UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Anillos para los que la retícula de teorías de torsión hereditarias y la retícula de clases naturales son isomorfas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Alan Mauricio Pasos Trejo

TUTOR

Iván Fernando Vilchis Montalvo

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., 2016

ANILLOS PARA LOS QUE LA RETÍCULA DE TEORÍAS DE TORSIÓN HEREDITARIAS Y LA RETÍCULA DE CLASES NATURALES SON ISOMORFAS

Alan Mauricio Pasos Trejo

22de agosto de2016

Índice general

Agradecimientos

Este es un trabajo en el que muchas personas contribuyeron tanto fuera como dentro del mismo y que muchos ya esperaban con ansiedad (siendo yo el primero de estos). A todos los que formaron parte de este viaje universitario, que llevé acabo como estudiante y ayudante quiero darles las gracias totales ya que el crédito no es sólo mio.

Para empezar quiero agradecer a mi gran profesor de álgebra Ivan Fernando Vilchis Montalvo ya que sin su enseñanza, apoyo, guía, consejo y amistad, nunca me hubiera enamorado del álgebra ni hubiera descubierto lo hermoso que es trabajar como ayudante y por supuesto este trabajo no hubiera sido realizado sin él. Gracias por todo Vilchis.

Tengo que agradecer también al único e inigualable Fernando Javier Nuñez Rosales mi ayudante, mi amigo, mi colega, mi hermano. Ya que sin él no me hubiera enamorado de la lógica. Las matemáticas y el tiempo que pasé en la facultad no hubieran sido lo mismo sin él. Gracias Ruido.

A Carlos Torrez Alcazar y Rafael Rojas Barbachano por su paciencia cuando fui su alumno.

A Hugo Alberto Rincón Mejía por apoyarme con este trabajo.

A mi familia a los cuales les debo todo. Mi hermaaaannnoooo Aldo Sayeg Pasos Trejo y mi mamá Iris Isabel Trejo Villa porque se lo complicado que puedo ser como persona y aun así estan siempre ahí. Gracias.

A mi otra familia y hermanos Fernando Amezcua Estrada, Aldair Arroyo Meneses, Victor Garcia Pizaña sin ellos mi vida no sería la misma.

A mi gran compañero y amigo Benito Alberto Celorio Galán por todo lo que vivimos en la facultad, a Javier Eduardo Vázquez Fernández por sobrevivir la facultad conmigo y a José Mauro Alejandro González Luna Ortiz e Iván Ongay Valverde.

A Luis Jesús Turcio Cuevas mejor conocido como el Turcio-man por su amistad y consejo.

Finalemente a todos aquellos que fromaron y forman parte de mi vida en la facultad; amigos, compañeros, alumnos, colegas y profesores gracias a todos, por todo.

Introducción

Es de mi opinión que el álgebra esta en todos lados. Por esto quiero decir que no hay un área de las matemáticas que no esté de una u otra manera involucrada con ella, ya sea para usar ejemplos, para usar la gran herramienta que es, o como objeto de estudio. No hay forma de ignorar lo importante que es el álgebra para las matemáticas. A lo largo de la gran historia de las matemáticas el Álgebra es y será lo máximo.

Este trabajo tiene como objetivo dar una función suprayectiva que preserva orden entre la retícula de clases naturales y la retícula de clases de torsión hereditarias. Además demostramos que este morfismo de orden es un morfismo de retículas precisamente cuando es un isomorfismo de retículas y esto pasa si y sólamente si el anillo es semi-artiniano izquierdo.

El presente escrito cuenta con dos capítulos y un apéndice. La primera sección del primer capítulo da un panorama general de las clases de torsión no hereditarias, con algunos resultados importantes. La segunda sección habla de la retícula de clases naturales llamada R-nat. Aquí demostramos lo necesario para comprender el último y principal teorema de este trabajo. Damos algunos ejemplos de clases naturales, mencionamos las propiedades más generales de las clases naturales e incluimos la demostración de la distributividad de R-nat. En la tercera sección estudiamos la retícula de Teorías de torsión hereditarias denotada por R-tors con el objetivo de determinar cuando R-tors es una retícula Booleana. Esto pasa precisamente cuando R es semiartiniano izquierdo. En el segundo capítulo construimos un morfismo suprayectivo de R-tors a R-nat y damos condiciones necesarias y suficientes para que este morfismo de orden sea un morfismo de retículas. Finalmente, en el apéndice mencionamos algunos resultados acerca de números ordinales para este trabajo.

Aquí trabajamos en la categoría de R-módulos izquierdos con R un anillo asociativo con unidad. Todas las clases de R-módulos izquierdos serán cerradas bajo isomorfismos.

Capítulo 1

Clases de módulos

1.1. R-TORS

En lo que sigue, R es un anillo asociativo con unidad y R-mod es la categoría de R-módulos izquierdos.

Definición 1. *Decimos que una clase $\mathbb{T}$ en R-mod es de* ***torsión*** *si cumple con:*

1. *Si $M \in \mathbb{T}$ y $N \leqslant M$ entonces $M/N \in \mathbb{T}$. (Cerradura bajo cocientes).*

2. *Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es una sucesión exacta corta con $A \in \mathbb{T}$ y $C \in \mathbb{T}$ entonces $B \in \mathbb{T}$. (Cerradura bajo extensiones).*

3. *Si $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia de R-módulos de $\mathbb{T}$, entonces $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i \in \mathbb{T}$. (Cerradura bajo sumas directas).*

Definición 2. *Una clase $\mathbb{F}$ en R-mód es una clase* ***libre de torsión*** *si cumple que:*

1. *Si $N \leqslant M$ y $M \in \mathbb{F}$, entonces $N \in \mathbb{F}$. (Cerradura bajo submódulos).*

2. *Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ es una sucesión exacta corta con $A \in \mathbb{F}$ y $C \in \mathbb{F}$, entonces $B \in \mathbb{F}$. (Cerradura bajo extensiones).*

3. *Si $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia de R-módulos en $\mathbb{F}$, entonces $\prod_{i \in I} M_i \in \mathbb{F}$. (Cerradura bajo productos directos).*

Sea $M \in R$-mod, denotamos por $E(M)$ la cápsula inyectiva de M. Ahora notemos lo siguiente:

Proposición 1. *Toda clase de torsión $\mathbb{T}$ determina una clase libre de torsión $\mathbb{F}$ y viceversa bajo las siguientes propiedades ortogonales:*

$$\mathbb{F}_{\mathbb{T}} = \{M \in R\text{-}mod : \ Hom_R(T, M) = 0 \ para\ todo\ T \in \mathbb{T}\}$$

$$\mathbb{T}_{\mathbb{F}} = \{M \in R\text{-}mod : \ Hom_R(M, F) = 0 \ para\ todo\ F \in \mathbb{F}\}$$

Demostración.

- Vamos a demostrar que $\mathbb{F}_{\mathbb{T}}$ es una clase libre de torsión.

1. Sea $N \leqslant M$ tal que $M \in \mathbb{F}_{\mathbb{T}}$ entonces $Hom(T, M) = \{\bar{0}\}$ para todo

$T \in \mathbb{T}$. Como $N \leqslant M$, si $f \in Hom(T, N)$, entonces

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dr, hook, "i"] & \\ T \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\bar{0}"'] & & M \end{tikzcd}$$

por hipótesis $i \circ f = \bar{0} \Rightarrow f = \bar{0}$. Por lo tanto $Hom(T, N) = \{\bar{0}\}$.

2. Sea $0 \to A \to B \to C \to 0$ una sucesión exacta corta tal que $A, C \in \mathbb{F}_{\mathbb{T}}$, entonces para $T \in \mathbb{T}$ tenemos la sucesión exacta $0 \to Hom(T, A) \to Hom(T, B) \to Hom(T, C)$. Como $Hom(T, A) = \{\bar{0}\}$ y $Hom(T, C) = \{\bar{0}\}$, entonces $Hom(T, B) = \{\bar{0}\}$. Esto pasa para toda $T \in \mathbb{T}$, así que $B \in \mathbb{F}_{\mathbb{T}}$.

3. Si $\{M_i\}_i \subseteq \mathbb{F}_{\mathbb{T}}$ es una familia de módulos, entonces $Hom(T, M_i) = 0$, para toda M_i. Pero $Hom(T, \prod\limits_{i \in I} M_i) \cong \prod\limits_{i \in I} Hom(T, M_i) = 0$. Por lo tanto $\prod\limits_{i \in I} M_i \in \mathbb{F}_{\mathbb{T}}$.

- Vamos a demostrar que sí $\mathbb{F}$ es una clase libre de torsión, entonces $\mathbb{T}_{\mathbb{F}}$ es una clase de torsión.

1. Sea $M \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}}$, $N \leqslant M$ y $F \in \mathbb{F}$. Si hubiera $0 \neq f : \frac{M}{N} \longrightarrow F$, entonces habría $0 \neq \pi : M \longrightarrow \frac{M}{N}$ tal que $0 \neq f\pi : M \longrightarrow F$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $Hom(\frac{M}{N}, F) = 0$ y tenemos que $M/N \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}}$.

2. Si $0 \to A \overset{i}{\hookrightarrow} B \overset{\pi}{\to} C \to 0$ es una sucesión exacta corta tal que $A, C \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}}$, entonces $Hom(A, F) = 0$ y $Hom(C, F) = 0$. Si $f \in Hom(B, F)$,

como $f|_A : A \longrightarrow F = 0$, entonces por la propiedad del conúcleo, existe $\bar{f} : C \longrightarrow F$ tal que $\bar{f} \circ \pi = f$. Como $\bar{f} = \bar{0}$, entonces $f = \bar{0}$. Esto para toda $F \in \mathbb{F}$ por lo tanto $B \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}}$.

3. Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{T}_{\mathbb{F}}$ una familia, entonces $Hom(M_i, F) = 0$ para todo $i \in I$, por lo que $0 = \bigoplus_{i\in I} Hom(M_i, F) \cong Hom(\bigoplus_{i\in I} M_i, F)$, y esto para toda $F \in \mathbb{F}$ por lo tanto $\bigoplus_{i\in I} M_i \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}}$.

$\square$

Proposición 2. *Sea $\mathbb{T}$ una clase de torsión entonces $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathbb{T}}}$.*

Demostración. $\subseteq]$ Para todo $M \in \mathbb{T}$ y para todo $N \in \mathbb{F}_{\mathbb{T}}$, $Hom(M, N) = 0$. Por lo tanto $M \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathbb{T}}}$.

$\supseteq]$ Sea $M \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathbb{T}}}$ y supongamos que $M \notin \mathbb{T}$. Sea $\mathcal{A} = \{N \in R\text{-mod} : N \leqslant M \text{ y } N \in \mathbb{T}\}$, $\mathcal{A}$ es distinto del vacío ya que $0 \in \mathcal{A}$. Como $\mathbb{T}$ es cerrada bajo sumas directas, entonces $\bigoplus \mathcal{A} \in \mathbb{T}$, además hay un epimorfismo $\pi : \bigoplus \mathcal{A} \longrightarrow \sum \mathcal{A}$ por lo tanto $\sum \mathcal{A} \in \mathbb{T}$. Definimos $t(M) = \sum \mathcal{A} \in \mathbb{T}$. Es claro que $t(M)$ es el mayor submódulo que pertenece a $\mathbb{T}$. Por hipótesis $\frac{M}{t(M)} \neq 0$. Sea $N \in \mathbb{T}$ y $f : N \longrightarrow \frac{M}{t(M)}$ un morfismo. Sea $K \leqslant M$ tal que $f(N) = \frac{K}{t(M)} \in \mathbb{T}$ ya que $\mathbb{T}$ es cerrada bajo cocientes. Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow t(M) \longrightarrow K \longrightarrow \frac{K}{t(M)} \longrightarrow 0.$$

Como $\mathbb{T}$ es cerrada bajo extensiones entonces $K \in \mathbb{T}$, por lo que $t(M) = K$ y así $f = 0$. Por lo tanto $Hom(N, \frac{M}{t(M)}) = 0$ para todo $N \in \mathbb{T}$, así que $\frac{M}{t(M)} \in \mathbb{F}_{\mathbb{T}}$. Pero $\frac{M}{t(M)} \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathbb{T}}}$, entonces $Hom(\frac{M}{t(M)}, \frac{M}{t(M)}) = 0$, así que $\frac{M}{t(M)} = 0$ y entonces $M = t(M) \in \mathbb{T}$, contradicción. □

Definición 3. *Una pareja* $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F}_{\mathbb{T}})$ *es una teoría de torsión. Si* $\mathbb{T}$ *es una clase de torsión cerrada bajo submódulos decimos que* $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F}_{\mathbb{T}})$ *es una teoría de torsión* ***hereditaria****.*

Lema 1. *Si* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *es una teoría de torsión, entonces* $t(M)$ *es el menor submódulo de* M *tal que* $\frac{M}{t(M)} \in \mathbb{F}$.

Demostración. Sea $N \in \mathbb{T}$ y $f : N \longrightarrow \frac{M}{t(M)}$ un morfismo. Sea $K \leqslant M$ tal que $f(N) = \frac{K}{t(M)} \in \mathbb{T}$ ya que $\mathbb{T}$ es cerrada bajo cocientes. Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow t(M) \longrightarrow K \longrightarrow \frac{K}{t(M)} \longrightarrow 0.$$

Como $\mathbb{T}$ es cerrada bajo extensiones entonces $K \in \mathbb{T}$, por lo que $t(M) = K$ y así $f = 0$. Por lo tanto $Hom(N, \frac{M}{t(M)}) = 0$ para todo $N \in \mathbb{T}$, así que $\frac{M}{t(M)} \in \mathbb{F}_{\mathbb{T}}$. Sea $\pi : M \longrightarrow \frac{M}{L}$ con $\frac{M}{L} \in \mathbb{F}$ y $L \leqslant M$, entonces $\pi(t(M)) = \frac{t(M)+L}{L}$, pero $\frac{t(M)+L}{L} \leqslant t(\frac{M}{L}) = 0$, entonces $\frac{t(M)+L}{L} = 0$ y así $t(M) \leqslant L$. □

Definición 4. *Si* $\mathbb{T}$ *es una clase de torsión y una clase libre de torsión entonces* $\mathbb{T}$ *y* $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *son llamadas* TLT*.*

Hay que notar que si $\mathbb{T}$ es TLT, tenemos dos nuevas clases $\mathbb{F}$ y $\mathbb{C}$ tal que $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ y $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ son teorías de torsión, denotemos a este nuevo par de teorías de torsión por la terna $(\mathbb{C}, \mathbb{T}, \mathbb{F})$.

Definición 5. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de ideales izquierdos. Decimos que $\mathcal{F}$ es un filtro si cumple las siguientes condiciones:*

1. *(T1) Para todo $I \in \mathcal{F}$ si $I \leqslant J$ entonces $J \in \mathcal{F}$.*
2. *(T2) Sean $I, J \in \mathcal{F}$ entonces $I \cap J \in \mathcal{F}$.*
3. *(T3) Si $I \in \mathcal{F}$, $r \in R$ entonces $(r : I) \in \mathcal{F}$. Donde $(r : I) = \{x \in R : \ xr \in I\}$.*

Definición 6. *Si una familia de ideales cumple T1, T2, T3 y además cumple que: (T4) $J \in \mathcal{F}$ y $(a : I) \in \mathcal{F}$ para cualquier $a \in J \Rightarrow I \in \mathcal{F}$. Entonces decimos que $\mathcal{F}$ es un filtro de Gabriel.*

Proposición 3. *La siguiente familia $\mathfrak{f} = \{I \leqslant R : \ R/I \in \mathbb{T}\}$ con $\mathbb{T}$ una teoría de torsión hereditaria es un filtro de Gabriel.*

Demostración. 1. Sea $I \in \mathfrak{f}$ y sea $I \leqslant J$. Entonces $J/I \leqslant R/I$ y como $\mathbb{T}$ es cerrada bajo cocientes tenemos que $\frac{R/I}{J/I} \in \mathbb{T}$ pero $\frac{R/I}{J/I} \cong R/J$ por lo tanto $J \in \mathfrak{f}$.

2. Sean $I, J \in \mathfrak{f}$ entonces $R/I, R/J \in \mathbb{T}$. El morfismo $\alpha : R \to \frac{R}{I} \times \frac{R}{J}$ tal que $\alpha(r) = (r + I, r + J)$ tiene $Núc(\alpha) = \{r \in R : \ \alpha(r) = (I, J)\} = \{r \in R : (r + I, r + J) = (I, J)\} = \{r \in R : \ r \in I \ y \ r \in J\} = I \cap J$. Entonces por el primer Teorema de isomorfismo de Noether, $\frac{R}{Núc(\alpha)} = \frac{R}{I \cap J}$ se sumerge en $\frac{R}{I} \times \frac{R}{J}$ ahora como $\mathbb{T}$ es cerrada bajo sumas directas y submódulos tenemos que $\frac{R}{I \cap J} \in \mathbb{T}$. Por lo tanto $I \cap J \in \mathfrak{f}$.

3. Sean $I \in \mathfrak{f}$ y $r \in R$. Proponemos el siguiente morfismo, sean $a \in R$ y $\beta_a : R \xrightarrow{\cdot a} R \xrightarrow{\pi} \frac{R}{I}$ tal que $\beta_a(r) = ra + I$. Notemos que $Núc(\beta_a) = \{x \in R : \ \beta_a(x) = i \ con \ i \in I\} = \{x \in R : \ xa \in I\} = (a : I)$. De nuevo, por el primer Teorema de isomorfismo de Noether, $\frac{R}{(a:I)} \cong \beta_a(R) \leqslant \frac{R}{I}$ pero como $\mathbb{T}$ es hereditaria, es cerrada bajo submódulos entonces $\frac{R}{(a:I)} \in \mathbb{T}$. Por lo tanto $(a : I) \in \mathfrak{f}$.

4. Sean $J \in \mathfrak{f}$ el ideal de la hipótesis, $b \in J$ y $I \leqslant R$ tales que $(b : I) \in \mathfrak{f}$. Notemos que:

   a) $\frac{I+J}{J} \leqslant \frac{R}{J}$, como $\mathbb{T}$ es cerrada bajo submódulos y cocientes tenemos que $\frac{\frac{R}{J}}{\frac{I+J}{J}} \cong \frac{R}{I+J} \in \mathbb{T}$.

   b) Notemos que $x \in (b : I) \Leftrightarrow xb \in I \cap J \Leftrightarrow xb \in I \ y \ xb \in J($ ya que $I \leqslant R) \Leftrightarrow x \in (b : I)$ entonces $(b : I \cap J) = (b : I)$ y recordemos que $(b : I) \in \mathfrak{f}$. Ahora sea $\alpha_b : J \xrightarrow{\cdot b} J \longrightarrow \frac{J}{I \cap J}$ tal que $\alpha(y) = yb + I \cap J$, pero como antes, α_b es un epimorfismo y su núcleo es $(b : I)$. Por el primer Teorema de isomorfismo de Noether tenemos que $\frac{J}{(b:I)} \cong \frac{J}{I \cap J}$ pero $\frac{J}{(b:I)} \in \mathbb{T}$ por lo tanto $\frac{J}{I \cap J} \in \mathbb{T}$.

c) Ahora tenemos la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow \frac{J}{I \cap J} \xrightarrow{f} \frac{R}{I} \xrightarrow{g} \frac{R}{I+J} \longrightarrow 0$$

Pues $\frac{J}{I \cap J} \cong \frac{I+J}{I} = Núc(g)$.

Ahora como $\mathbb{T}$ es cerrada bajo extensiones, tenemos que $\frac{R}{I} \in \mathbb{T}$ por lo tanto $I \in \mathfrak{f}$.

$\square$

Proposición 4. *Si* $\mathbb{T}$ *es* TLT *entonces existe un ideal bilateral idempotente* I *tal que* $\mathbb{T} = \{M \in R\text{-}mód : \ IM = 0\}$.

Demostración. Sea $\mathfrak{f} = \{I \leqslant R : \frac{R}{I} \in \mathbb{T}\}$.

$\Rightarrow$] Como $\mathbb{T}$ es TLT entonces $\prod\limits_{I \in \mathfrak{f}} \frac{R}{I} \in \mathbb{T}$. Sea $\alpha : R \twoheadrightarrow \prod\limits_{I \in \mathfrak{f}} \frac{R}{I}$ tal que $\alpha(r) = (r+I)_{I \in \mathfrak{f}}$ es un morfismo ya que $\alpha(ra+b) = (ra+b+I)_{I \in \mathfrak{f}} = (ra+I+b+I)_{I \in \mathfrak{f}} = r(a+I)_{I \in \mathfrak{f}} + (b+I)_{I \in \mathfrak{f}} = r\alpha(a) + \alpha(b)$. También $Núc(\alpha) = \{r \in R : \ r \in I \text{ para toda } I \in \mathfrak{f}\} = \bigcap\limits_{I \in \mathfrak{f}} I$, $\bigcap\limits_{I \in \mathfrak{f}} I \leqslant R$ y por el primer Teorema de isomorfismo de Noether tenemos que $\frac{R}{\bigcap\limits_{I \in \mathfrak{f}} I} \rightarrowtail \prod\limits_{I \in \mathfrak{f}} \frac{R}{I}$, es un monomorfismo, entonces $\bigcap\limits_{I \in \mathfrak{f}} I \in \mathfrak{f}$. Así, tenemos que existe un ideal I' de R menor, a saber $\cap \mathfrak{f} = I'$, tal que $\frac{R}{I'} \in \mathbb{T}$. Como $\mathfrak{f}$ es un filtro de Gabriel, $\mathfrak{f}$ cumple T3. Veamos que I' es ideal derecho, sea $r \in R$ y

$b \in I'$. Entonces $(r : I') \in \mathfrak{f}$ y $I' \subseteq (r : I')$ por ser I' el menor ideal en $\mathfrak{f}$. Entonces $b \in (r : I')$ por lo tanto $br \in I'$.

Necesitamos un lema antes de continuar.

Lema 2. *Con las hipótesis presentes, si $I, J \in \mathfrak{f}$ entonces $JI \in \mathfrak{f}$.*

Demostración. (Lema)

Sea $a \in I$, tenemos que $J \subseteq (a : JI)$ ya que si $x \in J$, entonces $xa \in JI$ por lo que $x \in (a : JI)$. Entonces $(a : JI) \in \mathfrak{f}$ para toda $a \in I$, como $I \in \mathfrak{f}$. Entonces $JI \in \mathfrak{f}$. $\square$

Ahora veamos que I' es idempotente. $I' \in \mathfrak{f}$ y por el lema $I'I' = I'^2 \in \mathfrak{f}$ entonces $I'^2 \subseteq I'$ pero entonces $I'^2 = I'$ por ser I' el menor elemento de $\mathfrak{f}$.

Sea $M \in \mathbb{T}$ y supongamos que $I'M \neq 0$ entonces $I'm \neq 0$ para algún $m \in M$, sea $\gamma : I' \to I'm$ tal que $\gamma(a) = am$, γ es un epimorfismo, $I'm \leqslant M \in \mathbb{T}$. Sea $X = Núc(\gamma) \subsetneq I'$ entonces $I'm \cong \frac{I'}{X}$. Pero entonces tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to \frac{I'}{X} \to \frac{R}{X} \to \frac{R}{I'} \to 0$$

por lo que $\frac{R}{X} \in \mathbb{T}$, pero entonces $I' \subseteq X \subsetneq I'$, contradicción. Por lo tanto si $M \in \mathbb{T}$ entonces $I'M = 0$. $\square$

Sea $(\mathbb{C}, \mathbb{T}, \mathbb{F})$, denotemos por $c(M)$ al mayor módulo de $\mathbb{C}$-torsión de M.

Afirmación 1. *$R/c(R)$ es libre de $\mathbb{C}$-torsión.*

Demostración. Tenemos que demostrar que $R/c(R) \in \mathbb{T}$. Sean $N \in \mathbb{C}$ y $0 \neq \alpha : N \to R/c(R)$, entonces $\alpha(N) \leqslant R/c(R)$ por lo que $\alpha(N) = K/c(R)$. Notemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to c(R) \hookrightarrow K \twoheadrightarrow K/c(R) \to 0$$

Pero $c(R), K/c(R) \in \mathbb{C}$, entonces $K \in \mathbb{C}$ y $0 \neq \alpha(N)$ luego $c(R) \lneq K$ contradicción. Por lo tanto $\alpha = 0$. $\square$

Afirmación 2. *$c(R) = I$ con I el ideal idempotente de la Proposición 4.*

Demostración. Sea $J \leqslant R$ tal que $R/J \in \mathbb{T}$. P.D. $c(R) \leqslant J$. Notemos que $\frac{c(R)+J}{J} \leqslant \frac{R}{J} \in \mathbb{T}$, pero $\mathbb{T}$ es libre de $\mathbb{C}$-torsión, entonces $\frac{c(R)+J}{J} \in \mathbb{T}$. Ahora, por el segundo teorema de isomorfismo de Noether tenemos que $\frac{c(R)+J}{J} \cong \frac{c(R)}{c(R)\cap J}$, pero $\frac{c(R)}{c(R)\cap J} \in \mathbb{C}$. Así, tenemos que $\frac{c(R)}{c(R)\cap J} \in \mathbb{C}$ y $\frac{c(R)}{c(R)\cap J} \in \mathbb{T}$. Entonces $\frac{c(R)}{c(R)\cap J} = 0$ y tenemos que $c(R) = c(R)\cap J$, así que $c(R) \leqslant J$ y ya que $c(R) \leqslant J$ concluimos que $c(R) = J$. $\square$

Lema 3. *Para todo $M \in R$-mod tenemos que $c(M) = IM$ con I el ideal bilateral de la Proposición 4.*

Demostración. P.D. IM es el menor submódulo de M tal que $\frac{M}{IM} \in \mathbb{T}$. Notemos que $I(\frac{M}{IM}) = 0$, entonces $\frac{M}{IM} \in \mathbb{T}$. Supongamos que existe $N \leqslant M$ tal que $\frac{M}{N} \in \mathbb{T}$. Veamos que $IM \leqslant N$. Como $\frac{M}{N} \in \mathbb{T}$ tenemos que $I(\frac{M}{N}) = 0$ entonces $IM \leqslant N$. Por lo tanto $c(M) = IM$. $\square$

Observación: Sea R un anillo tal que $R = I \oplus J$ para $I, J \leqslant R$ ideales bilaterales. Entonces I, J son generados por elementos idempotentes de R, que además son idempotentes centrales.

Demostración. Como $R = I \oplus J$ en particular $1 = a + b$ con $a \in I$ y $b \in J$. Así, tenemos que $a = a^2 + ab$ entonces $a - a^2 = ab$ pero $ab \in J$ y $a - a^2 \in I$ por lo que $a - a^2 = 0$, entonces $a = a^2$. Por lo tanto a es idempotente y también $b = 1 - a$ es idempotente. Recordemos que $\langle a \rangle = Ra$ similarmente $\langle b \rangle = R(1 - a)$. Ahora veamos que $Ra = I$. Como $a \in I$ e I es un ideal bilateral tenemos que $Ra \subseteq I$. Sea $x \in I$, como $1 = a + b$, entonces $i = ia + ib$. Así tenemos que $i - ia = ib$, y $i = ia$. Por lo tanto $I = Ra$.

Como tenemos que $R = Ra \oplus R(1 - a)$, en particular $1 = a + (1 - a)$ con esto tenemos dos igualdades $r = ra + r(1 - a)$ y $r = ar + (1 - a)r$, restando obtenemos que $ra - ar \in Ra \oplus R(1 - a)$, así $ra - ar = 0$ y por lo tanto a es central. □

Afirmación 3. *Sea e un idempotente central de R. Entonces para todo $M \in R$-mod, tenemos que $eM \leqslant M$.*

Demostración. Veamos $eM = \{em : m \in M\}$ es un subgrupo: 1) $0 \in M$ entonces $em = e0 = 0 \in eM$, 2) Sean $em, en \in eM$, entonces como $n \in M$ tenemos $-n \in M$ y $e(-n) = -en$, entonces $em - en = e(n - m) = ek$ con $k \in M$, entonces $\langle eM, +, 0 \rangle$ es grupo. Ahora sea $r \in R$ y $em \in M$, entonces $r(em) = e(rm)$ ya que e es central. Por lo tanto $eM \leqslant M$. □

Afirmación 4. *Sean $M \in R$-mod y e un idempotente de R. Entonces $\mathbb{T} = \{M \in R\text{-mód} : eM = M\}$ es una clase de torsión.*

Demostración. Sea $\mathbb{T} = \{M \in R\text{-mód} : eM = M\}$. Veamos que $\mathbb{T}$ es una clase de torsión.

1. (Cocientes) Sea $M \in \mathbb{T}$ y $f : M \twoheadrightarrow N$ un epimorfismo, así $N = f(M) = f(eM)$ ya que $M \in \mathbb{T}$ con eso tenemos que $f(eM) = ef(M) = eN$.

2. (Extensiones) Sea $0 \to A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow \frac{B}{A} \to 0$ la sucesión exacta corta con $A, \frac{B}{A} \in \mathbb{T}$, ahora sea $b \in B$ entonces $b + A = eb' + A$,así $b - eb' \in A$ entonces $b - eb' = ea$ por lo que $b = e(a - b')$. Por lo tanto $B \in \mathbb{T}$.

3. (Sumas Directas) Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de $\mathbb{T}$, pero $e(\bigoplus\limits_{i\in I} M_i) = \bigoplus\limits_{i\in I} eM_i = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$.

$\square$

Así $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F})$ donde $\mathbb{T} = \{M \in R\text{-mod} : eM = M\}$ y $\mathbb{F} = \{M \in R\text{-mód} : eM = 0\}$.

Afirmación 5. *Sea $M \in R$-mod. Entonces $M = eM \oplus (1 - e)M$.*

Demostración. 1) Sea $m \in M$, entonces $m = (1)m$ pero $1 = e + (1 - e)$, entonces $m = (e + (1 - e))m = em + (1 - e)m$. 2) Sea $m \in eM \cap (1 - e)M$, entonces $x = em$

y $x = (1-e)m'$. Así $e(em) = em = e(1-e)m' = (e-ee)m' = (e-e)m' = 0m' = 0$. $\square$

Teorema 1. *Sea $(\mathbb{C}, \mathbb{T}, \mathbb{F})$ una teoría TLT. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. $\mathbb{C} = \mathbb{F}$
2. $M = c(M) \oplus t(M)$ *para todo módulo* M.
3. $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ *y* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *se escinden.*
4. $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ *se escinde y es hereditaria.*
5. $R = c(R) \oplus t(R)$.
6. $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *se escinde centralmente.*
7. $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ *es hereditaria y* $\mathbb{F}$ *es* TLT.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$] Supongamos que $\mathbb{C} = \mathbb{F}$. Sea $c(\frac{M}{t(M)})$, sabemos que $\frac{M}{t(M)}$ es libre de $\mathbb{T}$-torsión, entonces $\frac{M}{t(M)} \in \mathbb{F}$, pero $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$. Así $\frac{M}{t(M)} \in \mathbb{C}$. Entonces $c(\frac{M}{t(M)}) = \frac{M}{t(M)}$. Ahora notemos que $c(\frac{M}{t(M)}) = I(\frac{M}{t(M)}) = \frac{IM+t(M)}{t(M)} = \frac{M}{t(M)}$, por los lemas anteriores. Entonces $M = IM + t(M) = c(M) + t(M)$. Sea $c(M) \cap t(M) \in \mathbb{T}$, por otro lado $c(M) \cap t(M) \in \mathbb{C} = \mathbb{F}$ entonces $c(M) \cap t(M) = 0$. Por lo tanto $M = c(M) \oplus t(M)$.

$2 \Rightarrow 3]$ Supongamos que $M = c(M) \oplus t(M)$ para todo $M \in R$-mod. Recordemos que $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ se escinde si la parte de $\mathbb{C}$-torsión para todo $M \in R$-mod es un sumando directo, lo que se cumple por hipótesis. Notemos que $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ se escinde ya que la parte de $\mathbb{T}$-torsión para todo módulo M es un sumando directo por hipótesis.

$3 \Rightarrow 4]$ $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ se escinde por hipótesis. Basta demostrar que $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ es hereditaria, es decir que $\mathbb{C}$ es cerrada bajo submódulos o equivalentemente $\mathbb{T}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Sea $M \in \mathbb{T}$. P.D. que $E(M) \in \mathbb{T}$. Como $(\mathbb{C}, \mathbb{F})$ se escinde, entonces $M = t(M) \oplus N$ en particular $E(M) = t(E(M)) \oplus N$. Como $M \leqslant E(M)$ y $M \in \mathbb{T}$, entonces $M = t(M) \leqslant t(E(M))$. Así, $N \cap M \leqslant N \cap t(E(M)) = 0$. Lo que implica que $N = 0$ ya que $N \leqslant M$.

$4 \Rightarrow 5]$ Supongamos que $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$ se escinde y es hereditaria. P.D. $R = t(R) \oplus c(R)$. Sabemos que $R = c(R) \oplus I$ con I un ideal, apliquemos $t(\_)$, es decir, $t(R) = t(c(R) \oplus I)$ y recordemos que $t(\_)$ abre sumas directas, entonces $t(R) = t(c(R) \oplus I) = t(c(R)) \oplus t(I)$, pero $t(c(R)) \in \mathbb{C} \cap \mathbb{T}$, ya que $t(c(R)) \leqslant c(R)$ y

$(\mathbb{C},\mathbb{T})$ es hereditaria. Así, $t(c(R)) = 0$, entonces $t(I) = t(R)$. Así, $\frac{R}{c(R)} \in \mathbb{T}$ pero $\frac{R}{c(R)} = \frac{c(R)+I}{c(R)} \cong \frac{I}{c(R)\cap I} = \frac{I}{0} = I$. Entonces $I \in \mathbb{T}$ por lo que $t(I) = I = t(R)$. Por lo tanto $R = c(R) \oplus t(R)$.

$5 \Rightarrow 6]$ Supongamos que $R = c(R) \oplus t(R)$. P.D. $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ se escinde centralmente, es decir que existe $e \in R$ idempotente tal que $t(M) = eM$. Sea $M \in \mathbb{T}$, recordemos que si $\mathbb{T}$ es TLT entonces existe I un ideal bilateral idempotente tal que $\mathbb{T} = \{M \in R\text{-mod} : \ IM = 0\} = \{M \in R\text{-mod} : \ c(R)M = 0\} = \{M \in R\text{-mod} : \ ReM = 0\} = \{M \in R\text{-mod} : \ eM = 0\} = \{M \in R\text{-mod} : (1-e)M = M\}$. También sabemos que $I = c(R)$. Así por el lema 3 y la hipótesis general $c(R) = Re$ con e idempotente. Demostremos las últimas dos igualdades. Sea $\mathbb{A} = \{M \in R\text{-mod} : \ eM = 0\}$. P.D. $\mathbb{A} = \mathbb{T}$. Sea $M \in \mathbb{A}$, así $eM = 0$ y entonces $M \in \mathbb{T}$. Sea $M \in \mathbb{T}$, entonces $ReM = 0$, entonces para todo $r \in R$ y para toda $m \in M$ tenemos $rem = 0$ en particular, para $r = 1$ entonces $em = 0$. Ahora, sea $\mathbb{B} = \{M \in R\text{-mod} : \ (1-e)M = M\}$. P.D. $\mathbb{B} = \mathbb{T}$. Sea $M \in \mathbb{T}$, así $eM = 0$ y tenemos que $(1-e)M = M - eM = M$. Ahora sea $M \in \mathbb{B}$, así $(1-e)M = M$, entonces $M - eM = M$ y por lo tanto $(1-e)M = M$ con todo esto $\mathbb{T} = \{M \in R\text{-mod} : \ (1-e)M = M\}$, entonces $t(M) = M = (1-e)M$, y es claro $(1-e)$ es idempotente.

$6 \Rightarrow 7]$ Supongamos que $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ se escinde centralmente. P.D. $(\mathbb{C},\mathbb{F})$ es hereditaria, es decir, que $\mathbb{C}$ es cerrada bajo submódulos o $\mathbb{T}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Sea $M \in \mathbb{T}$, tenemos que $E(M) = t(E(M)) \oplus K$ y que $M \leqslant E(M)$, con esto $t(M) \leqslant t(E(M))$ pero $t(M) = M$, así $M \leqslant t(E(M))$. Entonces si $0 \neq K$ tenemos que $0 \neq K \cap M \leqslant K \cap t(E(M))$, lo que es una contracción. Por lo tanto $E(M) \in \mathbb{T}$ y $(\mathbb{C},\mathbb{F})$ es hereditaria. Nos falta ver que $\mathbb{F}$ es TLT pero $\mathbb{F}$ ya es cerrada bajo submódulos y como la suma directa es un submódulo del producto y $\mathbb{F}$ es cerrada bajo productos, entonces ya es cerrada bajo sumas directas también. Sólo falta ver que $\mathbb{F}$ es cerrada bajo cocientes. Sea $M \in \mathbb{F}$ y $f : M \twoheadrightarrow N$ un cociente, necesitamos que $N \in \mathbb{F}$ para terminar la demostración pero $eN = ef(M) = f(eM) = f(0) = 0$.

$7 \Rightarrow 1]$ Supongamos que $(\mathbb{C},\mathbb{F})$ es hereditaria y $\mathbb{F}$ es TLT. P.D. $\mathbb{C} = \mathbb{F}$. $\subseteq]$ Sea $M \in \mathbb{C}$, entonces $t(M) \in \mathbb{C}$ ya que $\mathbb{C}$ es hereditaria, también $t(M) \in \mathbb{T}$ por lo que $t(M) = 0$. Así $M \in \mathbb{F}$.

$\supseteq]$ Sea $M \in \mathbb{F}$. Por hipótesis $\mathbb{F}$ es TLT, recordemos que $\mathbb{C} = \{M \in R\text{-mod} : Hom(M,N) = 0 \text{ para todo } N \in \mathbb{T}\}$. Sean $N \in \mathbb{T}$ y $\alpha : M \to N$. Supongamos que $\alpha \neq 0$, entonces $\alpha(M) \leqslant N$ y $\alpha(M) \in \mathbb{F}$ por ser TLT. Ahora como $N \in \mathbb{T}$ y $\mathbb{T}$ es

TLT por hipótesis general tenemos que $\alpha(M) \in \mathbb{T}$, entonces $\alpha(M) = 0$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $M \in \mathbb{C}$. Así $\mathbb{C} = \mathbb{F}$.

□

Proposición 5. *Sea $\mathbb{C}$ una clase de módulos y $\chi(\mathbb{C}) = (\mathbb{T}_{\chi(\mathbb{C})}, \mathbb{F}_{\chi(\mathbb{C})})$ la teoría de torsión tal que $\mathbb{T}_{\chi(\mathbb{C})} = \{M \in R\text{-mód} : \ Hom(M, N) = 0 \text{ para todo } N \in \mathbb{C}\}$. Entonces $\chi(\mathbb{C})$ es la mayor teoría de torsión tal que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{F}_{\chi(\mathbb{C})}$.*

Demostración. La demostración es completamente análoga a la que haremos en la sección tres. □

Proposición 6. *Sea $\mathbb{C}$ una clase de módulos y $\xi(\mathbb{C}) = (\mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\xi(\mathbb{C})}}, \mathbb{F}_{\xi(\mathbb{C})})$ la teoría de torsión tal que $\mathbb{F}_{\xi(\mathbb{C})} = \{N \in R\text{-mód} : \ Hom(M, N) = 0 \text{ para todo } M \in \mathbb{C}\}$. Entones $\xi(\mathbb{C})$ es la menor teoría de torsión tal que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{T}_{\xi(\mathbb{C})}$.*

Demostración. La demostración es análoga a la de la sección tres. □

Definición 7. *Sea $\mathbb{C}$ una clase de torsión.*

1. *Decimos que $\xi(\mathbb{C})$ es la teoría de torsión generada por $\mathbb{C}$.*

2. *Decimos que $\chi(\mathbb{C})$ es la teoría de torsión cogenerada por $\mathbb{C}$.*

Lema 4. *Sea $\mathcal{C} \subseteq R$-mod una clase de módulos cerrada bajo cocientes. Entonces $\mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})} = \{M \in R\text{-mód}: \ \forall\ 0 \neq f : M \twoheadrightarrow K \ \exists\ 0 \neq L \leqslant K \text{ con } L \in \mathcal{C}\}$.*

Demostración. $\supseteq$] Denotemos por $\mathcal{A} = \{M \in R\text{-mod} : \ \forall\, 0 \neq f : M \twoheadrightarrow K \ \exists\, 0 \neq L \leqslant K \text{ con } L \in \mathcal{C}\}$. Sean $M \in \mathcal{A}$ y $N \in \mathbb{F}_{\xi(\mathcal{C})}$. P.D. $Hom(M, N) = 0$. Supongamos que existe $0 \neq \alpha \in Hom(M, N)$, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\alpha|_{\alpha(M)}"] & \alpha(M) \\ & L \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Con $0 \neq L \leqslant \mathcal{C}$ y $\alpha(M) \leqslant N$, entonces tenemos que $L \leqslant N$ por lo que $0 \neq L \in \mathcal{C} \cap \mathbb{F}_{\xi(\mathcal{C})}$, contradicción.

$\supseteq$] Sea $M \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})}$. P.D. $M \in \mathcal{A}$, es decir, que existe $L \in \mathcal{C}$ tal que $L \leqslant K$ para algún epimorfismo $M \twoheadrightarrow K$. Si $0 \neq f : M \twoheadrightarrow K$, entonces $K \notin \mathbb{F}_{\xi(\mathcal{C})}$ ya que si $K \in \mathbb{F}_{\xi(\mathcal{C})}$ tendríamos que $f = 0$. Como $K \notin \mathbb{F}_{\xi(\mathcal{C})}$, entonces existe $L \in \mathcal{C}$ y $0 \neq \alpha : L \to K$, entonces por hipótesis tenemos que $\alpha(L) \in \mathcal{C}$ y $\alpha(L) \leqslant K$. $\square$

Definición 8. *Decimos que un módulo M es semiartiniano si $M \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{S})}$, con $\mathcal{S}$ un conjunto completo de representantes de módulos simples en R-mod. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$, como la clase $\mathcal{A}$ es cerrada bajo cocientes tenemos que $\mathbb{T}_{\xi(\mathcal{A})} = \{M \in R\text{-mod} : \forall\ f : M \twoheadrightarrow N \text{ epimorfismo } \exists\ S \in \mathcal{A} \text{ tal que } \exists S \hookrightarrow N\}$.*

Definición 9. *Decimos que R es un anillo semiartiniano izquierdo si y sólo si R es semiartiniano como R-módulo.*

Definición 10. *Decimos que una teoría de torsión τ es de tipo simple si $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{A})}$ con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$.*

Proposición 7. *Las siguientes condiciones para un anillo R son equivalentes:*

1. *R es un anillo semiartiniano izquierdo.*

2. *Toda teoría de torsión hereditaria es de tipo simple.*

3. *Todo $M \in R$-mod es semiartiniano izquierdo.*

4. *Todo $0 \neq M \in R$-mod es tal que $Zoc(M) \neq 0$.*

5. *$Zoc(M) \leqslant_{es} M$ para todo $M \in R$-mod.*

Demostración. 3) $\Rightarrow$ 4)] Supongamos que todo $M \in R$-mod es semiartiniano izquierdo. P.D. Si $M \neq 0$ entonces $Zoc(M) \neq 0$.

Sea $M \in R$-mod tal que $M \neq 0$. Por hipótesis, M es semiartiniano izquierdo entonces $M \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{A})}$ para $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$, pero $\mathcal{A}$ es cerrada bajo cocientes, entonces tenemos el siguiente diagrama con el morfismo identidad:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "id"] & M \\ & S \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

con $S \in \mathcal{A}$, por lo que $Zoc(M) \neq 0$.

4) $\Rightarrow$ 5)] Supongamos que para todo $M \in R$-mod distinto de cero, $Zoc(M) \neq 0$. P.D. $Zoc(M) \leqslant_{es} M$. Sea $M \neq 0$. Por hipótesis tenemos que $Zoc(M) \neq 0$, sea $N \leqslant M$ tal que $N \cap Zoc(M) = 0$, P.D. $N = 0$. Contradicción. Supongamos que

$0 \neq N \subseteq M$, entonces $Zoc(N) \neq 0$ pero $Zoc(N) \subseteq Zoc(M)$, sea $S \subseteq Zoc(N)$, entonces $S \subseteq N$, luego $N \cap Zoc(M) \neq 0$.

5) $\Rightarrow$ 3)] Supongamos que para todo $M \in R$-mod tenemos que $Zoc(M) \leqslant_{es} M$. P.D. $M \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{A})}$. Sea $M \twoheadrightarrow K$ un epimorfismo con $K \neq 0$, entonces $0 \neq Zoc(K) \leqslant K$, luego existe un módulo simple $S \leqslant K$. Por lo tanto $M \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{A})}$.

1) $\Rightarrow$ 5)] Supongamos que R es semiartiniano izquierdo. P.D. $Zoc(M) \leqslant_{es} M$ para todo $0 \neq M \in R$-mod. Como R es semiartiniano izquierdo, entonces para todo cociente de R, es decir, $R \twoheadrightarrow K$ tenemos que $R \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{A})}$ y $K \neq 0$, luego $Zoc(K) \neq 0$. Se sigue que existe $S \leqslant K$ con S un módulo simple, lo que quiere decir que todo módulo cíclico tiene un submódulo simple. Sea $x \in M$, entonces $Rx \leqslant M$, pero $S \leqslant Rx \leqslant M$. Por lo tanto $Zoc(M) \neq 0$.

3) $\Rightarrow$ 1)] Si todo R-mod M es semiartiniano izquierdo en particular, R es semiartiniano.

2) $\Rightarrow$ 3)] Supongamos que toda teoría de torsión es de tipo simple. P.D. Todo R-módulo es semiartiniano izquierdo. Sea $M \in R$-mod. Tenemos que demostrar que $M \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{A})}$, pero $M \in \mathbb{T}_{\xi(M)}$ y por hipótesis es de tipo simple entonces $\xi(M) = \xi(\mathcal{A}')$ para algún $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{S}$.

3) $\Rightarrow$ 2)] Supongamos que todo R-módulo es semiartiniano izquierdo. P.D. Para toda clase de R-módulos $\mathcal{C}$, $\mathbb{T}_{\xi(\mathcal{A})} = \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})}$ con $\mathcal{A} = \{S \in \mathcal{S} : \ S \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})}\}$. Antes de comenzar recordemos que $\mathbb{T}_{\xi(\mathcal{A})} = \{M \in R\text{-mod} : \ \forall\ 0 \neq f : M \twoheadrightarrow K\ \exists\ S \subseteq K \text{ con } S \in \mathcal{A}\}$. Ahora veamos las contenciones.

$\supseteq$] Sean $M \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})}$ y $0 \neq f : M \twoheadrightarrow K$ un cociente. Como M es semiartiniano izquierdo, entonces existe $0 \neq S \in \mathcal{S}$ tal que $S \subseteq K$, notemos que $K \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})}$ por que $\mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})}$ es cerrada bajo cocientes y como es cerrada bajo submódulos tenemos que $S \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})}$ donde se sigue que $S \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $M \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{A})}$.

$\subseteq$] Sea $M \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{A})}$ P.D. $M \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})}$. Primero recordemos que $t(M) \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})}$. Sea $0 \neq f : M \twoheadrightarrow M/t(M)$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads] & M/t(M) \\ & S \arrow[u] \end{tikzcd}$$

con $S \in \mathcal{A}$. Notemos que $M/t(M) \in \mathbb{F}$ con respecto a $\mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})}$, entonces $S \in \mathbb{F}$ con lo que tendríamos que $S \in \mathbb{F} \cap \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})}$, contradicción. Entonces $M/t(M) = 0$ y $M = t(M) \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{C})}$. □

Denotemos por $J(R)$ al radical de Jacobson del anillo R, la intersección de los ideales izquierdos máximos de R.

Definición 11. *Sea R un anillo. Decimos que $I \leqslant R$ es un nilideal si y sólo si para todo $a \in I$ $\exists$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $a^n = 0$, es decir, todo elemento de I es nilpotente.*

Proposición 8. *Sea R un anillo e $I \leqslant R$ un nilideal, entonces los idempotentes pueden ser levantados módulo el ideal I, es decir, que todo idempotente de R/I es imagen de un idempotente de R.*

Demostración. Sean $x \in R/I$ un idempotente y $r \in R$ tal que $r + I = x$. Notemos que $r + I = x = x^2 = x \cdot x = (r + I)(r + I) = r^2 + I$ por lo que $r^2 - r \in I$ y así existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(r^2 - r)^n = 0$. También notemos que $r(r-1) = r^2 - r = (r-1)r$ por lo que $0 = (r^2 - r)^n = (r(r-1))^n = r^n(r-1)^n = r^n(\binom{n}{0}r^n(-1)^0 + \binom{n}{1}r^{n-1}(-1) + \cdots + \binom{n}{n}r^0(-1)^n) = r^{n+1}g(r) - r^n$ con $g(r)$ una expresión polinomial en r. Ahora sea $a = g(r)^n r^n$.
Tenemos que $a^2 = g(r)^{2n}r^{2n} = g(r)^{2n-1}[(g(r))(r^{n+1})](r^{n-1})$, pero como $0 = r^{n+1}g(r) - r^n$, entonces $r^n = r^{n+1}g(r)$ regresando a la igualdad tenemos que $a^2 = g(r)^{2n-1}r^{2n-1} = \ldots = g(r)^n r^n = a$. □

Definición 12. *Sea $I \leqslant R$ un ideal. Decimos que I es T-nilpotente izquierdo (derecho) si para toda familia $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ tal que $a_i \in I$ existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a_k a_{k-1} \cdots a_1 = 0$ $((a_1 \cdots a_k = 0))$.*

Definición 13. *Sea $M \in R$-mod, decimos que $J(R)$ es T-nilpotente sobre M si y sólo si para todo $m \in M$ y cualquier familia $a_1, a_2, \ldots \in J(R)$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $(a_n \ldots a_1)m = 0$.*

Definición 14. *Decimos que $J(R)$ es T-nilpotente derecho si y sólo si $J(R)$ es T-nilpotente sobre $R \in R$-mód. Es decir, si para toda $(a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in J(R)$ tenemos que $a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_1 = 0$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.*

Afirmación 6. *Sea $I \leqslant R$. Si I es un ideal T-nilpotente, entonces I es un nil-ideal.*

Demostración. Sean I un ideal T-nilpotente y $a \in I$. Tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n = 0$, en particular $a^n = 0$. $\square$

Definición 15. *Sea $M \in R$-mod. Definimos la sucesión de zoclos de M por inducción transfinita como sigue:*

1. $Z_0(M) = 0$.

2. $Z_{\alpha+1}(M)/Z_\alpha(M) = Zoc(M/Z_\alpha(M))$.

3. *Si α es límite, entonces* $Z_\alpha(M) = \sum_{\beta<\alpha} Z_\beta(M)$.

Notemos que $Z_0(M) \hookrightarrow Z_1(M) \hookrightarrow Z_2(M) \hookrightarrow \ldots$. *Y también denotamos por* $\overline{ZOC}(M) = Zoc_\alpha(M)$ *si* α *es el primer ordinal para el que* $Zoc_\alpha(M) = Zoc_{\alpha+1}(M)$. *Notemos que* $\overline{ZOC}(M)$ *esta bien definido ya que si no existe un ordinal* α *para el que* $Zoc_\alpha(M) = Zoc_{\alpha+1}$ *tendríamos una clase y una cadena ascendente infinita, pero* M *es un conjunto.*

Afirmación 7. *Sea* $M \in R$*-mod.* M *es semiartiniano si y sólo si existe* α *ordinal tal que* $Zoc_\alpha(M) = M$*.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que M es semiartiniano. P.D. Existe un ordinal α tal que $Zoc_\alpha(M) = M$. Sea α el primer ordinal para el que $Zoc_\alpha(M) = Zoc_{\alpha+1}(M)$, así tenemos que $0 = \frac{Zoc_{\alpha+1}(M)}{Zoc_\alpha(M)} = Zoc(\frac{M}{Zoc_{\alpha+1}(M)})$. Como M es semiartiniano, entonces todo cociente distinto de cero tiene zoclo distinto de cero. Pero como $Zoc(\frac{M}{Zoc_{\alpha+1}(M)}) = 0$, tenemos que $M = Zoc_{\alpha+1}(M)$.

$\Leftarrow]$ Supongamos que existe un ordinal α tal que $M = Zoc_\alpha(M)$. P.D. M es semiartiniano. Si $\alpha = 0$, entonces $Zoc_0(M) = M$ entonces $M = 0$ y así M es semiartiniano.

Usaremos inducción transfinita. Supongamos que para todo $\gamma < \alpha$ se cumple la hipótesis. Si $\alpha = \beta + 1$, entonces:

$$0 \to Zoc_\beta(M) \to Zoc_{\beta+1}(M) \longrightarrow \frac{Zoc_{\beta+1}(M)}{Zoc_\beta(M)} = \frac{M}{Zoc_\beta(M)} = Zoc(\frac{M}{Zoc_\beta(M)}) \to 0$$

Pero la clase de módulos semiartinianos es igual a la clase de torsión generada por los módulos simples. Como $Zoc_\beta(M) \in \mathbb{T}_\mathcal{S}$ por hipótesis y $Zoc(\frac{M}{Zoc_\beta(M)})$ es semisimple y como $\mathbb{T}_\mathcal{S}$ es cerrada bajo extensiones, entonces $Zoc_{\beta+1}(M) \in \mathbb{T}_\mathcal{S}$. Así $M \in \mathbb{T}_\mathcal{S}$.

Si α es un ordinal límite. Por hipótesis y definición tenemos que $\exists\, M = Zoc_\alpha(M) = \sum\limits_{\beta<\alpha} Zoc_\beta(M)$ y sabemos que $\bigoplus\limits_{\beta<\alpha} Zoc_\beta(M) \twoheadrightarrow \sum\limits_{\beta<\alpha} Zoc_\beta(M)$. Por hipótesis, cada $Zoc_\beta(M)$ es semiartiniano, entonces $\bigoplus\limits_{\beta<\alpha} Zoc_\beta(M)$ es semiartiniano y cocientes de semiartinianos son semiartinianos. Por lo tanto $Zoc_\alpha(M) = M$ es semiartiniano.

□

Afirmación 8. *$J(R)$ es T-nilpotente sobre todo módulo semiartiniano.*

Demostración. Sean M un módulo semiartiniano izquierdo y $m \in M$. Podemos definir $o(m)$ como el menor ordinal β para el que $m \in Zoc_\beta(M)$. Notemos que β no puede ser un ordinal límite ya que si lo fuera tendríamos que $m \in Zoc_\beta(M) = \sum\limits_{\gamma<\beta} Zoc_\gamma(M)$, entonces $m \in Zoc_\gamma$ para algún $\gamma < \beta$ contradicción a menos que $m = 0$, pero si $m = 0$, entonces $J(R)$ ya es T-nilpotente tenemos que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ y $a_1, \ldots, a_n$ tenemos que $m(a_1 \cdots a_n) = 0 \cdot (a_1 \cdots a_n) = 0$. Pero $Zoc_{\gamma+1}(M)/Zoc_\gamma(M)$ es semisimple por definición, entonces $J(R) \cdot \left(\frac{Z_{\gamma+1}(M)}{Z_\gamma(M)}\right) = 0$. Así tenemos que $J(R) \cdot Z_{\gamma+1}(M) \leqslant Z_\gamma(M)$. Ya que $m \in Z_{\gamma+1}(M)$ y $a \in J(R)$, entonces $am \in J(R) \cdot Z_{\gamma+1}(M) \leqslant Z_\gamma(M)$, se sigue que $o(am) < o(m)$ para toda $m \in M$ y para toda $a \in J(R)$. Sea $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ una sucesión de elementos de $J(R)$ tal que $(a_n \cdot a_1)m \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $o(m) > o(a_1 m) > o(a_2 a_1 m) > \ldots > o(a_n \ldots a_1 m) > \ldots$ Pero toda cadena estrictamente descendente de ordinales es finita. Lo que es una contradicción. Entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $o(a_z \ldots a_1 m) = 0$. □

Corolario 1. *Si R es un anillo semiartiniano izquierdo, entonces $J(R)$ es un ideal T-nilpotente.*

Demostración. Ya que $J(R)$ es T-nilpotente sobre R como R-mod. □

Lema 5. *Sea $0 \neq M \in R$-mod. Si $J(R)$ es T-nilpotente izquierdo en M, entonces existe $0 \neq x \in M$ tal que $J(R)x = 0$.*

Demostración. Supongamos que $J(R)y \neq 0$ para todo $0 \neq y \in M$. Sea $0 \neq x \in M$, entonces existe $a_1 \in J(R)$ tal que $a_1 x \neq 0$ y $a_1 x \in M$. Así obtenemos una sucesión de elementos $a_2, a_3, \ldots a_n \ldots \in J(R)$ tal que $a_n \ldots a_1 x \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, contradiciendo que $J(R)$ es T-nilpotente. □

Lema 6. *Si J es un ideal bilateral de R. Entonces M es un R/J-módulo $\Leftrightarrow$ M es un R-módulo y $JM = O$.*

Demostración. $\Rightarrow$]

a) P.D. $JM = 0$. Sea $a \in J$ y $m \in M$, como M es un R/J-módulo, entonces para toda $m \in M$ tenemos que $\bar{0}_{\frac{R}{J}} = J$ y así $0 = \bar{0}_{\frac{R}{J}} m = Jm$. Por lo tanto $JM = 0$.

b) Como M es un R/J-módulo y $JM = 0$, definimos $rm := (r+J)m$. Supongamos que $r + J = r' + J$, entonces $rm = (r + J)m = (r' + J)m = r'm$.

$\Leftarrow$] P.D. M es un R/J-módulo. Definimos $(r + J)m := rm$. Supongamos que $r = r'$, entonces $(r+J)m = rm = r'm = (r'+J)m$. No es complicado demostrar que M es un R/J-módulo con esta operación.

$\square$

Lema 7. *Sea R un anillo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *R es un anillo semiartiniano izquierdo.*

2. *$J(R)$ es T-nilpotente derecho y $R/J(R)$ es semiartiniano izquierdo.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$] Supongamos que R es semiartiniano izquierdo. P.D. $J(R)$ es T-nilpotente y $R/J(R)$ es semiartiniano izquierdo. Por el Corolario 1 tenemos que $J(R)$ es T-nilpotente. Como toda clase de torsión es cerrada bajo cocientes, $R/J(R)$ es semiartiniano izquierdo como R-módulo, como $J(R)$ anula a cada R-módulo simple, entonces los R-módulos simples coinciden con los $R/J(R)$-módulos simples. Por lo tanto $R/J(R)$ es semiartiniano.

$2 \Rightarrow 1$] Supongamos que $J(R)$ es T-nilpotente y que $R/J(R)$ es semiartiniano izquierdo. P.D. R es semiartiniano izquierdo. Sea $0 \neq M \in R$-mod. Por el Lema 5 existe $o \neq L \leqslant M$ tal que $J(R) \cdot L = 0$. L es un $\frac{R}{J(R)}$-módulo. Como $R/J(R)$ es semiartiniano izquierdo por hipótesis, existe $S \leqslant L$ un $\frac{R}{J(R)}$-módulo simple. Pero S es también un R-módulo simple, ya que si $0 \neq N \leqslant S$, entonces existe $0 \neq n \in N$ tal que $\frac{R}{J(R)} \cdot n = S$. Sea $x \in S$, entonces $x = (r + J(R)) \cdot n = rn$, luego $x = rn$ por lo que $S = Rn = N$. Así $N = S$. Entonces para todo $0 \neq M \in R$-mod tenemos que $Zoc(M) \neq 0$. Por lo tanto R es semiartiniano izquierdo. □

Definición 16. *Sea R un anillo decimos que R es semilocal si y sólo si $R/J(R)$ es semisimple.*

Definición 17. *Sea R un anillo. Decimos que R es semiperfecto si y sólo si R es semilocal y los idempotentes de R pueden ser levantados módulo $J(R)$.*

Lema 8. *Sea R un anillo, entonces $J(R/J(R)) = 0$.*

Demostración. Tenemos que $J(\frac{R}{J(R)}) = \bigcap_{\frac{I}{J(R)} \underset{máx}{\leqslant} \frac{R}{J(R)}} \frac{I}{J(R)}$. Por el Teorema de correspondencia $\frac{I}{J(R)} \underset{máx}{\leqslant} \frac{R}{J(R)} \Leftrightarrow J(R) \leqslant I \leqslant R$, entonces $\bigcap_{\frac{I}{J(R)} \underset{máx}{\leqslant} \frac{R}{J(R)}} \frac{I}{J(R)} = \frac{\bigcap_{I \underset{máx}{\leqslant} R} I}{J(R)} = \frac{J(R)}{J(R)} = 0$. □

Proposición 9. *Sea R un anillo entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *R es semiartiniano izquierdo y semilocal.*

2. *R es semiartiniano izquierdo y semiperfecto.*

3. *$J(R)$ es T-nilpotente derecho y R es semilocal.*

4. *R es semiartiniano izquierdo y no contiene un conjunto infinito de idempotentes ortogonales.*

Demostración. 1] $\Rightarrow$ 2] Sea R un anillo semiartiniano izquierdo y semilocal. Recordemos que si R es semiartiniano izquierdo, entonces $J(R)$ es T-nilpotente derecho y así $J(R)$ es un nilideal de R. Por la Proposición 8 los idempotentes pueden ser levantados módulo $J(R)$. R es semilocal por hipótesis.

2 $\Rightarrow$ 3] Supongamos que R es semiartiniano izquierdo y semiperfecto. P.D. $J(R)$ es T-nilpotente derecho y R es semilocal. R es semilocal ya que R es semiperfecto. Basta demostrar que $J(R)$ es T-nilpotente derecho, pero ya demostramos que $J(R)$ es T-nilpotente derecho sobre cualquier módulo semiartiniano izquierdo y como R es semiartiniano izquierdo, entonces $J(R)$ es T-nilpotente derecho.

3 $\Rightarrow$ 4] Supongamos que $J(R)$ es T-nilpotente derecho y que R es semilocal. P.D. R es semiartiniano izquierdo y no contiene un conjunto infinito de idempotentes ortogonales. Como R es semilocal, entonces $R/J(R)$ es semisimple, recordando que la clase de los módulos semisimples es una clase cerrada bajo cocientes, tenemos que $R/J(R)$ es semiartiniano. Por el lema 7 tenemos que R es semiartiniano izquierdo. Resta demostrar que R no contiene un subconjunto infinito de idempotentes orto-

gonales. Supongamos que existe un conjunto infinito de idempotentes ortogonales en R. Notemos que si $e \in R$ es un idempotente tenemos que $\bar{e} = e + J(R)$ es idempotente ya que $\bar{e} \cdot \bar{e} = (e + J(R))(e + J(R)) = ee + J(R) = e + J(R)$. Si f, e son idempotentes ortogonales en R también tenemos que $\bar{f}, \bar{e}$ son idempotentes ortogonales en $R/J(R)$ ya que $\bar{f} \cdot \bar{e} = (e + J(R))(f + J(R)) = ef + J(R) = J(R)$. Así, tendríamos un conjunto infinito de idempotentes ortogonales en $R/J(R)$ lo que es una contradicción, de lo contrario $R/J(R)$ no sería semisimple.

$4 \Rightarrow 1$] Supongamos que R es semiartiniano izquierdo y no contiene un conjunto infinito de idempotentes ortogonales. P.D. R es semiartiniano izquierdo y semilocal. Por hipótesis R es semiartiniano izquierdo. Resta demostrar que R es semilocal, es decir, que $R/J(R)$ es semisimple. Antes de continuar necesitamos lo siguiente:

Afirmación 9. *Si $_RI$ es un ideal mínimo en un anillo R tal que $J(R) = 0$, entonces existe un ideal máximo K de R tal que $I \oplus K = R$.*

Demostración. (Afirmación) Sea $0 \neq x \in I$, entonces $x \notin J(R)$, así que existe un ideal máximo $K \leqslant R$ tal que $x \notin K$. Así $I + K = R$, ya que $K < I + K$ y K es máximo. Ahora, supongamos que $I \cap K \neq 0$, entonces $I \cap K = I$ por que I es mínimo, así $x \in I \leqslant K$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $I \oplus K = R$. $\square$

Ahora continuemos con nuestra proposición. Observemos que $J(R/J(R)) = 0$ y que $Zoc(R/J(R)) \neq 0$ ya que R es semiartiniano. Si $I \leqslant R/J(R)$ es mínimo, entonces por la afirmación 9 existe $M \leqslant R/J(R)$ máximo tal que $M \oplus I = R/J(R)$. Como I es mínimo tenemos que $I = Re$ con e idempotente. Notemos que $1_R = e_1 + \ldots + e_n$ con cada e_i idempotentes ortogonales primitivos, ya que si $1 = e_1$ con e_1 un idempotente primitivo terminamos, de lo contrario podemos escribir $e_1 = a_1 + a_2$ con a_1, a_2 idempotentes ortogonales y a_1 primitivo, pero de nuevo podemos escribir a $a_2 = b_1 + b_2$ con b_1, b_2 idempotentes ortogonales y b_1 primitivo, este procedimiento no puede continuar sin detenerse ya que R no contiene un conjunto infinito de idempotentes ortogonales, se sigue que $R/J(R)$ sólo tiene un número finito de idempotentes ya que si $1 = e_1 + \ldots + e_n$ tenemos que $\bar{1} = \overline{e_1} + \ldots + \overline{e_n}$ y así $R/J(R) = R\overline{e_1} \oplus \ldots \oplus R\overline{e_n}$. Entonces $Zoc(R/J(R)) = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i$, es decir, el zoclo es una suma de ideales mínimos y para cada i tenemos que $I_i = Re_i$ con $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ un conjunto finito de idempotentes ortogonales. $Zoc(R/J(R)) \leqslant_{es} R/J(R)$ pues R es semiartiniano. Así $R/J(R)$ es semisimple y por lo tanto R es semilocal. $\square$

Definición 18. *Decimos que un anillo R es perfecto derecho si cumple alguna de las condiciones de la Proposición 9.*

1.2. R-nat

Definición 19. *Sea $\mathbb{C} \subseteq R$-mod una clase de R-módulos. Decimos que $\mathbb{C}$ es una clase natural si cumple que:*

1. *$\mathbb{C}$ es cerrada bajo submódulos.*

2. *$\mathbb{C}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

3. *$\mathbb{C}$ es cerrada bajo sumas directas.*

Ejemplo 1. $\mathbb{C} = \{M \in \mathbb{Z}\text{-mod} : \ o(x) < \infty$ *para todo* $x \in M\}$ *es una clase natural.*

Demostración.

1. Sean $M \in \mathbb{C}$, $N \leqslant M$ y $x \in N$. P.D. $N \in \mathbb{C}$. Como $x \in N$ tenemos que $x \in M$ por lo tanto $o(x) < \infty$. Así $N \in \mathbb{C}$.

2. Sean $M \in \mathbb{C}$ y sea $E(M)$. P.D. $E(M) \in \mathbb{C}$. Sea $0 \neq x \in E(M)$. Como $M \leqslant_{es} E(M)$ tenemos que existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \neq zx \in M$, entonces $o(zx) < \infty$, es decir, que existe $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $m(zx) = (mz)x = 0$. Por lo tanto $o(x) < \infty$ y $E(M) \in \mathbb{C}$.

3. Sea $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{C}$. P.D. $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i \in \mathbb{C}$ Sea $x = (x_i)_{i \in I} \in \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ proponemos $m = \prod\{o(x_i) : \ i \in I\}$, tenemos que $o(x) \leqslant m < \infty$, por lo tanto $\{M_i\}_{i \in I} \in \mathbb{C}$.

□

Ejemplo 2. *Sea* $\mathbb{F} = \{M \in \mathbb{Z}\text{-mod} : \ o(x) = \infty$ *para todo* $0 \neq x \in M\}$.

Demostración. 1. Sean $M \in \mathbb{F}$, $N \leqslant M$ y $0 \neq x \in N$, entonces $x \in M$ por lo que $o(x) = \infty$. Por lo tanto $N \in \mathbb{F}$.

2. Sea $M \in \mathbb{F}$. P.D. $E(M) \in \mathbb{F}$. Supongamos que existe $0 \neq x \in E(M)$ tal que $o(x) < \infty$, entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \neq zx \in M$, entonces $o(zx)|o(x) < \infty$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $E(M) \in \mathbb{F}$.

3. Sea $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{F}$. P.D. $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i \in \mathbb{F}$. Sea $0 \neq x = (x_i)_{i \in I} \in \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$, pero para cada $x_i \in M_i$ tenemos que $o(x_i) = \infty$ entonces $o(x) = \infty$ por lo que $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i \in \mathbb{C}$.

$\square$

Lema 9. *Si* $\{M_i\}_{i \in I}$ *es una familia de R-módulos, entonces* $\bigoplus\limits_{i \in I} \mathcal{Z}(M_i) = \mathcal{Z}(\bigoplus\limits_{i \in I} M_i)$, *con* $\mathcal{Z}(M) = \{m \in M : \ (0 : m) \leqslant_{es} R\}$ *y* $(0 : m) = \{r \in R : \ rm = 0\}$.

Demostración. $\subseteq]$ Sea $y = \sum\limits_{j=1}^{n} m_{i_j} \in \bigoplus\limits_{i \in I} \mathcal{Z}(M_i)$ con cada $m_{i_j} \in \mathcal{Z}(\bigoplus\limits_{i \in I} M_{i_j})$, entonces $(0 : m_{i_j}) \leqslant_{es} R$. P.D. $(0 : y) \leqslant_{es} R$. Afirmación: $\bigcap\limits_{j=1}^{n} (0 : m_{i_j}) \leqslant (0 : y)$. Sea $r_0 \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} (0 : m_{i_j})$, entonces $r_0 y = r(\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i_j}) = \sum\limits_{j=1}^{n} (r m_{i_j}) = 0$.
Como $\bigcap\limits_{j=1}^{n} (0 : m) \leqslant_{es} R$ y $\bigcap\limits_{j=1}^{n} (0 : m_{i_j}) \leqslant (0 : y) \leqslant R$, entonces $(0 : y) \leqslant_{es} R$. Por lo tanto $y \in \mathcal{Z}(\bigoplus_{i \in I} M_i)$.

$\supseteq]$ Sea $m = \sum\limits_{j=1}^{k} m_{i_j} \in \mathcal{Z}(\bigoplus\limits_{i \in I} M_i)$, con cada $m_{i_j} \in M_i$, entonces $(0 : m) = (0 :$

$\sum_{j=1}^{k} m_{i_j}) \leqslant_{es} R$. P.D. Para todo $(0 : m_{i_j}) \leqslant_{es} R$. P.D. Para todo $r \in R$ existe $0 \neq s \in R$ tal que $sr \in (0 : m_{i_j})$. Sea $m_{i_j} \in M_{i_l}$ y $r \in R$ entonces existe $s' \in R$ tal que $s'r \in (0 : m)$, es decir, $0 = s'rm = s'r \sum_{j=1}^{k} m_{i_l} = \sum_{j=1}^{k} s'rm_{i_l}$, entonces $s'rm_{i_1} + \ldots + s'rm_{i_k} = 0$, entonces $s'rm_{i_l} = -(s'rm_{i_1} + \ldots + s'rm_{i_{l-1}} + s'rm_{i_{l+1}} + \ldots + s'rm_{i_k}) \in \sum_{j \neq l} M_{i_j}$, pero $s'rm_{i_l} \in M_{i_l}$, entonces $s'rm_{i_l} = 0$. Por lo tanto $(0 : m_{i_l}) \leqslant_{es} R$ para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo tanto $m \in \bigoplus_{i \in I} \mathcal{Z}(M_i)$. □

Ejemplo 3. *La clase de todos los módulos no-singulares es una clase natural. Sea* $\mathbb{NS} = \{M \in R\text{-}mod : \ \mathcal{Z}(M) = \{0\}\ \}$, *con* $\mathcal{Z}(M) = \{m \in M : \ (0 : m) \leqslant_{es} R\}$ *y* $(0 : m) = \{r \in R : \ rm = 0\}$.

Demostración.

1. Sea $M \in \mathbb{NS}$ y $N \leqslant M$. P.D. $\mathcal{Z}(N) = 0$ sea $o \neq x \in N$, entonces $x \in M$, entonces $(0 : x)$ no es esencial en R por lo que $x \notin \mathcal{Z}(N)$. Por lo tanto $\mathcal{Z}(N) = 0$.

2. Sea $M \in \mathbb{NS}$. P.D. $E(M) \in \mathbb{NS}$, es decir, que $\mathcal{Z}(E(M)) = 0$. Supongamos que $0 \neq \mathcal{Z}(E(M))$. Como $\mathcal{Z}(E(M)) \leqslant E(M)$ y $M \leqslant_{es} E(M)$, entonces $0 \neq \mathcal{Z}(E(M)) \cap M$, entonces existe $0 \neq m \in M$ tal que $(0 : m) \leqslant_{es} R$, luego $\mathcal{Z}(M) \neq 0$, lo que es una contradicción.

3. Sea $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{NS}$. P.D. $\bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathbb{NS}$. Sea $x = (x_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} M_i$. Para cada M_i tenemos que $\mathcal{Z}(M_i) = 0$ y así $0 = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{Z}(M_i) = \mathcal{Z}(\bigoplus_{i \in I} M_i)$. Por lo tanto $\bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathbb{NS}$.

$\square$

Proposición 10. *Sea $\mathbb{C}$ una clase natural y $M \in R$-mod. Entonces existe $N \leqslant M$ máximo tal que $N \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Sean $\mathbb{C}$ una clase natural y $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{C}$ una familia independiente máxima de submódulos de M que existe por el Lema de Tukey, luego $\bigoplus_{i\in I} N_i \in \mathbb{C}$, entonces $E(\bigoplus_{i\in I} N_i) \in \mathbb{C}$. Sea $N = E(\bigoplus_{i\in I} N_i)$, entonces $N \cap M \in \mathbb{C}$. Sea $L \leqslant M$ tal que $N \cap M \leqslant L \leqslant M$ y $L \in \mathbb{C}$. Entonces $\bigoplus_{i\in I} N_i \leqslant_{es} L$ por la elección de $\{N_i\}_{i\in I}$. Así $E(\bigoplus_{i\in I} N_i) = E(L)$, entonces $M \cap N = M \cap E(L) \supseteq L$. Así $N \cap M$ es un submódulo de M máximo de en $\mathbb{C}$. $\square$

Definición 20. *Denotamos por R-nat la clase de las clases naturales.*

Lema 10. *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos. $\forall\ 0 \neq N \leqslant \bigoplus_{i\in I} M_i$, entonces $\exists\ 0 \neq K \leqslant N$ y $\exists J \subseteq I$ y un monomorfismo $K \rightarrowtail M_j$.*

Demostración. Sea $0 \neq N \leqslant \bigoplus_{i\in I} M_i$ y $0 \neq x \in N$. Entonces $Rx \leqslant N \leqslant \bigoplus_{i\in I} M_i$ y así $x = m_{i_1} + \ldots + m_{i_n}$ con $0 \neq m_{i_j} \in M_{i_j}$, escojamos $x \in I$ con n mínimo. Por la elección de n tenemos que los anuladores coinciden, es decir $(0 : m_{i_1}) = (0 : m_{i_2}) = \ldots = (0 : m_{i_n}) = (0 : x)$ ya que si existe $t \in (0 : m_{i_j})$ y $t \notin (0 : m_{i_k})$ con $j \neq k$ tendríamos que $0 \neq tx = tm_{i_1} + tm_{i_2} + \ldots + tm_{i_{j-1}} + tm_{i_{j+1}} + \ldots + tm_{i_n} \in N$, contradicción. Entonces $(0 : x) = (0 : m_{i_1})$ y así $Rx \cong \frac{R}{(0:x)} \cong \frac{R}{(0:m_{i_1})} \cong Rm_{i_1}$. Si tomamos $K = Rx$, entonces $K \rightarrowtail M_j$. $\square$

Proposición 11. *Sea $\mathbb{C}$ una clase de módulos, sea $\mathcal{A} = \{N \in R\text{-mod} : \ \forall\ 0 \neq K \leqslant N\ \exists\ 0 \neq L \leqslant K$ y un monomorfismo $0 \neq f : L \longrightarrow C$ para algún $C \in \mathbb{C}\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es la menor clase natural que contiene a $\mathbb{C}$, esta clase la denotamos $\xi_{R-nat}(\mathbb{C})$.*

Demostración.

1. Sean $M \in \mathcal{A}$ y $N \leqslant M$. P.D. $N \in \mathcal{A}$. Sea $0 \neq J \leqslant N$, entonces $J \leqslant M$ y así existen $0 \neq L \leqslant J$ y un monomorfismo $f : L \longrightarrow C$ para algún $C \in \mathbb{C}$.

2. Sean $N \in \mathcal{A}$ y $0 \neq K \leqslant E(N)$. Como $N \leqslant_{es} E(N)$ y $0 \neq K \cap N \leqslant N$ y $N \in \mathcal{A}$ entonces existen $0 \neq L \leqslant N$ y un monomorfismo $0 \neq f : L \longrightarrow C$ para algún $\mathbb{C}$ con $L \leqslant K$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

3. Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}$. P.D. $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \mathcal{A}$. Si $0 \neq K \leqslant \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, entonces por el Lema 10 existen $0 \neq Rx \leqslant K$ y un monomorfismo $f : Rx \longrightarrow M_j$ con $j \in I$ y $M_j \in \mathcal{A}$, entonces $Rx \cong K'$ para $K' \leqslant M_j$ y por lo tanto existen $0 \neq L' \leqslant K'$ y un monomorfismo $g : L' \longrightarrow C$ para algún $C \in \mathbb{C}$, y así $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \mathcal{A}$.

4. Sea $\mathbb{C}$ una clase de módulos y $\mathbb{D}$ una clase natural tal que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{D}$. Si $0 \neq M \in \mathcal{A}$ tenemos que para todo $0 \neq K \leqslant M$ existen $0 \neq L \leqslant K$ y un monomorfismo $\bar{0} \neq f : L \longrightarrow C$ para algún $C \in \mathbb{C}$. Recordando que una familia de submódulos $\{N_i\}_{i\in I} \leqslant M$ es independiente $\Leftrightarrow\ \ \forall j \in I,\ N_j \cap (\sum\limits_{I\setminus\{j\}} N_i) = \{0\}$ y que $\{N_i\}_{i\in I}$ es independiente $\Leftrightarrow\ \{N_i\}_{i\in F}$ es independiente

$\forall\, F \subseteq I$ finito, así tenemos que una familia independiente es de caracter finito y usando el Lema de Tukey que es equivalente al Lema de Zorn tenemos que existe una familia independiente máxima $\{L_i\}_{i\in I}$ de submódulos de M con la propiedad de que cada L_i pertenece a $\mathbb{D}$.

Por lo anterior, $\bigoplus\limits_{i\in I} L_i \in \mathbb{D}$ y $\bigoplus\limits_{i\in I} L_i \leqslant_{es} M$, ya que $\{L_i\}_{i\in I}$ es una familia independiente máxima en M. Sea $0 \neq K \leqslant M$ tal que $K \cap \bigoplus\limits_{i\in I} L_i = 0$. Supongamos que $K \cap L_j \neq 0$ para alguna $j \in J$ entonces $K \cap \bigoplus\limits_{i\in I} L_i \neq 0$ para toda $i \in I \setminus \{j\}$, así $K \cap L_i \neq 0$ para toda $i \in I$ entonces $\{L_i\}_{i\in I} \cup \{K\}$ es una familia de submódulos independientes y $\{L_i\}_{i\in I} \subseteq \{L_i\}_{i\in I} \cup \{K\}$, contradicción. Lo que implica que $E(\bigoplus\limits_{i\in I} L_i) = E(M) \in \mathbb{D}$. Así $M \in \mathbb{D}$. Y por lo tanto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{D}$.

$\square$

Proposición 12. *Sea $\mathbb{C}$ una clase natural. Entonces $\mathbb{C}$ es cerrada bajo extensiones.*

Demostración. Sea $\mathbb{C}$ una clase natural. Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

la sucesión exacta tal que $A, C \in \mathbb{C}$. Consideremos ahora el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[dl, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[dll, "h"] & C \arrow[r] \arrow[dr, "g"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & E(A) \arrow[rr, "i"] & & E(A) \oplus E(C) \arrow[rr, "\pi"] & & E(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde f, g son inclusiones y como $E(A), E(C) \in \mathbb{C}$ tenemos que $E(A) \oplus E(C) \in \mathbb{C}$. Como $E(A)$ es un módulo inyectivo y f es una inclusión, entonces existe $h : B \longrightarrow E(A)$ tal que $h \circ \alpha = g$. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo por la propiedad universal del producto:

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, dashed, "\gamma"] \arrow[dr, "g\beta"] & \\
E(A) & E(A) \oplus E(C) \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & E(C)
\end{tikzcd}$$

entonces los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h\alpha"] \arrow[dr, "g\beta\alpha"] & \\
E(A) & E(A) \oplus E(C) \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & E(C)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "if"] \arrow[dr, "g\beta\alpha"] & \\
E(A) & E(A) \oplus E(C) \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & E(C) .
\end{tikzcd}$$

Es decir, $h\alpha = if$, por lo tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[dl, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & C \arrow[r] \arrow[dr, "g"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & E(A) \arrow[rr, "i"] & & E(A) \oplus E(C) \arrow[rr, "\pi"] & & E(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

Así, γ es un monomorfismo y $B \in \mathbb{C}$. $\square$

Proposición 13. *Sea $\{\mathbb{C}_i\}_{i \in I}$ una familia de clases naturales. Entonces $\bigcap_{i \in I} \mathbb{C}_i$ es una clase natural.*

Demostración. 1. Sean $M \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{C}_i$ y $N \leqslant M$, entonces $M \in \mathbb{C}_i$ para toda $i \in I$. Como cada $\mathbb{C}_i$ es cerrada bajo submódulos tenemos que $N \in \mathbb{C}_i$ para toda $i \in I$. Por lo tanto $N \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{C}_i$.

2. Sea $N \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{C}_i$, entonces $N \in \mathbb{C}_i$ para todo $i \in I$. Como cada $\mathbb{C}_i$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas tenemos que $E(N) \in \mathbb{C}_i$ para toda $i \in I$, entonces $E(N) \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{C}_i$.

3. Sea $\{M_j\}_{j \in J} \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbb{C}_i$ una familia de módulos, entonces $\{M_j\}_{j \in J} \subseteq \mathbb{C}_i$ para toda $i \in I$ y como cada $\mathbb{C}_i$ es cerrada bajo sumas directas, tenemos que $\bigoplus_{j \in J} M_j \in \mathbb{C}_i$ para toda $i \in I$. Por lo tanto $\bigoplus_{j \in J} M_j \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{C}_i$.

□

Definición 21. *Sean $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ dos clases naturales. Definimos un orden parcial en R-nat como: $\mathbb{C} \leqslant \mathbb{D} \Leftrightarrow \mathbb{C} \subseteq \mathbb{D}$.*

Definición 22. *Sea $\{\mathbb{C}_i\}_{i \in I}$ una familia de clases naturales. El ínfimo está dado por:*

$$\bigwedge_{i \in I} \mathbb{C}_i = \bigcap_{i \in I} \mathbb{C}_i$$

y el supremo como:

$$\bigvee_{i \in I} \mathbb{C}_i = \xi_{R-nat}(\bigcup_{i \in I} \mathbb{C}_i)$$

.

Lema 11. *Sea $\mathbb{C}$ una clase de módulos. Entonces* $\xi_{R-nat}(\mathbb{C}) = \{M \in R\text{-}mód :$ *existen una familia* $\{P_i\}_{i\in I}$ *y una familia de monomorfismos* $\{f_i : P_i \longrightarrow N_i\}_{i\in I}$ *tal que* $N_i \in \mathbb{C}$ *para toda* $i \in I$ *y* $\bigoplus_{i\in I} P_i \leqslant_{es} M\}$.

Demostración. Sea $\mathbb{D} = \{M \in R\text{-mod}$: existen una familia $\{P_i\}_{i\in I}$ y una familia de monomorfismos $\{f_i : P_i \longrightarrow N_i\}_{i\in I}$ tales que $N_i \in \mathbb{C}$ para toda $i \in I$ y $\bigoplus_{i\in I} P_i \leqslant_{es} M\}$.

$\subseteq]$ Sea $0 \neq M \in \xi_{R-nat}(\mathbb{C})$, entonces existen $0 \neq L \leqslant M$ y un monomorfismo $f : L \longrightarrow C$ para algún $C \in \mathbb{C}$. Sea $\{P_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos independientes máximos de M tales que $f_i : P_i \longrightarrow C_i$ es un monomorfismo para toda $i \in I$ con $C_i \in \mathbb{C}$. Entonces $\bigoplus_{i\in I} P_i \leqslant_{es} M$. Por lo tanto $M \in \mathbb{D}$.

$\supseteq]$ Sean $M \in \mathbb{D}$ y $0 \neq N \leqslant M$. Entones $0 \neq N \cap \bigoplus_{i\in I} P_i$. Así existe $0 \neq Rx \leqslant N$ con $i \in I$ y monomorfismos $f_i : Rx \longrightarrow P_i$ y $g_i : P_i \longrightarrow N_i$ con $N_i \in \mathbb{C}$. Por lo que $M \in \xi_{R-nat}(\mathbb{C})$. □

Observación: Sea $\{\mathbb{C}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases naturales. Entonces $\bigvee_{i\in I} \mathbb{C}_i = \{M \in R\text{-mod} : \text{existe } \bigoplus_{i\in I} N_i \leqslant_{es} M, \text{ con } N_i \in \mathbb{C}_i\}$.

Demostración. Sabemos por Lema 11 que $\bigvee_{i\in I} \mathbb{C}_i = \xi_{R-nat}(\bigcup_{i\in I} \mathbb{C}_i) = \{M \in R\text{-mod}$: existe una familia independiente máxima $\{P_i\}_{i\in I}$ con $P_i \leqslant M$ y monomorfismos $f_i : P_i \longrightarrow N_i$ con $N_i \in \bigcup_{i\in I} \mathbb{C}_i$ y con $\bigoplus_{i\in I} P_i \leqslant_{es} M\}$, entonces tenemos que $N_i \in \mathbb{C}_i$ para alguna $i \in I$, entonces $P_i \in \mathbb{C}_i$. □

Proposición 14. *Sea* $\mathbb{C}$ *una clase de módulos, entonces* $\mathbb{C}^{\perp} = \{M \in R\text{-}mód :$ *para todo* $0 \neq N \leqslant M$ *no existe un monomorfismo* $f : N \longrightarrow C$ *con* $C \in \mathbb{C}\}$ *es una clase natural.*

Demostración.

1. Sean $M \in \mathbb{C}^{\perp}$ y $N \leqslant M$. Supongamos que existe un monomorfismo $f : K \longrightarrow C$ para algún $0 \neq K \leqslant N$ y $C \in \mathbb{C}$. Como $K \leqslant M$ tendríamos que $M \notin \mathbb{C}^{\perp}$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $N \in \mathbb{C}^{\perp}$.

2. Sean $M \in \mathbb{C}^{\perp}$ y $0 \neq N \leqslant E(M)$. Supongamos que existe un monomorfismo $f : K \longrightarrow C$ con $0 \neq K \leqslant N$ y $C \in \mathbb{C}$. Como $0 \neq K \cap M \leqslant M$, entonces existe un monomorfismo $f : K \cap M \longrightarrow C$ con $C \in \mathbb{C}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $E(M) \in \mathbb{C}^{\perp}$.

3. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de submódulos de $\mathbb{C}^{\perp}$. Sea $0 \neq N \leqslant \bigoplus_{i \in I} M_i$ y supongamos que existe un monomorfismo $f : K \longrightarrow C$ con $0 \neq K \leqslant N$ y $C \in \mathbb{C}$. Por el Lema 11 existe $0 \neq U \leqslant K$, $j \in I$ y $L \leqslant M_j$ tal que $U \cong L \leqslant M_j$ y así $U \in \mathbb{C} \cap \mathbb{C}^{\perp}$, contradicción. Por lo tanto $\bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathbb{C}^{\perp}$.

Por lo tanto $\mathbb{C}^{\perp}$ es una clase natural. □

Proposición 15. *Sea* $\mathbb{C}$ *una clase natural. Entonces* $\mathbb{C}^{\perp}$ *cumple las siguientes propiedades:*

1. $\mathbb{C} \cap \mathbb{C}^{\perp} = \{0\}$.

2. $(\mathbb{C}^{\perp})^{\perp} = \mathbb{C}$.

3. $\mathbb{C} \vee \mathbb{C}^{\perp} = R$-*mod.*

Demostración. 1. Sea $M \in \mathbb{C} \cap \mathbb{C}^{\perp}$, si $0 \neq M \in \mathbb{C}^{\perp}$ tenemos que no existen $0 \neq L \leqslant M$ y un monomorfismo $g : L \longrightarrow C$ para $C \in \mathbb{C}$. Pero $M \xrightarrow{1_M} M$ es un monomorfismo $\neq \bar{0}$, con $M \in \mathbb{C}$, contradicción. Por lo tanto $\mathbb{C} \cap \mathbb{C}^{\perp} = \{0\}$.

2. $\subseteq$]. Sea $0 \neq M \in (\mathbb{C}^{\perp})^{\perp}$, entonces $M \notin \mathbb{C}^{\perp}$. Entonces existe $0 \neq N \leqslant M$ tal que $N \in \mathbb{C}$. Sea $\{N_i\}_{i \in I}$ una familia independiente máxima de submódulos de M que pertenecen a $\mathbb{C}$, así $\bigoplus_{i \in I} N_i \in \mathbb{C}$ y $\bigoplus_{i \in I} N_i \leqslant_{es} M$. Por lo tanto $M \in \mathbb{C}$, así $(\mathbb{C}^{\perp})^{\perp} \subseteq \mathbb{C}$.

   $\supseteq$]. Supongamos que existe $0 \neq M \in \mathbb{C} \backslash (\mathbb{C}^{\perp})^{\perp}$. Entonces existe $0 \neq N \leqslant M$, $K \in \mathbb{C}^{\perp}$ y un monomorfismo $f : N \longrightarrow K$. Así $N \in \mathbb{C} \cap \mathbb{C}^{\perp}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{C} = (\mathbb{C}^{\perp})^{\perp}$.

3. Sea $0 \neq M \in R$-mod. Si para todo $0 \neq N \leqslant M$ tenemos que $N \notin \mathbb{C}$, entonces $M \in \mathbb{C}^{\perp}$.

   Entonces podemos suponer que existe $0 \neq N \leqslant M$ y $N \in \mathbb{C}$. Sea $\{N_i\}_{i \in I}$ una familia independiente máxima de submódulos distintos de cero de M que pertenecen a $\mathbb{C}$. Entonces $\bigoplus_{i \in I} N_i \in \mathbb{C}$. Sea L un seudocomplemento de $\bigoplus_{i \in I} N_i$ en M.

   Si $L = 0$ entonces $\bigoplus_{i \in I} N_i \leqslant_{es} M$ y entonces $M \in \mathbb{C}$.

   Supongamos que $0 \neq L$ entonces $L \in \mathbb{C}^{\perp}$ ya que si $L \notin \mathbb{C}^{\perp}$, tendríamos que existen $0 \neq K \leqslant L$ y un monomorfismo $f : K \longrightarrow C$ con $C \in \mathbb{C}$. Por lo tanto $0 \neq K \leqslant M$, $K \in \mathbb{C}$ y así $\{N_i\}_{i\in I} \cup \{K\}$ es una familia independiente lo que es una contradicción a la elección de $\{N_i\}_{i\in I}$. Por lo tanto $(\bigoplus\limits_{i\in I} N_i) \oplus L \leqslant_{es} M$ y $(\bigoplus\limits_{i\in I} N_i) \oplus L \in \mathbb{C} \vee \mathbb{C}^{\perp}$, por lo tanto $M \in \mathbb{C} \vee \mathbb{C}^{\perp}$

$\square$

Teorema 2. *R-nat es distributiva.*

Demostración. Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ tres clases naturales y $M \in \mathbb{A} \wedge (\mathbb{B} \vee \mathbb{C})$. Entonces $M \in \mathbb{A}$ y $M \in \mathbb{B} \vee \mathbb{C}$, además por la proposición anterior inciso tres. $M \in R$-mod$= \mathbb{B} \vee \mathbb{B}^{\perp}$, así que existen $N, L \leqslant M$ tal que $N \oplus L \leqslant_{es} M$ con $N \in \mathbb{B}$ y $L \in \mathbb{B}^{\perp}$. Por lo que concluimos que $N \in \mathbb{A} \wedge \mathbb{B}$ al ser $N \leqslant M$ y $\mathbb{A}$ una clase natural. Por otro lado tenemos que $L \in \mathbb{B} \vee \mathbb{C}$ ya que $M \in \mathbb{B} \vee \mathbb{C}$ y $\mathbb{B} \vee \mathbb{C}$ es una clase cerrada bajo submódulos. Además $\mathbb{B} \vee \mathbb{C} = \xi_{R-nat}(\mathbb{B} \cup \mathbb{C})$ por lo que para $0 \neq K \leqslant L$ existen $0 \neq X \leqslant K$ y un monomorfismo $f : X \longrightarrow C$ con $C \in \mathbb{B} \vee \mathbb{C}$. Si $C \in \mathbb{B}$, entonces $L \in \xi_{R-nat}(\mathbb{B}) = \mathbb{B}$, pero $L \in \mathbb{B}^{\perp}$, contradicción. Por lo que $C \notin \mathbb{B}$ lo que implica que $C \in \mathbb{C}$. Se sigue que $L \in \xi_{R-nat}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Por lo tanto $L \in \mathbb{A} \wedge \mathbb{C}$. Así $N, L \leqslant M$ tal que $N \oplus L \leqslant_{es} M$ con $N \in \mathbb{A} \wedge \mathbb{B}$ y $L \in \mathbb{A} \wedge \mathbb{C}$. Ahora usando la observación anterior tenemos que $M \in (\mathbb{A} \wedge \mathbb{B}) \vee (\mathbb{A} \wedge \mathbb{C})$.

$\square$

1.3. R-tors

Definición 23. *Una clase de módulos $\mathbb{C}$ es una clase de torsión hereditaria si es cerrada bajo cocientes, sumas directas, extensiones y submódulos.*

Ejemplo 4. *La clase de los grupos abelianos de torsión $\mathbb{G}$ es una clase de torsión hereditaria.*

Demostración.

1. Sean $G \in \mathbb{G}$, $H \leqslant G$ y $x \in G/H$. P.D. x es de orden finito, sea $x = g + H$ para algún $g \in G$, como G es de torsión existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot g = 0$, así tenemos que $n \cdot (g + H) = n \cdot g + H = 0 + H = H$. Por lo tanto x es de torsión.

2. Sea $\{G_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{G}$. P.D. $\bigoplus\limits_{i \in I} G_i \in \mathbb{G}$. Sea $x \in \bigoplus\limits_{i \in I} G_i$, entonces $x = (x_i)_{i \in I}$. Sea $n = \prod\{m \in \mathbb{N} : \ m \cdot x_i = 0 \text{ para toda } i \in I\}$. Así $n \cdot x = (n \cdot x_i)_{i \in I} = 0$. Por lo tanto $\bigoplus\limits_{i \in I} G_i \in \mathbb{G}$.

3. Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tal que $A, C \in \mathbb{G}$. P.D. $B \in \mathbb{G}$. Sea $0 \neq x \in B$ si $x \in f(A)$ hemos terminado ya que $f(A) \cong A$. Supongamos que $x \notin f(A)$, entonces $g(x) \neq 0$ ya que $Im(f) = Nuc(g)$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot g(x) = 0$ pero $n \cdot g(x) = g(nx)$. Entonces $nx \in Nuc(g)$, luego $nx \in f(A)$, así nx es de torsión. Por lo tanto x es de torsión.

4. Sea $G \in \mathbb{G}$ y $H \leqslant G$. P.D. $H \in \mathbb{G}$. Sea $x \in H$, entonces $x \in G$ y así existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot x = 0$. Por lo tanto $H \in \mathbb{G}$.

$\square$

Definición 24. *Sea $\mathbb{F} \subseteq R$-mod una clase libre de torsión. Decimos que $\mathbb{F}$ es hereditaria si $\mathbb{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Ejemplo 5. *La clase de los módulos no singulares $\mathbb{NS}$ es una clase libre de torsión hereditaria.*

Para continuar con la siguiente demostración necesitamos la siguiente proposición.

Notación: $\mathcal{Z}(M)$denotará el submódulo singular de M.

Proposición 16. *Sea $M \in R$-mod. Entonces M es no singular si y sólo si $Hom(N, M) = 0$ para todo $N \in R$-mod singular.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que M es no singular. Sea N singular y $\alpha \in Hom(N, M)$. Entonces $\alpha(N) = \alpha(\mathcal{Z}(N)) \subseteq \mathcal{Z}(M) = 0$, por lo tanto $\alpha = 0$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $Hom(N, M) = 0$ para todo N singular, en particular para $\mathcal{Z}(M)$, entonces $Hom(\mathcal{Z}(M), M) = 0$, luego $i : \mathcal{Z}(N) \longrightarrow M$ es el morfismo cero. Por lo tanto $\mathcal{Z}(M) = 0$. $\square$

Demostración. La cerradura bajo extensiones, submódulos y cápsulas inyectivas la llevamos a cabo en la parte de R-nat. Resta probar que $\mathbb{NS}$ es cerrada bajo productos directos y extensiones.

1. Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{NS}$. P.D. $\prod_{i\in I} M_i \in \mathbb{NS}$. Sea $0 \neq x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$, es decir $\exists\, j \in J$ tal que $x_j \neq 0$. Supongamos $(0 : (x_i)_{i\in I}) \leqslant_{es} R$, $(0 : (x_i)_{i\in I}) = \bigcap_{i\in I}(0 : x_i)$. Entonces $(0 : x_i) \leqslant_{es} R\, \forall\, i \in I$. Si $x_j \neq 0$, entonces $0 \neq x_j \in \mathcal{Z}(M_j) = 0$, contradicción.

2. Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tal que $A, C \in \mathbb{NS}$. P.D. $B \in \mathbb{NS}$. Por la proposición anterior tenemos que $Hom(N, A) = \{\bar{0}\}$ y $Hom(N, C) = \{\bar{0}\}$ para todo módulo singular N. Sea M singular y $\alpha \in Hom(M, B)$, entonces $g \circ \alpha \in Hom(M, C) = 0$. Por la propiedad universal del núcleo, tenemos que existe $\beta : M \longrightarrow A$ tal que $f \circ \beta = \alpha$ pero $\beta \in Hom(M, A) = \{\bar{0}\}$ por lo que $\alpha = 0$ y por lo tanto B es no singular.

$\square$

Afirmación 10. *Sea $\mathbb{C}$ una clase de módulos. Entonces $\mathbb{F}_{\mathbb{C}} = \{M \in R\text{-mod} : Hom(N, E(M)) = 0$ para todo $N \in \mathbb{C}\}$ es una clase libre de torsión hereditaria.*

Demostración.

1. Sea $M \in \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$. P.D. $E(M) \in \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$. Pero como $E(E(M)) = E(M)$, tenemos el resultado.

2. Sean $M \in \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ y $N \leqslant M$ entonces $E(N) \leqslant E(M)$ por lo que $E(N) \oplus L = E(M)$ con L un módulo inyectivo. Entonces $0 = Hom(K, E(M)) = Hom(K, E(N) \oplus L) = Hom(K, E(N)) \oplus Hom(K, L)$ lo que implica que $Hom(K, E(N)) = 0$ para todo $K \in \mathbb{C}$.

3. Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ una familia de módulos. Sabemos que $E(\prod_{i\in I} M_i) \leqslant \prod_{i\in I} E(M_i)$ y que $Hom(K, \_)$ es un funtor exacto izquierdo. Entonces

$$Hom(K, E(\prod_{i\in I} M_i)) \leqslant Hom(K, \prod_{i\in I} E(M_i)) = \prod_{i\in I} Hom(K, E(M_i)) = 0.$$

Con esto $\mathbb{F}$ es una clase natural y por la Proposición 12. Tenemos que $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ es una clase libre de torsión hereditaria. □

Dada una clase de módulos $\mathbb{C}$ podemos definir $\mathbb{T}_{\mathbb{C}} = \{K \in R\text{-mod} : Hom(K, E(M)) = 0 \text{ para todo } M \in \mathbb{C}\}$.

Proposición 17. *Sea $\mathbb{C}$ una clase de torsión hereditaria. Entonces $\mathbb{C} = \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathbb{C}}}$*

Demostración. $\subseteq]$ Sean $M \in \mathbb{C}$ y $K \in \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$, entonces $Hom(M, E(K)) = 0$ de lo que $M \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathbb{C}}}$. Por lo tanto $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathbb{C}}}$.

$\supseteq]$ Sea $M \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathbb{C}}}$ y supongamos que $M \notin \mathbb{C}$. Consideremos $\mathcal{A} = \{N \in R\text{-mod} : N \leqslant M \ y \ N \in \mathbb{C}\}$, $\mathbb{A} \neq \emptyset$ ya que $\{0\} \in \mathcal{A}$. Como $\bigoplus \mathcal{A} \in \mathbb{C}$ tenemos que existe un epimorfismo $f : \bigoplus \mathcal{A} \longrightarrow \sum \mathcal{A}$, pero $t(M) = \sum \mathcal{A}$ y así $t(M)$ es el mayor submódulo de M que pertenece a $\mathbb{C}$. Por hipótesis $\frac{M}{t(M)} \neq 0$. Sea $N \in \mathbb{C}$ y $\alpha : N \longrightarrow \frac{M}{t(M)}$ un morfismo. Tenemos que existe $K \leqslant M$ tal que $f(N) = \frac{K}{t(M)} \in \mathbb{C}$ pues $\mathbb{C}$ es cerrado bajo cocientes. Consideremos la siguiente sucesión exacta con extremos en $\mathbb{C}$:

$$0 \longrightarrow t(M) \longrightarrow K \longrightarrow \frac{K}{t(M)} \longrightarrow 0$$

Como $\mathbb{C}$ es cerrada bajo extensiones tenemos que $K \in \mathbb{C}$. Entonces $t(M) =$

K y $\alpha = 0$. Por lo que ningún submódulo de $\frac{M}{t(M)}$ pertenece a $\mathbb{C}$. Por lo tanto $Hom(N, E\left(\frac{M}{t(M)}\right)) = 0$ para todo $N \in \mathbb{C}$, es decir, $\frac{M}{t(M)} \in \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ pero también $\frac{M}{t(M)} \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathbb{C}}}$, por hipótesis. Entonces $Hom(\frac{M}{t(M)}, E\left(\frac{M}{t(M)}\right)) = 0$ por lo que $\frac{M}{t(M)} = 0$. Así $M = t(M) \in \mathbb{C}$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $M \in \mathbb{C}$. □

Definición 25. *Una teoría de torsión hereditaria es una pareja $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F}_{\mathbb{T}})$, donde $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathbb{T}}}$ es una clase de torsión hereditaria y $\mathbb{F}_{\mathbb{T}}$ es la clase libre de torsión hereditaria correspondiente a $\mathbb{T}$*

Denotamos por R-tors la clase de todas las teorías de torsión en R-mod. Si $\tau \in R$-tors denotamos por $\mathbb{T}_\tau$ a la clase de torsión de hereditaria τ y por $\mathbb{F}_\tau$ a la clase libre de torsión correspondiente a τ.

Observación: Si $\tau, \sigma \in R$-tors. Entonces $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_\sigma \Leftrightarrow \mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathbb{F}_\tau$.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $M \in \mathbb{F}_\sigma$, entonces $Hom(M, E(N)) = 0$ para todo $N \in \mathbb{T}_\sigma$ es particular para $\mathbb{T}_\tau$, entonces $N \in \mathbb{F}_\tau$.

$\Leftarrow$] Sea $M \in \mathbb{T}_\tau$, entonces $Hom(M, E(N)) = 0$ para todo $N \in \mathbb{F}_\tau$ en particular para todo $N \in \mathbb{F}_\sigma$, entonces $M \in \mathbb{T}_\sigma$. □

Definición 26. *Sean $\tau, \sigma \in R$-tors. Decimos que $\tau \leqslant \sigma \Leftrightarrow \mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_\sigma \Leftrightarrow \mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathbb{F}_\tau$.*

Observación: Sea $\{\mathbb{T}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases de torsión hereditaria. Entonces $\bigcap_{i\in I} \mathbb{T}_i$ es una clase de torsión hereditaria.

Demostración. 1. Sean $M \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{T}_i$ y $N \leqslant M$, entonces $M \in \mathbb{T}_i$ para todo $i \in I$, entonces $\frac{M}{N} \in \mathbb{T}_i$ para todo $i \in I$ ya que cada $\mathbb{T}_i$ es cerrada bajo cocientes. Por lo tanto $\frac{M}{N} \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{T}_i$.

2. Sea $\{M_j\}_{j\in J} \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathbb{T}_i$ una familia de submódulos. Entonces $\{M_j\}_{j\in J} \subseteq \mathbb{T}_i$ para toda $i \in I$, entonces $\bigoplus_{j\in J} M_j \in \mathbb{T}_i$ para cada $i \in I$. Por lo tanto $\bigoplus_{j\in J} M_j \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{T}_i$.

3. Sea $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta tal que $A, C \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{T}_i$, entonces $A, C \in \mathbb{T}_i$ para toda $i \in I$ entonces $B \in \mathbb{T}_i$ para toda $i \in I$ y como cada $\mathbb{T}_i$ es cerrada bajo cocientes tenemos que $B \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{T}_i$.

4. Sea $M \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{T}_i$ y $N \leqslant M$. Ya que $M \in \mathbb{T}_i$ para cada $i \in I$ y cada $\mathbb{T}_i$ es cerrda bajo submódulos tenemos que $N \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{T}_i$.

□

Observación: Sea $\{\mathbb{F}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases libres de torsión hereditaria. Entonces $\bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i$ es una clase libre de torsión hereditarias.

Demostración. La demostración de que $\bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i$ es cerrada bajo submódulos y bajo extensiones es análoga a lo anterior. Resta probar que es cerrada bajo productos directos y cápsulas inyectivas.

1. Sea $\{M_j\}_{j\in J} \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i$ una familia de submódulos. Entonces $\{M_j\}_{j\in J} \subseteq \mathbb{F}_i$

para toda $i \in I$ y como cada $\mathbb{F}_i$ es cerrada bajo productos directos tenemos que $\prod_{j\in J} M_j \in \mathbb{F}_i$ para toda $i \in I$ entonces $\prod_{j\in J} M_j \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i$.

2. Sea $M \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i$. Entonces $M \in \mathbb{F}_i$ para toda $i \in I$ y como cada $\mathbb{F}_i$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas tenemos que $E(M) \in \mathbb{F}_i$ para toda $i \in I$. Por lo tanto $E(M) \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i$.

□

Definición 27. *Sea $\{\tau_i\}_{i\in I} \subseteq R$-tors.*

1. *Describimos el ínfimo de $\{\tau_i\}_{i\in I}$ en R-tors como $\bigwedge\{\tau_i\}_{i\in I} = \mathbb{T}_{\bigwedge\{\tau_i\}_{i\in I}} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{T}_i$.*

2. *Describimos el supremo de $\{\tau_i\}_{\in I}$ en R-tors como $\bigvee\{\tau_i\}_{i\in I} = \mathbb{F}_{\bigvee\{\tau_i\}_{i\in I}} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{F}_i$.*

Proposición 18. *Sean $\mathbb{C}$ una clase de módulos y $\chi(\mathbb{C}) = (\mathbb{T}_{\chi(\mathbb{C})}, \mathbb{F}_{\chi(\mathbb{C})})$ la teoría de torsión tal que $\mathbb{T}_{\chi(\mathbb{C})} = \{M \in R\text{-mod}: \ Hom(M, E(N)) = 0 \text{ para todo } N \in \mathbb{C}\}$. Entonces $\chi(\mathbb{C})$ es la mayor teoría de torsión tal que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{F}_{\chi(\mathbb{C})}$.*

Demostración. Tenemos que $\mathbb{F}_{\chi(\mathbb{C})} = \{N \in R\text{-mod} : \ Hom(M, E(N)) = 0$ para todo $M \in \mathbb{T}_{\chi(\mathbb{C})}\}$. Sean $N \in \mathbb{C}$ y $M \in \mathbb{T}_{\chi(\mathbb{C})}$, entonces $Hom(N, E(M)) = 0$ por lo que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{F}_{\chi(\mathbb{C})}$. Supongamos que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{F}_\tau$ con $\tau \in R$-tors. Sea $N \in \mathbb{F}_{\chi(\mathbb{C})}$. Supongamos que existe $0 \neq \alpha : M \longrightarrow E(N)$ con $M \in \mathbb{T}_\tau$. Como $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_{\chi(\mathbb{C})}$, tenemos que $0 \neq \alpha(M) \cap N \in \mathbb{F}_{\chi(\mathbb{C})} \cap \mathbb{T}_{\chi(\mathbb{C})} = \{0\}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{F}_{\chi(\mathbb{C})} \subseteq \mathbb{F}_\tau$. □

Proposición 19. *Sea $\mathbb{C}$ una clase de módulos y $\xi(\mathbb{C}) = (\mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\xi(\mathbb{C})}}, \mathbb{F}_{\xi(\mathbb{C})})$ la teoría de torsión tal que $\mathbb{F}_{\xi(\mathbb{C})} = \{N \in R\text{-mod} : \ Hom(M, E(N)) = 0$ para todo $M \in \mathbb{C}\}$. Entones $\xi(\mathbb{C})$ es la menor teoría de torsión tal que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{T}_{\xi(\mathbb{C})}$.*

Demostración. Análoga a la demostración anterior. □

Definición 28. *Sea $\mathbb{C}$ una clase de torsión.*

1. *Decimos que $\xi(\mathbb{C})$ es la teoría de torsión generada por $\mathbb{C}$.*

2. *Decimos que $\chi(\mathbb{C})$ es la teoría de torsión cogenerada por $\mathbb{C}$.*

Con esto tenemos que para toda teoría de torsión τ se cumple que: $\xi(0) \leqslant \tau \leqslant \chi(0)$. Es decir R-tors es una retícula completa con 0 y 1.

Proposición 20. *Sea $\tau = (\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ una teoría de torsión. Entonces existe un módulo inyectivo E tal que $\mathbb{T}_\tau = \{M \in R\text{-mod} : \ Hom(M, E) = 0\}$. Escribimos $\tau = \chi(E)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{M \in R\text{-mod} : \ Hom(M, E) = 0\}$ con $E = \prod\{E(\frac{R}{I}) : \frac{R}{I} \in \mathbb{F}_\tau\}$, así tenemos que E es un módulo inyectivo. Supongamos que $M \in \mathbb{T}_\tau$. Como $\frac{R}{I} \in \mathbb{F}_\tau$ tenemos que $E\left(\frac{R}{I}\right) \in \mathbb{F}_\tau$ y entonces $E \in \mathbb{F}_\tau$. Por lo tanto $Hom(M, E) = 0$, entonces $M \in \mathcal{A}$. Supongamos que $M \in \mathcal{A}$ y $M \notin \mathbb{T}_\tau$. Consideremos $t(M)$ el mayor submódulo de M que pertenece a $\mathbb{T}_\tau$. Sabemos que $0 \neq \frac{M}{t(M)} \in \mathbb{F}_\tau$. Sea $0 \neq Rx \leqslant \frac{M}{t(M)}$ un submódulo cíclico. Tenemos que $Rx \in \mathbb{F}_\tau$, además $Rx \cong \frac{R}{(0:x)}$ con $(0 : x)$ el anulador de x. Consideremos $0 \neq \pi : M \longrightarrow \frac{M}{t(M)}$ el epimorfismo canónico, entonces tenemos que $\pi^{-1}(Rx) \xrightarrow{\pi|} Rx \cong \frac{R}{(0:x)}$. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo ya que E es inyectivo:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(Rx) \arrow[rr] \arrow[d, "\pi|"] & & M \arrow[d, dashed, "f"] \\
\frac{R}{(0:x)} \arrow[r, "i_1"'] & E\left(\frac{R}{(0:x)}\right) \arrow[r, "i_2"'] & E
\end{tikzcd}$$

Como $i_2 i_1 \pi \neq 0$ entonces $f \neq 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $M \in \mathbb{T}_\tau$. $\square$

Proposición 21. *Las siguientes condiciones son equivalentes para $\tau \in R$-tors:*

1. *$\tau^\perp \in R$-tors y es un seudocomplemento de τ, es decir $\tau \wedge \tau^\perp = \xi$, además $\tau^\perp$ es máximo con esta propiedad.*

2. *$\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{M \in R\text{-mod} : \ Hom(M, E(T)) = 0$ para todo $T \in \mathbb{T}_\tau\}$.*

3. *$\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{M \in R\text{-mod} : \ Hom(M, E(C)) = 0$ para todo $C \in \mathbb{T}_\tau, \ C$ cíclico $\}$.*

4. *$\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{M \in R\text{-mod} : \ Hom(M, E(S)) = 0$ para todo $S \in \mathbb{T}_\tau, S$ simple $\}$.*

5. *$\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{M \in R\text{-mod} : \ M$ no tiene subcocientes distintos de cero en $\mathbb{T}_\tau\}$*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{M \in R\text{-mod} : \ Hom(M, E(T)) = 0 \text{ para todo } T \in \mathbb{T}_\tau\}$. Primero vamos a demostrar que $\mathcal{A} = \mathbb{T}_{\tau^\perp}$.

$\subseteq$] Sea $M \in \mathbb{T}_{\tau^\perp}$ y $0 \neq \alpha : M \longrightarrow E(T)$ con $T \in \mathbb{T}_\tau$. Entonces $0 \neq \alpha(M) \cap T \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{0\}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathbb{T}_{\tau^\perp} \subseteq \mathcal{A}$. $\supseteq$] Sea $M \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathcal{A}$, entonces $Hom(M, E(M)) = 0$, es decir, $M = 0$. Por lo tanto $\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \mathcal{A}$, ya que $\mathbb{T}_{\tau^\perp}$ es máximo con la propiedad de intersecar a $\mathbb{T}_\tau$ en 0.

Sea $\mathcal{B} = \{M \in R\text{-mod} : \ Hom(M, E(C)) = 0 \text{ para todo } C \in \mathbb{T}_\tau \ C \text{ cíclico } \}$ tenemos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ya que si se cumple para todo $T \in \mathbb{T}_\tau$, en particular para los cíclicos. Sea $\mathbb{C} = \{M \in R\text{-mod} : \ Hom(M, E(S)) = 0 \text{ para todo } S \in \mathbb{T}_\tau, \ S \text{ simple } \}$. Ya que todo módulo simple es cíclico tenemos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Ahora sea $\mathcal{D} = \{M \in R\text{-mod} : \ M \text{ no tiene subcocientes distintos de cero en } \mathbb{T}_\tau\}$. Veamos que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Supongamos que $M \in \mathcal{C}$ y que M tiene un subcociente $0 \neq N \in \mathbb{T}_\tau$. Como $\mathcal{C}$ es una clase de torsión hereditaria $N \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathcal{C}$. Sea $0 \neq Rx \leqslant N$. Entonces $Rx \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathcal{C}$ y tiene un cociente simple $S \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathcal{C}$. Tenemos que $Hom(Rx, E(S)) \neq 0$, lo que es una contradicción. Así $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$.

Ahora veamos que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$. Sea $M \in \mathcal{D}$ y $0 \neq \alpha : M \longrightarrow E(T)$ con $T \in \mathbb{T}_\tau$. Entonces $0 \neq \alpha(M) \cap T \in \mathbb{T}_\tau$ y es un subcociente de M, lo que es una contradicción. Por lo que $M \in \mathcal{A}$. Así tenemos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$. Las clases son iguales. $\square$

Por lo anterior tenemos que $\tau^\perp = \chi(R\text{-simp} \cap \mathbb{T}_\tau)$ con R-simp denotando el conjunto de clases de isomorfismo de módulos simples y $\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{M \in R\text{-mód} : Hom(M, E(S)) = 0 \text{ para todo } S \in \mathbb{T}_\tau, \ S \text{ simple } \}$.

Lema 12. *Si τ es una teoría de torsión entonces $\mathbb{F}_{\tau^\perp} = \{M \in R\text{-mod} :$ existe un* *monomorfismo* $\alpha : M \longrightarrow \prod_{i\in I} E(S_i)$ *con* $S \in \mathbb{T}_\tau$, S_i *simple para toda* $i \in I\}$.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{M \in R\text{-mod} :$ existe un morfismo $\alpha : M \longrightarrow \prod_{i\in I} E(S_i)$ con $S_i \in \mathbb{T}_\tau \cap R\text{-simp}\}$. $\mathcal{A}$ es hereditaria ya que si $N \leqslant M$ entonces $g : N \hookrightarrow M$ pero $f : M \longrightarrow \prod_{i\in I} E(S_i)$. Entonces $f \circ g$ funciona como monomorfismo. Ahora si tenemos $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia tal que existen $f_i : M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} E(S_i)$ monomorfismos, entonces tenemos $F : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{j\in J}(\prod_{i\in I} E(S_i))_j$ con $F((x_i)_{i\in I}) = (f_i(x_i))_{i\in I}$. Consideremos $M \in \mathcal{A}$, entonces podemos extender α mediante la cápsula inyectiva de M, ya que $\prod_{i\in I} E(S_i)$ es un módulo inyectivo. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \prod_{i\in I} E(S_i) \\ E(M) \arrow[ur, "\beta"] & \end{tikzcd}$$

Donde β es un monomorfismo ya que α es un monomorfismo esencial. Por lo tanto $E(M) \in \mathcal{A}$. Así tenemos que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas, productos directos y es hereditaria. Entonces $\mathcal{A}$ es una clase natural y por la Proposición 12 tenemos que $\mathcal{A}$ es una clase libre de torsión hereditaria tal que $R\text{-simp}\cap\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathcal{A}$. Por otro lado tenemos que $\tau^\perp = \chi(R\text{-mod} \cap \mathbb{T}_\tau)$ es la mayor teoría de torsión tal que $R\text{-simp}\cap\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. Por lo que $\mathbb{F}_{\tau^\perp} \subseteq \mathcal{A}$. Por otro lado si $M \in \mathcal{A}$ entonces $\alpha : M \longrightarrow \prod_{i\in I} E(S_i)$ con cada $S_i \in \mathbb{T}_\tau \cap R\text{-simp} \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. Entonces $E(S_i) \in \mathbb{F}_{\tau^\perp}$ para todo $i \in I$, así $\prod_{i\in I} \in \mathbb{F}_{\tau^\perp}$, entonces $M \in \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. Por lo tanto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. $\square$

Lema 13. *Sean* $\tau \in R$*-tors y* S *un módulo simple. Entonces* $S \in \mathbb{T}_\tau$ *o* $S \in \mathbb{F}_\tau$

Demostración. Sea S un módulo simple, ahora consideremos $t_\tau(S)$ el mayor submódulo de S que pertenece a $\mathbb{T}_\tau$. Como S es simple tenemos que $t_\tau(S) = 0$ o $t_\tau(S) = S$. Supongamos que $t_\tau(S) = 0$, entonces $S = \frac{S}{t_\tau(S)} \in \mathbb{F}_\tau$. $\square$

Lema 14. *Sean $\tau \in R$-tors y S un módulo simple. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. $S \in \mathbb{T}_{\tau^\perp}$.

2. $S \in \mathbb{F}_\tau$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2]$ Sea $0 \neq S$ un módulo simple tal que $S \in \mathbb{T}_{\tau^\perp}$. Por el lema anterior podemos suponer que $S \in \mathbb{T}_\tau$, pero tendríamos que $S \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{0\}$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $S \in \mathbb{F}_\tau$.

$2 \Rightarrow 1]$ Sea $S \in \mathbb{F}_\tau$. Entonces cualquier subcociente de S es isomorfo a S y así S no tiene subcocientes distintos de 0 en $\mathbb{T}_\tau$. Tenemos por la Proposición 21 (5) que $S \in \mathbb{T}_{\tau^\perp}$. $\square$

Teorema 3. *Sea R un anillo. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *R es semiartiniano izquierdo.*

2. *R-tors es Booleana.*

3. *Para toda $\tau \in R$-tors tenemos que $\tau = (\tau^\perp)^\perp$.*

4. Para toda $\tau \in R$-tors tenemos que $\tau = \xi(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A} \subseteq R$-simp.

Demostración. Recordemos que por la Proposición 21 (5) tenemos que $\mathbb{T}_{\tau^{\perp\perp}} = \{M \in R\text{-mod} : M \text{ no tiene subcocientes distintos de cero en } \mathbb{T}_{\tau^{\perp}}\}$ pero esto es lo mismo que decir que $\mathbb{T}_{\tau^{\perp\perp}} = \{M \in R\text{-mod} : \text{todo subcociente distinto de cero de } M \text{ tiene un subcociente distinto de cero en } \mathbb{T}_{\tau}\}$.

$4 \Rightarrow 2$] Tenemos que demostrar que $\chi(\_) = \tau \vee \tau^{\perp}$, es decir tenemos que ver que $\mathbb{F}_{\tau} \cap \mathbb{F}_{\tau^{\perp}} = \{0\}$. Sea $M \in \mathbb{F}_{\tau} \cap \mathbb{F}_{\tau^{\perp}}$. Consideremos la teoría de torsión generada por M es decir $\xi(M)$. Por hipótesis $\xi(M) = \xi(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A} \subseteq R$-simp. Afirmamos que existen un módulo simple $S \in \mathcal{A}$ y un monomorfismo $0 \neq \alpha : S \longrightarrow M$ de lo contrario tendríamos que $Hom(S, E(M)) = 0$ para todo $S \in \mathcal{A}$, es decir, $M \in \mathbb{F}_{\xi(\mathcal{A})}$, entonces $M \in \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{A})} \cap \mathbb{F}_{\xi(\mathcal{A})} = \{0\}$, lo que es una contradicción. Entonces M contiene un módulo simple S. Por lo que $S \in \mathbb{F}_{\tau} \cap \mathbb{F}_{\tau^{\perp}}$. Por el Lema 12 existe un monomorfismo $\beta : M \longrightarrow \prod_{i \in I} E(T_i)$ con $T_i \in R\text{-simp} \cap \mathbb{T}_{\tau}$ para todo $i \in I$. Entonces existe un monomorfismo $\gamma : S \longrightarrow E(T_j)$ para alguna $j \in I$. Así $S \cong T_j \in \mathbb{T}_{\tau}$, se sigue que $S \in \mathbb{T}_{\tau} \cap \mathbb{F}_{\tau} = \{0\}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $M = 0$.

$2 \Rightarrow 3$] Sean $\tau \in R$-tors y $\tau^{c} \in R$-tors su complemento. Es decir $\tau \wedge \tau^{c} = \xi$ y $\tau \vee \tau^{c} = \chi$. Ahora $\tau^{\perp} = \tau^{\perp} \wedge (\tau \vee \tau^{c}) = (\tau^{\perp} \wedge \tau) \vee (\tau^{\perp} \wedge \tau^{c}) = \xi \vee (\tau^{\perp} \wedge \tau^{c}) =$

$\tau^{\perp} \wedge \tau^{c} \leqslant \tau^{c}$. Pero $\tau^{\perp}$ es máximo con la propiedad de que $\tau^{\perp} \wedge \tau = \xi$. Por lo tanto $\tau^{\perp} = \tau^{c}$ por lo que $\tau = (\tau^{c})^{c} = (\tau^{\perp})^{\perp}$.

$3 \Rightarrow 1$] Sea $0 \neq M$ tal que $Zoc(M) = 0$. Consideremos la teoría de torsión cogenerada por M, entonces por hipótesis $\chi(M) = \chi(M)^{\perp\perp}$. Además $\mathbb{T}_{\chi(M)^{\perp\perp}} = \{N \in R\text{-mod} : \ Hom(N, E(S)) = 0 \text{ para todo } S \in R\text{-simp} \cap \mathbb{T}_{\chi(M)^{\perp}}\}$. Por el Lema 14 tenemos que $\mathbb{T}_{\chi(M)^{\perp\perp}} = \{N \in R\text{-mod} : \ Hom(N, E(S)) = 0 \text{ para todo } S \in R\text{-simp} \cap \mathbb{F}_{\chi(M)}\}$. Si $S \in R$-simp$\cap\mathbb{F}_{\chi(M)}$ entonces existe un monomorfismo $0 \neq \alpha : S \longrightarrow E(M)^{X}$ para algún conjunto X. Luego existe un monomorfismo $0 \neq \beta : S \longrightarrow E(M)$. Por lo tanto $\beta(S) \leqslant M$ y $\beta(M) \in R$-simp. Lo que es una contradicción pues $Zoc(M) = 0$ por hipótesis. Por lo que no existen módulos simples en $\mathbb{F}_{\xi(M)}$. Por lo que $\mathbb{T}_{\xi(M)^{\perp\perp}} = R\text{-mod} = \mathbb{T}_{\xi}$. Así $\xi(M) = \xi(M)^{\perp\perp} = \xi$. Por lo tanto $M \in \mathbb{F}_{\xi(M)} = \mathbb{F}_{\xi}$. Entonces $0 \neq M \in \mathbb{T}_{\xi} \cap \mathbb{F}_{\xi}$, lo que no es posible. También todo módulo izquierdo distinto de cero tiene zoclo distinto de cero. Por lo tanto R es semiartiniano izquierdo.

$1 \Rightarrow 4$] Sea $\tau \in R$-tors. Consideremos $\mathcal{A} = \{S \in R\text{-simp} : \ S \in \mathbb{T}_{\tau}\}$. Por hipótesis $\xi(\mathcal{A}) \leqslant \tau$. Supongamos que $M \in \mathbb{T}_{\tau}$ y que $M \notin \mathbb{T}_{\xi(\mathcal{A})}$. Entonces $0 \neq N = \frac{M}{t_{\xi(\mathcal{A})}(M)} \in \mathbb{T}_{\tau} \cap \mathbb{F}_{\xi(\mathcal{A})}$. Como R es semiartiniano izquierdo entonces N tiene un submódulo simple $S \in \mathbb{T}_{\tau}$, es decir $S \in \mathcal{A}$. Entonces $Hom(S, E(N)) \neq 0$

y $N \in \mathbb{F}_{\xi(\mathcal{A})}$. Lo que es una contradicción. Por lo tanto $\xi(\mathcal{A}) = \tau$. $\square$

A continuación describiremos algunas relaciones entre teorías de torsión y teorías de torsión hereditarias.

Proposición 22. *Todas las teorías de torsión de R-mod son hereditarias si y sólo si $Hom(M, N) = 0$ implica $Hom(K, N) = 0$ para todo $K \leqslant M$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $K \leqslant M$ y $Hom(M, N) = 0$. Entonces $\mathbb{T} = \{X \in R\text{-mod} : Hom(X, N) = 0\}$ es una clase de torsión tal que $M \in \mathbb{T}$, pero $K \leqslant M$ entonces $Hom(K, N) = 0$.

$\Leftarrow$] Sea $K \leqslant M$ y $\mathbb{T} = \{X \in R\text{-mod} : \; Hom(X, N) = 0\}$, supongamos que $M \in \mathbb{T}$ entonces $K \in \mathbb{T}$. $\square$

Proposición 23. *Si todas las teorías de torsión de R-mod son hereditarias, entonces todo módulo M tiene submódulos máximos.*

Demostración. Sea $\mathbb{C} = \{M \in R - mod : \; M$ no tiene cocientes simples $\}$.

Afirmación 11. $\mathbb{C}$ *es una clase de torsión.*

Demostración. (Afirmación)

1. Sea $M \in \mathbb{C}$ y $N \leqslant M$. Supongamos que M/N tiene un cociente simple, es decir que $\frac{M}{N} \twoheadrightarrow S$ con S simple. Pero tendríamos que $M \twoheadrightarrow \frac{M}{N} \twoheadrightarrow S$ entonces $M \twoheadrightarrow S$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $M/N \in \mathbb{C}$.

2. Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \to C \xrightarrow{g} 0$ tal que $A, C \in \mathbb{C}$ y supongamos que B tiene un cociente simple S. Notemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & C \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\beta"] & 0 \\
 & & S & &
\end{tikzcd}$$

Tenemos dos casos: Caso 1. Si $\pi(f(A)) \neq 0$ entonces $A \notin \mathbb{C}$ que es una contradicción. Caso 2. Si $\pi(f(A)) = 0$ entonces existe un único morfismo β de C en S por la propiedad universal del conúcleo, así $C \notin \mathbb{C}$, contradicción. Por lo tanto B no tiene cocientes simples, es decir, $B \in \mathbb{C}$.

3. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos de $\mathbb{C}$. Supongamos que $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ tiene un cociente simple, es decir, $h : \bigoplus\limits_{i \in I} \twoheadrightarrow S$ con S simple. Pero tenemos $f_i : M_i \hookrightarrow \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ y así tenemos que $hf_i : M_i \to S$ es un cociente simple de M_i lo que es una contradicción. Por lo tanto $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i \in \mathbb{C}$.

$\square$

Ahora como $\mathbb{C}$ es una clase de torsión sea $0 \neq Rx \leqslant M$ con $M \in \mathbb{C}$, entonces $Rx \in \mathbb{C}$ pero Rx tiene cocientes simples, entonces $\mathbb{C} = \{0\}$ y así tenemos que $\{M \in R-mod : \ M \text{ tiene cocientes simples } \} = R-mod$. Como todo $M \in R$-mod tiene cocientes simples tenemos que $f : M \twoheadrightarrow S$ y por el primer teorema de isomorfismo de Noether $M/Nuc(f) \cong S$. Por lo tanto todo módulo tiene submódulos máximos.

$\square$

Proposición 24. *Si todas las teorías de torsión de R-mod son hereditarias, entonces $Ext(S_1, S_2) = 0$ para cualesquiera módulos simples S_1, S_2 no isomorfos. (Es decir, que para todo $M \in R$-mod la siguiente sucesión se escinde: $0 \to S_2 \to M \to S_1 \to 0$)*

Demostración. Supongamos que $0 \to S_2 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} S_1 \to 0$ no se escinde. Entonces sea $h : M \to S_2$ con $h \neq 0$. Notemos que $hf \neq 0$ ya que si $hf = 0$ tendríamos que existe una una única $\alpha : S_1 \to S_2$ tal que $\alpha g = h$ por la propiedad universal del conúcleo entonces $\alpha \neq 0$ y así existe un morfismo de S_1 a S_2 con lo cual tendríamos que $S_1 \cong S_2$ lo que es una contradicción. Entonces $hf \neq 0$ de lo cual $hf : S_2 \to S_1$ es un isomorfismo. Notemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_2 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & S_1 \arrow[r] \arrow[dl] & 0 \\
 & & S_2 \arrow[ul] & &
\end{tikzcd}$$

Por lo que existe γ inverso de hf. Sea $\varphi = \gamma h$ y sea $a \in S_2$, así tenemos que $\gamma hf(a) = a$ lo que es una contradicción. Entonces $Hom(M, S_2) = 0$ y por lo tanto $Hom(S_2, S_2) = 0$ lo que es una contradicción. □

Proposición 25. *Si toda teoría de torsión es TLT entonces R es semiartiniano.*

Demostración. Ahora sea $\mathbb{T}_{\mathcal{S}}$ la teoría de torsión generada por R-simp. Por hipótesis $\mathbb{T}_{\mathcal{S}}$ es TLT, así $\mathbb{T}_{\mathcal{S}}$ es cerrada bajo productos, entonces existe I ideal mínimo idempotente tal que $R/I \in \mathbb{T}_{\mathcal{S}}$ por el Lema 23 si $0 \neq I$, entonces existe M máximo tal que $M \leqslant I$, así tenemos que

$$0 \longrightarrow \frac{I}{M} \longrightarrow \frac{R}{M} \longrightarrow \frac{\frac{R}{M}}{\frac{I}{M}} \cong \frac{R}{I} \longrightarrow 0$$

pero $\frac{I}{M} \in \mathbb{T}_{\mathcal{S}}$ ya que $\frac{I}{M} \cong S_0$ con S_0 un módulo simple y $\frac{R}{I} \in \mathbb{T}_{\mathcal{S}}$, entonces $\frac{R}{M} \in \mathbb{T}_{\mathcal{S}}$. Pero I era mínimo con la propiedad de que $\frac{R}{I} \in \mathbb{T}_{\mathcal{S}}$ entonces $I = 0$ así $R \in \mathbb{T}_{\mathcal{S}}$ por lo tanto R es semiartiniano. $\square$

Proposición 26. *Si toda teoría de torsión se escinde centralmente entonces toda teoría de torsión es TLT y estable.*

Demostración. Supongamos que toda teoría de torsión se escinde centralmente. P.D. Todas las teorías de torsión son TLT y estables:

a) Veamos que las teorías de torsión son TLT. Sea $(\mathbb{T}, \mathbb{F}_{\mathbb{T}})$ una teoría de torsión, como se escinde centralmente entonces $\mathbb{T} = \{M \in R\text{-mod} : \ eM = M\}$. P.D. $\cdot$) $\mathbb{T}$ es cerrada bajo productos y $\cdot\cdot$) $\mathbb{T}$ es cerrada bajo submódulos. $\cdot$) Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos de $\mathbb{T}$. P.D. $\prod_{i \in I} M_i \in \mathbb{T}$, es decir, que $e \prod_{i \in I} M_i = \prod_{i \in I} M_i$, pero sea $e(m_i)_{i \in I} = (em_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$ y también sea $(n_i)_{i \in I}$ con cada $n_i = em_i$, entonces $(n_i)_{i \in I} = (em_i)_{i \in I} = e(m_i)_{i \in I}$ por lo que $e \prod_{i \in I} M_i = \prod_{i \in I} eM_i = \prod_{i \in I} M_i$. Ahora $\cdot\cdot$) Sean $M \in \mathbb{T}$ y $N \leqslant M$. P.D. $eN = N$. Sea $n \in N$, entonces $n \in M$ por lo que $n = em$ para alguna $m \in M$, así $en = e(em) = em = n$ ya que e es idempotente.

b) Veamos que las teorías de torsión son estables. Sea $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ una teoría de torsión. P.D. $\mathbb{T}$ es estable, es decir que $\mathbb{T}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Tenemos que recordar que podemos construir $(\mathbb{C}_{\mathbb{T}},\mathbb{T},\mathbb{F}_{\mathbb{T}})$ por el teorema 1 entonces $(\mathbb{C}_{\mathbb{T}},\mathbb{T})$ es hereditaria, entonces $\mathbb{T}$ es cerrada bajo cápsulas y por lo tanto $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ es estable.

□

Proposición 27. *Si para toda teoría de torsión $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ de R-mod, el funtor $\mathtt{t}$: R-mod $\rightarrow$ R-mod tal que $\mathtt{t}(M)=t(M)$ es exacto. Entonces toda clase libre de torsión es una clase de torsión hereditaria.*

Demostración. Supongamos que para toda teoría de torsión $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ el funtor $\mathtt{t}$ es exacto. P.D. Toda clase libre de torsión es una clase de torsión, es decir, que $\mathbb{F}$ es cerrada bajo cocientes. Sea $\mathbb{F}$ una clase libre de torsión, sean $M\in\mathbb{F}$ y $N\leqslant M$. P.D. $\frac{M}{N}\in\mathbb{F}$. Sea

$$0\longrightarrow N\longrightarrow M\longrightarrow \frac{M}{N}\longrightarrow 0$$

la sucesión que siempre es exacta. Entonces tenemos por hipótesis que

$$0\longrightarrow t(N)\xrightarrow{f} t(M)\xrightarrow{g} t\left(\frac{M}{N}\right)\longrightarrow 0$$

es exacta. Como $M\in\mathbb{F}$ tenemos que $t(M)=0$ y ya que g es epimorfismo tenemos que $g(t(M))=g\left(\frac{M}{N}\right)$, pero $0=g(t(M))$, entonces $t\left(\frac{M}{N}\right)=0$. Por lo tanto $\frac{M}{N}\in\mathbb{F}$. Ahora veamos que $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ es hereditaria.

Afirmación 12. *Sea $M \in R$-mod. Si $N \leqslant M$ entonces $t(N) = t(M) \cap N$.*

Demostración. (Afirmación) Sabemos que

$$0 \to N \hookrightarrow M \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \frac{M}{N} \to 0.$$

Entonces

$$0 \to t(N) \hookrightarrow t(M) \twoheadrightarrow t(\frac{M}{N}) \to 0$$

Notemos que $Nuc(\pi|_{t(M)}) = t(N)$ por ser una sucesion exacta y por otro lado $Nuc(\pi|_{t(M)}) = \{m \in t(M) : \pi|_{t(M)}(m) = m + N = N\} = \{m \in t(M) : m \in N\} = t(M) \cap N$. $\square$

Recordemos que $\mathbb{T} = \{M \in R\text{-mod} : t(M) = M\}$ nos falta ver que $\mathbb{T}$ es cerrada bajo submódulos. Sea $M \in \mathbb{T}$ y $N \leqslant M$ por la afirmación tenemos que $t(N) = t(M) \cap N$, pero $M \in \mathbb{T}$, entonces $t(M) \cap N = M \cap N = N$. Por lo tanto $N \in \mathbb{T}$. $\square$

Capítulo 2

Un isomorfismo de retículas de R-nat a R-tors

Definición 29. *Sea $\mathbb{C} \subseteq$ R-mod. Definimos una funcional φ : R-mod $\longrightarrow$ R-mod tal que $\varphi(\mathbb{C}) = \{M \in \mathbb{C} : \text{ para todo } M \twoheadrightarrow K \text{ tenemos que } K \in \mathbb{C}\}$.*

Observación:

1. $\varphi(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$.

2. $\varphi(\mathbb{C})$ es cerrada bajo cocientes.

Demostración. 1. Sea $M \in \varphi(\mathbb{C})$ entonces $M \in \mathbb{C}$. Ya que M es un cociente de sí mismo.

2. Sean $M \in \varphi(M)$ y $f : M \twoheadrightarrow K$ un epimorfismo. P.D. $K \in \varphi(\mathbb{C})$, sea

$g : K \twoheadrightarrow L$ un epimorfismo. Entonces $f \circ g : M \twoheadrightarrow L$ es un epimorfismo, así $L \in \mathbb{C}$. Por lo tanto $K \in \varphi(\mathbb{C})$.

$\square$

Además observemos que si $\mathbb{D} \subseteq R$-mod, tal que $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ es cerrada bajo cocientes. Entonces $\varphi(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$, ya que si $M \in \mathbb{D}$ y $f : M \twoheadrightarrow K$ es un epimorfismo, entonces $K \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ por lo tanto $M \in \varphi(\mathbb{C})$.

Lema 15. *Si $\mathbb{C} \subseteq R$-mod es cerrada bajo extensiones, entonces $\mathbb{C}$ es cerrada bajo sumas directas finitas.*

Demostración. La demostración es por inducción. Base: Sean $M_1, M_2 \in \mathbb{C}$. Notemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi} M_2 \longrightarrow 0.$$

Entonces como $\mathbb{C}$ es cerrada bajo extensiones tenemos que $M_1 \oplus M_2 \in \mathbb{C}$.
H.I. $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \in \mathbb{C}$. P.D. $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \in \mathbb{C}$. Notemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \xrightarrow{i} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{\pi} M_n \longrightarrow 0$$

Y recordemos que suponemos que $M_n, \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \in \mathbb{C}$, como $\mathbb{C}$ es cerrada bajo extensiones tenemos que $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \in \mathbb{C}$. $\square$

Teorema 4. *Sea $\mathbb{C}$ una clase de módulos entonces las siguientes propiedades se cumplen:*

1. *Si $\mathbb{C}$ es una clase hereditaria. Entonces $\varphi(\mathbb{C})$ también es una clase hereditaria.*

2. *Si $\mathbb{C}$ es cerrada bajo extensiones, entonces $\varphi(\mathbb{C})$ también es cerrada bajo extensiones.*

3. *Si $\mathbb{C} \subseteq R$-nat. Entonces $\varphi(\mathbb{C})$ es cerrada bajo sumas directas.*

Demostración. Sea $\mathbb{C} \subseteq R$-mod.

1. Supongamos que $M \in \varphi(\mathbb{C})$ y que $\alpha : N \longrightarrow M$ es un monomorfismo. P.D. $N \in \varphi(\mathbb{C})$. Como $M \in \mathbb{C}$ y $\mathbb{C}$ es una clase hereditaria entonces $N \in \mathbb{C}$. Si $\beta : N \twoheadrightarrow L$ es un epimorfismo, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & M \\ L & \end{tikzcd}$$

   que podemos extender al coproducto fibrado, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & M \arrow[d, two heads] \\ L \arrow[r, tail] & P \end{tikzcd}$$

   Como $M \in \varphi(\mathbb{C})$ tenemos que $P \in \mathbb{C}$ y así $L \in \mathbb{C}$. Por lo tanto $N \in \mathbb{C}$.

2. Sean $A, C \in \varphi(\mathbb{C})$ y la siguiente sucesion exacta:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Tenemos que $B \in \varphi(\mathbb{C})$ ya que $\varphi(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$. Ahora notemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "h"] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed, two heads, "\bar{h}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & h(f(A)) \arrow[r, "\alpha"] & N \arrow[r, "\beta"] & \frac{N}{h(f(A))} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con $\bar{h}$ el epimorfismo inducido por la propiedad universal del conúcleo. Por hipótesis $h(f(A))$ y $\frac{N}{h(f(A))}$ pertenecen a $\mathbb{C}$ y como $\mathbb{C}$ es cerrada bajo extensiones de módulos tenemos que $N \in \mathbb{C}$.

3. Sean $\mathbb{C} \subseteq R$-nat y $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \varphi(\mathbb{C})$, como $\mathbb{C}$ es natural tenemos que $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i \in \mathbb{C}$. Sea $0 \neq f : \bigoplus\limits_{i \in I} M_i \twoheadrightarrow K$ un epimorfismo. Sea $0 \neq x \in K$, entonces existe $m_{i_j} \in M_{i_j}$ tales que $f(\sum\limits_{j=0}^{n} m_{i_j}) = x$, entonces $rx = rf(\sum\limits_{j=0}^{n} m_{i_j})$ para todo $r \in R$, por lo que $Rx \leqslant f(\bigoplus\limits_{j=1}^{n} M_{i_j})$. Así cada $M_{i_j} \in \varphi(\mathbb{C})$ por 2 del teorema y el lema anterior tenemos que $\bigoplus\limits_{j=1}^{n} M_{i_j} \in \varphi(\mathbb{C})$, entonces $f(\bigoplus\limits_{j=1}^{n} M_{i_j}) \in \varphi(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$, entonces $Rx \in \mathbb{C}$ y entonces $Rx \in \mathbb{C}$ para todo $0 \neq x \in K$ y por lo tanto $K \in \mathbb{C}$.

□

Corolario 2. *Sea $\mathbb{C} \in R$-nat. Entonces $\varphi(\mathbb{C})$ es la clase de torsión hereditaria más grande contenida en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Por el teorema anterior tenemos que $\varphi(\mathbb{C})$ es una clase de torsión hereditaria contenida en $\mathbb{C}$. Sea $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{C}$ una clase de torsión hereditaria, entonces $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo cocientes. Por lo tanto $\varphi(\mathbb{C}) \subseteq \varphi(\mathbb{C})$. $\square$

Definición 30. *Sea $\mathbb{C} \subseteq R$-mod. Definimos una funcional $\psi : R\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod}$ tal que $\psi(\mathbb{C}) = \{M \in R\text{-mod} : \ \exists\ f : M \rightarrowtail E(C) \text{ para algún } C \in \mathbb{C}\}$.*

Proposición 28. *Si $\mathbb{C} \subseteq R$-mod, entonces $\psi(\mathbb{C})$ es cerrada bajo submódulos y cápsulas inyectivas.*

Demostración. a) Sean $M \in \psi(\mathbb{C})$ y $N \leqslant M$, entonces tenemos que $N \hookrightarrow M \hookrightarrow E(C)$ para algún $C \in \mathbb{C}$ y por lo tanto $N \in \psi(\mathbb{C})$.

b) Sea $M \in \psi(\mathbb{C})$. P.D. $E(M) \in \psi(\mathbb{C})$. Recordemos que $M \leqslant_{es} E(M)$ y por la caracterización de $\psi(\mathbb{C})$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, tail, "g"] \arrow[dr] & & E(C) \\ & E(M) \arrow[ur, tail, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Para alguna $C \in \mathbb{C}$. Como $f : E(M) \longrightarrow E(C)$ es un monomorfismo, entonces $E(M) \in \psi(\mathbb{C})$.

$\square$

Lema 16. *Sea $\mathbb{C} \subseteq R$-mod. Entonces $\psi(\mathbb{C}) = \{N \in R\text{-mod} : N \text{ se sumerge en } M \text{ para algun } M \in \mathbb{C}\}$. Entonces $\psi(\mathbb{C})$ es la menor clase cerrada bajo submódulos y cápsulas inyectivas que contiene a $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sean $\mathbb{C} \subseteq R$-mod. $\psi(\mathbb{C})$ es una clase hereditaria ya que si $M \in \psi(\mathbb{C})$ y $N \leqslant M$, entonces M se sumerge en $E(K)$ para algún $K \in \mathbb{C}$ y entonces N se sumerge en $E(K)$. Si $N \in \psi(\mathbb{C})$, entonces N se sumerge en $E(M)$ con $M \in \mathbb{C}$. Entonces $E(N)$ se sumerge en $E(M)$ como antes y por lo tanto $E(N) \in \psi(\mathbb{C})$. Tenemos que $\mathbb{C} \subseteq \psi(\mathbb{C})$ ya que M se sumerge en su propia cápsula inyectiva. Ahora sea $\mathbb{D}$ una clase cerrada bajo submódulos y cápsulas inyectivas tal que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{D}$. Si $N \in \psi(\mathbb{C})$ entonces N se sumerge en $E(M)$ para algún $M \in \mathbb{C}$. Como $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{D}$ tenemos que $M \in \mathbb{D}$ y así $E(M) \in \mathbb{D}$, entonces $N \in \mathbb{D}$. Por lo tanto $\psi(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{D}$. □

Proposición 29. *Si $\mathbb{C}$ es una clase de torsión hereditaria, entonces $\psi(\mathbb{C})$ es una clase natural.*

Demostración. Resta probar que $\psi(\mathbb{C})$ es cerrada bajo sumas directas. Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \psi(\mathbb{C})$. Notemos que para cada M_i tenemos $f_i : M_i \overset{f_i}{\hookrightarrow} E(C_i)$ con $C_i \in \mathbb{C}$ y $i \in I$. Entonces tenemos una familia de monomorfismos $\{f_i\}_{i\in I}$ que inducen un monomorfismo $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} E(C_i)$ y $g : \bigoplus_{i\in I} E(C_i) \hookrightarrow E(\bigoplus_{i\in I} C_i)$. Como $\mathbb{C}$ es una clase de torsión hereditaria entonces $\bigoplus_{i\in I} C_i \in \mathbb{C}$ y la composición $g \circ f$ es un monomorfismo. □

Así tenemos una correspondencia entre los conjuntos R-nat y R-tors de la siguiente manera:

$$R\text{-nat} \xrightarrow{\varphi(\_)} R\text{-tors} \xrightarrow{\psi(\_)} R\text{-nat}$$

Proposición 30. *Si* $\mathbb{C}$ *una clase de torsión hereditaria entonces* $\varphi(\psi(\mathbb{C})) = \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $\mathbb{C}$ una clase de torsión hereditaria. $\supseteq$] Entonces $\mathbb{C} \subseteq \psi(\mathbb{C})$ y como $\mathbb{C}$ es cerrada bajo cocientes entonces $\mathbb{C} \subseteq \varphi(\psi(\mathbb{C}))$.

$\subseteq$] Supongamos que $M \in \varphi(\psi(\mathbb{C}))$ y que $M \notin \mathbb{C}$. Sea $c(M)$ el mayor submódulo de $\mathbb{C}$-torsión. Entonces $\frac{M}{c(M)}$ es un módulo libre de $\mathbb{C}$-torsión distinto de cero. Entonces $\frac{M}{c(M)} \in \psi(\mathbb{C})$. Entonces tenemos que existe $0 \neq f : \frac{M}{c(M)} \hookrightarrow E(C)$ para algún $C \in \mathbb{C}$, ya que C es esencial en $E(C)$ tenemos que $f(\frac{M}{c(M)}) \cap C \neq 0$ pero como $f(\frac{M}{c(M)}) \cong \frac{M}{c(M)}$ se sigue que $\frac{M}{c(M)} \cap C \in \mathbb{C} \cap \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$. Lo que es una contradicción. □

Proposición 31. *Sea* $\{\mathbb{C}_i\}_{i \in I}$ *una familia de clases de módulos. Entonces*

$$\varphi\left(\bigcap_{i \in I} \mathbb{C}_i\right) = \bigcap_{i \in I} \varphi(\mathbb{C}_i)$$

Demostración. $\subseteq$]Sean $M \in \varphi(\bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{C}_i)$ y $f : M \longrightarrow K$ un epimorfismo. Entonces $M, K \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{C}_i$ para toda $i \in I$, entonces $M, K \in \mathbb{C}_i$ para toda $i \in I$. Por lo tanto $M \in \bigcap\limits_{i \in I} \varphi(\mathbb{C}_i)$.

$\supseteq$] Sea $M \in \bigcap\limits_{i \in I} \varphi(\mathbb{C}_i)$ y $\alpha_i : M \longrightarrow K_i$ epimorfismos, con $K_i \in \mathbb{C}_i$ para toda $i \in I$ así $M \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{C}_i$. Por lo tanto $M \in \varphi\left(\bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{C}_i\right)$ □

Observación: Sea $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ dos clases de R-módulos tal que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{D}$. Entonces $\varphi(\mathbb{C}) \subseteq \varphi(\mathbb{D})$ y $\psi(\mathbb{C}) \subseteq \psi(\mathbb{D})$. Por lo tanto φ y ψ son morfismos de orden.

Demostración. a) Sea $M \in \varphi(\mathbb{C})$ y $\alpha : M \longrightarrow K$ con $K \in \mathbb{C}$, como $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{D}$ tenemos que $K \in \mathbb{D}$ entonces $M \in \varphi(\mathbb{D})$.

b) Sea $M \in \psi(\mathbb{C})$, entonces M se sumerge en algún $N \in \mathbb{C}$ y como $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{D}$ tenemos que $M \in \mathbb{D}$.

$\square$

Ejemplo 6. *Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los numeros enteros, entonces $\varphi(\mathbb{F}_{\tau_G}) = \{0\}$. Con $\mathbb{F}_{\tau_G}$ denotamos la clase de los grupos abelianos libres de torsión.*

Demostración. La clase $\mathbb{F}_{\tau_G}$ es hereditaria. Por el segundo ejemplo de clases naturales, entonces $\varphi(\mathbb{F}_{\tau_G})$ también es hereditaria. Supongamos que $0 \neq M \in \varphi(\mathbb{F}_{\tau_G})$, sea $0 \neq x \in M$, entonces $\mathbb{Z}x \leqslant M$, pero $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}x$, entonces $\mathbb{Z} \in \varphi(\mathbb{F}_{\tau_G})$, pero $\mathbb{Z}$ tiene cocientes de torsión distintos de cero como $\mathbb{Z}_n$, lo que es una contradicción. $\square$

Como R-nat y R-tors son retículas, es natural preguntarse si φ es un morfismo de retículas.

Observación: Notemos que $\varphi(\_) : \mathbb{Z}\text{-nat} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-tors}$ no preserva supremos.

Demostración. Sea $\mathbb{T}_{\tau_G}$ y $\mathbb{F}_{\tau_G}$ las clases de torsión y las libres de torsión de grupos abelianos. Ambas son clases naturales. Además $\mathbb{T}_{\tau_G}$ y $\mathbb{F}_{\tau_G}$ son complementos en R-nat, es decir, que $\mathbb{Z}$-mod$= \mathbb{T}_{\tau_G} \vee_{\mathbb{Z}-nat} \mathbb{F}_{\tau_G}$. Entonces $\mathbb{Z}$-mod$= \varphi(\mathbb{Z}\text{-mod}) = \varphi(\mathbb{T}_{\tau_G} \vee_{\mathbb{Z}-nat} \mathbb{F}_{\tau_G}) = \varphi(\mathbb{T}_{\tau_G}) \vee_{\mathbb{Z}-tors} \varphi(\mathbb{F}_{\tau_G}) = \mathbb{T}_{\tau_G} \vee_{\mathbb{Z}-tors} \{0\} = \mathbb{T}$. Pero $\mathbb{Z}$-mod$\neq \mathbb{T}_{\tau_G}$. $\square$

Proposición 32. *Para toda clase de torsión $\mathbb{T}_\tau$, $\varphi^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$ es cerrada bajo intersecciones.*

Demostración. Sea $\{\mathbb{C}\}_{i\in I} \subseteq \varphi^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$, pero $\varphi(\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{C}_i) = \bigcap\limits_{i\in I}\varphi(\mathbb{C}_{i\in I}) = \bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{T}_\tau = \mathbb{T}_\tau$. $\square$

Proposición 33. *Sea $\mathbb{T}_\tau$ una clase de torsión hereditaria. Entonces el menor elemento de $\varphi^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$ es $\psi(\mathbb{T}_\tau)$.*

Demostración. Por la Proposición 30 tenemos que $\varphi(\psi(\mathbb{T}_\tau)) = \mathbb{T}_\tau$. Entonces $\psi(\mathbb{T}_\tau)$ pertenece a $\varphi^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$. Supongamos que $\varphi(\mathbb{C}) = \mathbb{T}_\tau$ para alguna $\mathbb{C} \in R$-nat. Entonces $\mathbb{T}_\tau = \varphi(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ y por la Observación 2 tenemos que $\psi(\mathbb{T}_\tau) \subseteq \psi(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, ya que $\mathbb{C}$ es una clase natural. $\square$

Lema 17. *Sea $0 \neq \mathbb{T}_\tau$ una clase de torsión hereditaria. Entonces existe un módulo simple $S \in \mathbb{T}_\tau$.*

Demostración. Sea $0 \neq M \in \mathbb{T}_\tau$, entonces existe $0 \neq x \in M$, entonces $0 \neq Rx \leqslant M$, luego $Rx \in \mathbb{T}_\tau$ y Rx es finitamente generado así existe $N \leqslant Rx$ máximo. Consideremos $f : Rx \longrightarrow \frac{Rx}{N}$, notemos que $\frac{Rx}{N}$ es simple y $\frac{Rx}{N} \in \mathbb{T}_\tau$. Pues sea $\frac{Rx}{N} = S$. $\square$

Proposición 34. $\mathbb{F}_{zoc}$ *es el mayor elemento de $\varphi(\mathbb{T}_\tau)$ donde zoc denota Zoclo.*

Demostración. $\mathbb{F}_{zoc}$ es una clase libre de torsión hereditaria, en particular es natural. Supongamos que $\varphi(\mathbb{F}_{zoc}) \neq \mathbb{T}_\xi \neq \{0\}$. Por el lema anterior escojamos un $S \in R$-mod simple en $\varphi(\mathbb{F}_{zoc})$ pero no existen simples en $\mathbb{F}_{zoc}$. Entonces $\varphi(\mathbb{F}_\tau) = \mathbb{T}_\xi$. Ahora veamos que $\mathbb{F}_{zoc}$ es el elemento más grande en $\varphi^{-1}(\mathbb{T}_\xi)$. Sea

$\mathbb{C} \in R$-nat tal que $\varphi(\mathbb{C}) = \mathbb{T}_\xi$. Supongamos que existe un submódulo simple $S \in \mathbb{C}$ y denotemos por $\mathbb{D}$ a la clase natural generada por S, es decir, $\xi_{R-nat}(\{S\})$. Entonces $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ y así tenemos que $S \in \varphi(\mathbb{D}) \subseteq \varphi(\mathbb{C}) = \mathbb{T}_\tau$ lo que es una contradición. Entonces $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{F}_{zoc}$. □

Corolario 3. *Si R es un anillo semiartiniano izquierdo. Entonces $\varphi^{-1}(\mathbb{T}_\xi) = \{\bar{0}\}$.*

Demostración. Si R es semiartiniano izquierdo entonces para todo módulo $0 \neq M$ tenemos que $Zoc(M) \neq 0$ entonces $\mathbb{F}_{zoc} = \{0\}$ y como es el mayor elemento entonces $\varphi^{-1}(\mathbb{F}_{zoc}) = \{0\}$. □

Recordemos que $\mathbb{F}_{\tau^\perp} = \{M \in R\text{-mod} : \text{existe un monomorfismo } f : M \longrightarrow \prod\limits_{i \in I} E(S_i) \text{ con } S_i \in \mathbb{T}_\tau \text{ y } S_i \text{ simple para toda } i \in I\}$.

Proposición 35. *Si $\mathbb{F}_\tau$ es una clase de torsión hereditaria, entonces $\psi(\mathbb{T}_\tau) \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp}$.*

Demostración. Recordemos que por el Lema 8 de la sección 3 $\mathbb{F}_{\tau^\perp}$ es una clase natural tal que $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. Ahora como $\psi(\mathbb{T}_\tau)$ es la menor clase natural que contiene a $\mathbb{T}_\tau$, entonces $\psi(\mathbb{T}_\tau) \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. □

Recordemos que como R-nat es una retícula Booleana, entonces para clases naturales $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ podemos describir su supremo en R-nat como: $\mathbb{C} \vee \mathbb{D} = \{M \in R\text{-mod} : \exists\ K \in \mathbb{C} \text{ y } L \in \mathbb{D} \text{ tal que } K \oplus L \leqslant_{es} M\}$.

Teorema 5. *Sea $\tau \in R$-tors. Entonces las siguientes propiedades se cumplen:*

1. *Si* $\mathbb{C} \in \varphi^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$. *Entonces* $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee_{R-nat} \mathbb{F}_{zoc}$.

2. *Si* $\tau \in R$*-tors tiene complemento. Entonces el complemento es el elemento más grande en* $\varphi^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$ *es* $\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$.

Demostración. 1. Sea $\mathbb{C}$ una clase natural tal que $\varphi(\mathbb{C}) = \mathbb{T}_\tau$. Si $M \in \mathbb{C}$, por la Proposición 10 podemos escoger $K \leqslant M$ máximo en $\mathbb{F}_{\tau^\perp}$. Sea L un seudocomplemento de K en M. Entonces $L \oplus K \leqslant_{es} M$. Entonces por la descripcción del supremo en R-nat basta demostrar que $Zoc(L) = 0$. Supongamos que existe $S \leqslant L$ simple, si $S \in \mathbb{F}_{\tau^\perp}$ entonces $K \leqslant S \oplus K$ con $S \oplus K \in \mathbb{F}_{\tau^\perp}$, lo que es una contradicción por la elección de K, entonces $S \notin \mathbb{F}_{\tau\perp}$.Así $S \in \mathbb{F}_\tau$. Ahora como S es un subcociente de M entonces $S \in \mathbb{C} = \mathbb{T}_\tau$, lo que es una contradicción.

2. Por (1) basta demostrar que $\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc} \in \varphi^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$. Como $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. Entonces $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$y debido a que φ es un morfimso de orden tenemos que $\mathbb{T}_\tau = \varphi(\mathbb{T}_\tau) \subseteq \varphi(\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc})$. Supongamos que $M \in \varphi(\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc})$ entonces todo subcociente de M esta en $\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$. Supongamos que $M \notin \mathbb{T}_\tau$. Entonces sea $t_\tau(M)$ el mayor submódulo de τ-torsión de M. Si cambiamos M por $\frac{M}{t_\tau(M)} \neq 0$ si es necesario, entonces podemos suponer que $M \in \mathbb{F}_\tau$. Notemos

el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "f"] \arrow[dr, "\pi_j \circ f"'] & \prod_{i\in I} E(S_i) \arrow[d, two heads, "\pi_j"] \\ & E(S_j) \end{tikzcd}$$

con $\pi_i \circ f \neq 0$, para toda $i \in I$, donde π_i denota la i-ésima proyección. Así S_j es un subcociente de M para cada $j \in I$ ya que $0 \neq \pi_j \circ f(M) \leqslant E(S_j)$, luego $0 \neq S_j \cap \pi_j \circ f(M)$, así $S_j \leqslant \pi_j \circ f(M)$. Por lo tanto $S_j \in \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$ para cada $j \in I$. Entonces $S_j \in \mathbb{F}_{\tau^\perp}$, entonces $S_j \in \mathbb{T}_\tau$. Luego $M \in \mathbb{F}_{\tau^\perp} \cap \mathbb{F}_\tau = \{0\}$, lo que es una contradicción.

□

Corolario 4. *Si $\tau \in R$-tors tiene un complemento en R-tors, entonces $\varphi^{-1}(\mathbb{T}_\tau) = [\psi(\mathbb{T}_\tau), \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]$.*

Demostración. Ya que $\psi(\mathbb{T}_\tau)$ es la menor en $\varphi^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$ y por el teorema anterior $\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$ es la mayor. □

Teorema 6. *Sea $\tau \in R$-tors. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $\psi(\mathbb{T}_\tau) = \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$;

2. *Si $Zoc(M) = 0$ entonces $t_\tau(M) \leqslant_{es} M$.*

Demostración. Por el teorema anterior $\psi(\mathbb{T}_\tau \leqslant \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc})$. $1 \Rightarrow 2]$ Si $M \in \mathbb{F}_{zoc}$ entonces $M \in \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc} = \psi(\mathbb{T}\tau)$. Así existe un monomorfismo $\alpha : M \longrightarrow E(T)$ para algún $T \in \mathbb{T}_\tau$. Entonces cada submódulo de $0 \neq M$ tiene un submódulo de τ-torsión distinto de cero. Por lo tanto $t_\tau(M) \leqslant_{es} M$.

$2 \Rightarrow 1]$ Basta demostrar que $\psi(\mathbb{T}_\tau) \supseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$. Entonces sea $M \in \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$. Consideremos dos casos. Si $M \in \mathbb{F}_{zoc}$ entonces $t_\tau(M) \leqslant_{es}$ por hipótesis, entonces $E(t_\tau(M)) = E(M)$, por lo tanto $M \in \psi(t_\tau(M))$.

Si $M \notin \mathbb{F}_{zoc}$ entonces $Zoc(M) \neq 0$, más aún $Zoc(M) \in \mathbb{T}_{\tau^\perp}$ ya que cada submódulo simple de M esta en $\mathbb{F}_\tau$ y por lo tanto en $\mathbb{T}_\tau$.

Como $\mathbb{F}_{zoc}$ es una clase natural podemos tomar $L \leqslant M$ un submódulo máximo de M tal que $Zoc(L) = 0$. Entonces $Zoc(M) \oplus L \leqslant_{es} M$ y como $Zoc(L) = 0$, tenemos que $t_\tau(L) \leqslant_{es} L$ por hipótesis, así $L \in \psi(\mathbb{T}_\tau)$. Entonces $Zoc(M) \oplus L \in \psi(\mathbb{T}_\tau)$ y por lo tanto $M \in \psi(\mathbb{T}_\tau)$. $\square$

En lo que sigue los supremos y los infimos son considerados en R-nat.

Definición 31. *Sean τ, σ dos teorías de torsión hereditarias tales que $\tau \leqslant \sigma$. Definimos para los intervalos $[\psi(\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc})]$ y $[\psi(\mathbb{T}_\sigma), \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]$ en R-nat las siguientes funciones:*

$$\alpha : [\psi(\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc})] \longrightarrow [\psi(\mathbb{T}_\sigma), \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]$$

$$\mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C} \vee \psi(\mathbb{T}_\sigma)$$

y

$$\beta : [\psi(\mathbb{T}_\sigma), \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}] \longrightarrow [\psi(\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc})]$$

$$\mathbb{D} \longmapsto \mathbb{D} \wedge (\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}).$$

Teorema 7. *Sean α y β como en la definición anterior. Entonces $\alpha \circ \beta = id_{[\psi(\mathbb{T}_\sigma), \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]}$.*

Demostración. Sea $\mathbb{D} \in [\psi(\mathbb{T}_\sigma), \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]$. Como R-nat es una retícula distributiva, entonces $(\mathbb{D} \wedge (\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc})) \vee \psi(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{D} \wedge ((\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}) \vee \psi(\mathbb{T}_\sigma)) \leqslant \mathbb{D}$. Para la otra desigualdas basta demostrar que $(\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}) \vee \psi(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$. Por Teorema 5 $\psi(\mathbb{T}_\sigma) \leqslant \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$ y también $\mathbb{F}_{\tau^\perp} \subseteq \mathbb{F}_{\sigma^\perp}$ ya que $\tau \leqslant \sigma$. Entonces $(\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}) \vee \psi(\mathbb{T}_\sigma) \leqslant \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$. Veamos la otra desigualdad. Si $M \in \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$, entonces existen módulos $K \in \mathbb{F}_{\sigma^\perp}$ y $L \in \mathbb{F}_{zoc}$ tal que $K \oplus L \leqslant_{es} M$. Si $K \in \mathbb{F}_{zoc}$ entonces $M \in \mathbb{F}_{zoc}$ y así $M \in (\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}) \vee \psi(\mathbb{T}_\sigma)$. Supongamos que $Zoc(K) \neq 0$. Sabemos que si un módulo simple pertenece a $\mathbb{F}_{\sigma^\perp}$, entonces también pertenece a $\mathbb{T}_\sigma$, por lo tanto $Zoc(K)$ pertenece a $\mathbb{T}_\sigma$. Sea L' un pseudocomplemento de $Zoc(K)$ en K. Entonces $Zoc(K) \oplus L' \leqslant_{es} K$ con $Zoc(K) \in \psi(\mathbb{T}_\sigma)$ y $L' \in \mathbb{F}_{zoc}$. Entonces $K \in \psi(\mathbb{T}_\sigma) \vee \mathbb{F}_{zoc}$. Por lo tanto $M \in (\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc})\psi(\mathbb{T}_\sigma)$ □

Corolario 5. *Si R es un anillo semiartiniano izquierdo. Entonces $\varphi^{-1}(\mathbb{T})$ tiene un único elemento para cada $\tau \in R$-tors.*

Demostración. Si R es semiartiniano izquierdo entonces $\varphi^{-1}(\mathbb{T}_\xi) = \{\{0\}\}$ y por el

Teorema 5 $\{\{0\}\} = [\psi(\mathbb{T}\xi), \mathbb{F}_{\xi^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]$ y por el teorema anterior tenemos que para toda $\xi \leqslant \sigma$, entonces $[\psi(\mathbb{T}_\sigma), \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]$ se sumerge en $[\psi(\mathbb{T}_\xi), \mathbb{F}_{\xi^\perp}] = \{\{0\}\}$. $\square$

Teorema 8. *Sea R un anillo entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\varphi : R$-nat$\longrightarrow R$-tors es un isomorfismo de retículas.*

2. *$\varphi : R$-nat$\longrightarrow R$-tors es un morfismo de retículas.*

3. *R-tors es una retícula Booleana.*

4. *R es un anillo semiartiniano izquierdo.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2]$ Es claro.

$2 \Rightarrow 3]$ Si $\varphi(\_) : R\text{-nat} \longrightarrow R\text{-tors}$ es un morfismo de retículas entonces manda complementos en complementos. Como R-nat es una retícula Booleana entonces por hipótesis R-tors es una retícula complementada. Por lo tanto R-tors es una retícula Booleana.

$3 \Rightarrow 4]$ Por el Teorema 3.

$4 \Rightarrow 1]$ Como R es un anillo semiartiniano izquierdo entonces por el corolario anterior cada $\varphi^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$ tiene un único elemento. Entonces $\varphi(\_)$ es inyectiva y como

$\varphi(\_)$ siempre es suprayectiva tenemos una biyección.

Entonces $\psi(\_)$ y $\varphi(\_)$ son isomorfismos de orden y son inversos uno del otro así que $\varphi(\_)$ y $\psi(\_)$ son isomorfismos de retículas. $\square$

Capítulo 3

Apéndice

3.1. Ordinales

Esta sección no es un estudio completo de los ordinales ya que no es parte de nuestro objetivo. Para un estudio más completo de la clases de ordinales nos referimos a 10. Pero es importante y necesario mencionar algunos hechos. Denotaremos por ORD a la clase de ordinales.

Lema 18. *Sea X un conjunto de ordinales entonces $(X, \leqslant)$ es un conjunto bien ordenado.*

Demostración. Damos por hecho que $(X, \leqslant)$ es un conjunto ordenado, consultar 10. Veamos que $(X, \leqslant)$ es bien ordenado. Sean $\emptyset \neq A \subseteq X$ y $\alpha \in A$, consideremos $\alpha \cap A$, así tenemos dos casos: Caso 1) Si $\alpha \cap A = \emptyset$ entonces α es el primer elemento ya que $\alpha = 0$ como ordinal. Caso 2) Si $\alpha \cap A \neq \emptyset$ tenemos que $\alpha \cap A \subseteq \alpha$ entonces α tiene un primer elemento β con el orden $\in_\alpha$ y así β es el primer elemento de A con el orden $\leqslant$. □

Teorema 9. *(Principio de Inducción Transfinita) Sea $P(x)$ una propiedad. Supongamos que para todos los número ordinales α si $P(\beta)$ se cumple para todo $\beta < \alpha$, entonces $P(\alpha)$ se cumple. Entonces tenemos que para todo ordinal γ, $P(\gamma)$ se cumple.*

Demostración. Supongamos que existe un ordinal φ tal que $P(\varphi)$ no se cumple. Sea $B = \{\alpha \leqslant \varphi : \ P(\alpha) \text{ no se cumple } \}$. $\varphi \in B$ y usando el principio del buen orden tenemos que hay α_0 primer elemento de B así $P(\alpha_0)$ no se cumple, pero $P(\gamma)$ se cumple para todo $\gamma \leqslant \alpha_0$ lo que contradice nuestra hipótesis. □

Teorema 10. *(Segunda versión del Principio de Inducción Transfinita) Sea $P(x)$ una propiedad sobre la clase de ordinales, tal que:*

1. *$P(0)$ se cumple.*

2. *Si $P(\alpha)$ entonces $P(\alpha + 1)$ para todo ordinal α.*

3. *Si α es un ordinal límite tal que $\alpha \neq 0$ y para todo $\beta < \alpha$ se cumple que $P(\beta)$ entonces $P(\alpha)$.*

Entonces $P(\gamma)$ se cumple para todo ordinal γ.

Demostración. Basta demostrar que de las nuevas condiciones del teorema se satisface el principio de inducción trasfinita. Sea α un ordinal tal que para todo $\beta < \alpha$, $P(\beta)$ se cumple. Si $\alpha = 0$ entonces $P(\alpha)$ se satisface por 1 Si α es un ordinal sucesor, es decir hay γ ordinal tal que $\alpha = \gamma + 1$ entonces $\gamma < \alpha$ entonces $P(\gamma)$ se satisface por hipótesis y por 2 tenemos $P(\gamma+1) = P(\alpha)$. Si α es un ordinal límite $P(\alpha)$ se satisface por 3. $\square$

Bibliografía

[1] Alvarado A., Rincón H., Ríos J., (2001), On the lattices of natural and conatural classes in R-mod, Comm. Algebra, 29(2): 541-556.

[2] Alvarado A., Rincón H., Ríos J., (2006), On some lattices of module classes. Journal of Algebra and Its Applications, 5(1): 105-117.

[3] Alvarado A., Rincón H., Cejudo C.C., Vilchis M.F., (2013), Rings for which the lattice of hereditary torsion theories and the lattice of natural classes are isomorphic, Communications in Algebra, 41:11, 4089-4097.

[4] Bass H., (1960), Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings, Tranr. Am. Math. Soc., 90: 466-488.

[5] Bronowitz R. y Teply M.L., (1973), Torsion theories of simple type, J. Pure Appl. Algebra, 3: 329-336.

[6] Dauns J., Zhou Y., (2006), Classes of modules, Pure and Applied Mathematics, Vol. 281, Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC.

[7] Dickson S.E., (1966), A torsion theory for abelian categories, Trans. Am. Math. Soc. 121: 223-235.

[8] Dickson S.E., (1968), Decomposition of modules II. Rings without chain conditions, Math. Z. 104: 349-357.

[9] Golan J., (1986), Torsion Theories, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 29 , Harlow: Longman Scientific and Technical; New York: John Wiley and Sons.

[10] Hernández H.F. , (1998), Teoría de Conjuntos, Sociedad Matemática Mexicana.

[11] Jans J.P., (1965), Some aspects of torsion, Pacific J. Math. 15: 1249-1259.

[12] Kasch F., (1982), Modules and Rings, London: Academic Press. Inc.

[13] Năstăsescu C. y Popescu N., (1968), Anneaux semi-artiniens, Bull. Soc. Math. France 96: 357-368.

[14] Page S., Zhou Y., (1994), On direct sums of injective modules and chain conditions, Canad. J. Math. 46(3): 634-647.

[15] Stenström B., (1975), Rings of Quotients, New York: Springer-Verlag.

[16] Teply M.L., (1970), Homological dimension and splitting torsion theories, Pacific J. Math. 34: 193-205.

[17] Zhou Y., (1996), The lattice of natural classes of modules, Comm. Algebra, 24(5): 1637-1648.

[18] Zhou Y., (1997), Relative chain conditions and module classes, Comm Algebra, 25(2): 543-557.

[19] Zhou Y., (1999), The lattice of pre-natural classes of modules, J. Pure Appl. Algebra, 140(2): 191-207.