componente irreducible de tal clase y consecuentemente, hay número finito de posibilidades para  $\mathcal{D}'$ . Finalmente, concluimos que únicamente existen un número finito de clases de curvas  $(-2)$  sobre  $W_n^{r'}$ .  $\square$

Como consecuencia inmediata recuperamos el resultado de Rosoff sobre la finitud de los monoides efectivos de las superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en cualquier posición (ver [Ros80, Teorema 2, p. 424]) y el resultado de la finitud del monoide efectivo de una superficie proyectiva lisa racional con un divisor anticanónico de autointersección no negativa (ver [Lah04a, Teorema 1.1, p. 875] y [LH05, Proposición 4.3 (a), p. 109]).

**Corolario 11.21.** *El monoide efectivo de una superficie obtenida como la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en cualquier posición es finitamente generado.*

**Corolario 11.22.** *Si  $S$  es una superficie proyectiva lisa racional con  $K_S^2 > 0$ , entonces su monoide efectivo es finitamente generado.*

Para concluir con este apartado, lo siguiente que realizaremos será mostrar que los monoides efectivos de las superficies  $W_n^r$  en los casos restantes no son finitamente generados. Para ello, necesitaremos los siguientes lemas.

**Lema 11.23.** *Con la notación anterior, dada una superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  y  $r$  puntos en posición general  $p_1, \dots, p_r$  sobre ella, si consideramos una transformación elemental en uno de tales puntos, entonces los  $r - 1$  puntos que están fuera de la curva  $C_{n-1}$  en la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_{n-1}$  resultante están en posición general.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que realizamos la transformación elemental en  $p_r$ . Observemos que al considerar la transformación elemental de  $\Sigma_n$  en  $p_r$  obtenemos la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_{n-1}$  donde la transformada estricta de la fibra que contiene al punto  $p_r$  en  $\Sigma_n$  ha sido contraída al punto  $q_r$  de  $\Sigma_{n-1}$  que se encuentra en la curva  $C_{n-1}$  (ver Figura 11.4). De esta forma, se sigue que  $W_n^r$  también puede obtenerse como

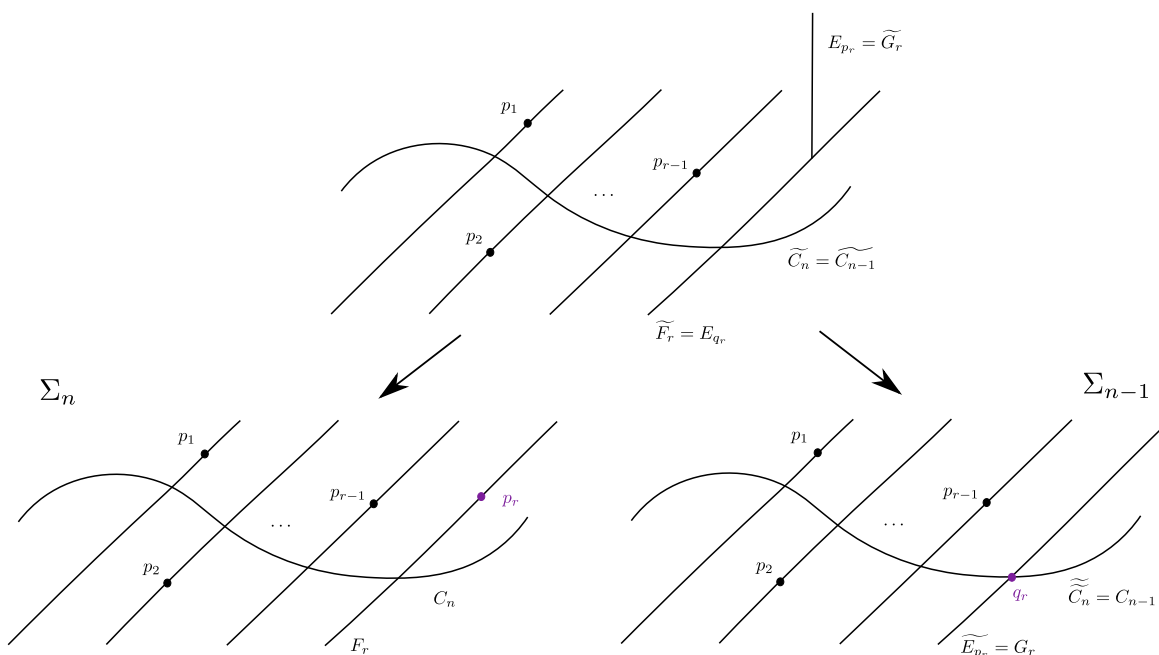


FIGURA 11.4. Transformación elemental de  $\Sigma_n$  en el punto  $p_r$ .

la explosión de  $\Sigma_{n-1}$  en los puntos  $p_1, \dots, p_{r-1}$  y en el punto  $q_r$ . Si los puntos  $p_1, \dots, p_{r-1}$  no estuviesen en posición general, entonces al considerar la explosión de  $\Sigma_{n-1}$  en tales puntos obtendríamos una curva negativa que no sería una curva  $(-1)$  ni la transformada estricta de  $C_{n-1}$ . Posteriormente, al explotar el punto  $q_r$  tendríamos que existiría una curva negativa sobre  $W_n^r$  que no sería una curva  $(-1)$  ni la curva  $(-n)$  proveniente de la curva  $C_n$ , y esto contradiría la posición general de los puntos  $p_1, \dots, p_r$ . Por lo tanto, los puntos  $p_1, \dots, p_{r-1}$  están en posición general sobre  $\Sigma_{n-1}$ .  $\square$

**Lema 11.24.** *Con la notación anterior, si el monoide efectivo de la superficie  $W_n^r$  no es finitamente generado, entonces el monoide efectivo de  $W_{n+t}^{r+s}$  no es finitamente generado para cualquier número entero no negativo  $t$  y para cualquier número entero  $s$  tal que  $s \geq t$ .*

DEMOSTRACIÓN. Basta a probar el caso  $s = t$ . Procederemos por inducción sobre  $t$ . Cuando  $t = 0$ , por hipótesis tenemos que  $\text{Eff}(W_n^r)$  no es finitamente generado. Supongamos que el resultado es verdadero cuando consideramos  $(r + t)$  puntos en posición general sobre  $\Sigma_{n+t}$ . Ahora, consideremos un conjunto de  $(r + (t + 1))$  puntos  $p_1, \dots, p_{r+t}, p_{r+t+1}$  en posición general sobre  $\Sigma_{n+t+1}$ . Al realizar la transformación elemental en el punto  $p_{r+t+1}$ , obtenemos la superficie  $\Sigma_{n+t}$  donde la transformada estricta de la fibra que contiene al punto  $p_{r+t+1}$  en  $\Sigma_{n+t+1}$  ha sido contraída al punto  $q_{r+t+1}$  de  $\Sigma_{n+t}$  que se encuentra en  $C_{n+t}$  y además, tenemos que los puntos  $p_1, \dots, p_{r+t}$  están en posición general por el Lema 11.23. Por hipótesis de inducción, el monoide efectivo de la superficie obtenida de explotar  $\Sigma_{n+t}$  en los puntos  $p_1, \dots, p_{r+t}$  no es finitamente generado, y al explotar el punto  $q_{r+t+1}$  en tal superficie tendremos que la superficie obtenida tampoco tendrá monoide efectivo finitamente generado. Puesto que la superficie obtenida al explotar los puntos  $p_1, \dots, p_{r+t}, q_{r+t+1}$  no es otra cosa que  $W_{n+t+1}^{r+t+1}$ , concluimos que su monoide efectivo no es finitamente generado.  $\square$

**Teorema 11.25.** *Con la notación anterior, si  $(r = n + 5$  y  $n \geq 4$ ), ó  $(r \geq n + 6$  y  $n \geq 2)$ , ó  $r \geq n + 7$ , entonces el monoide efectivo de  $W_n^r$  no es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Para la primera parte, por el Lema 11.24 únicamente debemos verificar el caso en que  $r = n + 5$  y  $n = 4$ . Sea  $d$  un número entero positivo. Consideramos la siguiente clase sobre  $W_4^9$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_d = & 6d^2\mathcal{C}_4 + 24d^2\mathcal{F} - (4d^2 + 2d)\mathcal{E}_1 - 4d^2\mathcal{E}_2 - 4d^2\mathcal{E}_3 - 4d^2\mathcal{E}_4 \\ & - 4d^2\mathcal{E}_5 - 4d^2\mathcal{E}_6 - 4d^2\mathcal{E}_7 - (4d^2 - 1)\mathcal{E}_8 - (4d^2 - 2d)\mathcal{E}_9. \end{aligned}$$

Por simplicidad denotamos por  $c_i$  al coeficiente de  $-\mathcal{E}_i$  para cada  $i = 1, \dots, 9$ . Notemos que por la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch tenemos asegurada la existencia de una curva  $|6d^2\mathcal{C}_4 + 24d^2\mathcal{F}|$  que pasa por el punto  $p_i$  con multiplicidad  $c_i$  para cada  $i = 1, \dots, 9$ . Además, observemos que se satisfacen las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^9 c_i^2 = 144d^4 + 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^9 c_i = 36d^2 - 1.$$

Por último, como se satisfacen las igualdades  $\mathcal{E}_d^2 = -1$  y  $-\mathcal{K}_{W_4^9} \cdot \mathcal{E}_d = 1$ , se sigue que  $\mathcal{E}_d$  es la clase de una curva  $(-1)$ . De este modo, puesto que para cada número entero positivo  $d$  podemos construir la clase  $\mathcal{E}_d$  de una curva  $(-1)$ , como consecuencia se tiene que existe un

número infinito de curvas  $(-1)$  sobre  $W_4^9$ . Consecuentemente, el monoide efectivo  $\text{Eff}(W_4^9)$  no es finitamente generado.

Respecto a la segunda parte, basta probar el caso en que  $r = n + 6$  y  $n = 2$  (ver Lema 11.24). Observemos que en tal caso, por la Proposición 11.11 tenemos que la clase anticanónica es efectiva e irreducible. Además, como se tiene que  $K_{W_2^8}^2 = 0$ , por la Proposición 1.27 se sigue que  $-K_{W_2^8}$  es un divisor nef. De esta manera, como el conjunto de las curvas  $(-2)$  sobre  $W_2^8$  es vacío, por [LH05, Proposición 4.3 (d), p. 109] se sigue que  $\text{Eff}(W_2^8)$  no es finitamente generado.

Finalmente, para el caso que resta a verificar es suficiente verificar el caso en que  $r = n + 7$  y  $n = 1$  en vista del Lema 11.24. Observemos que  $W_1^8$  no es otra cosa que la superficie obtenida como la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en nueve puntos en posición general y el monoide efectivo de ésta no es finitamente generado (ver [Nag60, Teorema 4a, p. 283]).  $\square$

**Observación 11.26.** Con la notación del teorema anterior, podemos generar familias infinitas explícitas de clases de curvas  $(-1)$  sobre las superficies  $W_n^r$  cuando  $(r \geq n + 6$  y  $n \geq 2)$  o cuando  $r \geq n + 7$ .

Una consecuencia inmediata del teorema anterior se ve reflejada en los anillos de Cox de tales superficies.

**Corolario 11.27.** *Con la notación anterior, si  $(r = n + 5$  y  $n \geq 4)$ , ó  $(r \geq n + 6$  y  $n \geq 2)$ , ó  $r \geq n + 7$ , entonces el anillo de Cox de  $W_n^r$  no es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia inmediata del Teorema 11.25 pues en tales casos el monoide efectivo de  $W_n^r$  no es finitamente generado.  $\square$

**Observación 11.28.** Para  $n \geq 5$ , se tiene que  $W_n^{n+5}$  es una superficie racional anticanónica con dimensión anticanónica de Iitaka igual a cero (ver Observación 11.12) cuyo anillo de Cox no es finitamente generado.

**2.3. Propiedad Ortogonal Anticanónica y Consecuencias.** A continuación presentaremos la clasificación de las superficies obtenidas como la explosión de una superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  en puntos en posición general que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica y posteriormente revisaremos algunas consecuencias para las superficies que satisfacen dicha propiedad. De manera particular, extenderemos el resultado de Harbourne acerca de la regularidad de los divisores nef sobre la superficie obtenida de la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general y el resultado de Batyrev y Popov sobre la finitud

del anillo de Cox de tal superficie. Además, completaremos la clasificación de las superficies obtenidas como la explosión de  $\Sigma_n$  en puntos en posición general cuyos anillos de Cox son finitamente generados.

**Teorema 11.29.** *Con la notación anterior, si  $r \leq n + 4$ , ó ( $r = n + 5$  y  $n \leq 3$ ), ó ( $r = n + 6$  y  $n = 1$ ), entonces  $W_n^r$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $H$  un divisor nef sobre  $W_n^r$  que es ortogonal a un divisor anticanónico. Denotaremos por  $\mathcal{H}$  a la clase de  $H$  en  $\text{NS}(W_n^r)$  y consideraremos números enteros no negativos  $a, b, c_1, \dots, c_r$  tales que  $\mathcal{H} = a\mathcal{C}_n + b\mathcal{F} - c_1\mathcal{E}_1 - \dots - c_r\mathcal{E}_r$ . Verificaremos que en cada posible valor que puede tomar  $r$  se satisface la propiedad ortogonal anticanónica.

**Caso  $r \leq n$ .** Para el primer caso, utilizando la descomposición de la clase anticanónica de la Proposición 11.11, la ortogonalidad de  $\mathcal{H}$  con  $-\mathcal{K}_{W_n^r}$  implica las ecuaciones  $\mathcal{H}\mathcal{C}_n = 0$ ,  $\mathcal{H}(\mathcal{F} - \mathcal{E}_i) = 0$  para cada  $i = 1, \dots, r$  y  $\mathcal{H}\mathcal{E}_1 = 0$ . De este modo, tenemos respectivamente las igualdades  $b = na$ ,  $a = c_i$  para cualquier  $i = 1, \dots, r$  y  $c_1 = 0$ . La última igualdad implica que  $a = 0$ , consecuentemente  $c_i = 0$  para  $i = 2, \dots, r$  y además  $b = 0$ . Por lo tanto,  $\mathcal{H}$  es la clase nula y así  $H = 0$ .

**Caso  $r = n + 1$ .** En este caso, la descomposición de  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+1}}$  de la Proposición 11.11 y el número de intersección  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+1}}\mathcal{H} = 0$  implican que  $\mathcal{H}\mathcal{C}_n = 0$ ,  $\mathcal{H}(\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}_i) = 0$ ,  $\mathcal{H}(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) = 0$ ,  $\mathcal{H}(\mathcal{F} - \mathcal{E}_2) = 0$ ,  $\mathcal{H}\mathcal{E}_1 = 0$  y  $\mathcal{H}\mathcal{E}_2 = 0$ , y a su vez tales ecuaciones implican respectivamente que  $b = na$ ,  $b = \sum_{i=1}^{n+1} c_i$ ,  $a = c_1$ ,  $a = c_2$ ,  $c_1 = 0$  y  $c_2 = 0$ . Se sigue que  $a = 0$ , con ello  $b = 0$  y así  $\sum_{i=3}^{n+1} c_i = 0$ , además, como cada término en la última ecuación es no negativo se sigue que  $c_i = 0$  para cada  $i = 3, \dots, n + 1$ . De esta forma,  $\mathcal{H}$  es nula y consecuentemente,  $H$  es el divisor cero.

**Caso  $r = n + 2$ .** Usando el hecho que  $\mathcal{H}$  es ortogonal a  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+2}}$  y la descomposición de ésta última clase encontrada en la Proposición 11.11, obtenemos las ecuaciones  $\mathcal{H}\mathcal{C}_n = 0$ ,  $\mathcal{H}(\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}_i) = 0$ ,  $\mathcal{H}(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) = 0$ ,  $\mathcal{H}(\mathcal{F} - \mathcal{E}_{n+2}) = 0$  y  $\mathcal{H}\mathcal{E}_1 = 0$ , es decir que obtenemos respectivamente las igualdades  $b = na$ ,  $b = \sum_{i=1}^{n+1} c_i$ ,  $a = c_1$ ,  $a = c_{n+2}$  y  $c_1 = 0$ . De manera inmediata se sigue que  $a = c_{n+2} = b = 0$ , luego, puesto cada término del lado izquierdo en la igualdad  $\sum_{i=2}^{n+1} c_i = 0$  es no negativo, se sigue que  $c_i = 0$  para cada  $i = 2, \dots, n + 1$ . Consecuentemente,  $\mathcal{H}$  es la clase nula y por lo tanto,  $H$  es nulo.

**Caso  $r = n + 3$ .** Considerando la descomposición de la clase anticanónica de la Proposición 11.11, la condición  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+3}}\mathcal{H} = 0$  implica los siguientes números de intersección:  $\mathcal{H}\mathcal{C}_n = 0$ ,  $\mathcal{H}(\mathcal{C}_n + (n + 1)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+3} \mathcal{E}_i) = 0$ ,  $\mathcal{H}(\mathcal{F} - \mathcal{E}_1) = 0$  y  $\mathcal{H}\mathcal{E}_1 = 0$ . Consiguientemente, se tienen respectivamente las igualdades:  $b = na$ ,  $b + a = \sum_{i=1}^{n+3} c_i$ ,  $a = c_1$  y  $c_1 = 0$ .

La última igualdad implica que  $a = 0$  y luego  $b = 0$ . Por último, tenemos que  $c_i = 0$  para  $i = 2, \dots, n + 3$  pues cada término del lado izquierdo de la ecuación  $\sum_{i=2}^{n+3} c_i = 0$  es no negativo. De esto se sigue que  $\mathcal{H}$  es nula y por lo tanto, concluimos que  $H$  es nulo.

**Caso  $r = n + 4$ .** Sea  $j \in \{1, \dots, n + 4\}$ . Observemos que podemos escribir a la clase anticanónica de la siguiente forma:

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+4}} = (\mathcal{C}_n) + \left( \mathcal{C}_n + (n + 1)\mathcal{F} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+4} \mathcal{E}_i \right) + (\mathcal{F} - \mathcal{E}_j).$$

Tomando tal descomposición, de la hipótesis que  $\mathcal{H}$  y  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+4}}$  son ortogonales se obtiene que  $\mathcal{H}.\mathcal{C}_n = 0$ ,  $\mathcal{H}.\left(\mathcal{C}_n + (n + 1)\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq j}^{n+4} \mathcal{E}_i\right) = 0$  y  $\mathcal{H}.\left(\mathcal{F} - \mathcal{E}_j\right) = 0$ , es decir, obtenemos que  $b = na$ ,  $b + a = \sum_{i=1, i \neq j}^{n+4} c_i$  y  $a = c_j$ . Para  $m \in \{1, \dots, n + 4\} \setminus \{j\}$ , al considerar la clase efectiva  $\mathcal{C}_n + (n + 1)\mathcal{F} - \sum_{i=1, i \neq m}^{n+4} \mathcal{E}_i$  y al usar el hecho que  $\mathcal{H}$  es una clase nef se tiene que

$$0 \leq \mathcal{H}.\left(\mathcal{C}_n + (n + 1)\mathcal{F} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n+4} \mathcal{E}_i\right) = b + a - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n+4} c_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n+4} c_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+4} c_i = c_m - c_j,$$

esto implica que  $c_j \leq c_m$  y puesto que  $c_j = a$  se sigue que  $c_m = a$ . Como  $m$  fue un índice arbitrario, tenemos que  $a = c_i$  para cada  $i = 1, \dots, n + 4$ . Ahora, consideremos la clase efectiva  $\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}_i$ . Como  $\mathcal{H}$  es nef se sigue que

$$0 \leq \mathcal{H}.\left(\mathcal{C}_n + n\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{E}_i\right) = b - \sum_{i=1}^{n+1} c_i = na - (n + 1)a = -a.$$

De este modo,  $a = 0$  y esto implica que  $\mathcal{H}$  es la clase nula. Se concluye que  $H$  es el divisor cero.

**Caso  $r = n + 5$  y  $n \leq 3$ .** Utilizando la descomposición de la clase anticanónica encontrada en la Proposición 11.11, se tiene que la condición  $-\mathcal{K}_{W_n^{n+5}}.\mathcal{H} = 0$  implica que  $\mathcal{H}.\mathcal{C}_n = 0$  y que  $\mathcal{H}.\left(\mathcal{C}_n + (n + 2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+5} \mathcal{E}_i\right) = 0$ . De este modo, tenemos respectivamente que

$$(11.10) \quad b = na \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n+5} c_i = b + 2a,$$

y posteriormente podemos reescribir la última ecuación como  $\sum_{i=1}^{n+5} c_i = (n + 2)a$ . Por otro lado, como  $\mathcal{H}$  es nef tenemos que  $0 \leq \mathcal{H}^2$ , consecuentemente  $0 \leq 2ab - na^2 - \sum_{i=1}^{n+5} c_i^2$  y luego obtenemos la condición  $\sum_{i=1}^{n+5} c_i^2 \leq na^2$ . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos la

condición  $(\sum_{i=1}^{n+5} c_i)^2 \leq (n+5) \sum_{i=1}^{n+5} c_i^2$ , de ella se sigue que

$$(n+2)^2 a^2 \leq (n+5) n a^2$$

y reduciendo términos obtenemos que  $(4-n)a^2 \leq 0$ . Por consiguiente, tenemos que  $a = 0$  y por las igualdades en la Ecuación (11.10) se sigue que  $b = 0$  y que  $c_i = 0$  para cada  $i = 1, \dots, n+5$ . Por lo tanto,  $\mathcal{H}$  es la clase nula y así, concluimos que  $H$  es el divisor cero.

**Caso  $r = 7$  y  $n = 1$ .** Puesto que la superficie  $W_1^7$  no es otra cosa que la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en ocho puntos en posición general, por el Teorema 11.3 sabemos que la propiedad ortogonal anticanónica se satisface.  $\square$

**Teorema 11.30.** *Con la notación anterior, si  $(n \leq 2$  y  $r \geq 8)$ , ó  $(n = 3$  y  $r \geq 9)$ , ó  $(n \geq 4$  y  $r \geq n+5)$ , entonces  $W_n^r$  no satisface la propiedad ortogonal anticanónica.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.6, para verificar el resultado será suficiente probar en los casos que se presentan a continuación la existencia de un divisor nef no nulo que sea ortogonal a un divisor anticanónico.

**Caso  $n = 1$  y  $r = 8$ .** Observemos que la superficie  $W_1^8$  es la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en nueve puntos en posición general y por el Teorema 11.4 sabemos que tal superficie no satisface la propiedad ortogonal anticanónica.

**Caso  $n = 2$  y  $r = 8$ .** En este caso tenemos que la clase anticanónica  $-\mathcal{K}_{W_2^8}$  es efectiva (ver Proposición 11.11) y además es nef puesto que  $\mathcal{K}_{W_2^8}^2 = 0$  (ver Proposición 1.27). De esta manera, tenemos que existe un divisor nef que no es nulo y que es ortogonal a un divisor anticanónico.

**Caso  $n = 3$  y  $r = 9$ .** Consideremos la clase  $\mathcal{H} = 6\mathcal{C}_3 + 21\mathcal{F} - 4 \sum_{i=1}^9 \mathcal{E}_i$ . Observemos que tal clase es la clase de la transformada estricta de la curva en  $|6\mathcal{C}_3 + 21\mathcal{F}|$  que pasa por cada uno de los nueve puntos con multiplicidad cuatro y que su existencia está asegurada por la Proposición 1.49 y el teorema de Riemann-Roch. Aún más, la clase  $\mathcal{H}$  es nef puesto que  $\mathcal{H}^2 = 0$  (ver Proposición 1.27). Por último, tenemos que

$$-\mathcal{K}_{W_3^9} \cdot \mathcal{H} = \left( 2\mathcal{C}_3 + 5\mathcal{F} - \sum_{i=1}^9 \mathcal{E}_i \right) \cdot \left( 6\mathcal{C}_3 + 21\mathcal{F} - 4 \sum_{i=1}^9 \mathcal{E}_i \right) = 0.$$

Por lo tanto, hemos encontrado un divisor nef que es ortogonal a un divisor anticanónico y que no es nulo.



**Caso  $n \geq 4$  y  $r = n + 5$ .** Para este caso, vamos considerar la siguiente clase:

$$\mathcal{H} = (n + 5)\mathcal{C}_n + n(n + 5)\mathcal{F} - (n + 2) \sum_{i=1}^{n+5} \mathcal{E}_i.$$

Observemos que  $\mathcal{H}$  es la clase de la transformada estricta de la curva en  $|(n+5)\mathcal{C}_n + n(n+5)\mathcal{F}|$  que pasa por cada uno de los  $(n + 5)$  puntos con multiplicidad  $(n + 2)$  y que existe gracias a la Proposición 1.49 y al teorema de Riemann-Roch. Además, puesto que se tiene que  $\mathcal{H}^2 = n^2 + n - 20$  y tal número es no negativo pues  $n \geq 4$ , por la Proposición 1.27 tenemos que  $\mathcal{H}$  es una clase nef. Finalmente, como

$$-\mathcal{K}_{W_n^{n+5}} \cdot \mathcal{H} = \left( 2\mathcal{C}_n + (n + 2)\mathcal{F} - \sum_{i=1}^{n+5} \mathcal{E}_i \right) \cdot \left( (n + 5)\mathcal{C}_n + n(n + 5)\mathcal{F} - (n + 2) \sum_{i=1}^{n+5} \mathcal{E}_i \right) = 0,$$

tenemos que existe un divisor nef ortogonal a un divisor anticanónico y no es nulo.  $\square$

**Observación 11.31.** El teorema anterior nos dice que en el caso  $r = n + 5$  y  $n = 4$  se tiene que la clase  $\mathcal{H} = 9\mathcal{C}_4 + 36\mathcal{F} - 6 \sum_{i=1}^9 \mathcal{E}_i$  es la clase de un divisor nef no nulo sobre la superficie  $W_4^9$  que es ortogonal a un divisor anticanónico. De hecho, para cualquier número entero positivo  $m$  se tiene que la clase

$$\mathcal{H}_m = 3m\mathcal{C}_4 + 12m\mathcal{F} - 2m \sum_{i=1}^9 \mathcal{E}_i$$

es una clase nef no nula sobre  $W_4^9$  que además es ortogonal a la clase anticanónica. En efecto, tal clase existe gracias a la Proposición 1.49 y al teorema de Riemann-Roch, mientras que por la Proposición 1.27 es nef pues  $\mathcal{H}_m^2 = 0$ . Particularmente, tenemos que  $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}$ . Por último, notemos que podemos escribir a la clase  $\mathcal{H}_m$  utilizando la clase anticanónica y la clase de una curva  $(-1)$  de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_m = -m\mathcal{K}_{W_4^9} + m \left( \mathcal{C}_4 + 6\mathcal{F} - \sum_{i=1}^9 \mathcal{E}_i \right).$$

**Corolario 11.32.** *Con la notación anterior, si  $r \leq n + 4$ , ó  $(r = n + 5$  y  $n \leq 3)$ , ó  $(r = n + 6$  y  $n = 1)$ , entonces  $W_n^r$  es una superficie de Harbourne-Hirschowitz.*

**DEMOSTRACIÓN.** Por la Proposición 11.11 tenemos que la superficie  $W_n^r$  es anticanónica y por el Teorema 11.29 tenemos que satisface la propiedad ortogonal anticanónica. De esta forma, por el Teorema 3.11 tenemos que  $W_n^r$  es de Harbourne-Hirschowitz.  $\square$

**Observación 11.33.** Considerando el caso  $n = 1$  en el teorema anterior, recobramos el resultado [Har96, Teorema I.1 (b), p. 727] de Harbourne acerca de la regularidad de los

divisores nef sobre las superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general.

**Corolario 11.34.** *Con la notación anterior, si  $r \leq n+4$ , ó ( $r = n+5$  y  $n \leq 3$ ), ó ( $r = n+6$  y  $n = 1$ ), entonces el anillo de Cox de  $W_n^r$  es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada uno de los posibles casos tenemos por el Teorema 11.29 que la superficie anticanónica  $W_n^r$  satisface la propiedad ortogonal anticanónica y por los Teoremas 11.13, 11.14, 11.16 y 11.17 se tiene que  $\text{Eff}(W_n^r)$  es finitamente generado. Así, concluimos la prueba por el Teorema 3.20.  $\square$

**Observación 11.35.** Considerando el caso  $n = 1$  en el teorema anterior, recobramos el resultado de la finitud de los anillos de Cox de las superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general encontrado por Batyrev y Popov en [BP04, Teorema 3.2, p. 6].

## CAPÍTULO 12

## CONCLUSIONES

En este trabajo hemos estudiado la finitud de los monoides efectivos y de los anillos de Cox de ciertas superficies racionales anticanónicas cuyos números de Picard pueden ser muy grandes y que son construidas como la explosión de una superficies de Hirzebruch en diferentes configuraciones de puntos ordinarios e infinitamente cercanos (ver Sección 2 del Capítulo 4, Sección 1 del Capítulo 5, Sección 1 del Capítulo 6, Sección 1 del Capítulo 7, Sección 1 del Capítulo 8, Sección 2 del Capítulo 9, Sección 1 del Capítulo 10 y Sección 2.1 del Capítulo 11).

Además, hemos introducido el concepto de una *superficie de Harbourne-Hirschowitz* (ver Definición 3.2) y en el caso de las superficies racionales, ser de Harbourne-Hirschowitz implica de una manera natural que la conjetura de Harbourne-Hirschowitz es verdadera para tales superficies (ver Teorema 3.3). Asimismo, hemos introducido la noción de *propiedad ortogonal anticanónica* (ver Definición 3.5) que nos brinda un criterio para determinar si una superficie racional anticanónica es una superficie de Harbourne-Hirschowitz (ver Teorema 3.11) y para determinar si es extremal (ver Teorema 3.19).

Para las superficies racionales anticanónicas construidas en las Capítulos 4, 5, 6 y 7, las técnicas que desarrollamos nos permitieron determinar la finitud de los monoides efectivos para ciertos tipos de estas superficies (ver Corolarios 4.3, 5.3, 6.3 y 7.3), además, dicha metodología utilizada en casos concretos de tales superficies nos permitió determinar explícitamente los conjuntos generadores mínimos de sus monoides efectivos (ver Ejemplos 4.8, 4.9, 4.10, 5.7, 5.8, 6.7, 6.8, 7.8 y 7.9). Posteriormente, bajo una condición numérica determinamos que se satisface la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teoremas 4.4, 5.4, 6.4 y

---

7.4) y gracias a ello pudimos determinar que dichas superficies son de Harbourne-Hirschowitz (ver Corolarios 4.5, 5.5, 6.5 y 7.5) y que sus anillos de Cox son finitamente generados (ver Corolarios 4.6, 5.6, 6.6 y 7.6).

A diferencia de las superficies mencionadas en el párrafo anterior, para las superficies racionales anticanónicas construidas en los Capítulos 8, 9 y 10 determinamos de manera explícita los conjuntos generadores mínimos de sus monoides efectivos (ver Teoremas 8.3 y 9.2 y Corolario 10.4) y para las primeras dos familias de superficies conseguimos presentar una descomposición para cada clase efectiva. Una de las ventajas de contar con tal descomposición es que puede ayudarnos a determinar si una clase es efectiva cuando el teorema de Riemann-Roch no puede brindarnos información al respecto (ver Ejemplos 8.8, 8.9, 8.10 y 9.8). Por otro lado, mostramos que tales superficies satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teoremas 8.4, 9.4 y 10.5) y como consecuencia, que son de Harbourne-Hirschowitz (ver Corolarios 8.5, 9.5 y 10.6) y que sus anillos de Cox son finitamente generados (ver Corolarios 8.6, 9.6 y 10.7).

Por último, estudiamos el caso de puntos en posición general. En el caso de las superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en puntos en posición general, realizamos la clasificación de dichas superficies respecto a la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teoremas 11.3 y 11.4). Como consecuencia, recuperamos el resultado de Harbourne sobre la regularidad de los divisores nef sobre las superficies obtenidas como la explosión de  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general y el resultado de Batyrev y Popov sobre la finitud de los anillos de Cox de tales superficies. Para el caso de las superficies racionales  $W_n^r$  construidas a partir de la explosión de una superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  en  $r$  puntos en posición general (ver Definición 11.8) que fue estudiado en el Capítulo 11, en primer lugar nos enfocamos en el estudio de su clase anticanónica en ciertos casos (ver Proposición 11.11). En segundo lugar, realizamos la clasificación de éste tipo de superficies en base a la finitud de sus monoides efectivos (ver Teoremas 11.13, 11.14, 11.16, 11.17 y 11.25), además, presentamos de una manera explícita a los conjuntos generadores mínimos de tales monoides cuando son finitamente generados. Como consecuencia determinamos que las superficies obtenidas como la explosión de  $\Sigma_n$  en ciertas especializaciones de puntos también tienen monoides efectivos finitamente generados (ver Corolario 11.20). De manera particular, considerando el caso  $n = 1$  hemos recuperado los conjuntos generadores mínimos que Rosoff determinó para los monoides efectivos de las superficies obtenidas como la explosión del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  en a lo más ocho puntos en posición general, la regularidad de los divisores nef sobre tales superficies encontrada por Harbourne y la finitud de sus anillos de Cox mostrada por Batyrev y Popov. Además, el Teorema 11.13 recupera la lista de las curvas  $(-1)$  sobre  $W_n^r$  cuando  $r \leq n$  que fue

determinada por Matsuzawa. Cabe mencionar que en el caso de posición general cuando  $r \leq n + 3$  y ( $n = 1$  y  $r = 5$ ) presentamos una descomposición para cada clase efectiva. Por último, hemos realizado la clasificación de las superficies  $W_n^r$  que satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica (ver Teoremas 11.29 y 11.30) y hemos obtenido como consecuencias que algunas de éstas superficies son de Harbourne-Hirschowitz (ver Corolario 11.32). Además, el estudiar la propiedad ortogonal anticanónica en tales superficies nos ha ayudado a clasificar en su totalidad este tipo de superficies a través de la finitud de sus anillos de Cox (ver Corolarios 11.27 y 11.34).

A partir de los resultados obtenidos en este trabajo, proponemos los siguientes problemas para su estudio posterior:

- ◆ Realizar la clasificación de las superficies de Harbourne-Hirschowitz. En particular, determinar si en el caso de una superficie racional anticanónica existe una equivalencia entre ser una superficie de Harbourne-Hirschowitz, satisfacer la propiedad ortogonal anticanónica y ser extremal.
- ◆ Como hemos mencionado, la mayor parte de superficies que hemos estudiado en este trabajo son de Harbourne-Hirschowitz por lo cual podemos calcular de forma explícita la dimensión de las secciones globales para cada gavilla invertible asociada a un divisor efectivo. En vista de dicha propiedad queda abierto el uso de tales superficies para la construcción de códigos algebraico-geométricos con la posibilidad de determinar de forma explícita sus parámetros utilizando técnicas similares a las usadas por De La Rosa en [DeL13] y por De La Rosa y Lahyane en [DL15].
- ◆ Asimismo, para la mayor parte de superficies que hemos estudiado se ha determinado que sus anillos de Cox son finitamente generados, lo siguiente a realizar es encontrar de forma explícita sus generadores y sus relaciones. Recientemente Hausen, Keicher y Laface proponen en [HKL16] un algoritmo para calcular de forma explícita los generadores y las relaciones de los anillos de Cox de variedades obtenidas como modificaciones de espacios soñados de Mori a través de modificaciones del espacio ambiente tórico de tales espacios. Dicho método puede brindarnos una herramienta para encontrar una respuesta a nuestro problema.
- ◆ En el Corolario 11.20 mostramos que el monoide efectivo de superficie obtenida como la explosión de una superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  (respectivamente, de  $\Sigma_1$ ) en a lo más  $n + 4$  puntos ó en  $n + 5$  puntos con  $n \leq 3$  (respectivamente, en a lo más siete puntos) en posición arbitraria tiene monoide efectivo finitamente generado. Determinar el conjunto generador mínimo del monoide efectivo de tales superficies y determinar si sus anillos de Cox son finitamente generados son problemas interesantes. Para

---

la última interrogante, una forma de abordar tal problema es determinar si tales superficies satisfacen la propiedad ortogonal anticanónica. Aún más, determinar si la propiedad ortogonal anticanónica se preserva bajo especializaciones de puntos.

- ◆ Determinar las funciones de Hilbert asociadas a los esquemas de dimensión cero definidos a partir de las configuraciones de puntos que hemos considerado para la construcción de nuestras familias de superficies.
- ◆ Estudiar la existencia de foliaciones sobre las familias de superficies que hemos construido de manera que su lugar singular sea igual a los puntos que han dado origen a tales superficies. Además, en caso de que dichas foliaciones existan, determinar de manera explícita su grado.
- ◆ Generalizar las técnicas que desarrollamos en este trabajo para determinar si el cono de curvas de una variedad de dimensión tres (o de dimensión superior) es poliédrico y en tal caso, determinar si su anillo de Cox es finitamente generado.
- ◆ Realizar un estudio de la finitud del monoide efectivo para superficies obtenidas como la explosión de una superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  en un número finito de puntos cuando  $\Sigma_n$  se encuentra definida sobre un campo que no es algebraicamente cerrado, en particular, sobre un campo finito.

## APÉNDICE A

# CÓDIGOS USADOS EN MATHEMATICA

El objetivo de este apéndice es mostrar los códigos que hemos utilizado en el programa de lenguaje simbólico MATHEMATICA [Wol16] para realizar algunos de los cálculos del Capítulo 11 con los cuales hemos obtenido la existencia de clases de curvas  $(-1)$  sobre la superficie  $W_n^r$  obtenida como la explosión de la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  en  $r$  puntos en posición general (ver Sección 2 del tal capítulo).

### 1. Explosión de $\Sigma_n$ en $n + 3$ Puntos en Posición General con $n \leq 3$

En el Teorema 11.16, tomando  $n \leq 3$ , se determina el conjunto generador mínimo del monoide efectivo  $\text{Eff}(W_n^{n+5})$  de la superficie  $W_n^{n+5}$  que se obtiene de explotar la superficie de Hirzebruch  $\Sigma_n$  en  $(n + 5)$  puntos en posición general. Para determinar tal conjunto se determinan todas las clases de curvas  $(-1)$  sobre tal superficie y para ello es necesario resolver algunos sistemas de ecuaciones. En la prueba de este teorema se consideran dos casos distintos, el Caso A) y el Caso B).

Para el Caso A) es necesario resolver el sistema que se obtiene de las Ecuaciones (11.1) y (11.2),

$$\sum_{i=1}^{n+5} c_i = (n + 2)a + 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n+5} c_i^2 = na^2 + 2a + 1,$$

fijando cada uno de los valores que  $n$  puede tomar y fijando respectivamente los posibles valores de  $a$  obtenidos de la Ecuación (11.3) al fijar el valor de  $n$ .

- Cuando  $n = 1$ , fijamos el valor de  $a$  y utilizamos el siguiente código:

```
a
s1 == 3 a + 1
s2 == a^2 + 2 a + 1
Solve[c1 + c2 + c3 + c4 + c5 + c6 == s1 &&
c1^2 + c2^2 + c3^2 + c4^2 + c5^2 + c6^2 == s2 &&
c1 <= a && c2 <= a && c3 <= a && c4 <= a && c5 <= a && c6 <= a,
{c1, c2, c3, c4, c5, c6}, Integers]
```

- Para  $n = 2$ , fijando el valor de  $a$  utilizamos el código que se presenta abajo:

```
a
t1 == 4 a + 1
t2 == 2 a^2 + 2 a + 1
Solve[c1 + c2 + c3 + c4 + c5 + c6 + c7 == t1 &&
c1^2 + c2^2 + c3^2 + c4^2 + c5^2 + c6^2 + c7^2 == t2 &&
c1 <= a && c2 <= a && c3 <= a && c4 <= a &&
c5 <= a && c6 <= a && c7 <= a,
{c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7}, Integers]
```

- Cuando  $n = 3$ , fijamos el valor de  $a$  y utilizamos el código que se presenta a continuación:

```
a
r1 == 5 a + 1
r2 == 3 a^2 + 2 a + 1
Solve[c1 + c2 + c3 + c4 + c5 + c6 + c7 + c8 == r1 &&
c1^2 + c2^2 + c3^2 + c4^2 + c5^2 + c6^2 + c7^2 + c8^2 == r2 &&
c1 <= a && c2 <= a && c3 <= a && c4 <= a &&
c5 <= a && c6 <= a && c7 <= a && c8 <= a,
{c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8}, Integers]
```

Ahora bien, en el Caso B) es necesario resolver el sistema obtenido de las Ecuaciones (11.4) y (11.5),

$$\sum_{i=1}^{n+5} c_i = (n+2)a - 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n+5} c_i^2 = na^2 + 1,$$

considerando cada uno de los posibles valores de  $n$  y cada uno de los posibles valores de  $a$  que se obtienen de la Ecuación (11.6) cuando se fija  $n$ .

- Para el caso  $n = 1$ , fijamos el valor de  $a$  y usamos el código

```
a
s1 == 3 a - 1
```



```
s2 == a2 + 1
Solve[c1 + c2 + c3 + c4 + c5 + c6 == s1 &&
c12 + c22 + c32 + c42 + c52 + c62 == s2 &&
c1 ≤ a && c2 ≤ a && c3 ≤ a && c4 ≤ a && c5 ≤ a && c6 ≤ a,
{c1, c2, c3, c4, c5, c6}, Integers]
```

- En el caso que  $n = 2$ , fijando el valor de  $a$  hemos utilizado el siguiente código:

```
a
t1 == 4 a -1
t2 == 2 a2 + 1
Solve[c1 + c2 + c3 + c4 + c5 + c6 + c7 == t1 &&
c12 + c22 + c32 + c42 + c52 + c62 + c72 == t2 &&
c1 ≤ a && c2 ≤ a && c3 ≤ a && c4 ≤ a &&
c5 ≤ a && c6 ≤ a && c7 ≤ a,
{c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7}, Integers]
```

- Cuando  $n = 3$ , fijando el valor de  $a$  hemos utilizado el código que se presenta a continuación:

```
a
r1 == 5 a -1
r2 == 3 a2 + 1
Solve[c1 + c2 + c3 + c4 + c5 + c6 + c7 + c8 == r1 &&
c12 + c22 + c32 + c42 + c52 + c62 + c72 + c82 == r2 &&
c1 ≤ a && c2 ≤ a && c3 ≤ a && c4 ≤ a &&
c5 ≤ a && c6 ≤ a && c7 ≤ a && c8 ≤ a,
{c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8}, Integers]
```

## 2. Explosión de $\Sigma_1$ en Siete Puntos en Posición General

En el Teorema 11.17 se determina el conjunto generador mínimo del monoide efectivo  $\text{Eff}(W_1^7)$  de la superficie  $W_1^7$  que es obtenida como la explosión de  $\Sigma_1$  en siete puntos en posición general. En la demostración de dicho teorema se determinan todas las clases de curvas  $(-1)$  y para ello, es necesario resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene de la Ecuación (11.7),

$$\sum_{i=1}^7 c_i = 2b + a - 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^7 c_i^2 = 2ab - a^2 + 1,$$

fijando los posibles valores de  $a$  y de  $b$  que se establecen en dicha prueba y que son consecuencia de la Ecuación (11.8). Para resolver tales sistemas de ecuaciones, fijando  $a$  y  $b$  hemos utilizado el siguiente código:

a

b

```
Solve[ c1 + c2 + c3 + c4 + c5 + c6 + c7 == 2 b + a - 1 &&  
c12 + c22 + c32 + c42 + c52 + c62 + c72 == 2 a b - a2 + 1 &&  
c1 ≤ a && c2 ≤ a && c3 ≤ a && c4 ≤ a &&  
c5 ≤ a && c6 ≤ a && c7 ≤ a,  
{c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7}, Integers]
```

- [Ale01] Alexander, J.: A Generalised Harbourne-Hirschowitz Conjecture. arXiv:math/0111188 [math.AG]
- [AM15] Araujo, C; Massarenti A.: Explicit log Fano structures on blow-ups of projective spaces. arXiv:1505.02460v1 [math.AG]
- [AGL16] Artebani, M.; Garbagnati, A.; Laface, A.: Cox rings of extremal rational elliptic surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 368, no. 3, 1735–1757 (2016)
- [AHL10] Artebani, M.; Hausen, J.; Laface, A.: On Cox rings of K3 surfaces. *Compos. Math.* 146, no. 4, 964–998 (2010)
- [AL11] Artebani, M.; Laface, A.: Cox rings of surfaces and the anticanonical Iitaka dimension. *Adv. Math.* 226, no. 6, 5252–5267 (2011)
- [ADHL15] Arzhantsev, I.; Derenthal, U.; Hausen, J.; Laface, A.: Cox rings. Cambridge University Press, Cambridge (2015)
- [Bad01] Bădescu, L.: Algebraic surfaces. Springer-Verlag, New York (2001)
- [BP04] Batyrev, V.; Popov, O.: The Cox ring of a Del Pezzo surface. In: *Arithmetic of Higher-Dimensional Algebraic Varieties*, 85–103, Birkhäuser Boston, Boston, MA (2004)
- [BH07] Berchtold, F.; Hausen, J.: Cox rings and combinatorics. *Trans. Amer. Math. Soc.* 359, no. 3, 1205–1252 (2007)
- [Ber12] Bernal Guillén, M.M.: Relations in the Cox ring of  $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$ . Ph.D. Thesis, University of Warwick (2012)
- [BCHM10] Birkar, C.; Cascini, P.; Hacon, C.D.; McKernan, J.: Existence of minimal models for varieties of log general type. *J. Amer. Math. Soc.* 23, no. 2, 405–468 (2010)
- [Bry80] Brylinski, J.L.: Éventails et variétés toriques. In: *Séminaire sur les Singularités des Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 247–288 (1980)
- [CG98] Campillo, A.; González-Sprinberg, G.: On characteristic cones, clusters and chains of infinitely near points. In: *Singularities (Oberwolfach, 1996)* *Progr. Math.* 162, Birkhäuser, Basel, 251–261 (1998)
- [CPR02] Campillo, A.; Piltant, O.; Reguera, A.: Cones of curves and of line bundles on surfaces associated with curves having one place at infinity. *Proc. London Math. Soc.* (3) 84, no. 3, 559–580 (2002)
- [CPR05] Campillo, A.; Piltant, O.; Reguera, A.: Cones of curves and of line bundles “at infinity”. *J. Algebra* 293, 513–542 (2005)

- 
- [Cas09] Castravet, A.M.: The Cox ring of  $\overline{M}_{0,6}$ . *Trans. Amer. Math. Soc.* 361, no. 7, 3851–3878 (2009)
- [CT06] Castravet, A.M.; Tevelev, J.: Hilbert’s 14th problem and Cox rings. *Compos. Math.* 142, no. 6, 1479–1498 (2006)
- [CT15] Castravet, A.M.; Tevelev, J.  $\overline{M}_{0,n}$  is not a Mori dream space. *Duke Math. J.* 164, no. 8, 1641–1667 (2015)
- [Cer12] Cerda Rodríguez, J.A.: Geometría de las Superficies Proyectivas Armónicas. Tesis de Doctorado, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (2012)
- [CFLMO13] Cerda Rodríguez, J.A.; Failla, G.; Lahyane, M.; Moreno-Mejía, I.; Osuna-Castro, O.: Rational surfaces with anticanonical divisor not reduced. *An. Ştiinţ. Univ. “Ovidius” Constanţa Ser. Mat.* 21, no. 3, 229–240 (2013)
- [CFLO12] Cerda Rodríguez, J.A.; Failla, G.; Lahyane, M.; Osuna Castro, O.: Fixed loci of the anticanonical complete linear systems of anticanonical rational surfaces. *Balkan J. Geom. Appl.* 17, no. 1, 1–8 (2012)
- [CEY16] Chen, X.; Elizondo, E.J.; Yang, Y.: Rationality of Euler-Chow series and finite generation of Cox rings. *J. Algebra* 447, 206–239 (2016)
- [Cil01] Ciliberto, C. Geometric aspects of polynomial interpolation in more variables and of Waring’s problem. In: *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, *Progr. Math.*, 201, Birkhäuser, Basel, 289–316 (2001)
- [CM01] Ciliberto, C.; Miranda, R.: The Segre and Harbourne-Hirschowitz conjectures. In: *Applications of algebraic geometry to coding theory, physics and computation (Eilat, 2001)*, *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, 36, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 37–51 (2001)
- [Cox95] Cox, D.: The homogeneous coordinate ring of a toric variety. *J. Algebraic Geom.* 4, no. 1, 17–50 (1995)
- [dFH12] de Fernex, T.; Hacon, C.D.: Rigidity properties of Fano varieties. In: *Current developments in algebraic geometry*, 113–127, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, 59, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2012)
- [DeL13] De La Rosa Navarro, B.L.: Códigos Algebraico Geométricos en Dimensión Superior y la Finitud de los Anillos de Cox de Superficies Racionales. Tesis de Doctorado, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (2013)
- [DeL16] De La Rosa Navarro, B.L.: Explicit computation of the effective monoid of rational surfaces whose Picard numbers are less than five. Preprint (2016)
- [DFFLU16] De La Rosa Navarro, B.L.; Failla, G.; Frías Medina, J.B.; Lahyane, M.; Utano R.: On the explicit geometry of a certain blow-up of a smooth quadric. Submitted.
- [DFL16a] De La Rosa Navarro, B.L.; Frías Medina, J.B.; Lahyane, M.: Rational surfaces with finitely generated Cox rings and very high Picard numbers. *RACSAM. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fs. Nat. Ser. A Mat.* (2016) DOI: 10.1007/s13398-016-0296-0
- [DFL16b] De La Rosa Navarro, B.L.; Frías Medina, J.B.; Lahyane, M.: The effective monoids of some monoidal transformations of Hirzebruch surfaces. Preprint (2016)
- [DFLMO15] De La Rosa Navarro, B.L.; Frías Medina, J.B.; Lahyane, M.; Moreno Mejía, I.; Osuna Castro, O.: A geometric criterion for the finite generation of the Cox ring of projective surfaces. *Rev. Mat. Iberoamericana* Vol. 31, No. 4, 1131–1140 (2015)
- [DL15] De La Rosa Navarro, B.L.; Lahyane, M.: Algebraic-geometric codes from rational surfaces. In: *Algebra for secure and reliable communication modeling*, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 173–180 (2015)

## Bibliografia

---

- [Dem80] Demazure, M.: Surfaces de Del Pezzo - II. Eclater  $n$  points dans  $\mathbb{P}^2$ . In: Séminaire sur les Singularités des Surfaces, LNM, vol. 777, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 23–35 (1980)
- [Der14] Derenthal, U. Singular del Pezzo surfaces whose universal torsors are hypersurfaces. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 108, no. 3, 638–681 (2014)
- [DHHKL15] Derenthal, U.; Hausen, J.; Heim, A.; Keicher, S.; Laface, A.: Cox rings of cubic surfaces and Fano threefolds. J. Algebra 436, 228–276 (2015)
- [Don13] Donten-Bury, M.: Constructing algebraic varieties via finite group actions. Ph.D. Thesis, University of Warsaw (2013)
- [Dum10] Dumnicki, M.: Special homogeneous linear systems on Hirzebruch surfaces. Geom. Dedicata 147, 283–311 (2010)
- [EKW04] Elizondo, E.J.; Kurano, K.; Watanabe, K.: The total coordinate ring of a normal projective variety. J. Algebra 276, no. 2, 625–637 (2004)
- [FLM06] Failla, G.; Lahyane, M.; Molica Bisci, G.: On the finite generation of the monoid of effective divisor classes on rational surfaces of type  $(n, m)$ . Atti Acc. Pelor. Peric. Classe Sci. Fis., Mat. Nat. Vol. LXXXIV, C1A0601001 (2006)
- [FLM07a] Failla, G.; Lahyane, M.; Molica Bisci, G.: The finite generation of the monoid of effective divisor classes on Platonic rational surfaces. In: Singularity Theory, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 565–576 (2007)
- [FLM07b] Failla, G., Lahyane, M., Molica Bisci, G.: Rational surfaces of Kodaira type *IV*. Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) 10, no. 3, 741–750 (2007)
- [FL16] Frías Medina, J.B.; Lahyane, M.: Effective divisor classes and blowings-up of a Hirzebruch surface. Preprint (2016)
- [Fri13] Friedman, R.: On the ample cone of a rational surface with an anticanonical cycle. Algebra Number Theory 7, no. 6, 1481–1504 (2013)
- [GM04] Galindo, C.; Monserrat, F.: On the cone of curves and of line bundles of a rational surface. Internat. J. Math 15, no. 4, 393–407 (2004)
- [GM05a] Galindo, C.; Monserrat, F.: The total coordinate ring of a smooth projective surface. J. Algebra 284, no. 1, 91–101 (2005)
- [GM05b] Galindo, C.; Monserrat, F.: The cone of curves associated to a plane configuration. Comment. Math. Helv. 80, no. 1, 75–93 (2005)
- [GM16] Galindo, C.; Monserrat, F.: The cone of curves and the Cox ring of rational surfaces given by divisorial valuations. Adv. Math. 290, 1040–1061 (2016)
- [Gim87] Gimigliano, A.: On linear systems of plane curves. Ph.D. Thesis, Queen’s University (1987)
- [Gim89] Gimigliano, A.: Our thin knowledge of fat points. In: The Curves Seminar at Queen’s, Vol. VI (Kingston, ON, 1989), Exp. No. B, 50 pp., Queen’s Papers in Pure and Appl. Math., 83, Queen’s Univ., Kingston, ON (1989)
- [GK14] González, J.L.; Karu, K.: Some non-finitely generated Cox rings. arXiv:1407.6344 [math.AG]
- [Har85] Harbourne, B.: Complete linear systems on rational surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. 289, no. 1, 213–226 (1985)

- 
- [Har86] Harbourne, B.: The geometry of rational surfaces and Hilbert functions of points in the plane. In: Proceedings of the 1984 Vancouver conference in algebraic geometry, CMS Conf. Proc. 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 95–111 (1986)
- [Har96] Harbourne, B.: Rational surfaces with  $K^2 > 0$ . Proc. Amer. Math. Soc. 124, no. 3, 727–733 (1996)
- [Har97] Harbourne, B.: Anticanonical rational surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. 349, no. 3, 1191–1208 (1997)
- [Har98] Harbourne, B.: Free resolutions of fat point ideals on  $\mathbb{P}^2$ . J. Pure Appl. Algebra 125, no. 1-3, 213–234 (1998)
- [Har77] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1977)
- [HKL16] Hausen, J.; Keicher, S.; Laface, A.: Computing Cox rings. Math. Comp. 85, no. 297, 467–502 (2016)
- [Hir89] Hirschowitz, A.: Une conjecture pour la cohomologie des diviseurs sur les surfaces rationnelles génériques. J. Reine Angew. Math. 397, 208–213 (1989)
- [HK00] Hu, Y.; Keel, S.: Mori dream spaces and GIT. Michigan Math. J. 48, 331–348 (2000)
- [HP14] Hwang, D.; Park, J.: Cox rings of rational surfaces and redundant blow-ups. arXiv:1303.2274v2 [math.AG]
- [HP15] Hwang, D.; Park, J.: Redundant blow-ups of rational surfaces with big anticanonical divisor. J. Pure Appl. Algebra 219, no. 12, 5314–5329 (2015)
- [Iit82] Iitaka, S. Algebraic geometry. An introduction to birational geometry of algebraic varieties. Springer-Verlag, New York-Berlin (1982)
- [Ink11] Inkscape Project, Inkscape, <https://inkscape.org>, Version 0.48.2 (2011)
- [Kei14] Keicher, S.: Algorithms for Mori Dream Spaces. Ph.D. Thesis, Universität Tübingen (2014)
- [Laf02] Laface, A.: On linear systems of curves on rational scrolls. Geom. Dedicata 90, 127–144 (2002)
- [LV09] Laface, A.; Velasco, M.: A survey on Cox rings. Geom. Dedicata 139, 269–287 (2009)
- [Lah04a] Lahyane, M.: Exceptional curves on rational surfaces having  $K^2 \geq 0$ . C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338, no. 11, 873–878 (2004)
- [Lah04b] Lahyane, M.: Rational surfaces having only a finite number of exceptional curves. Math. Z. 247, no. 1, 213–221 (2004)
- [Lah05a] Lahyane, M.: Exceptional curves on smooth rational surfaces with  $-K$  not nef and of self-intersection zero. Proc. Amer. Math. Soc. 133, no.6, 1593–1599 (2005)
- [Lah05b] Lahyane, M.: Irreducibility of the  $(-1)$ -classes on smooth rational surfaces. Proc. Amer. Math. Soc. 133, no. 8, 2219–2224 (2005)
- [Lah10] Lahyane, M.: On the finite generation of the effective monoid of rational surfaces. J. Pure Appl. Algebra 214, no. 7, 1217–1240 (2010)
- [LFM08] Lahyane, M.; Failla, G.; Moreno Mejía, I.: On the vanishing of cohomology of divisors on nonsingular rational surfaces. Int. J. Contemp. Math. Sci. 3, no. 21-24, 1031–1040 (2008)
- [LH05] Lahyane, M.; Harbourne, B.: Irreducibility of  $-1$ -classes on anticanonical rational surfaces and finite generation of the effective monoid. Pacific J. Math. 218, no. 1, 101–114 (2005)
- [Loo81] Looijenga, E.: Rational surfaces with an anticanonical cycle. Ann. Math. (2) 114, no. 2, 267–322 (1981)
- [Man74] Manin, Y.I.: Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., New York (1974)

- [Mat88] Matsuzawa, J.: Monoidal transformations of Hirzebruch surfaces and Weyl groups of type C. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 35, no. 2, 425–429 (1988)
- [Mat93] Matsuzawa, J.: Root systems and periods on Hirzebruch surfaces. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 29, no. 3, 411–438 (1993)
- [McK10] McKernan, J.: Mori dream spaces. *Jpn. J. Math.* 5, no. 1, 127–151 (2010)
- [Mir99] Miranda, R.: Linear systems of plane curves. *Notices Amer. Math. Soc.* 46, no. 2, 192–201 (1999)
- [Mon03] Monserrat Delpalillo, F.J.: El cono de curvas asociado a una superficie racional. *Poliedricidad. Tesis de Doctorado, Universitat Jaume I* (2003)
- [Mon11] Monserrat Delpalillo, F.J.: Lins Neto’s examples of foliations and the Mori cone of blow-ups of  $\mathbb{P}^2$ . *Bull. London Math. Soc.* 43, no. 2, 335–346 (2011)
- [Nag60] Nagata, M.: On rational surfaces. II. *Mem. Coll. Sci. Univ. Tokyo Ser. Math.* 33, no. 2, 271–293 (1960)
- [Oka15] Okawa, S.: On images of Mori dream spaces. *Math. Ann.* 362, 1–28 (2015)
- [Ott09] Ottem, J.C. Cox rings of projective varieties. Master’s thesis, University of Oslo (2009)
- [Ott11] Ottem, J.C.: On the Cox ring of  $\mathbb{P}^2$  blown up in points on a line. *Math. Scand.* 109, no. 1, 22–30 (2011)
- [Ott13] Ottem, J.C.: Cox rings of K3 surfaces with Picard number 2. *J. Pure Appl. Algebra* 217, no. 4, 709–715 (2013)
- [Ott15] Ottem, J.C.: Birational geometry of hypersurfaces in products of projective spaces. *Math. Z.* 280, no. 1-2, 135–148 (2015)
- [Pre09] Prendergast-Smith, A.: Extremal rational elliptic threefolds. Ph.D. Thesis, University of Cambridge (2009)
- [Pre10] Prendergast-Smith, A.: Extremal rational elliptic threefolds. *Michigan Math. J.* 59, no. 3, 535–572 (2010)
- [Pre12] Prendergast-Smith, A.: The cone conjecture for some rational elliptic threefolds. *Math. Z.* 272, no. 1-2, 589–605 (2012)
- [Ros78] Rosoff, J.: On the semi-group of effective divisor classes of an algebraic variety: the question of finite generation. Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley (1978)
- [Ros80] Rosoff, J.: Effective divisor classes and blowings-up of  $\mathbb{P}^2$ . *Pacific J. Math.* 89, no. 2, 419–429 (1980)
- [Ros02] Rosoff, J.: Effective divisor classes on a ruled surface. *Pacific J. Math.* 202, no.1, 119–124 (2002)
- [Seg61] Segre, B.: Alcune questioni su insiemi finiti di punti in geometria algebrica. *Univ. e Politec. Torino Rend. Sem. Mat.* 20, 67–85 (1960/1961)
- [STV07] Stillman, M.; Testa, D.; Velasco, M.: Gröbner bases, monomial group actions, and the Cox rings of del Pezzo surfaces. *J. Algebra* 316, no. 2, 777–801 (2007)
- [TW15] Taylor, W.; Wang, Y.: Non-toric bases for elliptic Calabi-Yau threefolds and 6D F-theory vacua. arXiv:1504.07689v3 [hep-th]
- [TVV09] Testa, D.; Várilly-Alvarado, A.; Velasco, M.: Cox rings of degree one del Pezzo surfaces. *Algebra Number Theory* 3, no. 7, 729–761 (2009)
- [TVV11] Testa, D.; Várilly-Alvarado, A.; Velasco, M.: Big rational surfaces. *Math. Ann.* 351, no. 1, 95–107 (2011)
- [Wol16] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 10.4, Champaign, IL (2016)

- [Yan07] Yang, S.: Linear systems in  $\mathbb{P}^2$  with base points of bounded multiplicity. *J. Algebraic Geom.* 16, no. 1, 19–38 (2007)
- [Zar62] Zariski, O.: The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface. *Ann. Math (2)* 76, no. 3, 560–615 (1962)



## Índice alfabético

- Anillo de Cox de una Superficie, 19
- Cadena, 116
- Característica de Euler-Poincaré, 8
- Clase
  - Anticanónica, 10
  - Canónica, 10
  - Efectiva, 10
  - Estándar, 30
  - Excepcional Ordenada, 31
  - Nef, 10
- Componente Fija, 7
- Conjetura
  - de Gimigliano, 32
  - de Harbourne, 30
  - de Harbourne-Hirschowitz, 31
  - de Hirschowitz, 31
  - de Segre, 31
- Constelación, 116
- Criterio de Contractibilidad de Castelnuovo, 12
- Curva, 6
  - (-1), 12
  - (-2), 12
- Divisor
  - Anticanónico, 6
  - Canónico, 6
  - de Cartier, 3
  - de Weil, 2
    - de una Función Racional no nula, 2
  - Efectivo, 2
  - Especial, 31
  - Excepcional, 11
  - Nef, 9
  - No Especial, 31
  - Primo, 1
  - Principal
    - de Cartier, 3
    - de Weil, 2
- Equivalencia
  - Lineal
    - de Divisores de Cartier, 3
    - de Divisores de Weil, 2
  - Numérica, 9
- Fibra de una Superficie Reglada, 13
- Gavilla
  - Asociada a un Divisor de Cartier, 4
  - Canónica, 6
  - de Cocientes Totales, 3
  - de Diferenciales de Kähler, 5
  - Invertible, 4
- Grupo
  - de Clases de Divisores de Cartier, 3
  - de Clases de Divisores de Weil, 2
  - de Néron-Severi, 9
  - de Picard, 4
- Monoide
  - Característico, 22
  - Efectivo, 10
  - Fraccional de las Clases Efectivas sin Puntos
    - Base, 22
  - Nef, 10

Número

- de Intersección, 8
- de Picard, 10

Propiedad Ortogonal Anticanónica, 34

Punto

- Base, 7
- Infinitamente Cercano, 12

Puntos

- Colineales en  $\Sigma_n$ , 102
- en Posición General en  $\mathbb{P}^2$ , 137
- en Posición General en  $\Sigma_n$ , 145

Sección

- al infinito sobre  $\Sigma_n$ , 15
- de una Superficie Reglada, 13

Sistema Lineal, 7

- Completo, 7

Soporte, 7

Superficie, 6

- Anticanónica, 34
- de Harbourne-Hirschowitz, 33
- de Hirzebruch, 15
- Extremal, 23
- Racional, 6
- Reglada, 13

Teorema de Riemann-Roch, 8

- para Superficies Racionales, 9

Transformación

- Admisible, 137
- Cuadrática, 137
- Elemental, 16
- Monoidal, 10

Transformada Estricta, 11