



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA

DINÁMICA DEL DECAIMIENTO CUÁNTICO
DE DOS PARTÍCULAS IDÉNTICAS ENREDADAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
MIGUEL ÁNGEL TERÁN CRUZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. GASTÓN GARCÍA CALDERÓN
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORIAL

DR. ERNESTO COTA ARAIZA
CENTRO DE NANOCIENCIAS Y NANOTECNOLOGÍA, UNAM

DR. JORGE ALBERTO VILLAVICENCIO AGUILAR
FACULTAD DE CIENCIAS, UABC

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. OCTUBRE 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis padres
Guadalupe y Miguel Ángel.*

" La materia prima más valiosa de un país es la materia gris de sus habitantes, y la misma se vuelve valiosa solo por medio de la educación."

Marcos Moshinsky

RESUMEN

Se presenta un estudio sobre la dinámica del decaimiento de dos partículas enredadas que no interactúan entre sí, y que se encuentran inicialmente confinadas en un potencial de alcance finito. Utilizando el formalismo de estados resonantes a lo largo de la región interna y región externa del potencial, se desarrollan expresiones analíticas exactas para la función de onda. Estas expresiones dependen de la simetría del estado inicial del sistema, la cual puede ser simétrica o antisimétrica enredadas. Debido a que no se considera al espín, a las partículas descritas por un estado simétrico las denominaremos como bosones y a las de un estado antisimétrico como fermiones. También se considera el caso separable o de simetría factorizada.

El estudio comprende un análisis de la densidad de probabilidad como función del tiempo para valores fijos de la posición a lo largo de las región interna y región externa del potencial de interacción. Se presenta como ejemplo el modelo de potencial delta, para el caso de momento angular nulo.

Se corrobora trabajo previo a lo largo de la región interna del potencial de interacción para las probabilidades de supervivencia y de permanencia, que establece que la densidad de probabilidad posee las siguientes contribuciones importantes: una contribución no exponencial para tiempos muy cortos, un régimen de decaimiento exponencial dominado por una suma de términos que involucra los anchos de resonancia de las dos partículas, seguido de un régimen para tiempos largos que decae como t^{-6} para bosones, y t^{-10} para fermiones. Se derivaron fórmulas analíticas sencillas para calcular la probabilidad de supervivencia en los sistemas de dos partículas idénticas enredadas.

Se muestra que en la región externa del potencial, en general, la densidad de probabilidad posee dos frentes de ondas. En la parte izquierda del primer frente de onda aparece un comportamiento oscilatorio que se asemeja al caso del decaimiento de una partícula, producto de las contribuciones de estados resonantes con mayor energía. En la parte derecha del segundo frente de onda existe un régimen exponencial. Después, existe una zona de interferencia y por último, un régimen asintótico para tiempos largos que decae como t^{-6} para bosones, y t^{-10} para fermiones. Se muestra que en la región intermedia de los dos frentes de onda, en general,

se forma una región cóncava con una estructura de picos que implica la aportación de estados resonantes con niveles de mayor energía, la cual es similar para bosones y fermiones. Se encontró que la interferencia entre las dos partículas enredadas, evoluciona en el tiempo de tal forma que refleja características del espectro de energía del sistema completo. La diferencia de comportamiento entre bosones y fermiones, además que los fermiones no pueden estar en el mismo lugar, como se mencionó, poseen un comportamiento asintótico en el tiempo que es distinto.

Finalmente, en el caso de fermiones, se estudió el comportamiento de la densidad de probabilidad a un tiempo fijo cuando la posición de las partículas tiende al mismo valor. Se encontró que la densidad de probabilidad tiende a cero gradualmente.

ABSTRACT

This work presents a study on the quantum decay dynamics of two non-interacting entangled particles confined initially within a potential of finite range. Using the formalism of resonant states, exact analytical expressions for the wave function are considered developed both along the internal and external regions of the potential. These expressions depend on the symmetry of the initial state of the system, which may be entangled symmetric or entangled antisymmetric. The case separable or product states is also discussed.

We provide an analysis of the probability density as a function of time for fixed values of the positions of the particles, both along the internal and external regions of the potential interaction using the Dirac delta potential model for the case of zero angular momentum.

The present work corroborates results of previous work along the internal region of the potential interaction for the survival and nonescape probabilities. Along the internal interaction region the probability density possesses the following relevant contributions: a non-exponential contribution at short times, an exponential decaying regime dominated by a sum of the resonance terms, followed by a regime at long times that behaves respectively, as the power t^{-6} for bosons and t^{-10} for fermions. It is worth mentioning that a novel simple analytical formula has been derived to calculate the survival probability in systems of two identical entangled particles.

It is found that in general, along the external region of the potential the probability density possesses two wavefronts. There appears an oscillatory behavior on the left part of the first wavefront, which resembles the case of single particle decay. The part on the right of the second wavefront exhibits an exponentially decaying regime which is followed by interference contributions that lead, at asymptotically long times, to a regime that goes as the power t^{-6} for bosons and t^{-10} for fermions. The intermediate region situated between the two wavefronts, has in general a concave form and exhibits a rich peaked structure involving the contribution of higher energy resonance levels. We find that the interference between the two entangled particles evolves in the time in such a way that reflects the complete energy spectra of the system. The distinction between bosons and fermions, in addition to the fact that fermions

cannot be in the same place, is the distinct long time asymptotic behavior.

Finally, in the case of fermions, the vanishing of the probability density at a given time, as the position of the particles attains the same value is analyzed. It is found that the vanishing occurs gradually.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Gastón García Calderón por haberme recibido como tesista y por haberme guiado hasta el final de este proyecto. Por su apoyo, su tiempo y sobre todo por su paciencia. Sus enseñanzas han sido valiosas para mi formación científica.

Al Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar por su tiempo y sus consejos. Sus enseñanzas han sido cruciales en mi carrera como físico.

Al Dr. Ernesto Cota Araiza por haberme apoyado durante la maestría.

Al Comité Tutorial, por su tiempo en la minuciosa revisión de este escrito y enriquecerlo con sus acertadas sugerencias.

A los doctores Roberto Romo Martínez, Mauricio Fortes Besprosvani, Sergio Arturo Cordero Reyes y a la M. en C. Lorea Chaos Cador, miembros del jurado de mi examen de grado, por su cuidadosa revisión a este trabajo y mejorarlo con sus sugerencias y críticas.

A mis padres Guadalupe y Miguel, a mis hermanas Montserrat y Elizabeth, y a mis padrinos Julia y Juan. A ellos por su siempre apoyo incondicional.

A los colegas Azucena Domínguez, Lucía Pedraza, Francisco Serna, Ramón Carrillo y Pierre Pantaleón, quienes en su momento me aconsejaron para hacer esto posible.

Al IFUNAM y al CNyN por abrirme sus puertas a sus instalaciones. Al CONACYT y a la UNAM mediante el proyecto PAPIIT IN105216, por el apoyo económico que me otorgaron.

ÍNDICE GENERAL

Índice general	ix
Lista de Figuras	xi
1 Introducción	1
2 Formalismo de los estados resonantes para una partícula	5
2.1 Estados resonantes en el problema de decaimiento	5
2.2 Función de onda en términos de la función de Green retardada	10
2.3 Normalización de los estados resonantes	10
2.4 Función de Green de onda saliente en términos de los estados resonantes	12
2.5 Algunas identidades de los estados resonantes	14
2.6 Función de onda en la región interna del potencial	15
2.7 Función de onda en la región externa del potencial	17
2.8 Desarrollo asintótico de la función de onda interna para tiempos largos	19
2.9 Probabilidades de supervivencia y de permanencia	21
2.10 Aproximación asintótica para la amplitud de supervivencia y la probabilidad de permanencia	22
2.11 Ejemplo. El modelo de potencial δ	23
3 Formalismo para un sistema de dos partículas cuánticas idénticas	32
3.1 Partículas idénticas	32
3.2 Función de onda para dos partículas cuánticas idénticas	33
3.2.1 Función de onda simétrica factorizada	34
3.2.2 Función de onda espacial simétrica o antisimétrica enredada	35
3.3 Desarrollo asintótico de la función de onda interna de dos partículas para tiempos largos	36
3.3.1 Desarrollo asintótico para el caso de simetría factorizada	36

3.3.2	Desarrollo asintótico para los casos de enredamiento espacial simétrico y antisimétrico	37
3.4	Probabilidades de supervivencia y de permanencia	38
3.4.1	Probabilidades para el caso de simetría factorizada	38
3.4.2	Probabilidades para el caso de simetría o antisimetría enredada	39
3.5	Ejemplo. El modelo de potencial δ para dos partículas idénticas	41
3.5.1	Caso de simetría factorizada	42
3.5.2	Caso de simetría espacial enredada	45
3.5.3	Caso de antisimetría espacial enredada	52
4	Conclusiones	68
Anexo A	Residuo de la función de Green de onda saliente	71
Anexo B	Método ortodoxo de funciones del continuo	74
Anexo C	Fórmula para calcular la amplitud de supervivencia para un sistema de dos partículas	77
Anexo D	Función de onda con enredamiento	79
Referencias		81

LISTA DE FIGURAS

2.1	Estados resonantes, estados ligados y potencial de alcance finito.	8
2.2	Distribución simétrica con respecto al eje imaginario de los polos resonantes κ_p y κ_{-p} . Dependiendo del problema se pueden encontrar polos ligados $\kappa_b = i\gamma_b$ y polos anti-ligados $\kappa_a = -i\delta_a$, donde $\{\gamma_b, \delta_a \in \mathbb{R}^+\}$	9
2.3	Contorno de integración C en el plano k , donde $C = C_0 + C_R + C_I$	11
2.4	Contorno de integración Γ en el plano k' , donde $\Gamma = C_k + C_R + \sum_p C_p$	13
2.5	Distribución de los polos resonantes κ_p obtenido a partir de la ecuación (2.92), con $\lambda = 6$ y $a = 1$. El polo correspondiente al primer estado es $\kappa_1 = 3.11052682 - i0.00095614$	25
2.6	Gráfica de $\ln[\Psi_{int}(r = 0.9a, t) ^2]$ a partir de la ecuación (2.72); con parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$ y $\alpha = 1$. La línea punteada representa la parte no exponencial de la solución. Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo.	28
2.7	Gráfica de $\ln[S(t)]$ a partir de la ecuación (2.80). En esta figura se utilizaron los siguientes valores: $\alpha = 1$ (color negro), $\alpha = 3$ (color rojo) y $\alpha = 6$ (color azul). Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo.	28
2.8	Gráfica de $\ln[\Psi_{int}(r, t) ^2]$ a partir de la ecuación (2.72); con parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$ y $\alpha = 1$. Se utilizaron los siguientes valores para la posición: $r = 0.1a$ (línea negra), $r = 0.5a$ (línea roja) y $r = 0.9a$ (línea azul). Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo.	29
2.9	Gráfica para tiempos cortos de $\ln[\Psi_{int}(r, t) ^2]$ a partir de la ecuación (2.72). Las líneas sólidas se calculan con la ecuación (2.50) y las líneas punteadas se calculan con la ecuación (2.72). Los parámetros son los mismos que en la gráfica anterior. Se consideraron los siguientes valores de la posición: $r = 0.1a$ (línea sólida negra), $r = 0.5a$ (línea sólida roja) y $r = 0.9a$ (línea sólida azul). Los puntos de color, rojo, negro y azul (estos dos últimos superpuestos) corresponden al valor $\ln[\Psi_{int}(r, o) ^2]$ respectivamente.	29

- 2.10 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(r,t)|^2]$ a partir de la ecuación (2.65); con parámetros $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$ y posición $r = 3000a$. El punto rojo es $\ln[|\Psi_{ext}(r,t_0)|^2]$, donde $t_0 = r/2\alpha_1$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -3\ln(t) + 2.7$; con ello se conoce que el sistema decae a tiempos largos como t^{-3} . La línea punteada azul es $g(t) = -0.0123177*t - 0.173184$. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo. 30
- 2.11 Cálculo del caso anterior variando la posición $r = [2950, 3050]a$, donde $y = \ln[|\Psi_{ext}(r,t)|^2]$. Cantidades importantes del sistema son: $\Gamma_1 = 0.011894$, $\tau_1 = 84.076004708$, $\varepsilon_1 = 9.13 \times 10^{-7}$ y $\kappa_1 = 3.11052682 - i0.00095614$. Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo. 30
- 2.12 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(r,t)|^2]$ a partir de la ecuación (2.65); con parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$ y posición $r = 3000a$. El punto rojo es $\ln[|\Psi_{ext}(r,t_0)|^2]$, donde $t_0 = r/2\alpha_1$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -3\ln(t) + 0.04$; con ello se conoce que el sistema decae a tiempos largos como t^{-3} . Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo. 31
- 2.13 Cálculo del caso anterior variando la posición $r = [1, 50]a$, donde $y = \ln[|\Psi_{ext}(r,t)|^2]$. Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo. 31
- 3.1 Gráfica de $\ln[|\Psi_{int}(\mathbf{r},t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.12); con parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$ y $\alpha = 1$, para los valores de $\mathbf{r} = (0.1, 0.9)$ (línea negra), $\mathbf{r} = (0.25, 0.75)$ (línea roja) y $\mathbf{r} = (0.45, 0.55)$ (línea azul). La línea punteada está dada por la función $f(t) = -6\ln(t) - 30.0$. Se utilizaron 50 polos para realizar el cálculo. Cantidades importantes del sistema son: $\Gamma_1 = 0.011894$, $\tau_1 = 84.076004708$, $\varepsilon_1 = 9.13 \times 10^{-7}$ y $\kappa_1 = 3.11052682 - i0.00095614$ 43
- 3.2 Se muestra una ampliación de la figura 3.1 para tiempos cortos. Las líneas punteadas son calculadas con la ecuación (3.12), las líneas sólidas a partir la ecuación (3.5), y por último, los puntos de colores a partir de la condición inicial, *i.e.*, usando las ecuaciones (3.4) y (3.38). Se utilizaron 50 polos para realizar el cálculo. 43
- 3.3 Gráfica de $\ln[S(t)]$ a partir de la ecuación (3.22); con valores de $\alpha = 1$ y $\lambda = 100$. La línea punteada roja es $g(t) = -6\ln(t) - 27.0$. Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo. 44

- 3.4 Gráfica de $In[|\Psi_{ext}(r,t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.7); con valores de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. El primer punto rojo (de izquierda a derecha) es $In[|\Psi_{ext}(r_1, t_0^{(1)} = r_1/2\alpha_1)|^2]$, mientras que el segundo punto rojo es $In[|\Psi_{ext}(r_2, t_0^{(2)} = r_2/2\alpha_1)|^2]$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -6In(t) + 9.15$; con ello se conoce que el sistema decae a tiempos largos como t^{-6} . La línea punteada azul es la función $g(t) = -0.0129483t + 4.36544$. Los puntos azules (de derecha a izquierda) se localizan en los tiempos $t_i = r_2/2\alpha_i$, donde $i = 2, 3, 4$. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo. 44
- 3.5 Gráfica de $In[|\Psi_{int}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.16); con parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$. La línea negra es con $\mathbf{r} = (0.1, 0.9)$, la línea roja con $\mathbf{r} = (0.25, 0.75)$ y la línea azul con $\mathbf{r} = (0.45, 0.55)$. La línea punteada roja es la función $g(t) = -6In(t) - 30.0$ 46
- 3.6 Se muestra una ampliación de la figura 3.5 para tiempos cortos usando la ecuación (3.9). 46
- 3.7 Gráfica de $In[S(t)]$ a partir de la ecuación (3.30); con parámetros de $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\lambda = 6$. La línea punteada es $g(t) = -6In(t) - 28.4$. Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo. 47
- 3.8 Gráfica de $In[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. El primer punto rojo (de izquierda a derecha) es $In[|\Psi_{ext}(r_1, t_0^{(1)} = r_1/2\alpha_1)|^2]$, mientras que el segundo punto rojo es $In[|\Psi_{ext}(r_2, t_0^{(2)} = r_2/2\alpha_1)|^2]$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -6In(t) + 8.25$; con ello se conoce que el sistema decae a tiempos largos como t^{-6} . Los puntos azules (de derecha a izquierda) se localizan en los tiempos $t_i = r_2/2\alpha_i$, donde $i = 2, 3, 4$. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo. 47
- 3.9 Gráfica de $In[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -6In(t) + 5.95$; con ello se conoce que el sistema decae a tiempos largos como t^{-6} . La línea punteada azul es la función $g(t) = -0.0130513t + 0.305487$. Se utilizaron 1,500 polos para realizar el cálculo. 49
- 3.10 Se grafica el caso anterior, pero ahora con los valores de $\alpha = 1$, $\beta = 10$. La línea roja punteada es $f(t) = -6In(t) - 5.0$, mientras que la línea azul es $g(t) = -0.0130961t - 0.556441$ 49

- 3.11 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\mathbf{r} = (3000, 10000)$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -6\ln(t) + 7.3$. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo. 50
- 3.12 Se grafica el caso anterior utilizando el valor de $\mathbf{r} = (3000, 3000)$. La línea roja es $f(t) = -6\ln(t) + 4.7$ 50
- 3.13 Se grafica $y = \ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t = 1000)|^2]$ para el caso de *simetría espacial enredada*, donde los valores que pueden tomar las posiciones son: $r_1 = [1, 2000]a$ y $r_2 = [1, 2000]a$. Para esto, se utilizó la ecuación (3.10); con los parámetros de $\alpha = 1$ y $\beta = 6$ 51
- 3.14 Gráfica de $\ln[|\Psi_{int}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.16); con parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\mathbf{r} = (0.1, 0.9)$ (línea negra), $\mathbf{r} = (0.25, 0.75)$ (línea roja) y $\mathbf{r} = (0.45, 0.55)$ (línea azul). La línea roja punteada es $f(t) = -10\ln(t) - 42.0$. Se utilizaron 50 polos para realizar el cálculo. Cantidades importantes del sistema son: $\Gamma_1 = 0.011894$, $\tau_1 = 84.076004708$, $\varepsilon_1 = 9.13 \times 10^{-7}$ y $\kappa_1 = 3.11052682 - i0.00095614$ 53
- 3.15 Se muestra una ampliación de la gráfica anterior para tiempos cortos a partir de la ecuación (3.9). Se utilizaron 50 polos para realizar el cálculo. 53
- 3.16 Gráfica de $\ln[S(t)]$ a partir de la ecuación (3.30); con los parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$ y $\beta = 2$. La línea punteada roja es la función $f(t) = -10\ln(t) - 39.3$. Se utilizaron 50 polos para realizar el cálculo. 54
- 3.17 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. El primer punto rojo (de izquierda a derecha) es $\ln[|\Psi_{ext}(r_1, t_0^{(1)} = r_1/2\alpha_1)|^2]$, mientras que el segundo punto rojo es $\ln[|\Psi_{ext}(r_2, t_0^{(2)} = r_2/2\alpha_1)|^2]$. Por otra parte, la línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -10\ln(t) + 37.68$. La línea azul es $g(t) = -0.0128535t + 1.91805$. Los puntos azules (de derecha a izquierda) se localizan en los tiempos $t_i = r_2/2\alpha_i$, donde $i = 2, 3, 4$. Se utilizaron 1500 polos para realizar el cálculo. 54
- 3.18 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -10\ln(t) + 35.95$. La línea azul es $g(t) = -0.0129972t + 0.0770308$. Se utilizaron 1500 polos para realizar el cálculo. 56

3.19	Gráfica de $\ln[\Psi_{ext}(\mathbf{r},t) ^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100, a = 1, \alpha = 1, \beta = 10$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. La línea punteada roja es $f(t) = -10\ln(t) + 35.3$. La línea punteada azul es $g(t) = -0.0130495t - 0.788077$	56
3.20	Gráfica para el caso de fermiones de $\ln[\Psi_{ext}(\mathbf{r},t) ^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100, a = 1, \alpha = 1, \beta = 2$ y $\mathbf{r} = (3000, 5000)$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -10\ln(t) + 29.6$. Se utilizaron 1500 polos para realizar el cálculo.	57
3.21	Gráfica para el caso de fermiones de $\ln[\Psi_{ext}(\mathbf{r},t) ^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100, a = 1, \alpha = 1, \beta = 2$ y $\mathbf{r} = (3000, 3000.1)$. La línea punteada roja es $f(t) = -10\ln(t) + 8.6$	57
3.22	Gráfica de $\ln[\Psi_{ext}(\mathbf{r},t) ^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100, a = 1, \alpha = 1, \beta = 6$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. Línea azul corresponde al caso de simetría enredada, y la línea roja corresponde al caso de antisimetría enredada.	58
3.23	Gráfica de $\ln[\Psi_{ext}(\mathbf{r},t) ^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 50, a = 1, \alpha = 1, \beta = 6$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. Línea azul corresponde al caso de simetría enredada, y la línea roja corresponde al caso de antisimetría enredada.	58
3.24	Usando la ecuación (3.10) se gráfcaron los siguientes casos y_1 (línea azul), y_2 (línea roja), y y_3 (línea negra). <i>Donde y_1, y_2 y y_3 se definen en el pie de la página 59.</i> Los parámetros que se usaron en la gráficas son: $\lambda = 100, a = 1, \alpha = 1, \beta = 6$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. Se utilizaron 1500 polos para realizar el cálculo.	60
3.25	Usando la ecuación (3.10) se graficaron los siguientes casos y_1 (línea azul), y_2 (línea roja), y y_3 (línea negra). <i>Donde y_1, y_2 y y_3 se definen en el pie de la página 59.</i> Los parámetros que se usaron en la gráficas son: $\lambda = 50, a = 1, \alpha = 1, \beta = 6$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. Se utilizaron 1500 polos para realizar el cálculo.	60
3.26	Gráfica $y = \ln[\Psi_{ext}(\mathbf{r},t = 1000) ^2]$ a partir de la ecuación (3.10). Los valores que pueden tomar las posiciones son: $r_1 = [1, 2000]a$ y $r_2 = [1, 2000]a$	62

- 3.27 Se muestra la región del sumidero correspondiente a la región interna del potencial; con parámetros $\lambda = 6$, $r_2 = 0.5$, $t = 1$, $a = 1$. En la figura se muestran tres casos, los cuales son: línea negra ($\alpha = 1$, $\beta = 2$), línea roja ($\alpha = 1$, $\beta = 6$) y línea azul ($\alpha = 1$, $\beta = 10$). Para esto, se utilizó la ecuación (3.16). Se utilizaron 1,000 polos para realizar el cálculo. 62
- 3.28 Sumidero para la parte interna con parámetros $\lambda = 100$, $r_2 = 0.5$, $t = 1$, $a = 1$. En la figura se muestran tres casos, los cuales son: línea negra ($\alpha = 1$, $\beta = 2$), línea roja ($\alpha = 1$, $\beta = 6$) y línea azul ($\alpha = 1$, $\beta = 10$). Para esto, se utilizó la ecuación (3.16). Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo. 63
- 3.29 Se muestra un análisis del sumidero de la figura 3.28; con parámetros de $\alpha = 1$, $\beta = 10$, $\lambda = 100$, $t = 1$ y $r_2 = 0.5$. En esta figura se calcularon 1000 puntos de la densidad de probabilidad. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo. 63
- 3.30 En esta figura se calcularon 10000 puntos de la densidad de probabilidad. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo. 64
- 3.31 En esta figura se muestran sobrepuestas las figuras 3.29 y 3.30. 64
- 3.32 Sumidero para la parte externa con parámetros $\lambda = 6$, $r_2 = 100$, $t = 1$, $a = 1$. En la figura se muestran tres casos, los cuales son: línea negra ($\alpha = 1$, $\beta = 2$), línea roja ($\alpha = 1$, $\beta = 6$) y línea azul ($\alpha = 1$, $\beta = 10$). Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo. 65
- 3.33 Sumidero para la parte externa con parámetros $\lambda = 100$, $r_2 = 100$, $t = 1$, $a = 1$. En la figura se muestran tres casos, los cuales son: línea negra ($\alpha = 1$, $\beta = 2$), línea roja ($\alpha = 1$, $\beta = 6$) y línea azul ($\alpha = 1$, $\beta = 10$). Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo. 65
- 3.34 Se muestra un análisis del sumidero de la figura 3.33 para el caso de $\alpha = 1$ y $\beta = 6$, donde $\lambda = 100$, $t = 1$ y $r_2 = 100$. Se calcularon 1000 puntos de la densidad de probabilidad. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo. . . 66
- 3.35 Se muestra un análisis del sumidero de la figura 3.33 para el caso de $\alpha = 1$ y $\beta = 6$, donde $\lambda = 100$, $t = 1$ y $r_2 = 100$. En esta gráfica se calcularon 10000 puntos de la densidad de probabilidad. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo. 66
- 3.36 En esta figura se muestran sobrepuestas las figuras 3.34 y 3.35. 67

INTRODUCCIÓN

En el contexto de la mecánica cuántica, el problema del decaimiento cuántico es un tema de gran interés en la actualidad. Esto es debido a que es un fenómeno fundamental único, sin análogo clásico. El primer trabajo en ofrecer un marco teórico capaz de describir satisfactoriamente el proceso de decaimiento cuántico fue realizado por Gamow en 1928 [16]. En este trabajo Gamow utilizó las ideas de la teoría cuántica para describir el proceso de desintegración alfa. Para ello, consideró que la partícula alfa escapa del núcleo, al cual describió como un potencial efectivo que posee una barrera, por medio del efecto túnel e imponiendo condiciones de onda saliente a las soluciones de la ecuación de Schrödinger, lo que da origen a energías complejas, derivó una expresión analítica para el decaimiento exponencial en términos de la parte puramente imaginaria de la energía compleja.

En trabajos posteriores, se ha encontrado que la teoría cuántica predice desviaciones en la ley de decaimiento exponencial a escalas de tiempo cortos y tiempos largos comparados con la vida media del sistema [25, 36]. Esta predicción ha despertado gran interés en el estudio del comportamiento temporal de sistemas cuánticos inestables. Existe un particular interés en estudiar las desviaciones a tiempos cortos. Esto se debe a su estrecha relación con el fenómeno conocido como efecto Zenón cuántico [9, 12]. Dicho efecto involucra el decaimiento de un sistema inestable a través de repetidas mediciones en las primeras etapas de la evolución. Asimismo, diferentes autores también han abordado el estudio del efecto anti-Zenón cuántico [12, 27].

En la actualidad diversos resultados experimentales han mostrado las desviaciones en la ley de decaimiento exponencial a tiempos cortos y tiempos largos. Tal es el caso de un experimento de tunelaje cuántico con átomos ultrafríos confinados por potenciales ópticos periódicos. En este trabajo se ha mostrado evidencia de las desviaciones a tiempos cortos [45]. Por otro lado, existe un experimento con materiales orgánicos disueltos, en el cual se ha mostrado evidencia

de las desviaciones a tiempos largos [8].

Investigaciones recientes contemplan el estudio del decaimiento cuántico en sistemas de muchos cuerpos [29, 41]. Sistemas con un gran número de partículas bosónicas (como los condensados de Bose-Einstein) permiten estudiar el tunelaje cuántico en niveles macroscópicos [26]. Además de esto, avances experimentales recientes han conseguido controlar los estados cuánticos de átomos fermiónicos ultrafríos mediante el uso de trampas ópticas [43]. Debido a estos importantes avances en el contexto experimental, se han motivado diversos estudios teóricos sobre decaimiento en sistemas de partículas fermiónicas [10, 25, 40, 41, 47].

Actualmente, existe un formalismo llamado teoría de los estados resonantes desarrollado por García-Calderón (véase la referencia [18] y contenidas en esta). Este marco teórico permite estudiar, mediante expresiones analíticas exactas, la evolución temporal del decaimiento de una partícula. El planteamiento del formalismo se basa en desarrollar una solución radial de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, con condiciones de frontera de onda saliente. Asimismo, se utiliza como condición inicial en $t = 0$ un estado arbitrario, $\Psi(r, 0)$, confinado en la región interna de un potencial arbitrario de alcance finito, definido en el intervalo $0 \leq r \leq a$.

La ventaja de utilizar la teoría de los estados resonantes, es que permite obtener expresiones analíticas exactas para la función de onda, $\Psi(r, t)$, en las regiones interna y externa del potencial de interacción. Los estados resonantes satisfacen la condición de onda saliente propuesta por Gamow. Sin embargo, la teoría se basa en propiedades analíticas de la función de Green de onda saliente del problema que permiten obtener la condición de normalización de estos estados y su uso en desarrollos, lo cual no era posible en la formulación de Gamow. Básicamente la función de onda se calcula a partir de la condición inicial y una función de Green retardada, donde esta última se desarrolla en términos de los estados resonantes, $u_p(r)$, y sus correspondientes polos κ_p .

Esencialmente, el formalismo muestra que la densidad de probabilidad, $|\Psi(r, t)|^2$, en ambas regiones del potencial, existen contribuciones exponencial y no exponencial en la evolución temporal, en particular se muestra para el régimen de tiempos largos, que el sistema decae como t^{-3} .

El formalismo de los estados resonantes también alude a dos cantidades que son de interés para el estudio del decaimiento cuántico. Estas cantidades son la probabilidad de supervivencia, $S(t) = |\int_0^a \Psi^*(r, 0) \Psi(r, t) dr|^2$, y la probabilidad de permanencia $P(t) = \int_0^a |\Psi(r, t)|^2 dr$. La primera es la probabilidad de que la partícula permanezca en el estado inicial, mientras que la segunda es la probabilidad de que la partícula se mantenga dentro de la región interna del potencial.

Existen trabajos donde se ha explorado el fenómeno del decaimiento de una partícula utilizando la probabilidad de supervivencia y la probabilidad de permanencia [21, 30–32]. En estos trabajos se ha reportado que las probabilidades antes mencionadas poseen en general las siguientes contribuciones: una contribución no exponencial para tiempos cortos, un régimen de decaimiento exponencial que depende de los anchos de resonancia, seguido de un régimen para tiempos largos que decae como t^{-3} .

Recientemente, en los trabajos de García-Calderón *et al.* [21, 32], se ha realizado una generalización del formalismo de la evolución temporal del decaimiento de una partícula al del decaimiento dos partículas sin interacción. En estos trabajos se reporta que para estos sistemas, las probabilidades de supervivencia y de permanencia en general tienen las siguientes contribuciones: una contribución no exponencial para tiempos cortos, un régimen de decaimiento exponencial dominado por una suma de los anchos de resonancia, seguido de un régimen para tiempos largos que decae como t^{-6} para bosones, y t^{-10} para fermiones.

En la mecánica cuántica existe un fenómeno llamado *enredamiento cuántico*. El enredamiento es un fenómeno sin análogo clásico, en el que dos entes están inexorablemente enredados independientemente de lo alejados que estén entre sí [2]. Un trabajo relevante en hacer referencia a dicho fenómeno fue realizado por Albert Einstein *et al.*, en 1935 [11].¹

El artículo de Einstein, también conocido como paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR), ha motivado diversos trabajos experimentales sobre el enredamiento cuántico [5, 14]. Estos experimentos, siguiendo el trabajo de John S. Bell [7], han proporcionado evidencia de la existencia del fenómeno.

Consideremos dos sistemas que no interactúan A y B , con los respectivos espacios de Hilbert H_A y H_B . El espacio de Hilbert del sistema compuesto es el producto tensorial $H_A \otimes H_B$. Si el primer sistema está en el estado $|\psi\rangle_A$ y el segundo en el estado $|\phi\rangle_B$, el estado del sistema compuesto es $|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$. Los estados del sistema compuesto que se pueden representar de esta forma se llaman *estados separables*, o *estados producto*. No todos los estados son estados separables. Dada una base $\{|i\rangle_A\}$ para H_A y una base $\{|j\rangle_B\}$ para H_B . El estado más general en $H_A \otimes H_B$ es de la forma $|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,j} c_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B$. Este estado es separable si existen c_i^A , c_j^B tal que $c_{ij} = c_i^A c_j^B$, por lo tanto $|\psi\rangle_A = \sum_i c_i^A |i\rangle_A$ y $|\phi\rangle_B = \sum_j c_j^B |j\rangle_B$. Es inseparable si por lo menos un par de c_i^A , c_j^B cumple que $c_{ij} \neq c_i^A c_j^B$. Si un estado es inseparable, se llama un *estado enredado* [4].

En esta tesis se estudia el problema del decaimiento de dos partículas idénticas enredadas, sin interacción y confinadas inicialmente por un potencial de alcance finito. El objetivo de este

¹El término originalmente en alemán *-verschränkung*, o en inglés *-entanglement*, fue introducido por Erwin Schrödinger en 1935 [42]. La palabra *entanglement* se traduce al español como *enredamiento* o *entrelazamiento*.

trabajo es estudiar el comportamiento temporal de la función de onda con enredamiento y de la densidad de probabilidad en ambas regiones del potencial de interacción. En particular, se tiene interés por examinar el comportamiento temporal en la región externa. Esto se debe a que los trabajos anteriores realizados con las probabilidades de supervivencia y de permanencia, solo involucran en los cálculos la función de onda en la región interna del potencial.

La estructura del documento es de la siguiente manera. En el capítulo 2 se realiza una revisión del formalismo de los estados resonantes de una partícula. Además, se muestran expresiones asintóticas para tiempos largos de la función de onda en la región interna del potencial, así como también, de las probabilidades de supervivencia y de permanencia. Por otro lado, se han incluido un par de anexos para esclarecer algunas derivaciones del formalismo, con el fin de no apartar al lector del contenido esencial. Como ejemplo, se muestra el modelo de potencial delta, en el cual se utiliza como condición inicial las autofunciones de una partícula confinada en una caja tridimensional. En el capítulo 3 se deduce la extensión del formalismo de los estados resonantes para el caso de dos partículas idénticas sin interacción. Para esto, se desarrollan expresiones analíticas exactas para la función de onda y para las probabilidades de supervivencia y de permanencia. Estas cantidades dependen de la simetría del estado inicial del sistema, la cual puede ser simétrica factorizada y simétrica o antisimétrica enredadas. Asimismo, se muestra un desarrollo asintótico para tiempos largos de la función de onda en la región interna del potencial. Como ejemplo, se presenta el modelo de potencial delta para dos partículas, donde se emplean las autofunciones de una partícula en una caja tridimensional para conformar el estado inicial del sistema. Finalmente, en el capítulo 4 se presentan las conclusiones de este trabajo, además de mencionar algunas factibles líneas de trabajo a futuro.

CAPÍTULO 2

FORMALISMO DE LOS ESTADOS RESONANTES PARA UNA PARTÍCULA

El propósito del presente trabajo consta principalmente en examinar el comportamiento temporal de la densidad de probabilidad para el problema de decaimiento de dos partículas idénticas, sin interacción y confinadas inicialmente por un potencial de alcance finito. Para esto, resulta fundamental plantear la base teórica con la que se trabajará, así como también reproducir algunos resultados importantes de análisis previos.

En este capítulo se dará una revisión de los aspectos más relevantes del formalismo de los estados resonantes [18]. Inicialmente se expondrá el problema del decaimiento de una partícula y posteriormente, se mostrarán las derivaciones analíticas exactas para la función de onda, así como para las probabilidades de supervivencia y de permanencia. Asimismo, se desarrollará una aproximación asintótica para tiempos largos de la función de onda en la región interna del potencial. Finalmente, se estudiará el modelo de potencial delta de Dirac, o también conocido por diferentes autores como el modelo de Winter [46].

2.1 Estados resonantes en el problema de decaimiento

Para comenzar, se considera el problema del decaimiento de una partícula confinada inicialmente (a $t = 0$) por un potencial real, esféricamente simétrico $V(r)$ y de alcance finito, *i.e.*, $V(r) = 0$ para $r \geq a$. Debido a que el problema involucra a un potencial central, la solución se obtiene resolviendo la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas. En este trabajo se estudia, sin pérdida de generalidad, la solución radial para el caso de momento angular $l = 0$. Por lo tanto, el problema se reduce a encontrar la solución a la siguiente ecuación ¹

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + V(r) \right] \Psi(r,t) = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r,t), \quad \Psi(0,t) = 0. \quad (2.1)$$

¹Por simplicidad se utilizarán unidades naturales $\hbar = 2m = 1$.

Utilizando el método de separación de variables es posible escribir una solución completa particular de la siguiente forma

$$\Psi(r,t) = \zeta(r)e^{-iEt}, \quad (2.2)$$

donde E es la energía de la partícula y $\zeta(r)$ satisface la siguiente ecuación

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - V(r) \right] \zeta(r) = 0, \quad (2.3)$$

con $k^2 = E$, donde k es el número de onda y es una cantidad real como la energía. La solución para la región $r \geq a$ se puede escribir como

$$\zeta(r) = A(k)e^{ikr} + B(k)e^{-ikr}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Por otro lado, existe una segunda solución a la ecuación (2.3), que es debida a la invariancia ante inversión temporal, la cual está dada por la siguiente expresión

$$\zeta^*(r) = A^*(k)e^{-ikr} + B^*(k)e^{ikr}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Por tratarse de un problema de decaimiento donde físicamente se esperaría la existencia de una corriente de probabilidad hacia la región externa, se impone, siguiendo a Gamow, que las soluciones dadas por las ecuaciones (2.4) y (2.5) están sujetas a la condición de onda saliente, *i.e.*, se deben cumplir las siguientes condiciones

$$B(k) = 0, \quad A^*(k) = 0. \quad (2.6)$$

La ecuación anterior implica que $B^*(k) = 0$ y $A(k) = 0$, y por lo tanto, que las soluciones $\zeta(r) = 0$ y $\zeta^*(r) = 0$. Esto es, las soluciones con k real de la ecuación (2.6) son inadmisibles, pero no así las complejas, las cuales ocurren para ciertos valores que se pueden denotar como

$$\kappa_p = \alpha_p - i\beta_p; \quad E_p = \varepsilon_p - i\Gamma_p/2, \quad (2.7)$$

donde $\kappa_p^2 = E_p$. Por consiguiente se obtienen las siguientes relaciones ²

$$\varepsilon_p = \alpha_p^2 - \beta_p^2, \quad \Gamma_p = 4\alpha_p\beta_p. \quad (2.8)$$

Los estados resonantes o también conocidos como estados de Gamow se definen como las soluciones de la siguiente ecuación

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \kappa_p^2 - V(r) \right] u_p(r) = 0, \quad (2.9)$$

que obedecen la condición de frontera en el origen

$$u_p(0) = 0, \quad (2.10)$$

y la condición de onda saliente

$$u_p(r) = A_p e^{i\kappa_p r}; \quad r \geq a, \quad (2.11)$$

la cual conduce a la siguiente expresión

$$\left[\frac{d}{dr} u_p(r) \right]_{r=a^+} = i\kappa_p u_p(a). \quad (2.12)$$

Debido a la invariancia ante inversión temporal, se tiene que $u_{-p}(r) = u_p^*(r)$ también es solución de la ecuación (2.9), con $\kappa_{-p} = -\kappa_p^*$.

La dependencia temporal de los estados resonantes se puede escribir como [18]

$$u_p(r, t) = u_p(r) e^{-iE_p t} = u_p(r) e^{-i\varepsilon_p t} e^{-\Gamma_p t/2}. \quad (2.13)$$

Así pues, la densidad de probabilidad está dada por la siguiente ecuación

$$|u_p(r, t)|^2 = |u_p(r)|^2 e^{-\Gamma_p t}. \quad (2.14)$$

²La cantidad ε_p expresa la posición en que se efectúa en la p-ésima resonancia y Γ_p es el ancho de decaimiento correspondiente.

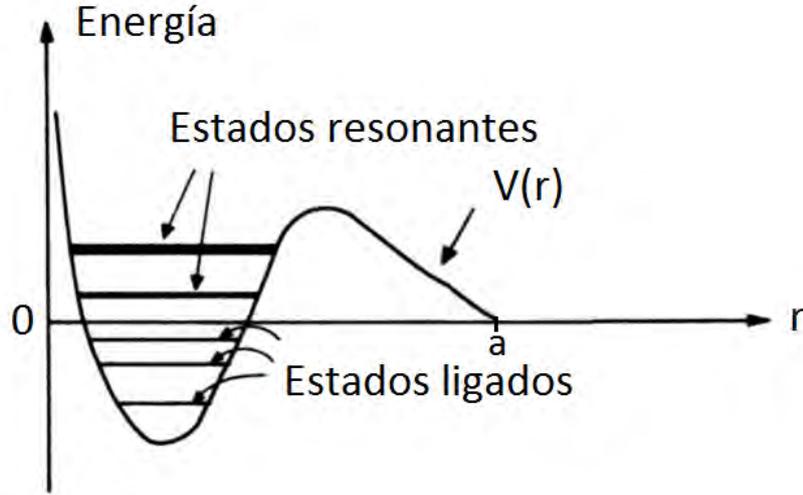


FIG. 2.1 Estados resonantes, estados ligados y potencial de alcance finito.

En la expresión anterior, se puede observar que los estados resonantes decrecen exponencialmente con respecto al tiempo, en una escala natural del sistema $\tau_p = 1/\Gamma_p$, la cual se le conoce en la literatura con el nombre de *vida media*.

Por otra parte, para determinar la distribución de los polos en plano complejo³, se aplica el teorema de Green a la ecuación (2.9) y a su complejo conjugado⁴, con lo cual se obtiene la siguiente expresión

$$\left[u_p^*(r) \frac{d}{dr} u_p(r) - u_p(r) \frac{d}{dr} u_p^*(r) \right]_0^a = (\kappa_p^{*2} - \kappa_p^2) \int_0^a |u_p(r)|^2 dr. \quad (2.15)$$

Aplicando las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (2.10) y (2.12) y suponiendo que $\alpha_p \neq 0$ se obtiene la siguiente relación [18]

$$\beta_p = \frac{1}{2} \frac{|u_p(a)|^2}{\int_0^a |u_p(r)|^2 dr}, \quad (2.16)$$

donde se observa que $\beta_p > 0$, por lo que los polos (en este caso llamados polos resonantes) se encuentran distribuidos en el plano k por debajo del eje $\Re(k)$ y simétricos con respecto al eje $\Im(k)$ como se muestra en la figura 2.2.

³Polos hace referencia a los valores que pueden tomar tanto κ_p como κ_{-p} .

⁴El teorema de Green hace referencia al siguiente procedimiento: dadas dos funciones f y g que satisfacen las ecuaciones diferenciales E_f y E_g respectivamente, realizar la siguiente operación $f * E_g - g * E_f$ e integrar en un intervalo que permita usar las condiciones de frontera que obedecen f y g .

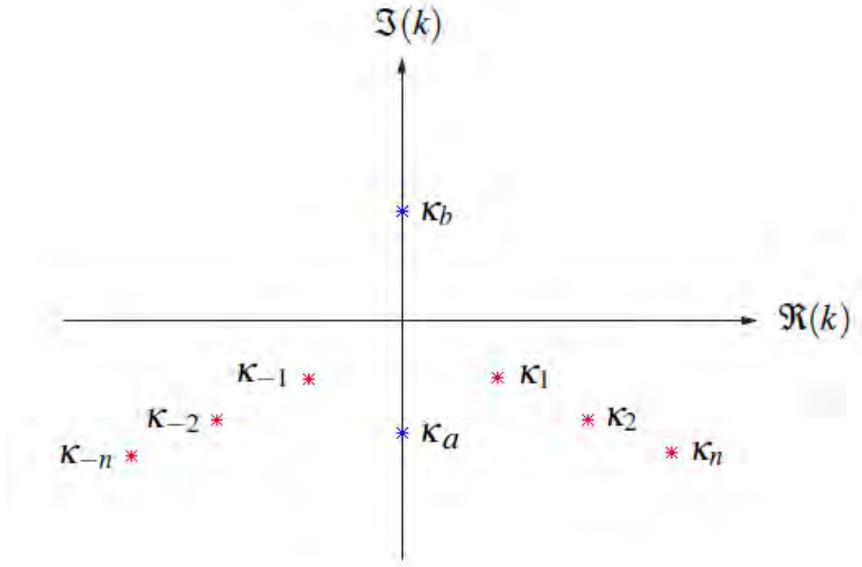


FIG. 2.2 Distribución simétrica con respecto al eje imaginario de los polos resonantes κ_p y κ_{-p} . Dependiendo del problema se pueden encontrar polos ligados $\kappa_b = i\gamma_b$ y polos anti-ligados $\kappa_a = -i\delta_a$, donde $\{\gamma_b, \delta_a \in \mathbb{R}^+\}$.

Otra propiedad interesante de los estados resonantes se logra a través de la ecuación de conservación de probabilidad

$$\frac{\partial}{\partial t} |u_p(r,t)|^2 + 2 \frac{\partial}{\partial r} \Im \left[u_p^*(r,t) \frac{\partial u_p(r,t)}{\partial r} \right] = 0. \quad (2.17)$$

Integrando la ecuación anterior sobre el intervalo $[0, a]$ y utilizando las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (2.10) y (2.11) se puede escribir Γ_p como [18]

$$\Gamma_p = 2\alpha_p \frac{|u_p(a)|^2}{\int_0^a |u_p(r)|^2 dr} = 4\alpha_p \beta_p, \quad (2.18)$$

donde se relaciona la anchura de la p -ésima resonancia con un término de superficie y un término sobre la región interna del potencial.⁵

⁵En unidades naturales la cantidad $v_p = 2\alpha_p = \hbar\alpha_p/m$, puede ser interpretado como la velocidad de la p -ésima partícula emitida.

2.2 Función de onda en términos de la función de Green retardada

La solución a la ecuación (2.1) se puede escribir en términos de la función de Green retardada $g(r, r'; t)$ y de la condición inicial $\Psi(r', 0)$ como [44]

$$\Psi(r, t) = \int_0^a g(r, r', t) \Psi(r', 0) dr', \quad t > 0. \quad (2.19)$$

Haciendo el límite cuando $t \rightarrow 0_+$ en la expresión anterior, se puede inferir la primera propiedad de la función $g(r, r'; t)$, esto es,

$$\Psi(r, 0) = \int_0^a g(r, r', 0_+) \Psi(r', 0) dr'. \quad (2.20)$$

Así pues, para que se satisfaga la relación anterior se debe cumplir la siguiente expresión

$$g(r, r', 0_+) = \delta(r - r'). \quad (2.21)$$

La función de Green retardada se puede calcular a través de una transformada de Laplace en términos de la función de Green de onda saliente $G^+(r, r'; k)$ como [22]

$$g(r, r', t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} G^+(r, r'; k) e^{-ik^2 t} 2k dk, \quad (2.22)$$

donde C_0 es el contorno de integración deformado sobre el plano k . Usando el Teorema Integral de Cauchy sobre el contorno C indicado en la figura 2.3 y haciendo el límite cuando $k \rightarrow \infty$, se puede escribir la ecuación (2.22) en términos del contorno C_I de la siguiente forma [18]

$$g(r, r', t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^+(r, r'; k) e^{-ik^2 t} 2k dk. \quad (2.23)$$

2.3 Normalización de los estados resonantes

Un problema que tuvo que afrontar G. Gamow al introducir los estados resonantes fue el de la normalización de estos estados. Esto se debe a que $|u_p(r)|^2$ diverge para $r > a$ cuando r tiende

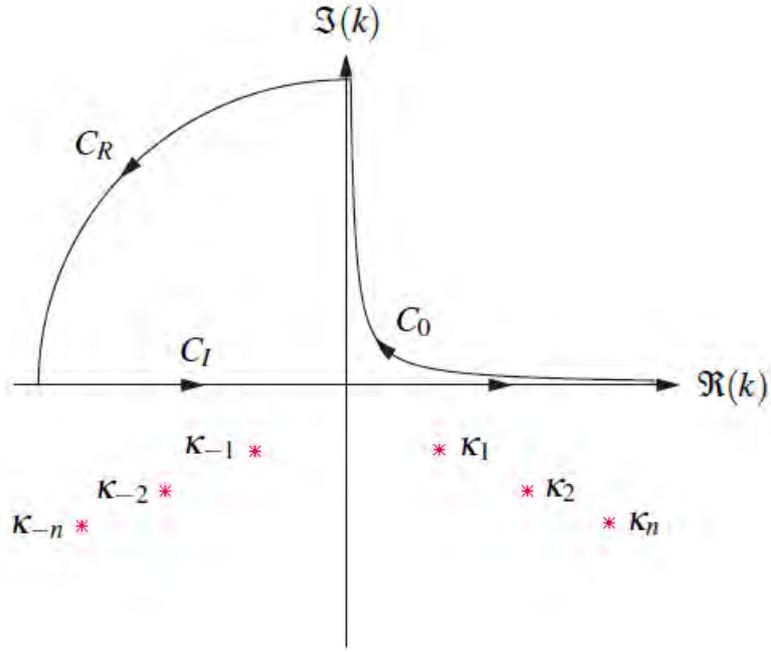


FIG. 2.3 Contorno de integración C en el plano k , donde $C = C_0 + C_R + C_I$.

a infinito. Para visualizar el problema se considera la fórmula ortodoxa de normalización, de esta manera se tiene la siguiente expresión

$$\int_0^{\infty} |u_p(r)|^2 dr = |A_p|^2 \int_0^{\infty} e^{2\beta_p r} dr \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

Para obtener una fórmula adecuada de normalización para los estados resonantes se considera la función de Green de onda saliente que satisface la siguiente ecuación

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 - V(r) \right] G^+(r, r'; k) = \delta(r - r'), \quad (2.25)$$

y que obedece a las siguientes condiciones de frontera

$$G^+(0, r'; k) = 0 \quad (2.26)$$

y

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} G^+(r, r'; k) \right]_{r=a^+} = ikG^+(a, r'; k). \quad (2.27)$$

Por otro lado, se puede escribir la función $G^+(r, r'; k)$ alrededor de un polo resonante como [18]

$$G^+(r, r'; k) = \frac{R_p(r, r')}{k - \kappa_p} + \xi(r, r'; k), \quad (2.28)$$

donde $R_p(r, r')$ es el residuo de la función de Green y $\xi(r, r'; k)$ es una función regular.

En el apéndice A se muestra que el residuo $R_p(r, r')$ se puede escribir como [18]

$$R_p(r, r') = \frac{u_p(r)u_p(r')}{2\kappa_p}, \quad (2.29)$$

si los estados resonantes están normalizados por la siguiente expresión [18]

$$\int_0^a u_p^2(r)dr + i\frac{u_p^2(a)}{2\kappa_p} = 1. \quad (2.30)$$

Finalmente, una ecuación más general que la ecuación (2.30) se obtiene aplicando el teorema de Green entre las ecuaciones $u_p(r)$ y $u_q(r)$. Esto mediante el uso de las ecuaciones (2.10) y (2.12) para los subíndices p y q , con lo cual se obtiene

$$\int_0^a u_p(r)u_q(r)dr + i\frac{u_p(a)u_q(a)}{\kappa_p + \kappa_q} = 0, \quad k_p \neq k_q. \quad (2.31)$$

Así pues, usando las ecuaciones (2.30) y (2.31) se obtiene la siguiente ecuación [18]

$$\int_0^a u_p(r)u_q(r)dr = \delta_{p,q} - i\frac{u_p(a)u_q(a)}{\kappa_p + \kappa_q}. \quad (2.32)$$

2.4 Función de Green de onda saliente en términos de los estados resonantes

Es posible realizar un desarrollo de la función de Green de onda saliente en términos de los estados resonantes. Para ello, se considera la siguiente integral [17, 23]

$$S = \frac{i}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{G^+(r, r'; k')}{k' - k} dk', \quad (2.33)$$

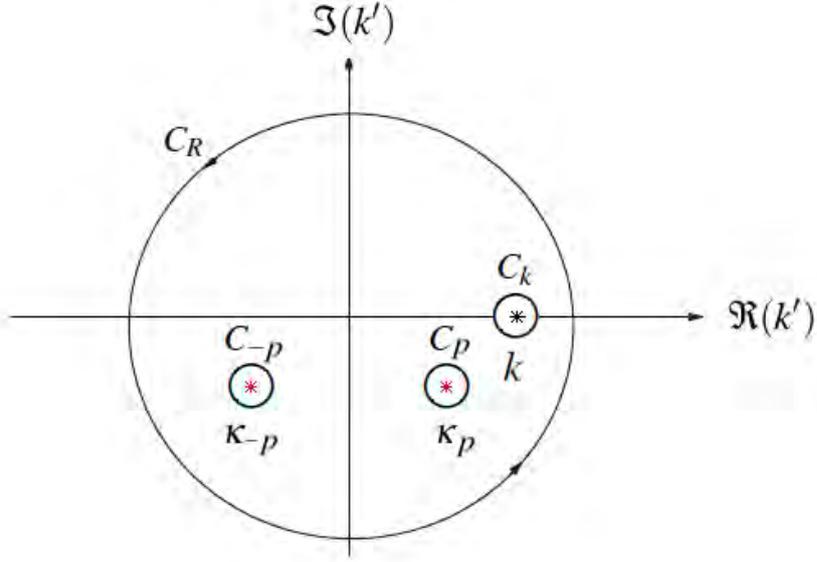


FIG. 2.4 Contorno de integración Γ en el plano k' , donde $\Gamma = C_k + C_R + \sum_p C_p$.

donde Γ es el contorno de integración mostrado en la figura 2.4. Usando el teorema Integral de Cauchy se puede expresar la ecuación (2.33) como [18]

$$2\pi i S = \oint_{C_k} \frac{G^+(r, r'; k')}{k' - k} dk' + \sum_p \oint_{C_p} \frac{G^+(r, r'; k')}{k' - k} dk' - \oint_{C_R} \frac{G^+(r, r'; k')}{k' - k} dk' = 0. \quad (2.34)$$

Es posible demostrar que la función $G^+(r, r'; k')$ tiende a cero exponencialmente en todas direcciones del plano complejo k' , cuando el radio del contorno C_R tiende a infinito [19], es decir,⁶

$$\lim_{|k'| \rightarrow \infty} G^+(r, r'; k') \rightarrow 0, \quad (r, r')^\dagger \leq a. \quad (2.35)$$

El caso descrito por la ecuación anterior implica dos cosas, la primera es que la integral sobre el contorno C_R de la ecuación (2.34) se anula, y la segunda es que se debe calcular el término intermedio de la misma ecuación sobre el conjunto completo de los polos resonantes.

⁶Se denota como $(r, r')^\dagger \leq a$ los siguientes casos: $(r < a, r' < a)$, $(r < a, r' = a)$ y $(r = a, r' < a)$.

Considerando lo antes mencionado, se obtiene la siguiente expresión

$$\oint_{C_k} \frac{G^+(r, r'; k')}{k' - k} dk' = - \sum_{p=-\infty}^{\infty} \oint_{C_p} \frac{G^+(r, r'; k')}{k' - k} dk', \quad (r, r')^\dagger \leq a. \quad (2.36)$$

Empleando el Teorema de los residuos en la parte izquierda de la expresión anterior, se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} \frac{G^+(r, r'; k')}{k' - k} dk' = \lim_{k' \rightarrow k} \left[(k' - k) \frac{G^+(r, r'; k')}{k' - k} \right] = G^+(r, r'; k). \quad (2.37)$$

Por otro lado, usando el Teorema de los residuos en el n -ésimo polo resonante κ_p y la ecuación (2.28) en la integral de la parte derecha de la ecuación (2.36), se obtiene la siguiente relación

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_p} \frac{G^+(r, r'; k')}{k' - k} dk' = \lim_{k' \rightarrow \kappa_p} \left\{ (k' - \kappa_p) \left[\frac{R_p(r, r')}{(k' - k)(k' - \kappa_p)} + \frac{\xi(r, r'; k)}{k' - k} \right] \right\} = \frac{R_p(r, r')}{\kappa_p - k}. \quad (2.38)$$

Así pues, usando las ecuaciones (2.29), (2.37), y (2.38) en la ecuación (2.36), se obtiene una expresión de la función de Green de onda saliente en términos de los estados resonantes [6, 23, 24, 33, 34]

$$G^+(r, r'; k) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{u_p(r)u_p(r')}{2\kappa_p(k - \kappa_p)}, \quad (r, r')^\dagger \leq a. \quad (2.39)$$

2.5 Algunas identidades de los estados resonantes

En esta sección se obtendrán algunas relaciones importantes siguiendo el trabajo de García-Calderón [18]. Para esto, se sustituye la ecuación (2.39) en la ecuación (2.25), sumando y restando $\kappa_p^2 u_p(r)$, y usando la ecuación (2.9) se obtiene la siguiente expresión

$$k \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{u_p(r)u_p(r')}{2\kappa_p} + \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} u_p(r)u_p(r') = \delta(r - r'), \quad (r, r')^\dagger \leq a. \quad (2.40)$$

Sin embargo, la expresión anterior debe ser consistente con el hecho de que k puede tomar

cualquier valor del continuo, por lo tanto se deben cumplir las siguientes ecuaciones [6, 24]

$$\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} u_p(r)u_p(r') = \delta(r-r'), \quad (r, r')^\dagger \leq a \quad (2.41)$$

y

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{u_p(r)u_p(r')}{\kappa_p} = 0, \quad (r, r')^\dagger \leq a. \quad (2.42)$$

Por otra parte tenemos la siguiente relación

$$\frac{1}{\kappa_p(k - \kappa_p)} = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{\kappa_p} + \frac{1}{k - \kappa_p} \right], \quad (2.43)$$

Sustituyendo la ecuación (2.43) en la ecuación (2.39), y usando la ecuación (2.42) podemos escribir $G^+(r, r'; k)$ como

$$G^+(r, r'; k) = \frac{1}{2k} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{u_p(r)u_p(r')}{k - \kappa_p}, \quad (r, r')^\dagger \leq a. \quad (2.44)$$

Sustituyendo la ecuación (2.44) en la ecuación (2.25), sumando y restando $\kappa_p^2 u_p(r)$, y usando las ecuaciones (2.9), (2.41) y (2.42), se obtiene la siguiente expresión [18]

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \kappa_p u_p(r)u_p(r') = 0, \quad (r, r')^\dagger \leq a, \quad (2.45)$$

donde la ecuación (2.41) representa la relación de cerradura para los estados resonantes, mientras que las ecuaciones (2.42) y (2.45) son reglas de suma que obedecen los estados resonantes.

2.6 Función de onda en la región interna del potencial

En esta sección se desarrollará la solución de la ecuación (2.1) para la región interna del potencial en términos de los estados resonantes. Para esto, se seguirá el trabajo de García-Calderón [18]. Para comenzar, se sustituye la ecuación (2.44) en la ecuación (2.23), con lo cual se obtiene la siguiente expresión

$$g(r, r'; t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} u_p(r)u_p(r') \left[\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik^2 t}}{k - \kappa_p} dk \right], \quad (r, r')^\dagger \leq a, \quad (2.46)$$

donde el término entre corchetes de la expresión anterior corresponde a la función de Moshinsky ⁷ [35],

$$M(z_p^0) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik^2 t}}{k - \kappa_p} dk = \frac{1}{2} \omega(iz_p^0) = \frac{1}{2} e^{(z_p^0)^2} \operatorname{erfc}(z_p^0), \quad (2.47)$$

donde $\omega(z)$ es la función de Faddeyeva y $\operatorname{erfc}(z)$ es la función de error complementaria [1, 13], y donde el argumento z_p^0 está dado por

$$z_p^0 = -\kappa_p t^{1/2} e^{-i\pi/4}. \quad (2.48)$$

Utilizando la ecuación (2.47) en la ecuación (2.46) se puede expresar la función de Green retardada como [38]

$$g(r, r'; t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} u_p(r) u_p(r') M(z_p^0), \quad (r, r')^\dagger \leq a. \quad (2.49)$$

Para obtener la solución de la ecuación (2.1) en la región $r \leq a$, se sustituye la ecuación (2.49) en la ecuación (2.19), con lo cual se obtiene la siguiente expresión

$$\Psi_{int}(r, t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p u_p(r) M(z_p^0), \quad t > 0, \quad (2.50)$$

donde el p-ésimo coeficiente C_p está dado por

$$C_p = \int_0^a u_p(r') \Psi(r', 0) dr'. \quad (2.51)$$

A continuación, se derivarán unas relaciones importantes que involucran a los coeficientes del desarrollo de la función de onda interna. Estas relaciones son conocidas como las reglas de suma para los coeficientes C_p . Para obtener estas relaciones, se procede a evaluar la ecuación (2.50) para el tiempo $t = 0$,

$$\Psi_{int}(r, 0) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p u_p(r) M(0) = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p u_p(r), \quad (2.52)$$

donde $M(0) = 1/2$. Integrando la probabilidad sobre la región interna del potencial y usando

⁷En honor al destacado físico mexicano Marcos Moshinsky Borodiansky (1921 - 2009).

la ecuación (2.52), se obtiene

$$\int_0^a \Psi^*(r, 0) \Psi_{int}(r, 0) dr = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p \overline{C_p} = 1, \quad (2.53)$$

donde $\overline{C_p}$ tiene la siguiente forma

$$\overline{C_p} = \int_0^a \Psi^*(r, 0) u_p(r) dr. \quad (2.54)$$

Es importante aclarar que en este trabajo se ha considerado estados iniciales reales. Esto implica que los coeficientes C_p y $\overline{C_p}$ son iguales, pero se supondrá que en general son diferentes con la finalidad de obtener una expresión general. Utilizando las propiedades de simetría de los estados resonantes, se deduce la siguiente regla de suma

$$\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p \overline{C_p} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} [C_p \overline{C_p} + (C_p \overline{C_p})^\dagger] = 1, \quad (2.55)$$

$$\therefore \Re \left[\sum_{p=1}^{\infty} C_p \overline{C_p} \right] = 1. \quad (2.56)$$

2.7 Función de onda en la región externa del potencial

En esta sección se desarrollará la solución de la ecuación (2.1) para la región externa del potencial, siguiendo el procedimiento de Irene Maldonado y García-Calderón [18, 30]. Para comenzar, se debe escribir la función $G^+(r, r'; k)$ para el caso cuando $r > r'$. Usando la ecuación (B.1) se puede escribir la siguiente expresión

$$G^+(r, r'; k) = -\frac{\phi(k, r') f_+(k, r)}{J_+(k)}, \quad r > r', \quad (2.57)$$

donde la función $J_\pm(k)$ son las funciones de Jost. La función $\phi(k, r)$ es llamada solución regular de la ecuación de Schrödinger y las funciones $f_\pm(k, r)$ son llamadas soluciones irregulares de la ecuación de Schrödinger (consultar el anexo B).

Evaluando la ecuación anterior en $r = a$ y usando la ecuación (B.3), se obtiene la siguiente

relación

$$G^+(a, r'; k) = -\frac{\phi(k, r')}{J_+(k)} e^{ika}, \quad r \geq a, \quad r' < a. \quad (2.58)$$

De esta manera, usando las ecuaciones (2.58) y (B.3) se puede reescribir la ecuación (2.57) como

$$G^+(r, r'; k) = G^+(a, r'; k) e^{ik(r-a)}; \quad r \geq a, \quad r' < a. \quad (2.59)$$

Así pues, empleando la ecuación (2.39) en la ecuación anterior se puede escribir la función de Green de onda saliente de la siguiente forma

$$G^+(r, r'; k) = e^{ik(r-a)} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{u_p(a)u_p(r')}{2\kappa_p(k - \kappa_p)}, \quad r \geq a, \quad r' < a. \quad (2.60)$$

Por otra parte, sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (2.23) y usando las ecuaciones (2.42) y (2.43) se puede escribir la función de Green retardada como

$$g(r, r'; t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} u_p(a)u_p(r') \left[\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(r-a)} e^{-ik^2 t}}{k - \kappa_p} dk \right], \quad r \geq a, \quad r' < a, \quad (2.61)$$

donde al igual que en la sección anterior, el término entre corchetes de la expresión anterior corresponde a la función de Moshinsky [35],

$$M(z_p) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(r-a)} e^{-ik^2 t}}{k - \kappa_p} dk = \frac{1}{2} e^{i(r-a)^2/4t} \omega(iz_p) = \frac{1}{2} e^{i(r-a)^2/4t} e^{z_p^2} \operatorname{erfc}(z_p), \quad (2.62)$$

con el argumento z_p dado por

$$z_p = \frac{(r-a) - 2\kappa_p t}{2\sqrt{t}} e^{-i\pi/4}. \quad (2.63)$$

Usando la ecuación (2.62) en la ecuación (2.61) se puede escribir la función de Green

retardada como

$$g(r, r'; t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} u_p(a) u_p(r') M(z_p), \quad r \geq a, \quad r' < a. \quad (2.64)$$

Para obtener la solución de la ecuación (2.1) en la región $r \geq a$, se sustituye la ecuación (2.64) en la ecuación (2.19)

$$\Psi_{ext}(r, t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p u_p(a) M(z_p), \quad t > 0, \quad (2.65)$$

donde el p-ésimo coeficiente C_p está dado por la ecuación (2.51).

Note que las soluciones en ambas regiones dadas por las ecuaciones (2.50) y (2.65) evaluadas en $r = a$ son iguales. Esto se aprecia analizando los argumentos de las funciones Moshinsky dadas por las ecuaciones (2.48) y (2.63).

2.8 Desarrollo asintótico de la función de onda interna para tiempos largos

A continuación, se realizará un desarrollo de la función de onda en la región interna del potencial de interacción. Esto con la finalidad de obtener una fórmula analítica que permita estudiar el comportamiento de la densidad de probabilidad para tiempos largos. Para ello, se procederá a lo largo de las mismas líneas que en los trabajos de Irene Maldonado y Alejandro Máttar [30, 31]. Se inicia por escribir la ecuación (2.50) como

$$\Psi_{int}(r, t) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} [C_p u_p(r) \omega(iz_p^0) + C_p^* u_p^*(r) \omega(iz_{-p}^0)], \quad r \leq a, \quad (2.66)$$

donde se ha considerado las siguientes relaciones de simetría $u_{-p}(r) = u_p^*(r)$ y $\kappa_{-p} = -\kappa_p^*$.

Por otra parte, se considera la siguiente propiedad de las funciones Faddeyeva [1, 18]

$$\omega(iz) = 2e^{z^2} - \omega(-iz). \quad (2.67)$$

Tomando en cuenta lo antedicho y usando las ecuaciones (2.66) y (2.67) se puede escribir la

siguiente expresión

$$\Psi_{int}(r,t) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p u_p(r) e^{-i\kappa_p^2 t} - \phi_{int}(r,t), \quad r \leq a, \quad (2.68)$$

donde

$$\phi_{int}(r,t) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} [C_p u_p(r) \omega(-iz_p^0) - C_p^* u_p^*(r) \omega(iz_{-p}^0)], \quad (2.69)$$

la cual contiene la parte no exponencial.

Por otro lado, la función de Faddeyeva posee el siguiente desarrollo asintótico para tiempos largos [1, 18]

$$\omega(z) = \frac{i}{\pi} \sum_{f=0}^F \frac{\Gamma(f+1/2)}{z^{2f+1}}. \quad (2.70)$$

Asimismo, se satisface que $\pi/2 < \arg z_p^0 < 3\pi/2$ y que los polos son propios, *i.e.*, $k_p = \alpha_p - i\beta_p$ con $\alpha_p > \beta_p$. Esto permite que se pueda utilizar la ecuación (2.70) en la ecuación (2.69), con lo cual se obtiene la siguiente expresión

$$\phi_{int}(r,t) = \frac{i}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{f=0}^F \Gamma(f+1/2) \left[\frac{C_p u_p(r)}{(-iz_p^0)^{2f+1}} - \frac{C_p^* u_p^*(r)}{(iz_{-p}^0)^{2f+1}} \right]. \quad (2.71)$$

Sin embargo, la ecuación anterior tiene la particularidad de que a orden cero ($f=0$) se anula. Esto se debe a la regla de suma dada por la ecuación (2.42).

Finalmente, la función de onda interna se puede escribir a tiempos largos como [30]

$$\Psi_{int}(r,t) \approx \sum_{p=1}^{\infty} C_p u_p(r) e^{-i\kappa_p^2 t} - i\mu \Im \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{C_p u_p(r)}{\kappa_p^3} \right] \left(\frac{1}{t^{3/2}} \right) - Res(r,t), \quad t > 0, \quad (2.72)$$

donde $\mu \equiv e^{-i\pi/4}/2\sqrt{\pi}$, mientras que el residuo $Res(r,t)$ está dado por

$$Res(r,t) = \frac{i}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{f=2}^F \Gamma(f+1/2) \left[\frac{C_p u_p(r)}{(-iz_p^0)^{2f+1}} - \frac{C_p^* u_p^*(r)}{(iz_{-p}^0)^{2f+1}} \right]. \quad (2.73)$$

El término intermedio de la ecuación (2.72) es la función $\phi_{int}(r,t)$ a primer orden ($f=1$).

2.9 Probabilidades de supervivencia y de permanencia

Para estudiar la evolución temporal del problema de decaimiento, además de la función de onda, resulta apropiado introducir los conceptos de probabilidad de supervivencia $S(t)$ y probabilidad de permanencia $P(t)$ [18]. Para iniciar, se define la amplitud de supervivencia, $A(t)$, como el traslape de la función de onda con el estado inicial, el cual se considera confinado a la región interna del potencial, es decir,

$$A(t) = \int_0^a \Psi^*(r,0)\Psi(r,t)dr. \quad (2.74)$$

Así pues, la probabilidad de supervivencia es dada

$$S(t) = |A(t)|^2, \quad (2.75)$$

la cual se interpreta como la probabilidad de que el sistema permanezca en el estado inicial después de un tiempo t .

Por otro lado, la probabilidad de permanencia se define como

$$P(t) = \int_0^a |\Psi(r,t)|^2 dr, \quad (2.76)$$

la cual se interpreta como la probabilidad de que la partícula no haya escapado de la región interna del potencial al tiempo t .

Debido a que los límites de integración que aparecen en $A(t)$ y $P(t)$ involucran la región interna del potencial, solo es necesario conocer la función de onda en la región interna del potencial para poder calcular las probabilidades de supervivencia y de permanencia.

Las cantidades $A(t)$ y $P(t)$ se pueden escribir en términos de los estados resonantes usando la ecuación (2.50). Para esto, se ha de recordar que en este trabajo se considera que el estado inicial es real, es decir, $\Psi(r,0) = \Psi^*(r,0)$. Entonces, la amplitud de supervivencia $A(t)$ se puede expresar usando las ecuaciones (2.50) y (2.74) como [18, 30]

$$A(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p^2 M(z_p^0), \quad t \geq 0. \quad (2.77)$$

Por otro lado, sustituyendo la ecuación (2.50) en la ecuación (2.76) podemos escribir la

probabilidad de permanencia $P(t)$ como [30]

$$P(t) = \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} C_p C_q^* I_{p,q} M(z_p^0) M^*(z_q^0), \quad t \geq 0, \quad (2.78)$$

donde

$$I_{p,q} \equiv \int_0^a u_p(r) u_q^*(r) dr = \delta_{p,-q} - i \frac{u_p(a) u_q^*(a)}{\kappa_p - \kappa_q^*}. \quad (2.79)$$

2.10 Aproximación asintótica para la amplitud de supervivencia y la probabilidad de permanencia

La aproximación asintótica de la amplitud de probabilidad se encuentra sustituyendo la ecuación (2.72) en la ecuación (2.74), con lo cual se obtiene la siguiente expresión [30]

$$A(t) \approx \sum_{p=1}^{\infty} C_p^2 e^{-i\varepsilon_p t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_p t} - i\mu \Im \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{C_p^2}{\kappa_p^3} \right] \left(\frac{1}{t^{3/2}} \right) - Res(t), \quad t > 0, \quad (2.80)$$

donde

$$Res(t) = \frac{i}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{f=2}^F \Gamma(f+1/2) \left[\frac{C_p^2}{(-iz_p^0)^{2f+1}} - \frac{C_p^{*2}}{(iz_{-p}^0)^{2f+1}} \right]. \quad (2.81)$$

Por otra parte, empleando la ecuación (2.72) en la ecuación (2.76), se obtiene que la aproximación a tiempos largos de la probabilidad de permanencia (sin considerar el residuo, que es despreciable) se puede escribir como [30]

$$\begin{aligned} P(t) \approx & \sum_{p,q=1}^{\infty} C_p C_q^* e^{-i(\varepsilon_p - \varepsilon_q)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p + \Gamma_q)t} \\ & - \Re \left[\mu \sum_{p,q=1}^{\infty} \left(\frac{C_p C_q^*}{\kappa_p^3} I_{p,q} - \frac{C_p^* C_q}{\kappa_p^{*3}} \bar{I}_{p,q} \right) e^{i\varepsilon_q t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_q t} \right] \left(\frac{1}{t^{3/2}} \right) \\ & + \frac{|\mu|^2}{2} \Re \left[\sum_{p,q=1}^{\infty} \left(\frac{C_p C_q^*}{\kappa_p^3 \kappa_q^{*3}} I_{p,q} - \frac{C_p^* C_q}{\kappa_p^{*3} \kappa_q^3} \bar{I}_{p,q} \right) \right] \left(\frac{1}{t^3} \right), \quad t > 0, \quad (2.82) \end{aligned}$$

donde

$$\bar{I}_{p,q} \equiv \int_0^a u_p^*(r)u_q^*(r)dr = \delta_{p,q} + i \frac{u_p(a)^*u_q^*(a)}{\kappa_p^* + \kappa_q^*}. \quad (2.83)$$

2.11 Ejemplo. El modelo de potencial δ

En este ejemplo se considera el problema para momento angular cero del decaimiento de una partícula inicialmente confinada por el potencial ⁸

$$V(r) = \lambda \delta(r-a), \quad (2.84)$$

donde λ modula la intensidad del potencial y a es el parámetro que separa la región interna de la externa. El estado inicial confinado a $t = 0$ es

$$\Psi(r,0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{a}r\right) \Theta(a-r), \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots \quad (2.85)$$

donde $\Theta(x)$ es la función Heaviside.

Es conveniente iniciar con el cálculo del conjunto de polos del sistema. Para esto, se sustituye la ecuación (2.84) en la ecuación (2.9), con lo cual se obtiene la siguiente expresión

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \kappa_p^2 - \lambda \delta(r-a) \right] u_p(r) = 0. \quad (2.86)$$

Por otra parte, las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (2.10) y (2.11) implica que las soluciones a la ecuación (2.86) tengan la siguiente forma

$$u_p(r) = \begin{cases} A_p \sin(\kappa_p r), & r \leq a \\ B_p e^{i\kappa_p r}, & r \geq a. \end{cases} \quad (2.87)$$

Debido a que la función $u_p(r)$ tiene que ser continua, debe cumplirse la primera condición de

⁸En este ejemplo se dará un enfoque al estudio del problema a través de la densidad de probabilidad. Para conocer un análisis utilizando las probabilidades de supervivencia y de permanencia, consultar los trabajos de Irene Maldonado, Alejandro Máttar y Luis Mendoza [30–32].

acoplamiento, *i.e.*, las soluciones de la ecuación (2.87) deben ser iguales en $r = a$,

$$A_p \sin(\kappa_p a) = B_p e^{i\kappa_p a}. \quad (2.88)$$

Por otro lado, dada la discontinuidad que presenta la derivada de la función delta de Dirac, se debe integrar la ecuación (2.86) en el intervalo $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ para obtener una segunda condición de acoplamiento

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \kappa_p^2 \right] u_p(r) dr = \lambda \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(r-a) u_p(r). \quad (2.89)$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo y las propiedades de la delta de Dirac se obtiene la siguiente relación

$$\frac{d}{dr} u_p(a + \varepsilon) - \frac{d}{dr} u_p(a - \varepsilon) = \lambda u_p(a). \quad (2.90)$$

con lo cual se obtiene la segunda condición de acoplamiento

$$i\kappa_p B e^{i\kappa_p a} - A \kappa_p \cos(\kappa_p a) = \lambda B_p e^{i\kappa_p a}. \quad (2.91)$$

De esta manera, usando las ecuaciones (2.88) y (2.91) se puede escribir la siguiente expresión

$$2i\kappa_p a + \lambda (e^{2i\kappa_p a} - 1) = 0, \quad (2.92)$$

la cual es llamada *ecuación de los polos*. Esto es, porque fijadas las cantidades λ y a , sus soluciones son el conjunto de polos resonantes del sistema $\{\kappa_p\}$. Sin embargo, debido a que la ecuación (2.92) es una ecuación trascendental, sus soluciones se encuentran mediante el método de Newton Raphson. Para ello, se utiliza la siguiente ecuación de iteración

$$\kappa_p^{h+1} = \kappa_p^h - F(\kappa_p^h) / \dot{F}(\kappa_p^h), \quad (2.93)$$

donde F es la función a encontrar los ceros y $\dot{F} = [dF/dk]_{k=\kappa_p}$. Así pues, se puede obtener grados de aproximación de κ_p para los cuales la ecuación (2.92) es igual a cero. En la figura 2.5 se muestra la distribución de polos resonantes para los parámetros $\lambda = 6$ y $a = 1$.

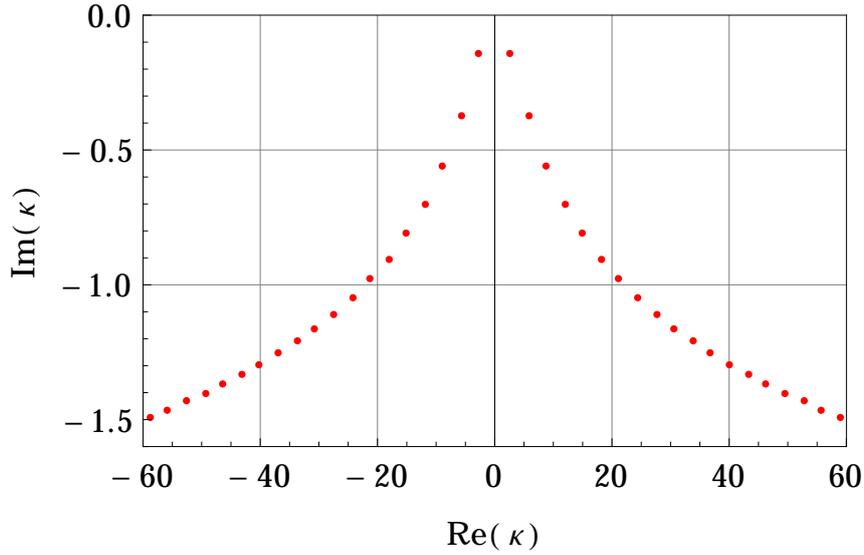


FIG. 2.5 Distribución de los polos resonantes κ_p obtenido a partir de la ecuación (2.92), con $\lambda = 6$ y $a = 1$. El polo correspondiente al primer estado es $\kappa_1 = 3.11052682 - i0.00095614$.

El cálculo de la densidad de probabilidad para la región interna del potencial se obtiene a través de la ecuación (2.50). Para esto, primero se calcula la constante de normalización A_p usando la ecuación (2.30)

$$A_p = \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda a + e^{-2i\kappa_p a}}}. \quad (2.94)$$

Para calcular los coeficientes C_p dados por la ecuación (2.51), se utilizan las ecuaciones (2.85), (2.87) y (2.94), con lo cual se obtiene la siguiente expresión

$$C_p = \int_0^a u_p(r)\Psi(r,0)dr = \sqrt{\frac{\lambda a}{\lambda a + e^{-2i\kappa_p a}}} \left[\frac{2\alpha\pi \sin(\kappa_p a)(-1)^\alpha}{k_p^2 a^2 - \alpha^2 \pi^2} \right]. \quad (2.95)$$

En la figura 2.6 se grafica $\ln[|\Psi_{int}(r = 0.9a, t)|^2]$. En esta gráfica se pueden apreciar dos líneas, la línea azul es la solución exacta y la línea punteada es la parte no exponencial de la solución. En la línea azul se observan las siguientes contribuciones: una contribución no exponencial con pequeñas oscilaciones para tiempos cortos, una contribución exponencial con pendiente $m = -\Gamma_1$.⁹ Después, existe una zona de interferencia entre la parte exponencial y una parte no exponencial, y por último, se puede apreciar un régimen para tiempos largos que

⁹Para obtener la pendiente, se utilizó la parte exponencial de la ecuación (2.72), donde solo se consideró el primer término de resonancia.

decae como t^{-3} .

En la figura 2.7 se grafica $\ln[S(t)]$. En esta gráfica se pueden observar las contribuciones exponencial y no exponencial para tres casos con diferentes valores de α . Los tres casos que se muestran decaen como t^{-3} para tiempos largos.

En la figura 2.8 se grafica $\ln[|\Psi_{int}(r,t)|^2]$. En esta gráfica se muestran tres casos que corresponden a diferentes valores de la posición. En la gráfica se aprecia las transiciones entre los regímenes exponencial y no exponencial. Asimismo, se observa que en el régimen de tiempos largos, los tres casos decaen como t^{-3} .

En la figura 2.9 se hace una ampliación de la figura 2.8 para el régimen de tiempos cortos. En esta gráfica se observan las desviaciones a la ley del decaimiento exponencial para tiempos cortos. En la gráfica se muestran las distintas líneas, las líneas sólidas son obtenidas a través de la solución exacta dada por la ecuación (2.50), y las líneas punteadas son obtenidas a partir de las aproximación asintótica dada por la ecuación (2.72). Asimismo, los puntos son obtenidos de la condición inicial dada por la ecuación (2.85).

En la figura que se menciona en el párrafo anterior se observa que las líneas punteadas se superponen a las líneas sólidas, excepto para los valores ultracortos del tiempo. Esto se debe a que la aproximación asintótica diverge para valores cercanos a $t = 0$. Por otro lado, los puntos de colores se colocaron para confirmar la concordancia entre las líneas sólidas y los valores correspondientes a las condiciones iniciales.

Para conocer el comportamiento de la solución en la parte externa del potencial, se reproducen dos gráficas que aparecen en los trabajos de García-Calderón [18, 20].

En la figura 2.10 se grafica $\ln[|\Psi_{ext}(r,t)|^2]$. En esta gráfica se observa las siguientes contribuciones: una contribución con oscilaciones para tiempos cortos, las cuales provienen de estados resonantes con mayor energía. Después, se forma un frente de onda, el cual se muestra marcado por un punto rojo. Posteriormente, existe una contribución exponencial con pendiente $m = -0.0123177$, la cual se aproxima al valor de $-\Gamma_1 = -0.011894$. En seguida, se forma una zona de interferencia, y por último, se puede observar un régimen no exponencial que decae como t^{-3} .

En la figura 2.11 se grafica $\ln[|\Psi_{ext}(r,t)|^2]$. En esta gráfica además de variar el tiempo, también se varía la posición. En esta figura de tres dimensiones se incluye una gráfica de contornos, la cual ayuda a visualizar las diferentes contribuciones exponencial y no exponencial que posee el sistema.

En la figura 2.12 se muestra qué ocurre en la densidad de probabilidad si se cambia el valor de la intensidad del potencial. Para esto, se consideró el valor $\lambda = 6$, con lo cual se observa que el régimen exponencial y la zona de interferencia se mezclan. Esto en comparación con

lo que se muestra en la figura 2.10.

En la figura 2.13 se gráfica en tres dimensiones $\text{In}[|\Psi_{ext}(r,t)|^2]$. Esta gráfica se realizó de forma similar que la figura 2.11 utilizando $\lambda = 6$.

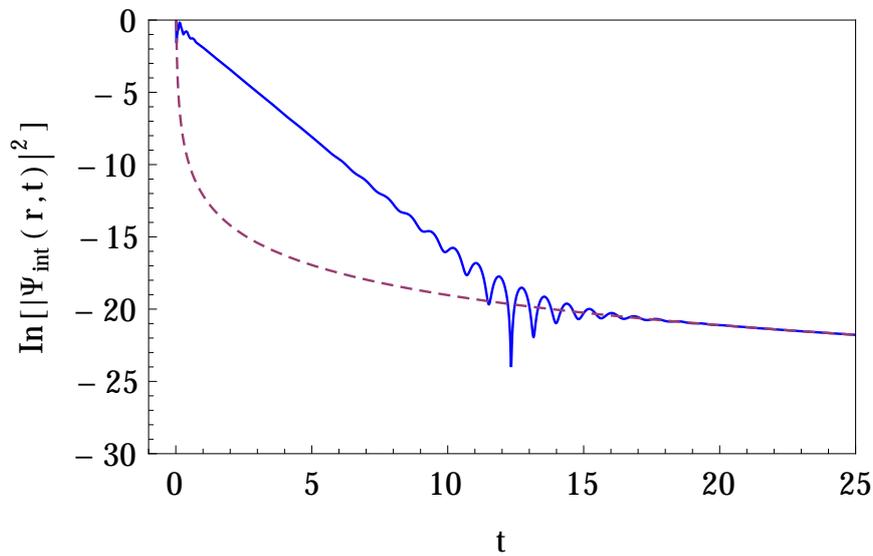


FIG. 2.6 Gráfica de $\ln[|\Psi_{\text{int}}(r=0.9a,t)|^2]$ a partir de la ecuación (2.72); con parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$ y $\alpha = 1$. La línea punteada representa la parte no exponencial de la solución. Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo.

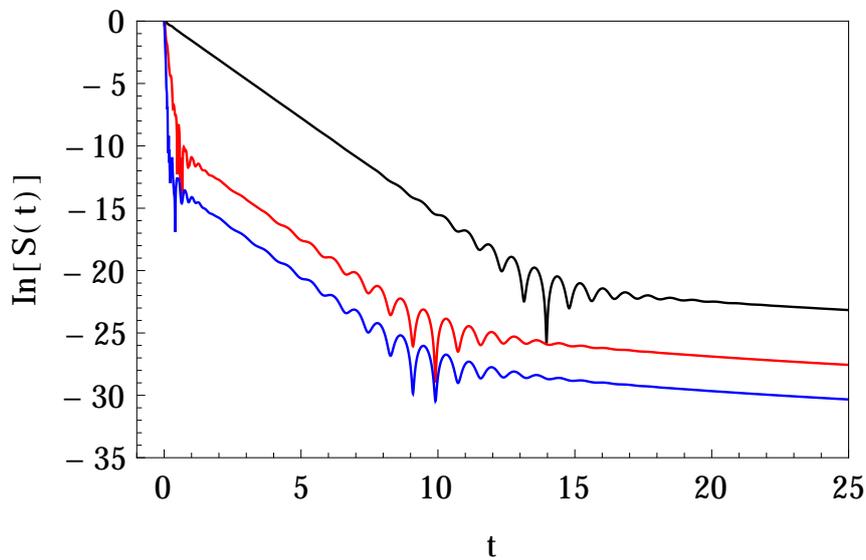


FIG. 2.7 Gráfica de $\ln[S(t)]$ a partir de la ecuación (2.80). En esta figura se utilizaron los siguientes valores: $\alpha = 1$ (color negro), $\alpha = 3$ (color rojo) y $\alpha = 6$ (color azul). Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo.

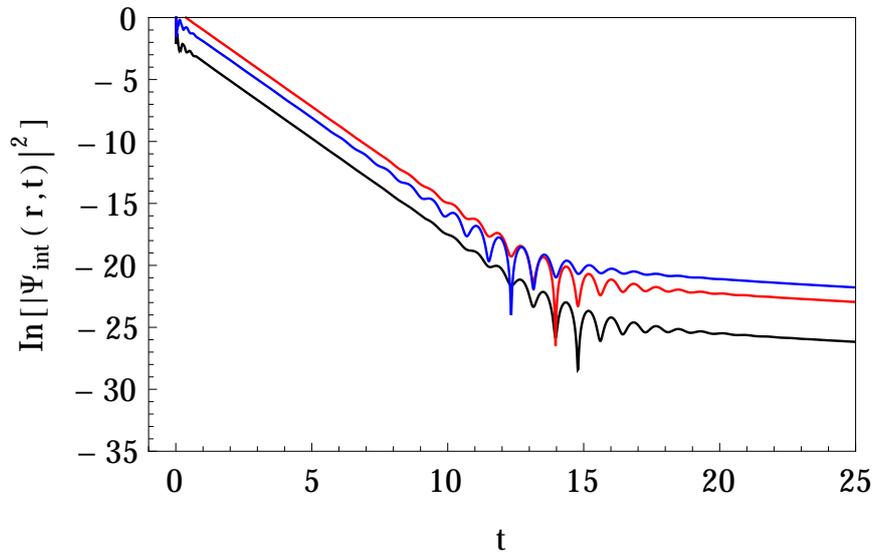


FIG. 2.8 Gráfica de $\ln[|\Psi_{\text{int}}(r,t)|^2]$ a partir de la ecuación (2.72); con parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$ y $\alpha = 1$. Se utilizaron los siguientes valores para la posición: $r = 0.1a$ (línea negra), $r = 0.5a$ (línea roja) y $r = 0.9a$ (línea azul). Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo.

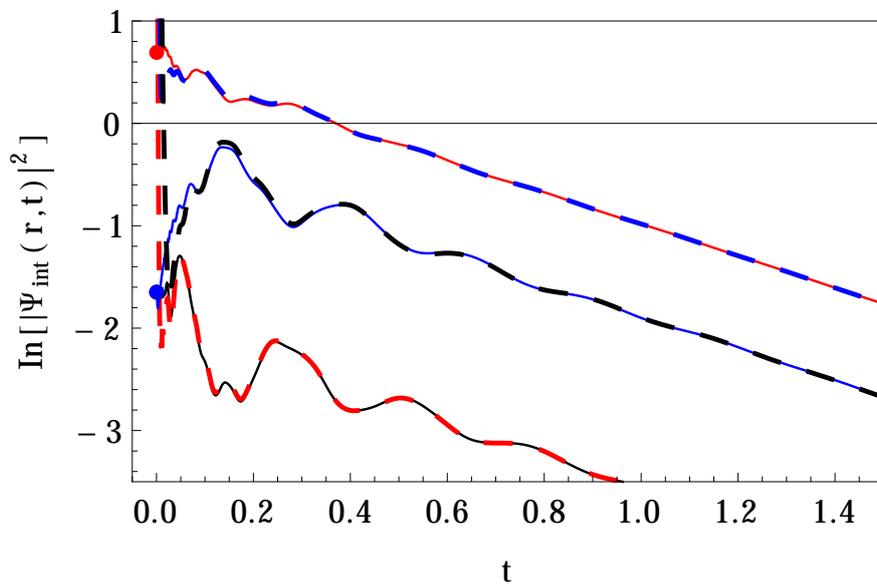


FIG. 2.9 Gráfica para tiempos cortos de $\ln[|\Psi_{\text{int}}(r,t)|^2]$ a partir de la ecuación (2.72). Las líneas sólidas se calculan con la ecuación (2.50) y las líneas punteadas se calculan con la ecuación (2.72). Los parámetros son los mismos que en la gráfica anterior. Se consideraron los siguientes valores de la posición: $r = 0.1a$ (línea sólida negra), $r = 0.5a$ (línea sólida roja) y $r = 0.9a$ (línea sólida azul). Los puntos de color, rojo, negro y azul (estos dos últimos superpuestos) corresponden al valor $\ln[|\Psi_{\text{int}}(r,0)|^2]$ respectivamente.

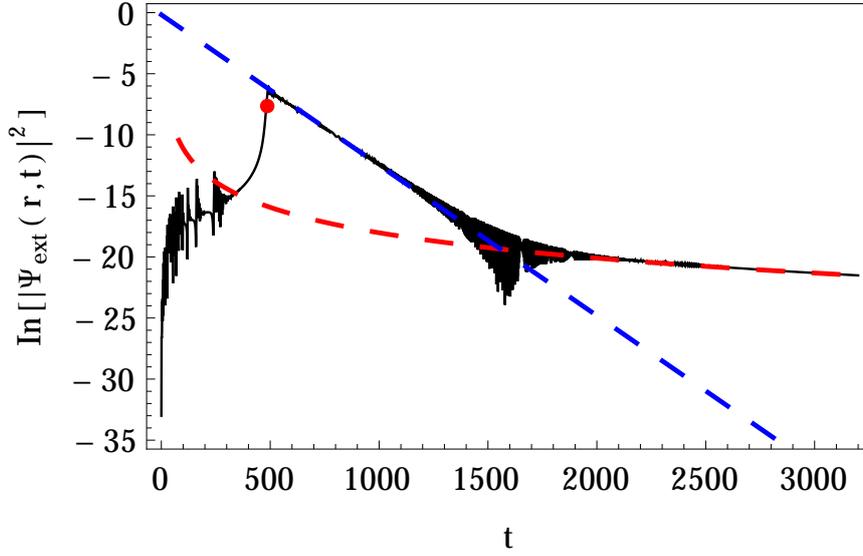


FIG. 2.10 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(r,t)|^2]$ a partir de la ecuación (2.65); con parámetros $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$ y posición $r = 3000a$. El punto rojo es $\ln[|\Psi_{ext}(r,t_0)|^2]$, donde $t_0 = r/2\alpha_1$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -3\ln(t) + 2.7$; con ello se conoce que el sistema decae a tiempos largos como t^{-3} . La línea punteada azul es $g(t) = -0.0123177 * t - 0.173184$. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo.

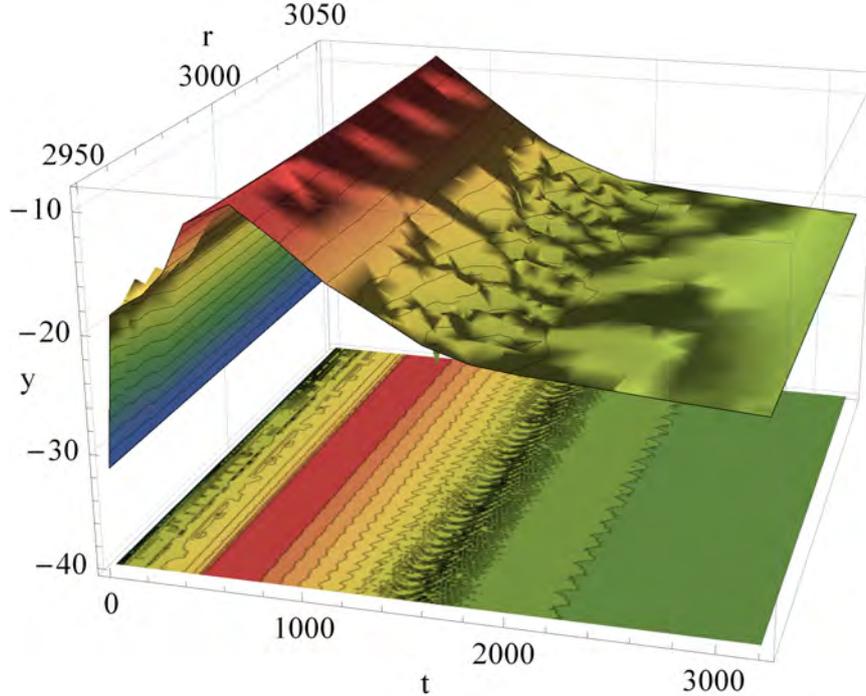


FIG. 2.11 Cálculo del caso anterior variando la posición $r = [2950, 3050]a$, donde $y = \ln[|\Psi_{ext}(r,t)|^2]$. Cantidades importantes del sistema son: $\Gamma_1 = 0.011894$, $\tau_1 = 84.076004708$, $\varepsilon_1 = 9.13 \times 10^{-7}$ y $\kappa_1 = 3.11052682 - i0.00095614$. Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo.

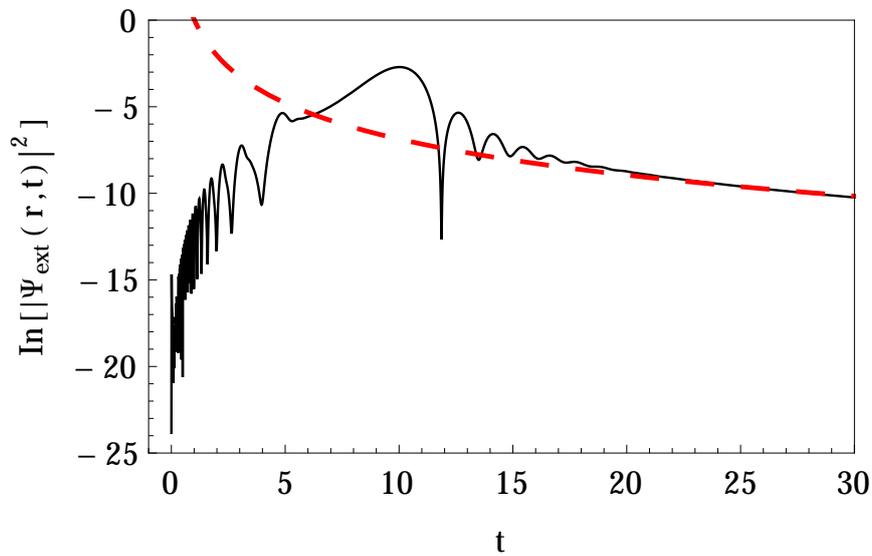


FIG. 2.12 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(r,t)|^2]$ a partir de la ecuación (2.65); con parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$ y posición $r = 3000a$. El punto rojo es $\ln[|\Psi_{ext}(r,t_0)|^2]$, donde $t_0 = r/2\alpha_1$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -3\ln(t) + 0.04$; con ello se conoce que el sistema decae a tiempos largos como t^{-3} . Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo.

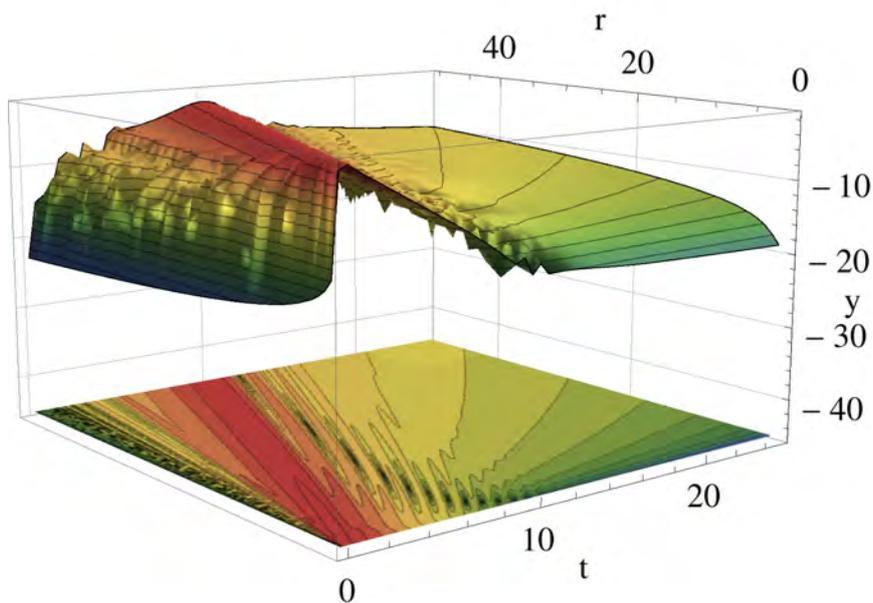


FIG. 2.13 Cálculo del caso anterior variando la posición $r = [1, 50]a$, donde $y = \ln[|\Psi_{ext}(r,t)|^2]$. Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo.

CAPÍTULO 3

FORMALISMO PARA UN SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS CUÁNTICAS IDÉNTICAS

En este capítulo se mostrará la extensión del formalismo de los estados resonantes para un sistema de dos partículas, sin interacción y confinadas inicialmente por un potencial de alcance finito. Para ello, se seguirá los trabajos de García-Calderón y Luis Mendoza [21, 32]. Inicialmente se revisará información de libro de texto relacionado con el tema, posteriormente se desarrollarán expresiones analíticas para la función de onda, la cual puede poseer simetría factorizada, y simetría o antisimetría enredada. Además, se derivarán expresiones exactas para las probabilidades de supervivencia y de permanencia. Finalmente, en la última sección se presentará como ejemplo el modelo de potencial delta para el caso de dos partículas idénticas. En este ejemplo se estudiará el comportamiento temporal de la densidad de probabilidad para las regiones interna y externa del potencial de interacción.

3.1 Partículas idénticas

Dos partículas se consideran idénticas si comparten exactamente las mismas propiedades físicas que las caracterizan. Dentro del marco teórico de la Mecánica Clásica dichas partículas pueden ser distinguidas entre sí. Esto se logra, por ejemplo, etiquetando las partículas y siguiendo con detalle sus correspondientes trayectorias. Esto significa que en cualquier instante de la evolución temporal del sistema es posible identificar a las partículas [3, 28].

En Mecánica Cuántica, el hecho de que un par de partículas posean semejantes propiedades físicas implica un *principio de indistinguibilidad*. Esto se debe fundamentalmente al *principio de indeterminación* de Heisenberg, que establece que aunque se conozca la posición de las partículas en un instante $t = t_0$, es imposible aseverar el valor de las coordenadas en $t = t_0 + \epsilon$. Lo anterior conlleva a que el concepto de trayectoria pierda completamente sentido, por lo

que es imposible tratar por separado a las partículas idénticas y con ello poder distinguirlas, en pocas palabras las partículas pierden su *individualidad* [28].

Es conocido en la literatura que en sistemas de partículas idénticas, la invariancia del hamiltoniano al aplicar el operador de transposición impone condiciones de simetría a las funciones de onda. Para el caso de partículas bosónicas cuyo espín es entero (0,1,2,...) y que obedecen la estadística de Bose-Einstein, se tiene que la función de onda permanece simétrica bajo la aplicación del operador de permutación. En cambio, es antisimétrica para partículas fermiónicas con espín semientero (1/2, 3/2, ...), las cuales obedecen la estadística de Fermi-Dirac y el *principio de exclusión* de Pauli [39].

Finalmente, se resumirá lo que se ha dicho hasta el momento en esta sección con un principio y un teorema conocidos en la literatura respectivamente como [15]

PRINCIPIO DE SIMETRIZACIÓN: *Los estados puros de un sistema de partículas idénticas deben ser totalmente simétricos o antisimétricos bajo el intercambio de cualesquiera de ellas.*

TEOREMA DE CONEXIÓN ESPÍN Y ESTADÍSTICA: *Los estados puros de un sistema de partículas idénticas son totalmente simétricos si su espín es entero y antisimétricos si su espín es semientero.*

3.2 Función de onda para dos partículas cuánticas idénticas

Debido a que se trata de un problema de partículas idénticas con una formulación no relativista, resulta esencial considerar la parte del espín en la función de onda que describe los estados del sistema. Sin embargo, en este trabajo se estudiará solo la parte de la función de onda correspondiente a las coordenadas.

Se considera nuevamente el problema de decaimiento planteado en la sección 2.1. La función de onda de la ecuación (2.1) extendida al caso de dos cuerpos se puede escribir en términos de la función de Green retardada y de la condición inicial $\Psi(y_1, y_2, 0)$ como [21]

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^a \int_0^a g(r_1, y_1, r_2, y_2, t) \Psi(\mathbf{y}, 0) dy_1 dy_2, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

donde \mathbf{r} denota (r_1, r_2) , las cuales son las posiciones de las partículas a un tiempo t . Por otro lado, \mathbf{y} denota (y_1, y_2) , las cuales son las posiciones iniciales de las partículas.

Como ya se mencionó en la sección anterior, en un sistema de dos partículas idénticas que no interactúan, el hamiltoniano conmuta con el operador de transposición, $[\hat{H}, \hat{P}_{1,2}] = 0$.

Esto implica que la simetría o antisimetría del estado inicial se conserva durante la evolución temporal.

En este capítulo se estudiará el caso particular cuando el hamiltoniano del sistema está dado por la siguiente expresión

$$H = H^{(1)} + H^{(2)}, \quad (3.2)$$

donde $H^{(j)}$ denota el hamiltoniano de una partícula individual. Así pues, la ecuación anterior permite escribir función de Green retardada de la siguiente manera

$$g(r_1, y_1, r_2, y_2, t) = g(r_1, y_1, t)g(r_2, y_2, t). \quad (3.3)$$

3.2.1 Función de onda simétrica factorizada

A continuación, se obtendrán expresiones analíticas para el caso cuando el estado inicial del sistema posee simetría factorizada

$$\Psi(\mathbf{y}, 0) = \psi_\alpha(y_1)\psi_\alpha(y_2). \quad (3.4)$$

Utilizando las ecuaciones (2.50), (3.1), (3.3) y (3.4) se puede expresar la función de onda en la región interna del potencial como [21]

$$\begin{aligned} \Psi_{int}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} C_{p, \alpha} C_{q, \alpha} u_p(r_1) u_q(r_2) M(z_p^0) M(z_q^0) \\ &= \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} C_{p, \alpha} u_p(r_1) M(z_p^0) \right) \left(\sum_{q=-\infty}^{\infty} C_{q, \alpha} u_q(r_2) M(z_q^0) \right), \quad \mathbf{r} \leq a. \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $C_{n, \alpha}$, con $n = p, q$, está dada por

$$C_{n, \alpha} \equiv \int_0^a u_n(y) \psi_\alpha(y) dy. \quad (3.6)$$

Por otro lado, utilizando las ecuaciones (2.65), (3.1), (3.3) y (3.4) se puede escribir la

función de onda en la región externa del potencial como

$$\begin{aligned}\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} C_{p, \alpha} C_{q, \alpha} u_p(a) u_q(a) M(z_p) M(z_q) \\ &= \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} C_{p, \alpha} u_p(a) M(z_p) \right) \left(\sum_{q=-\infty}^{\infty} C_{q, \alpha} u_q(a) M(z_q) \right), \quad \mathbf{r} \geq a, \quad (3.7)\end{aligned}$$

3.2.2 Función de onda espacial simétrica o antisimétrica enredada

El caso más interesante para el propósito de este trabajo, es cuando el estado inicial se encuentra en la siguiente configuración de enredamiento espacial

$$\Psi(\mathbf{y}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_{\alpha}(y_1) \Psi_{\beta}(y_2) \pm \Psi_{\beta}(y_1) \Psi_{\alpha}(y_2)]. \quad (3.8)$$

El signo \pm hace referencia a los casos cuando el estado inicial es simétrico enredado (+) o antisimétrico enredado (-).¹ Empleando las ecuaciones (2.50), (3.1), (3.3) y (3.8) se obtiene que la función de onda en la región interna del potencial está dada por la siguiente ecuación [21]

$$\Psi_{int}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} (C_{p, \alpha} C_{q, \beta} \pm C_{p, \beta} C_{q, \alpha}) u_p(r_1) u_q(r_2) M(z_p^0) M(z_q^0), \quad \mathbf{r} \leq a. \quad (3.9)$$

Por otra parte, utilizando las ecuaciones (2.65), (3.1), (3.3) y (3.8) se obtiene que la función de onda en la región externa se puede escribir como

$$\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} (C_{p, \alpha} C_{q, \beta} \pm C_{p, \beta} C_{q, \alpha}) u_p(a) u_q(a) M(z_p) M(z_q), \quad \mathbf{r} \geq a, \quad (3.10)$$

donde los coeficientes $C_{n, \beta}$ se obtienen intercambiando α por β en la ecuación (3.6).

¹No se debe confundir los estados de las partículas (α, β) con las componentes de los polos resonantes (α_p, β_p). En este trabajo se considerará que $\alpha \neq \beta$.

3.3 Desarrollo asintótico de la función de onda interna de dos partículas para tiempos largos

En esta sección se realizará un desarrollo de la función de onda en la región interna del potencial de interacción. Esto con el objetivo de obtener una fórmula analítica que permita estudiar el comportamiento de la densidad de probabilidad para tiempos largos. Para esto, se procederá a utilizar los desarrollos asintóticos mostrados en la sección 2.8 para extenderlos al caso de dos partículas idénticas.

3.3.1 Desarrollo asintótico para el caso de simetría factorizada

A continuación, se obtendrá un desarrollo asintótico para tiempos largos de la función de onda interna con simetría factorizada

$$\Psi_{int}(\mathbf{r}, t) = \psi_{\alpha}(r_1, t)\psi_{\alpha}(r_2, t). \quad (3.11)$$

Utilizando las ecuaciones (2.72) y (3.11) se puede escribir el desarrollo asintótico para tiempos largos como

$$\Psi_{int}(\mathbf{r}, t) \approx \sum_{p,q=1}^{\infty} C_{p,\alpha} C_{q,\alpha} u_p(r_1) u_q(r_2) e^{-i(\varepsilon_p + \varepsilon_q)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p + \Gamma_q)t} - \Phi_{int}(\mathbf{r}, t) \quad (3.12)$$

donde la función $\Phi_{int}(\mathbf{r}, t)$ es

$$\begin{aligned} \Phi_{int}(\mathbf{r}, t) = & \phi_{\alpha}(r_1, t) \sum_{q=1}^{\infty} C_{q,\alpha} u_q(r_2) e^{-i\kappa_q^2 t} \\ & + \phi_{\alpha}(r_2, t) \sum_{p=1}^{\infty} C_{p,\alpha} u_p(r_1) e^{-i\kappa_p^2 t} - \phi_{\alpha}(r_1, t)\phi_{\alpha}(r_2, t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

y

$$\phi_{\alpha}(r_m, t) = \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{f=1}^F \Gamma(f + 1/2) \left[\frac{C_{n,\alpha} u_n(r_m)}{(-iz_n^0)^{2f+1}} - \frac{C_{n,\alpha}^* u_n^*(r_m)}{(iz_{-n}^0)^{2f+1}} \right]. \quad (3.14)$$

El índice $m = 1, 2$, el índice $n = p, q$, donde $n = p$ cuando $m = 1$ y $n = q$ cuando $m = 2$.

3.3.2 Desarrollo asintótico para los casos de enredamiento espacial simétrico y antisimétrico

A continuación, se considera el caso cuando la función de onda interna tiene simetría enredada o antisimetría enredada. En este caso la función de onda se puede escribir como

$$\Psi_{int}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{\alpha}(r_1, t) \psi_{\beta}(r_2, t) \pm \psi_{\beta}(r_1, t) \psi_{\alpha}(r_2, t)]. \quad (3.15)$$

Usando las ecuaciones (2.72) y (3.15) se puede expresar el desarrollo a tiempos largos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Psi_{int}(\mathbf{r}, t) \approx & \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p,q=1}^{\infty} (C_{p,\alpha} C_{q,\beta} \pm C_{p,\beta} C_{q,\alpha}) u_p(r_1) u_q(r_2) e^{-i(\varepsilon_p + \varepsilon_q)t} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_p + \Gamma_q)t} \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_{\alpha,\beta}^{int}(\mathbf{r}, t) \pm \Phi_{\beta,\alpha}^{int}(\mathbf{r}, t)], \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha,\beta}^{int}(\mathbf{r}, t) = & \phi_{\alpha}(r_1, t) \sum_{q=1}^{\infty} C_{q,\beta} u_q(r_2) e^{-i\kappa_q^2 t} \\ & + \phi_{\beta}(r_2, t) \sum_{p=1}^{\infty} C_{p,\alpha} u_p(r_1) e^{-i\kappa_p^2 t} - \phi_{\alpha}(r_1, t) \phi_{\beta}(r_2, t). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para obtener la función $\Phi_{\beta,\alpha}^{int}(\mathbf{r}, t)$ solo se intercambian los subíndices en la ecuación anterior. Las funciones $\phi_s(r_m, t)$ están dadas por la siguiente expresión

$$\phi_s(r_m, t) = \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{f=1}^F \Gamma(f + 1/2) \left[\frac{C_{n,s} u_n(r_m)}{(-iz_n^0)^{2f+1}} - \frac{C_{n,s}^* u_n^*(r_m)}{(iz_{-n}^0)^{2f+1}} \right], \quad (3.18)$$

3.4 Probabilidades de supervivencia y de permanencia

De manera análoga al sistema de un cuerpo, se define la amplitud de supervivencia $A(t)$ para un sistema de dos partículas idénticas como [21]

$$A(t) = \int_0^a \int_0^a \Psi^*(r_1, r_2, 0) \Psi(r_1, r_2, t) dr_1 dr_2, \quad (3.19)$$

donde la probabilidad de supervivencia $S(t)$ está definida por la ecuación (2.75).

La probabilidad de permanencia $P(t)$ para dos partículas se define como [21]

$$P(t) = \int_0^a \int_0^a |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dr_1 dr_2. \quad (3.20)$$

3.4.1 Probabilidades para el caso de simetría factorizada

La amplitud de supervivencia $A(t)$ para el caso de simetría factorizada se obtiene utilizando las ecuaciones (3.5) y (3.19). Así pues, se tiene la siguiente expresión [32]

$$A(t) = \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} C_{p, \alpha}^2 C_{q, \alpha}^2 M(z_p^0) M(z_q^0), \quad t \geq 0. \quad (3.21)$$

En el Anexo C se muestra que también se puede escribir $A(t)$ como

$$A(t) = A_{\alpha}^{(1)}(t) A_{\alpha}^{(2)}(t) = A_{\alpha}^2(t). \quad (3.22)$$

A continuación, se hará un paréntesis para derivar las reglas de suma de los coeficientes $C_{n, \alpha}$. Para obtener estas relaciones, se utiliza la ecuación anterior en $t = 0$

$$A(0) = A_{\alpha}^{(1)}(0) A_{\alpha}^{(2)}(0) = 1. \quad (3.23)$$

Utilizando la ecuación anterior, la ecuación (3.21) y el hecho de que $M(z_n^0)_{t=0} = 1/2$, se obtiene la siguiente relación

$$\left[\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_{p, \alpha}^2 \right] \left[\frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_{q, \alpha}^2 \right] = 1. \quad (3.24)$$

Se puede observar en la ecuación anterior, que cada coeficiente $C_{n,\alpha}$ obedece una regla de suma similar a la que se muestra en la ecuación (2.56), es decir,

$$\Re \left[\sum_{p=1}^{\infty} C_{n,\alpha}^2 \right] = 1, \quad (3.25)$$

donde en este caso, se cumple que $C_{n,\alpha}$ y $\overline{C_{n,\alpha}}$ son iguales.

La probabilidad de permanencia se obtiene sustituyendo la ecuación (3.5) en la ecuación (3.20). De esta manera se puede escribir $P(t)$ como [32]

$$P(t) = \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} C_{p,\alpha} C_{q,\alpha} C_{i,\alpha}^* C_{j,\alpha}^* I_{p,i} I_{q,j} M(z_p^0) M(z_q^0) M^*(z_i^0) M^*(z_j^0), \quad t \geq 0, \quad (3.26)$$

donde

$$I_{p,i} \equiv \int_0^a u_p(r_1) u_i^*(r_1) dr_1, \quad I_{q,j} \equiv \int_0^a u_q(r_2) u_j^*(r_2) dr_2. \quad (3.27)$$

De forma similar a la ecuación (3.22), la probabilidad $P(t)$ se puede expresar como

$$P(t) = P_{\alpha}^{(1)}(t) P_{\alpha}^{(2)}(t). \quad (3.28)$$

3.4.2 Probabilidades para el caso de simetría o antisimetría enredada

La amplitud de supervivencia $A(t)$ para el caso de simetría o antisimetría enredadas se obtiene usando las ecuaciones (3.9) y (3.19). Así pues, se tiene la siguiente expresión [32]

$$A(t) = \frac{1}{2} \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} (C_{p,\alpha} C_{q,\beta} \pm C_{p,\beta} C_{q,\alpha})^2 M(z_p^0) M(z_q^0) \quad (3.29)$$

En el Anexo C se muestra que también se puede escribir $A(t)$ como

$$A(t) = A_{\alpha}(t) A_{\beta}(t) \pm A_{\alpha\beta}(t) A_{\beta\alpha}(t), \quad t \geq 0. \quad (3.30)$$

donde

$$A_{\alpha\beta}(t) = \int_0^a \psi_{\alpha}^*(r) \Psi_{\beta}(r,t) dr. \quad (3.31)$$

A continuación, se hará un paréntesis para derivar las reglas de suma de los coeficientes

$C_{n,s}$. Para obtener estas relaciones, se utiliza la ecuación anterior en $t = 0$

$$A(0) = A_\alpha(0)A_\beta(0) \pm A_{\alpha\beta}(0)A_{\beta\alpha}(0). \quad (3.32)$$

Utilizando la ecuación anterior y la ecuación (3.29) en $t = 0$, se obtiene la siguiente relación

$$\left[\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_{p,\alpha}^2 \right] \left[\frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_{q,\beta}^2 \right] + A_{\alpha\beta}(0)A_{\beta\alpha}(0) = 1. \quad (3.33)$$

donde

$$A_{\alpha\beta}(0)A_{\beta\alpha}(0) = \left[\int_0^a \Psi_\alpha^*(r,0)\Psi_\beta(r,0)dr \right] \left[\int_0^a \Psi_\beta^*(r,0)\Psi_\alpha(r,0)dr \right]. \quad (3.34)$$

Si el estado inicial de la ecuación anterior cumple con la propiedad de ortonormalidad. Entonces, la ecuación anterior es igual a cero. Así pues, se tiene que cada coeficiente $C_{n,s}$ obedece una regla de suma similar a la que se muestra en la ecuación (2.56), es decir,

$$\Re \left[\sum_{p=1}^{\infty} C_{n,s}^2 \right] = 1, \quad (3.35)$$

donde en este caso, se cumple nuevamente que $C_{n,s}$ y $\overline{C_{n,s}}$ son iguales.

Por otra parte, utilizando la ecuación (3.9) en la ecuación (3.20), se puede escribir la probabilidad de permanencia $P(t)$ como [32]

$$\begin{aligned} P(t) = & \frac{1}{2} \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} (C_{p,\alpha}C_{q,\beta} \pm C_{p,\beta}C_{q,\alpha}) (C_{i,\alpha}C_{j,\beta} \pm C_{i,\beta}C_{j,\alpha})^* \\ & \times I_{p,i}I_{q,j}M(z_p^0)M(z_q^0)M^*(z_i^0)M^*(z_j^0), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde $I_{p,i}$ e $I_{q,j}$ están dadas por la ecuación (3.27).

3.5 Ejemplo. El modelo de potencial δ para dos partículas idénticas

En este ejemplo se considera el problema del decaimiento de dos partículas idénticas confinadas inicialmente por el siguiente potencial

$$V(\mathbf{r}) = \lambda \delta(r_1 - a) + \lambda \delta(r_2 - a), \quad (3.37)$$

donde λ modula la intensidad del potencial y el parámetro a separa la regiones interna y externa del potencial. El estado inicial confinado de una partícula a $t = 0$ es

$$\psi_s(y) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{s\pi}{a}y\right) \Theta(a-y), \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (3.38)$$

donde $\Theta(x)$ es la función escalón de Heaviside, y s es el número de estado $s = \alpha, \beta$.

Cada partícula del sistema obedece una ecuación de Schrödinger como la ecuación (2.86). Asimismo, se tiene que los estados resonantes correspondientes a cada partícula poseen la forma de la ecuación (2.87). Por otro lado, realizando un procedimiento similar al problema de una partícula se obtiene que los coeficientes, A_n , están dados por

$$A_n = \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda a + e^{-2i\kappa_n a}}}, \quad (3.39)$$

donde $n = p, q$, mientras que los coeficientes $C_{n,s}$ están dados por

$$C_{n,s} = \int_0^a u_n(y) \psi_s(y) dy = \sqrt{\frac{\lambda a}{\lambda a + e^{-2i\kappa_n a}}} \left[\frac{2s\pi \sin(\kappa_n a) (-1)^s}{k_n^2 a^2 - s^2 \pi^2} \right]. \quad (3.40)$$

3.5.1 Caso de simetría factorizada

En la figura 3.1 se grafica $\ln[|\Psi_{int}(\mathbf{r}, t)|^2]$ para tres diferentes valores de \mathbf{r} , donde para cada caso existen pequeñas oscilaciones para tiempos cortos. Después, existe una parte exponencial con pendiente $m = -2\Gamma_1$, seguido de una región de interferencia entre la parte exponencial y no exponencial, y por último, se puede observar un régimen que decae como t^{-6} .

En la figura 3.2 se muestra una ampliación del régimen de tiempos cortos de la figura 3.1. En esta gráfica se observa que las líneas punteadas se traslapan con las líneas sólidas, a excepción de los valores ultracortos del tiempo. Esto se debe a que la aproximación asintótica diverge cuando $t \rightarrow 0$. Asimismo, los puntos de colores se situaron para corroborar la concordancia entre las líneas sólidas y los valores de las condiciones iniciales.

En la figura 3.3 se grafica $\ln[S(t)]$, obtenida mediante la amplitud de supervivencia, $A(t)$, dada por la ecuación (3.22), para el caso de $\alpha = 1$. En esta gráfica se observan dos líneas, la de color rojo es la contribución no exponencial de $S(t)$ y la de color azul es $S(t)$. Así pues, se pueden apreciar las contribuciones exponencial y no exponencial de $S(t)$.

En la figura 3.4 se grafica $\ln[|\Psi_{ext}(r, t)|^2]$. En este caso aparecen en la densidad de probabilidad dos frentes de onda, los cuales quedan indicados con los puntos rojos. En la parte izquierda del primer frente de onda se observan algunas oscilaciones, las cuales son producto de las contribuciones de estados resonantes con mayor energía. En la parte derecha del segundo frente de onda se observa un régimen exponencial, el cual se traslapa con la línea azul con una pendiente de $m = -0.0129483$, la cual es $m \neq -2\Gamma_1$. Después, existe una zona de interferencia entre la contribución exponencial y una contribución no exponencial, y por último, se observa que para tiempos largos existe un régimen de decaimiento no exponencial.

Para conocer la ley de decaimiento del último régimen de la figura 3.4, se ajustó una línea roja dada por la función $f(t) = -6\ln(t) + 9.15$, donde el coeficiente -6 significa que para tiempos largos el sistema obedece una ley de decaimiento como t^{-6} .

En la figura 3.4 también se observa una área entre los dos frentes de onda, en el cual se forma una región cóncava con algunas interferencias. Los picos de estas interferencias están marcados por tres puntos azules. Estas interferencias proceden de los tres primeros estados resonantes excitados asociados con la partícula en la posición r_2 . En otras palabras, las localizaciones temporales de los picos de estas interferencias se pueden estimar calculando los tiempos como $t_i = r_2/2\alpha_i$, donde $i = 2, 3, 4$.

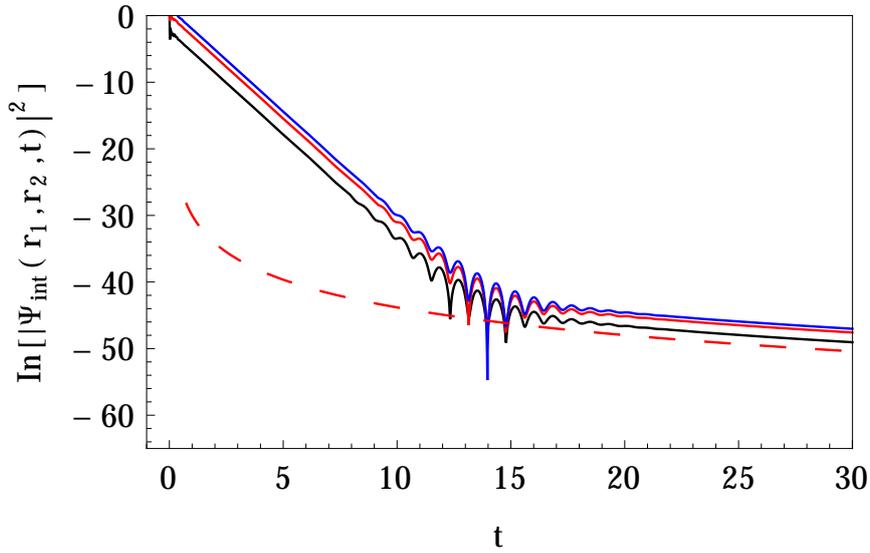


FIG. 3.1 Gráfica de $\ln[|\Psi_{\text{int}}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.12); con parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$ y $\alpha = 1$, para los valores de $\mathbf{r} = (0.1, 0.9)$ (línea negra), $\mathbf{r} = (0.25, 0.75)$ (línea roja) y $\mathbf{r} = (0.45, 0.55)$ (línea azul). La línea punteada está dada por la función $f(t) = -6\ln(t) - 30.0$. Se utilizaron 50 polos para realizar el cálculo. C cantidades importantes del sistema son: $\Gamma_1 = 0.011894$, $\tau_1 = 84.076004708$, $\varepsilon_1 = 9.13 \times 10^{-7}$ y $\kappa_1 = 3.11052682 - i0.00095614$.

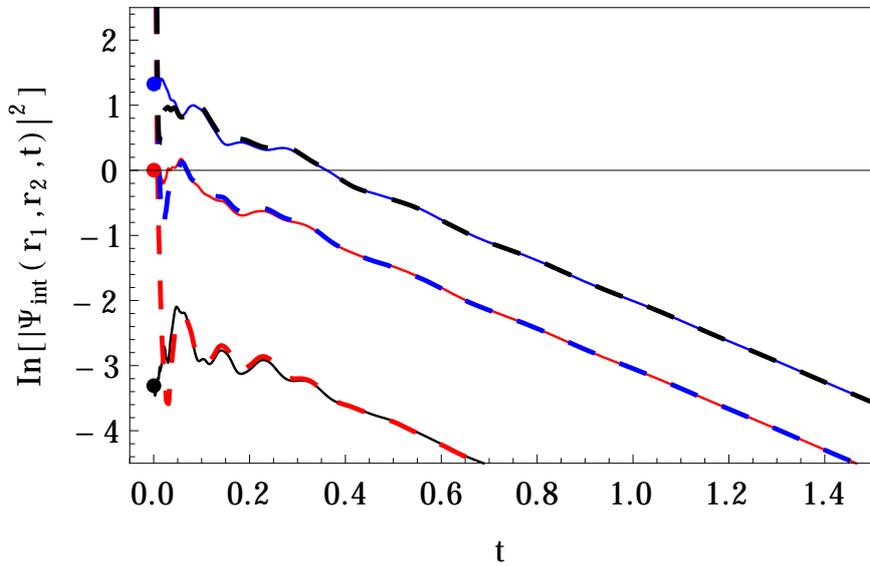


FIG. 3.2 Se muestra una ampliación de la figura 3.1 para tiempos cortos. Las líneas punteadas son calculadas con la ecuación (3.12), las líneas sólidas a partir la ecuación (3.5), y por último, los puntos de colores a partir de la condición inicial, *i.e.*, usando las ecuaciones (3.4) y (3.38). Se utilizaron 50 polos para realizar el cálculo.

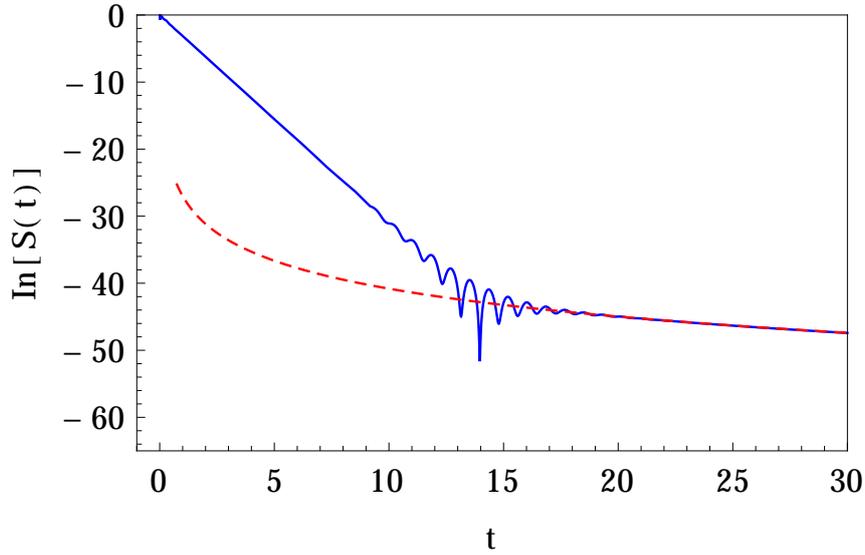


FIG. 3.3 Gráfica de $\ln[S(t)]$ a partir de la ecuación (3.22); con valores de $\alpha = 1$ y $\lambda = 100$. La línea punteada roja es $g(t) = -6\ln(t) - 27.0$. Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo.

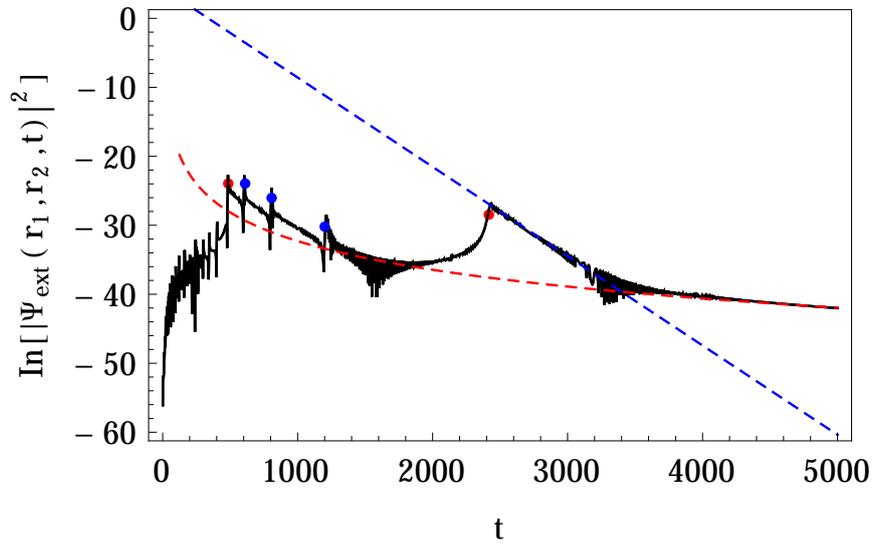


FIG. 3.4 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(r,t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.7); con valores de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. El primer punto rojo (de izquierda a derecha) es $\ln[|\Psi_{ext}(r_1, t_0^{(1)} = r_1/2\alpha_1)|^2]$, mientras que el segundo punto rojo es $\ln[|\Psi_{ext}(r_2, t_0^{(2)} = r_2/2\alpha_1)|^2]$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -6\ln(t) + 9.15$; con ello se conoce que el sistema decae a tiempos largos como t^{-6} . La línea punteada azul es la función $g(t) = -0.0129483t + 4.36544$. Los puntos azules (de derecha a izquierda) se localizan en los tiempos $t_i = r_2/2\alpha_i$, donde $i = 2, 3, 4$. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo.

3.5.2 Caso de simetría espacial enredada

En la figura 3.5 se grafica $\ln[|\Psi_{int}(\mathbf{r}, t)|^2]$ usando los valores de $\alpha = 1$, $\beta = 2$. En esta gráfica se observa la transición entre el régimen exponencial y no exponencial de la densidad de probabilidad. Similarmente que en la figura 3.1, se observa que existen oscilaciones para tiempos cortos. Sin embargo, en este caso las oscilaciones son más pronunciadas. También se aprecia un régimen exponencial con pendiente $m \approx -(\Gamma_1 + \Gamma_2)$, seguido por una zona de interferencia entre la parte exponencial y la parte no exponencial, y por último, un régimen que obedece una ley de decaimiento como t^{-6} .

La diferencia entre las figuras 3.1 y 3.5 se aprecia en el régimen de tiempos largos. Esto se debe a que el sistema de una partícula decae para tiempos largos como t^{-3} .

En la figura 3.6 se realiza una ampliación de la figura 3.5 para tiempos cortos. En esta gráfica se aprecia que entre más próximas estén las posiciones de las partículas, en general, la densidad de probabilidad toma valores mayores.

En la figura 3.7 se grafica $\ln[S(t)]$ utilizando los valores de $\alpha = 1$ y $\beta = 2$. En esta gráfica se observan dos líneas. La línea punteada de color rojo corresponde a la contribución no exponencial de $S(t)$, mientras que la línea de color azul es $S(t)$. Así pues, se pueden observar las contribuciones exponencial y no exponencial de la probabilidad de supervivencia.

En la figura 3.8 se grafica $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ usando los valores de $\alpha = 1$ y $\beta = 2$. Similarmente que en la figura 3.4, en esta gráfica se aprecia que existen dos frentes de onda. En la parte izquierda del primer frente de onda se observan oscilaciones, las cuales son producto de las contribuciones de estados resonantes con mayor energía. En la parte derecha del segundo frente de onda se observa un régimen exponencial. Después, existe una zona de interferencia entre la contribución exponencial y una contribución no exponencial, y por último, se observa un régimen de decaimiento con una contribución no exponencial.

Para conocer la ley de decaimiento del último régimen de la figura 3.8, se ajustó una línea roja dada por la función $f(t) = -6\ln(t) + 8.25$, donde el coeficiente -6 significa que para tiempos largos el sistema decae como t^{-6} . Por otro lado, similarmente que en la figura 3.4, en el área entre los dos frentes de onda de la densidad de probabilidad, se puede observar que se forma una región con algunas interferencias, las cuales provienen de los tres primeros estados resonantes excitados asociados con la partícula en la posición r_2 .

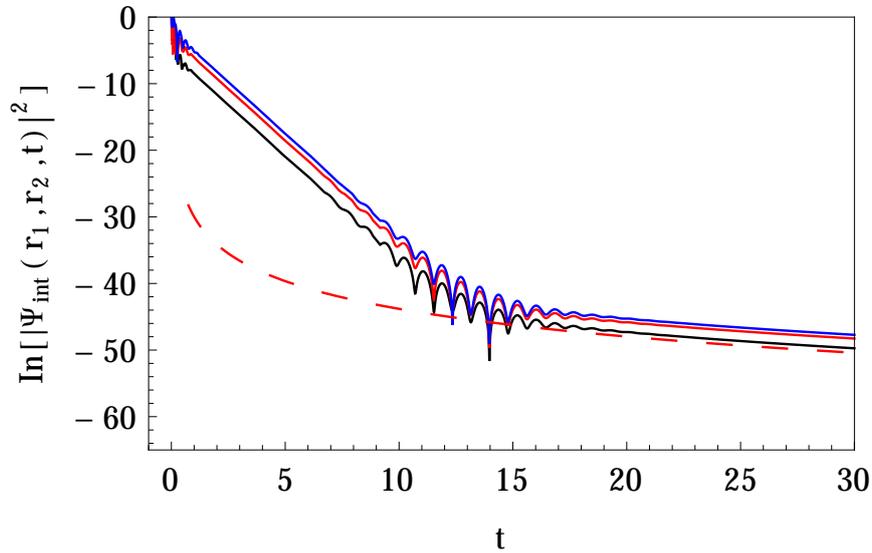


FIG. 3.5 Gráfica de $\ln[|\Psi_{\text{int}}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.16); con parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$. La línea negra es con $\mathbf{r} = (0.1, 0.9)$, la línea roja con $\mathbf{r} = (0.25, 0.75)$ y la línea azul con $\mathbf{r} = (0.45, 0.55)$. La línea punteada roja es la función $g(t) = -6\ln(t) - 30.0$.

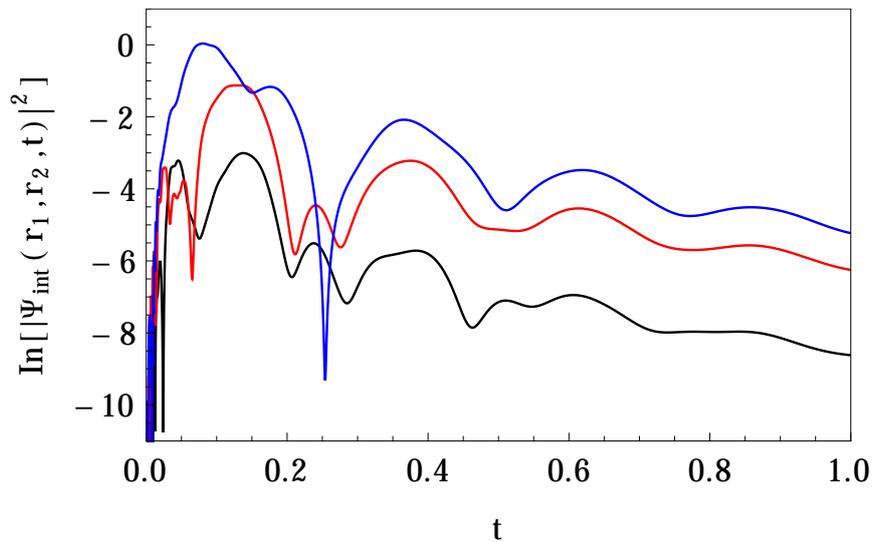


FIG. 3.6 Se muestra una ampliación de la figura 3.5 para tiempos cortos usando la ecuación (3.9).

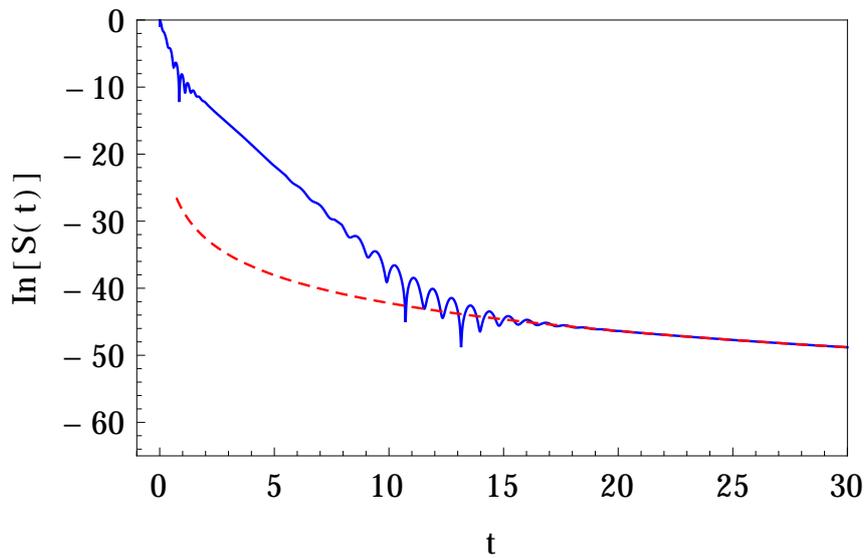


FIG. 3.7 Gráfica de $\ln[S(t)]$ a partir de la ecuación (3.30); con parámetros de $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\lambda = 6$. La línea punteada es $g(t) = -6\ln(t) - 28.4$. Se utilizaron 100 polos para realizar el cálculo.

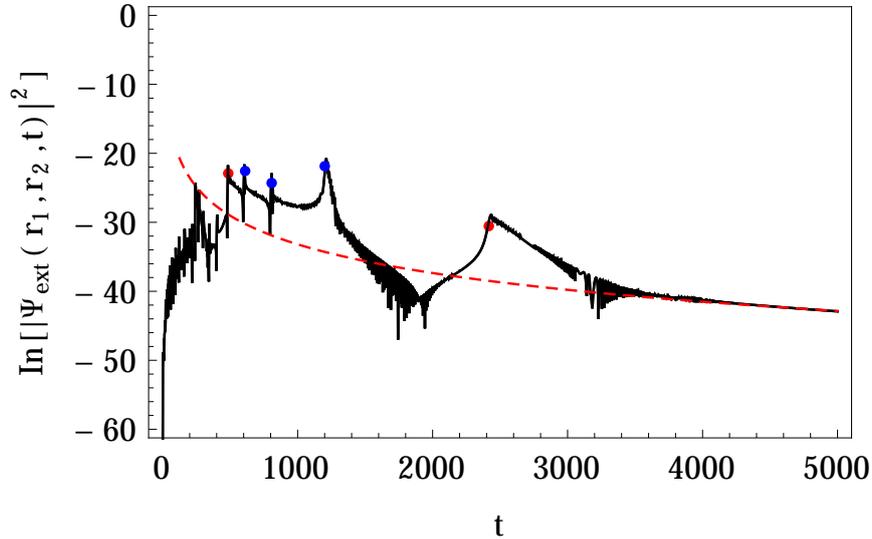


FIG. 3.8 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. El primer punto rojo (de izquierda a derecha) es $\ln[|\Psi_{ext}(r_1, t_0^{(1)} = r_1/2\alpha_1)|^2]$, mientras que el segundo punto rojo es $\ln[|\Psi_{ext}(r_2, t_0^{(2)} = r_2/2\alpha_1)|^2]$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -6\ln(t) + 8.25$; con ello se conoce que el sistema decae a tiempos largos como t^{-6} . Los puntos azules (de derecha a izquierda) se localizan en los tiempos $t_i = r_2/2\alpha_i$, donde $i = 2, 3, 4$. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo.

En la figura 3.9 se grafica $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ utilizando los valores de $\alpha = 1$ y $\beta = 6$. Es decir, la diferencia entre α y β es más grande con respecto al caso de la figura 3.8. Así pues, los cambios en los valores de los estados cuánticos produce que el primer frente de onda se eleve con respecto al segundo frente de onda. En otras palabras, el pico del primer frente de onda se sitúa en un valor con mayor probabilidad en comparación con el valor que obtiene el pico del segundo frente de onda. No obstante, las características generales de las contribuciones de la densidad de probabilidad mostradas en la figura 3.8 siguen permaneciendo.

En la figura 3.10 se grafica $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ usando los valores de $\alpha = 1$ y $\beta = 10$. En esta gráfica casi no se observan cambios significativos en la densidad de probabilidad con respecto a la figura 3.9. Sin embargo, las oscilaciones que se localizan en la parte izquierda del primer frente de onda, se recorrieron hacia la parte superior de la gráfica.

En la figura 3.11 se grafica el $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ utilizando los valores de $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\mathbf{r} = (3000, 10000)$. Es decir, las posiciones de las partículas son más próximas en comparación con las tres figuras anteriores. En esta gráfica se observa que el segundo frente de onda se recorre hacia la parte izquierda de la figura. Además, se aprecia en la región que se encuentra entre los dos frentes de onda aparece una interferencia muy pronunciada.

En la figura 3.12 se grafica el $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ usando los valores de $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\mathbf{r} = (3000, 3000)$. Es decir, en esta figura ambas partículas comparten la misma posición. En esta gráfica se observa que se forma un solo frente de onda. Asimismo, se puede observar una interferencia muy notable antes del frente de onda.

En la figura 3.13 se muestra qué ocurre en la densidad de probabilidad de la región externa, si se cambian los valores de las posiciones de las partículas para un tiempo fijo. En esta gráfica se observa que la densidad de probabilidad refleja máximos y mínimos.

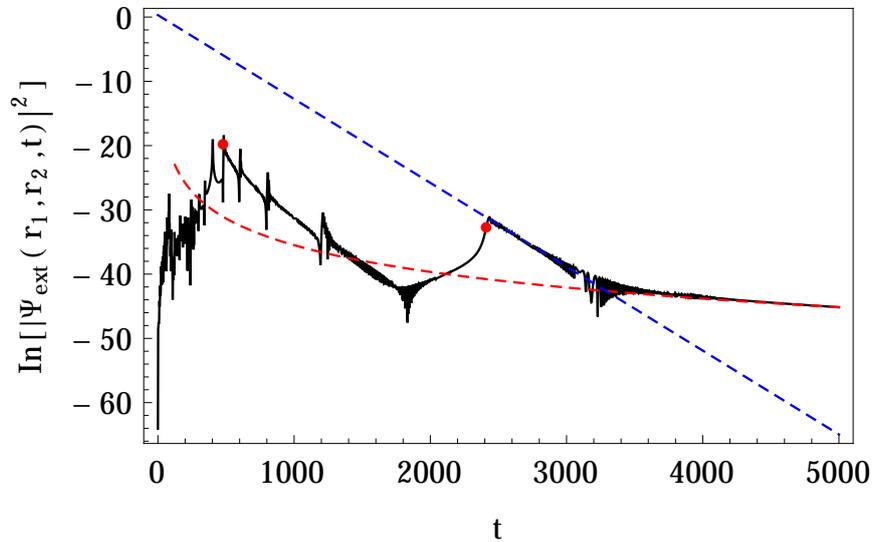


FIG. 3.9 Gráfica de $\ln[|\Psi_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -6\ln(t) + 5.95$; con ello se conoce que el sistema decae a tiempos largos como t^{-6} . La línea punteada azul es la función $g(t) = -0.0130513t + 0.305487$. Se utilizaron 1,500 polos para realizar el cálculo.

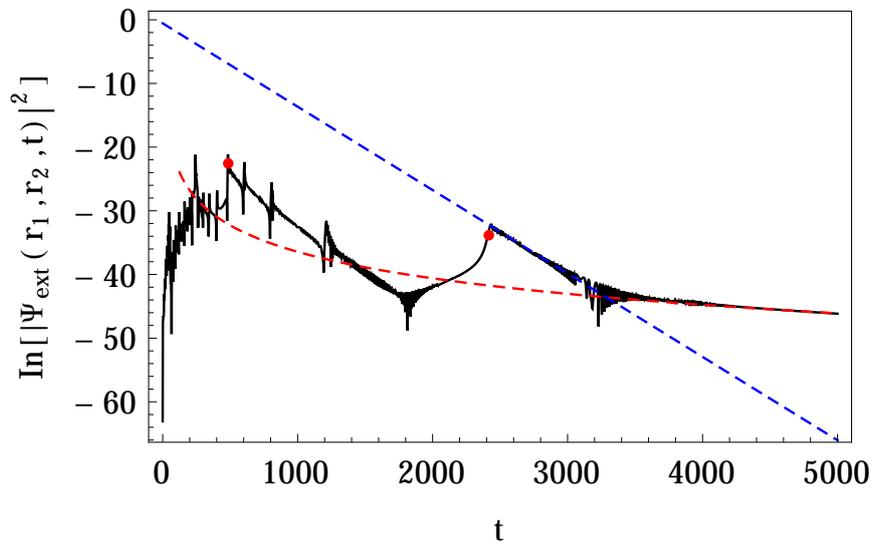


FIG. 3.10 Se grafica el caso anterior, pero ahora con los valores de $\alpha = 1$, $\beta = 10$. La línea roja punteada es $f(t) = -6\ln(t) - 5.0$, mientras que la línea azul es $g(t) = -0.0130961t - 0.556441$.

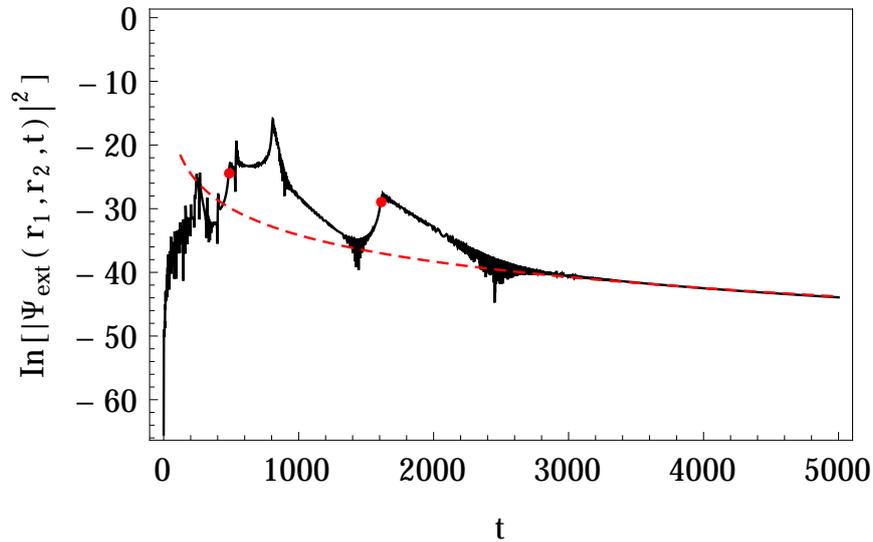


FIG. 3.11 Gráfica de $\ln[|\Psi_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\mathbf{r} = (3000, 10000)$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -6\ln(t) + 7.3$. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo.

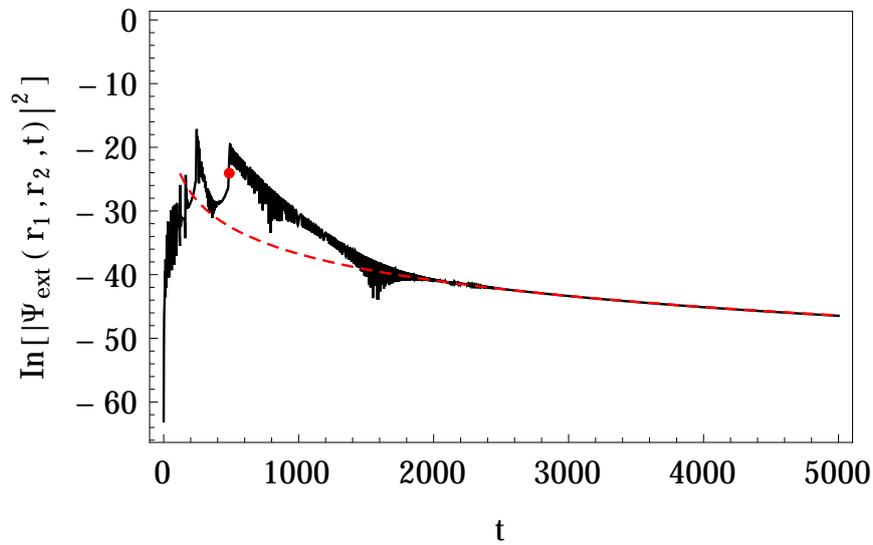


FIG. 3.12 Se grafica el caso anterior utilizando el valor de $\mathbf{r} = (3000, 3000)$. La línea roja es $f(t) = -6\ln(t) + 4.7$.

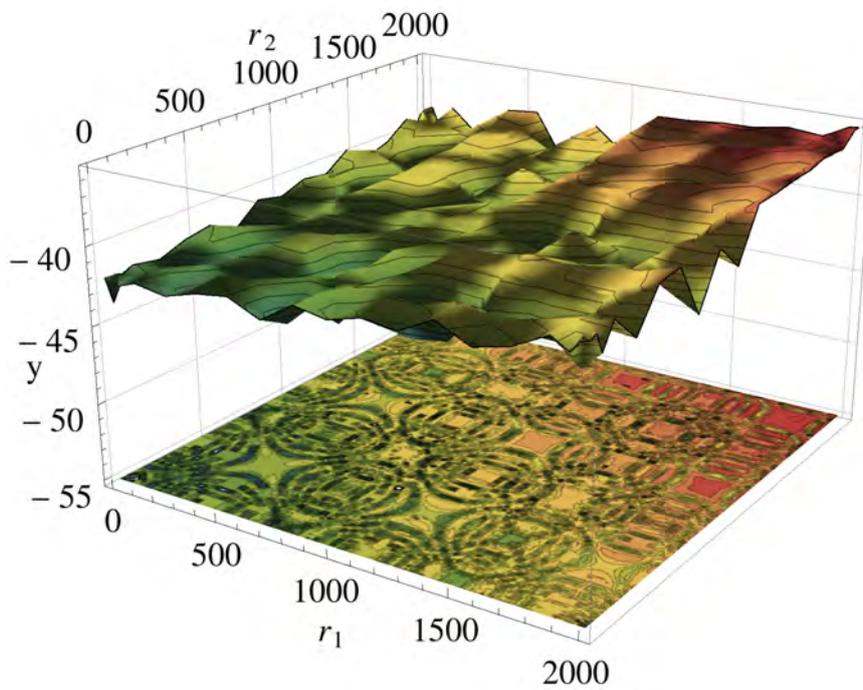


FIG. 3.13 Se grafica $y = \ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t = 1000)|^2]$ para el caso de *simetría espacial enredada*, donde los valores que pueden tomar las posiciones son: $r_1 = [1, 2000]a$ y $r_2 = [1, 2000]a$. Para esto, se utilizó la ecuación (3.10); con los parámetros de $\alpha = 1$ y $\beta = 6$.

3.5.3 Caso de antisimetría espacial enredada

En la figura 3.14 se grafica el $\ln[|\Psi_{int}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.16) utilizando los valores de $\alpha = 1$ y $\beta = 2$. En esta gráfica se muestran tres casos para diferentes posiciones de las partículas. En cada caso se observa que existe un régimen exponencial para tiempos cortos. Después, se aprecia una pequeña zona de interferencia, seguido de otro régimen exponencial, posteriormente se observa una nueva zona de interferencia, y por último, se observa un régimen de tiempos largos que decae como t^{-10} .

La diferencias entre las figuras 3.5 y 3.14 son las siguientes: la primera diferencia es que en la figura 3.14 aparece una zona más de decaimiento exponencial con respecto a la figura 3.5. La segunda diferencia es que ambos sistemas, con simetría enredada y con antisimetría enredada, poseen distintas leyes de decaimiento para el régimen de tiempos largos, las cuales ya fueron mencionadas.

En la figura 3.15 se realiza una ampliación de la figura 3.14 para tiempos cortos a partir de la ecuación (3.9). En esta gráfica, a diferencia de la figura 3.6, la línea roja se encuentra por encima de las líneas negra y azul. En otras palabras, cuando las posiciones de las partículas poseen una separación intermedia en comparación con los otros dos casos, la densidad de probabilidad obtiene valores mayores en la evolución temporal para tiempos cortos.

En la figura 3.16 se grafica $\ln[S(t)]$ usando los valores de $\alpha = 1$ y $\beta = 2$. En esta gráfica se observan dos líneas, la línea punteada de color rojo corresponde a la contribución no exponencial de $S(t)$ y la línea de color azul corresponde a $S(t)$. Como se puede observar en esta figura, las contribuciones exponencial y no exponencial, son semejantes a las contribuciones mostradas en la figura 3.14.

En la figura 3.17 se grafica $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ utilizando los valores de $\alpha = 1$ y $\beta = 2$. Esta figura es similar a las figuras 3.4 y 3.8. Esto, con respecto al comportamiento de las contribuciones en la evolución temporal.

En la gráfica de la figura anterior, se pueden apreciar dos frentes de onda. En la parte izquierda del primer frente de onda se observan oscilaciones, las cuales son producto de las contribuciones de estados resonantes con mayor energía. En la parte derecha del segundo frente de onda se observa un régimen exponencial con una pendiente de $m = -0.0129483$.

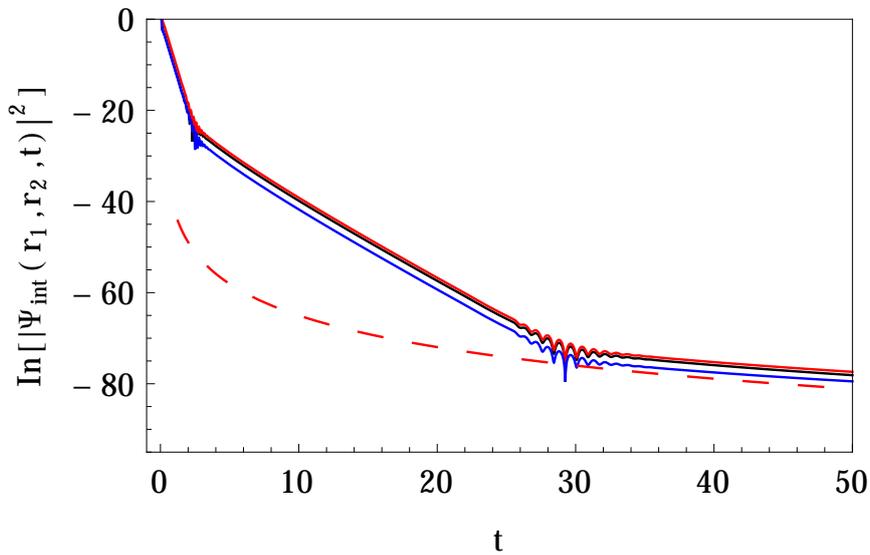


FIG. 3.14 Gráfica de $\ln[|\Psi_{\text{int}}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.16); con parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\mathbf{r} = (0.1, 0.9)$ (línea negra), $\mathbf{r} = (0.25, 0.75)$ (línea roja) y $\mathbf{r} = (0.45, 0.55)$ (línea azul). La línea roja punteada es $f(t) = -10\ln(t) - 42.0$. Se utilizaron 50 polos para realizar el cálculo. Cantidades importantes del sistema son: $\Gamma_1 = 0.011894$, $\tau_1 = 84.076004708$, $\varepsilon_1 = 9.13 \times 10^{-7}$ y $\kappa_1 = 3.11052682 - i0.00095614$.

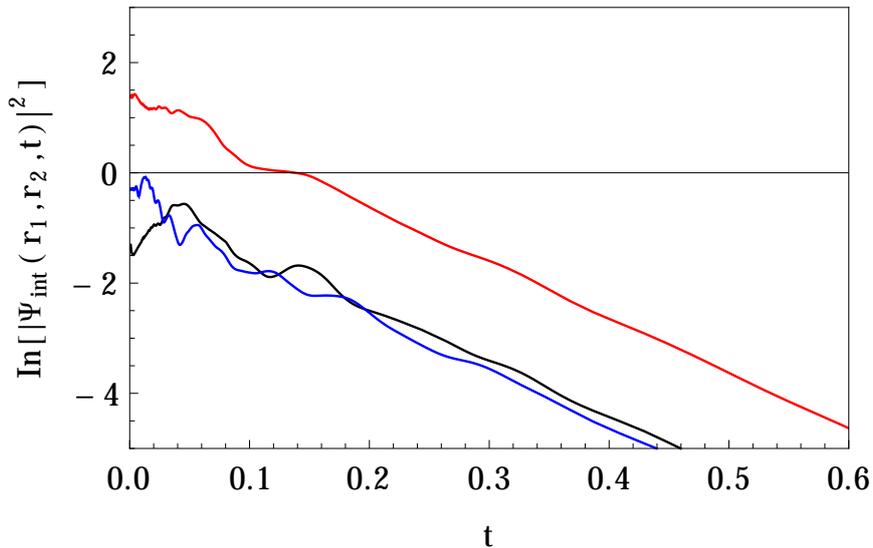


FIG. 3.15 Se muestra una ampliación de la gráfica anterior para tiempos cortos a partir de la ecuación (3.9). Se utilizaron 50 polos para realizar el cálculo.

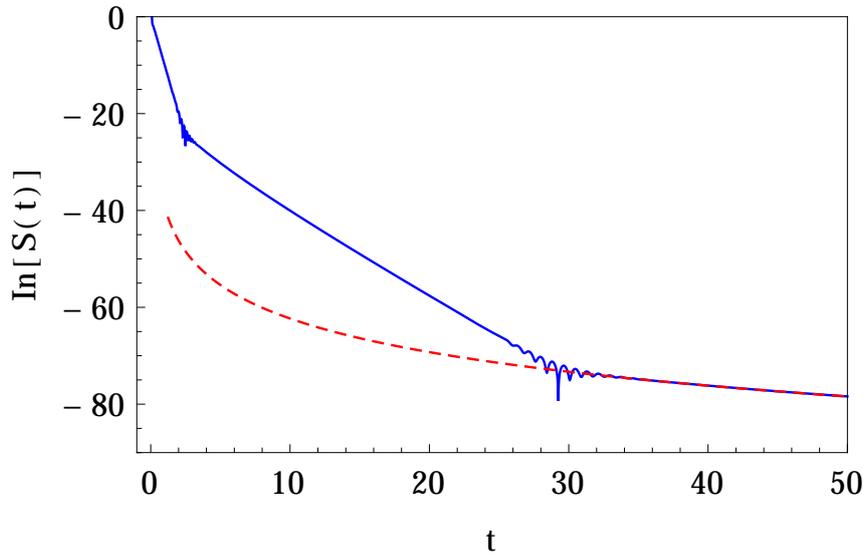


FIG. 3.16 Gráfica de $\ln[S(t)]$ a partir de la ecuación (3.30); con los parámetros $\lambda = 6$, $a = 1$, $\alpha = 1$ y $\beta = 2$. La línea punteada roja es la función $f(t) = -10\ln(t) - 39.3$. Se utilizaron 50 polos para realizar el cálculo.

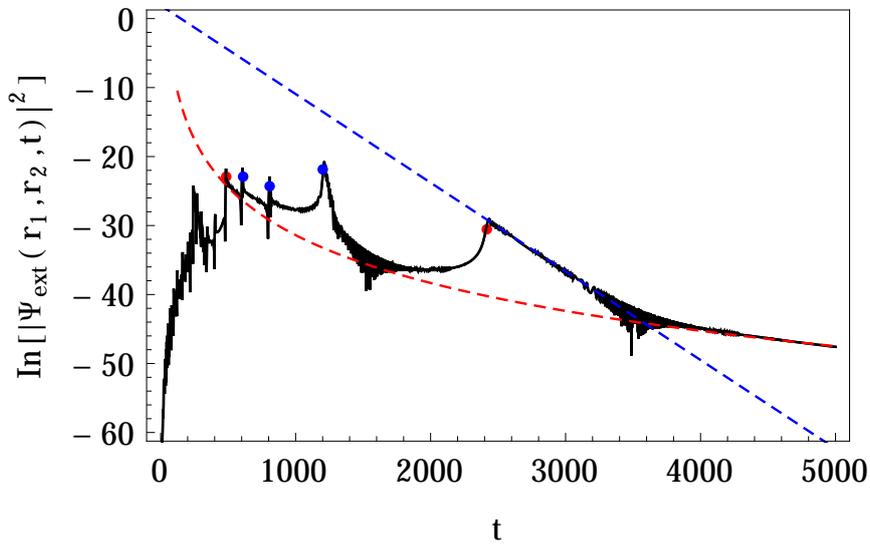


FIG. 3.17 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. El primer punto rojo (de izquierda a derecha) es $\ln[|\Psi_{ext}(r_1, t_0^{(1)} = r_1/2\alpha_1)|^2]$, mientras que el segundo punto rojo es $\ln[|\Psi_{ext}(r_2, t_0^{(2)} = r_2/2\alpha_1)|^2]$. Por otra parte, la línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -10\ln(t) + 37.68$. La línea azul es $g(t) = -0.0128535t + 1.91805$. Los puntos azules (de derecha a izquierda) se localizan en los tiempos $t_i = r_2/2\alpha_i$, donde $i = 2, 3, 4$. Se utilizaron 1500 polos para realizar el cálculo.

Después, se observa una zona de interferencia entre la contribución exponencial y una contribución no exponencial, por último, en el régimen de tiempos largos, el sistema decae como t^{-10} . Por otro lado, las interferencias que aparecen en la zona entre los dos frentes de onda son producto de las contribuciones de los tres primeros estados resonantes excitados.

En la figura 3.18 se grafica $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r},t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10) utilizando los valores de $\alpha = 1$ y $\beta = 6$. En general, las contribuciones en la evolución temporal son semejantes a las contribuciones que se muestran en la figura 3.17. En la figura 3.19 sucede algo parecido, pero en este caso se utilizaron los valores de $\alpha = 1$ y $\beta = 10$.

En las figuras 3.18 y 3.19 se puede observar que cambiar los valores de los estados cuánticos α y β , produce que el primer frente de onda se eleve con respecto al segundo frente de onda, similarmente a lo que sucede en la figura 3.9.

En la figura 3.20 se grafica $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r},t)|^2]$ utilizando $\alpha = 1$ y $\beta = 2$. En este caso se consideró que $\mathbf{r} = (3000, 5000)$. En la figura 3.21 sucede algo similar, *i.e.*, se consideró que $\mathbf{r} = (3000, 3000.1)$. En ambas figuras se aprecian cambios en la densidad de probabilidad en comparación con las gráficas anteriores. Particularmente, en la región intermedia de los dos frentes de onda. En la figura 3.20 esta región se redujo, mientras que en la figura 3.21 los picos de los dos frentes de onda se encuentran prácticamente superpuestos.

En la figura 3.22 se grafica $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r},t)|^2]$ utilizando los valores de $\alpha = 1$, $\beta = 6$ y $\lambda = 100$. En la Fig 3.23 sucede algo similar, en este caso se utilizó el valor de $\lambda = 50$. En ambas gráficas se realizó una comparación entre los sistemas de bosones y fermiones. Las líneas rojas corresponden al sistema de fermiones y las líneas azules al sistema de bosones. Así pues, en las figuras 3.22 y 3.23 se puede observar que existen regiones donde es imposible diferenciar entre ambos sistemas. No obstante, en la región intermedia de los dos frentes de onda, la línea azul se ubica por debajo de la línea roja. Por otro lado, también se pueden distinguir las líneas sobre el régimen asintótico de tiempos largos.

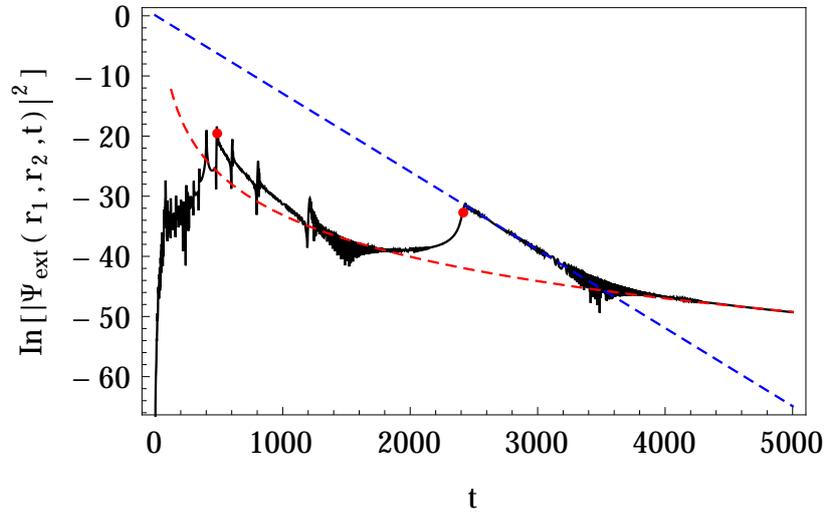


FIG. 3.18 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -10\ln(t) + 35.95$. La línea azul es $g(t) = -0.0129972t + 0.0770308$. Se utilizaron 1500 polos para realizar el cálculo.

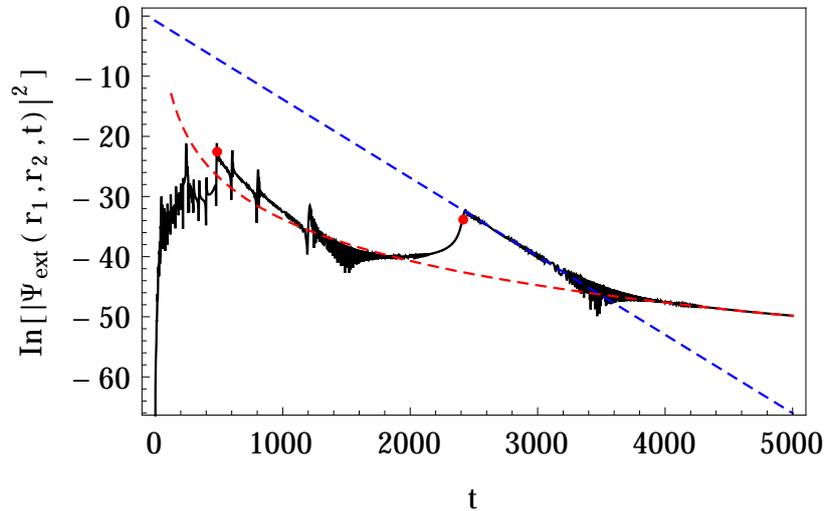


FIG. 3.19 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 10$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. La línea punteada roja es $f(t) = -10\ln(t) + 35.3$. La línea punteada azul es $g(t) = -0.0130495t - 0.788077$.

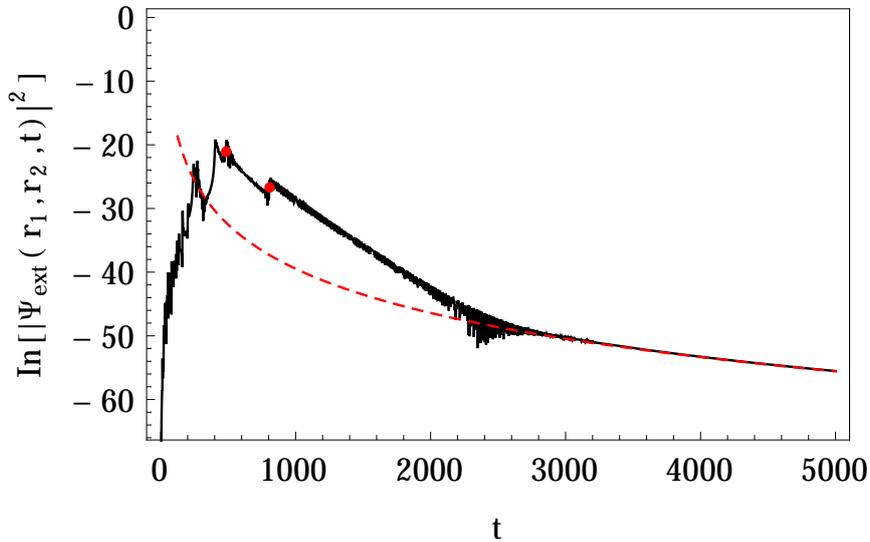


FIG. 3.20 Gráfica para el caso de fermiones de $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\mathbf{r} = (3000, 5000)$. La línea punteada roja está dada por la expresión $f(t) = -10\ln(t) + 29.6$. Se utilizaron 1500 polos para realizar el cálculo.

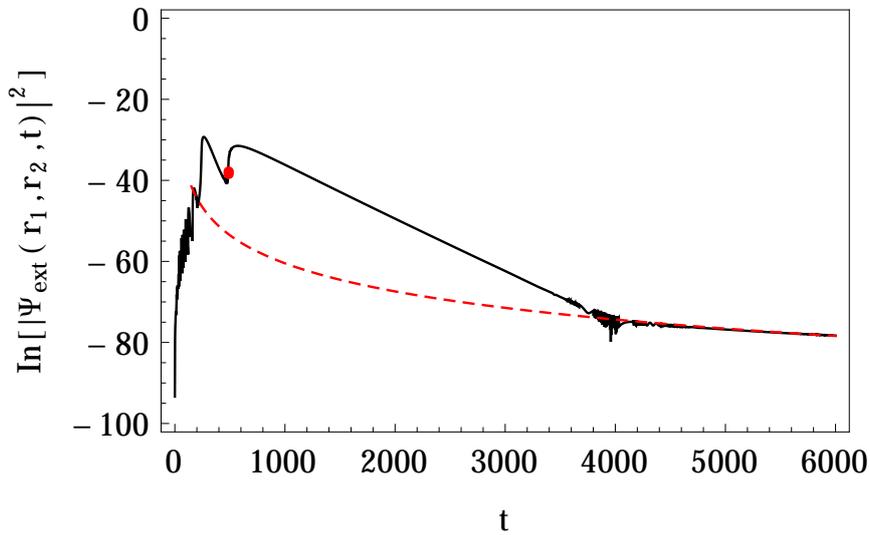


FIG. 3.21 Gráfica para el caso de fermiones de $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\mathbf{r} = (3000, 3000.1)$. La línea punteada roja es $f(t) = -10\ln(t) + 8.6$.

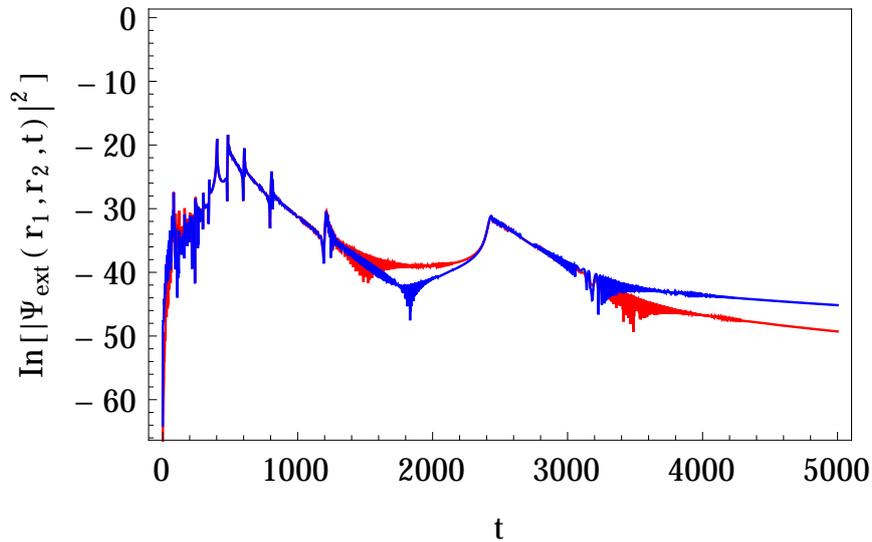


FIG. 3.22 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. Línea azul corresponde al caso de simetría enredada, y la línea roja corresponde al caso de antisimetría enredada.

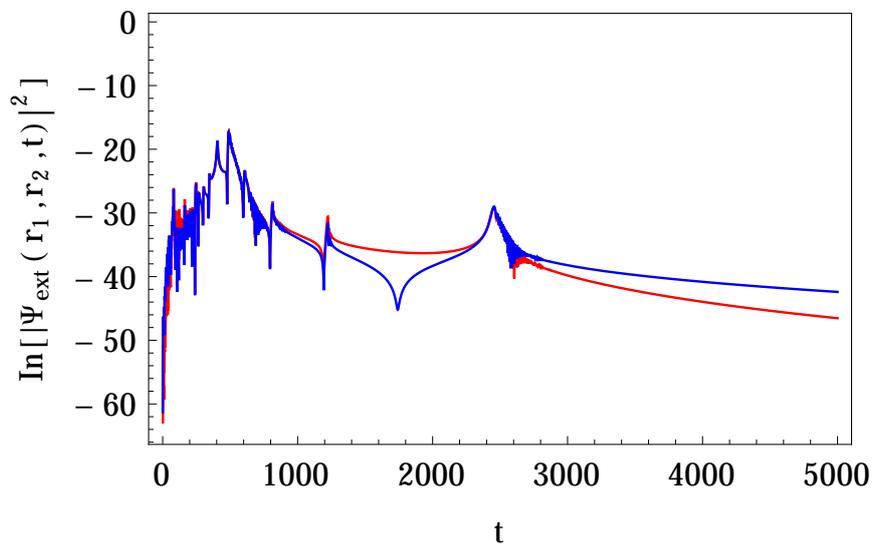


FIG. 3.23 Gráfica de $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10); con parámetros de $\lambda = 50$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. Línea azul corresponde al caso de simetría enredada, y la línea roja corresponde al caso de antisimetría enredada.

Para explicar las figuras 3.24 y 3.25 es necesario hacer el siguiente paréntesis. La densidad de probabilidad para el caso con enredamiento espacial se puede escribir como

$$|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_\alpha(r_1, t)\Psi_\beta(r_2, t) \pm \Psi_\beta(r_1, t)\Psi_\alpha(r_2, t)] \right|^2. \quad (3.41)$$

Así pues, se procede a realizar la operación del módulo al cuadrado que aparece en la ecuación anterior, de esta manera se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} |\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t)|^2 &= \frac{1}{2} |\Psi_\alpha(r_1, t)\Psi_\beta(r_2, t)|^2 + \frac{1}{2} |\Psi_\beta(r_1, t)\Psi_\alpha(r_2, t)|^2 \\ &\quad \pm \Re[\Psi_\alpha(r_1, t)\Psi_\beta(r_2, t)\Psi_\beta^*(r_1, t)\Psi_\alpha^*(r_2, t)], \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde el último término se suma para bosones o se resta para fermiones.²

En la figura 3.24 se grafican las componentes, y_n , correspondientes a la ecuación (3.42), para el valor de $\lambda = 100$. En la figura 3.25 sucede algo semejante, pero en este caso se utilizó el valor de $\lambda = 50$. En ambas gráficas se observan las contribuciones de la densidad de probabilidad que dan origen a los dos frentes de onda.

En las figuras 3.24 y 3.25 se puede observar que cuando en y_1 se crea un frente de onda, y_2 se mantiene por debajo de y_1 y viceversa. En otras palabras, los frentes de onda se asocian a la posición de la partícula con el estado cuántico de mayor vida media. Por otra parte, la componente y_3 , la cual corresponde al término de interferencia, evoluciona en el tiempo de tal forma que refleja características de las primeras dos componentes. Sin embargo, en la región intermedia entre los dos frentes de ondas y en el régimen de tiempos largos, la contribución de la componente y_3 es relevante, por esta razón los sistemas de bosones y fermiones se pueden distinguir en estas regiones de la evolución temporal.

²Se denota como $y_1 = \text{In}[\frac{1}{2}|\Psi_\alpha(r_1, t)\Psi_\beta(r_2, t)|^2]$, $y_2 = \text{In}[\frac{1}{2}|\Psi_\beta(r_1, t)\Psi_\alpha(r_2, t)|^2]$, y finalmente $y_3 = \text{In}[\Re[\Psi_\alpha(r_1, t)\Psi_\beta(r_2, t)\Psi_\beta^*(r_1, t)\Psi_\alpha^*(r_2, t)]]$.

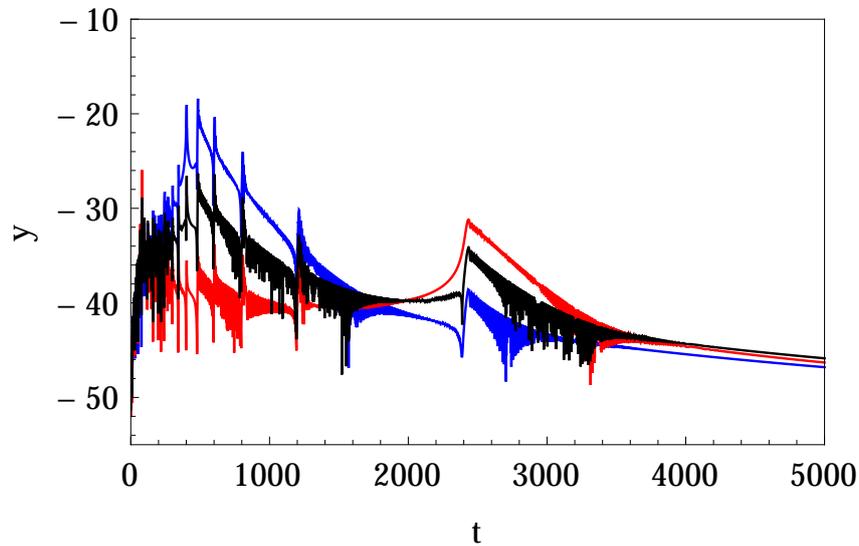


FIG. 3.24 Usando la ecuación (3.10) se gráfican los siguientes casos y_1 (línea azul), y_2 (línea roja), y y_3 (línea negra). Donde y_1 , y_2 y y_3 se definen en el pie de la página 59. Los parámetros que se usaron en la gráficas son: $\lambda = 100$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. Se utilizaron 1500 polos para realizar el cálculo.

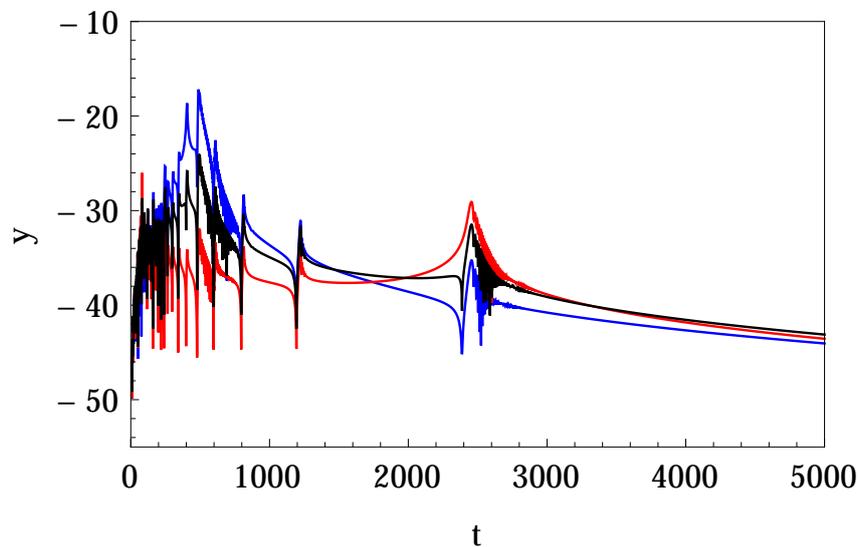


FIG. 3.25 Usando la ecuación (3.10) se gráfican los siguientes casos y_1 (línea azul), y_2 (línea roja), y y_3 (línea negra). Donde y_1 , y_2 y y_3 se definen en el pie de la página 59. Los parámetros que se usaron en la gráficas son: $\lambda = 50$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 6$ y $\mathbf{r} = (3000, 15000)$. Se utilizaron 1500 polos para realizar el cálculo.

En la figura 3.26 se grafica el $\ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t = 1000)|^2]$. En esta gráfica se aprecia el comportamiento de la densidad de probabilidad para un tiempo fijo. Para esto, se variaron las posiciones de las partículas. Así pues, se puede observar que en la región donde ambas posiciones tienden a igualarse, la densidad de probabilidad se anula de manera paulatina, formando así un sumidero, lo cual concuerda con la antisimetría de la función de onda.

En la figura 3.27 se muestra el comportamiento del sumidero para diferentes casos de α y β . Esto para la región interna del potencial y para el valor de $\lambda = 6$. En la figura 3.28 se realizó algo parecido, pero en este caso se utilizó el valor de $\lambda = 100$. En el anexo D se realizó un desarrollo de la función de onda. Esto con la finalidad de observar analíticamente cómo la contribución que contiene el parámetro λ modula las oscilaciones que se observan en la gráfica 3.27.

Las figuras 3.29, 3.30 y 3.31, son parte de un análisis, el cual se realizó con el propósito de verificar que el sumidero es real. Es decir, que el sumidero no sea una ilusión producto del número de puntos que posee la gráfica. Así pues, en la figura 3.29 se graficó la densidad de probabilidad utilizando 1000 puntos. En la figura 3.30 se graficó la densidad de probabilidad usando 10000 puntos. Por último, en la figura 3.31 se muestran sobrepuestas las dos gráficas anteriores. Las líneas verticales azules permiten conocer que los puntos de la figura 3.29 se encuentran debajo de los puntos de la figura 3.30.

El análisis enunciado en el párrafo anterior muestra que el sumidero es real. En otras palabras, que la forma paulatina en que se anula la densidad de probabilidad es real. Es decir, el sumidero no es una ilusión producto del número de puntos que posea la gráfica. No obstante, entre mayor sea el número de puntos, la definición del sumidero será mejor.

En las figuras 3.32 y 3.33 se grafican casos con diferente valor de λ , para el sumidero correspondiente a la región externa del potencial.

En las figuras 3.34, 3.35 y 3.36 se muestra un análisis del sumidero para la región externa del potencial, análogo al que se realizó para la región interna. Se tiene que los resultados para la región externa del potencial son análogos a los resultados expuestos para la región interna.

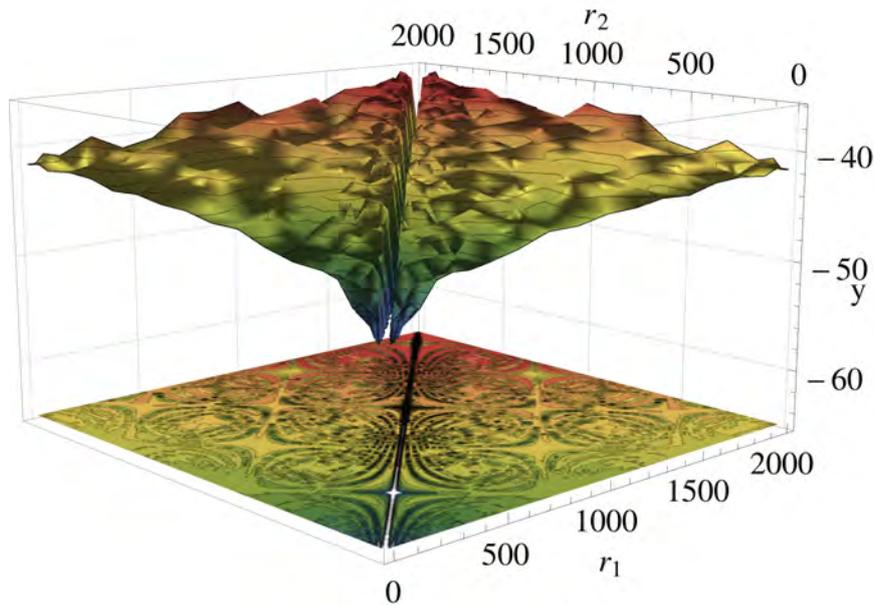


FIG. 3.26 Gráfica $y = \ln[|\Psi_{ext}(\mathbf{r}, t = 1000)|^2]$ a partir de la ecuación (3.10). Los valores que pueden tomar las posiciones son: $r_1 = [1, 2000]a$ y $r_2 = [1, 2000]a$.

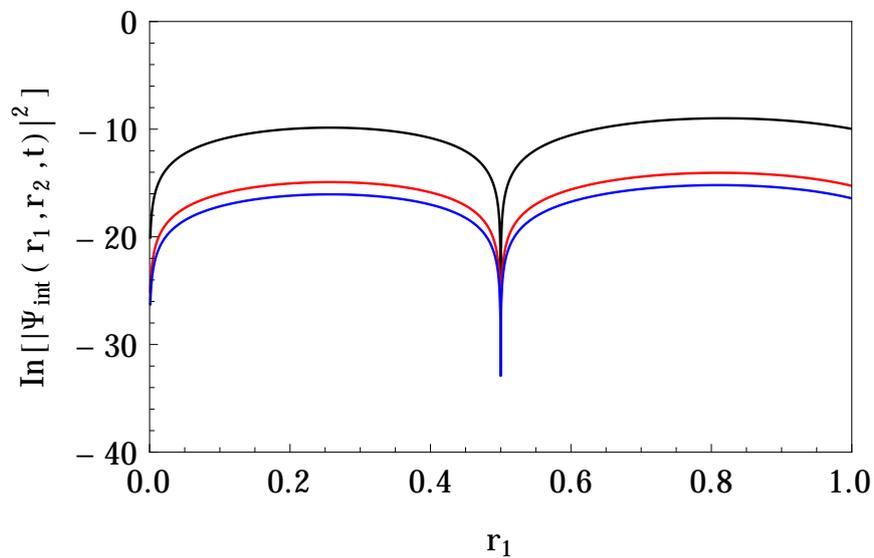


FIG. 3.27 Se muestra la región del sumidero correspondiente a la región interna del potencial; con parámetros $\lambda = 6$, $r_2 = 0.5$, $t = 1$, $a = 1$. En la figura se muestran tres casos, los cuales son: línea negra ($\alpha = 1$, $\beta = 2$), línea roja ($\alpha = 1$, $\beta = 6$) y línea azul ($\alpha = 1$, $\beta = 10$). Para esto, se utilizó la ecuación (3.16). Se utilizaron 1,000 polos para realizar el cálculo.

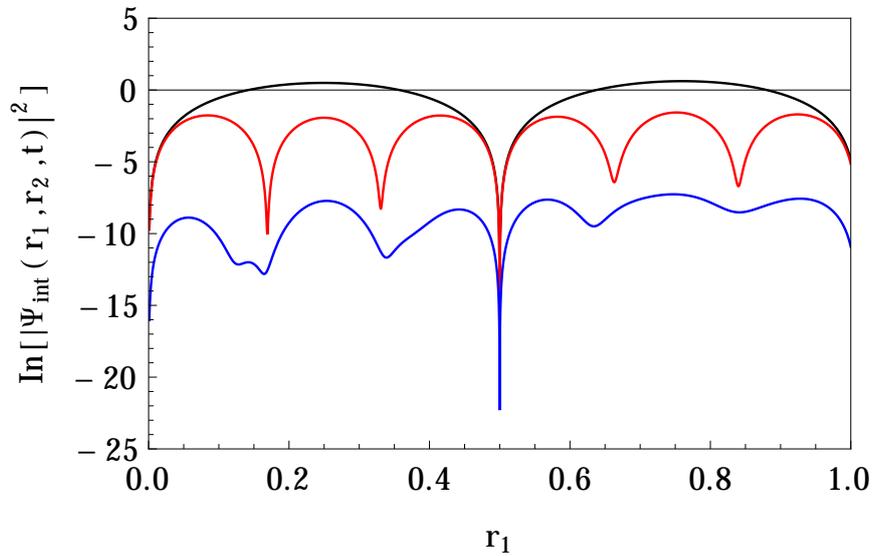


FIG. 3.28 Sumidero para la parte interna con parámetros $\lambda = 100$, $r_2 = 0.5$, $t = 1$, $a = 1$. En la figura se muestran tres casos, los cuales son: línea negra ($\alpha = 1$, $\beta = 2$), línea roja ($\alpha = 1$, $\beta = 6$) y línea azul ($\alpha = 1$, $\beta = 10$). Para esto, se utilizó la ecuación (3.16). Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo.

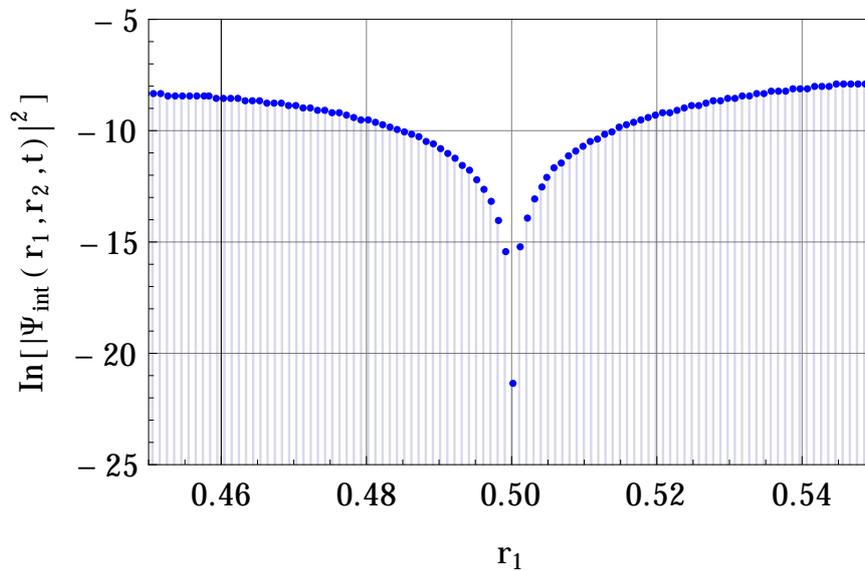


FIG. 3.29 Se muestra un análisis del sumidero de la figura 3.28; con parámetros de $\alpha = 1$, $\beta = 10$, $\lambda = 100$, $t = 1$ y $r_2 = 0.5$. En esta figura se calcularon 1000 puntos de la densidad de probabilidad. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo.

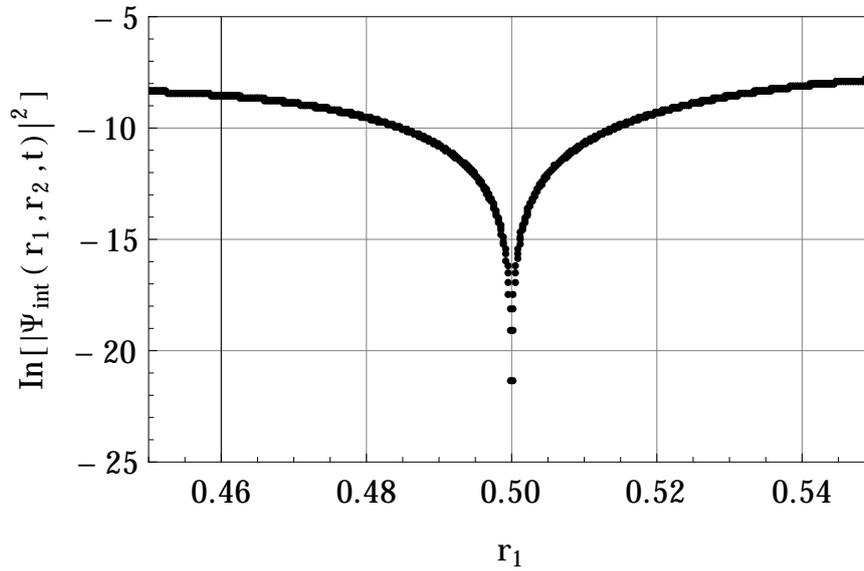


FIG. 3.30 En esta figura se calcularon 10000 puntos de la densidad de probabilidad. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo.

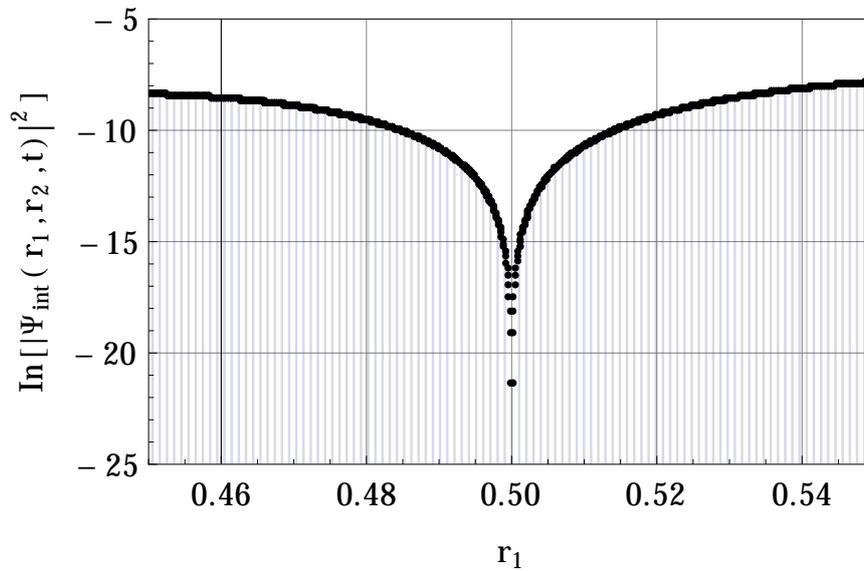


FIG. 3.31 En esta figura se muestran sobrepuestas las figuras 3.29 y 3.30.

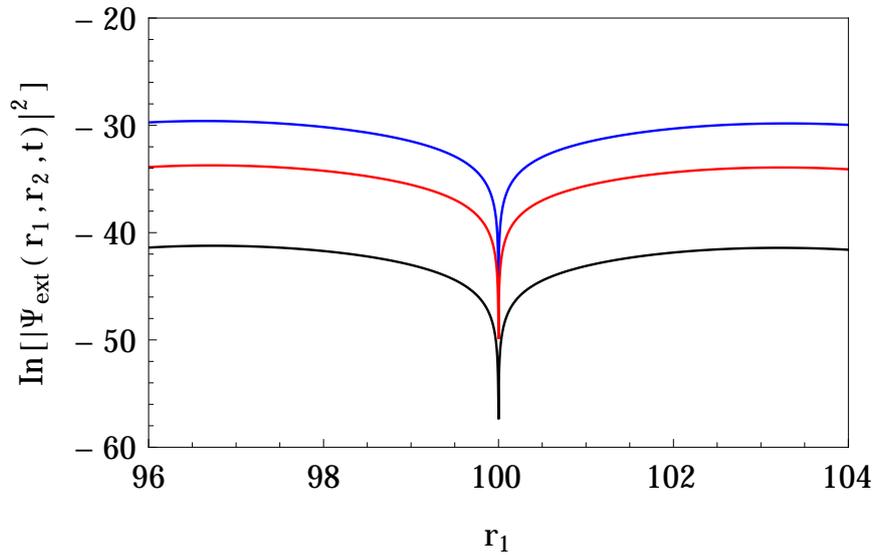


FIG. 3.32 Sumidero para la parte externa con parámetros $\lambda = 6$, $r_2 = 100$, $t = 1$, $a = 1$. En la figura se muestran tres casos, los cuales son: línea negra ($\alpha = 1$, $\beta = 2$), línea roja ($\alpha = 1$, $\beta = 6$) y línea azul ($\alpha = 1$, $\beta = 10$). Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo.

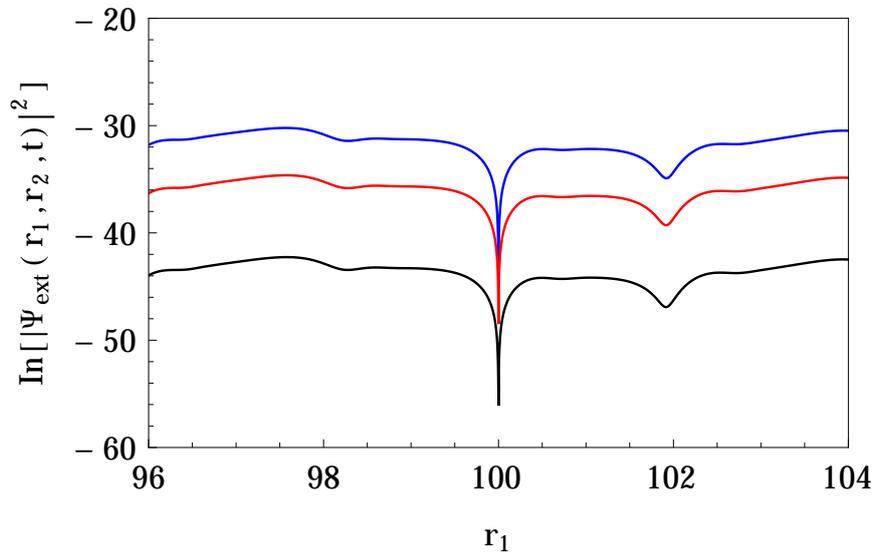


FIG. 3.33 Sumidero para la parte externa con parámetros $\lambda = 100$, $r_2 = 100$, $t = 1$, $a = 1$. En la figura se muestran tres casos, los cuales son: línea negra ($\alpha = 1$, $\beta = 2$), línea roja ($\alpha = 1$, $\beta = 6$) y línea azul ($\alpha = 1$, $\beta = 10$). Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo.

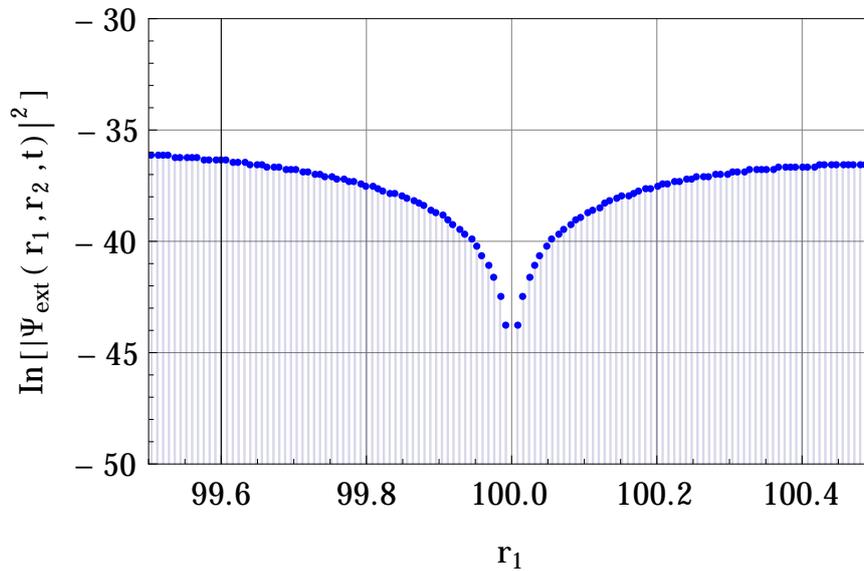


FIG. 3.34 Se muestra un análisis del sumidero de la figura 3.33 para el caso de $\alpha = 1$ y $\beta = 6$, donde $\lambda = 100$, $t = 1$ y $r_2 = 100$. Se calcularon 1000 puntos de la densidad de probabilidad. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo.

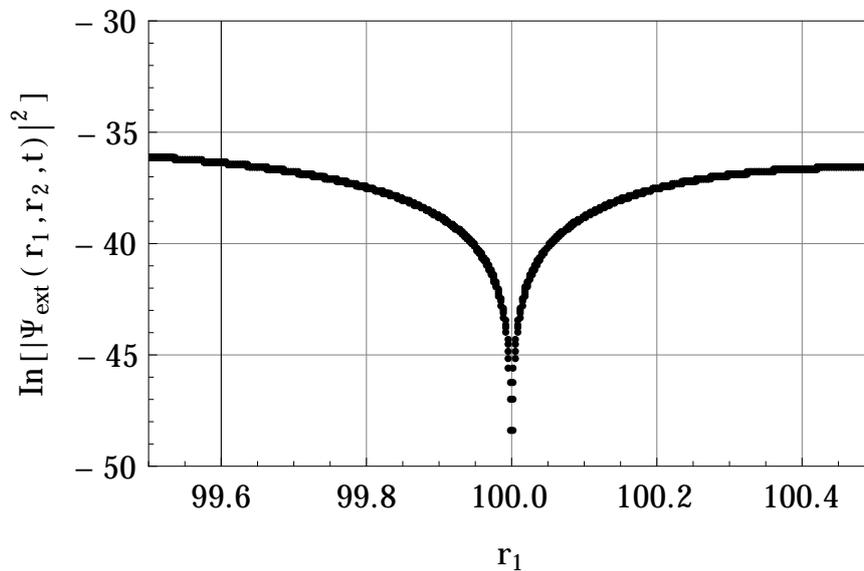


FIG. 3.35 Se muestra un análisis del sumidero de la figura 3.33 para el caso de $\alpha = 1$ y $\beta = 6$, donde $\lambda = 100$, $t = 1$ y $r_2 = 100$. En esta gráfica se calcularon 10000 puntos de la densidad de probabilidad. Se utilizaron 1000 polos para realizar el cálculo.

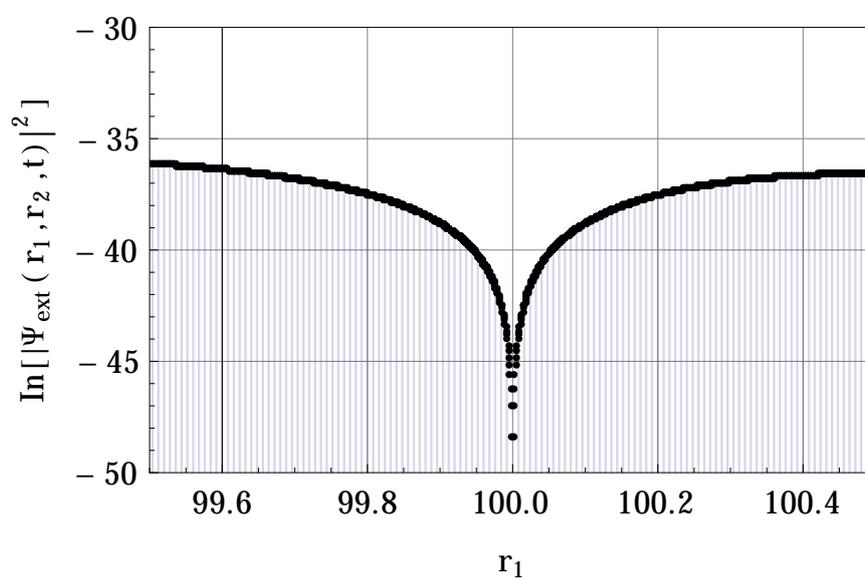


FIG. 3.36 En esta figura se muestran sobrepuestas las figuras 3.34 y 3.35.

CONCLUSIONES

Se realizó un estudio sobre el decaimiento cuántico de un sistema de dos partículas idénticas, sin interacción y confinadas inicialmente por un potencial arbitrario de alcance finito. Usando el formalismo de los estados resonantes se derivaron expresiones analíticas exactas para la función de onda, $\Psi(r,t)$. Se mostró que dichas cantidades dependen del tipo de simetría que posee el estado inicial del sistema, $\Psi(r,0)$, el cual puede ser simétrico factorizado y simétrico o antisimétrico enredados.

Se presentó el modelo de potencial delta de Dirac, en el cual se analizaron las contribuciones exponencial y no exponencial de la densidad de probabilidad. Esto para las regiones interna y externa del potencial de interacción. Asimismo, para cada región del potencial se estudiaron los casos para cada tipo de simetría que el estado inicial puede tener, los cuales ya se mencionaron en el párrafo anterior.

En la región interna del potencial, se realizó un desarrollo asintótico para tiempos largos de la función de onda, $\Psi_{int}(r,t)$, lo cual permitió observar de manera explícita las contribuciones que posee el sistema, además de simplificar los cálculos para realizar las gráficas.

Los resultados para la región interna del potencial se mencionan a continuación: se observó en las distintas gráficas de $|\Psi_{int}(\mathbf{r},t)|^2$, que en general, se tienen las siguientes contribuciones importantes: una contribución no exponencial para tiempos cortos, un régimen de decaimiento exponencial dominado por una suma de los anchos de resonancia, seguido de un régimen para tiempos largos que decae como t^{-6} para bosones, y t^{-10} para fermiones. Estas características de las contribuciones son similares a las que se han reportado en el trabajo de Luis Mendoza [32], para las probabilidades de supervivencia y de permanencia.

Se estudiaron las expresiones analíticas de las probabilidades $S(t)$ y $P(t)$. Se mostraron gráficas para la probabilidad de supervivencia que concuerdan con los resultados del trabajo de Luis Mendoza [32]. Asimismo, en el anexo C se desarrollaron expresiones más sencillas

para calcular la probabilidad de supervivencia en sistemas de dos partículas idénticas. Estas expresiones permitieron calcular las reglas de suma que obedecen los coeficientes $C_{n,s}$, en sistemas de dos partículas idénticas.

Por otra parte, se realizó una extensión de la función de Green retardada para la región externa del potencial, lo cual permitió escribir una expresión analítica exacta para la función de onda, $\Psi_{ext}(r,t)$.

Los resultados para la región externa del potencial son los siguientes: se encontró en las distintas gráficas de $|\Psi_{ext}(\mathbf{r},t)|^2$, que en general, existen dos frentes de ondas en la densidad de probabilidad. Las localizaciones de estos frentes de ondas se pueden estimar evaluando la densidad de probabilidad en los tiempos $t = r_i/2\alpha_1$, donde el numerador es la posición de una de las partículas y el denominador es la velocidad en unidades naturales.

En la parte izquierda del primer frente de onda, se forman algunas oscilaciones producto de contribuciones de estados resonantes con mayor energía, las cuales disminuyen como función del tiempo. Estas oscilaciones son afectadas por los cambios de los números de estados α y β . Por otro lado, en la parte derecha del segundo frente de onda, se forma un régimen exponencial con una pendiente que no está relacionada directamente con los anchos de banda de las resonancias. Después, existe un régimen de interferencia, y por último, un régimen asintótico para tiempos largos que decae como t^{-6} para bosones, y t^{-10} para fermiones.

Se observó que en la región intermedia de los dos frentes de onda, en general, se forma una región cóncava con algunas interferencias. Estas interferencias proceden de los tres primeros estados resonantes excitados asociados con la partícula en la posición r_2 . Esto se debe a que los estados resonantes salen de la región interna del potencial con diferentes velocidades, con lo cual a distancias grandes forman picos. Las localizaciones temporales de los picos de estas interferencias se pueden estimar calculando los tiempos de manera clásica como $t_i = r_2/2\alpha_i$, donde $i = 2, 3, 4$.

Se realizó una comparación entre la evolución temporal del sistema de bosones y del sistema de fermiones, con lo cual se observó que ambas densidades de probabilidad son prácticamente idénticas, con excepción de la región intermedia de los dos frentes de onda y en el régimen asintótico para tiempos largos.

Se analizó para el sistema de bosones, el caso cuando las dos partículas poseen la misma posición. En este caso, se observó que en la densidad de probabilidad se forma un solo frente de onda, lo cual se asemeja a lo que sucede en el sistema de una partícula. Por otro lado, para el sistema de fermiones, se analizó el caso cuando las dos partículas tienen posiciones muy próximas. En este caso, se observó que la región intermedia entre los dos frentes de onda prácticamente desaparece.

Se analizaron por separado las componentes de la densidad de probabilidad para el caso de enredamiento. Estas componentes son: $y_1 = 1/2|\Psi_\alpha(r_1,t)\Psi_\beta(r_2,t)|^2$, $y_2 = 1/2|\Psi_\beta(r_1,t) \times \Psi_\alpha(r_2,t)|^2$ y $y_3 = \Re[\Psi_\alpha(r_1,t)\Psi_\beta(r_2,t)\Psi_\beta^*(r_1,t)\Psi_\alpha^*(r_2,t)]$, donde y_3 es la interferencia, la cual se suma a las otras dos componentes para el caso de bosones, y se resta para el caso de fermiones. Así pues, se observó que la componente y_1 contribuye más en la formación del primer frente de onda, y y_2 contribuye más en la formación del segundo frente de onda. En otras palabras, los frentes de ondas se asocian, en las primeras dos componentes, a la posición de la partícula que posee el estado con mayor vida media.

Por otro lado, la componente y_3 , la cual corresponde al término de interferencia, evoluciona en el tiempo de tal forma que refleja características de las primeras dos componentes. Sin embargo, en la región intermedia entre los dos frentes de ondas y en el régimen de tiempos largos, la contribución de la componente y_3 es relevante, por esta razón los sistemas de bosones y fermiones se pueden distinguir en estas regiones de la evolución temporal.

Se exploró la región del sumidero que aparece en la densidad de probabilidad para el caso de fermiones. Se observó que la densidad de probabilidad, para un tiempo fijo, tiende a anularse paulatinamente al aproximarse a los valores donde las posiciones de la partículas son iguales.

En general, se mostró que las contribuciones de la densidad de probabilidad en la región externa del potencial, poseen una estructura más compleja con respecto a lo que sucede en la región interna del potencial. Esto amerita un trabajo a futuro que profundice más en análisis de las distintas contribuciones en el decaimiento de dos partículas con enredamiento. En particular, el efecto de interacción entre las partículas. Finalmente, también sería interesante estudiar la conexión de este trabajo con otros estudios sobre enredamiento cuántico.

RESIDUO DE LA FUNCIÓN DE GREEN DE ONDA SALIENTE

Con el propósito de expresar el residuo $R_n(r, r')$ de la función de Green de onda saliente, se realiza el siguiente desarrollo del trabajo de García-Calderón [18].

Sustituyendo la ecuación (2.28) en la ecuación (2.25) se obtiene la siguiente expresión

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 - V(r) \right] \frac{R_n(r, r')}{k - \kappa_n} + \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 - V(r) \right] \xi(r, r'; k) = \delta(r - r'), \quad (\text{A.1})$$

donde $R_p(r, r')$ es el residuo de la función de Green y $\xi(r, r'; k)$ es una función regular. Sumando y restando el término $\kappa_n^2 R_n(r, r') / (k - \kappa_n)$ en la ecuación anterior, y luego tomando el límite cuando $k \rightarrow \kappa_n$, se pueden inferir las siguientes expresiones

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \kappa_n^2 - V(r) \right] R_n(r, r') = 0 \quad (\text{A.2})$$

y

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \kappa_n^2 - V(r) \right] \xi(r, r'; \kappa_n) = \delta(r - r') - 2\kappa_n R_n(r, r'). \quad (\text{A.3})$$

A continuación, se escribirán las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (2.26) y (2.27) en términos de las cantidades $R_n(r, r')$ y $\xi(r, r'; k)$.

Sustituyendo la ecuación (2.28) en la ecuación (2.26) se obtiene la siguiente relación

$$\frac{R_n(0, r')}{k - \kappa_n} + \xi(0, r'; k) = 0, \quad (\text{A.4})$$

multiplicando la ecuación anterior por $(k - \kappa_n)$ y tomando el límite cuando $k \rightarrow \kappa_n$, se pueden

deducir las siguientes condiciones en el origen

$$R_n(0, r') = 0 \quad (\text{A.5})$$

y

$$\xi(0, r'; k) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Por otra parte, sustituyendo la ecuación (2.28) en la ecuación (2.27) se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{1}{k - \kappa_n} \left[\frac{\partial}{\partial r} R_n(r, r') \right]_{r=a} + \left[\frac{\partial}{\partial r} \xi(r, r'; k) \right]_{r=a} = ik \frac{R_n(r, r')}{k - \kappa_n} + ik \xi(r, r'; k), \quad (\text{A.7})$$

sumando y restando el término $i\kappa_n R_n(a, r')/(k - \kappa_n)$ en la ecuación anterior, y tomando el límite cuando $k \rightarrow \kappa_n$, se pueden deducir las siguientes expresiones

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} R_n(r, r') \right]_{r=a} = i\kappa_n R_n(a, r') \quad (\text{A.8})$$

y

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} \xi(r, r', k) \right]_{r=a} = i\kappa_n \xi(r, r'; k) + iR_n(r, r'). \quad (\text{A.9})$$

Es importante enfatizar que las funciones $R_n(r, r')$ y los estados resonantes $u_n(r)$ satisfacen idénticas ecuaciones diferenciales e idénticas condiciones de frontera, esto con respecto a la variable r . Por consiguiente, dichas funciones deben tener la siguiente estructura de proporcionalidad

$$R_n(r, r') = u_n(r) \Omega_n(r'). \quad (\text{A.10})$$

Es posible encontrar una relación de $\Omega_n(r')$ en términos de los estados resonantes. Para esto, se aplica el Teorema de Green entre las ecuaciones (2.9) y (A.3), y utilizando la ecuación

(A.10) se obtiene la siguiente ecuación

$$\left[u_n(r) \frac{\partial}{\partial r} \xi(r, r'; \kappa_n) - \xi(r, r'; \kappa_n) \frac{\partial}{\partial r} u_n(r) \right]_0^a = \int_0^a u_n(r) \delta(r - r') dr - \int_0^a u_n^2(r) \Omega_n(r') dr. \quad (\text{A.11})$$

Aplicando las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (2.10), (2.12), (A.6) y (A.9) se obtiene la siguiente expresión

$$\Omega_n(r') = \frac{u_n(r')}{2\kappa_n [\int_0^a u_n^2(r) dr + iu_n^2(a)/2\kappa_n]}, \quad (\text{A.12})$$

donde el término entre corchetes de la expresión anterior es igual a la unidad. Así pues, utilizando la ecuación (A.12) en la ecuación (A.10) se puede escribir el residuo en términos de los estados resonantes como

$$R_n(r, r') = \frac{u_n(r)u_n(r')}{2\kappa_n}. \quad (\text{A.13})$$

ANEXO B

MÉTODO ORTODOXO DE FUNCIONES DEL CONTINUO

Para mostrar el método ortodoxo de funciones del continuo, se comienza por escribir la función de Green de onda saliente de la siguiente forma [37],

$$G^+(r, r'; k) = -\frac{\phi(k, r)f_+(k, r')}{J_+(k)}, \quad r < r', \quad (\text{B.1})$$

La función $J_+(k)$ es la función de Jost que más adelante se definirá. La función $\phi(k, r)$ se llama solución regular de la ecuación de Schrödinger, la cual obedece las siguientes condiciones de frontera en el origen

$$\phi(k, 0) = 0, \quad \left[\frac{\partial \phi(k, r)}{\partial r} \right]_{r=0} = 1. \quad (\text{B.2})$$

Las funciones $f_{\pm}(k, r)$ se llaman soluciones irregulares de la ecuación de Schrödinger. Para potenciales de alcance finito cumplen con la siguiente condición

$$f_{\pm}(k, r) = e^{\pm ikr}, \quad r \geq a. \quad (\text{B.3})$$

Propiedades de las soluciones de Jost

A continuación, se derivarán algunas propiedades importantes de las soluciones de Jost que servirán a la finalidad de este anexo. Las funciones irregulares satisfacen la siguiente ecuación

$$\frac{d^2}{dr^2} f_{\pm}(k, r) = [k^2 - V(r)] f_{\pm}(k, r). \quad (\text{B.4})$$

Ahora, se calculará la derivada del Wroskiano entre las funciones irregulares. Utilizando la

ecuación (B.4) se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{d}{dr}W[f_-(k,r), f_+(k,r)] = f_-(k,r)\frac{d^2}{dr^2}f_+(k,r) - f_+(k,r)\frac{d^2}{dr^2}f_-(k,r) = 0. \quad (\text{B.5})$$

La ecuación (B.5) significa que el Wroskiano no depende de la variable r , por lo tanto se puede utilizar la ecuación (B.3) para determinar su valor

$$W[f_-(k,r), f_+(k,r)] = 2ik. \quad (\text{B.6})$$

La ecuación (B.6) implica que las funciones $f_{\pm}(k,r)$ son linealmente independientes. Por esta razón se puede escribir la solución regular como la siguiente combinación lineal

$$\phi(k,r) = \Lambda[f_-(k,0)f_+(k,r) - f_+(k,0)f_-(k,r)], \quad (\text{B.7})$$

usando la ecuaciones (B.2) y (B.6) se puede determinar que la cantidad $\Lambda = 1/2ik$.

Las funciones de Jost se definen como las funciones irregulares evaluadas en $r = 0$. Sin embargo, usando las ecuaciones (B.6) y (B.7) se pueden escribir en términos del Wroskiando entre las soluciones regulares e irregulares como

$$J_{\pm}(k) = f_{\pm}(k,0) = W[f_{\pm}(k,r), \phi(k,r)]. \quad (\text{B.8})$$

Por otro lado, utilizando las ecuaciones (B.3) y (B.7) se pueden inferir las siguientes propiedades

$$\phi(k,r) = \phi(-k,r) = \phi^*(k,r), \quad f_{\mp}(k,r) = f_{\pm}(-k,r) = f_{\pm}^*(k,r). \quad (\text{B.9})$$

Se considera la función de Green retardada dada por la ecuación (2.23). Utilizando las ecuaciones (B.8) y (B.9) se puede escribir la siguiente relación ¹

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^+(r,r';k)e^{-ik^2t} 2k dk = \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} [G^+(r,r';k) - G^+(r,r';-k)]e^{-ik^2t} 2k dk. \quad (\text{B.10})$$

Utilizando las ecuaciones (B.1), (B.8) y (B.9) se puede reescribir el término entre corchetes

¹Esta derivación la desarrollo García-Calderón. Para un estudio más detallado consultar [31].

de la ecuación anterior del siguiente forma

$$G^+(r, r'; k) - G^+(r, r'; -k) = -2ik \frac{\phi(k, r)\phi(k, r')}{J_+(k)J_-(k)}. \quad (\text{B.11})$$

Sustituyendo la ecuación (B.11) en la ecuación (B.10) se obtiene la función de Green retardada en términos de las funciones físicas

$$g(r, r'; t) = \int_0^\infty \Psi^+(k, r)\Psi^{+*}(k, r')e^{-ik^2t} dk, \quad (\text{B.12})$$

donde las funciones del continuo se definen como

$$\Psi^+(k, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\phi(k, r)}{J_+(k)} k, \quad \Psi^{+*}(k, r') = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\phi(k, r')}{J_+(k)} k. \quad (\text{B.13})$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (B.12) en la ecuación (2.19), la función de onda se puede escribir como

$$\Psi(r, t) = \int_0^\infty C(k)\Psi^+(k, r)e^{-ik^2t} dk, \quad t > 0, \quad (\text{B.14})$$

donde el coeficiente $C(k)$ está dado por

$$C(k) \equiv \int_0^a \Psi^{+*}(k, r')\Psi(r', 0) dr'. \quad (\text{B.15})$$

ANEXO C

FÓRMULA PARA CALCULAR LA AMPLITUD DE SUPERVIVENCIA PARA UN SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS

En este anexo se desarrollará una fórmula para calcular las amplitudes de supervivencia de un sistema de dos partículas. Para esto, se comenzará por el caso de simetría factorizada. La amplitud de supervivencia se define como

$$A(t) = \int_0^a \int_0^a \Psi^*(r_1, r_2, 0) \Psi(r_1, r_2, t) dr_1 dr_2, \quad (\text{C.1})$$

usando las ecuaciones (3.4) y (3.5) se puede escribir la siguiente expresión

$$A(t) = \left[\int_0^a \psi_\alpha^*(r_1, 0) \Psi_\alpha(r_1, t) dr_1 \right] \left[\int_0^a \psi_\alpha^*(r_2, 0) \Psi_\alpha(r_2, t) dr_2 \right]. \quad (\text{C.2})$$

La ecuación anterior es la multiplicación de las amplitudes de supervivencia correspondientes a cada partícula. Dado a que ambas integrales comparten los mismos límites y el valor de α , se puede escribir la siguiente ecuación

$$A(t) = A_\alpha^{(1)}(t) A_\alpha^{(2)}(t) = A_\alpha^2(t), \quad t \geq 0, \quad (\text{C.3})$$

donde el índice entre paréntesis, etiqueta a la partícula.

Por otro lado, para el caso de enredamiento se utilizan las ecuaciones (3.15) y (3.19), con lo cual se puede expresar la amplitud de supervivencia como

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a \left[\psi_\alpha^*(r_1) \psi_\beta^*(r_2) \pm \psi_\beta^*(r_1) \psi_\alpha^*(r_2) \right] \\ \times \left[\Psi_\alpha(r_1, t) \Psi_\beta(r_2, t) \pm \Psi_\beta(r_1, t) \Psi_\alpha(r_2, t) \right] dr_1 dr_2. \quad (\text{C.4})$$

Realizando la multiplicación que indican los corchetes y separando las integrales que resultan, se puede escribir $A(t)$ de la siguiente forma

$$A(t) = \frac{1}{2} \left[A_\alpha^{(1)}(t) A_\beta^{(2)}(t) + A_\beta^{(1)}(t) A_\alpha^{(2)}(t) \pm A_{\alpha\beta}^{(1)}(t) A_{\beta\alpha}^{(2)}(t) \pm A_{\beta\alpha}^{(1)}(t) A_{\alpha\beta}^{(2)}(t) \right], \quad t > 0, \quad (\text{C.5})$$

donde

$$A_{\alpha\beta}(t) = \int_0^a \psi_\alpha^*(r) \Psi_\beta(r, t) dr \quad (\text{C.6})$$

y

$$A_{\beta\alpha}(t) = \int_0^a \psi_\beta^*(r) \Psi_\alpha(r, t) dr. \quad (\text{C.7})$$

Finalmente, dado que los índices que etiquetan a las partículas son mudas, se puede simplificar la ecuación (C.5) como

$$A(t) = A_\alpha(t) A_\beta(t) \pm A_{\alpha\beta}(t) A_{\beta\alpha}(t), \quad t \geq 0. \quad (\text{C.8})$$

FUNCIÓN DE ONDA CON ENREDAMIENTO

La función de onda interna con simetría enredada está dada por la siguiente ecuación

$$\Psi_{int}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} (C_{p,\alpha}C_{q,\beta} \pm C_{p,\beta}C_{q,\alpha}) u_p(r_1)u_q(r_2)M(z_p^0)M(z_q^0), \quad \mathbf{r} \leq a. \quad (\text{D.1})$$

Se reescribe la expresión anterior de la siguiente manera

$$\Psi_{int}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \Delta_{p,q}^{\alpha,\beta} u_p(r_1)u_q(r_2)M(z_p^0)M(z_q^0), \quad (\text{D.2})$$

donde

$$\Delta_{p,q}^{\alpha,\beta} = C_{p,\alpha}C_{q,\beta} \pm C_{p,\beta}C_{q,\alpha}. \quad (\text{D.3})$$

Utilizando la ecuación (3.40) en la expresión anterior se puede escribir la siguiente ecuación

$$\Delta_{p,q}^{\alpha,\beta} = \frac{4\lambda a \alpha \beta \pi^2 (-1)^{\alpha+\beta} \sin(\kappa_p a) \sin(\kappa_q a)}{(\lambda a + e^{-2i\kappa_p a})^{1/2} (\lambda a + e^{-2i\kappa_q a})^{1/2}} \times \left[\frac{1}{(\kappa_p^2 a^2 - \alpha^2 \pi^2)(\kappa_q^2 a^2 - \beta^2 \pi^2)} \pm \frac{1}{(\kappa_p^2 a^2 - \alpha^2 \pi^2)(\kappa_q^2 a^2 - \beta^2 \pi^2)} \right]. \quad (\text{D.4})$$

Por otro lado, utilizando las ecuaciones (2.87) y (3.39), el producto de los estados resonantes se puede escribir como

$$\begin{aligned}
u_p(r_1)u_q(r_2) &= A_p \sin(\kappa_p r_1) A_q \sin(\kappa_q r_2) \\
&= \frac{2\lambda}{(\lambda a + e^{-2i\kappa_p a})^{1/2} (\lambda a + e^{-2i\kappa_q a})^{1/2}} \sin(\kappa_p r_1) \sin(\kappa_q r_2). \quad (\text{D.5})
\end{aligned}$$

Por último, utilizando las ecuaciones (D.4) y (D.5) en la ecuación (D.2), y separando la parte que contiene la contribución de λ , la función de onda se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\Psi_{int}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} Q_{p,q}(\lambda) \left[\frac{1}{(\kappa_p^2 a^2 - \alpha^2 \pi^2)(\kappa_q^2 a^2 - \beta^2 \pi^2)} \pm \frac{1}{(\kappa_p^2 a^2 - \alpha^2 \pi^2)(\kappa_q^2 a^2 - \beta^2 \pi^2)} \right] \\
&\alpha\beta (-1)^{\alpha+\beta} \sin(\kappa_p a) \sin(\kappa_q a) \sin(\kappa_p r_1) \sin(\kappa_q r_2) M(z_p^0) M(z_q^0), \quad (\text{D.6})
\end{aligned}$$

donde

$$Q_{p,q}(\lambda) = \frac{8a\pi^2 \lambda^2}{\sqrt{2}(\lambda a + e^{-2i\kappa_p a})(\lambda a + e^{-2i\kappa_q a})}. \quad (\text{D.7})$$

REFERENCIAS

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I. (1968). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, N. Y. chap. 7.
- [2] Aczel, A. D. (2008). *Entrelazamiento: El mayor misterio de la física*. Editorial Critica.
- [3] Albert, M. (1965). *Quantum Mechanics Vol. II*. North Holland Publishing Company. chap. XIV.
- [4] Anderson, R. W. (2015). *The Cosmic Compendium: Interstellar Travel*. Lulu.com. chap. 4.
- [5] Aspect, A., Grangier, P., and Roger, G. (1981). Experimental tests of realistic local theories via bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 47:460–463.
- [6] Bang, J., Gareev, F. A., Gitzatkulov, M. H., and S. A. Goncharov, S. A. (1978). Expansion of continuum functions on resonance wave functions and amplitudes. *Nucl. Phys. A*, 309:381.
- [7] Bell, J. S. (1964). On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics*, 1:195–200.
- [8] C. Rothe, S. I. H. and Monkman, A. P. (2006). Violation of the exponential-decay law at long times. *Phys. Rev. Lett.*, 96:163601.
- [9] Chiu, C. B., Sudarshan, E. C. G., and Misra, B. (1977). Time evolution of unstable quantum states and a resolution of zeno's paradox. *Phys. Rev. D*, 16:520–529.
- [10] del Campo, A., Delgado, F., García-Calderón, G., Muga, J. G., and Raizen, M. G. (2006). Decay by tunneling of bosonic and fermionic tonks-girardeau gases. *Phys. Rev. A*, 74(1):013605.
- [11] Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780.
- [12] Facchi, P., Nakazato, H., and Pascazio, S. (2001). From the quantum zeno to the inverse quantum zeno effect. *Phys. Rev. Lett.*, 86:2699–2703.
- [13] Faddeyeva, V. N. and Terentev, M. N. (1961). *Tables of values of the function $\omega(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt\right)$, for complex argument*. Edited by Academician V. A. Fock, printed in Great Britain by Pergamon Printing & Art Services LTD. London.

- [14] Freedman, S. J. and Clauser, J. F. (1972). Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 28:938–941.
- [15] Galindo, A. and Pascual, P. (1978). *Mecánica Cuántica*. Alhambra. chap. 13.
- [16] Gamow, G. (1928). Zur quantentheorie des atomkernes. *Z. Phys.*, 51:204–212.
- [17] García-Calderón, G. (1992). *Resonant States and the Decay Process: Symmetries in Physics*, chapter 17, pages 252–272. Springer–Verlag, Berlin.
- [18] García-Calderón, G. (2010). Theory of resonant states: An exact analytical approach for open quantum systems. *Adv. Quant. Chem.*, 60:407 – 455.
- [19] García-Calderón, G. and Berrondo, B. (1979). Note on the asymptotic energy behaviour of their green function for a cut-off potential. *Lett. Nuovo Cimento*, 26:562.
- [20] García-Calderón, G., Maldonado, I., and Villavicencio, J. (2013). Time-domain resonances and the ultimate fate of a decaying quantum state. *Phys. Rev. A*, 88:052114.
- [21] García-Calderón, G. and Mendoza-Luna, L. G. (2011). Time evolution of decay of two identical quantum particles. *Phys. Rev. A*, 84:032106.
- [22] García-Calderón, G. and Peierls, R. E. (1976). Resonant states and their uses. *Nucl. Phys. A*, 265(3):443.
- [23] García-Calderón, G. and Rubio, A. (1986). An expansion of continuum wave functions in terms of resonant states (ii). solvable models. *Nucl. Phys. A*, 458:560.
- [24] García-Calderón, G. (1982). On the overcompleteness of the set of bound, antibound and resonant states. *Lett. Nuovo Cimento*, 33:253.
- [25] K. Urbanowski, J. P. (2010). Long time deviations from the exponential decay law: Possible observational effects. *Computational methods in science and technology*, 16(2):201–205.
- [26] Kim, S. and Brand, J. (2011). Decay modes of two repulsively interacting bosons. *J. Phys. B*, 44:195301.
- [27] Kofman, A. G. and Kurizki, G. (2014). Frequent observations accelerate decay: The anti-zeno effect. *Zeitschrift für Naturforschung A.*, 56:83–90.
- [28] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1991). *Quantum Mechanics Non-relativist Theory*. Pergamon press. chap. IX.
- [29] Longhi, S. and Della Valle, G. (2012). Many-particle quantum decay and trapping: The role of statistics and fano resonances. *Phys. Rev. A*, 86:012112.
- [30] Maldonado, I. (2005). *Tesis: Estudios de evolución temporal y propagación espacial en el decaimiento cuántico*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [31] Máttar, A. (2011). *Tesis: Equivalencia entre la base de Estados Resonantes y el Continuo*. Universidad Nacional Autónoma de México.

- [32] Mendoza, L. (2011). *Tesis: Decaimiento cuántico de dos partículas idénticas*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [33] More, R. M. (1971). Theory of decaying states. *Phys. Rev. A*, 4(5):1782–1790.
- [34] More, R. M. and Gerjuoy, E. (1973). Properties of resonance wave functions. *Phys. Rev. A*, 7:1288–1303.
- [35] Moshinsky, M. (1952). Diffraction in time. *Phys. Rev.*, 88:626.
- [36] Nakazato, H., Namiki, M., and Pascazio, S. (1996). Temporal behavior of quantum mechanical systems. *Int.J.Mod.Phys.*, B10:247–295.
- [37] Newton, R. G. (2002). *Scattering Theory of Waves and Particles*. Dover Publications INC., second edition. Chap. 12.
- [38] Nussenzveig, H. M. (1992). *Symmetries in Physics*, chapter 19. Springer-Verlag.
- [39] Padilla, P. P. (2011). *Fundamentos de Física Cuántica*. Reverté UAM. chap. 13.
- [40] Pons, M., Sokolovski, D., and del Campo, A. (2012). Fidelity of fermionic-atom number states subjected to tunneling decay. *Phys. Rev. A*, 85:022107.
- [41] Rontani, M. (2013). Pair tunneling of two atoms out of a trap. *Phys. Rev. A*, 88:043633.
- [42] Schrödinger, E. (1935). Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23(49):823–828.
- [43] Serwane, F. and et al. (2011). Deterministic preparation of a tunable few-fermion system. *Science*, 332:336–338.
- [44] Shankar, R. (1994). *Principles of Quantum Mechanics, Second Edition*, chap. 8. Plenum Press, N. Y. and London.
- [45] Wilkinson, S. R. and et al. (1997). Experimental evidence for non-exponential decay in quantum tunnelling. *Nature*, 387:575–577.
- [46] Winter, R. G. (1961). Evolution of a quasi-stationary state. *Phys. Rev.*, 123:1503–1507.
- [47] Zürn, G. and et al. (2013). Pairing in few-fermion systems with attractive interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 111:175302.