



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

REPRESENTACIÓN ESPINORIAL DE  
SUPERFICIES LORENTZIANAS EN  $\mathbb{R}^{2,2}$

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**DOCTOR EN CIENCIAS**

PRESENTA

M.Cs. VICTOR HUGO PATTY YUJRA

Tutor:

DR. PIERRE MICHEL BAYARD  
Facultad de Ciencias - UNAM

Co-tutor:

DR. FEDERICO SÁNCHEZ BRINGAS  
Facultad de Ciencias - UNAM

Morelia-Michoacán, Septiembre de 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



---

# Agradecimientos

---

En principio quiero agradecer a Dios por haberme dado salud a mí y a mi familia, y heberme permitido alcanzar esta meta en mi vida. Agradecer de todo corazón a mis amados padres Dionicio y Andrea a quienes les debo todo lo que soy, gracias por todas sus enseñanzas, su amor y su apoyo incondicional.

Agradecer de manera especial a mi amada esposa Claudia Leonor, por darme tanta felicidad, por toda su paciencia, por toda su comprensión y por todo su amor; a mis amados niños Victoria y Matias, quienes son mi motivo y mi luz para seguir adelante.

Esta presente tesis no hubiera sido posible realizarla sin la guía académica de mi estimado profesor Pierre Bayard, gracias por toda su paciencia, por todas sus sugerencias y sobre todo por toda la confianza depositada en mí.

Agradecer también a todos los profesores del Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas que han contribuído en mi formación, de manera especial agradecer a los profesores Jesús Muciño, Ferrán Valdez, Elmar Wagner y Osvaldo Osuna. También agradecer al profesor Federico Sánchez por haber co-asesorado mi trabajo.

Para terminar quiero agradecer a todos mis compañeros con quienes vivimos momentos inolvidables y sobre todo por el apoyo brindado a mi familia, gracias Jurgen, Leydi, Liliana, Karley, Israel, Cenobio, entre tantos, se los aprecia mucho. Agradecer también al gran amigo Alex, que estuvo siempre en el momento preciso para apoyarnos.

Morelia-Michocán, a 20 de septiembre de 2016.

Victor Patty

*A mi linda esposa Claudia Leonor  
y a mis adorados niños Victoria y Matias.  
LOS AMO!*

---

# Índice general

---

Resumen	III
Abstract	v
Introducción	VII
<b>I Sobre superficies Lorentzianas en <math>\mathbb{R}^{2,2}</math></b>	<b>1</b>
1. La segunda forma fundamental de una superficie Lorentziana en $\mathbb{R}^{2,2}$	3
1.1. Aplicaciones cuadráticas de $\mathbb{R}^{1,1}$ en $\mathbb{R}^{1,1}$ . . . . .	4
1.2. La hipérbola de curvatura . . . . .	17
2. La aplicación de Gauss de una superficie Lorentziana en $\mathbb{R}^{2,2}$	21
2.1. El espacio de los bivectores de $\mathbb{R}^{2,2}$ . . . . .	22
2.2. La Grassmanniana de los planos Lorentzianos en $\mathbb{R}^{2,2}$ . . . . .	25
2.3. Direcciones asintóticas . . . . .	35
<b>II Representación espinorial de superficies Lorentzianas en <math>\mathbb{R}^{2,2}</math></b>	<b>41</b>
3. Espinores algebraicos del espacio $\mathbb{R}^{2,2}$	43
3.1. El Álgebra de Clifford de $\mathbb{R}^{2,2}$ . . . . .	45
3.2. El grupo espinorial . . . . .	47
3.3. La representación espinorial . . . . .	55

<b>4. La representación espinorial de una superficie Lorentziana en <math>\mathbb{R}^{2,2}</math></b>	<b>65</b>
4.1. El haz espinorial del espacio $\mathbb{R}^{2,2}$ . . . . .	66
4.2. El haz espinorial inducido a una superficie Lorentziana . . . . .	69
4.2.1. La fórmula de Gauss espinorial . . . . .	70
4.3. El teorema de representación espinorial . . . . .	75
4.3.1. La construcción inversa . . . . .	75
4.3.2. Ecuaciones fundamentales y campos espinoriales . . . . .	77
4.3.3. Demostración del Lema 4.3.3 . . . . .	82
4.4. La fórmula de representación espinorial . . . . .	84
<b>III Aplicaciones de la fórmula de representación espinorial</b>	<b>91</b>
<b>5. Superficies Lorentzianas en pseudo espacios de forma de <math>\mathbb{R}^{2,2}</math></b>	<b>93</b>
5.1. La inmersión inducida a un pseudo espacio de forma . . . . .	94
5.2. Superficies Lorentzianas en $\mathbb{R}^{2,1}$ y en $\mathbb{H}^{2,1}$ . . . . .	97
5.3. Superficies Lorentzianas en $\mathbb{R}^{1,2}$ y en $\mathbb{S}^{1,2}$ . . . . .	111
<b>6. La representación generalizada de Weierstrass en <math>\mathbb{R}^{2,2}</math></b>	<b>119</b>
6.1. La fórmula generalizada de Weierstrass de una superficie Lorentziana en $\mathbb{R}^{2,2}$ . . . . .	120
6.2. Fórmulas generalizadas en $\mathbb{R}^{2,1}$ y en $\mathbb{R}^{1,2}$ . . . . .	124
<b>7. Superficies Lorentzianas planas con haz normal plano en <math>\mathbb{R}^{2,2}</math></b>	<b>127</b>
7.1. La estructura de Lorentz inducida por la aplicación de Gauss . . . . .	128
7.2. Descripción local de superficies Lorentzianas planas con haz normal plano en $\mathbb{R}^{2,2}$	133
<b>8. Superficies Lorentzianas planas en pseudo esferas de <math>\mathbb{R}^{2,2}</math></b>	<b>157</b>
8.1. Preliminares algebraicos . . . . .	157
8.2. Superficies Lorentzianas en pseudo esferas . . . . .	160
<b>A. Estructuras de Lorentz</b>	<b>167</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>171</b>

---

# Resumen

---

El objeto de estudio de la tesis es la representación espinorial de una superficie Lorentziana en el espacio pseudo Euclideo  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Probaremos que una inmersión isométrica de una superficie Lorentziana simplemente conexa en  $\mathbb{R}^{2,2}$  es equivalente a un campo espinorial normalizado que es solución de una ecuación de Dirac sobre la superficie. Además, usando los cuaternios y los números de Lorentz, daremos la relación explícita entre la inmersión isométrica y el campo espinorial por medio de una fórmula de representación, que puede ser considerada como una fórmula generalizada de Weierstrass. Aplicando la fórmula de representación obtenemos una nueva representación espinorial de una superficie Lorentziana en los pseudo espacios de forma tres dimensionales de  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Deduciremos una fórmula generalizada de Weierstrass de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Finalmente usaremos la fórmula de representación para dar la descripción local de una superficie Lorentziana plana con haz normal plano y aplicación de Gauss regular en  $\mathbb{R}^{2,2}$ , y para dar una descripción conforme de una superficie Lorentziana plana en las pseudo esferas de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

**Palabras clave:** Inmersiones isométricas; Superficies Lorentzianas; Operador de Dirac; Geometría espinorial; Representación de Weierstrass.





---

# Abstract

---

The study object of the thesis is the spinor representation of a Lorentzian surface in the pseudo Euclidean space  $\mathbb{R}^{2,2}$ . We prove that an isometric immersion of a simply connected Lorentzian surface in  $\mathbb{R}^{2,2}$  is equivalent to a normalised spinor field solution of a Dirac equation on the surface. Moreover, using the quaternions and the Lorentz numbers, we give the explicit relation between the isometric immersion and the spinor field by means of an explicit representation formula, which may be regarded as a generalised Weierstrass representation formula. Applying the representation formula in  $\mathbb{R}^{2,2}$  we obtain a new spinor representation of a Lorentzian surface in the three dimensional pseudo space forms of  $\mathbb{R}^{2,2}$ . We deduce a generalised Weierstrass representation of a Lorentzian surfaces in  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Finally we use the representation formula to give the local description of a flat Lorentzian surface with flat normal bundle and regular Gauss map in  $\mathbb{R}^{2,2}$ , and to give a conformal description of a flat Lorentzian surface in the pseudo spheres of  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

**Keywords:** Isometric immersions; Lorentzian surfaces; Dirac operator; Spin Geometry; Weierstrass Representation.

## Artículos publicados y aceptados

- *A generalized Weierstrass representation of Lorentzian surfaces in  $\mathbb{R}^{2,2}$  and applications.*  
International Journal of Geometric Methods in Modern Physics **13:6** (2016) 1650074.
- *Spinor representation of Lorentzian surfaces in  $\mathbb{R}^{2,2}$*  (with P. Bayard).  
Journal of Geometry and Physics, **95** (2015) 74-95.
- *On Lorentzian surfaces in  $\mathbb{R}^{2,2}$*  (with P. Bayard and F. Sánchez-Bringas).  
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section: A Mathematics (to appear).  
ArXiv:1503.06225v1 [math.DG] (2015).

---

# Introducción

---

Esta tesis se encuentra enfocada en la teoría de inmersiones isométricas de superficies Lorentzianas en el espacio pseudo Euclideo  $\mathbb{R}^{2,2}$ , usando métodos de la geometría espinorial, los cuaternios y los números de Lorentz.

La tesis consta de tres partes. La primera esta dedicada al estudio de los invariantes de segundo orden de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ . En la segunda parte presentaremos los resultados principales de la tesis: el teorema de representación espinorial y la fórmula de representación espinorial de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ . En la última parte de la tesis, describiremos los resultados obtenidos al aplicar la formula de representación espinorial. Una breve descripción de cada parte de la tesis es dada a continuación.

## 1. Sobre superficies Lorentzianas en $\mathbb{R}^{2,2}$

Consideremos el espacio pseudo Euclideo  $\mathbb{R}^{2,2}$  definido como el espacio  $\mathbb{R}^4$  equipado con la métrica indefinida de signatura  $(2, 2)$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle := -dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2.$$

Diremos que una superficie  $M \subset \mathbb{R}^{2,2}$  es Lorentziana si la restricción de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a  $M$  es una métrica Lorentziana, *i.e.* de signatura  $(1, 1)$ : el haz tangente  $TM$  y el haz normal  $NM$  de una superficie Lorentziana están equipados con métricas Lorentzianas sobre sus fibras.

La segunda forma fundamental de una superficie Lorentziana  $M$  en un punto  $x$  es una aplicación cuadrática  $T_x M \rightarrow N_x M$ . Los invariantes numéricos de la segunda forma fundamental son los invariantes de segundo orden de la superficie en  $x$ , y determian localmente la geometría extrínseca de la superficie en  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Nuestro propósito es determinar completamente estos invariantes: adicionalmente a los cuatro invariantes naturales  $|\vec{H}|^2, K, K_N$  y  $\Delta$  que son la norma Lorentziana del vector de curvatura media, la curvatura Gaussiana, la curvatura normal y el resultante de la segunda forma fundamental que traduce la convexidad local de la superficie, nuevos invariantes aparecen en algunos casos degenerados.

Para realizar la descripción completa de los invariantes de segundo orden de una superficie Lorentziana  $M$  en un punto  $x$  es necesario realizar un estudio sistemático de los invariantes numéricos de una aplicación cuadrática  $q : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$ .

También estudiaremos las hipérbolas de curvatura asociadas a la segunda forma fundamental de una superficie Lorentziana  $M$  en un punto  $x$ . En el contexto Riemanniano, este concepto es análogo a la elipse de curvatura. La hipérbola de curvatura asociada a una aplicación cuadrática  $q : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$  es un objeto geométrico cuyas propiedades pueden ser descritas algebraicamente por medio de los invariantes numéricos de la aplicación cuadrática  $q$ ; por ejemplo, cuando el invariante  $K_N$  es distinto de cero la hipérbola de curvatura es no degenerada y su posición con respecto al origen de  $\mathbb{R}^{1,1}$  depende del signo del invariante  $\Delta$ .

Describiremos los invariantes de segundo orden de una superficie Lorentziana y las hipérbolas de curvatura asociadas a la segunda forma fundamental en el Capítulo 1 de la tesis.

En el Capítulo 2 vamos a introducir la aplicación de Gauss (generalizada) de una superficie Lorentziana orientada  $M \subset \mathbb{R}^{2,2}$ . Nuestro objetivo ahora es estudiar la relación de la aplicación de Gauss con los invariantes de segundo orden de la superficie.

La relación principal que obtendremos (y que será útil en capítulos posteriores) viene dada por una fórmula que involucra la diferencial de la aplicación de Gauss, la curvatura de Gauss  $K$  y la curvatura normal  $K_N$  de una superficie Lorentziana. Posteriormente, usaremos la aplicación de Gauss y los invariantes de segundo orden para estudiar las direcciones asintóticas sobre la superficie: veremos como el signo del invariante  $\Delta$  determina la existencia de dichas direcciones, y que junto con el invariante  $K_N$  determinan el caracter causal de estas.

Existen varios trabajos relacionados a esta parte de la tesis. Posiblemente los más significativos en este tópico son dos. El primero dado por C. L. E. Moore y E. B. Wilson [41], donde establecen que la segunda forma fundamental de una superficie Riemanniana en  $\mathbb{R}^4$  puede ser clasificada por una configuración consistente en un punto y una elipse en el espacio normal (la elipse de curvatura), y que esta configuración determina los invariantes numéricos. El otro dado por J. A. Little [39], donde usando los invariantes numéricos de la segunda forma fundamental y la descripción de la elipse de curvatura describe una teoría de singularidades sobre la superficie.

Recientemente, P. Bayard y F. Sánchez-Bringas [7, 8, 9] estudiaron (de manera simplificada y esquemática) la descripción de los invariantes de segundo orden de una superficie de tipo espacio en  $\mathbb{R}^{3,1}$ , de una superficie de tipo tiempo en  $\mathbb{R}^{3,1}$  y de una superficie Riemanniana en  $\mathbb{R}^4$ . En [9] estudiaron también algunas relaciones entre la aplicación de Gauss y los invariantes de segundo orden de una superficie de tipo tiempo en el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{3,1}$ . Esencialmente, usando estas ideas estudiaremos los invariantes de segundo orden y la aplicación de Gauss de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Los resultados principales de esta parte de la tesis están incluidos en [6] y fueron aceptados para su publicación en la revista *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section: A Mathematics*.

## 2. Representación espinorial de superficies Lorentzianas en el espacio $\mathbb{R}^{2,2}$

En esta parte probaremos los resultados principales de la tesis: el teorema de representación espinorial y la fórmula de representación espinorial de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

En principio estudiaremos los preliminares algebraicos concernientes a la geometría espinorial del espacio  $\mathbb{R}^{2,2}$ : álgebras de Clifford, grupo espinorial y la representación espinorial. La referencia principal para el estudio de las álgebras de Clifford de espacios vectoriales pseudo Riemannianos (y de todos los conceptos introducidos en esta parte de la tesis) es [36], vea también [17] para el caso Riemanniano.

En el Capítulo 3 de la tesis, usando los cuaternios y los números de Lorentz, describiremos un modelo para el álgebra de Clifford  $Cl(2, 2)$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , para el grupo espinorial  $Spin(2, 2)$  y para la representación espinorial. Algunas de las construcciones que presentamos son similares a las dadas por P. Bayard [2, 3]. Gran parte del capítulo está dedicado a establecer que los modelos considerados son isomorfos a los establecidos en la literatura.

Posteriormente, en el Capítulo 4, estudiaremos algunas propiedades del haz espinorial de  $\mathbb{R}^{2,2}$  y la geometría espinorial inducida a una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ ; deduciremos la fórmula de Gauss espinorial que nos brinda las ideas necesarias para demostrar el teorema de representación espinorial que describimos a continuación.

**El teorema de representación espinorial.** Consideremos una superficie Lorentziana simplemente conexa  $(M, g)$  y un haz vectorial Lorentziano  $E$  de rango dos sobre  $M$  equipado con una conexión compatible. Supongamos que fueron dadas estructuras espinoriales sobre los haces  $TM, E$  y denotaremos por  $\Sigma M, \Sigma E$  los correspondientes haces espinoriales asociados. Definiremos el haz espinorial producto tensorial  $\Sigma E \otimes \Sigma M$  y denotaremos por  $D$  el operador de Dirac sobre este haz asociado a la conexión producto tensorial. La primera parte del Teorema 4.3.1, donde precisaremos los enunciados, dice lo siguiente.

*Supongamos que  $\vec{H} \in \Gamma(E)$  es una sección de  $E$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*a) existe un campo espinorial normalizado  $\varphi \in \Gamma(\Sigma E \otimes \Sigma M)$  que es solución de la ecuación de Dirac*

$$D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi,$$

*b) existe una inmersión isométrica  $F : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  con vector de curvatura media  $\vec{H}$  y haz normal  $E$ .*

El esquema de la prueba es dado a continuación. Consideremos una inmersión isométrica  $F : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ , el hecho que *b)* implica la afirmación *a)* es una consecuencia de la fórmula de Gauss espinorial (Proposición 4.2.2 y Corolario 4.2.3). Recíprocamente, supongamos que  $(M, g)$

es una superficie Lorentziana abstracta (*i.e.* no necesariamente inmersa en algún espacio) y que  $\varphi \in \Gamma(\Sigma E \otimes \Sigma M)$  satisface la hipótesis *a*); veremos que existe una 1–forma  $\eta$  sobre  $M$  con valores en  $Cl(2, 2)$  tal que el campo espinorial  $\varphi$  resuelve la ecuación de tipo Killing

$$\nabla_X \varphi = \eta(X) \cdot \varphi,$$

para todo  $X \in TM$  (Lema 4.3.3). Las condiciones de integrabilidad para  $\eta$  son precisamente las ecuaciones de Gauss, Ricci y Codazzi (Proposición 4.3.2). Finalmente, usando el teorema fundamental de las subvariedades (vea por ejemplo [11, Theorem 2.4]) conseguimos el resultado.

**La fórmula de representación espinorial.** Consideremos  $(M, g)$ ,  $E$ ,  $\vec{H}$  y  $\Sigma E \otimes \Sigma M$  como en las hipótesis de la sección anterior.

Supongamos que el campo espinorial  $\varphi \in \Gamma(\Sigma E \otimes \Sigma M)$  es solución de la ecuación de Dirac  $D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$ . Usando los cuaternios y los números de Lorentz, podemos definir un producto punto con valores vectoriales  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  sobre el haz espinorial  $\Sigma E \otimes \Sigma M$ ; este producto punto permite definir la 1–forma  $\xi : E \oplus TM \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  por

$$\xi(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle.$$

Mostraremos que  $\xi$  es una isometría (Lema 4.4.1), que su restricción a  $TM$  es una 1–forma cerrada (Lema 4.4.2) y que por tanto existe una inmersión isométrica  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  (única salvo movimientos rígidos) tal que

$$dF = \xi.$$

Entonces mostraremos el Teorema 4.4.4 el cual afirma que la 1–forma  $\xi$  induce una isometría entre  $E$  y el haz normal de  $F(M) \subset \mathbb{R}^{2,2}$ , que preserva conexiones y segunda forma fundamental.

Los argumentos de encima prueban la fórmula de representación espinorial de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Este es el contenido de la segunda parte del Teorema 4.3.1.

*La inmersión isométrica inducida por el campo espinorial  $\varphi$  viene dada explícitamente por la fórmula de representación espinorial*

$$F = \int \xi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2,2},$$

*donde, para cada  $X \in TM$ ,  $\xi(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle$  es una 1–forma cerrada sobre  $M$  y toma valores en  $\mathbb{R}^{2,2}$ .*

Diferentes aplicaciones de esta fórmula de representación espinorial son obtenidas a partir de una simple observación: una inmersión isométrica  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  es inducida por la restricción a la superficie Lorentziana  $M$  de un campo espinorial constante de  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Cuando la fórmula de representación espinorial en  $\mathbb{R}^{2,2}$  es escrita en marcos móviles adaptados a la inmersión conseguimos fórmulas no triviales.

Entonces aplicaremos la fórmula de representación espinorial en  $\mathbb{R}^{2,2}$  y de manera casi directa probaremos los siguientes resultados.

- La fórmula de Weierstrass de una superficie Lorentziana mínima (*i.e.*  $\vec{H} = 0$ ) en  $\mathbb{R}^{2,2}$  (Corolario 4.4.5); aunque este resultado ya fue establecido en [15, Theorem 2.1], nosotros obtenemos aquí una interpretación espinorial de esta fórmula.
- El teorema fundamental de las subvariedades [11, Theorem 2.4] en el caso de superficies Lorentzianas en  $\mathbb{R}^{2,2}$  (Corolario 4.4.6); vea el enunciado preciso en la Remarca 4.2.1.

También obtenemos nuevos resultados, todos ellos son descritos en la tercera parte de la tesis.

Los resultados principales de esta parte de la tesis se encuentran en [5] y fueron publicados en la revista *Journal of Geometry and Physics*.

Para concluir la sección, indicaremos algunos trabajos relacionados a esta parte de la tesis. La representación espinorial de una superficie  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  por medio de un campo espinorial  $\psi$  que es solución de la ecuación de Dirac  $D\psi = H\psi$  ( $H$  es la curvatura media de  $M$ ) fue posiblemente dada por primera vez por L. P. Eisenhart [16] en 1909. Esta representación de una superficie en  $\mathbb{R}^3$  fue establecida también por otros autores, entre ellos: R. Kussner y N. Schmitt [31], I. A. Taimanov [47]. Todos ellos estudiaron esta relación en términos locales con el fin de obtener fórmulas explícitas.

En el año 1998, Th. Friedrich [17] dio una interpretación muy simple de la descripción de una superficie en  $\mathbb{R}^3$ . Considere una inmersión isométrica de una superficie  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media  $H$  y un campo espinorial constante  $\Phi$  sobre  $\mathbb{R}^3$ : la restricción de  $\Phi$  a la superficie,  $\psi := \Phi|_M$ , es un campo espinorial no constante sobre  $M$ , con respecto a la geometría intrínseca de la superficie, que satisface la ecuación de Dirac  $D\psi = H\psi$ . Recíprocamente, supongamos que  $\psi$  es un campo espinorial normalizado sobre una superficie abstracta  $M$  que satisface la ecuación de Dirac de encima. Existe un endomorfismo simétrico  $E : TM \rightarrow TM$  tal que  $\psi$  satisface la ecuación de tipo Killing  $\nabla_X\psi = E(X) \cdot \psi$ . Las condiciones de integrabilidad para  $E$  son las ecuaciones de Gauss y Codazzi, por el teorema fundamental de superficies, el campo espinorial  $\psi$  induce una inmersión isométrica de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ . Usando estas ideas, algunas de las generalizaciones que se dieron son las siguientes.

- B. Morel [42]: superficies en  $\mathbb{S}^3$  y en  $\mathbb{H}^3$  (2005).
- M. A. Lawn [33]: superficies Lorentzianas en el 3–espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$  (2008).
- J. Roth [45]: superficies Riemannianas en 3–variedades homogéneas (2010).
- M. A. Lawn y J. Roth [34]: superficies en 3–espacios de forma (2011).
- P. Bayard, M. A. Lawn y J. Roth [4]: superficies en 4–espacios de forma (2013).
- P. Bayard [2]: superficies de tipo espacio en el 4–espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{3,1}$  (2013).



### 3. Aplicaciones de la fórmula de representación espinorial

En esta última parte de la tesis, presentaremos los resultados nuevos que obtuvimos al aplicar la fórmula de representación espinorial de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ . La mayoría de estos resultados se encuentran en [44] y fueron aceptados para su publicación en la revista *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*.

#### 3.1- Superficies Lorentzianas en 3-espacios de forma de $\mathbb{R}^{2,2}$

Los 3-espacios de forma, *i.e.* de curvatura constante 0 y  $\pm 1$ , de  $\mathbb{R}^{2,2}$  son: los espacios de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$  y  $\mathbb{R}^{1,2}$ , las pseudo esferas  $\mathbb{H}^{2,1}$  (espacio de anti-de Sitter) y  $\mathbb{S}^{1,2}$ .

En los Teoremas 5.2.2, 5.2.10, 5.3.2 y 5.3.4 obtendremos nuevas caracterizaciones espinoriales de una inmersión isométrica de una superficie Lorentziana en los espacios  $\mathbb{R}^{2,1}$ ,  $\mathbb{H}^{2,1}$ ,  $\mathbb{R}^{1,2}$  y  $\mathbb{S}^{1,2}$ , respectivamente. Las caracterizaciones obtenidas son dadas en términos de un campo espinorial que es solución de una ecuación de Dirac intrínseca sobre la superficie y son más simples que las representaciones dadas por M. A. Lawn y J. Roth [32, 33, 34] quienes necesitan dos campos espinoriales para sus caracterizaciones.

En el caso de superficies Lorentzianas en los espacios de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$  y  $\mathbb{R}^{1,2}$ , conseguiremos además fórmulas de representación de la inmersión (Proposiciones 5.2.3 y 5.3.3). Más aún, veremos como el teorema de representación y la fórmula de representación en  $\mathbb{R}^{2,1}$  (resp. en  $\mathbb{R}^{1,2}$ ) permiten deducir los siguientes resultados.

- Una fórmula generalizada de Weierstrass en  $\mathbb{R}^{2,1}$  (Teorema 5.2.4); este resultado coincide con la fórmula de Weierstrass dada por S. Lee [37, Theorem 2]. En particular, en el caso en que la superficie es mínima (*i.e.*  $H = 0$ ), obtenemos en la Remarca 5.2.6 la clásica fórmula de Weierstrass dada por J. Konderak [27, Theorem 4].
- Una transformación entre superficies Lorentzianas mínimas en las pseudo esferas de  $\mathbb{R}^{2,2}$  y superficies Lorentzianas de curvatura media constante 1 en los espacios de Minkowski de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , análoga a la transformación dada por H. B. Lawson [35], quien asocia a cada superficie mínima en  $\mathbb{S}^3$  una superficie de curvatura media constante  $-1$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Todos estos resultados son descritos en el Capítulo 5 de la tesis. Los resultados concernientes a los espacios de Minkowski fueron incluidos en [5], los otros se encuentran en [44].

Los trabajos relacionados a esta sección son los siguientes. La representación espinorial de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,1}$  fue dada por M. A. Lawn [32, 33], esta caracterización espinorial fue la generalización al caso Lorentziano de la representación de superficies en  $\mathbb{R}^3$  dada por Th. Friedrich [18]. La representación espinorial de una superficie Lorentziana en los espacios  $\mathbb{R}^{1,2}$ ,  $\mathbb{S}^{1,2}$  y  $\mathbb{H}^{2,1}$ , fue descrita posteriormente por M. A. Lawn y J. Roth [34]; análogamente, estas caracterizaciones espinoriales en las pseudo esferas  $\mathbb{S}^{1,2}$  y  $\mathbb{H}^{2,1}$ , fueron la extensión al caso Lorentziano de la representación de superficies en  $\mathbb{S}^3$  y en  $\mathbb{H}^3$  dada por B. Morel [42].

### 3.2- La representación generalizada de Weierstrass en $\mathbb{R}^{2,2}$

En el Teorema 6.1.1 propondremos una fórmula generalizada de Weierstrass en  $\mathbb{R}^{2,2}$  que afirma lo siguiente. Las componentes del campo espinorial que representa la inmersión isométrica de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$  satisfacen un sistema diferencial lineal (la ecuación de Dirac) sobre la superficie y la inmersión isométrica inducida es entonces descrita explícitamente en términos de dichas componentes. La prueba de nuestra fórmula generalizada de Weierstrass no es trivial y esencialmente consiste en encontrar un marco espinorial conveniente sobre la superficie.

Como casos particulares de esta fórmula generalizada de Weierstrass en  $\mathbb{R}^{2,2}$ , obtenemos directamente los siguientes resultados.

- Una nueva fórmula de representación de una superficie Lorentziana mínima en  $\mathbb{R}^{2,2}$ ; esta fórmula viene dada en términos de las componentes del campo espinorial que representa la inmersión (Corolario 6.1.2).
- Nuevas fórmulas generalizadas de Weierstrass de una superficie Lorentziana en los espacios de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$  y  $\mathbb{R}^{1,2}$  (Corolarios 6.2.1 y 6.2.2). La fórmula generalizada en  $\mathbb{R}^{2,1}$  (que obtenemos aquí) coincide con la fórmula de Weierstrass descrita en la sección anterior.

Todos estos resultados son descritos en el Capítulo 6 de la tesis y fueron incluidos en [44].

Los trabajos relacionados a esta sección son los siguientes.

En el contexto Riemanniano, el trabajo más importante en este tópico es la fórmula de representación de Weierstrass de una superficie mínima en  $\mathbb{R}^3$  dada por K. Weierstrass [48] en el año 1866. La fórmula de Weierstrass afirma que las superficies mínimas en  $\mathbb{R}^3$  pueden ser parametrizadas localmente por medio de dos funciones holomorfas, siendo esta una herramienta muy poderosa para el análisis de las superficies mínimas. Una extensión de la fórmula de Weierstrass para superficies genéricas no mínimas en  $\mathbb{R}^3$  fue dada por L. P. Eisenhart [16], en términos de funciones que no necesariamente eran holomorfas. Esta misma extensión fue redescubierta por K. Kenmotsu [26]; posteriormente, B. G. Konopelchenko [28, Section 1] propuso una extensión diferente pero equivalente a la anterior. Finalmente, usando las mismas ideas, una fórmula generalizada de Weierstrass para superficies Riemannianas en espacios 4–dimensionales fue propuesta por B. G. Konopelchenko [29, 30].

En el contexto Lorentziano tenemos lo siguiente. J. Konderak [27] describió una fórmula de representación de Weierstrass de una superficie de Lorentz mínima en el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$  similar a la fórmula de Weierstrass de una superficie mínima en  $\mathbb{R}^3$  [48]. Por otro lado, S. Lee [37] describió una fórmula de Weierstrass para superficies Lorentzianas en  $\mathbb{R}^{2,1}$  similar a la fórmula propuesta por B. G. Konopelchenko [28] para una superficie en  $\mathbb{R}^3$ . Nuestra fórmula generalizada de Weierstrass en  $\mathbb{R}^{2,2}$  extiende estas descripciones.

### 3.3- Superficies Lorentzianas planas con haz normal plano en $\mathbb{R}^{2,2}$

En este apartado, vamos a utilizar los invariantes de segundo orden y la aplicación de Gauss de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$  (primera parte de la tesis).

En los Teoremas 7.2.9 y 7.2.15 presentaremos una descripción de la estructura local de una superficie Lorentziana plana con haz normal plano (*i.e.*  $K = K_N = 0$ ), invariante  $\Delta$  no nulo y aplicación de Gauss regular en  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Estos resultados aparecen una vez que consideremos un marco espinorial paralelo sobre la superficie, esto es posible pues las curvaturas de Gauss y normal son nulas; al describir el campo espinorial que induce la inmersión isométrica en  $\mathbb{R}^{2,2}$ , en dicho marco espinorial, obtenemos fórmulas simples que permiten alcanzar la descripción.

Como consecuencia de nuestros teoremas de descripción local, mostraremos que tales superficies Lorentzianas dependen localmente de:

- cuatro funciones reales de una variable real, dos de las cuales corresponden a la solución de un sistema diferencial hiperbólico, en el caso en que el invariante  $\Delta$  es positivo sobre la superficie (Corolario 7.2.10);
- una función holomorfa y dos funciones reales de una variable real en el caso en que el invariante  $\Delta$  es negativo sobre la superficie (Corolario 7.2.16).

También daremos resultados sobre la descripción local en el caso degenerado en que el invariante  $\Delta$  es nulo sobre la superficie Lorentziana.

Todos los resultados de encima vienen en el Capítulo 7 de la tesis; los resultados principales fueron incluidos en [5].

Los trabajos relacionados a esta sección son los siguientes.

El estudio de las superficies Riemannianas planas con haz normal plano en  $\mathbb{R}^4$  fue realizado por M. Dajczer y R. Tojeiro [13], quienes establecieron que tales superficies dependen localmente de cuatro funciones reales de una variable real, dos de las cuales corresponden a una solución de una ecuación de onda homogénea (ecuación parcial hiperbólica). Los mismos autores estudiaron las superficies de tipo espacio planas con haz normal plano en el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{3,1}$ , mostraron que estas superficies dependen localmente de una función armónica sobre el plano junto con dos funciones reales de una variable real. Recientemente, P. Bayard [2] obtuvo pruebas espinoriales de estos resultados.

### 3.4- Superficies Lorentzianas planas en pseudo esferas de $\mathbb{R}^{2,2}$

En el Teorema 8.2.1 mostraremos una fórmula de representación conforme de una superficie Lorentziana plana en una pseudo esfera de  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Una tal superficie puede ser vista como una superficie plana con haz normal plano y con aplicación de Gauss regular en  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Como en la sección anterior, consideramos un marco espinorial paralelo sobre la superficie y por tanto podemos describir el campo espinorial que representa a la inmersión isométrica en dicho marco.

La inmersión inducida en la pseudo esfera toma una forma especial después de identificar  $\mathbb{R}^{2,2}$  con un espacio de matrices  $2 \times 2$  con coeficientes en los números de Lorentz.

Como consecuencia obtenemos la estructura local de una superficie Lorentziana plana en una pseudo esfera de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

- Una superficie Lorentziana plana en una pseudo esfera de  $\mathbb{R}^{2,2}$  es el producto (en los cuaternios) de dos curvas en dicha pseudo esfera (Corolario 8.2.2).

Los resultados descritos encima vienen en el Capítulo 8 de la tesis y fueron incluidos en [44].

Los trabajos relacionados con esta sección son los siguientes.

La descripción de una superficie plana en la esfera unitaria  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$  como el producto (en los cuaternios) de dos curvas en  $\mathbb{S}^3$ , es un trabajo clásico que fue descrito por L. Bianchi a finales del siglo XIX; una descripción detallada de esto es dada por M. Spivak [46, pag. 140-158].

Una representación conforme de una superficie Riemanniana plana en el espacio hiperbólico y en el espacio de de Sitter 3–dimensionales fue dada por J. A. Gálvez, A. Martínez y F. Milán [19, 20]. Recientemente, P. Bayard [2] obtuvo una descripción similar de una superficie en el espacio hiperbólico, esta incluye una interpretación espinorial.

## Apéndice

Al final de la tesis presentaremos un corto apéndice en el cual describiremos los conceptos fundamentales sobre superficies de Lorentz. Usaremos los números de Lorentz para modelar estas superficies, de manera análoga al uso de los números complejos para modelar las superficies de Riemann. Los conceptos detallados son las aplicaciones y 1–formas conformes sobre superficies de Lorentz (análogos a las aplicaciones y 1–formas holomorfas), estos nos serán útiles para la mejor comprensión de varios resultados de la tesis.



# Parte I

## Sobre superficies Lorentzianas en $\mathbb{R}^{2,2}$



# CAPÍTULO 1

---

## La segunda forma fundamental de una superficie Lorentziana en $\mathbb{R}^{2,2}$

---

Consideremos una superficie Lorentziana  $M$  en el espacio  $\mathbb{R}^{2,2}$ . La segunda forma fundamental de la superficie en un punto  $x$  es una aplicación cuadrática  $T_x M \rightarrow N_x M$ . Los invariantes numéricos de la segunda forma fundamental son los invariantes de segundo orden de la superficie en  $x$ , y determinan localmente la geometría extrínseca de la superficie en  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

El objetivo de este capítulo es obtener la descripción de los invariantes de segundo orden de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ : adicionalmente a los cuatro invariantes naturales  $|\vec{H}|^2, K, K_N$  y  $\Delta$  que son la norma Lorentziana del vector de curvatura media, la curvatura Gaussiana, la curvatura normal y el resultante de la segunda forma fundamental que traduce la convexidad local de la superficie, nuevos invariantes aparecen en algunos casos degenerados.

Para realizar la descripción completa de los invariantes de segundo orden de una superficie Lorentziana  $M$  en un punto  $x$  es necesario realizar un estudio sistemático de los invariantes numéricos de una aplicación cuadrática  $q : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$ .

El resultado principal del capítulo es el Teorema 1.1.12 en donde presentamos una clasificación de las aplicaciones cuadráticas de  $\mathbb{R}^{1,1}$  en  $\mathbb{R}^{1,1}$ . Este teorema en particular implica la estructura algebraica de la segunda forma fundamental (en un punto) de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$  para una colección de invariantes dados.

También describiremos las propiedades algebraicas de la hipérbola de curvatura asociada a una aplicación cuadrática  $q : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$ . Por ejemplo, cuando el invariante  $K_N$  es no nulo, la hipérbola de curvatura es no degenerada y su posición con respecto al origen de  $\mathbb{R}^{1,1}$  depende del signo del invariante  $\Delta$ . Cuando  $K_N$  es nulo, la hipérbola de curvatura se degenera a la unión de dos semi rectas o a una recta cuya dirección depende del signo de  $|\vec{H}|^2 - K$ .



## 1.1. Aplicaciones cuadráticas de $\mathbb{R}^{1,1}$ en $\mathbb{R}^{1,1}$

Consideremos el espacio  $\mathbb{R}^{1,1}$  definido como el espacio  $\mathbb{R}^2$  equipado con la métrica Lorentziana

$$\langle \cdot, \cdot \rangle := -dx_0^2 + dx_1^2.$$

El espacio  $\mathbb{R}^{1,1}$  es conocido como *el plano de Lorentz*.

Recordemos que una aplicación  $q : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$  es cuadrática si para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  y cualesquiera  $u, v \in \mathbb{R}^{1,1}$ ,  $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$  y la aplicación

$$\tilde{q}(u, v) := \frac{1}{2} \left\{ q(u+v) - q(u) - q(v) \right\}$$

es bilineal sobre  $\mathbb{R}^{1,1}$ . De manera natural, la colección de todas las aplicaciones cuadráticas de  $\mathbb{R}^{1,1}$  en  $\mathbb{R}^{1,1}$  es un espacio vectorial real al cual lo denotaremos por  $Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1})$ .

Diremos que un vector no cero  $u \in \mathbb{R}^{1,1}$ , es un vector de tipo espacio (resp. de tipo tiempo, o de tipo luz) si su norma Lorentziana  $|u|^2 := \langle u, u \rangle$  es positiva (resp. negativa, o nula).

Vamos a suponer que el plano de Lorentz  $\mathbb{R}^{1,1}$  se encuentra canónicamente orientado (por la base canónica) y temporalmente orientado: diremos que un vector de tipo tiempo  $u \in \mathbb{R}^{1,1}$  es futuro dirigido si su primera componente en la base canónica es positiva.

Consideremos el subgrupo conexo de isometrías Lorentzianas directas de  $\mathbb{R}^{1,1}$ , esto es, las que preservan la orientación de espacio y tiempo

$$SO(1, 1) := \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \mid \phi \in \mathbb{R} \right\} \subset O(1, 1);$$

algunas propiedades elementales de este grupo pueden ser encontradas en [43]. El grupo  $SO(1, 1)$  actúa por derecha y por izquierda sobre el espacio  $Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1})$  por composición

$$\begin{aligned} SO(1, 1) \times Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) \times SO(1, 1) &\longrightarrow Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) \\ (g_1, q, g_2) &\longmapsto g_1 \circ q \circ g_2. \end{aligned}$$

Nuestro objetivo principal es conseguir la descripción del conjunto cociente

$$SO(1, 1) \backslash Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) / SO(1, 1).$$

**Formas asociadas a una aplicación cuadrática.** Para una aplicación cuadrática  $q$  y un vector  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$ , consideremos la forma cuadrática real

$$\begin{aligned} \langle q, \nu \rangle : \mathbb{R}^{1,1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \langle q(u), \nu \rangle. \end{aligned}$$

Denotaremos por  $S_\nu : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$  al endomorfismo simétrico asociado a la forma  $\langle q, \nu \rangle$  con respecto a la métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , *i.e.* para cada  $u \in \mathbb{R}^{1,1}$

$$\langle q(u), \nu \rangle = \langle S_\nu(u), u \rangle.$$

Consideremos las siguientes aplicaciones asociadas a la aplicación cuadrática  $q$ . Definimos

$$L_q : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q_q : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad A_q : \mathbb{R}^{1,1} \times \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}$$

dadas respectivamente por

$$L_q(\nu) := \frac{1}{2} \text{tr}(S_\nu), \quad Q_q(\nu) := \det(S_\nu) \quad \text{y} \quad A_q(\nu_1, \nu_2) := \frac{1}{2} [S_{\nu_1}, S_{\nu_2}],$$

para cualesquiera  $\nu, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^{1,1}$ . Aquí,  $[S_{\nu_1}, S_{\nu_2}]$  denota el endomorfismo  $S_{\nu_1} \circ S_{\nu_2} - S_{\nu_2} \circ S_{\nu_1}$  que es anti-simétrico sobre  $\mathbb{R}^{1,1}$  y por tanto se identifica con un número real  $\epsilon$  tal que su matriz en la base canónica de  $\mathbb{R}^{1,1}$  es

$$\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix};$$

en lo que sigue haremos implícita esta identificación.

Note que la asignación  $\nu \mapsto S_\nu$  es lineal, por tanto, las aplicaciones  $L_q, Q_q$  y  $A_q$  son formas lineal, cuadrática y bilineal anti-simétrica sobre  $\mathbb{R}^{1,1}$  respectivamente. Estas formas asociadas a  $q$  se encuentran relacionadas por el siguiente lema.

**Lema 1.1.1.** *La forma cuadrática  $\Phi_q := L_q^2 - Q_q$  satisface la siguiente identidad:*

$$\Phi_q(\nu_1)\Phi_q(\nu_2) = \tilde{\Phi}_q(\nu_1, \nu_2)^2 - A_q(\nu_1, \nu_2)^2, \quad (1.1)$$

para todo  $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^{1,1}$ , donde  $\tilde{\Phi}_q$  denota la forma bilineal y simétrica tal que  $\tilde{\Phi}_q(\nu, \nu) = \Phi_q(\nu)$  para todo  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$ . En particular, la signatura de  $\Phi_q$  es  $(r, s)$  con  $0 \leq r, s \leq 1$ .

Una prueba de este lema puede realizarse por un cálculo directo una vez que representemos los endomorfismos simétricos  $S_{\nu_1}$  y  $S_{\nu_2}$  por sus correspondientes matrices en la base canónica de  $\mathbb{R}^{1,1}$ . Daremos una prueba directa de este lema en la Observación 1.1.2.

Para una isometría  $g \in SO(1, 1)$ , denotaremos por  $S_\nu$  y  $S_\nu^g$  los endomorfismos simétricos asociados a las formas cuadráticas  $\langle q, \nu \rangle$  y  $\langle q \circ g, \nu \rangle$  respectivamente. Tenemos

$$\langle S_\nu^g(u), u \rangle = \langle q \circ g(u), \nu \rangle = \langle S_\nu(g(u)), g(u) \rangle = \langle g^{-1}S_\nu g(u), u \rangle,$$

para cada  $u \in \mathbb{R}^{1,1}$ , por lo tanto  $S_\nu^g = g^{-1}S_\nu g$ . Así, las formas  $L_q, \Phi_q$  y  $A_q$  son invariantes por la  $SO(1, 1)$ -acción por la derecha sobre  $q$ , *i.e.* para cada  $g \in SO(1, 1)$  se satisface

$$L_{q \circ g} = L_q, \quad \Phi_{q \circ g} = \Phi_q \quad \text{y} \quad A_{q \circ g} = A_q.$$

Las formas asociadas a una aplicación cuadrática  $q$  permitirán probar lo siguiente: cuando la forma  $\Phi_q$  es no cero, las formas  $L_q, \Phi_q$  y  $A_q$  determinan completamente a  $q$  módulo la  $SO(1, 1)$ -acción por la izquierda; cuando  $\Phi_q$  es idénticamente cero, la forma  $L_q$  junto con un vector  $\mu_q \in \mathbb{R}^{1,1}$ , determinan a  $q$  módulo la  $SO(1, 1)$ -acción por la izquierda (Lemas 1.1.4 y 1.1.6).

**Reducción de una aplicación cuadrática.** Vamos a denotar por  $\mathcal{S}$  al espacio vectorial real de todos los endomorfismos simétricos y de traza cero sobre  $\mathbb{R}^{1,1}$ , *i.e.*

$$\mathcal{S} := \{s : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1} \mid s \text{ lineal, } \text{tr}(s) = 0, s = s^t\}.$$

Notemos que  $\mathcal{S}$  puede ser naturalmente equipado con una métrica Lorentziana: si  $s \in \mathcal{S}$ , definimos su norma Lorentziana como  $|s|^2 := \frac{1}{2}\text{tr}(s^2)$ ; expresando  $s$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^{1,1}$  conseguimos

$$|s|^2 = -\det s. \tag{1.2}$$

Las matrices

$$E_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

forman una base ortonormal Lorentziana para el espacio vectorial real  $\mathcal{S}$ :  $(E_0, E_1)$  forma una base para  $\mathcal{S}$  y de (1.2) tenemos  $-|E_0|^2 = |E_1|^2 = 1$  y  $\langle E_0, E_1 \rangle = 0$ , *i.e.*  $(E_0, E_1)$  son vectores ortonormales en  $\mathcal{S}$  de tipo tiempo y de tipo espacio respectivamente.

Finalmente, consideremos asociada a la aplicación cuadrática  $q$ , la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f_q : \mathbb{R}^{1,1} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ \nu &\longmapsto S_\nu^0 := S_\nu - L_q(\nu)Id; \end{aligned}$$

$f_q(\nu)$  es así, la parte sin traza  $S_\nu^0$  del endomorfismo simétrico  $S_\nu$ .

**Observación 1.1.2.** *Para cada  $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^{1,1}$  se satisface*

$$\tilde{\Phi}_q(\nu_1, \nu_2) = \langle f_q(\nu_1), f_q(\nu_2) \rangle \quad \text{y} \quad A_q(\nu_1, \nu_2) = [f_q(\nu_1), f_q(\nu_2)], \tag{1.4}$$

donde, si  $s$  y  $s'$  pertenecen a  $\mathcal{S}$ , el corchete  $[s, s']$  denota el determinante de los vectores  $s$  y  $s'$  en la base  $(E_0, E_1)$  de  $\mathcal{S}$ . De la identidad de Lagrange sobre el espacio Lorentziano  $(\mathcal{S}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , *i.e.* usando

$$|s|^2 |s'|^2 = \langle s, s' \rangle^2 - [s, s']^2,$$

y las igualdades en (1.4) obtenemos una prueba directa de la identidad (1.1).

De aquí en adelante diremos que una base  $(e_0, e_1)$  de  $\mathbb{R}^{1,1}$  se encuentra positivamente orientada si tiene la orientación de la base canónica y si el vector  $e_0$  es un vector de tipo tiempo futuro dirigido.

Existe una acción natural del grupo de isometrías Lorentzianas  $SO(1, 1)$  sobre  $\mathcal{S}$  dada por

$$\begin{aligned} SO(1, 1) \times \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ (g, s) &\longmapsto g^{-1}sg, \end{aligned}$$

tal que  $|g^{-1}sg|^2 = |s|^2$ , para cualesquiera  $s \in \mathcal{S}$  y  $g \in SO(1, 1)$ . Para un vector de tipo espacio  $s \in \mathcal{S}$  (i.e.  $|s|^2 > 0$ ), la órbita  $SO(1, 1)_s$  de  $s$  bajo el grupo de isometrías  $SO(1, 1)$  contiene salvo un factor escalar al vector  $E_1 \in \mathcal{S}$ , i.e. existe una isometría Lorentziana  $g \in SO(1, 1)$  que satisface

$$g^{-1}sg = \lambda E_1,$$

donde  $\lambda^2 = |s|^2$ . Por lo tanto, existe una única base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{R}^{1,1}$  tal que la matriz de  $s$  en dicha base es de la forma  $s = \pm\sqrt{|s|^2}E_1$ .

**Observación 1.1.3.** Cuando  $s \in \mathcal{S}$ ,  $s \neq 0$ , su polinomio característico está dado por

$$p_s(x) = x^2 + \det(s),$$

por lo tanto, el signo de su norma Lorentziana  $|s|^2 = -\det s$  determina su forma canónica de la siguiente manera:

1-  $s$  es diagonalizable si y sólo si  $|s|^2 > 0$  ( $s \in \mathcal{S}$  es un vector de tipo espacio).

En tal caso, en alguna base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{R}^{1,1}$

$$s = \pm\sqrt{|s|^2}E_1.$$

2-  $s$  es no diagonalizable si y sólo si  $|s|^2 \leq 0$ .

a) Si  $|s|^2 < 0$  ( $s$  de tipo tiempo), en alguna base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{R}^{1,1}$

$$s = \pm\sqrt{-|s|^2}E_0.$$

b) Si  $|s|^2 = 0$  ( $s$  de tipo luz), escribiendo

$$N_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(E_0 + E_1) \quad y \quad N_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 - E_0),$$

$(N_1, N_2)$  es una base formada por vectores de tipo luz en  $\mathcal{S}$  tal que  $\langle N_1, N_2 \rangle = 1$ , entonces

$$s = \pm N_i, \quad i = 1, 2$$

en una adecuada base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{R}^{1,1}$ .

Para conseguir la reducción de la aplicación cuadrática  $q$ , vamos a considerar a continuación cuatro casos de acuerdo al rango de la aplicación  $f_q$  y la signatura de la forma cuadrática  $\Phi_q$ .

**1. rango( $\mathbf{f}_q$ ) = 2.** Por (1.4), este caso es equivalente a  $A_q \neq 0$ ; por tanto, de (1.1) la signatura de  $\Phi_q$  es (1, 1).

Consideremos  $\nu_0 \in \mathbb{R}^{1,1}$  tal que  $\Phi_q(\nu_0) = 1$ , así de (1.4)  $S_{\nu_0}^0 \in \mathcal{S}$  es unitario y de tipo espacio; por lo tanto, existe una única base ortonormal positivamente orientada  $(e_0, e_1)$  de  $\mathbb{R}^{1,1}$  tal que en esta base

$$S_{\nu_0} = L_q(\nu_0)I \pm E_1.$$

Para un vector arbitrario  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$ , supongamos que en la base  $(e_0, e_1)$  tenemos

$$S_\nu^0 = a_\nu E_0 + b_\nu E_1,$$

usando las fórmulas de (1.4) tenemos  $\tilde{\Phi}(\nu_0, \nu) = \pm b_\nu$  y  $A_q(\nu_0, \nu) = \pm a_\nu$ , por lo tanto

$$S_\nu = L_q(\nu)Id \pm (A_q(\nu_0, \nu)E_0 + \tilde{\Phi}(\nu_0, \nu)E_1). \quad (1.5)$$

De manera análoga, si consideramos  $\nu_0 \in \mathbb{R}^{1,1}$  tal que  $\Phi_q(\nu_0) = -1$ , podemos encontrar una única base ortonormal positivamente orientada en  $\mathbb{R}^{1,1}$ , tal que para todo  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$

$$S_\nu = L_q(\nu)Id \pm (\tilde{\Phi}(\nu_0, \nu)E_0 + A_q(\nu_0, \nu)E_1). \quad (1.6)$$

**2. rango( $\mathbf{f}_q$ ) = 1 y  $\Phi_q \neq 0$ .** Por (1.4), este caso es equivalente a  $A_q = 0$ , así  $f_q(\mathbb{R}^{1,1}) \subset \mathcal{S}$  es una línea recta (siguiendo una dirección) de tipo espacio o de tipo tiempo de acuerdo a la signatura de  $\Phi_q$ .

Supongamos primero que  $f_q(\mathbb{R}^{1,1})$  es una línea de tipo espacio en  $\mathcal{S}$ ; existe  $\nu_0 \in \mathbb{R}^{1,1}$  tal que  $\Phi_q(\nu_0) = 1$ , luego  $S_{\nu_0}^0$  es unitario y de tipo espacio, por tanto, existe una única base ortonormal positivamente orientada  $(e_0, e_1)$  de  $\mathbb{R}^{1,1}$  tal que la matriz de  $S_{\nu_0}$  en esta base es

$$S_{\nu_0} = L_q(\nu_0)Id \pm E_1.$$

Nuevamente, para cada  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$  podemos escribir (en la base  $(e_0, e_1)$ )

$$S_\nu = L_q(\nu)Id + a_\nu E_0 + b_\nu E_1,$$

donde  $\tilde{\Phi}_q(\nu_0, \nu) = \pm b_\nu$  y  $0 = A_q(\nu_0, \nu) = \pm a_\nu$ , por tanto para cada  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$

$$S_\nu = L_q(\nu)Id \pm \tilde{\Phi}(\nu_0, \nu)E_1. \quad (1.7)$$

En el caso en que  $f_q(\mathbb{R}^{1,1})$  es una línea de tipo tiempo en  $\mathcal{S}$ , podemos tomar  $\nu_0$  tal que  $\Phi_q(\nu_0) = -1$ , así, existe una única base ortonormal positivamente orientada  $(e_0, e_1)$  de  $\mathbb{R}^{1,1}$  tal que para cada  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$

$$S_\nu = L_q(\nu)Id \pm \Phi(\nu_0, \nu)E_0. \quad (1.8)$$

Definamos

$$Q_1(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) := \{q \in Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) : \Phi_q \neq 0\};$$

escribiendo

$$P_1 := \{(L, \Phi, A) : \Phi \neq 0 \text{ tiene discriminante no-positivo y (1,1) es v\u00e1lido}\}$$

donde  $L, \Phi$  y  $A$  son formas lineal, bilineal sim\u00e9trica y bilineal antisim\u00e9trica sobre  $\mathbb{R}^{1,1}$  respectivamente, el siguiente resultado es v\u00e1lido:

**Lema 1.1.4.** *La aplicaci\u00f3n  $\Theta_1 : Q_1(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1})/SO(1,1) \longrightarrow P_1$  dada por*

$$[q] \longmapsto (L_{[q]}, \Phi_{[q]}, A_{[q]})$$

*es sobreyectiva y dos a uno.*

*Demostraci\u00f3n.* Para mostrar la sobreyectividad de  $\Theta_1$  tomemos  $(L, \Phi, A) \in P_1$ , como  $\Phi \neq 0$  tenemos dos casos a tratar:  $\Phi$  tiene signatura  $(1,1)$  o tiene rango 1. Para el primero de estos, definamos  $S_\nu$ , en una base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{R}^{1,1}$  fija, como en (1.5) o en (1.6). An\u00e1logamente, cuando  $\Phi$  tiene rango 1, dependiendo del signo de este, podemos definir  $S_\nu$  como en (1.7) o en (1.8). Puesto que en cualquier caso,  $L_q, \Phi_q$  y  $A_q$  no determinan el signo de  $S_\nu$ , tenemos claramente que  $\Theta_1$  es una aplicaci\u00f3n dos a uno.  $\square$

Existe una acci\u00f3n natural por la izquierda del grupo  $SO(1,1)$  sobre  $Q_1(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1})/SO(1,1)$ , bajo esta acci\u00f3n, las formas  $L_{[q]}$  y  $\Phi_{[q]}$  se convierten en

$$L_{g \circ [q]} = L_{[q]} \circ g^{-1} \quad \text{y} \quad \Phi_{g \circ [q]} = \Phi_{[q]} \circ g^{-1}, \quad (1.9)$$

mientras que  $A_{[q]}$  se mantiene invariante: si denotamos por  $S_\nu$  y  ${}^g S_\nu$  los endomorfismos sim\u00e9tricos asociados a las formas cuadr\u00e1ticas  $\langle q, \nu \rangle$  y  $\langle g \circ q, \nu \rangle$ , tenemos la relaci\u00f3n

$${}^g S_\nu = S_{g^{-1}\nu},$$

para cualesquiera  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$  y  $g \in SO(1,1)$ ; por lo tanto

$$A_{g \circ [q]}(\nu_1, \nu_2) = A_{[q]}(g^{-1}\nu_1, g^{-1}\nu_2) = \det(g^{-1})A_{[q]}(\nu_1, \nu_2).$$

Si el grupo  $SO(1,1)$  act\u00faa sobre  $P_1$  por

$$g.(L, \Phi, A) := (L \circ g^{-1}, \Phi \circ g^{-1}, A), \quad (1.10)$$

la aplicaci\u00f3n  $\Theta_1$  es  $SO(1,1)$ -equivariante y por tanto induce una aplicaci\u00f3n a dos hojas

$$\bar{\Theta}_1 : SO(1,1) \backslash Q_1(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1})/SO(1,1) \longrightarrow SO(1,1) \backslash P_1. \quad (1.11)$$

Ya que la igualdad (1.1) permite recuperar la forma  $A$ , salvo el signo, a partir de la forma  $\Phi$ , la descripción del conjunto cociente

$$SO(1,1) \backslash Q_1(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) / SO(1,1)$$

será obtenida con la reducción simultanea de las formas  $L_{[q]}$  y  $\Phi_{[q]}$  sobre  $\mathbb{R}^{1,1}$ ; esto lo haremos en las Proposiciones 1.1.10 y 1.1.11.

**3. rango( $\mathbf{f}_q$ ) = 1 y  $\Phi_q = 0$ .** En este caso  $f_q(\mathbb{R}^{1,1})$  es una línea recta de tipo luz en  $\mathcal{S}$  y tenemos:

**Lema 1.1.5.** *Existe un vector  $\mu_q \in \mathbb{R}^{1,1}$ , unitario de tipo espacio o de tipo tiempo, o de tipo luz distinguido, y una base ortonormal positivamente orientada  $(e_0, e_1)$  de  $\mathbb{R}^{1,1}$  tal que, para todo  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$ , la matriz de  $S_\nu$  en  $(e_0, e_1)$  es dada por*

$$S_\nu = L_q(\nu)Id + \langle \mu_q, \nu \rangle N, \quad (1.12)$$

donde  $N = N_1$  o  $N_2$  (vea la Observación 1.1.3). El vector  $\mu_q$  y la base  $(e_0, e_1)$  están definidos de manera única.

*Demostración.* Ya que  $|S_\nu^0|^2 = \langle f_q(\nu), f_q(\nu) \rangle = 0$  y  $f_q$  es lineal, existe una aplicación lineal  $\lambda_q : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que la matriz de  $S_\nu^0$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^{1,1}$  es dada por

$$S_\nu^0 = \lambda_q(\nu)N,$$

para cada  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$ , donde  $N = N_1$  o  $N_2$ . Definimos el vector  $\mu_q \in \mathbb{R}^{1,1}$  tal que  $\lambda_q(\nu) = \langle \mu_q, \nu \rangle$ , para cada  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$ , así,

$$S_\nu^0 = \langle \mu_q, \nu \rangle N. \quad (1.13)$$

Por una rotación de un ángulo lorentziano  $\psi \in \mathbb{R}$  obtenemos una única base ortonormal positivamente orientada  $(e_0, e_1)$  de  $\mathbb{R}^{1,1}$ , tal que la matriz de  $S_\nu^0$  en esta base es dada por

$$S_\nu^0 = \langle e^{2\psi} \mu_q, \nu \rangle N.$$

Escogiendo  $\psi$  adecuadamente (dicha elección es de manera única) obtenemos una única base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{R}^{1,1}$  tal que la matriz de  $S_\nu^0$  en esta base satisface (1.13) con  $|\mu_q|^2 = +1, -1$  o  $\mu_q = \frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1)$ .  $\square$

Definamos

$$\mathcal{H}_0 := \{\mu \in \mathbb{R}^{1,1} : |\mu|^2 = \pm 1 \text{ o } \mu = \frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1)\};$$

escribiendo

$$Q_2(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) := \{q \in Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) : \Phi_q = 0, f_q \neq 0\}$$

y

$$P_2 := (\mathbb{R}^{1,1})^* \times \mathcal{H}_0,$$

donde  $(\mathbb{R}^{1,1})^*$  representa el conjunto de formas lineales sobre  $\mathbb{R}^{1,1}$ , tenemos:

**Lema 1.1.6.** *La aplicación  $\Theta_2 : Q_2(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1})/SO(1,1) \longrightarrow P_2$  dada por*

$$[q] \longmapsto (L_{[q]}, \mu_{[q]})$$

*es sobreyectiva y dos a uno.*

*Demostración.* Cada elemento  $(L, \mu) \in P_2$  corresponde a dos clases en  $Q_2(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1})/SO(1,1)$  cuando definimos  $S_\nu$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^{1,1}$  como en (1.12) con  $N = N_1 \circ N_2$ .  $\square$

Si además,  $SO(1,1)$  actúa sobre  $P_2$  vía la acción

$$g.(L, \mu) := (L \circ g^{-1}, g.\mu),$$

donde  $g.\mu = g(\mu)$  cuando  $|\mu|^2 = \pm 1$  y  $g.\mu = \mu$  cuando  $|\mu|^2 = 0$ , entonces la aplicación  $\Theta_2$  es  $SO(1,1)$ -equivariante y por tanto induce una aplicación a dos hojas

$$\bar{\Theta}_2 : SO(1,1) \backslash Q_2(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1})/SO(1,1) \longrightarrow SO(1,1) \backslash P_2.$$

La descripción del conjunto cociente

$$SO(1,1) \backslash Q_2(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1})/SO(1,1)$$

será obtenida con la reducción simultanea de la forma  $L_{[q]}$  y el vector  $\mu_{[q]} \in \mathcal{H}_0$ .

**4.  $\mathbf{f}_q = \mathbf{0}$ .** En este caso  $S_\nu = L_q(\nu)Id$  para cada  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$ . Definamos

$$Q_3(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) := \{q \in Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) : \Phi_q = 0, f_q = 0\};$$

escribiendo  $P_3 := (\mathbb{R}^{1,1})^*$ , la aplicación

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_3 : SO(1,1) \backslash Q_3(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1})/SO(1,1) &\longrightarrow SO(1,1) \backslash P_3 \\ [q] &\longmapsto [L_{[q]}] \end{aligned}$$

es biyectiva, donde como antes, la acción de  $SO(1,1)$  sobre  $P_3$  es dada por  $g.L = L \circ g^{-1}$ . Por lo tanto, la descripción del conjunto cociente

$$SO(1,1) \backslash Q_3(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1})/SO(1,1)$$

será obtenida con la reducción de la forma lineal  $L_{[q]}$ .

**Definición 1.1.7.** *Una aplicación cuadrática  $q : \mathbb{R}^{1,1} \longrightarrow \mathbb{R}^{1,1}$  es casi umbílica si*

$$\text{rango}(f_q) = 1 \quad \text{y} \quad \Phi_q = 0;$$

*esto equivalentemente significa que  $f_q(\mathbb{R}^{1,1})$  es una línea de tipo luz en  $\mathcal{S}$ . Una aplicación cuadrática  $q : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$  es umbílica si  $f_q = 0$ .*



**Invariantes numéricos.** En esta sección vamos a definir invariantes numéricos sobre el conjunto cociente

$$SO(1, 1) \backslash Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) / SO(1, 1)$$

asociados a las formas  $L_{[q]}$ ,  $Q_{[q]}$ ,  $A_{[q]}$  y  $\Phi_{[q]}$ .

**Definición 1.1.8.** *Consideremos*

1. el vector  $\vec{H} \in \mathbb{R}^{1,1}$  tal que, para cada  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$ ,  $L_{[q]}(\nu) = \langle \vec{H}, \nu \rangle$ , y su norma Lorentziana

$$|\vec{H}|^2 := \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle;$$

2. los dos números reales

$$K := \text{tr } Q_{[q]} \quad \text{y} \quad \Delta := \det Q_{[q]},$$

donde  $\text{tr } Q_{[q]}$  y  $\det Q_{[q]}$  son la traza y el determinante del endomorfismo simétrico de  $\mathbb{R}^{1,1}$  asociado a  $Q_{[q]}$  por la métrica sobre  $\mathbb{R}^{1,1}$ ;

3. el número real  $K_N$  tal que

$$A_{[q]} = \frac{1}{2} K_N \omega_0,$$

donde  $\omega_0$  es el determinante en la base canónica de  $\mathbb{R}^{1,1}$  (la forma de área sobre  $\mathbb{R}^{1,1}$ ).

Los números  $|\vec{H}|^2$ ,  $K$ ,  $K_N$  y  $\Delta$  son invariantes por la  $SO(1, 1)$ -acción por la izquierda sobre  $[q] \in Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) / SO(1, 1)$  y así definen invariantes sobre  $SO(1, 1) \backslash Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) / SO(1, 1)$  : por ejemplo, si  $U_Q$  y  ${}^g U_Q$  son los endomorfismos simétricos asociados a las formas cuadráticas  $Q_{[q]}$  y  $Q_{g \circ [q]}$  respectivamente, tenemos la relación  ${}^g U_Q = g U_Q g^{-1}$ , por lo tanto

$${}^g K := \text{tr } Q_{g \circ [q]} = \text{tr } {}^g U_Q = \text{tr } U_Q = \text{tr } Q_{[q]} = K.$$

**Observación 1.1.9.** *Cuando un elemento del cociente es dado por la segunda forma fundamental de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ ,  $\vec{H}$ ,  $K$  y  $K_N$  corresponden al vector de curvatura media, la curvatura de Gauss y la curvatura normal de la superficie; el invariante  $\Delta$  es similar al invariante  $\Delta$  introducido en [39] para superficies en  $\mathbb{R}^4$ . Esta es naturalmente la motivación para estas definiciones.*

Los invariantes de la forma cuadrática  $\Phi_{[q]}$  tienen una expresión simple en términos de estos invariantes: denotemos por  $U_\Phi$  el endomorfismo simétrico sobre  $\mathbb{R}^{1,1}$  asociado a la forma cuadrática  $\Phi_{[q]}$ , de un cálculo directo conseguimos

$$\text{tr } \Phi_{[q]} := \text{tr } U_\Phi = |\vec{H}|^2 - K \quad \text{y} \quad \det \Phi_{[q]} := \det U_\Phi = \frac{1}{4} K_N^2. \quad (1.14)$$

Vea [7, Lemma 1.4] para fórmulas análogas en el caso de aplicaciones cuadráticas  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$ .

**La reducción simultanea.** De acuerdo a las secciones previas, tenemos dos casos a tratar:

1.  $\Phi_{[q]} \neq 0$ . En este caso, la clase  $[q] \in Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) \setminus SO(1,1)$  es determinada por las formas  $\Phi_{[q]}$  y  $L_{[q]}$  (Lema 1.1.4), reduciremos el endomorfismo  $U_\Phi$  junto con el vector  $\vec{H}$ , considerando a su vez dos casos dependiendo si  $U_\Phi$  es diagonalizable o no.

**Proposición 1.1.10.** *El operador  $U_\Phi$  es diagonalizable si y sólo si  $U_\Phi^0 = 0$  o*

$$(|\vec{H}|^2 - K)^2 - K_N^2 > 0.$$

En tal último caso, existe una única base ortonormal positivamente orientada  $(u_0, u_1)$  de  $\mathbb{R}^{1,1}$  tal que la matriz de  $U_\Phi$  en  $(u_0, u_1)$  es

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

donde

$$a := \frac{(|\vec{H}|^2 - K) \pm \sqrt{(|\vec{H}|^2 - K)^2 - K_N^2}}{2} \quad (1.16)$$

y

$$b := \frac{(|\vec{H}|^2 - K) \mp \sqrt{(|\vec{H}|^2 - K)^2 - K_N^2}}{2}. \quad (1.17)$$

Además, definiendo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{H} = \alpha u_0 + \beta u_1$ , tenemos

$$\alpha^2 = \frac{1}{b^2 - a^2} \left( a^2 |\vec{H}|^2 + \Delta - \frac{1}{4} K_N^2 \right) \quad (1.18)$$

y

$$\beta^2 = \frac{1}{b^2 - a^2} \left( b^2 |\vec{H}|^2 + \Delta - \frac{1}{4} K_N^2 \right). \quad (1.19)$$

*Demostración.* La primera parte de la proposición se sigue del hecho que  $U_\Phi$  es diagonalizable si y sólo si  $U_\Phi^0 = 0$  o  $\frac{1}{4}(\text{tr } U_\Phi)^2 > \det U_\Phi$ , junto con las igualdades en (1.14) ( $U_\Phi^0$  es de tipo espacio en  $\mathcal{S}$ , vea la Observación 1.1.3) implican (1.16)-(1.17).

Para deducir la segunda parte de la proposición, consideremos la forma cuadrática  $Q = L^2 - \Phi$  y su endomorfismo simétrico asociado  $U_Q : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$ ; su matriz en la base  $(u_0, u_1)$  es

$$U_Q = \begin{pmatrix} -\alpha^2 - a & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & \beta^2 - b \end{pmatrix}.$$

Las fórmulas  $\text{tr } U_Q = K$ ,  $\det U_Q = \Delta$  (Definición 1.1.8) y las igualdades en (1.14) implican (1.18)-(1.19).  $\square$

Ahora estudiaremos el caso  $U_\Phi$  no diagonalizable.

**Proposición 1.1.11.** *El operador  $U_{\Phi}$  es no diagonalizable si y sólo si*

$$U_{\Phi}^0 \neq 0 \quad y \quad (|\vec{H}|^2 - K)^2 - K_N^2 \leq 0, \quad (1.20)$$

y tenemos:

1- si  $(|\vec{H}|^2 - K)^2 - K_N^2 < 0$ , existe una única base ortonormal positivamente orientada  $(u_0, u_1)$  de  $\mathbb{R}^{1,1}$  tal que la matriz de  $U_{\Phi}$  en  $(u_0, u_1)$  es

$$\frac{|\vec{H}|^2 - K}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{K_N^2 - (|\vec{H}|^2 - K)^2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Escribiendo  $\vec{H} = \alpha u_0 + \beta u_1$ , tenemos

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \left( -|\vec{H}|^2 + \sqrt{|\vec{H}|^4 + 4u^2} \right) \quad y \quad \beta^2 = \frac{1}{2} \left( |\vec{H}|^2 + \sqrt{|\vec{H}|^4 + 4u^2} \right), \quad (1.22)$$

donde

$$u = \frac{1}{\sqrt{K_N^2 - (|\vec{H}|^2 - K)^2}} \left( -\Delta + \frac{1}{4}K_N^2 - \frac{1}{2}|\vec{H}|^2(|\vec{H}|^2 - K) \right).$$

2- si  $(|\vec{H}|^2 - K)^2 - K_N^2 = 0$ , existe una única base ortonormal positivamente orientada  $(u_0, u_1)$  de  $\mathbb{R}^{1,1}$  tal que la matriz de  $U_{\Phi}$  en  $(u_0, u_1)$  es

$$\frac{|\vec{H}|^2 - K}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_2 & -\varepsilon_1 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

donde  $\varepsilon_1 = \pm 1$ ,  $\varepsilon_2 = \pm 1$ . Escribiendo  $\vec{H} = \alpha u_0 + \beta u_1$ , tenemos

$$\alpha^2 = \frac{\varepsilon_1}{4} \frac{(|\vec{H}|^2 - \varepsilon_1 v)^2}{v} \quad y \quad \beta^2 = \frac{\varepsilon_1}{4} \frac{(|\vec{H}|^2 + \varepsilon_1 v)^2}{v}, \quad (1.24)$$

donde  $v = -\Delta + \frac{K_N^2}{4} - \frac{1}{2}|\vec{H}|^2(|\vec{H}|^2 - K)$  es no nulo.

Además,  $v = 0$  si y sólo si  $|\vec{H}|^2 = 0$ ; en tal caso,

$$\Delta = \frac{K_N^2}{4} = \frac{K^2}{4}, \quad |\vec{H}|^2 = 0 \quad (1.25)$$

y

$$\vec{H} = \alpha u_0 + \beta u_1, \quad \text{con } \alpha = \pm \beta \quad (1.26)$$

define nuevos invariantes  $\alpha, \beta$ .

*Demostración.* 1- En tal caso  $U_{\Phi}^0$  es de tipo tiempo en  $\mathcal{S}$  y su reducción es dada por 2- a) en la Observación 1.1.3, así probamos (1.21). Las fórmulas en (1.22) pueden ser obtenidas como las fórmulas (1.18)-(1.19) en la Proposición 1.1.10.

2- Aquí,  $U_{\mathbb{F}}^0$  es de tipo luz en  $\mathcal{S}$ , y su reducción es dada por 2- b) en la Observación 1.1.3, que prueba (1.23). También conseguimos las fórmulas (1.24) como en la Proposición 1.1.10. Además, calculando  $\Delta = \det U_Q$  como en la prueba de la Proposición 1.1.10, con  $U_Q$  dado aquí por (1.23), fácilmente conseguimos

$$v = \epsilon_1(\alpha^2 + \beta^2) + 2\epsilon_2\alpha\beta.$$

Así,  $v = 0$  si y sólo si  $\alpha = \pm\beta$ , *i.e.*  $|\vec{H}|^2 = 0$ ; las fórmulas en (1.25) se obtienen fácilmente.  $\square$

2.  $\Phi_{[q]} = 0$ . En este caso, si  $f_q \neq 0$ , la clase  $[q] \in Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1})/SO(1,1)$  es determinada por la forma  $L_{[q]}$  junto con el vector  $\mu_{[q]}$  (Lema 1.1.5) y debemos reducir la forma  $L_{[q]}$  y  $\mu_{[q]}$ .

Recordemos que  $\mu_{[q]}$  es tal que  $|\mu_{[q]}|^2 = \pm 1$ , o  $\mu_{[q]} = \frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1)$ ; definimos el vector

$$\mu_{[q]}^* := \begin{cases} \mu_{[q]}^\perp, & \text{si } |\mu_{[q]}|^2 = \pm 1 \\ \mu'_{[q]}, & \text{si } \mu_{[q]} = \frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1) \end{cases} \quad (1.27)$$

donde  $\mu_{[q]}^\perp$  denota la reflexión de  $\mu_{[q]}$  con respecto a la diagonal principal de  $\mathbb{R}^{1,1}$  en el primer caso, y  $\mu'_{[q]}$  el único vector de tipo luz tal que  $\langle \mu_{[q]}, \mu'_{[q]} \rangle = \frac{1}{2}$  en el segundo caso. Ahora, definimos  $\alpha$  y  $\beta$  tal que

$$\vec{H} = \alpha\mu_{[q]} + \beta\mu_{[q]}^*. \quad (1.28)$$

Los números  $\alpha$  y  $\beta$  son nuevos invariantes. Supongamos que estamos en el primer caso de (1.27), para  $g \in SO(1,1)$  tenemos  $L_{g \circ [q]} = L_{[q]} \circ g^{-1}$  (primera igualdad en (1.9)), juntando esto con (1.12) conseguimos

$$\mu_{g \circ [q]} = g \cdot \mu_{[q]}. \quad (1.29)$$

El vector  ${}^g\vec{H}$ , dual a la 1-forma  $L_{g \circ [q]}$ , satisface

$$\langle {}^g\vec{H}, \nu \rangle = L_{g \circ [q]}(\nu) = L_{[q]}(g^{-1}\nu) = \langle \vec{H}, g^{-1}\nu \rangle,$$

para cada  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$ , por lo tanto  ${}^g\vec{H} = g\vec{H}$ ; definiendo  $\alpha_1, \beta_1$  por

$${}^g\vec{H} = \alpha_1\mu_{g \circ [q]} + \beta_1\mu_{g \circ [q]}^\perp,$$

de (1.28)-(1.29) tenemos

$$\alpha\mu_{[q]} + \beta\mu_{[q]}^\perp = \vec{H} = g^{-1}({}^g\vec{H}) = \alpha_1\mu_{[q]} + \beta_1\mu_{[q]}^\perp,$$

por lo tanto  $\alpha = \alpha_1$  y  $\beta = \beta_1$ .

**La clasificación.** En esta sección reuniremos todos los resultados obtenidos en las secciones anteriores y daremos la clasificación de las aplicaciones cuadráticas  $\mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$  en términos de sus invariantes numéricos.

Diremos que un conjunto de invariantes dados *esencialmente* determinan una clase en el conjunto cociente

$$SO(1,1) \backslash Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) / SO(1,1),$$

si determinan completamente un *número finito* de clases (correspondiente a la elección de signos en las fórmulas dadas en las secciones previas).

**Teorema 1.1.12.** *La clase  $[q] \in SO(1,1) \backslash Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) / SO(1,1)$  está determinada por sus invariantes en la siguiente manera:*

1. Si  $\Phi \neq 0$  entonces lo siguiente es válido:

- a) si  $(|\vec{H}|^2 - K)^2 - K_N^2 \neq 0$ , los invariantes  $K, K_N, |\vec{H}|^2, \Delta$  esencialmente determinan  $[q]$ ;
- b) si  $(|\vec{H}|^2 - K)^2 - K_N^2 = 0$ , entonces tenemos:
  - 1) si  $|\vec{H}|^2 \neq 0$ , los invariantes  $K, |\vec{H}|^2, \Delta$  esencialmente determinan  $[q]$ ;
  - 2) si  $|\vec{H}|^2 = 0$ , el invariante  $K$  junto con los nuevos invariantes  $\alpha$  y  $\beta$  definidos en (1.26) esencialmente determinan  $[q]$ .

2. Si  $\Phi = 0$  entonces  $K_N = 0, |\vec{H}|^2 - K = 0$  y  $\Delta = 0$ , y tenemos lo siguiente:

- a) si  $f_q \neq 0$ , los invariantes  $\alpha$  y  $\beta$  definidos en (1.28) esencialmente determinan  $[q]$  ( $q$  es casi-umbílica);
- b) si  $f_q = 0$ , entonces  $|\vec{H}|^2$  determina  $[q]$  ( $q$  es umbílica).

*Demostración.* Sólo consideraremos el caso  $(|\vec{H}|^2 - K)^2 - K_N^2 > 0$  ya que la prueba en los otros casos es similar.

Recordemos primero la definición de  $\bar{\Theta}_1$  dada en (1.11). Por la Proposición 1.1.10,  $\bar{\Theta}_1([q])$  es la clase de  $(L, \Phi, A) \in P_1$  donde las formas  $L, \Phi$  y  $A$  están definidos en la base canónica  $(u_0, u_1)$  de  $\mathbb{R}^{1,1}$  por

$$L = (\alpha, \beta), \quad \Phi = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \frac{1}{2} K_N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $a, b, \alpha$  y  $\beta$  satisfacen (1.16)-(1.18); más precisamente, recordando (1.10), si  $g \in SO(1,1)$  es tal que  $g(u_0) = \tilde{u}_0, g(u_1) = \tilde{u}_1$ , donde  $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$  es la base dada por la Proposición 1.1.10, tenemos  $g.(L, \Phi, A) = (L_q, \Phi_q, A_q)$ .

Ya que podemos escoger un signo en las definiciones (1.16)-(1.17) de  $a$  y  $b$ , y como  $\alpha$  y  $\beta$  están determinados salvo el signo por (1.18)-(1.19), 16 clases corresponden al conjunto de invariantes dados (dos clases corresponden a cada una de las ocho elecciones posibles para  $a, b, \alpha$  y  $\beta$  ya que la aplicación  $\bar{\Theta}_1$  en (1.11) es dos a uno).  $\square$

## 1.2. La hipérbola de curvatura de $q : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$

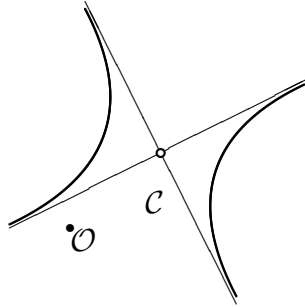
En esta sección describiremos algebraicamente las propiedades de la hipérbola de curvatura asociada a una aplicación cuadrática  $q : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$  usando los invariantes de  $q$ .

**Definición 1.2.1.** *La hipérbola de curvatura asociada a la aplicación cuadrática  $q : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$  es definida como el subconjunto de  $\mathbb{R}^{1,1}$*

$$\mathcal{H} := \left\{ \frac{q(v)}{|v|^2} : v \in \mathbb{R}^{1,1}, |v|^2 = \pm 1 \right\}.$$

Denotaremos por  $\mathcal{O}$  el origen de  $\mathbb{R}^{1,1}$ ; el centro de  $\mathcal{H}$  es el punto  $\mathcal{C}$  tal que  $\vec{\mathcal{O}\mathcal{C}} = \vec{H}$  ( $\vec{H}$  es el vector de curvatura media de  $q$ , vea la Definición 1.1.8). Diremos que un punto  $\mathcal{P}$  de la hipérbola es de tipo espacio (resp. de tipo tiempo) si este es tal que  $\vec{\mathcal{C}\mathcal{P}}$  es un vector de tipo espacio (resp. de tipo tiempo) de  $\mathbb{R}^{1,1}$ .

Genéricamente, la hipérbola de curvatura en el caso no degenerado, *i.e.* cuando el invariante  $K_N$  es no nulo, es dada como en la siguiente figura:



En este caso, tenemos la siguiente descripción explícita de la hipérbola de curvatura  $\mathcal{H}$ . Las pruebas de las afirmaciones se obtienen por un cálculo directo por tanto son omitidas.

**Proposición 1.2.2.** *Si  $K_N \neq 0$ , la hipérbola de curvatura es no degenerada, y la siguiente descripción es válida:*

1- si  $U_{\mathbb{F}}^0 = 0$ , la hipérbola de curvatura es

$$\mathcal{H} = \left\{ \vec{H} + \nu : |\nu|^2 = \frac{|\vec{H}|^2 - K}{2} \right\};$$

*sus asíntotas son dos líneas de tipo luz en  $\mathbb{R}^{1,1}$  y cuando  $|\nu|^2 > 0$  (resp.  $|\nu|^2 < 0$ ) la hipérbola esta compuesta por puntos de tipo espacio (resp. de tipo tiempo);*

2- si  $U_{\Phi}^0 \neq 0$  y  $U_{\Phi}$  es diagonalizable con eigenvalores  $a \neq b$  como en la Proposición 1.1.10, los ejes de  $\mathcal{H}$  están dirigidos por los eigenvectores  $u_0$  y  $u_1$  de  $U_{\Phi}$ , y su ecuación en  $(\vec{H}, u_0, u_1)$  es dada por

$$\frac{\nu_2^2}{b} - \frac{\nu_1^2}{a} = 1;$$

sus asíntotas son rectas de tipo tiempo (resp. de tipo espacio) si  $a > b$  (resp.  $a < b$ ), y además, cuando  $a, b > 0$  la hipérbola contiene puntos de tipo tiempo y de tipo espacio (resp. contiene sólo puntos de tipo espacio), si  $a, b < 0$  la hipérbola contiene sólo puntos de tipo tiempo (resp. contiene puntos de tipo tiempo y de tipo espacio);

3- si  $U_{\Phi}$  es no diagonalizable, tenemos dos casos que corresponden a los casos en la Proposición 1.1.11:

a) si  $U_{\Phi}^0$  es de tipo tiempo (en  $\mathcal{S}$ ), la ecuación de  $\mathcal{H}$  es dada por

$$-\frac{2(|\vec{H}|^2 - K)}{K_N^2} \nu_1^2 \mp 4 \frac{\sqrt{K_N^2 - (|\vec{H}|^2 - K)^2}}{K_N^2} \nu_1 \nu_2 + \frac{2(|\vec{H}|^2 - K)}{K_N^2} \nu_2^2 = 1;$$

una de las asíntotas es de tipo tiempo y la otra es de tipo espacio, y la hipérbola contiene puntos de tipo tiempo y de tipo espacio;

b) si  $U_{\Phi}^0$  es de tipo luz (en  $\mathcal{S}$ ), la ecuación de  $\mathcal{H}$  es dada por

$$\frac{1-a}{a^2} \nu_1^2 + \frac{2\varepsilon}{a^2} \nu_1 \nu_2 + \frac{1+a}{a^2} \nu_2^2 = 1 \quad \text{o} \quad -\frac{1+a}{a^2} \nu_1^2 + \frac{2\varepsilon}{a^2} \nu_1 \nu_2 - \frac{1-a}{a^2} \nu_2^2 = 1$$

donde  $a = \frac{|\vec{H}|^2 - K}{2}$  y  $\varepsilon = \pm 1$ . Si  $\mathcal{H}$  es dado por la primera ecuación (resp. la segunda ecuación), este tiene una asíntota de tipo luz, que es la recta  $\nu_2 = -\varepsilon \nu_1$  (resp. la recta  $\nu_2 = \varepsilon \nu_1$ ); su otra asíntota es de tipo tiempo (resp. de tipo espacio) si  $a > 0$ , y es de tipo espacio (resp. de tipo tiempo) si  $a < 0$ ; además,  $\mathcal{H}$  contiene puntos de tipo tiempo y de tipo espacio (resp. sólo puntos de tipo espacio, o sólo puntos de tipo tiempo).

**Observación 1.2.3.** Si el invariante  $K_N$  es no nulo, el endomorfismo  $U_{\Phi}$  es invertible y entonces podemos definir

$$\begin{aligned} \Phi^* : \mathbb{R}^{1,1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \nu &\longmapsto \langle \nu, U_{\Phi}^{-1} \nu \rangle. \end{aligned}$$

La aplicación  $\Phi^*$  forma entonces una ecuación intrínseca de la hipérbola de curvatura  $\mathcal{H}$ : para todo  $\nu \in \mathbb{R}^{1,1}$ ,

$$\vec{H} + \nu \in \mathcal{H} \quad \text{si y sólo si} \quad \Phi^*(\nu) = 1.$$

Esto nos da un mecanismo eficiente para escribir la hipérbola de curvatura en casos específicos, ya que  $U_{\Phi}$  puede ser fácilmente escrito en términos de la segunda forma fundamental.

Daremos ahora una interpretación del signo del invariante  $\Delta$  en términos de la posición del origen  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^{1,1}$  con respecto a la hipérbola de curvatura  $\mathcal{H}$ . Supongamos que  $U_{\Phi}^0 \neq 0$  y  $U_{\Phi}$  es diagonalizable con eigenvalores  $a$  y  $b$  como en la Proposición 1.1.10; usando el endomorfismo  $U_Q$  dado en la prueba de la Proposición 1.1.10, calculamos

$$\Delta = \det U_Q = ab \left( 1 + \frac{\alpha^2}{a} - \frac{\beta^2}{b} \right),$$

por lo tanto,

$$\Delta \geq 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{\beta^2}{b} - \frac{\alpha^2}{a} \leq 1.$$

Por una traslación en  $\mathbb{R}^{1,1}$ , esto equivale a que el origen  $\mathcal{O}$  esté en el interior o sobre la hipérbola de curvatura  $\mathcal{H}$  dada en el sistema  $(u_0, u_1)$  por

$$\frac{(\nu_2 - \beta)^2}{b} - \frac{(\nu_1 - \alpha)^2}{a} = 1.$$

Todos los demás casos pueden ser tratados de manera similar.

**Observación 1.2.4.** *Si el invariante  $K_N$  es no nulo, obtenemos:*

- $\Delta > 0$  si y sólo si  $\mathcal{O}$  está en el interior de  $\mathcal{H}$ ;
- $\Delta = 0$  si y sólo si  $\mathcal{O}$  es un punto de  $\mathcal{H}$ ; y
- $\Delta < 0$  si y sólo si  $\mathcal{O}$  está en el exterior de  $\mathcal{H}$ .

En el caso Riemanniano, una interpretación análoga para el signo del invariante  $\Delta$  y la elipse de curvatura es dada en [39].

Para finalizar la sección, daremos la descripción de la hipérbola en el caso  $K_N = 0$  :

**Proposición 1.2.5.** *Si  $K_N = 0$  y  $\Phi_q \neq 0$ , tenemos dos posibilidades:*

1- la imagen de  $f_q$  es una recta de tipo espacio; en este caso la hipérbola se degenera a la unión de dos semi rectas:

a) si  $|\vec{H}|^2 - K \neq 0$ , la hipérbola es

$$\left\{ \vec{H} \pm \lambda \sqrt{|\vec{H}|^2 - K} u_1, 1 \leq \lambda < +\infty \right\} \quad \text{o} \quad \left\{ \vec{H} \pm \lambda \sqrt{K - |\vec{H}|^2} u_0, 1 \leq \lambda < +\infty \right\},$$

dependiendo del signo de  $|\vec{H}|^2 - K$ ;

b) si  $|\vec{H}|^2 - K = 0$ , la hipérbola es

$$\left\{ \vec{H} \pm \lambda(u_0 + u_1), 1 \leq \lambda < +\infty \right\} \quad \text{o} \quad \left\{ \vec{H} \pm \lambda(u_0 - u_1), 1 \leq \lambda < +\infty \right\},$$

esto ocurre cuando  $U_{\Phi}$  es dado por (1.23) con  $\varepsilon_1 = -1$ ;



2- la imagen de  $f_q$  es una recta de tipo tiempo; en tal caso la hipérbola se degenera a una línea recta:

a) si  $|\vec{H}|^2 - K \neq 0$ , la hipérbola es

$$\vec{H} + \mathbb{R}u_0 \quad \text{o} \quad \vec{H} + \mathbb{R}u_1,$$

donde el primer caso ocurre si  $|\vec{H}|^2 - K > 0$  y el segundo caso si  $|\vec{H}|^2 - K < 0$ ;

b) si  $|\vec{H}|^2 - K = 0$ , la hipérbola es

$$\vec{H} + \mathbb{R}(u_0 - u_1) \quad \text{o} \quad \vec{H} + \mathbb{R}(u_0 + u_1),$$

esto ocurre cuando  $U_\Phi$  es dado por (1.23) con  $\varepsilon_1 = 1$ .

Para ambos casos 1- y 2- de encima: a) corresponde a  $U_\Phi$  diagonalizable y b) a  $U_\Phi$  no diagonalizable, y la base  $(u_0, u_1)$  es dada por las Proposiciones 1.1.10 y 1.1.11 respectivamente. Notemos además que  $\Delta \geq 0$  en el caso 1- y que  $\Delta \leq 0$  en el caso 2-.

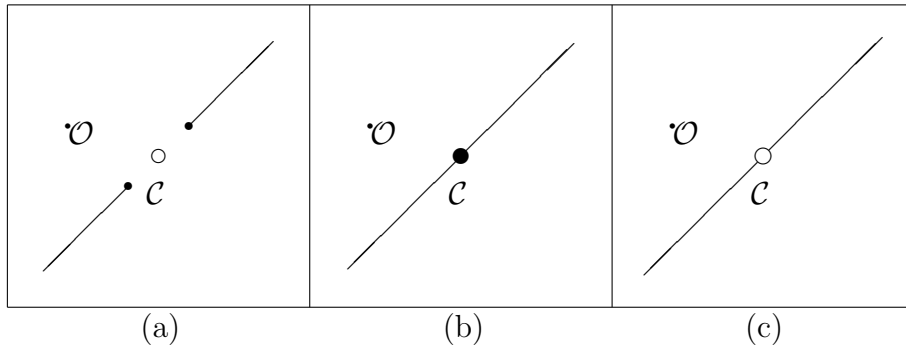
**Proposición 1.2.6.** Si  $K_N = 0$  y  $\Phi_q = 0$ , consideramos dos casos:

1-  $f_q \neq 0$ ; en tal caso la hipérbola se degenera a una recta con un punto removido

$$\left\{ \vec{H} + \lambda \mu_{[q]}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

donde  $\mu_{[q]}$  es el vector distinguido definido en el Lema 1.1.5; en tal caso  $\Delta = 0$ , y  $q$  es casi-umbílica;

2-  $f_q = 0$ ; la hipérbola entonces se degenera al punto final del vector  $\vec{H}$ ;  $q$  es umbílica.



En la figura, (a) y (b) son las hipérbolas de curvatura degeneradas descritas en los casos 1- y 2- de la Proposición 1.2.5 respectivamente, mientras que (c) es la hipérbola del caso 1- de la Proposición 1.2.6.

# CAPÍTULO 2

---

## La aplicación de Gauss de una superficie Lorentziana en $\mathbb{R}^{2,2}$

---

Consideremos una superficie Lorentziana orientada  $M$  en el espacio  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Denotaremos por  $G_{1,1}(\mathbb{R}^{2,2})$  la variedad Grassmaniana 4–dimensional de los planos Lorentzianos orientados que pasan por el origen en  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

La aplicación de Gauss generalizada de la superficie Lorentziana  $M$  es

$$G : M \rightarrow G_{1,1}(\mathbb{R}^{2,2})$$

que asocia a cada punto  $x$  de la superficie su plano tangente Lorentziano orientado  $T_x M$ . Nuestro objetivo ahora es estudiar la relación de la aplicación de Gauss con los invariantes de segundo orden de la superficie.

El resultado más importante de este capítulo viene dado en la Proposición 2.2.4, en donde presentaremos una fórmula que relaciona la diferencial de la aplicación de Gauss con las curvaturas Gaussiana  $K$  y normal  $K_N$  de la superficie Lorentziana.

Cuando la aplicación de Gauss de la superficie Lorentziana es regular, *i.e.* una inmersión, las inmersiones consideradas de  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$  son no triviales (en la terminología de J. L. Weiner [49]), *i.e.* no están contenidas en hiperplanos de  $\mathbb{R}^{2,2}$ . La fórmula descrita en el párrafo anterior, junto con la hipótesis  $G$  regular nos será útil en posteriores capítulos.

Obtendremos también relaciones entre el invariante  $\Delta$  y la diferencial de la aplicación de Gauss, estas aparecen al estudiar las direcciones asintóticas sobre la superficie Lorentziana: veremos como el signo del invariante  $\Delta$  determina la existencia de dichas direcciones y su carácter causal como hicieron P. Bayard y F. Sánchez-Bringas [9].

## 2.1. El espacio de los bivectores de $\mathbb{R}^{2,2}$

Consideremos un espacio vectorial real  $E$  de dimensión finita  $n$ .

El espacio  $k$ -producto alternante  $\Lambda^k E$  es definido como el espacio vectorial real generado libremente por elementos, llamados  $k$ -vectores, de la forma

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k$$

donde  $u_1, \dots, u_k \in E$ , están sujetos a las condiciones siguientes:

- $(u_1 + \alpha v_1) \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k = (u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k) + \alpha(v_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k)$ , para cualesquiera  $v_1, u_1, \dots, u_k \in E$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- $u_{\sigma(1)} \wedge u_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(k)} = \epsilon(\sigma)u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k$ , para toda  $\sigma \in S_k$  permutación de  $k$  elementos, donde  $\epsilon(\sigma)$  denota la signatura de la permutación  $\sigma$ .

Cuando  $k$  es igual a 2 diremos bivectores en lugar de 2-vectores y así  $\Lambda^2 E$  es el espacio de los bivectores de  $E$ .

Dada una base  $\{u_1, \dots, u_n\}$  de  $E$ , los  $k$ -vectores

$$\left\{ u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \cdots \wedge u_{i_k} \in \Lambda^k E : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \right\} \quad (2.1)$$

forman una base para  $\Lambda^k E$ , por lo tanto, el espacio  $\Lambda^k E$  tiene dimensión  $\binom{n}{k}$ .

Cuando  $E$  se encuentra equipado con una métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , podemos definir una métrica sobre el espacio  $\Lambda^k E$  de la siguiente manera. Para los  $k$ -vectores básicos dados en (2.1) definimos

$$\langle u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \cdots \wedge u_{i_k}, u_{j_1} \wedge u_{j_2} \wedge \cdots \wedge u_{j_k} \rangle := \det \begin{pmatrix} \langle u_{i_1}, u_{j_1} \rangle & \cdots & \langle u_{i_1}, u_{j_k} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_{i_k}, u_{j_1} \rangle & \cdots & \langle u_{i_k}, u_{j_k} \rangle \end{pmatrix}$$

y extendemos por bilinealidad a todo  $\Lambda^k E$ .

En lo que sigue, vamos a considerar el caso particular en que  $E$  es el espacio  $\mathbb{R}^{2,2}$ . El espacio  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2}$  de los bivectores de  $\mathbb{R}^{2,2}$  tiene dimensión real 6 y dada  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , los bivectores básicos

$$\left\{ e_i \wedge e_j : 0 \leq i < j \leq 3 \right\}$$

tienen norma Lorentziana

$$|e_i \wedge e_j|^2 := \langle e_i \wedge e_j, e_i \wedge e_j \rangle = |e_i|^2 |e_j|^2.$$

Así, la métrica sobre el espacio  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2}$  inducida por la métrica de  $\mathbb{R}^{2,2}$  tiene signatura  $(2, 4)$ .

Cuando  $\mathbb{R}^{2,2}$  está orientada por la base canónica  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ , podemos identificar

$$\Lambda^4 \mathbb{R}^{2,2} \simeq \mathbb{R},$$

donde  $e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$  se identifica con  $1 \in \mathbb{R}$ . Esta identificación nos permite definir el producto cuña sobre los bivectores de  $\mathbb{R}^{2,2}$  por

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2} \times \Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, p') &\longmapsto p \wedge p'. \end{aligned} \quad (2.2)$$

El producto cuña  $\wedge$  es una forma  $\mathbb{R}$ -bilineal y simétrica sobre el espacio de bivectores de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Definamos ahora *el operador estrella de Hogde*

$$\star : \Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2},$$

para ser el endomorfismo simétrico sobre el espacio de bivectores de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , asociado al producto cuña con respecto a la métrica de  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2}$ , *i.e.*

$$\langle \star p, p' \rangle = p \wedge p' \quad (2.3)$$

para cualesquiera  $p, p' \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2}$ .

El operador  $\star$  actúa sobre los bivectores básicos de  $\mathbb{R}^{2,2}$  de la siguiente manera:

$$\star(e_0 \wedge e_1) = -e_2 \wedge e_3, \quad \star(e_0 \wedge e_2) = -e_1 \wedge e_3 \quad \text{y} \quad \star(e_0 \wedge e_3) = -e_1 \wedge e_2. \quad (2.4)$$

En efecto, consideremos por ejemplo el bivector  $e_0 \wedge e_1$  : podemos escribir

$$\star(e_0 \wedge e_1) = \sum_{i < j} \alpha_{ij} (e_i \wedge e_j),$$

para algunos  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ , entonces tenemos

$$\langle \star(e_0 \wedge e_1), e_r \wedge e_s \rangle = (e_0 \wedge e_1) \wedge (e_r \wedge e_s) \neq 0 \quad \text{si y sólo si} \quad e_r \wedge e_s = e_2 \wedge e_3;$$

por lo tanto,  $\star(e_0 \wedge e_1) = \alpha_{23}(e_2 \wedge e_3)$  donde

$$-\alpha_{23} = \langle \alpha_{23}(e_2 \wedge e_3), e_2 \wedge e_3 \rangle = \langle \star(e_0 \wedge e_1), e_2 \wedge e_3 \rangle = (e_0 \wedge e_1) \wedge e_2 \wedge e_3 \simeq 1.$$

Análogamente conseguimos,

$$\star(e_2 \wedge e_3) = -e_0 \wedge e_1, \quad \star(e_1 \wedge e_3) = -(e_0 \wedge e_2) \quad \text{y} \quad \star(e_1 \wedge e_2) = -e_0 \wedge e_3. \quad (2.5)$$

Las igualdades en (2.4) y en (2.5) nos dicen que el operador estrella de Hodge es una involución sobre el espacio de bivectores de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , *i.e.*  $\star^2 = Id_{\Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2}}$ .

Consideremos los números de Lorentz definidos como

$$\mathcal{A} := \{u + \sigma v : u, v \in \mathbb{R}, \sigma \notin \mathbb{R}, \sigma^2 = 1\}.$$

Con las operaciones usuales,  $\mathcal{A}$  es un álgebra sobre  $\mathbb{R}$ , asociativa, conmutativa y con unidad. Vea en el Apéndice A algunas referencias sobre los números de Lorentz.

El espacio de los bivectores de  $\mathbb{R}^{2,2}$  admite una estructura de  $\mathcal{A}$ -módulo: consideremos la acción de los números de Lorentz sobre  $\Lambda^2\mathbb{R}^{2,2}$  dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \Lambda^2\mathbb{R}^{2,2} &\longrightarrow \Lambda^2\mathbb{R}^{2,2} \\ (a, p) &\longmapsto a \cdot p \end{aligned}$$

donde  $\sigma \in \mathcal{A}$  actúa sobre un bivector como

$$\sigma \cdot p := - \star p. \quad (2.6)$$

Las igualdades en (2.5) garantizan que los bivectores básicos

$$E_1 := e_2 \wedge e_3, \quad E_2 := e_3 \wedge e_1 \quad \text{y} \quad E_3 := e_1 \wedge e_2 \quad (2.7)$$

forman una base de  $\Lambda^2\mathbb{R}^{2,2}$  como  $\mathcal{A}$ -módulo.

Ahora vamos a definir una norma adecuada sobre  $\Lambda^2\mathbb{R}^{2,2}$ . Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} H : \Lambda^2\mathbb{R}^{2,2} \times \Lambda^2\mathbb{R}^{2,2} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (p, p') &\longmapsto \langle p, p' \rangle - \sigma (p \wedge p'). \end{aligned} \quad (2.8)$$

$H$  es una forma  $\mathbb{R}$ -bilineal y simétrica. Más aún,  $H$  es una forma  $\sigma$ -bilineal: para cualesquiera  $p, p'$  en  $\Lambda^2\mathbb{R}^{2,2}$  tenemos

$$\begin{aligned} H(\sigma \cdot p, p') &= \langle \sigma \cdot p, p' \rangle - \sigma (\sigma \cdot p \wedge p') \\ &= \langle - \star p, p' \rangle + \sigma (\star p \wedge p') \\ &= -p \wedge p' + \sigma \langle \star^2 p, p' \rangle \\ &= \sigma H(p, p'). \end{aligned}$$

Finalmente, la base de  $\Lambda^2\mathbb{R}^{2,2}$  como  $\mathcal{A}$ -módulo dada en (2.7) es  $H$ -ortonormal: para  $i \neq j$  tenemos  $H(E_i, E_j) = 0$  y  $H(E_1, E_1) = H(E_3, E_3) = -H(E_2, E_2) = -1$ ; por tanto, podemos identificar

$$\Lambda^2\mathbb{R}^{2,2} \simeq \mathcal{A} E_1 \oplus \mathcal{A} E_2 \oplus \mathcal{A} E_3 \simeq \mathcal{A}^{1,2}; \quad (2.9)$$

donde  $\mathcal{A}^{1,2}$  es el espacio 3-dimensional  $\mathcal{A}^3$  equipado con una norma de signatura  $(-, +, -)$ .

## 2.2. La Grassmanniana de los planos Lorentzianos en $\mathbb{R}^{2,2}$

En esta sección, estudiaremos la variedad Grassmanniana 4-dimensional  $G_{1,1}(\mathbb{R}^{2,2})$  de los planos Lorentzianos orientados que pasan por el origen en  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Consideremos un plano  $P$  en  $G_{1,1}(\mathbb{R}^{2,2})$ ; supongamos que  $(x, y)$  es una base ortonormal orientada de  $P$ , entonces el bivector  $p := x \wedge y$  satisface:

$$p \wedge p = 0 \quad \text{y} \quad \langle p, p \rangle = -1.$$

Recíprocamente, supongamos que un bivector  $p \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2}$  satisface las condiciones de encima; la primera condición nos dice que  $p$  se descompone, *i.e.* existen vectores  $x, y \in \mathbb{R}^{2,2}$  tales que

$$p = x \wedge y.$$

Veremos que los vectores  $x$  e  $y$  definen un plano Lorentziano orientado  $P$ : con respecto a la norma Lorentziana del vector  $x$ , dos cosas pueden suceder:

- 1-  $\langle x, x \rangle \neq 0$ : podemos suponer que  $\langle x, y \rangle = 0$  (en otro caso podemos reemplazar  $y$  por  $y - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} x$  y el valor de  $p$  no cambia) y así, la segunda condición de encima nos dice que los vectores  $x$  e  $y$  tienen caracter causal diferente. Supongamos que el vector  $x$  es de tipo tiempo y que  $y$  es de tipo espacio (el otro caso es similar), el plano generado por los vectores unitarios  $\left\{ \frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \right\}$ , donde por ejemplo  $|x| := \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$ , es un plano Lorentziano orientado (si es necesario reemplazamos  $x$  por  $-x$ );
- 2-  $\langle x, x \rangle = 0$ : la segunda igualdad implica que  $\langle x, y \rangle = \pm 1$ , sólo consideraremos el caso  $\langle x, y \rangle = 1$  ya que el otro caso es similar. Si  $|y|^2 = 0$ , los vectores  $\left\{ \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right\}$  son ortonormales de tipo tiempo y de tipo espacio respectivamente y satisfacen  $p = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \wedge \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ , *i.e.* el plano generado por ellos es un plano Lorentziano orientado. Si  $|y|^2 \neq 0$ , el vector  $x' = x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y$  es tal que  $\langle x', y \rangle = 0$ ,  $|x'|^2 |y|^2 = -1$  y  $p = x' \wedge y$ , el plano generado por estos vectores es Lorentziano orientado (si es necesario reemplazamos  $x'$  por  $-x'$ ).

Por los argumentos de encima, podemos identificar la Grassmanniana

$$G_{1,1}(\mathbb{R}^{2,2}) \simeq \{p \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2} : \langle p, p \rangle = -1, p \wedge p = 0\} =: \mathcal{Q}. \quad (2.10)$$

Usando la definición (2.8) de la norma  $H$  sobre  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2}$  y la identificación (2.9) conseguimos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \{p \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2} : H(p, p) = -1\} \\ &= \{p = p_1 E_1 + p_2 E_2 + p_3 E_3 \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2} : -p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = -1\} \\ &\simeq \{p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{A}^{1,2} : -p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = -1\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

*i.e.* la Grassmanniana de planos Lorentzianos orientados en  $\mathbb{R}^{2,2}$  es un hiperboloide de una hoja en el espacio 3-dimensional  $\mathcal{A}^{1,2}$ .

**El espacio tangente a la Grassmanniana  $\mathcal{Q}$ .** Para un plano  $p$  en la Grassmanniana  $\mathcal{Q}$ , usando la igualdad en (2.11) podemos calcular el espacio tangente a la Grassmanniana  $\mathcal{Q}$  en  $p$ , este viene dado por

$$T_p\mathcal{Q} = \left\{ \xi \in \Lambda^2\mathbb{R}^{2,2} : H(p, \xi) = 0 \right\}. \quad (2.12)$$

Consideremos el plano  $p^\perp$ , el complemento ortogonal de  $p$  con respecto a la métrica de  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Supongamos además que  $(e_0, e_1)$ ,  $(e_2, e_3)$  son bases ortonormales orientadas de los planos  $p^\perp$  y  $p$  respectivamente, tales que  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  es una base ortonormal orientada de  $\mathbb{R}^{2,2}$ ; consideremos la base  $H$ -ortonormal  $(E_1, E_2, E_3)$  de  $\Lambda^2\mathbb{R}^{2,2}$  como  $\mathcal{A}$ -módulo definido en (2.7). Ya que  $p = e_2 \wedge e_3 = E_1$  y  $H$  es  $\sigma$ -bilineal, tenemos

$$T_p\mathcal{Q} = \{ \xi_2 E_2 + \xi_3 E_3 : \xi_2, \xi_3 \in \mathcal{A} \} = \mathcal{A}E_2 \oplus \mathcal{A}E_3; \quad (2.13)$$

además, usando la descomposición en (2.9) de  $\Lambda^2\mathbb{R}^{2,2}$  conseguimos  $N_p\mathcal{Q} = \mathcal{A}E_1$ .

Por otro lado, ya que  $p^\perp \oplus p = \mathbb{R}^{2,2}$ , un plano  $p'$  suficientemente cercano al plano  $p$  satisface  $p^\perp \oplus p' = \mathbb{R}^{2,2}$ , y entonces  $p'$  es la gráfica de una aplicación lineal  $\nu_{p'} : p \rightarrow p^\perp$ , *i.e.*

$$p' = \{ u + \nu_{p'}(u) : u \in p \}.$$

En efecto, para cada  $u \in p \subset \mathbb{R}^{2,2} = p^\perp \oplus p'$  existen los vectores  $\nu(u) \in p^\perp$ ,  $y(u) \in p'$ , únicos, tales que  $u = -\nu(u) + y(u)$ ; la asignación  $p \ni u \mapsto \nu(u) \in p^\perp$  es lineal: para cualesquiera  $u_0, u_1 \in p$  y todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  tenemos

$$y(u_0 + \lambda u_1) - (y(u_0) + \lambda y(u_1)) = \nu(u_0 + \lambda u_1) - (\nu(u_0) + \lambda \nu(u_1))$$

como los subespacios  $p^\perp$  y  $p'$  son independientes, conseguimos

$$\nu(u_0 + \lambda u_1) = \nu(u_0) + \lambda \nu(u_1).$$

Con esto, un vector de  $T_p\mathcal{Q}$  es la variación infinitesimal de aplicaciones lineales  $p \rightarrow p^\perp$ , por lo tanto, tenemos la identificación

$$T_p\mathcal{Q} \simeq L(p, p^\perp). \quad (2.14)$$

En lo que sigue, vamos a describir explícitamente la identificación (2.14). Para el plano  $p = e_2 \wedge e_3 \in \mathcal{Q}$ , usando (2.13), cada vector  $\xi$  del espacio tangente  $T_p\mathcal{Q}$  puede ser escrito de la forma

$$\xi = a_{02} e_0 \wedge e_2 + a_{03} e_0 \wedge e_3 + a_{12} e_1 \wedge e_2 + a_{13} e_1 \wedge e_3$$

para algunos  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1$ ,  $j = 2, 3$ ); buscaremos una curva adecuada

$$p(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{Q},$$

con  $\epsilon > 0$ , tal que  $p(0) = p$  y  $p'(0) = \xi$ .

Supongamos inicialmente que  $p(t) = x(t) \wedge y(t)$  donde  $x(t), y(t)$  son curvas ortogonales en  $\mathbb{R}^{2,2}$  tales que  $x(0) = e_2$  y  $y(0) = e_3$ . La condición  $\xi = p'(0) = x'(0) \wedge e_3 + e_2 \wedge y'(0)$  implica

$$x'(0) = a_{03}e_0 + a_{13}e_1 + b_1e_2 + b_2e_3 \quad \text{y} \quad y'(0) = -a_{02}e_0 - a_{12}e_1 + b_3e_2 - b_1e_3,$$

para  $b_1, b_2$  y  $b_3$  números reales arbitrarios.

Consideremos las curvas

$$\tilde{x}(t) = e_2 + t(a_{03}e_0 + a_{13}e_1) \quad \text{y} \quad \tilde{y}(t) = e_3 - t(a_{02}e_0 + a_{12}e_1);$$

escribiendo  $\alpha := a_{03}e_0 + a_{13}e_1$  y  $\beta := -a_{02}e_0 - a_{12}e_1$  conseguimos

$$\langle \tilde{x}(t), \tilde{x}(t) \rangle = -1 + t^2|\alpha|^2 \quad \text{y} \quad \langle \tilde{y}(t), \tilde{y}(t) \rangle = 1 + t^2|\beta|^2.$$

Notemos que para  $t$  suficientemente pequeño, la curva  $\tilde{x}(t)$  es de tipo tiempo mientras que  $\tilde{y}(t)$  es una curva de tipo espacio en  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Definamos la curva

$$\mathbf{x}(t) := \frac{\tilde{x}(t)}{\sqrt{1 - t^2|\alpha|^2}};$$

$\mathbf{x}(t)$  es una curva de tipo tiempo unitaria. Por otro lado, la curva  $\tilde{y}(t) + \langle \mathbf{x}(t), \tilde{y}(t) \rangle \mathbf{x}(t)$  es ortogonal a  $\mathbf{x}(t)$  y además tenemos

$$\langle \tilde{y}(t) + \langle \mathbf{x}(t), \tilde{y}(t) \rangle \mathbf{x}(t), \tilde{y}(t) + \langle \mathbf{x}(t), \tilde{y}(t) \rangle \mathbf{x}(t) \rangle = |\tilde{y}(t)|^2 + \langle \mathbf{x}(t), \tilde{y}(t) \rangle^2 > 0;$$

por lo tanto, la curva

$$\mathbf{y}(t) := \frac{\tilde{y}(t) + \langle \mathbf{x}(t), \tilde{y}(t) \rangle \mathbf{x}(t)}{\sqrt{|\tilde{y}(t)|^2 + \langle \mathbf{x}(t), \tilde{y}(t) \rangle^2}},$$

es de tipo espacio unitaria y ortogonal a  $\mathbf{x}(t)$ .

Finalmente, la curva buscada es  $p(t) := \mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{y}(t) \in \mathcal{Q}$ , que satisface  $p(0) = e_2 \wedge e_3 = p$  y  $p'(0) = \alpha \wedge e_3 + e_2 \wedge \beta = \xi$ .

Para concluir, notemos que cada  $p_t := p(t)$  es un plano Lorentziano orientado en  $\mathbb{R}^{2,2}$  generado por  $\mathbf{x}_t := \mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{y}_t := \mathbf{y}(t)$ , *i.e.*  $p_t = \{r\mathbf{x}_t + s\mathbf{y}_t : r, s \in \mathbb{R}\}$ . Si escribimos

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(0) + t\mathbf{x}'(0) + O(t^2) \quad \text{y} \quad \mathbf{y}_t = \mathbf{y}(0) + t\mathbf{y}'(0) + O(t^2),$$

conseguimos

$$r\mathbf{x}_t + s\mathbf{y}_t = (re_2 + se_3) + t(r\alpha + s\beta) + O(t^2),$$

para cualesquiera  $r, s \in \mathbb{R}$ , por lo tanto

$$p_t = \left\{ u - t\langle u, e_2 \rangle \alpha + t\langle u, e_3 \rangle \beta + O(t^2) : u \in p \right\}.$$



De esta manera, cada  $p_t$  es la gráfica de la aplicación lineal

$$V_t(u) := -t\langle u, e_2 \rangle \alpha + t\langle u, e_3 \rangle \beta + O(t^2)$$

y por tanto

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V_t(u) = -\langle u, e_2 \rangle \alpha + \langle u, e_3 \rangle \beta.$$

Los argumentos de encima prueban el siguiente lema que usaremos en la próxima sección.

**Lema 2.2.1.** *Con respecto la identificación (2.14): para  $p = e_2 \wedge e_3 \in \mathcal{Q}$  y  $\alpha, \beta \in p^\perp$  el vector tangente a  $\mathcal{Q}$  en  $p$*

$$\xi = \alpha \wedge e_3 + e_2 \wedge \beta \in T_p \mathcal{Q}$$

*se identifica con la aplicación lineal*

$$\begin{aligned} V : p &\longrightarrow p^\perp \\ u &\longmapsto -\langle u, e_2 \rangle \alpha + \langle u, e_3 \rangle \beta. \end{aligned}$$

**La aplicación de Gauss y la segunda forma fundamental.** En este apartado, estudiaremos una relación entre la aplicación de Gauss y la segunda forma fundamental de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Supongamos que la superficie Lorentziana  $M$  está orientada en espacio y en tiempo: el haz tangente  $TM$  y el haz normal  $NM$  están orientados, y para todo  $x \in M$ , una componente de  $\{u \in T_x M : \langle u, u \rangle < 0\}$  y una componente de  $\{u \in N_x M : \langle u, u \rangle < 0\}$  son distinguidas; un vector tangente o normal a la superficie perteneciente a una tal componente será llamado *futuro-dirigido*. Además, adoptaremos la siguiente convención: una base  $(u, v)$  de  $T_x M$  o de  $N_x M$  será llamada positivamente orientada (en espacio y en tiempo) si este tiene la orientación de  $T_x M$  o de  $N_x M$  y si  $\langle u, u \rangle < 0$  y  $\langle v, v \rangle > 0$ , con  $u$  futuro dirigido.

La segunda forma fundamental  $II : T_x M \rightarrow N_x M$  en cada punto  $x$  es una aplicación cuadrática entre los planos Lorentzianos orientados: una tal aplicación cuadrática define naturalmente un elemento de  $SO(1, 1) \backslash Q(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}) / SO(1, 1)$ , dado por su representación en marcos ortonormales positivamente orientados de  $T_x M$  y  $N_x M$ . Los invariantes numéricos y la hipérbola de curvatura introducidas en el capítulo anterior son así naturalmente alcanzadas por la segunda forma fundamental de la superficie.

Usando los bivectores de  $\mathbb{R}^{2,2}$  podemos dar la siguiente definición. *La aplicación de Gauss orientada* de una superficie Lorentziana  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$  es dada por

$$\begin{aligned} G : M &\longrightarrow \mathcal{Q} \\ x &\longmapsto e_2 \wedge e_3, \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde  $(e_2, e_3)$  es una base ortonormal positivamente orientada de  $T_x M$  (recuerde que  $e_2$  es un vector de tipo tiempo y  $e_3$  es un vector de tipo espacio).

Fijemos un punto  $x$  de la superficie Lorentziana  $M$  y consideremos  $(e_0, e_1)$  y  $(e_2, e_3)$  bases ortonormales positivamente orientadas de  $N_xM$  y  $T_xM$  respectivamente. Consideremos un marco geodésico local  $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  tangente a la superficie definido en una vecindad del punto  $x$  que extiende a la base  $(e_2, e_3)$  de  $T_xM$ , *i.e.*

$$\mathbf{e}_2(x) = e_2, \quad \mathbf{e}_3(x) = e_3 \quad \text{y} \quad \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j(x) = 0.$$

Así, la aplicación de Gauss orientada viene dada localmente por  $G = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ . Derivando esta expresión conseguimos

$$\begin{aligned} dG_x(u) &= d\mathbf{e}_x(u) \wedge \mathbf{e}_3(x) + \mathbf{e}_2(x) \wedge d\mathbf{e}_x(u) \\ &= (\nabla_u \mathbf{e}_2(x) + II(\mathbf{e}_2(x), u)) \wedge e_3 + e_2 \wedge (\nabla_u \mathbf{e}_3(x) + II(\mathbf{e}_3(x), u)) \\ &= II(e_2, u) \wedge e_3 + e_2 \wedge II(u, e_3), \end{aligned} \tag{2.16}$$

para cada  $u \in T_xM$ , donde  $II : T_xM \times T_xM \rightarrow N_xM$  es la segunda forma fundamental de la superficie (escrita como una forma bilineal sobre  $T_xM$ ). Escribiendo  $G(x) = e_2 \wedge e_3 =: p$ , la igualdad (2.16) y el Lema 2.2.1 implican que el vector tangente  $dG_x(u) \in T_p\mathcal{Q}$  se identifica con la aplicación lineal

$$\begin{aligned} T_xM &\longrightarrow N_xM \\ v &\longmapsto -\langle v, e_2 \rangle II(u, e_2) + \langle v, e_3 \rangle II(u, e_3), \end{aligned}$$

que coincide con  $II(u, v)$ . Obtenemos así la siguiente relación.

**Proposición 2.2.2.** *Para cualesquiera  $x \in M$  y  $u \in T_xM$ , el vector  $dG_x(u) \in T_{G(x)}\mathcal{Q}$  se identifica con la aplicación lineal*

$$\begin{aligned} II(u, \cdot) : T_xM &\longrightarrow N_xM \\ v &\longmapsto II(u, v). \end{aligned}$$

Para terminar, escribiendo  $e_2 = u$  y  $e_3 = u'$ , tenemos  $G(x) = u \wedge u'$  y de (2.16) conseguimos

$$dG_x(u) = II(u, u) \wedge u' + u \wedge II(u, u'). \tag{2.17}$$

La identificación (2.14) implica que un vector tangente a la Grassmanniana en  $G(x)$  se interpreta como un movimiento infinitesimal del plano tangente, la fórmula (2.17) nos permite dar la siguiente interpretación del vector  $dG_x(u)$ . Existen movimientos infinitesimales

$$t_u := -u' \wedge II(u, u) \quad \text{y} \quad r_u := u \wedge II(u, u') \in T_{G(x)}\mathcal{Q};$$

el movimiento infinitesimal  $t_u$  es un movimiento de rotación de  $T_xM$  en el hiperplano  $T_xM \oplus \mathbb{R}II(u, u)$  sobre el eje  $\mathbb{R}u'$ . Análogamente,  $r_u$  es un movimiento de rotación de  $T_xM$  en el hiperplano  $T_xM \oplus \mathbb{R}II(u, u')$  sobre el eje  $\mathbb{R}u$ .

**La forma de área sobre la Grassmanniana  $\mathcal{Q}$ .** Para un punto  $x$  de una superficie Lorentziana  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$  orientada (en espacio y en tiempo), consideremos  $(e_0, e_1)$  y  $(e_2, e_3)$  bases ortonormales positivamente orientadas de  $N_xM$  y  $T_xM$  tales que  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  es una base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

La forma de área  $\omega_{\mathcal{Q}}$  sobre la Grassmanniana  $\mathcal{Q}$  esta definida en cada bivector  $p$  de  $\mathcal{Q}$  como la forma bilineal alternada con valores en los números de Lorentz

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{Q}}(p) : T_p\mathcal{Q} \times T_p\mathcal{Q} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (\xi_1, \xi_2) &\longmapsto -\det(p, \xi_1, \xi_2),\end{aligned}$$

donde el determinante de los vectores  $(p, \xi_1, \xi_2)$  es tomado con respecto la base  $H$ -ortonormal  $(E_1, E_2, E_3)$  de  $\Lambda^2\mathbb{R}^{2,2}$  como  $\mathcal{A}$ -módulo definida en (2.7).

En el siguiente lema daremos fórmulas que serán útiles en el resto del presente capítulo.

**Lema 2.2.3.** *Supongamos que la segunda forma fundamental de la superficie Lorentziana  $M$  en el punto  $x$  está dada por*

$$II = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} e_0 + \begin{pmatrix} e & g \\ g & f \end{pmatrix} e_1. \quad (2.18)$$

Los invariantes de segundo orden de la superficie en  $x$  satisfacen:

$$\begin{aligned}|\vec{H}|^2 &= -\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{f-e}{2}\right)^2 & K &= (ab - ef) + (g^2 - c^2) \\ K_N &= c(e+f) - g(a+b) & y \quad \Delta &= \frac{1}{4}(af - eb)^2 + (ag - ec)(bg - fc).\end{aligned}$$

*Demostración.* La prueba de estas fórmulas es obtenida por un cálculo directo una vez que escribamos los endomorfismos simétricos asociados  $S_{e_0}, S_{e_1}$  en forma matricial y usemos la Definición 1.1.8 de los invariantes numéricos.  $\square$

A continuación daremos el resultado principal del capítulo, la fórmula que relaciona la diferencial de la aplicación de Gauss, la curvatura de Gauss  $K$  y la curvatura normal  $K_N$  de la superficie Lorentziana  $M$ . Esta fórmula en  $\mathbb{R}^{2,2}$  es análoga a las dadas en [2, 3] en el caso de superficies Riemannianas en  $\mathbb{R}^{3,1}$  y en  $\mathbb{R}^4$ .

**Proposición 2.2.4.** *Consideremos una superficie Lorentziana  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$  orientada (en espacio y en tiempo). La aplicación de Gauss  $G : M \rightarrow \mathcal{Q}$  de la superficie  $M$  satisface*

$$G^*\omega_{\mathcal{Q}} = (K + \sigma K_N)\omega_M,$$

donde  $\omega_M$  es la forma de área canónica de  $M$ , i.e. el determinante en alguna base ortonormal positivamente orientada.

*Demostración.* Como encima, consideremos  $(e_0, e_1)$  y  $(e_2, e_3)$  bases ortonormales positivamente orientadas de  $N_xM$  y  $T_xM$  tales que  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  es una base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Supongamos que la segunda forma fundamental de la superficie en el punto  $x$  está dada como en (2.18), *i.e.*

$$II(e_2, e_2) = ae_0 + ee_1, \quad II(e_3, e_3) = be_0 + fe_1 \quad \text{y} \quad II(e_2, e_3) = ce_0 + ge_1;$$

usando la igualdad (2.16), podemos escribir la diferencial de la aplicación de Gauss  $dG_x$  en la base  $(E_1, E_2, E_3)$  de  $\Lambda^2\mathbb{R}^{2,2}$  como  $\mathcal{A}$ -módulo, conseguimos

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad dG_x(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e + \sigma c \\ -g + \sigma a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad dG_x(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g + \sigma b \\ -f + \sigma c \end{pmatrix}.$$

De un cálculo directo obtenemos

$$\begin{aligned} G^*\omega_{\mathcal{Q}}(x)(e_2, e_3) &= \omega_{\mathcal{Q}}(G(x))(dG(e_2), dG(e_3)) \\ &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -e + \sigma c & -g + \sigma b \\ 0 & -g + \sigma a & -f + \sigma c \end{pmatrix} \\ &= (ab - ef) + (g^2 - c^2) + \sigma(c(f + e) - g(a + b)) \\ &= K + \sigma K_N; \end{aligned}$$

la última igualdad fue dada en el Lema 2.2.3. □

Usaremos la Proposición 2.2.4 en la tercera parte de la tesis cuando estudiemos las superficies Lorentzianas planas con haz normal plano ( $K = K_N = 0$ ) y aplicación de Gauss regular.

**Superficies Lorentzianas con aplicación de Gauss regular.** Diremos que la aplicación de Gauss  $G : M \rightarrow \mathcal{Q}$  de una superficie Lorentziana  $M$  es regular si  $dG_x$  es inyectiva en cada punto  $x$  de la superficie.

En este apartado veremos brevemente por que es natural considerar superficies Lorentzianas en  $\mathbb{R}^{2,2}$  con aplicación de Gauss regular.

**Lema 2.2.5.** *Para cada  $x$  de  $M$  tenemos  $dG_x : T_xM \rightarrow T_{G(x)}\mathcal{Q}$  es inyectiva si y sólo si la segunda forma fundamental  $II : T_xM \times T_xM \rightarrow N_xM$  en  $x$  es no degenerada.*

*Demostración.* Escribiendo  $II(\cdot, \cdot) := II_0(\cdot, \cdot)e_0 + II_1(\cdot, \cdot)e_1$  en (2.16), conseguimos

$$dG_x(u) = II_0(e_2, u)e_0 \wedge e_3 + II_1(e_2, u)e_1 \wedge e_3 - II_0(u, e_3)e_0 \wedge e_2 - II_1(u, e_3)e_1 \wedge e_2,$$

para cada vector tangente  $u \in T_xM$ . Por lo tanto,  $dG_x(u) = 0$  si y sólo si  $II_0(u, e_j) = II_1(u, e_j) = 0$ ,  $j = 2, 3$ , *i.e.*  $II(u, \cdot) \equiv 0$ . □

El primer espacio normal de la superficie Lorentziana  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$  en el punto  $x$  es definido como el espacio vectorial real generado por la imagen de la segunda forma fundamental  $II$ , *i.e.*

$$N_1(x) := \text{span}_{\mathbb{R}}\{II(u, v) : u, v \in T_x M\} \subset N_x M. \quad (2.19)$$

Ya que  $II$  toma valores vectoriales en  $N_x M$ , en general tenemos  $\dim(N_1(x)) \leq 2$ .

El espacio osculador de la superficie en  $x$  es definido como el subespacio

$$T_x M \oplus N_1(x) \subset T_x \mathbb{R}^{2,2}.$$

Diremos que el espacio osculador en el punto  $x$  es degenerado, si el primer espacio normal  $N_1(x)$  es 1-dimensional siguiendo la dirección de un vector de tipo luz.

**Lema 2.2.6.** *Supongamos que  $K = 0$  en  $x$  y que  $dG_x : T_x M \rightarrow T_{G(x)} \mathcal{Q}$  es inyectiva. Tenemos*

$$G^* H_x = H(dG_x, dG_x) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad II(\cdot, \cdot) = \lambda(\cdot, \cdot)\nu,$$

donde  $\lambda$  es una forma bilineal y simétrica sobre  $T_x M$ , y donde  $\nu \in N_x M$  es un vector de tipo luz. Aquí,  $H$  es la norma sobre  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2}$  definida en (2.8).

*Demostración.* Supongamos que  $G^* H_x = H(dG_x, dG_x) = 0$ , *i.e.* para cada  $u \in T_x M$  tenemos

$$\langle dG_x(u), dG_x(u) \rangle = 0 \quad \text{y} \quad dG_x(u) \wedge dG_x(u) = 0,$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es la métrica de  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2}$ ; usando la igualdad (2.16) conseguimos

$$|II(e_2, u)|^2 - |II(e_3, u)|^2 = 0 \quad \text{y} \quad \det_{(e_0, e_1)}(II(e_2, u), II(e_3, u)) = 0 \quad (2.20)$$

para cada  $u \in T_x M$ . La segunda igualdad de (2.20) implica

$$II(e_2, e_2) = \lambda_2 II(e_2, e_3) \quad \text{y} \quad II(e_3, e_3) = \lambda_3 II(e_2, e_3), \quad (2.21)$$

para algunos  $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ , por lo tanto, existe una forma bilineal y simétrica  $\lambda : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$II(\cdot, \cdot) = \lambda(\cdot, \cdot)II(e_2, e_3).$$

Mostraremos ahora que  $\nu := II(e_2, e_3) \in N_x M$  es un vector de tipo luz. Ya que  $K = 0$ , la ecuación de Gauss y (2.21) implican  $\lambda_2 \lambda_3 = 1$  o  $|II(e_2, e_3)|^2 = 0$ . Supongamos por contradicción que  $|II(e_2, e_3)|^2 \neq 0$ : de la primera igualdad en (2.20) tenemos  $\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 1$ , así  $\lambda_2 = \lambda_3$ ; de (2.21) tenemos

$$II(e_2, e_2 - \lambda_2 e_3) = 0 \quad \text{y} \quad II(e_3, e_2 - \lambda_2 e_3) = 0,$$

*i.e.*  $II(\cdot, e_2 - \lambda_2 e_3) \equiv 0$  que es una contradicción pues  $dG_x$  es inyectiva (Lema 2.2.5).

La afirmación recíproca se obtiene fácilmente usando (2.16) y (2.8). □

La siguiente proposición garantiza que las inmersiones isométricas que consideramos son no triviales (en la terminología de [49]), *i.e.* no están contenidas en hiperplanos de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

**Proposición 2.2.7.** *Supongamos que  $K = 0$  en  $x$  y que el espacio osculador  $T_x M \oplus N_1(x)$  es no degenerado. Tenemos  $dG_x$  es inyectiva si y sólo si  $\dim N_1(x) \equiv 2$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que  $dG_x$  es inyectiva y pensemos por contradicción que  $\dim N_1(x) < 2$ : si  $\dim N_1(x) = 0$ , *i.e.*  $II(\cdot, \cdot) \equiv 0$ , tenemos una contradicción; si  $\dim N_1(x) = 1$ , existe una forma bilineal y simétrica  $\lambda : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ , y un vector normal  $\nu \in N_x M$ , con  $|\nu|^2 \neq 0$  (el espacio osculador es no degenerado), tales que

$$II(\cdot, \cdot) = \lambda(\cdot, \cdot)\nu.$$

usando (2.16) conseguimos

$$dG_x(u) = (\lambda(e_3, u)e_2 - \lambda(e_2, u)e_3) \wedge \nu.$$

Ya que  $K = 0$ , la ecuación de Gauss implica  $\lambda(e_2, e_2)\lambda(e_3, e_3) = \lambda(e_2, e_3)^2$ , y así

$$\lambda(e_2, e_3)dG_x(e_2) - \lambda(e_2, e_2)dG_x(e_3) = 0;$$

como  $dG_x$  es inyectiva,  $\lambda(e_2, e_3) = \lambda(e_2, e_2) = 0$ , así  $II(e_2, \cdot) \equiv 0$  una contradicción.

Recíprocamente, supongamos  $\dim N_1(x) = 2$  y pensemos por contradicción que  $dG_x$  no es inyectiva. Por el Lema 2.2.5, existe  $u \in T_x M$  tal que  $II(u, \cdot) \equiv 0$ , entonces escogemos  $u^* \in T_x M$  tal que  $(u, u^*)$  es una base, así la imagen de  $II$  es 1-dimensional siguiendo la dirección del vector  $II(u^*, u^*)$ , una contradicción.  $\square$

**La estructura algebraica de la segunda forma fundamental.** En lo que sigue, vamos a dar fórmulas explícitas de la segunda forma fundamental de la superficie Lorentziana  $M \subset \mathbb{R}^{2,2}$  para un conjunto de invariantes dados, en particular, en el caso en que la superficie es plana con haz normal plano con aplicación de Gauss regular.

Supongamos que en el punto  $x \in M$ ,  $\text{rango}(f_{II}) = 2$  y la signatura de  $\Phi_{II}$  es  $(1, 1)$ , asumiremos además que

$$(|\vec{H}|^2 - K)^2 - K_N^2 > 0 \quad \text{y} \quad |\vec{H}|^2 - K > 0. \quad (2.22)$$

Vamos a describir la segunda forma fundamental en la base de eigenvectores  $(u_0, u_1)$  de  $U_\Phi$  dado en la Proposición 1.1.10. La segunda hipótesis en (2.22) implica que los eigenvalores  $a, b$  son positivos; escribiremos  $\mathbf{b} = \sqrt{b}$ . El vector normal  $\nu_0 = \frac{1}{\mathbf{b}}u_1$  es tal que  $\Phi_{II}(\nu_0) = 1$ . Además, de un cálculo directo tenemos  $\tilde{\Phi}_{II}(\nu_0, u_0) = 0$  y  $\tilde{\Phi}_{II}(\nu_0, u_1) = \mathbf{b}$ , y así, para todo  $\nu \in N_x M$  tenemos

$$\tilde{\Phi}_{II}(\nu_0, \nu) = \mathbf{b}\langle \nu, u_1 \rangle.$$

Por otro lado,  $A_{II}(\nu_0, u_1) = 0$  y la ecuación (1.1) implica  $A_{II}^2(\nu_0, u_0) = a$ , así  $A_{II}(\nu_0, \nu) = \mathbf{a}\langle \nu, u_0 \rangle$  donde  $\mathbf{a} = \sqrt{a}$  o  $-\sqrt{a}$ . Por lo tanto, en alguna base ortonormal positivamente orientada  $(e_2, e_3)$  de  $T_x M$ ,

$$S_{u_0} = -\alpha Id \pm A_{II}(\nu_0, u_0)E_1 = \begin{pmatrix} -\alpha & \mp \mathbf{a} \\ \pm \mathbf{a} & -\alpha \end{pmatrix}$$

y

$$S_{u_1} = \beta Id \pm \tilde{\Phi}_{II}(\nu_0, u_1)E_2 = \begin{pmatrix} \beta \pm \mathbf{b} & 0 \\ 0 & \beta \mp \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

(donde usamos la forma (1.5) de  $S_\nu$ ), y conseguimos

$$II = \begin{pmatrix} -\alpha & \mp \mathbf{a} \\ \mp \mathbf{a} & \alpha \end{pmatrix} u_0 + \begin{pmatrix} -\beta \mp \mathbf{b} & 0 \\ 0 & \beta \mp \mathbf{b} \end{pmatrix} u_1. \quad (2.23)$$

Usando el Lema 2.2.3, conseguimos los invariantes numéricos clásicos de la segunda forma fundamental en términos de los invariantes  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha$  y  $\beta$ :

$$\begin{aligned} |\vec{H}|^2 &= -\alpha^2 + \beta^2, & K &= -\alpha^2 + \beta^2 - \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 \\ \Delta &= -\mathbf{a}^2\beta^2 + \mathbf{b}^2\alpha^2 + \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 & \text{y} & \quad K_N = 2\mathbf{a}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Cuando la superficie Lorentziana es plana con haz normal plano, *i.e.*  $K = K_N = 0$ , con aplicación de Gauss regular, con los mismos argumentos de encima, podemos describir la segunda forma fundamental de la superficie de acuerdo a los casos del Teorema 1.1.12.

**Proposición 2.2.8.** *Supongamos que en el punto  $x \in M$ , se tiene  $K = K_N = 0$  y  $dG_x$  inyectiva. La estructura algebraica de la segunda forma fundamental  $II$  es la siguiente:*

A- Si  $|\vec{H}|^2 \neq 0$ ; la matriz de  $U_\phi$  es dada por

$$M(U_\Phi, (u_0, u_1)) = |\vec{H}|^2 \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \text{para } i = 0, 1.$$

Escribiendo  $\vec{H} := \alpha u_i + \beta u_{1-i} \in N_x M$ , conseguimos:

A.1-

$$II = \begin{pmatrix} -\alpha \pm (-1)^i \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} & 0 \\ 0 & \alpha \pm (-1)^i \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \end{pmatrix} u_i + \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} u_{1-i},$$

en este caso  $\Delta = \beta^2(\alpha^2 - \beta^2) > 0$ ;

A.2-

$$II = \begin{pmatrix} -\alpha & \mp (-1)^i \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \\ \mp (-1)^i \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} & \alpha \end{pmatrix} u_i + \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} u_{1-i},$$

con invariante  $\Delta = \beta^2(\alpha^2 - \beta^2) < 0$ .

B- Si  $|\vec{H}|^2 = 0$  y  $\Phi_{II} \neq 0$ ; la matriz de  $U_\Phi$  es dada por

$$M(U_\Phi, (u_0, u_1)) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 \\ -\epsilon_2 & -\epsilon_1 \end{pmatrix}, \quad \text{para } \epsilon_1 = \pm 1, \epsilon_2 = \pm 1.$$

Si escribimos  $\vec{H} := \alpha u_0 + \beta u_1 \in N_x M$ , tenemos lo siguiente:

B.1- si  $\epsilon_1 = -1$  :

$$II = \begin{pmatrix} -\alpha \pm 1 & 0 \\ 0 & \alpha \pm 1 \end{pmatrix} u_0 + \begin{pmatrix} -\beta \pm \epsilon_2 & 0 \\ 0 & \beta \pm \epsilon_2 \end{pmatrix} u_1,$$

en este caso  $\Delta = (\alpha - \epsilon_2 \beta)^2 \geq 0$ ;

B.2- si  $\epsilon_1 = 1$  :

$$II = \begin{pmatrix} -\alpha & \mp 1 \\ \mp 1 & \alpha \end{pmatrix} u_0 + \begin{pmatrix} -\beta & \pm \epsilon_2 \\ \pm \epsilon_2 & \beta \end{pmatrix} u_1,$$

y el invariante  $\Delta = -(\alpha + \epsilon_2 \beta)^2 \leq 0$ .

Cuando  $\Delta = 0$  el espacio osculador de la superficie es degenerado (vea la Proposición 2.2.6).

C-  $|\vec{H}|^2 = 0$ ,  $\Phi_B = 0$  : en este caso  $\Delta = 0$ , para  $\epsilon = \pm 1$  (i.e. cuando  $N = N_1, N_2$  resp.), tenemos:

C.1- Casi-umbílica:  $\vec{H} := \alpha \mu_{II} + \beta \mu_{II}^*$ ,

$$II = \begin{pmatrix} -\alpha - \epsilon & -1 \\ -1 & \alpha - \epsilon \end{pmatrix} \mu_{II} + \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix} \mu_{II}^*;$$

el caso  $|\mu_{II}|^2 = \pm 1$  y  $\beta = 0$  no puede ocurrir pues  $dG_x$  es inyectiva. Si  $|\mu_{II}|^2 = 0$  y  $\beta = 0$ , el espacio osculador de la superficie es degenerado.

C.2- Umbílica:  $\vec{H} := \alpha u_0 + \beta u_1$ ,

$$II = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} u_0 + \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} u_1,$$

en este caso, el espacio osculador de la superficie es degenerado.

## 2.3. Direcciones asintóticas

Para finalizar el presente capítulo, vamos a estudiar las direcciones asintóticas sobre una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Estas direcciones se encuentran definidas por medio de la diferencial de la aplicación de Gauss de la superficie; veremos como su existencia y su caracter causal estan relacionados con los invariantes de segundo orden de la superficie.



Consideremos una superficie Lorentziana  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$  orientada (en espacio y en tiempo) y  $G : M \rightarrow \mathcal{Q}$  su aplicación de Gauss. Fijemos un punto  $x$  de la superficie y consideremos la forma cuadrática

$$\begin{aligned} \delta : T_x M &\longrightarrow \Lambda^4 \mathbb{R}^{2,2} \simeq \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \frac{1}{2} dG_x(u) \wedge dG_x(u). \end{aligned}$$

Diremos que un vector tangente no cero  $u \in T_x M$  define una *dirección asintótica* en  $x$  si satisface la ecuación  $\delta(u) = 0$ .

Para cada  $u \in T_x M$ , considere un vector  $u' \in T_x M$  tal que  $G(x) = u \wedge u'$ , entonces la igualdad (2.17) implica

$$\delta(u) = II(u, u') \wedge II(u, u) \wedge u \wedge u'.$$

La interpretación geométrica de la forma cuadrática  $\delta$  es la siguiente: para cada  $u \in T_x M$ , el valor de  $\delta(u)$  mide la independencia lineal de las rotaciones infinitesimales de  $T_x M$  sobre los ejes  $\mathbb{R}u$  y  $\mathbb{R}u'$ . Cuando  $u$  es una dirección asintótica, los hiperplanos de rotación infinitesimal  $T_x M \oplus \mathbb{R}II(u, u')$  y  $T_x M \oplus \mathbb{R}II(u, u)$  coinciden, *i.e.* en la dirección  $u$ , de manera infinitesimal, y como suma de dos rotaciones, el plano tangente gira en un hiperplano de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

**Existencia de direcciones asintóticas.** Probaremos que *existen direcciones asintóticas sobre el espacio tangente  $T_x M$  si y sólo si el invariante  $\Delta$  es no negativo en  $x$* . En el caso en que  $\Delta$  es nulo en  $x$  diremos que la dirección asintótica es doble.

Como antes, consideremos  $(e_0, e_1)$  y  $(e_2, e_3)$  bases ortonormales positivamente orientadas de  $N_x M$  y  $T_x M$  tales que  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  es una base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Supongamos que la segunda forma fundamental de  $M$  en el punto  $x$  está dada como en (2.18), *i.e.*

$$II(e_2, e_2) = ae_0 + ee_1, \quad II(e_3, e_3) = be_0 + fe_1 \quad \text{y} \quad II(e_2, e_3) = ce_0 + ge_1.$$

Usando la igualdad (2.16), directamente obtenemos  $\delta(u) = II(u, e_3) \wedge II(u, e_2) \wedge e_2 \wedge e_3$ , para cada  $u \in T_x M$ ; así, denotando por  $\tilde{\delta}$  la forma bilineal y simétrica tal que  $\tilde{\delta}(u, u) = \delta(u)$ , para cada  $u \in T_x M$ , tenemos

$$\delta(e_2) = ec - ag, \quad \delta(e_3) = bg - cf \quad \text{y} \quad \tilde{\delta}(e_2, e_3) = \frac{eb - af}{2}. \quad (2.24)$$

Finalmente, escribiendo  $u = re_2 + se_3 \in T_x M$ , podemos calcular la ecuación intrínseca para las direcciones asintóticas

$$\delta(u) = (ec - ag)r^2 + (eb - af)rs + (bg - cf)s^2 = 0; \quad (2.25)$$

fijando  $r$  y usando una fórmula del Lema 2.2.3, es sencillo ver que (2.25) considerada como una ecuación cuadrática en  $s$  tiene discriminante  $4\Delta r^2$ .

**Caracter causal de las direcciones asintóticas.** Consideremos el endomorfismo simétrico  $u_\delta : T_x M \rightarrow T_x M$  asociado a la forma cuadrática  $\delta$ ; definamos la traza y el determinante (calculados con respecto a la métrica) de la forma cuadrática  $\delta$  por

$$tr(\delta) := tr(u_\delta) \quad \text{y} \quad \det(\delta) := \det(u_\delta).$$

Para estudiar el caracter causal de las direcciones asintóticas, vamos a introducir la forma cuadrática  $\delta^0 : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\delta^0 = \delta - \frac{1}{2} tr(\delta) \langle \cdot, \cdot \rangle, \quad (2.26)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota la métrica de la superficie  $M$ .

**Lema 2.3.1.** *Las siguientes igualdades son válidas:*

$$tr(\delta) = -K_N, \quad disc(\delta) := -\det(\delta) = -\Delta, \quad (2.27)$$

$$disc(\delta^0) := -\det(\delta^0) = \frac{1}{4} K_N^2 - \Delta. \quad (2.28)$$

*Demostración.* Las igualdades en (2.27) se obtienen por un cálculo directo usando las igualdades en (2.24) y las fórmulas del Lema 2.2.3:

$$\begin{aligned} tr(\delta) &= -\delta(e_2) + \delta(e_3) = -(ec - ag) + (bg - cf) = -K_N; \\ \det(\delta) &= -\delta(e_2)\delta(e_3) + \tilde{\delta}(e_2, e_3) = -(ec - ag)(bg - cf) + \frac{1}{4}(eb - af)^2 = \Delta. \end{aligned}$$

Ahora, usando (2.26) tenemos

$$\begin{aligned} \det(\delta^0) &= \det(u_\delta - \frac{1}{2} K_N Id) = \det \begin{pmatrix} -\delta(e_2) - \frac{1}{2} K_N & -\tilde{\delta}(e_2, e_3) \\ \tilde{\delta}(e_2, e_3) & \delta(e_3) - \frac{1}{2} K_N \end{pmatrix} \\ &= -\delta(e_2)\delta(e_3) + \tilde{\delta}(e_2, e_3) - \frac{1}{2}(-\delta(e_2) + \delta(e_3))K_N + \frac{1}{4} K_N^2 = \Delta - \frac{1}{4} K_N^2. \end{aligned}$$

□

Vamos a suponer que la segunda forma fundamental  $II$  de la superficie en  $x$  es tal que  $rango(f_{II}) = 2$ , i.e.  $K_N \neq 0$ . De (2.26) tenemos lo siguiente,

$$\delta(u) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \delta^0(u) = \frac{1}{2} K_N |u|^2. \quad (2.29)$$

El caracter causal de las direcciones asintóticas entonces depende del signo de las formas cuadráticas  $\delta, \delta^0$  y sus discriminantes. Existen dos casos principales, dependiendo de  $disc(\delta)$ . Empecemos analizando el caso en que  $disc(\delta) < 0$ , i.e. cuando están definidas dos direcciones asintóticas distintas; entonces dividimos la discusión en cuatro casos, de acuerdo al signo de  $\delta^0$ .

1-  $disc(\delta^0) > 0$  : si  $\delta^0$  es positivo (resp. negativo), las soluciones  $u$  de (2.29) son necesariamente de tipo espacio (resp. de tipo tiempo) si  $K_N > 0$ , y de tipo tiempo (resp. de tipo espacio) si  $K_N < 0$ .

2-  $disc(\delta^0) < 0$  : denotemos por  $u_{\delta^0}$  el endomorfismo simétrico de  $T_x M$  asociado a  $\delta^0$ ; entonces tenemos  $|u_{\delta^0}|^2 = -\det(u_{\delta^0})$  y en alguna base ortonormal positivamente orientada  $(e_2, e_3)$  de  $T_x M$ , la matriz de  $u_{\delta^0}$  queda

$$M(u_{\delta^0}, (e_2, e_3)) = \pm \sqrt{-|u_{\delta^0}|^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escribiendo  $u = r e_2 + s e_3$ , entonces (2.29) queda

$$\delta(u) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \pm 2\sqrt{-|u_{\delta^0}|^2} r s = K_N (r^2 - s^2). \quad (2.30)$$

Así, si  $u = r e_2 + s e_3$  es una solución no trivial de  $\delta(u) = 0$ , también lo es  $\bar{u} := -s e_2 + r e_3$ . Observe que estas soluciones son necesariamente de tipo espacio o de tipo tiempo, y que si una de ellas es de tipo espacio, la otra es de tipo tiempo; así, una dirección asintótica es de tipo espacio y la otra es de tipo tiempo.

3-  $disc(\delta^0) = 0$ ,  $\delta^0 \neq 0$  : entonces tenemos  $|u_{\delta^0}|^2 = -\det(u_{\delta^0}) = 0$ , y el núcleo de  $u_{\delta^0}$  es una línea nula en  $T_x M$ ; existe así una única línea de tipo luz de soluciones para las ecuaciones en (2.29). La otra solución independiente es así una línea de tipo tiempo o de tipo espacio. Pero, usando nuevamente (2.29), si  $\delta^0 \geq 0$  (resp.  $\delta^0 \leq 0$ ) su solución es necesariamente de tipo espacio (resp. de tipo tiempo) si  $K_N > 0$  y de tipo tiempo (resp. de tipo espacio) si  $K_N < 0$ .

4-  $\delta^0 = 0$  : entonces  $\delta(u) = -K_N |u|^2$ , y  $\delta(u) = 0 \iff |u|^2 = 0$ . Note que  $\vec{H} = 0$  en tal caso: ya que  $K_N \neq 0$ , podemos suponer que la signatura de  $\Phi_{II}$  es  $(1, 1)$ , con

$$(|\vec{H}|^2 - K)^2 - K_N^2 > 0 \quad \text{y} \quad |\vec{H}|^2 - K > 0.$$

Usando (2.23) conseguimos la fórmula intrínseca en términos de los invariantes  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha$  y  $\beta$  :

$$\delta(u) = \pm \mathbf{a}(\beta \pm \mathbf{b})u_1^2 \pm \mathbf{a}(\beta \mp \mathbf{b})u_2^2 \mp \alpha \mathbf{b}u_1 u_2,$$

y por lo tanto,  $\delta^0(u) = \pm \mathbf{a}\beta(u_1^2 + u_2^2) \mp 2\mathbf{b}\alpha u_1 u_2$ . Ya que  $\delta^0 = 0$  y  $K_N = 2\mathbf{a}\mathbf{b} \neq 0$ , conseguimos  $\alpha = \beta = 0$ , *i.e.*  $\vec{H} = 0$ .

A continuación presentamos un cuadro en donde se muestra un resumen del carácter causal de las direcciones asintóticas. Los resultados obtenidos son similares al caso de las superficies de tipo tiempo en el espacio de Minkowski 4-dimensional dados en [9].

Para simplificar la presentación vamos a suponer que  $K_N \geq 0$ ; si  $K_N \leq 0$  se obtiene un resultado análogo, basta cambiar la palabra espacio por tiempo y tiempo por espacio.

Signatura $\delta^0$	$disc(\delta) < 0$ dos direcciones asintóticas (distintas) que son	$disc(\delta) = 0, \delta \neq 0$ una dirección asintótica doble que es
(2,0)	tipo espacio	tipo espacio
(0,2)	tipo tiempo	tipo tiempo
(1,1)	1 tipo espacio - 1 tipo tiempo	No es posible
(1,0)	1 tipo luz - 1 tipo espacio	tipo luz
(0,1)	1 tipo luz - 1 tipo tiempo	tipo luz
(0,0)	tipo luz con $\vec{H} = 0$	No es posible.



## Parte II

# Representación espinorial de superficies Lorentzianas en $\mathbb{R}^{2,2}$



# CAPÍTULO 3

---

## Espinores algebraicos del espacio $\mathbb{R}^{2,2}$

---

En el presente capítulo describiremos los preliminares algebraicos necesarios concernientes a la geometría espinorial del espacio  $\mathbb{R}^{2,2}$ : álgebra de Clifford, grupo espinorial y la representación espinorial. La referencia principal para el estudio de las álgebras de Clifford de espacios vectoriales pseudo Riemannianos, y todos los conceptos introducidos en este capítulo, es el libro de H. B. Lawson y M. L. Michelsohn [36]; véase también el libro de Th. Friedrich [17] para el caso Riemanniano.

Vamos a construir un modelo para el álgebra de Clifford de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , el grupo espinorial y su correspondiente representación espinorial. Para este propósito, veremos que es muy útil y conveniente introducir los números de Lorentz y los cuaternios. Con estas herramientas, el álgebra de Clifford de  $\mathbb{R}^{2,2}$  es caracterizada como una subálgebra de matrices de tamaño  $2 \times 2$  cuyas componentes pertenecen al álgebra de cuaternios con coeficientes en los números de Lorentz complejificados, el grupo espinorial es descrito como una pseudo esfera generalizada y la representación espinorial como una representación matricial usual.

Finalmente, veremos que cada uno de los modelos descritos en este capítulo son isomorfos a los dados en la literatura; una herramienta muy útil para construir estos isomorfismos es el uso de los números de Lorentz.

**Números de Lorentz y cuaternios.** Consideremos los números de Lorentz

$$\mathcal{A} = \{u + \sigma v : u, v \in \mathbb{R}, \sigma \notin \mathbb{R}, \sigma^2 = 1\}$$

(vea algunas referencias en el Apéndice A), y su *complejificación* denotada por

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} := \mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \simeq \{u + \sigma v : u, v \in \mathbb{C}\}.$$



Consideremos también  $\mathbb{H}^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$  el álgebra de los cuaternios con coeficientes en  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  definida por

$$\mathbb{H}^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} := \{\zeta_0 I + \zeta_1 I + \zeta_2 J + \zeta_3 K : \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\},$$

donde  $I, J$  y  $K$  están sujetos a las relaciones

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \quad IJ = -JI = K.$$

Vamos a considerar la subálgebra

$$\mathbb{H}_0 := \{p = p_0 I + ip_1 I + p_2 J + ip_3 K \in \mathbb{H}^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} : p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{A}\} \subset \mathbb{H}^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}};$$

esta subálgebra es conocida como los números para-cuaternios con coeficientes en los números de Lorentz; vea [32]. También consideremos el subespacio vectorial

$$\mathbb{H}_1 := \{q = iq_0 I + q_1 I + iq_2 J + q_3 K \in \mathbb{H}^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{A}\} \subset \mathbb{H}^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}.$$

Note que el producto de un elemento en  $\mathbb{H}_1$  por un elemento de  $\mathbb{H}_0$  está en  $\mathbb{H}_1$ , así, el subespacio  $\mathbb{H}_1$  tiene una estructura natural de  $\mathbb{H}_0$ -módulo; ya que

$$\mathbb{H}^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1, \tag{3.1}$$

el álgebra  $\mathbb{H}^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$  es un álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada.

Para cada  $\zeta = \zeta_0 I + \zeta_1 I + \zeta_2 J + \zeta_3 K \in \mathbb{H}^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$  definamos

$$\widehat{\zeta} := \widehat{\zeta}_0 I + \widehat{\zeta}_1 I + \widehat{\zeta}_2 J + \widehat{\zeta}_3 K, \tag{3.2}$$

donde  $\widehat{\zeta}_j$  significa la conjugación en  $\mathcal{A}$  extendida de manera  $\mathbb{C}$ -lineal sobre  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  (*i.e.* para cada  $\zeta_j = u_j + \sigma v_j \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  tenemos  $\widehat{\zeta}_j = u_j - \sigma v_j$ ); consideremos también la conjugación usual en  $\mathbb{H}^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$  dada por

$$\overline{\zeta} := \zeta_0 I - \zeta_1 I - \zeta_2 J - \zeta_3 K.$$

Estas operaciones son tales que, para cualesquiera  $\zeta, \zeta' \in \mathbb{H}^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$ :

$$\widehat{\zeta\zeta'} = \widehat{\zeta}\widehat{\zeta'} \quad \text{y} \quad \overline{\zeta\zeta'} = \overline{\zeta'}\overline{\zeta}.$$

Finalmente, consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} H : \mathbb{H}^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \times \mathbb{H}^{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} &\longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \\ (\zeta, \zeta') &\longmapsto \frac{\overline{\zeta}\zeta' + \overline{\zeta'}\zeta}{2} = \zeta_0\zeta'_0 + \zeta_1\zeta'_1 + \zeta_2\zeta'_2 + \zeta_3\zeta'_3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde  $\zeta = \zeta_0 I + \zeta_1 I + \zeta_2 J + \zeta_3 K$  y  $\zeta' = \zeta'_0 I + \zeta'_1 I + \zeta'_2 J + \zeta'_3 K$ ; claramente la aplicación  $H$  es  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ -bilineal y simétrica.

### 3.1. El Álgebra de Clifford de $\mathbb{R}^{2,2}$

Denotaremos por  $\mathbb{H}^{\mathcal{A}c}(2)$  al conjunto de matrices  $2 \times 2$  con coeficientes en  $\mathbb{H}^{\mathcal{A}c}$ . Si fijamos la base canónica  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , un vector  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{2,2}$  tiene norma

$$|x|^2 := \langle x, x \rangle = -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2.$$

Consideremos la aplicación de Clifford

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R}^{2,2} &\longrightarrow \mathbb{H}^{\mathcal{A}c}(2) \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & \sigma i x_0 1 + x_1 I + i x_2 J + x_3 K \\ -\sigma i x_0 1 + x_1 I + i x_2 J + x_3 K & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

*i.e.*  $\gamma$  satisfice

$$\gamma(x)^2 = -|x|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El álgebra de Clifford de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , que denotaremos de aquí en adelante por  $Cl(2, 2)$ , es una subálgebra de  $\mathbb{H}^{\mathcal{A}c}(2)$  descrita a continuación. Usando la aplicación de Clifford  $\gamma$  calculamos los elementos de orden uno en el álgebra de Clifford  $Cl(2, 2)$ , estos son

$$\gamma(e_0) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma i \\ -\sigma i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & iJ \\ iJ & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix},$$

Los elementos de orden en dos en  $Cl(2, 2)$  son

$$\begin{aligned} \gamma(e_0)\gamma(e_1) &= \begin{pmatrix} \sigma i I & 0 \\ 0 & -\sigma i I \end{pmatrix}, & \gamma(e_0)\gamma(e_2) &= \begin{pmatrix} -\sigma J & 0 \\ 0 & \sigma J \end{pmatrix}, & \gamma(e_0)\gamma(e_3) &= \begin{pmatrix} \sigma i K & 0 \\ 0 & -\sigma i K \end{pmatrix}, \\ \gamma(e_1)\gamma(e_2) &= \begin{pmatrix} iK & 0 \\ 0 & iK \end{pmatrix}, & \gamma(e_1)\gamma(e_3) &= \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}, & \gamma(e_2)\gamma(e_3) &= \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los elementos de orden tres en  $Cl(2, 2)$  están dados por

$$\begin{aligned} \gamma(e_0)\gamma(e_1)\gamma(e_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma K \\ \sigma K & 0 \end{pmatrix}, & \gamma(e_0)\gamma(e_1)\gamma(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma i J \\ \sigma i J & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma(e_0)\gamma(e_2)\gamma(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma I \\ \sigma I & 0 \end{pmatrix}, & \gamma(e_1)\gamma(e_2)\gamma(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente el elemento de orden cuatro (o elemento volumen) en  $Cl(2, 2)$  es dado por

$$\gamma(e_0)\gamma(e_1)\gamma(e_2)\gamma(e_3) = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}.$$

Usando los elementos de orden dos y cuatro podemos generar la subálgebra de elementos pares  $Cl_0(2, 2) \subset Cl(2, 2)$  dada por

$$Cl_0(2, 2) = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \widehat{p} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^{\text{Ac}}(2) \mid p \in \mathbb{H}_0 \right\} \simeq \mathbb{H}_0; \quad (3.5)$$

análogamente, el subespacio de los elementos impares  $Cl_1(2, 2) \subset Cl(2, 2)$ , generado por los elementos de orden uno y tres, está dado por

$$Cl_1(2, 2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & q \\ \widehat{q} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^{\text{Ac}}(2) : q \in \mathbb{H}_1 \right\} \simeq \mathbb{H}_1. \quad (3.6)$$

Reuniendo (3.5) y (3.6) obtenemos *el álgebra de Clifford* de  $\mathbb{R}^{2,2}$

$$Cl(2, 2) = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ \widehat{q} & \widehat{p} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^{\text{Ac}}(2) : p \in \mathbb{H}_0, q \in \mathbb{H}_1 \right\}.$$

Más adelante mostraremos que este modelo del álgebra de Clifford de  $\mathbb{R}^{2,2}$  es isomorfo al álgebra matricial  $M_4(\mathbb{R})$  como es descrito en [36, pag. 29].

**Observación 3.1.1.** *Con respecto a la descomposición (3.1), existe un isomorfismo de álgebras*

$$\begin{aligned} Cl(2, 2) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 = \mathbb{H}^{\text{Ac}} \\ \begin{pmatrix} p & q \\ \widehat{q} & \widehat{p} \end{pmatrix} &\longleftrightarrow (p, q), \end{aligned}$$

donde el producto sobre  $\mathbb{H}^{\text{Ac}}$  es inducido por el producto sobre  $Cl(2, 2)$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ \widehat{q} & \widehat{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' & q' \\ \widehat{q}' & \widehat{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pp' + qq' & pq' + q\widehat{p}' \\ \widehat{q}p' + \widehat{p}q' & \widehat{q}q' + \widehat{p}\widehat{p}' \end{pmatrix},$$

*i.e.* para cada  $(p, q)$  y  $(p', q') \in \mathbb{H}^{\text{Ac}}$  tenemos

$$(p, q) \cdot (p', q') := (pp' + qq', pq' + q\widehat{p}').$$

Consideremos la inclusión canónica de  $\mathbb{R}^{2,2}$  en  $Cl_1(2, 2)$  (*i.e.* inducida por la aplicación de Clifford  $\gamma$ ) dada explícitamente por

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2,2} &\longrightarrow Cl_1(2, 2) \\ x = (x_0, x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & q \\ \widehat{q} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde  $q := \sigma i x_0 1 + x_1 I + i x_2 J + x_3 K \in \mathbb{H}_1$  es tal que  $q\widehat{q} = \widehat{q}q = -|x|^2$ .

Ya que  $\widehat{q} = -\bar{q}$ , tenemos

$$H(q, q) = \bar{q}q = |x|^2,$$

i.e. la restricción de la aplicación  $H$ , definida en (3.3), al subespacio  $\mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1 \simeq Cl_1(2, 2)$  coincide la métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Consideremos otro vector  $y \in \mathbb{R}^{2,2}$  y escribamos  $\gamma(y) = \begin{pmatrix} 0 & q' \\ \widehat{q}' & 0 \end{pmatrix}$ , donde  $q' \in \mathbb{H}_1$ , entonces tenemos

$$x \cdot y := \gamma(x)\gamma(y) = \begin{pmatrix} q\widehat{q}' & 0 \\ 0 & \widehat{q}q' \end{pmatrix} \simeq q\widehat{q}' \in \mathbb{H}_0$$

y su  $H$ -norma satisface

$$H(x \cdot y, x \cdot y) = H(q\widehat{q}', q\widehat{q}') = H(q, q)H(q', q') = |x|^2|y|^2.$$

Del mismo modo, para una colección de vectores  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{2,2}$  tenemos

$$H(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n, x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = |x_1|^2|x_2|^2 \cdots |x_n|^2, \quad (3.7)$$

donde  $x_i \cdot x_j = \gamma(x_i)\gamma(x_j)$ . Finalmente, la identificación  $x \simeq \gamma(x)$  puede ser escrita como

$$\mathbb{R}^{2,2} \simeq \{\sigma iq_0 1 + q_1 I + iq_2 J + q_3 K \in \mathbb{H}_1 : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\},$$

de un cálculo directo, esto equivale a

$$\mathbb{R}^{2,2} \simeq \left\{ q \in \mathbb{H}_1 : \widehat{q} = -q \right\} \subset \mathbb{H}_1. \quad (3.8)$$

## 3.2. El grupo espinorial

Consideremos la restricción de la aplicación  $H$  (vea (3.3)) a la subálgebra  $\mathbb{H}_0 \simeq Cl_0(2, 2)$  del álgebra de Clifford  $Cl(2, 2)$ , esta viene dada por

$$\begin{aligned} H &:= H|_{\mathbb{H}_0} : \mathbb{H}_0 \times \mathbb{H}_0 \longrightarrow \mathcal{A} \\ (p, p') &\longmapsto p_0 p'_0 - p_1 p'_1 + p_2 p'_2 - p_3 p'_3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $p = p_0 1 + ip_1 I + p_2 J + ip_3 K$  y  $p' = p'_0 1 + ip'_1 I + p'_2 J + ip'_3 K$ .

La aplicación  $H$  (dada en (3.9)) permite definir *el grupo espinorial* como

$$Spin(2, 2) := \{p \in \mathbb{H}_0 : H(p, p) = p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = 1\} \subset Cl_0(2, 2). \quad (3.10)$$

La identidad (3.7) garantiza que esta definición del grupo espinorial  $Spin(2, 2)$  coincide con su definición abstracta.

Mostraremos que el grupo espinorial  $Spin(2, 2)$  es isomorfo al grupo  $Sl_2(\mathbb{R}) \times Sl_2(\mathbb{R})$  como es descrito en [36, pag. 56].

La siguiente observación será de gran utilidad aquí y a lo largo de la tesis.

**Observación 3.2.1.** *Cada elemento  $a = u + \sigma v \in \mathcal{A}$  puede ser escrito de forma única como*

$$a = \frac{1 + \sigma}{2}(u + v) + \frac{1 - \sigma}{2}(u - v),$$

donde los coeficientes en esta expresión satisfacen

$$\left(\frac{1 + \sigma}{2}\right)^2 = \frac{1 + \sigma}{2}, \quad \left(\frac{1 - \sigma}{2}\right)^2 = \frac{1 - \sigma}{2} \quad y \quad \left(\frac{1 + \sigma}{2}\right)\left(\frac{1 - \sigma}{2}\right) = 0. \quad (3.11)$$

Consideremos el conjunto  $M_2(\mathcal{A})$  de las matrices de tamaño  $2 \times 2$  con coeficientes en los números de Lorentz, y

$$Sl_2(\mathcal{A}) := \{P \in M_2(\mathcal{A}) \mid \det(P) = 1\} \subset M_2(\mathcal{A}),$$

el conjunto de matrices con determinante 1.

De la Observación 3.2.1, cada  $P \in M_2(\mathcal{A})$  puede ser escrito (de manera única) como

$$P = \frac{1 + \sigma}{2}P_1 + \frac{1 - \sigma}{2}P_2,$$

donde  $P_1, P_2 \in M_2(\mathbb{R})$  (son matrices  $2 \times 2$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$ ); usando las propiedades en (3.11) obtenemos

$$\det P = \frac{1 + \sigma}{2} \det P_1 + \frac{1 - \sigma}{2} \det P_2.$$

Si suponemos que  $\det P = 1$ , la igualdad de encima se escribe como

$$\frac{1}{2}(\det P_1 + \det P_2) = 1 \quad y \quad \frac{1}{2}(\det P_1 - \det P_2) = 0,$$

de donde  $\det P_1 = \det P_2 = 1$ , *i.e.*  $P_1, P_2 \in Sl_2(\mathbb{R})$ ; tenemos definida así una biyección

$$\begin{aligned} Sl_2(\mathcal{A}) &\longleftrightarrow Sl_2(\mathbb{R}) \times Sl_2(\mathbb{R}) \\ P &\longleftrightarrow (P_1, P_2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Supongamos que  $Q = \frac{1 + \sigma}{2}Q_1 + \frac{1 - \sigma}{2}Q_2 \in Sl_2(\mathcal{A})$ ; ya que

$$P Q = \left(\frac{1 + \sigma}{2}P_1 + \frac{1 - \sigma}{2}P_2\right) \left(\frac{1 + \sigma}{2}Q_1 + \frac{1 - \sigma}{2}Q_2\right) = \frac{1 + \sigma}{2}P_1Q_1 + \frac{1 - \sigma}{2}P_2Q_2,$$

la biyección dada en (3.12) es en efecto un homomorfismo (y por tanto un isomorfismo) de grupos.

**Proposición 3.2.2.** *El grupo espinorial  $Spin(2, 2)$ , definido en (3.10), es isomorfo al grupo  $Sl_2(\mathbb{R}) \times Sl_2(\mathbb{R})$ .*

*Demostración.* Mostraremos que el grupo espinorial  $Spin(2, 2)$  es isomorfo al grupo  $Sl_2(\mathcal{A})$  y usaremos el isomorfismo (3.12) para concluir el resultado.

Para cada  $p = p_01 + ip_1I + p_2J + ip_3K \in Spin(2, 2)$  definamos

$$M_0(p) := \begin{pmatrix} p_0 - p_1 & p_2 - p_3 \\ -p_2 - p_3 & p_0 + p_1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A}), \quad (3.13)$$

que satisface

$$\det M_0(p) = p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = H(p, p) = 1.$$

La aplicación  $M_0 : Spin(2, 2) \rightarrow Sl_2(\mathcal{A})$  es una biyección: la inyectividad es directa. Para mostrar la sobreyectividad, tomemos  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathcal{A})$  y escribamos

$$p := \frac{a+d}{2}1 + i\frac{d-a}{2}I + \frac{b-c}{2}J - i\frac{b+c}{2}K,$$

entonces  $p \in Spin(2, 2)$  y  $M_0(p) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Finalmente, de un cálculo directo conseguimos

$$M_0(p p') = M_0(p)M_0(p'),$$

para cada  $p, p' \in Spin(2, 2)$ ; tenemos así un homomorfismo biyectivo entre el grupo espinorial  $Spin(2, 2)$  y  $Sl_2(\mathcal{A})$ .  $\square$

El isomorfismo construido entre el grupo espinorial  $Spin(2, 2)$  y  $Sl_2(\mathcal{A})$  en la prueba de la Proposición 3.2.2 puede ser visto como un isomorfismo de álgebras que contienen a estos como subgrupos.

**Lema 3.2.3.** *Existe un isomorfismo de álgebras*

$$\mathbb{H}_0 \xrightarrow{\sim} M_2(\mathcal{A}),$$

que asocia a cada  $p = p_01 + ip_1I + p_2J + ip_3K \in \mathbb{H}_0$  la matriz  $M_0(p)$  definida en (3.13). La aplicación  $H$  definida sobre  $\mathbb{H}_0$  coincide con el determinante en  $M_2(\mathcal{A})$ , i.e.

$$H(p, p) = \det M_0(p), \quad (3.14)$$

para todo  $p \in \mathbb{H}_0$ .

De manera similar, con respecto al subespacio  $\mathbb{H}_1 \subset \mathbb{H}^{4c}$  tenemos la siguiente identificación.

**Lema 3.2.4.** *Existe un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$\mathbb{H}_1 \xrightarrow{\sim} iM_2(\mathcal{A}),$$

que asocia a cada  $q = iq_01 + q_1I + iq_2J + q_3K \in \mathbb{H}_1$ , la matriz

$$iM_1(q) := i \begin{pmatrix} q_0 + q_1 & q_2 + q_3 \\ -q_2 + q_3 & q_0 - q_1 \end{pmatrix}.$$

La aplicación  $H$  definida sobre  $\mathbb{H}_1$  coincide con  $-\det$ , i.e.

$$H(q, q) = -\det M_1(q), \tag{3.15}$$

para cada  $q \in \mathbb{H}_1$ .

La relación entre los isomorfismos construídos en los Lemas 3.2.3 y 3.2.4 es la siguiente. Para cada  $p \in \mathbb{H}_0$  y cada  $q \in \mathbb{H}_1$  tenemos  $pq \in \mathbb{H}_1$  y se satisface

$$M_1(pq) = M_0(p)M_1(q) \quad \text{y} \quad M_1(ip) = M_0(p).$$

Por tanto, para cualesquiera  $p, p' \in \mathbb{H}_0$  y  $q, q' \in \mathbb{H}_1$

$$M_1(ip p') = M_0(p)M_0(p') \quad \text{y} \quad M_1(iq q') = M_0(iq)M_1(q') = -M_1(q)M_1(q');$$

además, con respecto a la operación  $\widehat{\phantom{x}}$  (que fue definida en (3.2)) tenemos

$$M_0(\widehat{p}) = \widehat{M_0(p)} \quad \text{y} \quad M_1(\widehat{q}) = \widehat{M_1(q)},$$

donde,  $\widehat{P} \in M_2(\mathcal{A})$  representa la matriz cuyas componentes son las conjugadas en  $\mathcal{A}$  de las componentes de  $P \in M_2(\mathcal{A})$ .

Ahora veremos como los isomorfismos dados en los Lemas 3.2.3 y 3.2.4 permiten establecer un isomorfismo entre el álgebra de Clifford  $Cl(2, 2)$  con el álgebra matricial  $M_4(\mathbb{R})$ .

Usando el isomorfismo de álgebras dado en la Observación 3.1.1, obtenemos el siguiente isomorfismo de álgebras

$$\begin{aligned} Cl(2, 2) &\xrightarrow{\sim} M_2(\mathcal{A}) \oplus iM_2(\mathcal{A}) \\ (p, q) &\longleftrightarrow (M_0(p), iM_1(q)) \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde el producto en el álgebra  $M_2(\mathcal{A}) \oplus iM_2(\mathcal{A})$  viene dado por

$$(P, Q) \cdot (P', Q') = \left( PP' - Q\widehat{Q'}, i \left[ PQ' + Q\widehat{P'} \right] \right); \tag{3.17}$$

vea la Observación 3.1.1 y las relaciones de encima de los isomorfismo  $M_0$  y  $M_1$ .

Ahora, para cualesquiera  $p \in \mathbb{H}_0$  y  $q \in \mathbb{H}_1$ ,  $p + q \simeq (p, q) \in Cl(2, 2)$ , usando (3.14)-(3.15) conseguimos la relación

$$\begin{aligned} H(p + q, p + q) &= H(p, p) + H(q, q) + 2H(p, q) \\ &= \det M_0(p) - \det M_1(q) + 2H(p, q); \end{aligned} \quad (3.18)$$

además, de un cálculo directo

$$2H(p, q) = i\{tr(M_0(p))tr(M_1(q)) - tr(M_0(p)M_1(q))\},$$

así (3.18) queda como

$$H(p + q, p + q) = \det(M_0(p) + iM_1(q)),$$

*i.e.* la aplicación bilineal  $H$  definida sobre  $\mathbb{H}^{Ac} \simeq Cl(2, 2)$  coincide con la aplicación determinante definida sobre el álgebra  $M_2(\mathcal{A}) \oplus iM_2(\mathcal{A})$  vía el isomorfismo de álgebras (3.16).

Por otro lado, consideremos dos matrices  $P, Q \in M_2(\mathcal{A})$ , escribiendo

$$P = \frac{1 + \sigma}{2}P_1 + \frac{1 - \sigma}{2}P_2 \quad y \quad Q = \frac{1 + \sigma}{2}Q_1 + \frac{1 - \sigma}{2}Q_2,$$

donde  $P_1, P_2, Q_1$  y  $Q_2 \in M_2(\mathbb{R})$ , conseguimos

$$(P, iQ) = \frac{1 + \sigma}{2}(P_1, iQ_1) + \frac{1 - \sigma}{2}(P_2, iQ_2) \in M_2(\mathcal{A}) \oplus iM_2(\mathcal{A});$$

para otras matrices  $P'$  y  $Q' \in M_2(\mathcal{A})$ , el producto sobre  $M_2(\mathcal{A}) \oplus iM_2(\mathcal{A})$  dado en (3.17) se escribe como

$$\begin{aligned} (P, iQ) \cdot (P', iQ') &= \frac{1 + \sigma}{2} (P_1P'_1 - Q_1Q'_2, i[P_1Q'_1 + Q_1P'_2]) \\ &\quad + \frac{1 - \sigma}{2} (P_2P'_2 - Q_2Q'_1, i[P_2Q'_2 + Q_2P'_1]), \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde

$$P' = \frac{1 + \sigma}{2}P'_1 + \frac{1 - \sigma}{2}P'_2 \quad y \quad Q' = \frac{1 + \sigma}{2}Q'_1 + \frac{1 - \sigma}{2}Q'_2,$$

con  $P'_1, P'_2, Q'_1$  y  $Q'_2 \in M_2(\mathbb{R})$ .

Con la notación del parrafo anterior podemos mostrar el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.5.** *La siguiente aplicación*

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{A}) \oplus iM_2(\mathcal{A}) &\longrightarrow M_4(\mathbb{R}) \\ (P, Q) &\longmapsto \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ -Q_2 & P_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

*es un isomorfismo de álgebras, donde el álgebra  $M_2(\mathcal{A}) \oplus iM_2(\mathcal{A})$  está equipado con el producto dado en (3.19) y  $M_4(\mathbb{R})$  está equipado con el producto matricial usual.*



*Demostración.* Claramente la aplicación es un isomorfismo de espacios vectoriales. Escribiendo

$$(P, iQ) \simeq \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ -Q_2 & P_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (P', iQ') \simeq \begin{pmatrix} P'_1 & Q'_1 \\ -Q'_2 & P'_2 \end{pmatrix},$$

el producto definido en (3.19) garantiza

$$(P, iQ) \cdot (P', iQ') \simeq \begin{pmatrix} P_1P'_1 - Q_1Q'_2 & P_1Q'_1 + Q_1P'_2 \\ -(P_2Q'_2 + Q_2P'_1) & P_2P'_2 - Q_2Q'_1 \end{pmatrix}$$

como queríamos.  $\square$

La Proposición 3.2.5 junto con el isomorfismo de álgebras (3.16) entre el álgebra de Clifford  $Cl(2, 2)$  y el álgebra  $M_2(\mathcal{A}) \oplus iM_2(\mathcal{A})$  establecen el resultado ya conocido; vea [36, pag. 29].

**Corolario 3.2.6.** *El álgebra de Clifford  $Cl(2, 2)$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$  es isomorfo al álgebra matricial  $M_4(\mathbb{R})$ .*

**El cubriente doble  $Spin(2, 2) \rightarrow SO(2, 2)$ .** En este apartado vamos a mostrar que el grupo espinorial  $Spin(2, 2) \subset Cl_0(2, 2)$  es el cubriente doble no trivial del grupo de isometrías  $SO(2, 2)$  del espacio  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Recordemos que el grupo semi-ortogonal  $O(2, 2)$  es el grupo de aplicaciones lineales de  $\mathbb{R}^{2,2}$  que preservan la métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Como es descrito en [43, pag. 237], este grupo consta de cuatro componentes conexas; la componente conexa de la identidad  $SO(2, 2)$  es el subgrupo de  $O(2, 2)$  de isometrías de  $\mathbb{R}^{2,2}$  que preservan la orientación en espacio y tiempo. Además, fijando la base canónica de  $\mathbb{R}^{2,2}$  podemos escribir

$$SO(2, 2) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & * & a_{13} & * \\ * & b_{22} & * & b_{24} \\ a_{31} & * & a_{33} & * \\ * & b_{42} & * & b_{44} \end{pmatrix} \in O(2, 2) : \det(a_{ij}) > 0, \det(b_{ij}) > 0 \right\},$$

donde  $*$  denota un número real cualquiera.

**Lema 3.2.7.** *Para cada  $p \in Spin(2, 2)$  y  $q \in \mathbb{R}^{2,2}$  tenemos  $pq(\widehat{p})^{-1} \in \mathbb{R}^{2,2}$ ; además, se satisface*

$$|pq(\widehat{p})^{-1}|^2 = |q|^2.$$

La prueba de este lema es sencilla: la condición  $\bar{p}p = 1$ , implica  $(\widehat{p})^{-1} = \widehat{\bar{p}} = \overline{\widehat{p}}$ , por tanto

$$\overline{\left( p \ q \ \widehat{\bar{p}} \right)} = \widehat{p} \ \bar{q} \ \bar{p} = -\widehat{p} \ \widehat{q} \ \bar{p} = -\left( p \ q \ \widehat{\widehat{p}} \right),$$

y (3.8) implica el resultado. La norma de este vector satisface

$$|pq(\widehat{p})^{-1}|^2 = H(pq(\widehat{p})^{-1}, pq(\widehat{p})^{-1}) = H(q, q) = |q|^2.$$

**Lema 3.2.8.** Para cada  $p \in Spin(2, 2)$ , la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2,2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2,2} \\ q &\longmapsto pq(\widehat{p})^{-1} \end{aligned}$$

es una transformación de  $SO(2, 2)$ .

Usando los lemas anteriores podemos definir la aplicación  $\Phi : Spin(2, 2) \longrightarrow SO(2, 2)$  que asocia a cada  $p \in Spin(2, 2)$ , la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \Phi(p) : \mathbb{R}^{2,2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2,2} \\ q &\longmapsto pq(\widehat{p})^{-1}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

La aplicación  $\Phi$  es un homomorfismo de grupos: dados  $p, p' \in Spin(2, 2)$  y  $q \in \mathbb{R}^{2,2}$  tenemos

$$\Phi(pp')q = (pp')q(\widehat{pp'})^{-1} = p(p'q(\widehat{p}')^{-1})(\widehat{p})^{-1} = \Phi(p) \circ \Phi(p')q.$$

Por otro lado, supongamos  $p \in Ker(\Phi) \subset Spin(2, 2)$ , *i.e.*  $\Phi(p)q = q$ , para todo  $q \in \mathbb{R}^{2,2}$ , o equivalentemente

$$pq = q\widehat{p}, \text{ para todo } q \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

Escribamos  $p = p_0I + ip_1I + p_2J + ip_3K \in Spin(2, 2)$  y tomemos inicialmente  $q = e_0 \simeq \sigma i1$  esto implica que las componentes de  $p$  son reales, *i.e.*  $p_i \in \mathbb{R}$ , para  $i = 0, 1, 2, 3$ . Por otro lado, tomando  $q = e_1 \simeq I$ , obtenemos  $p_2 = p_3 = 0$ . La elección  $q = e_2 \simeq iJ$  implica  $p_1 = 0$ . Por tanto,  $p = p_01$  con  $p_0 \in \mathbb{R}$ . Ya que  $p_0^2 = H(p, p) = 1$ , se tiene  $p = \pm 1$ . Así,  $Ker(\Phi) = \{+1, -1\}$ , y hemos demostrado la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.9.** El homomorfismo de grupos

$$\Phi : Spin(2, 2) \longrightarrow SO(2, 2)$$

definido en (3.20), es el cubriente doble no trivial de  $SO(2, 2)$ .

**El álgebra del Lie del grupo espinorial.** El álgebra de Lie de  $Spin(2, 2)$  está definido por

$$\mathfrak{spin}(2, 2) := T_1Spin(2, 2).$$

Ya que  $Spin(2, 2) = H^{-1}(1)$ , donde la aplicación  $H : \mathbb{H}_0 \rightarrow \mathcal{A}$  es tal que  $H(p) = H(p, p)$ , el espacio tangente en  $1 \in Spin(2, 2)$  es dado por

$$T_1Spin(2, 2) = \ker dH_1 = \ker(p \mapsto H(p, 1)),$$

por lo tanto,

$$\mathfrak{spin}(2, 2) = i\mathcal{A}I \oplus \mathcal{A}J \oplus i\mathcal{A}K \subset \mathbb{H}_0.$$

Consideremos la base real  $\{e_i \cdot e_j : i < j : i, j = 0, 1, 2, 3\}$  del álgebra de Lie  $\mathfrak{spin}(2, 2)$ . Estamos interesados en dar una expresión explícita para el término

$$\Phi_*(e_i \cdot e_j)$$

donde  $\Phi_* : \mathfrak{spin}(2, 2) \rightarrow \mathfrak{so}(2, 2)$  es la derivada del cubriente doble  $\Phi$  en la identidad  $1$  de  $Spin(2, 2)$ .

El álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(2, 2)$  del grupo de isometrías  $SO(2, 2)$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$  está dada por

$$\mathfrak{so}(2, 2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & -a & b \\ x & 0 & c & -d \\ a & c & 0 & y \\ b & d & y & 0 \end{pmatrix} : x, y, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definamos para  $0 \leq i < j \leq 3$  la matriz  $A_{ij}$ , cuyo valor en la componente  $(i, j)$  es  $-1$ , en la componente  $(j, i)$  es igual a  $(-1)^{i+j}$  y que en todas las otras entradas es igual a cero; por ejemplo

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente el siguiente resultado es válido.

**Lema 3.2.10.** *La colección de matrices  $\{A_{ij} : 0 \leq i < j \leq 3\}$  es una base real para el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(2, 2)$ .*

**Proposición 3.2.11.** *La derivada en la identidad  $1 \in Spin(2, 2)$*

$$\Phi_* : \mathfrak{spin}(2, 2) \rightarrow \mathfrak{so}(2, 2)$$

*del cubriente doble  $\Phi$  definido en (3.20), satisface*

$$\Phi_*(e_i \cdot e_j) = 2\epsilon_j A_{ij},$$

*para cualesquiera  $0 \leq i < j \leq 3$ , donde  $\epsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle$ .*

*Demostración.* Vamos a distinguir dos casos.

a)  $i + j$  impar. La propiedad que caracteriza a este caso es el hecho que los vectores  $e_i$  y  $e_j$  tienen caracter causal diferente. Consideremos la curva

$$t \mapsto \cosh(t)1 + \sinh(t)e_i \cdot e_j \in Spin(2, 2).$$

Directamente de la definición podemos calcular la matriz

$$\Phi(\cosh(t)1 + \sinh(t)e_i \cdot e_j) = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cosh(2t) & \cdots & -\epsilon_j \sinh(2t) & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & (-1)^{i+j} \epsilon_j \sinh(2t) & \cdots & \cosh(2t) & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

b)  $i + j$  par. A diferencia del caso anterior, el caracter causal de los vectores  $e_i$  y  $e_j$  es el mismo. En este caso consideremos la curva

$$t \longmapsto \cos(t)1 + \sin(t)e_i \cdot e_j \in Spin(2, 2).$$

De un cálculo tenemos

$$\Phi(\cos(t)1 + \sin(t)e_i \cdot e_j) = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cos(2t) & \cdots & -\epsilon_j \sin(2t) & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & (-1)^{i+j} \epsilon_j \sin(2t) & \cdots & \cos(2t) & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Los elementos no especificados en ambos casos son iguales a cero. De un cálculo directo obtenemos la prueba de la proposición.  $\square$

### 3.3. La representación espinorial

La subálgebra  $\mathbb{H}_0$  posee una estructura compleja que consiste en la multiplicación por la derecha por el elemento  $J$ , *i.e.* consideremos el endomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_0 &\longrightarrow \mathbb{H}_0 \\ \xi &\longmapsto \xi J, \end{aligned}$$

tal que  $(\xi J)J = -\xi$ , para todo  $\xi \in \mathbb{H}_0$ . De aquí en adelante, esta es la estructura compleja que consideraremos sobre el espacio  $\mathbb{H}_0$ .

Notemos que la subálgebra  $\mathbb{H}_0$  puede ser escrita como

$$\mathbb{H}_0 = (\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}J) + iI(\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}J) + \sigma [(\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}J) + iI(\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}J)],$$

por tanto, como espacio vectorial complejo  $\mathbb{H}_0$  tiene dimensión 4.

En lo que sigue vamos a describir la representación espinorial de  $Spin(2, 2)$ .

Existe una acción natural del álgebra de Clifford  $Cl(2, 2)$  sobre  $\mathbb{H}_0$  que describimos a continuación. Consideremos el vector

$$e_0 \simeq \begin{pmatrix} 0 & \sigma i 1 \\ -\sigma i 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y el isomorfismo de álgebras sobre  $Cl(2, 2)$  que consiste en la multiplicación por la derecha por el vector  $e_0$ ,

$$\begin{pmatrix} p & q \\ \widehat{q} & \widehat{p} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p & q \\ \widehat{q} & \widehat{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma i 1 \\ -\sigma i 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma i q & \sigma i p \\ \widehat{\sigma i p} & -\widehat{\sigma i q} \end{pmatrix}.$$

Ya que  $e_0^2 = 1$ , este isomorfismo separa el álgebra de Clifford  $Cl(2, 2)$  en dos eigenspacios vectoriales correspondientes a los eigenvalores  $+1$  y  $-1$ , el eigenspacio con eigenvalor  $-1$  viene dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} \xi & -\sigma i \xi \\ \sigma i \widehat{\xi} & \widehat{\xi} \end{pmatrix} \in Cl(2, 2) \mid \xi \in \mathbb{H}_0 \right\} \simeq \mathbb{H}_0. \quad (3.21)$$

Definamos la aplicación

$$\rho : Cl(2, 2) \longrightarrow End(\mathbb{H}_0),$$

que asocia a cada  $\begin{pmatrix} p & q \\ \widehat{q} & \widehat{p} \end{pmatrix} \in Cl(2, 2)$  el endomorfismo sobre  $\mathbb{H}_0$  dado por

$$\xi \simeq \begin{pmatrix} \xi & -\sigma i \xi \\ \sigma i \widehat{\xi} & \widehat{\xi} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p & q \\ \widehat{q} & \widehat{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & -\sigma i \xi \\ \sigma i \widehat{\xi} & \widehat{\xi} \end{pmatrix} \simeq p\xi + \sigma i q \widehat{\xi}. \quad (3.22)$$

donde las identificaciones son dadas en (3.21).

**Proposición 3.3.1.** *La aplicación  $\rho : Cl(2, 2) \longrightarrow End(\mathbb{H}_0)$ , definida por (3.22), es una representación compleja, inyectiva e irreducible del álgebra de Clifford  $Cl(2, 2)$ .*

*Demostración.* Por definición  $\rho$  es una representación compleja del álgebra de Clifford  $Cl(2, 2)$ , i.e. conmuta con la estructura compleja de  $\mathbb{H}_0$ . Supongamos que  $\begin{pmatrix} p & q \\ \widehat{q} & \widehat{p} \end{pmatrix} \in \ker \rho$ , esto es equivalente a

$$p\xi + \sigma i q \widehat{\xi} = \xi,$$

para cada  $\xi \in \mathbb{H}_0$ : tomando  $\xi = 1$  (resp.  $\xi = \sigma 1$ ) obtenemos  $p = 1 - \sigma i q$  (resp.  $p = 1 + \sigma i q$ ), esto implica  $q = 0$  y  $p = 1$ , así  $\rho$  es inyectiva.

Finalmente, cualquier subespacio invariante y no trivial de  $\mathbb{H}_0$ , contiene necesariamente un vector (o la suma de vectores) de la base real canónica de  $\mathbb{H}_0$ , ya que la representación tiene la forma  $\xi \mapsto p\xi + \sigma i q \widehat{\xi}$ , con  $p \in \mathbb{H}_0$  y  $q \in \mathbb{H}_1$ , podemos generar toda la base real al hacer variar  $p$  y  $q$ , y que por la invarianza deberá pertenecer a dicho subespacio, de esta manera este subespacio necesariamente es todo  $\mathbb{H}_0$ .  $\square$

La *representación espinorial* del grupo espinorial  $Spin(2, 2)$  es dada por la restricción de  $\rho$  a  $Spin(2, 2) \subset Cl_0(2, 2) \simeq \mathbb{H}_0$ ; esta restricción viene dada explícitamente por

$$\begin{aligned} \rho : Spin(2, 2) &\longrightarrow End_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}_0) \\ p &\longmapsto (\xi \in \mathbb{H}_0 \longmapsto p\xi \in \mathbb{H}_0). \end{aligned} \tag{3.23}$$

La representación espinorial en este modelo es dada por la multiplicación por la izquierda sobre un álgebra: la estructura de álgebra permitirá escribir fórmulas de representación explícita.

En la Proposición 3.2.2 probamos que los grupos  $Spin(2, 2)$  y  $Sl_2(\mathbb{R}) \times Sl_2(\mathbb{R})$  son isomorfos. En lo que sigue probaremos que la representación espinorial de  $Spin(2, 2)$  sobre el espacio  $\mathbb{H}_0$  (definida en (3.23)) es equivalente a la representación producto tensorial del grupo  $Sl_2(\mathbb{R}) \times Sl_2(\mathbb{R})$  sobre  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Como hicimos en la prueba de la Proposición 3.2.2, el paso intermedio es considerar el grupo  $Sl_2(\mathcal{A})$  y su representación canónica.

Recordemos que las representaciones complejas canónicas de los grupos  $Sl_2(\mathcal{A})$  y  $Sl_2(\mathbb{R})$  vienen dadas por

$$\begin{aligned} Sl_2(\mathbb{K}) &\longrightarrow End_{\mathbb{C}}(\mathbb{K}_{\mathbb{C}}^2) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \left( \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

donde  $\mathbb{K} = \mathcal{A}$ , o  $\mathbb{R}$ , y  $\mathbb{K}_{\mathbb{C}} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ , o  $\mathbb{C}$ , denota su complejificación respectivamente. Recordemos el isomorfismo entre los grupos  $Sl_2(\mathcal{A})$  y  $Sl_2(\mathbb{R}) \times Sl_2(\mathbb{R})$  dado en (3.12).

**Lema 3.3.2.** *Existe un isomorfismo entre los espacios vectoriales complejos  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2$  y  $\mathbb{C}^4 \simeq \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  que hace conmutativo al siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} Sl_2(\mathcal{A}) & \longrightarrow & End_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sl_2(\mathbb{R}) \times Sl_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4) \end{array}$$

*Demostración.* Como hicimos en la Observación 3.2.1, cada elemento  $u + \sigma v \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  (aquí,  $u, v \in \mathbb{C}$ ), puede ser escrito de manera única como

$$u + \sigma v = \frac{1 + \sigma}{2}(u + v) + \frac{1 - \sigma}{2}(u - v);$$

de la misma manera podemos descomponer los elementos de  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2$ . Consideremos la aplicación

$$\Phi : \begin{pmatrix} u + \sigma v \\ u' + \sigma v' \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2 \longmapsto \begin{pmatrix} u + v \\ u' + v' \\ u - v \\ u' - v' \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Es fácil ver que  $\Phi$  es un isomorfismo de espacios vectoriales complejos; además, para cada

$$P = \frac{1 + \sigma}{2}P_1 + \frac{1 - \sigma}{2}P_2 \in Sl_2(\mathcal{A}),$$

el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2 & \xrightarrow{P} & \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2 \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \mathbb{C}^4 & \xrightarrow{(P_1, P_2)} & \mathbb{C}^4 \end{array}$$

es conmutativo. En el diagrama,  $P$  denota a su representación y la aplicación  $(P_1, P_2)$  opera como la matriz  $\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$  sobre  $\mathbb{C}^4$ .  $\square$

Ahora, con respecto al isomorfismo dado en la Proposición 3.2.2 entre los grupos  $Spin(2, 2)$  y  $Sl_2(\mathcal{A})$  tenemos lo siguiente.

**Lema 3.3.3.** *Existe un isomorfismo entre los espacios vectoriales complejos  $\mathbb{H}_0$  y  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2$ , tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} Spin(2, 2) & \xrightarrow{\rho} & End_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sl_2(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\quad} & End_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2) \end{array}$$

es conmutativo.

*Demostración.* Consideremos la aplicación  $\Psi : \mathbb{H}_0 \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2$  definida por

$$\Psi(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_0 - \xi_1 + i(\xi_2 - \xi_3) \\ -\xi_2 - \xi_3 + i(\xi_0 + \xi_1) \end{pmatrix}$$

para cada  $\xi = \xi_0 1 + i\xi_1 I + \xi_2 J + i\xi_3 K \in \mathbb{H}_0$ . Observemos que  $\Psi$  es un isomorfismo de espacios vectoriales complejos y de un cálculo directo tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_0 & \xrightarrow{\rho(p)} & \mathbb{H}_0 \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2 & \xrightarrow{M_0(p)} & \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2 \end{array}$$

es conmutativo, para cada  $p \in Spin(2, 2)$ . Aquí  $M_0(p) \in Sl_2(\mathcal{A})$  fue definido en (3.13), y nuevamente con abuso de notación,  $M_0(p) : \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2$  denota su representación.  $\square$

Como consecuencia de los lemas anteriores tenemos

**Proposición 3.3.4.** *Existe un isomorfismo entre los espacio vectoriales  $\mathbb{H}_0$  y  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  que hace equivalentes a la representación espinorial de  $Spin(2, 2)$  y a la representación canónica de  $Sl_2(\mathbb{R}) \times Sl_2(\mathbb{R})$ .*

**La descomposición de la representación espinorial.** El endomorfismo

$$\rho(\sigma 1) : \xi \in \mathbb{H}_0 \longmapsto \sigma \xi \in \mathbb{H}_0$$

satisface  $\rho(\sigma 1)^2 = Id_{\mathbb{H}_0}$ , por tanto separa a la subálgebra  $\mathbb{H}_0$  en dos eigenspacios correspondientes a los eigenvalores  $+1$  y  $-1$ ,

$$\mathbb{H}_0 = S^+ \oplus S^-,$$

donde

$$S^+ := \{\xi \in \mathbb{H}_0 \mid \sigma \xi = \xi\} \quad \text{y} \quad S^- := \{\xi \in \mathbb{H}_0 \mid \sigma \xi = -\xi\}. \quad (3.24)$$

Más explícitamente, estos subespacios están dados por

$$S^+ = (1 + \sigma) [(\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}J) + iI(\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}J)] \quad \text{y} \quad S^- = (1 - \sigma) [(\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}J) + iI(\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}J)], \quad (3.25)$$

de donde  $\dim_{\mathbb{C}}(S^{\pm}) = 2$ .

Los subespacios  $S^+, S^-$  son invariantes por la representación espinorial: basta notar que  $\sigma 1$  conmuta con los elementos pares  $Cl_0(2, 2)$  del álgebra de Clifford, en particular,  $\sigma 1$  conmuta con los elementos de  $Spin(2, 2)$ ; así, para cualquier  $p \in Spin(2, 2)$

$$\sigma(\rho(p)\xi) = \sigma(p\xi) = p(\sigma\xi) = \rho(p)(\sigma\xi) = \pm\rho(p)\xi,$$

para cada  $\xi \in S^{\pm}$ . Por tanto, la representación espinorial  $\rho$  se divide en dos representaciones

$$\rho =: \rho^+ \oplus \rho^- : Spin(2, 2) \rightarrow End_{\mathbb{C}}(S^+) \oplus End_{\mathbb{C}}(S^-). \quad (3.26)$$

**Lema 3.3.5.** *Las representaciones  $\rho^{\pm} : Spin(2, 2) \rightarrow End_{\mathbb{C}}(S^{\pm})$  son irreducibles y no equivalentes.*

*Demostración.* Para mostrar que las representaciones  $\rho^+$  y  $\rho^-$  no son equivalentes, supongamos por el contrario que exista  $\phi : S^+ \rightarrow S^-$  un isomorfismo de espacios vectoriales tal que

$$\begin{array}{ccc} S^+ & \xrightarrow{\rho^+(p)} & S^+ \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ S^- & \xrightarrow{\rho^-(p)} & S^- \end{array}$$

es conmutativo, para cada  $p \in Spin(2, 2)$ . En particular, para  $\sigma 1 \in Spin(2, 2)$  y  $\xi \in S^+$ , se tiene  $\phi(\xi) = \phi(\sigma\xi) = \sigma\phi(\xi) = -\phi(\xi)$ , luego  $\phi \equiv 0$ , una contradicción.  $\square$

Para referencias posteriores remarcamos la propiedad utilizada en esta prueba.

**Observación 3.3.6.** *El elemento volumen  $e_0 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \simeq \sigma$  del álgebra de Clifford  $Cl(2, 2)$ , actúa como  $+Id$  sobre  $S^+$  y como  $-Id$  sobre  $S^-$ .*



## Espinores bajo la separación $\mathbb{R}^{2,2} = \mathbb{R}^{1,1} \times \mathbb{R}^{1,1}$

Consideremos la separación  $\mathbb{R}^{2,2} = \mathbb{R}^{1,1} \times \mathbb{R}^{1,1}$  de modo que la métrica correspondiente a cada factor viene dado por  $-dx_0^2 + dx_1^2$  y  $-dx_2^2 + dx_3^2$  respectivamente. Con respecto a esta separación tenemos la correspondiente inclusión de grupos de isometrías

$$\begin{aligned} SO(1,1) \times SO(1,1) &\subset SO(2,2) \\ (g_1, g_2) &\mapsto \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El objetivo es describir el cubriente doble del grupo de estructura  $SO(1,1) \times SO(1,1)$  inducido por  $\Phi$  (el cubriente doble de  $SO(2,2)$  definido en (3.20)), *i.e.* caracterizar el subgrupo

$$\Phi^{-1}(SO(1,1) \times SO(1,1)) \subset Spin(2,2).$$

Para esto, vamos a introducir algunas aplicaciones  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  (todas ellas consideradas en [14, 27]) que nos permitan dar una descripción más sencilla de dicho subgrupo. Fijemos  $a = u + \sigma v \in \mathcal{A}$  y notemos que el polinomio  $\mathcal{A}$ -valuado  $1 + a + a^2 + \dots + a^n$  se encuentra bien definido; escribiendo (como en la Observación 3.2.1)

$$a = \frac{1 + \sigma}{2}(u + v) + \frac{1 - \sigma}{2}(u - v)$$

y usando (3.11), tenemos para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = \frac{1 + \sigma}{2}(u + v)^n + \frac{1 - \sigma}{2}(u - v)^n;$$

así, podemos escribir sin ambigüedad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} := \frac{1 + \sigma}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u + v)^n}{n!} + \frac{1 - \sigma}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u - v)^n}{n!}.$$

Definamos la aplicación exponencial

$$\begin{aligned} e : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ a &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \end{aligned}$$

que satisface por definición

$$e^a = \frac{1 + \sigma}{2} e^{u+v} + \frac{1 - \sigma}{2} e^{u-v}, \quad (3.27)$$

donde  $a = \frac{1+\sigma}{2}(u + v) + \frac{1-\sigma}{2}(u - v)$  y donde  $e^{u \pm v}$  es la aplicación exponencial usual de números reales.

La aplicación exponencial  $e : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  nos permite definir las funciones hiperbólicas como en el caso complejo: definimos las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico  $\mathcal{A}$ -valuadas por

$$\cosh(a) := \frac{e^a + e^{-a}}{2} \quad \text{y} \quad \sinh(a) := \frac{e^a - e^{-a}}{2}.$$

Usando la identidad (3.27) conseguimos

$$\cosh(a) = \frac{1+\sigma}{2} \cosh(u+v) + \frac{1-\sigma}{2} \cosh(u-v) \quad \text{y} \quad \sinh(a) = \frac{1+\sigma}{2} \sinh(u+v) + \frac{1-\sigma}{2} \sinh(u-v),$$

siendo  $\cosh(u \pm v)$  y  $\sinh(u \pm v)$  las funciones hiperbólicas reales. Además, usando las propiedades de las funciones hiperbólicas reales, podemos mostrar

$$\cosh(a) = \cosh(u) \cosh(v) + \sigma \sinh(u) \sinh(v) \quad \text{y} \quad \sinh(a) = \sinh(u) \cosh(v) + \sigma \cosh(u) \sinh(v). \quad (3.28)$$

Usando la definición de  $\Phi$ , de un cálculo directo tenemos

$$\Phi^{-1}(SO(1, 1) \times SO(1, 1)) = \{\pm(\cosh(a)1 + \sinh(a)iI) \mid a \in \mathcal{A}\} =: S_{\mathcal{A}}^1 \subset Spin(2, 2);$$

más explícitamente, escribiendo  $a = u + \sigma v \in \mathcal{A}$ , de (3.28) conseguimos

$$\cosh(a)1 + \sinh(a)iI = (\cosh(v)1 + \sigma \sinh(v)iI) \cdot (\cosh(u)1 + \sinh(u)iI), \quad (3.29)$$

y no es difícil calcular

$$\Phi(\pm(\cosh(a)1 + \sinh(a)iI)) = \begin{pmatrix} \cosh(2v) & -\sinh(2v) & 0 & 0 \\ -\sinh(2v) & \cosh(2v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(2u) & -\sinh(2u) \\ 0 & 0 & -\sinh(2u) & \cosh(2u) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,  $\Phi(\pm(\cosh(a)1 + \sinh(a)iI))$  es la transformación de  $\mathbb{R}^{2,2}$  que consiste en la transformación de Lorentz de ángulo  $-2v$  y  $-2u$  en cada factor  $\mathbb{R}^{1,1}$  respectivamente.

Escribiendo

$$Spin'(1, 1) := \{\pm(\cosh(v)1 + \sinh(v)\sigma iI) \mid v \in \mathbb{R}\}, \quad (3.30)$$

$$Spin''(1, 1) := \{\pm(\cosh(u)1 + \sinh(u)iI) \mid u \in \mathbb{R}\}, \quad (3.31)$$

la igualdad (3.29) implica

$$S_{\mathcal{A}}^1 = Spin'(1, 1) \cdot Spin''(1, 1) = Spin'(1, 1) \times_{\mathbb{Z}_2} Spin''(1, 1),$$

y tenemos el cubriente doble

$$\Phi : S_{\mathcal{A}}^1 \longrightarrow SO(1, 1) \times SO(1, 1).$$

La restricción de las representaciones espinoriales irreducibles  $\rho^\pm$  (definidas en (3.26)) al subgrupo  $S_{\mathcal{A}}^1 \subset Spin(2, 2)$ ,

$$\rho^\pm : S_{\mathcal{A}}^1 \subset Spin(2, 2) \rightarrow End_{\mathbb{C}}(S^\pm), \quad (3.32)$$

se dividen, cada una de ellas, en dos representaciones irreducibles no equivalentes como es descrito a continuación. Consideremos

$$S^{++} := \{\xi \in S^+ \mid iI\xi = \xi\} \quad \text{y} \quad S^{--} := \{\xi \in S^+ \mid iI\xi = -\xi\}; \quad (3.33)$$

los subespacios  $S^{++}, S^{--}$  son invariantes por la representación  $\rho^+$  (ya que  $iI$  conmuta con cada elemento de  $S_{\mathcal{A}}^1$ ) y satisfacen

$$S^+ = S^{++} \oplus S^{--};$$

así, la representación  $\rho^+$  se divide en la suma de dos representaciones

$$\rho^+ =: \rho^{++} \oplus \rho^{--} : S_{\mathcal{A}}^1 \rightarrow End_{\mathbb{C}}(S^{++}) \oplus End_{\mathbb{C}}(S^{--}). \quad (3.34)$$

Podemos calcular de manera explícita las representaciones

$$\rho^{++} : S_{\mathcal{A}}^1 \rightarrow End_{\mathbb{C}}(S^{++}) \quad \text{y} \quad \rho^{--} : S_{\mathcal{A}}^1 \rightarrow End_{\mathbb{C}}(S^{--}) :$$

si  $\xi \in S^+$ , tenemos

$$\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\xi = \xi \quad \text{y} \quad \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\xi = 0;$$

más aún, si  $\xi \in S^{++} \subset S^+$  tenemos  $iI\xi = \xi$ , por tanto, para cada  $a = u + \sigma v \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \rho^{++}(\pm(\cosh(a)1 + \sinh(a)iI))\xi &= \pm(\cosh(a)1 + \sinh(a)iI)\xi \\ &= \pm e^a \xi \\ &= \pm \left( \frac{1+\sigma}{2} e^{u+v} + \frac{1-\sigma}{2} e^{u-v} \right) \xi \\ &= \pm e^{u+v} \xi; \end{aligned}$$

por otro lado, si suponemos  $\xi \in S^{--} \subset S^+$  tenemos  $iI\xi = -\xi$ , y así

$$\begin{aligned} \rho^{--}(\pm(\cosh(a)1 + \sinh(a)iI))\xi &= \pm(\cosh(a)1 + \sinh(a)iI)\xi \\ &= \pm e^{-a} \xi \\ &= \pm \left( \frac{1+\sigma}{2} e^{-u-v} + \frac{1-\sigma}{2} e^{-u+v} \right) \xi \\ &= \pm e^{-(u+v)} \xi, \end{aligned}$$

para cada  $a = u + \sigma v \in \mathcal{A}$ . Así, las representaciones  $\rho^{++}, \rho^{--}$  de  $S_{\mathcal{A}}^1$  sobre  $S^{++}$  y  $S^{--}$  respectivamente, son irreducibles y no equivalentes.

De manera similar, en el caso de la representación  $\rho^-$  de  $S_{\mathcal{A}}^1$ , los subespacios

$$S^{+-} := \{\xi \in S^- \mid iI\xi = -\xi\} \quad \text{y} \quad S^{-+} := \{\xi \in S^- \mid iI\xi = \xi\} \quad (3.35)$$

son invariantes bajo  $\rho^-$  y satisfacen  $S^- = S^{+-} \oplus S^{-+}$ . Así, la representación  $\rho^-$  se divide en la suma de dos representaciones

$$\rho^- =: \rho^{+-} \oplus \rho^{-+} : S_{\mathcal{A}}^1 \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(S^{+-}) \oplus \text{End}_{\mathbb{C}}(S^{-+}), \quad (3.36)$$

dadas explícitamente por

$$\rho^{+-}(\pm(\cosh(a)1 + \sinh(a)iI)) : \xi \in S^{+-} \longrightarrow \pm e^{-(u-v)}\xi \in S^{+-}$$

y

$$\rho^{-+}(\pm(\cosh(a)1 + \sinh(a)iI)) : \xi \in S^{-+} \longrightarrow \pm e^{u-v}\xi \in S^{-+};$$

las representaciones  $\rho^{+-}$  y  $\rho^{-+}$  son irreducibles y no equivalentes.

Con respecto a las expresiones explícitas dadas en (3.25) de los subespacios  $S^+$  y  $S^-$  de  $\mathbb{H}_0$ , los subespacios definidos en (3.33) y (3.35) se escriben como

$$\begin{aligned} S^{++} &= (1 + \sigma)(1 + iI)(\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}J), & S^{--} &= (1 + \sigma)(1 - iI)(\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}J), \\ S^{+-} &= (1 - \sigma)(1 - iI)(\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}J), & S^{-+} &= (1 - \sigma)(1 + iI)(\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}J), \end{aligned} \quad (3.37)$$

i.e. estos subespacios son rectas complejas de  $\mathbb{H}_0$ .

**Observación 3.3.7.** *El elemento  $e_0 \cdot e_1 \simeq \sigma iI$  actúa como  $+Id$  sobre  $S^{++}$  y sobre  $S^{+-}$ , y actúa como  $-Id$  sobre  $S^{--}$  y sobre  $S^{-+}$ . Por otro lado, el elemento  $e_2 \cdot e_3 \simeq iI$  actúa como  $+Id$  sobre  $S^{++}$  y sobre  $S^{-+}$ , y actúa como  $-Id$  sobre  $S^{--}$  y sobre  $S^{+-}$ .*

Los cálculos explícitos de encima muestran el siguiente resultado.

**Proposición 3.3.8.** *Consideremos  $\rho_1 = \rho_1^+ \oplus \rho_1^-$  y  $\rho_2 = \rho_2^+ \oplus \rho_2^-$  las representaciones espino-riales de  $Spin'(1, 1)$  y  $Spin''(1, 1)$  respectivamente. La representación producto tensorial*

$$\rho_1 \otimes \rho_2 = (\rho_1^+ \otimes \rho_2^+) \oplus (\rho_1^- \otimes \rho_2^-) \oplus (\rho_1^+ \otimes \rho_2^-) \oplus (\rho_1^- \otimes \rho_2^+) \quad (3.38)$$

de  $Spin'(1, 1) \times Spin''(1, 1)$ , es también la suma de las representaciones naturales  $\pm e^{v+u}$ ,  $\pm e^{-v-u}$ ,  $\pm e^{v-u}$ ,  $\pm e^{-v+u}$  sobre  $\mathbb{C}$ , con  $a = u + \sigma v$ , donde  $v \in \mathbb{R}$  describe el  $Spin'(1, 1)$ -factor y  $u \in \mathbb{R}$  el  $Spin''(1, 1)$ -factor de  $Spin'(1, 1) \times Spin''(1, 1)$  como en (3.30) y (3.31). La representación

$$\begin{aligned} Spin'(1, 1) \times Spin''(1, 1) &\longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}_0) \\ (g_1, g_2) &\longmapsto \rho(g) : \xi \longmapsto g\xi, \end{aligned}$$

donde  $g = g_1 g_2 \in S_{\mathcal{A}}^1 = Spin'(1, 1) \cdot Spin''(1, 1)$ , es equivalente a la representación  $\rho_1 \otimes \rho_2$ , y la descomposición (3.37) de  $S^+$  y  $S^-$  corresponde a (3.38).



# CAPÍTULO 4

---

## La representación espinorial de una superficie Lorentziana en $\mathbb{R}^{2,2}$

---

En este capítulo presentaremos los resultados principales de la tesis: el teorema de representación espinorial y la fórmula de representación espinorial de una superficie Lorentziana en el espacio pseudo Euclideo  $\mathbb{R}^{2,2}$  (Teoremas 4.3.1 y 4.4.4).

El teorema de representación espinorial afirma que una inmersión isométrica de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$  es equivalente a un campo espinorial normalizado que es solución de una ecuación de Dirac sobre la superficie. Por otro lado, usando los cuaternios y los números de Lorentz, podemos describir explícitamente una fórmula de representación de la inmersión isométrica inducida por el campo espinorial.

Entonces aplicaremos la fórmula de representación en  $\mathbb{R}^{2,2}$  y obtendremos pruebas simples de los siguientes resultados.

- La fórmula de Weierstrass de una superficie Lorentziana mínima (*i.e.*  $\vec{H} = 0$ ) en  $\mathbb{R}^{2,2}$  (Corolario 4.4.5); esta extiende la fórmula de Weierstrass de una superficie de Lorentz mínima en  $\mathbb{R}^{2,1}$  dada en [27, Theorem 2]. Una fórmula de representación de una superficie Lorentziana mínima en  $\mathbb{R}^{2,2}$  fue dada recientemente en [15, Theorem 2.1]; sin embargo, nosotros tenemos aquí una interpretación espinorial de la representación.
- El teorema fundamental de las subvariedades ([11, Theorem 2.4]) para el caso particular de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ ; Observación 4.2.1 y Corolario 4.4.6.

También obtendremos nuevos resultados, todos ellos son descritos en los posteriores capítulos de la tesis.

## 4.1. El haz espinorial del espacio $\mathbb{R}^{2,2}$

Denotaremos por  $Q_{\mathbb{R}^{2,2}}$  el haz de marcos ortonormales positivamente orientados en espacio y en tiempo de  $\mathbb{R}^{2,2}$  y por  $\tilde{Q}_{\mathbb{R}^{2,2}} \rightarrow Q_{\mathbb{R}^{2,2}}$  su estructura espinorial. Consideremos la representación espinorial  $\rho : Spin(2, 2) \rightarrow End_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}_0)$  descrita en (3.23) del capítulo anterior.

El haz espinorial de  $\mathbb{R}^{2,2}$  es el haz asociado a la estructura espinorial  $\tilde{Q}_{\mathbb{R}^{2,2}}$  y a la representación espinorial  $\rho$ , *i.e.*

$$\Sigma\mathbb{R}^{2,2} := \tilde{Q}_{\mathbb{R}^{2,2}} \times_{\rho} \mathbb{H}_0.$$

El haz espinorial  $\Sigma\mathbb{R}^{2,2}$  es isomorfo al haz trivial  $\mathbb{R}^{2,2} \times \mathbb{H}_0$ . En efecto, ya que  $\mathbb{R}^{2,2}$  tiene haz tangente trivial, el haz de marcos ortonormales positivamente orientados (en espacio y en tiempo) es trivial  $Q_{\mathbb{R}^{2,2}} = \mathbb{R}^{2,2} \times SO(2, 2)$ , y por lo tanto, su cubriente doble es trivial  $\tilde{Q}_{\mathbb{R}^{2,2}} = \mathbb{R}^{2,2} \times Spin(2, 2)$ ; así, el haz espinorial viene dado por

$$\Sigma\mathbb{R}^{2,2} = (\mathbb{R}^{2,2} \times Spin(2, 2)) \times_{\rho} \mathbb{H}_0$$

y el isomorfismo buscado es dado por

$$\begin{aligned} \Sigma\mathbb{R}^{2,2} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{2,2} \times \mathbb{H}_0 \\ [(x, 1), v] &\longleftrightarrow (x, v). \end{aligned}$$

Las secciones del haz espinorial  $\Sigma\mathbb{R}^{2,2}$  son los campos espinoriales de  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Con respecto a la identificación del párrafo anterior, los campos espinoriales de  $\mathbb{R}^{2,2}$  se identifican con las funciones  $C^{\infty}$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$  con valores en  $\mathbb{H}_0$ : un campo espinorial

$$\varphi : x \in \mathbb{R}^{2,2} \mapsto (x, v(x)) \in \Sigma\mathbb{R}^{2,2}$$

se identifica naturalmente con la función  $v : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{H}_0$ .

**Un producto natural sobre el haz espinorial.** El objetivo ahora es definir un producto sobre el haz espinorial  $\Sigma\mathbb{R}^{2,2}$  y estudiar sus propiedades.

Consideremos la aplicación  $\mathcal{A}$ -bilineal y simétrica  $H : \mathbb{H}_0 \times \mathbb{H}_0 \rightarrow \mathcal{A}$  definida en (3.9).

La aplicación  $H$  es tal que  $H(\xi, \xi) = \bar{\xi}\xi$ , para cada  $\xi \in \mathbb{H}_0$ ; usando esto, fácilmente podemos deducir las siguientes propiedades: para cualesquiera  $\xi, \xi' \in \mathbb{H}_0$ ,

1- para  $p, p' \in \mathbb{H}_0 \simeq Cl_0(2, 2)$  se satisface

$$H(p \cdot \xi, p \cdot \xi') = H(p, p)H(\xi, \xi') \quad \text{y} \quad H(p \cdot \xi, p' \cdot \xi) = H(p, p')H(\xi, \xi), \quad (4.1)$$

en particular, cuando  $p \in Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0 \simeq Cl_0(2, 2)$  tenemos

$$H(p \cdot \xi, p \cdot \xi') = H(\xi, \xi'); \quad (4.2)$$

2- con respecto a la operación  $\widehat{\cdot}$  (que fue definida en (3.2)) tenemos

$$H(\widehat{\xi}, \widehat{\xi}') = \widehat{H(\xi, \xi')}, \quad (4.3)$$

esto implica, para cada  $q, q' \in \mathbb{H}_1 \simeq Cl_1(2, 2)$  son válidas

$$H(q \cdot \xi, q \cdot \xi') = -H(q, q) \widehat{H(\xi, \xi')} \quad \text{y} \quad H(q \cdot \xi, q' \cdot \xi) = -H(q, q') \widehat{H(\xi, \xi)}; \quad (4.4)$$

3- finalmente, para cada  $q \in \mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$  tenemos

$$H(q \cdot \xi, \xi') = \widehat{H(\xi, q \cdot \xi')}. \quad (4.5)$$

En las igualdades dadas en (4.4), el término  $H(q, q')$ , para  $q, q' \in \mathbb{H}_1$ , está definido como la restricción de la aplicación  $H : \mathbb{H}^{\text{Ac}} \times \mathbb{H}^{\text{Ac}} \rightarrow \mathcal{A}$  (definida en (3.3)) al subespacio  $\mathbb{H}_1$ ; en particular para  $q, q' \in \mathbb{R}^{2,2}$  satisface  $H(q, q') = \langle q, q' \rangle$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es la métrica de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Consideremos el producto escalar  $\mathbb{R}$ -bilineal y simétrico

$$\langle \cdot, \cdot \rangle := \Re H(\cdot, \cdot) : \mathbb{H}_0 \times \mathbb{H}_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

definido como la parte real de  $H$ , donde si  $a = u + \sigma v \in \mathcal{A}$ , la parte real de  $a$  es  $\Re(a) := u$ . Este producto escalar real tiene signatura  $(4, 4)$ ; usando (4.2) y (4.5) las siguientes propiedades son válidas: para cada  $\xi, \xi' \in \mathbb{H}_0$ ,

1- para cada  $p \in Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0$  tenemos

$$\langle p \cdot \xi, p \cdot \xi' \rangle = \langle \xi, \xi' \rangle; \quad (4.7)$$

2- para cada  $q \in \mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$  tenemos

$$\langle q \cdot \xi, \xi' \rangle = \langle \xi, q \cdot \xi' \rangle, \quad (4.8)$$

esto implica, para cada  $q, q' \in \mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$  es válido

$$\langle q \cdot \xi, q' \cdot \xi \rangle = -\langle q, q' \rangle \langle \xi, \xi \rangle \quad \text{y} \quad \langle q \cdot \xi, q \cdot \xi' \rangle = -|q|^2 \langle \xi, \xi' \rangle. \quad (4.9)$$

Ahora veremos como la aplicación  $H$  se extiende al haz espinorial  $\Sigma \mathbb{R}^{2,2}$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Consideremos una estructura de  $\mathcal{A}$ -módulo sobre el haz de Clifford  $Cl(T\mathbb{R}^{2,2})$  por la multiplicación por la izquierda por el elemento volumen

$$\sigma := e_0 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \in Cl(T\mathbb{R}^{2,2}),$$

donde  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  es el marco ortonormal global sobre  $\mathbb{R}^{2,2}$  cuyo valor en cada  $x$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$  coincide con la base canónica de  $\mathbb{R}^{2,2}$ ; vea la Sección 3.1.



La misma estructura de  $\mathcal{A}$ -módulo es inducida sobre el haz espinorial  $\Sigma\mathbb{R}^{2,2}$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$  por medio de la acción de Clifford

$$Cl(T\mathbb{R}^{2,2}) \otimes \Sigma\mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \Sigma\mathbb{R}^{2,2};$$

en particular, esta estructura satisface

$$\sigma \cdot (X \cdot \varphi) = (\sigma \cdot X) \cdot \varphi = -X \cdot (\sigma \cdot \varphi),$$

para cada  $\varphi \in \Sigma\mathbb{R}^{2,2}$  y  $X \in T\mathbb{R}^{2,2}$ .

Las igualdades (4.2) y (4.7) indican que la aplicación  $H$  y el producto escalar real  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  preservan la acción del grupo espinorial  $Spin(2, 2)$  sobre  $\mathbb{H}_0$ ; esta propiedad junto con la estructura de  $\mathcal{A}$ -módulo sobre el haz espinorial  $\Sigma\mathbb{R}^{2,2}$  (introducida en el párrafo anterior) permiten definir la aplicación

$$\begin{aligned} H : \Sigma\mathbb{R}^{2,2} \times \Sigma\mathbb{R}^{2,2} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (\varphi, \varphi') &\longmapsto H([\varphi], [\varphi']) \end{aligned} \tag{4.10}$$

que es  $\mathcal{A}$ -bilineal y simétrica, y el producto escalar real

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle := \Re H(\cdot, \cdot) : \Sigma\mathbb{R}^{2,2} \times \Sigma\mathbb{R}^{2,2} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi, \varphi') &\longmapsto \langle [\varphi], [\varphi'] \rangle \end{aligned}$$

que tiene signatura (4, 4), donde  $[\varphi], [\varphi'] \in \mathbb{H}_0$  denotan las coordenadas de  $\varphi$  y  $\varphi'$  en un marco espinorial de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Usando la definición de  $H$  sobre  $\mathbb{H}_0$  conseguimos

$$H(X \cdot \varphi, \varphi') = H(\widehat{\varphi, X \cdot \varphi'}) \quad \text{y} \quad \langle X \cdot \varphi, \varphi' \rangle = \langle \varphi, X \cdot \varphi' \rangle,$$

para cualesquiera  $\varphi, \varphi' \in \Sigma\mathbb{R}^{2,2}$  y cada  $X \in T\mathbb{R}^{2,2}$  (vea (4.5) y (4.8)).

**Observación 4.1.1.** *Consideremos un campo espinorial  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$  tal que  $H(\varphi, \varphi) = 1$ . Para cualesquiera  $\nu, \nu' \in E$  se satisface*

$$\langle e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi, \nu \cdot \nu' \cdot \varphi \rangle = 0.$$

*En efecto, tomado coordenadas en un marco espinorial que está sobre la base canónica de  $\mathbb{R}^{2,2}$  tenemos  $[e_2 \cdot e_3] = iI$  y  $[\nu \cdot \nu'] = a1 + \sigma b iI$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ , así, de (4.1) conseguimos*

$$\begin{aligned} H(e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi, \nu \cdot \nu' \cdot \varphi) &= H(e_2 \cdot e_3, \nu \cdot \nu') H(\varphi, \varphi) \\ &= H(iI, a1 + \sigma b iI) \\ &= -\sigma b \in \sigma\mathbb{R}. \end{aligned}$$

## 4.2. El haz espinorial inducido a una superficie Lorentziana

Consideremos una superficie Lorentziana  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Denotemos por  $E$  su haz normal y por  $B : TM \times TM \rightarrow E$  su segunda forma fundamental definida por

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y,$$

donde  $\nabla$  y  $\bar{\nabla}$  son las conexiones de Levi Civita de  $M$  y  $\mathbb{R}^{2,2}$  respectivamente<sup>1</sup>.

Asumiremos que los haces  $TM$  y  $E$  están ambos orientados en espacio y en tiempo, *i.e.* están orientados, y para todo  $p \in M$ , una componente de  $\{X \in T_p M : \langle X, X \rangle < 0\}$  y una componente de  $\{X \in E_p : \langle X, X \rangle < 0\}$  fueron distinguidas, en una manera continua; un vector tangente o normal a la superficie perteneciente a una de estas componentes distinguidas se llamará *futuro dirigido*.

Además adoptaremos la siguiente convención: una base  $(X, Y)$  de  $T_p M$  o  $E_p$  se dirá positivamente orientada en espacio y en tiempo si esta tiene la orientación de  $T_p M$  o  $E_p$ , y si  $\langle X, X \rangle < 0$  y  $\langle Y, Y \rangle > 0$  con  $X$  futuro dirigido.

**Las ecuaciones fundamentales de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ .** Con la notación de encima, supongamos además que el haz normal  $E$  está equipado con la conexión normal y que  $(e_0, e_1)$  y  $(e_2, e_3)$  son bases ortonormales positivamente orientadas de  $E$  y  $TM$  respectivamente.

La segunda forma fundamental  $B : TM \times TM \rightarrow E$  satisface las siguientes ecuaciones fundamentales (vea por ejemplo [43]):

$$1- K = |B(e_2, e_3)|^2 - \langle B(e_2, e_2), B(e_3, e_3) \rangle \text{ (ecuación de Gauss),}$$

$$2- K_N = \langle (S_{e_0} \circ S_{e_1} - S_{e_1} \circ S_{e_0})(e_2), e_3 \rangle \text{ (ecuación de Ricci),}$$

$$3- (\tilde{\nabla}_X B)(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y B)(X, Z) = 0 \text{ (ecuación de Codazzi),}$$

donde  $K$  y  $K_N$  son las curvaturas de  $M$  y  $E$ , y donde  $\tilde{\nabla}$  es la conexión natural inducida sobre  $T^*M^{\otimes 2} \otimes E$ .

En la ecuación de Ricci, como es usual, si  $\nu \in E$ ,  $S_\nu$  representa el endomorfismo simétrico sobre  $TM$  tal que

$$\langle S_\nu(X), Y \rangle = \langle B(X, Y), \nu \rangle, \tag{4.11}$$

para cualesquiera  $X, Y \in TM$ .

El recíproco de la afirmación de encima es el teorema fundamental de las subvariedades para el caso particular de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$  descrito a continuación.

---

<sup>1</sup>Adoptamos una notación distinta del haz normal y la segunda forma fundamental a la usada en la *Parte I* de la tesis ya que en las secciones siguientes pueden representar objetos abstractos.

**Observación 4.2.1.** (Vea el enunciado general en [11, Theorem 2.4]) Supongamos que  $M$  es una superficie Lorentziana abstracta y  $E$  es un haz vectorial abstracto de rango 2 sobre  $M$ , equipado de una métrica Lorentziana y una conexión compatible. Supongamos además que  $M$  y  $E$  están orientados en espacio y en tiempo. Entonces, si existe una aplicación bilineal y simétrica

$$B : TM \times TM \longrightarrow E,$$

que satisface las ecuaciones fundamentales 1-, 2- y 3- de encima, localmente, existe una inmersión isométrica de  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$  con haz normal  $E$  y segunda forma fundamental  $B$ . La inmersión es además única salvo movimientos rígidos de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Como se mencionó al inicio de este capítulo, obtendremos una prueba sencilla de este teorema en el Corolario 4.4.6.

### 4.2.1. La fórmula de Gauss espinorial

La restricción del haz espinorial de  $\mathbb{R}^{2,2}$  a la superficie Lorentziana  $M$  viene dada por

$$\Sigma\mathbb{R}_{|M}^{2,2} \simeq M \times \mathbb{H}_0;$$

vea la Sección 4.1. Los haces tangente  $TM$  y normal  $E$  a la superficie, pueden ser dotados de estructuras espinoriales de modo que el producto tensorial de los correspondientes haces espinoriales asociados  $\Sigma M$  y  $\Sigma E$  satisface

$$\Sigma\mathbb{R}_{|M}^{2,2} \simeq \Sigma E \otimes \Sigma M;$$

vea la Proposición 3.3.8. Vea en [40] una prueba general en el caso Riemanniano.

Nuestro objetivo ahora es estudiar la relación entre las conexiones espinoriales de los haces espinoriales de  $\mathbb{R}^{2,2}$ ,  $M$  y  $E$ . Deduiremos la fórmula de Gauss espinorial como consecuencia de la fórmula de Gauss de la inmersión de la superficie  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Una prueba de la fórmula de Gauss espinorial en su versión general para subvariedades Riemannianas es dada en [1, 22].

La fórmula de Gauss de la inmersión de la superficie  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$  expresa lo siguiente: con respecto a la separación

$$T\mathbb{R}_{|M}^{2,2} = E \oplus TM,$$

para cualesquiera  $X, Y \in TM$  y  $\nu \in E$ , se satisface

$$\bar{\nabla}_X(\nu + Y) = (\nabla_X^E \nu - S_\nu(X)) + (\nabla_X Y + B(X, Y)),$$

donde  $\nabla^E$  es la conexión de Levi-Civita del haz normal  $E$  y donde  $S_\nu : TM \rightarrow TM$  es el endomorfismo simétrico definido en (4.11). Explícitamente, para cada  $X \in TM$  tenemos

$$\bar{\nabla}_X e_0 = \nabla_X^E e_0 - S_{e_0}(X), \quad \bar{\nabla}_X e_1 = \nabla_X^E e_1 - S_{e_1}(X) \quad \text{y} \quad \bar{\nabla}_X e_2 = \nabla_X^M e_2 + B(X, e_2). \quad (4.12)$$

Recordemos que  $Q_{\mathbb{R}^{2,2}}$  denota el haz de marcos ortonormales positivamente orientados (en espacio y en tiempo) de  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Análogamente, denotaremos por  $Q_E$  y  $Q_M$  los haces de marcos ortonormales positivamente orientados (en espacio y en tiempo) de  $E$  y  $M$  respectivamente.

Consideremos  $s_1 = (e_0, e_1)$  y  $s_2 = (e_2, e_3)$  marcos ortonormales locales positivamente orientados de  $E$  y  $TM$  respectivamente; entonces, la concatenación

$$s = (e_0, e_1, e_2, e_3) : M \longrightarrow Q_{\mathbb{R}^{2,2}}$$

define una sección local de  $Q_{\mathbb{R}^{2,2}}$  restringida a  $M$ , *i.e.*  $s$  es un marco ortonormal local positivamente orientado de  $\mathbb{R}^{2,2}$  restringido a  $M$ .

Consideremos la 1–forma de conexión asociada a la conexión de Levi Civita  $\bar{\nabla}$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$  :

$$\omega : TQ_{\mathbb{R}^{2,2}} \longrightarrow \mathfrak{so}(2, 2)$$

dada localmente por

$$\omega(ds(X)) = \sum_{i < j} \epsilon_i \langle \bar{\nabla}_X e_i, e_j \rangle A_{ij}, \quad \epsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle, \quad (4.13)$$

para cada  $X \in TM$ , donde  $\{A_{ij} : 0 \leq i < j \leq 3\}$  es la base real de  $\mathfrak{so}(2, 2)$  (Lema 3.2.10). Análogamente, consideremos las 1–formas de conexión asociadas a las conexiones de Levi Civita  $\nabla^E$  y  $\nabla$ , de  $E$  y  $M$  respectivamente:

$$\omega^E : TQ_E \longrightarrow \mathfrak{so}(1, 1) \quad \text{y} \quad \omega^M : TQ_M \longrightarrow \mathfrak{so}(1, 1)$$

dadas localmente, para cada  $X \in TM$ , por

$$\omega^E(ds_1(X)) = -\langle \nabla_X^E e_0, e_1 \rangle A_{01} \quad \text{y} \quad \omega^M(ds_2(X)) = -\langle \nabla_X^M e_2, e_3 \rangle A_{23}. \quad (4.14)$$

Si denotamos por  $p_E : Q_E \rightarrow M$  y  $p_M : Q_M \rightarrow M$  las proyecciones canónicas de los haces de marcos sobre la superficie  $M$ , entonces

$$Q := Q_E \times_M Q_M = \left\{ (s_1, s_2) \in Q_E \times Q_M : p_E(s_1) = p_M(s_2) \right\} \quad (4.15)$$

es el  $SO(1, 1) \times SO(1, 1)$ –haz de marcos ortonormales positivamente orientados (en espacio y en tiempo) de  $\mathbb{R}^{2,2}$  adaptados a la separación  $T\mathbb{R}^2_{|M} = E \oplus TM$ . La 1–forma de conexión asociada a la conexión  $\nabla^E \oplus \nabla^M$  sobre el haz  $Q$ , es denotada por  $\omega^E \oplus \omega^M$  y es dada localmente por

$$(\omega^E \oplus \omega^M)(ds(X)) := \omega^E(ds_1(X)) + \omega^M(ds_2(X)).$$

Usando (4.12), (4.13) y (4.14), para cada  $X \in TM$  tenemos

$$\omega(ds(X)) - (\omega^E \oplus \omega^M)(ds(X)) = - \sum_{i=0,1 \quad j=2,3} \epsilon_i \langle B(X, e_j), e_i \rangle A_{ij}. \quad (4.16)$$

Por otro lado, consideremos las 1-formas de conexión  $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}^M$  y  $\tilde{\omega}^E$  obtenidas como los levantamientos a  $\mathfrak{spin}(2, 2)$ ,  $\mathfrak{spin}(1, 1)$  y  $\mathfrak{spin}(1, 1)$  de las 1-formas de conexión  $\omega, \omega^M$  y  $\omega^E$  respectivamente. Por ejemplo, considerando la proyección  $\pi : \tilde{Q}_{\mathbb{R}^{2,2}} \rightarrow Q_{\mathbb{R}^{2,2}}$ , el levantamiento  $\tilde{\omega}$  es definido por el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{spin}(2, 2) \\ & \nearrow \tilde{\omega} & \downarrow \Phi_* \\ T\tilde{Q}_{\mathbb{R}^{2,2}} & \xrightarrow{d\pi} & TQ_{\mathbb{R}^{2,2}} \xrightarrow{\omega} \mathfrak{so}(2, 2) \end{array}$$

donde  $\Phi_* : \mathfrak{spin}(2, 2) \rightarrow \mathfrak{so}(2, 2)$  es la derivada del cubriente doble  $\Phi : Spin(2, 2) \rightarrow SO(2, 2)$ ; en particular, si escogemos un marco espinorial  $\tilde{s} \in \tilde{Q}_{\mathbb{R}^{2,2}}$  sobre el marco  $s = (e_0, e_1, e_2, e_3) \in Q$ , *i.e.*  $\pi(\tilde{s}) = s$ , las 1-formas de conexión  $\tilde{\omega}$  y  $\omega$  están relacionadas por

$$\Phi_* \circ \tilde{\omega}(d\tilde{s}(X)) = \omega(ds(X)) \quad (4.17)$$

para cada  $X \in TM$ .

Usando la igualdad (4.16), (4.17) y la Proposición 3.2.11, para cada  $X \in TM$  conseguimos

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(d\tilde{s}(X)) - (\tilde{\omega}^E \oplus \tilde{\omega}^M)(d\tilde{s}(X)) &= - \sum_{i=0,1} \sum_{j=2,3} \epsilon_i \langle B(X, e_j), e_i \rangle \Phi_*^{-1} A_{ij} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=0,1} \sum_{j=2,3} \epsilon_i \epsilon_j \langle B(X, e_j), e_i \rangle e_i \cdot e_j \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=2,3} \epsilon_j \left( \sum_{i=0,1} \epsilon_i \langle B(X, e_j), e_i \rangle e_i \right) \cdot e_j \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 \epsilon_j B(X, e_j) \cdot e_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=2,3} \epsilon_j e_j \cdot B(X, e_j). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ahora consideremos las derivadas covariantes  $\bar{\nabla}, \nabla^{\Sigma E}$  y  $\nabla^{\Sigma M}$  sobre los correspondientes haces espinoriales  $\Sigma\mathbb{R}^{2,2}, \Sigma E$  y  $\Sigma M$  respectivamente. Por ejemplo, considerando la representación espinorial  $\rho : Spin(2, 2) \rightarrow End_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}_0)$ , la derivada covariante  $\bar{\nabla}$  sobre un campo espinorial  $\varphi = [\tilde{s}, v]$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , es dada para cada  $X \in TM$  por

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \varphi &= \left[ \tilde{s}, dv(X) + \rho_*(\tilde{\omega}(d\tilde{s}(X)))v \right] \\ &= \left[ \tilde{s}, dv(X) + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \epsilon_i \epsilon_j \langle \bar{\nabla}_X e_i, e_j \rangle [e_i \cdot e_j]v \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde la segunda igualdad se obtuvo usando (4.17), (4.13) y la Proposición 3.2.11.

Análogamente, las derivadas covariantes  $\nabla^{\Sigma E}$  y  $\nabla^{\Sigma M}$  aplicadas a los campos espinoriales  $\psi_1 = [\tilde{s}_1, v_1] \in \Sigma E$  y  $\psi_2 = [\tilde{s}_2, v_2] \in \Sigma M$  satisfacen para cada  $X \in TM$

$$\nabla_X^{\Sigma E} \psi_1 = \left[ \tilde{s}_1, dv_1(X) + \rho_{1*}(\tilde{\omega}^E(d\tilde{s}_1(X)))v_1 \right] \quad (4.20)$$

y

$$\nabla_X^{\Sigma M} \psi_2 = \left[ \tilde{s}_2, dv_2(X) + \rho_{2*}(\tilde{\omega}^M(d\tilde{s}_2(X)))v_2 \right]. \quad (4.21)$$

En las fórmulas de encima,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son las representaciones espinoriales de los grupos  $Spin'(1, 1)$  y  $Spin''(1, 1)$  tales que la representación producto tensorial

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : Spin'(1, 1) \times Spin''(1, 1) \subset Spin(2, 2) \longrightarrow End_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}_0)$$

es equivalente a la representación espinorial  $\rho$ ; vea la Proposición 3.3.8. En particular tenemos

$$\begin{aligned} \rho_* \left( (\tilde{\omega}^E \oplus \tilde{\omega}^M)(d\tilde{s}(X)) \right) (v_1 \otimes v_2) &= (\rho_1 \otimes \rho_2)_* \left( (\tilde{\omega}^E \oplus \tilde{\omega}^M)(d\tilde{s}(X)) \right) (v_1 \otimes v_2) \\ &= \left( \rho_{1*}(\tilde{\omega}^E(d\tilde{s}_1(X)))v_1 \right) \otimes v_2 + v_1 \otimes \left( \rho_{2*}(\tilde{\omega}^M(d\tilde{s}_2(X)))v_2 \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Finalmente, consideremos un campo espinorial  $\varphi$  sobre  $\mathbb{R}^{2,2}$  restricto a la superficie  $M$ , *i.e.*

$$\varphi \in \Sigma \mathbb{R}_{|M}^{2,2} \simeq \Sigma E \otimes \Sigma M;$$

escribiendo  $\varphi = \psi_1 \otimes \psi_2 = [\tilde{s}_1, v_1] \otimes [\tilde{s}_2, v_2] = [\tilde{s}, v]$ , donde  $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$  y  $v = v_1 \otimes v_2$ , ya que

$$dv(X) = dv_1(X) \otimes v_2 + v_1 \otimes dv_2(X),$$

usando las igualdades dadas en (4.18)-(4.22), conseguimos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \varphi - \left( \nabla_X^{\Sigma E} \otimes Id_{\Sigma M} + Id_{\Sigma E} \otimes \nabla_X^{\Sigma M} \right) \varphi &= \bar{\nabla}_X \varphi - \left( \nabla_X^{\Sigma E} \psi_1 \otimes \psi_2 + \psi_1 \otimes \nabla_X^{\Sigma M} \psi_2 \right) \\ &= \left[ \tilde{s}, \rho_* \left( (\tilde{\omega}(d\tilde{s}(X)))v - (\tilde{\omega}^E \oplus \tilde{\omega}^M)(d\tilde{s}(X))v \right) \right] \\ &= \left[ \tilde{s}, \frac{1}{2} \sum_{j=2,3} \epsilon_j [e_j \cdot B(X, e_j)]v \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=2,3} \epsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \end{aligned}$$

para cada  $X \in TM$ . Definiendo la conexión espinorial

$$\nabla_X := \nabla_X^{\Sigma E} \otimes Id_{\Sigma M} + Id_{\Sigma E} \otimes \nabla_X^{\Sigma M}$$

sobre el haz espinorial  $\Sigma E \otimes \Sigma M$  asociado a la estructura espinorial  $\tilde{Q} \rightarrow Q$ , donde  $Q$  es el haz construido en (4.15), tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 4.2.2.** *Para cualquier campo espinorial  $\varphi$  sobre  $\mathbb{R}^{2,2}$ , su restricción a la superficie Lorentziana  $M$ , satisface la fórmula de Gauss espinorial*

$$\bar{\nabla}_X \varphi = \nabla_X \varphi + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 \epsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \quad (4.23)$$

para cada  $X \in TM$ , donde  $\epsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle$ , con  $j = 2, 3$ .

Una consecuencia de la fórmula de Gauss espinorial de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$  es la siguiente. Consideremos un campo espinorial paralelo  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , i.e.  $\bar{\nabla} \varphi = 0$  : en la trivialización

$$\Sigma \mathbb{R}^{2,2} \simeq \mathbb{R}^{2,2} \times \mathbb{H}_0,$$

los campos espinoriales paralelos de  $\mathbb{R}^{2,2}$  se identifican con las funciones constante  $\mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{H}_0$ . La restricción de  $\varphi$  a la superficie  $\varphi|_M =: \varphi$  es no trivial (no paralelo) sobre la superficie y satisface la ecuación de tipo Killing

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 \epsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \quad (4.24)$$

para todo  $X \in TM$ .

La igualdad (4.24) permite recuperar la segunda forma fundamental de la superficie de la siguiente manera. Supongamos que el campo espinorial  $\varphi$  es tal que  $H(\varphi, \varphi) = 1$ , usando (4.9) y la Observación 4.1.1, de un cálculo directo conseguimos

$$\langle B(X, Y), \nu \rangle = -\langle B(X, Y) \cdot \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle = -2\langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle,$$

para cualesquiera  $X, Y \in TM$  y  $\nu \in E$ .

La consecuencia más importante de la fórmula de Gauss espinorial es la siguiente.

**Corolario 4.2.3.** *Supongamos que el campo espinorial  $\varphi$  (de  $\mathbb{R}^{2,2}$  restricto a la superficie) satisface la ecuación (4.24). Entonces  $\varphi$  es solución de la ecuación de Dirac*

$$D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi,$$

donde

$$D\varphi := -e_2 \cdot \nabla_{e_2} \varphi + e_3 \cdot \nabla_{e_3} \varphi$$

es el operador de Dirac definido sobre el haz espinorial  $\Sigma E \otimes \Sigma M$ , y donde

$$\vec{H} := \frac{1}{2} \text{tr} B$$

es el vector de curvatura media de la superficie Lorentziana  $M$ .

## 4.3. El teorema de representación espinorial

### 4.3.1. La construcción inversa

Supongamos que  $(M, g)$  es una superficie Lorentziana abstracta<sup>2</sup> orientada en espacio y en tiempo,  $E \rightarrow M$  es un haz vectorial Lorentziano orientado en espacio y en tiempo de rango 2 sobre  $M$ , equipado con una conexión compatible.

Supongamos también que los haces vectoriales  $E$  y  $TM$  están equipados con estructuras espinoriales; denotaremos por  $\Sigma E$  y  $\Sigma M$  los correspondientes haces espinoriales asociados. Si  $(e_0, e_1)$  y  $(e_2, e_3)$  son marcos ortonormales positivamente orientados de  $E$  y  $TM$ , en los respectivos haces de Clifford tenemos  $(e_0 \cdot e_1)^2 = 1$  y  $(e_2 \cdot e_3)^2 = 1$ ; por lo tanto, los haces espinoriales  $\Sigma E$  y  $\Sigma M$  se dividen en

$$\Sigma E = \Sigma^+ E \oplus \Sigma^- E \quad \text{y} \quad \Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M$$

donde  $e_0 \cdot e_1$  actúa como  $+Id$  sobre  $\Sigma^+ E$  y como  $-Id$  sobre  $\Sigma^- E$ , mientras que  $e_2 \cdot e_3$  actúa como  $+Id$  sobre  $\Sigma^+ M$  y como  $-Id$  sobre  $\Sigma^- M$ .

Consideremos el haz espinorial producto tensorial definido por

$$\Sigma := \Sigma E \otimes \Sigma M,$$

entre el haz espinorial  $\Sigma E$  y el haz espinorial  $\Sigma M$ . Naturalmente, podemos equipar al haz espinorial  $\Sigma$  con la conexión producto tensorial definida por

$$\nabla := \nabla^{\Sigma E} \otimes Id_{\Sigma M} + Id_{\Sigma E} \otimes \nabla^{\Sigma M},$$

donde  $\nabla^{\Sigma E}$  y  $\nabla^{\Sigma M}$  denotan las conexiones espinoriales de  $\Sigma E$  y  $\Sigma M$  respectivamente.

Definamos también el producto de Clifford sobre  $\Sigma$  como sigue. Para cada  $\varphi = \psi_1 \otimes \psi_2 \in \Sigma$ , ya que  $\psi_1 \in \Sigma E$  y  $\psi_2 \in \Sigma M$ , definimos

$$\begin{cases} X \cdot \varphi = (X \cdot_E \psi_1) \otimes \psi_2 & \text{si } X \in \Gamma(E), \\ X \cdot \varphi = \bar{\psi}_1 \otimes (X \cdot_M \psi_2) & \text{si } X \in \Gamma(M), \end{cases}$$

donde  $\cdot_E$  y  $\cdot_M$  denotan las acciones de Clifford sobre  $\Sigma E$  y  $\Sigma M$  respectivamente y donde  $\bar{\alpha} = \alpha^+ - \alpha^- \in \Sigma E = \Sigma^+ E \oplus \Sigma^- E$ .

Finalmente, definamos el operador de Dirac sobre el haz espinorial  $\Sigma$  por

$$D\varphi := -e_2 \cdot \nabla_{e_2} \varphi + e_3 \cdot \nabla_{e_3} \varphi, \tag{4.25}$$

donde  $(e_2, e_3)$  es un marco ortonormal positivamente orientado de  $TM$ .

---

<sup>2</sup>La superficie no necesariamente se encuentra inmersa en un espacio ambiente.



Denotaremos por  $p_E : Q_E \rightarrow M$  y  $p_M : Q_M \rightarrow M$  los  $SO(1, 1)$ -haces principales de marcos ortonormales positivamente orientados en espacio y en tiempo de  $E$  y  $TM$ . Los cubrientes dobles  $\tilde{Q}_E \rightarrow Q_E$  y  $\tilde{Q}_M \rightarrow Q_M$  son las estructuras espinoriales dadas sobre  $E$  y  $TM$ , con proyecciones naturales  $\tilde{p}_E : \tilde{Q}_E \rightarrow M$  y  $\tilde{p}_M : \tilde{Q}_M \rightarrow M$ .

Definimos el  $Spin'(1, 1) \times Spin''(1, 1)$ -haz principal

$$\tilde{Q} := \tilde{Q}_E \times_M \tilde{Q}_M = \left\{ (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) \in \tilde{Q}_E \times \tilde{Q}_M : \tilde{p}_E(\tilde{s}_1) = \tilde{p}_M(\tilde{s}_2) \right\}$$

sobre  $M$ ; el haz espinorial  $\Sigma = \Sigma E \otimes \Sigma M$  es el haz vectorial asociado al haz principal  $\tilde{Q} \rightarrow M$  y a la representación  $\rho_1 \otimes \rho_2$  del grupo de estructura  $Spin'(1, 1) \times Spin''(1, 1)$ , *i.e.*

$$\Sigma \simeq \tilde{Q} \times \mathbb{H}_0 / \rho_1 \otimes \rho_2.$$

Ya que el grupo  $S_A^1 = Spin'(1, 1).Spin''(1, 1)$  está contenido en el grupo espinorial  $Spin(2, 2)$ , que preserva la aplicación  $H$  definida sobre  $\mathbb{H}_0$ , el haz espinorial  $\Sigma$  es naturalmente equipado con una aplicación  $\mathcal{A}$ -bilineal y simétrica

$$H : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{A},$$

definida como en (4.10), y con un producto escalar real de signatura (4, 4)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle := \Re e H(\cdot, \cdot) : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}.$$

También podemos definir el producto punto con valores en  $\mathbb{H}_1$  por

$$\begin{aligned} \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \Sigma \times \Sigma &\longrightarrow \mathbb{H}_1 \\ (\varphi, \varphi') &\longmapsto \sigma i \overline{[\varphi']} [\varphi], \end{aligned} \tag{4.26}$$

donde  $[\varphi]$  y  $[\varphi'] \in \mathbb{H}_0$  son respectivamente las componentes de  $\varphi$  y  $\varphi'$  en alguna sección local de  $\tilde{Q}$ . Este producto punto es  $\mathcal{A}$ -bilineal y satisface las siguientes propiedades: para cualesquiera  $\varphi, \varphi' \in \Sigma$  y  $X \in E \oplus TM$  tenemos

$$\langle\langle \varphi, \varphi' \rangle\rangle = \overline{\langle\langle \varphi', \varphi \rangle\rangle} \quad \text{y} \quad \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi' \rangle\rangle = -\langle\langle \varphi, \widehat{X \cdot \varphi'} \rangle\rangle. \tag{4.27}$$

Notemos también que, por definición  $\sigma i H(\varphi, \varphi')$  es el coeficiente de  $i1$  en la descomposición de  $\langle\langle \varphi, \varphi' \rangle\rangle$  en la base  $i1, I, iJ, K$  de  $\mathbb{H}_1$  como  $\mathcal{A}$ -módulo, así (4.27) implica

$$H(\varphi, \varphi') = H(\varphi', \varphi) \quad \text{y} \quad H(X \cdot \varphi, \varphi') = H(\widehat{\varphi, X \cdot \varphi'}), \tag{4.28}$$

para cualesquiera  $\varphi, \varphi' \in \Sigma$  y  $X \in E \oplus TM$ ; en particular su parte real satisface

$$\langle \varphi, \varphi' \rangle = \langle \varphi', \varphi \rangle \quad \text{y} \quad \langle X \cdot \varphi, \varphi' \rangle = \langle \varphi, X \cdot \varphi' \rangle. \tag{4.29}$$

Finalmente, la segunda igualdad en (4.28) implica

$$H(X \cdot \varphi, Y \cdot \varphi) = -\langle X, Y \rangle \widehat{H}(\varphi, \varphi) \quad (4.30)$$

y por lo tanto

$$\langle X \cdot \varphi, Y \cdot \varphi \rangle = -\langle X, Y \rangle \langle \varphi, \varphi \rangle, \quad (4.31)$$

para cualesquiera  $\varphi, \varphi'$  y  $X, Y \in E \oplus TM$ .

**Notación.** Vamos a introducir la notación que usaremos de aquí en adelante.

Denotaremos por  $(e_0, e_1)$  y  $(e_2, e_3)$  marcos ortonormales positivamente orientados en espacio y en tiempo de  $E$  y  $TM$  respectivamente, con  $e_0$  y  $e_2$  vectores unitarios de tipo tiempo futuro dirigidos (vea el inicio de la Sección 4.2).

Por otro lado, salvo mención explícita, si  $\tilde{s} \in \tilde{Q}$  es un marco espinorial dado, los corchetes  $[\cdot]$  denotarán las coordenadas en  $\mathbb{H}_0$  de los campos espinoriales en el marco espinorial  $\tilde{s}$ , *i.e.* para cualquier  $\varphi \in \Sigma$ ,

$$\varphi \simeq [\tilde{s}, [\varphi]] \quad \in \quad \Sigma \simeq \tilde{Q} \times \mathbb{H}_0 / \rho_1 \otimes \rho_2.$$

También usaremos los corchetes  $[\cdot]$  para denotar las coordenadas en el marco espinorial  $\tilde{s}$  de los elementos del álgebra de Clifford  $Cl(E \oplus TM)$ . Los elementos  $X \in Cl_0(E \oplus TM)$  e  $Y \in Cl_1(E \oplus TM)$  serán representados respectivamente por  $[X] \in \mathbb{H}_0$  y  $[Y] \in \mathbb{H}_1$  tales que, en el marco  $\tilde{s}$ ,

$$X \simeq \begin{pmatrix} [X] & 0 \\ 0 & \widehat{[X]} \end{pmatrix} \quad y \quad Y \simeq \begin{pmatrix} 0 & [Y] \\ \widehat{[Y]} & 0 \end{pmatrix};$$

con respecto a la acción de Clifford sobre el haz espinorial  $\Sigma$  tenemos

$$[X \cdot \varphi] = [X][\varphi] \quad y \quad [Y \cdot \varphi] = \sigma i [Y][\widehat{\varphi}].$$

Además, en un marco espinorial  $\tilde{s} \in \tilde{Q}$  tal que  $\pi(\tilde{s}) = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ , donde  $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q_1 \times_M Q_2$  es la proyección natural sobre el haz de los marcos ortonormales positivamente orientados de  $E \oplus TM$  adaptados a la separación, los vectores  $e_0, e_1, e_2$  y  $e_3 \in Cl_1(E \oplus TM)$  son representados respectivamente por  $\sigma i 1, I, iJ$  y  $K \in \mathbb{H}_1$ ; recuerde la definición de la aplicación de Clifford  $\gamma$  dada en la Sección 3.1.

### 4.3.2. Ecuaciones fundamentales y campos espinoriales

En esta sección presentaremos el teorema principal de la tesis sobre la representación espinorial de una superficie Lorentziana en el espacio pseudo Euclideo  $\mathbb{R}^{2,2}$ ; este teorema extiende a la signatura  $(2, 2)$  los resultados principales de [4] y [2] en el contexto Riemanniano en los espacios Euclideo y de Minkowski respectivamente.

A continuación presentamos el teorema central de la tesis.

**Teorema 4.3.1.** *Supongamos que  $(M, g)$  es una superficie Lorentziana simplemente conexa y que  $E \rightarrow M$  es un haz vectorial Lorentziano de rango 2 equipado con una conexión compatible. Asumamos también que los haces  $TM$  y  $E$  están ambos orientados en espacio y en tiempo, y que están equipados con estructuras espinoriales dadas: consideremos  $\Sigma = \Sigma E \otimes \Sigma M$  el haz espinorial definido en la Sección 4.3.1 y  $D$  su operador de Dirac definido en (4.25).*

*Consideremos  $\vec{H} \in \Gamma(E)$  una sección de  $E$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1- *existe un campo espinorial  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$  con  $H(\varphi, \varphi) = 1$  que es solución de la ecuación de Dirac*

$$D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi;$$

2- *existe un campo espinorial  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$  con  $H(\varphi, \varphi) = 1$  que es solución de la ecuación de tipo Killing*

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 \epsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi \quad (4.32)$$

*para todo  $X \in TM$ , donde  $\epsilon_j = g(e_j, e_j)$  y donde  $B : TM \times TM \rightarrow E$  es una aplicación bilineal y simétrica con*

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \text{tr}_g B;$$

3- *existe una inmersión isométrica  $F : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  con haz normal  $E$ , segunda forma fundamental  $B$  y curvatura media  $\vec{H}$ .*

*Por otro lado, la inmersión isométrica inducida por el campo espinorial  $\varphi$  es dada por la fórmula de representación*

$$F = \int \xi : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}^{2,2},$$

*donde  $\xi$  es la 1-forma cerrada sobre  $M$  con valores en  $\mathbb{R}^{2,2}$  definida por*

$$\xi(X) := \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle,$$

*para todo  $X \in TM$ .*

*Demostración.* Para su mejor comprensión, dividiremos la prueba del teorema en dos partes: primero probaremos la equivalencia de los enunciados 1–, 2– y 3–, posteriormente vamos a dedicar la Sección 4.4 para probar la fórmula de representación.

Suponiendo que la afirmación 3– es válida, usando la fórmula de Gauss espinorial descrita en la Proposición 4.2.2 conseguimos (4.24) que es la afirmación 2–. Finalmente, el Corolario 4.2.3 garantiza que la afirmación 1– es válida.

Recíprocamente, mostraremos que la afirmación 1– implica 3– usando la Proposición 4.3.2 de abajo y el teorema fundamental de subvariedades (vea el enunciado preciso de este teorema en la Observación 4.2.1).  $\square$

**Proposición 4.3.2.** Consideremos  $(M, g), E, \Sigma$  y  $\vec{H}$  como en las hipótesis del Teorema 4.3.1. Asumamos que existe un campo espinorial  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$  con  $H(\varphi, \varphi) = 1$  que es solución de la ecuación de Dirac

$$D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi. \quad (4.33)$$

Entonces la aplicación bilineal

$$B : TM \times TM \rightarrow E$$

definida para cualesquiera  $X, Y \in \Gamma(TM)$  y  $\nu \in \Gamma(E)$  por

$$\langle B(X, Y), \nu \rangle = -2\langle X \cdot \nabla_Y \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle \quad (4.34)$$

es simétrica, satisface las ecuaciones fundamentales de Gauss, Ricci y Codazzi, y es tal que

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \text{tr}_g B. \quad (4.35)$$

En lo que sigue, usaremos la misma notación  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  para denotar los productos escalares reales sobre  $TM$ , sobre  $E$  y sobre  $\Sigma$ .

Como en [18] y después en [42, 33, 45, 34] en codimensión uno, y en [4, 2] en codimensión dos, la prueba de la Proposición 4.3.2 está basada en el hecho que tal campo espinorial es necesariamente una solución de (4.32) con esta aplicación bilineal  $B$ . Este es el contenido del siguiente lema cuya prueba será realizada en la Sección 4.3.3.

**Lema 4.3.3.** Supongamos que el campo espinorial  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$  es una solución de la ecuación de Dirac (4.33) con  $H(\varphi, \varphi) = 1$ . Entonces, el campo espinorial  $\varphi$  resuelve la ecuación tipo killing

$$\nabla_X \varphi = \eta(X) \cdot \varphi,$$

donde  $\eta(X) := -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 \epsilon_j e_j \cdot B(X, e_j)$ , para cada  $X \in \Gamma(TM)$ .

*Demostración de la Proposición 4.3.2.* Fácilmente deducimos que la aplicación bilineal  $B$  es simétrica y que satisface (4.35): usando la ecuación de Dirac (4.33) conseguimos

$$e_2 \cdot \nabla_{e_3} \varphi = e_3 \cdot \nabla_{e_2} \varphi - e_2 \cdot e_3 \cdot \vec{H} \cdot \varphi,$$

usando (4.34) y la Observación 4.1.1 tenemos

$$\langle B(e_2, e_3), \nu \rangle = -2\langle e_2 \cdot \nabla_{e_3} \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle = -2\langle e_3 \cdot \nabla_{e_2} \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle = \langle B(e_3, e_2), \nu \rangle,$$

para cada  $\nu \in E$ . Por otro lado, de (4.34) y la igualdad (4.31) conseguimos

$$\langle -B(e_2, e_2) + B(e_3, e_3), \nu \rangle = -2\langle D\varphi, \nu \cdot \varphi \rangle = -2\langle \vec{H} \cdot \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle = 2\langle \vec{H}, \nu \rangle,$$

para cada  $\nu \in E$ .

Ahora mostraremos que la aplicación bilineal  $B$  satisface las ecuaciones fundamentales de Gauss, Ricci y Codazzi. Para esto, en principio calculemos la curvatura espinorial del campo espinorial  $\varphi$  : para cualesquiera  $X, Y \in \Gamma(TM)$  tenemos

$$\begin{aligned}
R(X, Y)\varphi &:= \nabla_X \nabla_Y \varphi - \nabla_Y \nabla_X \varphi - \nabla_{[X, Y]}\varphi \\
&= \nabla_X(\eta(Y) \cdot \varphi) - \nabla_Y(\eta(X) \cdot \varphi) - \eta([X, Y]) \cdot \varphi \\
&= \nabla_X(\eta(Y)) \cdot \varphi - \nabla_Y(\eta(X)) \cdot \varphi - \eta([X, Y]) \cdot \varphi + \eta(Y) \cdot \nabla_X \varphi - \eta(X) \cdot \nabla_Y \varphi \\
&= (\nabla_X(\eta(Y)) - \nabla_Y(\eta(X)) - \eta([X, Y])) \cdot \varphi + (\eta(Y) \cdot \eta(X) - \eta(X) \cdot \eta(Y)) \cdot \varphi.
\end{aligned}$$

Notemos que el primer sumando de encima es la diferencial exterior covariante de la 1-forma  $\eta$  definida por

$$d^\nabla \eta(X, Y) := \nabla_X(\eta(Y)) - \nabla_Y(\eta(X)) - \eta([X, Y]);$$

por lo tanto, la curvatura espinorial de  $\varphi$  se escribe como

$$R(X, Y)\varphi = d^\nabla \eta(X, Y) \cdot \varphi + (\eta(Y) \cdot \eta(X) - \eta(X) \cdot \eta(Y)) \cdot \varphi. \quad (4.36)$$

Vamos a calcular los sumandos en (4.36). De aquí en adelante, denotaremos también por  $\nabla$  la conexión natural sobre el haz de Clifford  $Cl(E \oplus TM)$ .

Primero calcularemos la diferencial exterior de la 1-forma  $\eta$ . Consideremos  $e_2$  y  $e_3$  tales que  $\nabla e_2|_p = \nabla e_3|_p = 0$ , por tanto

$$\begin{aligned}
&\nabla_X(\eta(Y)) - \nabla_Y(\eta(X)) - \eta([X, Y]) = \\
&= \frac{1}{2} \nabla_X(e_2 \cdot B(Y, e_2) - e_3 \cdot B(Y, e_3)) - \frac{1}{2} \nabla_Y(e_2 \cdot B(X, e_2) - e_3 \cdot B(X, e_3)) \\
&\quad - \frac{1}{2} e_2 \cdot B([X, Y], e_2) + \frac{1}{2} e_3 \cdot B([X, Y], e_3) \\
&= \frac{1}{2} (e_2 \cdot \nabla_X B(Y, e_2) - e_3 \cdot \nabla_X B(Y, e_3) - e_2 \cdot \nabla_Y B(X, e_2) + e_3 \cdot \nabla_Y B(X, e_3)) \\
&\quad - e_2 \cdot B(\nabla_X Y, e_2) + e_2 \cdot B(\nabla_Y X, e_2) + e_3 \cdot B(\nabla_X Y, e_3) - e_3 \cdot B(\nabla_Y X, e_3) \\
&= \frac{1}{2} (e_2 \cdot (\nabla_X B(Y, e_2) - B(\nabla_X Y, e_2) - \nabla_Y B(X, e_2) + B(\nabla_Y X, e_2)) \\
&\quad - e_3 \cdot (\nabla_X B(Y, e_3) - B(\nabla_X Y, e_3) - \nabla_Y B(X, e_3) + B(\nabla_Y X, e_3)) \\
&= \frac{1}{2} \left( e_2 \cdot \left( (\tilde{\nabla}_X B)(Y, e_2) - (\tilde{\nabla}_Y B)(X, e_2) \right) - e_3 \cdot \left( (\tilde{\nabla}_X B)(Y, e_3) - (\tilde{\nabla}_Y B)(X, e_3) \right) \right),
\end{aligned}$$

*i.e.*

$$d^\nabla \eta(X, Y) = -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 \epsilon_j e_j \cdot \left( (\tilde{\nabla}_X B)(Y, e_j) - (\tilde{\nabla}_Y B)(X, e_j) \right). \quad (4.37)$$

Ahora, calcularemos el segundo sumando en la igualdad (4.36). Para simplificar los términos,

escribiremos  $B_{ij} = B(e_i, e_j)$ , para  $j = 2, 3$ ; tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
& 4(\eta(e_3) \cdot \eta(e_2) - \eta(e_2) \cdot \eta(e_3)) = \\
& = (e_2 \cdot B_{32} - e_3 \cdot B_{33}) \cdot (e_2 \cdot B_{22} - e_3 \cdot B_{23}) - (e_2 \cdot B_{22} - e_3 \cdot B_{23}) \cdot (e_2 \cdot B_{32} - e_3 \cdot B_{33}) \\
& = e_2 \cdot e_3 \cdot (2B_{23}^2 - (B_{22}B_{33} + B_{33}B_{22})) + (B_{22} \cdot B_{32} - B_{32} \cdot B_{22} + B_{33} \cdot B_{23} - B_{23} \cdot B_{33}) \\
& = -2(|B_{23}|^2 - \langle B_{22}, B_{33} \rangle) e_2 \cdot e_3 + (B_{22} \cdot B_{23} - B_{23} \cdot B_{22} + B_{33} \cdot B_{23} - B_{23} \cdot B_{33}).
\end{aligned}$$

Ahora, si escribimos  $B_{ij} = B_{ij}^0 e_0 + B_{ij}^1 e_1$  tenemos para  $k = 2, 3$

$$S_{e_0} e_k = B_{k2}^0 e_2 - B_{k3}^0 e_3 \quad y \quad S_{e_1} e_k = -B_{k2}^1 e_2 + B_{k3}^1 e_3;$$

escribiendo  $A := B_{22} \cdot B_{23} - B_{23} \cdot B_{22} + B_{33} \cdot B_{23} - B_{23} \cdot B_{33}$ , de un cálculo directo

$$\begin{aligned}
A & = 2(B_{22}^0 \cdot B_{23}^1 - B_{23}^0 \cdot B_{22}^1 + B_{33}^0 \cdot B_{23}^1 - B_{23}^0 \cdot B_{33}^1) e_0 \cdot e_1 \\
& = -2\langle (S_{e_0} \circ S_{e_1} - S_{e_1} \circ S_{e_0})(e_2), e_3 \rangle e_0 \cdot e_1,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\eta(e_3) \cdot \eta(e_2) - \eta(e_2) \cdot \eta(e_3) & = -\frac{1}{2}(|B_{23}|^2 - \langle B_{22}, B_{33} \rangle) e_2 \cdot e_3 \\
& \quad - \frac{1}{2}\langle (S_{e_0} \circ S_{e_1} - S_{e_1} \circ S_{e_0})(e_2), e_3 \rangle e_0 \cdot e_1.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Por otro lado, vamos a calcular la curvatura espinorial  $R(X, Y)\varphi$ , dado en (4.36), de otra manera. Escribiendo  $\varphi = \psi_1 \otimes \psi_2 \in \Sigma = \Sigma E \otimes \Sigma M$ ; la curvatura espinorial se escribe como

$$R(e_2, e_3)\varphi = R^E(e_2, e_3)\psi_1 \otimes \psi_2 + \psi_1 \otimes R^M(e_2, e_3)\psi_2,$$

donde  $R^E$  y  $R^M$  denotan al tensor de curvatura espinorial sobre  $\Sigma E$  y  $\Sigma M$  respectivamente. Usando la identidad de Ricci en el caso semi-Riemanniano sobre  $\Sigma E$  tenemos

$$R^E(e_2, e_3)\psi_1 = -\frac{1}{2}\langle R(e_2, e_3)e_0, e_1 \rangle e_0 \cdot e_1 \cdot \psi_1 = -\frac{1}{2}K_N e_0 \cdot e_1 \cdot \psi_1,$$

análogamente, sobre  $\Sigma M$  tenemos

$$R^M(e_2, e_3)\psi_2 = -\frac{1}{2}\langle R(e_2, e_3)e_2, e_3 \rangle e_2 \cdot e_3 \cdot \psi_2 = -\frac{1}{2}K e_2 \cdot e_3 \cdot \psi_2;$$

por lo tanto

$$R(e_2, e_3)\varphi = -\frac{1}{2}K_N e_0 \cdot e_1 \cdot \varphi - \frac{1}{2}K e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi. \tag{4.39}$$

Para finalizar la prueba de la proposición requerimos del siguiente lema.

**Lema 4.3.4.** *Si  $T = \sum_{0 \leq i < j \leq 3} t_{ij} e_i \cdot e_j$  es un elemento de orden 2 de  $Cl(E) \widehat{\otimes} Cl(TM)$  tal que  $T \cdot \varphi = 0$ , donde  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$  es un campo espinorial tal que  $H(\varphi, \varphi) \neq 0$ , entonces  $T = 0$ .*

Usando el lema de encima junto con las igualdades (4.37), (4.38) y (4.39) reemplazadas en (4.36), deducimos las igualdades

$$\begin{cases} K = |B(e_2, e_3)|^2 - \langle B(e_2, e_2), B(e_3, e_3) \rangle \\ K_N = \langle (S_{e_0} \circ S_{e_1} - S_{e_1} \circ S_{e_0})(e_2), e_3 \rangle \\ (\tilde{\nabla}_X B)(Y, e_j) - (\tilde{\nabla}_Y B)(X, e_j) = 0, \quad j = 2, 3, \end{cases}$$

que son respectivamente las ecuaciones fundamentales de Gauss, Ricci y Codazzi.  $\square$

**Observación 4.3.5.** Podemos escribir la aplicación bilineal  $B$  y por tanto  $\vec{H}$  en términos de la 1-forma  $\eta$ : para cualesquiera  $X, Y \in TM$  tenemos

$$B(X, Y) = Y \cdot \eta(X) - \eta(X) \cdot Y$$

y por lo tanto  $\vec{H} = -e_2 \cdot \eta(e_2) + e_3 \cdot \eta(e_3)$ .

### 4.3.3. Demostración del Lema 4.3.3

Consideremos la estructura de  $\mathcal{A}$ -módulo  $\sigma := e_0 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_3$  definida sobre el haz de Clifford  $Cl(E \oplus TM)$  por la multiplicación por la izquierda y sobre el haz espinorial  $\Sigma = \Sigma E \otimes \Sigma M$  por la acción de Clifford. La aplicación  $H : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathcal{A}$  es  $\mathcal{A}$ -bilineal con respecto a la estructura de  $\Sigma$  como  $\mathcal{A}$ -módulo, mientras que la acción de Clifford satisface

$$\sigma \cdot (X \cdot \varphi) = (\sigma \cdot X) \cdot \varphi = -X \cdot (\sigma \cdot \varphi),$$

para cualesquiera  $\varphi \in \Sigma$  y  $X \in E \oplus TM$ . Vea la Sección 4.1.

Usando las propiedades (4.28) y (4.30) tenemos que los campos espinoriales

$$\left\{ \varphi, e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi, e_3 \cdot e_1 \cdot \varphi, e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi \right\}$$

son  $H$ -ortogonales con  $H$ -norma  $1, -1, 1, -1$  respectivamente. En efecto, notemos que si  $i \neq j$  tenemos

$$H(\varphi, e_i \cdot e_j \cdot \varphi) = H(\widehat{e_i \cdot \varphi, e_j \cdot \varphi}) = -\langle e_i, e_j \rangle H(\varphi, \varphi) = 0;$$

por otro lado, cuando  $i, j, k$  son diferentes dos a dos, tenemos

$$H(e_i \cdot e_j \cdot \varphi, e_k \cdot e_j \cdot \varphi) = H(e_j^2 \cdot \widehat{e_i \cdot \varphi, e_k \cdot \varphi}) = -|e_j|^2 H(\widehat{e_i \cdot \varphi, e_k \cdot \varphi}) = 0.$$

Para calcular su  $H$ -norma usamos la igualdad

$$H(e_i \cdot e_j \cdot \varphi, e_i \cdot e_j \cdot \varphi) = H(\widehat{e_i^2 \cdot \varphi, e_j \cdot \varphi}) = -|e_i|^2 H(\widehat{e_j \cdot \varphi, e_j \cdot \varphi}) = |e_i|^2 |e_j|^2.$$

En particular tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_X \varphi &= H(\nabla_X \varphi, \varphi) \varphi - H(\nabla_X \varphi, e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi) e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi \\ &\quad + H(\nabla_X \varphi, e_3 \cdot e_1 \cdot \varphi) e_3 \cdot e_1 \cdot \varphi - H(\nabla_X \varphi, e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi) e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi,\end{aligned}$$

para cada  $X \in TM$ . Afirmamos que

$$H(\nabla_X \varphi, \varphi) = 0 \quad \text{y} \quad H(\nabla_X \varphi, e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi) = 0.$$

En efecto, la primera igualdad es consecuencia directa de la hipótesis  $H(\varphi, \varphi) = 1$ . La segunda igualdad es consecuencia de la ecuación de Dirac (4.33): supongamos que  $X = e_2$ , tenemos

$$\begin{aligned}H(\nabla_{e_2} \varphi, e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi) &= H(e_2 \cdot \widehat{\nabla_{e_2} \varphi}, e_3 \cdot \varphi) \\ &= H(e_3 \cdot \widehat{\nabla_{e_3} \varphi}, e_3 \cdot \varphi) - H(\widehat{\vec{H}} \cdot \varphi, e_3 \cdot \varphi) \\ &\stackrel{(4.30)}{=} -|e_3|^2 H(\nabla_{e_3} \varphi, \varphi) - \langle \vec{H}, e_3 \rangle H(\varphi, \varphi) = 0;\end{aligned}$$

la prueba es análoga si  $X = e_3$ . Por lo tanto podemos escribir

$$\nabla_X \varphi = \left( H(\nabla_X \varphi, e_3 \cdot e_1 \cdot \varphi) e_3 \cdot e_1 - H(\nabla_X \varphi, e_1 \cdot e_2) e_1 \cdot e_2 \right) \cdot \varphi =: \eta(X) \cdot \varphi.$$

Por otro lado, usando las relaciones  $\sigma \cdot e_3 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_0$  y  $\sigma \cdot e_1 \cdot e_2 = e_0 \cdot e_3$ , podemos escribir

$$\eta(X) = e_2 \cdot \nu_2 + e_3 \cdot \nu_3, \tag{4.40}$$

para algunos  $\nu_2, \nu_3$  en  $E$  que dependen de  $X$ . Además, ya que

$$\langle B(e_j, X), \nu \rangle \stackrel{(4.34)}{=} -2 \langle e_j \cdot \nabla_X \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle \stackrel{(4.29)}{=} -2 \langle \nabla_X \varphi, e_j \cdot \nu \cdot \varphi \rangle = -2 \langle \eta(X) \cdot \varphi, e_j \cdot \nu \cdot \varphi \rangle,$$

para cada  $\nu \in E$  y  $j = 2, 3$ , usando (4.40) conseguimos

$$\langle B(e_j, X), \nu \rangle = -2 \langle e_2 \cdot \nu_2 \cdot \varphi, e_j \cdot \nu \cdot \varphi \rangle - 2 \langle e_3 \cdot \nu_3 \cdot \varphi, e_j \cdot \nu \cdot \varphi \rangle. \tag{4.41}$$

Usando la Observación 4.1.1 y la igualdad (4.31) conseguimos

$$\langle B(e_2, X), \nu \rangle = -2 \langle \nu_2 \cdot \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle = 2 \langle \nu_2, \nu \rangle \quad \text{y} \quad \langle B(e_3, X), \nu \rangle = 2 \langle \nu_3 \cdot \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle = -2 \langle \nu_3, \nu \rangle,$$

para cada  $\nu \in E$ , *i.e.*  $\nu_2 = \frac{1}{2} B(e_2, X)$  y  $\nu_3 = -\frac{1}{2} B(e_3, X)$ , conseguimos así

$$\eta(X) = e_2 \cdot \nu_2 + e_3 \cdot \nu_3 = \frac{1}{2} e_2 \cdot B(e_2, X) - \frac{1}{2} e_3 \cdot B(e_3, X) = -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 \epsilon_j e_j \cdot B(e_j, X),$$

como queríamos.



## 4.4. La fórmula de representación espinorial

Supongamos que  $(M, g), E, \Sigma$  y  $\vec{H}$  son dados como en las hipótesis del Teorema 4.3.1.

Consideremos un campo espinorial  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$  con  $H(\varphi, \varphi) = 1$  que es solución de la ecuación de Dirac

$$D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi. \quad (4.42)$$

Definamos la 1-forma  $\xi$  sobre  $M$ , con valores vectoriales en  $\mathbb{H}_1$ , por

$$\begin{aligned} \xi : E \oplus TM &\longrightarrow \mathbb{H}_1 \\ X &\longmapsto \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \end{aligned}$$

donde el producto punto  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  fue definido sobre  $\Sigma$  en (4.26).

Usando las igualdades en (4.27) conseguimos

$$\xi(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle = -\langle\langle \widehat{\varphi}, X \cdot \varphi \rangle\rangle = -\overline{\langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle} = -\widehat{\xi(X)},$$

para cualquier  $X \in E \oplus TM$ , i.e. la 1-forma  $\xi$  toma valores en  $\mathbb{R}^{2,2}$ ; vea la identificación (3.8).

**Lema 4.4.1.** *La 1-forma  $\xi : E \oplus TM \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  es una isometría, i.e.*

$$\langle\xi(X), \xi(Y)\rangle = \langle X, Y \rangle, \quad (4.43)$$

para cualesquiera  $X, Y \in E \oplus TM$ .

*Demostración.*  $\xi$  es inyectiva: supongamos por contradicción que  $X \in E \oplus TM$  es tal que

$$0 = \xi(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle = \sigma i \overline{[\varphi]} [X \cdot \varphi] = -\overline{[\varphi]} [X] \widehat{[\varphi]},$$

ya que  $H(\varphi, \varphi) = \overline{[\varphi]} [\varphi] = 1$ , deducimos que  $[X] = 0$ .

$\xi$  preserva la métrica: usando (4.26) conseguimos

$$\overline{\xi(X)} \xi(Y) = \overline{\langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle} \langle\langle Y \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle = \overline{[\varphi]} [X] \widehat{[\varphi]} \overline{[\varphi]} [Y] \widehat{[\varphi]} = \widehat{[\varphi]} \overline{[X]} [Y] \widehat{[\varphi]}$$

por lo tanto,

$$\langle\xi(X), \xi(Y)\rangle = \frac{1}{2} \left( \overline{\xi(X)} \xi(Y) + \overline{\xi(Y)} \xi(X) \right) = \widehat{[\varphi]} \frac{1}{2} \left( \overline{[X]} [Y] + \overline{[Y]} [X] \right) \widehat{[\varphi]} = \langle X, Y \rangle,$$

para cualesquiera  $X, Y \in E \oplus TM$ . □

En particular, cuando restringimos la 1-forma  $\xi$  al haz tangente  $TM$  conseguimos una propiedad fundamental; este es el contenido del siguiente lema.

**Lema 4.4.2.** La 1-forma  $\xi : TM \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  es una 1-forma cerrada, i.e.  $d\xi = 0$ .

*Demostración.* Como antes, consideremos  $(e_2, e_3)$  un marco ortonormal positivamente orientado de  $TM$ . Para  $i, j \in \{2, 3\}$  tenemos

$$d(\xi(e_j))(e_i) = \langle \langle \nabla_{e_i} e_j \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle + \langle \langle e_j \cdot \nabla_{e_i} \varphi, \varphi \rangle \rangle + \langle \langle e_j \cdot \varphi, \nabla_{e_i} \varphi \rangle \rangle,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} d\xi(e_2, e_3) &= d(\xi(e_3))(e_2) - d(\xi(e_2))(e_3) - \xi([e_2, e_3]) \\ &= \langle \langle e_3 \cdot \nabla_{e_2} \varphi, \varphi \rangle \rangle - \langle \langle e_2 \cdot \nabla_{e_3} \varphi, \varphi \rangle \rangle + \langle \langle e_3 \cdot \varphi, \nabla_{e_2} \varphi \rangle \rangle - \langle \langle e_2 \cdot \varphi, \nabla_{e_3} \varphi \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Usando (4.27) conseguimos las siguientes igualdades

$$\langle \langle e_3 \cdot \varphi, \nabla_{e_2} \varphi \rangle \rangle = -\widehat{\langle \langle e_3 \cdot \nabla_{e_2} \varphi, \varphi \rangle \rangle}, \quad \langle \langle e_2 \cdot \varphi, \nabla_{e_3} \varphi \rangle \rangle = -\widehat{\langle \langle e_2 \cdot \nabla_{e_3} \varphi, \varphi \rangle \rangle},$$

y así, sólo debemos calcular la diferencia

$$\begin{aligned} \langle \langle e_3 \cdot \nabla_{e_2} \varphi, \varphi \rangle \rangle - \langle \langle e_2 \cdot \nabla_{e_3} \varphi, \varphi \rangle \rangle &= \langle \langle e_3 \cdot e_2 \cdot \widehat{\nabla_{e_2} \varphi}, e_2 \cdot \varphi \rangle \rangle + \langle \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \widehat{\nabla_{e_3} \varphi}, e_3 \cdot \varphi \rangle \rangle \\ &= \langle \langle e_2 \cdot \nabla_{e_2} \varphi, e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi \rangle \rangle - \langle \langle e_3 \cdot \nabla_{e_3} \varphi, e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi \rangle \rangle \\ &= -\langle \langle D\varphi, e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi \rangle \rangle \\ &= -\langle \langle \vec{H} \cdot \varphi, e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$d\xi(e_2, e_3) = -\langle \langle \vec{H} \cdot \varphi, e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi \rangle \rangle + \widehat{\langle \langle \vec{H} \cdot \varphi, e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi \rangle \rangle};$$

pero ya que

$$\langle \langle \vec{H} \cdot \varphi, e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi \rangle \rangle = -\langle \langle \varphi, \widehat{\vec{H} \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi} \rangle \rangle = \langle \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi, \vec{H} \cdot \varphi \rangle \rangle = \widehat{\langle \langle \vec{H} \cdot \varphi, e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi \rangle \rangle},$$

conseguimos finalmente  $d\xi = 0$ , como queríamos.  $\square$

Por el Lema de Poincaré, existe (localmente) una aplicación diferenciable

$$F : M \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$$

primitiva de la 1-forma  $\xi$ , i.e. tal que  $dF = \xi$ ; además, por el Lema 4.4.1 la aplicación diferenciable  $F$  es una inmersión isométrica.

Nuestro objetivo ahora es mostrar que la 1-forma  $\xi$  induce en efecto una isometría entre el haz vectorial  $E$  y el haz normal  $N(F(M))$  de  $F(M)$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$ , que preserva conexiones y la segunda forma fundamental. Para este propósito, el siguiente lema nos será de gran utilidad.

**Lema 4.4.3.** Consideremos un campo espinorial  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$  tal que  $H(\varphi, \varphi) = 1$ . Para cualesquiera  $X \in TM, \nu \in E$  e  $Y \in \Gamma(E) \cup \Gamma(TM)$  se satisface lo siguiente.

- 1-  $\langle \langle \nabla_X Y \cdot \varphi, \varphi \rangle, \xi(\nu) \rangle = -\langle \nabla_X Y \cdot \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle,$
- 2-  $H(\langle \langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle, \xi(\nu) \rangle) = -H(Y \cdot \nabla_X \varphi, \nu \cdot \varphi),$
- 3-  $H(\langle \langle Y \cdot \varphi, \nabla_X \varphi \rangle, \xi(\nu) \rangle) = H(\langle \langle Y \cdot \widehat{\nabla_X \varphi}, \varphi \rangle, \xi(\nu) \rangle).$

En el lema, los productos de la izquierda  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $H$  están definidos sobre  $\mathbb{H}_1$ , mientras que a la derecha están definidos sobre el haz espinorial  $\Sigma$ .

*Demostración.* Todas las igualdades son probadas directamente como sigue.

- 1- Ya que  $\langle \varphi, \varphi \rangle = 1$  tenemos

$$\langle \langle \nabla_X Y \cdot \varphi, \varphi \rangle, \xi(\nu) \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \langle \xi(\nabla_X Y), \xi(\nu) \rangle \stackrel{(4.43)}{=} \langle \nabla_X Y, \nu \rangle \stackrel{(4.31)}{=} -\langle \nabla_X Y \cdot \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle.$$

- 2- Usando (4.26) y  $\overline{[\varphi]}[\varphi] = 1$  tenemos

$$\overline{\xi(\nu)} \langle \langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle \rangle = -\overline{[\nu \cdot \varphi]}[\varphi] \overline{[\varphi]}[Y \cdot \nabla_X \varphi] = -\overline{[\nu \cdot \varphi]}[Y \cdot \nabla_X \varphi];$$

por tanto,

$$\begin{aligned} H(\langle \langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle, \xi(\nu) \rangle) &= \frac{1}{2} \left( \overline{\xi(\nu)} \langle \langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle \rangle + \overline{\langle \langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle \rangle} \xi(\nu) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \overline{[\nu \cdot \varphi]}[Y \cdot \nabla_X \varphi] + \overline{[Y \cdot \nabla_X \varphi]}[\nu \cdot \varphi] \right) \\ &= -H(Y \cdot \nabla_X \varphi, \nu \cdot \varphi). \end{aligned}$$

- 3- Usando (4.27) tenemos

$$\langle \langle Y \cdot \varphi, \nabla_X \varphi \rangle \rangle = -\langle \langle \varphi, \widehat{Y \cdot \nabla_X \varphi} \rangle \rangle = -\overline{\langle \langle Y \cdot \widehat{\nabla_X \varphi}, \varphi \rangle \rangle},$$

por tanto

$$\begin{aligned} H(\langle \langle Y \cdot \varphi, \nabla_X \varphi \rangle, \xi(\nu) \rangle) &= -H\left(\overline{\langle \langle Y \cdot \widehat{\nabla_X \varphi}, \varphi \rangle \rangle}, \xi(\nu)\right) = H\left(\overline{\langle \langle Y \cdot \widehat{\nabla_X \varphi}, \varphi \rangle \rangle}, \overline{\xi(\nu)}\right) \\ &= H\left(\langle \langle Y \cdot \widehat{\nabla_X \varphi}, \varphi \rangle \rangle, \widehat{\xi(\nu)}\right) \\ &\stackrel{(4.3)}{=} H(\langle \langle Y \cdot \widehat{\nabla_X \varphi}, \varphi \rangle, \xi(\nu) \rangle). \end{aligned}$$

□

Finalmente mostraremos el resultado principal de la sección.

**Teorema 4.4.4.** *La aplicación*

$$\begin{aligned}\Phi_E : E &\longrightarrow M \times \mathbb{R}^{2,2} \\ X \in E_x &\longmapsto (F(x), \xi(X))\end{aligned}$$

es una isometría entre  $E$  y el haz normal  $N(F(M))$  de  $F(M)$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$ , preservando conexiones y la segunda forma fundamental.

*Demostración.* Fijemos  $X \in TM$  e  $Y \in \Gamma(E) \cup \Gamma(TM)$ , i.e.  $\xi(Y)$  es normal o tangente a  $F(M)$ . Diferenciando la aplicación  $\xi(Y) : M \rightarrow \mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$  conseguimos

$$d(\xi(Y))(X) = \langle \langle \nabla_X Y \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle + \langle \langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle \rangle + \langle \langle Y \cdot \varphi, \nabla_X \varphi \rangle \rangle. \quad (4.44)$$

Reemplazando las igualdades dadas en el Lema 4.4.3 en (4.44), tenemos que  $H(d(\xi(Y))(X), \xi(\nu))$  es igual a

$$\begin{aligned}&H(\langle \langle \nabla_X Y \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle, \xi(\nu)) + H(\langle \langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle \rangle, \xi(\nu)) + H(\langle \langle Y \cdot \varphi, \nabla_X \varphi \rangle \rangle, \xi(\nu)) \\ &= \langle \langle \langle \nabla_X Y \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle, \xi(\nu) \rangle + H(\langle \langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle \rangle, \xi(\nu)) + H(\langle \langle Y \cdot \varphi, \nabla_X \varphi \rangle \rangle, \xi(\nu)) \\ &= -\langle \nabla_X Y \cdot \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle - H(Y \cdot \nabla_X \varphi, \nu \cdot \varphi) - H(Y \cdot \widehat{\nabla_X \varphi}, \nu \cdot \varphi) \\ &= -\langle \nabla_X Y \cdot \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle - 2\langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\langle d(\xi(Y))(X), \xi(\nu) \rangle = -\langle \nabla_X Y \cdot \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle - 2\langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle.$$

Supongamos que  $Y \in TM$ ; ya que  $\langle \nabla_X Y, \nu \rangle = 0$ , para cada  $\nu \in \Gamma(E)$ , (4.31) implica

$$\langle d(\xi(Y))(X), \xi(\nu) \rangle = -2\langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle \stackrel{(4.34)}{=} \langle B(X, Y)\nu \rangle \stackrel{(4.43)}{=} \langle \xi(B(X, Y)), \xi(\nu) \rangle,$$

esto significa que la componente de  $d(\xi(Y))(X)$  normal a  $F(M)$  es

$$d(\xi(Y))(X)^N = \xi(B(X, Y)),$$

i.e.  $\Phi_E$  preserva la segunda forma fundamental.

Supongamos ahora que  $Y \in \Gamma(E)$ . Para cada  $\nu \in E$  se satisface

$$\langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle = 0 : \quad (4.45)$$

ya que  $\langle \nabla_X \varphi, \varphi \rangle = 0$ , usando (4.29) conseguimos

$$\langle e_0 \cdot \nabla_X \varphi, e_0 \cdot \varphi \rangle = \langle e_1 \cdot \nabla_X \varphi, e_1 \cdot \varphi \rangle = 0,$$

por tanto, el término genérico de (4.45) es

$$\langle e_0 \cdot \nabla_X \varphi, e_1 \cdot \varphi \rangle = \langle \nabla_X \varphi, e_0 \cdot e_1 \cdot \varphi \rangle = \langle \eta(X) \cdot \varphi, e_0 \cdot e_1 \cdot \varphi \rangle.$$

Escribiendo  $\eta(X) = u_0 \cdot e_0 + u_1 \cdot e_1$ , donde  $u_0, u_1 \in TM$  dependen de  $X$ , tenemos

$$\begin{aligned} \langle \eta(X) \cdot \varphi, e_0 \cdot e_1 \cdot \varphi \rangle &= \langle (u_0 \cdot e_0 + u_1 \cdot e_1) \cdot \varphi, e_0 \cdot e_1 \cdot \varphi \rangle \\ &= -\langle e_0 \cdot u_0 \cdot \varphi, e_0 \cdot e_1 \cdot \varphi \rangle + \langle e_1 \cdot u_1 \cdot \varphi, e_1 \cdot e_0 \cdot \varphi \rangle \\ &= -\langle u_0 \cdot \varphi, e_1 \cdot \varphi \rangle - \langle u_1 \cdot \varphi, e_0 \cdot \varphi \rangle \stackrel{(4.31)}{=} 0, \end{aligned}$$

esto demuestra la afirmación (4.45). Tenemos entonces

$$\langle d(\xi(Y))(X), \xi(\nu) \rangle = -\langle \nabla_X Y \cdot \varphi, \nu \cdot \varphi \rangle \stackrel{(4.31)}{=} \langle \nabla_X Y, \nu \rangle \stackrel{(4.43)}{=} \langle \xi(\nabla_X Y), \xi(\nu) \rangle,$$

esto significa que la componente de  $d(\xi(Y))(X)$  normal a  $F(M)$  es

$$d(\xi(Y))(X)^N = \xi(\nabla_X Y),$$

*i.e.*  $\Phi_E$  preserva conexiones. □

Diferentes aplicaciones de la fórmula de representación espinorial son obtenidas a partir de la siguiente simple observación. Suponiendo que  $F_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  es una inmersión isométrica de una superficie Lorentziana y considerando  $\varphi = \sigma 1_M$  la restricción a la superficie  $M$  del campo espinorial constante  $\sigma 1 \in \mathbb{H}_0$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ ; si

$$F = \int \xi, \quad \xi(X) = \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle \tag{4.46}$$

es la inmersión dada en el Teorema 4.3.1, entonces  $F \simeq F_0$ . Esto es en efecto trivial ya que

$$\xi(X) = \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle = -[\overline{\varphi}][X][\widehat{\varphi}] = [X],$$

en un marco espinorial  $\tilde{s}$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$  que está encima de la base canónica (en un tal marco  $[\varphi] = \sigma 1$ ). La fórmula de representación (4.46) cuando es escrita en marcos móviles adaptados a la inmersión da lugar a fórmulas no triviales.

En lo que sigue del capítulo (y de la tesis) presentaremos consecuencias obtenidas al aplicar la fórmula de representación espinorial.

**Superficies Lorentzianas mínimas** (*i.e.*  $\vec{H} = \vec{0}$ ) en  $\mathbb{R}^{2,2}$ . La inmersión isométrica

$$F : (M, g) \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$$

dada por el Teorema 4.4.4 está dada por

$$F = \int \xi = \left( \int \xi_0, \int \xi_1, \int \xi_2, \int \xi_3 \right);$$

esta fórmula generaliza la clásica representación de Weierstrass.

Consideremos la estructura de Lorentz  $\sigma : TM \rightarrow TM$  inducida sobre la superficie al tomar la clase conforme de la métrica  $g$  (vea el apéndice A, vea también [51]), y consideremos las 1-formas

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : TM \rightarrow \mathcal{A}$$

definidas por

$$\alpha_k(X) := \xi_k(X) + \sigma \xi_k(\sigma X), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

para cada  $X \in TM$ .

**Corolario 4.4.5.** *M es una superficie Lorentziana mínima en  $\mathbb{R}^{2,2}$  si y sólo si las 1-formas  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  son conformes<sup>3</sup>.*

*Demostración.* Consideremos  $a := u + \sigma v \in U \subset \mathcal{A} \rightarrow M$  un parámetro conforme tal que la métrica de la superficie se encuentra dada localmente por

$$g|_U = \lambda^2(-du^2 + dv^2) \quad \text{con} \quad \lambda > 0,$$

y supongamos que  $(\partial_u, \partial_v)$  está positivamente orientada. Usando la ecuación de Dirac  $D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$  conseguimos

$$\vec{H} = \vec{0} \quad \text{sii} \quad \partial_u \cdot \nabla_{\partial_u} \varphi = \partial_v \cdot \nabla_{\partial_v} \varphi. \quad (4.47)$$

Por otro lado, ya que las 1-formas  $\alpha_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) preservan la estructura de Lorentz, *i.e.* satisfacen

$$\alpha_k(\sigma X) = \sigma \alpha_k(X),$$

para todo  $X \in TM$ , consideremos las aplicaciones  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3 : M \rightarrow \mathcal{A}$  tales que

$$\alpha_0 = \psi_0 da, \quad \alpha_1 = \psi_1 da, \quad \alpha_2 = \psi_2 da, \quad \alpha_3 = \psi_3 da;$$

las aplicaciones  $\psi_k$  están dadas explícitamente por

$$\psi_k = \alpha_k(\partial_u) = \xi_k(\partial_u) + \sigma \xi_k(\partial_v), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Usando  $\nabla_{\partial_u} \partial_u = \nabla_{\partial_v} \partial_v$  fácilmente conseguimos

$$\partial_u(\xi_k(\partial_u)) = \partial_v(\xi_k(\partial_v)) \quad \text{sii} \quad \partial_u \cdot \nabla_{\partial_u} \varphi = \partial_v \cdot \nabla_{\partial_v} \varphi,$$

mientras que  $\nabla_{\partial_u} \partial_v = \nabla_{\partial_v} \partial_u$  implica

$$\partial_v(\xi_k(\partial_u)) = \partial_u(\xi_k(\partial_v)) \quad \text{sii} \quad \partial_u \cdot \nabla_{\partial_v} \varphi = \partial_v \cdot \nabla_{\partial_u} \varphi;$$

de (4.47) tenemos  $\vec{H} = 0$  si y sólo si cada  $\psi_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) satisface  $\partial_v \psi_k = \sigma \partial_u \psi_k$  (ecuación (A.1) en el Apéndice A) *i.e.* si y sólo si las aplicaciones  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  y  $\psi_3$  son conformes.  $\square$

<sup>3</sup>Vea en el apéndice A la definición de aplicación y 1-forma conformes sobre una superficie de Lorentz.

Así, si  $M$  es una superficie Lorentziana mínima en  $\mathbb{R}^{2,2}$ , la inmersión se escribe como

$$\begin{aligned} F &= \Re e \left( \int \alpha_0, \int \alpha_1, \int \alpha_2, \int \alpha_3 \right) \\ &= \Re e \left( \int \psi_0 da, \int \psi_1 da, \int \psi_2 da, \int \psi_3 da \right) \end{aligned}$$

donde  $\psi_0, \psi_1, \psi_2$  y  $\psi_3$  son aplicaciones conformes, esta es la fórmula de representación de Weierstrass para superficies Lorentzianas mínimas en  $\mathbb{R}^{2,2}$ , que extiende la clásica representación de Weierstrass de superficies de Lorentz en  $\mathbb{R}^{2,1}$  dada por J. Konderak [27, Theorem 2]. Esta representación también fue dada por M.P. Dussan y M. Magid [15, Theorem 2.1]; sin embargo, nosotros tenemos aquí una interpretación espinorial de la representación.

**El teorema fundamental de las subvariedades.** Similarmente a los casos Euclideo y de Minkowski ([4] y [2] resp.), el Teorema 4.4.4 brinda una prueba espinorial del teorema fundamental de las subvariedades para el caso de superficies Lorentzianas en  $\mathbb{R}^{2,2}$  (vea el enunciado preciso en la Observación 4.2.1):

**Corolario 4.4.6.** *Podemos integrar las ecuaciones de Gauss, Ricci y Codazzi en dos pasos:*

1- primero resolviendo

$$\nabla_X \varphi = \eta(X) \cdot \varphi$$

donde

$$\eta(X) = -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 \epsilon_j e_j \cdot B(X, e_j),$$

(existe una solución  $\varphi$  en  $\Gamma(\Sigma)$  tal que  $H(\varphi, \varphi) = 1$ , única salvo la acción natural por la derecha de  $Spin(2, 2)$  sobre  $\Gamma(\Sigma)$ );

2- entonces resolvemos

$$dF = \xi$$

donde  $\xi(X) = \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle$  (la solución es única, salvo traslaciones en  $\mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$ ).

La multiplicación por la derecha por una constante perteneciente a  $Spin(2, 2)$  en el primer paso y la adición de una constante perteneciente a  $\mathbb{R}^{2,2}$  en el segundo paso, corresponden a un movimiento rígido en  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

## Parte III

# Aplicaciones de la fórmula de representación espinorial





# CAPÍTULO 5

---

## Superficies Lorentzianas en pseudo espacios de forma de $\mathbb{R}^{2,2}$

---

Nuestro objetivo en el presente capítulo es conseguir la representación espinorial de una superficie Lorentziana en los pseudo espacios de forma 3–dimensionales de  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Estos pseudo espacios son los espacios de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$ ,  $\mathbb{R}^{1,2}$  y las pseudo esferas  $\mathbb{H}^{2,1}$ ,  $\mathbb{S}^{1,2}$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

La relevancia de los resultados que presentaremos radica en su simplicidad. Caracterizaremos la inmersión isométrica de una superficie Lorentziana en los pseudo espacios de forma en términos de un campo espinorial intrínseco que es solución de una ecuación de Dirac sobre la superficie; así, nuestros resultados son más simples a los dados por M. A. Lawn y J. Roth [32, 33, 34] en donde requieren dos campos espinoriales para la representación.

Como consecuencia de las caracterizaciones descritas en el párrafo anterior conseguimos lo siguiente.

- Una fórmula de representación explícita de la inmersión en  $\mathbb{R}^{2,1}$  (resp.  $\mathbb{R}^{1,2}$ ) en términos del campo espinorial.
- Una fórmula generalizada de Weierstrass que describe la inmersión conforme de una superficie de Lorentz en  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Esta fórmula coincide con la representación de Weierstrass dada por S. Lee [37]; en particular, cuando la superficie es mínima obtenemos la clásica fórmula de Weierstrass en  $\mathbb{R}^{2,1}$  dada por J. Konderak [27].
- Una transformación entre las superficies Lorentzianas mínimas en las pseudo esferas y las superficies Lorentzianas de curvatura media constante uno en los espacios de Minkowski de  $\mathbb{R}^{2,2}$ ; esta es análoga a la dada por H. B. Lawson [35], en donde asocia a cada superficie mínima en  $\mathbb{S}^3$  una superficie de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$ .

## 5.1. La inmersión inducida a un pseudo espacio de forma

En todo el capítulo vamos a suponer que  $(M, g)$  es una superficie Lorentziana orientada (en espacio y en tiempo) y que  $E$  es un haz vectorial Lorentziano orientado (en espacio y en tiempo) equipado con una conexión compatible. Consideremos  $\Sigma = \Sigma E \otimes \Sigma M$  el haz espinorial producto tensorial y  $D$  su operador de Dirac; vea la Sección 4.3.1.

Con la notación del Capítulo 3, consideremos la acción a la derecha del espacio  $\mathbb{H}_1$  sobre  $\mathbb{H}_0$

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_0 \times \mathbb{H}_1 &\longrightarrow \mathbb{H}_0 \\ (\xi, q) &\longmapsto \sigma i \xi q; \end{aligned}$$

esta acción es  $Spin(2, 2)$ -invariante (la acción de  $Spin(2, 2)$  sobre  $\mathbb{H}_0$  es por multiplicación a la izquierda), por tanto induce una acción por la derecha sobre el haz espinorial  $\Sigma = \Sigma E \otimes \Sigma M$  por elementos en  $\mathbb{H}_1$ . Más explícitamente, tenemos una acción

$$\begin{aligned} \Sigma \otimes \mathbb{H}_1 &\longrightarrow \Sigma \\ (\varphi, q) &\longmapsto \varphi \bullet q \end{aligned}$$

tal que  $[\varphi \bullet q] = \sigma i [\varphi]q$ , donde como antes,  $[\varphi] \in \mathbb{H}_0$  denota las coordenadas de  $\varphi$  en algún marco espinorial.

Con respecto a la acción de Clifford por vectores  $X \in Cl(E \oplus TM)$  este producto satisface

$$X \cdot (\varphi \bullet q) = -(X \cdot \varphi) \bullet \hat{q}, \quad (5.1)$$

para cualesquiera  $\varphi \in \Sigma$  y  $q \in \mathbb{H}_1$ ; la  $H$ -norma satisface

$$H(\varphi \bullet q, \varphi \bullet q) = -H(\varphi, \varphi)H(q, q), \quad (5.2)$$

además, escribiendo  $\varphi = \varphi^+ + \varphi^- \in \Sigma = \Sigma^+ \oplus \Sigma^-$  conseguimos

$$(\varphi \bullet q)^\pm = \varphi^\pm \bullet q. \quad (5.3)$$

En todo el capítulo, vamos a suponer también que el haz vectorial  $E$  es trivial, esto es,  $E = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_1$  donde  $e_0$  y  $e_1$  son secciones paralelas y ortonormales de  $E$  tales que  $\langle e_0, e_0 \rangle = -1$  y  $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ ; además, asumiremos que  $e_0$  es futuro dirigido y que el marco  $(e_0, e_1)$  está positivamente orientado. Por otro lado, consideremos  $\vec{H}$  una sección de  $E$  y  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$  una solución de la ecuación de Dirac

$$D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi, \quad H(\varphi, \varphi) = 1. \quad (5.4)$$

De acuerdo con el teorema de representación espinorial (Teorema 4.3.1), el campo espinorial  $\varphi$  define una inmersión isométrica  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  (única, salvo traslaciones), con haz normal  $E$  y con vector de curvatura media  $\vec{H}$ .

Consideremos los espacios de Minkowski 3–dimensionales  $\mathbb{R}^{2,1}$  y  $\mathbb{R}^{1,2}$  en  $\mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$  dados por

$$\mathbb{R}^{2,1} := (\sigma i I)^\perp \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^{1,2} := (I)^\perp$$

donde  $\sigma i I$  y  $I$  son los primeros vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$ ; el espacio de anti-de Sitter 3–dimensional e índice 1 (ó pseudo espacio hiperbólico)

$$\mathbb{H}^{2,1} := \left\{ x \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \langle x, x \rangle = -1 \right\} \subset \mathbb{R}^{2,2} \quad (5.5)$$

de curvatura constante negativa  $-1$ , y la pseudo esfera 3–dimensional con índice 2

$$\mathbb{S}^{1,2} := \left\{ x \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \langle x, x \rangle = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{2,2} \quad (5.6)$$

de curvatura constante positiva 1.

Consideradas como variedades diferenciables el espacio de anti-de Sitter  $\mathbb{H}^{2,1}$  y la pseudo esfera  $\mathbb{S}^{1,2}$  son difeomorfos a  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$  (vea por ejemplo [43, pag. 108]). Notemos que, con esta definición, los espacios  $\mathbb{R}^{2,1}$  y  $\mathbb{H}^{2,1}$  tienen signatura  $(+ + -)$ , mientras que los espacios  $\mathbb{R}^{1,2}$  y  $\mathbb{S}^{1,2}$  tienen signatura  $(+ - -)$ .

Consideremos  $(e_2, e_3)$  un marco ortonormal positivamente orientado de  $TM$ . En la siguiente proposición, vamos a dar una caracterización de las inmersiones isométricas en los pseudo espacios de forma  $\mathbb{R}^{2,1}$ ,  $\mathbb{R}^{1,2}$ ,  $\mathbb{H}^{2,1}$  y  $\mathbb{S}^{1,2}$  (salvo traslaciones) en términos del campo espinorial  $\varphi$  solución de la ecuación (5.4).

**Proposición 5.1.1.** 1- Asuma que

$$\vec{H} = H e_1 \quad \text{y} \quad e_0 \cdot \varphi = \varphi. \quad (5.7)$$

Entonces la inmersión isométrica  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  pertenece a  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

2- Asuma que

$$\vec{H} = H e_0 \quad \text{y} \quad e_1 \cdot \varphi = -\varphi \bullet I. \quad (5.8)$$

Entonces la inmersión isométrica  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  pertenece a  $\mathbb{R}^{1,2}$ .

3- Considere la función  $F = \langle \langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle$ , y asuma que

$$\vec{H} = e_0 + H e_1 \quad \text{y} \quad dF(X) = \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle \quad (5.9)$$

para todo  $X \in TM$ . Entonces la inmersión isométrica  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  pertenece a  $\mathbb{H}^{2,1}$ .

4- Considere la función  $F = \langle \langle -e_1 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle$ , y asuma que

$$\vec{H} = -H e_0 + e_1 \quad \text{y} \quad dF(X) = \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle \quad (5.10)$$

para todo  $X \in TM$ . Entonces la inmersión isométrica  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  pertenece a  $\mathbb{S}^{1,2}$ .

Recíprocamente, supongamos que la inmersión isométrica  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  pertenece a  $\mathbb{R}^{2,1}$  (resp.  $\mathbb{R}^{1,2}, \mathbb{H}^{2,1}, \mathbb{S}^{1,2}$ ), entonces (5.7) (resp. (5.8), (5.9), (5.10)) es válido para algún marco ortonormal paralelo  $(e_0, e_1)$  de  $E$ .

*Demostración.* 1- Asumamos que (5.7) es válido, calculemos

$$\langle\langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle = \langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle = \sigma i H(\varphi, \varphi) = \sigma i 1.$$

De esta manera, el vector constante  $\sigma i 1 \in \mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$  es normal a la inmersión (por el Teorema 4.4.4, ya que este es  $\xi(e_0)$ ), por tanto, la inmersión pertenece a  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

2- Análogamente, asumiendo que (5.8) es válido, tenemos

$$\langle\langle e_1 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle = -\langle\langle \varphi \bullet I, \varphi \rangle\rangle = -\sigma i \overline{[\varphi]}[\varphi \bullet I] = \overline{[\varphi]}[\varphi] I = I$$

donde  $[\varphi] \in \mathbb{H}_0$  representa el campo espinorial  $\varphi$  en un marco dado  $\tilde{s} \in \tilde{Q}$  adaptado a la base  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  (vea la Sección 4.3.1). El vector constante  $I$  es así normal a la inmersión y conseguimos el resultado.

3- Asumiendo que (5.9) es válido, la función  $F$  es una primitiva de la 1-forma  $\xi(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle$ , y es así la inmersión isométrica definida por  $\varphi$  (que está definida de manera única, salvo traslaciones); ya que la norma de  $\langle\langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \in \mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$  coincide con la norma de  $e_0$  (que es constante igual a  $-1$ ), la inmersión pertenece a  $\mathbb{H}^{2,1}$ .

4- Análogamente, supongamos que (5.10) es válido, la función  $F$  es una primitiva de la 1-forma  $\xi(X)$ , y por tanto, es la inmersión isométrica inducida por  $\varphi$  (única, salvo traslaciones); como  $\langle\langle -e_1 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \in \mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$  tiene norma constante 1, la inmersión pertenece a  $\mathbb{S}^{1,2}$ .

Para las afirmaciones recíprocas, escogemos  $(e_0, e_1)$  tal que  $\langle\langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle = \sigma i 1$  en el primer caso, tal que  $\langle\langle e_1 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle = I$  en el segundo caso, tal que  $\langle\langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle$  es normal a  $\mathbb{H}^{2,1} \subset \mathbb{R}^{2,2}$  en el tercer caso, y tal que  $\langle\langle -e_1 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle$  es normal a  $\mathbb{S}^{1,2} \subset \mathbb{R}^{2,2}$  en el cuarto caso. Escribiendo los espinores en un marco espinorial  $\tilde{s}$  adaptado a  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$ , fácilmente deducimos (5.7) y (5.8). Para el tercer (resp. el cuarto) caso (5.9) (resp. (5.10)) es inmediato pues  $\langle\langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle$  (resp.  $\langle\langle -e_1 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle$ ) es la inmersión.  $\square$

Para realizar la descripción espinorial de las superficies Lorentzianas en los pseudo espacios de forma 3-dimensionales de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , es conveniente separar nuestro estudio en dos casos: cuando el vector normal a la superficie en el pseudo espacio es un vector de tipo espacio (pseudo espacio de forma en  $\mathbb{R}^{2,2}$  de índice 1) o es un vector de tipo tiempo (pseudo espacio de forma en  $\mathbb{R}^{2,2}$  de índice 2).

## 5.2. Superficies Lorentzianas en $\mathbb{R}^{2,1}$ y en $\mathbb{H}^{2,1}$

En esta sección mostraremos como la Proposición 5.1.1 1- y 3- se relaciona con los criterios de representación espinorial de superficies Lorentzianas en  $\mathbb{R}^{2,1}$  y  $\mathbb{H}^{2,1}$  dados por M. A. Lawn [32, 33], y por M.A. Lawn y J. Roth [34] respectivamente.

Vamos a definir un producto escalar real sobre el haz espinorial  $\Sigma M$  de la siguiente manera: sobre  $\mathbb{C}^2$  definamos el producto escalar real

$$\left\langle \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' + ib' \\ c' + id' \end{pmatrix} \right\rangle := \frac{ad' + a'd - bc' - b'c}{2}, \quad (5.11)$$

de signatura  $(2, 2)$ .

Puesto que la acción del grupo espinorial  $Spin(1, 1)$  sobre  $\mathbb{C}^2$  es dada por la multiplicación por  $e^u$  en la primera componente y por  $e^{-u}$  en la segunda componente, el producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es  $Spin(1, 1)$ -invariante, por lo tanto, induce un producto escalar real

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Sigma M \times \Sigma M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Usaremos este producto escalar en esta sección (y sólo en esta sección); como es usual escribiremos  $|\psi|^2 := \langle \psi, \psi \rangle$ . Este producto escalar satisface

$$\langle \psi, \psi' \rangle = \langle \psi', \psi \rangle \quad \text{y} \quad \langle X \cdot_M \psi, \psi' \rangle = -\langle \psi, X \cdot_M \psi' \rangle, \quad (5.12)$$

para cualesquiera  $\psi, \psi' \in \Sigma M$  y  $X \in TM$ .

Finalmente, consideremos la estructura compleja canónica  $i$  de  $\Sigma M$ , esta es lineal con respecto a la acción de Clifford de  $TM$ , *i.e.*

$$i (X \cdot_M \psi) = X \cdot_M (i \psi),$$

para cada  $X \in TM$ .

Asuma que  $M \subset \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{2,2}$ , donde  $\mathcal{H}$  es el hiperplano  $\mathbb{R}^{2,1}$ , o el espacio de anti-de Sitter  $\mathbb{H}^{2,1}$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , y considere  $e_0, e_1$  campos vectoriales unitarios de tipo tiempo y de tipo espacio respectivamente, tal que

$$\mathbb{R}^{2,2} = \mathbb{R}e_0 \oplus_{\perp} T\mathcal{H} \quad \text{y} \quad T\mathcal{H} = \mathbb{R}e_1 \oplus_{\perp} TM.$$

Los espinores intrínsecos de  $M$  se identifican con los espinores de  $\mathcal{H}$  restringidos a  $M$ , que a su vez se identifican con los espinores positivos de  $\mathbb{R}^{2,2}$  restringidos a  $M$ . Este es el contenido de la siguiente proposición.

**Proposición 5.2.1.** *Existe una identificación de haces espinoriales*

$$\begin{aligned}\Sigma M &\xrightarrow{\sim} \Sigma^+ \\ \psi &\longmapsto \psi^*,\end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ -lineal, y tal que, para cualesquiera  $X \in TM$  y  $\psi \in \Sigma M$ ,

$$(\nabla_X \psi)^* = \nabla_X \psi^*; \quad (5.13)$$

las acciones de Clifford están relacionadas por

$$(X \cdot_M \psi)^* = X \cdot e_1 \cdot \psi^*, \quad (5.14)$$

para cada  $X \in TM$ , y se satisface

$$H(\psi^*, \psi^*) = \frac{1 + \sigma}{2} |\psi|^2. \quad (5.15)$$

*Demostración.* Con la notación de la Sección 4.3.1, el haz espinorial de  $M$  y el haz espinorial positivo de  $\mathbb{R}^{2,2}$  restringido a  $M$  vienen dados por

$$\Sigma M = \tilde{Q}_M \times_{\rho_1} \mathbb{C}^2 \quad \text{y} \quad \Sigma^+ = \tilde{Q} \times_{\rho^+} S^+,$$

donde  $\rho_1 : Spin(1,1) \rightarrow End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$  es la representación espinorial del grupo  $Spin(1,1)$  y donde

$$\rho^+ : Spin'(1,1) \times Spin''(1,1) \subset Spin(2,2) \rightarrow End_{\mathbb{C}}(S^+)$$

es la representación espinorial del grupo de estructura  $Spin'(1,1) \times Spin''(1,1)$ , dada por  $(g_1, g_2) \mapsto \rho^+(g_1 g_2)$  para cada  $(g_1, g_2) \in Spin'(1,1) \times Spin''(1,1)$ ; vea (3.26).

Si consideramos  $\tilde{s}_0 \in \tilde{Q}_E$  marco espinorial que esta sobre el marco ortonormal paralelo y globalmente definido  $(e_0, e_1)$  de  $E$ , y el encaje canónico

$$Spin(1,1) \ni g \hookrightarrow (1, g) \in Spin'(1,1) \times Spin''(1,1) \subset Spin(2,2),$$

conseguimos un encaje natural de haces principales  $Spin(1,1)$ -equivariante

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_M &\hookrightarrow \tilde{Q}_E \times_M \tilde{Q}_M \\ \tilde{s} &\mapsto (\tilde{s}_0, \tilde{s}).\end{aligned}$$

Por otro lado, la aplicación lineal  $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow S^+$  definida por

$$h \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix} := \frac{1 + \sigma}{4} \left[ (a + d)1 + i(d - a)I + (b - c)J - i(b + c)K \right].$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales complejos  $Spin(1,1)$ -equivariante, *i.e.* para cua-

lesquiera  $g \in Spin(1, 1)$  y  $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$  se satisface

$$h\left(\rho_1(g)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \rho^+(g)h\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

La prueba de esta afirmación es directa, basta notar que si  $u \in \mathbb{R}$  es el parámetro que determina a  $g \in Spin(1, 1)$ ,  $\rho_1(g)$  actúa sobre  $\mathbb{C}^2$  por la multiplicación por  $\pm e^u$  en la primera componente y por  $\pm e^{-u}$  en la segunda.

Finalmente, la aplicación  $\left[\tilde{s}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] \mapsto \left[(\tilde{s}_0, \tilde{s}), h\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right]$  es el isomorfismo buscado entre los haces espinoriales  $\Sigma M$  y  $\Sigma^+$ . La propiedades del isomorfismo se obtienen directamente: usando el hecho que  $\tilde{s}_0$  es paralelo conseguimos (5.13); las propiedades (5.14)-(5.15) se las obtiene por un calculo directo.  $\square$

Si denotamos por  $D_M$  el operador de Dirac intrínseco sobre  $M$  definido por

$$D_M\psi = -e_2 \cdot_M \nabla_{e_2}\psi + e_3 \cdot_M \nabla_{e_3}\psi,$$

donde  $(e_2, e_3)$  es un marco ortonormal positivamente orientado de  $TM$  y  $\psi \in \Sigma M$ , y usando (5.13)-(5.14), obtenemos una relación entre el operador de Dirac  $D_M$  con el operador de Dirac  $D$  del haz espinorial  $\Sigma$  dada para cada  $\psi \in \Sigma M$  por

$$(D_M\psi)^* = -e_2 \cdot e_1 \cdot \nabla_{e_2}\psi^* + e_3 \cdot e_1 \cdot \nabla_{e_3}\psi^* = -e_1 \cdot D\psi^*. \quad (5.16)$$

Si  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$  es una solución de la ecuación (5.4), podemos considerar  $\psi \in \Sigma M$  tal que  $\psi^* = \varphi^+$ ; de (5.16), este satisface

$$(D_M\psi)^* = -e_1 \cdot \vec{H} \cdot \psi^*. \quad (5.17)$$

Note también que  $\psi \neq 0$ , ya que  $H(\varphi, \varphi) = 1$ : si  $\psi = 0$ , tendríamos  $\varphi = \varphi^-$  y por tanto  $1 = H(\varphi, \varphi) = H(\varphi^-, \varphi^-) \in \frac{1-\sigma}{2}\mathbb{R}$ , lo que es imposible. Aquí y en adelante, la descomposición  $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$  representa la descomposición  $\Sigma = \Sigma^+ \oplus \Sigma^-$ .

**Superficies en el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$ .** Presentamos el teorema de representación espinorial de superficies Lorentzianas en el espacio de Minkowski 3-dimensional  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

**Teorema 5.2.2.** *Supongamos que  $M \subset \mathbb{R}^{2,1}$  es una superficie Lorentziana con curvatura media  $H$ , entonces existe un campo espinorial  $\psi \in \Sigma M$  solución de la ecuación de Dirac*

$$D_M\psi = H\psi, \quad |\psi|^2 = 1. \quad (5.18)$$

*Recíprocamente, supongamos que  $(M, g)$  es una superficie Lorentziana, que  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable dada y que existe un campo espinorial  $\psi \in \Sigma M$  solución de (5.18). Entonces existe una inmersión isométrica de  $(M, g)$  en  $\mathbb{R}^{2,1}$  con curvatura media  $H$ .*



*Demostración.* Supongamos inicialmente que  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ ; recordemos que la inmersión  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  es inducida por un campo espinorial  $\varphi$  (la restricción a la superficie de un campo espinorial constante de  $\mathbb{R}^{2,2}$ ) y que toma valores en  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Ya que  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$  es solución de la ecuación (5.4), usando (5.7) y (5.17), el campo espinorial  $\psi \in \Sigma M$  definido por  $\psi^* := \varphi^+$  satisface

$$(D_M \psi)^* = -e_1 \cdot \vec{H} \cdot \psi^* = -He_1^2 \cdot \psi^* = H\psi^*;$$

además, ya que  $e_0 \cdot \varphi^+ = \varphi^-$ , podemos calcular

$$H(\varphi, \varphi) = H(\psi^*, \psi^*) + H(e_0 \cdot \psi^*, e_0 \cdot \psi^*) = H(\psi^*, \psi^*) + H(\widehat{e_0^2 \cdot \psi^*}, \psi^*) = 2\Re H(\psi^*, \psi^*),$$

por tanto (5.15) implica

$$1 = H(\varphi, \varphi) = |\psi|^2.$$

Recíprocamente, supongamos que  $\psi \in \Sigma M$  es una solución de la ecuación (5.18), definamos  $\varphi^+ := \psi^*$  y  $\varphi^- := e_0 \cdot \psi^*$ , entonces el campo espinorial

$$\varphi := \varphi^+ + \varphi^- = \psi^* + e_0 \cdot \psi^* \in \Sigma$$

satisface la ecuación (5.4) con  $\vec{H} := He_1$ . En efecto, puesto que  $e_0$  es paralelo,

$$\begin{aligned} D\varphi &= D\psi^* - e_0 \cdot D\psi^* = e_1 \cdot (D_M \psi)^* - e_0 \cdot e_1 \cdot (D_M \psi)^* \\ &= e_1 \cdot (H\psi)^* + e_1 \cdot e_0 \cdot (H\psi)^* \\ &= He_1 \cdot (\psi^* + e_0 \cdot \psi^*); \end{aligned}$$

y la norma de  $\varphi$  es  $H(\varphi, \varphi) = |\psi|^2 = 1$ . Así, existe una inmersión isométrica de  $(M, g) \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  con vector de curvatura media  $\vec{H}$ ; ya que (5.7) es válido, la inmersión pertenece a  $\mathbb{R}^{2,1}$ .  $\square$

Una solución de (5.18) es equivalente a una inmersión isométrica de la superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Obtenemos así una caracterización espinorial de las inmersiones isométricas de superficies Lorentzianas en  $\mathbb{R}^{2,1}$ , más simple a la representación espinorial obtenida en [32, 33] en donde se requieren dos campos espinoriales para dicha representación.

En lo que sigue, describiremos una fórmula de representación explícita para la inmersión. Para todo  $\psi \in \Sigma M$ , denotaremos por  $\alpha(\psi)$  el campo espinorial cuyas coordenadas, en un marco espinorial dado, son las conjugadas complejas de las coordenadas de  $\psi$  en este marco, y por  $\bar{\psi} := \psi^+ - \psi^-$ , la conjugación usual en  $\Sigma M$ . Si suponemos además que  $|\psi|^2 = 1$ , escribiendo  $\chi := \bar{\psi}$ , de un cálculo directo podemos mostrar que el conjunto

$$\left\{ \chi, \alpha(\chi), i\chi, i\alpha(\chi) \right\} \tag{5.19}$$

es  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ortonormal con signatura  $(-, +, -, +)$ ; en particular, es una base real de  $\Sigma M$  ( $i$  es la estructura compleja natural de  $\Sigma M$ , tal que la acción de Clifford es  $\mathbb{C}$ -lineal).

**Proposición 5.2.3.** *Supongamos que  $\psi \in \Sigma M$  es una solución de la ecuación (5.18) y definamos  $\varphi := \psi^* + e_0 \cdot \varphi^* \in \Sigma$ . Entonces, para todo  $X \in TM$  se satisface*

$$\begin{aligned}\xi(X) &= \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \\ &= -\langle X \cdot_M \psi, \alpha(\chi) \rangle I + \langle X \cdot_M \psi, i\chi \rangle (iJ) - \langle X \cdot_M \psi, i\alpha(\chi) \rangle K.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Notemos que  $\langle X \cdot_M \psi, \chi \rangle = 0$  y por tanto  $\xi(X)$  puede ser interpretado como las coordenadas de  $X \cdot_M \psi$  en la base ortonormal (5.19). La fórmula  $F = \int \xi$  representa la inmersión.

*Demostración.* Por un cálculo directo podemos mostrar la igualdad

$$\langle\langle \psi_1^*, \psi_2^* \rangle\rangle = \frac{1 + \sigma}{2} (\langle \psi_1, \psi_2 \rangle iI - \langle \psi_1, \alpha(\psi_2) \rangle I + \langle \psi_1, i\psi_2 \rangle iJ - \langle \psi_1, i\alpha(\psi_2) \rangle K), \quad (5.21)$$

para cualesquiera  $\psi_1, \psi_2 \in \Sigma M$ .

El campo espinorial  $\varphi = \psi^* + e_0 \cdot \psi^*$  induce una inmersión de la superficie en  $\mathbb{R}^{2,1}$  (vea la prueba del Teorema 5.2.2) cuya derivada es dada por

$$\xi(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle = \langle\langle (X \cdot_M \psi)^*, (\overline{\psi})^* \rangle\rangle + \langle\langle \widehat{(X \cdot_M \psi)^*}, (\overline{\psi})^* \rangle\rangle;$$

usando la igualdad (5.21) obtenemos directamente la fórmula (5.20).

Por otro lado, de (5.14) tenemos

$$(X \cdot_M \overline{\psi})^* = X \cdot e_1 \cdot \overline{\psi}^* = X \cdot e_1 \cdot e_0 \cdot e_1 \cdot \psi = X \cdot e_0 \cdot \psi^*,$$

así, de (5.12) y (5.15) conseguimos

$$\langle X \cdot_M \psi, \overline{\psi} \rangle = -\langle X \cdot_M \overline{\psi}, \psi \rangle = -2\Re H((X \cdot_M \overline{\psi})^*, \psi^*) = -2\Re H(X \cdot e_0 \cdot \psi^*, \psi^*) = 0,$$

donde la última igualdad es válida por (4.30). □

La representación espinorial de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,1}$  (Teorema 5.2.2) y la fórmula explícita de la inmersión (5.20), nos permite deducir una fórmula generalizada de Weierstrass en  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Para cada  $a \in \mathcal{A}$  escribiremos  $|a|^2 := a\widehat{a}$ .

**Teorema 5.2.4.** *Consideremos tres funciones diferenciables  $\psi_1, \psi_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  y  $p : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que*

$$\begin{aligned}\partial_a \psi_1 &= -p\psi_2 \\ \partial_a \psi_2 &= -p\psi_1\end{aligned}\quad (5.22)$$

y  $|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 \neq 0$ . Denotaremos por  $\gamma$  a una curva arbitraria desde un punto fijo a un punto arbitrario en  $\mathcal{A}$ . Las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_{\gamma} \left( \psi_2 \widehat{\psi}_1 da + \widehat{\psi}_2 \psi_1 d\widehat{a} \right), \\
F_2 + \sigma F_3 &= \int_{\gamma} \left( \widehat{\psi}_1^2 da + \widehat{\psi}_2^2 d\widehat{a} \right), \\
F_2 - \sigma F_3 &= \int_{\gamma} \left( \psi_2^2 da + \psi_1^2 d\widehat{a} \right),
\end{aligned} \tag{5.23}$$

definen una inmersión conforme  $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$  de una superficie de Lorentz. La métrica inducida de la inmersión es dada por

$$g = -(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2 da d\widehat{a}, \tag{5.24}$$

y la curvatura media de la inmersión satisface

$$H^2 = 4 \frac{p^2}{(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2}. \tag{5.25}$$

Recíprocamente, una inmersión isométrica de una superficie Lorentziana simplemente conexa en el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$  puede ser descrita como encima.

El teorema de encima es una generalización al caso Lorentziano de la fórmula generalizada de Weierstrass de una superficie en  $\mathbb{R}^3$  (vea por ejemplo [30, Section 2]).

Las funciones  $\psi_1, \psi_2$  representan (salvo una identificación) las componentes de un campo espinorial  $\psi \in \Sigma M$ , en un marco espinorial adecuado, solución de la ecuación de Dirac (5.18). Nuestro trabajo será encontrar dicho marco.

*Demostración del Teorema 5.2.4.* La prueba de la afirmación directa se obtiene fácilmente. En principio, notemos que el sistema (5.22) implica

$$\partial_a(\widehat{\psi}_2 \psi_1) = \partial_{\widehat{a}}(\psi_2 \widehat{\psi}_1) \quad \text{y} \quad \partial_a(\psi_1^2) = \partial_{\widehat{a}}(\psi_2^2),$$

así, las fórmulas en (5.23) no dependen de la curva  $\gamma$ . La métrica inducida  $g = dF_1^2 - dF_2^2 + dF_3^2$  y la curvatura media de la inmersión se obtienen de un cálculo directo.

Recíprocamente, consideremos  $(M, g)$  una superficie Lorentziana simplemente conexa en  $\mathbb{R}^{2,1}$  con curvatura media  $H$ ; supongamos  $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$  es dado como en el Teorema 5.2.2 y fijemos  $(e_2, e_3)$  un marco ortonormal positivamente orientado de  $TM$ . Consideremos  $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$  una solución de la ecuación

$$\square \alpha = -d\langle [e_2, e_3], e_2 \rangle (e_2) + d\langle [e_2, e_3], e_3 \rangle (e_3), \tag{5.26}$$

donde  $\square$  es el operador de d'Alembert (*i.e.* el operador de Laplace en signatura  $(1, 1)$ ) definido por  $\square \alpha := \text{div}(\text{grad } \alpha)$ .

Definamos el marco tangente

$$\mathbf{e}_2 := \cosh \alpha e_2 + \sinh \alpha e_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_3 := \sinh \alpha e_2 + \cosh \alpha e_3$$

obtenido por una rotación del ángulo Lorentziano  $\alpha$  del marco tangente  $(e_2, e_3)$ .

Existe una función no nula  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^*$  tal que  $[\lambda \mathbf{e}_2, \lambda \mathbf{e}_3] = 0$ . En efecto, notemos que la condición  $[\lambda \mathbf{e}_2, \lambda \mathbf{e}_3] = 0$  es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} d\lambda(e_3) = d\alpha(e_2) - \langle \nabla_{e_2} e_3, e_2 \rangle \\ \frac{1}{\lambda} d\lambda(e_2) = d\alpha(e_3) + \langle \nabla_{e_3} e_2, e_3 \rangle. \end{cases} \quad (5.27)$$

Supongamos que  $\lambda > 0$  y escribamos  $\lambda = e^\mu$ ; el sistema (5.27) queda como  $d\mu = \omega$ , donde

$$\omega := -(d\alpha(e_3) + \langle \nabla_{e_3} e_2, e_3 \rangle) e_2^* + (d\alpha(e_2) - \langle \nabla_{e_2} e_3, e_2 \rangle) e_3^*,$$

y donde  $e_j^*(X) = \langle X, e_j \rangle$  denota la 1-forma dual a  $e_j$  ( $j = 2, 3$ ). Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad del sistema (5.27) es  $0 = d(d\mu) = d\omega$ , i.e.

$$d(\omega(Y))(X) - d(\omega(X))(Y) - \omega([X, Y]) = 0,$$

para cualesquiera  $X, Y \in TM$ ; de un cálculo directo, esta ecuación equivale a (5.26), así (5.27) es soluble. Por tanto, existe un sistema de coordenadas  $(\partial_u, \partial_v)$  sobre la superficie tal que

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\partial_u}{\lambda} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial_v}{\lambda}.$$

Supongamos que  $\lambda > 0$  y que el marco  $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  se encuentra positivamente orientado. De un cálculo directo conseguimos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3 - \langle \nabla_{\mathbf{e}_3} \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_2 &= (d\alpha(e_2) - \langle \nabla_{e_2} e_3, e_2 \rangle) e_3 - (d\alpha(e_3) + \langle \nabla_{e_3} e_2, e_3 \rangle) e_2, \\ &= \frac{1}{\lambda} d\lambda(e_3) e_3 - \frac{1}{\lambda} d\lambda(e_2) e_2, \\ &= -\frac{\partial_u \lambda}{\lambda^2} \frac{\partial_u}{\lambda} + \frac{\partial_v \lambda}{\lambda^2} \frac{\partial_v}{\lambda}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde usamos el sistema (5.27) en la segunda igualdad.

Consideremos ahora  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$  un marco ortonormal positivamente orientado normal a  $M$ , tal que  $s = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  es un marco adaptado a la inmersión en  $\mathbb{R}^{2,1}$ , es decir,  $\mathbb{R}^{2,1} = (\mathbf{e}_0)^\perp$ . Consideremos  $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) \in \tilde{Q}$  un marco espinorial sobre el marco  $s$  tal que las coordenadas de  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$  en  $\tilde{s}$  son respectivamente  $\sigma i1, I, iJ$  y  $K \in \mathbb{H}_1$ , y supongamos que

$$\psi = \left[ \tilde{s}_2, \begin{pmatrix} a' + ib' \\ c' + id' \end{pmatrix} \right] \in \Sigma M.$$

Consideremos el parámetro conforme  $a = u + \sigma v : U \subset \mathcal{A} \rightarrow M$ , y las funciones

$$\psi_1 := \frac{1+\sigma}{2}a' + \frac{1-\sigma}{2}d' \quad \text{y} \quad \psi_2 := \frac{1+\sigma}{2}c' + \frac{1-\sigma}{2}b' \in \widehat{\mathcal{A}}.$$

Usando el isomorfismo de la Proposición 5.2.1 y la igualdad en (5.28), la ecuación de Dirac  $D_M\psi = H\psi$  se escribe como

$$\begin{aligned} \partial_a(\sqrt{\lambda}\psi_1) &= -\frac{\lambda}{2}H(\sqrt{\lambda}\psi_2) \\ \partial_{\widehat{a}}(\sqrt{\lambda}\psi_2) &= -\frac{\lambda}{2}H(\sqrt{\lambda}\psi_1), \end{aligned}$$

conseguimos así (5.22).

Escribiendo  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  y  $X := m\frac{\partial_u}{\lambda} + n\frac{\partial_v}{\lambda} \in TM$ , el producto de Clifford se escribe como

$$X \cdot_M \psi = \begin{pmatrix} z\psi_2 \\ \widehat{z}\psi_1 \end{pmatrix}, \quad z := m + \sigma n,$$

y la norma de  $\psi$  (definida en (5.11)) satisface  $|\psi|^2 = |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2$ ; además, no es difícil verificar

$$\alpha(\chi) = \begin{pmatrix} -\psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad i\chi = \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_2 \\ -\widehat{\psi}_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad i\alpha(\chi) = -\sigma \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_2 \\ -\widehat{\psi}_1 \end{pmatrix}.$$

Así, la inmersión (5.20) (inducida por el campo espinorial  $\psi$ ) se escribe como

$$\xi(X) = \left( \psi_2\widehat{\psi}_1 z + \widehat{\psi}_2\psi_1\widehat{z} \right) I + \frac{1}{2} \left( (\widehat{\psi}_1^2 + \psi_2^2)z + (\psi_1^2 + \widehat{\psi}_2^2)\widehat{z} \right) (iJ) + \frac{\sigma}{2} \left( (\widehat{\psi}_1^2 - \psi_2^2)z - (\psi_1^2 - \widehat{\psi}_2^2)\widehat{z} \right) K,$$

ya que  $z = \lambda da(X)$  y  $\widehat{z} = \lambda d\widehat{a}(X)$  conseguimos las fórmulas en (5.23).  $\square$

En el caso particular en que la función  $p \equiv 0$ , obtenemos la clásica representación de Weierstrass para superficies Lorentzianas mínimas en  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

**Corolario 5.2.5.** *Las siguientes fórmulas*

$$\begin{aligned} F_1 &= \Re e \int_{\gamma} \frac{1}{2} \chi_1 \chi_2 da, \\ F_2 &= \Re e \int_{\gamma} (\chi_1^2 + \chi_2^2) da, \\ F_3 &= \Im m \int_{\gamma} (\chi_1^2 - \chi_2^2) da, \end{aligned} \tag{5.29}$$

donde  $\chi_1 = \widehat{\psi}_1$  y  $\chi_2 = \psi_2$  son aplicaciones conformes, definen una inmersión conforme de una superficie de Lorentz mínima en  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

**Observación 5.2.6.** La inmersión mínima conforme (5.29), es similar a la fórmula dada por J. Konderak [27, Theorem 4]: supongamos que  $|\chi_1|^2 \neq 0$  y escribamos

$$\Phi := \chi_1^2 da \quad y \quad g := \frac{\chi_2}{\chi_1},$$

entonces  $\Phi$  es una 1-forma conforme tal que  $\widehat{\Phi}\widehat{\Phi} > 0$  y  $1 - g\widehat{g} \neq 0$ , con esto (5.29) es dada por

$$(F_1, F_2, F_3) = \left( \Re \int_{\gamma} \frac{1}{2} g \Phi, \Re \int_{\gamma} (1 + g^2) \Phi, \Re \int_{\gamma} \sigma(1 - g^2) \Phi \right),$$

que coincide con la fórmula dada por J. Konderak.

**Superficies Lorentzianas en el espacio de anti-de Sitter  $\mathbb{H}^{2,1}$ .** Supongamos inicialmente que la inmersión inducida  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  pertenece a  $\mathbb{H}^{2,1}$ , i.e.  $\mathcal{H} = \mathbb{H}^{2,1}$ ; la Proposición 5.1.1, garantiza que existe localmente un marco ortonormal paralelo  $(e_0, e_1)$  positivamente orientado de  $E$  que satisface (5.9).

Con respecto al isomorfismo de haces espinoriales de la Proposición 5.2.1, consideremos el campo espinorial  $\psi \in \Sigma M$  (tal que  $|\psi|^2 \neq 0$  ya que  $H(\varphi, \varphi) = 1$ ) dado por

$$\varphi^+ = \psi^*, \tag{5.30}$$

donde  $\varphi = \varphi^+ + \varphi^- \in \Sigma = \Sigma^+ \oplus \Sigma^-$  es la descomposición usual del haz espinorial. Usando la relación (5.17) el campo espinorial  $\psi$  satisface

$$(D_M \psi)^* = -e_1 \cdot \vec{H} \cdot \psi^* = -e_1 \cdot (e_0 + H e_1) \cdot \psi^* = H \psi^* + \bar{\psi}^*, \tag{5.31}$$

donde  $\bar{\psi} = \psi^+ - \psi^-$  es la conjugación usual en  $\Sigma M$  que satisface  $e_0 \cdot e_1 \cdot \psi^* = \bar{\psi}^*$ .

La segunda hipótesis de (5.9) indica que la función  $F = \langle \langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle : M \rightarrow \mathbb{H}^{2,1}$  es la inmersión inducida por el campo espinorial  $\varphi$ , i.e. para cada  $X \in TM$  se satisface

$$d(\langle \langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle)(X) = \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle. \tag{5.32}$$

Ya que  $\varphi$  resuelve la ecuación  $\nabla_X \varphi = \eta(X) \cdot \varphi$  (Teorema 4.3.1), de un cálculo directo tenemos

$$d(\langle \langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle)(X) = \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle \quad \text{sii} \quad [\eta(X)] - \widehat{[\eta(X)]} = \sigma i[X], \tag{5.33}$$

para cada  $X \in TM$ . Escribiendo  $\eta(X) = X_1 \cdot e_0 + X_2 \cdot e_1$ , donde  $X_1, X_2 \in TM$  dependen de  $X$ , y usando la relación (5.14) tenemos

$$\begin{aligned} \nabla_X \psi^* &= \eta(X) \cdot \psi^* = X_1 \cdot e_1 \cdot e_0 \cdot e_1 \cdot \psi^* + (X_2 \cdot_M \psi)^* \\ &= X_1 \cdot e_1 \cdot \bar{\psi}^* + (X_2 \cdot_M \psi)^* \\ &= (X_1 \cdot_M \bar{\psi})^* + (X_2 \cdot_M \psi)^*, \end{aligned}$$

por tanto, de (5.15) conseguimos

$$\begin{aligned}
d(|\psi|^2)(X) &= 2\langle \nabla_X \psi, \psi \rangle = 4\Re e H(\nabla_X \psi^*, \psi^*) \\
&= 4\Re e H((X_1 \cdot_M \bar{\psi})^*, \psi^*) + 4\Re e H((X_2 \cdot_M \psi)^*, \psi^*) \\
&= 2\langle X_1 \cdot_M \bar{\psi}, \psi \rangle + 2\langle X_2 \cdot_M \psi, \psi \rangle;
\end{aligned}$$

el segundo sumando de la derecha es cero por (5.12), y ya que

$$\begin{aligned}
[\eta(X)] - \widehat{[\eta(X)]} &= [X_1][\widehat{e_0}] + [X_2][\widehat{e_1}] - \widehat{[X_1][e_0]} - \widehat{[X_2][e_1]} \\
&= -\sigma i[X_1] + [X_2]I - \sigma i[X_1] - [X_2]I \\
&= -2\sigma i[X_1],
\end{aligned}$$

tenemos  $[X_1] = -\frac{1}{2}[X]$ , de donde conseguimos

$$d(|\psi|^2)(X) = -\langle X \cdot_M \bar{\psi}, \psi \rangle. \quad (5.34)$$

Ya que  $\langle X \cdot_M \bar{\psi}, \psi \rangle = 0$  (vea la Proposición 5.2.4), tenemos  $|\psi|^2 = cte \neq 0$ .

Por otro lado, como la descomposición  $\Sigma = \Sigma^+ \oplus \Sigma^-$  es  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ -ortogonal, tenemos que (5.32) equivale a

$$d(\langle \langle e_0 \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle \rangle)(X) = \langle \langle X \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle \rangle.$$

Escribiendo  $F_1 := \langle \langle e_0 \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle \rangle$ , tenemos  $F = F_1 - \widehat{F_1}$  y además

$$-1 = \langle F, F \rangle = \overline{F}F = H(F_1, F_1) + H(\widehat{F_1}, F_1) = 2\Re e H(F_1, F_1) = 2\langle F_1, F_1 \rangle;$$

notemos que

$$H(F_1, F_1) = -\overline{[e_0 \cdot \varphi^-]}[\varphi^+][\overline{\varphi^+}][e_0 \cdot \varphi^-] = -\frac{1+\sigma}{2}|\psi|^2 H(e_0 \cdot \varphi^-, e_0 \cdot \varphi^-) = -\frac{1+\sigma}{2}|\psi|^2 H(\widehat{\varphi^-, \varphi^-}),$$

así,

$$-\frac{1}{2} = \langle F_1, F_1 \rangle = \Re e H(F_1, F_1) = -|\psi|^2 \Re e H(\varphi^-, \varphi^-), \quad (5.35)$$

de donde  $H(\varphi^-, \varphi^-) = \frac{1-\sigma}{2} \frac{1}{|\psi|^2}$  (ya que  $H(\varphi^-, \varphi^-) \in \frac{1-\sigma}{2}\mathbb{R}$ ). Por tanto,

$$1 = H(\varphi, \varphi) = H(\varphi^+, \varphi^+) + H(\varphi^-, \varphi^-) = \frac{1+\sigma}{2}|\psi|^2 + \frac{1-\sigma}{2} \frac{1}{|\psi|^2}$$

implica  $|\psi|^2 \equiv 1$ .

Finalmente, usando (5.31) tenemos que el campo espinorial  $\psi \in \Sigma M$ , definido por  $\psi^* = \varphi^+$ , satisface la ecuación de Dirac

$$D_M \psi = H\psi + \bar{\psi}, \quad |\psi|^2 = 1. \quad (5.36)$$

Recíprocamente, consideremos  $(M, g)$  superficie Lorentziana orientada (abstracta) y  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable dada. Supongamos que existe un campo espinorial  $\psi \in \Sigma M$  que satisface la ecuación (5.36); definamos  $\varphi^+ := \psi^* \in \Sigma^+$  y  $\vec{H} := e_0 + He_1$  donde  $(e_0, e_1)$  es algún marco ortonormal paralelo positivamente orientado de  $E$ , entonces

$$D\varphi^+ = e_1 \cdot (D_M\psi)^* = He_1\psi^* + e_1 \cdot e_0 \cdot e_1 \cdot \psi^* = (e_0 + He_1) \cdot \psi^* = \vec{H} \cdot \varphi^+, \quad (5.37)$$

y además, usando (5.15) conseguimos

$$\overline{[\varphi^+]}[\varphi^+] = H(\varphi^+, \varphi^+) = H(\psi^*, \psi^*) = \frac{1 + \sigma}{2}. \quad (5.38)$$

Buscaremos ahora la manera de definir un campo espinorial  $\varphi^- \in \Sigma^-$  que resuelva la ecuación

$$D\varphi^- = \vec{H} \cdot \varphi^-$$

con  $H(\varphi^-, \varphi^-) = \frac{1-\sigma}{2}$ ; esto junto con (5.37)-(5.38) nos permitirá concluir que  $\varphi := \varphi^+ + \varphi^- \in \Sigma$  es solución de la ecuación de Dirac

$$D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$$

con  $H(\varphi, \varphi) = 1$ . Notemos que  $\varphi^-$  debe ser definido tal que la función

$$F = \langle\langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle = \langle\langle e_0 \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle\rangle - \widehat{\langle\langle e_0 \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle\rangle}$$

sea la inmersión inducida por  $\varphi$ , i.e.  $dF(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle$ , para cada  $X \in TM$ .

**Lema 5.2.7.** *Consideremos una función  $F_1 : M \rightarrow \frac{1+\sigma}{2}\mathbb{H}_1$  tal que  $\langle F_1, F_1 \rangle = -\frac{1}{2}$ . Si el campo espinorial  $\varphi^-$  es solución del sistema*

$$\begin{cases} F_1 = \langle\langle e_0 \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle\rangle \\ dF_1(X) = \langle\langle X \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle\rangle \end{cases} \quad (5.39)$$

entonces  $\varphi^- = -e_0 \cdot (\varphi^+ \bullet F_1)$ . Además,

$$H(\varphi^-, \varphi^-) = \frac{1 - \sigma}{2} \quad (5.40)$$

y la función  $F_1$  resuelve la ecuación en  $\frac{1+\sigma}{2}\mathbb{H}_1$

$$dF_1(X) = \omega(X)F_1, \quad (5.41)$$

donde  $\omega(X) := -\sigma i \langle\langle X \cdot e_0 \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle\rangle$ .

Recíprocamente, supongamos que la función  $F_1 : M \rightarrow \frac{1+\sigma}{2}\mathbb{H}_1$  es solución de (5.41) con  $\langle F_1, F_1 \rangle = -\frac{1}{2}$ . Entonces el campo espinorial  $\varphi^- := -e_0 \cdot (\varphi^+ \bullet F_1)$  satisface (5.40) y resuelve el sistema (5.39).



*Demostración.* Supongamos que  $\varphi^-$  resuelve (5.39). Ya que  $F_1 = \langle \langle e_0 \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle \rangle = \sigma i \overline{[\varphi^+]} [e_0 \cdot \varphi^-]$ , usando (5.38) conseguimos

$$[\varphi^+ \bullet F_1] = \sigma i [\varphi^+] F_1 = -[\varphi^+] \overline{[\varphi^+]} [e_0 \cdot \varphi^-] = -\frac{1+\sigma}{2} [e_0 \cdot \varphi^-] = -[e_0 \cdot \varphi^-],$$

i.e.  $-e_0 \cdot \varphi^- = \varphi^+ \bullet F_1$ , esto implica  $\varphi^- := -e_0 \cdot (\varphi^+ \bullet F_1)$ . La igualdad (5.40) es directa. Ahora, usando la segunda ecuación en (5.39) conseguimos

$$dF_1(X) = \langle \langle X \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle \rangle = -\langle \langle X \cdot e_0 \cdot (\varphi^+ \bullet F_1), \varphi^+ \rangle \rangle = \overline{[\varphi^+]} [X \cdot e_0] [\varphi^+] [F_1] = \omega(X) F_1.$$

Las afirmaciones recíprocas se prueban de manera análoga.  $\square$

Ya que  $\bar{\omega} = -\omega$ , usando (5.41) conseguimos  $H(dF_1(X), F_1) = 0$ , por lo tanto,  $\langle F_1, F_1 \rangle = \Re e H(F_1, F_1)$  es constante. Por otro lado, tomando la derivada exterior

$$0 = d(dF_1) = d(\omega \wedge F_1) = d\omega \wedge F_1 - \omega \wedge dF_1 = (d\omega - \omega \wedge \omega) F_1,$$

la ecuación de compatibilidad de (5.41) es dada por

$$d\omega(X, Y) = \omega(X)\omega(Y) - \omega(Y)\omega(X). \quad (5.42)$$

**Lema 5.2.8.** *La ecuación (5.42) es válida para cada  $X, Y \in TM$ .*

*Demostración.* Note que

$$-\sigma i d\omega(e_3)(e_2) = -\langle \langle \nabla_{e_2} e_3 \cdot e_0 \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle \rangle - \langle \langle e_3 \cdot e_0 \cdot \nabla_{e_2} \varphi^+, \varphi^+ \rangle \rangle - \langle \langle e_3 \cdot e_0 \cdot \varphi^+, \nabla_{e_2} \varphi^+ \rangle \rangle,$$

por tanto,

$$\begin{aligned} -\sigma i d\omega(e_2, e_3) &= \langle \langle e_2 \cdot e_0 \cdot \nabla_{e_3} \varphi^+, \varphi^+ \rangle \rangle - \langle \langle e_3 \cdot e_0 \cdot \nabla_{e_2} \varphi^+, \varphi^+ \rangle \rangle + \langle \langle e_2 \cdot e_0 \cdot \varphi^+, \nabla_{e_3} \varphi^+ \rangle \rangle \\ &\quad - \langle \langle e_3 \cdot e_0 \cdot \varphi^+, \nabla_{e_2} \varphi^+ \rangle \rangle \\ &= \langle \langle e_2 \cdot e_0 \cdot \nabla_{e_3} \varphi^+ - e_3 \cdot e_0 \cdot \nabla_{e_2} \varphi^+, \varphi^+ \rangle \rangle - \overline{\langle \langle e_2 \cdot e_0 \cdot \nabla_{e_3} \varphi^+ - e_3 \cdot e_0 \cdot \nabla_{e_2} \varphi^+, \varphi^+ \rangle \rangle}. \end{aligned}$$

Ahora, usando (5.37) conseguimos

$$\begin{aligned} \langle \langle e_2 \cdot e_0 \cdot \nabla_{e_3} \varphi^+ - e_3 \cdot e_0 \cdot \nabla_{e_2} \varphi^+, \varphi^+ \rangle \rangle &= \langle \langle e_0 \cdot (e_3 \cdot \nabla_{e_2} \varphi^+ - e_2 \cdot \nabla_{e_3} \varphi^+), \varphi^+ \rangle \rangle \\ &= \langle \langle e_0 \cdot (e_3 \cdot e_2 \cdot (e_2 \cdot \nabla_{e_2} \varphi^+) - e_2 \cdot \nabla_{e_3} \varphi^+), \varphi^+ \rangle \rangle \\ &= \langle \langle e_0 \cdot (e_3 \cdot e_2 \cdot (e_3 \cdot \nabla_{e_3} \varphi^+ - \vec{H} \cdot \varphi^+) - e_2 \cdot \nabla_{e_3} \varphi^+), \varphi^+ \rangle \rangle \\ &= \langle \langle e_0 \cdot \vec{H} \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle \rangle \\ &= \langle \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle \rangle + H \langle \langle \varphi^+, \varphi^+ \rangle \rangle, \end{aligned}$$

donde usamos  $\vec{H} = e_0 + He_1$  y que  $e_0 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi^+ = \sigma \cdot \varphi^+ = \varphi^+$ ; notemos que

$$\overline{\langle e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle} + H\langle \varphi^+, \varphi^+ \rangle = -\langle e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle + H\langle \varphi^+, \varphi^+ \rangle,$$

por tanto  $-\sigma i \, d\omega(e_2, e_3) = 2\langle e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} \omega(e_2)\omega(e_3) - \omega(e_3)\omega(e_2) &= -\langle e_2 \cdot e_0 \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle \langle e_3 \cdot e_0 \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle + \langle e_3 \cdot e_0 \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle \langle e_2 \cdot e_0 \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle \\ &= \overline{[\varphi^+][e_2 \cdot e_0][\varphi^+][\varphi^+][e_3 \cdot e_0][\varphi^+]} - \overline{[\varphi^+][e_3 \cdot e_0][\varphi^+][\varphi^+][e_2 \cdot e_0][\varphi^+]} \\ &= -2\frac{1+\sigma}{2}\overline{[\varphi^+][e_2 \cdot e_3][\varphi^+]} \\ &= -2\overline{[\varphi^+][e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi^+]} = 2\sigma i \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle, \end{aligned}$$

así, la ecuación (5.42) es válida.  $\square$

Por lo tanto, la ecuación (5.41) es soluble para alguna función  $F_1$ , y podemos definir el campo espinorial  $\varphi^- := -e_0 \cdot (\varphi^+ \bullet F_1) \in \Sigma^-$ . La siguiente propiedad es fundamental.

**Proposición 5.2.9.** *El campo espinorial  $\varphi^- = -e_0 \cdot (\varphi^+ \bullet F_1) \in \Sigma^-$  satisface la ecuación*

$$D\varphi^- = \vec{H} \cdot \varphi^-. \quad (5.43)$$

*Demostración.* En principio note que (5.1) implica

$$X \cdot \nabla_X(\varphi^+ \bullet F_1) = -(X \cdot \nabla_X \varphi^+) \bullet \widehat{F_1} - (X \cdot \varphi^+) \bullet d\widehat{F_1}(X). \quad (5.44)$$

Vamos a calcular el segundo término de la derecha de (5.44):

$$\widehat{\omega(X)} = -\sigma i \langle X \cdot \widehat{e_0 \cdot \varphi^+}, \varphi^+ \rangle = -\sigma i \langle e_0 \cdot \varphi^+, X \cdot \varphi^+ \rangle = \overline{[X \cdot \varphi^+][e_0 \cdot \varphi^+]},$$

luego  $d\widehat{F_1}(X) = \widehat{\omega(X)}\widehat{F_1} = \overline{[X \cdot \varphi^+][e_0 \cdot \varphi^+]}\widehat{F_1}$ , por tanto,

$$[(X \cdot \varphi^+) \bullet d\widehat{F_1}(X)] = \sigma i [X \cdot \varphi^+] d\widehat{F_1}(X) = \sigma i [X \cdot \varphi^+] \overline{[X \cdot \varphi^+][e_0 \cdot \varphi^+]}\widehat{F_1}, \quad (5.45)$$

pero ya que

$$[X \cdot \varphi^+] \overline{[X \cdot \varphi^+]} = H(X \cdot \varphi^+, X \cdot \varphi^+) = -|X|^2 H(\widehat{\varphi^+}, \varphi^+) = -\frac{1-\sigma}{2}|X|^2$$

y

$$\sigma i [e_0 \cdot \varphi^+] \widehat{F_1} = [(e_0 \cdot \varphi^+) \bullet \widehat{F_1}] = -[e_0 \cdot (\varphi^+ \bullet F_1)] = [\varphi^-]$$

tenemos

$$[(X \cdot \varphi^+) \bullet d\widehat{F_1}(X)] = -\frac{1-\sigma}{2}|X|^2[\varphi^-] = -|X|^2[\varphi^-].$$

Si reemplazamos esta última igualdad en (5.44) conseguimos

$$X \cdot \nabla_X(\varphi^+ \bullet F_1) = -(X \cdot \nabla_X \varphi^+) \bullet \widehat{F}_1 + |X|^2 \varphi^-. \quad (5.46)$$

Usando (5.46) y (5.37) conseguimos

$$\begin{aligned} D(\varphi^+ \bullet F_1) &= (e_2 \cdot \nabla_{e_2} \varphi^+) \bullet \widehat{F}_1 - |e_2|^2 \varphi^- - (e_3 \cdot \nabla_{e_3} \varphi^+) \bullet \widehat{F}_1 + |e_3|^2 \varphi^- \\ &= (e_2 \cdot \nabla_{e_2} \varphi^+ - e_3 \cdot \nabla_{e_3} \varphi^+) \bullet \widehat{F}_1 + 2\varphi^- \\ &= -D\varphi^+ \bullet \widehat{F}_1 + 2\varphi^- \\ &= -(\vec{H} \cdot \varphi^+) \bullet \widehat{F}_1 + 2\varphi^- \\ &= \vec{H} \cdot (\varphi^+ \bullet F_1) + 2\varphi^- \\ &= -\vec{H} \cdot e_0 \cdot \varphi^- + 2\varphi^- \\ &= \varphi^- + H e_0 \cdot e_1 \cdot \varphi^-, \end{aligned}$$

finalmente  $D\varphi^- = e_0 \cdot D(\varphi^+ \bullet F_1) = e_0 \cdot (\varphi^- + H e_0 \cdot e_1 \cdot \varphi^-) = (e_0 + H e_1) \cdot \varphi^-$ .  $\square$

El campo espinorial  $\varphi := \varphi^+ + \varphi^- \in \Sigma$ , donde  $\varphi^+ = \psi^*$  y  $\varphi^- = -e_0 \cdot (\psi^* \bullet F_1)$ , satisface la ecuación de Dirac  $D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$ ; además  $H(\varphi, \varphi) = 1$  (por (5.38) y (5.40)) y la función  $F := F_1 - \widehat{F}_1 = \langle \langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  satisface

$$dF(X) = \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle,$$

con  $\langle F, F \rangle = -1$ . Así, las condiciones de (5.9) son válidas, concluimos que la inmersión isométrica inducida por el campo espinorial  $\varphi$  pertenece a  $\mathbb{H}^{2,1}$ . Hemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 5.2.10.** *Considere  $(M, g)$  una superficie Lorentziana orientada (en espacio y en tiempo) y  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable dada. Son equivalentes:*

1- existe un campo espinorial  $\psi \in \Sigma M$ , que satisface

$$D_M \psi = H\psi + \bar{\psi}, \quad |\psi|^2 = 1; \quad (5.47)$$

2- existe una inmersión isométrica  $M \hookrightarrow \mathbb{H}^{2,1}$  con curvatura media  $H \in \mathbb{R}$ .

La representación dada en el teorema de encima es más simple a la representación espinorial de superficies Lorentzianas en  $\mathbb{H}^{2,1}$  dada por M. A. Lawn y J. Roth [34] en donde requieren dos campos espinoriales para su caracterización.

Finalmente notemos que la ecuación de Dirac (5.31) junto con la igualdad (5.34) es similar a la caracterización espinorial de superficies Riemannianas en el 3-espacio hiperbólico dada por B. Morel [42] y por P. Bayard [2] usando espinores en dimensión 4.

### 5.3. Superficies Lorentzianas en $\mathbb{R}^{1,2}$ y en $\mathbb{S}^{1,2}$

Como en la sección anterior, en este apartado vamos a relacionar la Proposición 5.1.1 2- y 4-, con el criterio de representación espinorial de superficies Lorentzianas en  $\mathbb{R}^{1,2}$  y en  $\mathbb{S}^{1,2}$  dado por M. A. Lawn y J. Roth [34].

Sobre  $\mathbb{C}^2$  definamos el producto escalar real

$$\left\langle \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' + ib' \\ c' + id' \end{pmatrix} \right\rangle := -\frac{ac' + a'c + bd' + b'd}{2},$$

de signatura  $(2, 2)$ . Este producto escalar es  $Spin(1, 1)$ -invariante, por lo tanto, induce un producto escalar real sobre el haz espinorial  $\Sigma M$  tal que

$$\langle \psi, \psi' \rangle = \langle \psi', \psi \rangle \quad \text{y} \quad \langle X \cdot_M \psi, \psi' \rangle = \langle \psi, X \cdot_M \psi' \rangle, \quad (5.48)$$

para cualesquiera  $\psi, \psi' \in \Sigma M$  y  $X \in TM$ . Usaremos este producto escalar real (y sólo este) en el resto de la sección; escribiremos  $|\psi|^2 := \langle \psi, \psi \rangle$  y aún denotaremos por  $i$  la estructura compleja canónica sobre  $\Sigma$  y sobre  $\Sigma M$ .

Supongamos que  $M \subset \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{2,2}$ , donde  $\mathcal{H}$  es el hiperplano  $\mathbb{R}^{1,2}$ , o la pseudo-esfera  $\mathbb{S}^{1,2}$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , y consideremos  $e_0, e_1$  campos vectoriales unitarios de tipo tiempo y de tipo espacio respectivamente, tal que

$$\mathbb{R}^{2,2} = \mathbb{R}e_1 \oplus_{\perp} T\mathcal{H} \quad \text{y} \quad T\mathcal{H} = \mathbb{R}e_0 \oplus_{\perp} TM.$$

Los espinores intrínsecos de  $M$  se identifican con los espinores de  $\mathcal{H}$  restringidos a  $M$ , que a su vez se identifican con los espinores positivos de  $\mathbb{R}^{2,2}$  restringidos a  $M$ .

**Proposición 5.3.1.** *Existe una identificación de haces espinoriales*

$$\begin{aligned} \Sigma M &\xrightarrow{\sim} \Sigma^+ \\ \psi &\longmapsto \psi^* \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ -lineal tal que, para cada  $X \in TM$  y todo  $\psi \in \Sigma M$ ,

$$(\nabla_X \psi)^* = \nabla_X \psi^*;$$

las acciones de Clifford están relacionadas por

$$(X \cdot_M \psi)^* = i e_0 \cdot X \cdot \psi^* \quad (5.49)$$

y además,

$$H(\psi^*, \psi^*) = -\frac{1 + \sigma}{2} |\psi|^2. \quad (5.50)$$

*Demostración.* La prueba de la proposición es análoga a la prueba de la Proposición 5.2.1. La función  $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow S^+$  dada por

$$h \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix} = \frac{1 + \sigma}{2} \frac{1}{2\sqrt{2}} [(a+b+c+d)1 + i(-a-b+c+d)I + (-a+b-c+d)J + i(a-b-c+d)K]$$

es un isomorfismo en las fibras de los haces espinoriales en cuestión.  $\square$

La relación entre el operador de Dirac intrínseco  $D_M$  (del haz espinorial  $\Sigma M$ ) y el operador de Dirac  $D$  (del haz espinorial  $\Sigma$ ) es dada por

$$(D_M \psi)^* = i e_0 \cdot D \psi^*. \quad (5.51)$$

Si  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$  es una solución de la ecuación (5.4), consideremos  $\psi \in \Sigma M$  tal que  $\psi^* = \varphi^+$ ; usando (5.51) conseguimos

$$(D_M \psi)^* = i e_0 \cdot \vec{H} \cdot \psi^*. \quad (5.52)$$

Notemos también que  $\psi \neq 0$  (ya que  $H(\varphi, \varphi) = 1$ ). Como en la sección anterior la descomposición  $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$  representa la descomposición  $\Sigma = \Sigma^+ \oplus \Sigma^-$ .

**Superficies Lorentzianas en el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,2}$ .** Presentamos el teorema de representación espinorial de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{1,2}$ .

**Teorema 5.3.2.** *Supongamos que existe una inmersión isométrica  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$  con curvatura media  $H$ . Entonces existe un campo espinorial  $\psi \in \Sigma M$  solución de la ecuación de Dirac*

$$D_M \psi = i H \psi, \quad |\psi|^2 = -1. \quad (5.53)$$

*Recíprocamente, considere  $(M, g)$  una superficie Lorentziana abstracta orientada (en espacio y en tiempo) y  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable dada; supongamos que existe un campo espinorial  $\psi \in \Sigma M$  solución de la ecuación (5.53), entonces existe una inmersión isométrica de  $(M, g)$  en  $\mathbb{R}^{1,2}$ , con curvatura media  $H \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$  y  $\varphi \in \Sigma$  es solución de la ecuación (5.4). Las igualdades (5.8) son válidas y con respecto a la Proposición 5.3.1 tomemos  $\psi \in \Sigma M$  tal que  $\psi^* = \varphi^+$ , notemos que  $\psi \neq 0$  (ya que  $H(\varphi, \varphi) = 1$ ). Usando (5.52) tenemos

$$(D_M \psi)^* = i e_0 \cdot \vec{H} \cdot \varphi^+ = i e_0 \cdot H e_0 \cdot \psi^* = i H \psi^*.$$

Además, ya que  $\varphi^- = e_1 \cdot (\varphi^+ \bullet I)$ , usando (4.30), (5.1) y la igualdad (5.50) conseguimos

$$1 = H(\varphi, \varphi) = H(\psi^*, \psi^*) - H(\psi^* \widehat{\bullet I}, \psi^* \bullet I) = H(\psi^*, \psi^*) + H(\widehat{\psi^*}, \psi^*) = -|\psi|^2.$$

Recíprocamente, supongamos que  $\psi$  es solución de la ecuación (5.53) y definamos  $\vec{H} := H e_0$ ,

$$\varphi^+ := \psi^* \quad \text{y} \quad \varphi^- := e_1 \cdot (\psi^* \bullet I),$$

donde  $(e_0, e_1)$  es un marco ortonormal paralelo y positivamente orientado de  $E$ . Usando (5.51) conseguimos

$$D\varphi^+ = -i e_0 \cdot (D_M \psi)^* = \vec{H} \cdot \varphi^+,$$

y además, usando (5.44) y (5.1), tenemos

$$\begin{aligned} D\varphi^- &= -e_1 \cdot D(\psi^* \bullet I) = e_1 \cdot (D\psi^* \bullet I) = -(e_1 \cdot D\psi^*) \bullet I \\ &= -(e_1 \cdot \vec{H} \cdot \psi^*) \bullet I \\ &= (\vec{H} \cdot e_1 \cdot \psi^*) \bullet I \\ &= \vec{H} \cdot \varphi^-. \end{aligned}$$

Así, el campo espinorial  $\varphi := \varphi^+ + \varphi^- \in \Sigma$ , satisface la ecuación (5.4) (pues  $H(\varphi, \varphi) = -|\psi|^2 = 1$ ); finalmente, ya que (5.8) es válido, la inmersión inducida  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  pertenece a  $\mathbb{R}^{1,2}$ .  $\square$

Una solución de (5.53) es así equivalente a una inmersión isométrica de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{1,2}$ . Obtenemos así una caracterización espinorial de las inmersiones isométricas de superficies Lorentzianas en  $\mathbb{R}^{1,2}$ , más simple a la caracterización obtenida en [34] en donde requieren dos campos espinoriales para la representación.

También obtenemos una fórmula de representación explícita: para  $\psi \in \Sigma M$  con  $|\psi|^2 = -1$ , consideremos  $\bar{\psi}$  y  $\alpha(\psi)$  como en la Proposición 5.2.3, el conjunto

$$\left\{ \alpha(\psi), i\bar{\psi}, i\alpha(\psi), \bar{\psi} \right\} \quad (5.54)$$

es  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ortonormal con signatura  $(-, +, -, +)$ ; en particular, es una base real de  $\Sigma M$ .

**Proposición 5.3.3.** *Escribiendo  $\varphi := \psi^* + e_1 \cdot (\psi^* \bullet I)$  donde  $\psi \in \Sigma M$  es una solución de (5.53), de un cálculo directo conseguimos*

$$\begin{aligned} \xi(X) &= \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle \\ &= \langle X \cdot_M \psi, \alpha(\psi) \rangle \sigma i 1 - \langle X \cdot_M \psi, i\alpha(\psi) \rangle i J - \langle X \cdot_M \psi, \bar{\psi} \rangle K \end{aligned}$$

para todo  $X \in TM$ . Ya que  $\langle X \cdot_M \psi, i\bar{\psi} \rangle = 0$ ,  $\xi(X)$  puede ser interpretado como las coordenadas de  $X \cdot_M \psi$  en la base ortonormal (5.54). Finalmente,  $F = \int \xi$  representa la inmersión.

De manera análoga al caso  $\mathbb{R}^{2,1}$ , obtenemos una fórmula de Weierstrass generalizada para las superficies Lorentzianas en  $\mathbb{R}^{1,2}$ ; presentamos dicha fórmula como consecuencia de la fórmula generalizada de Weierstrass para superficies Lorentzianas en  $\mathbb{R}^{2,2}$  en el próximo capítulo.

**Superficies Lorentzianas en la pseudo esfera  $\mathbb{S}^{1,2}$ .** Supongamos que la inmersión isométrica inducida  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  pertenece a  $\mathbb{S}^{1,2}$ , por la Proposición 5.1.1 4-, existe localmente un marco ortonormal paralelo positivamente orientado  $(e_0, e_1)$  de  $E$  que satisface (5.10). Con respecto al isomorfismo de la Proposición 5.3.1, consideremos el campo espinorial  $\psi \in \Sigma M$  (tal que  $|\psi|^2 \neq 0$  ya que  $H(\varphi, \varphi) = 1$ ) dado por  $\varphi^+ = \psi^*$ . Usando (5.52), el campo espinorial  $\psi$  satisface

$$(D_M \psi)^* = i e_0 \cdot \vec{H} \cdot \psi^* = i e_0 \cdot (-H e_0 + e_1) \cdot \psi^* = -i H \psi^* + i e_0 \cdot e_1 \cdot \psi^* = -i H \psi^* + i \bar{\psi}^*.$$

La segunda hipótesis de (5.10) dice que la función  $F = \langle \langle -e_1 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle : M \rightarrow \mathbb{S}^{1,2}$  es la inmersión inducida por el campo espinorial  $\varphi$ ; si escribimos

$$F_1 := \langle \langle -e_1 \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle \rangle,$$

se tiene  $1 = \langle F, F \rangle = 2 \langle F_1, F_1 \rangle$ , y además

$$H(F_1, F_1) = -\overline{[e_1 \cdot \varphi^-]}[\varphi^+][\overline{[\varphi^+]}][e_1 \cdot \varphi^-] = \frac{1+\sigma}{2} |\psi|^2 H(e_1 \cdot \varphi^-, e_1 \cdot \varphi^-) = -|\psi|^2 H(\widehat{\varphi^-, \varphi^-}),$$

por lo tanto,  $H(\varphi^-, \varphi^-) = \frac{1-\sigma}{2} \left( -\frac{1}{|\psi|^2} \right)$ . Finalmente, usando  $H(\varphi, \varphi) = 1$ , concluimos que  $|\psi|^2 \equiv -1$ .

Esto prueba 2- implica 1- del siguiente teorema de representación espinorial de superficies Lorentzianas en la pseudo esfera  $\mathbb{S}^{1,2}$ .

**Teorema 5.3.4.** *Considere  $(M, g)$  una superficie Lorentziana orientada (en espacio y en tiempo) y  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable dada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1- existe un campo espinorial  $\psi \in \Sigma M$ , que satisface la ecuación

$$D_M \psi = -i H \psi + i \bar{\psi}, \quad |\psi|^2 = -1; \quad (5.55)$$

2- existe una inmersión isométrica  $M \hookrightarrow \mathbb{S}^{1,2}$  con curvatura media  $H \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* (1- implica 2-): Consideremos  $(M, g)$  una superficie Lorentziana orientada y  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable dada; supongamos que existe un campo espinorial  $\psi \in \Sigma M$  que satisface la ecuación (5.55). Definamos  $\varphi^+ := \psi^* \in \Sigma^+$  y  $\vec{H} := -H e_0 + e_1$  donde  $(e_0, e_1)$  es algún marco ortonormal paralelo positivamente orientado de  $E$ , entonces

$$\begin{aligned} D\varphi^+ &= -i e_0 \cdot (D_M \psi)^* = -i e_0 \cdot (-i H \psi^* + i \bar{\psi}^*) = -H e_0 \psi^* + e_0 \cdot e_0 \cdot e_1 \cdot \psi^* \\ &= \vec{H} \cdot \varphi^+, \end{aligned}$$

y además, usando (5.50), tenemos

$$\overline{[\varphi^+]}[\varphi^+] = H(\varphi^+, \varphi^+) = H(\psi^*, \psi^*) = \frac{1+\sigma}{2}. \quad (5.56)$$

**Lema 5.3.5.** *El sistema*

$$\begin{cases} F_1 = \langle \langle -e_1 \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle \rangle \\ dF_1(X) = \langle \langle X \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle \rangle \end{cases}$$

con  $\langle F_1, F_1 \rangle = \frac{1}{2}$ , es equivalente a

$$\varphi^- = -e_1 \cdot (\varphi^+ \bullet F_1) \quad (5.57)$$

con

$$H(\varphi^-, \varphi^-) = \frac{1 - \sigma}{2},$$

donde  $F_1 : M \rightarrow \frac{1+\sigma}{2}\mathbb{H}_1$  satisface la ecuación en  $\frac{1+\sigma}{2}\mathbb{H}_1$

$$dF_1(X) = \omega(X)F_1 \quad (5.58)$$

con  $\omega(X) = -\sigma i \langle \langle X \cdot e_1 \cdot \varphi^+, \varphi^+ \rangle \rangle$ .

*Demostración.* Ya que  $F_1 = -\sigma i \overline{[\varphi^+]} [e_1 \cdot \varphi^-]$ , tenemos

$$[\varphi^+ \bullet F_1] = \sigma i [\varphi^+] F_1 = [\varphi^+] \overline{[\varphi^+]} [e_1 \cdot \varphi^-] = \frac{1 + \sigma}{2} [e_1 \cdot \varphi^-] = [e_1 \cdot \varphi^-],$$

que implica (5.57). Por otro lado,

$$\begin{aligned} dF_1(X) &= \langle \langle X \cdot \varphi^-, \varphi^+ \rangle \rangle = -\langle \langle X \cdot e_1 \cdot (\varphi^+ \bullet F_1), \varphi^+ \rangle \rangle \\ &= -\sigma i \overline{[\varphi^+]} [X \cdot e_1] [\varphi^+ \bullet F_1] \\ &= -\sigma i \overline{[\varphi^+]} [X \cdot e_1] \sigma i [\varphi^+] F_1 \\ &= \omega(X) F_1, \end{aligned}$$

como en (5.58). □

Ya que  $\bar{\omega} = -\omega$ , tenemos  $H(dF_1(X), F_1) = 0$ , así  $\langle F_1, F_1 \rangle = \Re e H(F_1, F_1)$  es constante; por otro lado, la ecuación de compatibilidad de (5.58), es dada por

$$d\omega(X, Y) = \omega(X)\omega(Y) - \omega(Y)\omega(X),$$

que es válida y puede ser verificada por un cálculo directo. Por lo tanto, la ecuación (5.58) es soluble y el campo espinorial

$$\varphi^- := -e_1 \cdot (\varphi^+ \bullet F_1) \in \Sigma^-$$

se encuentra bien definido; mostraremos ahora que  $\varphi^-$  satisface la ecuación

$$D\varphi^- = \vec{H} \cdot \varphi^-. \quad (5.59)$$



De la identidad (5.1) conseguimos

$$X \cdot \nabla_X(\varphi^+ \bullet F_1) = -(X \cdot \nabla_X \varphi^+) \bullet \widehat{F}_1 - (X \cdot \varphi^+) \bullet d\widehat{F}_1(X), \quad (5.60)$$

ya que

$$d\widehat{F}_1(X) = \widehat{\omega}(X) \widehat{F}_1 = \overline{[X \cdot \varphi^+]} [e_1 \cdot \varphi^+] \widehat{F}_1,$$

se tiene

$$\begin{aligned} [(X \cdot \varphi^+) \bullet d\widehat{F}_1(X)] &= \sigma i [X \cdot \varphi^+] d\widehat{F}_1(X) = \sigma i [X \cdot \varphi^+] \overline{[X \cdot \varphi^+]} [e_1 \cdot \varphi^+] \widehat{F}_1, \\ &= H(X \cdot \varphi^+, X \cdot \varphi^+) [(e_1 \cdot \varphi^+) \bullet \widehat{F}_1] \\ &= -|X|^2 H(\widehat{\varphi^+}, \widehat{\varphi^+}) [-e_1 \cdot (\varphi^+ \bullet F_1)] \\ &= -|X|^2 [\varphi^-]; \end{aligned}$$

reemplazando esto en (5.60) conseguimos

$$X \cdot \nabla_X(\varphi^+ \bullet F_1) = -(X \cdot \nabla_X \varphi^+) \bullet \widehat{F}_1 + |X|^2 \varphi^-.$$

Usando esta última igualdad podemos calcular

$$\begin{aligned} D(\varphi^+ \bullet F_1) &= (e_2 \cdot \nabla_{e_2} \varphi^+) \bullet \widehat{F}_1 - |e_2|^2 \varphi^- - (e_3 \cdot \nabla_{e_3} \varphi^+) \bullet \widehat{F}_1 + |e_3|^2 \varphi^- \\ &= (e_2 \cdot \nabla_{e_2} \varphi^+ - e_3 \cdot \nabla_{e_3} \varphi^+) \bullet \widehat{F}_1 + 2\varphi^- \\ &= -D\varphi^+ \bullet \widehat{F}_1 + 2\varphi^- \\ &= -(\vec{H} \cdot \varphi^+) \bullet \widehat{F}_1 + 2\varphi^- \\ &= \vec{H} \cdot (\varphi^+ \bullet F_1) + 2\varphi^- \\ &= \vec{H} \cdot e_1 \cdot \varphi^- + 2\varphi^-, \end{aligned}$$

ya que  $\vec{H} \cdot e_1 = (-He_0 + e_1) \cdot e_1 = -He_0 \cdot e_1 - 1$ , conseguimos  $D(\varphi^+ \bullet F_1) = -He_0 \cdot e_1 \cdot \varphi^- + \varphi^-$ , por lo tanto

$$D\varphi^- = e_1 \cdot D(\varphi^+ \bullet F_1) = e_1 \cdot (-He_0 \cdot e_1 \cdot \varphi^- + \varphi^-) = (-He_0 + e_1) \cdot \varphi^-.$$

El campo espinorial  $\varphi := \varphi^+ + \varphi^- \in \Sigma$ , satisface la ecuación de Dirac  $D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$ , con  $H(\varphi, \varphi) = 1$ ; la función  $F := F_1 - \widehat{F}_1 = \langle \langle -e_1 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  satisface  $\langle F, F \rangle = 1$  y

$$dF(X) = \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle;$$

así, las condiciones (5.10) son válidas, concluimos que la inmersión inducida por el campo espinorial  $\varphi$  pertenece a  $\mathbb{S}^{1,2}$ .  $\square$

La representación de superficies Lorentzianas en  $\mathbb{S}^{1,2}$  dada en el Teorema 5.3.4 es más simple a la dada por M. A. Lawn y J. Roth [34] en donde requieren dos campos espinoriales.

## Superficies Lorentzianas mínimas y de curvatura media constante uno

En esta sección, como consecuencia de las secciones anteriores, vamos a dar una relación entre las superficies Lorentzianas mínimas en las pseudo esferas y las superficies Lorentzianas de curvatura media constante uno en los espacios de Minkowski de  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

1- Supongamos que existe una inmersión mínima  $M \hookrightarrow \mathbb{H}^{2,1}$ , la inmersión se encuentra caracterizada por un campo espinorial  $\varphi$  que resuelve la ecuación

$$D\varphi = e_0 \cdot \varphi, \quad H(\varphi, \varphi) = 1. \quad (5.61)$$

Definamos el campo espinorial

$$\tilde{\varphi} := \varphi^+ + e_1 \cdot (\varphi^+ \bullet I) \in \Sigma;$$

de un cálculo directo,  $\tilde{\varphi}$  satisface la ecuación (5.61) y por tanto, induce una inmersión isométrica  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  con vector de curvatura media  $\vec{H} = e_0$ ; ya que

$$e_1 \cdot \tilde{\varphi} = e_1 \cdot \varphi^+ - \varphi^+ \bullet I = -(e_1 \cdot (\varphi^+ \bullet e_1) + \varphi^+) \bullet I = -\tilde{\varphi} \bullet I$$

usando la Proposición 5.1.1 2-, concluimos que la inmersión inducida por  $\tilde{\varphi}$  pertenece a  $\mathbb{R}^{1,2}$  y tiene curvatura media constante igual a 1.

Así, a cada superficie Lorentziana mínima en  $\mathbb{H}^{2,1}$  le podemos asociar una superficie Lorentziana de curvatura media constante uno en el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,2}$ .

2- Supongamos que existe una inmersión mínima  $M \hookrightarrow \mathbb{S}^{1,2}$ , la inmersión se encuentra caracterizada por un campo espinorial  $\varphi \in \Sigma$  que resuelve la ecuación

$$D\varphi = e_1 \cdot \varphi, \quad H(\varphi, \varphi) = 1. \quad (5.62)$$

El campo espinorial

$$\tilde{\varphi} := \varphi^+ + e_0 \cdot \varphi^+ \in \Sigma$$

resuelve (5.62) y por tanto, induce una inmersión isométrica  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  con vector de curvatura media  $\vec{H} = e_1$ ; ya que  $e_0 \cdot \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}$ , la Proposición 5.1.1 1- implica que la inmersión inducida por  $\tilde{\varphi}$  pertenece a  $\mathbb{R}^{2,1}$  y tiene curvatura media constante uno.

Por tanto, a cada superficie Lorentziana mínima en  $\mathbb{S}^{1,2}$  le podemos asociar una superficie Lorentziana de curvatura media constante uno en el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

**Observación 5.3.6.** *Las asociaciones de encima son análogas a la descrita por H. B. Lawson [35], que asocia a cada superficie mínima en  $\mathbb{S}^3$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $-1$ . Una prueba espinorial de esto fue dada por Th. Friedrich [18, Remark 1], y por P. Bayard, M. A. Lawn y J. Roth [4, Remark 4] usando espinores en dimensión 4.*



# CAPÍTULO 6

---

## La representación generalizada de Weierstrass en $\mathbb{R}^{2,2}$

---

En este capítulo vamos a deducir una fórmula generalizada de Weierstrass para la inmersión de una superficie Lorentziana en el espacio pseudo Euclideo  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Mostraremos que las componentes de un campo espinorial que representa la inmersión isométrica de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$  satisfacen un sistema diferencial lineal (la ecuación de Dirac) sobre la superficie y la inmersión isométrica inducida es entonces descrita explícitamente en términos de dichas componentes. La prueba de nuestra fórmula generalizada de Weierstrass no es trivial y esencialmente consiste en encontrar un marco espinorial conveniente sobre la superficie.

Como consecuencia de la fórmula generalizada de Weierstrass de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,2}$  conseguimos lo siguiente.

- Una nueva fórmula de representación de las superficies Lorentzianas mínimas en  $\mathbb{R}^{2,2}$  en términos de aplicaciones conformes (Corolario [6.1.2](#)).
- Obtenemos fórmulas generalizadas de Weierstrass para una superficie Lorentziana en los espacios de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$  y  $\mathbb{R}^{1,2}$  (Corolarios [6.2.1](#) y [6.2.2](#) respectivamente), *i.e.* la fórmula generalizada en  $\mathbb{R}^{2,2}$  extiende la fórmula descrita en el Teorema [5.2.4](#) para una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,1}$ .
- Describiremos una fórmula de Weierstrass de una superficie de Lorentz mínima inmersa en  $\mathbb{R}^{1,2}$ , análoga a la fórmula de representación de una superficie de Lorentz mínima en  $\mathbb{R}^{2,1}$  (descrita por J. Konderak [[27](#)]) dada en la Remarca [5.2.6](#).

## 6.1. La fórmula generalizada de Weierstrass de una superficie Lorentziana en $\mathbb{R}^{2,2}$

Antes de enunciar el resultado principal del capítulo vamos a introducir la siguiente notación: para cada  $a = u + \sigma v \in \mathcal{A}$ , recuerde que su conjugación viene dada por  $\widehat{a} := u - \sigma v \in \mathcal{A}$ ; definimos, como en el caso complejo, la parte real e imaginaria de  $a \in \mathcal{A}$  por

$$\Re(a) := \frac{a + \widehat{a}}{2} = u \quad \text{y} \quad \Im(a) := \sigma \frac{a - \widehat{a}}{2} = v.$$

Además, vamos a escribir  $|a|^2 := a\widehat{a} = \Re(a)^2 - \Im(a)^2$ , para cada  $a \in \mathcal{A}$ .

**Teorema 6.1.1.** *Consideremos  $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  y  $p, q : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables tales que*

$$\begin{aligned} \partial_a \phi_\alpha &= -p\psi_\alpha \\ \partial_{\widehat{a}} \psi_\alpha &= -q\phi_\alpha, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2, \tag{6.1}$$

y  $|\psi_2\phi_1 - \psi_1\phi_2|^2 \neq 0$ . Las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} F_0 + F_1 &= - \int_\gamma \left( \psi_1 \widehat{\phi}_1 da + \widehat{\psi}_1 \phi_1 d\widehat{a} \right), \\ F_0 - F_1 &= \int_\gamma \left( \psi_2 \widehat{\phi}_2 da + \widehat{\psi}_2 \phi_2 d\widehat{a} \right), \\ F_2 + \sigma F_3 &= \int_\gamma \left( \psi_1 \widehat{\phi}_2 da + \widehat{\psi}_2 \phi_1 d\widehat{a} \right), \\ F_2 - \sigma F_3 &= \int_\gamma \left( \psi_2 \widehat{\phi}_1 da + \widehat{\psi}_1 \phi_2 d\widehat{a} \right), \end{aligned} \tag{6.2}$$

donde  $\gamma$  es una curva arbitraria desde un punto fijo a un punto variable en  $\mathcal{A}$ , definen una inmersión conforme de una superficie de Lorentz en  $\mathbb{R}^{2,2}$

$$F := (F_0, F_1, F_2, F_3) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}.$$

La métrica inducida de la inmersión es dada por

$$g = -|\psi_2\phi_1 - \psi_1\phi_2|^2 da d\widehat{a}, \tag{6.3}$$

y la norma Lorentziana del vector de curvatura media de la inmersión satisface

$$|\vec{H}|^2 = \frac{pq}{|\psi_2\phi_1 - \psi_1\phi_2|^2}. \tag{6.4}$$

Recíprocamente, una inmersión isométrica de una superficie Lorentziana simplemente conexa en  $\mathbb{R}^{2,2}$  puede ser descrita de esta manera.

Esta fórmula de representación extiende al caso Lorentziano la fórmula generalizada de Weierstrass de una superficie Riemanniana en espacios 4–dimensionales dadas por B. G. Konopelchenko y G. Landolfi [29, 30].

Esencialmente, la prueba del teorema esta basada en la fórmula de representación espinorial (segunda parte del Teorema 4.3.1); en este contexto, las aplicaciones  $\phi_1, \phi_2, \psi_1$  y  $\psi_2$  representan en un marco espinorial adecuado, las componentes de un campo espinorial  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$ , solución de la ecuación de Dirac  $D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$ . El sistema lineal (6.1) es equivalente a la ecuación de Dirac, y la inmersión isométrica  $\xi(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle$ , inducida por  $\varphi$ , equivale a las fórmulas dadas en (6.2).

*Demostración del Teorema 6.1.1.* La prueba de la primera afirmación es directa. En principio notemos que el sistema (6.1) implica

$$\partial_a(\widehat{\psi}_\alpha \phi_\alpha) = \partial_a(\psi_\alpha \widehat{\phi}_\alpha), \quad \alpha = 1, 2,$$

por lo tanto, las fórmulas en (6.2) no dependen de la elección de la curva  $\gamma$ : las coordenadas  $F_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) se encuentran definidas de manera única salvo constantes. La métrica inducida  $g = -dF_0^2 + dF_1^2 - dF_2^2 + dF_3^2$  es calculada directamente; análogamente, el vector de curvatura media

$$\vec{H} = \frac{\partial_a \partial_a F}{g_{aa}}$$

esta dado por

$$\vec{H} = \frac{-1}{|\psi_2 \phi_1 - \psi_1 \phi_2|^2} \left( p \frac{|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2}{2} + q \frac{|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2}{2}, p \frac{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}{2} + q \frac{|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2}{2}, \right. \\ \left. - p \Re(\psi_1 \widehat{\psi}_2) - q \Re(\phi_1 \widehat{\phi}_2), -p \Im(\psi_1 \widehat{\psi}_2) - q \Im(\phi_1 \widehat{\phi}_2) \right),$$

que implica la expresión (6.4) de su norma Lorentziana  $|\vec{H}|^2$ .

Ahora vamos a probar la afirmación recíproca del teorema. Supongamos que  $(M, g)$  es una superficie Lorentziana simplemente conexa en  $\mathbb{R}^{2,2}$ , denotemos por  $E$  el haz normal y por  $\vec{H} \in E$  el vector de curvatura media de la inmersión. Consideremos un campo espinorial  $\varphi \in \Gamma(\Sigma E \otimes \Sigma M)$  como en 1- del Teorema 4.3.1, i.e.  $\varphi$  es solución de la ecuación de Dirac  $D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$ , con  $H(\varphi, \varphi) = 1$  (recordemos que  $\varphi$  es la restricción a la superficie  $M$  del campo espinorial constante  $\sigma 1 \in \mathbb{H}_0$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ ), que induce la inmersión  $\xi(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle$ .

Como en la prueba del Teorema 5.2.4, consideremos (en la clase conforme de la métrica  $g$ ) una carta conforme  $(U, a = u + \sigma v)$  tal que la métrica es dada por

$$g|_U = \lambda^2(-du^2 + dv^2), \quad \text{con } \lambda > 0,$$

y supongamos que  $(\partial_u, \partial_v)$  se encuentra positivamente orientado. Fijemos un marco ortonormal positivamente orientado  $(e_0, e_1)$  de  $E$  (normal a la superficie  $M$ ) tal que  $(e_0, e_1, \frac{\partial_u}{\lambda}, \frac{\partial_v}{\lambda})$  es un marco adaptado a la inmersión  $M \subset \mathbb{R}^{2,2}$ .

Ahora, consideremos  $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$  solución del sistema

$$\begin{cases} \partial_u \beta = -2 \frac{\partial_u \lambda}{\lambda} - \langle \nabla_{\partial_u} e_0, e_1 \rangle \\ \partial_v \beta = -2 \frac{\partial_v \lambda}{\lambda} - \langle \nabla_{\partial_v} e_0, e_1 \rangle \end{cases} \quad (6.5)$$

(por un cálculo directo, la ecuación de compatibilidad de (6.5),  $\partial_v \langle \nabla_{\partial_u} e_0, e_1 \rangle = \partial_u \langle \nabla_{\partial_v} e_0, e_1 \rangle$  es válida, y así el sistema (6.5) es soluble), y definamos el marco normal

$$\mathbf{e}_0 := \cosh \beta e_0 + \sinh \beta e_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_1 := \sinh \beta e_0 + \cosh \beta e_1 \quad (6.6)$$

por una rotación del ángulo Lorentziano  $\beta$  del marco normal  $(e_0, e_1)$ . Escribiendo

$$\mathbf{e}_2 := \frac{\partial_u}{\lambda} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_3 := \frac{\partial_v}{\lambda},$$

consideremos uno de los dos marcos  $\tilde{s} \in \tilde{Q}$  que se encuentra encima del marco  $s = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \in Q$ , y supongamos además que las coordenadas de los vectores  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ , en el marco  $\tilde{s}$ , están dados respectivamente por  $\sigma i1, I, iJ$  y  $K \in \mathbb{H}_1$ . En  $\tilde{s}$ , usando la fórmula explícita (4.19) de la derivada covariante  $\nabla \varphi$ , y (6.5), la ecuación de Dirac  $D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$ , queda como

$$\begin{aligned} 2\lambda [\widehat{\vec{H}}] [\varphi] &= -iJ\partial_u[\varphi] + K\partial_v[\varphi] - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_u \lambda}{\lambda} + \sigma(\partial_v \beta + \langle \nabla_{\partial_v} e_0, e_1 \rangle) \right) iJ[\varphi] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_v \lambda}{\lambda} + \sigma(\partial_u \beta + \langle \nabla_{\partial_u} e_0, e_1 \rangle) \right) K[\varphi] \\ &= -iJ\partial_u[\varphi] + K\partial_v[\varphi] + \frac{1}{\lambda} \left\{ \left( -\partial_{\tilde{a}} \lambda + \frac{\sigma}{2} \partial_v \lambda \right) iJ + \left( -\sigma \partial_{\tilde{a}} \lambda - \frac{\sigma}{2} \partial_u \lambda \right) K \right\} [\varphi] \\ &= -iJ\partial_u[\varphi] + K\partial_v[\varphi] + (-miJ + nK)[\varphi] \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde

$$m := \frac{1}{\lambda} \left( \partial_{\tilde{a}} \lambda - \frac{\sigma}{2} \partial_v \lambda \right) \quad \text{y} \quad n := -\frac{1}{\lambda} \left( \sigma \partial_{\tilde{a}} \lambda + \frac{\sigma}{2} \partial_u \lambda \right).$$

Si escribimos  $\vec{H} := h_0 \mathbf{e}_0 + h_1 \mathbf{e}_1 \in E$  y  $[\varphi] = \varphi_0 1 + \varphi_1 iI + \varphi_2 J + \varphi_3 iK \in \mathbb{H}_0$ , las coordenadas del campo espinorial  $\varphi$  en el marco espinorial  $\tilde{s}$ , (la ecuación de Dirac) (6.7) se convierte en el sistema

$$\begin{aligned} \partial_a(-\varphi_3 + \sigma\varphi_2) + \frac{m + \sigma n}{2}(-\varphi_3 + \sigma\varphi_2) &= -\lambda(h_1 + h_0)(\varphi_0 + \sigma\varphi_1) \\ \partial_{\tilde{a}}(\varphi_0 + \sigma\varphi_1) + \frac{m - \sigma n}{2}(\varphi_0 + \sigma\varphi_1) &= -\lambda(h_1 - h_0)(-\varphi_3 + \sigma\varphi_2) \\ \partial_a(-\varphi_0 + \sigma\varphi_1) + \frac{m + \sigma n}{2}(-\varphi_0 + \sigma\varphi_1) &= -\lambda(h_1 + h_0)(\varphi_3 + \sigma\varphi_2) \\ \partial_{\tilde{a}}(\varphi_3 + \sigma\varphi_2) + \frac{m - \sigma n}{2}(\varphi_3 + \sigma\varphi_2) &= -\lambda(h_1 - h_0)(-\varphi_0 + \sigma\varphi_1); \end{aligned} \quad (6.8)$$

pero ya que

$$\partial_a \left( \lambda^{-\frac{1}{2}} \right) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \frac{m + \sigma n}{2} \quad \text{y} \quad \partial_{\tilde{a}} \left( \lambda^{\frac{3}{2}} \right) = \lambda^{\frac{3}{2}} \frac{m - \sigma n}{2},$$

el sistema (6.8) se escribe como

$$\begin{aligned}\partial_a \left[ \lambda^{-\frac{1}{2}}(-\varphi_3 + \sigma\varphi_2) \right] &= -\lambda^{-1}(h_1 + h_0) \left[ \lambda^{\frac{3}{2}}(\varphi_0 + \sigma\varphi_1) \right] \\ \partial_{\widehat{a}} \left[ \lambda^{\frac{3}{2}}(\varphi_0 + \sigma\varphi_1) \right] &= -\lambda^3(h_1 - h_0) \left[ \lambda^{-\frac{1}{2}}(-\varphi_3 + \sigma\varphi_2) \right] \\ \partial_a \left[ \lambda^{-\frac{1}{2}}(-\varphi_0 + \sigma\varphi_1) \right] &= -\lambda^{-1}(h_1 + h_0) \left[ \lambda^{\frac{3}{2}}(\varphi_3 + \sigma\varphi_2) \right] \\ \partial_{\widehat{a}} \left[ \lambda^{\frac{3}{2}}(\varphi_3 + \sigma\varphi_2) \right] &= -\lambda^3(h_1 - h_0) \left[ \lambda^{-\frac{1}{2}}(-\varphi_0 + \sigma\varphi_1) \right],\end{aligned}$$

que es el sistema (6.1) con

$$\phi_1 := \lambda^{-\frac{1}{2}}(-\varphi_3 + \sigma\varphi_2), \quad \phi_2 := \lambda^{-\frac{1}{2}}(-\varphi_0 + \sigma\varphi_1), \quad \psi_1 := \lambda^{\frac{3}{2}}(\varphi_0 + \sigma\varphi_1), \quad \psi_2 := \lambda^{\frac{3}{2}}(\varphi_3 + \sigma\varphi_2),$$

y

$$p := \lambda^{-1}(h_1 + h_0), \quad q := \lambda^3(h_1 - h_0).$$

Por otro lado, ya que  $H(\varphi, \varphi) = 1$ , conseguimos

$$|\psi_2\phi_1 - \psi_1\phi_2|^2 = (\psi_2\phi_1 - \psi_1\phi_2)(\widehat{\psi_2\phi_1 - \psi_1\phi_2}) = \lambda^2 H(\varphi, \varphi) \widehat{H(\varphi, \varphi)} = \lambda^2,$$

así, la métrica y el vector de curvatura media de la inmersión son tales que

$$g = -\lambda^2 da d\widehat{a} \quad y \quad pq = \lambda^2 |\vec{H}|^2,$$

como en (6.3) y en (6.4) respectivamente.

Finalmente, si escribimos la inmersión isométrica (inducida por el campo espinorial  $\varphi$ )  $F = \int \xi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ , con

$$\xi(X) = \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle = \xi_0(X) \sigma i I + \xi_1(X) I + \xi_2(X) i J + \xi_3(X) K,$$

de un cálculo directo obtenemos

$$\begin{aligned}\xi_0 + \xi_1 &= -\lambda \left[ (\varphi_0 + \sigma\varphi_1)(-\widehat{\varphi_3 + \sigma\varphi_2}) da + (\widehat{\varphi_0 + \sigma\varphi_1})(-\varphi_3 + \sigma\varphi_2) d\widehat{a} \right] \\ \xi_0 - \xi_1 &= \lambda \left[ (\varphi_3 + \sigma\varphi_2)(-\widehat{\varphi_0 + \sigma\varphi_1}) da + (\widehat{\varphi_3 + \sigma\varphi_2})(-\varphi_0 + \sigma\varphi_1) d\widehat{a} \right] \\ \xi_2 + \sigma\xi_3 &= \lambda \left[ (\varphi_0 + \sigma\varphi_1)(-\widehat{\varphi_0 + \sigma\varphi_1}) da + (\widehat{\varphi_3 + \sigma\varphi_2})(-\varphi_3 + \sigma\varphi_2) d\widehat{a} \right] \\ \xi_2 - \sigma\xi_3 &= \lambda \left[ (\varphi_3 + \sigma\varphi_2)(-\widehat{\varphi_3 + \sigma\varphi_2}) da + (\widehat{\varphi_0 + \sigma\varphi_1})(-\varphi_0 + \sigma\varphi_1) d\widehat{a} \right],\end{aligned}$$

que son las fórmulas en (6.2). □

Como consecuencia de la fórmula generalizada de Weierstrass obtenemos una nueva fórmula de representación de una superficie Lorentziana mínima en el espacio  $\mathbb{R}^{2,2}$ : esto es directo ya que  $\vec{H} = 0$  si y sólo si  $p = q = 0$ .



**Corolario 6.1.2.** Sean  $\psi_\alpha, \widehat{\phi}_\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , aplicaciones conformes. Las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} F_0 &= \Re \left[ \int_\gamma \left( -\psi_1 \widehat{\phi}_1 + \psi_2 \widehat{\phi}_2 \right) da \right] \\ F_1 &= \Re \left[ \int_\gamma \left( -\psi_1 \widehat{\phi}_1 - \psi_2 \widehat{\phi}_2 \right) da \right] \\ F_2 &= \Re \left[ \int_\gamma \left( \psi_2 \widehat{\phi}_1 + \psi_1 \widehat{\phi}_2 \right) da \right] \\ F_3 &= \Im \left[ \int_\gamma \left( -\psi_2 \widehat{\phi}_1 + \psi_1 \widehat{\phi}_2 \right) da \right], \end{aligned} \quad (6.9)$$

definen una inmersión conforme de una superficie de Lorentz mínima en  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

Recíprocamente, la inmersión isométrica de una superficie Lorentziana mínima en  $\mathbb{R}^{2,2}$  puede ser descrita de esta forma.

## 6.2. Fórmulas generalizadas en $\mathbb{R}^{2,1}$ y en $\mathbb{R}^{1,2}$

Usando la fórmula generalizada de Weierstrass en  $\mathbb{R}^{2,2}$  (Teorema 6.1.1), vamos a deducir fórmulas generalizadas para la inmersión de una superficie Lorentziana en los espacios de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$  y  $\mathbb{R}^{1,2} \subset \mathbb{R}^{2,2}$  al considerar soluciones particulares del sistema (6.1).

**Corolario 6.2.1.** Consideremos  $\phi_2, \psi_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  y  $p : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables tales que

$$\begin{aligned} \partial_a \phi_2 &= -p \psi_2 \\ \partial_{\widehat{a}} \psi_2 &= -p \phi_2, \end{aligned}$$

y  $|\phi_2|^2 - |\psi_2|^2 \neq 0$ . Las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} F_1 &= - \int_\gamma \left( \psi_2 \widehat{\phi}_2 da + \widehat{\psi}_2 \phi_2 d\widehat{a} \right), \\ F_2 + \sigma F_3 &= \pm \int_\gamma \left( \widehat{\phi}_2^2 da + \widehat{\psi}_2^2 d\widehat{a} \right), \\ F_2 - \sigma F_3 &= \pm \int_\gamma \left( \psi_2^2 da + \phi_2^2 d\widehat{a} \right), \end{aligned}$$

definen una inmersión conforme de una superficie de Lorentz  $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ . La métrica inducida de la inmersión es dada por

$$g = -(|\phi_2|^2 - |\psi_2|^2)^2 da d\widehat{a},$$

y la curvatura media de la inmersión satisface

$$H^2 = \frac{p^2}{(|\phi_2|^2 - |\psi_2|^2)^2}.$$

Recíprocamente, una inmersión isométrica de una superficie Lorentziana en el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$  puede ser descrita de esta forma.

Este corolario garantiza que la fórmula generalizada del Teorema 6.1.1, extiende la fórmula de representación de una superficie Lorentziana en  $\mathbb{R}^{2,1}$  (Teorema 5.2.4). Escribiendo la fórmula del corolario de encima en las coordenadas  $(s, t)$  de  $\mathcal{A}$ , (vea (A.3)), tenemos exactamente la representación de Weierstrass dada por S. Lee [37, Theorem 2].

*Demostración del Corolario 6.2.1.* En el Teorema 6.1.1, consideremos la reducción  $\psi_2 = \pm\widehat{\phi}_1$  y  $\phi_2 = \pm\widehat{\psi}_1$  (consecuentemente  $p = q$ ) tales que  $F_0 = 0$ , esto prueba la afirmación directa del corolario.  $\square$

**Corolario 6.2.2.** Consideremos  $\phi_2, \psi_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  y  $p : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables tales que

$$\begin{aligned}\partial_a \phi_2 &= -p\psi_2 \\ \partial_{\widehat{a}} \psi_2 &= p\phi_2,\end{aligned}$$

y  $|\phi_2|^2 - |\psi_2|^2 \neq 0$ . Las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}F_0 &= \int_{\gamma} \left( \psi_2 \widehat{\phi}_2 da + \widehat{\psi}_2 \phi_2 d\widehat{a} \right), \\ F_2 + \sigma F_3 &= \pm \int_{\gamma} \left( \widehat{\phi}_2^2 da - \widehat{\psi}_2^2 d\widehat{a} \right), \\ F_2 - \sigma F_3 &= \pm \int_{\gamma} \left( -\psi_2^2 da + \phi_2^2 d\widehat{a} \right),\end{aligned}$$

definen la inmersión conforme de una superficie de Lorentz  $F = (F_0, F_2, F_3)\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{1,2}$ . La métrica inducida de la inmersión está dada por

$$g = -(|\phi_2|^2 - |\psi_2|^2)^2 da d\widehat{a},$$

y la curvatura media de la inmersión satisface

$$H^2 = \frac{p^2}{(|\phi_2|^2 - |\psi_2|^2)^2}.$$

Recíprocamente, una inmersión isométrica de una superficie Lorentziana en el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,2}$  puede ser descrita de esta forma.

*Demostración.* En el Teorema 6.1.1, la reducción  $\psi_2 = \mp \widehat{\phi}_1$  y  $\phi_2 = \pm \widehat{\psi}_1$  (consecuentemente  $p = -q$ ) implica  $F_1 = 0$  y así, la afirmación directa del corolario.  $\square$

En particular conseguimos una fórmula de representación de las superficies de Lorentz mínimas en  $\mathbb{R}^{1,2}$ ; las superficies de Lorentz mínimas en  $\mathbb{R}^{2,1}$  fueron descritas en la Remarca 5.2.6.

Usando la fórmula generalizada en  $\mathbb{R}^{1,2}$  (Corolario 6.2.2), en el caso  $p \equiv 0$ , obtenemos la clásica representación de Weierstrass de una superficie Lorentziana mínima en el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,2}$ . Las fórmulas

$$\begin{aligned} F_1 &= 2\Re \int_{\gamma} \chi_1 \chi_2 da, \\ F_2 &= \pm \Re \int_{\gamma} (\chi_1^2 - \chi_2^2) da, \\ F_3 &= \pm \Im \int_{\gamma} (\chi_1^2 + \chi_2^2) da, \end{aligned} \tag{6.10}$$

donde  $\chi_1 = \widehat{\phi}_2$  y  $\chi_2 = \psi_2$  son aplicaciones conformes, definen una inmersión conforme de una superficie de Lorentz mínima en  $\mathbb{R}^{1,2}$ : supongamos que  $|\chi_1|^2 \neq 0$  y definamos

$$\Phi := \pm \chi_1^2 da \quad \text{y} \quad g := \frac{\chi_2}{\chi_1},$$

entonces  $\Phi$  es una 1-forma conforme tal que  $\widehat{\Phi} > 0$  y  $1 - g\widehat{g} \neq 0$ , las fórmulas en (6.10) se escriben como

$$(F_1, F_2, F_3) = \left( \Re \int_{\gamma} 2g\Phi, \Re \int_{\gamma} (1 - g^2)\Phi, \Re \int_{\gamma} \sigma(1 + g^2)\Phi \right).$$

Esta fórmula es análoga a la representación de una superficie de Lorentz mínima en  $\mathbb{R}^{2,1}$  descrita por J. Konderak [27, Theorem 4], y que se obtuvo en el capítulo anterior (Remarca 5.2.6).

# CAPÍTULO 7

---

## Superficies Lorentzianas planas con haz normal plano en $\mathbb{R}^{2,2}$

---

En este capítulo describiremos localmente las superficies Lorentzianas planas con haz normal plano (*i.e.* superficies cuyas curvaturas Gaussiana  $K$  y normal  $K_N$  son nulas) y con aplicación de Gauss regular en el espacio  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

La idea principal para realizar esta descripción es la siguiente: ya que la superficie Lorentziana es plana con haz normal plano, podemos considerar un marco espinorial paralelo  $\tilde{s}$  sobre la superficie y entonces escribir el campo espinorial  $\varphi$ , que induce la inmersión

$$F = \int \xi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}, \quad \xi(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle,$$

en dicho marco; como consecuencia obtendremos fórmulas simples que permitirán alcanzar la descripción.

Como consecuencia deduciremos que las superficies Lorentzianas planas con haz normal plano en  $\mathbb{R}^{2,2}$  dependen localmente de

- cuatro funciones reales de una variable real, dos de las cuales corresponden a una solución de un sistema diferencial hiperbólico cuando el invariante  $\Delta$  es positivo, o de
- una función holomorfa sobre el plano junto con dos funciones reales de una variable real cuando el invariante  $\Delta$  es negativo.

Recordemos que el invariante  $\Delta$  es el opuesto del discriminante de la forma cuadrática  $\delta$  que define las direcciones asintóticas sobre la superficie Lorentziana; vea la Sección 2.3.

## 7.1. La estructura de Lorentz inducida por la aplicación de Gauss

Consideremos una superficie Lorentziana orientada  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Denotaremos por  $G : M \rightarrow \mathcal{Q}$  la aplicación de Gauss (orientada) de la inmersión, definida en (2.15), donde  $\mathcal{Q}$  denota la Grassmaniana de los planos Lorentzianos orientados en  $\mathbb{R}^{2,2}$ ; vea la Sección 2.2.

Usando la notación del Capítulo 3, consideremos el espacio  $\mathbb{H}_0 = \mathcal{A}I \oplus i\mathcal{A}I \oplus \mathcal{A}J \oplus i\mathcal{A}K$ , y definamos el subespacio

$$\mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0 := i\mathcal{A}I \oplus \mathcal{A}J \oplus i\mathcal{A}K.$$

Como antes, supongamos que  $(e_0, e_1)$  y  $(e_2, e_3)$  son marcos ortonormales positivamente orientados de  $E$  (el haz normal de la inmersión) y  $TM$ , tales que  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  es un marco adaptado a la inmersión  $M \subset \mathbb{R}^{2,2}$ . Supongamos también que las coordenadas de los vectores  $e_0, e_1, e_2$  y  $e_3$  en algún marco espinorial, están dados por  $\sigma iI, I, iJ$  y  $K \in \mathbb{H}_1$  respectivamente. Notemos que

$$E_1 = e_2 \wedge e_3 = e_2 \cdot e_3 \simeq iI, \quad E_2 = e_3 \wedge e_1 = e_3 \cdot e_1 \simeq J,$$

y

$$E_3 = e_1 \wedge e_2 = e_1 \cdot e_2 \simeq iK,$$

por tanto, usando (2.11) podemos escribir

$$\mathcal{Q} \simeq \{\xi \in \mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0 \mid H(\xi, \xi) = -1\}.$$

El producto cuaterniónico de  $\mathbb{H}_0$  permite definir el *producto vectorial* de dos vectores  $\xi, \xi'$  en  $\mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0$  por la fórmula

$$\xi \times \xi' := \frac{1}{2}(\xi\xi' - \xi'\xi) \in \mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0,$$

y que satisface

$$\langle\langle \xi, \xi' \rangle\rangle = \sigma iH(\xi, \xi')1 + \sigma i\xi \times \xi',$$

donde el producto escalar  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  fue definido en (4.26). El producto vectorial permite definir el *producto mixto* de tres vectores  $\xi, \xi', \xi''$  en  $\mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0$  por la expresión

$$[\xi, \xi', \xi''] := H(\xi \times \xi', \xi'') \in \mathcal{A},$$

este coincide, salvo el signo, con el determinante de los vectores  $\xi, \xi', \xi'' \in \mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0$  en la  $\mathcal{A}$ -base  $iI, J, iK$  de  $\mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0$ ; el producto mixto es una forma de volumen  $\mathcal{A}$ -valuada sobre  $\mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0$ , por tanto induce una forma de área  $\omega_{\mathcal{Q}}$  sobre  $\mathcal{Q}$  (que coincide con la definida en la Sección 2.2) por

$$\omega_{\mathcal{Q}}(p)(\xi, \xi') := [\xi, \xi', p],$$

para cualesquiera  $p \in \mathcal{Q}$  y  $\xi, \xi' \in T_p\mathcal{Q}$ .

**Lema 7.1.1.** Para  $p \in \mathcal{Q}$ , suponga que  $\xi, \xi' \in T_p \mathcal{Q}$  son tales que

$$\omega_{\mathcal{Q}}(p)(\xi, \xi') = 0,$$

entonces

$$\xi' = \lambda \xi \quad \text{o} \quad \xi = \mu \xi' \quad \text{o} \quad \xi + \xi' = \pm \sigma (\xi - \xi').$$

para algunos  $\lambda, \mu \in \mathcal{A}$ . En particular, el espacio vectorial real generado por  $(\xi, \xi')$  es una  $\mathcal{A}$ -línea en el espacio tangente  $T_p \mathcal{Q}$ .

*Demostración.* Usando (2.12) tenemos  $\xi, \xi' \in T_p \mathcal{Q}$  si y sólo si  $H(\xi, p) = H(\xi', p) = 0$ , esto significa que  $\xi$  y  $\xi'$  anticonmutan con  $p$ , así

$$\omega_{\mathcal{Q}}(p)(\xi, \xi') = p(\xi \times \xi').$$

Como  $p \in \mathcal{Q}$ , tenemos  $\bar{p}p = -1$ , i.e.  $p$  es invertible en  $\mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0$ , conseguimos entonces

$$\omega_{\mathcal{Q}}(p)(\xi, \xi') = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \xi \times \xi' = 0.$$

Escribiendo

$$\xi = \frac{1+\sigma}{2}\xi_1 + \frac{1-\sigma}{2}\xi_2, \quad \xi' = \frac{1+\sigma}{2}\xi'_1 + \frac{1-\sigma}{2}\xi'_2, \quad (7.1)$$

donde  $\xi_1, \xi_2, \xi'_1$  y  $\xi'_2$  pertenecen a  $i\mathbb{R}I \oplus \mathbb{R}J \oplus i\mathbb{R}K \simeq \mathbb{R}^3$ , de un cálculo directo conseguimos

$$\xi \times \xi' = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \xi_1 \times \xi'_1 = \xi_2 \times \xi'_2 = 0,$$

siendo este último el producto vectorial usual de  $\mathbb{R}^3$ . Asumamos que  $\xi$  y  $\xi'$  son no cero (en otro caso el resultado es válido trivialmente), y consideremos los siguientes casos:

1- Si  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son no cero, entonces  $\xi'_1 = \alpha \xi_1$  y  $\xi'_2 = \beta \xi_2$  para algunos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ; escribiendo  $\lambda = \frac{1+\sigma}{2}\alpha + \frac{1-\sigma}{2}\beta$  tenemos  $\xi' = \lambda \xi$ .

2- Si  $\xi_1 \neq 0$  y  $\xi_2 = 0$ , entonces:

a.- asumiendo  $\xi'_1 \neq 0$  y  $\xi'_2 = 0$ , tenemos  $\xi'_1 = \alpha \xi_1$  para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y así  $\xi' = \lambda \xi$  con  $\lambda = \frac{1+\sigma}{2}\alpha$ ;

b.- asumiendo  $\xi'_1 = 0$  y  $\xi'_2 \neq 0$ , tenemos  $\xi + \xi' = \sigma(\xi - \xi')$  por un cálculo directo;

los otros casos son similares.

Finalmente, si  $\xi' = \lambda \xi$  o  $\xi = \mu \xi'$ , el espacio vectorial generado por  $\xi$  y  $\xi'$  obviamente pertenece a una  $\mathcal{A}$ -línea en  $T_p \mathcal{Q}$ ; este resultado también es válido si  $\xi + \xi' = \pm \sigma(\xi - \xi')$  ya que este espacio es también generado por  $\xi + \xi'$  y  $\xi - \xi'$ .  $\square$

La importancia del lema de encima se refleja en la siguiente observación.

**Observación 7.1.2.** *En la Proposición 2.2.4 establecimos la fórmula*

$$G^* \omega_{\mathcal{Q}} = (K + \sigma K_N) \omega_M,$$

donde  $\omega_M$  es la forma de área sobre  $M$ ,  $K$  es la curvatura de Gauss y  $K_N$  es la curvatura normal de  $M$ . En particular, asumiendo además que

$$dG_x : T_x M \longrightarrow T_{G(x)} \mathcal{Q}$$

es inyectiva en algún punto  $x \in M$ , el Lema 7.1.1 implica  $K = K_N = 0$  en  $x$  si y sólo si el espacio lineal  $dG_x(T_x M)$  es una  $\mathcal{A}$ -línea en  $T_{G(x)} \mathcal{Q}$ , i.e. existe  $U \in T_{G(x)} \mathcal{Q}$  tal que

$$dG_x(T_x M) = \{a U : a \in \mathcal{A}\}. \quad (7.2)$$

Como consecuencia de la Observación 7.1.2, si  $K = K_N = 0$  y si  $G : M \rightarrow \mathcal{Q}$  es regular<sup>1</sup> existe una única estructura de Lorentz  $\sigma$  sobre  $M$  tal que

$$dG_x(\sigma u) = \sigma dG_x(u) \quad (7.3)$$

para todo  $x \in M$  y todo  $u \in T_x M$ . Esto es claro observando la igualdad (7.2), que implica que  $dG_x(T_x M)$  es estable por multiplicación por  $\sigma$ , y podemos definir

$$\sigma u = dG_x^{-1}(\sigma dG_x(u)).$$

Ahora estudiaremos el caracter causal de la  $\mathcal{A}$ -línea  $dG_x(T_x M)$  de  $T_{G(x)} \mathcal{Q}$ . A diferencia del caso Riemanniano (vea [3, Proposition 4.2]), la  $H$ -normalización del vector generador  $U$  del subespacio  $dG_x(T_x M)$  (y por tanto el caracter causal de la recta  $dG_x(T_x M)$  en  $T_{G(x)} \mathcal{Q}$ ) depende del signo del invariante  $\Delta$  de la superficie Lorentziana  $M$  : para establecer esto notemos lo siguiente.

**Observación 7.1.3.** *Un vector  $\xi \in \mathbb{H}_0$  es invertible si y sólo si  $H(\xi, \xi) = \bar{\xi}\xi \in \mathcal{A}$  es invertible, i.e. si y sólo si*

$$H(\xi, \xi) \in \mathcal{A}^* := \mathcal{A} - (1 \pm \sigma)\mathbb{R}.$$

En efecto, si  $\bar{\xi}\xi$  es invertible en  $\mathcal{A}$ , el vector  $\xi$  es invertible en  $\mathbb{H}_0$  con inverso  $\frac{\bar{\xi}}{H(\xi, \xi)}$ . Recíprocamente, si  $\eta \in \mathbb{H}_0$  es tal que  $\xi\eta = \eta\xi = 1$ , tenemos  $H(\xi, \xi)H(\eta, \eta) = 1$ , luego  $H(\xi, \xi)$  es invertible.

Equivalentemente,  $\xi = \frac{1+\sigma}{2}\xi_1 + \frac{1-\sigma}{2}\xi_2$  es invertible en  $\mathbb{H}_0$  si y sólo si  $H(\xi_1, \xi_1)H(\xi_2, \xi_2) \neq 0$  en  $\mathcal{A}$  : esto es válido ya que

$$H(\xi, \xi) = \frac{1+\sigma}{2}H(\xi_1, \xi_1) + \frac{1-\sigma}{2}H(\xi_2, \xi_2).$$

---

<sup>1</sup>G es regular si  $dG_x$  inyectiva para cada  $x \in M$ .

**Proposición 7.1.4.** *Supongamos que  $K = 0$  en el punto  $x \in M$ . Entonces, para  $j = 2, 3$ ,*

$$dG_x(e_j) \text{ es invertible en } \mathbb{H}_0 \quad \text{sii} \quad \Delta + |B(e_j, e_j)|^2 |\vec{H}|^2 \neq 0, \quad (7.4)$$

donde  $B : T_x M \times T_x M \rightarrow E_x$  es la segunda forma fundamental de la superficie  $M$ . Además, escribiendo  $H(dG(e_j), dG(e_j)) := u + \sigma v$  tenemos

$$\begin{aligned} \Delta + |B(e_j, e_j)|^2 |\vec{H}|^2 > 0 & \quad \text{sii} \quad u^2 - v^2 > 0, \\ \Delta + |B(e_j, e_j)|^2 |\vec{H}|^2 < 0 & \quad \text{sii} \quad u^2 - v^2 < 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

*Demostración.* Supongamos que la segunda forma fundamental  $B$  en  $x \in M$  es tal que

$$B(e_2, e_2) = ae_0 + ee_1, \quad B(e_2, e_3) = ce_0 + ge_1 \quad \text{y} \quad B(e_3, e_3) = be_0 + fe_1,$$

usando el Lema 2.2.3 tenemos

$$\Delta = \frac{1}{4}(af - eb)^2 + (ag - ec)(bg - fc).$$

Además, ya que

$$dG_x(e_2) = \frac{1+\sigma}{2}((e-c)J + (a-g)iK) + \frac{1-\sigma}{2}((e+c)J - (a+g)iK),$$

usando la Observación 7.1.3 conseguimos  $dG_p(e_2)$  no es invertible si y sólo si

$$\begin{aligned} 0 &= [(e-c)^2 - (a-g)^2] [(e+c)^2 - (a+g)^2] \\ &= 4\Delta + (e^2 + c^2 - g^2 - a^2)^2 - (af - eb)^2. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Escribiendo  $B_{ij} = B(e_i, e_j)$ , la ecuación de Gauss implica  $|B_{23}|^2 = \langle B_{22}, B_{33} \rangle$  (ya que  $K = 0$ ), así obtenemos

$$(e^2 + c^2 - g^2 - a^2)^2 = (\langle B_{22}, B_{22} \rangle - |B_{23}|^2)^2 = \langle B_{22}, B_{22} - B_{33} \rangle^2.$$

Como  $[B_{22}, B_{22} - B_{33}]^2 = (af - eb)^2$ , donde  $[\cdot, \cdot] = \det_{(e_0, e_1)}(\cdot, \cdot)$ , usando la identidad de Lagrange, la igualdad (7.6) queda como

$$0 = 4\Delta + |B_{22}|^2 |B_{22} - B_{33}|^2 = 4(\Delta + |B(e_2, e_2)|^2 |\vec{H}|^2).$$

El caso  $j = 3$  es análogo. La segunda parte de la proposición es directa.  $\square$

Supongamos que el vector  $U \in T_{G(x)}\mathcal{Q}$ , dado en la Observación 7.1.2, satisface  $U = dG_x(e_2)$ ; escribiendo  $H(U, U) := u + \sigma v \in \mathcal{A}$ , la Proposición 7.1.4 implica

$$u^2 - v^2 \neq 0 \quad \text{sii} \quad \Delta + |B_{22}|^2 |\vec{H}|^2 \neq 0.$$



Si suponemos además que el invariante  $\Delta \neq 0$ , y usamos las expresiones explícitas de la segunda forma fundamental  $B$  dadas en la Proposición 2.2.8, obtenemos fácilmente

$$(\Delta > 0 \text{ sii } u^2 - v^2 > 0) \quad \text{y} \quad (\Delta < 0 \text{ sii } u^2 - v^2 < 0).$$

Afirmamos que existe  $\mu' \in \mathcal{A}$  invertible tal que  $U' := \mu' U \in dG_x(T_x M)$  satisface

$$H(U', U') = \pm 1 \quad \text{y} \quad H(U', U') = \pm \sigma,$$

respectivamente. Supongamos por ejemplo,  $u^2 - v^2 > 0$ , podemos tomar

$$\mu' = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{u^2 - v^2}} \left( \cosh \left( \frac{\theta}{2} \right) + \sigma \sinh \left( \frac{\theta}{2} \right) \right),$$

donde  $\theta := \frac{1}{2} \ln \left( \frac{u-v}{u+v} \right)$  satisface  $v \cosh \theta + u \sinh \theta = 0$ , por tanto

$$H(U', U') = \mu'^2 H(U, U) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2}} [(\cosh \theta + \sigma \sinh \theta)(u + \sigma v)] = \frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2}} [\pm \sqrt{u^2 - v^2}].$$

Para el caso en que  $u^2 - v^2 < 0$  tomamos  $\theta := \frac{1}{2} \ln \left( \frac{v-u}{v+u} \right)$  y  $\mu' = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{v^2 - u^2}} \left( \cosh \left( \frac{\theta}{2} \right) + \sigma \sinh \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)$ .

En el caso en que  $\Delta = 0$ , con argumentos similares a los de encima tenemos lo siguiente:

**Observación 7.1.5.** Usando  $C$ - de la Proposición 2.2.8, cuando  $|\vec{H}|^2 = 0$ ,  $\Delta = 0$  y  $\beta \neq 0$ ,  $dG_x(e_j)$  no es invertible, para  $j = 2, 3$ . De un cálculo directo, para  $X = ue_2 + ve_3 \in T_x M$

$$G^* H(X, X) = -2\epsilon\beta(u + \epsilon v)^2 [\mu_B, \mu_B^*](1 + \sigma\epsilon), \quad (7.7)$$

si  $\vec{H}$  es diagonal, y

$$G^* H(X, X) = 2\epsilon\beta(u + \epsilon v)^2 [\mu_B, \mu_B^*](1 - \sigma\epsilon), \quad (7.8)$$

si  $\vec{H}$  es antidiagonal, donde  $\epsilon = \pm 1$  y  $[\cdot, \cdot] = \det_{(e_0, e_1)}(\cdot, \cdot)$ . Concluimos que en este caso no existen elementos invertibles en  $dG_p(T_p M)$ .

Con argumentos similares a los de encima y usando la Proposición 2.2.8 podemos probar lo siguiente.

**Proposición 7.1.6.** Supongamos que en el punto  $x \in M$ ,  $K = K_N = 0$  y  $dG_x$  es inyectiva. Con respecto al vector  $U \in T_{G(x)} \mathcal{Q}$  tal que  $dG_x(T_x M) = \{a U : a \in \mathcal{A}\}$  tenemos lo siguiente.

1. Si  $\Delta \neq 0$  entonces

$$\Delta > 0 \quad (< 0) \quad \text{sii} \quad H(U, U) = \pm 1 \quad (= \pm \sigma).$$

2. Si  $\Delta = 0$  entonces  $|\vec{H}|^2 = 0$ , y en este caso se tiene:

a) cuando el espacio osculador  $T_x M \oplus N_1(x)$  es no degenerado tenemos

$$\vec{H} \text{ es diagonal} \quad \text{sii} \quad H(U, U) = \pm \frac{1 + \sigma\epsilon}{2}, \quad (7.9)$$

y

$$\vec{H} \text{ es antidiagonal} \quad \text{sii} \quad H(U, U) = \pm \frac{1 - \sigma\epsilon}{2}, \quad (7.10)$$

donde  $\epsilon = \pm 1$  dependiendo si  $N = N_1, N_2$  resp. (vea la Observación 1.1.3);

b) si  $T_x M \oplus N_1(x)$  es degenerado tenemos  $H(U, U) = 0$ .

## 7.2. Descripción local de superficies Lorentzianas planas con haz normal plano en $\mathbb{R}^{2,2}$

En esta sección vamos a suponer que  $M$  es simplemente conexa y que los haces  $TM$  y  $E$  son planos, *i.e.*  $K = K_N = 0$ . Recordemos que el haz espinorial  $\Sigma := \Sigma E \otimes \Sigma M$  está asociado al haz principal  $\tilde{Q}$  y a la representación  $\rho$  del grupo  $Spin'(1, 1) \times Spin''(1, 1)$  en  $\mathbb{H}_0$  (dada en la Proposición 3.3.8). Ya que las curvaturas  $K$  y  $K_N$  son cero, la conexión espinorial sobre el haz  $\tilde{Q}$  es plana y así admite una sección local paralela  $\tilde{s}$ ; ya que  $M$  es simplemente conexa, la sección  $\tilde{s}$  está en efecto definida globalmente.

Consideremos  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$  una solución de la ecuación de Dirac

$$D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi, \quad H(\varphi, \varphi) = 1, \quad (7.11)$$

y escribamos  $g := [\varphi] : M \rightarrow Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0$  las coordenadas de  $\varphi$  en el marco espinorial  $\tilde{s}$  :

$$\varphi = [\tilde{s}, g] \in \Sigma = \tilde{Q} \times \mathbb{H}_0 / \rho.$$

Por el teorema de representación espinorial (Teorema 4.3.1),  $\varphi$  satisface la ecuación de tipo Killing

$$\nabla_X \varphi = \eta(X) \cdot \varphi, \quad (7.12)$$

para cada  $X \in TM$ , donde

$$\eta(X) = -\frac{1}{2} \sum_{j=2,3} \epsilon_j e_j \cdot B(X, e_j), \quad (7.13)$$

$\epsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle$  y  $B$  es la segunda forma fundamental de  $M$ .

En la ecuación (7.13) y de aquí en adelante,  $(e_0, e_1)$  y  $(e_2, e_3)$  denotarán marcos ortonormales paralelos positivamente orientados, normal y tangente a  $M$  respectivamente, correspondiente al marco espinorial  $\tilde{s}$ , *i.e.*  $\pi(\tilde{s}) = (e_0, e_1, e_2, e_3)$  donde  $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q_E \times Q_M$  es la proyección natural.

Además, asumiremos que la aplicación de Gauss de la inmersión, inducida por  $\varphi$ , es regular y consideremos la estructura de Lorentz  $\sigma$  inducida sobre  $M$  definida en (7.3).

En principio, daremos la relación entre la aplicación de Gauss de la inmersión (inducida por  $\varphi$ ) y el campo espinorial  $\varphi$ .

**Lema 7.2.1.** *La aplicación de Gauss de la inmersión, inducida por  $\varphi$ , se encuentra dada por*

$$\begin{aligned} G : M &\longrightarrow \mathcal{Q} \subset \mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0 \\ x &\longmapsto ig^{-1}Ig \end{aligned} \tag{7.14}$$

donde  $g = [\varphi] : M \rightarrow Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0$  representa  $\varphi$  en el marco espinorial  $\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{Q}}$ .

*Demostración.* Escribiendo  $v_2 := \langle \langle e_2 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle$  y  $v_3 := \langle \langle e_3 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle \in \mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$ , la base  $(v_2, v_3)$  es una base ortonormal tangente a la inmersión de  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$ , así  $G = v_1 \wedge v_2$ . Ya que el producto cuña  $v_2 \wedge v_3 \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{2,2} \subset Cl_0(2, 2)$  de los dos vectores ortogonales  $v_2$  y  $v_3 \in \mathbb{R}^{2,2} \subset Cl_1(2, 2)$  se identifica con su producto de Clifford, tenemos

$$v_2 \wedge v_3 \simeq \begin{pmatrix} 0 & v_2 \\ \widehat{v}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v_3 \\ \widehat{v}_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \widehat{v}_3 & 0 \\ 0 & \widehat{v}_2 v_3 \end{pmatrix} \simeq v_2 \widehat{v}_3.$$

Por otro lado, si  $[e_2], [e_3] \in \mathbb{H}_1$  y  $[\varphi] \in \mathbb{H}_0$  representan a  $e_2, e_3$  y  $\varphi$  en el marco  $\tilde{s}$  de  $\tilde{\mathcal{Q}}$  (vea la Sección 4.3.1), conseguimos

$$\begin{aligned} v_2 \widehat{v}_3 &= \langle \langle e_2 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle \langle \langle \widehat{e_3 \cdot \varphi}, \varphi \rangle \rangle = \left( \overline{[\varphi]}[e_2][\varphi] \right) \left( \overline{[\varphi]}[e_3][\varphi] \right) \\ &= \overline{[\varphi]}[e_2][\widehat{e_3}][\varphi] = \overline{[\varphi]}[e_2 \cdot e_3][\varphi], \end{aligned}$$

que es la fórmula (7.14) ya que  $[e_2 \cdot e_3] = iI$ . □

**Lema 7.2.2.** *Denotando por  $[\eta] : TM \rightarrow \mathbb{H}_0$  la 1-forma que representa  $\eta$  (dada en (7.13)) en  $\tilde{s}$ , tenemos*

$$[\eta] = dg g^{-1} = \eta_1 J + i\eta_2 K, \tag{7.15}$$

donde  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son 1-formas sobre  $M$  con valores en  $\mathcal{A}$ .

*Demostración.* La primera igualdad es exactamente la ecuación (7.12) en el marco paralelo  $\tilde{s}$ ,

$$dg(X) = [\nabla_X \varphi] = [\eta(X) \cdot \varphi] = [\eta(X)][\varphi] = [\eta(X)]g.$$

La segunda igualdad es consecuencia de (7.13): note que  $\eta$  es una  $\mathbb{R}$ -combinación lineal de los elementos pares  $e_2 \cdot e_0$ ,  $e_2 \cdot e_1$ ,  $e_3 \cdot e_0$  y  $e_3 \cdot e_1$ ; con respecto a la estructura de  $\mathcal{A}$ -módulo  $\sigma = e_0 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_3$ , definida sobre el haz de Clifford  $Cl(E \oplus TM)$  (vea la Sección 4.3.3), tenemos

$$\sigma \cdot e_3 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_0 \quad \text{y} \quad \sigma \cdot e_2 \cdot e_1 = e_3 \cdot e_0.$$

Así,  $\eta$  es una  $\mathcal{A}$ -combinación lineal de  $e_3 \cdot e_1$  y  $e_1 \cdot e_2$ , representados por  $J$  y por  $iK$ , respectivamente; vea la Sección 3.1. □

Ahora definamos la 1-forma  $\tilde{\eta} : TM \rightarrow \mathbb{H}_0$  por la expresión

$$\tilde{\eta}(X) := \sigma i \langle \langle \eta(X) \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle,$$

para todo  $X \in TM$ ; usando la igualdad (7.15) tenemos  $\overline{[\eta]} = -[\eta]$ , por lo tanto,

$$\overline{\tilde{\eta}(X)} = -\overline{[\varphi][\eta(X) \cdot \varphi]} = -\overline{[\varphi]} \overline{[\eta(X)]} [\varphi] = \overline{[\varphi]}[\eta(X) \cdot \varphi] = -\tilde{\eta}(X),$$

así,  $\tilde{\eta}$  toma valores en el subespacio  $\mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0$ . La 1-forma  $\tilde{\eta}$  nos permite obtener la relación entre la aplicación de Gauss y la segunda forma fundamental de la superficie:

**Lema 7.2.3.** *La 1-forma  $\tilde{\eta} : M \rightarrow \mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0$  satisface*

$$\tilde{\eta} = -\frac{1}{2}G^{-1}dG = -g^{-1}dg.$$

*Demostración.* Supongamos que el marco tangente  $(e_2, e_3)$  es tal que  $\nabla e_j|_p = 0$  y notemos que la aplicación de Gauss  $G$  satisface  $\sigma i G = \langle \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle$  (vea la prueba del Lema 7.2.1). Entonces, para cada  $X \in TM$ ,

$$\begin{aligned} \sigma i dG(X) &= \langle \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle \rangle + \langle \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \varphi, \nabla_X \varphi \rangle \rangle \\ &= \langle \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle \rangle - \overline{\langle \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle \rangle} \\ &= \langle \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \eta(X) \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle - \overline{\langle \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \eta(X) \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle}, \end{aligned}$$

usando la fórmula (7.15) tenemos

$$\overline{\langle \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \eta(X) \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle} = -\sigma i \overline{[\varphi]} [e_2 \cdot e_3] [\eta(X)] [\varphi] = -\langle \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \eta(X) \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle,$$

por lo tanto

$$\sigma i dG(X) = 2\langle \langle e_2 \cdot e_3 \cdot \eta(X) \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle = 2\sigma i \overline{[\varphi]} [e_2 \cdot e_3] [\eta(X) \cdot \varphi] = 2G \langle \langle \eta(X) \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle$$

que es la primera igualdad del lema. Finalmente, usando (7.15) conseguimos

$$\tilde{\eta}(X) = \sigma i \langle \langle \eta(X) \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle = -\overline{[\varphi]} [\eta(X)] [\varphi] = -g^{-1}dg(X)g^{-1}g$$

que es la segunda igualdad del lema. □

Observemos que para cada  $g \in Spin(2, 2)$ , la expresión  $ig^{-1}Ig \in \mathcal{Q}$ , i.e.

$$ig^{-1}Ig \in \mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0 \quad \text{y} \quad H(ig^{-1}Ig, ig^{-1}Ig) = -1,$$

así, (7.14) y (7.15) pueden ser reescritas de la siguiente manera:

**Lema 7.2.4.** *Consideremos la proyección*

$$\begin{aligned} p : Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0 &\longrightarrow \mathcal{Q} \subset \mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0 \\ g &\longmapsto ig^{-1}Ig \end{aligned}$$

como un  $S_{\mathcal{A}}^1$ -haz principal, donde la acción de  $S_{\mathcal{A}}^1$  sobre  $Spin(2, 2)$  es dada por la multiplicación por la izquierda. Este haz principal se encuentra equipado con la distribución horizontal dada en cada  $g \in Spin(2, 2)$  por

$$\mathcal{H}_g := d(R_{g^{-1}})_g^{-1}(\mathcal{A}J \oplus i\mathcal{A}K) \subset T_g Spin(2, 2),$$

donde  $R_{g^{-1}}$  es la aplicación sobre  $Spin(2, 2)$  multiplicación a la derecha por  $g^{-1}$ . La distribución  $(\mathcal{H}_g)_{g \in Spin(2, 2)}$  es  $H$ -ortogonal a las fibras de  $p$  y para todo  $g \in Spin(2, 2)$ ,  $dp_g : \mathcal{H}_g \rightarrow T_{p(g)}\mathcal{Q}$  es un isomorfismo que preserva  $\sigma$  y tal que

$$H(dp_g(u), dp_g(u)) = -4H(u, u) \tag{7.16}$$

para todo  $u \in \mathcal{H}_g$ . Con estas notaciones, tenemos

$$G = p \circ g, \tag{7.17}$$

y la aplicación  $g : M \rightarrow Spin(2, 2)$  es un levantamiento horizontal a  $Spin(2, 2)$  de la aplicación de Gauss  $G : M \rightarrow \mathcal{Q}$ .

*Demostración.* Recordemos que  $S_{\mathcal{A}}^1 = \{\pm(\cosh(a)1 + \sinh(a)iI) \mid a \in \mathcal{A}\} \subset Spin(2, 2)$  es definido como la imagen inversa del grupo de estructura  $SO(1, 1) \times SO(1, 1)$  por el cubriente doble  $\Phi : Spin(2, 2) \rightarrow SO(2, 2)$  (vea la Sección 3.3). La prueba que  $p : Spin(2, 2) \rightarrow \mathcal{Q}$  es un  $S_{\mathcal{A}}^1$ -haz principal es directa. Por ejemplo, ya que  $S_{\mathcal{A}}^1$  contiene elementos que conmutan con  $iI$ , la proyección  $p$  preserva las fibras de la acción de  $S_{\mathcal{A}}^1$  sobre  $Spin(2, 2)$ .

Fijemos  $g \in Spin(2, 2)$  y consideremos la aplicación  $R_{g^{-1}} : a \in Spin(2, 2) \rightarrow ag^{-1} \in Spin(2, 2)$ .  $R_{g^{-1}}$  es un difeomorfismo y su diferencial en  $g \in Spin(2, 2)$

$$d(R_{g^{-1}})_g : u \in T_g Spin(2, 2) \longmapsto ug^{-1} \in \mathfrak{spin}(2, 2) \simeq \mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0$$

preserva la  $H$ -norma: para cualesquiera  $u, u' \in T_g Spin(2, 2)$ , ya que  $g^{-1} = \bar{g}$  tenemos

$$H(d(R_{g^{-1}})_g(u), d(R_{g^{-1}})_g(u')) = H(u\bar{g}, u'\bar{g}) = H(u, u').$$

Así,  $d(R_{g^{-1}})_g : T_g Spin(2, 2) \rightarrow \mathfrak{Sm}\mathbb{H}_0$  es una isometría para cada  $g \in Spin(2, 2)$ , y por lo tanto

$$\mathcal{H}_g := d(R_{g^{-1}})_g^{-1}(\mathcal{A}J \oplus i\mathcal{A}K) \subset T_g Spin(2, 2)$$

define una distribución horizontal de  $\mathcal{A}$ -módulos 2-dimensionales.

Tomemos  $g \in Spin(2, 2)$  y consideremos la aplicación inclusión  $i_g : a \in S_{\mathcal{A}}^1 \mapsto ag \in Spin(2, 2)$ . Ya que  $T_1 S_{\mathcal{A}}^1 \simeq \mathcal{A} iI$ , el espacio tangente a la órbita  $i_g(S_{\mathcal{A}}^1) \subset Spin(2, 2)$ , en  $g \in Spin(2, 2)$ , es dado por

$$T_g(i_g(S_{\mathcal{A}}^1)) = d(i_g)_1(T_1 S_{\mathcal{A}}^1) \simeq d(i_g)(\mathcal{A} iI).$$

Para cualesquiera  $u \in \mathcal{H}_g$  y  $u' \in T_g(S_{\mathcal{A}}^1 g)$ , consideremos  $a_1, a_2$  y  $a_3 \in \mathcal{A}$  tales que  $u = d(R_{g^{-1}})_g^{-1}(a_2 J + a_3 iK)$  y  $u' = d(i_g)_1(a_1 iI)$ , por tanto

$$\begin{aligned} H(u, u') &= H(d(R_{g^{-1}})_g(u), d(R_{g^{-1}})_g(u')) \\ &= H(a_2 J + a_3 iK, d(R_{g^{-1}})_g \circ d(i_g)_1(a_1 iI)) \\ &= H(a_2 J + a_3 iK, a_1 iI) = 0, \end{aligned}$$

así, la distribución  $(\mathcal{H}_g)_{g \in Spin(2, 2)}$  es  $H$ -ortogonal a la fibras de la proyección  $p$ .

De un cálculo directo, la restricción de la diferencial de  $p$  al subespacio  $\mathcal{H}_g$  viene dada por

$$\begin{aligned} dp_g : \mathcal{H}_g \subset T_g Spin(2, 2) &\longrightarrow T_{p(g)} \mathcal{Q} \\ u &\longmapsto \bar{u} iI g + \bar{g} iI u, \end{aligned}$$

y fácilmente vemos que  $dp_g$  es un isomorfismo que preserva  $\sigma$  : por ejemplo, dado  $u \in \mathcal{H}_g$ , este satisface  $u\bar{g} = d(R_{g^{-1}})_g(u) \in \mathcal{A} J \oplus \mathcal{A} iK$ , así,  $u\bar{g}$  anticonmuta con  $iI$ . Por lo tanto,

$$dp_g(u) = \bar{u} iI g + \bar{g} iI u = 0 \quad \text{sii} \quad \bar{u}g = u\bar{g},$$

además, ya que  $\bar{u}g = -u\bar{g}$  (esto equivale a  $u \in T_g Spin(2, 2)$ ), concluimos que  $u = 0$ , y  $dp_g$  es inyectiva.

Finalmente, vamos a deducir la identidad (7.16). Dado  $u \in \mathcal{H}_g$ , usando las identidades en (4.1) tenemos

$$\begin{aligned} H(dp_g(u), dp_g(u)) &= H(\bar{u} iI g + \bar{g} iI u, \bar{u} iI g + \bar{g} iI u) \\ &= H(\bar{u}iI g, \bar{u}iI g) + 2H(\bar{u}iI g, \bar{g}iI u) + H(\bar{g}iI u, \bar{g}iI u) \\ &= -H(u, u) + 2H(\bar{u}iI g, \bar{g}iI u) - H(u, u), \end{aligned}$$

pero ya que

$$H(\bar{u}iI g, \bar{g}iI u) = H(\bar{u}iI, \bar{g}iI(u\bar{g})) = -H(\bar{u}iI, \bar{g}(u\bar{g})iI) = H(\bar{u}iI, \bar{u}iI) = -H(u, u),$$

conseguimos (7.16). □

La fibrición descrita en el Lema 7.2.4 generaliza la fibrición de Hopf Lorentziana de pseudo esferas estudiada y descrita a detalle en [38]. Vea también [2, Lemma 6.6] para un resultado similar en el espacio de Minkowski 4-dimensional.

## Superficies Lorentzianas con invariante $\Delta \neq 0$

**Superficies con  $\Delta > 0$ .** Mostraremos que la aplicación  $g = [\varphi] : M \rightarrow Spin(2, 2)$  (vea el inicio de la Sección 7.2) es una aplicación conforme<sup>2</sup> que admite una parametrización especial, su *longitud de arco*, y que en tal parametrización  $g$  depende sólo de una aplicación conforme.

**Teorema 7.2.5.** *Adicionalmente a las hipótesis dadas al inicio de la Sección 7.2, supongamos que  $\Delta$  es positivo sobre  $M$ ; entonces tenemos:*

1. *la aplicación  $g : M \rightarrow Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0$  es una aplicación conforme, y en cada punto de  $M$ , existe una carta local  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$ , única salvo la acción del grupo*

$$\mathbb{G} := \{a \mapsto \pm a + b \mid b \in \mathcal{A}\},$$

*que es compatible con la orientación de  $M$  y tal que  $g : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow Spin(2, 2)$  satisface*

$$H(g', g') \equiv \pm 1; \tag{7.18}$$

2. *existe una aplicación conforme  $\psi : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que*

$$g'g^{-1} = \cosh \psi J + i \sinh \psi K \quad \text{o} \quad g'g^{-1} = \sinh \psi J + i \cosh \psi K, \tag{7.19}$$

*donde  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$  es la carta definida en 1.*

*Demostración.* Supongamos que  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$  es una carta dada por la estructura de Lorentz inducida por  $G$  y compatible con la orientación de  $M$ . Por el Lema 7.2.4,  $g : \mathcal{U} \rightarrow Spin(2, 2)$  es una aplicación conforme (pues  $G$  y  $p$  lo son en (7.17)).

Consideremos  $g'$  tal que  $dg = g'da$ . Si  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es una aplicación conforme, tenemos

$$H((g \circ \mu)', (g \circ \mu)') = \mu'^2 H(g', g').$$

Notemos que existe  $\mu$  tal que

$$\mu'^2 H(g', g') = \pm 1. \tag{7.20}$$

En efecto, ya que  $g$  es conforme,  $g'$  lo es (Observación A.0.3) y podemos escribir

$$H(g', g') = \frac{1 + \sigma}{2} h_0(s) + \frac{1 - \sigma}{2} h_1(t) \in \mathcal{A}, \tag{7.21}$$

para algunas funciones  $h_0(s)$  y  $h_1(t)$ , donde  $(s, t)$  son tales que  $a = \frac{1+\sigma}{2}s + \frac{1-\sigma}{2}t$  (vea (A.3) en

---

<sup>2</sup>Vea el Apéndice A para la noción de una aplicación conforme sobre una superficie de Lorentz.

el Apéndice A), de la fórmula (7.17) tenemos

$$\begin{aligned}
G^*H(\cdot, \cdot) &= -4H(g', g')da^2 & (7.22) \\
&= -4 \left( \frac{1+\sigma}{2}h_0(s) + \frac{1-\sigma}{2}h_1(t) \right) \left( \frac{1+\sigma}{2}ds^2 + \frac{1-\sigma}{2}dt^2 \right) \\
&= -4 \left( \frac{1+\sigma}{2}h_0(s)ds^2 + \frac{1-\sigma}{2}h_1(t)dt^2 \right) \\
&= -2(h_0(s)ds^2 + h_1(t)dt^2) - \sigma 2(h_0(s)ds^2 - h_1(t)dt^2).
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando (2.8) conseguimos  $H(dG, dG) = \langle dG, dG \rangle - \sigma dG \wedge dG$ , por lo tanto, la forma cuadrática  $\delta := \frac{1}{2}dG \wedge dG$  definida en la Sección 2.3, es dada por  $\delta = h_0(s)ds^2 - h_1(t)dt^2$ . Así, usando (2.27) conseguimos

$$0 < \Delta = -disc(\delta) = \det_g \delta = h_0(s)h_1(t), \quad (7.23)$$

y por tanto las funciones  $h_0$  y  $h_1$  tienen el mismo signo. Escribiendo

$$\mu' = \frac{1+\sigma}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{|h_0|}} \right) + \frac{1-\sigma}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{|h_1|}} \right),$$

tenemos de (7.21)

$$\mu'^2 H(g', g') = \frac{1+\sigma}{2} sign(h_0) + \frac{1-\sigma}{2} sign(h_1) = sign(h_0),$$

donde por ejemplo  $sign(h_0)$  es  $+1$  si  $h_0 > 0$  y es  $-1$  si  $h_0 < 0$ . Entonces definimos

$$\mu = \frac{1+\sigma}{2} \int_{s_0}^s \frac{1}{\sqrt{|h_0|}} + \frac{1-\sigma}{2} \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{|h_1|}}; \quad (7.24)$$

$\mu$  es un difeomorfismo ( $\mu'$  es invertible en  $\mathcal{A}$ , que implica que  $d\mu$  es un isomorfismo), y considerando  $g \circ \mu$  en lugar de  $\mu$ , conseguimos una solución de (7.18). Note que  $\sigma\mu$  satisface (7.18) pero invierte la orientación; todas las soluciones de (7.20) que preservan la orientación son de la forma  $\pm\mu + b$ , con  $b \in \mathcal{A}$ , así obtenemos también la unicidad salvo la acción del grupo  $\mathbb{G}$ .

Ahora probaremos la segunda afirmación del teorema. Escribiendo

$$g = \frac{1+\sigma}{2}g_1 + \frac{1-\sigma}{2}g_2$$

con  $g_1 = g_1(s)$  y  $g_2 = g_2(t)$  en  $\mathbb{R}1 \oplus i\mathbb{R}I \oplus \mathbb{R}J \oplus i\mathbb{R}K$  ( $g$  es una aplicación conforme) conseguimos

$$g'g^{-1} = \frac{1+\sigma}{2}g'_1g_1^{-1} + \frac{1-\sigma}{2}g'_2g_2^{-1},$$

y de (7.18) tenemos  $H(g'_1g_1^{-1}, g'_1g_1^{-1}) = H(g'_2g_2^{-1}, g'_2g_2^{-1}) = \pm 1$ . Puesto que  $g'_1g_1^{-1}$  y  $g'_2g_2^{-1}$



pertenecen a  $\mathbb{R}J \oplus i\mathbb{R}K$  (Lema 7.2.2), deducimos que

$$g'_1 g_1^{-1} = \cosh \psi_1 J + i \sinh \psi_1 K \quad \text{y} \quad g'_2 g_2^{-1} = \cosh \psi_2 J + i \sinh \psi_2 K,$$

o bien

$$g'_1 g_1^{-1} = \sinh \psi_1 J + i \cosh \psi_1 K \quad \text{y} \quad g'_2 g_2^{-1} = \sinh \psi_2 J + i \cosh \psi_2 K,$$

para algunas funciones  $\psi_1 = \psi_1(s)$  y  $\psi_2 = \psi_2(t) \in \mathbb{R}$ . La función

$$\psi = \frac{1 + \sigma}{2} \psi_1(s) + \frac{1 - \sigma}{2} \psi_2(t)$$

satisface las identidades en (7.19). □

En lo que sigue vamos a estudiar la métrica de la superficie en la carta especial

$$a = u + \sigma v = \frac{1 + \sigma}{2} s + \frac{1 - \sigma}{2} t : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \longrightarrow M$$

adaptada a la aplicación  $g = [\varphi] : M \rightarrow Spin(2, 2)$ , dada en el Teorema 7.2.5.

Recordemos que  $(e_0, e_1)$  y  $(e_2, e_3)$  son marcos ortonormales paralelos positivamente orientados, normal y tangente a  $M$  respectivamente, correspondiente al marco espinorial  $\tilde{s}$ . Escribamos  $\vec{H} := H_0 e_0 + H_1 e_1$ ; consideremos también el marco tangente paralelo  $(N_1, N_2)$  de vectores de tipo luz definidos por

$$N_1 := \frac{e_2 + e_3}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad N_2 := \frac{e_3 - e_2}{\sqrt{2}},$$

tal que  $\langle N_1, N_2 \rangle = 1$ . Finalmente, supongamos que  $\psi : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es la aplicación conforme dada en el Teorema 7.2.5 y escribamos  $\psi = \theta_1 + \sigma \theta_2$ , con  $\theta_1$  y  $\theta_2 \in \mathbb{R}$ .

**Lema 7.2.6.** *Tenemos*

$$N_1 = \pm \frac{e^{\theta_1}}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\lambda} \partial_u + \frac{1}{\mu} \partial_v \right) \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{e^{-\theta_1}}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\lambda} \partial_u - \frac{1}{\mu} \partial_v \right) \quad (7.25)$$

donde  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$  satisfacen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} \\ \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cosh \theta_2 & \sinh \theta_2 \\ \sinh \theta_2 & \cosh \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

*Demostración.* En la carta  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$  introducida encima,  $e_2, e_3$  están representados por dos funciones  $\underline{e}_2, \underline{e}_3 : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ . En el marco  $\tilde{s}$ , la ecuación de Dirac (7.11) queda como

$$-[e_2][\widehat{\nabla_{e_2} \varphi}] + [e_3][\widehat{\nabla_{e_3} \varphi}] = [\vec{H}][\widehat{\varphi}],$$

donde  $[e_2] = iJ$ ,  $[e_3] = K$  y  $[\vec{H}] = \sigma i H_0 1 + H_1 I$ . Ya que  $[\nabla \varphi] = dg$ , la igualdad de encima se reescribe como

$$Jdg(e_2) + iKdg(e_3) = (\sigma H_0 1 + iH_1 I)g. \quad (7.27)$$

Por otro lado, usando  $dg = g' da$  (vea (A.2) en el Apéndice A) obtenemos

$$dg(e_2)g^{-1} = g'g^{-1}\underline{e}_2 \quad \text{y} \quad dg(e_3)g^{-1} = g'g^{-1}\underline{e}_3,$$

y usando la primera o la segunda identidad en (7.19), la igualdad (7.27) puede ser reescrita como

$$-\begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi \\ \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma H_0 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \sinh \psi & \cosh \psi \\ \cosh \psi & \sinh \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma H_0 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Escribiendo  $c := -H_0 \sinh \theta_2 - H_1 \cosh \theta_2$  y  $d := -H_0 \cosh \theta_2 - H_1 \sinh \theta_2$ , estas identidades quedan

$$\begin{cases} \underline{e}_2 = c \sinh \theta_1 + \sigma d \cosh \theta_1 \\ \underline{e}_3 = c \cosh \theta_1 + \sigma d \sinh \theta_1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \underline{e}_2 = -c \cosh \theta_1 - \sigma d \sinh \theta_1 \\ \underline{e}_3 = -c \sinh \theta_1 - \sigma d \cosh \theta_1 \end{cases}.$$

Ya que  $\underline{e}_2$  y  $\underline{e}_3$  representan a los vectores linealmente independientes  $e_2, e_3$ , tenemos  $cd \neq 0$ ; escribiendo  $\lambda = \frac{1}{c}$  y  $\mu = \frac{1}{d}$ , fácilmente conseguimos (7.25) y (7.26).  $\square$

**Proposición 7.2.7.** *En la carta  $a = u + \sigma v$  del Teorema 7.2.5, la métrica es dada por*

$$\pm (\lambda^2 du^2 - \mu^2 dv^2); \tag{7.28}$$

además,  $\lambda$  y  $\mu$  son soluciones del sistema diferencial hiperbólico

$$\begin{cases} \partial_u \mu = -\lambda \partial_u \theta_2 \\ \partial_v \lambda = -\mu \partial_v \theta_2. \end{cases} \tag{7.29}$$

*Demostración.* Ya que los vectores  $N_1, N_2$  dados en  $(\partial_u, \partial_v)$  por (7.25) satisfacen  $|N_1|^2 = |N_2|^2 = 0$  y  $\langle N_1, N_2 \rangle = 1$ , tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P^t A P,$$

donde  $A$  es la matriz de la métrica en  $(\partial_u, \partial_v)$ , y donde

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm \frac{e^{\theta_1}}{\lambda} & \frac{e^{-\theta_1}}{\lambda} \\ \pm \frac{e^{\theta_1}}{\mu} & -\frac{e^{-\theta_1}}{\mu} \end{pmatrix}$$

es la matriz representando  $(N_1, N_2)$  en la base  $(\partial_u, \partial_v)$ ; así

$$A = \pm \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & -\mu^2 \end{pmatrix},$$

que es (7.28). Entonces calculamos los símbolos de Christoffel de esta métrica usando las fórmu-

las de Christoffel, y fácilmente conseguimos

$$\Gamma_{uu}^u = \frac{1}{\lambda} \partial_u \lambda, \quad \Gamma_{vu}^u = \frac{1}{\lambda} \partial_v \lambda, \quad \Gamma_{uv}^v = \frac{1}{\mu} \partial_u \mu, \quad \Gamma_{vv}^v = \frac{1}{\mu} \partial_v \mu$$

y

$$\Gamma_{uu}^v = \frac{\lambda}{\mu^2} \partial_v \lambda, \quad \Gamma_{vv}^u = \frac{\mu}{\lambda^2} \partial_u \mu.$$

Escribiendo finalmente que  $(N_1, N_2)$ , dado por (7.25), es paralelo con respecto a la métrica (7.28) (ya que  $(e_2, e_3)$  lo es), fácilmente obtenemos (7.29).  $\square$

**Observación 7.2.8.** *La condición  $\lambda = \pm\mu$  es equivalente a que  $\vec{H}$  sea un vector de tipo luz, que se encuentra sobre la diagonal principal (i.e.  $H_0 = H_1$ ) o sobre la antidiagonal (i.e.  $H_0 = -H_1$ ) de  $E$  respectivamente.*

Ahora presentamos el resultado principal de la sección: el teorema de descripción local de las superficies Lorentzianas planas con haz normal plano en  $\mathbb{R}^{2,2}$ , aplicación de Gauss regular y  $\Delta > 0$ . La prueba del teorema es similar a la demostración del teorema de estructura local de superficies planas en  $\mathbb{R}^4$  [3, Teorema 3].

**Teorema 7.2.9.** *Dadas  $\psi : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  una aplicación conforme y  $\theta_1, \theta_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que*

$$\psi = \theta_1 + \sigma\theta_2;$$

*supongamos que  $\lambda, \mu$  son soluciones del sistema (7.29) tales que  $\lambda\mu \neq 0$ , y definamos*

$$\underline{N}_1 = \pm \frac{e^{\theta_1}}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\lambda} + \sigma \frac{1}{\mu} \right) \quad y \quad \underline{N}_2 = \frac{e^{-\theta_1}}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\lambda} - \sigma \frac{1}{\mu} \right). \quad (7.30)$$

*Entonces, si  $g : \mathcal{U} \rightarrow Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0$  es una aplicación conforme que resuelve*

$$g'g^{-1} = \cosh \psi J + i \sinh \psi K \quad o \quad g'g^{-1} = \sinh \psi J + i \cosh \psi K, \quad (7.31)$$

*y si escribimos*

$$\xi := ig^{-1} \left[ \frac{w_2 - w_1}{\sqrt{2}} J + \frac{w_2 + w_1}{\sqrt{2}} iK \right] \hat{g} \quad (7.32)$$

*donde  $w_1, w_2 : T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  son las formas duales de  $\underline{N}_1, \underline{N}_2 \in \Gamma(T\mathcal{U})$ , la función  $F = \int \xi$  define una inmersión Lorentziana  $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  con  $K = K_N = 0$  y  $\Delta > 0$ .*

*Recíprocamente, las inmersiones Lorentzianas de  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$  tal que  $K = K_N = 0$ ,  $\Delta > 0$  y aplicación de Gauss regular son localmente de esta forma.*

*Demostración.* Primero mostraremos la implicación directa. Consideremos la métrica sobre  $\mathcal{U}$  tal que los vectores  $N_1 \simeq \underline{N}_1, N_2 \simeq \underline{N}_2 \in \Gamma(T\mathcal{U})$  definidos por (7.30) forman un marco de vectores de tipo luz de  $T\mathcal{U}$  tal que  $\langle N_1, N_2 \rangle = 1$  : esta es la métrica dada en (7.28). Ya que  $(\lambda, \mu)$  es una solución de (7.29), el marco  $(N_1, N_2)$  es paralelo, y así la métrica es plana. También

considere el haz trivial  $E = \mathbb{R}^{1,1} \times \mathcal{U}$  con su métrica trivial y su conexión trivial: la base canónica  $(e_0, e_1)$  de  $\mathbb{R}^{1,1}$  define secciones ortonormales y paralelas de  $\Gamma(E)$ . Definimos además  $e_2 := \frac{N_1 - N_2}{\sqrt{2}}$  y  $e_3 := \frac{N_1 + N_2}{\sqrt{2}}$ , secciones ortogonales y paralelas con  $\langle e_2, e_2 \rangle = -1$ ,  $\langle e_3, e_3 \rangle = 1$ . Escribamos  $s = (e_0, e_1, e_2, e_3) \in \mathcal{Q} = (SO(1, 1) \times SO(1, 1)) \times \mathcal{U}$ , y fijemos  $\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{Q}} = S_{\mathcal{A}}^1 \times \mathcal{U}$  tal que  $\pi(\tilde{s}) = s$ , donde  $\pi : \tilde{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{Q}$  es el cubriente doble natural. Entonces considere  $\varphi \in \Sigma = \tilde{\mathcal{Q}} \times \mathbb{H}_0/\rho$  tal que  $[\varphi] = g$  en  $\tilde{s}$ . Por construcción (ecuaciones (7.31)),  $\varphi$  es una solución de la ecuación de Dirac  $D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$ , donde  $\vec{H} = H_0 e_0 + H_1 e_1$  está definido por (7.26). Además, la 1-forma definida por (7.32) es tal que  $\xi = \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle$ ; esta es así una 1-forma cerrada y  $F = \int \xi$  es una inmersión isométrica de  $\mathcal{U}$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$  cuyo haz normal se identifica a  $E$ . Así, esta es una inmersión plana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ , con haz normal plano; además  $\Delta > 0$ , que es fácil de ver usando el criterio (7.23) en la prueba del Teorema 7.2.5 ( $H(g', g') = \pm 1$  por (7.31), esto es  $h_0 = h_1 = \pm 1$  en (7.21)).

Recíprocamente, si  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  es la inmersión de una superficie Lorentziana plana con haz normal plano,  $\Delta > 0$  y aplicación de Gauss regular, tenemos

$$F = \int \xi, \quad \text{con} \quad \xi(X) = \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle,$$

donde  $\varphi$  es la restricción a  $M$  del campo espinorial constante  $\sigma 1$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ . En un marco paralelo  $\tilde{s}$ , tenemos  $\varphi = [\tilde{s}, g]$ , donde  $g : M \rightarrow Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0$  es una aplicación conforme y horizontal (Teorema 7.2.5 y Lema 7.2.4). En una carta compatible con la estructura de Lorentz inducida por la aplicación de Gauss y adaptada a  $g$  (Teorema 7.2.5),  $\xi$  es de la forma (7.32) donde  $(w_1, w_2)$  es la base dual de la base definida por (7.30) y donde en esta última expresión  $(\lambda, \mu)$  son soluciones de (7.29).  $\square$

**Corolario 7.2.10.** *Una superficie Lorentziana plana con haz normal plano, aplicación de Gauss regular y tal que  $\Delta > 0$  localmente depende de 4 funciones reales de una variable real.*

*Demostración.* Notemos primero que la función  $\psi$  en el Teorema 7.2.9 depende de dos funciones de una variable: ya que  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es una aplicación conforme, escribiendo

$$\psi := \frac{1 + \sigma}{2} \psi_1 + \frac{1 - \sigma}{2} \psi_2$$

tenemos  $\psi_1 = \psi_1(s)$  y  $\psi_2 = \psi_2(t)$ , donde las coordenadas  $(s, t)$  son tales que  $a := \frac{1+\sigma}{2}s + \frac{1-\sigma}{2}t$ ; vea (A.3) en el Apéndice A. Entonces escribimos el sistema (7.29) en las coordenadas  $(s, t)$  y conseguimos

$$\partial_s \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_t \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \psi'_1 + \psi'_2 \\ \psi'_1 - \psi'_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}; \quad (7.33)$$

este es un sistema hiperbólico, y podemos resolver un problema de Cauchy: una vez que  $\psi_1$  y  $\psi_2$  están dadas, una solución de (7.33) depende de dos funciones  $\mu(0, t)$ ,  $\lambda(0, t)$  de la variable  $t$ . Por el Teorema 7.2.9, la superficie depende de  $\psi_1(s)$ ,  $\psi_2(t)$ ,  $\mu(0, t)$  y  $\lambda(0, t)$ .  $\square$

## Superficies con $\Delta < 0$ .

**Teorema 7.2.11.** *Además de las hipótesis dadas al inicio de la Sección 7.2, supongamos que el invariante  $\Delta < 0$  sobre  $M$ , entonces tenemos:*

1. *la aplicación  $g : M \rightarrow Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0$  es una aplicación conforme, y en cada punto de  $M$ , existe una carta local  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$ , única salvo la acción de  $\mathbb{G}$ , que es compatible con la orientación de  $M$  y tal que  $g \circ a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow Spin(2, 2)$  satisface*

$$H(g', g') \equiv \pm\sigma; \quad (7.34)$$

2. *existe una aplicación conforme  $\psi : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que*

$$g'g^{-1} = \frac{1+\sigma}{2}(\cosh \psi J + i \sinh \psi K) + \frac{1-\sigma}{2}(\sinh \psi J + i \cosh \psi K) \quad (7.35)$$

$$^o g'g^{-1} = \frac{1+\sigma}{2}(\sinh \psi J + i \cosh \psi K) + \frac{1-\sigma}{2}(\cosh \psi J + i \sinh \psi K), \quad (7.36)$$

donde  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$  es la carta definida en 1.

*Demostración.* Nuevamente consideremos  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$  una carta dada por la estructura de Lorentz inducida por  $G$  y compatible con la orientación de  $M$ . La aplicación  $g : \mathcal{U} \rightarrow Spin(2, 2)$  es conforme por el Lema 7.2.4, así, podemos escribir  $dg = g'da$ . Como en la prueba del Teorema 7.2.5, podemos encontrar una aplicación conforme  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que

$$\mu'^2 H(g', g') = \pm\sigma.$$

El argumento es análogo: escribiendo

$$H(g', g') = \frac{1+\sigma}{2}h_0(s) + \frac{1-\sigma}{2}h_1(t),$$

podemos definir

$$\mu' = \frac{1+\sigma}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{|h_0|}} \right) + \frac{1-\sigma}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{|h_1|}} \right);$$

$\mu'$  es tal que

$$\mu'^2 H(g', g') = \frac{1+\sigma}{2} \text{sign}(h_0) + \frac{1-\sigma}{2} \text{sign}(h_1),$$

concluimos el resultado pues  $h_0$  y  $h_1$  tienen signos opuestos (ya que  $h_0(s)h_1(t) = \Delta < 0$ ). Entonces definimos  $\mu$  por integración. Conseguimos  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  conforme que preserva la orientación, única salvo la acción del grupo  $\mathbb{G}$ ; considerando  $g \circ \mu$  en lugar de  $g$ , obtenemos  $H(g', g') = \pm\sigma$ .

Ahora mostraremos la segunda parte del teorema. Ya que  $g$  es conforme, escribimos

$$g = \frac{1 + \sigma}{2} g_1 + \frac{1 - \sigma}{2} g_2$$

con  $g_1 = g_1(s)$  y  $g_2 = g_2(t)$  pertenecientes a  $\mathbb{R}I \oplus i\mathbb{R}I \oplus \mathbb{R}J \oplus i\mathbb{R}K$ , conseguimos así

$$g'g^{-1} = \frac{1 + \sigma}{2} g'_1 g_1^{-1} + \frac{1 - \sigma}{2} g'_2 g_2^{-1},$$

con

$$H(g'_1 g_1^{-1}, g'_1 g_1^{-1}) = -H(g'_2 g_2^{-1}, g'_2 g_2^{-1}) = \pm 1.$$

Puesto que  $g'_1 g_1^{-1}$  y  $g'_2 g_2^{-1}$  pertenecen a  $\mathbb{R}J \oplus i\mathbb{R}K$ , deducimos que

$$g'_1 g_1^{-1} = \cosh \psi_1 J + i \sinh \psi_1 K \quad \text{y} \quad g'_2 g_2^{-1} = \sinh \psi_2 J + i \cosh \psi_2 K,$$

o bien

$$g'_1 g_1^{-1} = \sinh \psi_1 J + i \cosh \psi_1 K \quad \text{y} \quad g'_2 g_2^{-1} = \cosh \psi_2 J + i \sinh \psi_2 K,$$

para algunas funciones  $\psi_1 = \psi_1(s)$  y  $\psi_2 = \psi_2(t) \in \mathbb{R}$ . Entonces la función

$$\psi = \frac{1 + \sigma}{2} \psi_1(s) + \frac{1 - \sigma}{2} \psi_2(t)$$

satisface (7.35)-(7.36) respectivamente. □

Como en el caso anterior, vamos a estudiar la métrica de la superficie en la carta especial

$$a = u + \sigma v = \frac{1 + \sigma}{2} s + \frac{1 - \sigma}{2} t : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \longrightarrow M,$$

adaptada a  $g$ , dada por el Teorema 7.2.11. Recordemos que  $(e_0, e_1)$  y  $(e_2, e_3)$  son los marcos ortonormales paralelos y positivamente orientados, normal y tangente a  $M$  respectivamente, correspondiente a  $\tilde{s}$ . Definamos  $\vec{H} := H_0 e_0 + H_1 e_1$ ; consideremos también el marco tangente paralelo  $(N_1, N_2)$  de vectores de tipo luz definidos por  $N_1 := \frac{e_2 + e_3}{\sqrt{2}}$ ,  $N_2 := \frac{e_3 - e_2}{\sqrt{2}}$  que satisfacen  $\langle N_1, N_2 \rangle = 1$ . Finalmente, supongamos que  $\psi : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es la aplicación conforme del Teorema 7.2.11 y escribamos  $\psi = \theta_1 + \sigma \theta_2$ , con  $\theta_1$  y  $\theta_2 \in \mathbb{R}$ .

**Lema 7.2.12.** *En este caso tenemos*

$$N_1 = \pm \frac{e^{\theta_1}}{\sqrt{2}} \left( \frac{\rho}{\nu^2 + \rho^2} \partial_s + \frac{\nu}{\nu^2 + \rho^2} \partial_t \right) \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{e^{-\theta_1}}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\nu}{\nu^2 + \rho^2} \partial_s + \frac{\rho}{\nu^2 + \rho^2} \partial_t \right) \quad (7.37)$$

donde  $\nu, \rho \in \mathbb{R}$  no se anulan simultáneamente y satisfacen

$$\begin{pmatrix} \frac{\nu}{\nu^2 + \rho^2} \\ \frac{\rho}{\nu^2 + \rho^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-\theta_2} & e^{-\theta_2} \\ -e^{\theta_2} & -e^{\theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \end{pmatrix}. \quad (7.38)$$

*Demostración.* En la carta  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$  introducida encima,  $e_2, e_3$  están representados por dos funciones  $\underline{e}_2, \underline{e}_3 : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ . En  $\tilde{s}$ , la ecuación de Dirac (7.11) queda como

$$-[e_2][\widehat{\nabla_{e_2}\varphi}] + [e_3][\widehat{\nabla_{e_3}\varphi}] = [\vec{H}][\widehat{\varphi}],$$

i.e.

$$Jdg(e_2) + iKdg(e_3) = (\sigma h_0 I + ih_1 I)g;$$

ya que  $dg(e_2)g^{-1} = g'g^{-1}\underline{e}_2$  y  $dg(e_3)g^{-1} = g'g^{-1}\underline{e}_3$ , usando (7.35) o (7.36), esto puede ser reescrito como

$$\left[ -\frac{1+\sigma}{2} \begin{pmatrix} \cosh(\theta_1 + \theta_2) & \sinh(\theta_1 + \theta_2) \\ \sinh(\theta_1 + \theta_2) & \cosh(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} + \frac{1-\sigma}{2} \begin{pmatrix} \sinh(\theta_1 - \theta_2) & \cosh(\theta_1 - \theta_2) \\ \cosh(\theta_1 - \theta_2) & \sinh(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \sigma H_0 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

o

$$\left[ \frac{1+\sigma}{2} \begin{pmatrix} \sinh(\theta_1 + \theta_2) & \cosh(\theta_1 + \theta_2) \\ \cosh(\theta_1 + \theta_2) & \sinh(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} - \frac{1-\sigma}{2} \begin{pmatrix} \cosh(\theta_1 - \theta_2) & \sinh(\theta_1 - \theta_2) \\ \sinh(\theta_1 - \theta_2) & \cosh(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \sigma H_0 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Escribiendo  $c := -H_0 \sinh \theta_2 - H_1 \cosh \theta_2$  y  $d := -H_0 \cosh \theta_2 - H_1 \sinh \theta_2$ , estas identidades quedan como

$$\begin{cases} \underline{e}_2 = \left( \frac{d-c}{2} \cosh \theta_1 + \frac{d+c}{2} \sinh \theta_1 \right) + \sigma \left( \frac{d+c}{2} \cosh \theta_1 - \frac{d-c}{2} \sinh \theta_1 \right) \\ \underline{e}_3 = \left( \frac{d+c}{2} \cosh \theta_1 + \frac{d-c}{2} \sinh \theta_1 \right) + \sigma \left( -\frac{d-c}{2} \cosh \theta_1 + \frac{d+c}{2} \sinh \theta_1 \right) \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} \underline{e}_2 = \left( -\frac{d+c}{2} \cosh \theta_1 - \frac{d-c}{2} \sinh \theta_1 \right) + \sigma \left( \frac{d-c}{2} \cosh \theta_1 - \frac{d+c}{2} \sinh \theta_1 \right) \\ \underline{e}_3 = \left( -\frac{d-c}{2} \cosh \theta_1 - \frac{d+c}{2} \sinh \theta_1 \right) + \sigma \left( -\frac{d+c}{2} \cosh \theta_1 + \frac{d-c}{2} \sinh \theta_1 \right) \end{cases}$$

respectivamente. Ya que  $\underline{e}_2$  y  $\underline{e}_3$  representan a los vectores linealmente independientes  $e_2, e_3$ , tenemos  $d^2 + c^2 \neq 0$ ; escribiendo  $\nu := \frac{d-c}{d^2+c^2}$  y  $\rho := \frac{d+c}{d^2+c^2}$ , conseguimos (7.37) y (7.38).  $\square$

**Proposición 7.2.13.** *En la carta  $a = \frac{1+\sigma}{2}s + \frac{1-\sigma}{2}t$  del Teorema 7.2.11, la métrica es dada por*

$$\pm 4 ( \nu\rho(-ds^2 + dt^2) + (\rho^2 - \nu^2)dsdt ); \quad (7.39)$$

además,  $\nu, \rho$  son soluciones del sistema

$$\begin{cases} \partial_s(\rho^2 - \nu^2) + 2\partial_t(\nu\rho) = -2(\nu^2 + \rho^2)\partial_s\theta_2 \\ 2\partial_s(\nu\rho) - \partial_t(\rho^2 - \nu^2) = -2(\nu^2 + \rho^2)\partial_t\theta_2. \end{cases} \quad (7.40)$$

*Demostración.* Ya que los vectores  $N_1, N_2$  dados en  $(\partial_s, \partial_t)$  por (7.37) satisfacen  $|N_1|^2 = |N_2|^2 = 0$  y  $\langle N_1, N_2 \rangle = 1$ , tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P^t A P,$$

donde  $A$  es la matriz de la métrica en  $(\partial_s, \partial_t)$ , y donde

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm e^{\theta_1} \frac{\rho}{\nu^2 + \rho^2} & -e^{-\theta_1} \frac{\nu}{\nu^2 + \rho^2} \\ \pm e^{\theta_1} \frac{\nu}{\nu^2 + \rho^2} & e^{-\theta_1} \frac{\rho}{\nu^2 + \rho^2} \end{pmatrix}$$

es la matriz representando  $(N_1, N_2)$  en la base  $(\partial_s, \partial_t)$ ; así

$$A = \pm \begin{pmatrix} -4\nu\rho & 2(\rho^2 - \nu^2) \\ 2(\rho^2 - \nu^2) & 4\nu\rho \end{pmatrix},$$

que es (7.39). Entonces calculamos los símbolos de Christoffel de esta métrica

$$\Gamma_{ss}^s = \frac{2\nu\rho}{(\nu^2 + \rho^2)^2} \partial_s(\nu\rho) + \frac{\rho^2 - \nu^2}{(\nu^2 + \rho^2)^2} (\partial_s(\rho^2 - \nu^2) + \partial_t(\nu\rho))$$

$$\Gamma_{ss}^t = \frac{2\nu\rho}{(\nu^2 + \rho^2)^2} (\partial_s(\rho^2 - \nu^2) + \partial_t(\nu\rho)) - \frac{\rho^2 - \nu^2}{(\nu^2 + \rho^2)^2} \partial_s(\nu\rho)$$

$$\Gamma_{tt}^s = \frac{2\nu\rho}{(\nu^2 + \rho^2)^2} (\partial_s(\nu\rho) - \partial_t(\rho^2 - \nu^2)) + \frac{\rho^2 - \nu^2}{(\nu^2 + \rho^2)^2} \partial_t(\nu\rho)$$

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{2\nu\rho}{(\nu^2 + \rho^2)^2} \partial_t(\nu\rho) + \frac{\rho^2 - \nu^2}{(\nu^2 + \rho^2)^2} (\partial_t(\rho^2 - \nu^2) - \partial_s(\nu\rho))$$

y

$$\Gamma_{st}^s = \frac{2\nu\rho}{(\nu^2 + \rho^2)^2} \partial_t(\nu\rho) + \frac{\rho^2 - \nu^2}{(\nu^2 + \rho^2)^2} \partial_s(\nu\rho), \quad \Gamma_{st}^t = \frac{2\nu\rho}{(\nu^2 + \rho^2)^2} \partial_s(\nu\rho) - \frac{\rho^2 - \nu^2}{(\nu^2 + \rho^2)^2} \partial_t(\nu\rho).$$

Escribiendo finalmente que  $(N_1, N_2)$ , dado por (7.37), es paralelo con respecto a la métrica (7.39) (ya que  $(e_2, e_3)$  lo son), de un cálculo directo obtenemos (7.40).  $\square$

**Observación 7.2.14.** *La condición  $\nu \equiv 0$  (resp.  $\rho \equiv 0$ ) es equivalente a que  $\vec{H}$  es vector de tipo luz sobre la diagonal (resp. sobre la antidiagonal) de  $E$ .*

Presentamos a continuación el teorema de descripción local en el caso en que la superficie Lorentziana es tal que  $K = K_N = 0$  y  $\Delta < 0$ . Omitimos su prueba por ser análoga a la prueba del Teorema 7.2.9.

**Teorema 7.2.15.** *Dadas  $\psi : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  una aplicación conforme y  $\theta_1, \theta_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que*

$$\psi = \theta_1 + \sigma\theta_2;$$

*suponga que  $\nu, \rho$  son soluciones del sistema (7.40) tal que  $\nu\rho \neq 0$ , y defina*

$$\underline{N}_1 = \pm \frac{\sqrt{2}e^{\theta_1}}{\nu^2 + \rho^2} \left[ \frac{1 + \sigma}{2} \rho + \frac{1 - \sigma}{2} \nu \right] \quad y \quad \underline{N}_2 = \frac{\sqrt{2}e^{-\theta_1}}{\nu^2 + \rho^2} \left[ \frac{1 + \sigma}{2} (-\nu) + \frac{1 - \sigma}{2} \rho \right]. \quad (7.41)$$



Entonces, si  $g : \mathcal{U} \rightarrow Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0$  es una aplicación conforme que resuelve

$$g'g^{-1} = \frac{1+\sigma}{2}(\cosh \psi J + i \sinh \psi K) + \frac{1-\sigma}{2}(\sinh \psi J + i \cosh \psi K)$$

o

$$g'g^{-1} = \frac{1+\sigma}{2}(\sinh \psi J + i \cosh \psi K) + \frac{1-\sigma}{2}(\cosh \psi J + i \sinh \psi K),$$

y si escribimos

$$\xi := ig^{-1} \left[ \frac{w_2 - w_1}{\sqrt{2}} J + \frac{w_2 + w_1}{\sqrt{2}} iK \right] \hat{g} \quad (7.42)$$

donde  $w_1, w_2 : T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  son las formas duales de  $N_1, N_2 \in \Gamma(T\mathcal{U})$ , la función  $F = \int \xi$  define una inmersión Lorentziana  $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  con  $K = K_N = 0$  y  $\Delta < 0$ .

Recíprocamente, una inmersión Lorentziana plana con haz normal plano de  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$ , con aplicación de Gauss regular y tal que  $\Delta < 0$  es localmente de esta forma.

**Corolario 7.2.16.** Una superficie Lorentziana plana con haz normal plano, aplicación de Gauss regular y tal que  $\Delta < 0$  localmente depende de una función analítica y de dos funciones reales de una variable real.

*Demostración.* Escribiendo  $z := s + it$ ,  $f = \rho - i\nu$  y  $F = f^2$ , el sistema (7.40) queda como  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} F = 2b|F|$ , con  $b = -\partial_s \theta_2 + i\partial_t \theta_2$ , y así se simplifica a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = b\bar{f}. \quad (7.43)$$

Soluciones de (7.43) son casos especiales de *funciones analíticas generalizadas* (también llamadas *funciones pseudoanalíticas*) y son conocidas por estar en correspondencia 1-1 con funciones analíticas; vea por ejemplo [10, Section 9].  $\square$

## Superficies Lorentzianas con invariante $\Delta = 0$

En esta sección vamos a suponer que la superficie Lorentziana  $M \subset \mathbb{R}^{2,2}$  es plana con haz normal plano (*i.e.*  $K = K_N = 0$ ), que tiene aplicación de Gauss regular e invariante  $\Delta = 0$ . Note que en este caso, el vector de curvatura media  $\vec{H}$  es un vector de tipo luz (*i.e.*  $|\vec{H}|^2 = 0$ ); vea la Proposición 2.2.8.

Recordemos que el espacio osculador de la superficie Lorentziana  $M$ , en el punto  $x \in M$ , es el subespacio  $T_x M \oplus N_1(x) \subset T_x \mathbb{R}^{2,2}$ , donde  $N_1(x)$  es el primer espacio normal de la inmersión en  $x$ , definido en (2.19). El espacio osculador  $T_x M \oplus N_1(x)$  es degenerado si  $N_1(x)$  es 1-dimensional y sigue la dirección de un vector de tipo luz.

De acuerdo con la Proposición 7.1.6, tenemos dos casos a tratar dependiendo si el espacio osculador de la superficie  $T_x M \oplus N_1(x)$  es degenerado o no.

**Superficies con espacio osculador no degenerado.** Supongamos que el espacio osculador de la superficie  $T_x M \oplus N_1(x)$  es no degenerado en cada punto  $x \in M$ . Ya que la aplicación de Gauss de la inmersión es regular, la forma  $G^*H = H(dG, dG)$  es no nula (Lema 2.2.6).

Para presentar el resultado principal de esta sección, consideremos el grupo

$$\mathbb{G}_\epsilon := \frac{1 + \sigma\epsilon}{2}\mathbb{G} \oplus \frac{1 - \sigma\epsilon}{2}\mathbb{D}, \quad \epsilon = \pm 1,$$

donde  $\mathbb{G} = \{a \mapsto \pm a + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  y  $\mathbb{D}$  es el grupo de difeomorfismos de  $\mathbb{R}$ . El grupo  $\mathbb{G}_\epsilon$  actúa sobre el grupo de difeomorfismos conformes  $\mathbb{D}_\mathcal{A} := \frac{1+\sigma}{2}\mathbb{D} \oplus \frac{1-\sigma}{2}\mathbb{D}$  de  $\mathcal{A}$ , de la siguiente manera: para cada

$$\frac{1 + \sigma\epsilon}{2}T + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2}h \in \mathbb{G}_\epsilon \quad y \quad \mu = \frac{1 + \sigma\epsilon}{2}h_1 + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2}h_2 \in \mathbb{D}_\mathcal{A},$$

definimos

$$\left(\frac{1 + \sigma\epsilon}{2}T + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2}h\right) \cdot \mu := \frac{1 + \sigma\epsilon}{2}(\pm h_1 + b) + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2}h \circ h_2 \in \mathbb{D}_\mathcal{A},$$

donde  $b \in \mathbb{R}$  es tal que  $T(a) = \pm a + b$ .

**Teorema 7.2.17.** *Además de las hipótesis dadas al inicio de la sección, supongamos que el vector de curvatura media es tal que  $\vec{H} := H_0(e_0 + e_1)$  sobre  $M$ , entonces:*

1. *la aplicación  $g : M \rightarrow Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0$  es conforme, y en cada punto de  $M$ , existe una carta local  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$ , única salvo la acción del grupo  $\mathbb{G}_\epsilon$ , compatible con la orientación de  $M$  y tal que  $g : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow Spin(2, 2)$  satisface*

$$H(g', g') \equiv \pm \frac{1 + \sigma\epsilon}{2}; \quad (7.44)$$

2. *existe una aplicación conforme  $\psi : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que*

$$g'g^{-1} = \frac{1 + \sigma\epsilon}{2}(\cosh \psi J + i \sinh \psi K) + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2}\psi(J + \epsilon i K) \quad (7.45)$$

o

$$g'g^{-1} = \frac{1 + \sigma\epsilon}{2}(\sinh \psi J + i \cosh \psi K) + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2}\psi(J + \epsilon i K) \quad (7.46)$$

donde  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$  es la carta definida en 1.

*Demostración.* Como en la prueba del Teorema 7.2.5, consideremos una carta  $(\mathcal{U}, a)$  dada por la estructura de Lorentz compatible con la orientación de  $M$  y considere  $g'$  tal que  $dg = g'da$ . Ya que  $\Delta = 0$  y  $\vec{H}$  es diagonal (vea (7.9)) tenemos

$$H(g', g') = \frac{1 + \sigma\epsilon}{2}u(s)$$

con  $u \neq 0$ . En este caso podemos definir la aplicación

$$\mu = \frac{1 + \sigma\epsilon}{2} \int \frac{1}{\sqrt{|u(s)|}} + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2} h(t),$$

donde  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un difeomorfismo cualquiera;  $\mu$  es conforme y

$$\mu' = \frac{1 + \sigma\epsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{|u(s)|}} + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2} h'(t)$$

satisface  $\mu'^2 H(g', g') = \pm \frac{1 + \sigma\epsilon}{2}$ . Por integración conseguimos  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  conforme que preserva la orientación, única salvo la acción del grupo  $\mathbb{G}_\epsilon$ . Como  $\mu'$  es invertible (por tanto  $\mu$  es un difeomorfismo) podemos considerar  $g \circ \mu$  en lugar de  $\mu$  y tener

$$H(g', g') = \pm \frac{1 + \sigma\epsilon}{2}.$$

La prueba de la segunda parte del teorema es análoga a la prueba del Teorema 7.2.5 considerando los correspondientes casos: escribiendo  $g = \frac{1 + \sigma\epsilon}{2} g_1 + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2} g_2$  conseguimos

$$g'g^{-1} = \frac{1 + \sigma\epsilon}{2} g'_1 g_1^{-1} + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2} g'_2 g_2^{-1}$$

con  $H(g'_1 g_1^{-1}, g'_1 g_1^{-1}) = \pm 1$  y  $H(g'_2 g_2^{-1}, g'_2 g_2^{-1}) = 0$ , así,

$$g'_1 g_1^{-1} = \cosh \psi_1 J + i \sinh \psi_1 K \quad \text{o} \quad g'_1 g_1^{-1} = \sinh \psi_1 J + i \cosh \psi_1 K$$

y  $g'_2 g_2^{-1} = \psi_2(t)(J + \epsilon i K)$ , para algunas funciones  $\psi_1(s)$  y  $\psi_2(t) \in \mathbb{R}$ . Finalmente, la aplicación

$$\psi = \frac{1 + \sigma\epsilon}{2} \psi_1(s) + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2} \psi_2(t) \tag{7.47}$$

satisface la segunda parte del teorema. □

*En el caso en que  $\vec{H}$  es un vector de tipo luz que se encuentra sobre la antidiagonal de  $E$ , conseguimos afirmaciones análogas, una vez que intercambiamos  $\frac{1 + \sigma\epsilon}{2}$  por  $\frac{1 - \sigma\epsilon}{2}$ .*

Consideremos la aplicación conforme  $\psi$  del Teorema 7.2.17 (escrita como en (7.47)), donde  $\psi_1 = \psi_1(s) \in \mathbb{R}^*$  y  $\psi_2 = \psi_2(t) \in \mathbb{R}^*$ . Observemos que la carta  $a = u + \sigma v$  dada en 1 del Teorema 7.2.17 puede ser escrita como

$$a = \frac{1 + \sigma\epsilon}{2}(u + \epsilon v) + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2}(u - \epsilon v); \tag{7.48}$$

vamos a definir en esta sección (y sólo en esta),

$$\partial_s := \partial_u + \epsilon \partial_v \quad \text{y} \quad \partial_t := \partial_u - \epsilon \partial_v,$$

y los vectores de tipo luz

$$N_1 := \frac{\epsilon e_2 + e_3}{\sqrt{2}}, \quad N_2 := \frac{e_3 - \epsilon e_2}{\sqrt{2}}. \quad (7.49)$$

Para simplificar la presentación, consideremos el signo + de (7.44); después de cada afirmación, indicaremos el cambio en la expresión obtenida al considerar el signo opuesto.

**Lema 7.2.18.** *Tenemos*

$$\begin{cases} N_1 = \frac{e^{\epsilon\psi_1}}{A} \partial_s + \frac{R}{2} \partial_t \\ N_2 = \frac{1}{2A\psi_2} \partial_t \end{cases} \quad (7.50)$$

donde  $R$  es una función de  $(s, t)$  y  $A \in \mathbb{R}^*$  es tal que

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{H_0} \quad (7.51)$$

Si tomamos el signo  $-$  de (7.44) obtenemos el mismo resultado una vez que reemplacemos  $A$  por  $-\epsilon A$  en la componente  $\partial_s$  de  $N_1$ .

*Demostración.* En la carta  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$  introducida en (7.48),  $e_2$  y  $e_3$  están representados por dos funciones  $\underline{e}_2, \underline{e}_3 : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ . En  $\tilde{s}$ , la ecuación de Dirac (7.11) queda como

$$Jg'g^{-1}\underline{e}_2 + iKg'g^{-1}\underline{e}_3 = H_0(\sigma 1 + iI);$$

usando (7.45) conseguimos

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sigma\epsilon}{2} [(-\cosh \psi_1 + \sinh \psi_1 iI)\underline{e}_2 + (\sinh \psi_1 - \cosh \psi_1 iI)\underline{e}_3] &= \frac{1 + \sigma\epsilon}{2} H_0(\epsilon + iI) \\ \frac{1 - \sigma\epsilon}{2} [\psi_2(-1 + \epsilon iI)\underline{e}_2 + \psi_2(\epsilon - iI)\underline{e}_3] &= \frac{1 - \sigma\epsilon}{2} H_0(-\epsilon + iI); \end{aligned}$$

escribiendo estas igualdades en las componentes de  $1, iI$  obtenemos directamente (7.50).  $\square$

**Proposición 7.2.19.** *En la carta  $(\mathcal{U}, a)$  del Teorema 7.2.17 (escrita como en (7.48)), la métrica está dada por*

$$2A^2\psi_2 e^{-\epsilon\psi_1} (-AR e^{-\epsilon\psi_1} ds^2 + 2dsdt); \quad (7.52)$$

además, los coeficientes de la métrica satisfacen el sistema de primer orden

$$\begin{cases} \partial_t A = 0 \\ \partial_t (A^3 \psi_2 R) + 2A e^{\epsilon\psi_1} \psi_2 \partial_s A = 0. \end{cases} \quad (7.53)$$

Si tomamos el signo  $-$  de (7.44), reemplazamos  $2dsdt$  por  $-2\epsilon dsdt$  en la métrica (7.52) y el sistema (7.53) queda invariante.

*Demostración.* Ya que los vectores  $N_1, N_2$  dados en  $(\partial_s, \partial_t)$  por (7.49) satisfacen  $|N_1|^2 = |N_2|^2 =$

0 y  $\langle N_1, N_2 \rangle = 1$ , tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P^t C P,$$

donde  $C$  es la matriz de la métrica en  $(\partial_s, \partial_t)$ , y donde

$$P = \begin{pmatrix} e^{\epsilon\psi_1} & 0 \\ \frac{R}{2} & \frac{1}{2A\psi_2} \end{pmatrix}$$

es la matriz representando  $(N_1, N_2)$  en la base  $(\partial_s, \partial_t)$ ; así

$$C = 2A^2\psi_2 e^{-\epsilon\psi_1} \begin{pmatrix} -ARe^{-\epsilon\psi_1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que es (7.52). Entonces calculamos los símbolos de Christoffel de la métrica usando las fórmulas de Christoffel, conseguimos

$$\Gamma_{st}^s = \Gamma_{tt}^s = 0$$

y

$$\begin{aligned} \Gamma_{ss}^s &= \frac{1}{A^2\psi_2 e^{-\epsilon\psi_1}} \partial_s(A^2\psi_2 e^{-\epsilon\psi_1}) + \frac{1}{2} \frac{1}{A^2\psi_2 e^{-\epsilon\psi_1}} \partial_t(A^3\psi_2 R e^{-2\epsilon\psi_1}), \\ \Gamma_{ss}^t &= -\frac{1}{2} \frac{1}{A^2\psi_2 e^{-\epsilon\psi_1}} \partial_s(A^3\psi_2 R e^{-2\epsilon\psi_1}) + AR e^{-\epsilon\psi_1} \Gamma_{ss}^s, \\ \Gamma_{tt}^t &= \frac{1}{A^2\psi_2 e^{-\epsilon\psi_1}} \partial_t(A^2\psi_2 e^{-\epsilon\psi_1}), \\ \Gamma_{st}^t &= -\frac{1}{2} \frac{1}{A^2\psi_2 e^{-\epsilon\psi_1}} \partial_t(A^3\psi_2 R e^{-2\epsilon\psi_1}). \end{aligned}$$

Usando finalmente que  $(N_1, N_2)$ , dado por (7.50), es paralelo con respecto a la métrica (7.52) (ya que  $(e_2, e_3)$  lo son), fácilmente obtenemos (7.53).  $\square$

Obtenemos el teorema de estructura local de las superficies Lorentzianas  $M \subset \mathbb{R}^{2,2}$  con invariantes  $|\vec{H}|^2 = K = K_N = \Delta = 0$  ( $\vec{H}$  diagonal), con aplicación de Gauss regular y espacio osculador no degenerado en todos sus puntos.

**Teorema 7.2.20.** *Dadas  $\psi : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  una aplicación conforme y  $\psi_1, \psi_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  tales que*

$$\psi = \frac{1 + \sigma\epsilon}{2} \psi_1(s) + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2} \psi_2(t);$$

suponga que  $A, R$  son soluciones de (7.53) tales que  $A \neq 0$ , y defina

$$\underline{N}_1 = \frac{1 + \sigma\epsilon}{2} \left( \frac{2e^{\psi_1}}{A} \right) + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2} R \quad y \quad \underline{N}_2 = \frac{1 - \sigma\epsilon}{2} \left( \frac{1}{A\psi_2} \right). \quad (7.54)$$

Entonces, si  $g : \mathcal{U} \rightarrow Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0$  es una aplicación conforme que resuelve

$$g'g^{-1} = \frac{1 + \sigma\epsilon}{2}(\cosh \psi J + i \sinh \psi K) + \frac{1 - \sigma\epsilon}{2}\psi(J + \epsilon iK),$$

y si escribimos

$$\xi := ig^{-1} \left[ \frac{w_2 - w_1}{\sqrt{2}} J + \frac{w_2 + w_1}{\sqrt{2}} iK \right] \hat{g} \quad (7.55)$$

donde  $w_1, w_2 : T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  son las formas duales de  $\underline{N}_1, \underline{N}_2 \in \Gamma(T\mathcal{U})$ , la función  $F = \int \xi$  define una inmersión Lorentziana  $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  con  $|\vec{H}|^2 = K = K_N = \Delta = 0$  y  $\vec{H}$  diagonal.

Recíprocamente, las inmersiones de  $M$  tal que  $|\vec{H}|^2 = K = K_N = \Delta = 0$  ( $\vec{H}$  diagonal), con aplicación de Gauss regular y espacio osculador no degenerado son localmente de esta forma.

*Demostración.* La prueba del teorema esencialmente es la misma que la prueba del Teorema 7.2.9. Considere  $\varphi \in \Sigma = \tilde{\mathcal{Q}} \times \mathbb{H}_0/\rho$  tal que  $[\varphi] = g$  en  $\tilde{s}$ . Entonces, la 1-forma  $\xi = \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle$  es cerrada (ya que  $\varphi$  es una solución de la ecuación de Dirac  $D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$ , donde  $\vec{H} = H_0(e_0 + e_1)$  es definido por (7.51)), y  $F = \int \xi$  es una inmersión isométrica de  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$  cuyo haz normal se identifica a  $E$ . Así, es una inmersión plana en  $\mathbb{R}^{2,2}$ , con haz normal plano,  $\Delta = 0$  y  $\vec{H}$  diagonal.  $\square$

Como mencionamos después del Teorema 7.2.17, obtenemos afirmaciones análogas cuando consideramos  $\vec{H}$  sobre la antidiagonal de  $E$ , por lo tanto, podemos concluir en general el siguiente corolario consecuencia del teorema de descripción local (Teorema 7.2.20).

**Corolario 7.2.21.** *Una superficie Lorentziana con invariantes  $K = K_N = \Delta = |\vec{H}|^2 = 0$ , aplicación de Gauss regular y espacio osculador no degenerado depende localmente de cuatro funciones reales de una variable real (módulo cambio de parámetros).*

*Demostración.* Un difeomorfismo real  $h(t)$  determina una carta local que satisface el Teorema 7.2.17. Ahora, la primera ecuación de (7.53) implica que  $A = A(s)$  sólo depende de la variable  $s$ , por tanto, de (7.51), la segunda ecuación queda como

$$\partial_t R(s, t) + \frac{\psi_2'(t)}{\psi_2(t)} R(s, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} h_0'(s) e^{2\epsilon\psi_1(s)} = 0. \quad (7.56)$$

Una vez que  $\psi_1(s), \psi_2(t)$  y  $A(s)$  (consecuentemente  $h_0(s)$ ) están dadas, una solución de (7.56) depende de una función  $R(s, 0)$ , de la variable  $s$ . Por el teorema de descripción local, la superficie depende de las funciones  $\psi_1(s), \psi_2(t), A(s)$  y  $R(s, 0)$ , módulo el cambio de parámetro  $h(t)$ .  $\square$

**Superficies con espacio osculador degenerado.** En este apartado, vamos a suponer que el espacio osculador  $T_x M \oplus N_1(x)$  es degenerado en cada punto  $x \in M$ . Por el Lema 2.2.6, esto equivale a que la forma  $G^*H = H(dG, dG)$  es idénticamente nula.

**Teorema 7.2.22.** *Además de las hipótesis dadas al inicio de la sección, supongamos que el vector de curvatura media es tal que  $\vec{H} := H_0(e_0 + \epsilon e_1)$  sobre  $M$ , tenemos:*

1. *la aplicación  $g : M \rightarrow Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0$  es conforme, y en cualquier carta local  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$ , compatible con la orientación de  $M$ ,  $g : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow Spin(2, 2)$  satisface*

$$H(g', g') \equiv 0; \quad (7.57)$$

2. *existe una aplicación conforme  $\psi : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que*

$$g'g^{-1} = \psi(J - \epsilon\sigma iK), \quad \epsilon = \pm 1 \quad (7.58)$$

donde  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$  es cualquier carta como en 1.

*Demostración.* La primera parte del teorema es una consecuencia directa de la fórmula (7.22). La construcción de  $\psi$  es análoga a la construcción dada en el Teorema 7.2.17.  $\square$

Vamos a considerar  $\psi = \frac{1+\sigma}{2}\psi_1 + \frac{1-\sigma}{2}\psi_2$ , donde  $\psi_1 = \psi_1(s) \in \mathbb{R}^*$  y  $\psi_2 = \psi_2(t) \in \mathbb{R}^*$ , y los vectores de tipo luz

$$N_1 := \frac{\epsilon e_2 + e_3}{\sqrt{2}}, \quad N_2 := \frac{e_3 - \epsilon e_2}{\sqrt{2}}, \quad (7.59)$$

tales que  $\langle N_1, N_2 \rangle = 1$ .

**Lema 7.2.23.** *En este caso tenemos*

$$\begin{cases} N_1 = \frac{A}{AB - R_1 R_2} \partial_s + \frac{R_1}{AB - R_1 R_2} \partial_t \\ N_2 = \frac{R_2}{AB - R_1 R_2} \partial_s + \frac{B}{AB - R_1 R_2} \partial_t \end{cases} \quad (7.60)$$

donde  $R_1, R_2$  son funciones desconocidas de  $(s, t)$  y,  $A, B$  satisfacen

$$\frac{A}{AB - R_1 R_2} = -\epsilon \frac{H_0}{2\sqrt{2}\psi_1}, \quad \frac{B}{AB - R_1 R_2} = -\epsilon \frac{H_0}{2\sqrt{2}\psi_2}. \quad (7.61)$$

*Demostración.* En cualquier carta  $a : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$  como en 1 del Teorema 7.2.22,  $e_2, e_3$  están representados por dos funciones  $\underline{e}_2, \underline{e}_3 : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ . En  $\tilde{s}$ , la ecuación de Dirac (7.11) queda como

$$Jg'g^{-1}\underline{e}_2 + iKg'g^{-1}\underline{e}_3 = H_0(\sigma 1 + i\epsilon I);$$

usando (7.58) conseguimos

$$-\psi(1 + \epsilon\sigma iI)\underline{e}_2 - \psi(\epsilon\sigma + iI)\underline{e}_3 = H_0(\sigma + i\epsilon I).$$

escribiendo las igualdad anterior en componentes de  $1, iI$  obtenemos directamente (7.60).  $\square$

**Proposición 7.2.24.** En cualquier carta  $a = \frac{1+\sigma}{2}s + \frac{1-\sigma}{2}t$  como en el Teorema 7.2.22, la métrica está dada por

$$-2BR_1ds^2 - 2AR_2dt^2 + 2(AB + R_1R_2)dsdt; \quad (7.62)$$

además, los coeficientes satisfacen el sistema

$$\begin{cases} \partial_s A = -\partial_t R_1 \\ \partial_t B = -\partial_s R_2. \end{cases} \quad (7.63)$$

*Demostración.* Ya que los vectores  $N_1, N_2$  dados en  $(\partial_s, \partial_t)$  por (7.59) satisfacen  $|N_1|^2 = |N_2|^2 = 0$  y  $\langle N_1, N_2 \rangle = 1$ , tenemos  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P^t C P$ , donde  $C$  es la matriz de la métrica en  $(\partial_s, \partial_t)$ , y donde

$$P = \frac{1}{AB - R_1R_2} \begin{pmatrix} A & R_2 \\ R_1 & B \end{pmatrix}$$

es la matriz representando  $(N_1, N_2)$  en la base  $(\partial_s, \partial_t)$ ; así

$$C = \begin{pmatrix} -2BR_1 & AB + R_1R_2 \\ AB + R_1R_2 & -2AR_2 \end{pmatrix},$$

que es (7.62). Entonces calculamos los símbolos de Christoffel de esta métrica usando los fórmulas de Christoffel, conseguimos

$$\begin{aligned} \Gamma_{ss}^s &= -\frac{2AR_2}{(AB - R_1R_2)^2} \partial_s(BR_1) + \frac{AB + R_1R_2}{(AB - R_1R_2)^2} (\partial_s(AB + R_1R_2) + \partial_t(BR_1)) \\ \Gamma_{ss}^t &= -\frac{AB + R_1R_2}{(AB - R_1R_2)^2} \partial_s(BR_1) + \frac{2BR_1}{(AB - R_1R_2)^2} (\partial_s(AB + R_1R_2) + \partial_t(BR_1)) \\ \Gamma_{st}^s &= -\frac{2AR_2}{(AB - R_1R_2)^2} \partial_t(BR_1) - \frac{AB + R_1R_2}{(AB - R_1R_2)^2} \partial_s(AR_2) \\ \Gamma_{st}^t &= -\frac{AB + R_1R_2}{(AB - R_1R_2)^2} \partial_t(BR_1) - \frac{2BR_1}{(AB - R_1R_2)^2} \partial_s(AR_2) \\ \Gamma_{tt}^s &= \frac{2AR_2}{(AB - R_1R_2)^2} (\partial_t(AB + R_1R_2) + \partial_s(AR_2)) - \frac{AB + R_1R_2}{(AB - R_1R_2)^2} \partial_t(AR_2) \end{aligned}$$

y

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{AB + R_1R_2}{(AB - R_1R_2)^2} (\partial_t(AB + R_1R_2) + \partial_s(AR_2)) - \frac{2BR_1}{(AB - R_1R_2)^2} \partial_t(AR_2).$$

Escribiendo finalmente que el marco  $(N_1, N_2)$ , dado por (7.60), es paralelo con respecto a la métrica (7.62) (ya que  $(e_2, e_3)$  lo son), fácilmente obtenemos el sistema (7.63).  $\square$

Finalmente, enunciamos el teorema de descripción local de superficies Lorentzianas  $M$  en  $\mathbb{R}^{2,2}$  con invariantes  $|\vec{H}|^2 = K = K_N = \Delta = 0$ , aplicación de Gauss regular y espacio osculador degenerado en todos sus puntos.



**Teorema 7.2.25.** Dadas  $\psi : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  una aplicación conforme y  $\psi_1, \psi_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$\psi = \frac{1+\sigma}{2}\psi_1(s) + \frac{1-\sigma}{2}\psi_2(t);$$

supongamos que  $A, B, R_1, R_2$  son soluciones de (7.63) tal que  $AB \neq R_1R_2$ , y defina

$$\underline{N}_1 = \frac{2}{AB - R_1R_2} \left[ \frac{1+\sigma}{2}A + \frac{1-\sigma}{2}R_1 \right] \quad y \quad \underline{N}_2 = \frac{2}{AB - R_1R_2} \left[ \frac{1+\sigma}{2}R_2 + \frac{1-\sigma}{2}B \right]. \quad (7.64)$$

Entonces, si  $g : \mathcal{U} \rightarrow Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0$  es una aplicación conforme que resuelve

$$g'g^{-1} = \psi(J - \epsilon\sigma iK),$$

y si escribimos

$$\xi := ig^{-1} \left[ \frac{w_2 - w_1}{\sqrt{2}}J + \frac{w_2 + w_1}{\sqrt{2}}iK \right] \hat{g} \quad (7.65)$$

donde  $w_1, w_2 : T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  son las formas duales de  $\underline{N}_1, \underline{N}_2 \in \Gamma(T\mathcal{U})$ , la función  $F = \int \xi$  define una inmersión  $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  con  $|\vec{H}|^2 = K = K_N = \Delta = 0$ .

Recíprocamente, las inmersiones isométricas de  $M$  tal que  $|\vec{H}|^2 = K = K_N = \Delta = 0$ , con aplicación de Gauss regular y espacio osculador degenerado son localmente de esta forma.

**Corolario 7.2.26.** Las superficies Lorentzianas con  $K = K_N = \Delta = |\vec{H}|^2 = 0$ , aplicación de Gauss regular y espacio osculador degenerado dependen localmente de dos funciones reales de una variable real y de dos 1-formas exactas linealmente independientes (módulo cambio de parámetros).

*Demostración.* Dos difeomorfismos reales  $h_1(s), h_2(t)$  determinan una carta local que satisface el Teorema 7.2.22. El sistema (7.63) equivale a que las 1-formas

$$\mu := (-R_1)ds + Adt \quad y \quad \nu := Bds + (-R_2)dt$$

son exactas; la independencia lineal de  $\mu$  y  $\nu$  equivale a  $AB - R_1R_2 \neq 0$ . Por el Teorema 7.2.25, la superficie depende de  $\psi_1(s), \psi_2(t)$  y de las 1-formas exactas  $\mu$  y  $\nu$ , módulo el cambio de parámetros  $h(s)$  y  $h(t)$ .  $\square$

# CAPÍTULO 8

---

## Superficies Lorentzianas planas en pseudo esferas de $\mathbb{R}^{2,2}$

---

En este capítulo deduciremos una descripción conforme de una superficie Lorentziana plana en el espacio de anti-de Sitter  $\mathbb{H}^{2,1}$ , y en la pseudo esfera  $\mathbb{S}^{1,2}$ . Como consecuencia obtendremos la descripción local de las superficies Lorentzianas planas en  $\mathbb{H}^{2,1}$  (resp. en  $\mathbb{S}^{1,2}$ ) como el producto, en los cuaternios, de dos curvas en  $\mathbb{H}^{2,1}$  (resp. en  $\mathbb{S}^{1,2}$ ).

La estructura conforme sobre la superficie Lorentziana considerada en este capítulo es la misma a la del capítulo precedente, *i.e.* consideramos la única estructura de Lorentz sobre la superficie Lorentziana tal que la aplicación de Gauss de la superficie es una aplicación conforme. Describiremos una identificación entre  $\mathbb{R}^{2,2}$  y el conjunto  $Herm_2(\mathcal{A})$  de las matrices Hermitianas con coeficientes en los números de Lorentz, bajo esta identificación las pseudo esferas de  $\mathbb{R}^{2,2}$  admiten una descripción similar a las dadas en [19, 2] del espacio hiperbólico y en [20] del espacio de de Sitter como subconjuntos de matrices hermitianas complejas.

### 8.1. Preliminares algebraicos

Siguiendo la notación del Capítulo 3, vamos a denotar por  $M_2(\mathcal{A})$  el conjunto de matrices de tamaño  $2 \times 2$  con coeficientes en los números de Lorentz  $\mathcal{A}$ ; para cada  $B \in M_2(\mathcal{A})$  su matriz conjugada  $\widehat{B} \in M_2(\mathcal{A})$  esta definida como la conjugación en  $\mathcal{A}$  de sus componentes (si  $a = u + \sigma v \in \mathcal{A}$ , su conjugada es  $\widehat{a} := u - \sigma v$ ), el determinante sobre  $M_2(\mathcal{A})$  es definido de manera usual (con valores en  $\mathcal{A}$ ) y escribiremos

$$Sl_2(\mathcal{A}) := \{B \in M_2(\mathcal{A}) : \det B = 1\}.$$

Como en el caso complejo, podemos definir el conjunto de matrices hermitianas de tamaño  $2 \times 2$  con coeficientes en  $\mathcal{A}$ ,

$$\text{Herm}_2(\mathcal{A}) := \{B \in M_2(\mathcal{A}) : B = B^*\}, \quad (8.1)$$

donde  $B^* := \widehat{B}^t$  es la matriz transpuesta conjugada de  $B$ . El conjunto  $\text{Herm}_2(\mathcal{A})$  satisface propiedades análogas a las matrices hermitianas complejas, por ejemplo:

- las componentes en la diagonal principal son reales,
- si escribimos  $A = B + \sigma C$ , con  $A \in \text{Herm}_{\mathcal{A}}(2)$ ,  $B$  y  $C$  matrices reales, entonces  $B$  es simétrica y  $C$  es antisimétrica,
- tienen determinante real,
- la inversa, cuando existe, también está en  $\text{Herm}_{\mathcal{A}}(2)$ .

Consideremos el isomorfismo de álgebras

$$\begin{aligned} A_0 : \mathbb{H}_0 &\longrightarrow M_2(\mathcal{A}) \\ p = p_0 I + ip_1 I + p_2 J + ip_3 K &\longmapsto \begin{pmatrix} p_0 - \sigma p_1 & p_2 - \sigma p_3 \\ -p_2 - \sigma p_3 & p_0 + \sigma p_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.2)$$

que satisface

$$H(p, p) = \det A_0(p) \quad \text{y} \quad A_0(\widehat{p}) = A_0(p)^*, \quad (8.3)$$

y el isomorfismo de espacios vectoriales

$$\begin{aligned} A_1 : \mathbb{H}_1 &\longrightarrow M_2(\mathcal{A}) \\ q = iq_0 I + q_1 I + iq_2 J + q_3 K &\longmapsto \begin{pmatrix} -q_1 - \sigma q_0 & -q_3 - \sigma q_2 \\ -q_3 + \sigma q_2 & q_1 - \sigma q_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.4)$$

tal que

$$H(q, q) = -\det A_1(q) \quad \text{y} \quad A_1(\widehat{q}) = -A_1(q)^*. \quad (8.5)$$

De un cálculo directo obtenemos la siguiente relación: para cada  $p, p' \in \mathbb{H}_0$  se satisface

$$A_1(\sigma i I p p') = -A_0(p)A_0(p'); \quad (8.6)$$

como consecuencia, tenemos

$$A_1(p I p') = -A_1(\sigma i I p \sigma i I p') = A_0(p)A_0(\sigma i I p') = A_0(p) \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} A_0(p'); \quad (8.7)$$

finalmente, para cada  $q \in \mathbb{H}_1$  se satisface

$$A_1(\sigma q) = A_0(iq) \quad \text{y} \quad A_1(q)^{-1} = A_1(\bar{q}). \quad (8.8)$$

Usando (8.5), la imagen del espacio  $\mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$  bajo el isomorfismo  $A_1$  es

$$A_1(\mathbb{R}^{2,2}) = A_1\left(\left\{\xi \in \mathbb{H}_1 : \widehat{\xi} = -\xi\right\}\right) = \left\{B \in M_2(\mathcal{A}) : B^* = B\right\} = \text{Herm}_2(\mathcal{A}),$$

el conjunto de matrices hermitianas con coeficientes en  $\mathcal{A}$ . Si consideramos la base canónica de  $\mathbb{R}^{2,2}$  a travez del isomorfismo  $A_1$ , la métrica  $-\det$  definida sobre  $\text{Herm}_2(\mathcal{A})$  tiene signatura  $(-, +, -, +)$  y por lo tanto,  $A_1 : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow (\text{Herm}_2(\mathcal{A}), -\det)$  es una isometría.

Ya que la  $H$ -norma restringida a  $\mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1$  coincide con la métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , el espacio de anti de-Sitter (definido en (5.5)), es dado por

$$\mathbb{H}^{2,1} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1 : H(\xi, \xi) = -1\right\} = \left\{B \in \text{Herm}_2(\mathcal{A}) : \det B = 1\right\};$$

por otro lado, la pseudo esfera  $\mathbb{S}^{1,2}$  (definida en (5.6)), es dada por

$$\mathbb{S}^{1,2} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2,2} \subset \mathbb{H}_1 : H(\xi, \xi) = 1\right\} = \left\{B \in \text{Herm}_2(\mathcal{A}) : \det B = -1\right\}.$$

**Proposición 8.1.1.** *Con la notación de encima tenemos*

$$\mathbb{H}^{2,1} = \{BB^* : B \in \text{Sl}_2(\mathcal{A})\} \quad y \quad \mathbb{S}^{1,2} = \left\{B \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^* : B \in \text{Sl}_2(\mathcal{A})\right\} \quad (8.9)$$

vistos como subconjuntos de  $\text{Herm}_2(\mathcal{A})$ .

*Demostración.* En ambos casos la inclusión  $\supset$  se satisface directamente.

Mostraremos que la inclusión opuesta  $\subset$  es válida. Consideremos  $B \in \mathbb{H}^{2,1}$  (resp.  $\mathbb{S}^{1,2}$ ) y escribamos

$$B = \frac{1+\sigma}{2}B_1 + \frac{1-\sigma}{2}B_2,$$

donde  $B_1$  y  $B_2$  son matrices reales de tamaño  $2 \times 2$ . Las condiciones  $B^* = B$  y  $\det B = 1$  (resp.  $\det B = -1$ ) son equivalentes respectivamente a  $B_2 = B_1^t$  y  $\det B_1 = \det B_2 = 1$  (resp.  $\det B_1 = \det B_2 = -1$ ). Probaremos (8.9) por casos respectivamente.

Definiendo en el primer caso  $C := \frac{1+\sigma}{2}B_1 + \frac{1-\sigma}{2}Id$ , obtenemos

$$CC^* = \left(\frac{1+\sigma}{2}B_1 + \frac{1-\sigma}{2}Id\right) \left(\frac{1+\sigma}{2}Id + \frac{1-\sigma}{2}B_1^t\right) = B$$

y  $\det C = \frac{1+\sigma}{2} \det B_1 + \frac{1-\sigma}{2} \det Id = 1$ .

En el segundo caso definimos  $D := \frac{1+\sigma}{2}B_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1-\sigma}{2}Id$ , es tal que

$$D \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D^* = \left(\frac{1+\sigma}{2}B_1 + \frac{1-\sigma}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \left(\frac{1+\sigma}{2}Id + \frac{1-\sigma}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B_1^t\right) = B$$

y  $\det D = \frac{1+\sigma}{2}(-\det B_1) + \frac{1-\sigma}{2} \det Id = 1$ . □

## 8.2. Superficies Lorentzianas en pseudo esferas

Presentamos el resultado principal del capítulo, la fórmula de representación conforme de una superficie Lorentziana plana en el espacio de anti-de Sitter  $\mathbb{H}^{2,1}$  o en la pseudo esfera  $\mathbb{S}^{1,2}$ .

**Teorema 8.2.1.** *Consideremos  $M$  una superficie de Lorentz orientada y simplemente conexa,  $B : M \rightarrow Sl_2(\mathcal{A})$  una inmersión conforme tal que existen  $\theta, \omega$  1-formas conformes que satisfacen*

$$B^{-1}dB = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Asuma que  $|\theta|^2 \neq \pm|\omega|^2$ . Entonces

$$F = BB^* : M \longrightarrow \mathbb{H}^{2,1} \quad y \quad F = B \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^* : M \longrightarrow \mathbb{S}^{1,2}$$

definen con la métrica inducida, inmersiones isométricas planas.

Recíprocamente, una inmersión isométrica de una superficie Lorentziana plana simplemente conexa  $(M, g)$  en  $\mathbb{H}^{2,1}$  o en  $\mathbb{S}^{1,2}$  puede ser descrita como encima.

Este teorema es el análogo Lorentziano a la representación conforme de superficies (Riemannianas) planas en el espacio hiperbólico y el espacio de de Sitter (3–dimensionales) dados en [19, 20]; usando espinores en dimensión 4, P. Bayard [2] caracterizó de manera análoga las superficies planas en el espacio hiperbólico 3–dimensional.

*Demostración del Teorema 8.2.1.* Probaremos la implicación directa sólo para el caso  $\mathbb{H}^{2,1}$ , el otro caso es análogo. Consideremos una carta  $a = u + \sigma v : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$  adaptada a la estructura de Lorentz sobre  $M$  y compatible con la orientación. Denotaremos por  $(\partial_u, \partial_v)$  el marco correspondiente a la carta y escribiremos  $\theta = \theta_1 da$  y  $\omega = \omega_1 da$ . Notemos que

$$dF = dB B^* + B dB^* = B (B^{-1}dB + (B^{-1}dB)^*) B^* = B \begin{pmatrix} 0 & \theta + \widehat{\omega} \\ \omega + \widehat{\theta} & 0 \end{pmatrix} B^*,$$

por lo tanto,

$$dF(\partial_u) = B \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 + \widehat{\omega}_1 \\ \omega_1 + \widehat{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix} B^* \quad y \quad dF(\partial_v) = \sigma B \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 - \widehat{\omega}_1 \\ \omega_1 - \widehat{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix} B^*. \quad (8.11)$$

Supongamos que  $dF$  no es inyectiva, i.e.  $dF(\partial_u) = \lambda dF(\partial_v)$ , para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ , de (8.11) conseguimos

$$|\theta_1|^2 - |\omega_1|^2 = \lambda \sigma (|\theta_1|^2 - |\omega_1|^2),$$

ya que  $|\theta|^2 \neq |\omega|^2$ , tenemos que  $\lambda = \sigma$ , una contradicción; así  $dF$  es inyectiva. Tenemos entonces que  $F : M \rightarrow \mathbb{H}^{2,1}$ , con la métrica inducida, es una inmersión isométrica.

La métrica inducida  $g = \langle dF, dF \rangle = -\det dF$  de la inmersión está dada por

$$\begin{aligned} g &= (\theta + \bar{\omega}) (\omega + \bar{\theta}) \\ &= (\theta_1 + \bar{\omega}_1) (\omega_1 + \bar{\theta}_1) du^2 + (\theta_1 - \bar{\omega}_1) (\omega_1 - \bar{\theta}_1) dv^2 + \sigma(\omega_1\theta_1 - \bar{\omega}_1\bar{\theta}_1)dudv. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Consideremos la aplicación  $N := B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B^* : M \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ ;  $N$  es tal que

$$\langle N, N \rangle = -\det N = 1, \quad \langle N, F \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle N, dF \rangle = 0,$$

*i.e.*  $N \in \mathbb{R}^{2,2}$  es un vector de tipo espacio, tangente a  $\mathbb{H}^{2,1}$  y normal a la superficie  $M$ ; además

$$\langle dN, N \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle dN, F \rangle = 0,$$

es decir,  $dN$  es tangente a  $M$ . Definamos el operador de forma

$$S := -dN : TM \longrightarrow TM$$

de la inmersión  $M \subset \mathbb{H}^{2,1}$ , siguiendo la dirección  $N$ ;  $S$  está dado explícitamente por

$$-S(\cdot) = B \left[ B^{-1}dB \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \left( B^{-1}dB \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^* \right] B^* = B \begin{pmatrix} 0 & -\theta + \bar{\omega} \\ \omega - \hat{\theta} & 0 \end{pmatrix} B^*.$$

Usando la expresión de la métrica (8.12), de un cálculo directo conseguimos

$$\langle \partial_u, \partial_u \rangle \langle \partial_v, \partial_v \rangle - \langle \partial_u, \partial_v \rangle^2 = - \left( \theta_1 \hat{\theta}_1 - \omega_1 \widehat{\omega}_1 \right)^2; \quad (8.13)$$

por otro lado, ya que

$$S(\partial_u) = B \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 - \widehat{\omega}_1 \\ -\omega_1 + \hat{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix} B^* \quad \text{y} \quad S(\partial_v) = \sigma B \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 + \widehat{\omega}_1 \\ -\omega_1 - \hat{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix} B^*,$$

tenemos

$$\langle S(\partial_u), \partial_u \rangle = \theta_1 \hat{\theta}_1 - \omega_1 \widehat{\omega}_1, \quad \langle S(\partial_v), \partial_v \rangle = \omega_1 \widehat{\omega}_1 - \theta_1 \hat{\theta}_1 \quad \text{y} \quad \langle S(\partial_u), \partial_v \rangle = 0.$$

Reemplazando esto último en la ecuación de Gauss (vea por ejemplo [43, pag. 107])

$$K(\partial_u, \partial_v) = -1 + \frac{\langle S(\partial_u), \partial_u \rangle \langle S(\partial_v), \partial_v \rangle - \langle S(\partial_u), \partial_v \rangle^2}{\langle \partial_u, \partial_u \rangle \langle \partial_v, \partial_v \rangle - \langle \partial_u, \partial_v \rangle^2}, \quad (8.14)$$

conseguimos  $K(\partial_u, \partial_v) = 0$ , la curvatura Gaussiana de la inmersión  $M \subset \mathbb{H}^{2,1}$  es idénticamente cero, *i.e.*  $F : M \longrightarrow \mathbb{H}^{2,1}$  es una inmersión isométrica plana.

Recíprocamente, consideremos  $(M, g)$  una superficie Lorentziana simplemente conexa orientada (en espacio y en tiempo). Supongamos que existe una inmersión isométrica plana  $F : (M, g) \rightarrow \mathbb{H}^{2,1}$  (resp.  $\mathbb{S}^{1,2} \subset \mathbb{R}^{2,2}$ ); si usamos la inclusión isométrica canónica  $\mathbb{H}^{2,1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  (resp.  $\mathbb{S}^{1,2} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ ) podemos mostrar que la inmersión  $(M, g) \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  es plana con haz normal plano y aplicación de Gauss regular. Por lo tanto, consideremos la estructura de Lorentz sobre  $M$  inducida por la aplicación de Gauss dada en (7.3).

Denotaremos por  $E$  el haz normal y por  $\vec{H} \in \Gamma(E)$  al vector de curvatura media de la inmersión. Como antes  $\Sigma := M \times \mathbb{H}_0$  es el haz de espinores de  $\mathbb{R}^{2,2}$  restringido a  $M$ . La inmersión  $F$  es dada entonces por

$$F = \int \xi, \quad \text{donde} \quad \xi(X) = \langle \langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle,$$

para algún campo espinorial  $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$  solución de  $D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$  y tal que  $H(\varphi, \varphi) = 1$  (el campo espinorial  $\varphi$  es la restricción a  $M$  del campo espinorial constante  $\sigma 1 \in \mathbb{H}_0$  de  $\mathbb{R}^{2,2}$ ).

**Superficies Lorentzianas en  $\mathbb{H}^{2,1}$ .** En este caso, la inmersión está dada por

$$F = \langle \langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle, \tag{8.15}$$

donde  $e_0$  es el vector normal a  $\mathbb{H}^{2,1}$  (vea la Proposición 5.1.1). Ahora, si escogemos un marco paralelo  $\tilde{s} \in \Gamma(\tilde{Q})$  adaptado a  $e_0$ , es decir, tal que  $e_0$  es el primer vector de  $\pi(\tilde{s}) \in \Gamma(Q_1 \times_M Q_2)$ , usando (8.6), (8.15) queda como

$$F = -\sigma i [\overline{\varphi}] \widehat{[\varphi]} \simeq -A_1(\sigma i 1 [\overline{\varphi}] \widehat{[\varphi]}) = A_0([\overline{\varphi}]) A_0(\widehat{[\varphi]}) \tag{8.16}$$

donde  $[\varphi] \in \mathbb{H}_0$  representa  $\varphi$  en  $\tilde{s}$ . Definamos  $B := A_0([\overline{\varphi}])$ . Ya que  $[\overline{\varphi}][\varphi] = H(\varphi, \varphi) = 1$ , de (8.3) tenemos

$$\det B = H([\overline{\varphi}], [\overline{\varphi}]) = [\varphi][\overline{\varphi}] = 1 \quad \text{y} \quad B^* = A_0(\widehat{[\varphi]}).$$

Por lo tanto, de (8.16), conseguimos  $F \simeq BB^*$ , con  $B \in Sl_2(\mathcal{A})$ . Finalmente, ya que  $dB = A_0(d[\overline{\varphi}])$ , usando (7.15) conseguimos

$$B^{-1}dB = A_0([\varphi]) A_0(d[\overline{\varphi}]) = -A_0(d[\varphi] [\overline{\varphi}]) = -A_0(\eta_1 J + i\eta_2 K) = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \omega & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\theta := -\eta_1 + \sigma\eta_2$  y  $\omega := \eta_1 + \sigma\eta_2$ . La aplicación  $B : M \rightarrow Sl_2(\mathcal{A})$  es conforme: vista la superficie (plana con haz normal plano) en  $\mathbb{R}^{2,2}$ , mostramos en el capítulo anterior que  $[\varphi] : M \rightarrow Spin(2, 2) \subset \mathbb{H}_0$  es una aplicación conforme; ya que  $[\overline{\varphi}][\varphi] = 1$  tenemos la relación

$$d[\overline{\varphi}] = -[\overline{\varphi}]d[\varphi][\overline{\varphi}],$$

así,  $[\overline{\varphi}]$  es conforme, y por tanto  $B = A_0([\overline{\varphi}])$  lo es (ya que  $A_0$  es  $\mathcal{A}$ -lineal). De la Remarca A.0.3, tenemos  $\theta$  y  $\omega$  son 1-formas conformes. Finalmente,  $dF$  inyectiva queda como  $|\theta|^2 \neq |\omega|^2$ .

**Superficies Lorentzianas en  $\mathbb{S}^{1,2}$ .** En este caso, la inmersión está dada por

$$F = \langle \langle -e_1 \cdot \varphi, \varphi \rangle \rangle, \quad (8.17)$$

donde  $e_1$  es el vector normal a  $\mathbb{S}^{1,2}$  (vea la Proposición 5.1.1). Si escogemos un marco paralelo  $\tilde{s} \in \Gamma(\tilde{Q})$  adaptado a  $e_1$ , es decir, tal que  $e_1$  es el segundo vector de  $\pi(\tilde{s}) \in \Gamma(Q_1 \times_M Q_2)$ , usando (8.7), (8.17) queda como

$$F = \overline{[\varphi]} I[\widehat{\varphi}] \simeq A_1(\overline{[\varphi]} I[\widehat{\varphi}]) = A_0(\overline{[\varphi]}) \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} A_0([\widehat{\varphi}]) \quad (8.18)$$

donde  $[\varphi] \in \mathbb{H}_0$  representa  $\varphi$  en  $\tilde{s}$ . Escribiendo  $B := A_0(\overline{[\varphi]})$ , como en el caso anterior podemos concluir  $\det B = 1$  y  $B^* = A_0([\widehat{\varphi}])$ , por lo tanto, de (8.18), conseguimos  $F \simeq B \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} B^*$ , con  $B : M \rightarrow Sl_2(\mathcal{A})$  conforme tal que

$$B^{-1}dB = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \omega & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\theta := -\eta_1 + \sigma\eta_2$  y  $\omega := \eta_1 + \sigma\eta_2$  son 1-formas conformes. En este caso, la condición  $dF$  inyectiva queda como  $|\theta|^2 \neq -|\omega|^2$ .  $\square$

**Descripción local como producto de curvas.** En las coordenadas  $a = u + \sigma v = \frac{1+\sigma}{2}s + \frac{1-\sigma}{2}t$ , tenemos la descomposición

$$Sl_2(\mathcal{A}) = \frac{1+\sigma}{2}Sl_2(\mathbb{R}) \oplus \frac{1-\sigma}{2}Sl_2(\mathbb{R}),$$

y la aplicación conforme  $B : \mathcal{U} \subset M \rightarrow Sl_2(\mathcal{A})$  del Teorema 8.2.1, se puede escribir como

$$B(s, t) = \frac{1+\sigma}{2}B_1(s) + \frac{1-\sigma}{2}B_2(t),$$

donde  $B_1 : \mathcal{I}_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow Sl_2(\mathbb{R})$  y  $B_2 : \mathcal{I}_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow Sl_2(\mathbb{R})$  son curvas diferenciables (aquí  $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{U}$ ). Identificando

$$\begin{aligned} Herm_2(\mathcal{A}) &= \left\{ \frac{1+\sigma}{2}C + \frac{1-\sigma}{2}C^t \mid C \in M_2(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ \sigma \left( \frac{C - C^t}{2} \right) + \frac{C + C^t}{2} \mid C \in M_2(\mathbb{R}) \right\} \\ &\simeq \left\{ \left( \frac{C - C^t}{2} \right) + \frac{C + C^t}{2} \mid C \in M_2(\mathbb{R}) \right\} \\ &= M_2(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

obtenemos  $\mathbb{H}^{2,1} = \{C \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \det C = 1\} \simeq Sl_2(\mathbb{R})$ .



**Corolario 8.2.2.** *Una superficie Lorentziana plana en el espacio de anti-de Sitter  $\mathbb{H}^{2,1}$  (resp. en la pseudo esfera  $\mathbb{S}^{1,2}$ ) puede ser localmente descrita como un producto en los cuaternios de dos curvas horizontales en  $\mathbb{H}^{2,1}$  (resp. en  $\mathbb{S}^{1,2}$ ).*

*Demostración.* Sólo haremos la prueba en el caso  $\mathbb{H}^{2,1}$ . Escribiendo

$$B_1(s) \simeq \frac{1+\sigma}{2}B_1(s) + \frac{1-\sigma}{2}B_1(s)^t \quad \text{y} \quad B_2(t) \simeq \frac{1+\sigma}{2}B_2(t) + \frac{1-\sigma}{2}B_2(t)^t$$

y definiendo las curvas

$$u(s) := A_1^{-1}(B_1(s)) : \mathcal{I}_1 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}_1 \quad \text{y} \quad \overline{v(t)} := A_1^{-1}(B_2(t)^t) : \mathcal{I}_2 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}_1,$$

obtenemos de (8.5),  $u(s), v(t) \in \mathbb{R}^{2,2}$  : por ejemplo

$$A_1 \left( \widehat{u(s)} \right) = -A_1(u(s))^* = -A_1(u(s)).$$

Además,  $\overline{u(s)}u(s) = -1$  y  $\overline{v(t)}v(t) = -1$ , i.e.  $u(s), v(t) \in \mathbb{H}^{2,1} \subset \mathbb{R}^{2,2}$ .

Las 1-formas  $\theta = \theta_1 da$  y  $\omega = \omega_1 da$  pueden ser escritas como (ya que son conformes)

$$\theta_1 = \frac{1+\sigma}{2}a_1(s) + \frac{1-\sigma}{2}a_2(t) \quad \text{y} \quad \omega_1 = \frac{1+\sigma}{2}b_1(s) + \frac{1-\sigma}{2}b_2(t),$$

por lo tanto, (8.10) queda como

$$B_1(s)^{-1}B_1'(s) = \begin{pmatrix} a_1(s) \\ b_1(s) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_2(t)^{-1}B_2'(t) = \begin{pmatrix} a_2(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}.$$

De un cálculo directo tenemos

$$A_0^{-1}(B_1^{-1}B_1') = -\overline{u(s)}u'(s) \quad \text{y} \quad A_0^{-1}((B_2')^t(B_2^{-1})^t) = \overline{v(t)}v'(t),$$

así, las curvas  $u(s)$  y  $v(t)$  satisfacen

$$\overline{u(s)}u'(s) = \frac{-a_1(s) + b_1(s)}{2}J + \sigma \frac{a_1(s) + b_1(s)}{2}iK \in \mathcal{A}J \oplus i\mathcal{A}K$$

y

$$\overline{v(t)}v'(t) = \frac{a_2(t) - b_2(t)}{2}J + \sigma \frac{a_2(t) + b_2(t)}{2}iK \in \mathcal{A}J \oplus i\mathcal{A}K,$$

i.e. las curvas  $u(s)$  y  $v(t)$  son horizontales con respecto la distribución horizontal descrita en el Lema 7.2.4.

Finalmente notemos que

$$BB^* = \frac{1+\sigma}{2}B_1(s)B_2(t)^t + \frac{1-\sigma}{2}B_2(t)B_1(s)^t \simeq B_1(s)B_2(t)^t,$$

por lo tanto,

$$F \simeq A_1^{-1}(BB^*) = A_1^{-1}(B_1(s)B_2(t)^t) = A_1^{-1}( A_1(u(s)) A_1(\overline{v(t)}) );$$

usando (8.6) tenemos para cualesquiera  $\xi, \xi' \in \mathbb{H}_1$  la igualdad

$$A_1(\sigma i 1 \xi \xi') = -A_1(\sigma i 1 i \xi i \xi') = A_0(i\xi) A_0(i\xi') = A_1(\sigma\xi) A_1(\sigma\xi') = A_1(\xi) A_1(\xi'),$$

conseguiamos así

$$F \simeq \sigma i u(s) \overline{v(t)},$$

*i.e.* la inmersión es descrita como el producto en los cuaternios de dos curvas horizontales con valores en el espacio de anti-de Sitter  $\mathbb{H}^{2,1}$ . □



# APÉNDICE A

---

## Estructuras de Lorentz

---

En este apéndice presentaremos algunas nociones elementales sobre superficies de Lorentz necesarias para la comprensión de la tesis. Una idea muy general de este objeto es la siguiente: las superficies de Lorentz son para las superficies Lorentzianas lo que las superficies de Riemann son para las superficies Riemannianas. Con esto, conceptos análogos pueden ser transferidos a este nuevo contexto: las aplicaciones conformes entre superficies de Lorentz que es el concepto análogo a las aplicaciones holomorfas, y la noción de 1–forma conforme que está en analogía con el concepto de 1–forma holomorfa.

El álgebra real de los números de Lorentz es un espacio conveniente para parametrizar las superficies de Lorentz de manera análoga a la parametrización por números complejos de las superficies de Riemann. Los números de Lorentz fueron introducidos de manera algebraica y con un nombre diferente por J. Cockle [12] en el año 1849. Posteriormente, cada autor que hizo uso de estos los llamó de diferentes maneras de acuerdo a su terminología (vea por ejemplo [25] y las referencias ahí dadas). Posiblemente, fue F. R. Harvey [21] quien les dio el nombre de los números de Lorentz al estudiar su relación con las rotaciones Lorentzianas en el plano de Lorentz análoga a la relación de los números complejos con las rotaciones en el plano Euclideano.

La referencia bibliográfica más significativa para el estudio de las superficies de Lorentz es el libro de T. Weinstein [51]. Un amplio y detallado estudio sobre aplicaciones conformes fue dada por L. Di Terlizzi, J. Konderak y I. Lacirasella [14], en donde también detallan muchas diferencias cuando las comparan con las aplicaciones holomorfas. El concepto de 1–forma conforme fue definido y utilizado por J. Konderak [27] para caracterizar superficies de Lorentz mínimas en el espacio de Minkowski 3–dimensional, y por M. P. Dussan y M. Magid [15] para caracterizar las superficies de Lorentz mínimas en  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

**Superficies de Lorentz.** Diremos que una superficie  $M$  es una superficie de Lorentz si existe una cubierta por subconjuntos abiertos  $M = \cup_{\alpha \in S} U_\alpha$  y cartas asociadas

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathcal{A}, \quad \alpha \in S$$

tales que las funciones de transición

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathcal{A} \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathcal{A}, \quad \alpha, \beta \in S$$

son aplicaciones conformes en el siguiente sentido: para todo  $a \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  y  $h \in \mathcal{A}$ ,

$$d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_a(\sigma h) = \sigma d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_a(h).$$

Una estructura de Lorentz es también equivalente a una familia de aplicaciones diferenciables

$$\sigma_x : T_x M \rightarrow T_x M, \quad \text{con} \quad \sigma_x^2 = Id_{T_x M}, \quad \sigma_x \neq \pm Id_{T_x M}.$$

Esta definición coincide con la definición de una superficie de Lorentz dada en [51]: una estructura de Lorentz es equivalente a una clase conforme de métricas Lorentzianas sobre la superficie, esto es, a una familia diferenciable de conos en cada espacio tangente de la superficie, con líneas distinguidas. En efecto, el cono en  $x \in M$  es

$$Ker(\sigma_x - Id_{T_x M}) \cup Ker(\sigma_x + Id_{T_x M})$$

donde el signo de los eigenvalores  $\pm 1$  permite distinguir una de las líneas de la otra.

Si suponemos además que la superficie  $M$  está orientada, diremos que la estructura de Lorentz es compatible con la orientación de  $M$  si las cartas  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $\alpha \in S$  preservan la orientación (la orientación positiva en  $\mathcal{A} = \{u + \sigma v \mid u, v \in \mathbb{R}\}$  es naturalmente dada por  $(\partial_u, \partial_v)$ ). En tal caso, las funciones de transición son aplicaciones conformes  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  preservando la orientación.

**Aplicaciones conformes entre superficies de Lorentz.** Consideremos una superficie de Lorentz  $M$ .

Diremos que una aplicación diferenciable  $\psi : M \rightarrow \mathcal{A}$  (o  $\mathcal{A}^n$ , o una superficie de Lorentz) es *conforme* si su derivada  $d\psi$  preserva la estructura de Lorentz, esto es, si

$$d\psi_x(\sigma_x X) = \sigma_{\psi(x)}(d\psi_x(X))$$

para cualesquiera  $x \in M$  y  $X \in T_x M$ . En una carta  $a := u + \sigma v : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$ , una aplicación conforme satisface las ecuaciones

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \sigma \frac{\partial \psi}{\partial u}; \tag{A.1}$$

estas ecuaciones son análogas a las ecuaciones de Cauchy-Riemman en análisis complejo.

Definiendo los operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial a} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + \sigma \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \hat{a}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - \sigma \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

y las 1-formas duales

$$da := du + \sigma dv \quad \text{y} \quad d\hat{a} := du - \sigma dv,$$

la derivada  $d\psi$  de una aplicación diferenciable  $\psi : M \rightarrow \mathcal{A}$  puede ser escrita como

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial a} da + \frac{\partial\psi}{\partial \hat{a}} d\hat{a};$$

así,  $\psi$  aplicación conforme (*i.e.* (A.1) es válido) es equivalente a  $\frac{\partial\psi}{\partial \hat{a}} = 0$ , y en este caso tenemos

$$d\psi = \psi' da, \tag{A.2}$$

donde  $\psi' := \frac{\partial\psi}{\partial a} = \frac{\partial\psi}{\partial u} : \mathcal{U} \subset M \rightarrow \mathcal{A}$  es una aplicación diferenciable.

Finalmente, definiendo las coordenadas  $(s, t)$  tal que

$$a = u + \sigma v = \frac{1 + \sigma}{2} s + \frac{1 - \sigma}{2} t \tag{A.3}$$

( $s$  y  $t$  son parámetros a lo largo de las líneas distinguidas) y escribiendo

$$\psi = \frac{1 + \sigma}{2} \psi_1 + \frac{1 - \sigma}{2} \psi_2$$

con  $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}$ , la igualdad (A.1) queda como

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_1 = \frac{\partial}{\partial s} \psi_2 = 0,$$

conseguiamos así

$$\psi_1 = \psi_1(s) \quad \text{y} \quad \psi_2 = \psi_2(t);$$

*i.e.* una aplicación conforme es equivalente a dos funciones de una variable real.

**Formas conformes sobre una superficie de Lorentz.** Consideremos una superficie de Lorentz  $M$  y  $\omega : TM \rightarrow \mathcal{A}$  una 1-forma diferencial con valores en los números de Lorentz  $\mathcal{A}$ . En una carta  $a = u + \sigma v : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow M$ , la 1-forma  $\omega$  se escribe como

$$\omega = P du + Q dv,$$

donde  $P, Q : M \rightarrow \mathcal{A}$  son aplicaciones diferenciables. Si suponemos que  $\omega$  preserva la estructura de Lorentz, *i.e.*

$$\omega(\sigma X) = \sigma \omega(X)$$

para cada  $X \in TM$ , tenemos en particular

$$Q = \omega \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) = \omega \left( \sigma \frac{\partial}{\partial u} \right) = \sigma \omega \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) = \sigma P,$$

por tanto  $\omega = P (du + \sigma dv) = P da$ .

Diremos que una 1-forma diferencial  $\omega : TM \rightarrow \mathcal{A}$  es *conforme* si esta preserva la estructura de Lorentz, es decir, si

$$\omega = P da,$$

y su coeficiente  $P : M \rightarrow \mathcal{A}$  es una aplicación conforme.

La noción de 1-forma conforme es el análogo a la noción de 1-forma holomorfa en análisis complejo; se pueden mostrar versiones análogas de los teoremas clásicos de integración: considere  $f : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  una aplicación diferenciable, la derivada exterior de la 1-forma  $fda$  satisface

$$d(fda) = df \wedge da = \left( \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial \widehat{a}} d\widehat{a} \right) \wedge da = \frac{\partial f}{\partial \widehat{a}} d\widehat{a} \wedge da.$$

entonces tenemos:

- (Teorema de Cauchy-Goursat) Si  $f$  es conforme, entonces la 1-forma  $fda$  es cerrada.
- (Teorema de Morera) Si la 1-forma  $fda$  es cerrada, entonces  $f$  es conforme.

**Observación A.0.3.** *Observe que si  $\psi : M \rightarrow \mathcal{A}$  es una aplicación conforme, entonces su diferencial  $d\psi = \psi' da$  es una 1-forma diferencial conforme: tenemos*

$$\frac{\partial \psi'}{\partial \widehat{a}} = \frac{\partial}{\partial \widehat{a}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial a} \right) = \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \widehat{a}} \right) = 0,$$

es decir  $\psi' : M \rightarrow \mathcal{A}$  es una aplicación conforme.

---

# Bibliografía

---

- [1] C. BÄR, *Extrinsic bounds for the eigenvalues of the Dirac operator*, Annals of Global Analysis and Geometry, **16** (1998), 573-596.
- [2] P. BAYARD, *On the spinorial representation of spacelike surfaces into 4-dimensional Minkowski space*, Journal of Geometry and Physics, **74** (2013), 289-313 .
- [3] P. BAYARD, *A spinor description of flat surfaces in  $\mathbb{R}^4$* . ArXiv:1310.3326v1 [math.DG] (2014).
- [4] P. BAYARD, M. A. LAWN and J. ROTH, *Spinorial representation of surfaces into 4 dimensional space forms*, Annals of Global Analysis and Geometry, **44:4** (2013), 433-453.
- [5] P. BAYARD and V. PATTY, *Spinor representation of Lorentzian surfaces in  $\mathbb{R}^{2,2}$* , Journal of Geometry and Physics, **95** (2015) 74-95.
- [6] P. BAYARD, V. PATTY and F. SÁNCHEZ-BRINGAS, *On Lorentzian surfaces in  $\mathbb{R}^{2,2}$* , Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section: A Mathematics (to appear). ArXiv:1503.06225v1 [math.DG] (2015).
- [7] P. BAYARD and F. SÁNCHEZ-BRINGAS, *Geometric invariants and principal configurations on spacelike surfaces immersed in  $\mathbb{R}^{3,1}$* , Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section: A Mathematics, **140:6** (2010), 1141-1160.
- [8] P. BAYARD and F. SÁNCHEZ-BRINGAS, *Geometric invariants of surfaces in  $\mathbb{R}^4$* , Topology and its Applications, **159** (2012), 405-413.
- [9] P. BAYARD and F. SÁNCHEZ-BRINGAS, *Invariants and quasi-umbilicity of timelike surfaces in Minkowski space  $\mathbb{R}^{3,1}$* , Journal of Geometry and Physics, **62:7** (2012), 1697-1713.
- [10] L. BERS, *An outline of the theory of pseudoanalytic functions*, Bulletin of the American Mathematical Society, **62:4** (1956), 291-331.
- [11] B. Y. CHEN, *Pseudo-Riemannian Geometry,  $\delta$ -invariants and Applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, (2011).



- [12] J. COCKLE, *On a new imaginary in algebra*, Philosophical Magazine Series 3, **34:226** (1849), 37-47.
- [13] M. DAJCZER and R. TOJEIRO, *On flat surfaces in space forms*, Houston Journal of Mathematics, **21:2** (1995), 319-338.
- [14] L. DI TERLIZZI, J. KONDERAK and I. LACIRASELLA, *On differentiable functions over Lorentz numbers and their geometric applications*, Differential Geometry - Dynamical Systems, **16** (2014), 113-139.
- [15] M. P. DUSSAN and M. MAGID, *The Björling problem for timelike surfaces in  $\mathbb{R}_2^4$* , Journal of Geometry and Physics, **73** (2013), 187-199.
- [16] L. P. EISENHART, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover books on advanced mathematics, New York, 1909.
- [17] TH. FRIEDRICH, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, 25, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (2000).
- [18] TH. FRIEDRICH, *On the spinor representation of surfaces in Euclidean 3-space*, Journal of Geometry and Physics, **28** (1998), 143-157.
- [19] J. A. GÁLVEZ, A. MARTÍNEZ and F. MILÁN, *Flat surfaces in the hyperbolic 3-space*, Mathematische Annalen, **316** (2000), 419-435.
- [20] J. A. GÁLVEZ, A. MARTÍNEZ and F. MILÁN, *Flat surfaces in  $\mathbb{L}^4$* , Annals of Global Analysis and Geometry, **20:3** (2001), 243-251.
- [21] F. R. HARVEY, *Spinors and Calibrations*, Perspectives in Mathematics, 9, Academic Press, Inc., San Diego, (1990).
- [22] O. HIJAZI and X. ZHANG, *Lower bounds for the eigenvalues of the Dirac operator, Part II. The submanifold Dirac operator*, Annals of Global Analysis and Geometry, **20** (2001), 163-181.
- [23] D. A. HOFFMAN and R. OSSERMAN, *The Gauss map of surfaces in  $\mathbb{R}^n$* , Journal of Differential Geometry, **18:4** (1983), 161-176.
- [24] D. A. HOFFMAN and H. KARCHER, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*. In: R. Osserman (ed.) Geometry V, Minimal Surfaces, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 90, pp. 4-92, Springer, Berlin, (1997).
- [25] B. JANCEWICZ, *The extended Grassmann algebra of  $\mathbb{R}^3$* . In: W. E. Baylis (ed.) Clifford (Geometric) Algebras with Applications in Physics, Mathematics, and Engineering, pp. 389-421, Birkhuser, Boston, (1996).
- [26] K. KENMOTSU, *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Mathematische Annalen, **245** (1979), 89-99.

- [27] J. KONDERAK, *A Weierstrass representation theorem for Lorentz surfaces*, Complex variables, Theory and Application: An International Journal, **50:5** (2005), 319-332.
- [28] B. G. KONOPELCHENKO, *Induced surfaces and their integrable dynamics*, Studies in Applied Mathematics, **96:1** (1996), 9-51.
- [29] B. G. KONOPELCHENKO, *Weierstrass representations for surfaces in 4D spaces and their integrable deformations via DS hierarchy*, Annals of Global Analysis and Geometry, **18:1** (2000), 61-74.
- [30] B. G. KONOPELCHENKO and G. LANDOLFI, *Generalized Weierstrass representation for surfaces in multidimensional Riemann spaces*, Journal of Geometry and Physics, **29:4** (1999), 319-333.
- [31] R. KUSSNER and N. SCHMITT, *The spinor representation of surfaces in space*. ArXiv:dg-ga/9610005v1 (1996).
- [32] M. A. LAWN, *Spinorial methods, para-complex and para-quaternionic geometry in the theory of submanifolds*, PhD Thesis, D.F.D. Mathématiques, Université Henri Poincaré - Nancy I, France (2006).
- [33] M. A. LAWN, *A spinorial representation for Lorentzian surfaces in  $\mathbb{R}^{2,1}$* , Journal of Geometry and Physics, **58:6** (2008), 683-700.
- [34] M. A. LAWN and J. ROTH, *Spinorial characterisation of surfaces in pseudo-Riemannian space forms*, Mathematical Physics, Analysis and Geometry, **14:3** (2011), 185-195.
- [35] H. B. LAWSON, *The global behaviour of minimal surfaces in  $S^n$* , Annals of Mathematics, **92:2** (1970), 224-237.
- [36] H. B. LAWSON and M. L. MICHELSON, *Spin Geometry*, Princeton Mathematical Series, 38, Princeton University Press, New Jersey, (1989).
- [37] S. LEE, *Weierstrass representation for timelike minimal surfaces in Minkowski 3-space*. ArXiv:math/0608726v2 [math.DG] (2006).
- [38] M. A. LEON, *Clasificación de toros llanos Lorentzianos en espacios tridimensionales*, Tesis Doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, España, (2012).
- [39] J. A. LITTLE, *On the singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, **83:1** (1969), 261-335.
- [40] J. MILNOR, *Spin structures on manifolds*, L'Enseignement Mathématique, **9** (1963), 198-203.
- [41] C. L. E. MOORE and E. B. WILSON, *Differential geometry of two dimensional surfaces in hyperspace*, Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, **52:6** (1916), 269-368.

- [42] B. MOREL, *Surfaces in  $\mathbb{S}^3$  and  $\mathbb{H}^3$  via spinors*, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), **23** (2005), 131-144.
- [43] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Pure and applied mathematics, 103, Academic Press, Inc., New York, (1983).
- [44] V. PATTY, *A generalized Weierstrass representation of Lorentzian surfaces in  $\mathbb{R}^{2,2}$  and applications*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics **13:6** (2016) 1650074.
- [45] J. ROTH, *Spinorial characterisations of surfaces into 3-homogeneous manifolds*, Journal of Geometry and Physics, **60** (2010), 1045-1061.
- [46] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 4, Publish or Perish Inc., Houston, 1979.
- [47] I. A. TAIMANOV, *The Weierstrass representation of closed surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Functional Analysis and Its Applications, **32:4** (1998), 258-267.
- [48] K. WEIERSTRASS, *Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist*, Monatsberichte der Kniglichen Preussische Akademie des Wissenschaften zu Berlin, (1866), 612-625.
- [49] J. L. WEINER, *Isometric immersions of  $E^2$  into  $E^4$* , Geometry of Submanifolds and Related Topics, **1236** (2001), 136-143.
- [50] J. L. WEINER, *The Gauss map for surfaces in 4-space*, Mathematische Annalen, **269** (1984), 541-560.
- [51] T. WEINSTEIN, *An Introduction to Lorentz Surfaces*, de Gruyter Expositions in Mathematics, 22, Walter de Gruyter & Co., Berlin, (1996).