



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**FUNCIONES ORTOGONALES
MTRICIALES QUE SON AUTOFUNCIONES
DE UN OPERADOR DIFERENCIAL Y DE
UNO INTEGRAL**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ALFREDO VALVERDE DE LOYOLA

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. MANUEL DOMÍNGUEZ DE LA IGLESIA**

2016



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Valverde

de Loyola

Alfredo

55 19 23 12 65

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

305671444

2. Datos del tutor

Dr.

Manuel

Domínguez

de la Iglesia

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Ernesto

Rosales

González

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Pedro

González Casanova

Henríquez

5. Datos del sinodal 3

Dr.

José Lino

Samaniego

Mendoza

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Bernardo

Vargas

Cárdenas

7. Datos del trabajo escrito

Funciones ortogonales matriciales que son autofunciones de un operador diferencial y de uno integral

120 pgs.

2016

Al padrino José Encarnación

Agradecimientos

Esta investigación se logró gracias al apoyo que he recibido de parte de mis familiares, amigos y compañeros, además de los profesores de la Facultad de Ciencias de la UNAM como Diana Avella, Manuel Lara, Javier Fernández y Rosa María Couvert, de quienes he aprendido mucho y han transformado mi vida con sus lecciones. Agradezco especialmente a mis padres y a mis hermanos por su ánimo y a la familia Shaw Legarreta por su ayuda, compañía, inspiración y amistad.

También agradezco a quienes desarrollaron GNU-Octave, Maxima y L^AT_EX, software que es de gran utilidad, y a los héroes anónimos que hicieron plantillas, manuales o resuelven dudas en internet.

Además quiero agradecer a mi tutor por su atención, disciplina y seguimiento responsable y continuo durante todo el tiempo que estuve escribiendo esto, y al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) por el apoyo económico que me otorgaron.

Investigación realizada gracias al Programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IA100515. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Alfredo Valverde de Loyola. Ciudad de México, Agosto 2016

Introducción

Una de las herramientas fundamentales a la hora de estudiar todo espacio vectorial es la búsqueda de una base ortonormal asociada a ese espacio; ubicamos cada elemento de él por medio de sus coordenadas en el campo, únicas respecto de una base dada. Si la dimensión es finita cualquier elemento puede expresarse como combinación lineal de elementos de esa base. Sin embargo, cuando la dimensión es infinita es necesario usar otras técnicas que provienen del análisis funcional.

En esta tesis trabajaremos con un espacio normado de funciones que es completo con esa norma. Además, la norma es inducida por un producto interno, por lo que el espacio es de Hilbert y entonces podemos proyectar un vector en otro unitario obteniendo su componente para aproximar el elemento en términos de un subconjunto linealmente independiente. Para estudiar más detalladamente el análisis matemático que estamos haciendo nos referimos a [Rud53]. En virtud de sus propiedades usaremos un concepto parecido al de base: los sistemas completos.

Detalles acerca de teoría de la medida pueden encontrarse en [Bar66], un panorama introductorio sobre el análisis armónico se encuentra en [Kra99] y tratados enfocados al análisis de Fourier usual son, por ejemplo, [BW10, SW71, Wie33, DK72, Tit37]. Al principio daremos una breve introducción a la teoría fundamental de ortonormalidad, completitud, medida de Lebesgue y análisis de Fourier, y su notación.

Acercamiento a las funciones de Hermite

Al derivar n veces la función gaussiana e^{-x^2} resulta un polinomio $H_n(x)$ de grado n multiplicado por la misma gaussiana, por lo que basta multiplicar por la inversa de ésta para obtener un polinomio de grado n :

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Esta fórmula es un caso particular de la llamada *fórmula de Rodrigues* para construir los denominados *polinomios de Hermite*. Esta construcción favorece expresiones integrales de esos polinomios en términos de la función exponencial, relaciona las derivadas del polinomio con los del grado anterior y siguiente, de manera que se obtienen relaciones recursi-

Introducción

vas y de pocos términos y generalizándolas podemos encontrar y clasificar más familias de polinomios ortogonales. Muchas propiedades de los polinomios ortogonales se estudian en [AAR99, BW10, Chi78, Leb65, A33].

Considerando esa gaussiana como una función de densidad del espacio, se induce una norma a partir del producto interno ponderado con esa densidad,

$$\|H_n\|_{e^{-x^2}}^2 = \int_{\mathbb{R}} |H_n(x)|^2 e^{-x^2} dx,$$

lo que permite incluir a los polinomios de Hermite en un espacio de Hilbert con el producto interno ponderado por la densidad e^{-x^2} , y sus propiedades se extienden fácilmente a las funciones, es decir

$$\phi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x),$$

resultado de multiplicar los polinomios por la raíz cuadrada de la función de densidad en el espacio de Lebesgue usual; por lo que su norma es la misma que la de los polinomios y tienen las mismas propiedades, pero en ese espacio. Estas son las *funciones de Hermite*.

Existen otras maneras de generar los polinomios de Hermite, como son el método de Gram-Schmidt, los momentos de la función gaussiana, o relaciones de recurrencia, las cuales describiremos.

Las funciones de Hermite tienen excelentes propiedades. Son un *sistema completo ortonormal* del espacio de Lebesgue, por lo que cualquier función cuadrado-integrable puede descomponerse en una única serie de múltiplos escalares de funciones de Hermite, y su respectivo coeficiente se obtiene sencillamente con el producto interno. Asimismo, como veremos, son autofunciones tanto del operador de Schrödinger con potencial cuadrático como de la transformada de Fourier en el espacio de Lebesgue, con lo cual se prueba que esos operadores conmutan en ese espacio.

Tienen como aplicación, entre otras, la modelación del oscilador armónico cuántico (véase [PW35]), pues son autofunciones del operador de Schrödinger con potencial cuadrático que lo describe; veremos que esto es indispensable para demostrar que los niveles de energía del electrón aumentan en cantidades constantes, que es fundamental en la mecánica cuántica. Su decaimiento exponencial las localiza simultáneamente en tiempo y en frecuencia, lo cual era un desafío en los inicios del análisis de Fourier.

Extensión a funciones matriciales

Mostraremos un camino para generalizar a las funciones de Hermite, describiendo un sistema completo ortonormal de funciones matriciales con las mismas propiedades, especialmente como solución de una ecuación diferencial de segundo orden matricial del mismo tipo que la del oscilador armónico cuántico.

Se estudiará el espacio de polinomios matriciales y después el de funciones matriciales. Para ello será necesaria la teoría de polinomios ortogonales matriciales, donde ahora la ortogonalidad viene dada en términos de una matriz peso. Definimos una matriz de medidas que generaliza la gaussiana del caso escalar, cumpliendo las propiedades esenciales. Notamos que en el caso matricial existe una estructura mucho más rica que en el caso escalar y estudiaremos dos ejemplos distintos que verifican ecuaciones diferenciales tipo Schrödinger. Veremos que los operadores y sus familias asociadas colapsan en el mismo caso para el caso escalar.

Explicaremos cómo las propiedades de las funciones de Hermite se entienden y verifican en este espacio más general. El carácter no conmutativo de la situación requiere más detalle y esfuerzo para obtener los resultados; en [HJ85, Hall04] encontramos muchas propiedades del álgebra de matrices.

Se explicará un método reciente para encontrar ejemplos de polinomios ortogonales matriciales que son autofunciones de un operador diferencial de segundo orden ([DG04, Dur09]). Este tipo de sistemas completos ortogonales permiten simplificar el estudio del comportamiento de esos operadores en el espacio.

Siguiendo el mismo razonamiento que para los resultados clásicos, se estudiarán dos ejemplos específicos de funciones ortogonales matriciales encontrados con dicho método que resultan ser completas en el espacio de Lebesgue de funciones matriciales y que son autofunciones tanto de un operador matricial diferencial de tipo Schrödinger como de un operador matricial integral de tipo Fourier. La referencia principal que se usará para eso es [Igl11].

Organización del contenido

En el Capítulo 1 se recuerdan los conceptos básicos de análisis matemático de espacios métricos, de medida y el análisis de Fourier que se usarán para las funciones escalares.

En el Capítulo 2 estudiamos las diferentes construcciones de los polinomios de Hermite, probamos de distintas formas sus propiedades de ortogonalidad y completitud y que satisfacen ecuaciones diferenciales de segundo orden. Mostramos expresiones explícitas, ecuaciones integrales, sus propiedades al ser derivadas y fórmulas recursivas. Después se introducen las funciones de Hermite y demostramos que son autofunciones de la transformada de Fourier y del operador de Schrödinger con potencial cuadrático y estudiamos cómo también tienen muchas de las propiedades de los polinomios; se demuestra su completitud en el espacio de Lebesgue y se habla de su aplicación en la mecánica cuántica.

En el Capítulo 3 se introducen los conceptos de las funciones de variable real a valores matriciales como generalización del caso escalar; se introduce la noción de matriz peso o densidad matricial $W(t)$ y el operador diferencial de segundo orden matricial. Después se presenta un método para encontrar familias de polinomios matriciales ortogonales con respecto al producto interno ponderado con $W(t)$ que son solución de la ecuación diferencial de segundo orden, y dos ejemplos de familias distintas obtenidas por este método. Al final del

Introducción

capítulo se define el espacio de Lebesgue generalizado de funciones matriciales.

En el Capítulo 4 se estudian más detalladamente los dos ejemplos obtenidos usando el método previamente descrito en el Capítulo 3. Se introduce un operador integral de tipo Fourier para cada uno de ellos, dando propiedades que generalizan algunas del Capítulo 2 y comparándose; después se estudia el caso concreto de dimensión 2×2 para cada uno de ellos, y conclusiones.

El tema tratado es bastante nuevo en matemáticas y existen muchas preguntas abiertas relacionadas, como la clasificación de todas las familias de polinomios ortogonales matriciales que sean autofunciones de un operador diferencial de segundo orden, cómo definir un operador integral que generalice aceptablemente a la transformada de Fourier, y sus aplicaciones en otras disciplinas como la mecánica cuántica. Las referencias al respecto son recientes y actualmente se realiza análisis matemático y teoría de aproximación en esta rama, así como se han encontrado aplicaciones en la rama de procesos estocásticos.

Índice general

1. Preliminares	1
1.0.1. Convergencia	3
1.1. Sistemas completos ortonormales en espacios de Hilbert	4
1.1.1. Ortonormalidad	5
1.1.2. Ejemplos de espacios de Hilbert	5
1.1.3. Sistemas completos	7
1.2. El espacio de Hilbert ponderado \mathcal{L}_w^2	7
1.3. Transformada de Fourier en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$	9
1.4. Apéndice	12
2. Funciones de Hermite	15
2.1. Definición de los polinomios de Hermite	15
2.1.1. Por el método de Gram-Schmidt	16
2.1.2. Usando la fórmula de Rodrigues	17
2.1.3. Caso general de existencia: forma de determinante	19
2.1.4. Relación de recurrencia a tres términos	20
2.1.5. Algunas propiedades	22
2.2. Las funciones de Hermite	26
2.2.1. Ortonormalidad	27
2.2.2. Completitud en \mathcal{L}^2	28
2.2.3. Las autofunciones de \mathcal{F}	31
2.2.4. Descomposición de \mathcal{L}^2 en 4 subespacios	36
2.3. Aplicación en mecánica cuántica	37

ÍNDICE GENERAL

2.3.1. La ecuación de onda espacio-temporal	37
2.3.2. La ecuación de amplitud	38
3. Polinomios ortogonales matriciales	43
3.1. Generalizando el caso escalar	47
3.1.1. La ecuación diferencial hipergeométrica	49
3.1.2. Ecuaciones de simetría y momentos	53
3.2. Método para encontrar ejemplos	59
3.3. Ejemplos de pesos matriciales	61
3.3.1. Primer ejemplo: $W(t) = e^{-t^2} e^{At} e^{A^*t}$	63
3.3.2. Segundo ejemplo: $W(t) = e^{-t^2} e^{Bt^2} e^{B^*t^2}$	65
3.4. Funciones matriciales	67
3.4.1. Transformación de pares $\{W, \mathcal{D}\}$	67
3.4.2. Funciones ortogonales matriciales propias de un operador diferencial .	69
4. Funciones de Hermite matriciales	75
4.1. Extendiendo funciones a valores matriciales y algunas propiedades algebraicas	76
4.2. Primer ejemplo	80
4.2.1. Los operadores diferencial e integral correspondientes	81
4.2.2. Expresiones integrales y propiedades de simetría	83
4.2.3. El caso $N = 2$	87
4.3. Segundo ejemplo	101
4.3.1. Los operadores diferencial e integral correspondientes	102
4.3.2. Expresiones integrales y propiedades de simetría	104
4.3.3. El caso 2×2	105
4.4. Observaciones	117

Capítulo 1

Preliminares

Recordemos algunos conceptos fundamentales comprendiendo esta tesis. Sea V espacio vectorial sobre un campo \mathbb{K} .

Un **producto interno en V** es una forma bilineal, hermitica y definida positiva. Es decir $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ es producto interno en V si y sólo si $\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ cumple:

- $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ y
- $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0,$

donde $\bar{\lambda}$ denota el complejo conjugado de λ . Cuando $\exists x \in V \setminus \{0\}, \langle x, x \rangle = 0,$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama **producto interno semidefinido positivo**.

Una **norma** es una función $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{K}^+$ que $\forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ cumple:

- $0 = \|x\| \iff x = 0,$
- $\|kx\| = |k| \|x\|$ y
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **desigualdad triangular.**

Una **métrica** es una función $d : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ que $\forall x, y, z \in V$ cumple:

- $0 = d(x, y) \iff x = y, 0 \leq d(x, y),$
- $d(x, y) = d(y, x)$ y
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Naturalmente, todo producto interno induce una norma: $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle,$ y toda norma induce una métrica: $d(x, y) = \|x - y\|.$

Un resultado importante es la **desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** o simplemente desigualdad de Cauchy-Schwarz, que establece que $\forall x, y \in V,$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

1. PRELIMINARES

Su demostración es un ejercicio de rutina, obteniendo la proyección ortogonal de un vector sobre el otro y usando el Teorema de Pitágoras. Una demostración puede encontrarse en [HJ85] pg. 261.

Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de X , llamado **conjunto potencia** de X . Se define un **álgebra de subconjuntos de X** , $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, si y sólo si cumple:

- $X \in \mathcal{A}$,
- $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$

que se llama **σ -álgebra** si y sólo si, además:

- $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

También se llama *conjuntos medibles*.

Por lo tanto, se puede construir una función con dominio una σ -álgebra \mathcal{A} y codominio un campo \mathbb{K} , definida positiva, monótona y numerablemente aditiva. Es decir, $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$ es **medida** si $\forall A, B \in \mathcal{A}$ cumple:

- $0 \leq \mu(A)$,
- $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$,
- $(\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \text{ y } (i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset)) \implies \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Esta definición extiende, a espacios más generales, nuestro concepto de *volumen* en el euclidiano. Dados un conjunto X y una topología τ de subconjuntos de X , la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a τ se llama **conjuntos de Borel**. Se piensa en subconjuntos con estas propiedades ya que, usando el *Axioma de elección*, se han encontrado subconjuntos (llamados *de Vitali*) del espacio euclidiano cuyo volumen no podemos calcular naturalmente.

Las *funciones medibles* son aquellas cuya preimagen de cualquier subconjunto medible es medible. Se llama **integrable** si la función restringida tanto a la preimagen de los positivos como a la de los negativos tiene medida finita.

En [Bar66] pg. 20 se define la **medida de Lebesgue**; es la que usaremos para integrar, denotándola $\mu(E)$, $E \in \mathcal{A}$. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible. Definimos la p -norma de f como:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.1)$$

Denotemos $[f]_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} := \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid g \text{ es medible, } g(v) = f(v) \forall v \in \mathbb{R} \setminus E, \mu(E) = 0\}$. Esto forma una clase de equivalencia de funciones iguales en todo punto excepto un conjunto de medida cero; es decir, iguales en casi todo punto (notación c.t.p.).

Definimos

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{[f]_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} : \|f\|_p < \infty\}$$

el **espacio de Lebesgue** de las (clases de equivalencia de) funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ p -medibles.

En estos espacios, la desigualdad de Cauchy-Schwarz es un caso especial de

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad f \in \mathcal{L}^p, \quad g \in \mathcal{L}^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

llamada **desigualdad de Hölder** (ver [Bar66] pgs. 56-57).

Por otra parte, el espacio de matrices de tamaño $N \times M$ con coeficientes en un campo \mathbb{K} se denota $\mathbb{K}^{N \times M}$.

1.0.1. Convergencia

Sea V espacio vectorial normado. Decimos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ es una **sucesión** de elementos de V si y sólo si existe una función $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, N(n) = x_n$.

Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en V **converge** a $x \in V$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon} \in \mathbb{N} (\forall m > N_{\epsilon}, \|x - x_m\| < \epsilon),$$

y se denota $x_n \rightarrow x$ o $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Esto es equivalente con que la sucesión sea de Cauchy:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon} \in \mathbb{N} (\forall n, m > N_{\epsilon}, \|x_n - x_m\| < \epsilon).$$

Esta definición aplica para los espacios de funciones: Sean V y W espacios vectoriales normados, f y f_n funciones de V a W . $f_n \rightarrow f$ si y sólo si $\forall x \in V, f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Existe una generalización de la suma para una infinidad numerable de elementos sumandos. Sea $\{y_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in V$ una sucesión. A $y_n = \sum_{j=0}^n y_j$ le llamamos **suma parcial hasta n** de esa sucesión. Si $\exists x \in V, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^n y_j \right) = x$, entonces decimos que x es igual a la **serie** $\sum_{j \in \mathbb{N}} y_j$,

y se denota $x = \sum_{j \in \mathbb{N}} y_j$; es decir, la serie converge en V si sus sumas parciales y_n , como sucesión, convergen a algún $x \in V$. Esta definición aplica para los espacios de funciones: Sean $f, f_n : V \rightarrow W$. $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$ si y sólo si $\forall x \in V, \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = f(x)$; es decir:

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in V, \exists N_{\epsilon, x} \in \mathbb{N}, (N_{\epsilon, x} < n \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon).$$

Nótese que, si una serie converge, entonces cualquier serie resultante de reordenar los mismos sumandos y_j converge también.

Más formas de convergencia (ver [Bar66] pgs. 65-66) se definen así:

1. PRELIMINARES

- **Convergencia absoluta** (el valor absoluto de la serie converge, es decir $\sum_{n \in \mathbb{N}} |y_i|$ converge)
- **Convergencia uniforme** para funciones ($\forall \epsilon > 0, \forall x \in V, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N_\epsilon, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. N_ϵ no depende de x)

Algunos criterios de convergencia se llaman:

- **Convergencia en norma** para funciones (la sucesión $\{\|f_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\|f\|$)
- **Convergencia en medida** para funciones ($\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in E : \delta < |f_n(x) - f(x)|\}) = 0$)
- **Convergencia casi uniforme** (es la convergencia uniforme de funciones en todo su dominio excepto un conjunto de medida cero, como se ha definido arriba)
- **Convergencia en casi todo punto** (es la convergencia puntual de funciones, como se ha definido arriba, excepto en un conjunto de medida cero)

Este trabajo se enfoca en las funciones de ciertos espacios que definiremos más adelante. Para más detalles sobre los criterios de convergencia en esos espacios de forma general, véase [Bar66] pgs. 74-76.

Finalmente, el **criterio de convergencia de Weierstrass** establece condiciones suficientes para que la convergencia de funciones sea uniforme: Dada la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$, si existe una sucesión $\{\alpha_n : 0 < \alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que su serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$ converge y $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| < \alpha_n$ en todo su dominio, entonces la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ converge uniformemente. La demostración de este hecho se encuentra en [Rud53] pgs. 148.

1.1. Sistemas completos ortonormales en espacios de Hilbert

Dados X conjunto, τ una topología para X y $A \subseteq X$, la intersección de todos los conjuntos cerrados de τ que contienen a A se llama **cerradura** o **cierre** de A .

Un espacio vectorial con un producto interno es **espacio de Hilbert** si es **completo** con respecto a la norma generada por el producto interno; es decir, su cerradura es él mismo: toda sucesión de Cauchy de puntos en el espacio converge a un elemento del mismo. Recordemos que toda norma induce una topología (las uniones de bolas con radio positivo), por lo que basta un espacio vectorial con producto interno para verificar si es de Hilbert.

1.1.1. Ortonormalidad

Sean $x, y \in \mathbb{R}^N$, $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N)$. El producto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ se define

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i. \quad (1.2)$$

Para estos espacios euclidianos, la norma inducida por este producto interno es la distancia al origen. En cualquier espacio normado X , se dice que $x \in X$ es **normal** o **unitario** si y sólo si $\|x\| = 1$.

El producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usual en estos espacios satisface la relación $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta$, donde θ es el ángulo euclidiano mínimo entre los vectores x e y . Tomando x unitario, $\langle x, y \rangle$ describe la componente de y en dirección de x . En un espacio vectorial general con producto interno, intuimos que la componente de x en dirección de y (respecto del «ángulo mínimo» entre ellos) multiplicada por la magnitud de y , es su producto interno $\langle x, y \rangle$; esto nos induce a definir ortogonalidad, cuando la componente de uno sobre el otro es nula: para $x, y \in X$, espacio vectorial con producto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ interno, decimos que x e y son **ortogonales** si y sólo si $0 = \langle x, y \rangle$. Un subconjunto de X es ortogonal si y sólo si todos sus elementos son no nulos y mutuamente ortogonales.

Los conjuntos ortogonales y normales se llaman **ortonormales**. Por sus propiedades, es de especial interés encontrar bases ortonormales de un espacio de Hilbert.

Sea V espacio vectorial con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ producto interno, y $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un subconjunto linealmente independiente en V . Se conoce un procedimiento llamado **método de Gram-Schmidt** para formar un conjunto ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a partir del subconjunto numerable $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Primero, recursivamente define un conjunto ortogonal:

1. con base en $u_0 = v_0$, define
2. $\forall n > 0$, $u_n = v_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k$.

Dado que $\frac{\langle v_n, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k$ es la proyección ortogonal de v_n sobre u_k , entonces $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k$ es un elemento del subespacio generado por $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$. Es decir, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n es un vector ortogonal a $u_k \forall k < n$, por su construcción; entonces $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortogonal, pues ninguno de sus elementos es nulo. Luego se normaliza definiendo $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ y por lo tanto $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortonormal y genera el mismo subespacio que $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

1.1.2. Ejemplos de espacios de Hilbert

Notamos algunos ejemplos de espacios de Hilbert.

1. PRELIMINARES

Ejemplo 1.1. El conjunto \mathbb{R}^N con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido en (1.2) es un espacio de Hilbert.

Ejemplo 1.2. El espacio de Lebesgue $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ con el producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad (1.3)$$

es un espacio de Hilbert (demostrado en [Bar66] pgnas. 59-60).

Los espacios $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ definidos como las clases de equivalencia de funciones iguales en c.t.p. y medibles con la norma p definida en (1.1) no son de Hilbert $\forall p \neq 2$, pues esas normas no provienen de producto interno alguno, ya que no satisfacen la *Ley del Paralelogramo*: para dos vectores f y g en el espacio,

$$2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2.$$

Esto nos dice que un espacio de Hilbert tiene geometría euclideana, donde dos vectores forman un ángulo y determinan un paralelogramo porque la suma de los cuadrados de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.

$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ denota las clases de funciones medibles iguales en c.t.p. y *esencialmente acotadas* en c.t.p.

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{ [f]_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} : \exists c \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq c \, \forall x \in \mathbb{R} \setminus E, \lambda(E) = 0 \}$$

Si $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $N \subset \mathbb{R}$ medible y $\lambda(N) = 0$, sea

$$S(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\}$$

y definimos la ∞ -norma:

$$\|f\|_\infty := \inf\{S(N) : N \subset \mathbb{R} \text{ medible}, \lambda(N) = 0\}.$$

Ejemplo 1.3. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia o sucesión de números. El espacio de sucesiones cuadrado-sumables

$$\ell^2(\mathbb{C}) := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_k \in \mathbb{C}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 \in \mathbb{R} \right\}$$

con el producto interno

$$\langle (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \overline{b_n}$$

es un espacio de Hilbert.

Ejemplo 1.4. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{N \times M}$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Con el producto interno de Frobenius $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$, donde B^* denota la traspuesta conjugada de B . $\mathbb{C}^{N \times M}$ es un espacio de Hilbert.

1.1.3. Sistemas completos

Definición 1.5. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es **denso en X** si y sólo si $\overline{A} = X$.

donde \overline{A} representa la cerradura topológica de A en X . Cuando la topología es inducida por una norma, esta definición equivale a que $\forall x \in X, \exists \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A, y_n \rightarrow x$ en norma. $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Definición 1.6. Sea X espacio topológico vectorial sobre \mathbb{K} campo y $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}} = \gamma \subset X$. Se dice que γ es un **sistema completo en X** si y sólo si las combinaciones lineales de elementos de γ ,

$$\Gamma = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j : \alpha_j \in \mathbb{K}, \varphi_j \in \gamma \right\}$$

son densas en X , es decir $\overline{\Gamma} = X$.

Siendo X espacio vectorial normado y completo, como consecuencia de la definición $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es un sistema completo en X si y sólo si:

$$\forall x \in X, \exists \{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}, \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j \varphi_{i_j} = x.$$

1.2. El espacio de Hilbert ponderado \mathcal{L}_w^2

A partir del espacio de Hilbert $(\mathcal{L}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ definido igual que en el Ejemplo 1.2 pero para (clases de equivalencia de) funciones de codominio \mathbb{R} , se define un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ que incluye más funciones que \mathcal{L}^2 en un nuevo conjunto definido de manera similar \mathcal{L}_w^2 ; veremos que $(\mathcal{L}_w^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_w)$ resulta ser espacio de Hilbert y $\mathcal{L}^2 \subsetneq \mathcal{L}_w^2$:

Primero, se encuentra una función w tal que decae más rápido que las funciones f que queremos incluir en el nuevo espacio de Hilbert, de manera que¹ el producto $fw \in \mathcal{L}^2$.

Definición 1.7. Sea $w \in \mathcal{L}^2$ positiva. Se dice que w es una **función peso positiva** o **función de densidad** si y sólo si cumple las siguientes propiedades:

- $0 < \int_A w(x) dx$ para cualquier conjunto de Borel $A \subseteq \mathbb{R}$,
- w tiene momentos finitos de cualquier orden, i.e $\int_{\mathbb{R}} x^n w(x) dx \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

¹Se entiende que $\|fw\|_2 \in \mathbb{R}$, y por lo tanto $fw \in [h]$ para alguna clase de equivalencia de funciones $[h] \in \mathcal{L}^2$.

1. PRELIMINARES

La medida, en general, es $dw(x)$, pero si w es integrable con respecto a la medida de Lebesgue dx , entonces $\exists w \in \mathcal{L}^2$ tal que $dw(x) = w(x)dx$. Se nota que un ejemplo de función de densidad positiva es la exponencial $w(x) = e^{-x^2}$.

Sea w una función peso. Luego, se define una medida con respecto a w :

Definición 1.8. Sea f función medible,

$$\|f\|_w^2 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 w(x) dx \quad (1.4)$$

es su **medida ponderada** con respecto al peso w . Cuando $\|f\|_w < \infty$, se llama **integral ponderada** de f .

Dado que se está integrando siempre respecto del peso w , la medida de integración se denota $w(x)dx = dw(x)$ y la integral (1.4) se denota $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dw(x)$ también.

Finalmente, se define un producto interno para las funciones cuya medida ponderada es finita, de manera análoga a como se hace en el Ejemplo 1.2. Aunque $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \overline{g(x)}$ por ser g de valores reales, el producto interno ponderado se define así para funciones de valores complejos:

Lema 1.9. Sean f y g funciones medibles tales que $\|f\|_w, \|g\|_w \in \mathbb{R}$ y w una función de densidad, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)w(x)\overline{g(x)}dx \in \mathbb{R}.$$

Se define un producto interno a partir del peso en (1.4) como se hizo en el Ejemplo 1.2; siguiendo el mismo razonamiento, aplicamos la integral ponderada al producto de dos funciones cuyo cuadrado es medible, conjugando la segunda, y verificamos que es finito. Ahora se prueba:

Teorema 1.10. Sean f, g y w como en el Lema 1.9 y también h medible tal que $\|h\|_w \in \mathbb{R}$, entonces

$$\langle f, g \rangle_w := \int_{\mathbb{R}} f(x)w(x)\overline{g(x)}dx$$

satisface las propiedades de producto interno:

1. $\langle \lambda f + g, h \rangle_w = \lambda \langle f, h \rangle_w + \langle g, h \rangle_w$,
2. $\langle f, g \rangle_w = \overline{\langle g, f \rangle_w}$ y
3. $\langle f, f \rangle_w \geq 0$, $\langle f, f \rangle_w = 0 \iff f = 0$.

1.3. TRANSFORMADA DE FOURIER EN $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

El producto interno del Ejemplo 1.2 se llama *no ponderado*, correspondiente al producto interno ponderado con la densidad constante 1, $w = \chi_{\mathbb{R}}$ (en el Apéndice se define la función indicatriz $\chi_{\mathbb{R}}$). Ahora podemos definir el espacio de (clases de equivalencia de) funciones integrables donde existe un producto interno ponderado. Si una función f es medible, denotamos $f = [f] := \{g : g = f \text{ en c.t.p.}\}$ para simplificar su notación.

Definición 1.11. Sean f y g como en el Teorema 1.10, decimos que $\langle f, g \rangle_w$ es el **producto interno ponderado de f con g respecto al peso w** .

Definición 1.12.

$$\mathcal{L}_w^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \text{ función medible} : \|f\|_w < \infty\}$$

se llama **espacio de Lebesgue ponderado** de las clases de equivalencia de funciones integrables respecto a la medida ponderada con el peso w , denotado simplemente \mathcal{L}_w^2 .

Como consecuencia directa del Teorema 1.10 se tiene el

Corolario 1.13. $\langle f, g \rangle_w$ es producto interno en \mathcal{L}_w^2 .

Ejemplo 1.14. \mathcal{L}_w^2 con el producto interno $\langle f, g \rangle_w$ es espacio de Hilbert.

Teorema 1.15. $\mathcal{L}^2 \subsetneq \mathcal{L}_w^2$

La demostración del Lema 1.9, de los Teoremas 1.10 y 1.15 son ejercicios sencillos; para el último basta pensar en la constante 1. En el Ejemplo 1.14 ya se habrá probado que la operación mencionada ahí es efectivamente un producto interno, y el hecho de ser espacio vectorial es ejercicio de rutina, por lo que resta comprobar su completitud.

1.3. Transformada de Fourier en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$\forall w \in \mathbb{R}$ sea $e_w(x) = e^{2\pi i w x}$, incluyendo el factor 2π para hacer el oscilador e_w de frecuencia exactamente w respecto el parámetro del dominio \mathbb{R} . Pensemos en la proyección de $f \in \mathcal{L}^2$ sobre cada e_w . Aunque no podemos hacer el producto interno en \mathcal{L}^2 con e_w , $f(x)e_w(x)$ es medible ([Bar66] pg. 9). Calculamos su medida $\int_{\mathbb{R}} f(x)e_w(x)dx$ y resulta finita $\forall f \in \mathcal{L}^2$ y para todo $w \in \mathbb{R}$ excepto un conjunto de medida cero ([SW71] pags. 16-17). Procedemos calculando esta componente para todo w , y resulta que

$\forall f \in \mathcal{L}^2$, existe la función

$$\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i w x} dx \tag{1.5}$$

es única y siempre pertenece a alguna clase de equivalencia en \mathcal{L}^2 . La demostración de este hecho se encuentra en [SW71] pags. 16-17. Su módulo $|\hat{f}(w)|$ es la *amplitud*, y su ángulo es la *fase* de la frecuencia armónica w en f .

Por sus propiedades, conviene la

1. PRELIMINARES

Definición 1.16. Sean $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^2$, \hat{f} definida según (1.5). El operador

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{L}^2 &\rightarrow \mathcal{L}^2 \\ \mathcal{F}(f) &= \hat{f}\end{aligned}$$

se conoce como **Transformada de Fourier** de f en \mathcal{L}^2 .

Nótese que la regla de correspondencia equivale a $\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iwx} dx$. A veces se define la Transformada de Fourier sin el signo del exponente de la función exponencial, es decir: $\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi iwx} dx$.

Recordemos algunas propiedades de la Transformada de Fourier. Sea $f \in \mathcal{L}^2$; denotamos $\hat{f} := \mathcal{F}(f)$.

Proposición 1.17. El operador integral $\mathcal{F} : \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2$ cumple las siguientes propiedades:

- (I) Es lineal.
- (II) Es unitario (preserva ángulos o es rígido) $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(w) \overline{\hat{g}(w)} dw$, esta propiedad se conoce como **Teorema de Parseval**.
- (III) Es isometría, i.e. $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$, esta propiedad se conoce como **Teorema de Plancherel**.
- (IV) Fórmula de inversión: $I = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^*$, i.e. $f = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \overline{e^{-2\pi iwx}} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{2\pi iwx} dx$.
- (V) $\mathcal{F}(f(x - c)) = e^{-2\pi icw} \hat{f}(w)$.
- (VI) $\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$.
- (VII) Si f es derivable, $\widehat{\frac{df}{dx}}(w) = iw \hat{f}(w)$.
- (VIII) **Teorema de convolución:** $f * g = \hat{f} \hat{g}$, denotando $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(t - x) dx$ en c.t.p.
- (IX) Tiene 4 valores propios: $1, i, -1$ y $-i$.

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{L}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $c, a \in \mathbb{R}$.

(I)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (\lambda f(x) + g(x)) e^{-2\pi iwx} dx &= \int_{\mathbb{R}} \lambda f(x) e^{-2\pi iwx} + g(x) e^{-2\pi iwx} dx = \\ \lambda \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi iwx} + \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi iwx} dx.\end{aligned}$$

1.3. TRANSFORMADA DE FOURIER EN $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

(II) se demuestra con tres métodos distintos en [Tit37] sec. 3.2-4, pgns. 70-76. Aquí se muestra una prueba como en [SW71] pg. 8 para $f(x)$ y $g(x)$ reales: Aplicando el Teorema de Fubini, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi itx} dt \right) g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2\pi itx} dx \right) f(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx. \end{aligned}$$

(III) Sea $0 < \epsilon$. Ya que la función gaussiana $e^{-\epsilon k^2}$ está acotada por 1 y $f \in \mathcal{L}^2$, entonces

$$\begin{aligned} \infty &> \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(k)|^2 e^{-\epsilon k^2} dk \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{2\pi ikx} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi iky} dy \right) e^{-\epsilon k^2} dk \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} f(y) \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik(x-y)} e^{-\epsilon k^2} dk dx dy. \end{aligned}$$

Las integrales pueden ser intercambiadas aplicando el Teorema de Fubini porque

$$f(x)f(y)e^{-\epsilon k^2}$$

es integrable. La integral de la gaussiana puede ser explícitamente computada, resultando

$$= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} e^{-\frac{\pi(x-y)^2}{2\epsilon}} dx dy$$

En resumen:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(k)|^2 e^{-\epsilon k^2} dk = \langle f, f * \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} e^{-\frac{\pi(x-y)^2}{2\epsilon}} \rangle.$$

La prueba termina tomando el límite cuando ϵ tiende a 0.

Otra prueba se encuentra en [SW71] sec. 1.2, pgns. 17-18 y otros tres métodos distintos se encuentran en [Tit37] sec. 3.2-4, pgns. 70-76.

(IV) se demuestra como en [SW71] sec. 1.2, pgns. 17-18: Como \mathcal{F} es isometría (inciso (III)), entonces su rango es un subespacio cerrado de \mathcal{L}^2 . Si ese subespacio imagen no fuera todo \mathcal{L}^2 , podríamos encontrar una función g tal que $\forall f \in \mathcal{L}^2$, $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx = 0$ y $\|g\|_2 \neq 0$.

Como consecuencia del (II), se tiene $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx = 0$, $\forall f \in \mathcal{L}^2$, entonces $g = 0$ en c.t.p. por propiedad del producto interno, contradiciendo el supuesto $\|g\|_2 \neq 0$.

1. PRELIMINARES

(v) Aplicando el cambio de variable $u = x + c$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(x - c)) &= \int_{\mathbb{R}} f(x - c) e^{-2\pi i w x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2\pi i w (u+c)} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2\pi i w u} e^{-2\pi i w c} du = e^{-2\pi i w c} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2\pi i w u} du = e^{-2\pi i w c} \widehat{f}(w).\end{aligned}$$

(vi) Aplicando el cambio de variable $u = ax$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(ax)) &= \int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-2\pi i w x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|a|} f(u) e^{-2\pi i w u/a} du \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2\pi i (w/a) u} du = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{w}{a}\right).\end{aligned}$$

(vii) Usando integración por partes:

$$\widehat{f}'(w) = \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2\pi i w x} dx = f(x) e^{-2\pi i w x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\pi i w \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i w x} dx = -2\pi i w \widehat{f}(w).$$

(viii) usando el Teorema de Fubini antes y después un cambio de variable $z = y - x$:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(w) \widehat{g}(w) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i w x} dx \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i w y} dy = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i w x} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i w y} dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i w (y+x)} dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} g(z - x) e^{-2\pi i w z} dz \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(z - x) e^{-2\pi i w z} dx dz = \widehat{f * g}(w).\end{aligned}$$

(ix) Por la fórmula de inversión (iv), $\widehat{\widehat{f}} = f(-x)$, y entonces resulta que $I = \mathcal{F}^4$. Si existe algún autovalor λ de \mathcal{F} , entonces $f = \mathcal{F}^4(f) = \lambda^4 f$, por lo que $\lambda^4 = 1$; es decir, λ es raíz cuarta de la unidad: $\lambda \in \{1, i, -1, -i\}$. En el siguiente capítulo, mostraremos que efectivamente existe un autovector del operador \mathcal{F} para cada uno de estos autovalores (ver Teorema 2.13).

□

1.4. Apéndice

A continuación se enuncian más elementos que se usan en este trabajo.

Cuando se presenta una función f que tiene dominio A y codominio B , se escribe « $f : A \rightarrow B$ ». Dado un conjunto K , denotamos $\chi_A : K \rightarrow \mathbb{R}$ la **función indicatriz** de A , i.e.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Una función se llama **entera** si es analítica en todo el plano complejo.

Teorema 1.18 (de Liouville.). *Sea f una función entera. Si $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| < M \in \mathbb{R}$ entonces f es constante.*

Una demostración puede encontrarse en [DK72] pg. 154 y en [SW71] pgs. 40-41.

Teorema 1.19 (de Fubini). *Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(x, y) dy \right) dx$$

Una demostración general para espacios de medida se encuentra en [Bar66] pg. 120.

Teorema 1.20 (de la Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sean $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de funciones integrables que converge en c.t.p. a una función medible f . Si existe una función integrable g tal que $|f_n| \leq |g|, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces f es integrable y*

$$\int_{\mathbb{C}} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}} f_n d\lambda.$$

Una demostración puede encontrarse en [Bar66] pgs. 44-45.

Ahora se introduce la **notación** \mathcal{O} : Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que una función g tiene decaimiento f si y sólo si existen $M > 0, x_0 \in \mathbb{R}$ tales que $|f(x)| \leq M|g(x)|, \forall |x| > |x_0|$, y se denota $\mathcal{O}(g(x)) = f(x), x \rightarrow x_0$. Es decir,

$$(f = \mathcal{O}(g), x \rightarrow x_0) \iff \left(\exists \epsilon > 0, (\forall |x| > |x_0|, |f(x)| < \epsilon |g(x)|) \right).$$

Capítulo 2

Funciones de Hermite

Tratamos de encontrar una *base* para $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, por lo que se requiere que el generador sea *subconjunto* del espacio que genera. En este capítulo se describe un sistema completo ortonormal numerable subconjunto de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \mathcal{L}^2$ (notación). Todas las funciones tratadas serán de dominio real, imagen contenida en \mathbb{C} y medibles.

Hay muchas maneras de originar estas funciones de nuestro interés; en este trabajo, primero se describen cuatro métodos para definir un conjunto numerable de polinomios ortogonales general en el espacio de Hilbert ponderado \mathcal{L}_w^2 en virtud de ser w una función con momentos finitos de cualquier orden. Posteriormente, respecto al peso gaussiano $w(x) = e^{-x^2}$ se especifica la familia correspondiente de funciones ortogonales en \mathcal{L}^2 , resultado de multiplicar los polinomios descritos en la primera sección por la raíz el peso w para obtener las mismas propiedades de ortogonalidad al multiplicar dos de esas funciones; más adelante se demuestra su completitud, además de una prueba independiente de su ortogonalidad, su transformada de Fourier, y aplicaciones.

La elección del peso gaussiano se debe a que los polinomios ortogonales respecto del producto interno ponderado con él tienen propiedades convenientes bajo la transformada de Fourier.

2.1. Definición de los polinomios de Hermite

Muchas propiedades de los polinomios ortogonales en general se encuentran en [BW10] pgs. 93-154. En este trabajo, primero se define la familia de polinomios ortogonales por medio del método de Gram-Schmidt, seguido de un método con determinantes, después usando la fórmula de Rodrigues y finalmente con una relación de recurrencia de tres términos.

2. FUNCIONES DE HERMITE

2.1.1. Por el método de Gram-Schmidt

Los polinomios en general son funciones medibles al ser valuados en cualquier subconjunto de elementos del mismo dominio que sus coeficientes. En la Definición 1.7 del peso w , se ha definido con momentos finitos de cualquier orden. Ya que los polinomios **mónicos** x^n , $n \in \mathbb{N}$, se encuentran en el espacio del Ejemplo 1.14, entonces todos los polinomios se encuentran en el espacio de Hilbert ponderado \mathcal{L}_w^2 , identificados como funciones de su determinada x en relaciones de equivalencia de funciones iguales en c.t.p.

Ya que la familia linealmente independiente $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ genera todos los polinomios en \mathcal{L}_w^2 , se aplica el método de Gram-Schmidt, descrito en el capítulo anterior, para ortogonalizar esta base de polinomios.

\mathcal{L}_w^2 es un espacio de Hilbert ponderado con $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ producto interno, y $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un subconjunto linealmente independiente. Primero, recursivamente define un conjunto ortogonal:

1. con base en $u_0 = x^0 = 1$, define
2. $\forall n > 0$, $u_n = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle x^n, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k$.

A continuación se ilustran los primeros pasos:

1. $u_0 = x^0 = 1$, entonces
2. $u_1 = x^1 - \frac{\langle x^1, 1 \rangle_w}{\langle 1, 1 \rangle_w} 1 = x$,
3. $u_2 = x^2 - \frac{\langle x^2, u_0 \rangle_w}{\langle u_0, u_0 \rangle_w} - \frac{\langle x^2, u_1 \rangle_w}{\langle u_1, u_1 \rangle_w} x = x^2 - \frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}} x^3 e^{-x^2} dx}{\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dx} x = x^2 - \frac{1}{2}$,
4. $u_3 = x^3 - \frac{\langle x^3, u_0 \rangle_w}{\langle u_0, u_0 \rangle_w} u_0 - \frac{\langle x^3, u_1 \rangle_w}{\langle u_1, u_1 \rangle_w} u_1 - \frac{\langle x^3, u_2 \rangle_w}{\langle u_2, u_2 \rangle_w} u_2$
 $= x^3 - \frac{\int_{\mathbb{R}} x^3 e^{-x^2} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-x^2} dx}{\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dx} x - \frac{\int_{\mathbb{R}} (x^5 - \frac{1}{2}x^3) e^{-x^2} dx}{\int_{\mathbb{R}} (x^2 - x + \frac{1}{4}) e^{-x^2} dx} u_2 = x^3 - \frac{3}{2}x$,

Nótese que así resultan ser mónicos. Luego se normaliza el conjunto definiendo $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{\|u_n\|}$ que por lo tanto es ortonormal y genera el mismo subespacio que $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Su norma se calculará en el Teorema 2.7 para el coeficiente principal 2^n , es decir $H_n(x) = 2^n u_n(x)$.

Cada uno es un polinomio par ó impar según la paridad del grado, que resulta n ; esto se demuestra por inducción. Los primeros diez polinomios de Hermite son:

- $H_0(x) = 1$
- $H_1(x) = 2x$
- $H_2(x) = 4x^2 - 2$

2.1. DEFINICIÓN DE LOS POLINOMIOS DE HERMITE

- $H_3(x) = 8x^3 - 12x$
- $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$
- $H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$
- $H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$
- $H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$
- $H_8(x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$
- $H_9(x) = 512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x$

Véase la Figura 2.1

2.1.2. Usando la fórmula de Rodriges

La definición de los polinomios de Hermite también es consecuencia de un método general para obtener polinomios ortogonales, que puede encontrarse en [BW10] pgs. 98-100. Otras familias son las de Jacobi, Laguerre y Bessel. Primero veremos el método general.

Tratamos de encontrar un operador diferencial \mathcal{D} del cual los polinomios de Hermite sean autofunciones, es decir: $\mathcal{D}H_n + \lambda_n H_n = 0$, y además que sea simétrico con respecto al peso exponencial $w(x) = e^{-x^2}$, es decir: $\langle \mathcal{D}f, g \rangle_w = \langle f, \mathcal{D}g \rangle_w$ con condiciones de frontera (autoadjunto). Sean p y q polinomios de grado a lo sumo 2 y 1 respectivamente. Denotemos al operador diferencial $\mathcal{D} = p(x)\partial_x^2 + q(x)\partial_x^1$. Sea w una función de peso positivo y $x \in I$. Nos concentraremos en la familia de polinomios de Hermite, en cuyo caso $I = \mathbb{R}$ y $w(x) = e^{-x^2}$.

En ese caso, se tiene que satisfacer la **ecuación de Pearson**:

$$(pw)' = qw. \tag{2.1}$$

Se deduce que necesariamente p es constante, por ejemplo 1, y que entonces $q = -2x$. En resumen, hay que resolver la ecuación diferencial

$$p(x)H_n''(x) + q(x)H_n'(x) + \lambda_n H_n(x) = 0, \quad q = \frac{(pw)'}{w} \tag{2.2}$$

equivalente a

$$(pwH_n')' + \lambda_n wH_n(x) = 0$$

que para el caso de las funciones de Hermite con el peso exponencial, definidas en toda la recta real, resultan

$$\begin{aligned} w(x) &= e^{-x^2}, \\ p(x) &= 1, \\ q(x) &= -2x \end{aligned} \tag{2.3}$$

Siguiendo con el caso general, calculamos los autovalores. La derivada de la solución H_n de (2.2) satisface una ecuación similar: derivando (2.2) resulta

$$p[H_n']'' + (q + p')[H_n']' + (q' + \lambda_n)H_n' = 0.$$

2. FUNCIONES DE HERMITE

Ahora

$$q + p' = \frac{(pw)'}{w} + p' = \frac{p^2w' + 2pp'w}{pw} = \frac{(p[pw])'}{pw}.$$

Entonces, la función pw es también un peso. Como q' es constante, H'_n es un polinomio ortogonal de grado $n - 1$ con el peso pw . Continuando inductivamente, la derivada m -ésima $H_n^{(m)}$ corresponde al peso $p^m w$ con autovalor

$$-\lambda_n - mq' - \frac{1}{2}m(m-1)p''.$$

Como $H_n^{(n)}$ es constante, el autovalor correspondiente es cero y se obtiene la fórmula general

$$\lambda_n = -nq' - \frac{1}{2}n(n-1)p''.$$

Para la familia de polinomios de Hermite, resulta

$$\lambda_n = 2n \tag{2.4}$$

Veamos ahora una manera de generar los polinomios mediante derivadas sucesivas de su función peso: La ecuación (2.2) se puede reescribir como

$$wH_n = -\frac{1}{\lambda_n}(pwH'_n)'$$

Como pw es el peso correspondiente a H'_n , esto nos lleva a

$$wH_n = \frac{(p^2wH''_n)''}{\lambda_n(\lambda_n + q')}.$$

y finalmente a

$$wH_n = (-1)^n \prod_{m=0}^{n-1} \left[\lambda_n + mq' + \frac{1}{2}m(m-1)p'' \right]^{-1} (p^n w H_n^{(n)})^{(n)}. \tag{2.5}$$

Dado que $H_n^{(n)}$ es constante, es posible normalizar tomando

$$H_n(x) = w(x)^{-1} \frac{d^n}{dx^n} [p(x)^n w(x)]. \tag{2.6}$$

La ecuación (2.6) se conoce como **Fórmula de Rodrigues**. Este método se puede generalizar para otros pesos en otros dominios, como los polinomios de Laguerre (en $I = [0, \infty)$) y Jacobi (en $I = [-1, 1]$); en cualquier caso, cada uno tiene grado n . Como hemos visto, en caso de $w(x) = e^{-x^2}$, necesariamente $p(x)$ es constante, por ejemplo 1, y entonces $q(x) = -2x$; así se obtienen los polinomios de Hermite como caso particular de la fórmula de Rodrigues:

2.1. DEFINICIÓN DE LOS POLINOMIOS DE HERMITE

Definición 2.1. Sea $n \in \mathbb{N}$. $H_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) \quad (2.7)$$

Se llama **polinomio de Hermite** de grado n .

Consecuencia de esta construcción es que los polinomios de Hermite satisfacen la ecuación diferencial

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0. \quad (2.8)$$

2.1.3. Caso general de existencia: forma de determinante

En todo espacio de Hilbert ponderado con un peso positivo de momentos finitos de cualquier orden es posible comprobar la existencia de polinomios ortogonales y construirlos explícitamente. Veremos que los polinomios de Hermite también son un caso particular de este método.

Teorema 2.2. Dada una función de peso w positiva, siempre es posible construir una familia de polinomios ortonormales asociados a ese peso.

Esta prueba es la misma para otras familias de polinomios ortogonales, como puede encontrarse en [BW10] pgs.93-95.

Demostración. Sea $w(x)$ una función de peso positiva en un intervalo abierto $I = (a, b)$. Para el caso de las funciones de Hermite, será $a = -\infty$, $b = \infty$. Se asume que $\forall n \in \mathbb{N}$, los momentos μ_n son finitos:

$$\mu_n := \int_a^b x^n w(x) dx < \infty. \quad (2.9)$$

Sea $\Delta_{-1} = 1$ y que, $\forall n \in \mathbb{N}$, Δ_n sea el determinante

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ & & \ddots & \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

La forma cuadrática asociada

$$\sum_{j,k=0}^n \mu_{j+k} a_j a_k = \int_a^b \left[\sum_{j=0}^n a_j x^j \right]^2 w(x) dx$$

es definida positiva, por lo que el determinante Δ_n es positivo.

2. FUNCIONES DE HERMITE

Considerando el espacio de Hilbert ponderado \mathcal{L}_w^2 del Ejemplo 1.14, el polinomio

$$Q_n(x) := \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x \\ & & \ddots & & \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

es ortogonal a x^m , $\forall m < n$, mientras que $\langle Q_n, x^n \rangle_w = \Delta_n$. Para entender eso, se expande el determinante (2.11) a lo largo de la última columna. Al calcular el producto interno (ponderado) de Q_n con x^m , resulta un determinante en el cual la última columna de (2.10) es la misma que (pues ha sido reemplazada por) la columna $m+1$ del mismo determinante (2.10); por lo que, si $m < n$, las columnas son linealmente dependientes y entonces el determinante es nulo, mientras que si $m = n$ resulta Δ_n . Ahora $Q_n = \Delta_{n-1}x^n$ módulo términos de grado menor, entonces

$$\langle Q_n, Q_n \rangle_w = \langle Q_n, \Delta_{n-1}x^n \rangle_w = \Delta_{n-1} \langle Q_n, x^n \rangle_w = \Delta_{n-1} \Delta_n$$

Por lo tanto, los polinomios

$$P_n(x) := \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1} \Delta_n}} Q_n(x) \quad (2.12)$$

son ortonormales. Están únicamente determinados por tener coeficiente principal $h_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$ positivo. \square

Ahora veamos el caso particular \mathcal{L}_w^2 con el peso $w(x) = e^{-x^2}$ sobre $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Sustituyendo en (2.9), se obtiene

$$\mu_n := \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx.$$

Por lo tanto los momentos impares son cero y los pares ($0 \leq k$, $n = 2k$) son

$$\mu_{2k} = \frac{\sqrt{\pi}(2k)!}{4^k k!}.$$

2.1.4. Relación de recurrencia a tres términos

Se tiene una caracterización de los polinomios ortogonales en general a partir de una relación de recurrencia a tres términos: toda familia de polinomios que satisface esa relación es ortogonal, y toda familia de polinomios ortogonales satisface esa relación. Veremos que como los polinomios de Hermite satisfacen la relación de recurrencia a tres términos en el espacio de Hilbert ponderado \mathcal{L}_w^2 , entonces son ortogonales. En [A33] pgs. 38-40 se estudia la relación de recurrencia de una manera más general que la que será mostrada aquí. Este es otro método para definir los polinomios de Hermite.

2.1. DEFINICIÓN DE LOS POLINOMIOS DE HERMITE

Primero veremos el caso general. Sea $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de polinomios ortonormales, como (2.12) de la sección anterior. Entonces xP_n es un polinomio de grado $n + 1$, y $xP_n = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k} P_k$ donde se denota $c_{n,k} = \langle xP_n, P_k \rangle_w$. Calculando

$$\begin{aligned} c_{n,k} &= \langle xP_n, P_k \rangle_w = \int_I xP_n(x)P_k(x)w(x)dx = \int_I P_n(x)xP_k(x)w(x)dx \\ &= \langle P_n, xP_k \rangle_w, \end{aligned}$$

donde xP_k es un polinomio de grado $k + 1$; como P_n es ortogonal de grado n , entonces $c_{n,k} = 0$, $\forall k < n - 1$. Este resultado con premisas más generales se encuentra en [A33] pgs. 33-38. En resumen: $xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k} P_k$ tiene grado $n + 1$ y es ortogonal a x^m , $\forall m < n - 1$; es decir, $c_{n,k} = 0$, $k = 0, 1, \dots, n - 2$. Como consecuencia existen constantes a_n, b_n y c_n tales que

$$xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x).$$

Es posible obtener relaciones de recurrencia de más términos cambiando xP_n por $x^s P_n$ para algún $s > 0$.

Comparando los coeficientes del término x^{n+1} , se observa que $a_n = \frac{h_n}{h_{n+1}}$. Por otro lado, tomando el producto interno con P_{n-1} resulta

$$c_n = \langle xP_n, P_{n-1} \rangle_w = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle_w = \frac{h_{n-1}}{h_n} = a_{n-1}.$$

Por lo tanto,

$$xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + a_{n-1} P_{n-1}(x). \quad (2.13)$$

Y queda demostrado el

Teorema 2.3. *Toda familia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de polinomios ortogonales respecto al producto interno de la Definición 1.11 satisface la **relación de recurrencia a tres términos** (2.13).*

Mencionamos el igualmente importante resultado converso al Teorema 2.3:

Teorema 2.4 (de Favard). *Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sucesiones arbitrarias tales que $0 < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de polinomios tales que cumplen la relación de recurrencia (2.13) con*

$$P_0(x) = 1 \text{ y } xP_0(x) = a_0 P_1(x) + b_0 P_0(x), \quad (2.14)$$

entonces existe una medida positiva w tal que $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de polinomios ortogonales con respecto al producto interno ponderado $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$.

2. FUNCIONES DE HERMITE

Una forma más general y su demostración se encuentra en [Chi78] pgs. 21-22. En virtud de los teoremas 2.3 y 2.4, ahora se puede caracterizar a las familias de polinomios ortogonales.

La posibilidad de generar infinitas familias de polinomios ortogonales se remarca con otra manera de escribir la relación de recurrencia a tres términos: dadas cualesquiera dos sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de coeficientes positivos y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de coeficientes reales, se escribe la familia de polinomios ortogonales como un vector columna semiinfinito

$$P := \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

y se arreglan los coeficientes en una matriz tridiagonal semiinfinita, que tiene como diagonal principal a $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, las otras dos diagonales junto a la principal son $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, y las demás diagonales son cero:

$$J := \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 & a_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

llamada **matriz de Jacobi**. Las soluciones a la ecuación

$$xP = JP \quad (2.16)$$

son polinomios ortogonales, siempre y cuando se cumpla (2.14).

En el caso de los polinomios de Hermite $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definidos en (2.7) se tiene que

$$2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x),$$

como se demostrará en el Teorema 2.6.

2.1.5. Algunas propiedades

Más propiedades de los polinomios de Hermite pueden encontrarse en las pgs. 61-76 de [Leb65], así como en la sección 1.13 de [KS96], donde se dan muchas referencias al respecto. En esta sección mencionamos algunas para los definidos según (2.7).

Operadores escalera

Particularmente, los coeficientes explícitos para la relación de recurrencia de tres términos para los polinomios de Hermite van a calcularse en el Teorema 2.6. Primero veamos los operadores en escalera. Sea H_n el n -ésimo polinomio de Hermite definido en (2.7).

2.1. DEFINICIÓN DE LOS POLINOMIOS DE HERMITE

Lema 2.5.

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (2.17)$$

Demostración. Usaremos (2.7) y que $\frac{d^k}{dx^k}(-2x) = 0 \forall k \geq 2$ para reducir la suma hasta n , a la suma hasta 1.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(H_n) &= (-1)^n \frac{d}{dx} \left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) = (-1)^n 2xe^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (-2xe^{-x^2}) \\ &= (-1)^n 2xe^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + (-1)^n e^{x^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} (-2x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^{-x^2} \\ &= (-1)^n 2xe^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + (-1)^n e^{x^2} \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} (-2x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^{-x^2} \\ &= (-1)^n 2xe^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \\ &\quad + (-1)^n e^{x^2} \left(\binom{n}{0} \frac{d^0}{dx^0} (-2x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + \binom{n}{1} \frac{d}{dx} (-2x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right) \\ &= (-1)^n 2xe^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + (-1)^n e^{x^2} \left(-2x \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} - 2n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right) = 2nH_{n-1}(x). \end{aligned}$$

□

Sea $H_{-1}(x) = 0$. Claramente $H_0(x) = 1$.

Teorema 2.6. $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.

Demostración.

$$\frac{d}{dx}H_n = (-1)^n 2xe^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + (-1)^n e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2}$$

Reordenando los términos se obtiene

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x). \quad (2.18)$$

Usando el Lema 2.5, termina la prueba. □

Las ecuaciones (2.17) y (2.18) se conocen como **operadores en escalera de creación** y **aniquilación**, respectivamente. La consecuencia de ambas es la relación de recurrencia a tres términos, así como la solución de la ecuación diferencial de Schrödinger con potencial cuadrático, que se verá más adelante. Entonces los polinomios de Hermite cumplen la relación de recurrencia; también cumplen las demás condiciones del Teorema 2.4, y por tanto son ortogonales. Nótese que esta prueba es independiente de la Fórmula de Rodrigues.

2. FUNCIONES DE HERMITE

Función generatriz

Los polinomios de Hermite multiplicados por el factor $1/n!$ son los coeficientes de la expansión de e^{2xt-t^2} , es decir

$$w(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \quad |t| < \infty, \quad (2.19)$$

lo cual se obtiene al expandir la función compleja exponencial de t entera en su serie de Taylor ([Leb65] pgs. 60-61). La función $w(x, t)$ en (2.19) se conoce como **función generadora** de los polinomios de Hermite.

Expresiones integrales

Una forma conocida, que tiene bastante utilidad, de expresar los polinomios de Hermite sin fórmulas recursivas es

$$H_n(x) = \frac{2^n (-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2+2itx} t^n dt. \quad (2.20)$$

Esta fórmula se deriva de otras que son la forma con los núcleos de sin y cos:

$$\begin{aligned} H_{2n}(x) &= \frac{2^{2n+1} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos 2xt dt, \\ H_{2n+1}(x) &= \frac{2^{2(n+1)} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \sin 2xt dt. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Un método para obtenerlas se encuentra en [Leb65] pg. 63.

Expresión como suma

Otra forma de expresarlos explícitamente es ([KS96]):

$$\frac{H_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

donde $\lfloor n/2 \rfloor$ denota el mínimo entero no mayor que $n/2$.

Para n par:

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-k}}{(2k)! (\frac{n}{2}-k)!} (2x)^{2k},$$

2.1. DEFINICIÓN DE LOS POLINOMIOS DE HERMITE

y para n impar:

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}-k}}{(2k+1)! \left(\frac{n-1}{2}-k\right)!} (2x)^{2k+1}.$$

Véase [Leb65] pagna. 60.

Paridad

Es fácil probar que H_n tiene grado n : es par si n es par y es impar si n es impar, es decir $H_n(x) = (-1)^n H_n(-x)$. Con esta expresión se puede probar la relación de recurrencia de tres términos por inducción, véase [BW10] pg. 107.

Norma en \mathcal{L}_w^2

Calculemos sus normas en el espacio de Hilbert ponderado con el peso $w(x) = e^{-x^2}$.

Teorema 2.7.

$$\|H_n\|_w^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Demostración. Colocando H_n del lado izquierdo del operador escalera (2.18) y sustituyendo su correspondiente lado derecho en $\|H_n\|_w^2 = \int_{\mathbb{R}} |H_n(x)|^2 e^{-x^2} dx$, se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} |H_n(x)|^2 e^{-x^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} H_n(x) (2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x)) e^{-x^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2xH_{n-1}(x)H_n(x) e^{-x^2} dx - \int_{\mathbb{R}} H'_{n-1}(x)H_n(x) e^{-x^2} dx \\ &= \left[-e^{-x^2} H_{n-1}(x)H_n(x) \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \left(H'_{n-1}(x)H_n(x) + H_{n-1}(x)H'_n(x) \right) dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} H'_{n-1}(x)H_n(x) e^{-x^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} H_{n-1}(x)H'_n(x) e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Sustituyendo el lado derecho del otro operador escalera (2.17) en $H'_n(x)$, se llega a que

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx = 2n \int_{\mathbb{R}} H_{n-1}(x)^2 e^{-x^2} dx.$$

2. FUNCIONES DE HERMITE

Aplicando este resultado n veces, como base en que $\|H_0\|_w^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, por inducción matemática se demuestra que $2^n n! \sqrt{\pi}$ es la norma de H_n en \mathcal{L}_w^2 . \square

Esto prueba que $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n \in \mathcal{L}_w^2$.

2.2. Las funciones de Hermite

Basta multiplicar cada polinomio H_n por un peso de momentos finitos de cualquier orden para formar un conjunto de funciones en \mathcal{L}^2 que heredan muchas propiedades de los polinomios de Hermite en \mathcal{L}_w^2 . Las funciones de Hermite en \mathcal{L}^2 son los polinomios de Hermite llevados al espacio de Hilbert \mathcal{L}^2 de manera natural: multiplicando H_n por la raíz cuadrada del peso exponencial $w(x) = e^{-x^2}$ y normalizados; entonces al calcular el producto interno usual se tiene un sistema completo ortonormal en \mathcal{L}^2 .

Definición 2.8. $\forall n \in \mathbb{N}$, sea $\phi_n = H_n e^{-x^2/2}$.

$$\psi_n = \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_2}$$

se llaman **Funciones de Hermite**.

Por el Teorema 2.7, sabemos que $\|\phi_n\|_2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$. Usando lo hecho en la sección 2.1 se derivan propiedades de estas funciones por su definición. Satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden

$$\psi_n'' + (2n + 1 - x^2)\psi_n = 0, \quad (2.22)$$

siguiendo (2.8), lo cual es consecuencia de su definición en términos de los polinomios de Hermite, por la ecuación (2.8) que éstos verifican; eso se demuestra al final de la sección 2.2.3. La ortogonalidad del conjunto $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ también es consecuencia de esta definición, pues los polinomios de Hermite son ortogonales porque cumplen

$$m \neq n \implies 0 = \int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \psi_m(x) \psi_n(x) dx,$$

pero también veremos una prueba alternativa. Su relación de recurrencia a tres términos es la misma y resulta simplemente de multiplicar (2.13) por la raíz del peso exponencial, $e^{-x^2/2}$. También se obtienen los operadores en escalera para ψ_n las funciones de Hermite sustituyendo su definición en los operadores escalera de los polinomios. Las demás propiedades de la sección 2.1.5 son las mismas multiplicando su función de peso correspondientemente.

2.2.1. Ortonormalidad

Los polinomios de Hermite H_n son solución de la ecuación diferencial (2.8), que es caso particular de (2.2). Hemos visto que satisfacen la relación de recurrencia (2.13), cumpliendo las condiciones del Teorema 2.4; entonces $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de polinomios ortogonales en \mathcal{L}_w^2 , por lo tanto $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como en la Definición 2.8 es una familia de funciones ortogonales en \mathcal{L}^2 .

[Wie33] presenta otro modo de probar la ortogonalidad de las funciones $\{\phi_n\}$, que es el siguiente:

Teorema 2.9. *Sea ϕ_n como en la Definición 2.8. Si $m \neq n$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0$$

Demostración. Por ser solución de (2.22),

$$\begin{aligned} \phi_m'' - x^2\phi_m &= -(2m+1)\phi_m \\ \phi_n'' - x^2\phi_n &= -(2n+1)\phi_n \end{aligned} \tag{2.23}$$

Luego, después de multiplicar la primer ecuación de (2.23) por ϕ_n y la segunda por ϕ_m , al restarlas se obtiene:

$$\phi_m''\phi_n - \phi_n''\phi_m = 2(n-m)\phi_m\phi_n.$$

Integrando por partes sobre todo \mathbb{R} , resulta

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi_m\phi_n dx &= \frac{1}{2(n-m)} \int_{\mathbb{R}} [\phi_m(x)''\phi_n(x) - \phi_n(x)''\phi_m(x)] dx \\ &= \frac{1}{2(n-m)} \left[\left[\phi_m'(x)\phi_n(x) - \phi_n'(x)\phi_m(x) \right]_{-\infty}^{\infty} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}} [\phi_m'(x)\phi_n'(x) - \phi_n'(x)\phi_m'(x)] dx \right] = 0 \end{aligned}$$

□

Por lo tanto, definida ϕ_n como en la Definición 2.8 el conjunto de funciones de variable y valores reales $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortogonal y, si $\psi_n = \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_2}$, entonces $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortonormal, ya que ninguna es nula.

2. FUNCIONES DE HERMITE

2.2.2. Completitud en \mathcal{L}^2

En el Teorema 2.9 se probó la ortogonalidad de las funciones de Hermite $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que son normales por su Definición 2.8. Ahora se demostrará su completitud.

Haremos una prueba un poco más general; pues, para los polinomios de Hermite, demostrando los Teoremas 2.12 y 2.11 los intervalos de integración son a y b con $a = -\infty$ y $b = \infty$, pero su completitud puede demostrarse exactamente de la misma manera que se mostrará a continuación para las funciones que provienen polinomios de Laguerre (en el dominio semirecta $(0, \infty)$) y los de Jacobi (en tan sólo un dominio acotado (a, b)), de acuerdo a [AAR99] pgs. 306-309. Dichas funciones también resultan de multiplicar el polinomio por el peso correspondiente.

El resultado se puede establecer para el espacio de Hilbert de funciones nulas fuera de un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Esta prueba depende de la unicidad de la Transformada de Fourier de las funciones integrables. Daremos una prueba un poco más general de variable compleja.

Teorema 2.10. *Si f es integrable en $(-\infty, \infty)$ y si*

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt} dt \equiv 0$$

entonces $f = 0$ en c.t.p.

Demostración. Por la propiedad (v) de la Proposición 1.17,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ix(t-a)} dt \equiv 0$$

Por lo tanto, si $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_{-\infty}^a f(t)e^{ix(t-a)} dt = - \int_a^{\infty} f(t)e^{ix(t-a)} dt \quad (2.24)$$

Definimos dos funciones de $z = x + iy$:

$$L(z) := \int_{-\infty}^a f(t)e^{iz(t-a)} dt, \quad R(z) := - \int_a^{\infty} f(t)e^{iz(t-a)} dt$$

Es claro que $\exists L(z)$, $\forall y \leq 0$, y es analítica en $y < 0$; similarmente, $R(z)$ existe para toda $y \geq 0$ y es analítica en $y > 0$. Además, por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue y (2.24), tenemos

$$\lim_{y \rightarrow 0} L(x + iy) = \int_{-\infty}^a f(t)e^{ix(t-a)} dt = \lim_{y \rightarrow 0} R(x + iy)$$

Esto implica que

$$F(z) := \begin{cases} L(z), & y \leq 0 \\ R(z), & y > 0 \end{cases}$$

es una función entera acotada. Según el Teorema de Liouville, $F(z)$ es constante. Más aún por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} L(iy) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[- \int_a^{\infty} f(t) e^{-y(t-a)} dt \right]$$

Por lo tanto, $F(z) \equiv 0$ y, en particular, $F(0) = 0$. Por ser a arbitraria, esto significa que $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt = 0$$

Entonces $f = 0$ en c.t.p. □

Obsérvese la importancia de haber definido el espacio de Lebesgue como un conjunto de clases de equivalencia de funciones iguales en c.t.p en lugar de sólo un conjunto de funciones, para que el producto interno (1.3) sea definido positivo y la norma inducida lo sea también. El teorema anterior es la clave para demostrar que la norma de una (clase de equivalencia de) función(es) sea cero si y sólo si la función es la (clase de equivalencia de funciones) cero.

Sea $p(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que decae exponencialmente hacia los extremos, es decir con la notación explicada en el Apéndice:

$$\mathcal{O}(p(t)) = e^{-\alpha|t|} \quad \text{para alguna } \alpha > 0, |t| \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

Teorema 2.11. Sean $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $0 \neq p \in \mathcal{L}^2((a, b), \mathbb{C})$, y p verificando (2.25) si $a = -\infty$ ó $b = \infty$.

Si $f \in \mathcal{L}^2((a, b), \mathbb{R})$ y

$$\int_a^b t^n f(t) p(t) dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces $f = 0$ en c.t.p.

Demostración. Sea $z = x + iy$ y definimos

$$F(z) := \int_a^b e^{izt} p(t) f(t) dt.$$

2. FUNCIONES DE HERMITE

Si $-\infty < a < b < \infty$, entonces F es una función entera; de otra manera, F es analítica en $-\alpha < y < \alpha$. Por lo tanto,

$$F^{(n)}(z) = i^n \int_a^b e^{izt} t^n p(t) f(t) dt$$

Por hipótesis, $F^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $F(z) \equiv 0$, $\forall z \in (-\alpha, \alpha)$. En particular,

$$F(z) = \int_a^b e^{izt} p(t) f(t) dt = 0$$

Puesto que $p(t)f(t)$ es integrable en (a, b) , la unicidad de la Transformada de Fourier garantiza que $p(t)f(t) = 0$. Como $p(t) \neq 0$ en c.t.p., entonces $f(t) = 0$ en c.t.p. \square

Para el siguiente teorema, se denota $d\alpha(x) := e^{-x^2} dx$ para integrar en toda la recta ($(a, b) = (-\infty, \infty)$, $d\alpha(x)$ denotaría $x^\alpha e^{-x} dx$ si fuera $(a, b) = (0, \infty)$). Sea H_n el n -ésimo polinomio de Hermite. Para cualquier función $f \in \mathcal{L}_\alpha^2$ (es decir: tal que $\int_a^b f(x) d\alpha(x) < \infty$) sea

$$c_n := \int_a^b f(x) H_n(x) d\alpha(x).$$

Teorema 2.12. Si $s_n = \sum_{k=0}^n c_k H_k(x)$, entonces

$$\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} |c_k|^2, \quad a = -\infty, \quad b = \infty$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2 d\alpha(x) = 0.$$

Demostración. Para $m < n$, es claro que

$$\int_a^b \left(\sum_{k=m+1}^n c_k H_k \right)^2 = \sum_{k=m+1}^n |c_k|^2. \quad (2.26)$$

Asimismo,

$$0 \leq \int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2 d\alpha(x)$$

implica que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |c_k|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x). \quad (2.27)$$

Se sigue de (2.26) y (2.27) que $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_\alpha^2((a, b), \mathbb{C})$. Entonces $\exists g \in \mathcal{L}_\alpha^2$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |g(x) - s_n(x)|^2 d\alpha(x) = 0. \quad (2.28)$$

Ahora, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\forall n > k$

$$\int_a^b g(x)H(x)d\alpha(x) - c_k = \int_a^b |g(x) - s_n(x)|\phi_k d\alpha(x) \leq \int_a^b |g(x) - s_n(x)|^2 d\alpha(x)$$

Tomando el límite cuando n tiende a ∞ , obteniendo

$$c_k = \int_a^b g(x)H_k(x)d\alpha(x).$$

Según el Teorema 2.11, resulta que $f = g$ en c.t.p.. Por (2.28), llegamos a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |s_n(x)|^2 d\alpha(x) = \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x)$$

por lo cual $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x)$. □

En el Teorema 2.11, las series $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2$ convergen a f en el sentido de \mathcal{L}^2 , por lo que es en c.t.p.. La convergencia puntual se puede obtener asumiendo que f es diferenciable por trozos, y en los puntos de discontinuidad la serie converge al punto medio del límite izquierdo y el límite derecho de la función.

Otras pruebas de la completitud de las funciones de Hermite se encuentran en [Tit37] pgns. 79-80 y en [Wie33] pgns. 64-67.

2.2.3. Las autofunciones de \mathcal{F}

En [Tit37] pgns. 81-82 se encuentran los siguientes dos métodos para comprobar que las funciones de Hermite son autofunciones de la Transformada de Fourier.

2. FUNCIONES DE HERMITE

Teorema 2.13. Sean ϕ_n como en la Definición 2.8. La transformada de Fourier de ϕ_n es $(-i)^n \phi_n$; es decir,

$$\widehat{\phi}_n(x) = (-i)^n \phi_n(x).$$

A continuación se presentan tres métodos para demostrarlo. Se recuerda que otra expresión de la Transformada de Fourier es

$$\hat{f}(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iyx} dx.$$

Primer método

Demostración del Teorema 2.13.

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \widehat{\phi}_n(-y) &= \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x) e^{iyx} dx = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} e^{iyx + \frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{iyx + \frac{1}{2}x^2}) dx = e^{\frac{1}{2}y^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{\frac{1}{2}(x+iy)^2}) dx \\ &= (-i)^n e^{\frac{1}{2}y^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \frac{d^n}{dy^n} (e^{\frac{1}{2}(x+iy)^2}) dx \\ &= (-i)^n e^{\frac{1}{2}y^2} \frac{d^n}{dy^n} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{2}x^2 + ixy - \frac{1}{2}y^2} dx \right) \\ &= (-i)^n e^{\frac{1}{2}y^2} \frac{d^n}{dy^n} (\sqrt{2\pi} e^{-y^2}) = (-i)^n \sqrt{2\pi} \phi_n(y) \end{aligned}$$

Como $\widehat{\widehat{\phi}_n}(x) = \phi_n(-x)$, entonces $\widehat{\phi}_n = (-i)^n \phi_n$. □

Segundo método

Demostración del Teorema 2.13. Tenemos que

$$\hat{\phi}_n(y) = \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x) e^{-2\pi i y x} dx.$$

Entonces, por la propiedad (vii) de la Proposición 1.17,

$$\hat{\phi}_n''(y) = - \int_{\mathbb{R}} x^2 \phi_n(x) e^{-2\pi i y x} dx.$$

Integrando por partes dos veces, resulta

$$\hat{\phi}_n(y) = -\frac{1}{y^2} \int_{\mathbb{R}} \phi_n''(x) e^{-2\pi i y x} dx.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} & \hat{\phi}_n''(y) - y^2 \hat{\phi}_n(y) + (2n+1) \hat{\phi}_n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\phi_n''(x) - x^2 \phi_n(x) + (2n+1) \phi_n(x) \right) e^{-2\pi i y x} dx = 0. \end{aligned}$$

Es decir, $\hat{\phi}_n$ satisface la misma ecuación diferencial que ϕ_n . Como $e^{-x^2/2} \phi_n$ es un polinomio ortogonal, entonces $e^{-x^2/2} \hat{\phi}_n$ también lo es. Por lo tanto

$$\hat{\phi}_n = c_n \phi_n.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} e^{-x^2/2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2 + ixy} dy, \\ \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{1}{2}x^2} &= \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2} y^n e^{ixy} dy \end{aligned}$$

y también

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{1}{2}x^2} = ((-1)^n x^n + \dots) e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

por lo tanto

$$\frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2 + ixy} y^n e^{ixy} dy = ((-1)^n x^n + \dots) e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(y) e^{-ixy} dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (2^n y^n + \dots) e^{-\frac{1}{2}y^2} e^{-ixy} dy \\ &= (-i)^n (2^n y^n + \dots) e^{-\frac{1}{2}y^2}. \end{aligned}$$

Entonces $c_n = (-i)^n$ □

Esta prueba complementa el inciso (IX) de la Proposición 1.17.

2. FUNCIONES DE HERMITE

Tercer método

En [Wie33] pags. 51-55 se presenta otra prueba de ser ϕ_n autofunciones de la transformada de Fourier, siguiendo el siguiente razonamiento: Primero se observa una propiedad importante del operador diferencial $\mathcal{D}_x = \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2 \right)$.

Lema 2.14. $\forall f \in \mathcal{L}^2$, $\widehat{(\mathcal{D}_x f)}(u) = \mathcal{D}_u \hat{f}(u)$.

Demostración. Sean $f \in \mathcal{L}^2$ y $u, x \in \mathbb{R}$. Por la propiedad (VII) de la Proposición 1.17, la operación lineal de multiplicar por iu a $\hat{f}(u)$ corresponde a la operación lineal de derivar $f(x)$. Asimismo, la operación lineal de diferenciación aplicada a $\hat{f}(u)$ corresponde a la operación lineal de multiplicación por $-ix$ aplicada a $f(x)$. Entonces

$$\widehat{(\mathcal{D}_x f)}(u) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) + (ix)^2 f(x) = (iu)^2 \hat{f}(u) - \frac{d^2}{du^2} \hat{f}(u) = \frac{d^2}{du^2} \hat{f}(u) - u^2 \hat{f}(u)$$

□

Por lo tanto, las soluciones de $\mathcal{D}_x f = \lambda f$, es decir, a la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$\frac{d^2}{dx^2} f - x^2 f = \lambda f \quad (2.29)$$

son autofunciones de \mathcal{F} ; como consecuencia directa:

Corolario 2.15. Si ϕ es solución de (2.29), entonces \mathcal{D}_x conmuta con \mathcal{F} aplicados a ϕ ; es decir: $\widehat{(\mathcal{D}_x \phi)}(u) = \mathcal{D}_u \hat{\phi}(u)$

Demostración. Por el Lema 2.14, si ϕ es solución de (2.29) entonces aplicar el operador diferencial de segundo orden \mathcal{D}_x a ϕ resulta lo mismo que aplicar \mathcal{D}_u a $\hat{\phi}$. □

Para resolver (2.29), sea $f = e^{-x^2/2} p$. Entonces (2.29) se convierte en (2.2) para el caso de los polinomios de Hermite:

$$p'' - 2xp' = (\lambda + 1)p \quad (2.30)$$

Ahora, busquemos soluciones polinomiales de tipo

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (\text{con } a_n \neq 0) \quad (2.31)$$

así, (2.30) asume la forma

$$\sum_{k=2}^n k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^n (2k + \lambda + 1)a_k x^k$$

2.2. LAS FUNCIONES DE HERMITE

por lo tanto, igualando coeficientes, (2.31) es válida si y sólo si $\forall k = 2, 3, \dots, n$,

$$a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k + \lambda - 3} a_k$$

$$a_{n-1}(2n + \lambda - 1) = a_n(2n + \lambda + 1) = 0$$

Como $a_n \neq 0$, entonces

$$\lambda = -(2n + 1), \quad a_{n-1} = 0$$

y todos los coeficientes de diferente paridad que n son nulos. Además, ningún coeficiente de la misma paridad que n es nulo, pues

$$a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k - 2n - 4} a_k.$$

Por lo tanto la función p de (2.31) tiene la forma

$$a_n \left(x^n - \frac{n(n-1)}{4} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 8} x^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{n-6} + \dots \right)$$

siendo siempre solución de (2.8) :

$$p'' - 2xp' + 2np = 0$$

y es la única solución polinomial. Por lo tanto:

Corolario 2.16. (2.29) tiene una solución de la forma $q(x)e^{-x^2/2}$ con q un polinomio de grado n , sólo cuando $\lambda = -(2n + 1)$; siempre tiene una solución de este tipo $\forall n \in \mathbb{N}$ y esta solución es, excepto por un factor constante, $H_n e^{-x^2/2}$, donde

$$H_n = 2^n \left(x^n - \frac{n(n-1)}{4} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 8} x^{n-4} - \dots \right).$$

El factor $a_n = 2^n$ facilita la normalización¹. Claramente estas funciones $H_n e^{-x^2/2}$, y todas sus derivadas, decaen exponencialmente a medida que $x \rightarrow \pm\infty$.

Demostración del Teorema 2.13. Se sigue de los siguientes hechos:

¹En (2.5), se obtiene $H_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ y

$$n! a_n = (-1)^n \prod_{m=0}^{n-1} \left[\lambda_n + m q' + \frac{1}{2} m(m-1) p'' \right].$$

En el caso de la familia de polinomios de Hermite, el producto de la derecha es igual a $(-2)^n n!$ por lo que el coeficiente principal a_n de H_n es $(-2)^n$.

2. FUNCIONES DE HERMITE

- (I) Según el Lema 2.14 la ecuación (2.29) es invariante bajo la Transformada de Fourier;
- (II) hemos visto que para cualquier λ , la ecuación (2.29) tiene a lo más una sola solución, excepto por un factor constante, de la forma $p(x)e^{-x^2/2}$ con $p(x)$ polinomio;
- (III) esa solución tiene la forma $\sum_{k=0}^n a_k x^k e^{-x^2/2}$;
- (IV) la Transformada de Fourier de $x^k e^{-x^2/2}$ es $(i \frac{d}{dx})^k e^{-x^2/2}$;
- (V) $(i \frac{d}{dx})^k e^{-x^2/2}$ es de la forma $p(x)e^{-x^2/2}$, donde $p(x)$ es un polinomio de grado n , lo cual se puede verificar por inducción matemática.

□

Por lo tanto, la Transformada de Fourier de una solución ψ_n de (2.29) es de la forma $r(x)e^{-x^2/2}$, donde $r(x)$ es un polinomio, y como cumple (2.29), es de la forma $c\psi_n(x)$ con $c \in \{1, i, -1, -i\}$ por la propiedad (IX) de la Proposición 1.17. Entonces $c^4\psi_n(x) = \psi_n(x)$. Nótese que las funciones $\psi_n(x)$ se obtienen, excepto posiblemente por una diferencia del signo, al normalizar la secuencia $\{x^n e^{-x^2/2}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Esto demuestra que las funciones de Hermite satisfacen la ecuación diferencial (2.29).

2.2.4. Descomposición de \mathcal{L}^2 en 4 subespacios

La completitud de las funciones de Hermite permite llegar a resultados en todo \mathcal{L}^2 con demostraciones más sencillas.

Tratándose de un operador lineal isométrico, que preserva el producto interno y que su aplicación 4 veces es la identidad, se piensa que \mathcal{F} es una *rotación* de i grados en el espacio de dimensión infinita \mathcal{L}^2 . Sus puntos fijos serían un “eje” de esa rotación. Nos preguntamos ¿cuáles son todos sus autovectores? Ahora sabemos que existen autovectores de \mathcal{F} . A continuación se muestra que hay autovectores para cada autovalor complejo $\sqrt[4]{1}$, y que las funciones de Hermite son esos autovectores:

Definida la función de Hermite ψ_n según la Definición 2.8, obtenemos su correspondiente Transformada de Fourier según el Teorema 2.13:

$$\hat{\psi}_n = (-i)^n \psi_n$$

Como $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de acuerdo con la Definición 2.8, se trata de un sistema completo ortonormal en \mathcal{L}^2 , entonces se puede reestablecer la Transformada de Fourier así:

$$\hat{f}(w) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, \psi_n \rangle (-i)^n \psi_n$$

por ser un operador lineal.

Así se razona en [DK72] pgns. 97-98: si definimos

$$H_k := \left\{ f \in \mathcal{L}^2 : f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, \psi_{4n+k} \rangle \psi_{4n+k} \right\}$$

entonces podemos descomponer \mathcal{L}^2 en 4 subespacios ortogonales

$$H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$$

en el sentido de que $\forall f \in \mathcal{L}^2$, $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ con $f_k \in H_k$, $\forall k = 1, 2, 3, 4$, y los subespacios H_k son ortogonales por la ortogonalidad de las funciones ψ_n , que los generan.

La completitud de las funciones de Hermite en \mathcal{L}^2 resuelve encontrar todos los autovectores de \mathcal{F} .

Por poder representar cualquier función en \mathcal{L}^2 como combinación lineal numerable única de funciones de Hermite, se encuentra un isomorfismo entre $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$: la imagen de cualquier función f es la sucesión de coeficientes correspondiente, $(\langle f, \psi_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$. Por lo tanto, se encuentra una cantidad mayor que numerable de automorfismos en \mathcal{L}^2 : uno por cada permutación en el orden de las funciones de Hermite.

2.3. Aplicación en mecánica cuántica

Una aplicación importante de las funciones de Hermite es que resuelven la ecuación de onda de Schrödinger con potencial cuadrático. Una breve introducción a este sistema se encuentra en [PW35] pgns. 50-53.

La ecuación de onda de Schrödinger es una descripción del caso más simple, no-relativista y sin perturbaciones, del átomo de hidrógeno; recibe ese nombre por su similitud a las ecuaciones diferenciales de onda que se encuentran en la mecánica de fluidos, como la de D'Alembert. La función de onda espacio-temporal que la resuelve se interpreta como la distribución probabilística de la masa en el espacio en un instante t , ya que según el *principio de incertidumbre de Heisenberg*, el producto de la varianza de la función de distribución con la varianza de su transformada de Fourier está acotado inferiormente (ver [Kra99]), por lo cual es imposible precisar totalmente la posición y el momento de la partícula, a diferencia de la mecánica Newtoniana.

2.3.1. La ecuación de onda espacio-temporal

Consideremos el sistema Newtoniano con un grado de libertad que consiste de una partícula de masa m restringida a moverse dentro del eje lineal recto fijo x , durante el tiempo t . Asumimos que el sistema se describe con una función permanente de energía potencial $V(x)$ en toda la región $-\infty < x < \infty$. Para este sistema, la ecuación de Schrödinger es:

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t) = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}. \quad (2.32)$$

2. FUNCIONES DE HERMITE

En esta ecuación, \hbar es la constante de Planck, $\Psi(x, t)$ es la llamada **función de onda de Schrödinger incluyendo el tiempo** o la **función de amplitud probabilística**. Se nota que esta ecuación es similar a las ecuaciones de onda de la mecánica clásica, como la cuerda vibrante. Consultar [PW35] pgnos. 53-56 para obtener más detalles al respecto.

2.3.2. La ecuación de amplitud

Con el fin de resolver la ecuación (2.32), primero se estudia la solución usual de ecuaciones en derivadas parciales de este estilo: separando las variables. Supuesto que la solución Ψ existe y que es producto de dos funciones, una del espacio x y otra del tiempo t :

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t). \quad (2.33)$$

Sustituyendo esto en (2.32), al dividir por $\psi(x)\phi(t)$, se obtiene:

$$\frac{1}{\psi(x)} \left(-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) \right) = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{1}{\phi(t)} \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}. \quad (2.34)$$

Esta ecuación necesariamente es igual a una constante, pues el lado izquierdo sólo depende de x mientras que el lado derecho sólo depende de t . Llamémosle U a esa constante. Entonces (2.34) se puede escribir como dos ecuaciones, una del tiempo y otra del espacio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} &= -\frac{2\pi i}{\hbar} U \phi(t) \\ -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) &= U\psi(x). \end{aligned} \quad (2.35)$$

La segunda de estas ecuaciones suele escribirse de la forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (U - V(x))\psi(x) = 0 \quad (2.36)$$

La ecuación (2.36) se llama **ecuación de onda de Schrödinger** o **ecuación de amplitud**, en la medida en la que $\psi(x)$ determina la amplitud de la función $\Psi(x, t)$, cuyo valor absoluto cuadrado describe la probabilidad de encontrarse la partícula en el espacio $(x, x + dx)$ en el instante t . Según la interpretación física del sistema, donde U corresponde al nivel de energía cinética, se deduce que los valores de U no pueden ser arbitrarios y deben encontrarse discretizados. Esto se explica intuitivamente en [PW35] pgnos. 57-63, según la naturaleza de la ecuación (2.36), pues las soluciones deben satisfacer las condiciones de frontera hacia los infinitos y decaer de manera que 1 sea la probabilidad total: es decir, la probabilidad de que la partícula siempre se encuentre en el espacio, por supuesto.

Numerando los posibles valores de U con el índice n , la primera ecuación de (2.35), correspondiente a la función del tiempo $\phi_n(t)$ para el valor energético U_n , se integra directamente, resultando ser

$$\phi_n(t) = e^{-2\pi i \frac{U_n}{\hbar} t}.$$

2.3. APLICACIÓN EN MECÁNICA CUÁNTICA

La solución general de la ecuación (2.32) es la suma de todas las soluciones particulares con coeficientes arbitrarios

$$\Psi(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \Psi_n(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \psi_n(x) e^{-2\pi i \frac{U_n}{\hbar} t}. \quad (2.37)$$

Si el potencial es cuadrático, es decir $V(x) = \frac{\hbar}{8\pi^2 m} x^2$, y si se escribe $\lambda_n = -\frac{8\pi^2 m}{\hbar} U_n$, se observa que la segunda ecuación de (2.35) es la misma que (2.29):

$$\phi'' - x^2 \phi = \lambda_n \phi. \quad (2.38)$$

Por el Corolario 2.16, los niveles de energía forman un conjunto discreto de elementos consecutivos como se ve en la figura 2.2, lo cual es consistente con la interpretación física; de hecho, este conjunto debe ser

$$U_n = \frac{(2n + 1)\hbar}{8\pi^2 m},$$

por el Corolario 2.16.

Como se ha visto en la sección 2.2.3, hay soluciones de (2.29), y por lo tanto de (2.35) con las condiciones mencionadas, que son $H_n(x)e^{-x^2/2}$, donde H_n es el n -ésimo polinomio de Hermite, que difieren solamente por un factor constante.

Por tratarse de una distribución probabilística, entonces las coeficientes de los polinomios H_n son tales que $\|H_n(x)e^{-x^2/2}\| = 1$, es decir: las funciones de Hermite (Definición 2.8) son la solución de (2.36) con potencial cuadrático, y sólo valores discretos consecutivos se admiten como nivel energético. En la figura 2.3 se grafican las primeras 10 funciones de Hermite. A medida que crece el nivel de energía U_n , la función ψ_n se parece más a un oscilador armónico clásico.

Cabe mencionar que se buscaron y encontraron polinomios H_n multiplicados por el peso exponencial $w(x) = e^{-x^2/2}$ para resolver la función del espacio ψ en la ecuación diferencial separada $\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t)$; la *completud* de las funciones de Hermite garantiza que cualquier solución en \mathcal{L}^2 de (2.36) se puede expresar como serie de soluciones polinomiales, lo cual confirma que los niveles de energía deben estar cuantizados de acuerdo con el Corolario 2.16, como se muestra en la Figura 2.2: incrementando en una cantidad fija. Físicamente se interpreta el cuadrado del valor absoluto de la solución como la distribución probabilística, que debe integrar 1 en cada instante, por lo tanto los niveles de energía del sistema físico así planteado son esos cuantos y así distribuidos; aunque existan soluciones más generales a la ecuación diferencial (2.32) donde no necesariamente quedan las variables separadas como en (2.33), la interpretación física del sistema requiere que, para cada instante t , el valor absoluto del cuadrado de la distribución de probabilidad integre 1, por lo que definitivamente se encuentra en \mathcal{L}^2 y entonces los niveles de energía son cuantos y equidistantes.

2. FUNCIONES DE HERMITE

Figura 2.1: Gráfica de los primeros 6 polinomios de Hermite ortogonales con el peso e^{-x^2} y coeficiente principal 2^n .

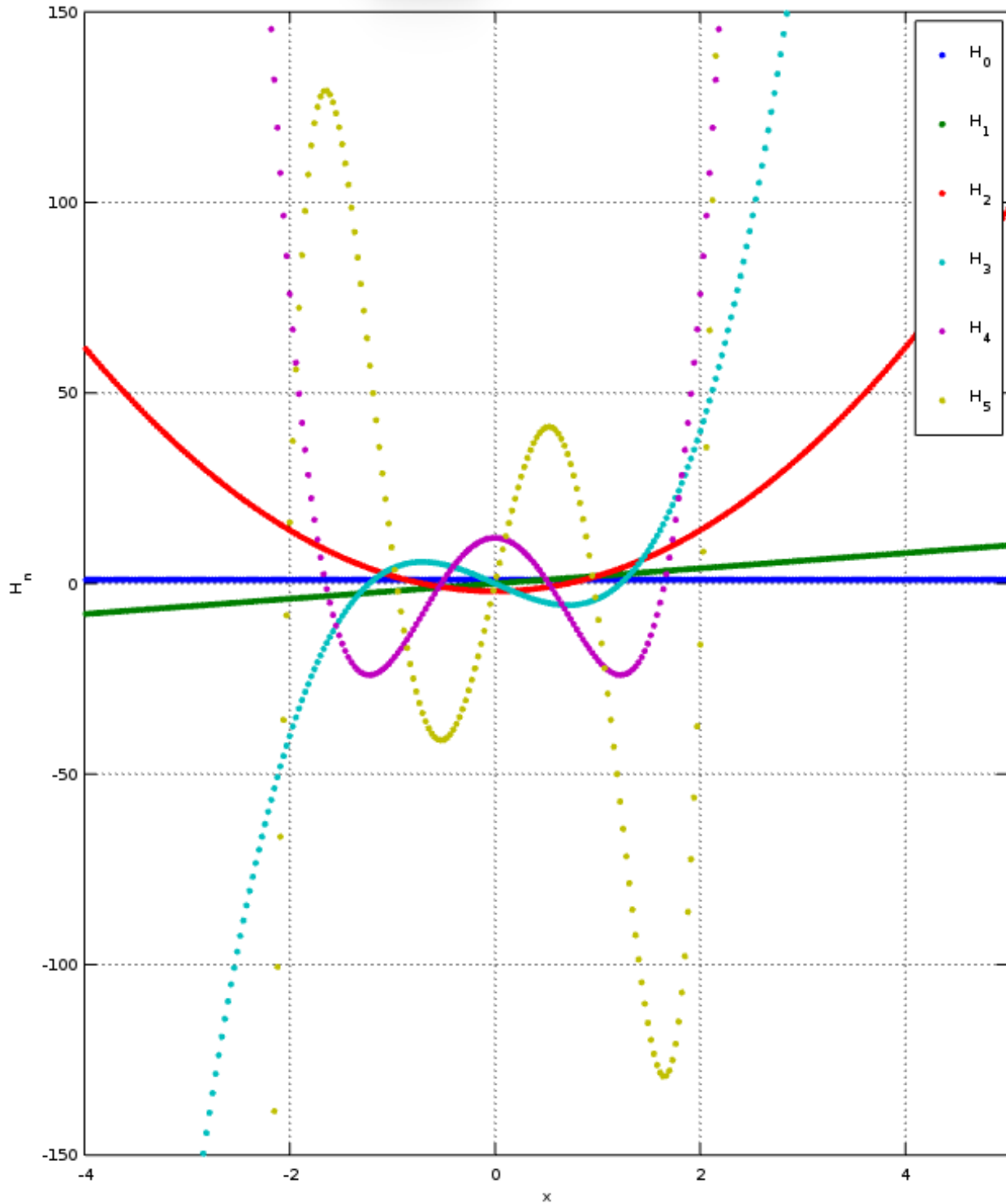
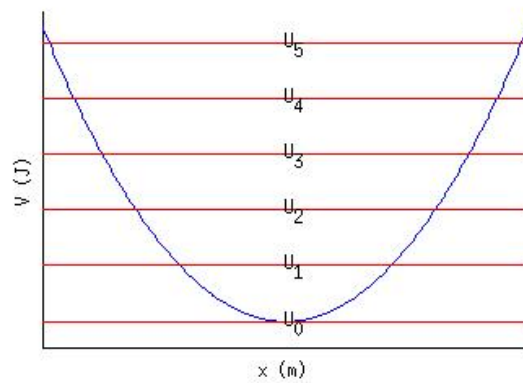
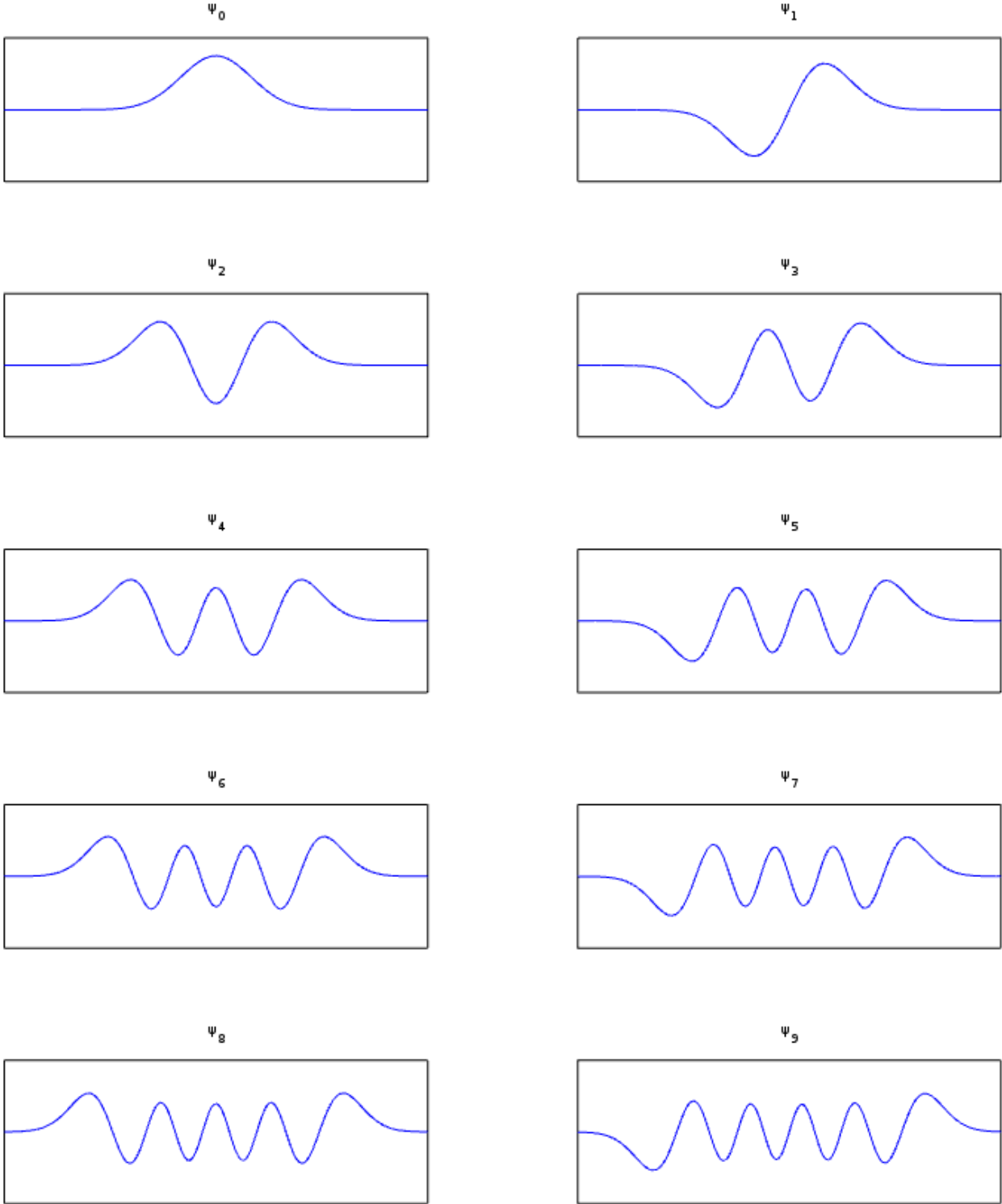


Figura 2.2: Sistema del oscilador armónico cuántico con potencial V cuadrático y los primeros 6 niveles de energía U_n respectivos.



2. FUNCIONES DE HERMITE

Figura 2.3: Gráficas de las primeras 10 funciones de Hermite.



Capítulo 3

Polinomios ortogonales matriciales

Sea \mathbb{K} un campo. Un \mathbb{K} -álgebra o álgebra sobre \mathbb{K} es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} que tiene además una operación binaria (producto) asociativa y con neutro entre sus elementos, que se distribuye con la suma vectorial y con el producto escalar con elementos del campo, tanto por la izquierda como por la derecha. Una \mathbb{C}^* -álgebra es un álgebra \mathcal{A} sobre \mathbb{C} cuyos elementos son los operadores lineales continuos de un espacio de Hilbert complejo, que además cumple las propiedades:

- \mathcal{A} es un conjunto cerrado con respecto a la topología generada por la norma de operadores, y
- $A \in \mathcal{A} \implies A^* \in \mathcal{A}$.

Dado un operador lineal $A \in \mathcal{A}$, denotamos A^* al operador adjunto¹ de A . Una generalización de los espacios de Hilbert son espacios vectoriales con un «producto interno» que tiene valores en una \mathbb{C}^* -álgebra:

Definición 3.1. Sea \mathcal{A} una \mathbb{C}^* -álgebra. Un \mathbb{C}^* -módulo de Hilbert es una \mathbb{C}^* -álgebra \mathcal{M} con una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que, $\forall x, y, z \in \mathcal{M}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, cumple:

- $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$,
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$,

y además es cerrado bajo la norma de los operadores elementos de \mathcal{A} .

¹Puesto que en este trabajo se trata de $\mathcal{A} = \mathbb{C}^{N \times N}$, entonces simplemente definimos el adjunto A^* de A como su traspuesta conjugada; es decir que se cumple $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^N$, visto A como la matriz asociada, con respecto de alguna base, a un operador lineal en \mathbb{C}^N , que es espacio vectorial con producto interno.

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

Sean $N \in \mathbb{N}$ y $Q \in \mathbb{C}^{N \times N}$. Denotamos $Q^* = \overline{Q}^T$ la matriz adjunta de Q , es decir, conjugada traspuesta.

Definición 3.2. Decimos que $\Lambda \in \mathbb{C}^{N \times N}$ es **hermítica** si y sólo si es autoadjunta, es decir $W = W^*$.

Recordamos que una matriz cuadrada W se llama **definida positiva** cuando $\forall z \in \mathbb{C}^N$, $0 < zWz^*$; en particular, W es hermítica (ver [HJ85] pgs. 169-176) y todos sus autovalores son positivos. Esto equivale con que $\langle x, y \rangle = xWy^*$ sea producto interno en $\mathbb{C}^N \ni x, y$. Se llama **semidefinida positiva** si y sólo si es definida positiva y $\forall x \in \mathbb{C}^N$, $xWx^* \geq 0$. Se llama **no degenerada** cuando $\det W \neq 0$.

Definición 3.3. Los **polinomios matriciales** de variable real y valores en el álgebra de matrices se denotan:

$$\mathbb{C}^{N \times N}[t] := \left\{ \sum_{k=1}^n A_k t^k : A_k \in \mathbb{C}^{N \times N}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (3.1)$$

con indeterminada $t \in \mathbb{R}$.

También sería posible hacer una definición similar tomando $t \in \mathbb{C}$. En esta memoria, ese no será el caso.

Decimos que un polinomio $P \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ es **mónico** si y sólo si su coeficiente principal es la matriz identidad; decimos que una matriz es **singular** si su determinante es 0. Los polinomios se derivan e integran entrada a entrada naturalmente. Luego se define su producto interno, entendido con respecto a un polinomio *matriz de medidas* o *peso matricial* W :

Definición 3.4. $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ es un **peso matricial** si y sólo si cumple las siguientes propiedades:

- $W(\Omega) = \int_{\Omega} dW$ es semidefinida positiva para cualquier conjunto de Borel $\Omega \subseteq \mathbb{R}$,
- W tiene momentos finitos de cualquier orden, i.e $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} t^n dW(t) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ y
- si el coeficiente principal de $P(t) \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ es no singular, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} P(t) dW(t) P^*(t)$$

es no singular.

Entonces, para obtener propiedades de simetría, es

Definición 3.5. Sean $P, Q \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ y W un peso matricial. En $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$ definimos el **producto interno con respecto al peso** W con valores en $\mathbb{C}^{N \times N}$ mediante la forma sesquilineal hermítica en $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_W : \mathbb{C}^{N \times N}[t] \times \mathbb{C}^{N \times N}[t] \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$$

dada por

$$\langle P, Q \rangle_W := \int_{\mathbb{R}} P(t) dW(t) Q^*(t) \quad (3.2)$$

Aunque la imagen de este producto interno no está en un campo, es fácil verificar que sigue satisfaciendo las propiedades como producto interno ([Igl07] pg. 3):

Proposición 3.6. $\forall A, B \in \mathbb{C}^{N \times N}, \forall P, Q, R \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$, el producto interno (3.2) cumple:

- $\langle AP + BQ, R \rangle_W = A \langle P, R \rangle_W + B \langle Q, R \rangle_W$,
- $\langle P, Q \rangle_W = \langle Q, P \rangle_W^*$,
- $0 \leq \langle P, P \rangle_W, 0 = \langle P, P \rangle_W \iff P = 0$

donde $B \leq A$ significa que $A - B$ es una matriz semidefinida positiva.

Demostración. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{N \times N}$ y $P, Q, R \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$.

- $\langle AP + BQ, R \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} (AP(t) + BQ(t)) dW(t) R^*(t)$

$$= \int_{\mathbb{R}} AP(t) dW(t) R^*(t) + \int_{\mathbb{R}} BQ(t) dW(t) R^*(t) = A \langle P, R \rangle_W + B \langle Q, R \rangle_W.$$
- $\langle Q, P \rangle_W^* = \left(\int_{\mathbb{R}} Q(t) dW(t) P^*(t) \right)^* = \int_{\mathbb{R}} (Q(t) dW(t) P^*(t))^*$

$$= \int_{\mathbb{R}} P^{**}(t) (Q(t) dW(t))^* = \int_{\mathbb{R}} P(t) dW(t)^* Q(t)^* = \langle P, Q \rangle_{W^*} = \langle P, Q \rangle_W,$$
- Probemos que $0 \leq \langle P, P \rangle_W$: Sea $z \in \mathbb{C}^N$. Se calcula

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} (zP(t)) dW(t) (P(t)z)^* = z \langle P, P \rangle_W z^*$$

por la tercera propiedad del peso en la Definición 3.4; como esto ocurre $\forall z \in \mathbb{C}^N$, entonces $\langle P, P \rangle_W$ es semidefinida positiva.

Claramente $P = 0$ es suficiente para que $0 = \langle P, P \rangle_W$. Veamos que es necesario: suponemos que $0 = \langle P, P \rangle_W$; sabemos que $\forall t \in \mathbb{R}$, $W(t)$ se puede diagonalizar porque

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

es semidefinida positiva, es decir $\exists D, T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ tales que $\forall t \in \mathbb{R}$, $W(t) = T(t)D(t)T^*(t)$ y $D(t)$ es diagonal; calculando $\langle I, I \rangle_W$, por la tercera propiedad de la Definición 3.4 de W se sabe que para todo t cada entrada de la diagonal de $D(t)$ es real y no nula. Entonces se tiene $0 = \langle P, P \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} (P(t)T(t))D(t)(P(t)T(t))^* dt$, notando que se integra una matriz diagonal de sumas de cada entrada de P multiplicada por su conjugado, por lo que todas deben ser cero y en consecuencia $P(t) = 0$ para (casi todo) punto de \mathbb{R} .

□

Existen otras formas de definir productos internos matriciales, como

$$(P, Q)_W := \int_{\mathbb{R}} Q^*(t) dW(t) P(t).$$

Ambos productos se relacionan con la fórmula $(P, Q)_W = \langle P^*, Q^* \rangle_W^*$, más detalles de otros productos internos se encuentran en la Sección 2 de [SV95].

Nótese que estas propiedades son más generales que las de la Definición 3.1, considerando que $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^{N \times N} \subset \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ al haber copias isomorfas de cada uno en el conjunto más grande: $\mathbb{C} \ni z = zI \in \mathbb{C}^{N \times N}$, $I = It^0 = I(t) \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ como polinomio de grado cero: constante. Por esta perspectiva es que denotamos a la matriz nula (cuyas entradas son todas cero) con el mismo símbolo: 0. Estamos tomando $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$ como módulo izquierdo.

Decimos que una matriz U es **unitaria** si y sólo si $UU^* = U^*U = I$.

Una **norma matricial generalizada** debe cumplir las propiedades enunciadas en el Capítulo 1: ser definida positiva, homogénea y cumplir desigualdad triangular; además, puede ser submultiplicativa: $\|A\|\|B\| \leq \|AB\|$. Puesto que es un espacio de dimensión N^2 , se puede introducir la norma vectorial de \mathbb{C}^{N^2} , pero es mejor aprovechar su estructura algebraica como matriz. A partir del producto interno (3.2) no se puede inducir una norma naturalmente como se vio en el caso escalar, que sería $\|A\|^2 = \langle A, A \rangle_W$, ya que para eso falta definir bien la raíz cuadrada de una matriz. Puede usarse el producto mencionado en el Ejemplo 1.4, pues su imagen tiene raíz. En [HJ85] pgs. 290-335, al principio se dan más de seis ejemplos de definiciones de norma matricial, y más adelante se encuentran detalles sobre muchas normas matriciales. Proponemos la siguiente norma en el conjunto de operadores lineales para estructurar el \mathbb{C}^* -módulo de Hilbert del Ejemplo 3.8 :

Definición 3.7. Dada una norma vectorial en \mathbb{C}^N , se define la **norma de operadores** $\forall A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ como

$$\|A\| := \max_{\|z\|=1} \|Az\|$$

Usando esta norma para el conjunto de operadores lineales de \mathbb{C}^N , categorizamos al cierre del conjunto de polinomios matriciales como

Ejemplo 3.8. Considerando a cada matriz en $\mathbb{C}^{N \times N}$ como representante, con respecto a la base canónica, de un elemento en la \mathbb{C}^* -álgebra de operadores lineales de \mathbb{C}^N , se tiene que el cierre del conjunto (3.1) con el producto interno de la Definición 3.5 forma un \mathbb{C}^* -módulo de Hilbert.

Podemos inducir una **norma** para polinomios matriciales a partir del producto interno y la norma usual $\|z\| = \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^2 \right)^{1/2}$ en \mathbb{C}^N : si $P(x) \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$,

$$\|P\| := \max_{\|z\|=1} \left\| (\langle P, P \rangle_W) z \right\|. \quad (3.3)$$

Se puede obtener un conjunto de polinomios ortogonales matriciales por el método de Gram-Schmidt de la misma manera que en la Sección 2.1.1, verificar que es ortogonal si cumple la relación de recurrencia de tres términos u obtenerlo con dos sucesiones especiales de matrices en $\mathbb{C}^{N \times N}$ y resolviendo (2.16); las demostraciones hechas en la sección 2.1 del Capítulo 2 se pueden entender también para este caso más general.

El producto de matrices no conmuta y existen divisores de cero, por lo que la factorización de un polinomio matricial no es única. Para poder normalizar un subconjunto requerimos que las matrices normas sean invertibles, es decir no singulares, lo cual está garantizado por la tercera propiedad de la definición 3.4. En este capítulo se dan ejemplos de pesos matriciales con las propiedades de esa definición.

3.1. Generalizando el caso escalar

En cualquier espacio de polinomios se encuentran los polinomios mónicos $\{t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$; claramente cualquier polinomio se puede expresar como combinación lineal finita de los mónicos. En la sección 2.1.1 se construye una familia ortonormal a partir de los polinomios mónicos que genera el mismo $\mathbb{C}[t]$, y el peso exponencial e^{-x^2} multiplicado por la constante x^0 es suficiente para formar un producto interno tal que todas las (clases de equivalencia de) polinomios (iguales en c.t.p.) se encuentren en el espacio de Lebesgue ponderado (caso particular de un \mathbb{C}^* -módulo de Hilbert) con ese peso exponencial, y de hecho esa familia es completa en un espacio más grande que sólo los polinomios. Independientemente de cuál producto interno asociado al peso se utilice, con el proceso de Gram-Schmidt se ortogonaliza esa base de manera que cualquier función puede ser expresada como límite de combinaciones lineales finitas de polinomios.

En $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$ con esta misma técnica, mostrada anteriormente para el caso escalar, se encuentra una familia de polinomios ortogonales (posiblemente completa en algún espacio de funciones matriciales) que genera los polinomios en caso de ser W de tipo Hermite (por ejemplo, $W(t) = e^{-t^2} T(t) T^*(t)$, como se verá más adelante); por lo que si un polinomio es ortogonal a toda esa familia, entonces necesariamente ese polinomio es nulo. Dado un

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

peso matricial W es posible encontrar una familia de polinomios ortogonales matriciales, también con el método descrito en la sección 2.1.3. Claramente el mismo peso exponencial multiplicado por el polinomio identidad constante I es suficiente para formar un espacio de Lebesgue ponderado que incluye a los polinomios matriciales, pero el objetivo de este trabajo es generalizar lo más posible el caso de la familia de Hermite que, además de ser ortogonal, son autofunciones del operador diferencial \mathcal{D} , resolviendo la ecuación (2.2). Es por propiedades de ese peso que la ortogonalización de la familia de polinomios mónicos define una familia de polinomios ortogonales que cumple una ecuación hipergeométrica más general.

Razonando como en la sección 2.1.4, una familia de polinomios ortogonales se genera y verifica usando (2.15), la matriz de Jacobi; para el caso de polinomios matriciales se caracteriza a las familias ortogonales de manera semejante:

Proposición 3.9. Sean $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^{N \times N}[t]$, $P_{-1}, P_0 \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ tales que $P_{-1} = 0$ y P_0 es una matriz no singular. Sean $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de matrices no singulares y $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de matrices hermíticas (es decir $B_n = B_n^*$) en $\mathbb{C}^{N \times N}$.

Existe un peso matricial W tal que la familia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortonormal con respecto al producto interno definido por W , si y sólo si, la familia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la fórmula de recurrencia de tres términos:

$$\forall n \in \mathbb{N}, tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t). \quad (3.4)$$

Demostración. Es necesario que la familia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sea ortonormal para que cumpla la relación de recurrencia de tres términos; la prueba se encuentra en [Dur93]. Para ver que es suficiente, se hace como en el caso escalar: supongamos que $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortogonal respecto del producto interno dado por el peso matricial W en la Definición 3.5; como cada polinomio P_n es de grado n , entonces tP_n es de grado $n + 1$ y, en el \mathbb{C}^* -módulo de Hilbert, expresamos $tP_n(t) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k}P_k(t)$ donde se denota $c_{n,k} = \langle tP_n, P_k \rangle_W$. Calculando

$$c_{n,k} = \langle tP_n, P_k \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} tP_n(t)W(t)P_k(t)dt = \int_{\mathbb{R}} P_n(t)W(t)tP_k(t)dt = \langle P_n, tP_k \rangle_W,$$

donde tP_k es un polinomio de grado $k + 1$; como P_n es de grado n ortogonal a los otros, entonces $c_{n,k} = 0$, $\forall k < n - 1$: $tP_n(t) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k}P_k(t)$ tiene grado $n + 1$ y es ortogonal a t^m , $\forall m < n - 1$; es decir, $c_{n,k} = 0$, $k = 0, 1, \dots, n - 2$. Como consecuencia existen matrices constantes A_n, B_n y C_n tales que

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + C_nP_{n-1}(t).$$

Tomando el producto interno con P_{n-1} resulta

$$C_n = \langle tP_n, P_{n-1} \rangle_W = \langle P_n, tP_{n-1} \rangle_w = \langle tP_{n-1}, P_n \rangle_w^* = A_n^*.$$

Por lo tanto

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t). \quad (3.5)$$

B_n es hermítica porque $B = \langle tP_n, P_n \rangle_W = \langle P_n, tP_n \rangle_W^* = \langle tP_n, P_n \rangle_W^* = B_n^*$. \square

La solución anterior se puede expresar de manera matricial definiendo un vector semi-infinito de polinomios matriciales

$$P := \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

que sea solución de $tP = JP$, con

$$J := \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ A_1^* & B_1 & A_2 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & A_2^* & B_2 & A_3 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & A_3^* & B_3 & A_4 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \end{pmatrix}, \text{ donde } A_n, B_n \in \mathbb{C}^{N \times N} \text{ y}$$

$$B_n = B_n^*.$$

Esto es válido cuando $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortonormal. Si tuviésemos otra familia ortogonal siempre es posible normalizarla, ya que sus normas matriciales siempre son positivas e invertibles. Otra cuestión es si cualquier J tridiagonal por bloques genera una familia de polinomios ortogonales matriciales por medio de las soluciones de $tP = JP$, cosa que no siempre es cierta; para que eso ocurriese, J debe ser semejante a una matriz simétrica, es decir que exista una matriz semi-infinita Π tal que $\Pi J \Pi^{-1}$ sea tridiagonal por bloques y simétrica, para así poder aplicar la Proposición 3.9.

Nótese que el grado de cada polinomio P_n es n , por lo que una familia de polinomios ortogonales además genera todo el conjunto de polinomios matriciales.

3.1.1. La ecuación diferencial hipergeométrica

Además de las propiedades de ortogonalidad, en la práctica es útil que los polinomios resuelvan una ecuación diferencial de segundo orden como (2.2), generalizando las familias clásicas de polinomios ortogonales escalares, que cumplen una ecuación diferencial de segundo orden. Según [Dur97] pg. 585, al menos hasta el año 1997 no se conocían resultados generales sobre la relación entre los polinomios ortogonales matriciales y ecuaciones diferenciales. En el caso escalar hemos visto que las familias clásicas de polinomios ortogonales (Hermite, Laguerre, Jacobi y Bessel) satisfacen ciertas ecuaciones diferenciales; generalizando al caso matricial, es natural buscar pesos matriciales y familias de polinomios ortogonales respecto de

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

esos pesos que satisfagan una ecuación diferencial del mismo tipo. Encontraremos una familia de polinomios ortogonales matriciales que satisface la ecuación diferencial hipergeométrica

$$P_n \mathcal{D} \equiv P_n''(t)F_2(t) + P_n'(t)F_1(t) + P_n(t)F_0(t) = \Lambda_n P_n(t) \quad (3.6)$$

donde el grado del polinomio matricial F_i en $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$ es, a lo sumo, 2, 1 y 0 respectivamente ([Dur97] pg. 589).

Definición 3.10. *Decimos que dos pesos matriciales $W_1(t)$ y $W_2(t)$ son **similares** si y sólo si existe una matriz constante S no singular tal que $W_1(t) = SW_2(t)S^*$. Decimos que **una matriz W reduce su tamaño** si y sólo si es similar a una diagonal por bloques. Decimos que son **unitariamente equivalentes** si S es unitaria.*

Un desarrollo al respecto se encuentra en [TZ16]. Su mayor reducción es a una matriz diagonal y escalar.

Si una familia de polinomios ortogonales $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface una ecuación de segundo orden como (3.6), también lo hace una familia ortogonal respecto del peso $SW(t)S^*$ para cualquier matriz no singular S . Esto se nota conjugando con S a los coeficientes diferenciales $F_i : SF_i S^{-1}$, dando lugar a definir las clases de equivalencia de pares $\{W, \mathcal{D}\}$.

Definición 3.11. *Sean W y \tilde{W} pesos matriciales y \mathcal{D} y $\tilde{\mathcal{D}}$ operadores diferenciales de segundo orden. Decimos que los pares $\{W, \mathcal{D}\}$ y $\{\tilde{W}, \tilde{\mathcal{D}}\}$ son **equivalentes** si y sólo si W y \tilde{W} son similares y $\tilde{\mathcal{D}} = S\mathcal{D}S^{-1}$, con S la matriz no singular tal que $\tilde{W} = SWS^*$.*

El par $\{W, \mathcal{D}\}$ se reduce a escalares si y sólo si existe S no singular tal que ambos $SW S^*$ y $S\mathcal{D}S^{-1}$ se reducen a escalares.

Entonces al buscar pesos matriciales cuyas familias de polinomios ortogonales satisfagan una ecuación diferencial de segundo orden como esa, esto no nos restringe a asumir que $W(a) = I$ para algún $a \in \mathbb{R}$, siempre y cuando $W(t)$ no sea singular para alguna t . En consecuencia, cuando buscamos polinomios no triviales resolviendo (3.6), prácticamente se asume que W (de tamaño $N \times N$) no reduce su tamaño y que para alguna $a \in \mathbb{R}$, $W(a) = I$.

Nótese en (3.6) que los autovalores se multiplican del otro lado que los coeficientes diferenciales; en este caso \mathcal{D} es lineal a izquierda pero no a derecha: $\forall C \in \mathbb{C}^{N \times N}$, $(CF)\mathcal{D} = C(F\mathcal{D})$ pero en general $(FC)\mathcal{D} \neq (F\mathcal{D})C$ para toda F función matricial.

Esa elección hace que se obtengan ejemplos no triviales de soluciones. Un ejemplo para un operador de lado izquierdo que no cumple la implicación del punto (III) con el punto (II) del Teorema 3.14 puede encontrarse en la Sección 4 de [Dur97], donde el Lema 3.1 especifica las condiciones en las cuales sí se da la implicación, que son triviales; ahí se estudia tanto \mathcal{D} operando del lado izquierdo como el caso de \mathcal{D} operando del lado derecho; de acuerdo con [DG04] pgs. 465-466, usando el producto interno (3.2), es natural y más interesante definir \mathcal{D} operando al lado derecho de las funciones y los autovalores Λ_n del lado izquierdo. Recordemos que estamos tratando al espacio $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$ como módulo izquierdo.

3.1. GENERALIZANDO EL CASO ESCALAR

Denotemos ∂_t al operador $\frac{d}{dt}$. Esta ecuación es equivalente a buscar las autofunciones P_n del operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{D} = \partial_t^2 F_2 + \partial_t^1 F_1 + \partial_t^0 F_0, \quad (3.7)$$

es decir

$$P_n \mathcal{D} = \Lambda_n P_n. \quad (3.8)$$

donde $P_n \mathcal{D}$ simboliza multiplicar a la derecha los coeficientes polinomiales F_i , que son independientes del grado n . Para toda $n \in \mathbb{N}$, P_n es de grado n .

Lema 3.12. Sean $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ ortonormal con respecto a un peso W y $Q \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ de grado m . Entonces

$$\forall t \in \mathbb{R}, Q(t) = \sum_{n=0}^m \langle P_n, Q \rangle_W P_n(t).$$

Demostración. Claramente $Q(t) - \sum_{n=0}^m \langle P_n, Q \rangle_W P_n(t)$ es un polinomio. Para toda $s \in \mathbb{N}$ calculamos

$$\begin{aligned} \langle P_s, Q - \sum_{n=0}^m \langle P_n, Q \rangle_W P_n \rangle_W &= \langle P_s, Q \rangle_W - \sum_{n=0}^m \langle P_n, Q \rangle_W \langle P_s, P_n \rangle_W \\ &= \langle P_s, Q \rangle_W - \langle P_s, Q \rangle_W = 0. \end{aligned}$$

Entonces $Q(t) - \sum_{n=0}^m \langle P_n, Q \rangle_W P_n(t)$ un polinomio ortogonal a toda la familia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, por lo que necesariamente es cero y entonces $\forall t \in \mathbb{R}, Q(t) = \sum_{n=0}^m \langle P_n, Q \rangle_W P_n(t)$. \square

Proposición 3.13. Sea $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormal respecto al producto interno (3.2).

$$P_n \mathcal{D} = \Lambda_n P_n$$

con Λ_n hermítica para toda $n \in \mathbb{N}$ equivale a que \mathcal{D} sea simétrico, lo cual significa que

$$\forall R, Q \in \mathbb{C}^{N \times N}[t], \langle R \mathcal{D}, Q \rangle_W = \langle R, Q \mathcal{D} \rangle_W.$$

Demostración. Sean $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormal y $R, Q \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ de grados r y s respectivamente.

Primero se supone que $\forall n \in \mathbb{N}$, Λ_n es hermítica y que $P_n \mathcal{D} = \Lambda_n P_n$. Usando el Lema 3.12 y la Proposición 3.6, resulta que

$$\begin{aligned} \langle R \mathcal{D}, Q \rangle_W &= \left\langle \left(\sum_{n=0}^r \langle P_n, R \rangle_W P_n \right) \mathcal{D}, \sum_{m=0}^s \langle P_m, Q \rangle_W P_m \right\rangle_W \\ &= \sum_{n=0}^r \langle P_n, R \rangle_W \langle P_n \mathcal{D}, \sum_{m=0}^s \langle P_m, Q \rangle_W P_m \rangle_W = \sum_{n=0}^r \langle P_n, R \rangle_W \sum_{m=0}^s \langle P_m, Q \rangle_W^* \langle P_n \mathcal{D}, P_m \rangle_W \end{aligned}$$

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^r \langle P_n, R \rangle_W \sum_{m=0}^s \langle P_m, Q \rangle_W^* \langle \Lambda_n P_n, P_m \rangle_W = \sum_{n=0}^r \langle P_n, R \rangle_W \sum_{m=0}^s \langle P_m, Q \rangle_W^* \Lambda_n \langle P_n, P_m \rangle_W \\
&= \sum_{n=0}^r \langle P_n, R \rangle_W \langle P_n, Q \rangle_W^* \langle P_n, \Lambda_n P_n \rangle_W = \sum_{n=0}^r \langle P_n, R \rangle_W \sum_{m=0}^s \langle P_m, Q \rangle_W^* \langle P_n, \Lambda_m P_m \rangle_W \\
&= \sum_{n=0}^r \langle P_n, R \rangle_W \langle P_n, \sum_{m=0}^s \langle P_m, Q \rangle_W \Lambda_m P_m \rangle_W = \sum_{n=0}^r \langle P_n, R \rangle_W \langle P_n, (\sum_{m=0}^s \langle P_m, Q \rangle_W P_m) \mathcal{D} \rangle_W \\
&= \langle \sum_{n=0}^r \langle P_n, R \rangle_W P_n, Q \mathcal{D} \rangle_W = \langle R, Q \mathcal{D} \rangle_W.
\end{aligned}$$

Para probar que el supuesto es necesario para que el operador \mathcal{D} sea simétrico, supongamos que $\langle R \mathcal{D}, Q \rangle_W = \langle R, Q \mathcal{D} \rangle_W \forall Q, R \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$. Veamos que $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son autofunciones de \mathcal{D} de la misma manera como se hace en [Dur97] pg. 588: ya que el operador \mathcal{D} no incrementa el grado polinomial, se expresa $P_n \mathcal{D} = \sum_{k=0}^n \Lambda_{k,n} P_k$ y como \mathcal{D} es simétrico, entonces se tiene que

$$\Lambda_{k,n} = \langle P_n \mathcal{D}, P_k \rangle_W = \langle P_n, P_k \mathcal{D} \rangle_W = 0 \quad \text{si } k \leq n.$$

Y si $k = n$, entonces $\Lambda_{k,n} = \Lambda_{k,n}^*$ y $P_n \mathcal{D} = \Lambda_{n,n} P_n = \Lambda_n P_n$. \square

Ahora contamos con esta caracterización de las autofunciones del operador diferencial \mathcal{D} . Ya que no contamos aún con un ejemplo, es de gran interés encontrar pesos matriciales que satisfagan la Definición 3.4, que es una finalidad de este capítulo.

Si $U_n U_n^* = I$, entonces $\{U_n P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ también es una familia ortonormal y satisfacen (3.5) con coeficientes $U_n A_n U_n^*$ y $U_n B_n U_n^*$ ([DG04] pg. 462) respectivamente. Si se puede diagonalizar cada miembro de la secuencia $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces eligiendo adecuadamente las matrices unitarias $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se puede enunciar que $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son diagonales desde un principio y la situación será equivalente.

Si para toda $n \in \mathbb{N}$, Λ_n es hermítica, entonces existen $U_n, \tilde{\Lambda}_n \in \mathbb{C}^{N \times N}$, U_n unitaria y $\tilde{\Lambda}_n$ diagonal, tales que

$$\Lambda_n = U_n \tilde{\Lambda}_n U_n^*.$$

Por lo tanto, si $Q_n = U_n P_n$ entonces $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son ortonormales y por la Proposición 3.13 se tiene que

$$Q_n \mathcal{D} = U_n P_n \mathcal{D} = U_n \Lambda_n P_n = U_n \Lambda_n U_n^* U_n P_n = U_n \Lambda_n U^* Q_n = \tilde{\Lambda}_n Q_n.$$

Toda matriz hermítica es unitariamente equivalente a una diagonal.

Ahora calculamos el autovalor correspondiente a la autofunción del operador en la ecuación diferencial hipergeométrica. Consideramos (3.6) con $\{\hat{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de polinomios mónicos² ortogonales matriciales tal que cada uno la resuelve; denotamos $F_j = \sum_{k=0}^j F_{j,k} t^k$, $j =$

²No se confunda con la notación de la Transformada de Fourier de los capítulos 1 y 2.

0, 1, 2 en la ecuación. Nos enfocamos en el término principal del polinomio y lo denotamos

$$\widehat{P}_n = \cdots + t^n I$$

y lo sustituímos en (3.8), por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{P}_n''(t)F_2(t) + \widehat{P}_n'(t)F_1(t) + \widehat{P}_n(t)F_0(t) &= \Lambda_n \widehat{P}_n(t) \text{ es decir} \\ [\cdots + n(n-1)t^{n-2}I](F_{2,0} + F_{2,1}t + F_{2,2}t^2) + [\cdots + nt^{n-1}I](F_{1,0} + F_{1,1}t) \\ &+ [\cdots + t^n I]F_{0,0} \\ &= \Lambda_n(\cdots + t^n I) \end{aligned}$$

Después de despejar el término de orden n obtenemos el autovalor mónico

$$\widehat{\Lambda}_n = n(n-1)F_{2,2} + nF_{1,1} + F_{0,0}, \quad 0 \leq n \quad (3.9)$$

Para cualquier otra familia $Q_n = L_n \widehat{P}_n$ se tiene que $Q_n \mathcal{D} = \Lambda_n Q_n$, con $\Lambda_n = L_n \widehat{\Lambda}_n L_n^{-1}$.

3.1.2. Ecuaciones de simetría y momentos

A diferencia del caso escalar, en el caso de polinomios matriciales es más laborioso encontrar un peso no trivial para formar el espacio de Lebesgue ponderado con ese peso. En la Sección 3 de [DG04] (pgns. 466 a 468) se encuentran ecuaciones diferenciales para el peso matricial; entre ellas, que el ser \mathcal{D} simétrico con respecto al producto interno W es equivalente a que W cumpla tres ecuaciones diferenciales en ciertas condiciones de contorno que generalizan la ecuación (2.1) de Pearson $(F_2 W)' = F_1 W$ del caso escalar, donde la tercera ecuación es su derivada.

Un método principal desarrollado últimamente para poder encontrar familias de polinomios ortogonales que verifican ecuaciones diferenciales como (3.6) consiste en encontrar un peso matricial W cumpliendo ciertas ecuaciones de simetría.

Se denota (véase (2.9)) a cada momento de W como

$$\mu_n = \int_{\mathbb{R}} t^n dW(t)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, extendiendo la Proposición 3.13 contamos con el siguiente

Teorema 3.14. *Supongamos que el peso matricial W tiene una densidad diferenciable en todo su dominio. Sean $F_j = \sum_{k=0}^j F_{j,k} t^k$, $j = 0, 1, 2$ en la ecuación (3.6). Son equivalentes:*

- (I) *El operador diferencial de segundo orden \mathcal{D} es simétrico con respecto a W ,*
- (II) *W cumple las ecuaciones de simetría*

$$\begin{aligned} F_2 W &= W F_2^*, \\ 2(F_2 W)' &= F_1 W + W F_1^*, \\ (F_2 W)'' - (F_1 W)' + F_0 W &= W F_0^*, \end{aligned} \quad (3.10)$$

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

con las condiciones de contorno

$$F_2(t)W(t), \quad (F_2(t)W(t))' - F_1(t)W(t) \quad (3.11)$$

anulándose en los límites extremos del soporte de $W(t)$, y

(III) se cumplen las siguientes ecuaciones de momentos: para todo $n \geq 2$ se cumple

$$F_{2,2}\mu_n + F_{2,1}\mu_{n-1} + F_{2,0}\mu_{n-2} = \mu_n F_{2,2}^* + \mu_{n-1} F_{2,1}^* + \mu_{n-2} F_{2,0}^*, \quad (3.12)$$

para todo $n \geq 1$ se cumple

$$2(1-n)(F_{2,2}\mu_n + F_{2,1}\mu_{n-1} + F_{2,0}\mu_{n-2}) - (F_{1,1}\mu_n + F_{1,0}\mu_{n-1}) = \mu_n F_{1,1}^* + \mu_{n-1} F_{1,0}^*, \quad (3.13)$$

para todo $n \geq 0$ se cumple

$$n(n-1)(F_{2,2}\mu_n + F_{2,1}\mu_{n-1} + F_{2,0}\mu_{n-2}) + n(F_{1,1}\mu_n + F_{1,0}\mu_{n-1}) + F_{0,0}\mu_n = \mu_n F_{0,0}^*, \quad (3.14)$$

Demostración. Primero veamos la equivalencia entre los incisos (I) y (III).

Supongamos que \mathcal{D} es simétrico con respecto al producto interno definido por W . Se tiene $\forall n, m \geq 0$,

$$\langle (t^n I)\mathcal{D}, t^m I \rangle_W = \langle t^n, (t^m I)\mathcal{D} \rangle_W. \quad (3.15)$$

Escribimos las ecuaciones del inciso (III) como

$$\begin{aligned} B_{n+m} &= F_{2,2}\mu_{n+m} + F_{2,1}\mu_{n+m-1} + F_{2,0}\mu_{n+m-2}, \\ C_{n+m} &= F_{1,1}\mu_{n+m} + F_{1,0}\mu_{n+m-1} \text{ y} \\ D_{n+m} &= F_{0,0}\mu_{n+m}, \end{aligned}$$

usando (3.15) se tiene la siguiente ecuación de momentos $\forall n, m \geq 0$:

$$n(n-1)B_{n+m} + nC_{n+m} + D_{n+m} = m(m-1)B_{n+m}^* + mC_{n+m}^* + D_{n+m}^* \quad (3.16)$$

que para $m = 0$ es

$$n(n-1)B_n + nC_n + D_n = D_n^*, \quad (3.17)$$

y para $n-1, m=1$, es

$$(n-1)(n-2)B_n + (n-1)C_n + D_n = C_n^* + D_n^*.$$

Ésto y (3.17) resultan $2(n-1)B_n + C_n = -C_n^*$, es decir

$$B_n = -\frac{1}{2(n-1)}(C_n + C_n^*), \quad 2 \leq n.$$

Por lo tanto para $2 \leq n$, $B_n = B_n^*$ y se sigue (3.12).

Por hipótesis se sabe que $D_n = D_n^*$, entonces (3.13) y (3.14) se cumplen dado (3.17).

3.1. GENERALIZANDO EL CASO ESCALAR

Ahora se prueba la implicación contraria, que basta demostrar para la base canónica de polinomios mónicos; nótese que será necesario que \mathcal{D} esté operando en (3.7) del lado derecho. Supongamos que se cumplen (3.12), (3.13) y (3.14). Para $n + m$, a partir de (3.12) se tiene

$$\begin{aligned}(n-1)B_{n+m} + C_{n+m} + mB_{n+m} &= 0, \\ (m-1)B_{n+m} + C_{n+m} + nB_{n+m} &= 0,\end{aligned}$$

es decir

$$n(n-1)B_{n+m} + nC_{n+m} = m(m-1)B_{n+m} + mC_{n+m}.$$

Supuestos que (3.13) y (3.14) se cumplen, entonces (3.16) también. Y resulta $\forall n, m \geq 0$ que

$$\langle \mathcal{D}(t^n I), t^m I \rangle_W = \langle t^n I, \mathcal{D}(t^m I) \rangle_W.$$

Y extendemos el resultado a todos los polinomios por la linealidad del operador sobre esa base de mónicos que los genera.

Ahora veamos que (I) implica (II). Supongamos que \mathcal{D} es simétrico y que el soporte de W es Ω , que suele ser un intervalo; denotamos la frontera del soporte de W como $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned}0 &= \langle R\mathcal{D}, Q \rangle_W - \langle R, Q\mathcal{D} \rangle_W \\ &= \int_{\mathbb{R}} (R''F_2 + R'F_1 + RF_0)WQ^* dt - \int_{\mathbb{R}} RW(Q''F_2 + Q'F_1 + QF_0)^* dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} R''F_2WQ^* - RW(Q''F_2)^* dt + \int_{\mathbb{R}} R'F_1WQ^* - RW(Q'F_1)^* dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} RF_0WQ^* - RW(QF_0)^* dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} R''F_2WQ^* - RW(Q''F_2)^* dt + \int_{\mathbb{R}} R'F_1WQ^* - RW(Q'F_1)^* dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} R(F_0W - WF_0^*)Q^* dt.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Supongamos que $Q = I$ para obtener la tercera ecuación de simetría: entonces

$$0 = \int_{\mathbb{R}} R''F_2W + R'F_1W + RF_0W - RWF_0^* dt.$$

Integrando por partes, resulta igual a

$$0 = R'(F_2W) \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\mathbb{R}} R'(F_2W)' dt + R(F_1W) \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\mathbb{R}} R(F_1W)' dt + \int_{\mathbb{R}} R(F_0W - WF_0^*) dt.$$

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

Como $-\int_{\mathbb{R}} R'(F_2W)'dt = -R(F_2W)' \Big|_{\partial\Omega} + \int_{\mathbb{R}} R(F_2W)''dt$, se tiene que

$$0 = R'(F_2W) \Big|_{\partial\Omega} + R(-(F_2W)' + F_1W) \Big|_{\partial\Omega} + \int_{\mathbb{R}} R \left[(F_2W)'' - (F_1W)' + F_0W - WF_0^* \right] dt.$$

Podemos elegir cualquier polinomio matricial R y en algunos de esos casos los tres sumandos son no negativos, entonces todos los sumandos deben ser nulos; de manera que los primeros dos implican las condiciones de contorno (3.11), pues deben decaer más rápido que cualquier polinomio matricial a medida que t tiende hacia los límites del soporte de W . El tercer sumando implica la tercera ecuación de simetría, pues es nulo para todo polinomio matricial R .

Para resolver la primera y segunda ecuaciones, se hace un proceso similar. Veamos que se cumple la segunda; sea $Q = tI$. Entonces a partir de (3.18) se tiene que para todo polinomio matricial R ,

$$0 = \int_{\mathbb{R}} R''F_2Wt + R'F_1Wt - RW F_1^* + RF_0Wt - RW F_0^*tdt. \quad (3.19)$$

El primer sumando integrado por partes es

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} R''F_2Wt \\ &= -RF_2W \Big|_{\partial\Omega} + \int_{\mathbb{R}} R(F_2W)'dt - Rt(F_2W)' \Big|_{\partial\Omega} + \int_{\mathbb{R}} R(F_2W)' + R(F_2W)''tdt, \end{aligned}$$

mientras que el segundo sumando es

$$\int_{\mathbb{R}} RF_1Wtdt = RF_1Wt \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\mathbb{R}} RF_1W - Rt(F_1W)'dt.$$

Por lo tanto, se tiene que (3.19) es lo mismo que

$$\begin{aligned} 0 &= -RF_2W \Big|_{\partial\Omega} + \int_{\mathbb{R}} R(F_2W)'dt - R(F_2W)' \Big|_{\partial\Omega} \\ &+ \int_{\mathbb{R}} R(F_2W)'dt + \int_{\mathbb{R}} Rt(F_2W)''dt + RF_1W \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\mathbb{R}} RF_1Wdt \\ &- \int_{\mathbb{R}} Rt(F_1W)'dt - \int_{\mathbb{R}} RW F_1^*dt + \int_{\mathbb{R}} Rt(F_0W - WF_0^*)dt. \end{aligned}$$

Reordenando los términos se tiene

$$\begin{aligned}
0 = & \\
& (RF_1W - RF_2W - R(F_2W)') \Big|_{\partial\Omega} \\
& + \int_{\mathbb{R}} R(2(F_2W)' - RF_1W - RW F_1^*) dt \\
& + \int_{\mathbb{R}} Rt(F_2W)'' - Rt(F_1W)' + Rt(F_0W - WF_0^*) dt
\end{aligned}$$

Ya hemos visto que

$$0 = R(F_2W) \Big|_{\partial\Omega} = RF_1W - R(F_2W)' \Big|_{\partial\Omega}$$

y que

$$0 = \int_{\mathbb{R}} Rt(F_2W)'' - Rt(F_1W)' + Rt(F_0W - WF_0^*) dt,$$

por lo que necesariamente

$$0 = \int_{\mathbb{R}} R(2(F_2W)' - RF_1W - RW F_1^*) dt$$

y como esto vale para todo R , entonces debe cumplirse la segunda ecuación de simetría.

Usando lo anterior probaremos que se cumple la primer ecuación de simetría. Sea $Q = t^2I$ en (3.18), que se convierte en

$$0 = \int_{\mathbb{R}} R'' F_2W t^2 - R2W F_2^* + R' F_1W t^2 - RW 2t F_1^* + R(F_0W - WF_0^*) dt \quad (3.20)$$

Integramos por partes el primer sumando, que es

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} R'' F_2W t^2 dt &= R' F_2W t^2 \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\mathbb{R}} R'(F_2W)' t^2 dt - \int_{\mathbb{R}} R' t^2 F_2W dt \\
&= R' F_2W t^2 \Big|_{\partial\Omega} - Rt^2 (F_2W)' \Big|_{\partial\Omega} + \int_{\mathbb{R}} R(F_2W)'' t^2 dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}} Rt^2 (F_2W)' dt - Rt^2 F_2W \Big|_{\partial\Omega} + \int_{\mathbb{R}} Rt^2 (F_2W)' dt + \int_{\mathbb{R}} R2F_2W dt.
\end{aligned}$$

Integrando por partes el tercer sumando de (3.20) es

$$\int_{\mathbb{R}} R' F_1W t^2 dt = RF_1W t^2 \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\mathbb{R}} Rt^2 (F_1W)' dt - \int_{\mathbb{R}} Rt^2 F_1W dt.$$

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

Tomando en cuenta que $0 = F_2 W t^2 \Big|_{\partial\Omega} = ((F_2)W' - F_1 W) \Big|_{\partial\Omega}$ como vimos anteriormente, resulta (3.20) ser lo mismo que

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_{\mathbb{R}} t^2 R(F_2 W)'' dt + \int_{\mathbb{R}} R t^2 (F_2 W)' dt + \int_{\mathbb{R}} R t^2 (F_2 W)' dt \\
 & + \int_{\mathbb{R}} R 2 F_2 W dt + \int_{\mathbb{R}} dt - \int_{\mathbb{R}} R t^2 (F_1 W)' dt \\
 & - \int_{\mathbb{R}} R t^2 F_1 W dt - \int_{\mathbb{R}} R W 2 t F_1^* + R(F_0 W - W F_0^*) dt.
 \end{aligned}$$

Agrupando los términos es lo mismo que

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_{\mathbb{R}} R t^2 ((F_2 W)'' - (F_1 W)' + F_0 W - W F_0^*) dt \\
 & + \int_{\mathbb{R}} R t (4(F_2 W)' - 2F_1 W - 2W F_1^*) dt \\
 & + \int_{\mathbb{R}} 2R(F_2 W - W F_2^*) dt.
 \end{aligned}$$

Como ya W resuelve la segunda y tercera ecuación de simetría, entonces aquí los primeros dos sumandos son nulos, en consecuencia

$$\int_{\mathbb{R}} 2R(F_2 W - W F_2^*) dt = 0$$

y como esto se da para una familia suficientemente grande de polinomios R entonces necesariamente W resuelve la primer ecuación de simetría.

Hemos concluído que el inciso (i) es suficiente para que se cumpla el inciso (ii). Para ver que es necesario se suponen las condiciones del inciso (ii) y realizamos los mismos pasos de vuelta, pues todo el razonamiento es en equivalencias. \square

Esta última implicación contraria no es cierta para casos no triviales si \mathcal{D} opera del lado izquierdo, como se explica en el Lema 3.1 de [Dur97].

Por ser el producto entre matrices en general no conmutativo, las tres ecuaciones escritas en el inciso (ii) del Teorema 3.14 se conocen como **ecuaciones de Pearson no conmutativas** o **ecuaciones de simetría**.

Las ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.14) se conocen como **ecuaciones de momentos**. Este teorema servirá para encontrar pesos matriciales con familias de polinomios ortogonales correspondientes que resuelven la ecuación diferencial hipergeométrica.

3.2. Método para encontrar ejemplos

En esta sección se describe un método para encontrar pesos matriciales explícitos que resuelven las ecuaciones de simetría, para así poder generalizar la familia clásica de polinomios ortogonales escalares de Hermite que satisfacen la respectiva ecuación diferencial.

Primero veremos la definición de la función exponencial a valores matriciales, que se inspira en el Teorema de Taylor (ver la Sección 2 de [Igl11]):

Definición 3.15. *Se define la **función exponencial a valores matriciales** de $X(t)$ como $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ tal que $\forall t \in \mathbb{R}$,*

$$e^{X(t)} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{j!} X^j(t).$$

Es un ejercicio de rutina probar que $\forall X \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{X(t)}$ converge en todo su dominio y es una generalización del caso escalar. Es posible aplicar otras funciones al espacio $\mathbb{C}^{N \times N}[t]$ usando los coeficientes de su expansión de Taylor de la misma manera; en la Sección 4.1 se verán más ejemplos.

Nótese que se generalizará la ecuación de Pearson y se usará el Teorema 3.14 para dar un ejemplo explícito de W . Por clasificar los pesos que se quieren encontrar para generalizar la familia de polinomios ortogonales de Hermite, las ecuaciones de simetría (3.10) constituyen la base del siguiente análisis.

Se especifican las hipótesis sobre el operador diferencial \mathcal{D} para encontrar ejemplos no triviales de pesos matriciales. Concentrémonos en el caso de (3.6) cuando F_2 sea una matriz escalar igual a $f_2 I$. Con esta condición resulta más sencillo demostrar el siguiente teorema, en el cual se establecen condiciones suficientes para encontrar un peso matricial que cumpla las condiciones del inciso (II) en el Teorema 3.14, y por lo tanto los polinomios ortogonales asociados a ese peso son autofunciones del operador diferencial \mathcal{D} .

Teorema 3.16. *Sean*

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \neq f_2(t) \in \mathbb{R}, \text{ y } F_2 = f_2 I \tag{3.21}$$

en el operador diferencial \mathcal{D} definido en (3.7), ρ y $c(t)$ funciones escalares, $T(t)$ función matricial tales que

$$c(t) = \frac{(\rho f_2)'}{\rho}. \tag{3.22}$$

y

$$T'(t) = G(t)T(t), \tag{3.23}$$

con $G(t)$ solución de la ecuación

$$F_1(t) = 2f_2(t)G(t) + c(t)I \tag{3.24}$$

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

siempre y cuando exista. Definiendo

$$W(t) := \rho(t)T(t)T^*(t) \quad (3.25)$$

y

$$\chi(t) = T^{-1}(t)(f_2(t)G^2(t) + f_2(t)G'(t) + c(t)G(t) - F_0)T(t), \quad (3.26)$$

entonces:

(I) Si W satisface la primera ecuación de simetría entonces satisface la segunda: $2(F_2W)' = WF_1^* + F_1W$ y

(II) W satisface la tercera ecuación de simetría si y sólo si para alguna $a \in \mathbb{R}$, $\chi(t)W(a)$ es hermítica en todos sus valores t , es decir

$$\left((F_2W)'' - (F_1W)' + F_0W = WF_0^* \right) \iff \left(\forall t \in \mathbb{R}, \chi(t)W(a) = (\chi(t)W(a))^* \right).$$

Demostración. Por la condición (3.21) sobre F_2 , la primera ecuación de simetría se satisface inmediatamente. Despejando $G(t)$ en (3.24) se obtiene

$$G(t) = \frac{F_1(t) - c(t)I}{2f_2(t)}, \quad (3.27)$$

Ahora definimos Z mediante la fórmula

$$W = Z\rho.$$

Entonces la segunda ecuación de simetría se convierte en

$$Z'(t) = G(t)Z(t) + Z(t)G^*(t) \quad (3.28)$$

Definida la función matricial T según (3.23) por medio de las condiciones

$$T'(t) = G(t)T(t), \quad T(a) = I,$$

se tiene que

$$Z(t) = T(t)Z(a)T^*(t).$$

Previamente definido en (3.25) ahora se expresa el peso factorizado de la forma

$$W(t) = \frac{\rho(t)}{\rho(a)}T(t)W(a)T^*(t).$$

La elección de a es decisiva.

Entonces $W = \rho Z$ cumple la segunda ecuación de simetría como consecuencia de que Z es solución de la ecuación (3.28). Suponiendo que W resuelve la tercera ecuación de simetría,

3.3. EJEMPLOS DE PESOS MATRICIALES

se llega a que necesariamente $\chi(t)W(a)$ es hermítica en todo su dominio. En efecto, tomando la derivada de la segunda ecuación de simetría y restándole el doble de la tercera ecuación, resulta

$$(WF_1^* - F_1W)' = 2(WF_0^* - F_0W).$$

Usando (3.24) y su adjunto se obtiene

$$(f_2WG^* - Gf_2W)' = (WF_0^* - F_0W).$$

Reemplazando aquí $(f_2W)'$ por la segunda ecuación y volviendo a usar (3.24) y su adjunto, queda

$$W(f_2(G^*)' + f_2(G^*)^2 + G^*c - F_0^*) = (f_2G' + f_2G^2 + cG - F_0)W.$$

Lo cual es equivalente a que $\chi(t)W(a)$ sea hermítica para todo t en su dominio, con

$$\chi(t) = T^{-1}(t)(f_2G' + f_2G^2 + cG - F_0)T(t), \quad (3.29)$$

simplificada así en virtud de la restricción sobre la función F_2 . Se nota que haciendo los mismos pasos de vuelta, suponer que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\chi(t)W(a)$ es hermítica implica que W resuelve la tercera ecuación de simetría. \square

Este teorema corresponde al Teorema 4.1 en [DG04]. Una demostración de una versión más general donde F_2 no es necesariamente escalar se encuentra como el Teorema 2.3 en [Dur08].

A continuación se elegirán $W(a) = I$ y $a = 0$. Una vez determinado un peso, se encuentra una familia de polinomios ortogonales matriciales con respecto de ese peso que son soluciones de la ecuación diferencial hipergeométrica (3.6). Las condiciones de la imagen de f_2 en (3.21) se refieren a que f_2 sea función real que no se anule *en todo el soporte de W* ; esta misma restricción se usa al generalizar otras familias de polinomios ortogonales. Nótese que en el caso escalar (ver (2.3)) se identifica $W(t)$ con $\rho(t)$ porque $G(t)$ se anula. Esto hace la diferencia con esta generalización al caso matricial.

3.3. Ejemplos de pesos matriciales

En ciertas condiciones la solución de la ecuación (3.23) queda igual que en el caso escalar de las ecuaciones diferenciales ordinarias, de manera que

$$T(t) = e^{\int_0^t G(s)ds}, \quad (3.30)$$

como es el caso de ser G un polinomio cuyos coeficientes conmutan. Nótese que si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\int_0^t G(s)ds$ es nilpotente, entonces las series de potencias resultado de aplicar la función exponencial generalizada se hacen finitas, simplificando la cuestión.

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

Cabe resaltar que el peso depende del dominio de las funciones; generalizando el caso escalar de Hermite, Laguerre y Jacobi respectivamente (ver Lema 2.2 de [DG07] y la fórmula 2.5 en [Dur09]) se tiene:

- $\rho(t) = e^{-x^2}$, $f_2 = 1$ implica $G(t) = A + 2Bt$ y

$$\chi(t) = T^{-1}(t)(2B + A^2 - F_0 + (2AB + 2BA - 2A)t + (4B^2 - 4B)t^2)T(t);$$

- $\rho(t) = t^\alpha e^{-x}$, $f_2 = t$ implica $G(t) = A + \frac{B}{t}$ y

$$\chi(t) = T^{-1}(t)\left((\alpha B + B^2)\frac{1}{t} + AB + BA + (\alpha + 1)A - F_0 - B + (A^2 - A)t\right)T(t)$$

- $\rho(t) = (1 + x)^\alpha(1 - x)^\beta$, $f_2 = 1 - t^2$ implica $G(t) = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}$ y

$$\begin{aligned} \chi(t) = T^{-1}(t) & \left(\frac{2t}{1-t}(\alpha A + A^2) - \frac{2t}{1+t}(\beta B + B^2) \right. \\ & + A^2 + B^2 - AB - BA - (\alpha - \beta + 1)B \\ & \left. - (\beta - \alpha + 1)A - F_0 \right) T(t). \end{aligned}$$

Seguimos el primer caso correspondiente a la familia de Hermite. Visto como subespacio de los polinomios matriciales, cada elemento del espacio $\mathbb{C}[t]$ se expresa como un polinomio escalar multiplicado por $I \in \mathbb{C}[t]^{N \times N}$; en ese caso el único peso asociado a un operador diferencial de segundo orden tal que $F_2 = 1$ es e^{-t^2} , salvo cambios de variable lineales ([DG04] pg. 471). En tales circunstancias se ha tomado

$$\rho(t) = e^{-t^2}, \quad F_2(t) = I \quad \text{y} \quad W(t) = e^{-x^2} T(t) T^*(t),$$

de manera que ese peso cumple $W(0) = I$. Esto nos lleva a que la función c (ver (2.3) y (3.22)) se expresa

$$c(t) = -2t,$$

y, según (3.27),

$$G(t) = tI + \frac{F_1}{2}.$$

Ahora, nótese que si se elige ρ como el peso clásico e^{-x^2} y f_2 como el coeficiente diferencial de la ecuación de Pearson (ver Sección 2.1.2), es decir $f_2(t) = 1$, entonces

$$G(t) = A + 2Bt,$$

para algunas $A, B \in \mathbb{C}^{N \times N}[t]$ independientes de t y determinadas según sea F_1 , dado que F_1 es un polinomio de grado a lo más 1. Entonces buscamos las soluciones T de la ecuación diferencial (3.23) expresada

$$T'(t) = (A + 2Bt)T(t), \quad \text{con la condición inicial } T(0) = 1. \quad (3.31)$$

3.3. EJEMPLOS DE PESOS MATRICIALES

Aún con estas condiciones, si A y B no conmutan entonces la solución general de (3.31) (que es versión simple de (3.23)) está dada por una serie de potencias que dificulta comprobar que χ es hermítica. Como el objetivo es encontrar ejemplos de pesos matriciales lo más generales posibles, se simplifica restringiendo las condiciones sobre las matrices A y B , basándonos en la sección 4 de [DG04].

3.3.1. Primer ejemplo: $W(t) = e^{-t^2} e^{At} e^{A^*t}$

Si G es un polinomio matricial constante igual a $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$, entonces la solución (3.30) de (3.23) se reduce a

$$T(t) = e^{At}.$$

Así, el peso buscado (3.25) tiene la forma

$$W(t) = e^{-t^2} e^{At} e^{A^*t}. \quad (3.32)$$

Asumimos que A no es unitariamente equivalente a una matriz diagonal por bloques (particularmente no es normal), ya que si fuera así, W reduce su tamaño.

Para usar el Teorema 3.16, será necesario restringir el coeficiente constante del operador diferencial \mathcal{D} : hay que elegir F_0 de manera que (3.29)

$$\chi(t) = T^{-1}(t)(f_2 G' + f_2 G^2 + cG - F_0)T(t)$$

sea hermítica. Es decir: hay que encontrar las matrices A , no unitariamente similares a una diagonal por bloques, para las cuales existe F_0 tal que

$$\chi(t) = A^2 - 2tA - e^{-At} F_0 e^{At} \quad (3.33)$$

sea hermítica.

Se expresará el **conmutador** de una matriz para todo $X, Y \in \mathbb{C}^{N \times N}$ así:

$$[X, Y] := XY - YX. \quad (3.34)$$

Y denotamos

$$\text{ad}_X^0 Y = Y, \quad \text{ad}_X^{n+1} Y = [X, \text{ad}_X^n Y], \quad (3.35)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego (3.29) se escribe

$$\begin{aligned} \chi(t) &= A^2 - 2tA - e^{-t \text{ad}_A(F_0)} \\ &= (A^2 - A_0) - t(2A - \text{ad}_A F_0) - \sum_{2 \leq n} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \text{ad}_A^n F_0. \end{aligned}$$

La existencia de F_0 tal que (3.33) se cumple es equivalente a la existencia de una matriz F_0 tal que

$$A^2 - F_0, \quad 2A - [A, F_0] \quad \text{y} \quad \forall n \geq 2, \quad \text{ad}_A^n F_0 \quad (3.36)$$

sean hermíticas ([DG04] pg. 472).

Ahora se presentará un ejemplo *máximo* para matrices nilpotentes A de orden N .

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

Proposición 3.17. Sean $\{\nu_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : n = 1, \dots, N-1\}$ y A la matriz nilpotente de orden N definida por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times N}. \quad (3.37)$$

Entonces el peso matricial (3.32)

$$W(t) = e^{-t^2} e^{At} e^{A^*t}$$

satisface la ecuación diferencial

$$W'' + [(2tI - 2A)W]' + F_0W = WF_0^*,$$

donde la matriz F_0 está dada por

$$F_0 = A^2 - 2J \quad (3.38)$$

con

$$J = \begin{pmatrix} N-1 & & & & & \\ & N-2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Demostración. Sea A definida según (3.37). Es suficiente revisar que (3.36) son hermíticas valuadas en A con F_0 según (3.38).

Directamente de la definición de F_0 en (3.38), se tiene que A resuelve la primera condición de (3.36), ya que $A^2 - F_0$ es diagonal. Por medio de un simple cálculo se prueba que

$$2A + F_0A - AF_0 = 0,$$

y sigue que A resuelve la segunda condición de (3.36).

Como $A = [A, F_0]/2$, entonces A conmuta con $[A, F_0]$, por lo tanto $\forall n \geq 2$, $\text{ad}_A^n F_0 = 0$ y en consecuencia esta matriz A hace que el resto de las condiciones (3.36) sean hermíticas. \square

Este ejemplo es máximo en el sentido de que si el peso $e^{-t^2} e^{At} e^{A^*t}$, con A nilpotente de orden N , satisface la tercera ecuación de simetría (3.10), que es un operador diferencial de segundo orden con $F_2 = I$, entonces A es unitariamente similar a la matriz A para algún $\{\nu_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : n = 1, \dots, N-1\}$.

3.3. EJEMPLOS DE PESOS MATRICIALES

Previamente vimos que para $F_2 = f_2 I$, W resuelve la primera y segunda ecuación de simetría. Ya que la existencia de un operador diferencial \mathcal{D} tal que su F_0 descrito en (3.38) hace hermíticas a (3.36) y eso equivale a que χ en (3.33) sea hermítica, con A definido según (3.37) se tiene que W descrito en (3.32) resuelve la tercera ecuación de simetría (3.10); por el Teorema 3.16 se tiene que cumple las tres ecuaciones de simetría. Esto es decir que los pesos W cumplen las condiciones del inciso (II) del Teorema 3.14 para el operador diferencial

$$\mathcal{D} = \partial_t^2 + \partial_t^1(-2tI + 2A) + \partial_t^0(A^2 - 2J).$$

De acuerdo a (3.9), se tiene que los autovalores mónicos son

$$\Lambda_n = -2nI + A^2 - 2J.$$

Nótese que en el caso escalar todos estos ejemplos se reducen a ser $\Lambda_n = -2n$. Es el término $A^2 - 2J$ lo que nos lleva a tener una generalización múltiple del caso escalar.

3.3.2. Segundo ejemplo: $W(t) = e^{-t^2} e^{Bt^2} e^{B^*t^2}$

Si $G = 2Bt$ donde $B \in \mathbb{C}^{N \times N}$, a partir de (3.30) resulta que

$$T(t) = e^{Bt^2}.$$

Entonces

$$W(t) = e^{-t^2} e^{Bt^2} e^{B^*t^2}, \quad (3.40)$$

y se tiene que W es un peso matricial. Nuevamente asumimos que B no es unitariamente similar a una matriz diagonal por bloques para que no reduzca su tamaño.

Verificaremos si hay una elección conveniente de F_0 de manera que χ en (3.29) sea hermítica para usar el Teorema 3.16. Esto significa que hay que encontrar matrices B , no unitariamente similares a matrices diagonales por bloques, para las cuales exista F_0 tal que

$$\chi(t) = 2B + 4(B^2 - B)t^2 - e^{-Bt^2} F_0 e^{Bt^2} \quad (3.41)$$

sea hermítica, equivalente a que

$$\begin{aligned} \chi(t) &= 2B + 4(B^2 - B)t^2 - e^{-t^2 \text{ad}_B(F_0)} \\ &= (2B + F_0) + (4B^2 - 4B + \text{ad}_B F_0)t^2 - \sum_{2 \leq n} \frac{(-1)t^{2n}}{n!} \text{ad}_B^n F_0 \end{aligned}$$

sea hermítica.

La existencia de alguna matriz F_0 tal que la ecuación (3.41) se mantiene es equivalente a la existencia de alguna matriz F_0 tal que

$$2B^2 - F_0, \quad 4B^2 - 4B + [B, F_0] \quad \text{y } \forall n \geq 2, \text{ ad}_B^n F_0$$

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

son hermíticas.

Con A definida como en (3.37), sea $B = A(I + A)^{-1}$. Nótese que al aplicar la función $\frac{1}{1+x}$ a A resulta que $B = A(I - A + A^2 + \dots + (-1)^{N-1}A^{N-1}) = A - A^2 + \dots + (-1)^{N-2}A^{N-1}$, es decir

$$B = \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j-1} A^j.$$

Su expresión matricial general queda

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & -\nu_1\nu_2 & \nu_1\nu_2\nu_3 & \dots & (-1)^N \nu_1\nu_2 \dots \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & \nu_2 & -\nu_2\nu_3 & \dots & (-1)^{N-1} \nu_2\nu_3 \dots \nu_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \vdots & & & -\nu_{N-2}\nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times N}.$$

Nos fijamos en el caso de las matrices nilpotentes B de orden N cuyo rango es $N - 1$, presentando este ejemplo *máximo*:

Proposición 3.18. Sean $\{\nu_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : n = 1, \dots, N - 1\}$ y B la matriz nilpotente de orden N definida por

$$B = A(I + A)^{-1} \quad (3.42)$$

Entonces el peso matricial

$$W(t) = e^{-t^2} e^{Bt^2} e^{B^*t^2} \quad (3.43)$$

resuelve la ecuación

$$W'' + [(2I - 4B)tW]' + F_0W = WF_0^*,$$

donde la matriz F_0 está dada como en (3.38):

$$F_0 = 2B - 4J$$

con J definida en (3.39).

La prueba es análoga a la de la Proposición 3.17, y el razonamiento posterior nos conduce a concluir que (3.43) también es un ejemplo de peso matricial que cumple las condiciones del inciso (3.10) del Teorema 3.14 para el operador diferencial

$$\mathcal{D} = \partial_t^2 I + \partial_t^1 (t(-2I + 4B)) + \partial_t^0 (2B - 4J).$$

De acuerdo con (3.9), se tiene que los autovalores son

$$n(2(-I + 2B)) + 2B - 4J$$

De nuevo el caso escalar es el mismo (2.4), con la diferencia del signo dependiendo de si se estructura la ecuación igualada a cero o en términos de autovectores.

Existen otros ejemplos de pesos matriciales, como los que se pueden encontrar en [DG04] y [Dur08]. Dado que la solución de (3.30) suele ser una serie de potencias, es difícil encontrarlos; también es difícil clasificarlos como se hace en las tres familias del caso escalar, pues los ejemplos que se han encontrado como generalización se presentan en posibilidades muy variadas, de manera que aún seguimos reconociendo su expansión sin haber terminado.

3.4. Funciones matriciales

Consideremos un peso matricial W como en la Definición 3.4 y una familia de polinomios matriciales $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ortogonales con respecto del producto interno definido con ese peso según la Definición 3.5 que cumpla las propiedades de la Proposición 3.6; se tiene que la familia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ genera el conjunto de los polinomios matriciales presentado en la Definición 3.1. Este es el caso matricial de los polinomios de Hermite cuando la familia cumple las ecuaciones de simetría (3.10) que son una generalización de las ecuaciones de Pearson, ya que resuelven la ecuación diferencial hipergeométrica (3.6), que es un caso general de (2.2).

Hemos visto dos ejemplos de pares de peso matricial y ecuación diferencial matricial $\{W, \mathcal{D}\}$ tales que las familias de polinomios ortogonales matriciales asociadas son autofunciones del operador diferencial. Estas familias son distintas y notamos que hay una gran variedad de casos matriciales de los polinomios ortogonales, cuyo caso escalar de Hermite (para $N = 1$) se reduce a los mismos H_n sobre los cuales se discute en el capítulo anterior.

Hay transformaciones entre ciertos pares $\{W, \mathcal{D}\}$ y otros: para cada función de valores invertibles $S(t)$ se nota que ese par de ecuación y peso es similar a $\{SW S^*, S^{-1} \mathcal{D} S\}$, de manera que la situación es esencialmente la misma; puesto que el operador es lineal por la izquierda, aplicado a una autofunción P resulta ser

$$(PS^{-1})'' F_2 + (PS^{-1})' F_1 + PS^{-1} F_0 = \Lambda PS.$$

3.4.1. Transformación de pares $\{W, \mathcal{D}\}$

Sea \mathcal{D} como en (3.7):

$$\mathcal{D} = \partial_t^2 F_2 + \partial_t^1 F_1 + \partial_t^0 F_0,$$

de manera que la familia de polinomios ortogonales matriciales son autofunciones de este operador, es decir

$$P_n \mathcal{D} = \Lambda_n P_n$$

con respecto de un peso W con soporte $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Se considera entonces el par $\{W, \mathcal{D}\}$, que será transformado en otro equivalente a partir de una función matricial no constante, a

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

diferencia de como se presentó en la Definición 3.11. Si S no depende de t , entonces los pares serán equivalentes.

Sean $S(t)$ una función matricial no singular en todo Ω y $\tilde{W} = SW S^*$. Nótese que dependen de t . Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$ definimos

$$\tilde{P}_n = P_n S^{-1},$$

así,

$$\langle \tilde{P}_n, \tilde{P}_m \rangle_{\tilde{W}} = \int_{\Omega} P_n S^{-1} (S W S^*) (P_m S^{-1})^* dt = \int_{\Omega} P_n W P_m^* dt = \langle P_n, P_m \rangle_W.$$

Lema 3.19. Sea $\tilde{\mathcal{D}} = (S\mathcal{D})S^{-1}$. $\tilde{P}_n = P_n S^{-1}$ son autofunciones de $\tilde{\mathcal{D}}$ con el mismo autovalor que P_n , es decir

$$\tilde{P}_n \tilde{\mathcal{D}} = \Lambda_n \tilde{P}_n.$$

Demostración. En efecto, ya que $\tilde{P}_n = P_n S^{-1}$, como consecuencia del siguiente silogismo:

$$\begin{aligned} P_n \mathcal{D} &= \Lambda_n P_n \\ P_n'' F_2 + P_n' F_1 + P_n F_0 &= \Lambda_n P_n \\ (\tilde{P}_n S)'' F_2 + (\tilde{P}_n S)' F_1 + \tilde{P}_n S F_0 &= \Lambda_n \tilde{P}_n S \\ (\tilde{P}_n S)'' F_2 S^{-1} + (\tilde{P}_n S)' F_1 S^{-1} + \tilde{P}_n S F_0 S^{-1} &= \Lambda_n \tilde{P}_n \\ (\tilde{P}_n'' S + 2\tilde{P}_n' S' + \tilde{P}_n S'') F_2 S^{-1} + (\tilde{P}_n' S + \tilde{P}_n S') F_1 S^{-1} + \tilde{P}_n S F_0 S^{-1} &= \Lambda_n \tilde{P}_n \\ \tilde{P}_n'' (S F_2 S^{-1}) + \tilde{P}_n' (2S' F_2 S^{-1} + S F_1 S^{-1}) + \tilde{P}_n (S'' F_2 S^{-1} + S' F_1 S^{-1} + S F_0 S^{-1}) & \\ &= \Lambda_n \tilde{P}_n, \end{aligned}$$

si definimos

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2 &= S F_2 S^{-1}, \\ \tilde{F}_1 &= (2S' F_2 + S F_1) S^{-1}, \text{ y} \\ \tilde{F}_0 &= (S'' F_2 + S' F_1 + S F_0) S^{-1}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

se obtiene

$$\tilde{\mathcal{D}} = S\mathcal{D}S^{-1} = \partial_t^2 \tilde{F}_2 + \partial_t^1 \tilde{F}_1 + \partial_t^0 \tilde{F}_0 \tag{3.45}$$

que aplicado a \tilde{P}_n ha resultado resolver la ecuación

$$\tilde{P}_n \tilde{\mathcal{D}} = \Lambda_n \tilde{P}_n.$$

□

Por tanto, a partir de los dos ejemplos de pares $\{W, \mathcal{D}\}$ ya mencionados se puede encontrar numerosas generalizaciones de la ecuación diferencial (2.2) de acuerdo al peso transformado correspondientemente.

3.4.2. Funciones ortogonales matriciales propias de un operador diferencial

Ahora se generaliza el espacio de Lebesgue ponderado para posteriormente formar el espacio de Lebesgue matricial con una familia de funciones ortonormales.

Definición 3.20. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ el producto interno de la Definición 3.5. El conjunto de clases de equivalencia de funciones matriciales de variable real iguales en casi todo punto, tales que todas sus entradas son finitas tras aplicar el producto interno a sí misma, se denota

$$L_W^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N}).$$

Es decir que para cada clase F se tiene

$$F \in L_W^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N}) \iff \langle F, F \rangle_W < \infty.$$

Ejemplo 3.21. $L_W^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N})$ con la norma de operadores (3.3) es un \mathbb{C}^* -módulo de Hilbert.

Ver [Igl11], sección 3. Nos preguntamos si, como en el caso escalar, existen familias de polinomios matriciales ortogonales completas en ese espacio de funciones más general.

Definido W como en (3.25), ya que la norma de operadores de cada P_n es finita, si se multiplica a cada polinomio de la familia ortogonal por $\sqrt{\rho}T$, en virtud de la definición del producto interno se tiene que la familia $\{\sqrt{\rho}P_nT\}_{n \in \mathbb{N}}$ se encuentra en el espacio de funciones matriciales de variable real $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N})$ más general, con peso constante I identidad, generalizando el espacio de Lebesgue escalar.

Definición 3.22. Sean W un peso matricial como en (3.25) tal que $W(0) = I$ que resuelve las ecuaciones de simetría (3.10) para algún operador diferencial de segundo orden y $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de polinomios ortogonales matriciales. Definimos $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_n(t) = \rho^{1/2}(t)P_n(t)T(t). \quad (3.46)$$

Para cada par de peso matricial y operador diferencial asociado, la familia $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se llama **funciones ortogonales matriciales**.

Como consecuencia directa de su definición las funciones Φ_n son ortogonales en el espacio de funciones matriciales ponderado con el peso I : usando el producto interno usual de funciones escalares (1.3) en cada entrada de la imagen de cada Φ_n , notamos que si $m \neq n$ entonces

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n, \Phi_m \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \rho^{1/2}(t)P_n(t)T(t)(\rho^{1/2}(t)P_m(t)T(t))^* dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} P_n(t)\rho(t)T(t)T^*(t)P_m^*(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} P_n(t)dW(t)P_m^*(t) = 0 \end{aligned}$$

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

pues P_n es ortogonal a P_m con respecto al producto interno ponderado; y para toda n ,

$$\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle = \|P_n\|_W^2$$

con la norma de operadores (3.3).

Definida Φ_n según (3.46) entonces reescribiremos la ecuación diferencial (3.6). Consideremos W definido según (3.25) y sea

$$S(t) = \rho^{-1/2}(t)T^{-1}(t); \quad (3.47)$$

entonces se tiene que

$$\tilde{W} = SW S^* = \rho^{-1/2}(t)T^{-1}\rho(t)T(t)T^*(t)\rho^{-1/2}(t)T^*(t) = I. \quad (3.48)$$

Con esta transformación se calculan los coeficientes de $\tilde{\mathcal{D}}$ como en la sección 3.4.1; aplicamos este operador $\tilde{\mathcal{D}}$ a cada función ortogonal y con las condiciones del Teorema 3.16 se tiene una familia de funciones ortogonales que resuelven una ecuación diferencial de segundo orden de valores matriciales bastante general.

Teorema 3.23. *Sea \mathcal{D} con las condiciones del Teorema 3.16, sean S según (3.47), $\tilde{\mathcal{D}}$ según (3.45) y χ definido como en (3.29) o (3.33). Cada miembro Φ_n de la familia ortogonal (3.46) con respecto del peso \tilde{W} formulado en (3.48) resuelve la ecuación diferencial de segundo orden*

$$f_2\Phi_n'' + f_2'\Phi_n' - \Phi_n \left(\frac{1}{4} \frac{(f_2\rho')'}{\rho} + \frac{1}{4} \left(\frac{f_2\rho'}{\rho} \right)' + \chi \right) = \Gamma_n \Phi_n. \quad (3.49)$$

Demostración. En estas condiciones, usando (3.44) se expresa (3.45) como

$$\tilde{\mathcal{D}} = \partial_t^2 f_2 + \partial_t^1 (2S' f_2 + SF_1)S^{-1} + \partial_t^0 (S'' f_2 + S' F_1 + SF_0)S^{-1} \quad (3.50)$$

Según (3.23), se despeja $(TT^{-1})' = 0$ obteniendo

$$(T^{-1})' = -TG,$$

y entonces, por definición

$$S' = -\frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho'T^{-1} - T^{-1}\rho^{-1/2}G. \quad (3.51)$$

Usando esto se desarrolla el coeficiente de la primera derivada, pues

$$\begin{aligned} (2S' f_2 + SF_1)S^{-1} &= \left(2\left(-\frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho'T^{-1} - T^{-1}\rho^{-1/2}G\right)f_2 + \rho^{-1/2}T^{-1}F_1 \right) \rho^{1/2}T \\ &= T^{-1} \left(-\rho^{-3/2}f_2\rho' - 2f_2\rho^{-1/2}G + \rho^{-1/2}F_1 \right) \rho^{1/2}T \\ &= -\rho^{-1}f_2\rho' - 2f_2T^{-1}GT + T^{-1}F_1T \end{aligned}$$

que por (3.27) es

$$\begin{aligned} &= -\rho^{-1}f_2\rho' - T^{-1}2f_2\frac{F_1 - c}{2f_2}T + T^{-1}F_1T \\ &= -\rho^{-1}f_2\rho' - T^{-1}F_1T + c + T^{-1}F_1T \end{aligned}$$

donde se sustituye (3.22) y queda

$$= -\rho^{-1}f_2\rho' + \frac{(\rho f_2)'}{\rho} = -\frac{f_2\rho'}{\rho} + \frac{f_2\rho'}{\rho} + \frac{f_2'\rho}{\rho} = f_2',$$

es decir

$$\partial_t^1(2S'f_2 + SF_1)S^{-1} = \partial_t^1 f_2'. \quad (3.52)$$

Ahora se despejará la última parte. Calculamos

$$\begin{aligned} S'' &= -(T^{-1}(\rho^{-1/2}G + \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho'))' \\ &= T^{-1}G(\rho^{-1/2}G + \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho') \\ &\quad - \left(T^{-1}(\rho^{-1/2}G' - \frac{1}{2}\rho^{-3/2}G\rho' + \frac{1}{2}(\rho^{-3/2}\rho'' - \frac{3}{2}\rho^{-5/2}(\rho')^2)) \right) \end{aligned}$$

después de anularse los términos $\pm\frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho'G$ se tiene

$$S'' = T^{-1} \left(\rho^{-1/2}G^2 + \rho^{-3/2}\rho'G - \rho^{-1/2}G' - \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho'' + \frac{3}{4}\rho^{-5/2}(\rho')^2 \right) \quad (3.53)$$

Sustituimos (3.51) y (3.53) en (3.50) y resulta que

$$\begin{aligned} &\partial_t^0(S''f_2 + S'F_1 + SF_0)S^{-1} = \\ &\left(T^{-1}(\rho^{-1/2}G^2 + \rho^{-3/2}\rho'G - \rho^{-1/2}G' - \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho'' + \frac{3}{4}\rho^{-5/2}(\rho')^2)f_2 \right. \\ &\quad \left. + T^{-1}(-\frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho' - \rho^{-1/2}G)F_1 + \rho^{-1/2}T^{-1}F_0 \right)\rho^{1/2}T \\ &= T^{-1}(\rho^{-1/2}f_2G^2 + \rho^{-3/2}\rho'f_2G - \rho^{-1/2}f_2G' - \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho''f_2 \\ &\quad + \frac{3}{4}\rho^{-5/2}(\rho')^2f_2 - \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho'F_1 - \rho^{-1/2}GF_1 + \rho^{-1/2}F_0)\rho^{1/2}T \end{aligned}$$

donde se sustituye (3.24) y queda

$$\begin{aligned} &= T^{-1}(\rho^{-1/2}f_2G^2 + \rho^{-3/2}\rho'f_2G - \rho^{-1/2}f_2G' - \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho''f_2 \\ &\quad + \frac{3}{4}\rho^{-5/2}(\rho')^2f_2 - \rho^{-3/2}\rho'f_2G - \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho'c - 2\rho^{-1/2}f_2G^2 \\ &\quad - \rho^{-1/2}cG + \rho^{-1/2}F_0)\rho^{1/2}T \end{aligned}$$

3. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

sustituimos (3.22) y agrupamos

$$\begin{aligned}
&= T^{-1}((\rho^{-1/2}f_2 - 2\rho^{-1/2}f_2)G^2 - \rho^{-1/2}f_2G' - \rho^{-1/2}cG + \rho^{-1/2}F_0)\rho^{1/2}T \\
&\quad - \frac{1}{2}\rho^{-1}\rho''f_2 + \frac{3}{4}\rho^{-2}(\rho')^2f_2 - \frac{1}{2}\rho^{-1}\rho'\frac{(\rho f_2)'}{\rho} \\
&= -T^{-1}(f_2G^2 + f_2G' + cG - F_0)T \\
&\quad - \frac{1}{2}\rho^{-1}\rho''f_2 + \frac{3}{4}\rho^{-2}(\rho')^2f_2 - \frac{1}{2}\rho^{-2}\rho'(\rho'f_2 + \rho f_2')
\end{aligned}$$

sustituyendo (3.26) esto es

$$\begin{aligned}
&= -\chi - \frac{1}{2}\rho^{-1}\rho''f_2 + \frac{3}{4}\rho^{-2}(\rho')^2f_2 - \frac{1}{2}\rho^{-2}(\rho')^2f_2 - \frac{1}{2}\rho^{-1}f_2' \\
&= -\frac{1}{2}\rho^{-1}\rho''f_2 - \frac{1}{2}\rho^{-1}\rho'f_2' + \frac{1}{4}\rho^{-2}(\rho')^2f_2 - \chi \\
&= -\frac{1}{4}\rho^{-1}\rho''f_2 - \frac{1}{4}\rho^{-1}\rho'f_2' - \frac{1}{4}\rho^{-1}\rho''f_2 - \frac{1}{4}\rho^{-1}\rho'f_2' + \frac{1}{4}\rho^{-2}(\rho')^2f_2 - \chi \\
&= -\frac{1}{4}\frac{(\rho'f_2)'}{\rho} - \left(\frac{1}{4}\frac{\rho'f_2}{\rho}\right)' - \chi,
\end{aligned}$$

es decir:

$$\partial_t^0(S''f_2 + S'F_1 + SF_0)S^{-1} = -\left(\frac{1}{4}\frac{(f_2\rho)'}{\rho} + \frac{1}{4}\left(\frac{f_2\rho'}{\rho}\right)' + \chi\right). \quad (3.54)$$

Por (3.52), (3.54) y que el término de segunda derivada ya está resuelto (pues $F_2 = f_2I$ que conmuta con T), entonces se tiene la expresión buscada del operador (3.50), y por el Lema 3.19 se tiene que las funciones Φ_n de la familia ortogonal (3.46) son autofunciones de $\tilde{\mathcal{D}}$. \square

En particular se tiene que (3.49) es una generalización de (2.38), la ecuación de Schrödinger con potencial cuadrático:

Corolario 3.24. Si $\rho(t) = e^{-t^2}$ y $f_2 = I$, entonces la familia ortogonal (3.46) resuelve la ecuación

$$\Phi_n'' - \Phi_n((t^2 - 1)I + \chi(t)) = \Gamma_n\Phi_n.$$

Demostración. Ya que Φ_n resuelve (3.49) por el Teorema 3.23, como $f_2' = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
&- \left(\frac{1}{4}\frac{(f_2\rho)'}{\rho} + \frac{1}{4}\left(\frac{f_2\rho'}{\rho}\right)' + \chi\right) \\
&= -\left(\frac{1}{4}\frac{(-2te^{-t^2})'}{e^{-t^2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{-2te^{-t^2}}{e^{-t^2}}\right)' + \chi\right) \\
&= -\left(\frac{1}{4}(4t^2 - 2) + \frac{1}{4}\frac{(-2te^{-t^2})'e^{-t^2} - 4t^2e^{-2t^2}}{e^{-2t^2}} + \chi\right) \\
&= -\left((t^2 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}\frac{(4t^2e^{-2t^2} - 2e^{-2t^2} - 4t^2e^{-2t^2})}{e^{-2t^2}} + \chi\right) \\
&= -\left((t^2 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} + \chi\right).
\end{aligned}$$

\square

3.4. FUNCIONES MATRICIALES

Así nos encontramos finalmente con una ecuación diferencial hipergeométrica de segundo orden resuelta en el espacio de Lebesgue matricial.

Capítulo 4

Funciones de Hermite matriciales

Generalizando las familias de polinomios ortogonales clásicos de Hermite, cuyo dominio es toda la recta real, hemos buscado pesos de valores matriciales y polinomios matriciales ortogonales con respecto del peso correspondiente que sean autofunciones de un operador diferencial de segundo orden.

Como se ha dicho en la Definición 3.20, el espacio de funciones matriciales es un espacio de *clases de equivalencia* de funciones iguales en casi todo punto, de igual forma que el caso escalar del espacio de Lebesgue presentado al inicio del Capítulo 1. Además de ser solución de un operador diferencial de segundo orden, otra propiedad importante de las funciones Hermite es que son autofunciones de la Transformada de Fourier; el hecho de que una familia numerable de funciones ortogonales matriciales completa en el espacio $L^2_W(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N})$, presentado en el Ejemplo 3.21, sean autofunciones tanto de un operador diferencial como de uno integral en ese espacio, garantiza que esos operadores conmutan en $L^2_W(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N})$ si los autovalores conmutan, pues basta descomponer a cualquier función matricial en su correspondiente expansión numerable y aplicar los operadores, obteniendo la suma del producto de sus autovalores multiplicando por la izquierda a la función ortogonal, como veremos en conclusión. Un trabajo en esa dirección se ha hecho en [Igl11].

Hasta hoy no se ha encontrado un operador de tipo Fourier, \mathcal{F} en la Definición 1.16, del espacio de funciones matriciales $L^2_W(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N})$ lo suficientemente general como para definir una Transformada de Fourier de valores matriciales única, pues las familias de polinomios ortogonales matriciales no se encuentran clasificadas, ni contamos con una solución general, a partir de cualquier peso W , de un operador diferencial general de segundo orden de valores matriciales; vimos que eso da lugar a muchas ecuaciones diferenciales hipergeométricas, que en el caso escalar son la misma ecuación de Schrödinger.

Hemos visto que encontrar pesos matriciales no triviales es un ejercicio laborioso. Definir un núcleo de tipo Fourier sigue siendo un reto. A partir de los dos ejemplos presentados en el capítulo anterior, por ahora presentaremos dos ejemplos de operadores integrales que en el caso escalar $N = 1$ resultan ser la Transformada de Fourier, y con esto puede demostrarse que el operador diferencial conmuta con el operador integral respectivo al peso en todo el

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

espacio de funciones de valores matriciales.

Con base en cada uno de esos ejemplos se construye una familia de funciones matriciales ortogonales con la técnica vista en la sección 3.4.2; observemos que puede variar con la transformación de pares vista en la sección 3.4.1. Generalizaremos algunos resultados acerca de los Polinomios de Hermite del Capítulo 2.

De ahora en adelante denotamos

$$L^2 := L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N})$$

al espacio de clases de equivalencia de funciones a valores matriciales iguales en c.t.p. Obsérvese que según la Definición 3.20 se tiene que L^2 es el \mathbb{C}^* -módulo de Hilbert (ver Ejemplo 3.21) con el producto interno de la Definición 3.5 para el peso constante I , lo cual generaliza al espacio de Lebesgue usual presentado por el Ejemplo 1.2.

A la par que su ortogonalidad, la otra propiedad indispensable de la familia de funciones ortogonales matriciales (3.46) es su *completitud* en L^2 . La demostración de este hecho sigue las mismas líneas que la del Teorema 2.12. Naturalmente este resultado simplifica el estudio de L^2 .

Veremos algunas propiedades de las familias de funciones y polinomios ortogonales a valores matriciales que se obtienen con los pesos descritos en la sección 3.3, así como sus expresiones explícitas para el caso $N = 2$.

4.1. Extendiendo funciones a valores matriciales y algunas propiedades algebraicas

En esta sección presentamos algunas relaciones algebraicas que usaremos más adelante, y la generalización de los valores de ciertas funciones.

Así como se ha construido la función exponencial de valores matriciales en la Definición 3.15, para una matriz $X \in \mathbb{C}^{N \times N}$ puede extenderse la imagen de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ infinitamente diferenciable hacia valores matriciales por medio de su expansión de Taylor mediante la fórmula

$$f(X) = \sum_{j \in \mathbb{N}} f^{(j)}(0) \frac{X^j}{j!},$$

donde $f^{(j)}$ denota la j -ésima derivada de f . De esta manera podemos pensar en aplicar f a cada valor de cualquier función matricial, en cada punto.

Denotamos por $E_{j,k}$ a la matriz con valor 1 en la entrada (j, k) y 0 en el resto. Estas matrices son base de $\mathbb{C}^{N \times N}$. Es claro que para todos los naturales $1 \leq i, j, k, l \leq N$ ocurre

$$E_{i,j} E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}. \quad (4.1)$$

4.1. EXTENDIENDO FUNCIONES A VALORES MATRICIALES Y ALGUNAS PROPIEDADES ALGEBRAICAS

Hablaremos de una matriz que se comporta como el número imaginario i , pero en el espacio de matrices $\mathbb{C}^{N \times N}$. Esto resulta de aplicar la serie de Taylor de la función escalar $f(x) = e^{i\frac{\pi}{2}kx}$ a la matriz J descrita en (3.39), obteniendo

$$e^{i\frac{\pi}{2}kJ} = (i)^{kJ} = e^{kJ \log i} = \sum_{j=1}^N (i)^{k(N-j)} E_{j,j}. \quad (4.2)$$

Calculando para naturales k , particularmente para $k = 0$ se tiene la matriz identidad I , para $k = 1$ se tiene la matriz diagonal

$$e^{i\frac{\pi}{2}J} = \begin{pmatrix} (i)^{N-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & i & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

y para $k = 2$ se tiene la matriz diagonal

$$e^{i\pi J} = \begin{pmatrix} (-1)^{N-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

que es de entradas reales y satisface $e^{i\pi J} e^{i\pi J} = I$. Para $k = 3$ se tiene la inversa de (4.3). Notamos que $e^{i\frac{\pi}{2}kJ}$ tiene periodo 4.

También definimos las siguientes matrices diagonales y singulares: $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}kJ\right) &:= \frac{1}{2i}(e^{i\frac{\pi}{2}kJ} - e^{-i\frac{\pi}{2}kJ}) = \sum_{j=1}^N \sin\left(\frac{\pi}{2}k(N-j)\right) E_{j,j}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}kJ\right) &:= \frac{1}{2}(e^{i\frac{\pi}{2}kJ} + e^{-i\frac{\pi}{2}kJ}) = \sum_{j=1}^N \cos\left(\frac{\pi}{2}k(N-j)\right) E_{j,j}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

En el caso particular de $k = 1$ su expresión explícita son las matrices diagonales de entradas reales:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}J\right) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}(N-j)\right) & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

4.1. EXTENDIENDO FUNCIONES A VALORES MATRICIALES Y ALGUNAS PROPIEDADES ALGEBRAICAS

Usando la ortogonalidad de $\{E_{j,l}\}_{j,l \leq N}$, para $m = 1$ se tiene, por definición, que

$$\begin{aligned} (i)^k A e^{i\frac{\pi}{2}kJ} &= (i)^k \left(\sum_{j=1}^{N-1} \nu_j E_{j,j+1} \right) \left(\sum_{l=1}^N (i)^{k(N-l)} E_{l,l} \right) = (i)^k \sum_{j=1}^{N-1} (i)^{k(N-j-1)} \nu_j E_{j,j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} (i)^{k(N-j)} \nu_j E_{j,j+1} = \left(\sum_{j=1}^N (i)^{k(N-j)} E_{j,j} \right) \left(\sum_{l=1}^{N-1} \nu_l E_{l,l+1} \right) = e^{i\frac{\pi}{2}kJ} A. \end{aligned}$$

Con base en esto, suponiendo que la fórmula (4.9) es válida para $m \in \mathbb{N}$, vemos que

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}kJ} A^{m+1} &= e^{i\frac{\pi}{2}kJ} A^m A = (i)^{km} A^m e^{i\frac{\pi}{2}kJ} A = (i)^{km} A^m (i)^k A e^{i\frac{\pi}{2}kJ} \\ &= (i)^{k(m+1)} A^{m+1} e^{i\frac{\pi}{2}kJ}. \end{aligned}$$

Concluimos lo cierto por el principio de inducción matemática. □

Lema 4.2. *Definido el operador ad según (3.35), para todo natural $k < N$ se tiene que*

$$\text{ad}_{A^k} J = -kA^k. \quad (4.11)$$

Demostración. Como

$$J = \sum_{j=1}^N (N-j) E_{j,j},$$

usando (4.10) tenemos

$$\text{ad}_A J = AJ - JA = \sum_{j=1}^{N-1} \nu_j E_{j,j+1} \sum_{l=1}^N (N-l) E_{l,l} - \sum_{l=1}^N (N-l) E_{l,l} \sum_{j=1}^{N-1} \nu_j E_{j,j+1}$$

que por (4.1) es

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{N-1} \nu_j (N-j-1) E_{j,j+1} - \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \nu_j E_{j,j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \nu_j (N-j-1 - N+j) E_{j,j+1} = \sum_{j=1}^{N-1} -\nu_j E_{j,j+1} = -A. \end{aligned}$$

Es decir

$$\text{ad}_A J = -A. \quad (4.12)$$

Ahora probaremos (4.11) por inducción fuerte sobre k . Para $k = 0$ obtenemos

$$\text{ad}_I J = IJ - JI = 0.$$

Suponiendo que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que (4.11) se cumple para todo $s < k \in \mathbb{N}$, entonces ocurre

$$\text{ad}_{A^k} J = A^k J - JA^k = A^{k-1} AJ - JAA^{k-1}.$$

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Por (4.12) sabemos que $AJ = JA - A$ y que $JA = AJ + A$; sustituyendo en lo anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \text{ad}_{A^k} J &= A^{k-1}AJ - JAA^{k-1} = A^{k-1}(JA - A) - (AJ + A)A^{k-1} \\ &= A^{k-1}JA - AJA^{k-1} - 2A^k = A(A^{k-2}J - JA^{k-2})A - 2A^k = A(\text{ad}_{A^{k-2}}J)A - 2A^k \end{aligned}$$

que por la hipótesis de inducción es igual a

$$A(-(k-2)A^{k-2})A - 2A^k = -(k-2)A^k - 2A^k = -kA^k.$$

□

A continuación daremos dos ejemplos de pesos matriciales y sus familias de polinomios y funciones ortogonales asociadas que son autofunciones del operador diferencial \mathcal{D} , presentaremos la Transformada de Fourier asociada a cada uno de estos pesos, demostrando los autovalores de sus autofunciones, expresiones integrales y daremos expresiones explícitas para el caso $N = 2$.

4.2. Primer ejemplo

Sea W como en (3.32), es decir $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$W(t) = e^{-t^2} e^{At} e^{A^*t}$$

donde A es la matriz nilpotente (3.37). Sabemos que la familia $\{\widehat{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de polinomios matriciales mónicos ortogonales con respecto a W son autofunciones del operador diferencial

$$\mathcal{D}_1 = \partial_t^2 + \partial_t^1(-2tI + 2A) + \partial_t^0(A^2 - 2J),$$

que por ser mónicos su autovalor correspondiente es

$$\Lambda_n = -2nI + A^2 - 2J$$

para cada n , siendo J la matriz (3.39).

Para cada n buscamos un coeficiente principal no singular L_n tal que la transformación del autovalor $L_n \Lambda_n L_n^{-1}$ sea diagonal y tomamos la familia de polinomios ortogonales de la forma $P_n(t) = L_n \widehat{P}_n$, por lo que L_n es su coeficiente principal. ([Igl11]) Una elección posible para este peso es

$$L_n = e^{-A^2/4}. \tag{4.13}$$

Con el conmutador definido como en (3.34), usando¹ la fórmula

$$e^X H e^{-X} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{ad}_X^j(H) / j!$$

¹Véase la Proposición 2.25 y la página 61 de [Hall04].

y (4.11) con $k = 2$, se puede ver que

$$\begin{aligned} L_n \Lambda_n L_n^{-1} &= e^{-A^2/4} (-2nI + A^2 - 2J) e^{A^2/4} = -2nI + A^2 - 2e^{-A^2/4} J e^{A^2/4} \\ &= -2nI + A^2 - 2 \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{ad}_{-A^2/4}^j(J) / j! = -2nI + A^2 - 2(J + \text{ad}_{-A^2/4}(J) / j) \\ &= -2nI + A^2 - 2\left(J + \frac{1}{2}A^2\right) = -2nI + A^2 - 2J - A^2 = -2nI - 2J. \end{aligned}$$

4.2.1. Los operadores diferencial e integral correspondientes

Definición 4.3. Denotamos para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$P_n(t) = e^{-A^2/4} \widehat{P}_n(t) \quad (4.14)$$

con \widehat{P}_n el n -ésimo polinomio mónico de la familia ortogonal con respecto al peso W dado en (3.32), y definimos Φ_n según (3.46): para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_n(t) := e^{-t^2/2} P_n(t) e^{At}. \quad (4.15)$$

Por el Teorema 3.23, se tiene que cada miembro de la familia (4.15) resuelve la ecuación diferencial

$$\Phi_n''(t) - \Phi_n(t)(t^2 I + 2J) + ((2n + 1)I + 2J)\Phi_n(t) = 0, \quad (4.16)$$

que es una generalización de la ecuación de Schrödinger con potencial cuadrático (2.38). Obsérvese que (ver sección 3.3) en este caso $\chi(t) = 2J$ y que esta ecuación diferencial es independiente de la matriz A .

A continuación definimos la generalización de la Transformada de Fourier correspondiente a este peso:

Definición 4.4. Definimos el operador integral

$$\mathcal{I}_1 : L^2 \rightarrow L^2$$

tal que $\forall X \in L^2$,

$$(X\mathcal{I}_1)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} X(t) e^{ixt} e^{i\frac{\pi}{2}J} dt, \quad (4.17)$$

con $e^{i\frac{\pi}{2}J}$ definido según (4.3).

Como $X \in L^2$ y e^{ixt} tiene módulo máximo 1, el producto $X(t)e^{ixt}e^{i\frac{\pi}{2}J} \in L^2$ y es integrable y por lo tanto $X\mathcal{I}_1 \in L^2$.

Probaremos que la familia de funciones (4.15) son autofunciones del operador integral \mathcal{I}_1 , un resultado similar al Teorema 2.13. Esa prueba se hará por inducción sobre n ; el siguiente Lema es la base en $n = 0$. Nótese que $\Phi_0(t) = e^{-t^2/2} e^{-A^2/4} e^{At}$.

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Lema 4.5.

$$(\Phi_0 \mathcal{I}_1)(x) = e^{i\frac{\pi}{2}J} e^{-x^2/2} e^{-A^2/4} e^{Ax}. \quad (4.18)$$

Demostración. Si expandimos el término e^{Ax} en el lado izquierdo de (4.18), para $k = 1$ usamos la relación algebraica (4.9) y

$$e^{-A^2/4} e^{i\frac{\pi}{2}J} = e^{i\frac{\pi}{2}J} e^{A^2/4},$$

que es consecuencia de (4.9), y denotamos a la variante de (2.7), los polinomios mónicos de Hermite, mediante $\widehat{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} (e^{-x^2/2})^{(n)}$, obtenemos

$$\begin{aligned} (\Phi_0 \mathcal{I}_1)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi_0(x) e^{ixt} e^{i\frac{\pi}{2}J} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-A^2/4} e^{Ax} e^{itx} e^{i\frac{\pi}{2}J} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-A^2/4} A^j e^{i\frac{\pi}{2}J} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} \frac{t^j}{j!} e^{itx} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-A^2/4} e^{i\frac{\pi}{2}J} A^j (-i)^j \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} \frac{t^j}{j!} e^{itx} dt \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\frac{\pi}{2}J} e^{A^2/4} \frac{A^j}{j!} (-i)^j e^{-x^2/2} (i)^j \widehat{H}_j(x) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}J} e^{-x^2/2} e^{A^2/4} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{A^j}{j!} \widehat{H}_j(x) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}J} e^{A^2/4} e^{-x^2/2} e^{Ax - A^2/2} \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}J} e^{-x^2/2} e^{-A^2/4} e^{Ax} = e^{i\frac{\pi}{2}J} \Phi_0(x), \end{aligned}$$

pues las funciones mónicas de Hermite (ver Definición 2.8) $\widehat{H}_j(t) e^{-t^2/2}$ son autofunciones de la Transformada de Fourier con autovalor i^n (Teorema 2.13, donde el signo es negativo porque podemos definir la transformada de Fourier como en la Definición 1.16. Véase la nota que sigue de esa definición) y la función generatriz (2.19) de los polinomios mónicos de Hermite $\{\widehat{H}_j(t)\}_{j \in \mathbb{N}}$ en este caso está dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{H}_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{tx - x^2/2}$. \square

Con base en este lema se prueba por inducción el siguiente

Teorema 4.6. *Cada miembro Φ_n de la familia definida en (4.15) es autofunción del operador \mathcal{I}_1 definido en (4.17) con autovalor $\Gamma_n = (i)^n e^{i\frac{\pi}{2}J}$, es decir*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(t) e^{ixt} e^{i\frac{\pi}{2}J} dt = (i)^n e^{i\frac{\pi}{2}J} \Phi_n(x). \quad (4.19)$$

Demostración. Denotemos

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(x) e^{itx} e^{i\frac{\pi}{2}J} dx. \quad (4.20)$$

Usando que $\frac{d}{dt}e^{itx} = ix e^{itx}$ y $\frac{d}{dx}e^{itx} = ite^{itx}$, integrando por partes se obtiene que $\Psi_n(t)$ resuelve la misma ecuación diferencial de segundo orden (4.16) que $\Phi_n(t)$, por lo tanto $\Psi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} \Phi_n(t)$ puede escribirse como $\Psi_n(t) = C_n \Phi_n(t)$ para alguna matriz diagonal no singular C_n ; como tanto $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como $\{\Psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sistemas linealmente independientes de funciones matriciales, esto es equivalente a decir que $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $(n - k)C_{n,k} + JC_{n,k} - C_{n,k}J = 0$. Concluimos que si $n \neq k$ entonces $C_{n,k} = 0$ y si $n = k$ entonces $C_{n,k} = C_n$ debe ser una matriz diagonal, ya que el espectro de J es simple.

Ahora usaremos el Lema 4.5, que es el caso para $n = 0$ de (4.20). Después de derivar n veces el lado derecho de (4.18) con respecto de t , se obtiene

$$e^{i\frac{\pi}{2}J} e^{-A^2/4} \frac{d^n}{d^n t} (e^{-t^2/2} e^{At}) = \frac{(i)^n e^{-t^2/2} e^{At}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} x^n e^{Ax} e^{itx} e^{i\frac{\pi}{2}J} dx \quad (4.21)$$

Usando la fórmula de Leibniz, el lado izquierdo de (4.21) se puede escribir como

$$e^{i\frac{\pi}{2}J} e^{-A^2/4} \frac{d^n}{d^n t} (e^{-t^2/2} e^{At}) = e^{i\frac{\pi}{2}J} e^{-A^2/4} ((-1)^n t^n I + \dots) e^{-t^2/2} e^{At}. \quad (4.22)$$

Escribimos $\Phi_n(t) = e^{-t^2/2} P_n(t) e^{At} = e^{-t^2/2} e^{-A^2/4} (t^n I + \dots) e^{At}$, por linealidad y usando el lado derecho de (4.21) y (4.22), se obtiene

$$\begin{aligned} \Psi_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(x) e^{itx} e^{i\frac{\pi}{2}J} dx = \frac{e^{-A^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} (x^n I + \dots) e^{Ax} e^{itx} e^{i\frac{\pi}{2}J} dx \\ &= (i)^n e^{i\frac{\pi}{2}J} e^{-A^2/4} (t^n I + \dots) e^{-t^2/2} e^{At}. \end{aligned}$$

Sabiendo que $\Psi_n(t) = C_n \Phi_n(t)$, por lo que igualando con el coeficiente líder del polinomio de t en la ecuación anterior obtenemos $C_n = (i)^n e^{i\frac{\pi}{2}J}$. \square

Nótese que la ecuación integral (4.19) también es independiente de A y que el autovalor tampoco depende de A , tal como el operador diferencial.

4.2.2. Expresiones integrales y propiedades de simetría

En virtud del Teorema 4.6 se prueban las siguientes características de simetría y expresión integral para las funciones Φ_n y los polinomios P_n ; compárense con las propiedades mencionadas en la sección 2.1.5 para las Funciones de Hermite escalares.

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Corolario 4.7. Para toda n natural, cada elemento Φ_n de la familia dada por (4.15) satisface la condición

$$\Phi_n(t) = (-1)^n e^{i\pi J} \Phi_n(-t) e^{i\pi J}, \quad (4.23)$$

donde $e^{i\pi J}$ es la matriz (4.4). En consecuencia, la familia de polinomios ortogonales de valores matriciales (4.14), $P_n(t) = e^{-A^2/4} \widehat{P}_n$, satisface la misma condición de simetría, es decir

$$P_n(t) = (-1)^n e^{i\pi J} P_n(-t) e^{i\pi J}. \quad (4.24)$$

Demostración. Denotamos por δ a la Delta de Dirac. Multiplicando (4.19) del lado derecho por el autovalor $(i)^n e^{i\frac{\pi}{2}J}$ y sustituyendo de nuevo por la misma fórmula se obtiene

$$\begin{aligned} (-1)^n e^{i\pi J} \Phi_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (i)^n e^{i\frac{\pi}{2}J} \Phi_n(t) e^{itx} e^{i\frac{\pi}{2}J} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(z) e^{izx} e^{itx} e^{i\pi J} dz dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(z) \delta(t+z) e^{i\pi J} dz = \Phi_n(-t) e^{i\pi J}. \end{aligned}$$

Entonces (4.23) se cumple. Como consecuencia de (4.9) se tiene que $e^{-At} e^{i\pi J} e^{At} = e^{i\pi J}$, por lo tanto (4.24) también se cumple. \square

Corolario 4.8. Sea L_n según (4.13). Para toda n natural cada elemento $P_n(t) = L_n \widehat{P}_n = e^{-A^2/4} \widehat{P}_n$ de la familia de polinomios matriciales ortogonales (4.14) con respecto del peso W definido en (3.32) satisface la expresión integral

$$e^{-t^2/2} P_n(t) e^{At} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{\pi}{2}J} \int_{\mathbb{R}} P_n(x) e^{-x^2/2} e^{itx} e^{Ax} e^{i\frac{\pi}{2}J} dx \quad (4.25)$$

donde $e^{i\frac{\pi}{2}J}$ es la matriz diagonal (4.3).

Demostración. Inmediatamente a partir de (4.19), usando (4.15). \square

El núcleo correspondiente para este operador es $K(t, x) = e^{\frac{(t+ix)^2}{2}} e^{Ax} e^{i\frac{\pi}{2}J} e^{-At}$. Compárese con (2.20).

Observamos que (4.25) es una ecuación integral que depende de valores complejos. En el caso escalar los polinomios de Hermite H_n satisfacen ecuaciones integrales de valores reales (ver sección 2.1.5) en términos de los núcleos $\cos(tx)$ y $\sin(tx)$ como (2.21). Esto es posible ya que los polinomios de Hermite satisfacen la condición de simetría $H_n(x) = (-1)^n H_n(-x)$.

En este caso se tiene una condición de simetría (4.24) diferente, de manera que el razonamiento no sigue como en el caso escalar. Sin embargo, es posible derivar una ecuación integral de valores reales para $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

Corolario 4.9. Definidas según (4.6) y (4.7) respectivamente sean $C_- = \sin\left(\frac{\pi}{2}J\right)$ y $C_+ = \cos\left(\frac{\pi}{2}J\right)$, $e^{i\pi J}$ como en (4.4) y $[n]$ denotando el máximo número entero no mayor que n ; definimos

$$k_n(t, x) = \begin{cases} \cos(tx) & \text{si } n \text{ es par} \\ \sin(tx) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

La familia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida en (4.14) satisface las ecuaciones integrales

$$e^{-t^2/2}(e^{i\pi J} \pm I)P_n(t)e^{At}C_{\pm} = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\sqrt{2\pi}}C_{\pm} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}k_n(t, x)P_n(x)e^{Ax}dx(e^{i\pi J} \pm I) \quad (4.26)$$

y

$$e^{-t^2/2}(e^{i\pi J} \pm I)P_n(t)e^{At}C_{\mp} = \frac{\pm(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\sqrt{2\pi}}C_{\mp} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}k_{n+1}(t, x)P_n(x)e^{Ax}dx(e^{i\pi J} \mp I) \quad (4.27)$$

Demostración. Por la condición de simetría (4.24) y usando la fórmula (4.9), se tiene

$$e^{-t^2/2}e^{i\frac{\pi}{2}J}P_n(t)e^{At} = (-1)^n e^{i\pi J} [e^{-t^2/2}e^{-i\frac{\pi}{2}J}P_n(-t)e^{-At}e^{i\pi J}].$$

Valuamos (4.25) en t y $-t$, y usando la formula anterior nos resulta

$$\begin{aligned} & 2e^{-t^2/2}e^{i\frac{\pi}{2}J}P_n(t)e^{At} \\ &= \frac{(i)^n}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cos(tx) \left((-1)^n P_n(x)e^{Ax}e^{i\frac{\pi}{2}J} + e^{i\pi J} P_n(x)e^{Ax}e^{i\frac{\pi}{2}J}e^{i\pi J} \right) dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \sin(tx) \left((-1)^n P_n(x)e^{Ax}e^{i\frac{\pi}{2}J} - e^{i\pi J} P_n(x)e^{Ax}e^{i\frac{\pi}{2}J}e^{i\pi J} \right) dx \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ahora multiplicamos (en alguna de las cuatro combinaciones) a la izquierda y a la derecha por las matrices $\sin\left(\frac{\pi}{2}J\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2}J\right)$, definidas en (4.6) y (4.7) respectivamente. De esta manera, dependiendo de la paridad de n , los elementos dentro de los corchetes grandes son iguales ó se anulan. Dadas las cuatro posibilidades para hacer esta multiplicación por izquierda y derecha, se obtienen *ocho* fórmulas al considerar valores pares e impares de n . Se usan las relaciones (4.8) y la conmutatividad de las matrices diagonales; mostraremos dos casos:

Al multiplicar de ambos lados por $\cos\left(\frac{\pi}{2}J\right)$ en la fórmula anterior, del lado izquierdo de la ecuación se tiene

$$2e^{-t^2/2}e^{i\frac{\pi}{2}J}P_n(t)e^{At} = e^{-t^2/2}(e^{i\pi J} + I)P_n(t)e^{At} \cos\left(\frac{\pi}{2}J\right).$$

Del lado derecho obtenemos

$$\frac{(i)^n}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}J\right) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cos(tx) \left((-1)^n P_n(x)e^{Ax}e^{i\frac{\pi}{2}J} \cos\left(\frac{\pi}{2}J\right) \right. \right.$$

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

$$\begin{aligned}
& + e^{i\pi J} P_n(x) e^{Ax} e^{i\frac{\pi}{2}J} e^{i\pi J} \cos\left(\frac{\pi}{2}J\right) dx \\
& + \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \sin(tx) \left((-1)^n P_n(x) e^{Ax} e^{i\frac{\pi}{2}J} \cos\left(\frac{\pi}{2}J\right) \right. \\
& \quad \left. - e^{i\pi J} P_n(x) e^{Ax} e^{i\frac{\pi}{2}J} e^{i\pi J} \cos\left(\frac{\pi}{2}J\right) \right) dx \Bigg] \\
& = \frac{(i)^n}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}J\right) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cos(tx) \left((-1)^n P_n(x) e^{Ax} + e^{i\pi J} P_n(x) e^{Ax} \right) dx \right. \\
& \quad \left. + \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \sin(tx) \left((-1)^n P_n(x) e^{Ax} - e^{i\pi J} P_n(x) e^{Ax} \right) dx \right] \left(\frac{1}{2}(e^{i\pi J} + I) \right) \\
& = \frac{(i)^n}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}J\right) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cos(tx) \left(((-1)^n + e^{i\pi J}) P_n(x) e^{Ax} \right) dx \right. \\
& \quad \left. + \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \sin(tx) \left(((-1)^n - e^{i\pi J}) P_n(x) e^{Ax} \right) dx \right] \left(\frac{1}{2}(e^{i\pi J} + I) \right).
\end{aligned}$$

Como se dijo antes, dependiendo de la paridad de n se anula una de las integrales dentro de los corchetes y en cualquier caso se anula $\frac{1}{2}$, obteniendo una fórmula para los pares y otra para los impares.

Ahora veremos el caso en el cual se multiplica a la izquierda por $\cos\left(\frac{\pi}{2}J\right)$ y a la derecha por $\sin\left(\frac{\pi}{2}J\right)$. De la fórmula (4.28) y usando las relaciones (4.8) se obtiene

$$\begin{aligned}
& e^{-t^2/2} (e^{i\pi J} + I) P_n(t) e^{At} \sin\left(\frac{\pi}{2}J\right) \\
& = \frac{(i)^n}{2i\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}J\right) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cos(tx) ((-1)^n - 1) P_n(x) e^{Ax} dx \right. \\
& \quad \left. + i \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \sin(tx) ((-1)^n + 1) P_n(x) e^{Ax} dx \right] (e^{i\pi J} - I).
\end{aligned}$$

Ahora vemos que para valores pares o impares de n la integral con $\cos(tx)$ o $\sin(tx)$ se anula,

y vemos que esas ecuaciones son de valores reales. Por lo tanto

$$\begin{aligned} & e^{-t^2/2}(e^{i\pi J} + I)P_{2n}(t)e^{At} \sin\left(\frac{\pi}{2}J\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}J\right) \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \sin(tx)P_{2n}(x)e^{Ax} dx (e^{i\pi J} - I), \\ & e^{-t^2/2}(e^{i\pi J} + I)P_{2n+1}(t)e^{At} \sin\left(\frac{\pi}{2}J\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}J\right) \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cos(tx)P_{2n+1}(x)e^{Ax} dx (e^{i\pi J} - I). \end{aligned}$$

que son las formulas (4.27) para el signo positivo, ambas para valores pares e impares de n .

Los otros casos se prueban análogamente. \square

Nótese que (4.26) y (4.27) dan *ocho* ecuaciones integrales de valores reales para la familia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de acuerdo a los signos y según el valor par o impar de n . Son ocho fórmulas por la estructura de las matrices (4.6) y (4.7), que son diagonales y singulares; al multiplicar de un lado u otro únicamente por una de ellas se obtiene sólo una parte de P_n , que en general es una matriz llena. Obtenemos una fórmula para cada entrada de P_n al multiplicar por la derecha y por la izquierda. Todos los renglones de P_n son cubiertos al multiplicar por C_- y C_+ de ambos lados, en cualquiera de esas combinaciones, pues si sólo lo aplicamos a un lado se describen los renglones pares o impares únicamente.

Observamos que la familia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ simplifica considerablemente muchas fórmulas estructurales que hacen más sencillo de estudiar a las funciones de valor matricial. Las normas de $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son diagonales, y en consecuencia las de $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definidas en (4.15) también lo son. Los coeficientes de la relación de recurrencia de tres términos (3.4) correspondiente se simplifican considerablemente.

4.2.3. El caso $N = 2$

A continuación daremos el ejemplo del peso (3.32) y las funciones Φ_n definidas según (4.15) para el caso particular de dimensión $N = 2$. Se presentan sus matrices explícitas y gráficas para los valores de las entradas, tanto para W_1 como para las primeras funciones ortogonales matriciales.

El peso W_1

Dado (3.37) para algún $\nu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fijo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Por lo tanto

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{j=0}^1 \frac{1}{j!} (At)^j = I + At \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \nu t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

y

$$\begin{aligned} e^{A^*t} &= \sum_{j=0}^1 \frac{1}{j!} (A^*t)^j = I + A^*t \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\nu}t & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Por la definición de W_1 en (3.32) se presenta de la forma

$$\begin{aligned} W_1(t) &= e^{-t^2} e^{At} e^{A^*t} \\ &= e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\nu}t & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + |\nu|^2 t^2 & \nu t \\ \bar{\nu}t & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nótese que su imagen siempre es una matriz autoadjunta, que las entradas de la diagonal son pares y las del resto son impares, por lo que las integrales fuera de la diagonal principal son nulas. Cuando ν tiende a cero, W_1 tiende al peso escalar usual encajado en las funciones matriciales ($e^{-t^2} I$), igual que las ecuaciones de simetría (3.10) tienden a las de Pearson (2.1), y conforme el valor absoluto de ν crece el valor de la cuarta entrada se hace menos significativo, mientras que la primera entrada cobra toda la relevancia; el determinante es $|W_1(t)| = e^{-t^2}$, no depende de ν .

En las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 se encuentra la gráfica de las cuatro entradas de W_1 para el valor $\nu = \frac{1}{2}$, $\nu = 1$ y $\nu = 2$, respectivamente.

Figura 4.1: Gráfica de cada entrada de W_1 para $\nu = \frac{1}{2}$.

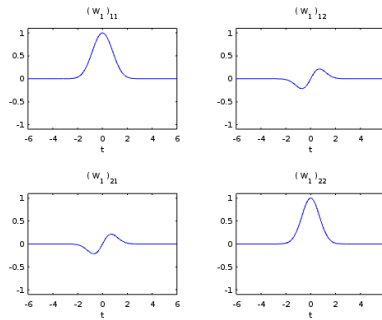


Figura 4.2: Gráfica de cada entrada de W_1 para $\nu = 1$.

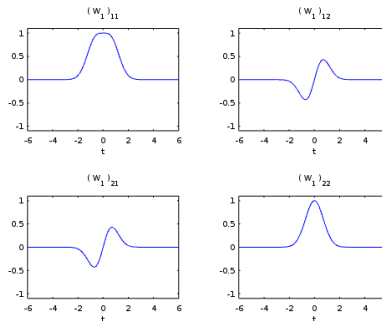
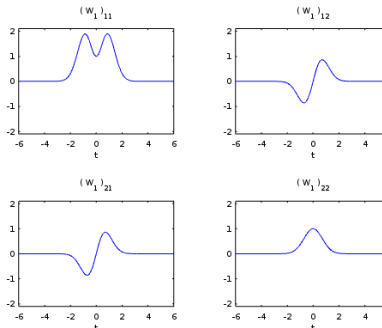


Figura 4.3: Gráfica de cada entrada de W_1 para $\nu = 2$.



Los momentos

Daremos los primeros seis momentos de W_1 , que es una matriz semidefinida positiva, como dice la Definición 3.4; se encuentran igual que en (2.9). Definimos

$$\mu_n = \int_{\mathbb{R}} t^n W_1(t) dt.$$

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Para los polinomios de paridad $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, basta calcular

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} t^{2k} e^{-t^2} dt &= \frac{\sqrt{\pi} (2k)!}{4^k k!} \\ \int_{\mathbb{R}} t^{2k} e^{-t^2} (1 + |\nu|^2 t^2) dt &= \frac{\sqrt{\pi}}{4^k} \left(\frac{(2k)!}{k!} + |\nu|^2 \frac{(2k+2)!}{4(k+1)!} \right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

y para los impares ($n = 2k + 1$),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} t^{2k+1} e^{-t^2} \nu t dt &= \frac{\nu \sqrt{\pi} (2k+2)!}{4^{k+1} (k+1)!} \\ \int_{\mathbb{R}} t^{2k+1} e^{-t^2} \bar{\nu} t dt &= \frac{\bar{\nu} \sqrt{\pi} (2k+2)!}{4^{k+1} (k+1)!}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \int_{\mathbb{R}} W_1(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + |\nu|^2 t^2 & \nu t \\ \bar{\nu} t & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} |\nu|^2 & 0 \\ 0 & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}, \\ \mu_1 &= \int_{\mathbb{R}} t W_1(t) dt = \int_{\mathbb{R}} t e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + |\nu|^2 t^2 & \nu t \\ \bar{\nu} t & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{\pi}}{2} \nu \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \bar{\nu} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mu_2 &= \int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + |\nu|^2 t^2 & \nu t \\ \bar{\nu} t & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{3}{4} |\nu|^2 \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{pmatrix}, \\ \mu_3 &= \int_{\mathbb{R}} t^3 e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + |\nu|^2 t^2 & \nu t \\ \bar{\nu} t & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \nu \\ \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \bar{\nu} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mu_4 &= \int_{\mathbb{R}} t^4 e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + |\nu|^2 t^2 & \nu t \\ \bar{\nu} t & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} \sqrt{\pi} + \frac{15}{8} |\nu|^2 \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \end{pmatrix}, \\ \mu_5 &= \int_{\mathbb{R}} t^5 e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + |\nu|^2 t^2 & \nu t \\ \bar{\nu} t & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 & \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \nu \\ \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \bar{\nu} & 0 \end{pmatrix}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nótese que W_1 verifica las propiedades de la Definición 3.4.

Fórmula de Rodrigues

Los polinomios a valores matriciales también pueden definirse en términos de una fórmula de Rodrigues que extiende lo visto en la sección 2.1.2.

Por supuesto dependen de ν . Sea

$$R_n = e^{-t^2} \begin{pmatrix} |\nu|^2 n/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(t) &:= (-1)^n [(W_1 + R_n)]^{(n)} W_1^{-1} \\ &= (-1)^n \left(e^{-t^2} \left[\begin{pmatrix} 1 + |\nu|^2 t^2 & \nu t \\ \bar{\nu} t & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |\nu|^2 n/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right)^{(n)} \begin{pmatrix} 1 + |\nu|^2 t^2 & \nu t \\ \bar{\nu} t & 1 \end{pmatrix}^{-1} e^{t^2} \\ &= (-1)^n \left[e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + |\nu|^2 (t^2 + \frac{n}{2}) & \nu t \\ \bar{\nu} t & 1 \end{pmatrix} \right]^{(n)} \begin{pmatrix} 1 & -\nu t \\ -\bar{\nu} t & 1 + |\nu|^2 t^2 \end{pmatrix} e^{t^2} \end{aligned}$$

Entonces los polinomios \mathcal{P}_n son ortogonales con respecto del peso W_1 .

Por la frecuencia con la que se usará conviene que definamos el término

$$\gamma_n := 1 + \frac{|\nu|^2}{2} n. \quad (4.33)$$

Por supuesto γ_n también depende de ν y de W_1 .

Los coeficientes principales de $\mathcal{P}_n(t)$ son

$$K_n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_n \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Basta multiplicar por el inverso del coeficiente principal para obtener esta relación para los polinomios mónicos. La demostración de esto, así como de los siguientes resultados, se encuentran en [DG05], donde se exponen otras fórmulas estructurales. Obsérvese que conforme el módulo de ν tiende a cero, la fórmula tiende a la fórmula de Rodrigues (2.6) usual escalar encajada en L^2 , de la misma forma como W_1 y los momentos, y cuando es grande entonces es algo muy diferente y toman relevancia todas las entradas cerca de la diagonal y de la primera.

Norma

Sea $\{\widehat{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la familia de polinomios ortogonales mónicos asociada a W_1 . Su norma

$$\|\widehat{P}_n\|^2 = \sqrt{\pi} n! 2^{-n} \begin{pmatrix} \gamma_{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_n} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

es diagonal y su determinante aumenta conforme crece n .

Por lo que existe una familia de polinomios ortogonormales cuya norma es

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} n! 2^{-n}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{n+1}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_n} \end{pmatrix}.$$

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Relación de recurrencia a tres términos

Normalizando cada \widehat{P}_n se obtiene la familia $\{\tilde{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de polinomios ortonormales. Para este caso la ecuación (3.5) resulta ser

$$\begin{aligned} t\tilde{P}_n(t) &= \sqrt{\frac{n+1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma_{n+2}}}{\sqrt{\gamma_{n+1}}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\gamma_n}}{\sqrt{\gamma_{n+1}}} \end{pmatrix} \tilde{P}_{n+1}(t) \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\gamma_{n+1}}\sqrt{\gamma_n}} \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ \bar{\nu} & 0 \end{pmatrix} \tilde{P}_n(t) \\ &+ \sqrt{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma_{n+1}}}{\sqrt{\gamma_n}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\gamma_{n-1}}}{\sqrt{\gamma_n}} \end{pmatrix} \tilde{P}_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Obsérvese lo que ocurre conforme crece o se anula el módulo de ν . Podemos encontrar así una sucesión de coeficientes para la relación escalar (2.13).

Relación con los polinomios de Hermite

La familia de polinomios ortogonales obtenida se puede escribir sencillamente en términos de los polinomios de Hermite clásicos.

$$\mathcal{P}_n(t) = H_n(t)I + n \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ -\bar{\nu} & |\nu|^2 t \end{pmatrix} H_{n-1}(t)$$

En este caso \widehat{P}_n coincide con P_n definidos en (4.14), ya que en el caso $N = 2$ se tiene que $e^{-A^2/4} = I$. Por lo tanto $\widehat{P}_n = K_n^{-1}\mathcal{P}_n$ con K_n dado por (4.34), es decir

$$\widehat{P}_n(t) = 2^{-n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_n} \end{pmatrix} \mathcal{P}_n(t).$$

Éstos se pueden expresar en términos de la familia ortonormal $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con la relación

$$\mathcal{P}_n(t) = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \frac{|\nu|^2}{2}(n+1)} & 0 \\ 0 & \sqrt{1 + \frac{|\nu|^2}{2}n} \end{pmatrix} P_n(t). \quad (4.36)$$

Por lo tanto los primeros siete polinomios mónicos tienen la forma

$$\begin{aligned}
 P_0(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 P_1(t) &= \begin{pmatrix} t & -\nu/2 \\ \frac{-\bar{\nu}}{|\nu|^2+2} & t \end{pmatrix}, \\
 P_2(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2t^2-1}{2} & -t\nu \\ \frac{t\bar{\nu}}{|\nu|^2+1} & \frac{2t^2|\nu|^2+2t^2-1}{2(|\nu|^2+1)} \end{pmatrix}, \\
 P_3(t) &= \begin{pmatrix} \frac{t(2t^2-3)}{2} & \frac{-3(2t^2-1)\nu}{2} \\ -\frac{3(2t^2-1)\bar{\nu}}{2(3|\nu|^2+2)} & \frac{t(6t^2|\nu|^2-3|\nu|^4+4t^2-6)}{2(3|\nu|^2+2)} \end{pmatrix}, \\
 P_4(t) &= \begin{pmatrix} \frac{4t^4-12t^2+3}{4} & -(t(2t^2-3)\nu) \\ -\frac{t(2t^2-3)\bar{\nu}}{2|\nu|^2+1} & \frac{8t^4|\nu|^2-12t^2|\nu|^2+4t^4-12t^2+3}{4(2|\nu|^2+1)} \end{pmatrix}, \\
 P_5(t) &= \begin{pmatrix} \frac{t(4t^4-20t^2+15)}{4} & \frac{-5(4t^4-12t^2+3)\nu}{8} \\ -\frac{5(4t^4-12t^2+3)\bar{\nu}}{4(5|\nu|^2+2)} & \frac{t(20t^4|\nu|^2-60t^2|\nu|^2+15|\nu|^2+8t^4-40t^2+30)}{4(5|\nu|^2+2)} \end{pmatrix}, \\
 P_6(t) &= \begin{pmatrix} \frac{8t^6-60t^4+90t^2-15}{8} & \frac{-3t(4t^4-20t^2+15)\nu}{8} \\ -\frac{3t(4t^4-20t^2+15)\bar{\nu}}{4(3|\nu|^2+1)} & \frac{24t^6|\nu|^2-120t^4|\nu|^2+90t^2|\nu|^2+8t^6-60t^4+90t^2-15}{8(3|\nu|^2+1)} \end{pmatrix}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Esto nos permite encontrar una expresión explícita de cada polinomio P_n bastante simple y también de las funciones Φ_n . Podemos calcularlas de acuerdo a (4.15):

$$\Phi_n(t) := e^{-t^2/2} P_n(t) e^{At}.$$

con e^{At} según (4.30). Por la Definición 4.3, usando (4.30) se obtienen las primeras funciones

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

ortogonales a valores matriciales:

$$\begin{aligned}
 \Phi_0(t) &= e^{-t^2/2} \begin{pmatrix} 1 & t\nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \Phi_1(t) &= e^{-t^2/2} \begin{pmatrix} t & \frac{(2t^2-1)\nu}{2} \\ -\frac{\bar{\nu}}{|\nu|^2+2} & \frac{2t}{|\nu|^2+2} \end{pmatrix}, \\
 \Phi_2(t) &= e^{-t^2/2} \begin{pmatrix} \frac{2t^2-1}{2} & \frac{t(2t^2-3)\nu}{2} \\ -\frac{t\bar{\nu}}{|\nu|^2+1} & \frac{2t^2-1}{2(|\nu|^2+1)} \end{pmatrix}, \\
 \Phi_3(t) &= e^{-t^2/2} \begin{pmatrix} \frac{t(2t^2-3)}{3(2t^2-1)\bar{\nu}} & \frac{(4t^4-12t^2+3)\nu}{2(3|\nu|^2+2)} \\ -\frac{2}{2(3|\nu|^2+2)} & \frac{t(4t^2-6)}{2(3|\nu|^2+2)} \end{pmatrix}, \\
 \Phi_4(t) &= e^{-t^2/2} \begin{pmatrix} \frac{4t^4-12t^2+3}{t(2t^2-3)\bar{\nu}} & \frac{t(4t^4-20t^2+15)\nu}{4} \\ -\frac{t(2t^2-3)}{2|\nu|^2+1} & \frac{4t^4-12t^2+3}{4(2|\nu|^2+1)} \end{pmatrix}, \\
 \Phi_5(t) &= e^{-t^2/2} \begin{pmatrix} \frac{t(4t^4-20t^2+15)}{5(4t^4-12t^2+3)\bar{\nu}} & \frac{(8t^6-60t^4+90t^2-15)\nu}{4(5|\nu|^2+2)} \\ -\frac{4}{4(5|\nu|^2+2)} & \frac{t(8t^4-40t^2+30)}{4(5|\nu|^2+2)} \end{pmatrix}, \\
 \Phi_6(t) &= e^{-t^2/2} \begin{pmatrix} \frac{8t^6-60t^4+90t^2-15}{3t(4t^4-20t^2+15)\bar{\nu}} & \frac{t(8t^6-84t^4+210t^2-105)\nu}{8} \\ -\frac{8}{4(3|\nu|^2+1)} & \frac{8t^6-60t^4+90t^2-15}{8(3|\nu|^2+1)} \end{pmatrix}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Obsérvese que todas las matrices son llenas, que sus diagonales son independientes de ν y que no son autoadjuntas; claramente las diagonales son iguales al polinomio de Hermite escalar, por lo que sigue ocurriendo que si ν tiende a cero, entonces la función tiende a la escalar encajada en L^2 . Más adelante (Figura 4.4) se encuentra la gráfica de las ortonormales.

Las ecuaciones diferencial e integral asociadas

Según (4.16) se tiene que las funciones de Hermite (4.15) son solución del operador diferencial \mathcal{D}_1 , por lo que en este caso se verifica

$$\Phi_n''(t) - \Phi_n'(t) \begin{pmatrix} t^2+2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n+3 & 0 \\ 0 & 2n+1 \end{pmatrix} \Phi_n(t) = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son las funciones de onda de valores matriciales. Es la generalización para el peso W_1 de la de Schrödinger con potencial cuadrático (2.38).

Sea $X(t) = \begin{pmatrix} X_{1,1}(t) & X_{1,2}(t) \\ X_{2,1}(t) & X_{2,2}(t) \end{pmatrix}$. En este caso la ecuación integral de la Definición 4.4 tiene

la forma

$$\begin{aligned} (X\mathcal{I}_1)(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} X_{1,1}(t) & X_{1,2}(t) \\ X_{2,1}(t) & X_{2,2}(t) \end{pmatrix} e^{ixt} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} iX_{1,1}(t) & X_{1,2}(t) \\ iX_{2,1}(t) & X_{2,2}(t) \end{pmatrix} e^{ixt} dt. \end{aligned}$$

Compárese con la Transformada de Fourier usual.

Fórmulas integrales

Para W_1 y para cada $P \in \{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ veremos las ocho ecuaciones integrales del Corolario 4.9. Haremos el primer caso, pues las demás se obtienen siguiendo el mismo procedimiento.

Denotamos

$$P_n(t) = \begin{pmatrix} P_n^{1,1}(t) & P_n^{1,2}(t) \\ P_n^{2,1}(t) & P_n^{2,2}(t) \end{pmatrix}.$$

Dados por definición en $N = 2$ se tiene

$$C_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

además

$$e^{i\pi J} + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad e^{i\pi J} - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$P_n(t)e^{At} = \begin{pmatrix} P_n^{1,1}(t) & P_n^{1,2}(t) + \nu t P_n^{1,1}(t) \\ P_n^{2,1}(t) & P_n^{2,2}(t) + \nu t P_n^{2,1}(t) \end{pmatrix}.$$

Calculamos sustituyendo en el primer caso de (4.26):

$$\begin{aligned} e^{-t^2/2}(e^{i\pi J} + I)P_n(t)e^{At}C_+ &= \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\sqrt{2\pi}} C_+ \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} k_n(t, x) P_n(x) e^{Ax} dx (e^{i\pi J} + I) \\ &= e^{-t^2/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n^{1,1}(t) & P_n^{1,2}(t) + \nu t P_n^{1,1}(t) \\ P_n^{2,1}(t) & P_n^{2,2}(t) + \nu t P_n^{2,1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} k_n(t, x) \begin{pmatrix} P_n^{1,1}(t) & P_n^{1,2}(x) + \nu t P_n^{1,1}(x) \\ P_n^{2,1}(t) & P_n^{2,2}(x) + \nu t P_n^{2,1}(x) \end{pmatrix} dx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t^2/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & P_n^{1,2}(t) + \nu t P_n^{1,1}(t) \\ 0 & P_n^{2,2}(t) + \nu t P_n^{2,1}(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} k_n(t, x) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_n^{2,1}(t) & P_n^{2,2}(x) + \nu t P_n^{2,1}(x) \end{pmatrix} dx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

$$e^{-t^2/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_n^{2,2}(t) + \nu t P_n^{2,1}(t) \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} k_n(t, x) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_n^{2,2}(x) + \nu t P_n^{2,1}(x) \end{pmatrix} dx.$$

Claramente se trata de una ecuación escalar que depende de las entradas del polinomio P_n , igual que las demás. De esta forma se puede ver que, por la definición de k_n , las ecuaciones son para n par

$$\begin{aligned} e^{-t^2/2} (P_n^{2,2}(t) + \nu t P_n^{2,1}(t)) &= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cos(tx) (P_n^{2,2}(x) + \nu t P_n^{2,1}(x)) dx, \\ e^{-t^2/2} P_n^{1,1}(t) &= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cos(tx) P_n^{1,1}(x) dx, \\ e^{-t^2/2} P_n^{2,1}(t) &= -\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \sin(tx) P_n^{2,1}(x) dx, \\ -e^{-t^2/2} (P_n^{1,2}(t) + \nu t P_n^{1,1}(t)) &= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \sin(tx) (P_n^{1,2}(x) + \nu t P_n^{1,1}(x)) dx, \end{aligned}$$

y para n impar,

$$\begin{aligned} e^{-t^2/2} (P_n^{2,2}(t) + \nu t P_n^{2,1}(t)) &= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \sin(tx) (P_n^{2,2}(x) + \nu t P_n^{2,1}(x)) dx, \\ e^{-t^2/2} P_n^{1,1}(t) &= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \sin(tx) P_n^{1,1}(x) dx, \\ e^{-t^2/2} P_n^{2,1}(t) &= -\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cos(tx) P_n^{2,1}(x) dx \text{ y} \\ -e^{-t^2/2} (P_n^{1,2}(t) + \nu t P_n^{1,1}(t)) &= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cos(tx) (P_n^{1,2}(x) + \nu t P_n^{1,1}(x)) dx. \end{aligned}$$

Expresiones de $\Psi_n \Psi_n^*$ y $(t^k I)$

Sea γ_n como en (4.33). Por simplicidad se toma $\nu \in \mathbb{R}$. Consideremos la familia de funciones de Hermite (ver Definición 2.8) normalizadas $\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n e^{-x^2/2}$. La familia de funciones ortonormales matriciales de Hermite se puede escribir como

$$\Psi_n(t) = \begin{pmatrix} \psi_n / \sqrt{\gamma_{n+1}} & \nu \sqrt{\frac{n+1}{2\gamma_{n+1}}} \psi_{n+1}(t) \\ -\nu \sqrt{\frac{n}{2\gamma_n}} \psi_{n-1}(t) & \psi_n(t) / \sqrt{\gamma_n} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

En la Figura 4.4 aparecen las gráficas de las cuatro entradas de cada una de las primeras. En la Figura 4.5 se grafican las diagonales de las primeras siete para $\nu = \frac{5}{4}$. Obsérvese que estas diagonales son densidades de probabilidad. En el caso escalar ([BW10] sec. 4) se sabe que existen n puntos donde se anulan las densidades de probabilidad, mientras que en este caso nunca se anulan.

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Figura 4.4: Gráficas sobrepuestas de las cuatro entradas de las primeras seis funciones de Hermite Ψ_n ortonormales respecto al peso W_1 para el valor $\nu = 1$.

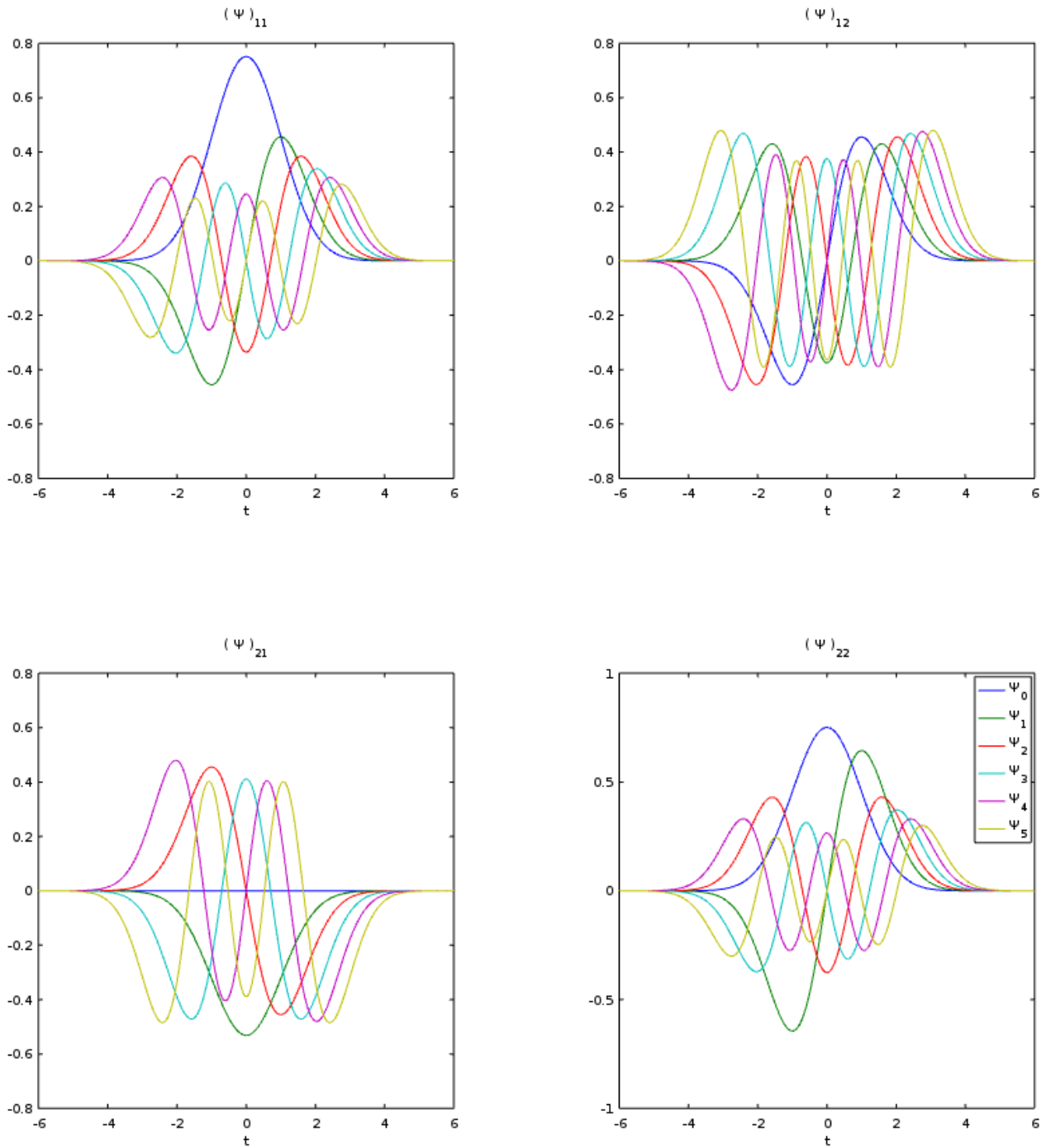
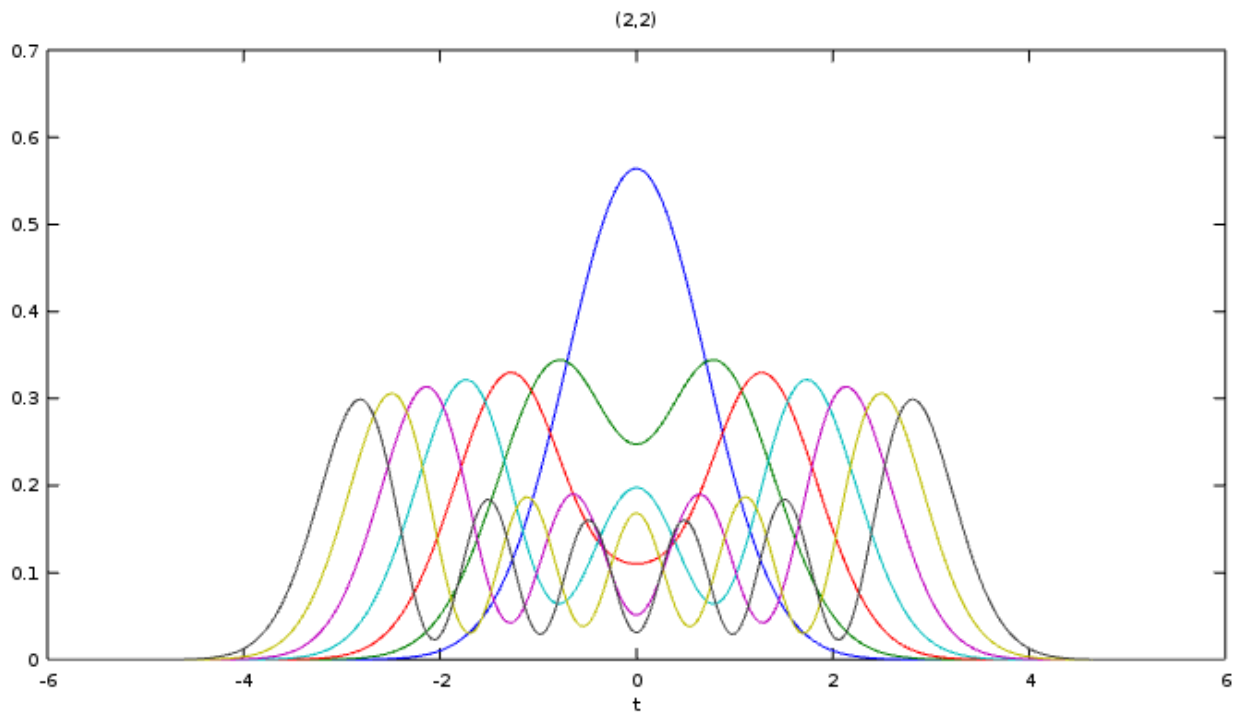
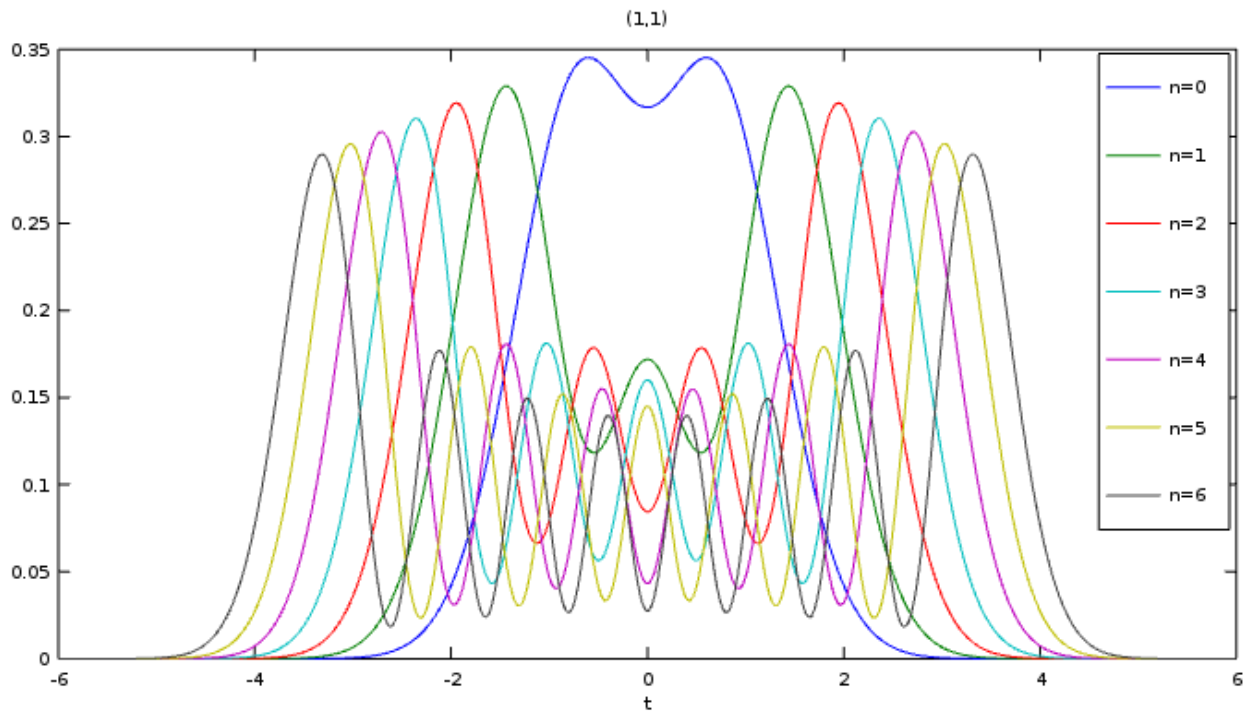


Figura 4.5: Gráficas sobrepuestas de la diagonal de las funciones $\Psi_n \Psi_n^*$ respecto al peso W_1 para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y $\nu = \frac{5}{4}$.



4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Por (4.37),

$$\begin{aligned} & \Psi_n(t)\Psi_n^*(t) \\ &= \begin{pmatrix} \psi_{n+1}^2(t) + \frac{1}{\gamma_{n+1}}(\psi_n^2(t) - \psi_{n+1}^2(t)) & \frac{\nu}{\sqrt{\gamma_n\gamma_{n+1}}}\psi_n(t)\psi'_n(t) \\ \frac{\nu}{\sqrt{\gamma_n\gamma_{n+1}}}\psi_n(t)\psi'_n(t) & \psi_{n-1}^2(t) + \frac{1}{\gamma_n}(\psi_n^2(t) - \psi_{n-1}^2(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obsérvese que para todo t es una matriz autoadjunta y conforme ν tiende a ∞ esta función tiende a $\psi_n^2 I$. Ahora para $0 \leq n, m$ y $k = 1, 2$ calculamos las fórmulas

$$(t^k I) = \int_{\mathbb{R}} t^k \Psi_n(t)\Psi_n^*(t). \quad (4.38)$$

En el caso escalar, como consecuencia de la relación de recurrencia de tres términos para los polinomios de Hermite se tiene

$$(t)_{nm} = \sqrt{\frac{n}{2}}\delta_{m,n-1} + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\delta_{m,n+1}, \quad (4.39)$$

$$(t^2)_{nm} = \frac{1}{2}\sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} + (n + \frac{1}{2})\delta_{m,n} + \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2}. \quad (4.40)$$

Podemos usar estas fórmulas del caso escalar para calcular las expresiones explícitas (4.38) a partir de (4.37):

$$\begin{aligned} & \Psi_n \Psi_m^* \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\psi_n \psi_m}{\sqrt{\gamma_{n+1}\gamma_{m+1}}} + \frac{\nu^2}{2} \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\gamma_{n+1}\gamma_{m+1}}} \psi_{n+1} \psi_{m+1} & \frac{\nu}{\sqrt{\gamma_m\gamma_{n+1}}} \left(\sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1} \psi_m - \sqrt{\frac{m}{2}} \psi_n \psi_{m-1} \right) \\ \frac{\nu}{\sqrt{\gamma_n\gamma_{m+1}}} \left(\sqrt{\frac{m+1}{2}} \psi_{m+1} \psi_n - \sqrt{\frac{n}{2}} \psi_m \psi_{n-1} \right) & \frac{\psi_n \psi_m}{\sqrt{\gamma_n\gamma_m}} + \frac{\nu^2}{2} \sqrt{\frac{nm}{\gamma_n\gamma_m}} \psi_{n-1} \psi_{m-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Y usamos (4.39) y (4.40) del caso escalar, obteniendo

$$\begin{aligned} (tI)_{nm} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n\gamma_{n+1}}{2\gamma_n}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{n\gamma_{n-1}}{2\gamma_n}} \end{pmatrix} \delta_{m,n-1} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu}{2\sqrt{\gamma_n\gamma_{n+1}}} \\ \frac{\nu}{2\sqrt{\gamma_n\gamma_{n+1}}} & 0 \end{pmatrix} \delta_{m,n} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(n+1)\gamma_{n+2}}{2\gamma_{n+1}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{(n+1)\gamma_n}{2\gamma_{n+1}}} \end{pmatrix} \delta_{m,n+1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 (t^2 I)_{nm} = & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n(n-1)\gamma_{n+1}}{\gamma_{n-1}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n(n-1)\gamma_{n-2}}{\gamma_n}} \end{pmatrix} \delta_{m,n-2} \\
 & + \begin{pmatrix} 0 & \nu \sqrt{\frac{n}{2\gamma_{n-1}\gamma_{n+1}}} \\ \frac{\nu}{\gamma_n} \sqrt{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix} \delta_{m,n-1} \\
 & + \begin{pmatrix} n + \frac{3}{2} - \frac{1}{\gamma_{n+1}} & 0 \\ 0 & n - \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma_n} \end{pmatrix} \delta_{m,n} \\
 & + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu}{\gamma_{n+1}} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \\ \nu \sqrt{\frac{n+1}{2\gamma_n\gamma_{n+2}}} & 0 \end{pmatrix} \delta_{m,n+1} \\
 & + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)\gamma_{n+3}}{\gamma_{n+1}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)\gamma_n}{\gamma_{n+2}}} \end{pmatrix} \delta_{m,n+2}.
 \end{aligned}$$

Obsérvese que se tienen k términos más cuando $n = m$, lo cual no ocurre en el caso escalar. En el caso escalar la matriz tridiagonal (t) dada por (4.39) se puede asociar al homomorfismo $f \rightarrow tf$ en \mathcal{L}^2 con respecto a la base $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. En el caso matricial tenemos una matriz tridiagonal por bloques (tI) que asociamos al homomorfismo $F \rightarrow tF$ en L^2 con respecto de la base $\{\Psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ahora (tI) es una matriz semiinfinita pentadiagonal pero con ceros en la diagonal principal, o sea

$$(tI) = \begin{pmatrix} 0 & \star & \star & & & & \\ \star & 0 & 0 & \star & & & \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & & \\ & \star & \star & 0 & 0 & \star & \\ & & \star & 0 & 0 & \star & \star \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

indicando con \star que es una entrada no nula.

Las matrices (t^k) juegan un papel importante en la descripción del oscilador armónico cuántico (ver [PW35]) en el caso escalar. Sin embargo, en el caso matricial se desconoce si $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (y por lo tanto las matrices por bloques $(t^k I)$) van a tener algún significado en términos de algún sistema físico.

4.3. Segundo ejemplo

Seguiremos el mismo razonamiento que en la sección 4.2. Sea W como en (3.40). Por (3.42) se tiene la expresión $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$W(t) = e^{-t^2} e^{A(I+A)^{-1}t^2} e^{(I+A^*)^{-1}A^*t^2}. \quad (4.41)$$

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Donde A es la misma matriz nilpotente (3.37). Esta expresión resulta más conveniente para hacer cálculos de esta sección. Sea $\{\widehat{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de polinomios mónicos ortogonales con respecto de ese peso. Como hemos visto en la sección 3.3.2, $\{\widehat{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son autofunciones del operador diferencial

$$\mathcal{D} = \partial_t^2 I + \partial_t^1 (t(-2I + 4B)) + \partial_t^0 (2B - 4J).$$

Reescribimos \mathcal{D}_2 como

$$\partial_t^2 F_2 + \partial_t^1 F_1 + \partial_t^0 F_0$$

con

$$\begin{aligned} F_2(t) &= I \\ F_1(t) &= 2(2A(I + A)^{-1} - I)t \\ F_0(t) &= 2A(I + A)^{-1} - 4J, \end{aligned}$$

donde J es la misma matriz (3.39). De acuerdo a (3.9), los autovalores son

$$\Lambda_n = 2(2B - I)n + 2B - 4J.$$

Usando (3.42), los autovalores mónicos quedan

$$\Lambda_n = 2(2A(I + A)^{-1} - I)n + 2A(I + A)^{-1} - 4J.$$

Ahora elegimos un coeficiente principal L_n de manera que diagonalice el autovalor Λ_n ; un candidato es

$$L_n := ((I + A)^{-1/2})^{2n+1}. \quad (4.42)$$

De esta manera

$$L_n \Delta_n L_n^{-1} = -2n - 4J$$

como consecuencia de la relación

$$\log(I + A)^{-1} J - J \log(I + A) = -A(I + A)^{-1},$$

que se prueba expandiendo en la serie de potencias y usando (4.11).

4.3.1. Los operadores diferencial e integral correspondientes

Ahora construimos una familia de polinomios ortogonales con respecto del peso W .

Definición 4.10. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea L_n como en (4.42). Sea $\{\widehat{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de polinomios mónicos ortogonales con respecto a W dado por (4.41). Denotamos $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$P_n(t) := L_n \widehat{P}_n(t) \quad (4.43)$$

y definimos Φ_n según (3.46) para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_n(t) := e^{-t^2/2} P_n(t) e^{A(I+A)^{-1}t^2}. \quad (4.44)$$

Por el Teorema 3.23, se tiene que cada miembro de la familia (4.44) resuelve la ecuación diferencial

$$\Phi_n''(t) + \Phi_n'(t)(t^2I + 4J) + ((2n + 1)I + 4J)\Phi_n(t) = 0, \quad (4.45)$$

que también es una generalización de la ecuación de Schrödinger con potencial cuadrático (véase (2.38)) y no es la misma que la del primer ejemplo. Observamos que en este caso $\chi(t) = 4J$ y que esta ecuación diferencial nuevamente es independiente de la matriz A . Véase sección 3.3.

Ahora definimos la generalización de la Transformada de Fourier correspondiente a este segundo ejemplo de peso:

Definición 4.11. *Definimos el operador integral*

$$\mathcal{I}_2 : L^2 \rightarrow L^2$$

tal que $\forall X \in L^2$,

$$(X\mathcal{I}_2)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} X(t)e^{ixt}e^{i\pi J} dt,$$

con $e^{i\pi J}$ definido según (4.4).

Nótese que el último valor esta vez es la matriz (4.4) y que este operador no depende de A .

El resultado principal de esta sección es que la familia de funciones matriciales (4.44) son autofunciones del operador integral \mathcal{I}_2 , un resultado similar al Teorema 2.13; nótese que con $n = 0$, $\Phi_0(t) = e^{-t^2/2}(I + A)^{-1/2}e^{A(I+A)^{-1}t^2}$. Esta prueba también se hará por inducción sobre n .

Lema 4.12. $(\Phi_0\mathcal{I}_2)(x) = e^{i\pi J}e^{-x^2/2}(I + A)^{-1/2}e^{A(I+A)^{-1}x^2} = e^{i\pi J}\Phi_0(x)$.

Demostración. La prueba es más elaborada que la del Lema 4.5 pero sigue el mismo procedimiento, usando el análisis real usual de series de potencias de funciones y las fórmulas $e^{i\pi J}A^k[(I + A)^{-1} - 1]^k = (-1)^k A^k[(I + A)^{-1} - 1]^k e^{i\pi J}$ y $(I + A)^{1/2}e^{i\pi J} = e^{i\pi J}(I - A)^{1/2}$, que se cumplen por (4.9). \square

Con base en este lema se prueba el siguiente

Teorema 4.13. *La familia $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definidas según (4.44) son autofunciones de \mathcal{I}_2 con autovalor $(i)^n e^{i\pi J}$, es decir*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi_n(t)e^{ixt}e^{i\pi J} dt = (i)^n e^{i\pi J} \Phi_n(x).$$

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Demostración. Sigue los mismos pasos que la prueba del Teorema 4.6 con la diferencia de que el coeficiente principal de P_n depende de n y que la ecuación (4.22) ahora es

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2/2} e^{A(I+A)^{-1}t^2}) &= (((-1)^n [2A(I+A)^{-1} - I]^n t^n I + \dots) e^{-t^2/2} e^{A(I+A)^{-1}t^2}) \\ &= (((-1)^n [(I-A)(I+A)^{-1}]^n t^n I + \dots) e^{-t^2/2} e^{A(I+A)^{-1}t^2}). \end{aligned}$$

□

4.3.2. Expresiones integrales y propiedades de simetría

A partir del Teorema 4.13 obtenemos las propiedades correspondientes de la misma manera que en la sección 4.2.2. Se omiten las pruebas de estos resultados porque son análogas. Compárense con las propiedades mencionadas en la sección 2.1.5 para las Funciones de Hermite usuales. Se nota la similitud entre estas propiedades y las del ejemplo anterior.

Corolario 4.14. *Las familias dadas en la Definición 4.10 satisfacen $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) &= (-1)^n \Phi_n(-t), \\ P_n(t) &= (-1)^n P_n(-t). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Este caso estas condiciones de simetría son exactamente iguales a las de la familia de polinomios clásicos de Hermite.

Corolario 4.15. *Sea $e^{i\pi J}$ la matriz diagonal (4.4). Para toda n natural, cada elemento de la familia de polinomios matriciales ortogonales (4.43) con respecto del peso W definido en (4.41) o (3.40), $P_n(t) = L_n \hat{P}_n$ con $L_n = e^{-A^2/4}$ por la ecuación (4.42), satisface la expresión integral*

$$e^{-t^2/2} P_n(t) e^{A(I+A)^{-1}t^2} = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi}} e^{i\pi J} \int_{\mathbb{R}} P_n(x) e^{-x^2/2} e^{itx} e^{A(I+A)^{-1}x^2} e^{i\pi J} dx. \tag{4.47}$$

Además se tienen las siguientes ecuaciones integrales:

$$e^{-t^2/2} e^{i\pi J} P_{2n}(t) e^{A(I+A)^{-1}t^2} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} P_{2n}(x) e^{A(I+A)^{-1}x^2} \cos(tx) e^{i\pi J} dx, \tag{4.48}$$

$$e^{-t^2/2} e^{i\pi J} P_{2n+1}(t) e^{A(I+A)^{-1}t^2} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} P_{2n+1}(x) e^{A(I+A)^{-1}x^2} \sin(tx) e^{i\pi J} dx. \tag{4.49}$$

Estas expresiones integrales también dependen de A . Observamos que en este caso únicamente se tienen dos ecuaciones integrales de valores reales, a diferencia del primer ejemplo; esto es por las propiedades de simetría vistas en el Corolario 4.14.

El núcleo correspondiente para este operador es

$$K(t, x) = e^{\frac{(t+ix)^2}{2}} e^{A(I+A)^{-1}x^2} e^{i\pi J} e^{-A(I+A)^{-1}t^2}.$$

Nótese que, aún dado un peso matricial, las familias no son únicas como en el caso escalar y dependen del par $\{\mathcal{D}, W\}$; tampoco se encuentran clasificadas. No son las únicas que resuelven un operador diferencial de tipo Schrödinger y a la vez son autofunciones de un operador integral de tipo Fourier, pero todas en el caso escalar $N = 1$ son las mismas. A continuación estudiemos el caso correspondiente a este ejemplo para $N = 2$.

4.3.3. El caso 2×2

En esta parte daremos el ejemplo explícito del peso (4.41) y las funciones Φ_n definidas según (4.44). Sea $N = 2$ y W_2 según (3.40).

Aquí se encuentran algunas fórmulas y las matrices explícitas y gráficas de los valores de las entradas de W_2 y de los primeros elementos de la familia de funciones de Hermite a valores matriciales. En el caso $N = 1$ quedan las clásicas.

El peso W_2

Fijamos algún $\nu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por (3.42) y (4.29) se tiene

$$B = A(I + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Por lo que la única diferencia con el otro peso es el exponente de t . En casos de dimensión N mayor no es así el asunto: la matriz B es triangular superior salvo su diagonal nula y en cambio A sólo tiene las entradas $(j, j + 1)$ no nulas. Por ejemplo, si $N = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & -\nu_1\nu_2 \\ 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Igual que en (4.30) y (4.31), por su definición dada en (4.41) en dimensión $N = 2$ es

$$\begin{aligned} W_2(t) &= e^{-t^2} e^{A(I+A)^{-1}t^2} e^{(A(I+A)^{-1}t^2)^*} = e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\nu} t^2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + |\nu|^2 t^4 & \nu t^2 \\ \bar{\nu} t^2 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

pues

$$e^{Bt^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (At^2)^j = I + At^2 = \begin{pmatrix} 1 & \nu t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para todo t es una matriz autoadjunta y las entradas son pares, por lo que la integral de esas entradas es nula. Cuando ν tiende a cero, W_2 tiende al peso escalar usual encajado en las funciones matriciales ($e^{-t^2}I$) y conforme el valor absoluto de ν crece el valor de la primer entrada se hace más significativo. En las figuras 4.6, 4.7 y 4.8 se encuentra la gráfica de las cuatro entradas de W_2 para el valor $\nu = \frac{1}{2}$, $\nu = 1$ y $\nu = \frac{5}{4}$, respectivamente.

Figura 4.6: Gráfica de cada entrada de W_2 para $\nu = \frac{1}{2}$.

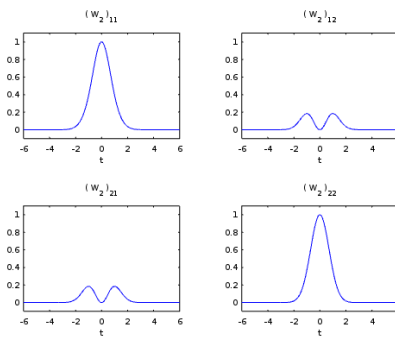


Figura 4.7: Gráfica de cada entrada de W_2 para $\nu = 1$.

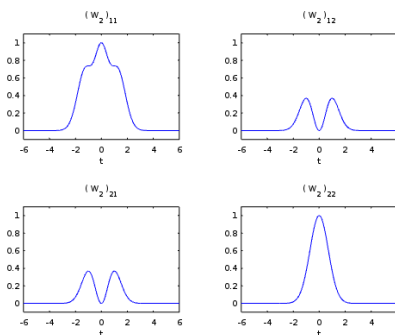
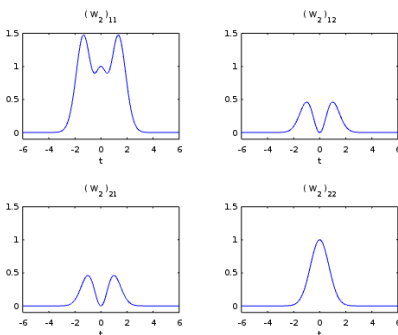


Figura 4.8: Gráfica de cada entrada de W_2 para $\nu = \frac{5}{4}$.



Los momentos

W_2 es una matriz semidefinida positiva, como dice la Definición 3.4; sus momentos se encuentran igual que en (2.9), definiendo

$$\mu_n = \int_{\mathbb{R}} t^n W_2(t) dt.$$

Los momentos pueden calcularse usando la fórmula (4.32). Obsérvese en este caso que los momentos impares se anulan como consecuencia de la paridad del peso W_2 .

Los siguientes resultados se encuentran demostrados en [DG05].

Fórmula de Rodrigues

La fórmula de tipo Rodrigues que extiende lo visto en la sección 2.1.2 en este caso es algo distinta del anterior. Se prueba de la misma forma que para W_1 : dependiendo de ν definimos

$$R_n = e^{-t^2} \begin{pmatrix} \frac{|\nu|^2}{2} \binom{n+1}{2} + |\nu|^2 (n - \frac{1}{2}) t^2 & -\frac{\nu}{2} \\ \bar{\nu} n & 0 \end{pmatrix}$$

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

y

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_n(t) &:= (-1)^n [(W_2 + R_n)]^{(n)} W_2^{-1} \\
 &= (-1)^n \left(e^{-t^2} \begin{bmatrix} 1 + |\nu|^2 t^4 & \nu t^2 \\ \bar{\nu} t^2 & 1 \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{pmatrix} \frac{|\nu|^2}{2} \binom{n+1}{2} + |\nu|^2 (n - \frac{1}{2}) t^2 & -\frac{\nu}{2} \\ \bar{\nu} n & 0 \end{pmatrix} \right)^{(n)} \begin{pmatrix} 1 + |\nu|^2 t^4 & \nu t^2 \\ \bar{\nu} t^2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} e^{t^2}. \\
 &= (-1)^n \left[e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + |\nu|^2 (t^4 + \frac{1}{2} \binom{n+1}{2} + (n - \frac{1}{2}) t^2) & \nu (t^2 - \frac{1}{2}) \\ \bar{\nu} (t^2 + n) & 1 \end{pmatrix} \right]^{(n)} \\
 &\quad \begin{pmatrix} 1 & -\nu t^2 \\ -\bar{\nu} t^2 & |\nu|^2 t^4 + 1 \end{pmatrix} e^{t^2}.
 \end{aligned}$$

La familia de polinomios P_n son ortogonales con respecto del peso W_2 . Denotemos

$$\gamma_n := 1 + \frac{|\nu|^2}{2} \binom{n}{2}. \quad (4.50)$$

Nótese que también depende de ν . En este caso los coeficientes principales son

$$K_n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & -\nu(n + \frac{1}{2}) \\ 0 & \gamma_n \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Si $\nu = 0$ se tiene la fórmula escalar multiplicada por la identidad I .

Norma

Sea $\{\widehat{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la familia de polinomios ortogonales mónicos. A diferencia del primer caso, su norma no es diagonal; ahora se tiene

$$\|\widehat{P}_n\|^2 = \frac{\sqrt{\pi} n! 2^{-n}}{\gamma_n} \begin{pmatrix} \gamma_{n+2} \gamma_n + |\nu|^2 (n + \frac{1}{2})^2 & \nu (n + \frac{1}{2}) \\ \bar{\nu} (n + \frac{1}{2}) & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Hay una secuencia de polinomios ortonormales cuyos coeficientes principales son

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} n! 2^{-n}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{n+2}}} & -\nu \frac{(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\gamma_{n+2}}} \\ 0 & \sqrt{\gamma_n} \end{pmatrix}$$

Relación de recurrencia a dos términos

Normalizado cada \widehat{P}_n obteniendo la familia $\{\tilde{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de polinomios ortonormales. La ecuación (3.5) resulta ser de dos términos:

$$\begin{aligned} t\tilde{P}_n(t) = & \sqrt{\frac{n+1}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\gamma_{n+3}}{\gamma_{n+2}}} & \frac{\nu}{\sqrt{\gamma_{n+2}\gamma_{n+1}}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}} \end{pmatrix} \tilde{P}_{n+1}(t) \\ & + \sqrt{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\gamma_{n+2}}{\gamma_{n+1}}} & 0 \\ \frac{\bar{\nu}}{\sqrt{\gamma_{n+1}\gamma_n}} & \sqrt{\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}} \end{pmatrix} \tilde{P}_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Esta ecuación nos sugiere una secuencia de términos correspondiente al caso escalar con $b_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Expresión en términos de los polinomios de Hermite escalares

Habiendo calculado los polinomios de Hermite escalares, una manera muy sencilla de obtener una familia de polinomios ortogonales es por medio de los polinomios de Hermite clásicos.

$$\mathcal{P}_n(t) = H_n(t) \begin{pmatrix} 1 & -\nu(n + \frac{1}{2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2H_{n-2}(t) \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ -\bar{\nu} & |\nu|^2 t^2 \end{pmatrix}.$$

Así encontramos una expresión explícita de cada polinomio P_n y también de las funciones Φ_n .

Tenemos que

$$\mathcal{P}_n(t) = K_n \widehat{P}_n(t)$$

con K_n dado por (4.51), y por L_n según (4.42), se tiene

$$P_n(t) = L_n \widehat{P}_n(t);$$

por lo tanto

$$P_n(t) = L_n K_n^{-1} \mathcal{P}_n(t),$$

y como en este caso $K_n^{-1} = \frac{1}{2^n \gamma_n^2} \begin{pmatrix} \gamma_n^2 & \nu(n + \frac{1}{2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $L_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\nu(2n+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \gamma_n^2} \begin{pmatrix} \gamma_n^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{P}_n(t) = 2^{-n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_n^2} \end{pmatrix} \mathcal{P}_n(t).$$

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Los primeros seis polinomios matriciales asociados al peso W_2 que hemos estado estudiando tienen la forma:

$$\begin{aligned}
 P_0(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^6} & -\frac{\nu}{128} \\ 0 & -\frac{1}{16(15|\nu|^2+2)^2} \end{pmatrix}, \\
 P_1(t) &= \begin{pmatrix} \frac{t}{32} & -\frac{3t\nu}{64} \\ 0 & -\frac{t}{8(15|\nu|^2+2)^2} \end{pmatrix}, \\
 P_2(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2t^2-1}{32} & -\frac{(10t^2-3)\nu}{64} \\ \frac{t^2|\nu|^2+2t^2-1}{8(15|\nu|^2+2)^2} & -\frac{t^2|\nu|^2+2t^2-1}{8(15|\nu|^2+2)^2} \end{pmatrix}, \\
 P_3(t) &= \begin{pmatrix} \frac{t(2t^2-3)}{16} & -\frac{t(14t^2-15)\nu}{32} \\ \frac{3t\nu}{4(15|\nu|^2+2)^2} & -\frac{t(3t^2|\nu|^2+2t^2-3)}{4(15|\nu|^2+2)^2} \end{pmatrix}, \\
 P_4(t) &= \begin{pmatrix} \frac{4t^4-12t^2+3}{3(2t^2-1)\bar{\nu}} & -\frac{3(12t^4-28t^2+5)\nu}{4(15|\nu|^2+2)^2} \\ \frac{12t^4|\nu|^2-6t^2|\nu|^2+4t^4-12t^2+3}{2(15|\nu|^2+2)^2} & -\frac{12t^4|\nu|^2-6t^2|\nu|^2+4t^4-12t^2+3}{4(15|\nu|^2+2)^2} \end{pmatrix}, \\
 P_5(t) &= \begin{pmatrix} \frac{t(4t^4-20t^2+15)}{5t(2t^2-3)\bar{\nu}} & -\frac{t(44t^4-180t^2+105)\nu}{2(15|\nu|^2+2)^2} \\ \frac{5t(2t^2-3)\bar{\nu}}{15|\nu|^2+2} & -\frac{t(20t^4|\nu|^2-30t^2|\nu|^2+4t^4-20t^2+15)}{2(15|\nu|^2+2)^2} \end{pmatrix}, \\
 P_6(t) &= \begin{pmatrix} \frac{8t^6-60t^4+90t^2-15}{15(4t^4-12t^2+3)\bar{\nu}} & -\frac{(104t^6-660t^4+810t^2-105)\nu}{2(15|\nu|^2+2)^2} \\ \frac{15(4t^4-12t^2+3)\bar{\nu}}{2(15|\nu|^2+2)^2} & -\frac{60t^6|\nu|^2-180t^4|\nu|^2+45t^2|\nu|^2+8t^6-60t^4+90t^2-15}{2(15|\nu|^2+2)^2} \end{pmatrix}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Como en el caso para W_1 , también tienden a los polinomios de Hermite escalares encajados en L^2 conforme ν tiende a cero y la diagonal son los mismos.

De acuerdo con (4.44),

$$\begin{aligned}
 \Phi_n(t) &:= e^{-t^2/2} P_n(t) e^{A(I+A)^{-1}t^2} \\
 &= e^{-t^2/2} P_n(t) e^{At^2} \\
 &= e^{-t^2/2} P_n(t) \begin{pmatrix} 1 & \nu t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

sustituyendo (4.53) y cada polinomio en (4.44) calculamos las primeras funciones ortogonales

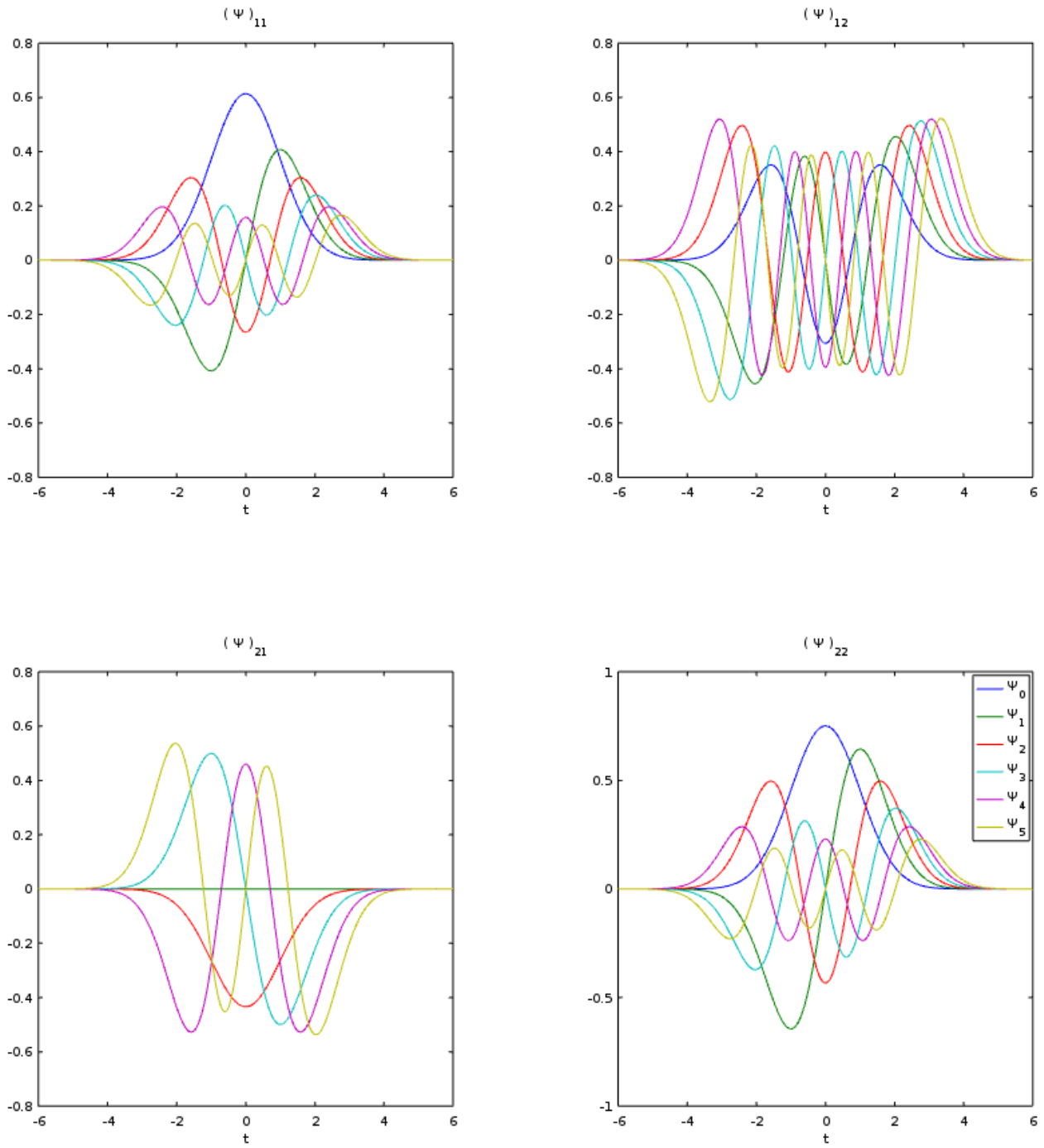
a valores matriciales:

$$\begin{aligned}
 \Phi_0(t) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{2t^2-1}{2}\nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 \Phi_1(t) &= \begin{pmatrix} 2t & t(2t^2-3)\nu \\ 0 & 2t \end{pmatrix}, \\
 \Phi_2(t) &= \begin{pmatrix} 2(2t^2-1) & (4t^4-12t^2+3)\nu \\ -2\bar{\nu} & 2(t^2|\nu|^2-t^2\nu\bar{\nu}+2t^2-1) \end{pmatrix}, \\
 \Phi_3(t) &= \begin{pmatrix} 4t(2t^2-3) & 2t(4t^4-20t^2+15)\nu \\ -12t\bar{\nu} & 4t(2t^2-3) \end{pmatrix}, \\
 \Phi_4(t) &= \begin{pmatrix} 4(4t^4-12t^2+3) & 2(8t^6-60t^4+90t^2-15)\nu \\ -24(2t^2-1)\bar{\nu} & 4(4t^4-12t^2+3) \end{pmatrix}, \\
 \Phi_5(t) &= \begin{pmatrix} 8t(4t^4-20t^2+15) & 4t(8t^6-84t^4+210t^2-105)\nu \\ -80t(2t^2-3)\bar{\nu} & 8t(4t^4-20t^2+15) \end{pmatrix}, \\
 \Phi_6(t) &= \begin{pmatrix} 8(8t^6-60t^4+90t^2-15) & 4(16t^8-224t^6+840t^4-840t^2+105)\nu \\ -120(4t^4-12t^2+3)\bar{\nu} & 8(8t^6-60t^4+90t^2-15) \end{pmatrix}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Igual que para la familia ortogonal respecto de W_1 , aquí también las diagonales son las funciones de Hermite clásicas y cuando ν tiende a cero, cada una tiende al polinomio de Hermite llevado al espacio L^2 . En la Figura 4.9 se encuentran las gráfica de las entradas de las primeras ortonormales.

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Figura 4.9: Gráfica de las entradas de Φ_n con $\nu = 1$ y $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ para W_2 .



Las ecuaciones diferencial e integral asociadas

Según (4.45) se tiene que las funciones de Hermite (4.44) son solución del operador diferencial \mathcal{D}_2 , por lo que en este otro caso se verifica

$$\Phi_n''(t) + \Phi_n'(t) \begin{pmatrix} t^2 + 4 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n + 5 & 0 \\ 0 & 2n + 1 \end{pmatrix} \Phi_n(t) = 0.$$

Esta es otra generalización de la ecuación de Schrödinger con potencial cuadrático. Obsérvese que en este caso tampoco hay manera de encajar el operador diferencial (2.38) en éste. Esta ecuación representa la función de amplitud de los valores matriciales y sus soluciones también son densas en L^2 .

Sea $X(t) = \begin{pmatrix} X_{1,1}(t) & X_{1,2}(t) \\ X_{2,1}(t) & X_{2,2}(t) \end{pmatrix}$. En este caso la ecuación integral de la Definición 4.11 tiene la forma

$$(X\mathcal{I}_2)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} -X_{1,1}(t) & X_{1,2}(t) \\ -X_{2,1}(t) & X_{2,2}(t) \end{pmatrix} e^{ixt} dt.$$

Compárese con la Transformada de Fourier usual y con la expresión explícita del caso anterior.

Fórmulas integrales

Para W_2 la expresión (4.47) es

$$e^{-t^2/2} P_n(t) \begin{pmatrix} 1 & \nu t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} P_n(x) e^{-x^2/2} e^{itx} \begin{pmatrix} -1 & \nu t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dx$$

y las ecuaciones integrales (4.48) y (4.49) son

$$\begin{aligned} & e^{-t^2/2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_{2n}(t) \begin{pmatrix} 1 & \nu t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} P_{2n}(x) \begin{pmatrix} -1 & -\nu t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(tx) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & e^{-t^2/2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P_{2n+1}(t) \begin{pmatrix} 1 & \nu t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} P_{2n+1}(x) \begin{pmatrix} -1 & -\nu t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sin(tx) dx. \end{aligned}$$

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Expresiones de $\Psi_n \Psi_n^*$ y $(t^k I)$

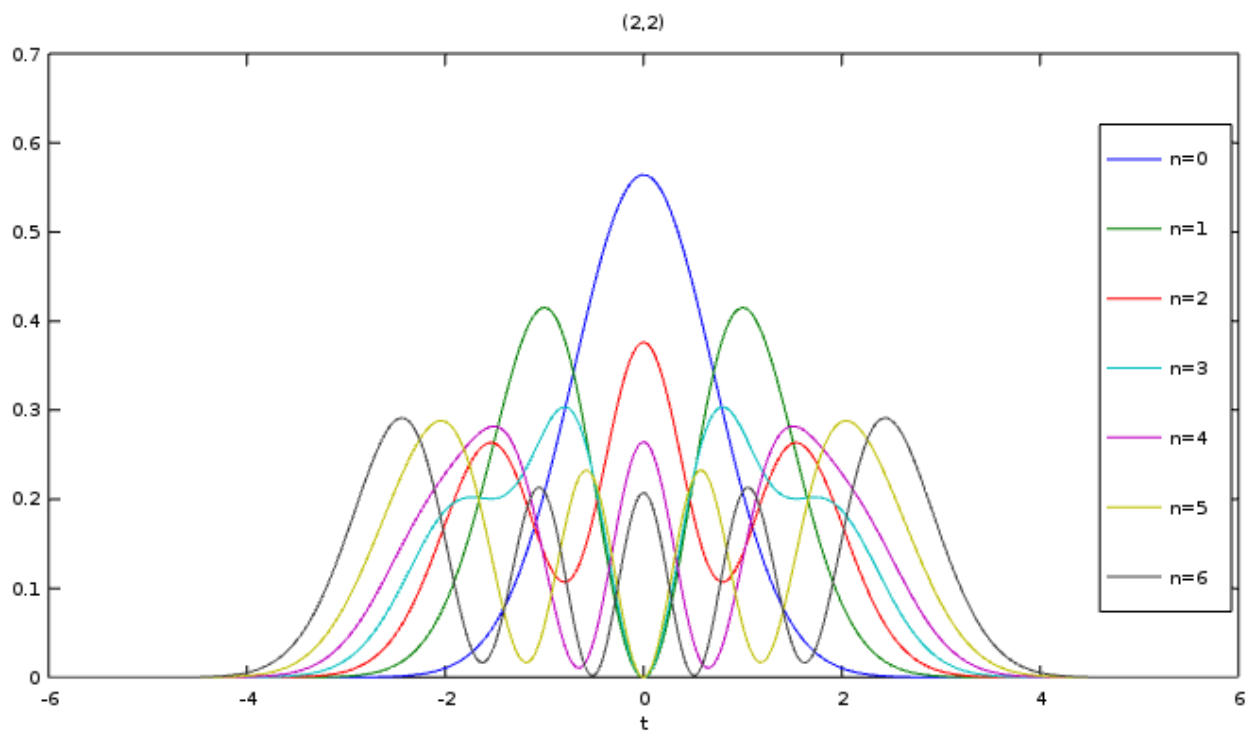
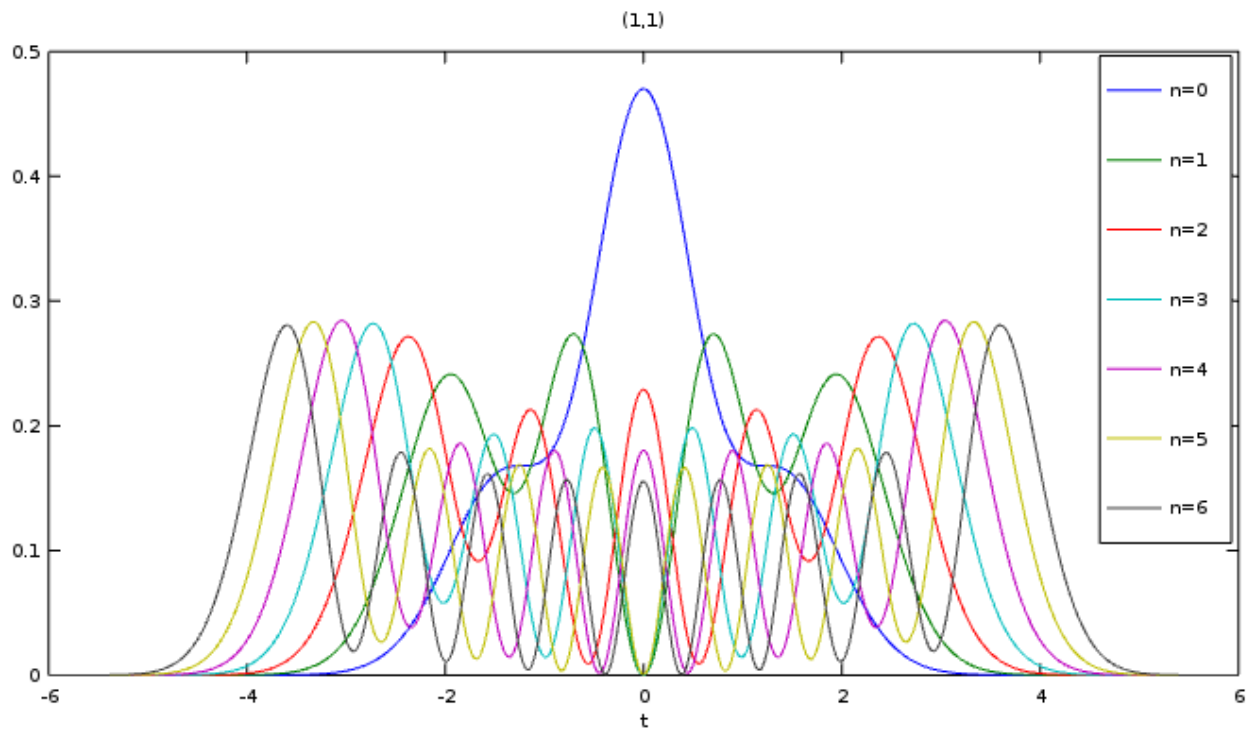
Sea γ_n según (4.50). Consideremos la familia de funciones de Hermite en la Definición 2.8) normalizadas, $\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n e^{-x^2/2}$. La familia de funciones ortonormales matriciales de Hermite asociadas al peso W_2 se puede escribir como

$$\Psi_n(t) = \begin{pmatrix} \psi_n(t)/\sqrt{\gamma_{n+2}} & \frac{\nu}{2} \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{\gamma_{n+2}}} \psi_{n+2}(t) \\ -\frac{\nu}{2} \sqrt{\frac{n(n-1)}{\gamma_n}} \psi_{n-2}(t) & \psi_n(t)/\sqrt{\gamma_n} \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} & \Psi_n(t) \Psi_n^*(t) \\ &= \begin{pmatrix} \psi_{n+2}^2(t) + \frac{1}{\gamma_{n+2}} (\psi_n^2(t) - \psi_{n+2}^2(t)) & -\frac{\nu}{2\sqrt{\gamma_n \gamma_{n+2}}} \psi_n(t) (\psi_n(t) + 2t\psi_n'(t)) \\ -\frac{\nu}{2\sqrt{\gamma_n \gamma_{n+2}}} \psi_n(t) (\psi_n(t) + 2t\psi_n'(t)) & \psi_{n-2}^2(t) + \frac{1}{\gamma_n} (\psi_n^2(t) - \psi_{n-2}^2(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obsérvese que para todo t es una matriz autoadjunta y conforme ν crece esta función ahora no tiende a $\psi_n^2 I$, pero sí a una matriz diagonal. En la figura 4.10 se grafican la diagonales de las primeras siete para $\nu = 1$. Nótese que estas diagonales también son densidades de probabilidad.

Figura 4.10: Gráfica de las diagonales de $\Psi_n \Psi_n^*$ con $\nu = 1$ y $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ para W_2 .

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

Ahora para $0 \leq n, m$ y $k = 1, 2$ calculamos, con el mismo método que en el primer ejemplo, las fórmulas

$$(t^k I) = \int_{\mathbb{R}} t^k \Psi_n(t) \Psi_n^*(t).$$

A partir de (4.54) obtenemos una expresiones explícita de $\Psi_n \Psi_m^*$:

$$\begin{aligned} (\Psi_n \Psi_m^*)_{1,1} &= \frac{\psi_n \psi_m}{\sqrt{\gamma_{n+2} \gamma_{m+2}}} + \frac{\nu^2}{4} \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)(m+1)(m+2)}{\gamma_{n+2} \gamma_{m+2}}} \psi_{n+2} \psi_{m+2} \\ (\Psi_n \Psi_m^*)_{1,2} &= \frac{\nu}{\sqrt{\gamma_n \gamma_{n+2}}} \left(\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \psi_{n+2} \psi_m - \sqrt{\frac{m(m-1)}{2}} \psi_n \psi_{m-2} \right) \\ (\Psi_n \Psi_m^*)_{2,1} &= \frac{\nu}{\sqrt{\gamma_n \gamma_{m+2}}} \left(\sqrt{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \psi_{m+2} \psi_n - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \psi_m \psi_{n-2} \right) \\ (\Psi_n \Psi_m^*)_{2,2} &= \frac{\psi_n \psi_m}{\sqrt{\gamma_n \gamma_m}} + \frac{\nu^2}{4} \sqrt{\frac{n(n-1)m(m-1)}{\gamma_n \gamma_m}} \psi_{n-2} \psi_{m-2} \end{aligned}$$

Y usamos (4.39) y (4.40) del caso escalar, obteniendo

$$(tI)_{nm} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n\gamma_{n+2}}{2\gamma_{n+1}}} & 0 \\ \nu \sqrt{\frac{n}{2\gamma_n \gamma_{n+1}}} & \sqrt{\frac{n\gamma_{n-1}}{2\gamma_n}} \end{pmatrix} \delta_{m,n-1} + \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(n+1)\gamma_{n+3}}{2\gamma_{n+2}}} & \nu \sqrt{\frac{n+1}{2\gamma_{n+1} \gamma_{n+2}}} \\ 0 & \sqrt{\frac{(n+1)\gamma_n}{2\gamma_{n+1}}} \end{pmatrix} \delta_{m,n+1}$$

y

$$\begin{aligned} (t^2 I)_{nm} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n(n-1)\gamma_{n+2}}{\gamma_n}} & 0 \\ \frac{\nu \sqrt{n(n-1)}}{\gamma_n} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n(n-1)\gamma_{n-2}}{\gamma_n}} \end{pmatrix} \delta_{m,n-2} \\ &+ \begin{pmatrix} n + \frac{5}{2} - \frac{2}{\gamma_{n+2}} & \frac{\nu(2n+1)}{2\sqrt{\gamma_n \gamma_{n+2}}} \\ \frac{\nu(2n+1)}{2\sqrt{\gamma_n \gamma_{n+2}}} & n - \frac{3}{2} + \frac{2}{\gamma_n} \end{pmatrix} \delta_{m,n} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)\gamma_{n+4}}{\gamma_{n+2}}} & \frac{\nu \sqrt{(n+1)(n+2)}}{\gamma_{n+2}} \\ 0 & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)\gamma_n}{\gamma_{n+2}}} \end{pmatrix} \delta_{m,n+2}. \end{aligned}$$

Ahora asociamos (tI) al homomorfismo $F \rightarrow tF$ en L^2 con respecto de esta base $\{\Psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Para este caso (tI) es una matriz semiinfinita heptadiagonal con ceros en las tres diagonales principales de la forma

$$(tI) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \star & \star & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \star & 0 & & & & \\ \star & 0 & 0 & 0 & \star & \star & & & \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 & \star & 0 & & \\ & 0 & \star & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

indicando con \star que es una entrada no nula.

4.4. Observaciones

Notamos la similitud entre los operadores integrales de las definiciones 4.4 y 4.11 asociados respectivamente al primer y segundo ejemplos de peso matricial W ; en el caso de dimensión $N = 1$ se trata de la Transformada de Fourier, pero estos no son necesariamente la Transformada de Fourier escalar que podría definirse aplicando el operador entrada a entrada, es decir: con $k = 0$.

En este caso también se tiene una fórmula de inversión para ambos ejemplos. Sea M una función a valores matriciales y $k \in \{1, 2\}$. Definimos

$$(M\mathcal{I}_k^{-1})(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} M(x)e^{-itx}e^{-i\frac{\pi}{2}kJ}dx.$$

Usando la condición de simetría (4.23) ó (4.46), $\Phi_{n,k}(t) = (-1)e^{i\pi kJ}\Phi_{n,k}(-t)e^{i\pi kJ}$, se tiene

$$(\Phi_{n,k}\mathcal{I}_k)(t) = (i)^n e^{i\frac{\pi}{2}kJ}\Phi_{n,k}(t)$$

y

$$(\Phi_{n,k}\mathcal{I}_k^{-1})(t) = (-i)^n e^{i\frac{\pi}{2}kJ}\Phi_{n,k}(t).$$

Entonces

$$M(t) = ((M\mathcal{I}_k)\mathcal{I}_k^{-1})(t).$$

De estas dos maneras podemos llevar a cabo análisis de Fourier en L^2 , y ambas son un caso general de aplicar la transformada entrada a entrada.

La familia de funciones de Hermite clásicas, así como el peso exponencial usual, pueden encajarse en L^2 como los mismos multiplicados por I en los ejemplos de pesos que hemos tratado en el caso especial de dimensión 2 eligiendo $\nu = 0$; sin embargo, de ningún modo los operadores \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 pueden reducirse al operador diferencial escalar, pues son independientes del conjunto $\{\nu_n\}_{n=1}^{N-1}$. Aún así lo es la ecuación (3.49) en el caso unidimensional.

Recordemos que en el caso escalar, según el Corolario 2.16 las únicas soluciones polinomiales de la ecuación de amplitud (2.36) con potencial cuadrático, caso particular de la ecuación hipergeométrica (3.6), son múltiplos de los polinomios de Hermite, y por la interpretación física del asunto resulta que los niveles de energía del electrón incrementan en un valor constante dada la completitud de las funciones de Hermite en el espacio de Lebesgue donde se encuentran las soluciones de la ecuación. No sabemos cuál sería la implicación correspondiente en el espacio de matrices, pues dependería del sistema físico que modelara y no se han encontrado aplicaciones prácticas de la ecuación matricial.

Esperamos dejar claro que la generalización a valores matriciales de los pesos, de la ecuación de Schrödinger y de las familias de funciones ortogonales es múltiple, y clasificarlas

4. FUNCIONES DE HERMITE MATRICIALES

es un desafío. Tampoco se ha encontrado una generalización total de la Transformada de Fourier. Considérese que se ha trabajado con los casos más sencillos del operador \mathcal{D} y aún así su complejidad es bastante. Hemos visto que multiplicar las funciones de Hermite o la Transformada de Fourier escalar por la identidad I es un caso particular por lo menos de los ejemplos mostrados explícitamente, y que éstos nos dan diferentes fórmulas integrales en el caso $N = 2$ y diferente cantidad según el peso.

Se han presentado condiciones en las cuales los pesos matriciales cuyas familias de funciones ortogonales asociadas son autofunciones tanto de un operador diferencial como de uno integral. Hemos dicho que las familias de funciones ortogonales presentadas en la Definición 3.22 son completas en L^2 dado un peso W . Cabe señalar que no hay diferencia entre uno y otro espacio de funciones a valores matriciales en que se encuentran. Se ha expuesto una relación de recurrencia de tres términos, la fórmula de Rodrigues y expresiones integrales que facilitan el cálculo de la correspondiente familia.

Naturalmente es más sencillo estudiar a las funciones a valores matriciales por medio de su descomposición en funciones ortogonales. Ya que son autofunciones del operador integral correspondiente y sus autovalores son todos diagonales (ver Teoremas 4.6 y 4.13), elegimos una de estas familias normalizada y descomponemos cualquier función matricial F en su serie

$$M(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} C_n \Phi_n(t).$$

Sean $\{\Lambda_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\Gamma_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ los autovalores diagonales respectivamente de \mathcal{D}_k e \mathcal{I}_k . Entonces

$$\begin{aligned} M\mathcal{D}_k\mathcal{I}_k &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} C_n \Phi_n \right) \mathcal{D}_k \mathcal{I}_k = \sum_{n \in \mathbb{N}} C_n \Lambda_n^k \Phi_n \mathcal{I}_k = \sum_{n \in \mathbb{N}} C_n \Lambda_n^k \Gamma_n^k \Phi_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} C_n \Gamma_n^k \Lambda_n^k \Phi_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} C_n \Gamma_n^k \Phi_n \mathcal{D}_k = \sum_{n \in \mathbb{N}} C_n \Phi_n \mathcal{I}_k \mathcal{D}_k = M\mathcal{I}_k\mathcal{D}_k. \end{aligned}$$

Es decir que los operadores integral y diferencial conmutan en todo el espacio L^2 . Ha sido indispensable el hecho de que los autovalores se multipliquen a la izquierda mientras que los operadores actúan a la derecha; así son lineales por la izquierda. En general, para que dos operadores conmuten es suficiente que $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sean autofunciones de ambos y que los coeficientes sean conmutativos.

Demostrar la conmutatividad de los operadores ha sido inmediato usando la familia completa de autofunciones; esto es un ejemplo del uso de las propiedades de un sistema completo ortonormal. La prueba de esa completitud se debe al decaimiento exponencial de los pesos y sigue las mismas líneas que la del caso escalar visto en la sección 2.2.2.

Con el mismo método podemos descomponer L^2 en subespacios invariantes, uno por cada autovalor, bajo los operadores integrales, de la misma forma que en la sección 2.2.4.

Bibliografía

- [AAR99] George E. Andrews, Richard Askey y Ranjan Roy — *Special Functions*, Cambridge University Press (1999).
- [A33] Álvarez, Renato — *Polinomios hipergeométricos y q -polinomios*, Monografías del Seminario Matemático (2003).
- [Bar66] Bartle, Robert G. — *Elements of integration and Lebesgue measure*, Wiley Classics Library Edition (1995).
- [BW10] R. Beals y R. Wong — *Special Functions*, Cambridge (2010).
- [Chi78] Chihara, T. S. — *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach (1978).
- [Dur93] Durán, Antonio J. — *A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation*, J. Approx. Theory. 74, pgs. 83–109 (1993).
- [Dur97] Durán, Antonio J. — *Matrix inner product having a matrix symmetric second order differential operator*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 27 No. 2, pgs. 585-600 (1997).
- [Dur08] Durán, Antonio J. — *A method to find weight matrices having symmetric second-order differential operators with matrix leading coefficient*, Constructive Aproximation Vol. 29, pgs. 181-205, Springer (2008).
- [Dur09] Durán, Antonio J. — *Generating orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations from a trio of triangular matrices*, J. Approx. Theory 161 pgs. 88–113 (2009).
- [DG04] Antonio J. Durán y F. Alberto Grünbaum — *Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying Second-Order Differential Equations*, International Mathematics Research Notices, No. 10, pgs. 461-484 (2004)
- [DG05] Antonio J. Durán y F. Alberto Grünbaum — *Structural formulas for orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations*, Constr. Approx. 22 (2), pgs. 255–271 (2005).

BIBLIOGRAFÍA

- [DG07] Antonio J. Durán y F. Alberto Grünbaum — *Matrix orthogonal polynomials satisfying second order differential equations: coping without help from group representation theory*, J. Approx. Theory 148 pgs. 35–48 (2007)
- [DK72] H. Dym y H.P. McKean — *Fourier Series and Integrals*, Academic Press (1972).
- [Hall04] Hall, Brian C. — *Lie Groups, Lie Algebras and representations. An Elementary Introduction*, Springer, (2004)
- [HJ85] Horn, Johnson — *Matrix Analysis*, Cambridge University Press (1985).
- [Igl07] de la Iglesia, Manuel D. — *Propiedades diferenciales de familias de polinomios ortogonales matriciales y aplicaciones*, Tesis doctoral (2007).
- [Igl11] de la Iglesia, Manuel D. — *Some examples of matrix-valued orthogonal functions having a differential and an integral operator as eigenfunctions*, J. Approx. Theory 163, No. 5, (2011), pgs. 663-687.
- [Kra99] Krantz, S.G. — *A Panorama of Harmonic Analysis*, The Carus Mathematical Monographs number 27, pgs. 117-120 (1999).
- [KS96] Roelof Koekoek y René F. Swarttouw — *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, (1996).
- [Leb65] Lebedev, N. N. — *Special functions and their applications*, Prentice-Hall, Inc. (1965).
- [PW35] L. Pauling y B. Wilson — *Introduction to Quantum Mechanics with applications to chemistry*, McGraw-Hill Book Company Inc. (1935).
- [Rud53] Rudin, Walter — *Principles of Mathematical Analysis*, Tercera edición, McGraw-Hill, Inc. (1953).
- [SV95] Ann Sinap y Walter Van Assche — *Orthogonal matrix polynomials and applications*, Journal of Computational and Applied Mathematics 66, pgs. 27-52 (1996).
- [SW71] Elias M. Stein y Guido Weiss — *Introduction to Fourier Analysis on euclidean spaces*, Princeton University Press (1971).
- [Tit37] Titchmarsh, E. C. — *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Segunda edición, Oxford at the Clarendon Press (1937).
- [TZ16] Juan Tirao, Ignacio Zurrián — *Reducibility of matrix weights*, arXiv 1501.04059v4, (2016).
- [Wie33] Wiener, Norbert — *The Fourier integral and certain of its applications*, Cambridge at the University Press (1933).