



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Un enfoque unificado para grandes  
desviaciones de los valores propios extremos y  
del *bulk* en ensambles de matrices aleatorias

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
A C T U A R I O

P R E S E N T A:  
ADOLFO CAMACHO MELO

DIRECTOR DE TESIS:  
Dr. ISAAC PÉREZ CASTILLO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2016





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Datos del Jurado

### 1. Datos del alumno

Camacho  
Melo  
Adolfo  
57962044  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Actuaria  
409013285

### 2. Datos del tutor

Dr.  
Isaac  
Pérez  
Castillo

### 3. Datos del sinodal 1

Dra.  
Ana  
Meda  
Guardiola

### 4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Thomas  
Gorin

### 5. Datos del sinodal 3

Dr.  
Luis Antonio  
Rincón  
Solís

### 6. Datos del sinodal 4

Dra.  
Guadalupe  
Carrasco  
Licea

### 7. Datos del trabajo escrito

Un enfoque unificado para grandes desviaciones de los valores propios extremos y del *bulk* en ensamblajes de matrices aleatorias  
140 p  
2016

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>8</b>
<b>2. Introducción a la teoría de valores extremos y estadísticos de orden</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Teoría de valores extremos y estadísticos de orden para variables aleatorias <i>i.i.d.</i>	14
2.2.1. Distribuciones de Gumbel, de Fréchet y de Weibull . . . . .	14
2.2.2. Caso de la variable mínimo y el $k$ -ésimo estadístico de orden . . . . .	17
<b>3. Introducción a la teoría de matrices aleatorias</b>	<b>20</b>
3.1. Introducción . . . . .	20
3.2. Definiciones . . . . .	20
3.3. Ensamblés gaussianos . . . . .	21
3.4. Ensamble de Wishart . . . . .	25
3.5. Ensamble de Jacobi . . . . .	26
3.6. Método del fluido de Coulomb . . . . .	28
3.6.1. Introducción . . . . .	28
3.6.2. El método . . . . .	29
<b>4. Un enfoque unificado para grandes desviaciones de los valores propios extremos y del <i>bulk</i> en los ensambles de Wishart y de Jacobi</b>	<b>39</b>
4.1. Definiciones . . . . .	39
4.1.1. Método del fluido de Coulomb . . . . .	40
4.2. Ensamble de Wishart . . . . .	42
4.2.1. Ecuaciones del punto silla . . . . .	42
4.2.2. Análisis de las raíces de $P_3(z)$ . . . . .	46
4.2.3. Expresión exacta de $c_*(x)$ . . . . .	50
4.2.4. Distribución deformada MP . . . . .	52
4.2.5. Expresión para $c(\alpha, x, \omega)$ . . . . .	53
4.2.6. Evaluando la acción y la función tasa en el punto silla . . . . .	58
4.2.7. La acción en función de integrales elípticas . . . . .	65
4.2.8. Simulaciones Montecarlo . . . . .	77
4.3. Ensamble de Jacobi . . . . .	83

4.3.1.	Ecuaciones del punto silla . . . . .	83
4.3.2.	Análisis de las raíces de $Q_3(z)$ . . . . .	84
4.3.3.	Expresión exacta de $c_*(x)$ . . . . .	86
4.3.4.	Distribución deformada GMP . . . . .	88
4.3.5.	Expresión para $c(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega)$ . . . . .	89
4.3.6.	Evaluando la acción y la función tasa en el punto silla . . . . .	92
4.3.7.	La acción en función de integrales elípticas . . . . .	95
4.3.8.	Simulaciones Montecarlo . . . . .	106
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>109</b>
<b>A.</b>	<b>Conceptos de álgebra lineal</b>	<b>116</b>
<b>B.</b>	<b>Función delta de Dirac</b>	<b>117</b>
<b>C.</b>	<b>Cálculo de variaciones</b>	<b>121</b>
<b>D.</b>	<b>Integración funcional</b>	<b>125</b>
<b>E.</b>	<b>Método del punto silla</b>	<b>127</b>
<b>F.</b>	<b>Cadenas de Markov</b>	<b>129</b>
<b>G.</b>	<b>Métodos Monte Carlo: Algoritmo de Metropolis</b>	<b>131</b>
G.1.	Introducción . . . . .	131
G.2.	Algoritmo de Metropolis . . . . .	132
<b>H.</b>	<b>Integrales elípticas</b>	<b>138</b>
H.1.	Funciones elípticas de Jacobi . . . . .	139

*Dedicada a la memoria de mi madre Marisol  
(1962-2015)*

# Agradecimientos

Quiero agradecer a la UNAM por la educación brindada, a mi asesor el Dr. Isaac Pérez Castillo por su paciencia y guiarme por el camino de la investigación, a los miembros del jurado por sus aportaciones realizadas a esta tesis, a mis grandes amigos Guillermo Wong, Omar Vázquez y Candelaria Hidalgo por ayudarme en los momentos más difíciles y guiarme con su sabiduría. Gracias a Uris, Jazmin, Diana, Armando y Braulio por el apoyo brindado en la realización de esta tesis. Quiero agradecer particularmente a la Dra. Patricia Pellicer, que es la mejor profesora que he tenido durante mi vida de estudios, y al Dr. Roberto Pichardo por su apoyo durante la licenciatura y por su amistad. Finalmente agradezco a la M. en E. Leticia Gracia por ayudarme en la realización de mi servicio social. Muchas gracias a todos ustedes.

# Notación y símbolos

- Si  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  denota un vector de tamaño  $n$  y  $f$  es una función vectorial integrable, entonces denotaremos por  $\int d\boldsymbol{\lambda} f(\boldsymbol{\lambda})$  a su integral múltiple respecto a cada entrada de  $\boldsymbol{\lambda}$ , es decir:

$$\int d\boldsymbol{\lambda} f(\boldsymbol{\lambda}) = \int d\lambda_1 \cdots \int d\lambda_n f(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

- Si  $f$  y  $h$  son funciones analíticas que dependen de  $t$ , entonces  $f(t) \sim h(t)$  cuando  $t \rightarrow t_0$ , para algún  $t_0 \in \mathbb{R}$  ( $t_0$  puede ser  $\infty$ ), quiere decir que el comportamiento asintótico de  $f(t)$  cuando  $t \rightarrow t_0$  es igual a  $h(t)$ , es decir,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{h(t)} = 1$ .
- Si  $a$  y  $b \in \mathbb{R}$ , entonces  $a \approx b$  quiere decir que  $a$  es aproximadamente igual a  $b$ , es decir, que existe un  $\varepsilon > 0$  muy pequeño tal que  $|a - b| < \varepsilon$ .
- $\mathcal{M}_{N \times M}(K)$  denotará al conjunto de matrices cuyas entradas son elementos del conjunto  $K$ . En este trabajo  $K = \mathbb{R}$ ,  $K = \mathbb{C}$  y  $K = \mathbb{H}$ , representa el conjunto de números reales, complejos y cuaterniónicos<sup>1</sup>, respectivamente.
- Si  $\mathbf{X}$  es una matriz de tamaño  $N \times M$  denotaremos por  $(\mathbf{X})_{ij}$  a su elemento en la  $i$ -ésima fila y en la  $j$ -ésima columna.
- $\mathbf{X}^T$  denotará la matriz transpuesta de la matriz  $\mathbf{X}$ .
- $\mathbf{X}^\dagger$  denotará a la matriz transpuesta conjugada (también conocida como la matriz adjunta) de la matriz  $\mathbf{X}$ , es decir,  $(\mathbf{X}^\dagger)_{ij} = \overline{(\mathbf{X})_{ji}}$ , donde  $\bar{z}$  denota el conjugado del número complejo  $z$ .
- $\text{Tr}(\mathbf{X})$  denotará la traza de la matriz  $\mathbf{X}$ .
- $\det(\mathbf{X})$  denotará al determinante de la matriz  $\mathbf{X}$ .

---

<sup>1</sup>En este trabajo no nos ocuparemos en algún caso particular con números cuaterniónicos, por lo cual no es necesario decir como están definidos. Sin embargo, puede ver [1] para obtener una definición y ejemplos con este conjunto de números.

# Capítulo 1

## Introducción

Uno de los conceptos más importantes en estadística es lo que los físicos llaman *universalidad*. En palabras del matemático Terence Tao: *la universalidad es un misterio intrigante que ocasiona que ciertas distribuciones de probabilidad emerjan en sistemas complejos, casi sin tomar en cuenta los mecanismos subyacentes que los gobiernan* [3]. En matemáticas la *universalidad* es el equivalente a las leyes y teoremas usados para caracterizar, en nuestro caso particular, ciertas distribuciones de probabilidad, como por ejemplo el teorema del límite central, la ley de los grandes números, etc. Para poder entender mejor el concepto de *universalidad* consideremos los siguientes ejemplos.

Supongamos que tenemos un conjunto de variables aleatorias  $\mathcal{X} = \{X_i : i \in \mathbb{N}\}$  independientes e idénticamente distribuidas (*i.i.d.*), que provienen de la misma densidad de probabilidad  $p_X(x)$  con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  finitas. Si estudiamos la densidad de probabilidad de la variable  $\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ , denotada por  $p_{\bar{X}_N}(x)$ , por el *teorema del límite central* tendremos que [4]:

$$p_{\bar{X}_N}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{N}}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} \right)^2}, \quad (1.1)$$

es decir, para  $N$  grande la variable  $\bar{X}_N$  se aproximará a una variable gaussiana con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2/N$ .

Consideremos ahora el conjunto  $\{X_1, \dots, X_N\}$  correspondiente a las primeras  $N$  variables aleatorias de  $\mathcal{X}$ , y definamos sus estadísticos de orden [4, 5, 6, 7] como los valores ordenados:

$$X_{(1)}^N \geq \dots \geq X_{(N)}^N,$$

donde  $X_{(1)}^N = \max\{X_1, \dots, X_N\}$  y  $X_{(i)}^N = \max(\{X_1, \dots, X_N\} \setminus \{X_{(1)}^N, \dots, X_{(i-1)}^N\})$ , para  $i = 2, \dots, N$ . De esta manera la variable  $X_{(i)}^N$  es el  $i$ -ésimo máximo del conjunto  $\{X_1, \dots, X_N\}$ , particularmente  $X_{(N)}^N$  es el mínimo de ellas.

Estamos interesados en estudiar la función de distribución acumulada del  $k$ -ésimo estadístico de orden del conjunto  $\{X_1, \dots, X_N\}$ , denotada por  $P_{X_{(k)}^N}(x) = \text{Prob}[X_{(k)}^N \leq x]$ ,

cuando  $N \rightarrow \infty$ . En particular para  $k = 1$ , debido al teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko, tenemos que [5, 6, 7, 8]:

$$\lim_{x, N \rightarrow \infty} P_{X_{(1)}^N}(x) = G(z), \quad (1.2)$$

con  $G$  la distribución acumulada de Gumbel, de Fréchet o de Weibull, dependiendo de la forma de  $p_X(x)$ , y donde  $z = \frac{x - a_N}{b_N}$ ,  $a_N, b_N \in \mathbb{R}$  con  $b_N > 0$ . Estos coeficientes se determinan de acuerdo a la forma de  $p_X(x)$ .

Como podemos observar en estos dos casos, sin importar cual sea la función de densidad de las variables aleatorias  $X_i$ , las variables aleatorias  $\bar{X}_N$  y  $X_{(1)}^N$  se aproximarán a una variable gaussiana y a una variable de Gumbel, de Fréchet o de Weibull (véase capítulo 2), respectivamente, cuando  $N$  sea grande. Notemos que en estos dos ejemplos el concepto de *universalidad* se verifica de manera sencilla para variables *i.i.d.*

A lo largo de esta tesis caracterizaremos la *universalidad* a través de funciones tasa, funciones importantes que aparecen en la teoría de grandes desviaciones [9, 10]. Esta teoría se ocupa de estudiar las desviaciones atípicas de una variable aleatoria  $S_N$  (que depende de  $N$ ) lejos de su valor esperado  $\langle S_N \rangle$ . Las estimaciones que realiza la teoría de grandes desviaciones son expresadas usualmente de la siguiente forma

$$P_{S_N}(x) = \text{Prob}[S_N \leq x] \sim \begin{cases} e^{-w_N^- \Psi^-(x)}, & x < \langle S_N \rangle \\ 1 - e^{-w_N^+ \Psi^+(x)}, & x > \langle S_N \rangle \end{cases}, \quad (1.3)$$

para  $N$  muy grande [9, 10, 11], donde las funciones tasa  $\Psi^\pm(x)$ , izquierda (signo de menos) y derecha (signo de más) controlan la probabilidad (exponencialmente pequeña) de que la variable  $S_N$  tome valores anormalmente más pequeños o más grandes que  $\langle S_N \rangle$ , respectivamente. El comportamiento asintótico de  $P_{S_N}(x)$  viene dado por

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{\ln P_{S_N}(x)}{w_N^-} &= \Psi^-(x), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{\ln(1 - P_{S_N}(x))}{w_N^+} &= \Psi^+(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Nótese que las velocidades  $w_N^\pm$  deberán ser constantes proporcionales a  $N$  para obtener funciones tasa  $\Psi^\pm(x)$  no triviales. Como un ejemplo de este formalismo,  $S_N$  podría tomarse igual a  $\bar{X}_N$ .

Realicemos un ejemplo particular para obtener las funciones tasa  $\Psi^\pm(x)$  de la variable  $X_{(1)}^N$ , suponiendo que la función de densidad de las variables en  $\mathcal{X}$  es  $p_X(x) = \mu e^{-\mu x}$  para  $x \geq 0$ , es decir, una función de densidad exponencial con media  $1/\mu$  (Los resultados que utilizaremos a continuación aparecen explicados en [9], de manera que en lo subsecuente nos limitaremos a mencionarlos).

Dada la forma de  $p_X(x)$  tendremos que:

$$P_{X_{(1)}^N}(x) = e^{N \ln(1 - e^{-\mu x})}, \quad (1.5)$$

para  $x \geq 0$ .

Haciendo una expansión en series de Taylor de  $\ln(1 - e^{-\mu x})$ , tenemos que  $\ln(1 - e^{-\mu x}) \sim -e^{-\mu x}$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Entonces uno obtiene que:

$$P_{X_{(1)}^N}(x) \approx e^{-Ne^{-\mu x}} = e^{-e^{-(\mu x - \ln N)}} = G(z), \quad (1.6)$$

para  $N$  grande, donde  $z = \mu x - \ln N$  y  $G(z) = e^{-e^{-z}}$  es la distribución acumulada de Gumbel. Esto implica que  $a_N = \frac{\ln N}{\mu}$  y  $b_N = \frac{1}{\mu}$ . De esta manera al relacionar las ecuaciones (1.3) y (1.6) podemos escribir:

$$P_{X_{(1)}^N}(x) = \text{Prob}[X_{(1)}^N \leq x] \approx \begin{cases} e^{-N\Psi(x)}, & x < \langle X_{(1)}^N \rangle \\ 1 - e^{-N\Psi(x)}, & x > \langle X_{(1)}^N \rangle \end{cases}, \quad (1.7)$$

donde  $\langle X_{(1)}^N \rangle$  es el valor esperado de  $X_{(1)}^N$ <sup>1</sup>, y las funciones tasa y las velocidades son:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\equiv \Psi^\pm(x) = e^{-\mu x}, \\ w_N &\equiv w_N^\pm = N. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Como podemos observar en este ejemplo, las funciones tasa a la izquierda y a la derecha y sus respectivas velocidades coinciden, pero esto no siempre sucede (para ejemplos concretos vea [9]). Si prestamos atención a los ejemplos anteriores podremos observar que las distribuciones y funciones tasa universales de estos ejemplos surgirán cuando, entre otras cosas, se pida que el conjunto  $\mathcal{X}$  esté representado por variables aleatorias *i.i.d.* Pero ¿qué sucederá si el conjunto  $\mathcal{X}$  está compuesto por variables aleatorias correlacionadas? En el caso de que las variables aleatorias estén *débilmente correlacionadas*, los dos ejemplos vistos con anterioridad, ecuaciones (1.1) y (1.2), exhibirán las mismas distribuciones universales que surgieron para variables aleatorias independientes [5, 8]. Entonces la pregunta es: ¿qué pasará con la distribución y las funciones tasa de la variable  $\bar{X}_N$  y de los estadísticos de orden del conjunto  $\{X_1, \dots, X_N\}$ , para  $N$  grande, cuando las variables aleatorias  $X_i$  estén fuertemente correlacionadas?, en particular ¿cómo serán las funciones tasa de  $X_{(N)}^N$  y  $X_{(1)}^N$ ?, ¿que *universalidad* presentarán estas?. En el caso particular de  $X_{(1)}^N$  cuando las variables aleatorias

---

<sup>1</sup>Para ver una aproximación de este valor para  $N$  finito vea [9].

$X_i$  son los valores propios de una matriz aleatoria, para  $i = 1, \dots, N$  (estos valores propios están fuertemente correlacionados), la última pregunta tiene como respuesta [12]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{X_{(1)}^N} \left( (x - \sqrt{2N})(\sqrt{2})N^{1/6} \right) = TW(x), \quad (1.9)$$

para  $x \in \mathbb{R}$ . En la ecuación anterior,  $TW$  es la afamada distribución *universal* de Tracy-Widom. Esta distribución, que representa un nuevo paradigma de *universalidad*, aparece en diversos sistemas como en comunicaciones inalámbricas, en el análisis de mercados financieros y en la distribución de los valores propios de una matriz aleatoria [3].

En este trabajo usando la teoría de matrices aleatorias, RMT (*random matrix theory*, por sus siglas en inglés), al proporcionar un laboratorio matemático ideal para el estudio de variables aleatorias fuertemente correlacionadas, respondemos algunas de las preguntas anteriormente planteadas para el caso particular cuando las variables aleatorias son los valores propios ordenados de una matriz aleatoria. Desde un punto de vista matemático, los estadísticos de orden han sido estudiados de manera muy extensa para variables independientes e idénticamente distribuidas (*i.i.d.*), pero no mucho para variables fuertemente correlacionadas. Debido a que RMT es muy útil en el análisis de datos reales, ha habido un incremento en el estudio de varias propiedades estadísticas relacionadas con los ensambles de Wishart y de Jacobi, como por ejemplo, las grandes desviaciones de estadísticos de valores extremos usando el método del fluido de Coulomb (vea de [13] a [31]). De manera particular, en [13] usando el método del fluido de Coulomb, los autores calculan analíticamente, para el espectro de matrices grandes de tamaño  $N \times N$  del ensamble de Wishart, la probabilidad de que el número de valores propios sea mayor que un cierto número fijo  $\zeta$ , encontrando que esta probabilidad es igual a  $\exp[-\beta N^2 \Psi_\zeta(\kappa)]$ , donde  $\beta$  es el índice de Dyson,  $\Psi_\zeta(\kappa)$  es la función tasa y  $\kappa$  denota la fracción de valores propios a la derecha de  $\zeta$ .

El principal objetivo de este trabajo es complementar lo realizado en [13, 19, 29, 32, 33], siguiendo la línea de investigación iniciada en [34, 35] donde los autores calculan funciones tasa para el espectro de matrices para los ensambles gaussianos usando el método del gas de Coulomb. En esta tesis usando este método capturamos en una única función tasa propiedades estadísticas de los valores propios en el *edge* y en el *bulk*, incluyendo ambas funciones tasa izquierda y derecha para el valor propio más pequeño y para el valor propio más grande de matrices grandes en los ensambles de Wishart y de Jacobi. Analizando el estadístico de la variable aleatoria SIN (*shifted index number*) que cuenta el número de valores propios a la izquierda de una barrera infinita de energía, podemos derivar la función tasa  $\Psi(c, x)$ , que depende de dos variables: la fracción  $c$  de valores propios a la izquierda de la barrera infinita de energía situada en la posición  $x \in \mathbb{R}$ . Para valores fijos de  $c$ ,  $\Psi(c, x)$  nos da las grandes desviaciones de los estadísticos de orden de los valores propios. En particular, en los límites  $c \rightarrow 0$  o  $c \rightarrow 1$ , es posible extraer las desviaciones izquierda y derecha del valor propio más grande y del valor propio más pequeño, respectivamente. De manera similar, para un valor fijo de  $x$  la función tasa nos provee las grandes desviaciones del SIN. Todos

nuestros resultados analíticos son comparados con simulaciones Monte Carlo, obteniendo una concordancia excelente.

Las principales diferencias de nuestro trabajo con [13] no serán tan sólo la consideración de matrices de Wishart rectangulares, sino también el uso de la transformada de Hilbert-Stieltjes para obtener un resolvente expresado en función de un polinomio cúbico cuyas raíces nos servirán para construir la densidad espectral deformada que solucionará las ecuaciones del punto silla. Además, seremos capaces de escribir la función tasa a través de integrales elípticas, lo cual facilitará su evaluación numérica. Otra diferencia fundamental con [13] es la consideración del ensamble de Jacobi.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera; en los capítulos 2 y 3 nos ocuparemos de aclarar brevemente las teorías principales que son utilizadas en esta tesis, poniendo particular atención en la sección 3.6 donde explicamos el método central que utilizaremos en el desarrollo de este trabajo. Finalmente en el capítulo 4, que es la médula espinal de esta tesis, expondremos nuestros resultados analíticos y su comparación con simulaciones Monte Carlo. Queremos aclarar que a lo largo de esta tesis no presentaremos ninguna prueba rigurosa de los resultados ni de las herramientas que utilizaremos para llegar a ellos, únicamente daremos referencias al lector donde podrá encontrar tal rigor.

En esta tesis utilizamos el software *Mathematica*<sup>®</sup> para realizar algunas de las derivaciones que surgen en este trabajo. El *notebook* donde se encuentran estas derivaciones puede ser solicitado al correo [adolfo\\_xo@ciencias.unam.mx](mailto:adolfo_xo@ciencias.unam.mx)

# Capítulo 2

## Introducción a la teoría de valores extremos y estadísticos de orden

En este capítulo presentaremos de manera introductoria algunos de los resultados obtenidos en la teoría de valores extremos complementando lo ya dicho en el capítulo 1. No buscaremos dar una prueba rigurosa de los resultados que mostraremos a continuación, para ello se dejarán referencias donde el lector puede encontrar con más detalle las pruebas de estos resultados. Nuestro objetivo es establecer un vínculo entre los resultados de la teoría de valores extremos y estadísticos de orden, para variables *i.i.d.*, con las funciones tasa usadas en la teoría de grandes desviaciones (véase [9, 36, 37] para un estudio más formal sobre este vínculo). Las siguientes definiciones han sido tomadas de [4, 5, 6, 7].

### 2.1. Introducción

La teoría de valores extremos, mejor conocida como EVS (*extreme value statistics*, por sus siglas en inglés), es una rama de la estadística que estudia las distribuciones extremas de un conjunto de variables aleatorias. Esta teoría encuentra aplicaciones en diversas áreas tales como finanzas, teoría de matrices aleatorias y física estadística, solo por mencionar algunas [8].

Gracias a las contribuciones hechas por Gumbel, Tippet, Fréchet y Gnedenko, se tiene una teoría exacta de valores extremos para variables aleatorias *i.i.d.*, que también puede extenderse al caso de variables aleatorias débilmente correlacionadas [5, 8]. Sin embargo, diversos sistemas de interés están formados por variables aleatorias fuertemente correlacionadas y, desafortunadamente, aún no existe una teoría sólida (aún para el valor de la media) para este tipo de variables. En tal caso, una buena herramienta para el estudio de los valores extremos de variables fuertemente correlacionadas es la teoría de matrices aleatorias (véase el capítulo 4). En la siguiente sección nos enfocaremos en el estudio de los estadísticos de orden de un conjunto de variables aleatorias *i.i.d.* Comenzaremos tratando el caso particular del estadístico de orden más grande, para posteriormente extender nuestros resultados al

caso general del  $k$ -ésimo estadístico de orden.

## 2.2. Teoría de valores extremos y estadísticos de orden para variables aleatorias *i.i.d.*

En el capítulo 1 dimos la definición para los estadísticos de orden de un conjunto de variables aleatorias *i.i.d.* Sin embargo, puede verse que esta definición se mantendrá para cualesquiera variables aleatorias continuas que tomen valores en un subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Entonces, demos aquí nuevamente la definición de los estadísticos de orden de un conjunto de variables aleatorias continuas.

**Definición 2.1** Sea  $\{X_1, \dots, X_N\}$  un conjunto de variables aleatorias continuas. Definimos a sus estadísticos de orden como los valores ordenados:

$$X_{(1)}^N \geq \dots \geq X_{(N)}^N,$$

donde  $X_{(1)}^N = \max\{X_1, \dots, X_N\}$  y  $X_{(i)}^N = \max(\{X_1, \dots, X_N\} \setminus \{X_{(1)}^N, \dots, X_{(i-1)}^N\})$  para  $i = 2, \dots, N$ . De esta manera, la variable  $X_{(i)}^N$  es el  $i$ -ésimo máximo de  $\{X_1, \dots, X_N\}$ , particularmente,  $X_{(N)}^N$  es el mínimo del conjunto.

Ahora, recordemos al conjunto  $\mathcal{X} = \{X_i : i \in \mathbb{N}\}$  formado por variables aleatorias *i.i.d.* con misma densidad de probabilidad  $p_X(x)$ , distribución de probabilidad acumulada  $P_X(x)$ , media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  finitas, y a los estadísticos de orden del conjunto  $\{X_1, \dots, X_N\}$ , las primeras  $N$  variables de  $\mathcal{X}$ , utilizados en el capítulo 1. Como vimos anteriormente (vea ecuación (1.2)), la distribución acumulada  $P_{X_{(1)}^N}(x)$  converge a las distribuciones universales de Gumbel, de Fréchet o de Weibull cuando  $N, x \rightarrow \infty$ , es decir,

$$\lim_{x, N \rightarrow \infty} P_{X_{(1)}^N}(x) = G(z), \quad (2.1)$$

con  $z = \frac{x - a_N}{b_N}$ . Ahora, ¿cómo es la forma de estas distribuciones universales y que debe cumplir la función de densidad  $p_X(x)$  para saber que distribución  $G$  obtendremos?, ¿cómo determinamos los coeficientes  $a_N$  y  $b_N$ ? A continuación responderemos estas preguntas.

### 2.2.1. Distribuciones de Gumbel, de Fréchet y de Weibull

Denotemos por  $x^* = \sup\{x : P_X(x) < 1\}$ , la cota superior del dominio de la densidad de probabilidad  $p_X(x)$ , y  $P_X^{-1}(x)$  a la función inversa de  $P_X(x)$  (si puede ser expresada de manera explícita).

## Distribución de Gumbel

Esta distribución se obtiene si  $x^*$  es finito o infinito y si la densidad  $p_X(x)$  decrece más rápido que cualquier potencia (como por ejemplo las distribuciones exponencial y gaussiana). En este caso la distribución límite es conocida como la distribución de Gumbel:

$$G(z) = e^{-e^{-z}}, \quad (2.2)$$

con  $a_N = P_X^{-1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)$  y  $b_N = P_X^{-1}\left(1 - \frac{1}{Ne} - a_N\right)$ .

Para un ejemplo particular cuando la función de densidad  $p_X(x)$  es la densidad exponencial, vea lo realizado en el capítulo 1 y las ecuaciones (1.6), (1.7) y (1.8).

## Distribución de Fréchet

Esta distribución se obtiene cuando  $x^*$  es infinito y  $p_X(x)$  decrece más rápido que cualquier potencia, es decir,  $p_X(x) \sim x^{-\alpha-1}$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , con  $\alpha > 0$ .

Así, la distribución límite es la distribución de Fréchet:

$$G(z) = \begin{cases} e^{-z^{-\alpha}} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}. \quad (2.3)$$

En este caso  $a_N = 0$  y  $b_N = P_X^{-1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)$ .

**Ejemplo 2.1.1** *La distribución de Cauchy viene dada por*

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

para  $x \in \mathbb{R}$ .

Tenemos que:

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(y)dy = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}.$$

Puede demostrarse que [4, 6]:

$$P_{X_{(1)}^N}(x) = \text{Prob}[X_{(1)}^N \leq x] = P(x)^N.$$

Por otra parte, haciendo una expansión en series de Taylor para  $\arctan(x)$ , cuando  $x \rightarrow \infty$ , obtenemos que  $\arctan(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$ , así que:

$$P_{X_{(1)}^N}(x) \sim \left(1 - \frac{1}{\pi x}\right)^N.$$

Ahora, sabemos que  $\left(1 - \frac{1}{\pi x}\right)^N \sim e^{-\frac{N}{\pi x}}$  [38], cuando  $N \rightarrow \infty$ , y por ende:

$$P_{X_{(1)}^N}(x) \sim e^{-\frac{N}{\pi x}} = e^{\left(-\frac{\pi x}{N}\right)^{-1}},$$

con  $b_N = \frac{N}{\pi}$  y  $\alpha = 1$ . Desafortunadamente para el caso  $\alpha = 1$  la media de una variable que se distribuye de acuerdo a la distribución de Fréchet es infinita [6, 7, 8], pero aún así podemos escribir la función tasa y la velocidad como:

$$\begin{aligned}\Psi^\pm(x) &= \frac{1}{\pi x}, \\ w_N^\pm &= N.\end{aligned}$$

## Distribución de Weibull

Esta distribución se obtiene cuando  $x^*$  es finito, por ejemplo  $p_X(x) = 0$  para  $x > 1$  y  $p_X(x) \sim (1 - x)^{\alpha-1}$ , cuando  $x \rightarrow 1^-$  ( $x$  tiende a 1 por la izquierda) y  $\alpha > 0$ . Entonces la distribución límite es la distribución de Weibull:

$$G(z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ e^{-|z|^\alpha} & z \leq 0 \end{cases}, \quad (2.4)$$

con  $a_N = x^*$  y  $b_N = x^* - P_X^{-1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)$ .

**Ejemplo 2.1.2** La distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$  está dada por [5, 4]:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Entonces  $P_X(x) = \int_0^x p_X(y)dy = x$ . De esta manera tenemos que:

$$P_{X_{(1)}^N}(x) = x^N = e^{N \ln(x)} \sim e^{-N(1-x)},$$

usando que  $\ln(x) \sim (x - 1)$  cuando  $x \rightarrow 1$  [38]. Así que  $\alpha = 1$ ,  $a_N = 1$  y  $b_N = \frac{1}{N}$ . Entonces para  $x \rightarrow 1$  y  $N$  muy grande, la función de densidad de  $X_{(1)}^N$  es:

$$p_{X_{(1)}^N} \sim N e^{-N(1-x)},$$

por lo que la media de  $X_{(1)}^N$  será:

$$\langle X_{(1)}^N \rangle \approx \int_0^1 p_{X_{(1)}^N} dx = 1 - e^{-N}.$$

Usando las ecuaciones (1.4) y (1.3) podemos escribir:

$$P_{X_{(1)}^N}(x) \sim \begin{cases} e^{-N\Psi(x)}, & x < \langle X_{(1)}^N \rangle \\ 1 - e^{-N\Psi(x)}, & x > \langle X_{(1)}^N \rangle \end{cases},$$

y

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\equiv \Psi^\pm(x) = 1 - x, \\ w_N &\equiv w_N^\pm = N. \end{aligned}$$

### Teorema de Fisher-Tippet-Gnedenko

El teorema de Fisher-Tippet-Gnedenko permite unificar estas tres distribuciones universales agregando un parámetro  $\tau \in \mathbb{R}$  de la siguiente manera:

$$G(z) = e^{-(1+\tau z)^{-\frac{1}{\tau}}}, \quad 1 + \tau z > 0, \quad (2.5)$$

con

- $\tau \rightarrow 0$ , distribución de Gumbel.
- $\tau > 0$ , distribución de Fréchet con  $\alpha = 1/\tau$ .
- $\tau < 0$ , distribución de Weibull con  $\alpha = -1/\tau$ .

A continuación analizaremos el comportamiento asintótico de la distribución acumulada de la variable  $X_{(N)}^N$ , es decir, del mínimo de las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_N$ . Posteriormente daremos una generalización para la variable  $X_{(k)}$ , con  $k = 1, \dots, N$ .

### 2.2.2. Caso de la variable mínimo y el $k$ -ésimo estadístico de orden

Empecemos con una observación: el evento  $(X_{(N)}^N > x)$  es igual al evento

$$(X_1 > x, \dots, X_N > x),$$

es decir, si el mínimo de las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_N$  es mayor que  $x$ , entonces todas las variables aleatorias también deben ser mayores que  $x$ . Esto implica que:

$$\begin{aligned} P_{X_{(N)}^N}(x) &= 1 - \text{Prob}[X_{(N)}^N > x] \\ &= 1 - \text{Prob}[X_1 > x] \cdots \text{Prob}[X_N > x] \\ &= 1 - (1 - P_X(x))^N. \end{aligned}$$

Ahora realicemos el siguiente caso particular.

**Ejemplo 2.1.3** *Analicemos el comportamiento asintótico de la distribución  $P_{X_{(N)}^N}$  cuando la función de densidad  $p_X(x)$  es la densidad exponencial con media  $1/\mu$ , es decir,  $p_X(x) = \mu e^{-\mu x}$  para  $x \geq 0$ . Sabemos que  $P_X(x) = 1 - e^{-\mu x}$  para  $x \geq 0$ . Tomando esto en consideración y lo realizado anteriormente, tendremos que:*

$$P_{X_{(N)}^N}(x) = 1 - e^{-N\mu x}.$$

Cuando  $x \rightarrow \infty$  tenemos que  $1 - e^{-N\mu x} \sim (1 - e^{-\mu x})^N = e^{N \ln(1 - e^{-\mu x})}$ . Por otro lado,  $\ln(1 - e^{-\mu x}) \sim -e^{-\mu x}$  cuando  $x \rightarrow \infty$  [9], por lo que:

$$P_{X_{(N)}^N}(x) \sim e^{-N\Psi(x)},$$

para  $x \rightarrow \infty$  y  $N$  grande, y donde:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\equiv \Psi^\pm(x) = e^{-\mu x}, \\ w_N &\equiv w_N^\pm = N, \end{aligned}$$

tal como en el ejemplo visto en el capítulo 1 para el caso de la variable máximo (vea ecuaciones (1.6), (1.7) y (1.8)).

Después de haber hecho este caso particular tratemos el caso general para el  $k$ -ésimo estadístico de orden. Sabemos que su densidad de probabilidad está dada por:

$$p_{X_{(k)}}(x) = \frac{N!}{(N-k)!(k-1)!} P_X(x)^{N-k} (1 - P_X(x))^{k-1} p_X(x), \quad (2.6)$$

para  $k = 1, \dots, N$ . Se puede mostrar que la distribución acumulada de  $X_{(k)}^N$  converge a [5, 6, 7]:

$$\lim_{N, x \rightarrow \infty} P_{X_{(k)}^N}(x) = \text{Prob}[X_{(k)}^N \leq x] = G(z) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\ln G(z))^j}{j!} = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_{-\ln G(z)}^{\infty} e^{-t} t^{k-1} dt, \quad (2.7)$$

casi seguramente, donde  $G$  es la función de distribución acumulada de Gumbel, de Fréchet o de Weibull, dependiendo de la forma de  $p_X(x)$ ,  $\Gamma(k)$  es la función gamma,  $z = \frac{x-a_N}{b_N}$  y donde  $a_N, b_N \in \mathbb{R}$ , con  $b_N > 0$ , son coeficientes que se determinan de acuerdo a la forma de  $p_X$ .

Desafortunadamente cuando  $k \notin \{1, N\}$ , aún conociendo la distribución límite de  $P_{X_{(k)}^N}(x)$ , resulta difícil expresar esta distribución acumulada en la forma de la ecuación (1.3), y aún si tratamos de calcular directamente los límites que aparecen en la ecuación (1.4) para obtener sus funciones tasa, nos enfrentaremos a un problema similarmente complicado, ya que muchas veces se deben buscar velocidades adecuadas,  $w_N^\pm$ , para garantizar la existencia de dichos límites. Sin embargo, en el capítulo 4 logramos calcular dichas funciones tasa para el  $k$ -ésimo estadístico de orden de un conjunto de variables aleatorias fuertemente correlacionadas, donde este estadístico de orden representa al  $k$ -ésimo valor propio ordenado de una matriz aleatoria.

# Capítulo 3

## Introducción a la teoría de matrices aleatorias

### 3.1. Introducción

La teoría de matrices aleatorias, RMT (*Random matrix theory*, por sus siglas en inglés), es un área de investigación muy activa de las matemáticas con bastantes aportaciones a la física teórica, teoría de números, estadística, matemáticas financieras y biología, sólo por mencionar algunas. Su principal objetivo, es analizar las diversas propiedades estadísticas de ensambles de matrices aleatorias.

Los orígenes de RMT se remontan al trabajo de Wishart en los años 20's con matrices de correlación [39]. Sin embargo, el verdadero auge de RMT comienza con los trabajos de Wigner sobre física nuclear [40, 41, 42, 43]. Wigner deseaba describir las propiedades generales de los niveles de energía de núcleos pesados. Dichos niveles de energía son representados por los valores propios de una matriz hermitiana  $\mathbf{H}$  de dimensión infinita, llamada hamiltoniano, que resulta difícil de escribir para tales sistemas. Entonces Wigner propuso reemplazar a  $\mathbf{H}$  por una matriz aleatoria  $\widehat{\mathbf{H}}$ , muy grande, que debería tener propiedades generales similares al hamiltoniano. De esta manera los niveles de energía podrían ser aproximados más fácilmente por los valores propios de  $\widehat{\mathbf{H}}$ . Posteriormente Dyson, en una serie de artículos [44], formalizó RMT al proponer tres clases de ensambles de matrices aleatorias que cumplieran ciertas simetrías de grupo.

La teoría de matrices aleatorias sigue desarrollándose en la actualidad tanto en matemáticas como en física. Para ver más resultados importantes sobre RMT consulte [45, 46, 47, 48].

En la siguiente sección definiremos algunos de los conceptos básicos de RMT que utilizaremos en este trabajo. Para más detalles puede consultarse [1, 48].

### 3.2. Definiciones

Para presentar estas definiciones hemos utilizado las siguientes referencias [1, 46, 48, 49].

**Definición 3.1 (Matriz aleatoria)** Una matriz aleatoria es una matriz  $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{N \times M}(K)$ , tal que  $(\mathbf{X})_{ij}$  es una variable aleatoria para cualesquiera  $i = 1, \dots, N$  y  $j = 1, \dots, M$ .

Para las siguientes tres definiciones supongamos que  $\mathbf{X}$  es una matriz de tamaño  $N \times N$ .

**Definición 3.2 (Espectro)** El conjunto  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  de valores propios de  $\mathbf{X}$ , es llamado el espectro de  $\mathbf{X}$ .

Nótese que si  $\mathbf{X}$  es una matriz aleatoria, entonces sus valores propios también serán variables aleatorias, y por tanto podemos estudiar los estadísticos de orden de  $\Lambda$  que denotaremos como  $\lambda_{(1)}^N \geq \dots \geq \lambda_{(N)}^N$  (véase definición 2.1). Con esta notación definamos lo siguiente.

**Definición 3.3 (Bulk)** Definimos el bulk del espectro  $\Lambda$  de  $\mathbf{X}$  como el conjunto de estadísticos de orden  $\{\lambda_{(i)}^N : i = 2, \dots, N - 1\}$ .

Nótese que el bulk de  $\Lambda$  es el espectro sin considerar el máximo ni el mínimo.

**Definición 3.4 (Edge)** Definimos el edge del espectro  $\Lambda$  de  $\mathbf{X}$  como el conjunto cuyos elementos son el máximo y el mínimo de  $\Lambda$ .

**Definición 3.5 (Densidad espectral)** Sean  $\mathbf{X}$  una matriz aleatoria de tamaño  $N \times N$ . Denotemos por  $p_\Lambda$  a la función de densidad conjunta de sus valores propios en  $\Lambda$ . Supongamos que estos valores propios toman valores en un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Definimos a la densidad espectral de  $\Lambda$  como:

$$\tau(x) = \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} p_\Lambda(\boldsymbol{\lambda}) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - \lambda_i) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - \lambda_i) \right\rangle_{p_\Lambda}, \quad (3.1)$$

para cualquier  $x \in A$ , donde  $\langle \dots \rangle_{p_\Lambda}$  denota el valor esperado respecto a  $p_\Lambda$ .

En las siguientes secciones presentaremos los ensambles gaussianos, también conocidos como los ensambles de Dyson, el ensamble de Wishart y el ensamble de Jacobi.

### 3.3. Ensamblés gaussianos

Los ensambles gaussianos son presentados como conjuntos donde sus elementos son matrices aleatorias hermitianas cuyas  $N(N + 1)/2$  entradas independientes vienen generadas por una distribución gaussiana. Además su función de densidad conjunta es invariante bajo la acción con un grupo matricial unitario. Estos ensambles se dividen en tres clases, dependiendo de si la invarianza bajo el grupo unitario de transformaciones es respecto a matrices ortogonales, unitarias y simplécticas, respectivamente. Esto a su vez implica que las entradas

de tales matrices aleatorias sean reales, complejas o cuaterniónicas, respectivamente. A lo largo de esta sección denotaremos por  $\mathcal{M}_\beta(N) \equiv \mathcal{M}_{N \times N}(K)$ , al conjunto de las matrices cuadradas de tamaño  $N$  cuyas entradas pertenecen a  $K$ , donde  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ , si  $\beta = 1, 2, 4$ , respectivamente. Para las siguientes definiciones hemos seguido [46, 48].

**Definición 3.6 (Ensamble GOE)** *Decimos que una matriz simétrica  $\mathbf{X}$  de tamaño  $N \times N$ , cuyas entradas son reales, pertenece al ensamble gaussiano ortogonal, GOE (Gaussian orthogonal ensemble, por sus siglas en inglés), si las entradas de su diagonal y de arriba de su diagonal son variables aleatorias independientes con funciones de densidad:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2/2}, \quad (3.2)$$

respectivamente, para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ . Una construcción equivalente de dicho ensamble es tomar matrices aleatorias  $\mathbf{Y}$  de tamaño  $N \times N$ , cuyas entradas se distribuyen de manera independiente de acuerdo a la distribución gaussiana estándar, media cero y varianza 1, y después formar  $\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T)$ .

Puede probarse que la función de densidad conjunta de las entradas  $(\mathbf{X})_{ij}$ , viene dada por:

$$p_1(\mathbf{X}') = \frac{1}{Z_1} e^{-1/2 \sum_{i,j=1}^N (\mathbf{X}')_{ij}^2}, \quad (3.3)$$

para cualquier  $\mathbf{X}' \in \mathcal{M}_1(N)$ , donde  $Z_1$  es una constante de normalización.

**Definición 3.7 (Ensamble GUE)** *Decimos que una matriz aleatoria hermitiana  $\mathbf{X}$  de tamaño  $N \times N$  pertenece al ensamble gaussiano unitario, GUE (Gaussian unitary ensemble, por sus siglas en inglés), si las entradas de su diagonal, que toman valores reales, y sus entradas por encima de su diagonal, que toman valores complejos, son variables aleatorias independientes cuyas funciones de densidad están dadas por:*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} \quad \text{y} \quad \frac{2}{\pi}e^{-2|z|^2},$$

respectivamente, para cualesquiera  $x \in \mathbb{R}$  y  $z \in \mathbb{C}$ , donde  $|\dots|$  denota el módulo complejo. Una construcción equivalente de este ensamble es construir la matriz aleatoria  $\mathbf{Y}$ , de tamaño  $N \times N$ , cuyas entradas  $(\mathbf{Y})_{ij} = u_{ij} + \hat{i}v_{ij}$  son variables aleatorias independientes, que toman valores en  $\mathbb{C}$ , con  $\hat{i} = \sqrt{-1}$  y donde  $u_{ij}$  y  $v_{ij}$ , se distribuyen de manera independiente de acuerdo a una distribución gaussiana con media 0 y varianza  $1/\sqrt{2}$ , para cualesquiera  $i, j = 1, \dots, N$ . Entonces la matriz  $\mathbf{X} = (\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^\dagger)/2$ , pertenece al ensamble GUE.

La función de densidad conjunta de todas las variables  $(X)_{ij}$  viene dada por:

$$p_2(\mathbf{X}') = \frac{1}{Z_2} e^{-\sum_{i,j=1}^N |(\mathbf{X}')_{ij}|^2}, \quad (3.4)$$

para cualquier  $\mathbf{X}' \in \mathcal{M}_2(N)$ , donde  $Z_2$  es una constante de normalización y  $|\dots|$  es el módulo complejo.

**Definición 3.8 (Ensamble GSE)** Decimos que una matriz aleatoria hermitiana  $\mathbf{X}$  de tamaño  $N \times N$ , con entradas en los números cuaterniónicos, pertenece al ensamble gaussiano simpléctico, GSE (Gaussian symplectic ensemble, por sus siglas en inglés), si las entradas de su diagonal, que toman valores reales, son variables aleatorias independientes que se distribuyen de acuerdo a:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2},$$

para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ , mientras que sus entradas por encima de la diagonal son de la forma  $(\mathbf{X})_{ij} = z_{ij} + w_{ij}k$ , con  $k$  una de las bases cuaterniónicas,  $z_{ij}$  y  $w_{ij}$  variables aleatorias con valores en  $\mathbb{C}$  y distribuyéndose de manera independiente de acuerdo a la función de densidad:

$$\frac{4}{\pi} e^{-4|z|^2},$$

para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ , y donde  $|\dots|$  denota el módulo complejo.

La función de densidad conjunta de todas las variables  $(X)_{ij}$  viene dada por:

$$p_4(\mathbf{X}') = \frac{1}{Z_4} e^{-2\sum_{i,j=1}^N |(\mathbf{X}')_{ij}|^2}, \quad (3.5)$$

para cualquier  $\mathbf{X}' \in \mathcal{M}_4(N)$ , donde  $Z_4$  es una constante de normalización y  $|\dots|$  denota el módulo complejo.

Para este ensamble no daremos la construcción equivalente ya que resulta más complicada que las anteriores además de que no la ocuparemos a lo largo de esta tesis. El lector puede consultar esta construcción en [48].

Puede demostrarse que las funciones de densidad conjunta de las variables  $(\mathbf{X})_{ij}$  de los ensambles anteriores, ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5), pueden escribirse de forma unificada como [46, 48]:

$$p_\beta(\mathbf{X}') = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\frac{\beta}{2} \text{Tr}(\mathbf{X}')^2}, \quad (3.6)$$

para cualquier  $\mathbf{X}' \in \mathcal{M}_\beta(N)$  y  $\beta = 1, 2, 4$ . Adicionalmente nótese que [48]:

$$p_\beta(\mathbf{X}') = p_\beta(\mathbf{U}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{U}) \quad (3.7)$$

para cualesquiera  $\mathbf{X}' \in \mathcal{M}_\beta(N)$  y  $\mathbf{U} \in \mathcal{U}_\beta$ , donde  $\mathcal{U}_\beta$  es el grupo ortogonal, unitario y simpléctico<sup>1</sup>, para  $\beta = 1, 2$  y  $4$ , respectivamente. Por esta razón los ensambles son clasificados de esta manera y se les conoce como ensambles invariantes. El índice  $\beta$  que hemos ocupado es conocido como el índice de Dyson.

La propiedad de invarianza de estos ensambles dada por la ecuación (3.7) facilita el cálculo de la función de densidad conjunta de valores propios, es decir, si  $\Lambda$  representa el espectro de la matriz aleatoria  $\mathbf{X}$  perteneciente a cualesquiera de los tres ensambles, entonces puede demostrarse que la función de densidad conjunta de los valores propios en  $\Lambda$  viene dada por [46, 48]:

$$p_\Lambda(\mathbf{y}) = \frac{1}{A_0} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N y_i^2} \prod_{i < j} |y_i - y_j|^\beta, \quad (3.8)$$

para cualquiera  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ , con  $A_0$  una constante de normalización y  $\beta = 1, 2, 4$ .

Ciertas propiedades estadísticas de los valores propios de dichos ensambles pueden derivarse utilizando su función de distribución conjunta. Por ejemplo, uno puede demostrar que en el límite  $N \rightarrow \infty$ , la densidad espectral (vease definición 3.5) rescalada adecuadamente tiende a la famosa distribución del semicírculo de Wigner [48]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \tau_N(\sqrt{N} \lambda) = \rho_{\text{sc}}(\lambda), \quad (3.9)$$

donde,

$$\rho_{\text{sc}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - \lambda^2}, \quad (3.10)$$

para cualquier  $\lambda \in [-2, 2]$ . En la figura 3.1, podemos observar la distribución del semicírculo de Wigner junto con un histograma de los valores propios obtenidos al diagonalizar ma-

---

<sup>1</sup>Si el lector desea una definición de estos grupos vea [50]

trices suficientemente grandes provenientes de GOE.

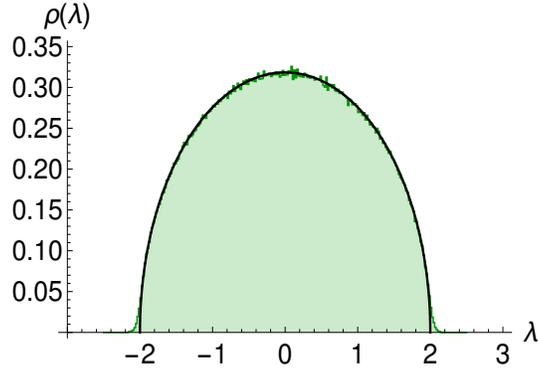


Figura 3.1: Distribución del semicírculo de Wigner. La curva negra corresponde a la expresión exacta de  $\rho_{sc}$  y el fondo verde es un histograma que corresponde a los valores propios obtenidos al diagonalizar  $10^4$  matrices de tamaño  $100 \times 100$  de GOE.

### 3.4. Ensamble de Wishart

En esta sección denotaremos por  $\mathcal{M}_\beta(M \times N) \equiv \mathcal{M}_{M \times N}(K)$ , donde, igual que en la sección anterior,  $\beta$  determina  $K$  para  $\beta = 1, 2$  y  $4$ .

**Definición 3.9 (Ensamble de Wishart)** *Sea  $\mathbf{X}$  una matriz aleatoria de tamaño  $M \times N$ , con  $M \geq N$ , cuyas entradas son variables aleatorias independientes, con valores en  $\mathbb{R}$  y en  $\mathbb{C}$ , si  $\beta = 1$  y  $2$ , y con funciones de densidad:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2}, \quad (3.11)$$

para cualesquiera  $x \in \mathbb{R}$  y  $z \in \mathbb{C}$ , respectivamente, y donde  $|\cdots|$  denota el módulo complejo.

Si  $\beta = 4$ , escribimos a  $(\mathbf{X})_{ij} = z_{ij} + w_{ij}k$  como una variable aleatoria que toma valores en los números cuaterniónicos, donde  $k$  es una de las bases cuaterniónicas, y con  $z_{ij}$  y  $w_{ij}$  variables aleatorias independientes que toman valores en  $\mathbb{C}$  y cuya función de densidad está dada por:

$$\frac{2}{\pi} e^{-2|z|^2},$$

para cualquier  $z \in \mathbb{C}$ .

Entonces la matriz  $\mathbf{W}(M, N) = \mathbf{X}^\dagger \mathbf{X}$ , de tamaño  $N \times N$ , pertenece al ensamble de Wishart, donde  $M$  y  $N$  indican que el tamaño de  $\mathbf{X}$  es  $M \times N$ .

Puede probarse que si  $\mathbf{W}(M, N)$  pertenece al ensamble de Wishart, la función de densidad conjunta de sus valores propios viene dada por [48]:

$$p_{\Lambda}(\mathbf{y}) = \frac{1}{A_0} e^{-\frac{\beta}{2} F(\mathbf{y})}, \quad (3.12)$$

para cualquier  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in [0, \infty)^N$ , donde  $A_0$  es una constante de normalización,

$$F(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N y_i - u \sum_{i=1}^N \ln(y_i) - \sum_{i \neq j} \ln |y_i - y_j|, \quad (3.13)$$

con  $u = \frac{2}{\beta}(l-1)$ ,  $l = (\beta/2)(M - N + 1)$  y  $\beta$  es el índice de Dyson con valores  $\beta = 1, 2$  y 4.

Marčenko y Pastur probaron el siguiente resultado para la densidad espectral  $\tau_N$  (véase definición 3.5) para el ensamble de Wishart [48]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \tau_N(N\lambda) = \rho_{\text{MP}}(\lambda), \quad (3.14)$$

donde

$$\rho_{\text{MP}}(\lambda) = \frac{\sqrt{(b_+(\alpha) - \lambda)(\lambda - b_-(\lambda))}}{2\pi\lambda}, \quad (3.15)$$

para cualquier  $\lambda \in [b_-(\alpha), b_+(\alpha)]$ , con  $b_{\pm}(\alpha) = (1 \pm \sqrt{1 + \alpha})^2$  y  $\alpha = \frac{M-N}{N}$ . La función  $\rho_{\text{MP}}$  es conocida como la distribución de Marčenko-Pastur (MP). En la figura 3.2, podemos observar la gráfica de la distribución MP junto con el histograma formado al diagonalizar matrices provenientes del ensamble de Wishart.

### 3.5. Ensamble de Jacobi

**Definición 3.10** *El ensamble de Jacobi se define de la siguiente manera. Consideremos dos matrices que provienen de los ensamble de Wishart,  $\mathbf{W}(M_1, N)$  y  $\mathbf{W}(M_2, N)$ , para  $M_1, M_2 \geq N \geq 1$ . Definimos al ensamble de Jacobi como las matrices de tamaño  $N \times N$  que se construyen de la forma siguiente:*

$$\mathbf{J}(N, M_1, M_2) = \mathbf{W}(M_1, N)(\mathbf{W}(M_1, N) + \mathbf{W}(M_2, N))^{-1}.$$

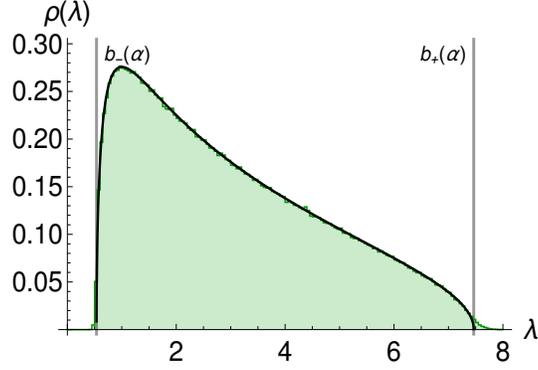


Figura 3.2: Distribución de Marčenko-Pastur. La curva negra corresponde a la expresión exacta de  $\rho_{\text{MP}}$  y el fondo verde es un histograma que corresponde a los valores propios obtenidos al diagonalizar  $10^4$  matrices de tamaño  $100 \times 100$  provenientes del ensamble de Wishart  $\mathbf{W}(300, 100)$ . Esto corresponde al caso  $\alpha = 2$ , para los cuales  $b_-(\alpha) = 0.535898$  y  $b_+(\alpha) = 7.4641$ .

Puede probarse que si  $\mathbf{J}(N, M_1, M_2)$  pertenece al ensamble de Jacobi, entonces la función de densidad conjunta de sus valores propios será [48, 49]:

$$p_{\Lambda}(\mathbf{y}) = \frac{1}{A_0} e^{-\frac{\beta}{2} F(\mathbf{y})}, \quad (3.16)$$

para cualquier  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in [0, 1]^N$ , donde  $A_0$  es una constante de normalización,

$$F(\mathbf{y}) = - \left( M_1 - N + 1 - \frac{2}{\beta} \right) \sum_{i=1}^N \ln(y_i) - \left( M_2 - N + 1 - \frac{2}{\beta} \right) \sum_{i=1}^N \ln(1 - y_i) - \sum_{i \neq j} \ln |\lambda_i - \lambda_j|, \quad (3.17)$$

y  $\beta = 1, 2$  y  $4$ , es el índice de Dyson.

Puede demostrarse el siguiente resultado para la densidad espectral del ensamble de Jacobi [48, 49]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tau_N(\lambda) = \rho_{\text{GMP}}(\lambda), \quad (3.18)$$

donde

$$\rho_{\text{GMP}}(\lambda) = \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2\pi} \frac{\sqrt{(b_+(\alpha_1, \alpha_2) - \lambda)(\lambda - b_-(\alpha_1, \alpha_2))}}{\lambda(1 - \lambda)}, \quad (3.19)$$

para cualquier  $\lambda \in [b_-(\alpha_1, \alpha_2), b_+(\alpha_1, \alpha_2)]$ , con

$$b_{\pm}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{2 + 2\alpha_2 + \alpha_1(2 + \alpha_1 + \alpha_2) \pm 2\sqrt{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 + \alpha_2)}}{(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2}, \quad (3.20)$$

y  $\alpha_i = (M_i - N)/N$ , para  $i = 1, 2$ . A la función  $\rho_{\text{GMP}}$  se le conoce usualmente como la densidad espectral generalizada de Marčenko-Pastur (GMP). En la figura 3.3, presentamos una gráfica de la distribución GMP.

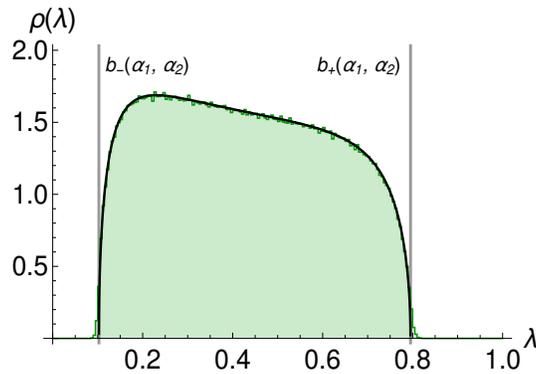


Figura 3.3: Distribución generalizada de Marčenko-Pastur. La curva negra corresponde a la expresión exacta de  $\rho_{\text{GMP}}$  y el fondo verde es un histograma que corresponde a diagonalizar  $10^4$  matrices del ensamble de Jacobi  $\mathbf{J}(100, 300, 400)$  de tamaño  $100 \times 100$ . En este caso,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 3$ ,  $b_-(\alpha_1, \alpha_2) = 0.102642$  y  $b_+(\alpha_1, \alpha_2) = 0.795318$ .

## 3.6. Método del fluido de Coulomb

En esta sección describiremos de manera breve el método central que utilizaremos en el capítulo 4. Para una explicación más rigurosa del método del fluido de Coulomb vea [44, 48, 49, 51, 52].

### 3.6.1. Introducción

El método del fluido de Coulomb, o de gas de Coulomb, propuesto primeramente por Dyson [44, 51], relaciona la función de densidad conjunta de los valores propios de matrices aleatorias que pertenecen a ensambles invariantes (vea secciones 3.3, 3.4 y 3.5), con el

factor de Boltzmann de un gas particular [48]. Más adelante diremos cual es el factor de Boltzmann. El método recibió su nombre debido a la analogía de tratar a los valores propios como partículas de un fluido con cargas eléctricas sujetas a interacciones entre ellas [49]. El método del fluido de Coulomb es de gran ayuda para calcular la función tasa, y por ende la distribución de probabilidad, de estadísticos del espectro de matrices aleatorias pertenecientes a ensambles invariantes cuando el tamaño de las matrices tiende a infinito. Dyson obtuvo muchos resultados basado en su intuición en mecánica estadística y no con argumentos de gran rigor matemático. Años después, ciertas ideas de Dyson fueron formalizadas gracias al desarrollo de teorías más modernas como la teoría de grandes desviaciones [52].

### 3.6.2. El método

Consideremos un ensamble invariante de matrices aleatorias (véase secciones 3.3, 3.4 y 3.5) y  $\mathbf{X}$  una matriz de tamaño  $N \times N$  perteneciente a alguno de estos ensambles. Si  $\Lambda$  es el espectro de  $\mathbf{X}$ , denotemos por  $p_\Lambda$  a la función de densidad conjunta de los valores propios en  $\Lambda$ . Nótese que la densidad  $p_\Lambda$  se puede escribir de la siguiente forma para dichos ensambles:

$$p_\Lambda(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{Z_0} e^{-\frac{\beta}{2} F(\boldsymbol{\lambda})}, \quad (3.21)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  con  $\lambda_i \in A \subseteq \mathbb{R}$ , para cada  $i = 1, \dots, N$ , y donde

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = - \sum_{i \neq j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| + \sum_{i=1}^N V(\lambda_i), \quad (3.22)$$

con  $V : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $Z_0$  una constante de normalización para  $p_\Lambda$ , es decir,  $Z_0 = \int d\boldsymbol{\lambda} e^{-\frac{\beta}{2} F(\boldsymbol{\lambda})}$ . La manera en la que esta escrita  $p_\Lambda$  en la ecuación (3.21) es conocida como la forma de Gibbs [53].

La función  $V$  que aparece en la ecuación (3.22) tiene la siguiente forma:

$$V(\lambda) = \begin{cases} \lambda^2, & \text{GOE, GUE, GSE} \\ \lambda - u \ln(\lambda), & \text{Ensamble de Wishart} \\ A_1 \ln(\lambda) + A_2 \ln(1 - \lambda), & \text{Ensamble de Jacobi} \end{cases}, \quad (3.23)$$

donde  $u = \frac{2}{\beta}(l-1)$ ,  $l = \frac{\beta}{2}(M-N+1)$ ,  $A_i = -\left(M_i - N + 1 - \frac{2}{\beta}\right)$  para  $i = 1, 2$ . Notemos también que el dominio  $A$  es

$$A = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{GOE, GUE, GSE} \\ [0, \infty), & \text{Ensamblés de Wishart} \\ [0, 1], & \text{Ensamblés de Jacobi} \end{cases} . \quad (3.24)$$

A continuación explicaremos la manera en la que se relaciona el método con la función de densidad  $p_\Lambda$ . En mecánica estadística se establece que la probabilidad  $p(\mathbf{r})$  de un sistema de  $N$  partículas interactuantes dentro de un dominio  $S$  y con posiciones  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)$ , viene dada por la función de densidad [48]:

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z_N} e^{-\beta F(r_1, \dots, r_N)}, \quad (3.25)$$

donde  $F$  es la función de energía potencial del sistema,  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ,  $T$  es la temperatura del sistema y  $k_B$  es la constante de Boltzmann<sup>2</sup>. El término  $e^{-\beta F(r_1, \dots, r_N)}$  en la ecuación anterior es conocido como el factor de Boltzmann. Dyson notó que este formalismo de mecánica estadística podía identificarse con la función de densidad conjunta de los valores propios de matrices aleatorias pertenecientes a ensambles invariantes. De esta manera, en la ecuación (3.21) el factor de Boltzmann viene dado por  $e^{-\frac{\beta}{2} F(\boldsymbol{\lambda})}$ , donde  $\frac{F(\boldsymbol{\lambda})}{2}$  es la función de energía potencial del sistema descrito por el espectro  $\Lambda$ .

Ahora supongamos que deseamos calcular la función de distribución del estadístico espectral  $G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(y_i)$ , para una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Nos enfocamos en una variable  $G$  de esta forma, ya que en el capítulo 4 calcularemos la función de densidad de una variable similar. Denotemos por  $p_G$  la función de densidad de  $G$ . Entonces por la proposición B.1 tenemos que:

$$p_G(c) = \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} p_\Lambda(\boldsymbol{\lambda}) \delta \left( c - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i) \right), \quad (3.26)$$

para cualquier  $c \in \mathbb{R}$ .

En el método del fluido de Coulomb se hace la siguiente observación: la función de densidad  $p_G$  puede ser escrita como el cociente de dos funciones llamadas funciones de partición [52]:

---

<sup>2</sup>El lector no debe preocuparse por tratar de entender estas constantes, ya que sólo se mencionan por la relación que encontró Dyson entre un sistema descrito por partículas de un fluido y los valores propios de una matriz aleatoria. Si el lector desea adentrarse a un estudio más extenso de estos conceptos vea [54].

$$\begin{aligned}
p_G(c) &= \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} p_\Lambda(\boldsymbol{\lambda}) \delta\left(c - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i)\right) \\
&= \frac{1}{Z_0} \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} e^{-\frac{\beta}{2} F(\boldsymbol{\lambda})} \delta\left(c - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i)\right) \\
&= \frac{\nu_N(c)}{\nu_{N,0}}, \tag{3.27}
\end{aligned}$$

donde

$$\nu_N(c) = \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} e^{-\frac{\beta}{2} F(\boldsymbol{\lambda})} \delta\left(c - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i)\right), \tag{3.28}$$

es la función de partición asociada a un gas (el espectro  $\Lambda$ ) restringido a  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i) = c$ ,  
y

$$\nu_{N,0} \equiv Z_0 = \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} e^{-\frac{\beta}{2} F(\boldsymbol{\lambda})}, \tag{3.29}$$

es la función de partición donde el gas no está sujeto a ninguna restricción [48, 52, 54].

El siguiente paso es suponer que la energía potencial  $F(\boldsymbol{\lambda})$  se puede escribir en función de la siguiente medida empírica (vea definición B.3):

$$\rho(\lambda; \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i), \tag{3.30}$$

para cualesquiera  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\boldsymbol{\lambda} \in A^N$ . Pasando de un enfoque discreto a uno continuo podemos reescribir los términos de la ecuación (3.22) utilizando las propiedades de la delta de Dirac:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N V(\lambda_i) &= \sum_{i=1}^N \int d\lambda V(\lambda) \delta(\lambda - \lambda_i) \\
&= N \int d\lambda V(\lambda) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \\
&= N \int d\lambda V(\lambda) \rho(\lambda; \boldsymbol{\lambda}), \tag{3.31}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| &= \sum_{i \neq j} N^2 \iint d\lambda d\lambda' \frac{1}{N} \delta(\lambda - \lambda_i) \frac{1}{N} \delta(\lambda' - \lambda_j) \ln |\lambda - \lambda'| \\
&\approx N^2 \iint d\lambda d\lambda' \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\lambda' - \lambda_j) \ln |\lambda - \lambda'| \\
&= N^2 \iint d\lambda d\lambda' \rho(\lambda; \boldsymbol{\lambda}) \rho(\lambda'; \boldsymbol{\lambda}) \ln |\lambda - \lambda'|. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Más aún:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int d\lambda \delta(\lambda - \lambda_i) f(\lambda) = \int d\lambda \rho(\lambda; \boldsymbol{\lambda}) f(\lambda). \tag{3.33}$$

De esta manera, sustituyendo las ecuaciones (3.31) y (3.32) en la ecuación (3.22), tendremos que:

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = N^2 S[\rho(\lambda; \boldsymbol{\lambda})], \tag{3.34}$$

con

$$S[\rho(\lambda; \boldsymbol{\lambda})] = - \iint d\lambda d\lambda' \rho(\lambda; \boldsymbol{\lambda}) \rho(\lambda'; \boldsymbol{\lambda}) \ln |\lambda - \lambda'| + \int d\lambda V_2(\lambda) \rho(\lambda; \boldsymbol{\lambda}), \tag{3.35}$$

donde  $V_2(\lambda) = \frac{1}{N} V(\lambda)$ . Es posible deshacerse del factor  $\frac{1}{N}$  haciendo el rescalamiento  $\lambda \rightarrow N^\varsigma \lambda$  para  $\varsigma \geq 0$ , de tal forma que a partir de ahora olvidaremos el factor  $1/N$ .

Nótese que las funciones  $\nu_N(c)$  y  $\nu_{N,0}$  pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\nu_N(c) = \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} e^{-\frac{\beta}{2} N^2 S[\rho(\lambda; \boldsymbol{\lambda})]} \delta \left( c - \int d\lambda \rho(\lambda; \boldsymbol{\lambda}) f(\lambda) \right), \tag{3.36}$$

$$\nu_{N,0} = \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} e^{-\frac{\beta}{2} N^2 S[\rho(\lambda; \boldsymbol{\lambda})]}. \tag{3.37}$$

Utilizando la ecuación D.4 podemos expresar el numerador y el denominador que aparecen en la expresión de  $p_G(c)$  como la siguiente integral de caminos:

$$\begin{aligned}
p_G(c) &= \frac{1}{Z_0} \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} e^{-\frac{\beta}{2} N^2 S[\rho(\lambda; \boldsymbol{\lambda})]} \delta \left( c - \int d\lambda \rho(\lambda; \boldsymbol{\lambda}) f(\lambda) \right) \\
&\times \int D[\rho] \delta_{(F)} \left( \rho(\lambda) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \right) \\
&= \frac{1}{Z_0} \int D[\rho] e^{-\frac{\beta}{2} N^2 S[\rho]} \delta \left( c - \int d\lambda \rho(\lambda) f(\lambda) \right) \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} \delta_{(F)} \left( \rho(\lambda) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \right).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Considerando la ecuación (D.3) podemos escribir:

$$\begin{aligned}
&\int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} \delta_{(F)} \left( \rho(\lambda) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \right) \\
&= \int D[k] \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} \exp \left[ iN \int d\lambda k(\lambda) \left( \rho(\lambda) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \right) \right] \\
&= \int D[k] e^{iN \int d\lambda k(\lambda) \rho(\lambda)} \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} e^{-i \sum_{i=1}^N k(\lambda_i)} \\
&= \int D[k] e^{iN \int d\lambda k(\lambda) \rho(\lambda) + N \ln \left( \int_A d\lambda e^{-ik(\lambda)} \right)}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Sustituyendo la ecuación (3.39) en la ecuación (3.38) tenemos que:

$$\begin{aligned}
p_G(c) &= \frac{1}{Z_0} \int D[\rho, k] \exp \left( -\frac{\beta}{2} N^2 S[\rho] + iN \int d\lambda k(\lambda) \rho(\lambda) + N \ln \left( \int_A d\lambda e^{-ik(\lambda)} \right) \right) \\
&\times \delta \left( c - \int d\lambda \rho(\lambda) f(\lambda) \right),
\end{aligned} \tag{3.40}$$

donde  $\int D[\rho, k]$  denota  $\int D[\rho] \int D[k]$ . Si introducimos el siguiente funcional

$$\Upsilon[k(\lambda)] = i \int d\lambda k(\lambda) \rho(\lambda) + \ln \left( \int_A d\lambda e^{-ik(\lambda)} \right), \tag{3.41}$$

utilizando el ejemplo C.3.3, obtenemos que la condición  $\frac{\delta \Upsilon[k(\lambda)]}{\delta k(t)} = 0$  resulta en la siguiente ecuación:

$$\rho(\lambda) = \frac{e^{-ik(\lambda)}}{\int_A d\lambda e^{-ik(\lambda)}}. \quad (3.42)$$

Esta expresión nos dice justamente que  $\rho$  está normalizada. Aplicando logaritmos de ambos lados en la ecuación (3.42), multiplicando por  $\rho(\lambda)$  y después integrando con respecto a  $\lambda$ , obtenemos:

$$\int_A d\lambda \rho(\lambda) \ln(\rho(\lambda)) = -i \int_A d\lambda \rho(\lambda) k(\lambda) - \ln \left( \int_A d\lambda e^{-ik(\lambda)} \right). \quad (3.43)$$

Finalmente sustituyendo lo anterior en la ecuación (3.40), podemos escribir:

$$p_G(c) = \frac{1}{Z_0} \int D[\rho] \exp \left( -\frac{\beta}{2} N^2 S[\rho] - N \int_A d\lambda \rho(\lambda) \ln(\rho(\lambda)) \right) \times \delta \left( c - \int d\lambda \rho(\lambda) f(\lambda) \right) \delta \left( 1 - \int d\lambda \rho(\lambda) \right). \quad (3.44)$$

Utilizando la representación de Fourier de la delta de Dirac (vea proposición B.2), la expresión anterior puede escribirse como:

$$p_G(c) = \frac{1}{Z_0} \int D[\rho] e^{-\frac{\beta}{2} N^2 S[\rho] - N \int_A d\lambda \rho(\lambda) \ln(\rho(\lambda))} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-2\pi i k (\int d\lambda \rho(\lambda) f(\lambda) - c)} \times \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-2\pi i r (\int d\lambda \rho(\lambda) - 1)}. \quad (3.45)$$

Si hacemos los cambios de variable  $B_1 = \frac{4\pi i k}{\beta N^2}$  y  $B_2 = \frac{4\pi i r}{\beta N^2}$ , la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$p_G(c) = \frac{1}{A_0} \int D[\rho] e^{-\frac{\beta}{2} N^2 S[\rho] - N \int_A d\lambda \rho(\lambda) \ln(\rho(\lambda))} \int_{-\infty}^{\infty} dB_1 e^{-\frac{\beta}{2} N^2 B_1 (\int d\lambda \rho(\lambda) f(\lambda) - c)} \times \int_{-\infty}^{\infty} dB_2 e^{-\frac{\beta}{2} N^2 B_2 (\int d\lambda \rho(\lambda) - 1)}, \quad (3.46)$$

donde en  $A_0$  se han absorbido constantes innecesarias al haber realizado el cambio de variable en la integral anterior. Nótese que el término lineal en  $N$  en la expresión anterior puede despreciarse comparado con los otros términos de orden  $N^2$  al hacer un cálculo de punto de silla. Considerando todo lo anterior escribimos finalmente:

$$p_G(c) = \frac{1}{A_0} \int D[\rho, B_1, B_2] e^{-\frac{\beta}{2} N^2 \mathcal{A}[\rho, B_1, B_2]}, \quad (3.47)$$

donde hemos denotado por  $\int D[\rho, B_1, B_2] = \int D[\rho] \int_{-\infty}^{\infty} dB_1 \int_{-\infty}^{\infty} dB_2$  y

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\rho, B_1, B_2] = & - \iint d\lambda d\lambda' \rho(\lambda) \rho(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'| + \int d\lambda V_2(\lambda) \rho(\lambda) \\ & + B_1 \left( \int d\lambda \rho(\lambda) f(\lambda) - c \right) + B_2 \left( \int d\lambda \rho(\lambda) - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Al funcional anterior lo llamaremos la acción. Notemos que en la ecuación anterior las variable  $B_1$  y  $B_2$  podrían pensarse como la restricción impuesta al gas forzando a  $\int d\lambda \rho(\lambda) f(\lambda) = c$  y  $\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$ .

Utilizando este formalismo matemático, las funciones de partición dadas por las ecuaciones (3.28) y (3.29) tendrán la siguiente forma tras haber realizado los cálculos anteriores:

$$\nu_N(c) = \int D[\rho, B_1, B_2] e^{-\frac{\beta}{2} N^2 \mathcal{A}[\rho, B_1, B_2]} \quad (3.49)$$

$$\nu_{N,0} = A_0 = \int D[\rho, B_2] e^{-\frac{\beta}{2} N^2 \mathcal{A}[\rho, 0, B_2]}, \quad (3.50)$$

donde en la última función de partición hemos supuesto que las constantes absorbidas en  $A_0$  no afectarán el cálculo de la integral que aparece en  $\nu_0$ . Para una mejor explicación de esto vea [55].

## Ecuaciones del punto silla

Lo siguiente a realizar es estimar las integrales que aparecen en las funciones de partición utilizando el método del punto silla (vea apéndice E). En nuestro caso sólo nos preocuparemos por la integral en la función de partición  $\nu_N(c)$  ya que, como veremos en el capítulo 4, la integral para la función de partición  $\nu_{N,0}$  ya fue estimada en los artículos [32, 33] para los casos particulares que realizaremos (Ensamble de Wishart y de Jacobi). Esta función de partición fue estimada como:

$$\nu_{N,0} \sim e^{-\frac{\beta}{2} N^2 \Omega_0}, \quad (3.51)$$

donde  $\Omega_0$  es el resultado de evaluar el funcional  $\mathcal{A}[\rho, 0, B_2]$  en la solución de las ecuaciones del punto silla.

Las ecuaciones de punto silla asociadas al numerador  $\nu_N(c)$  vienen dadas por:

$$\frac{\delta \mathcal{A}[\rho, B_1, B_2]}{\delta \rho(t)} = \frac{\partial \mathcal{A}[\rho, B_1, B_2]}{\partial B_1} = \frac{\partial \mathcal{A}[\rho, B_1, B_2]}{\partial B_2} = 0. \quad (3.52)$$

Usando la propiedad vista en la ecuación (C.3) aplicada a la ecuación (3.48) tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{A}[\rho, B_1, B_2]}{\delta \rho(t)} &= \frac{\delta}{\delta \rho(t)} \left( - \iint d\lambda d\lambda' \rho(\lambda) \rho(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'| \right) + \frac{\delta}{\delta \rho(t)} \left( \int d\lambda V_2(\lambda) \rho(\lambda) \right) \\ &+ \frac{\delta}{\delta \rho(t)} \left( B_1 \left( \int d\lambda \rho(\lambda) f(\lambda) - c \right) \right) + \frac{\delta}{\delta \rho(t)} \left( B_2 \left( \int d\lambda \rho(\lambda) - 1 \right) \right). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Trabajemos por separado cada término de la ecuación anterior. Utilizando la propiedad vista en la ecuación (C.2), posteriormente la propiedad de la ecuación (C.1) y finalmente la propiedad de la ecuación (B.1), podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \rho(t)} \left( - \iint d\lambda d\lambda' \rho(\lambda) \rho(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'| \right) &= -2 \iint d\lambda d\lambda' \frac{\delta \rho(\lambda)}{\delta \rho(t)} \rho(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'| \\ &= -2 \iint d\lambda d\lambda' \delta(\lambda - t) \rho(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'| \\ &= -2 \int d\lambda' \rho(\lambda') \ln |t - \lambda'|. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Para el siguiente término utilizaremos exactamente las mismas propiedades y en el mismo orden que utilizamos en la ecuación anterior, entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \rho(t)} \left( \int d\lambda V_2(\lambda) \rho(\lambda) \right) &= \int d\lambda V_2(\lambda) \frac{\delta \rho(\lambda)}{\delta \rho(t)} \\ &= \int d\lambda V_2(\lambda) \delta(\lambda - t) \\ &= V_2(t). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Usando la propiedad de la ecuación (C.3) escribimos:

$$\frac{\delta}{\delta \rho(t)} \left( B_1 \left( \int d\lambda \rho(\lambda) f(\lambda) - c \right) \right) = B_1 \int d\lambda \frac{\delta \rho(\lambda)}{\delta \rho(t)} f(\lambda) - \frac{\delta}{\delta \rho(t)} B_1 c, \quad (3.56)$$

Por la propiedad C.6 tenemos que:

$$\frac{\delta}{\delta\rho(t)}B_1c = 0, \quad (3.57)$$

y por las propiedades (C.1) y (B.1), en ese orden:

$$B_1 \int d\lambda \frac{\delta\rho(\lambda)}{\delta\rho(t)} f(\lambda) = B_1 f(t). \quad (3.58)$$

Para el último término de la ecuación (3.53) seguramente el lector ya conoce como se procede para hacer la derivación, así que sólo escribiremos el resultado directamente:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\rho(t)} \left( B_2 \left( \int d\lambda \rho(\lambda) - 1 \right) \right) &= B_2 \int d\lambda \frac{\delta\rho(\lambda)}{\delta\rho(t)} \\ &= B_2 \int d\lambda \delta(\lambda - t) = B_2, \end{aligned} \quad (3.59)$$

Entonces la ecuación (3.53) tendrá finalmente la siguiente expresión:

$$\frac{\delta\mathcal{A}[\rho, B_1, B_2]}{\delta\rho(t)} = -2 \int d\lambda' \rho(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'| + V_2(\lambda) + B_1 f(\lambda) + B_2, \quad (3.60)$$

e igualando lo anterior a cero obtenemos nuestra primera ecuación del punto silla:

$$V_2(\lambda) + B_1 f(\lambda) + B_2 = 2 \int d\lambda' \rho(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'|. \quad (3.61)$$

Por otra parte

$$\frac{\partial\mathcal{A}[\rho, B_1, B_2]}{\partial B_1} = \int d\lambda \rho(\lambda) f(\lambda) - c, \quad (3.62)$$

que igualando a cero nos da la segunda ecuación del punto silla:

$$\int d\lambda \rho(\lambda) f(\lambda) = c. \quad (3.63)$$

Finalmente,

$$\frac{\partial \mathcal{A}[\rho, B_1, B_2]}{\partial B_2} = \int d\lambda \rho(\lambda) - 1. \quad (3.64)$$

Obtendremos la tercera ecuación del punto silla al igualar esta última ecuación a cero:

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1. \quad (3.65)$$

En resumen, las ecuaciones del punto silla son:

$$\begin{aligned} V_2(\lambda) + B_1 f(\lambda) + B_2 &= 2 \int d\lambda' \rho(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'|, \\ \int d\lambda \rho(\lambda) &= 1, \quad \int d\lambda \rho(\lambda) f(\lambda) = c. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Denotemos la solución de estas ecuaciones de punto silla como  $\rho_0$ ,  $B_{1,0}$  y  $B_{2,0}$ . Así la función de partición  $\nu_N(c)$ , ecuación (3.49), puede estimarse como:

$$\nu_N(c) \sim e^{-\frac{\beta}{2} N^2 \mathcal{A}_0(c)}, \quad (3.67)$$

donde  $\mathcal{A}_0(c)$  es la acción evaluada en el punto silla, es decir,  $\mathcal{A}_0(c) \equiv \mathcal{A}[\rho_0, B_{1,0}, B_{2,0}]$ .

Finalmente la función tasa  $\Psi(c)$  se obtiene al sustituir las ecuaciones (3.51) y (3.67) en la ecuación (3.27), obteniendo:

$$p_G(c) = e^{-\beta N^2 \Psi(c)}, \quad (3.68)$$

con

$$\Psi(c) = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_0(c) - \Omega_0). \quad (3.69)$$

Resolver las ecuaciones del punto silla (3.66) no es sencillo y para eso existen diferentes métodos. Nosotros utilizaremos la transformada de Hilbert-Stieltjes (vea definición C.2) para resolver tales ecuaciones en el capítulo siguiente.

# Capítulo 4

## Un enfoque unificado para grandes desviaciones de los valores propios extremos y del *bulk* en los ensambles de Wishart y de Jacobi

Ahora aplicaremos para los ensambles de Wishart y de Jacobi lo que hemos realizado en la sección 3.6. Pero antes necesitamos dar algunas definiciones importantes.

### 4.1. Definiciones

Estamos interesados en estudiar ciertas propiedades relacionadas con la función de densidad conjunta de los valores propios en el espectro  $\Lambda$  de matrices aleatorias de tamaño  $N \times N$  de los ensambles de Wishart y de Jacobi (véase secciones 3.4 y 3.5). En particular nos enfocaremos en la variable aleatoria que cuenta el número de valores propios a la izquierda de un cierto número  $x$ . Esta variable aleatoria es llamada el *shifted index number* (SIN) y es definida como:

$$\mathcal{N}_x = \sum_{i=1}^N \Theta(x - \lambda_i), \quad (4.1)$$

donde  $\Theta$  es la función escalón (véase definición B.2),  $x, \lambda_i \in A$ , para cualquier  $i = 1, \dots, N$ , y  $A$  está dado por la ecuación (3.24). De esta manera  $\mathcal{N}_x$  puede tomar valores en el conjunto  $\{0, \dots, N\}$ . Como veremos más adelante, el SIN contiene más información que el índice estudiado previamente en [30, 56].

Al ser esta una variable aleatoria, una expresión simple para su función de probabilidad de densidad es:

$$p_{\mathcal{N}_x}(n_x) = \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} p_{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}) \delta \left( n_x - \sum_{i=1}^N \Theta(x - \lambda_i) \right), \quad (4.2)$$

para cualquier  $n_x \in \{0, \dots, N\}$  y con  $p_{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda})$  dada por la ecuación (3.21).

Notemos que aunque el SIN toma valores discretos, es matemáticamente inofensivo considerar deltas de Dirac en lugar de deltas de Kroenecker, ya que más adelante usaremos el método del gas de Coulomb para pasar de un análisis discreto a uno continuo.

La cola de la función de distribución acumulada del SIN está dada por<sup>1</sup>

$$\bar{P}_{\mathcal{N}_x}(n_x) = \int_{n_x}^{\infty} dt p_{\mathcal{N}_x}(t). \quad (4.3)$$

Ahora, como se establece en [28, 34], hacemos una observación trivial: la probabilidad de que el  $k$ -ésimo valor propio  $y_{(k)}$  sea menor que  $x$  es precisamente la probabilidad de que por lo menos  $\mathcal{N}_x$  sea mayor que  $k$ , esto es

$$\bar{P}_{\mathcal{N}_x}(k) = P_{y_{(k)}}(x). \quad (4.4)$$

De manera similar tenemos que  $P_{\mathcal{N}_x}(k) = \bar{P}_{y_{(k)}}(x) = \int_x^{\infty} dt p_{y_{(k)}}(t)$ . Por lo tanto al analizar  $P_{\mathcal{N}_x}$  (o equivalentemente  $p_{\mathcal{N}_x}$ ) tendremos acceso no sólo a las propiedades estadísticas del SIN, sino también a las del  $k$ -ésimo valor propio. Como se menciona en el trabajo realizado en [28, 34] para el ensamble gaussiano, veremos que podemos recuperar la totalidad de las propiedades estadísticas tanto para los valores propios en el *bulk* como para los valores propios extremos (*edge*), es decir, para  $N$  muy grande obtendremos las funciones de grandes desviaciones izquierda y derecha del  $k$ -ésimo valor propio.

### 4.1.1. Método del fluido de Coulomb

Usaremos el método del fluido de Coulomb para obtener una expresión de  $p_{\mathcal{N}_x}(n_x)$  para los ensambles de Wishart y de Jacobi. Para derivar una expresión para la función de densidad de probabilidad del SIN, definimos la variable aleatoria  $\mathcal{C}_x = \mathcal{N}_x/N$ , que toma valores  $c \in [0, 1]$ . Por la proposición B.1, una expresión para su función de densidad es:

$$p_{\mathcal{C}_x}(c) = \int_{A^N} d\boldsymbol{\lambda} p_{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}) \delta \left( c - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta(x - \lambda_i) \right), \quad (4.5)$$

---

<sup>1</sup>El límite superior de esta integral ha sido puesto como  $\infty$  mientras que, en principio, debería ser  $N$ . Esto no es un problema si entendemos que la función de densidad  $p_{\mathcal{N}_x}$  tiene un soporte y/o estamos anticipando el límite termodinámico. Esto es, cuando  $N \rightarrow \infty$ .

para cualquier  $c \in [0, 1]$ . Notemos que esta función de densidad es equivalente a la que aparece en la ecuación (3.26) al definir  $f(\lambda) = \Theta(x - \lambda)$  y entonces por el procedimiento presentado en la sección 3.6 llegaremos a que (véase ecuación (3.47)):

$$p_{\mathcal{C}_x}(c) = \frac{1}{A_0} \int D[\rho, B_1, B_2] e^{-\frac{\beta}{2} N^2 \mathcal{A}[\rho, B_1, B_2]}, \quad (4.6)$$

para cualquier  $c \in [0, 1]$ , donde  $\beta$  es el índice de Dyson y  $\mathcal{A}[\rho, B_1, B_2]$  viene dada por la ecuación (3.48). Adelantando un poco los resultados que obtendremos al analizar esta función de densidad, debido a las ecuaciones (3.68) y (3.69), sabemos que podremos escribir:

$$p_{\mathcal{C}_x}(c) = e^{-\beta N^2 \Psi(c, x)}, \quad \Psi(c, x) = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_0(c, x) - \Omega_0), \quad (4.7)$$

donde  $\mathcal{A}_0(c, x)$  corresponde al valor de la acción  $\mathcal{A}[\rho, B_1, B_2]$  evaluada en el punto silla y, por lo tanto, dependerá de los parámetros  $c$  y  $x$ . De manera similar,  $\Omega_0$  corresponde a la evaluación de la acción asociada con  $A_0$ , que es el estado de equilibrio del fluido de Coulomb que da origen a la distribuciones MP (ecuación (3.15)) y GMP (ecuación (3.19)) para los ensambles de Wishart y de Jacobi, respectivamente. Podemos observar que  $p_{\mathcal{C}_x}(c)$  está relacionada a la distribución de equilibrio del fluido de Coulomb en presencia de la restricción  $\int d\lambda \rho(\lambda) \Theta(x - \lambda) = c$ . Si somos capaces de encontrar esta densidad  $\rho$  que cumple la restricción anterior y la evaluamos en la acción (ecuación 3.48), entonces podremos encontrar una expresión para la función tasa  $\Psi(c, x)$ .

Como veremos más adelante, la densidad de probabilidad  $p_{\mathcal{C}_x}(c)$  es cóncava en su dominio  $[0, 1]$ , alcanzando su máximo en el valor particular  $c = c_*(x)$  [13], donde  $c_*(x)$  está dado por:

$$c_*(x) = \begin{cases} \int_{b_-(\alpha)}^x d\lambda \rho_{\text{MP}}(\lambda), & \text{Ensamble de Wishart} \\ \int_{b_-(\alpha_1, \alpha_2)}^x d\lambda \rho_{\text{GMP}}(\lambda), & \text{Ensamble de Jacobi} \end{cases}, \quad (4.8)$$

para cualquier  $x \in A$ . Puede observarse que  $c_*(x)$  es la proporción natural de valores propios a la izquierda de  $x$  en las distribuciones MP y GMP para los ensambles de Wishart y de Jacobi, respectivamente. Si denotamos por  $\bar{P}_{\mathcal{C}_x} = \int_c^1 dc' p_{\mathcal{C}_x}(c')$  a la cola izquierda de la distribución acumulada de  $\mathcal{C}_x$ , entonces dado que  $p_{\mathcal{C}_x}(c)$  es cóncava en todo su dominio  $[0, 1]$ , para  $c > c_*(x)$  la integral  $\int_c^1 dc' p_{\mathcal{C}_x}(c')$  tendrá su máxima contribución en una vecindad de  $c$ . Haciendo una expansión en series de Taylor de orden cero de la función tasa (ecuación 4.7), tenemos que  $e^{-\beta N^2 \Psi(c, x)}$  será una aproximación para  $\bar{P}_{\mathcal{C}_x}(c)$ . De manera similar para la función de distribución acumulada  $P_{\mathcal{C}_x}(c)$  cuando  $c < c_*(x)$ . Así podemos resumir que:

$$P_{c_x}(c) \sim \begin{cases} e^{-\beta N^2 \Psi(c,x)}, & c < c_*(x) \\ 1 - e^{-\beta N^2 \Psi(c,x)}, & c > c_*(x) \end{cases}, \quad (4.9)$$

para  $N \rightarrow \infty$  y  $c \in [0, 1]$ .

Una vez que encontremos la función de distribución acumulada del SIN, automáticamente podremos obtener la función de distribución acumulada del  $k$ -ésimo valor propio como:

$$P_{y(k)}(x) \sim \begin{cases} e^{-\beta N^2 \Psi(k/N,x)}, & x < x_*(k/N) \\ 1 - e^{-\beta N^2 \Psi(k/N,x)}, & x > x_*(k/N) \end{cases}, \quad (4.10)$$

donde  $x_*(t)$  es la solución de la ecuación

$$c_*(x) = t, \quad (4.11)$$

para  $t \in [0, 1]$ . Por lo tanto la función tasa  $\Psi(c, x)$  tiene un significado doble: como función de  $c$  (para  $x$  fijo) nos da información acerca de las grandes desviaciones del SIN, mientras que como función de  $x$  (para  $c = k/N$  fijo) nos da las grandes desviaciones del  $k$ -ésimo valor propio. El último caso es más interesante cuando, como veremos más adelante, encontramos que para los valores propios extremos, esto es para  $k = 1$  (el más pequeño) o  $k = N$  (el más grande), uno es capaz de obtener sus funciones de grandes desviaciones izquierda y derecha usando el método del fluido de Coulomb.

Entonces lo siguiente por hacer es resolver las ecuaciones del punto silla (3.66) para nuestro caso particular donde  $f(\lambda) = \Theta(x - \lambda)$  y considerando los ensambles de Wishart y de Jacobi que determinarán la forma de la función  $V_2$ . A continuación basaremos nuestro análisis en el ensamble de Wishart. Para el ensamble de Jacobi véase la sección 4.3.

## 4.2. Ensamble de Wishart

En esta sección realizaremos todas las derivaciones para obtener las expresiones que aparecen en la ecuación (4.7) para el ensamble de Wishart partiendo de las ecuaciones de punto silla (3.66). Para este análisis consideremos matrices  $\mathbf{W}(M, N)$  de este ensamble para  $M \geq N \geq 1$ .

### 4.2.1. Ecuaciones del punto silla

Al realizar el rescalamiento  $\lambda \rightarrow N\lambda$  y notando que  $u/N = (M - N)/N$  (donde  $u$  aparece en la ecuación (3.23)) para  $N$  muy grande, llegamos a que  $V_2(\lambda) = \lambda - \alpha \ln(\lambda)$ , donde  $\alpha = (M - N)/N$ . Por este motivo las ecuaciones de punto silla tendrán la siguiente forma

$$\lambda - \alpha \ln(\lambda) + B_1 \Theta(x - \lambda) + B_2 = 2 \int d\lambda' \rho(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'|, \quad (4.12)$$

$$c = \int d\lambda \rho(\lambda) \Theta(x - \lambda), \quad 1 = \int d\lambda \rho(\lambda). \quad (4.13)$$

Para resolver estas ecuaciones primero derivamos la ecuación (4.12) respecto a  $\lambda$  obteniendo:

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) + C_1 \delta(x - \lambda) = P \int d\lambda' \frac{\rho(\lambda')}{\lambda - \lambda'}, \quad (4.14)$$

donde  $C_1 = -B_1/2$  y  $P$  denota el valor principal de Cauchy<sup>2</sup>. En la ecuación anterior hemos usado adicionalmente la ecuación (B.4). Justo después de realizar la derivada respecto a  $\lambda$  en (4.12) obtenemos los mismos resultados que en [13] al haber utilizado exactamente el mismo método. Sin embargo, a partir de este momento nuestro camino para encontrar  $\rho_0$ , la solución de las ecuaciones del punto silla, cambiará de manera significativa al utilizar la transformada de Hilbert-Stieltjes (véase definición C.2).

Ahora, multiplicando la ecuación anterior por  $\rho(\lambda)/(z - \lambda)$  y después integrándola respecto a  $\lambda$  tenemos:

$$\frac{1}{2} \int d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{z - \lambda} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) + C_1 \int d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{z - \lambda} \delta(x - \lambda) = \int d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{z - \lambda} P \int d\lambda' \frac{\rho(\lambda')}{\lambda - \lambda'}. \quad (4.15)$$

El siguiente paso es utilizar la transformada de Hilbert-Stieltjes de la densidad  $\rho$ , también llamado el resolvente, dada por  $S(z) = \int d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{z - \lambda}$ , para reescribir los términos de la ecuación anterior.

### 1. Primer término.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{z - \lambda} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) &= \frac{1}{2} S(z) - \frac{\alpha}{2} \int d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{(z - \lambda)\lambda} \\ &= \frac{1}{2} S(z) - \frac{\alpha}{2z} \int d\lambda \rho(\lambda) \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{2} S(z) - \frac{\alpha}{2z} (S(z) - S(0)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

---

<sup>2</sup>El valor principal de Cauchy de una función  $f$  con integral finita alrededor de un punto  $c \in [a, b]$  se define como [2]:  $P \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right]$ .

2. Segundo término.

$$C_1 \int d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{z-\lambda} \delta(x-\lambda) = C_1 \frac{\rho(x)}{z-x} = \frac{\omega}{2(z-x)}, \quad (4.17)$$

donde hemos definido  $\frac{\omega}{2} = C_1 \rho(x)$ .

3. Tercer término.

$$\begin{aligned} T_3 &= \int d\lambda P \int d\lambda' \frac{\rho(\lambda)\rho(\lambda')}{(\lambda-\lambda')(z-\lambda)} \\ &= \int d\lambda P \int d\lambda' \rho(\lambda)\rho(\lambda') \left( \frac{1}{z-\lambda} + \frac{1}{\lambda-\lambda'} \right) \frac{1}{z-\lambda'} \\ &= S(z)^2 - T_3, \end{aligned} \quad (4.18)$$

por lo que  $T_3 = \frac{S(z)^2}{2}$ .

Considerando estos resultados, reescribimos la ecuación (4.15) como:

$$\frac{S(z)^2}{2} = \frac{S(z)}{2} - \frac{\alpha}{2z} + \frac{\gamma}{2z} + \frac{\omega}{2(z-x)}, \quad (4.19)$$

donde definimos  $\gamma = \alpha S(0)$ . Podemos observar que tenemos una ecuación cuadrática para  $S(z)$ :

$$S(z)^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{z}\right) S(z) - \frac{\gamma}{z} - \frac{\omega}{z-x} = 0, \quad (4.20)$$

cuya solución es

$$S(z)_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{z}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)^2 + 4 \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\omega}{z-x}\right)} \right]. \quad (4.21)$$

Lo siguiente a realizar es relacionar  $\gamma$  con  $\omega$ . Para eso utilizaremos que  $S(z) \sim 1/z$  cuando  $z \rightarrow \infty$  [2, 35]. Esto nos sugiere hacer una expansión en series de Taylor para  $S(z)_{\pm}$  cuando  $z \rightarrow \infty$  y después verificar con que signo  $S(z)_{\pm}$  se comporta como  $1/z$ . Realizando lo anterior obtenemos que  $S_-(z)$  tiene el correcto comportamiento asintótico esperado y es dado por:

$$S(z)_- = -\frac{\gamma + \omega}{z} + \dots \quad (4.22)$$

Igualando  $S(z)_- = 1/z$  concluimos que  $\gamma = -1 - \omega$ . Sustituyendo esto en la ecuación (4.21), tenemos que:

$$S(z)_\pm = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{z}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)^2 - 4 \left(\frac{1+\omega}{z} - \frac{\omega}{z-x}\right)} \right]. \quad (4.23)$$

Trabajando con la expresión del discriminante tenemos:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)^2 - 4 \left(\frac{1+\omega}{z} - \frac{\omega}{z-x}\right) \\ &= \frac{1}{z^2} (z - \alpha)^2 - \frac{4}{z(z-x)} ((1+\omega)(z-x) - z\omega) \\ &= \frac{1}{z^2(z-x)} [(z - \alpha)^2(z-x) - 4z((1+\omega)(z-x) - z\omega)]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ahora definimos el siguiente polinomio cúbico:

$$\begin{aligned} P_3(z) \equiv P_3(z, x, \omega, \alpha) &= (z - \alpha)^2(z - x) - 4z((1 + \omega)(z - x) - z\omega) \\ &= (z - x)(z^2 + \alpha^2 - 2z(2 + \alpha)) + 4xz\omega \\ &= (z - x)(z - b_+(\alpha))(z - b_-(\alpha)) + 4xz\omega, \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde

$$b_\pm(\alpha) = (1 \pm \sqrt{1 + \alpha})^2, \quad (4.26)$$

son la cota superior ( $b_+(\alpha)$ ) e inferior ( $b_-(\alpha)$ ) del intervalo que forma el soporte para la distribución MP, ecuación (3.15). Entonces podemos reescribir el resolvente de la siguiente manera:

$$S_\pm(z) \equiv S_\pm(z, x, \omega, \alpha) = \frac{1}{2z} \left[ (z - \alpha) \pm \sqrt{\frac{P_3(z)}{z-x}} \right]. \quad (4.27)$$

Notemos que cuando  $\omega = 0$  recuperamos el resolvente asociado a la distribución MP, es decir,

$$S_\pm^{\text{MP}}(z) = \frac{1}{2z} \left[ (z - \alpha) \pm \sqrt{(z - b_+(\alpha))(z - b_-(\alpha))} \right], \quad (4.28)$$

ya que se puede probar que [32]:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \Im[S_{\pm}^{\text{MP}}(t - i\epsilon)] = \rho_{\text{MP}}(t), \quad (4.29)$$

donde  $\Im[z]$  denota la parte imaginaria del número complejo  $z$ . Entonces concluimos que el parámetro  $\omega$  controla las deformaciones de la distribución MP debido a la barrera en la posición  $x$  y a la fracción de valores propios  $c$  a la izquierda de  $x$ . Lo siguiente será analizar las raíces de  $P_3(z)$ .

### 4.2.2. Análisis de las raíces de $P_3(z)$

Para un polinomio cúbico escrito como:

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad (4.30)$$

podemos definir  $\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$ . Entonces tendremos tres raíces reales si  $\Delta > 0$  [38]. Las raíces del polinomio en la ecuación (4.30) están dadas por [38]:

$$z_k = -\frac{1}{3a} \left( b + u_k C + \frac{\Delta_0}{u_k C} \right), \quad k \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.31)$$

donde

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad u_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

$$C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}}, \quad \Delta_0 = b^2 - 3ac, \quad \Delta_1 = 2b^3 - 9abc + 27a^2d.$$

Además se tiene la siguiente relación  $\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3 = -27a^2\Delta$ . Para el polinomio  $P_3(z)$  dado por la ecuación (4.25) tenemos que

$$a = 1, \quad b = -4 - x - 2\alpha, \quad c = 4x + 2x\alpha + \alpha^2 + 4x\omega, \quad d = -x\alpha^2. \quad (4.32)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= 16 + x^2 + \alpha(16 + \alpha) - 2x(2 + \alpha + 6\omega), \\ \Delta_1 &= -27x\alpha^2 - 2(4 + x + 2\alpha)^3 + 9(4 + x + 2\alpha)(\alpha^2 + 2x(2 + \alpha + 2\omega)), \end{aligned}$$

Así el discriminante  $\Delta$  de la ecuación cúbica  $P_3(z) = 0$  puede escribirse de la siguiente manera

$$\Delta = -256x^3(\omega - \omega_0(\alpha, x))(\omega - \omega_+(\alpha, x))(\omega - \omega_-(\alpha, x)), \quad (4.33)$$

donde  $\omega_i(\alpha, x)$  son las raíces de  $\Delta$  dadas por<sup>3</sup>

$$\omega_+ \equiv \omega_+(\alpha, x) = \frac{1}{48x} \Re \left[ \kappa(\alpha, x) - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \chi(\alpha, x) - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \frac{\Xi(\alpha, x)}{\chi(\alpha, x)} \right], \quad (4.34)$$

$$\omega_- \equiv \omega_-(\alpha, x) = \frac{1}{48x} \Re \left[ \kappa(\alpha, x) - \chi(\alpha, x) - \frac{\Xi(\alpha, x)}{\chi(\alpha, x)} \right], \quad (4.35)$$

$$\omega_0 \equiv \omega_0(\alpha, x) = \frac{1}{48x} \Re \left[ \kappa(\alpha, x) - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \chi(\alpha, x) - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \frac{\Xi(\alpha, x)}{\chi(\alpha, x)} \right], \quad (4.36)$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha, x) &= -64\alpha^6 + 96\alpha^5(43x - 8) + 24\alpha^4(x(503x + 1000) - 160) \\ &\quad + 40\alpha^3(77x - 16)(x + 4)^2 + 240\alpha^2(2x - 1)(x + 4)^3 \\ &\quad - 12\alpha(x + 4)^5 - (x + 4)^6, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\Omega(\alpha, x) = 24\sqrt{3} \sqrt{\alpha^2(-x)(8\alpha^3 + 3\alpha^2(16 - 5x) + 6\alpha(x + 4)^2 + (x + 4)^3)^3}, \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \Xi(\alpha, x) &= 16\alpha^4 + 16\alpha^3(29x + 8) + 48\alpha^2(5x + 2)(x + 4) \\ &\quad + 8\alpha(x + 4)^3 + (x + 4)^4, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\chi(\alpha, x) = \sqrt[3]{\Gamma + \Omega}, \quad \kappa(\alpha, x) = -8((\alpha - 2)\alpha - 2) + x^2 - 20(\alpha + 2)x, \quad (4.40)$$

donde  $\Re$  denota la parte real de un número complejo. Estas raíces están ordenadas como  $\omega_+ \geq 0 \geq \omega_0 \geq \omega_-$ . Esto nos permite expresar a las raíces de  $P_3(z)$  como sigue

---

<sup>3</sup>Las raíces son siempre reales y, en principio, no hay necesidad de tomar su parte real como aparece en estas expresiones. Sin embargo, esto es conveniente si uno quiere mantenerlas ordenadas.

$$\lambda_- \equiv \lambda_-(\alpha, x, \omega) = -\frac{1}{3} \left( -4 - x - 2\alpha + C + \frac{\Delta_0}{C} \right), \quad (4.41)$$

$$\lambda_0 \equiv \lambda_0(\alpha, x, \omega) = -\frac{1}{3} \left( -4 - x - 2\alpha + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} C + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \frac{\Delta_0}{C} \right), \quad (4.42)$$

$$\lambda_+ \equiv \lambda_+(\alpha, x, \omega) = -\frac{1}{3} \left( -4 - x - 2\alpha + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} C + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \frac{\Delta_0}{C} \right), \quad (4.43)$$

donde

$$C(\alpha, x, \omega) = \sqrt[3]{\Delta_1 + 24\sqrt{3}x^3(\omega - \omega_0(\alpha, x))(\omega - \omega_+(\alpha, x))(\omega - \omega_-(\alpha, x))}, \quad (4.44)$$

$$\Delta_0(\alpha, x, \omega) = 16 + x^2 + \alpha(16 + \alpha) - 2x(2 + \alpha + 6\omega), \quad (4.45)$$

$$\Delta_1(\alpha, x, \omega) = -\frac{27}{2}x\alpha^2 - (4 + x + 2\alpha)^3 + \frac{9}{2}(4 + x + 2\alpha)(\alpha^2 + 2x(2 + \alpha + 2\omega)). \quad (4.46)$$

De esta manera el resolvente (ecuación (4.27)) puede reescribirse en función de las raíces de  $P_3(z)$  como:

$$S_{\pm}(z) \equiv S_{\pm}(z, x, \omega, \alpha) = \frac{1}{2z} \left[ (z - \alpha) \pm \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} \right]. \quad (4.47)$$

Como uno puede observar al graficar las raíces de  $P_3(z)$  como función de  $\omega$  (ver figura 4.1), estas aparecen ordenadas como  $0 \leq \lambda_- \leq \lambda_0 \leq \lambda_+$ . De esto podemos ver que emergen dos escenarios: el primero sucede cuando la posición  $x$  de la barrera se encuentra dentro del soporte natural de la distribución MP, esto es,  $x \in [b_-(\alpha), b_+(\alpha)]$  (correspondiendo al panel de en medio en la figura 4.1). Entonces, dependiendo del valor de  $c$  comparándolo con la fracción natural de valores propios de la distribución MP a la izquierda de  $x$ ,  $c_*(x)$ , podemos tener una densidad con un soporte doble (para  $c \neq c_*(x)$ ) o podemos tener la distribución MP, la cual corresponde cuando la barrera en la posición  $x$  es ineficiente, esto es, cuando  $c = c_*(x)$ . En este caso se observa que  $\omega \in [\omega_0(\alpha, x), \omega_+(\alpha, x)]$  y el valor de  $\omega$  está controlando la fracción  $c$  de valores propios a la izquierda de  $x$  partiendo de  $c = 0$  ( $\omega = \omega_0(\alpha, x)$ ) a  $c = 1$  ( $\omega = \omega_+(\alpha, x)$ ). La verdadera expresión que relaciona a  $\omega$  con  $c$  será obtenida más adelante. El segundo escenario corresponde cuando la posición de la barrera está afuera del soporte natural, esto es, cuando  $x \notin [b_-(\alpha), b_+(\alpha)]$ . En este caso tenemos que  $\omega \in [\omega_0(\alpha), 0]$  o que  $\omega \in [0, \omega_+(\alpha)]$ , respectivamente (y corresponde a los paneles derecho e izquierdo de la figura 4.1, respectivamente).

De hecho ambos escenarios pueden ser juntados al redefinir las raíces del discriminante  $\Delta$  como sigue:

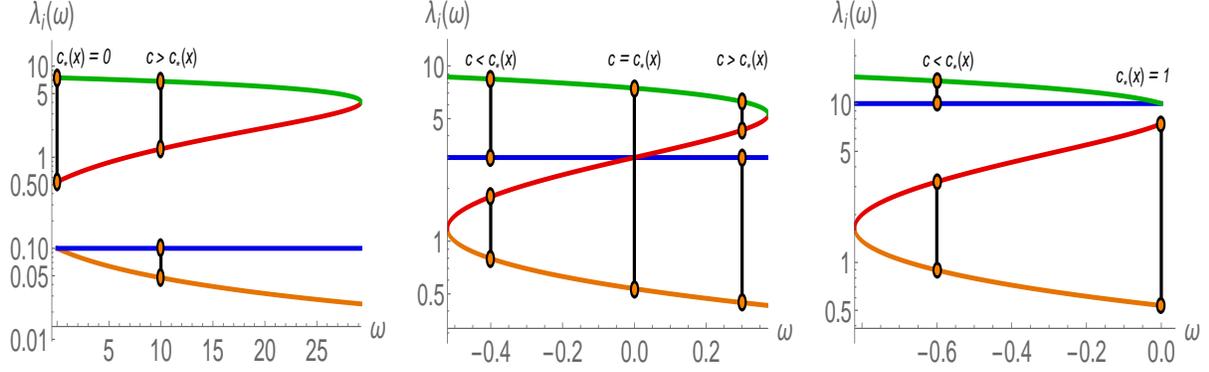


Figura 4.1: Gráfica de las raíces  $0 \leq \lambda_-(\alpha, x, \omega) \leq \lambda_0(\alpha, x, \omega) \leq \lambda_+(\alpha, x, \omega)$  y la posición de la barrera en  $x$  (línea azul sólida) como función de  $\omega$ . En este caso  $\alpha = 2$  y  $x = 1/10, 3, 10$  (de izquierda a derecha).

$$\omega_0(\alpha, x) = \begin{cases} 0 & x < b_-(\alpha) \\ \frac{1}{48x} \left[ \kappa(\alpha, x) - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \chi(\alpha, x) - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \frac{\Xi(\alpha, x)}{\chi(\alpha, x)} \right] & x \geq b_-(\alpha) \end{cases}, \quad (4.48)$$

$$\omega_+(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{1}{48x} \left[ \kappa(\alpha, x) - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \chi(\alpha, x) - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \frac{\Xi(\alpha, x)}{\chi(\alpha, x)} \right] & x \leq b_+(\alpha) \\ 0 & x > b_+(\alpha) \end{cases}. \quad (4.49)$$

Un resumen puede encontrarse en la figura 4.2, donde pueden observarse las regiones restringidas en los planos  $(x, \omega)$  y  $(x, c)$ . Aquí la curva roja corresponde a la expresión de  $c_*(x)$  cuya expresión exacta (véase sección 4.2.3) está dada por

$$c_*(x) = \begin{cases} 0, & x < b_-(\alpha) \\ \varpi(x), & x \in [b_-(\alpha), b_+(\alpha)] \\ 1, & x > b_+(\alpha) \end{cases}, \quad (4.50)$$

donde

$$\varpi(t) = \frac{\sqrt{(b_+(\alpha) - t)(t - b_-(\alpha))} + 2(2 + \alpha) \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{t - b_-(\alpha)}{4\sqrt{1+\alpha}}} \right) - 2\alpha \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{b_+(\alpha)(t - b_-(\alpha))}{b_-(\alpha)(b_+(\alpha) - t)}} \right)}{2\pi}, \quad (4.51)$$

para cualquier  $t \in [b_-(\alpha), b_+(\alpha)]$ .

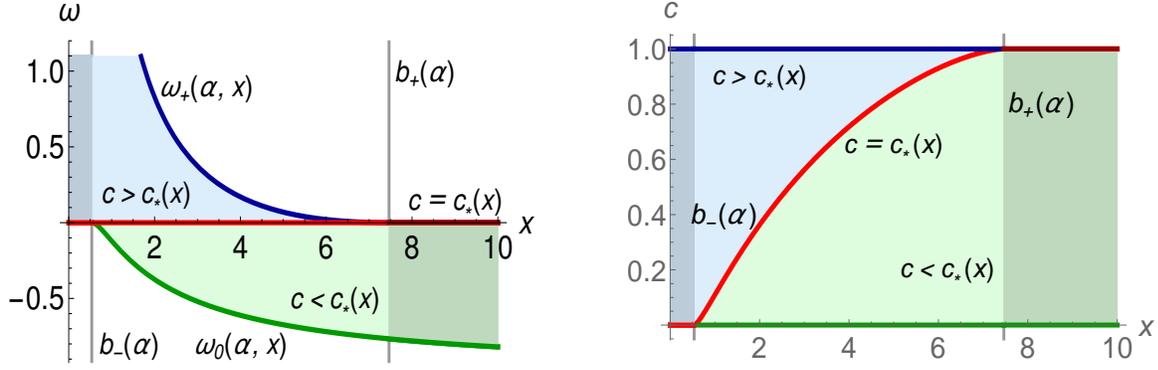


Figura 4.2: Izquierda: Región permitida para las soluciones físicas en el plano  $(x, \omega)$ , acotadas por las líneas  $\omega = \omega_+$  (línea azul) y  $\omega = \omega_0$  (línea verde). Cuando  $\omega = 0$  (línea roja), la solución corresponde a la distribución MP. A lo largo de esta línea la fracción de valores propios a la izquierda de  $x$  es  $c = c_*(x)$ . Empezando en  $\omega = 0$  e incrementando su valor, entramos a la región rellena de color azul que corresponde a una función de densidad restringida (solución de las ecuaciones de punto silla) donde  $c$  es mayor que el valor típico  $c_*(x)$  hasta que alcanza su valor máximo  $c = 1$ , es decir, todos los valores propios se encuentran a la izquierda de  $x$ . Por otro lado, si comenzamos en  $\omega = 0$  y disminuimos su valor, entraremos a la región verde que corresponde a  $c < c_*(x)$ . De manera eventual llegaremos a  $\omega = \omega_0$  que corresponde a  $c = 0$  cuando todos los valores propios están a la derecha de  $x$ . Derecha: El plano  $(x, c)$ . La línea roja corresponde a  $c_*(x)$ . En este caso  $b_-(\alpha)$  etiqueta la región azul oscuro y  $b_+(\alpha)$  la región verde oscuro.

### 4.2.3. Expresión exacta de $c_*(x)$

Los resultados que aparecen a continuación fueron tomados de la p. 79 de [38]. En esta sección  $b_{\pm}$  denotará a  $b_{\pm}(\alpha)$ . Para encontrar la expresión exacta de  $c_*(x)$  tenemos que resolver la integral que aparece en la ecuación (4.8). Sabemos que:

$$\begin{aligned}
 c_*(x) &= \int_{b_-(\alpha)}^x d\lambda \rho_{\text{MP}}(\lambda) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{b_-(\alpha)}^x d\lambda \frac{\sqrt{(b_+(\alpha) - \lambda)(\lambda - b_-(\alpha))}}{\lambda} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{b_-(\alpha)}^x d\lambda \frac{\sqrt{R}}{\lambda}, \tag{4.52}
 \end{aligned}$$

con

$$R = (b_+ - \lambda)(\lambda - b_-) = -\lambda^2 + \lambda(b_+ + b_-) - b_+b_- = a + b\lambda + c_1\lambda^2, \quad (4.53)$$

donde hemos denotado

$$a = -b_+b_-, \quad b = b_+ + b_-, \quad c_1 = -1, \quad (4.54)$$

y definimos  $\Delta = 4b_+b_- - (b_+ + b_-)^2$ . Sabemos que

$$\int d\lambda \frac{\sqrt{R}}{\lambda} = \sqrt{R} + a \int \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{R}} + \frac{b}{2} \int \frac{d\lambda}{\sqrt{R}}. \quad (4.55)$$

Trabajemos con los términos de la integral anterior.

1. Debido a que  $a < 0$  y  $\Delta < 0$  tenemos que

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \sin^{-1} \left( \frac{2a + b\lambda}{\lambda\sqrt{-\Delta}} \right).$$

2. Ya que  $c_1 < 0$  y  $\Delta < 0$  sabemos que

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{R}} = -\frac{1}{\sqrt{-c_1}} \sin^{-1} \left( \frac{2c_1\lambda + b}{\sqrt{-\Delta}} \right)$$

Finalmente la ecuación (4.55) puede escribirse como

$$\int d\lambda \frac{\sqrt{R}}{\lambda} = \sqrt{R} + \frac{a}{\sqrt{-a}} \sin^{-1} \left( \frac{2a + b\lambda}{\lambda\sqrt{-\Delta}} \right) - \frac{b}{2\sqrt{-c_1}} \sin^{-1} \left( \frac{2c_1\lambda + b}{\sqrt{-\Delta}} \right). \quad (4.56)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} c_\star(x) &= \frac{\sqrt{(b_+ - x)(x - b_-)}}{2\pi} - \frac{\sqrt{(b_+ - x)(x - b_-)}}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left( \frac{b_+x + b_-(-2b_+ + x)}{(b_+ - b_-)x} \right) \right] \\ &+ \frac{b_+ + b_-}{4\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left( \frac{b_+ + b_- - 2x}{b_- - b_+} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

y simplificando la expresión anterior obtenemos finalmente que

$$c_*(x) = \frac{\sqrt{(b_+ - x)(x - b_-)} + 2(2 + \alpha) \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{x - b_-}{4\sqrt{1 + \alpha}}} \right) - 2\alpha \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{b_+(x - b_-)}{b_-(b_+ - x)}} \right)}{2\pi}, \quad (4.58)$$

para cualquier  $x \in [b_-(\alpha), b_+(\alpha)]$ .

#### 4.2.4. Distribución deformada MP

Con la ayuda del análisis realizado para las raíces de  $P_3(z)$  podemos finalmente escribir una expresión exacta para la distribución deformada MP (que da solución a las ecuaciones de punto silla):

$$\rho_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi\lambda} \begin{cases} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_-)}{x - \lambda}} I_{\lambda \in [\lambda_-, x]} + \sqrt{\frac{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_-)}{\lambda - x}} I_{\lambda \in [\lambda_0, \lambda_+]}, & c > c_*(x) \\ \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_+)(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}{\lambda - x}} I_{\lambda \in [\lambda_-, \lambda_0]} + \sqrt{\frac{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_-)}{\lambda - x}} I_{\lambda \in [x, \lambda_+]}, & c < c_*(x) \end{cases}, \quad (4.59)$$

para cualquier  $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ , y donde  $I_{x \in D}$  es igual a 1 si  $x \in D$  y cero en otro caso.

Esta expresión se simplifica de manera significativa cuando todos los valores propios están a la izquierda o a la derecha de la barrera situada en la posición  $x$ . Desde el punto de vista de las raíces de  $P_3(z)$  esto corresponde algebraicamente a tener  $\Delta = 0$  (véase ecuación (4.33)) y  $\Delta_0 \neq 0$ , lo que implica tener una raíz doble y una raíz simple dadas por

$$x_1 = x_2 = \frac{9ad - bc}{2\Delta_0}, \quad (4.60)$$

$$x_3 = \frac{4abc - 9a^2d - b^3}{a\Delta_0}, \quad (4.61)$$

que en nuestro caso serán

$$\lambda_1(\alpha, x, \omega) = \frac{\alpha^2(\alpha + 2) + x^2(\alpha + 2\omega + 2) + x(-2\alpha^2 + 4\alpha(\omega + 2) + 8(\omega + 1))}{\alpha(\alpha + 16) + x^2 - 2x(\alpha + 6\omega + 2) + 16}, \quad (4.62)$$

$$\lambda_2(\alpha, x, \omega) = \frac{-4(2\alpha + x + 4)(\alpha^2 + 2x(\alpha + 2\omega + 2)) + 9\alpha^2x + (2\alpha + x + 4)^3}{\alpha(\alpha + 16) + x^2 - 2x(\alpha + 6\omega + 2) + 16}. \quad (4.63)$$

Aquí  $\omega$  debe escogerse de tal manera que  $\omega = \omega_0$  (correspondiendo a todos los valores propios a la derecha de  $x$ ) o  $\omega = \omega_+$  (correspondiendo a todos los valores propios a la izquierda de  $x$ ). Notemos que gráficamente la raíz que es doble corresponde a la que iguala a  $x$  (panel central en la figura 4.1), es decir, la que está pegada a la barrera. Por ende, para

$c = 1$  tenemos que  $\lambda_+ = \lambda_0$ , mientras que para  $c = 0$  tenemos que  $\lambda_- = \lambda_0$ . Las ecuaciones siguientes resumen los resultados obtenidos. La densidad espectral para todos los valores propios a la izquierda o a la derecha de la barrera en la posición  $x$  tiene la forma siguiente:

$$\rho_L(\lambda) = \begin{cases} \rho_{\text{MP}}(\lambda), & x > b_+(\alpha) \\ \frac{1}{2\pi\lambda} \sqrt{\frac{(\lambda - \ell_L(\alpha, x))}{x - \lambda}} |\lambda - u_L(\alpha, x)| I_{\lambda \in [\ell_L(\alpha, x), x]}, & x \leq b_+(\alpha) \end{cases}, \quad (4.64)$$

y

$$\rho_R(\lambda) = \begin{cases} \rho_{\text{MP}}(\lambda), & x < b_-(\alpha) \\ \frac{1}{2\pi\lambda} \sqrt{\frac{u_R(\alpha, x) - \lambda}{\lambda - x}} |\lambda - \ell_R(\alpha, x)| I_{\lambda \in [x, u_R(\alpha, x)]}, & x \geq b_-(\alpha) \end{cases}, \quad (4.65)$$

para cualquier  $\lambda \in [0, \infty)$ , donde  $R$  y  $L$  denotan que todos los valores propios se encuentran a la izquierda y a la derecha de  $x$ , respectivamente. Las funciones anteriores concuerdan con los resultados presentados en [16]. Aquí hemos usado las siguientes definiciones

$$u_L(\alpha, x) = \frac{\alpha^2(\alpha + 2) + x^2(\alpha + 2\omega_+ + 2) + x(-2\alpha^2 + 4\alpha(\omega_+ + 2) + 8(\omega_+ + 1))}{\alpha(\alpha + 16) + x^2 - 2x(\alpha + 6\omega_+ + 2) + 16}, \quad (4.66)$$

$$\ell_L(\alpha, x) = \lambda_-(\alpha, x, \omega_+(\alpha, x)), \quad (4.67)$$

$$\ell_R(\alpha, x) = \frac{\alpha^2(\alpha + 2) + x^2(\alpha + 2\omega_0 + 2) + x(-2\alpha^2 + 4\alpha(\omega_0 + 2) + 8(\omega_0 + 1))}{\alpha(\alpha + 16) + x^2 - 2x(\alpha + 6\omega_0 + 2) + 16}, \quad (4.68)$$

$$u_R(\alpha, x) = \lambda_+(\alpha, x, \omega_0(\alpha, x)). \quad (4.69)$$

En las ecuaciones anteriores hemos obtenido  $u_L(\alpha, x)$  y  $\ell_R(\alpha, x)$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u_L(\alpha, x) &= \lambda_+(\alpha, x, \omega_+(\alpha, x)) = \lambda_0(\alpha, x, \omega_+(\alpha, x)), \\ \ell_R(\alpha, x) &= \lambda_-(\alpha, x, \omega_0(\alpha, x)) = \lambda_0(\alpha, x, \omega_0(\alpha, x)). \end{aligned}$$

Finalmente podemos obtener una expresión que relacione a los parámetros  $\omega$  con la fracción  $c$  de valores propios a la izquierda de la barrera en la posición  $x$ .

#### 4.2.5. Expresión para $c(\alpha, x, \omega)$

En esta sección obtendremos una expresión exacta para relacionar  $\omega$  con  $c$ . Esto se realiza integrando la distribución deformada MP (ecuación 4.59) de acuerdo al caso que corresponda:  $c > c_*(x)$  o  $c < c_*(x)$ . Para los resultados obtenidos a continuación hemos utilizado (252.11, 252.12, 253.11 y 253.12) de [57].

**Caso**  $c > c_*(x)$

En este caso por la ecuación (4.59) tendremos que

$$c(\alpha, x, \omega) = \int_{\lambda_-}^x d\lambda \frac{1}{2\pi\lambda} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_-)}{x - \lambda}}. \quad (4.70)$$

Calculemos

$$I_1 = \int_{\lambda_-}^x d\lambda \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_-)}{x - \lambda}}. \quad (4.71)$$

Denotemos por  $t = \lambda$ ,  $a = \lambda_+$ ,  $b = \lambda_0$ ,  $y = c_1 = x$  y  $d = \lambda_-$ . Entonces  $a > b > c_1 \geq y > d$  y la ecuación anterior puede escribirse como

$$I_1 = \int_d^y \frac{dt}{t} \sqrt{\frac{(t-a)(t-b)(t-d)}{c_1-t}}. \quad (4.72)$$

Multiplicando la ecuación anterior por  $\frac{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-d)}}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-d)}}$  tenemos que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_d^y \frac{dt}{t} \frac{(t-a)(t-b)(t-d)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(c_1-t)(t-d)}} \\ &= \int_d^y dt \frac{t^2}{\sqrt{(t-a)(t-b)(c_1-t)(t-d)}} - (a+b+d) \int_d^y dt \frac{t}{\sqrt{(t-a)(t-b)(c_1-t)(t-d)}} \\ &\quad + (ab+ad+bd) \int_d^y dt \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)(c_1-t)(t-d)}} \\ &\quad - abd \int_d^y \frac{dt}{t} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)(c_1-t)(t-d)}}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Utilizando que

$$\int_d^y \frac{t^m dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(c_1-t)(t-d)}} = d^m g \int_0^{u^1} \frac{(1 - \widetilde{\alpha}_1^2 \operatorname{sn}^2(u))^m}{(1 - \widetilde{\alpha}^2 \operatorname{sn}^2(u))^m} du, \quad (4.74)$$

$$\int_d^y \frac{dt}{t^m \sqrt{(t-a)(t-b)(c_1-t)(t-d)}} = \frac{g}{d^m} \int_0^{u_1} \frac{(1 - \tilde{\alpha}^2 \text{sn}^2(u))^m}{(1 - \tilde{\alpha}_1^2 \text{sn}^2(u))^m} du, \quad (4.75)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1^2 &= \frac{a(d-c_1)}{(a-c_1)d}, & k^2 &= \frac{(a-b)(c_1-d)}{(a-c_1)(b-d)}, & g &= \frac{2}{\sqrt{(a-c_1)(b-d)}}, & \tilde{\alpha}^2 &= \frac{d-c_1}{a-c_1} < 0, \\ \varphi &= \sin^{-1} \sqrt{\frac{(a-c_1)(y-d)}{(c_1-d)(a-y)}}, & u_1 &= Z_0 = F(\varphi, k), \end{aligned}$$

podemos reescribir los términos de la ecuación (4.73) de la manera siguiente. Los primeros tres términos pueden reescribirse al utilizar las ecuaciones (4.74) y (H.7), en ese orden, mientras que el cuarto término al utilizar las ecuaciones (4.75) y (H.8).

1. Primer término.

$$\int_d^y dt \frac{t^2}{\sqrt{(t-a)(t-b)(c_1-t)(t-d)}} = d^2 g Z_2. \quad (4.76)$$

2. Segundo término.

$$\int_d^y dt \frac{t}{\sqrt{(t-a)(t-b)(c_1-t)(t-d)}} = dg Z_1. \quad (4.77)$$

3. Tercer término.

$$\int_d^y dt \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)(c_1-t)(t-d)}} = g Z_0. \quad (4.78)$$

4. Cuarto término.

$$\int_d^y \frac{dt}{t} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)(c_1-t)(t-d)}} = \frac{g}{d} \bar{Z}_1. \quad (4.79)$$

De esta manera podemos escribir a  $I_1$  como:

$$\begin{aligned} I_1 &= d^2 g Z_2 - (a+b+d) dg Z_1 + (ab+ad+bd) g Z_0 - abd \frac{g}{d} \bar{Z}_1 \\ &= g \left( d^2 Z_2 - (a+b+d) d Z_1 + (ab+ad+bd) F(\varphi, k) - ab \bar{Z}_1 \right). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Sabemos que  $c(\alpha, x, \omega) = \frac{1}{2\pi} I_1$ , así que simplificando la ecuación (4.80) usando las expresiones de las ecuaciones (H.9-H.14) obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} c(\alpha, x, \omega) &= \frac{1}{2\pi \sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \left[ (\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-) E(k) - (\lambda_+ - \lambda_-) \left( (\lambda_+ - x) K(k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-) \Pi \left( \frac{\lambda_- - x}{\lambda_+ - x}, k \right) + 2\lambda_0 \Pi \left( \frac{\lambda_+(\lambda_- - x)}{\lambda_-(\lambda_+ - x)}, k \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.81)$$

donde  $k = \sqrt{\frac{(\lambda_+ - \lambda_0)(x - \lambda_-)}{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}}$  es el módulo elíptico,  $K(k)$ ,  $E(k)$ , y  $\Pi(n, k)$  corresponden a las integrales elípticas completas de primer, segundo y tercer tipo (véase apéndice H), respectivamente.

**Caso**  $c < c_*(x)$

En este caso por la ecuación (4.59) tenemos que

$$c(\alpha, x, \omega) = \int_{\lambda_-}^{\lambda_0} d\lambda \frac{1}{2\pi\lambda} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_+)(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}{\lambda - x}}. \quad (4.82)$$

Necesitamos resolver

$$I = \int_{\lambda_-}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\lambda} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_+)(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}{\lambda - x}} \quad (4.83)$$

De manera análoga al caso anterior, si denotamos por  $t = \lambda$ ,  $a = \lambda_+$ ,  $b = x$ ,  $c_1 = \lambda_0$  y  $d = y = \lambda_-$ , tenemos que  $a > b > c_1 > y \geq d$  y de esta manera podemos reescribir a  $I$  como

$$I = \int_y^{c_1} \frac{dt}{t} \sqrt{\frac{(t-a)(t-c_1)(t-d)}{b-t}}. \quad (4.84)$$

Multiplicando la ecuación anterior por  $\frac{\sqrt{(t-a)(t-c_1)(t-d)}}{\sqrt{(t-a)(t-c_1)(t-d)}}$  tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \int_y^{c_1} dt \frac{t^2}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-c_1)(t-d)}} - (a+c_1+d) \int_y^{c_1} dt \frac{t}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-c_1)(t-d)}} \\ &+ (ac_1+ad+c_1d) \int_y^{c_1} dt \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-c_1)(t-d)}} \\ &- ac_1d \int_y^{c_1} dt \frac{1}{t\sqrt{(t-a)(b-t)(t-c_1)(t-d)}}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Utilizando que

$$\int_y^{c_1} \frac{t^m dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)(c_1-t)(t-d)}} = c_1^m g \int_0^{u_1} \frac{(1-\tilde{\alpha}_1^2 \operatorname{sn}^2(u))^m}{(1-\tilde{\alpha}^2 \operatorname{sn}^2(u))^m} du, \quad (4.86)$$

$$\int_y^{c_1} \frac{dt}{t^m \sqrt{(a-t)(b-t)(c_1-t)(t-d)}} = \frac{g}{c_1^m} \int_0^{u_1} \frac{(1-\tilde{\alpha}^2 \operatorname{sn}^2(u))^m}{(1-\tilde{\alpha}_1^2 \operatorname{sn}^2(u))^m} du, \quad (4.87)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1^2 &= \frac{b(c_1-d)}{c_1(b-d)}, \quad k^2 = \frac{(a-b)(c_1-d)}{(a-c_1)(b-d)}, \quad g = \frac{2}{\sqrt{(a-c_1)(b-d)}}, \quad \tilde{\alpha}^2 = \frac{c_1-d}{b-d}, \\ \varphi &= \sin^{-1} \sqrt{\frac{(b-d)(c_1-y)}{(c_1-d)(b-y)}}, \quad u_1 = Z_0 = F(\varphi, k), \end{aligned}$$

podemos reescribir  $I$  (de manera análoga al caso anterior) como

$$I = c_1^2 g Z_2 - (a+c_1+d) c_1 g Z_1 + (ac_1+ad+c_1d) g Z_0 - gad \bar{Z}_1 \quad (4.88)$$

Al simplificar  $c(\alpha, x, \omega) = \frac{1}{2\pi} I$  utilizando las ecuaciones (H.9-H.14) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}
c(\alpha, x, \omega) = & \frac{1}{2\pi x \sqrt{(\lambda_+ - \lambda_0)(x - \lambda_-)}} \left[ (x - \lambda_0) \left( - (2\lambda_+ - x)(x - \lambda_-) K(k) \right. \right. \\
& + x(\lambda_+ - x + \lambda_0 + \lambda_-) \Pi \left( \frac{\lambda_0 - \lambda_-}{x - \lambda_-}, k \right) \\
& \left. \left. - 2\lambda_+ \lambda_- \Pi \left( \frac{x(\lambda_0 - \lambda_-)}{\lambda_0(x - \lambda_-)}, k \right) \right) + x(\lambda_+ - \lambda_0)(x - \lambda_-) E(k) \right], \quad (4.89)
\end{aligned}$$

$$\text{con } k = \sqrt{\frac{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}{(\lambda_+ - \lambda_0)(x - \lambda_-)}}.$$

Ahora tenemos todo lo necesario para graficar la distribución deformada MP (ecuación 4.59). Estas gráficas se muestran en la figura 4.3 junto con simulaciones Monte Carlo para valores decrecientes de  $c$  de izquierda a derecha.

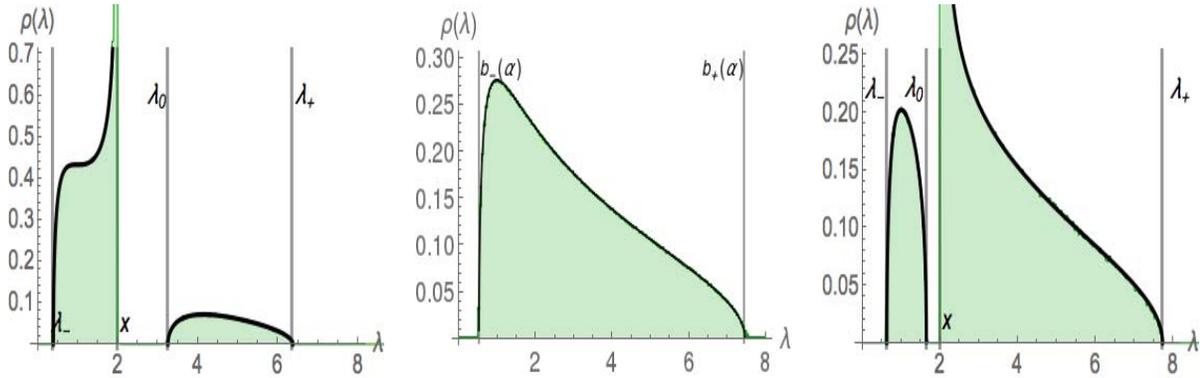


Figura 4.3: Distribución deformada MP para  $x = 2$  y  $\alpha = 2$  correspondiendo al valor  $c_*(\alpha, x) = 0.362418$ . El fondo verde de las gráficas corresponde a simulaciones Monte Carlo con  $N = 600$  y con  $10^5$  pasos de Monte Carlo para termalizar y  $10^5$  pasos de Monte Carlo para reunir a todos los valores propios. Los valores propios han sido distribuidos de cada lado de la barrera para alcanzar la fracción deseada  $c$  que, de izquierda a derecha, corresponde a los valores siguientes  $c = 5/6, 0.362418, 1/6$ . La curva de color negro corresponde a las curvas teóricas dadas por las ecuaciones (4.59) y (3.15), donde la gráfica del centro corresponde a la distribución MP.

#### 4.2.6. Evaluando la acción y la función tasa en el punto silla

Por la ecuación (3.48) la acción evaluada en el punto silla  $\rho_0$  tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(c, x) \equiv \mathcal{A}[\rho_0, B_1, B_2] = & - \iint d\lambda d\lambda' \rho_0(\lambda) \rho_0(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'| + \int d\lambda \rho_0(\lambda) (\lambda - \alpha \ln(\lambda)) \\ & + B_1 \left( \int d\lambda \rho_0(\lambda) \Theta(x - \lambda) - c \right) + B_2 \left( \int d\lambda \rho_0(\lambda) - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Realicemos el siguiente truco para poder reescribir a la doble integral que aparece en la ecuación anterior. Si multiplicamos la ecuación de punto silla (4.12) por  $\rho_0$  y después la integramos respecto a  $\lambda$ , nos lleva a la siguiente expresión:

$$2 \iint d\lambda d\lambda' \rho_0(\lambda) \rho_0(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'| = \int d\lambda \rho_0(\lambda) (\lambda - \alpha \ln(\lambda)) + B_1 \int d\lambda \rho_0(\lambda) \Theta(x - \lambda) + B_2. \quad (4.91)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (4.90) podremos escribir

$$\mathcal{A}_0(c, x) = \frac{1}{2} \int d\lambda \rho_0(\lambda) (\lambda - \alpha \ln(\lambda)) - \frac{1}{2} B_1 c - \frac{1}{2} B_2, \quad (4.92)$$

donde  $c \equiv c(\alpha, x, \omega)$  dado por las ecuaciones (4.81) y (4.89), dependiendo el caso correspondiente. Lo siguiente que tenemos que realizar es obtener una expresión exacta del primer término de la ecuación anterior y de las variables  $B_1$  y  $B_2$ .

### Expresión exacta para el primer término de $\mathcal{A}_0(c, x)$

Buscamos una expresión exacta para

$$\frac{1}{2} \int d\lambda \rho_0(\lambda) (\lambda - \alpha \ln(\lambda)) = \frac{1}{2} \left( \int d\lambda \rho_0(\lambda) \lambda - \alpha \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln(\lambda) \right). \quad (4.93)$$

Recordemos que el resolvente está dado por (véase definición C.2)

$$S(z) = \int d\lambda \frac{\rho_0(\lambda)}{z - \lambda}.$$

De [35] sabemos que

$$S(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu_j}{z^{j+1}}, \quad (4.94)$$

con

$$\mu_j = \int d\lambda \rho_0(\lambda) \lambda^j, \quad (4.95)$$

para cualquier  $j = 0, 1, \dots$ . Por otra parte, si hacemos una expansión en series de Taylor de  $S_-(z)$  dado por la ecuación (4.21) tenemos que:

$$S_-(z) = \frac{1}{z} + \frac{1 + \alpha - x\omega}{z^2} + \dots \quad (4.96)$$

Comparando esta expresión con la ecuación (4.94), concluimos que  $\mu_1 = 1 + \alpha - x\omega$  y de la ecuación (4.95) tenemos que

$$\int d\lambda \rho_0(\lambda) \lambda = 1 + \alpha - x\omega. \quad (4.97)$$

Por otro lado, realizando el siguiente truco tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_-} dz S_+(z) &= \int_0^{\lambda_-} \int dz d\lambda \frac{\rho_0(\lambda)}{z - \lambda} \\ &= \int d\lambda \rho_0(\lambda) \int_0^{\lambda_-} dz \frac{1}{z - \lambda} \\ &= \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |\lambda_- - \lambda| - \int d\lambda \rho(\lambda) \ln |\lambda|, \end{aligned} \quad (4.98)$$

y por lo tanto

$$\int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |\lambda| = \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |\lambda_- - \lambda| - \int_0^{\lambda_-} dz S_+(z). \quad (4.99)$$

Si evaluamos la ecuación del punto silla (4.12) en  $\lambda_-$  tendremos que

$$\begin{aligned} 2 \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |\lambda_- - \lambda| &= \lambda_- - \alpha \ln(\lambda_-) + B_1 \Theta(x - \lambda_-) + B_2 \\ &= \lambda_- - \alpha \ln(\lambda_-) + B_1 + B_2. \end{aligned} \quad (4.100)$$

En la ecuación anterior hemos usado el hecho de que  $x > \lambda_-$  y la definición B.2 de  $\Theta$ .

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (4.99) tenemos que

$$\int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |\lambda| = \frac{1}{2} (\lambda_- - \alpha \ln(\lambda_-) + B_1 + B_2) - \int_0^{\lambda_-} dz S_+(z). \quad (4.101)$$

Finalmente, al sustituir las ecuaciones (4.97) y (4.101) en la ecuación (4.93) obtenemos

$$\frac{1}{2} \int d\lambda \rho_0(\lambda) (\lambda - \alpha \ln(\lambda)) = \frac{1 + \alpha - x\omega}{2} - \frac{\alpha}{4} \left[ \lambda_- - \alpha \ln(\lambda_-) + B_1 + B_2 - 2 \int_0^{\lambda_-} dz S_+(z) \right]. \quad (4.102)$$

### Expresiones para las constantes $B_1$ y $B_2$

Dividiremos en dos casos nuestras derivaciones para encontrar las expresiones de  $B_1$  y de  $B_2$ .

#### 1. Caso $c > c_*(x)$

En este caso el soporte de la densidad espectral  $\rho_0$  es  $[\lambda_-, x] \cup [\lambda_0, \lambda_+]$ . Evaluando los puntos  $\lambda_+ - \varepsilon$ ,  $\lambda_0 + \varepsilon$  y  $x - \varepsilon$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , en la ecuación (4.12) y utilizando la definición B.2, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$2 \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |\lambda_+ - \lambda| = \lambda_+ - \alpha \ln(\lambda_+) + B_2, \quad (4.103)$$

$$2 \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |\lambda_0 - \lambda| = \lambda_0 - \alpha \ln(\lambda_0) + B_2, \quad (4.104)$$

$$2 \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |x - \lambda| = x - \alpha \ln(x) + B_1 + B_2. \quad (4.105)$$

Despejando  $B_2$  en la ecuación (4.103) y después despejando  $B_2$  en la ecuación (4.104), sustituyendolo en la ecuación (4.105) y finalmente despejando a  $B_1$  de esa misma ecuación, obtenemos

$$B_2 = -\lambda_+ + \alpha \ln(\lambda_+) + 2 \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |\lambda_+ - \lambda|, \quad (4.106)$$

$$B_1 = \lambda_0 - x + \alpha \ln\left(\frac{x}{\lambda_0}\right) + 2 \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln \left| \frac{x - \lambda}{\lambda_0 - \lambda} \right|. \quad (4.107)$$

Deseamos escribir las integrales de las ecuaciones anteriores en función de integrales del resolvente  $S(z)_\pm$ . Entonces realizamos el siguiente truco

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_0}^x dz S_+(z) &= \int_{\lambda_0}^x dz \int d\lambda \frac{\rho_0(\lambda)}{z - \lambda} \\
&= \int d\lambda \rho_0(\lambda) \int_{\lambda_0}^x dz \frac{1}{z - \lambda} \\
&= \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln \left| \frac{x - \lambda}{\lambda_0 - \lambda} \right|,
\end{aligned}$$

y

$$\int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |\lambda_+ - \lambda| = \ln(\lambda_+) - \int_{\lambda_+}^{\infty} dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right),$$

que sustituyendolas en las ecuaciones (4.106) y (4.107) tendremos que

$$B_2 = -\lambda_+ + \alpha \ln(\lambda_+) + 2 \left( \ln(\lambda_+) - \int_{\lambda_+}^{\infty} dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right) \right), \quad (4.108)$$

$$B_1 = \lambda_0 - x + \alpha \ln \left( \frac{x}{\lambda_0} \right) + 2 \int_{\lambda_0}^x dz S_+(z). \quad (4.109)$$

## 2. Caso $c < c_*(x)$

En este caso el soporte de  $\rho_0$  es  $[\lambda_-, \lambda_0] \cup [x, \lambda_+]$ . Evaluando los puntos  $\lambda_+ - \varepsilon$ ,  $x + \varepsilon$  y  $\lambda_0 - \varepsilon$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , en la ecuación (4.12) y usando la definición B.2 tenemos que

$$2 \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |\lambda_+ - \lambda| = \lambda_+ - \alpha \ln(\lambda_+) + B_2, \quad (4.110)$$

$$2 \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |x - \lambda| = x - \alpha \ln(x) + B_2, \quad (4.111)$$

$$2 \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |\lambda_0 - \lambda| = \lambda_0 - \alpha \ln(\lambda_0) + B_1 + B_2. \quad (4.112)$$

Despejando  $B_2$  en la ecuación (4.110) y después despejando  $B_2$  en la ecuación (4.111), sustituyendolo en la ecuación (4.112) y finalmente despejando a  $B_1$  de esa misma ecuación, obtenemos

$$B_2 = -\lambda_+ + \alpha \ln(\lambda_+) + 2 \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |\lambda_+ - \lambda|, \quad (4.113)$$

$$B_1 = -\lambda_0 + x + \alpha \ln \left( \frac{\lambda_0}{x} \right) + 2 \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln \left| \frac{\lambda_0 - \lambda}{x - \lambda} \right|. \quad (4.114)$$

Nuevamente queremos expresar las integrales que aparecen en las ecuaciones anteriores en función de integrales del resolvente  $S(z)_\pm$ . Realizando trucos similares a los anteriores tenemos que

$$\int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln \left| \frac{\lambda_0 - \lambda}{x - \lambda} \right| = \int_x^{\lambda_0} dz S_-(z),$$

$$\int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln |\lambda_+ - \lambda| = \ln(\lambda_+) - \int_{\lambda_+}^{\infty} dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right),$$

que sustituyéndolas en las ecuaciones (4.113) y (4.114) tendremos que

$$B_2 = -\lambda_+ + \alpha \ln(\lambda_+) + 2 \left( \ln(\lambda_+) - \int_{\lambda_+}^{\infty} dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right) \right), \quad (4.115)$$

$$B_1 = x - \lambda_0 + \alpha \ln \left( \frac{\lambda_0}{x} \right) + 2 \int_x^{\lambda_0} dz S_-(z). \quad (4.116)$$

Como podemos notar en ambos casos la expresión de  $B_2$  (ecuaciones (4.108) y (4.115)) resulta ser la misma. De manera similar, las ecuaciones (4.109) y (4.116) para  $B_1$  resultan ser iguales. Esto último puede verse de la siguiente manera.

Utilizando la forma del resolvente de la ecuación (4.47) tenemos que

$$2 \int_{\lambda_0}^x dz S_+(z) = x - \lambda_0 - \alpha \ln \left( \frac{x}{\lambda_0} \right) + \int_{\lambda_0}^x dz \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}, \quad (4.117)$$

que es justo el término que aparece en la ecuación (4.109). Por lo tanto

$$B_1 = \int_{\lambda_0}^x dz \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}.$$

Por otro lado, nuevamente usando la forma del resolvente de la ecuación (4.47)

$$2 \int_x^{\lambda_0} dz S_-(z) = \lambda_0 - x - \alpha \ln \left( \frac{\lambda_0}{x} \right) - \int_x^{\lambda_0} dz \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}, \quad (4.118)$$

siendo el término que aparece en la ecuación (4.116). Por lo tanto

$$B_1 = - \int_x^{\lambda_0} dz \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}. \quad (4.119)$$

Como puede verse, en los dos casos cuando  $c > c_*(x)$  y  $c < c_*(x)$  obtenemos la misma expresión para  $B_1$ .

Entonces, sustituyendo las ecuaciones (4.102), (4.115) y (4.116) en la ecuación (4.92) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(c, x) &= \frac{1 + \alpha - x\omega}{2} - \frac{\alpha}{4} \left( \lambda_- - \alpha \ln(\lambda_-) - 2 \int_0^{\lambda_-} dz S_+(z) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( c + \frac{\alpha}{2} \right) \left( x - \lambda_0 + \alpha \ln(\lambda_0/x) + 2 \int_x^{\lambda_0} dz S_-(z) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \left( -\lambda_+ + (2 + \alpha) \ln(\lambda_+) - 2 \int_{\lambda_+}^{\infty} \left[ S_-(z) - \frac{1}{z} \right] \right), \end{aligned} \quad (4.120)$$

que es válida para  $c > c_*$ , dado por la ecuación (4.81), y  $c < c_*$ , dado por la ecuación (4.89). La función tasa es tan sólo

$$\Psi(c, x) = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_0(c, x) - \Omega_0), \quad (4.121)$$

con

$$\Omega_0 = \frac{1}{2} \left( \alpha^2 \ln \left( \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right) + 3\alpha - (2\alpha + 1) \ln(\alpha + 1) + 3 \right), \quad (4.122)$$

obtenido en [32]. Con esta función tasa única, ecuación (4.121), unificamos los resultados obtenidos en la literatura [13, 19, 29, 32].

Como se muestra en [34, 35], es posible obtener una expresión exacta de la acción (4.120) en función de integrales elípticas (véase sección 4.2.7). En la figura 4.4, presentamos un *density plot* de la función tasa en términos del par de variables  $(x, c)$  y  $(x, \omega)$ .

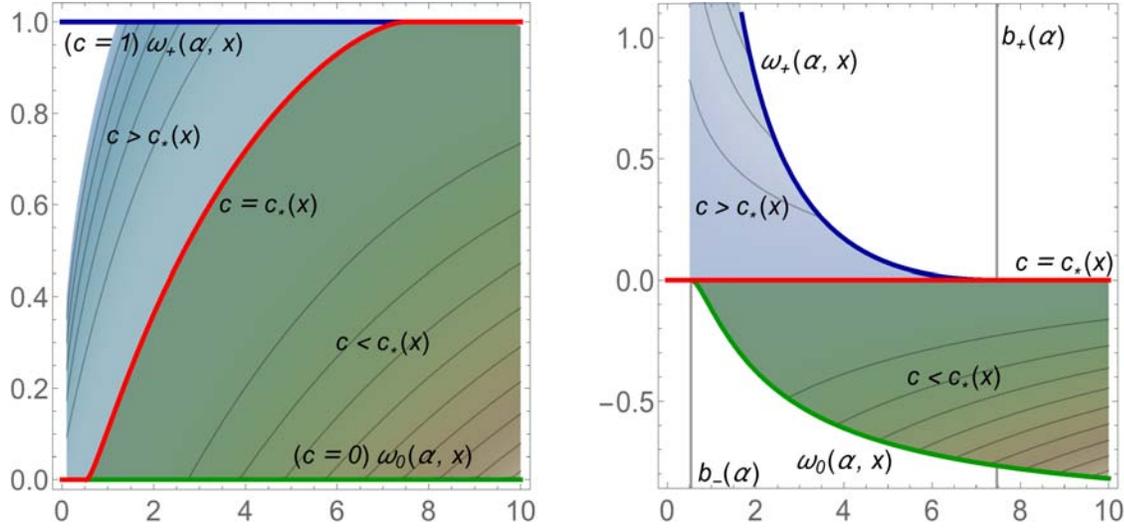


Figura 4.4: *Density plot* de la función tasa (ecuación (4.121)) en los planos  $(x, c)$  y  $(x, \omega)$ . En este caso  $\alpha = 2$

Finalmente podemos extraer las funciones tasa de los valores propios más pequeño y más grande. Denotemos por  $\Psi_M^{(\pm)}(x)$  y  $\Psi_m^{(\pm)}(x)$  a las funciones tasa izquierda (signo menos) y derecha (signo más) del valor propio más grande y más pequeño, respectivamente. De hecho, puede mostrarse que

$$\Psi_m^{(-)}(x) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{\Psi(c, x)}{c}, \quad x \leq b_-(\alpha), \quad (4.123)$$

$$\Psi_m^{(+)}(x) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \Psi(c, x), \quad x \geq b_-(\alpha), \quad (4.124)$$

y

$$\Psi_M^{(-)}(x) = \lim_{c \rightarrow 1^-} \Psi(c, x), \quad x \leq b_+(\alpha), \quad (4.125)$$

$$\Psi_M^{(+)}(x) = \lim_{c \rightarrow 1^-} \frac{\Psi(c, x)}{1 - c}, \quad x \geq b_+(\alpha). \quad (4.126)$$

donde las expresiones de  $\Psi_M^{(\pm)}(x)$  y  $\Psi_m^{(\pm)}(x)$  corresponden a las reportadas en [19, 29, 32]. En la figura 4.5, presentamos una comparación de la parte izquierda y derecha de las ecuaciones (4.123-4.126).

#### 4.2.7. La acción en función de integrales elípticas

Primero recordemos que la acción está escrita en función de integrales del resolvente  $S(z)_\pm$ , ecuación (4.120). Lo que haremos en seguida es expresar estas integrales del resol-

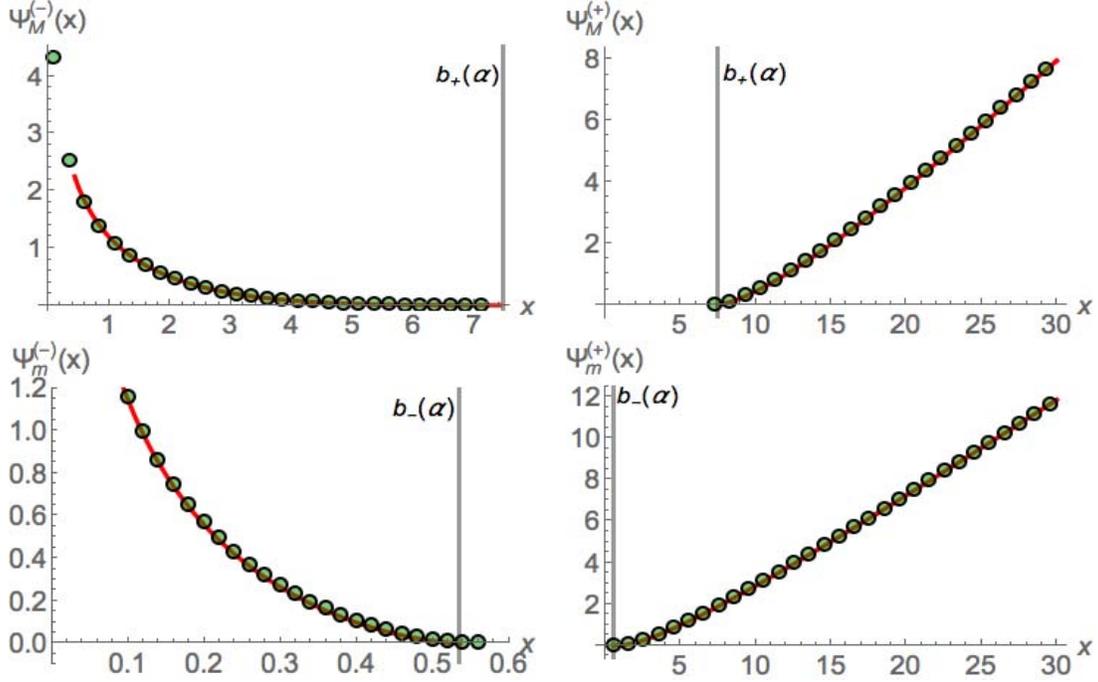


Figura 4.5: Comparación entre  $\Psi(c, x)$  para los valores extremos (círculos verdes) de acuerdo a las fórmulas (4.123-4.126) y los resultados obtenidos en [19, 29, 32] (curvas rojas). Las gráficas han sido realizadas escogiendo  $\alpha = 2$ .

ente en función de integrales elípticas. La manera en la que expresaremos estas integrales es análoga a como lo hicimos en la sección 4.2.5, al verificar la forma de la integral correspondiente usando [57]. Estos resultados los dividiremos en dos casos,  $c > c_*$  y  $c < c_*$ .

#### Caso $c > c_*$

En este caso la densidad  $\rho_0$ , ecuación (4.59), tiene soporte en  $[\lambda_-, x] \cup [\lambda_0, \lambda_+]$ .

1. Integral  $\int_{\lambda_0}^x dz S_+(z)$

Por la forma del resolvente en la ecuación (4.47), esta integral tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_0}^x dz S_+(z) &= \int_{\lambda_0}^x dz \frac{1}{2z} \left[ z - \alpha + \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_{\lambda_0}^x dz \left( 1 - \frac{\alpha}{z} \right) + \frac{1}{2} \int_{\lambda_0}^x dz \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} \\
&= \frac{1}{2} (x - \lambda_0 - \alpha \ln(x/\lambda_0)) - \frac{1}{2} \int_x^{\lambda_0} \frac{dz}{\lambda} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}.
\end{aligned}$$

Trabajando con

$$K_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) = \int_x^{\lambda_0} \frac{dz}{\lambda} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}, \quad (4.127)$$

llegamos a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
K_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) &= \frac{1}{x \sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \left[ x(x - \lambda_+)(\lambda_0 - \lambda_-) E(k) \right. \\
&\quad - (x - \lambda_-) \left( x(\lambda_0 - \lambda_-) K(k) + x(\lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-) \Pi \left( \frac{\lambda_0 - x}{\lambda_0 - \lambda_-}, k \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\lambda_+ \lambda_0 \Pi \left( \frac{(\lambda_0 - x)\lambda_-}{x(\lambda_0 - \lambda_-)}, k \right) \right) \right],
\end{aligned}$$

con  $k^2 = \frac{(\lambda_0 - x)(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}$ , y donde  $K(k)$ ,  $E(k)$  y  $\Pi(n, k)$ , son las integrales elípticas completas de primer, segundo y tercer tipo, respectivamente. Por lo tanto

$$\int_{\lambda_0}^x dz S_+(z) = \frac{1}{2} (x - \lambda_0 - \alpha \ln(x/\lambda_0)) - \frac{1}{2} K_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-). \quad (4.128)$$

$$\text{Integral 2. } \int_{\lambda_+}^{\infty} dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right)$$

Para este caso calcularemos  $\int_{\lambda_+}^y dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right)$  cuando  $y \rightarrow \infty$ . Nuevamente, utilizando la forma del resolvente que aparece en la ecuación (4.47), esta integral tiene la forma siguiente

$$\int_{\lambda_+}^y dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right) = \int_{\lambda_+}^y dz \left( \frac{1}{2z} \left[ z - \alpha - \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} \right] - \frac{1}{z} \right) \quad (4.129)$$

$$= \frac{1}{2}(y - \lambda_+ - (\alpha + 1) \ln(y/\lambda_+)) - \frac{1}{2} \int_{\lambda_+}^y \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}. \quad (4.130)$$

Notamos que  $y$  y  $\ln(y/\lambda_+)$  divergen cuando  $y \rightarrow \infty$ , pero sin embargo  $\int_{\lambda_+}^y dz (S_-(z) - \frac{1}{z})$  converge al sustraer la parte divergente  $\frac{1}{z}$ , lo que nos sugiere que  $\int_{\lambda_+}^y \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}$  tiene una divergencia lineal y una logarítmica que contrarresta las divergencias de  $y$  y de  $\ln(y/\lambda_+)$ .

Si denotamos por  $a = \lambda_+ > b = \lambda_0 > c_1 = x > d = \lambda_-$  y  $t = z$ , tendremos que

$$I = \int_{\lambda_+}^y dz \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} = \int_a^y dt \frac{1}{t} \sqrt{\frac{(t - a)(t - b)(t - d)}{t - c_1}}. \quad (4.131)$$

Expresando a  $I$  en función de integrales elípticas, tendremos que:

$$I = g (a^2 Z_2 - (a + b + d)a Z_1 + (ab + ad + bd)F(\varphi, k) - bd \bar{Z}_1), \quad (4.132)$$

con

$$\widetilde{\alpha}_1^2 = \frac{b(a - d)}{a(b - d)}, \quad k^2 = \frac{(b - c_1)(a - d)}{(a - c_1)(b - d)}, \quad g = \frac{2}{\sqrt{(a - c_1)(b - d)}}, \quad \widetilde{\alpha}^2 = \frac{a - d}{b - d},$$

$$\varphi = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(b - d)(y - a)}{(a - d)(y - b)}},$$

y donde las funciones  $Z_1$ ,  $\bar{Z}_1$  y  $Z_2$  están dadas por las ecuaciones (H.10), (H.11) y (H.12).

Por otro lado, haciendo una expansión en series de Taylor de  $\frac{1}{t} \sqrt{\frac{(t - a)(t - b)(t - d)}{t - c_1}}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , tenemos que:

$$\frac{1}{t} \sqrt{\frac{(t-a)(t-b)(t-d)}{t-c_1}} \sim 1 + \frac{-a-b+c_1-d}{2t}, \quad (4.133)$$

para  $t$  grande, y además

$$\int_{\lambda_+}^y dt \left( 1 + \frac{-a-b+c_1-d}{2t} \right) = y - \lambda_+ + \frac{-a-b+c_1-d}{2} \ln \left( \frac{y}{\lambda_+} \right). \quad (4.134)$$

Por este resultado podemos ver justo que la integral  $I$  tiene una divergencia lineal y logarítmica cuando  $y \rightarrow \infty$ . Estas divergencias son canceladas con el término  $(y - \lambda_+ - (\alpha + 1) \ln(y/\lambda_+))$  que aparecen en la ecuación (4.129).

Tomando esto en consideración, definimos ahora una nueva integral donde estas divergencias son removidas, es decir, definimos

$$\tilde{I} = \int_a^y dt \left( \frac{1}{t} \sqrt{\frac{(t-a)(t-b)(t-d)}{t-c_1}} - 1 - \frac{-a-b+c_1-d}{2t} \right), \quad (4.135)$$

Lo siguiente es localizar las divergencias logarítmica y lineal de  $I$  en la ecuación (4.132). Haciendo una análisis, vemos que estas divergencias vienen de las funciones  $\widehat{\Pi}(\varphi, \tilde{\alpha}^2, k)$  y  $\frac{\tilde{\alpha}^4 \text{sn}(u) \text{cn}(u) \text{dn}(u)}{1 - \tilde{\alpha}^2 \text{sn}^2(u)}$ . De la siguiente identidad [58]

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}(z, n, m) &= F(z, m) - \widehat{\Pi}\left(z, \frac{m}{n}, m\right) \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\frac{(n-m)(n-1)}{n}}} \ln \left( \frac{\sqrt{\frac{(n-m)(n-1)}{n}} \tan z + \sqrt{1 - m \sin^2(z)}}{\sqrt{1 - m \sin^2(z)} - \sqrt{\frac{(n-m)(n-1)}{n}} \tan z} \right), \end{aligned} \quad (4.136)$$

sabemos que la divergencia de  $\widehat{\Pi}(\varphi, \tilde{\alpha}^2, k)$  es logarítmica y al hacer una expansión en series de Taylor para  $\frac{\tilde{\alpha}^4 \text{sn}(u) \text{cn}(u) \text{dn}(u)}{1 - \tilde{\alpha}^2 \text{sn}^2(u)}$  observamos que su divergencia es lineal. Esta serie de Taylor es

$$\frac{\tilde{\alpha}^4 \text{sn}(u) \text{cn}(u) \text{dn}(u)}{1 - \tilde{\alpha}^2 \text{sn}^2(u)} = \mathcal{E}_2(a, b, c_1, d) + Ay + B \frac{1}{y} + \dots, \quad (4.137)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes innecesarias y

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{(a-d)(a-b+c_1+d)}{2\sqrt{a-c_1}(b-d)^{3/2}}. \quad (4.138)$$

Usando la identidad en la ecuación (4.136) y haciendo una expansión en series de Taylor para el término  $\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{(n-m)(n-1)}{n}}\tan z + \sqrt{1-m\sin^2(z)}}{\sqrt{1-m\sin^2(z)} - \sqrt{\frac{(n-m)(n-1)}{n}}\tan z}\right)$ , con  $z = \varphi$ ,  $n = \tilde{\alpha}^2$  y  $m = k$ , tenemos que

$$\hat{\Pi}\left(\varphi, \frac{a-d}{b-d}, k\right) = -\hat{\Pi}\left(\theta, \frac{b-c_1}{a-c_1}, k\right) + F(\theta, k) + \mathcal{E}_1(a, b, c_1, d) + A \ln y, \quad (4.139)$$

donde  $\theta = \sin^{-1}\sqrt{\frac{b-d}{a-d}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \sin^{-1}\sqrt{\frac{(b-d)(y-a)}{(a-d)(y-b)}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \varphi$ ,  $A$  es una constante innecesaria y

$$\mathcal{E}_1(a, b, c_1, d) = \frac{\sqrt{(a-c_1)(b-d)}}{2(a-b)} \ln\left(\frac{4}{a+b-c_1-d}\right). \quad (4.140)$$

Redefiniendo las nuevas funciones  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{Z}$  donde no consideramos estas divergencias, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= F(\theta, k), \\ \mathcal{V}_1 &= -\hat{\Pi}\left(\theta, \frac{b-c_1}{a-c_1}, k\right) + F(\theta, k) + \mathcal{E}_1(a, b, c_1, d), \\ \mathcal{V}_2 &= \frac{1}{2(\tilde{\alpha}^2 - 1)(k^2 - \tilde{\alpha}^2)} \left[ \tilde{\alpha}^2 E(\theta, k) + (k^2 - \alpha^2)\mathcal{V}_0 + (2\tilde{\alpha}^2 k^2 + 2\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\alpha}^4 - 3k^2) \mathcal{V}_1 \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{E}_2(a, b, c_1, d) \right], \\ \mathcal{Z}_0 &= F(\theta, k), \\ \mathcal{Z}_1 &= \frac{1}{\tilde{\alpha}^2} [(\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\alpha}_1^2)\mathcal{V}_1 + \tilde{\alpha}_1^2 \mathcal{V}_0], \\ \bar{\mathcal{Z}}_1 &= \frac{1}{\tilde{\alpha}_1^2} [(\tilde{\alpha}_1^2 - \tilde{\alpha}^2)\hat{\Pi}(\theta, \tilde{\alpha}_1^2, k) + \tilde{\alpha}^2 \mathcal{V}_0], \\ \mathcal{Z}_2 &= \frac{1}{\tilde{\alpha}^4} [\tilde{\alpha}_1^4 \mathcal{Z}_0 + 2\tilde{\alpha}_1^2 (\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\alpha}_1^2)\mathcal{V}_1 + (\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\alpha}_1^2)^2 \mathcal{V}_2], \end{aligned}$$

Usando estas definiciones y tomando  $y \rightarrow \infty$  tenemos que

$$\tilde{I} = g(a^2 \mathcal{Z}_2 - (a + b + d)a\mathcal{Z}_1 + (ab + ad + bd)\mathcal{Z}_0 - bd\bar{\mathcal{Z}}_1) + a + \frac{-a - b + c_1 - d}{2} \ln(a). \quad (4.141)$$

Simplificando esta expresión, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) = & -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \left[ 2(\lambda_+ - \lambda_0)(\lambda_+ - x + 2\lambda_-)F(\theta, k) \right. \\ & + 2(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)E(\theta, k) + 4\lambda_-(\lambda_0 - \lambda_+)\widehat{\Pi}\left(\theta, \frac{\lambda_0(\lambda_+ - \lambda_-)}{\lambda_+(\lambda_0 - \lambda_-)}, k\right) \\ & - 2(\lambda_+ - \lambda_0)(\lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-)\widehat{\Pi}\left(\theta, \frac{\lambda_0 - x}{\lambda_+ - x}, k\right) \\ & + \sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}\left((\lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-)\ln\left(\frac{4\lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_0 - x - \lambda_-}\right) \right. \\ & \left. \left. - \lambda_+ - \lambda_0 + x + \lambda_-\right) \right], \end{aligned}$$

con  $k^2 = \frac{(\lambda_0 - x)(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}$ , donde  $F(\theta, k)$ ,  $E(\theta, k)$  y  $\widehat{\Pi}(\theta, n, k)$ , son las integrales elípticas incompletas de primer, segundo y tercer tipo, respectivamente.

Finalmente obtenemos

$$\int_{\lambda_+}^{\infty} dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{2} \tilde{I}(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-). \quad (4.142)$$

**Caso  $c < c_*$**

En este caso, el soporte de la densidad  $\rho_0$  es  $[\lambda_-, \lambda_0] \cup [x, \lambda_+]$

$$1. \text{ Integral } \int_x^{\lambda_0} dz S_-(z)$$

De la ecuación (4.47) del resolvente sabemos que la siguiente integral es igual a

$$\int_x^{\lambda_0} dz S_-(z) = \int_x^{\lambda_0} dz \frac{1}{2z} \left[ z - \alpha - \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} \right] \quad (4.143)$$

$$= \frac{1}{2} [\lambda_0 - x - \alpha \ln(\lambda_0/x)] + \frac{1}{2} \int_{\lambda_0}^x \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}. \quad (4.144)$$

Si denotamos por  $t = z$ ,  $a = \lambda_+$ ,  $b = y = x$ ,  $c_1 = \lambda_0$  y  $d = \lambda_-$ , entonces

$$\int_{\lambda_0}^x \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} = \int_{c_1}^y dt \frac{1}{t} \sqrt{\frac{(t - a)(t - c_1)(t - d)}{t - b}}. \quad (4.145)$$

En este caso procedemos de la misma manera que en la sección (4.2.5) y obtenemos que

$$\int_x^{\lambda_0} dz S_-(z) = \frac{1}{2}(\lambda_0 - x - \alpha \ln(\lambda_0/x)) + \frac{1}{2}K_2(\lambda_+, x, \lambda_0, \lambda_-), \quad (4.146)$$

donde

$$K_2(\lambda_+, x, \lambda_0, \lambda_-) = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda_0)(x - \lambda_-)}} \left[ (\lambda_0 - \lambda_-) \left( (x - \lambda_-)K(k) + (\lambda_+ - x + \lambda_0 + \lambda_-) \right. \right. \\ \left. \left. \Pi\left(\frac{x - \lambda_0}{x - \lambda_-}, k\right) - 2\lambda_+ \Pi\left(\frac{(x - \lambda_0)\lambda_-}{\lambda_0(x - \lambda_-)}, k\right) \right) + (\lambda_+ - \lambda_0)(x - \lambda_-)E(k) \right], \quad (4.147)$$

con  $k^2 = \frac{(x - \lambda_0)(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ - \lambda_0)(x - \lambda_-)}$  y donde  $K(k)$ ,  $E(k)$  y  $\Pi(n, k)$  son las integrales elípticas completas de primer, segundo y tercer tipo.

## 2. Integral $\int_0^{\lambda_-} dz S_+(z)$

Lo que haremos será considerar la integral  $\int_y^{\lambda_-} dz S_+(z)$  cuando  $y \rightarrow 0$ . Entonces por la definición del resolvente de la ecuación (4.47) podemos escribir

$$\int_y^{\lambda_-} dz S_+(z) = \int_y^{\lambda_-} dz \frac{1}{2z} \left[ z - \alpha + \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} \right] \\ = \frac{1}{2}(\lambda_- - y - \alpha \ln(\lambda_-/y)) + \frac{1}{2} \int_y^{\lambda_-} \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}. \quad (4.148)$$

Como podemos observar tenemos una divergencia con el término  $\ln(\lambda_-/y)$  cuando  $y \rightarrow \infty$ . Sin embargo, la integral  $\int_y^{\lambda_-} dz S_+(z)$  converge, lo que nos sugiere que

$$\int_y^{\lambda_-} \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}},$$

tiene una divergencia logarítmica que cancela al término  $\ln(\lambda_-/y)$ . Primero, calculemos la integral  $\int_y^{\lambda_-} \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{(z-\lambda_+)(z-\lambda_0)(z-\lambda_-)}{z-x}}$  en función de integrales elípticas.

Para hacerlo, supongamos que  $c > c_*$  para poder denotar  $a = \lambda_+$ ,  $b = \lambda_0$ ,  $c_1 = x$ ,  $d = \lambda_-$ , y  $a > b > c_1 > d > y$ , entonces

$$I = \int_y^{\lambda_-} \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{(z-\lambda_+)(z-\lambda_0)(z-\lambda_-)}{z-x}} = \int_y^d \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{(z-a)(z-b)(z-d)}{z-c_1}}. \quad (4.149)$$

Tendremos que

$$\begin{aligned} I(a, b, c_1, d, y) &= \frac{(a-c_1)(c_1-2b)(c_1-d)}{c_1 \sqrt{(a-c_1)(b-d)}} F(\varphi, k) + \sqrt{(a-c_1)(b-d)} E(\varphi, k) \\ &+ \frac{(d-c_1)(a+b-c_1+d)}{\sqrt{(a-c_1)(b-d)}} \widehat{\Pi}(\varphi, \tilde{\alpha}^2, k) + \frac{2ab(c_1-d)}{c_1 \sqrt{(a-c_1)(b-d)}} \widehat{\Pi}(\varphi, \tilde{\alpha}_1^2, k) \\ &+ \frac{(a-d)(d-b)}{\sqrt{(a-c_1)(b-d)}} \frac{\operatorname{cn}(F(\varphi, k)) \operatorname{dn}(F(\varphi, k), k) \operatorname{sn}(F(\varphi, k), k)}{1 - \tilde{\alpha}^2 \operatorname{sn}^2(F(\varphi, k), k)}, \end{aligned} \quad (4.150)$$

donde

$$\varphi = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(a-c_1)(d-y)}{(a-d)(c_1-y)}}, \quad k^2 = \frac{(b-c_1)(a-d)}{(a-c_1)(b-d)}, \quad \tilde{\alpha}^2 = \frac{a-d}{a-c_1}, \quad \tilde{\alpha}_1^2 = \frac{c_1(a-d)}{d(a-c_1)}, \quad (4.151)$$

Nuevamente notamos que la divergencia logarítmica proviene de  $\widehat{\Pi}(\varphi, \tilde{\alpha}_1^2, k)$  al usar la identidad que aparece en la ecuación (4.136).

Haciendo un expansión en series de Taylor de  $\frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z-a)(z-b)(z-d)}{z-c_1}}$  cuando  $z \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$\frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z-a)(z-b)(z-d)}{z-c_1}} \sim \sqrt{\frac{abd}{c_1}} \frac{1}{z} + A + Bz, \quad (4.152)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes innecesarias. Si integramos la expresión anterior tendremos que

$$\int_y^d dz \left( \sqrt{\frac{abd}{c_1}} \frac{1}{z} + A + Bz \right) = \sqrt{\frac{abd}{c_1}} \ln(d/y) + A(d-y) + \frac{B}{2}(d^2 - y^2). \quad (4.153)$$

Notamos que cuando  $y \rightarrow \infty$  el término que nos da la divergencia es  $\sqrt{\frac{abd}{c_1}} \ln(d/y)$  que proviene de  $\sqrt{\frac{abd}{c_1}} \frac{1}{z}$  en la integral anterior. Por ende definimos la siguiente integral sustrayendo esta divergencia

$$\begin{aligned} \bar{I}_0(a, b, c_1, d, y) &= \int_y^d dz \left( \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z-a)(z-b)(z-d)}{z-c_1}} - \sqrt{\frac{abd}{c_1}} \frac{1}{z} \right) \\ &= I(a, b, c_1, d, y) - \sqrt{\frac{abd}{c_1}} \ln(d/y). \end{aligned} \quad (4.154)$$

Entonces definimos

$$\begin{aligned} \bar{I}_1(a, b, c_1, d) &= \lim_{y \rightarrow 0} \bar{I}_0(a, b, c_1, d, y) \\ &= \frac{(a-c_1)(c_1-2b)(c_1-d)}{c_1 \sqrt{(a-c_1)(b-d)}} F(\theta, k) + \sqrt{(a-c_1)(b-d)} E(\theta, k) \\ &\quad + \frac{(d-c_1)(a+b-c_1+d)}{\sqrt{(a-c_1)(b-d)}} \hat{\Pi}(\theta, \tilde{\alpha}^2, k) \\ &\quad + \frac{(a-d)(d-b)}{\sqrt{(a-c_1)(b-d)}} \frac{\text{cn}(F(\theta, k)) \text{dn}(F(\theta, k), k) \text{sn}(F(\theta, k), k)}{1 - \tilde{\alpha}^2 \text{sn}^2(F(\theta, k), k)} - \sqrt{\frac{abd}{c_1}} \ln(d) \\ &\quad + \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{2ab(c_1-d)}{c_1 \sqrt{(a-c_1)(b-d)}} \hat{\Pi}(\varphi, \tilde{\alpha}_1^2, k) - \sqrt{\frac{abd}{c_1}} \ln(y) \right], \end{aligned} \quad (4.155)$$

donde  $\theta = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(a-c_1)d}{(a-d)c_1}} = \lim_{y \rightarrow 0} \sin^{-1} \sqrt{\frac{(a-c_1)(d-y)}{(a-d)(c_1-y)}} = \lim_{y \rightarrow 0} \varphi$ .

El límite anterior puede reescribirse al usar la identidad de la ecuación (4.136)

$$\begin{aligned}
& \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{2ab(c_1 - d)}{c_1 \sqrt{(a - c_1)(b - d)}} \widehat{\Pi}(\varphi, \tilde{\alpha}_1^2, k) - \sqrt{\frac{abd}{c_1}} \ln(y) \right] \\
&= \frac{2ab(c_1 - d)}{c_1 \sqrt{(a - c_1)(b - d)}} \left[ -\widehat{\Pi} \left( \theta, \frac{d(b - c_1)}{c_1(b - d)}, k \right) + F(\theta, k) \right] \\
&+ \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{2ab(c_1 - d)}{c_1 \sqrt{(a - c_1)(b - d)}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{(\tilde{\alpha}_1^2 - k)(\tilde{\alpha}_1^2 - 1)}{\tilde{\alpha}_1^2}}} \ln \left( \frac{\sqrt{\frac{(\tilde{\alpha}_1^2 - k)(\tilde{\alpha}_1^2 - 1)}{\tilde{\alpha}_1^2}} \tan(\varphi) + \sqrt{1 - k \sin^2(\varphi)}}{\sqrt{1 - k \sin^2(\varphi)} - \sqrt{\frac{(\tilde{\alpha}_1^2 - k)(\tilde{\alpha}_1^2 - 1)}{\tilde{\alpha}_1^2}} \tan(\varphi)} \right) \right. \\
&\left. - \sqrt{\frac{abd}{c_1}} \ln(y) \right] \\
&= \frac{2ab(c_1 - d)}{c_1 \sqrt{(a - c_1)(b - d)}} \left[ -\widehat{\Pi} \left( \theta, \frac{d(b - c_1)}{c_1(b - d)}, k \right) + F(\theta, k) \right] \\
&+ \sqrt{\frac{abd}{c_1}} \ln \left( \frac{4abc_1d}{abc_1 + abd - ac_1d - bc_1d} \right). \tag{4.156}
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
& \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{2ab(c_1 - d)}{c_1 \sqrt{(a - c_1)(b - d)}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{(\tilde{\alpha}_1^2 - k)(\tilde{\alpha}_1^2 - 1)}{\tilde{\alpha}_1^2}}} \ln \left( \frac{\sqrt{\frac{(\tilde{\alpha}_1^2 - k)(\tilde{\alpha}_1^2 - 1)}{\tilde{\alpha}_1^2}} \tan(\varphi) + \sqrt{1 - k \sin^2(\varphi)}}{\sqrt{1 - k \sin^2(\varphi)} - \sqrt{\frac{(\tilde{\alpha}_1^2 - k)(\tilde{\alpha}_1^2 - 1)}{\tilde{\alpha}_1^2}} \tan(\varphi)} \right) \right. \\
&\left. - \sqrt{\frac{abd}{c_1}} \ln(y) \right] = \sqrt{\frac{abd}{c_1}} \ln \left( \frac{4abc_1d}{abc_1 + abd - ac_1d - bc_1d} \right), \tag{4.157}
\end{aligned}$$

al usar *Mathematica*<sup>®</sup>. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) &= \frac{(\lambda_+ + 2\lambda_0 - x)(x - \lambda_-)}{\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} F(\theta, k) + \sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)} E(\theta, k) \\
&+ \frac{(\lambda_- - x)(\lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-)}{\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \Pi(\theta, \tilde{\alpha}^2, k) \\
&+ \frac{(\lambda_+ - \lambda_-)(\lambda_- - \lambda_0)}{\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \frac{\operatorname{cn}(F(\theta, k), k) \operatorname{dn}(F(\theta, k), k) \operatorname{sn}(F(\theta, k), k)}{1 - \tilde{\alpha}^2 \operatorname{sn}^2(F(\theta, k), k)} \\
&- \frac{2\lambda_+ \lambda_0 (x - \lambda_-)}{x \sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \Pi \left( \theta, \frac{\lambda_- (\lambda_0 - x)}{x(\lambda_0 - \lambda_-)}, k \right) \\
&+ \sqrt{\frac{\lambda_+ \lambda_0 \lambda_-}{x}} \ln \frac{4\lambda_+ \lambda_0 x}{\lambda_+ \lambda_0 x + \lambda_+ \lambda_0 \lambda_- - \lambda_+ x \lambda_- - \lambda_0 x \lambda_-},
\end{aligned}$$

y

$$\int_0^{\lambda_-} dz S_+(z) = \frac{1}{2} \tilde{I}_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) + \frac{\lambda_-}{2}. \quad (4.158)$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (4.128), (4.142), (4.146) y (4.158) en la ecuación (4.120) tenemos

Para  $c > c_*$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(c, x) &= \frac{1 + \alpha - x\omega}{2} + \frac{\alpha}{4} \left( \alpha \ln(\lambda_-) + \tilde{I}_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( c + \frac{\alpha}{2} \right) K_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) \\ &- \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \left( -\lambda_+ + (2 + \alpha) \ln(\lambda_+) + \tilde{I}(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) \right), \end{aligned}$$

con las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) &= \frac{(\lambda_+ + 2\lambda_0 - x)(x - \lambda_-)}{\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} F(\theta_1, k) + \sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)} E(\theta_1, k) \\ &+ \frac{(\lambda_- - x)(\lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-)}{\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \hat{\Pi}(\theta_1, \tilde{\alpha}^2, k) \\ &+ \frac{(\lambda_+ - \lambda_-)(\lambda_- - \lambda_0)}{\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \frac{\operatorname{cn}(F(\theta_1, k), k) \operatorname{dn}(F(\theta_1, k), k) \operatorname{sn}(F(\theta_1, k), k)}{1 - \tilde{\alpha}^2 \operatorname{sn}^2(F(\theta_1, k), k)} \\ &- \frac{2\lambda_+ \lambda_0 (x - \lambda_-)}{x \sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \hat{\Pi}\left(\theta_1, \frac{\lambda_- (\lambda_0 - x)}{x(\lambda_0 - \lambda_-)}, k\right) \\ &+ \sqrt{\frac{\lambda_+ \lambda_0 \lambda_-}{x}} \ln \frac{4\lambda_+ \lambda_0 x}{\lambda_+ \lambda_0 x + \lambda_+ \lambda_0 \lambda_- - \lambda_+ x \lambda_- - \lambda_0 x \lambda_-}, \\ K_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) &= \frac{1}{x \sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \left[ x(x - \lambda_+)(\lambda_0 - \lambda_-) E(k) \right. \\ &- (x - \lambda_-) \left( x(\lambda_0 - \lambda_-) K(k) + x(\lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-) \Pi\left(\frac{\lambda_0 - x}{\lambda_0 - \lambda_-}, k\right) \right. \\ &\left. \left. - 2\lambda_+ \lambda_0 \Pi\left(\frac{(\lambda_0 - x)\lambda_-}{x(\lambda_0 - \lambda_-)}, k\right) \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) &= -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \left[ 2(\lambda_+ - \lambda_0)(\lambda_+ - x + 2\lambda_-)F(\theta_2, k) \right. \\
&\quad + 2(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)E(\theta_2, k) + 4\lambda_-(\lambda_0 - \lambda_+)\widehat{\Pi}\left(\theta_2, \frac{\lambda_0(\lambda_+ - \lambda_-)}{\lambda_+(\lambda_0 - \lambda_-)}, k\right) \\
&\quad - 2(\lambda_+ - \lambda_0)(\lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-)\widehat{\Pi}\left(\theta_2, \frac{\lambda_0 - x}{\lambda_+ - x}, k\right) \\
&\quad + \sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}\left((\lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-)\ln\left(\frac{4\lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_0 - x - \lambda_-}\right) \right. \\
&\quad \left. - \lambda_+ - \lambda_0 + x + \lambda_-\right) \left. \right], \\
\theta_1 &= \sin^{-1} \sqrt{\frac{(\lambda_+ - x)\lambda_-}{(\lambda_+ - \lambda_-)x}}, \quad k^2 = \frac{(\lambda_0 - x)(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}, \\
\theta_2 &= \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{\lambda_0 - \lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-}} \right).
\end{aligned}$$

Para  $c < c_*$

En este caso sólo necesitamos remplazar la función  $K_1$  por  $-K_2$  y escribir

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0(c, x) &= \frac{1 + \alpha - x\omega}{2} + \frac{\alpha}{4} \left( \alpha \ln(\lambda_-) + \tilde{I}_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( c + \frac{\alpha}{2} \right) K_2(\lambda_+, x, \lambda_0, \lambda_-) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \left( -\lambda_+ + (2 + \alpha) \ln(\lambda_+) + \tilde{I}(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) \right), \tag{4.159}
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
K_2(\lambda_+, x, \lambda_0, \lambda_-) &= \frac{1}{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda_0)(x - \lambda_-)}} \left[ (\lambda_0 - \lambda_-) \left( (x - \lambda_-)K(k) + (\lambda_+ - x + \lambda_0 + \lambda_-) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \Pi\left(\frac{x - \lambda_0}{x - \lambda_-}, k\right) - 2\lambda_+\widehat{\Pi}\left(\frac{(x - \lambda_0)\lambda_-}{\lambda_0(x - \lambda_-)}, k\right) \right) + (\lambda_+ - \lambda_0)(x - \lambda_-)E(k) \right], \\
k^2 &= \frac{(x - \lambda_0)(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ - \lambda_0)(x - \lambda_-)}. \tag{4.160}
\end{aligned}$$

#### 4.2.8. Simulaciones Montecarlo

Hemos comparado nuestros resultados con simulaciones Monte Carlo del fluido de Coulomb. Primero lo hemos equilibrado usando el algoritmo de Metropolis (véase sección G.2) y después

hemos generando muestras para estimar promedios. Explicaremos como hemos generado los histogramas de la figura 4.3 que aparece en la página 58.

La figura central corresponde a la distribución de MP (ecuación (3.15)) y es obtenida cuando  $c = c_*$ . Para generar este histograma utilizamos el algoritmo presentado en la definición G.2, donde  $p_{y_1, \dots, y_N}$  viene dada por la ecuación (3.12),  $N = 600$ ,  $A = [0, \infty)$ ,  $\zeta = -1/\beta = -0.5$  y la función  $F$  por la ecuación (3.13). A continuación, presentamos el algoritmo que utilizamos en R para generar dicho histograma.

```
DF=function(y,epsilon,alpha,beta){

deltf=(1:length(y))*0

for(i in 1:length(y)){
deltf[i]=sum(log(abs(1+epsilon[i]/(y[i]-y[-i]))))
}

return(epsilon-(beta*(alpha*length(y)+1)-2)*log(1+epsilon/y)
-2*beta*deltf)
}

evalua=function(y,alpha,beta){
epsilon=rt(length(y),0.5)*length(y)
aux=y+epsilon
aux1=(y+epsilon)[aux<0]
indices=which(aux %in% aux1)

for(i in indices){
while(epsilon[i]+y[i]<0){
epsilon[i]=rt(1,0.5)*length(y)
}
}

return(epsilon)
}

simulation=function(N,M,y0,alpha,beta){

lamb=y0
for(i in 1:(M-1)){
cat("loop 1", M-i, "\n")
epsilon=evalua(lamb,alpha,beta)
```

```

p=ifelse(exp(-0.5*DF(lamb,epsilon,alpha,beta))>1,1,
exp(-0.5*DF(lamb,epsilon,alpha,beta)))
m=runif(N,0,1)
lamb=ifelse(p>m,lamb+epsilon,lamb)
}

for(i in 1:(M-1)){
cat("loop 2", M-1-i, "\n")
epsilon=evalua(lamb,alpha,beta)
p=ifelse(exp(-0.5*DF(lamb,epsilon,alpha,beta))>1,1,
exp(-0.5*DF(lamb,epsilon,alpha,beta)))
m=runif(N,0,1)
lamb=ifelse(p>m,lamb+epsilon,lamb)
}
}

```

Para generar las gráficas izquierda y derecha de la figura 4.3 hemos ocupado el algoritmo que aparece en la definición (G.3). En este caso,  $A = [0, \infty)$ ,  $N = 600$ ,  $p_{y_1, \dots, y_N}$  viene dada por la ecuación (3.12),  $\zeta = -1/\beta = -0.5$  y  $F$  dada por la ecuación (3.13). Además  $A_1 = [0, 2)$  y  $A_2 = (2, \infty)$ ,  $R_1 = R_2 = 10^5$  y  $N_1 = 500$  para la figura de la izquierda y  $N_1 = 100$  para la figura de la derecha, que corresponden a  $c = 5/6$  y  $c = 1/6$ , la fracción de valores propios a la izquierda de  $x = 2$ , respectivamente. A continuación, presentamos el algoritmo que ocupamos en R para generar estas figuras.

```

DF=function(y,epsilon,alpha,beta){
indices=which(y>0,arr.ind=T)
deltf=y*0
for(i in 1:nrow(y)){
for(j in 1:ncol(y)){

deltf[i,j]=sum(log(abs(1+epsilon[i,j]/(y[i,j]-y[i,-j]))))
}

return(epsilon-(beta*(alpha*length(y)+1)-2)*log(1+epsilon/y)
-2*beta*deltf)
}

evalua=function(y){
epsilon=matrix(rt(ncol(y)*nrow(y),0.5)*ncol(y),nrow=nrow(y),ncol=ncol(y))
indices=which(y+epsilon<0, arr.ind=T)

```

```

for(i in 1:length(epsilon[indices])){
while(epsilon[indices][i]+y[indices][i]<0){
epsilon[indices][i]=rt(1,0.5)*ncol(y)
}
}

return(epsilon)
}

simulation=function(Y,nl,nr,M,alpha,beta){

n=nl+nr
l=c(runif(nl,0,Y))
r=c(runif(nr,Y,Y^2))
y0=(1:n)*0
y0[1:nl]=l
y0[(nl+1):n]=r

y=matrix(0,ncol=n,nrow=M)
y[1,]=y0
for(i in 1:(M-1)){
cat("loop 1", M-i, "\n")
epsilon=evalua(y[i,],alpha,beta)
p=ifelse(exp(-0.5*DF(y[i,],epsilon,alpha,beta))>1,1,
exp(-0.5*DF(y[i,],epsilon,alpha,beta)))
m=runif(n,0,1)
y[i+1,1:nl]=ifelse((p[1:nl]>m[1:nl])*ifelse(y[i,1:nl]+epsilon[1:nl]<Y,1,0),
y[i,1:nl]+epsilon[1:nl],y[i,1:nl])
y[i+1,(nl+1):n]=ifelse((p[(nl+1):n]>m[(nl+1):n])*ifelse(y[i,(nl+1):n]
+epsilon[(nl+1):n]>Y,1,0),
y[i,(nl+1):n]+epsilon[(nl+1):n],y[i,(nl+1):n])

}

y[1,]=y[M,]
for(i in 1:(M-1)){

cat("loop 2", M-1-i, "\n")
epsilon=evalua(y[i,],alpha,beta)

```

```

p=ifelse(exp(-0.5*DF(y[i,],epsilon,alpha,beta))>1,1,
exp(-0.5*DF(y[i,],epsilon,alpha,beta)))
m=runif(n,0,1)
y[i+1,1:nl]=ifelse((p[1:nl]>m[1:nl])*ifelse(y[i,1:nl]+epsilon[1:nl]<Y,1,0),
y[i,1:nl]+epsilon[1:nl],y[i,1:nl])
y[i+1,(nl+1):n]=ifelse((p[(nl+1):n]>m[(nl+1):n])*ifelse(y[i,(nl+1):n]
+epsilon[(nl+1):n]>Y,1,0),
y[i,(nl+1):n]+epsilon[(nl+1):n],y[i,(nl+1):n])

}
return(y/n)
}

```

### Estimación de la acción $\mathcal{A}_0(c, x)$

Si denotamos por  $\langle \dots \rangle_{MC}$  a los promedios de acuerdo a cadenas de Markov del método Monte Carlo, entonces la acción puede estimarse como

$$\mathcal{A}_0(c, x) = \frac{1}{N^2} [\langle F(\mathbf{y}) \rangle_{MC} + uN \ln N + N(N-1) \ln N], \quad (4.161)$$

donde  $F$  está dada por

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = N \sum_{i=1}^N \lambda_i - u \sum_{i=1}^N \ln(\lambda_i) - \sum_{i \neq j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| - uN \ln(N) + N(N-1) \ln(N), \quad (4.162)$$

obtenida al hacer el rescalamiento  $\lambda \rightarrow N\lambda$ . En la figura 4.6, mostramos una comparación entre los resultados exactos (lineas solidas) junto con los estimados que resultaron de simulaciones Monte Carlo (triángulos anaranjados).

Ahora explicaremos como generamos los triángulos anaranjados de la figura 4.6

#### *Figura Izquierda*

Para generar esta gráfica se ha seguido el algoritmo de la definición G.3, escogiendo  $A = [0, \infty)$ ,  $N = 500$ ,  $R_1 = R_2 = 10000$ ,  $p_{y_1, \dots, y_2}$  dada por la ecuación (3.12) y  $F$  dada por la ecuación (4.162). En este caso notemos que  $x = 2$  nos delimitará los conjuntos  $A_1$  y  $A_2$ , siendo estos  $A_1 = [0, x)$  y  $A_2 = (x, \infty)$ . Procedimos de la siguiente manera.

1. Realizamos una partición discreta del intervalo  $[0, 1]$ , donde toma valores  $c$ . Esta partición es  $0 = c_0 < c_1, \dots, < c_{10} = 1$ . Definimos  $j = 0$ .
2. Si  $j \leq 10$ , definimos  $N_j$  como el mínimo entero mayor o igual que  $Nc_j$ . En caso contrario se termina el algoritmo.

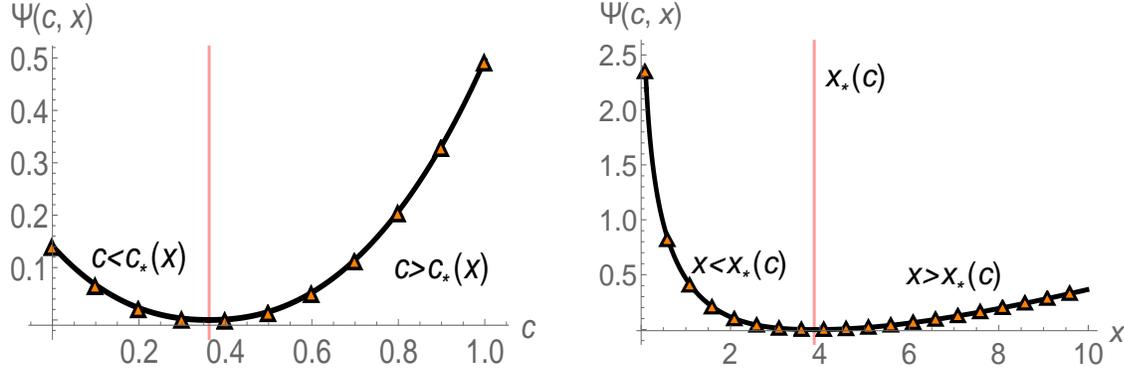


Figura 4.6: Izquierda: Función tasa vs  $c$  para  $\alpha = 2$ ,  $x = 2$  y comparación con simulaciones Monte Carlo con  $N = 500$ , 10000 pasos para *termalizar* y un promedio realizado con 10000 pasos de Monte Carlo. Derecha: Función tasa vs  $x$  para  $c = 7/10$  y comparación con simulaciones Monte Carlo. Lo último fue realizado con el mismo número de pasos para *termalizar* y realizar promedios.

3. Realizamos el algoritmo de la definición G.3 con los valores especificados previamente, con la diferencia de que al final del paso 4 del segundo *loop* definimos  $E_t = F(W_t)$ .
4. Al final del algoritmo, definimos  $\bar{F}_j = \frac{1}{R_2} \sum_{t=1}^{R_2} E_t$ .
5. Actualizamos  $j = j + 1$  y volvemos al paso 2.

Al final de este algoritmo tendremos  $\bar{F}_j$  con  $j = 0, \dots, 10$  y además  $\langle F(\mathbf{y}) \rangle_{\text{MC}}^{(j)} = \bar{F}_j$  los cuales sustituimos en la ecuación (4.161) y graficamos  $(c_j, \Psi(x, c_j))$ , generando así los triángulos anaranjados.

#### *Figura derecha*

Esta figura se genera de manera análoga a la figura anterior. Se sigue el algoritmo de la definición G.3, escogiendo  $A = [0, \infty)$ ,  $N = 500$ ,  $N_1 = (1/7)N = 350$ ,  $R_1 = R_2 = 10000$ ,  $p_{y_1, \dots, y_N}$  dada por la ecuación (3.12) y  $F$  dada por la ecuación (4.162). Procedemos de la siguiente manera.

1. Realizamos una partición discreta del intervalo  $[0, 10]$ , donde toma valores  $x$ . Esta partición es  $0 = x_0 < x_1, \dots, < x_{19} = 10$ . Definimos  $j = 0$ .
2. Si  $j \leq 19$ , definimos a  $A_1 = [0, x_j)$  y  $A_2 = (x_j, \infty)$ . En caso contrario se termina el algoritmo.
3. Realizamos el algoritmo de la definición G.3 con los valores especificados previamente, con la diferencia de que al final del paso 4 del segundo *loop* definimos  $E_t = F(W_t)$ .
4. Al final del algoritmo, definimos  $\bar{F}_j = \frac{1}{R_2} \sum_{t=1}^{R_2} E_t$ .

5. Actualizamos  $j = j + 1$  y volvemos al paso 2.

De igual manera que en la figura anterior, al final de este algoritmo tendremos  $\bar{F}_j$  con  $j = 0, \dots, 10$  y además  $\langle F(\mathbf{y}) \rangle_{\text{MC}}^{(j)} = \bar{F}_j$  los cuales sustituimos en la ecuación (4.161) y graficamos  $(x_j, \Psi(x, c_j))$ , generando así los triángulos anaranjados.

### 4.3. Ensamble de Jacobi

A continuación presentaremos los resultados obtenidos para el ensamble de Jacobi. En esta sección no profundizaremos en las derivaciones ya que son análogas al caso del ensamble de Wishart vistas con anterioridad. Consideremos matrices  $\mathbf{J}(N, M_1, M_2)$ , con  $M_1 \geq M_2 \geq N \geq 1$  del ensamble de Jacobi.

#### 4.3.1. Ecuaciones del punto silla

Para el ensamble de Jacobi no es necesario realizar ningún rescalamiento. Lo único que notamos es que  $A_i/N = -(M_i - N)/N$  para  $N$  y  $M_i$  muy grandes, y donde  $A_i$  aparece en la ecuación (3.23) para  $i = 1, 2$ . Por lo tanto la función  $V_2$  apareciendo en la ecuación (3.66) tiene la forma  $V_2(\lambda) = -\alpha_1 \ln(\lambda) - \alpha_2 \ln(1 - \lambda)$ , donde  $\alpha_i = (M_i - N)/N$  para  $i = 1, 2$ . De esta manera, las ecuaciones del punto silla tendrán la siguiente forma

$$-\alpha_1 \ln(\lambda) - \alpha_2 \ln(1 - \lambda) + B_1 \Theta(x - \lambda) + B_2 = 2 \int d\lambda' \rho(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'|, \quad (4.163)$$

$$c = \int d\lambda \rho(\lambda) \Theta(x - \lambda), \quad 1 = \int d\lambda \rho(\lambda). \quad (4.164)$$

Realizando un análisis análogo al de la sección 4.2.1 y al utilizar la transformada de Hilbert Stieltjes  $S(z)$  (véase definición C.2) llegamos a la ecuación cuadrática para  $S(z)$

$$S(z)^2 + S(z) \left( \frac{\alpha_1}{z} - \frac{\alpha_2}{1-z} \right) - \frac{\gamma_1}{z} - \frac{\gamma_2}{1-z} - \frac{\omega}{z-x} = 0, \quad (4.165)$$

donde  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\omega$  han sido escogidos apropiadamente para eliminar constantes innecesarias. Resolviendo la ecuación anterior y ocupando nuevamente que  $S(z) \sim 1/z$  para  $z \rightarrow \infty$  relacionamos los parámetros  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\omega$  como  $\gamma_1 = \gamma_2 - \omega$  y  $\gamma_2 = -1 - \alpha_1 - \alpha_2 + x\omega$ . Después de algunos cálculos llegamos a que

$$S_{\pm}(z) \equiv S_{\pm}(z; x, \omega; \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{1-z} \pm \frac{(2 + \alpha_1 + \alpha_2)}{z(1-z)} \sqrt{\frac{Q_3(z)}{z-x}} \right], \quad (4.166)$$

donde

$$Q_3(z) = (z - b_+)(z - b_-)(z - x) + 4\omega x(1 - x)z(1 - z), \quad (4.167)$$

con

$$b_{\pm} \equiv b_{\pm}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{2 + 2\alpha_2 + \alpha_1(2 + \alpha_1 + \alpha_2) \pm 2\sqrt{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 + \alpha_2)}}{(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2}, \quad (4.168)$$

son las cota superior ( $b_+$ ) e inferior ( $b_-$ ) del intervalo que forman el soporte de la distribución GMP (véase ecuación (3.19)), respectivamente. Notamos nuevamente que cuando  $\omega = 0$ , recuperamos el resolvente asociado a la distribución GMP, esto es:

$$S_{\pm}^{\text{GMP}}(z) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{1 - z} \pm \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{z(1 - z)} \sqrt{(z - b_+)(z - b_-)} \right]. \quad (4.169)$$

Por lo tanto, concluimos que el parámetro  $\omega$  controla las deformaciones de la distribución GMP debido a la barrera en la posición  $x$  y a la fracción de valores propios  $c$  a la izquierda de  $x$ . Lo siguiente a realizar es una análisis de las raíces de  $Q_3(z)$ .

### 4.3.2. Análisis de las raíces de $Q_3(z)$

El discriminante  $\Delta$  de la ecuación cúbica  $Q_3(z) = 0$  puede escribirse como

$$\Delta = 256x^4(1 - x)^4(\omega - \omega_{++})(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_{--}), \quad (4.170)$$

donde  $\omega_i(\alpha_1, \alpha_2, x)$  son las raíces de  $\Delta$  y están ordenadas como  $\omega_{++} > \omega_+ \geq 0 \geq \omega_0 > \omega_{--}$  (En este caso no se presentarán estas raíces de manera explícita, ya que resulta muy difícil poder escribirlas). Definiendo las raíces de  $Q_3(z)$  tenemos que

$$\lambda_-(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) = -\frac{1}{3(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2} \left( b + C + \frac{\Delta_0}{C} \right), \quad (4.171)$$

$$\lambda_+(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) = -\frac{1}{3(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2} \left( b + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}C + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \frac{\Delta_0}{C} \right), \quad (4.172)$$

$$\lambda_0(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) = -\frac{1}{3(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2} \left( b + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}C + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \frac{\Delta_0}{C} \right), \quad (4.173)$$

con

$$C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + 48(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2(-1 + x)^2x^2\sqrt{-3(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_{--})(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_{++})}}{2}},$$

$$\Delta_1 = -27\alpha_1^2(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^4x - 9(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2$$

$$\times \left[ \alpha_1^2 + 4x + 2\left((2 + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\omega\right)x - 4\omega x^2 \right] \left[ -2\left(2(1 + \alpha_2) + \alpha_1(2 + \alpha_1 + \alpha_2)\right) \right.$$

$$\left. - \left((2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4\omega\right)x + 4\omega x^2 \right] + 2\left( -2\left(2(1 + \alpha_2) + \alpha_1(2 + \alpha_1 + \alpha_2)\right) \right.$$

$$\left. - \left((2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4\omega\right)x + 4\omega x^2 \right)^3,$$

$$\Delta_0 = -3\left(2 + \alpha_1 + \alpha_2\right)^2 \left(\alpha_1^2 + 4x + 2\left((2 + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\omega\right)x - 4\omega x^2\right)$$

$$+ \left(2\left(2(1 + \alpha_2) + \alpha_1(2 + \alpha_1 + \alpha_2)\right) + \left((2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4\omega\right)x - 4\omega x^2\right)^2,$$

$$b = -2\left(2(1 + \alpha_2) + \alpha_1(2 + \alpha_1 + \alpha_2)\right) - \left((2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4\omega\right)x + 4\omega x^2.$$

De esta manera el resolvente de la ecuación (4.166) puede reescribirse como

$$S_{\pm}(z) \equiv S_{\pm}(z; x, \omega; \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{1-z} \pm \frac{(2 + \alpha_1 + \alpha_2)}{z(1-z)} \right.$$

$$\left. \times \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} \right]. \quad (4.174)$$

Como uno puede observar al graficar las raíces de  $Q_3(z)$  como función de  $\omega$  (ver figura 4.7), estas aparecen ordenadas como  $0 \leq \lambda_- \leq \lambda_0 \leq \lambda_+ \leq 1$ . De esto podemos ver que emergen dos escenarios: el primero sucede cuando la posición  $x$  de la barrera se encuentra dentro del soporte natural de la distribución GMP, esto es,  $x \in [b_-(\alpha_1, \alpha_2), b_+(\alpha_1, \alpha_2)]$  (correspondiendo al panel de en medio en la figura 4.7). Entonces, dependiendo del valor de  $c$  comparándolo con la fracción natural de valores propios de la distribución GMP a la izquierda de  $x$ ,  $c_*(x)$ , podemos tener una densidad con un soporte doble (para  $c \neq c_*(x)$ ) o podemos tener la distribución GMP, la cual corresponde cuando la barrera en la posición  $x$  es ineficiente, esto es, cuando  $c = c_*(x)$ . En este caso se observa que  $\omega \in [\omega_0(\alpha_1, \alpha_2, x), \omega_+(\alpha_1, \alpha_2, x)]$  y el valor de  $\omega$  está controlando la fracción  $c$  de valores propios a la izquierda de  $x$  partiendo de  $c = 0$  ( $\omega = \omega_0(\alpha_1, \alpha_2, x)$ ), a  $c = 1$  ( $\omega = \omega_+(\alpha_1, \alpha_2, x)$ ). La verdadera expresión que relaciona a  $\omega$  con  $c$  será obtenida más adelante. El segundo escenario corresponde cuando la posición de la barrera está afuera del soporte natural, esto es, cuando  $x \notin [b_-(\alpha_1, \alpha_2), b_+(\alpha_1, \alpha_2)]$ . En este caso tenemos que  $\omega \in [\omega_0(\alpha_1, \alpha_2), 0]$  o que  $\omega \in [0, \omega_+(\alpha_1, \alpha_2)]$ , respectivamente (y corresponde a los paneles derecho e izquierdo de la figura 4.7, respectivamente).

En la figura 4.8 pueden observarse las regiones restringidas en los planos  $(x, \omega)$  y  $(x, c)$ . Aquí la curva roja corresponde a la expresión de  $c_*(x)$  cuya expresión exacta (véase sección

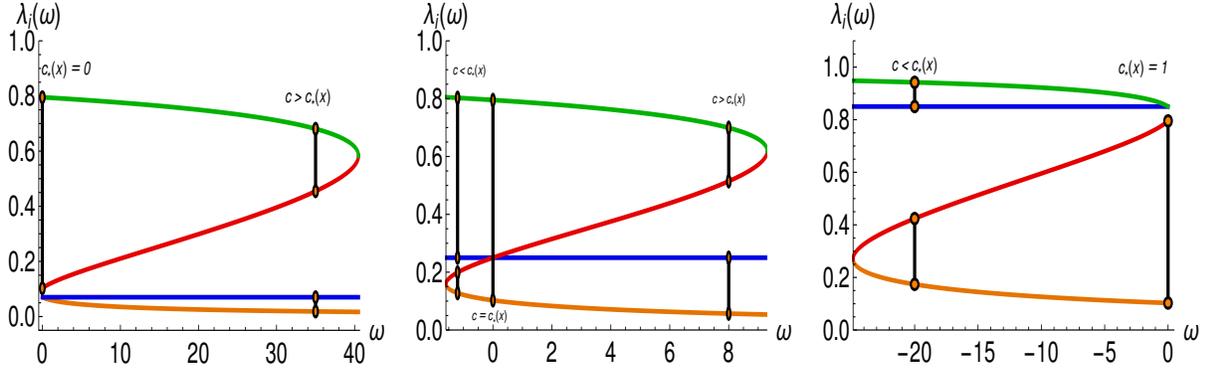


Figura 4.7: Gráfica de las raíces  $0 \leq \lambda_-(\alpha, x, \omega) \leq \lambda_0(\alpha, x, \omega) \leq \lambda_+(\alpha, x, \omega) \leq 1$  y la posición de la barrera en  $x$  (línea azul sólida) como función de  $\omega$ . En este caso  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 3$  y  $x = 7/100, 1/4, 17/20$  (de izquierda a derecha).

4.2.3) está dada por

$$c_*(\alpha_1, \alpha_2, x) = \begin{cases} 0, & x < b_-(\alpha_1, \alpha_2) \\ \varpi(\alpha_1, \alpha_2), & x \in [b_-(\alpha_1, \alpha_2), b_+(\alpha_1, \alpha_2)] \\ 1, & x > b_+(\alpha_1, \alpha_2) \end{cases}, \quad (4.175)$$

donde

$$\begin{aligned} \varpi(\alpha_1, \alpha_2) = & -\frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2\pi} \left( \left[ -1 + \sqrt{(-1 + b_-)(-1 + b_+)} + \sqrt{b_- b_+} \right] \pi \right. \\ & + \arccos \left( \frac{b_- + b_+ - 2x}{b_- - b_+} \right) - \sqrt{(b_- - 1)(b_+ - 1)} \\ & \times \operatorname{arcsec} \left( -\frac{(b_- - b_+)(x - 1)}{b_- + b_+ - 2b_- b_+ + (-2 + b_- + b_+)x} \right) \\ & \left. - \sqrt{b_- b_+} \operatorname{arcsec} \left( \frac{(b_+ - b_-)x}{-2b_- b_+ + (b_- + b_+)x} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.176)$$

### 4.3.3. Expresión exacta de $c_*(x)$

Necesitamos resolver la integral que aparece en la ecuación (4.8). Utilizando la expresión exacta de la distribución GMP en la ecuación (3.19) tenemos que:

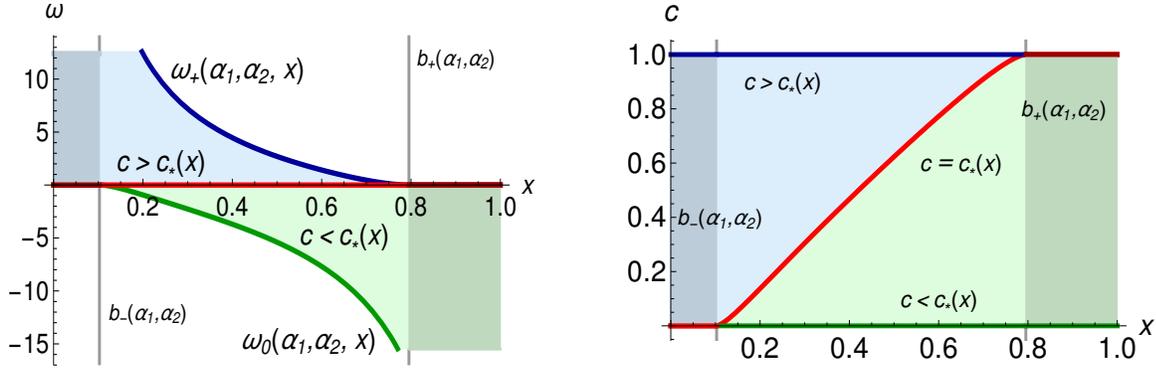


Figura 4.8: Izquierda: Región permitida para las soluciones físicas en el plano  $(x, \omega)$ , acotadas por las líneas  $\omega = \omega_+$  (línea azul) y  $\omega = \omega_0$  (línea verde). Cuando  $\omega = 0$  (línea roja), la solución corresponde a la distribución GMP. A lo largo de esta línea la fracción de valores propios a la izquierda de  $x$  es  $c = c_*(x)$ . Empezando en  $\omega = 0$  e incrementando su valor, entramos a la región rellena de color azul que corresponde a una densidad espectral  $\rho_0$  restringida donde  $c$  es mayor que el valor típico  $c_*(x)$  hasta que alcanza su valor máximo  $c = 1$ , es decir, todos los valores propios se encuentran a la izquierda de  $x$ . Por otro lado, si comenzamos en  $\omega = 0$  y disminuimos su valor, entraremos a la región verde que corresponde a  $c < c_*(x)$ . De manera eventual llegaremos a  $\omega = \omega_0$  que corresponde a  $c = 0$  cuando todos los valores propios están a la derecha de  $x$ . Derecha: El plano  $(x, c)$ . La línea roja corresponde a  $c_*(x)$ . En este caso  $b_-(\alpha_1, \alpha_2)$  etiqueta la región azul oscuro y  $b_+(\alpha_1, \alpha_2)$  la región verde oscuro.

$$c_*(x) = \int_{b_-}^x d\lambda \rho_{\text{GMP}}(\lambda) = \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2\pi} \left[ \int_{b_-}^x d\lambda \frac{\sqrt{(b_+ - \lambda)(\lambda - b_-)}}{\lambda} + \int_{b_-}^x d\lambda \frac{\sqrt{(b_+ - \lambda)(\lambda - b_-)}}{(1 - \lambda)} \right]. \quad (4.177)$$

Sólo necesitamos resolver dos integrales

$$\int_{b_-}^x d\lambda \frac{\sqrt{(b_+ - \lambda)(\lambda - b_-)}}{\lambda}, \quad (4.178)$$

$$\int_{b_-}^x d\lambda \frac{\sqrt{(b_+ - \lambda)(\lambda - b_-)}}{(1 - \lambda)}. \quad (4.179)$$

La primera se resuelve exactamente igual que en la sección 4.2.3 y la segunda también al hacer el cambio de variable  $\lambda' = 1 - \lambda$ . De esta manera obtenemos la expresión que aparece en la ecuación (4.175).

#### 4.3.4. Distribución deformada GMP

Al realizar el análisis previo de las raíces de  $Q_3(z)$  podemos finalmente escribir una expresión exacta para la distribución deformada GMP:

$$\rho_0(\lambda) = \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2\pi\lambda(1 - \lambda)} \begin{cases} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_-)}{x - \lambda}} I_{\lambda \in [\lambda_-, x]} + \sqrt{\frac{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_-)}{\lambda - x}} I_{\lambda \in [\lambda_0, \lambda_+]} & c > c_*(x) \\ \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_+)(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}{\lambda - x}} I_{\lambda \in [\lambda_-, \lambda_0]} + \sqrt{\frac{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_-)}{\lambda - x}} I_{\lambda \in [x, \lambda_+]} & c < c_*(x) \end{cases}, \quad (4.180)$$

para cualquier  $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$  y donde  $I_{x \in D}$  es igual a 1 si  $x \in D$  y cero en otro caso. Al igual que en la sección 4.2.4, esta expresión es simplificada de manera significativa cuando todos los valores propios están a la izquierda o a la derecha de la barrera situada en la posición  $x$ . Esto corresponde algebraicamente a que  $\Delta = 0$  y  $\Delta_0 \neq 0$ , lo que implica tener una raíz doble y una raíz simple para el polinomio  $Q_3(z)$ :

$$\lambda_1(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) = \frac{(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2 N_{1,1} + N_{1,2} N_{1,3}}{2(D_{1,1}(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) + D_{1,2}(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega))}, \quad (4.181)$$

$$\lambda_2(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) = \frac{-N_{1,1}(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega)(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^4 + 4(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2(-N_{1,2} N_{1,3}) - N_{1,3}^3}{(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2(D_{1,1}(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) + D_{1,2}(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega))}, \quad (4.182)$$

respectivamente, y donde

$$N_{1,1}(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) = -9\alpha_1^2 x, \quad (4.183)$$

$$N_{1,2}(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) = -[\alpha_1^2 + 4x + 2((2 + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\omega)x - 4\omega x^2], \quad (4.184)$$

$$N_{1,3}(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) = -2[2(1 + \alpha_2) + \alpha_1(2 + \alpha_1 + \alpha_2)] - ((2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4\omega)x + 4\omega x^2, \quad (4.185)$$

$$D_{1,1}(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) = -3(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2[\alpha_1^2 + 4x + 2((2 + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\omega)x - 4\omega x^2], \quad (4.186)$$

$$D_{1,2}(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) = \left[ -2(2(1 + \alpha_2) + \alpha_1(2 + \alpha_1 + \alpha_2)) - ((2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4\omega)x + 4\omega x^2 \right]^2. \quad (4.187)$$

Como ya se mencionó,  $\omega$  debe escogerse de tal manera que  $\omega = \omega_0$  (correspondiendo a todos los valores propios a la derecha de  $x$ ) ó  $\omega = \omega_+$  (correspondiendo a todos los valores propios a la izquierda de  $x$ ). Notemos que gráficamente la raíz que es doble corresponde a la que iguala a  $x$ , es decir, la que está pegada a la barrera. Por ende, para  $c = 1$  tenemos que

$\lambda_+ = \lambda_0$ , mientras que para  $c = 0$  tenemos que  $\lambda_- = \lambda_0$ . Las ecuaciones siguientes resumen los resultados obtenidos. La densidad  $\rho_0$  para todos los valores propios a la izquierda o a la derecha de la barrera en la posición  $x$ , tiene la forma siguiente:

$$\rho_L(\lambda) = \begin{cases} \rho_{\text{GMP}}(\lambda) & x \geq b_+(\alpha_1, \alpha_2) \\ \frac{2+\alpha_1+\alpha_2}{2\pi\lambda(1-\lambda)} \sqrt{\frac{(\lambda-\ell_L(\alpha_1, \alpha_2, x))}{x-\lambda}} |\lambda - u_L(\alpha_1, \alpha_2, x)| I_{\lambda \in [\ell_L(\alpha_1, \alpha_2, x), x]} & x \leq b_+(\alpha_1, \alpha_2) \end{cases}, \quad (4.188)$$

y

$$\rho_R(\lambda) = \begin{cases} \rho_{\text{GMP}}(\lambda) & x \leq b_-(\alpha_1, \alpha_2) \\ \frac{2+\alpha_1+\alpha_2}{2\pi\lambda(1-\lambda)} \sqrt{\frac{u_R(\alpha_1, \alpha_2, x)-\lambda}{\lambda-x}} |\lambda - \ell_R(\alpha_1, \alpha_2, x)| I_{\lambda \in [x, u_R(\alpha_1, \alpha_2, x)]} & x \geq b_-(\alpha_1, \alpha_2) \end{cases}, \quad (4.189)$$

Donde hemos usado las siguientes definiciones

$$u_L(\alpha_1, \alpha_2, x) = \lambda_+(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega_+(\alpha_1, \alpha_2, x)), \quad (4.190)$$

$$\ell_L(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) = \lambda_-(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega_+(\alpha_1, \alpha_2, x)), \quad (4.191)$$

$$u_R(\alpha_1, \alpha_2, x) = \lambda_+(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega_0(\alpha_1, \alpha_2, x)), \quad (4.192)$$

$$\ell_L(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) = \lambda_-(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega_0(\alpha_1, \alpha_2, x)). \quad (4.193)$$

#### 4.3.5. Expresión para $c(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega)$

De manera análoga que en la sección 4.2.5, podemos obtener una expresión que relacione a los parámetros  $\omega$  con la fracción  $c$  de valores propios a la izquierda de la barrera en la posición  $x$ . Esto se realiza considerando los dos casos  $c > c_*$  y  $c < c_*$ .

**Caso  $c > c_*(x)$**

En este caso, sustituyendo la expresión de la ecuación (4.180) tenemos

$$\begin{aligned} c(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) &= \int_{\lambda_-}^x d\lambda \rho_0(\lambda) = \int_{\lambda_-}^x d\lambda \frac{2+\alpha_1+\alpha_2}{2\pi\lambda(1-\lambda)} \sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_-)(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_+)}{x-\lambda}} \\ &= \frac{2+\alpha_1+\alpha_2}{2\pi} \left[ \int_{\lambda_-}^x \frac{d\lambda}{\lambda} \sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_-)(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_+)}{x-\lambda}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\lambda_-}^x \frac{d\lambda}{1-\lambda} \sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_-)(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_+)}{x-\lambda}} \right]. \end{aligned} \quad (4.194)$$

Debemos expresar las siguientes integrales en función de integrales elípticas:

$$\int_{\lambda_-}^x \frac{d\lambda}{\lambda} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_-)(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_+)}{x - \lambda}}, \quad (4.195)$$

$$\int_{\lambda_-}^x \frac{d\lambda}{1 - \lambda} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_-)(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_+)}{x - \lambda}}. \quad (4.196)$$

La primera se expresa igual que la integral en la sección 4.2.5 y la segunda de manera análoga al realizar el cambio de variable  $\lambda' = 1 - \lambda$ . De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} c(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) = & \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2\pi \sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \left( \left( \frac{1}{1 - x} (\lambda_0 - x)(x - 1)(\lambda_- - \lambda_0) \right. \right. \\ & \left. \left. - (\lambda_+ - \lambda_-)(\lambda_+ - x) \right) K(k) + \frac{1}{1 - x} \left( (\lambda_0 - x) \left[ (x - 1) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left( (-2 + \lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-) \Pi \left( \frac{x - \lambda_-}{\lambda_0 - \lambda_-}, k \right) \right) - 2(\lambda_+ - 1)(\lambda_- - 1) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \times \Pi \left( \frac{(\lambda_0 - 1)(x - \lambda_-)}{(x - 1)(\lambda_0 - \lambda_-)}, k \right) \right] \right) - (\lambda_+ - \lambda_-) \left[ -(\lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-) \right. \\ & \left. \left. \times \Pi \left( \frac{\lambda_- - x}{\lambda_+ - x}, k \right) + 2\lambda_0 \Pi \left( \frac{\lambda_+(\lambda_- - x)}{\lambda_-(\lambda_+ - x)}, k \right) \right] \right), \quad (4.197) \end{aligned}$$

con  $k = \sqrt{\frac{(\lambda_+ - \lambda_0)(x - \lambda_-)}{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}}$  y donde  $K(k)$  y  $\Pi(n, k)$  son las integrales elípticas completas de primer y tercer tipo, respectivamente.

**Caso**  $c < c_*(x)$

En este caso al sustituir la expresión de la ecuación (4.180) tenemos

$$\begin{aligned}
c(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) &= \int_{\lambda_-}^{\lambda_0} d\lambda \rho_0(\lambda) = \int_{\lambda_-}^{\lambda_0} d\lambda \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2\pi\lambda(1-\lambda)} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_-)(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - \lambda_+)}{\lambda - x}} \\
&= \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2\pi} \left[ \int_{\lambda_-}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\lambda} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_-)(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - \lambda_+)}{\lambda - x}} \right. \\
&\quad \left. + \int_{\lambda_-}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{1-\lambda} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_-)(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - \lambda_+)}{\lambda - x}} \right]. \tag{4.198}
\end{aligned}$$

Nuevamente, debemos de expresar las dos integrales siguientes en función de integrales elípticas:

$$\int_{\lambda_-}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\lambda} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_-)(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - \lambda_+)}{\lambda - x}}, \tag{4.199}$$

$$\int_{\lambda_-}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{1-\lambda} \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_-)(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - \lambda_+)}{\lambda - x}}. \tag{4.200}$$

Con ambas se procede de manera análoga a la realizada en la sección 4.2.5, donde en la última se hace el cambio de variable  $\lambda' = 1 - \lambda$ .

De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned}
c(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega) &= \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2\pi\sqrt{(\lambda_+ - \lambda_0)(x - \lambda_-)}} \left( \left( \frac{1}{1-x}(x - \lambda_0)(1 - 2\lambda_+ + x)(x - \lambda_-) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\lambda_+ - \lambda_-)(\lambda_+ - x) \right) K(k) + \frac{1}{1-x}(x - \lambda_0) \right. \\
&\quad \times \left( (x-1)(-2 + \lambda_+ - x + \lambda_0 + \lambda_-) \Pi \left( \frac{\lambda_0 - \lambda_-}{x - \lambda_-}, k \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(\lambda_+ - 1)(\lambda_- - 1) \Pi \left( \frac{(x-1)(\lambda_0 - \lambda_-)}{(\lambda_0 - 1)(x - \lambda_-)}, k \right) \right) - (\lambda_+ - \lambda_-) \right. \\
&\quad \left. \times \left[ -(\lambda_+ - x + \lambda_0 + \lambda_-) \Pi \left( \frac{\lambda_- - \lambda_0}{\lambda_+ - \lambda_0}, k \right) + 2\lambda_0 \Pi \left( \frac{\lambda_+(\lambda_- - \lambda_0)}{\lambda_-(\lambda_+ - \lambda_0)}, k \right) \right] \right), \tag{4.201}
\end{aligned}$$

con  $k = \sqrt{\frac{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}{(\lambda_+ - \lambda_0)(x - \lambda_-)}}$  el modulo elíptico, mientras que  $K(k)$ , y  $\Pi(n, k)$  corresponden a las integrales elípticas completas de primer y tercer tipo, respectivamente.

Ahora, grafiquemos la distribución deformada GMP. Estas gráficas se muestran en la figura 4.9, donde graficamos las expresiones exactas (ecuaciones (3.19) y 4.180) junto con simulaciones Monte Carlo para valores decrecientes de  $c$  de izquierda a derecha.

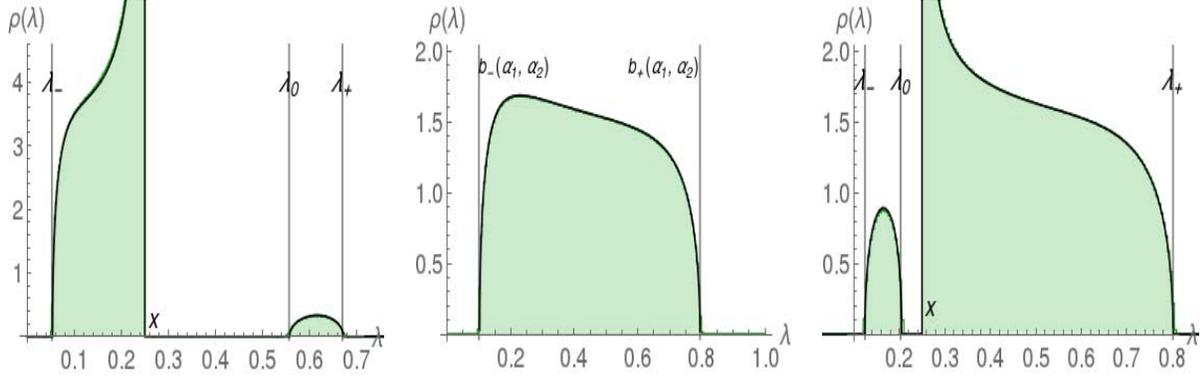


Figura 4.9: Distribución deformada GMP para  $x = 1/4$ ,  $\alpha_1 = 2$  y  $\alpha_2 = 3$  correspondiendo al valor de  $c_*(\alpha_1, \alpha_2, x) = 0.220748$ , respectivamente. El fondo verde de las gráficas corresponde a simulaciones Monte Carlo con  $N = 600$ . Los valores propios han sido distribuidos a cada lado de la barrera en la posición  $x$  para alcanzar la fracción deseada  $c$  que, de izquierda a derecha, corresponde a los valores siguientes:  $c = 0.05767$ ,  $c_* = 0.220748$  y  $0.970366$ . La curva de color negro corresponde a las curvas teóricas dadas por las ecuaciones (3.19) y (4.180).

#### 4.3.6. Evaluando la acción y la función tasa en el punto silla

Por la ecuación (3.48), la acción evaluada en el punto silla tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(c, x) = & \int d\lambda \rho_0(\lambda) [-\alpha_1 \ln(\lambda) - \alpha_2 \ln(1 - \lambda)] - \iint d\lambda d\lambda' \rho_0(\lambda) \rho_0(\lambda') \ln |\lambda - \lambda'| \\ & + B_1 \left( \int d\lambda \rho_0(\lambda) \Theta(x - \lambda) - c \right) + B_2 \left( \int d\lambda \rho_0(\lambda) - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.202)$$

Después de obtener una expresión, como en la sección 4.2.6, para la integral doble que aparece en la ecuación anterior tenemos que

$$\mathcal{A}_0(c, x) = \frac{1}{2} \int d\lambda \rho_0(\lambda) [-\alpha_1 \ln(\lambda) - \alpha_2 \ln(1 - \lambda)] - \frac{1}{2} B_1 c - \frac{1}{2} B_2, \quad (4.203)$$

donde  $c \equiv c(\alpha_1, \alpha_2, x, \omega)$ , está dado por las ecuaciones (4.197) y (4.201). Lo siguiente es obtener una expresión exacta para el primer término de  $\mathcal{A}_0(c, x)$  y de las variables  $B_1$  y  $B_2$ .

### Expresión exacta para el primer término de $\mathcal{A}_0(c, x)$

Se busca una expresión exacta para

$$\frac{1}{2} \int d\lambda \rho_0(\lambda) [-\alpha_1 \ln(\lambda) - \alpha_2 \ln(1 - \lambda)] = -\frac{\alpha_1}{2} \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln(\lambda) - \frac{\alpha_2}{2} \int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln(1 - \lambda). \quad (4.204)$$

Realizando un análisis análogo al realizado en la sección 4.2.6 tenemos que

$$\int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln(\lambda) = \frac{1}{2} (-\alpha_1 \ln(\lambda_-) - \alpha_2 \ln(1 - \lambda_-) + B_1 + B_2) - \int_0^{\lambda_-} dz S_+(z) \quad (4.205)$$

$$\int d\lambda \rho_0(\lambda) \ln(1 - \lambda) = \frac{1}{2} (-\alpha_1 \ln(\lambda_+) - \alpha_2 \ln(1 - \lambda_+) + B_2) + \int_{\lambda_+}^1 dz S_-(z). \quad (4.206)$$

### Expresiones para las constantes $B_1$ y $B_2$

Realizando un análisis análogo al de la sección 4.2.6, obtenemos dos expresiones para  $B_1$  y  $B_2$  dividiendo los casos  $c > c_*$  y  $c < c_*$ . En ambos casos la expresión de  $B_2$  es la misma y tras una análisis equivalente al realizado en la sección 4.2.6, concluimos que la expresión de  $B_1$  también será la misma para ambos casos. Entonces estas expresiones son:

$$B_2 = \alpha_1 \ln(\lambda_+) + \alpha_2 \ln(1 - \lambda_+) + 2 \left( \ln(\lambda_+) - \int_{\lambda_+}^{\infty} dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right) \right), \quad (4.207)$$

$$B_1 = \alpha_1 \ln \left( \frac{x}{\lambda_0} \right) + \alpha_2 \ln \left( \frac{1-x}{1-\lambda_0} \right) + 2 \int_{\lambda_0}^x dz S_+(z). \quad (4.208)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.205), (4.206), (4.207) y (4.208) en la ecuación (4.203), tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0(c, x) = & \frac{1}{4} \left( 2\alpha_1 \int_0^{\lambda_-} dz S_+(z) + \alpha_1 \alpha_2 \left[ \ln(1 - \lambda_-) + \ln(\lambda_+) \right] + \alpha_2^2 \ln(1 - \lambda_+) + \alpha_1^2 \ln(\lambda_-) \right. \\
& - (2 + \alpha_1 + \alpha_2) \left[ -2 \int_{\lambda_+}^{\infty} dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right) + \alpha_2 \ln(1 - \lambda_+) + (2 + \alpha_1) \ln(\lambda_+) \right] \\
& \left. - (\alpha_1 + 2c) \left[ 2 \int_{\lambda_0}^x dz S_+(z) + \alpha_2 \ln \left( \frac{x-1}{\lambda_0-1} \right) + \alpha_1 \ln \left( \frac{x}{\lambda_0} \right) \right] - 2\alpha_2 \int_{\lambda_+}^1 dz S_-(z) \right), \tag{4.209}
\end{aligned}$$

que es valida para  $c > c_*$ , ecuación (4.197), y  $c < c_*$ , ecuación (4.201). La función tasa con la que unificamos los resultados presentado en [33] es tan sólo

$$\Psi(c, x) = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_0(c, x) - \Omega_0), \tag{4.210}$$

con

$$\begin{aligned}
\Omega_0 = & -(2 + \alpha_1 + \alpha_2) \left( \alpha_1 \ln \frac{\sqrt{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_1 + \alpha_2)}}{2 + \alpha_1 + \alpha_2} + \alpha_2 \ln \frac{\sqrt{(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 + \alpha_2)}}{2 + \alpha_1 + \alpha_2} \right) \\
& + \frac{\alpha_1^2}{2} \ln \frac{\alpha_1}{2 + \alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2^2}{2} \ln \frac{\alpha_2}{2 + \alpha_1 + \alpha_2} + \alpha_1 \alpha_2 \ln \frac{\sqrt{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)}}{2 + \alpha_1 + \alpha_2} \\
& - \ln \frac{\sqrt{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 + \alpha_2)}}{(2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2}. \tag{4.211}
\end{aligned}$$

obtenida en [33]. Lo siguiente es obtener una expresión exacta de la acción (ecuación (4.209)) en función de integrales elípticas (véase sección 4.2.7). En la figura (4.10), presentamos un *density plot* de la función tasa (ecuación (4.210)) en función del par de variables  $(x, c)$  y  $(x, \omega)$ .

De manera idéntica a la vista en la sección 4.2.6, podemos extraer las funciones tasa de los valores propios en el *edge*. Denotemos por  $\Psi_M^{(\pm)}(x)$  y  $\Psi_m^{(\pm)}(x)$  a las funciones tasa izquierda (signo menos) y derecha (signo más) del valor propio más grande y más pequeño, respectivamente. De hecho, puede mostrarse que

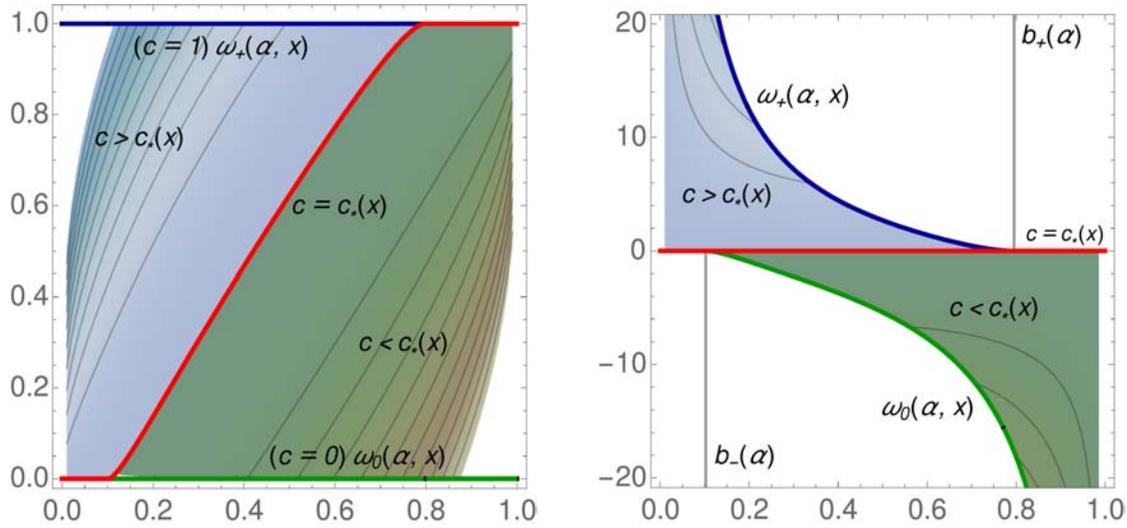


Figura 4.10: *Density plot* de la función tasa en los planos  $(x, c)$  y  $(x, \omega)$  para  $\alpha_1 = 2$  y  $\alpha_2 = 3$ .

$$\Psi_m^{(-)}(x) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{\Psi(c, x)}{c}, \quad x \leq b_-(\alpha_1, \alpha_2), \quad (4.212)$$

$$\Psi_m^{(+)}(x) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \Psi(c, x), \quad x \geq b_-(\alpha_1, \alpha_2), \quad (4.213)$$

y

$$\Psi_M^{(-)}(x) = \lim_{c \rightarrow 1^-} \Psi(c, x), \quad x \leq b_+(\alpha_1, \alpha_2), \quad (4.214)$$

$$\Psi_M^{(+)}(x) = \lim_{c \rightarrow 1^-} \frac{\Psi(c, x)}{1 - c}, \quad x \geq b_+(\alpha_1, \alpha_2). \quad (4.215)$$

donde las expresiones de  $\Psi_M^{(\pm)}(x)$  y  $\Psi_m^{(\pm)}(x)$  corresponden a las reportadas en [33]. En la figura 4.11, presentamos una comparación de la parte izquierda y derecha de las ecuaciones (4.212-4.215).

### 4.3.7. La acción en función de integrales elípticas

Lo que haremos a continuación es escribir las integrales en función del resolvente  $S(z)_\pm$  que aparecen en la ecuación (4.209), en función de integrales elípticas. Nuestro análisis se basará en dos casos:  $c > c_*$  y  $c < c_*$ .

**Caso  $c > c_*$**

En este caso la densidad  $\rho_0$ , ecuación (4.180), tiene soporte en  $[\lambda_-, x] \cup [\lambda_0, \lambda_+]$ .

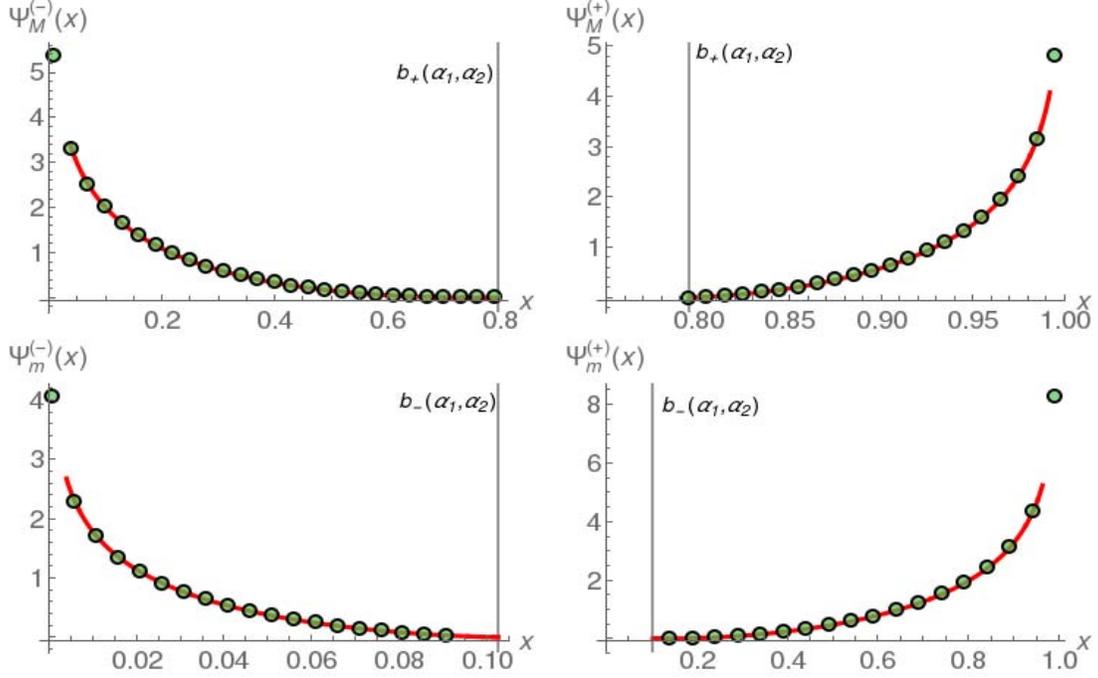


Figura 4.11: Comparación entre  $\Psi(c, x)$  para los valores extremos (círculos verdes) de acuerdo a las fórmulas (4.212-4.215) y los resultados obtenidos en [33] (líneas rojas). Las gráficas han sido realizadas escogiendo  $\alpha_1 = 2$  y  $\alpha_2 = 3$ .

$$1. \int_{\lambda_0}^x dz S_+(z)$$

En este caso, por la expresión de la ecuación (4.174) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_0}^x dz S_+(z) &= \int_{\lambda_0}^x dz \frac{1}{2} \left[ -\frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{1-z} + \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{z(1-z)} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} \right] \\
&= -\frac{\alpha_1}{2} \ln \left( \frac{x}{\lambda_0} \right) - \frac{\alpha_2}{2} \ln \left( \frac{1-x}{1-\lambda_0} \right) \\
&\quad + \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \int_{\lambda_0}^x dz \frac{1}{z(1-z)} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}. \tag{4.216}
\end{aligned}$$

Tenemos que reescribir las siguientes integrales en función de integrales elípticas

$$\int_{\lambda_0}^x dz \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}, \quad (4.217)$$

$$\int_{\lambda_0}^x dz \frac{1}{1 - z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}. \quad (4.218)$$

Procediendo de manera análoga a lo realizado en la sección 4.2.7, tenemos que

$$\int_{\lambda_0}^x dz S_+(z) = -\frac{\alpha_1}{2} \ln \left( \frac{x}{\lambda_0} \right) - \frac{\alpha_2}{2} \ln \left( \frac{1 - x}{1 - \lambda_0} \right) + \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} I_4(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-), \quad (4.219)$$

donde

$$\begin{aligned} I_4(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) = & \frac{1}{\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \left( -(\lambda_+ - \lambda_-)(\lambda_+ - \lambda_0 - x + \lambda_-) K(k) \right. \\ & + \frac{1}{x} \left( (\lambda_+ - \lambda_0)x \left( (-2 + \lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-) \Pi \left( \frac{\lambda_0 - x}{\lambda_+ - x}, k \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - 2(-1 + \lambda_-) \Pi \left( \frac{(-1 + \lambda_+)(\lambda_0 - x)}{(-1 + \lambda_0)(\lambda_+ - x)}, k \right) \right) \right. \\ & \left. + x(x - \lambda_-)(\lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-) \Pi \left( \frac{\lambda_0 - x}{\lambda_0 - \lambda_-}, k \right) \right. \\ & \left. + 2\lambda_+ \lambda_0 (-x + \lambda_-) \Pi \left( \frac{(\lambda_0 - x)\lambda_-}{x(\lambda_0 - \lambda_-)}, k \right) \right), \quad (4.220) \end{aligned}$$

con  $k^2 = \frac{(\lambda_0 - x)(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}$ , y donde  $K(k)$  y  $\Pi(n, k)$  son las integrales elípticas completas del primer y tercer tipo, respectivamente.

$$2. \text{ Integral } \int_{\lambda_+}^{\infty} dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right)$$

Al igual que en la sección 4.2.6, consideremos  $\int_{\lambda_+}^y dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right)$  cuando  $y \rightarrow \infty$ . En este caso tendremos

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_+}^y dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right) &= \int_{\lambda_+}^y dz \left( \frac{1}{2} \left[ -\frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{1-z} - \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{z(1-z)} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{z} \right) \\
&= -\frac{\alpha_1 + 2}{2} \ln y + \frac{\alpha_1 + 2}{2} \ln(\lambda)_+ + \frac{\alpha_2}{2} \int_{\lambda_+}^y dz \frac{1}{1-z} \\
&\quad - \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \int_{\lambda_+}^y dz \frac{1}{z(1-z)} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}. \tag{4.221}
\end{aligned}$$

Para realizar la integral  $\int_{\lambda_+}^y dz \frac{1}{1-z}$  hagamos el siguiente truco

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_+}^y dz \frac{1}{1-z} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\lambda_+}^{1-\varepsilon} dz \frac{1}{1-z} + \int_{1+\varepsilon}^y dz \frac{1}{1-z} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\ln \varepsilon + \ln(1 - \lambda_+) - \int_{1+\varepsilon}^y dz \frac{1}{z-1} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\ln \varepsilon + \ln(1 - \lambda_+) - \ln(y-1) + \ln \varepsilon) \\
&= \ln(1 - \lambda_+) - \ln(y-1). \tag{4.222}
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_+}^y dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right) &= -\frac{\alpha_1 + 2}{2} \ln y + \frac{\alpha_1 + 2}{2} \ln(\lambda)_+ + \frac{\alpha_2}{2} \ln(1 - \lambda_+) \\
&\quad - \frac{\alpha_2}{2} \ln(y-1) - \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \int_{\lambda_+}^y dz \frac{1}{z(1-z)} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}. \tag{4.223}
\end{aligned}$$

Notamos que si  $y \rightarrow \infty$ , entonces  $y-1 \sim y$ , por lo que el término  $(-\frac{\alpha_1+2}{2} \ln y - \frac{\alpha_2}{2} \ln(y-1)) \sim -\frac{2+\alpha_1+\alpha_2}{2} \ln y$  cuando  $y \rightarrow \infty$ , teniendo así una divergencia logarítmica. Esto nos sugiere que la integral

$$\int_{\lambda_+}^y dz \frac{1}{z(1-z)} \sqrt{\frac{(z-\lambda_+)(z-\lambda_0)(z-\lambda_-)}{z-x}} \quad (4.224)$$

también tiene una divergencia logarítmica que contrarresta la divergencia ocasionada por

$$-\frac{\alpha_1 + 2}{2} \ln y - \frac{\alpha_2}{2} \ln(y-1).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_+}^y dz \frac{1}{z(1-z)} \sqrt{\frac{(z-\lambda_+)(z-\lambda_0)(z-\lambda_-)}{z-x}} &= \int_{\lambda_+}^y dz \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z-\lambda_+)(z-\lambda_0)(z-\lambda_-)}{z-x}} \\ &+ \int_{\lambda_+}^y dz \frac{1}{1-z} \sqrt{\frac{(z-\lambda_+)(z-\lambda_0)(z-\lambda_-)}{z-x}} \end{aligned}$$

Si denotamos por

$$I = \int_{\lambda_+}^y dz \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z-\lambda_+)(z-\lambda_0)(z-\lambda_-)}{z-x}}, \quad (4.225)$$

$$J = \int_{\lambda_+}^y dz \frac{1}{1-z} \sqrt{\frac{(z-\lambda_+)(z-\lambda_0)(z-\lambda_-)}{z-x}}, \quad (4.226)$$

y trabajamos con cada integral por separado, de manera análoga a lo realizado en la sección 4.2.6 tendremos

$$\begin{aligned} I + J &= -\frac{1}{\sqrt{(a-c_1)(b-d)}} 2(a-b) \left( \widehat{\Pi} \left( \sin^{-1} \sqrt{\frac{(b-d)(a-y)}{(a-d)(b-y)}}, \frac{a-d}{b-d}, \frac{(b-c_1)(a-d)}{(a-c_1)(b-d)} \right) \right. \\ &+ (-1+d) \widehat{\Pi} \left( \sin^{-1} \sqrt{\frac{(b-d)(a-y)}{(a-d)(b-y)}}, \frac{(b-1)(a-d)}{(a-1)(b-d)}, \frac{(b-c_1)(a-d)}{(a-c_1)(b-d)} \right) \\ &\left. - d \widehat{\Pi} \left( \sin^{-1} \sqrt{\frac{(b-d)(a-y)}{(a-d)(b-y)}}, \frac{b(a-d)}{a(b-d)}, \frac{(b-c_1)(a-d)}{(a-c_1)(b-d)} \right) \right), \quad (4.227) \end{aligned}$$

donde hemos denotado por  $a = \lambda_+ > b = \lambda_0 > c_1 = x > d = \lambda_-$  y  $\widehat{\Pi}(\varphi, n, k)$  es la integral incompleta de tercer tipo. Usando la ecuación (4.136), detectamos que la divergencia logarítmica proviene de

$$\widehat{\Pi} \left( \sin^{-1} \sqrt{\frac{(b-d)(a-y)}{(a-d)(b-y)}}, \frac{a-d}{b-d}, \frac{(b-c_1)(a-d)}{(a-c_1)(b-d)} \right) \quad (4.228)$$

$$\begin{aligned} &= F \left( \sin^{-1} \sqrt{\frac{(b-d)(a-y)}{(a-d)(b-y)}}, \frac{(b-c_1)(a-d)}{(a-c_1)(b-d)} \right) \\ &- \widehat{\Pi} \left( \sin^{-1} \sqrt{\frac{(b-d)(a-y)}{(a-d)(b-y)}}, \frac{b-c_1}{a-c_1}, \frac{(b-c_1)(a-d)}{(a-c_1)(b-d)} \right) \\ &+ \frac{\sqrt{(a-c_1)(b-d)}}{2(a-b)} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\frac{(c_1-y)(-d+y)}{(a-y)(-b+y)}}}{-1 + \sqrt{\frac{(c_1-y)(-d+y)}{(a-y)(-b+y)}}} \right) \end{aligned} \quad (4.229)$$

Realizando una expansión en series de Taylor del término logarítmico cuando  $y \rightarrow \infty$  obtenemos:

$$\ln \left( \frac{1 + \sqrt{\frac{(c_1-y)(-d+y)}{(a-y)(-b+y)}}}{-1 + \sqrt{\frac{(c_1-y)(-d+y)}{(a-y)(-b+y)}}} \right) = \ln \left( \frac{4}{a+b-c_1-d} \right) + \ln y - A \frac{1}{y} + \dots, \quad (4.230)$$

donde  $A$  es una constante innecesaria. Cuando  $y \rightarrow \infty$  el término  $\ln y$  de la expresión anterior se cancelará con  $-\frac{\alpha_1+2}{2} \ln -\frac{\alpha_2}{2} \ln(y-1)$ . Entonces, tomando el límite cuando  $y \rightarrow \infty$  y quitando la divergencia logarítmica, tenemos que

$$\int_{\lambda_+}^y dz \left( S_-(z) - \frac{1}{z} \right) = \frac{\alpha_1+2}{2} \ln(\lambda)_+ + \frac{\alpha_2}{2} \ln(1-\lambda_+) - \frac{2+\alpha_1+\alpha_2}{2} I_3(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-), \quad (4.231)$$

donde

$$\begin{aligned}
I_3(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) &= -\frac{1}{\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} 2(\lambda_+ - \lambda_0) (F(\theta_2, k) \\
&\quad - \widehat{\Pi}\left(\theta_2, \frac{\lambda_0 - x}{\lambda_+ - x}, k\right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}}{2(\lambda_+ - \lambda_0)} \ln\left(\frac{4}{\lambda_+ + \lambda_0 - x - \lambda_-}\right) \\
&\quad + (-1 + \lambda_-) \widehat{\Pi}\left(\theta_2, \frac{(\lambda_0 - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_0 - \lambda_-)}, k\right) \\
&\quad - \lambda_- \widehat{\Pi}\left(\theta_2, \frac{\lambda_0(\lambda_+ - \lambda_-)}{\lambda_+(\lambda_0 - \lambda_-)}, k\right), \tag{4.232}
\end{aligned}$$

donde  $k^2 = \frac{(\lambda_0 - x)(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}$ ,  $\theta_2 = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\lambda_0 - \lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-}}\right)$ .

### 3. Integral $\int_0^{\lambda_-} dz S_+(z)$

En este caso trabajemos con la integral  $\int_y^{\lambda_-} dz S_+(z)$  cuando  $y \rightarrow 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
\int_y^{\lambda_-} dz S_+(z) &= \int_y^{\lambda_-} dz \frac{1}{2} \left[ -\frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{1-z} + \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{z(1-z)} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} \right] \\
&= -\frac{\alpha_1}{2} \ln(\lambda_-/y) + \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \int_y^{\lambda_-} dz \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} \\
&\quad - \frac{\alpha_2}{2} \ln\left(\frac{1 - \lambda_-}{1 - y}\right) + \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \int_y^{\lambda_-} dz \frac{1}{1 - z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}. \tag{4.233}
\end{aligned}$$

Observamos que el término  $-\frac{\alpha_1}{2} \ln(\lambda_-/y)$  diverge cuando  $y \rightarrow 0$ , lo que nos sugiere que  $\int_y^{\lambda_-} dz \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}$  tiene una divergencia logarítmica que contrarresta dicho término. De hecho, esta integral resulta ser la misma que la integral que tiene la misma divergencia cuando  $y \rightarrow 0$  en la sección 4.2.6, por lo que contamos con el resultado para aislar dicha divergencia. Sólo resta trabajar con la integral

$$\int_y^{\lambda_-} dz \frac{1}{1 - z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}, \tag{4.234}$$

usando el caso  $c < c_*$ . Esta integral se trabaja igual que las integrales sin divergencia trabajadas en la sección 4.2.6. Por lo tanto llegamos a que

$$\int_0^{\lambda_-} S_+(z) = -\frac{\alpha_2}{2} \ln(1 - \lambda_-) + \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} I_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-), \quad (4.235)$$

$$\begin{aligned} I_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) &= \frac{1}{(-1+x)x\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \left( 2x(x - \lambda_-) \left( [\lambda_+(-1 + \lambda_0) - \lambda_0 + x] \right. \right. \\ &\quad \times F(\theta_1, k) - (-1+x)\widehat{\Pi} \left( \theta_1, \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ - x}, k \right) \\ &\quad \left. \left. - (-1 + \lambda_+)(-1 + \lambda_0)\widehat{\Pi} \left( \theta_1, \frac{(-1+x)(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ - x)(-1 + \lambda_-)}, k \right) \right) \right) \\ &\quad - x \left( \sqrt{\frac{\lambda_+\lambda_0(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)\lambda_-}{x}} - x\sqrt{\frac{\lambda_+\lambda_0(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)\lambda_-}{x}} \right) \\ &\quad \times \ln \left( \frac{4\lambda_+\lambda_0x}{-\lambda_0x\lambda_- + \lambda_+(-x\lambda_- + \lambda_0(x + \lambda_-))} \right) \\ &\quad - 2\lambda_+\lambda_0(-1+x)(x - \lambda_-)\widehat{\Pi} \left( \theta_1, \frac{(\lambda_0 - x)\lambda_-}{x(\lambda_0 - \lambda_-)}, k \right), \end{aligned} \quad (4.236)$$

con  $\theta_1 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(\lambda_+ - x)\lambda_-}{(\lambda_+ - \lambda_-)x}}$ ,  $k^2 = \frac{(\lambda_0 - x)(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}$ , y donde  $F(\theta_1, k)$  y  $\widehat{\Pi}(\theta_1, n, k)$ , son las integrales elípticas incompletas del primer y tercer tipo respectivamente.

#### 4. Integral $\int_{\lambda_+}^1 dz S_-(z)$

En este caso trabajaremos con la integral  $\int_{\lambda_+}^y dz S_-(z)$ , cuando  $y \rightarrow 1$  y usando el caso  $c < c_*$ . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_+}^y dz S_-(z) &= \int_{\lambda_+}^y dz \frac{1}{2} \left[ -\frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{1-z} - \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{z(1-z)} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} \right] \\ &= \frac{\alpha_1}{2} \ln \left( \frac{\lambda_+}{y} \right) \lambda_+ - \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \int_{\lambda_+}^y \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}} \\ &\quad - \frac{\alpha_2}{2} \ln \left( \frac{1 - \lambda_+}{1 - y} \right) - \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \int_{\lambda_+}^y \frac{dz}{1-z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}. \end{aligned} \quad (4.237)$$

Como podemos observar, el término  $\frac{\alpha_2}{2} \ln \left( \frac{1 - \lambda_+}{1 - y} \right)$  diverge cuando  $y \rightarrow 1$ , lo que nos sugiere que la integral  $\int_{\lambda_+}^y \frac{dz}{1-z} \sqrt{\frac{(z - \lambda_+)(z - \lambda_0)(z - \lambda_-)}{z - x}}$  tiene una divergencia logarítmica que la contrarresta. Trabajando con esta integral y haciendo los siguientes cambios de variable  $\tilde{y} = 1 - y < d = 1 - \lambda_+ < c_1 = 1 - x < b = 1 - \lambda_0 < a = 1 - \lambda_-$  llegamos a que

$$\int_{\lambda_+}^y \frac{dz}{1-z} \sqrt{\frac{(z-\lambda_+)(z-\lambda_0)(z-\lambda_-)}{z-x}} = \int_{\tilde{y}}^d \frac{dt}{t} \sqrt{\frac{(t-d)(t-b)(t-a)}{t-c_1}}. \quad (4.238)$$

Ahora esta integral deberá tener una divergencia logarítmica cuando  $\hat{y} \rightarrow 0$  y entonces resulta ser la misma trabajada en la sección 4.2.6. Finalmente trabajamos con la integral

$$\int_{\lambda_+}^1 \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{(z-\lambda_+)(z-\lambda_0)(z-\lambda_-)}{z-x}}, \quad (4.239)$$

de la misma manera que trabajamos con las demás integrales en la sección 4.2.6. Al final podemos escribir

$$\int_{\lambda_+}^1 dz S_-(z) = \frac{\alpha_1}{2} \ln(\lambda)_+ - \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2} I_2(\lambda_+, x, \lambda_0, \lambda_-), \quad (4.240)$$

con

$$\begin{aligned} I_2(\lambda_+, x, \lambda_0, \lambda_-) = & \frac{1}{(-1+x)x\sqrt{(\lambda_+-\lambda_0)(x-\lambda_-)}} \left( 2(\lambda_+-x)(-1+x)(x-\lambda_0\lambda_-) \right. \\ & \times F(\theta_3, k) + 2(\lambda_+-x)x(-1+\lambda_0)(-1+\lambda_-) \\ & \times \hat{\Pi} \left( \theta_3, \frac{(-1+\lambda_+)(x-\lambda_-)}{(-1+x)(\lambda_+-\lambda_0)}, k \right) + (-1+x) \\ & \times \left[ 2x(-\lambda_++x)\hat{\Pi} \left( \theta_3, \frac{\lambda_+-\lambda_-}{x-\lambda_-}, k \right) + 2(\lambda_+-x)\lambda_0\lambda_- \right. \\ & \times \hat{\Pi} \left( \theta_3, \frac{x(\lambda_+-\lambda_-)}{\lambda_+(x-\lambda_-)}, k \right) \\ & \left. + x\sqrt{\frac{(-1+\lambda_+)(\lambda_+-\lambda_0)(-1+\lambda_0)(x-\lambda_-)(-1+\lambda_-)}{-1+x}} \right. \\ & \left. \times \ln \vartheta(\lambda_+, x, \lambda_0, \lambda_-) \right] \Big), \end{aligned} \quad (4.241)$$

donde

$$k^2 = \frac{(x-\lambda_0)(\lambda_+-\lambda_-)}{(\lambda_+-\lambda_0)(x-\lambda_-)}, \quad \theta_3 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(\lambda_+-1)(x-\lambda_-)}{(x-1)(\lambda_+-\lambda_-)}},$$

$$\vartheta(\lambda_+, x, \lambda_0, \lambda_-) = \frac{4(-1+x)(-1+\lambda_0)(-1+\lambda_-)}{-x + \lambda_0 + \lambda_- + (-2+x)\lambda_0\lambda_- - \lambda_+(1 - \lambda_0\lambda_- + x(-2 + \lambda_0 + \lambda_-))}, \quad (4.242)$$

y donde  $F(\theta_3, k)$  y  $\widehat{\Pi}(\theta_3, n, k)$  son las integrales elípticas incompletas de primer y tercer tipo, respectivamente.

Finalmente sustituyendo las ecuaciones (4.219), (4.231), (4.235) y (4.240) en la ecuación (4.209) podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(c, x) = & \frac{1}{4} \left( \alpha_2(2 + \alpha_1 + \alpha_2)I_2(\lambda_+, x, \lambda_0, \lambda_-) - (2 + \alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + 2c)I_4(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) \right. \\ & - (2 + \alpha_1 + \alpha_2)^2 I_3(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) + \alpha_1 \left[ (2 + \alpha_1 + \alpha_2)I_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) \right. \\ & \left. - \alpha_2 \ln(1 - \lambda_-) \right] + \alpha_1^2 \ln(\lambda_-) + \alpha_2^2 \ln(1 - \lambda_+) - \alpha_1 \alpha_2 \ln(\lambda_+) \\ & \left. + \alpha_1 \alpha_2 \left[ \ln(1 - \lambda_-) + \ln(\lambda_+) \right] \right), \end{aligned}$$

que es válida para  $c > c_*$  y  $c < c_*$ , y donde

$$\begin{aligned} I_1(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) = & \frac{1}{(-1+x)x\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \left( 2x(x - \lambda_-) \left( [\lambda_+(-1 + \lambda_0) - \lambda_0 + x] \right. \right. \\ & \times F(\theta_1, k) - (-1+x)\widehat{\Pi} \left( \theta_1, \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ - x}, k \right) \\ & \left. \left. - (-1 + \lambda_+)(-1 + \lambda_0)\widehat{\Pi} \left( \theta_1, \frac{(-1+x)(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ - x)(-1 + \lambda_-)}, k \right) \right) \right) \\ & - x \left( \sqrt{\frac{\lambda_+\lambda_0(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)\lambda_-}{x}} - x\sqrt{\frac{\lambda_+\lambda_0(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)\lambda_-}{x}} \right) \\ & \times \ln \left( \frac{4\lambda_+\lambda_0x}{-\lambda_0x\lambda_- + \lambda_+(-x\lambda_- + \lambda_0(x + \lambda_-))} \right) \\ & - 2\lambda_+\lambda_0(-1+x)(x - \lambda_-)\widehat{\Pi} \left( \theta_1, \frac{(\lambda_0 - x)\lambda_-}{x(\lambda_0 - \lambda_-)}, k \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) &= -\frac{1}{\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} 2(\lambda_+ - \lambda_0) \left( F(\theta_2, k) - \widehat{\Pi} \left( \theta_2, \frac{\lambda_0 - x}{\lambda_+ - x}, k \right) \right) \\
&+ \frac{\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}}{2(\lambda_+ - \lambda_0)} \ln \left( \frac{4}{\lambda_+ + \lambda_0 - x - \lambda_-} \right) \\
&+ (-1 + \lambda_-) \widehat{\Pi} \left( \theta_2, \frac{(\lambda_0 - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_0 - \lambda_-)}, k \right) \\
&- \lambda_- \widehat{\Pi} \left( \theta_2, \frac{\lambda_0(\lambda_+ - \lambda_-)}{\lambda_+(\lambda_0 - \lambda_-)}, k \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4(\lambda_+, \lambda_0, x, \lambda_-) &= \frac{1}{\sqrt{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)}} \left( -(\lambda_+ - \lambda_-)(\lambda_+ - \lambda_0 - x + \lambda_-) K(k) \right. \\
&+ \frac{1}{x} \left( (\lambda_+ - \lambda_0)x \left( (-2 + \lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-) \Pi \left( \frac{\lambda_0 - x}{\lambda_+ - x}, k \right) \right) \right. \\
&- 2(-1 + \lambda_-) \Pi \left( \frac{(-1 + \lambda_+)(\lambda_0 - x)}{(-1 + \lambda_0)(\lambda_+ - x)}, k \right) \left. \right) \\
&+ x(x - \lambda_-)(\lambda_+ + \lambda_0 - x + \lambda_-) \Pi \left( \frac{\lambda_0 - x}{\lambda_0 - \lambda_-}, k \right) \\
&+ 2\lambda_+\lambda_0(-x + \lambda_-) \Pi \left( \frac{(\lambda_0 - x)\lambda_-}{x(\lambda_0 - \lambda_-)}, k \right) \left. \right),
\end{aligned}$$

$$\theta_1 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(\lambda_+ - x)\lambda_-}{(\lambda_+ - \lambda_-)x}}, \quad k^2 = \frac{(\lambda_0 - x)(\lambda_+ - \lambda_-)}{(\lambda_+ - x)(\lambda_0 - \lambda_-)},$$

$$\theta_2 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\lambda_0 - \lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-}}.$$

y

$$\begin{aligned}
I_2(\lambda_+, x, \lambda_0, \lambda_-) &= \frac{1}{(-1+x)x\sqrt{(\lambda_+-\lambda_0)(x-\lambda_-)}} \left( 2(\lambda_+-x)(-1+x)(x-\lambda_0\lambda_-) \right. \\
&\quad \times F(\theta_3, k) + 2(\lambda_+-x)x(-1+\lambda_0)(-1+\lambda_-) \\
&\quad \times \widehat{\Pi} \left( \theta_3, \frac{(-1+\lambda_+)(x-\lambda_-)}{(-1+x)(\lambda_+-\lambda_0)}, k \right) + (-1+x) \\
&\quad \times \left[ 2x(-\lambda_++x)\widehat{\Pi} \left( \theta_3, \frac{\lambda_+-\lambda_-}{x-\lambda_-}, k \right) + 2(\lambda_+-x)\lambda_0\lambda_- \right. \\
&\quad \times \widehat{\Pi} \left( \theta_3, \frac{x(\lambda_+-\lambda_-)}{\lambda_+(x-\lambda_-)}, k \right) \\
&\quad \left. + x\sqrt{\frac{(-1+\lambda_+)(\lambda_+-\lambda_0)(-1+\lambda_0)(x-\lambda_-)(-1+\lambda_-)}{-1+x}} \right. \\
&\quad \left. \times \ln \vartheta(\lambda_+, x, \lambda_0, \lambda_-) \right] \Bigg), \\
k^2 &= \frac{(x-\lambda_0)(\lambda_+-\lambda_-)}{(\lambda_+-\lambda_0)(x-\lambda_-)}, \quad \theta_3 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(\lambda_+-1)(x-\lambda_-)}{(x-1)(\lambda_+-\lambda_-)}}, \\
\vartheta(\lambda_+, x, \lambda_0, \lambda_-) &= \frac{4(-1+x)(-1+\lambda_0)(-1+\lambda_-)}{-x+\lambda_0+\lambda_-+(-2+x)\lambda_0\lambda_- - \lambda_+(1-\lambda_0\lambda_-+x(-2+\lambda_0+\lambda_-))}.
\end{aligned}$$

### 4.3.8. Simulaciones Montecarlo

Hemos comparado nuestros resultados con simulaciones Monte Carlo del fluido de Coulomb. Primero lo hemos equilibrado usando el algoritmo de Metropolis (véase sección G.2) y posteriormente hemos generado muestras para estimar promedios. La manera en la que realizamos la figura 4.9 es análoga a la presentada en la sección 4.2.8.

#### Estimación de la Acción

Si denotamos por  $\langle \cdots \rangle_{\text{MC}}$  a los promedios de acuerdo a cadenas de Markov del método Monte Carlo, entonces la acción puede estimarse como

$$\mathcal{A}_0(c, x) = \frac{1}{N^2} \left[ \langle F(\mathbf{y}) \rangle_{\text{MC}} + \left( 1 - \frac{2}{\beta} \right) \left( \left\langle \sum_{i=1}^N \ln \lambda_i \right\rangle_{\text{MC}} + \left\langle \sum_{i=1}^N \ln(1 - \lambda_i) \right\rangle_{\text{MC}} \right) \right], \quad (4.243)$$

donde  $F$  está dada por la ecuación (3.17). En la figura 4.12 mostramos una comparación entre los resultados exactos (líneas sólidas) junto con los estimados que resultaron de simulaciones Monte Carlo (triángulos anaranjados).

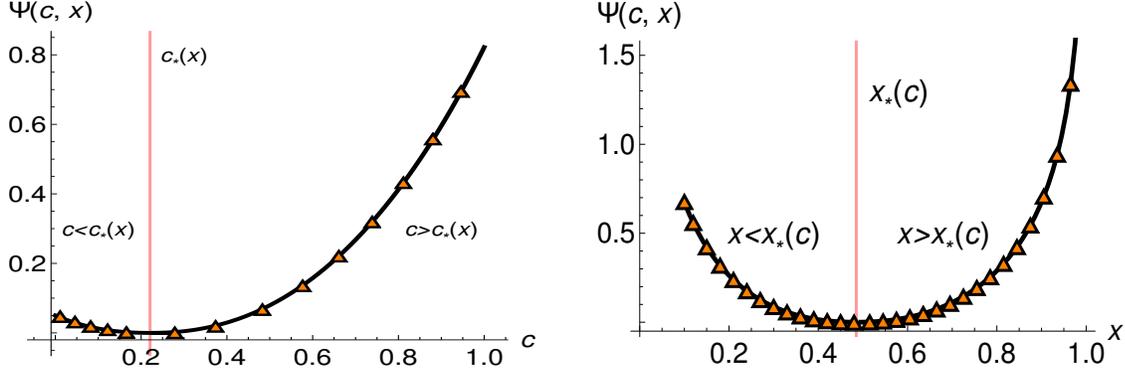


Figura 4.12: Izquierda: Función tasa vs  $c$  para  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 3$  y  $x = 1/4$  y comparación con simulaciones Monte Carlo con  $N = 500$ , con 10000 pasos para *termalizar* y un promedio realizado con 10000 pasos de Monte Carlo. Derecha: Función tasa vs  $x$  para  $c = 6/10$  y comparación con simulaciones Monte Carlo. Lo último fue realizado con  $N = 500$  y con el mismo número de pasos para *termalizar* y realizar promedios.

Ahora explicaremos como generamos los triángulos anaranjados de la figura 4.12.

#### Figura Izquierda

Para generar esta gráfica se ha seguido el algoritmo de la definición G.3, escogiendo  $A = [0, 1]$ ,  $N = 500$ ,  $R_1 = R_2 = 10000$ ,  $p_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}$  dada por la ecuación (3.16) y  $F$  dada por la ecuación (3.17). En este caso notemos que  $x = 1/4$  nos delimitará los conjuntos  $A_1$  y  $A_2$ , siendo estos  $A_1 = [0, x)$  y  $A_2 = (x, 1]$ . Entonces, procedimos de la siguiente manera.

1. Realizamos una partición discreta del intervalo  $[0, 1]$ , donde toma valores  $c$ . Esta partición es  $0 = c_0 < c_1, \dots, < c_{13} = 1$ . Definimos  $j = 0$ .
2. Si  $j \leq 13$ , definimos a  $N_j$  como el mínimo entero mayor o igual que  $Nc_j$ . En caso contrario se termina el algoritmo.
3. Realizamos el algoritmo de la definición G.3 con los valores especificados previamente, con la diferencia de que al final del paso 4 del segundo *loop* definimos  $E_t = F(W_t)$ ,  $S_t = \sum_{i=1}^N \ln(w_i^{(t)})$  y  $L_t = \sum_{i=1}^N \ln(1 - w_i^{(t)})$ .
4. Al final del algoritmo, definimos  $\bar{F}_j = \frac{1}{R_2} \sum_{t=1}^{R_2} E_t$ ,  $\bar{S}_j = \frac{1}{R_2} \sum_{t=1}^{R_2} S_t$  y  $\bar{L}_j = \frac{1}{R_2} \sum_{t=1}^{R_2} L_t$ .
5. Actualizamos  $j = j + 1$  y volvemos al paso 2.

Al final de este algoritmo tendremos

$$\bar{F}_j = \langle F(\mathbf{y}) \rangle_{\text{MC}}^{(j)}, \quad (4.244)$$

$$\bar{S}_j = \left\langle \sum_{i=1}^N \ln(\lambda_i) \right\rangle_{\text{MC}}^{(j)}, \quad (4.245)$$

$$\bar{L}_j = \left\langle \sum_{i=1}^N \ln(1 - \lambda_i) \right\rangle_{\text{MC}}^{(j)}, \quad (4.246)$$

con  $j = 0, \dots, 13$  los cuales sustituimos en la ecuación (4.243) y graficamos  $(c_j, \Psi(x, c_j))$ , generando así los triángulos anaranjados.

*Figura derecha*

Esta figura se genera de manera análoga a la figura anterior. Se sigue el algoritmo de la definición G.3, escogiendo  $A = [0, 1]$ ,  $N = 500$ ,  $N_1 = (6/10)N = 300$ ,  $R_1 = R_2 = 10000$ ,  $p_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}$  dada por la ecuación (3.16) y  $F$  dada por la ecuación (3.17). Procedimos de la siguiente manera.

1. Realizamos una partición discreta del intervalo  $[0, 1]$ , donde  $x$  toma valores. Esta partición es  $0 = x_0 < x_1, \dots, < x_{30} = 1$ . Definimos  $j = 0$ .
2. Si  $j \leq 30$ , definimos  $A_1 = [0, x_j)$  y  $A_2 = (x_j, 1]$ . En caso contrario se termina el algoritmo.
3. Realizamos el algoritmo de la definición G.3 con los valores especificados previamente, con la diferencia de que al final del paso 4 del segundo *loop* definimos  $E_t = F(W_t)$ ,  $S_t = \sum_{i=1}^N \ln(w_i^{(t)})$  y  $L_t = \sum_{i=1}^N \ln(1 - w_i^{(t)})$ .
4. Al final del algoritmo, definimos  $\bar{F}_j = \frac{1}{R_2} \sum_{t=1}^{R_2} E_t$ ,  $\bar{S}_j = \frac{1}{R_2} \sum_{t=1}^{R_2} S_t$  y  $\bar{L}_j = \frac{1}{R_2} \sum_{t=1}^{R_2} L_t$ .
5. Actualizamos  $j = j + 1$  y volvemos al paso 2..

Al final de este algoritmo tendremos

$$\bar{F}_j = \langle F(\mathbf{y}) \rangle_{\text{MC}}^{(j)}, \quad (4.247)$$

$$\bar{S}_j = \left\langle \sum_{i=1}^N \ln(\lambda_i) \right\rangle_{\text{MC}}^{(j)}, \quad (4.248)$$

$$\bar{L}_j = \left\langle \sum_{i=1}^N \ln(1 - \lambda_i) \right\rangle_{\text{MC}}^{(j)}, \quad (4.249)$$

con  $j = 0, \dots, 13$  los cuales sustituimos en la ecuación (4.243) y graficamos  $(x_j, \Psi(x_j, c))$ , generando así los triángulos anaranjados.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo derivamos analíticamente, y por primera vez con sólo una función tasa, la distribución de probabilidad del  $k$ -ésimo valor propio obteniendo las funciones de grandes desviaciones del *bulk* y del *edge* de matrices muy grandes para los ensambles de Wishart y de Jacobi. De hecho, con nuestro enfoque, fuimos capaces de derivar una función tasa  $\Psi(c, x)$ , que unifica los resultados presentados en [13, 19, 29, 32, 33], que depende de dos variables: la fracción  $c$  de valores propios a la izquierda de una barrera infinita de energía localizada en la posición  $x$ . Cuando analizamos esta función en sus diferentes límites podemos obtener la siguiente información: para un valor fijo de  $c$  la función tasa nos proporciona las grandes desviaciones de los estadísticos de orden de los valores propios. En particular, en los límites  $c \rightarrow 0$  o  $c \rightarrow 1$ , es posible extraer las funciones izquierda y derecha de grandes desviaciones para el valor propio más grande y para el valor propio más pequeño, respectivamente. De manera análoga, para un valor fijo de  $x$  de la barrera la función tasa nos provee las grandes desviaciones del SIN. Matemáticamente hablando esto es un resultado interesante ya que unificamos los diferentes enfoques que han sido utilizados para obtener las funciones tasas de valores propios extremos.

Para obtener los resultados presentados aquí utilizamos el método del gas de Coulomb de mecánica estadística, superando algunas dificultades matemáticas antes de obtener algún progreso. Primero tuvimos que obtener una expresión exacta de las distribuciones deformadas MP y GMP al tener una barrera en la posición  $x$  y una fracción de valores propios  $c$  a la izquierda de  $x$ . Esta fue la parte fundamental para obtener la función tasa  $\Psi(c, x)$ . Hasta este punto pudimos expresar la función tasa en términos de integrales del resolvente. Después, relacionamos dichas integrales del resolvente con integrales elípticas además de hacer un análisis asintótico de algunas de ellas.

Para validar nuestros resultados realizamos ciertos límites en la función tasa usando el método del gas de Coulomb para recuperar ciertos resultados conocidos, obteniendo una mezcla de varios enfoques físicos y matemáticos. Como lo mostramos en este trabajo, nuestra función tasa contiene las grandes desviaciones a la derecha y a la izquierda del valor típico de los valores propios extremos, algo que era pensado imposible [17], desde una perspectiva

matemática utilizando el método del gas de Coulomb.

Los valores propios de matrices aleatorias constituyen uno de los ejemplos más raros de variables aleatorias fuertemente correlacionadas para las cuales existe un tratamiento analítico posible basado en el método del gas de Coulomb. Nuestros resultados proveen una manera de unificar varios resultados en la literatura sobre teoría de matrices aleatorias. Más aún, los retos técnicos que superamos pueden ser aplicados a casos generales y proveen un enfoque que puede ser usado en una variedad de problemas similares. Finalmente, todos nuestros resultados analíticos fueron verificados con simulaciones Monte Carlo al utilizar variaciones estándar del algoritmo de Metropolis aplicado al método del gas de Coulomb.

# Bibliografía

- [1] G. W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, *An Introduction to Random Matrices*, Cambridge University Press (2009).
- [2] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods For Physicists* 6th Edition, Elsevier (2005).
- [3] N. Wolchover, *At the far ends of a new universal law*, Quanta Magazine (2014).
- [4] S. M. Ross, *A first course in probability* 6th Edition, Prentice-Hall (2002).
- [5] M. Battilana, *Order statistics of random walks. A test of universality*. Tesi di Laurea Magistrale, Università degli Studi di Padova (2015).
- [6] H. A. David, H. N. Nagaraja, *Order Statistics* 3rd Edition, Wiley (2003).
- [7] B. C. Arnold, N. Balakrishnan, H. N. Nagaraja, *A first course in order statistics*, Wiley (1992).
- [8] L. de Hamm, A. Ferreira, *Extreme value theory: An introduction*, Springer (2006).
- [9] P. Vivo, *Large deviations of the maximum of independent and identically distributed random variables*, Eur. J. Phys. 36 (2015).
- [10] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications* 2nd Edition, Springer (1998).
- [11] A. Vulpiani, F. Cecconi, M. Cencini, A. Puglisi, Davide Vergni, *Large Deviations in Physics: The Legacy of The Law of Large Numbers*, Lecture Notes in Physics V. 885, Springer (2014).
- [12] C. A. Tracy, H. Widom, *Level-spacing distributions and the Airy kernel*, Comm. Math. Phys. 159, No. 1 (1994).
- [13] S. N. Majumdar, P. Vivo, *Number of Relevant Directions in Principal Component Analysis and Wishart Random Matrices*, Phys. Rev. Lett. 108, 200601 (2012).

- [14] J-P. Bouchaud and M. Potters, Financial Applications of Random Matrix Theory: A short review in *The Oxford Handbook of Random Matrix Theory*, Oxford University Press (2011).
- [15] J. Bun, R. Allez, J.P. Bouchaud, M. Potters, *Rotational invariant estimator for general noisy matrices*, arXiv:1502.06736 (2015).
- [16] D. S. Dean, S. N. Majumdar, *Large Deviations of Extreme Eigenvalues of Random Matrices*, Phys. Rev. Lett. 97, 160201 (2006).
- [17] D. S. Dean, S. N. Majumdar, *Extreme value statistics of eigenvalues of Gaussian random matrices*, Phys. Rev. E 77, 041108 (2008).
- [18] R. Marino, S. N. Majumdar, G. Schehr, P. Vivo, *Index Distribution of Cauchy Random Matrices*, J. Phys. A: Math. Theor. 47, 055001 (2014).
- [19] P. Vivo, S. N. Majumdar, O. Bohigas, *Large deviations of the maximum eigenvalue in Wishart random matrices*, J. Phys. A: Math. Theor. 40, 4317 (2007).
- [20] P. Vivo, S. N. Majumdar, O. Bohigas, *Large Deviations and Random Matrices*, Acta Physica Polonica B 38, 4139 (2007).
- [21] P. Vivo, S. N. Majumdar, O. Bohigas, *Distributions of Conductance and Shot Noise and Associated Phase Transitions*, Phys. Rev. Lett. 101, 216809 (2008).
- [22] P. Facchi, U. Marzolino, G. Parisi, S. Pascazio, A. Scardicchio, *Phase Transitions of Bipartite Entanglement*, Phys. Rev. Lett. 101, 050502 (2008).
- [23] C. Nadal, S. N. Majumdar, M. Vergassola, *Phase Transitions in the Distribution of Bipartite Entanglement of a Random Pure State*, Phys. Rev. Lett. 104, 110501 (2010).
- [24] C. Nadal, S. N. Majumdar, M. Vergassola, *Statistical distribution of quantum entanglement for a random bipartite state*, J. Stat. Phys. 142, 403 (2011).
- [25] Y. V. Fyodorov, C. Nadal, *Critical Behavior of the Number of Minima of a Random Landscape at the Glass Transition Point and the Tracy-Widom Distribution*, Phys. Rev. Lett. 109, 167203 (2012).
- [26] S. N. Majumdar, G. Schehr, P. Vivo, D. Villamaina, *Large deviations of the top eigenvalue of large Cauchy random matrices*, J. Phys. A: Math. Theor. 46, 022001 (2013).
- [27] S. N. Majumdar, G. Schehr, *Top eigenvalue of a random matrix: large deviations and third order phase transition*, J. Stat. Mech. P01012 (2014).
- [28] I. Pérez Castillo, E. Katzav, P. Vivo, *Phase transitions in the condition-number distribution of Gaussian random matrices*, Phys. Rev. E 90 (5), 050103 (2014).

- [29] S.N. Majumdar, M. Vergassola, *Large Deviations of the Maximum Eigenvalue for Wishart and Gaussian Random Matrices*, Phys. Rev. Lett. 102, 060601 (2009).
- [30] S. N. Majumdar, C. Nadal, A. Scardicchio, P. Vivo, *Index Distribution of Gaussian Random Matrices*, Phys. Rev. Lett. 103, 220603 (2009).
- [31] C. Nadal, S. N. Majumdar, *Nonintersecting Brownian interfaces and Wishart random matrices*, Phys. Rev. E 79, 061117 (2009).
- [32] E. Katzav, I. Pérez Castillo, *Large deviations of the smallest eigenvalue of the Wishart-Laguerre ensemble*, Phys. Rev. E 82, 040104(R) (2010).
- [33] H. M. Ramli, E. Katzav, I. Pérez Castillo, *Spectral properties of the Jacobi ensembles via the Coulomb gas approach*, J. Phys. A 45, 465005 (2012).
- [34] I. Pérez Castillo, *Spectral order statistics of Gaussian random matrices: Large deviations for trapped fermions and associated phase transitions*, Phys. Rev. E 90, 040102 (2014).
- [35] I. Pérez Castillo, *Large deviations of the shifted index number in the Gaussian ensemble*, J. Stat. Mech. 063207 (2016).
- [36] R. Giuliano, C. Macci, *Large Deviation Principles for Sequences of Maxima and Minima*, Communications in Statistics - Theory and Methods, V. 43, I. 6 (2014).
- [37] H. Touchette, *The large deviation approach to statistical mechanics*, Physics Reports 478, 1–69 (2009).
- [38] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Elsevier (2015).
- [39] J. Wishart, *The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population*, Biometrika, 32-52 (1928).
- [40] E. P. Wigner, *On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels*, Proc. Cam. Phil. Soc. 47 790 (1951).
- [41] E. P. Wigner, *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions*, Ann. of Math. V.62 No. 3, 548-564 (1955).
- [42] E. P. Wigner, *Characteristic vectors of bordered matrices of infinite dimensions II*, Ann. of Math. V. 65 No. 2, 203-207 (1957).
- [43] E. P. Wigner, *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices*, Ann. of Math. V. 67 No. 2, 325-326 (1958).
- [44] F. J. Dyson, *Statistical theory of the energy levels of complex systems*, I-III, J. Math. Phys. 3 (1962).

- [45] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos* 3rd Edition, Springer (2010).
- [46] M. L. Mehta, *Random Matrices* 3rd Edition, Elsevier (2004).
- [47] P. J. Forrester, N. C. Snaith, J. J. M. Verbaarschot, *Developments in random matrix theory*, J. Phys. A: Math. Gen. 36 R1 (2003).
- [48] P. J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*, Princeton University Press (2010).
- [49] P. Vivo, *From Wishart to Jacobi ensembles: statistical properties and applications*, Doctoral thesis, Brunel University (2008).
- [50] A. Baker, *Matrix Groups: An Introduction To Lie Group Theory*, Springer (2006).
- [51] F. J. Dyson, *A Brownian motion model for the eigenvalues of a random matrix*, J. Math. Phys. 3 1191 (1962).
- [52] F. D. Cunden, P. Facchi, P. Vivo, *A shortcut through the Coulomb gas method for spectral linear statistics on random matrices*, J. Phys. A: Math. Theor. 49 13 (2016).
- [53] C. Chipot, A. Pohorille, *Free Energy Calculations: Theory and Applications in Chemistry and Biology*, Springer (2007).
- [54] F. Schwabl, *Statistical Mechanics* 2nd Edition, Springer (2006).
- [55] P. Zinn-Justin, *Some Matrix Integrals Related to Knots and Links, Random matrix models and their applications*, Cambridge University Press (2001).
- [56] S. N. Majumdar, C. Nadal, A. Scardicchio, P. Vivo, *How many eigenvalues of a Gaussian random matrix are positive?*, Phys. Rev. E 83, 041105 (2011).
- [57] P. F. Byrd, D. F. Morris, *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, Vol 67, Eringe (1971).
- [58] <http://functions.wolfram.com/EllipticIntegrals/EllipticPi3/17/01/>
- [59] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence, *Linear Algebra*, 4th Edition, Pearson (2014).
- [60] A. Klenke, *Probability Theory: A Comprehensive Course*, Springer (2006).
- [61] A. C. C. Coolen, R. Kühn, P. Sollich, *Theory of Neural Information Processing Systems*, Oxford University Press (2005).
- [62] H. Sagan, *Introduction to the Calculus of Variations*, Dover (1969).
- [63] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol. 1*, Wiley (1953).

- [64] E. Engel, R. M. Dreizler, *Density Functional Theory: An Advance Course*, Springer (2011).
- [65] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* 3rd Edition, Oxford University Press (1996).
- [66] F. L. Metz, *Typical index distribution of Gaussian random matrices: replica approach and finite-size corrections*, arXiv:1510.06637 (2015).
- [67] E. J. Hinch, *Perturbation Methods*, Cambridge University Press (1991).
- [68] P. G. Hoel, S. C. Port, C. J. Stone, *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin (1972).
- [69] C. P. Robert, G. Casella, *Introducing Monte Carlo Methods with R*, Springer (2010).
- [70] N. Madras, *Lectures on Monte Carlo methods*, American Mathematical Society (2002).
- [71] A. Sokal, *Monte Carlo methods in statistical mechanics: Foundations and new algorithms*, in *Functional Integration*, Plenum (1997).

# Apéndice A

## Conceptos de álgebra lineal

En esta sección se presentarán conceptos de álgebra lineal que no son tan comunes. Sin embargo, supondremos que el lector cuenta con un conocimiento sólido de álgebra lineal. Las siguientes definiciones se han obtenido de [59].

**Definición A.1 (Matriz hermitiana o hermítica)** *Una matriz cuadrada  $\mathbf{X}$  perteneciente a  $\mathcal{M}_{N \times N}(K)$ , es hermitiana, o hermítica, si es autoadjunta, es decir, si  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^\dagger$ .*

Nótese que si en la definición anterior  $K = \mathbb{R}$ , entonces una matriz hermitiana es una matriz real simétrica.

**Ejemplo A.1.1** *La matriz*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

*es una matriz hermitiana.*

**Definición A.2 (Matriz unitaria)** *Una matriz cuadrada  $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{N \times N}(K)$  es una matriz unitaria si:*

$$\mathbf{X}^\dagger = \mathbf{X}^{-1}.$$

**Ejemplo A.2.1** *La matriz*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & 2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} & -2^{-1/2} \end{pmatrix},$$

*es una matriz unitaria.*

# Apéndice B

## Función delta de Dirac

En esta sección presentaremos la función delta de Dirac y sus aplicaciones más importantes. Las definiciones y ejemplos aquí presentados serán de mucha ayuda para el entendimiento del capítulo 4. Las siguientes definiciones han sido obtenidas de [2, 60, 61]. A lo largo de esta sección  $A \subseteq \mathbb{R}$  denotará un conjunto no vacío.

**Definición B.1 (Delta de Dirac)** *La función delta de Dirac,  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , se define (de acuerdo a sus propiedades de asignación) como:*

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases},$$

con

$$\int_a^b dx \delta(x) = 1,$$

si  $0 \in [a, b]$  y cero en otro caso.

A lo largo de este trabajo la letra  $\delta$  denotará la función delta de Dirac, a menos que se diga lo contrario. Una de las propiedades de  $\delta$  que ocuparemos, es que para cualesquiera función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in A$  se cumple [61]:

$$\int_A dx f(x) \delta(x - a) = f(a), \tag{B.1}$$

y más aún

$$\delta(-x) = \delta(x), \tag{B.2}$$

para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definición B.2 (Función escalón)** Definimos la función  $\Theta : A \rightarrow \{0, 1\}$  como:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (\text{B.3})$$

para cualquier  $x \in A$ . La función  $\Theta$  es conocida como la función escalón o la función escalón de Heaviside.

Puede probarse que [2]:

$$\Theta(x - a) = \int_{-\infty}^x dt \delta(t - a), \quad (\text{B.4})$$

para cualesquiera  $x, a \in \mathbb{R}$ .

La función  $\delta$  es de mucha ayuda para obtener la función de densidad de una transformación de variables aleatorias.

**Proposición B.1** Sean  $X_1, \dots, X_N$  variables aleatorias continuas con densidad de probabilidad conjunta  $p_{X_1, \dots, X_N}(\mathbf{x})$ , donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ . Si  $Y = g(X_1, \dots, X_N)$ , para alguna función  $g$ , entonces la densidad de probabilidad de  $Y$  está dada por [54]:

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x} p_{X_1, \dots, X_N}(\mathbf{x}) \delta(y - g(\mathbf{x})),$$

para cualquier  $y$  en el dominio de  $p_Y$ .

Demos el siguiente ejemplo donde utilizamos la proposición anterior para obtener la distribución de una variable aleatoria.

**Ejemplo B.2.1** Sean  $X_1, \dots, X_N$  variables aleatorias continuas i.i.d. con función de densidad  $p_X(x) = \mu e^{-\mu x}$  con  $x \geq 0$ , es decir, la variable  $X_i$  se distribuye de manera exponencial, para cualquier  $i = 1, \dots, N$ . Consideremos la siguiente variable aleatoria:  $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ . Dado que las variables  $X_1, \dots, X_N$  son i.i.d., tenemos que su función de densidad conjunta puede escribirse como:

$$p_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N p_X(x_i).$$

Entonces por la proposición B.1 la función de densidad de  $Y$  está dada por:

$$p_Y(x) = \int_0^\infty d\mathbf{x} p_{X_1, \dots, X_N}(\mathbf{x}) \delta\left(\sum_{i=1}^N x_i - x\right),$$

para cualquier  $x$  en el dominio de  $p_Y$ , y donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ . Por otro lado sabemos que de manera general la función generadora de momentos de una variable aleatoria continua  $X$  viene dada por [4]:

$$M_X(k) = \int_{-\infty}^\infty dx e^{kx} p_X(x).$$

En nuestro caso tenemos que:

$$\begin{aligned} M_Y(k) &= \int_0^\infty dx e^{kx} p_Y(x) = \int_0^\infty dx e^{kx} \int_0^\infty d\mathbf{x} p_{X_1, \dots, X_N}(\mathbf{x}) \delta\left(\sum_{i=1}^N x_i - x\right) \\ &= \int_0^\infty d\mathbf{x} p_{X_1, \dots, X_N}(\mathbf{x}) \int_0^\infty dx e^{kx} \delta\left(\sum_{i=1}^N x_i - x\right), \end{aligned}$$

por la ecuación (B.1) tenemos que  $\int_0^\infty dx e^{kx} \delta\left(\sum_{i=1}^N x_i - x\right) = e^{k \sum_{i=1}^N x_i}$ , entonces:

$$\begin{aligned} M_Y(k) &= \int_0^\infty d\mathbf{x} e^{k \sum_{i=1}^N x_i} p_{X_1, \dots, X_N}(\mathbf{x}) = \int_0^\infty d\mathbf{x} e^{k \sum_{i=1}^N x_i} \prod_{i=1}^N p_X(x_i) \\ &= \int_0^\infty d\mathbf{x} \left(\prod_{i=1}^N e^{kx_i}\right) \left(\prod_{i=1}^N p_X(x_i)\right) = \int_0^\infty d\mathbf{x} \prod_{i=1}^N e^{kx_i} p_X(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^N \int_0^\infty dx_i e^{kx_i} p_X(x_i) = \left(\int_0^\infty dx e^{kx} p_X(x)\right)^N. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\int_0^\infty dx e^{kx} p_X(x) = \int_0^\infty dx e^{kx} \mu e^{-\mu x} = \mu \int_0^\infty dx e^{-x(\mu-k)} = \frac{\mu}{\mu - k},$$

y por ende:

$$M_Y(k) = \left(\frac{\mu}{\mu - k}\right)^N,$$

que es la función generadora de momentos de una variable aleatoria con distribución de probabilidad gamma con parámetros  $(N, \mu)$ , para  $\mu > 0$  [4]. En general, la función generadora de momentos determina de manera única a una variable aleatoria [4]. Concluimos que la función de densidad  $p_Y$  es la función de densidad gamma con parámetros  $(N, \mu)$ , para  $\mu > 0$ .

Otra aplicación importante de la función  $\delta$  es en la definición de una medida empírica para variables aleatorias.

**Definición B.3 (Medida empírica para variables aleatorias)** Sean  $X_1, \dots, X_N$  variables aleatorias con valores en  $A$  y  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in A^N$  el vector de sus valores observados. Definimos a la medida empírica de  $X_1, \dots, X_N$  como:

$$\rho(x; \mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i),$$

para cualquier  $x \in A$ .

Esta medida  $\rho(x)$  nos da la densidad de las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_N$  en el intervalo  $(x, x + \varepsilon)$ , para  $\varepsilon > 0$  muy pequeño.

Otra de las propiedades importantes que utilizaremos será la representación de Fourier de la delta de Dirac.

**Definición B.4 (Transformada de Fourier)** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una función integrable. La transformada de Fourier de  $f$  está dada por:

$$\mathcal{F}_f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx, \quad (\text{B.5})$$

para cualquier  $k \in \mathbb{R}$  y donde  $i = \sqrt{-1}$ .

**Proposición B.2** Puede probarse que [2]:

$$\delta(k) = \mathcal{F}_1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x} dx,$$

para cualquier  $k \in \mathbb{R}$  y donde  $i = \sqrt{-1}$ .

# Apéndice C

## Cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones es una disciplina de las matemáticas que tiene como objeto los problemas de optimización. En esta disciplina, al utilizar la técnica de *variaciones*, se obtienen ciertas condiciones para la existencia de valores extremos en un conjunto de funciones [62]. En esta sección daremos una presentación breve del concepto de funcional y la variación de un funcional, por lo que no mantendremos rigor matemático alguno. Se puede encontrar una versión más extendida de este tema con un gran rigor matemático en [62, 63]. Las siguientes definiciones han sido obtenidas de [2, 64, 65].

**Definición C.1 (Funcional)** *Sea  $\mathcal{C}(K)$ , el conjunto de todas las funciones que van de  $K$  a  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  o  $K = \mathbb{C}$ ). Un funcional  $F : \mathcal{C}(K) \rightarrow K$  es una función de  $\mathcal{C}(K)$  a  $K$ . Si  $f \in \mathcal{C}(K)$  y  $x \in K$  denotamos la evaluación de  $f(x)$  en  $F$  como  $F[f(x)]$ .*

De manera coloquial, un funcional se puede entender como una función de funciones. Demos algunos ejemplos de funcionales.

**Ejemplo C.1.1** *Un funcional puede ser la integral definida de una función continua  $f$ :*

$$F[f(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx .$$

**Ejemplo C.1.2** *Un funcional también puede definirse como una función  $f$  evaluada en un punto  $x$  particular de su dominio:*

$$F[f(x)] = f(x) .$$

*Este funcional puede ser representado en forma de una integral usando la ecuación (B.1):*

$$F_\delta[f(x)] = \int dz \delta(z - x) f(z) .$$

**Definición C.2 (Transformada de Hilbert-Stieltjes)** Sean  $K = \mathbb{R}$  o  $K = \mathbb{C}$ ,  $A \subseteq K$  no vacío, y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Definimos a la transformada de Hilbert-Stieltjes de la función  $f$  como:

$$S(z) = \int d\lambda \frac{f(\lambda)}{z - \lambda},$$

para cualquier  $z \in K$ .

Esta definición puede extenderse a la forma de un funcional como sigue:

$$F[f(\lambda)] = \int d\lambda \frac{f(\lambda)}{z - \lambda}.$$

A continuación definiremos la variación de un funcional respecto a la evaluación de una función.

**Definición C.3 (Variación de un funcional)** Si  $F$  es un funcional y  $f$  una función, denotaremos por  $\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(t)}$  a la variación de  $F[f(x)]$  respecto a  $f(t)$  y lo definimos como:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(t)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(x) + \varepsilon \delta(x - t)] - F[f(x)]}{\varepsilon}.$$

Como podemos observar, la definición de la variación de un funcional es muy similar a la definición de la derivada de una función, y lo que es más interesante es que se pueden obtener fórmulas de variación para funcionales equivalentes a las fórmulas de derivación para funciones. Antes de enunciar algunas de esas fórmulas veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo C.3.1** Consideremos el funcional del ejemplo C.1.2,  $F_\delta \equiv F_\delta[f(x)]$ . Por la definición C.3 tendremos que:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_\delta[f(x)]}{\delta f(t)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( \int dz \delta(z - x) [f(z) + \varepsilon \delta(z - t)] - \int dz \delta(z - x) f(z) \right) \\ &= \int dz \delta(z - x) \delta(z - t), \end{aligned}$$

si hacemos  $H(z) = \delta(z - t)$  y usamos la ecuación (B.1) tendremos que:

$$\frac{\delta F_\delta[f(x)]}{\delta f(t)} = H(x) = \delta(x - t),$$

para cualesquiera  $x$  y  $t$  en el dominio de  $f$ .

Por la definición de  $F_\delta$  tenemos que  $F_\delta[f(x)] = f(x)$ , así que por lo anterior:

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(t)} = \delta(x - t). \quad (\text{C.1})$$

Este resultado nos será de mucha ayuda.

**Ejemplo C.3.2** Si definimos  $F_w[f(x)] = \int dx w(x)f(x)$ , donde  $f$  y  $w$  son funciones, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_w[f(x)]}{\delta f(t)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( \int dx w(x)[f(x) + \varepsilon \delta(x - t)] - \int dx w(x)f(x) \right) = \int dx w(x)\delta(x - t) \\ &= w(t). \end{aligned}$$

De lo anterior podemos presentar la siguiente notación operacional:

$$\frac{\delta}{\delta f(t)} \left( \int dx w(x)f(x) \right) = \int dx w(x) \frac{\delta f(x)}{\delta f(t)}. \quad (\text{C.2})$$

A través de la definición C.3 pueden probarse muchas reglas de derivación de funcionales que son equivalentes a las reglas de derivación para funciones. Para el desarrollo de este trabajo, ocuparemos tan sólo las siguientes.

**Proposición C.1** Si  $F$  y  $G$  son funcionales que dependen de una función  $f(x)$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  son constantes, entonces se tienen las siguientes fórmulas de derivación para funcionales [62, 63, 64]:

$$\frac{\delta(\lambda F + \mu G)[f(x)]}{\delta f(t)} = \lambda \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(t)} + \mu \frac{\delta G[f(x)]}{\delta f(t)}, \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\delta \ln(F[f(x)])}{\delta f(t)} = \frac{1}{F[f(x)]} \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(t)}, \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\delta e^{F[f(x)]}}{\delta f(t)} = e^{F[f(x)]} \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(t)}, \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\delta \lambda}{\delta f(t)} = 0. \quad (\text{C.6})$$

Veamos un ejemplo que será de mucha ayuda en el capítulo 4.

**Ejemplo C.3.3** *Definamos el siguiente funcional:*

$$\Upsilon[k(\lambda)] = i \int d\lambda k(\lambda) \rho(\lambda) + \ln \left( \int d\lambda e^{-ik(\lambda)} \right),$$

donde  $k$  y  $\rho$  son funciones y  $i = \sqrt{-1}$ . Calculemos  $\frac{\delta \Upsilon[k(\lambda)]}{\delta k(t)}$ . Por la ecuación (C.3) tenemos que:

$$\frac{\delta \Upsilon[k(\lambda)]}{\delta k(t)} = \frac{\delta}{\delta k(t)} \left( i \int d\lambda k(\lambda) \rho(\lambda) \right) + \frac{\delta}{\delta k(t)} \left( \ln \left( \int d\lambda e^{-ik(\lambda)} \right) \right).$$

Por un lado, dadas las ecuaciones (C.2) y (C.1), podemos escribir:

$$\frac{\delta}{\delta k(t)} \left( i \int d\lambda k(\lambda) \rho(\lambda) \right) = i \int d\lambda \frac{\delta k(\lambda)}{\delta k(t)} \rho(\lambda) = i \int d\lambda \delta(\lambda - t) \rho(\lambda) = i\rho(t).$$

Por otro lado, si denotamos por  $G[k(\lambda)] = \int d\lambda e^{-ik(\lambda)}$  y usamos la ecuación (C.4), tendremos que:

$$\frac{\delta}{\delta k(t)} (\ln(G[k(\lambda)])) = \frac{1}{\int d\lambda e^{-ik(\lambda)}} \frac{\delta G[k(\lambda)]}{\delta k(t)}.$$

Utilizando las ecuaciones (C.2) y (C.5), podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{\delta G[k(\lambda)]}{\delta k(t)} &= \int d\lambda \frac{\delta}{\delta k(t)} (e^{-ik(\lambda)}) = \int d\lambda e^{-ik(\lambda)} (-i) \frac{\delta k(\lambda)}{k(t)} \\ &= -i \int d\lambda e^{-ik(\lambda)} \delta(\lambda - t) = -ie^{-ik(t)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\delta \Upsilon[k(\lambda)]}{\delta k(t)} = i\rho(t) - \frac{i}{\int d\lambda e^{-ik(\lambda)}} e^{-ik(t)}.$$

# Apéndice D

## Integración funcional

En esta sección describiremos de manera intuitiva lo que representa la integral de un funcional respecto a una función. Para tener una definición más formal y profundizar en este tema vea [65].

Si  $F[f(x)]$  es un funcional y  $f$  es una función, entonces

$$\int D[f] F[f(x)] \quad (\text{D.1})$$

representa la integral de  $F$  respecto a  $f$  y puede pensarse como una integral sobre un volumen donde los puntos son funciones. Esta forma de integración nos servirá para realizar nuestras derivaciones en la sección 3.6 además de ayudarnos para extender la definición de la función delta de Dirac para el caso de funcionales.

**Definición D.1 (Funcional delta)** *Si  $F$  es un funcional, definimos la delta de Dirac funcional como*

$$\delta_F(F[f(x)]) = \int D[g] \exp\left(i \int dx g(x) F[f(x)]\right), \quad (\text{D.2})$$

donde  $i = \sqrt{-1}$ .

En la sección 3.6 utilizaremos esta definición del funcional delta usando el cambio de variable  $k(x) = g(x)/N$  para poder escribir

$$\delta_F(F[f(x)]) = \int D[k] \exp\left(iN \int dx k(x) F[f(x)]\right), \quad (\text{D.3})$$

donde puede demostrarse que en el factor  $D[k]$  se absorben las constantes resultantes al realizar el cambio de variable [66].

Al igual que la función  $\delta$  normal se puede probar que [65]

$$\int D[f] \delta_F(F[f(x)]) = 1. \quad (\text{D.4})$$

# Apéndice E

## Método del punto silla

En esta sección daremos un breve descripción del método del punto silla. Nuestro objetivo es que el lector tenga una idea clara de como se utiliza este método. Para un explicación más extensa vea [2, 61, 67].

El método del punto silla se utiliza para aproximar el comportamiento asintótico de integrales que pueden ser escritas en la siguiente forma:

$$I = \int_C dz e^{tf(z)} g(z), \quad (\text{E.1})$$

donde  $f, g : K^N \rightarrow K$ , son funciones analíticas de  $\mathbf{z}$ , con  $K = \mathbb{R}$  o  $K = \mathbb{C}$ ,  $C$  es una curva en el plano complejo, y  $t \in \mathbb{R}$ .

Para estudiar el comportamiento asintótico de la integral cuando  $t \rightarrow \infty$ , se busca el punto  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$  donde esta integral obtiene su máxima contribución, llegando a la conclusión de que este punto  $\mathbf{z}_0$  debe de ser un punto silla de la función  $f$ . Para localizar  $\mathbf{z}_0$ , primero se procede a resolver las ecuaciones de punto silla determinadas por  $\nabla \Re(f) = 0$ , donde  $\Re(f)$  denota la parte real de la función  $f$ . Después de esto se busca el camino por donde la integral  $I$  al pasar por  $\mathbf{z}_0$  obtiene su máxima contribución, obteniendo así que para  $t$  grande:

$$I \sim e^{tf(\mathbf{z}_0)} g(\mathbf{z}_0) \left( \frac{2\pi}{t \det[\mathbf{H}(f(\mathbf{z}_0))]} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\alpha}, \quad (\text{E.2})$$

donde,  $\mathbf{H}(f(\mathbf{z}_0))$  denota la matriz hessiana de la función  $f$  evaluada en  $\mathbf{z}_0$ ,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg(\det[\mathbf{H}(f(\mathbf{z}_0))]),$$

y  $\arg(\cdot)$  denota el argumento principal de un número complejo. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo E.0.1** *Obtengamos una aproximación de  $k!$  para  $k \in \mathbb{N}$  grande. Sabemos que [4]:*

$$k! = \Gamma(k + 1) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^k = \int_0^\infty dt e^{k \ln t - t}, \quad (\text{E.3})$$

donde  $\Gamma$  es la función gamma. En este caso  $f(t) = \ln t - t$  y  $f'(t) = 1/t - 1$ , por lo que en  $t = 1$ ,  $f'(t) = 0$ . Por otro lado,  $f''(t) = -t^{-2}$  y entonces  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg(f''(1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$ . Sustituyendo lo anterior en la ecuación (E.2) tenemos que:

$$k! \sim \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k},$$

para  $k$  grande. A esta fórmula se le conoce como la fórmula de Stirling [2, 67].

En el capítulo 4 usaremos el método del punto silla generalizado para funcionales. Para una explicación más extensa acerca de las formalidades matemáticas del método de punto silla aplicado a funcionales véase [55].

# Apéndice F

## Cadenas de Markov

Esta sección tiene como objetivo explicar de manera breve las propiedades principales de las cadenas de Markov, con el fin de poder explicar más fácilmente los métodos de Monte Carlo y el algoritmo de Metropolis. Por esta razón se recomienda [68] para una explicación más extensa sobre este tema. Las siguientes definiciones han sido obtenidas de [69].

En la siguiente definición sólo consideraremos variables aleatorias continuas, por ser estas las que ocuparemos en las simulaciones realizadas a lo largo de esta tesis.

**Definición F.1 (Cadena de Markov)** *Una cadena de Markov a tiempo discreto  $\{X_t : t = 0, 1, \dots\}$ , es una sucesión de variables aleatorias continuas que toman valores en un conjunto  $S$ , llamado espacio de estados, que satisfacen la propiedad de Markov:*

$$p_{X_{t+1}|X_0, \dots, X_{t-1}, X_t}(j|x_0, \dots, x_{t-1}, i) = p_{X_{t+1}|X_t}(j|i), \quad (\text{F.1})$$

donde  $x_0, \dots, x_{t-1}, i, j \in S$ . Esta probabilidad condicional  $p_{ij} = p_{X_{t+1}|X_t}(j|i)$  es llamada kernel de transición o kernel de Markov, también conocida como la probabilidad de transición a un paso.

Por ejemplo, puede demostrarse que la caminata aleatoria

$$X_{t+1} = X_t + \varepsilon_t, \quad \text{para } t = 0, 1, \dots$$

con condición inicial  $X_0 = x_0$  y  $\varepsilon_t$  una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo  $[-1, 1]$ , es una cadena de Markov con espacio de estados  $S = \mathbb{R}$  [68].

Las cadenas de Markov pueden tener una serie de propiedades que son muy convenientes en el momento de realizar simulaciones. Algunas de estas propiedades son las siguientes.

**Definición F.2 (Irreducibilidad)** *Una cadena de Markov es irreducible si el kernel  $p_{ij}$  permite a la cadena de Markov moverse libremente por todo el espacio de estados  $S$ , para*

$t = 0, 1, \dots$ , es decir, sin importar cual sea el valor inicial  $X_0$  de la cadena, la cadena  $\{X_t : t = 0, 1, \dots\}$  tiene una probabilidad positiva de alcanzar eventualmente cualquier región del espacio de estados.

Un ejemplo de una cadena de Markov irreducible es la caminata aleatoria vista con anterioridad [68].

**Definición F.3 (Recurrencia)** *Una cadena de Markov es recurrente, si la cadena puede regresar a cualquier subconjunto del espacio de estados un número infinito de veces.*

**Definición F.4 (Distribución estacionaria)** *Sea  $f$  una distribución de probabilidad. Decimos que  $f$  es una distribución estacionaria para la cadena de Markov  $\{X_t : t = 0, 1, \dots\}$ , cuando sucede que si  $X_t$  se distribuye de acuerdo a  $f$ , entonces  $X_{t+1}$  también se distribuye de acuerdo a  $f$ , para cualquier  $t = 0, 1, \dots$ .*

**Definición F.5 (Ergodicidad)** *En el caso de que una cadena de Markov  $\{X_t : t = 0, 1, \dots\}$  sea recurrente, entonces su distribución estacionaria  $f$  será también una distribución límite, es decir, la distribución límite de  $X_t$  es  $f$  casi para cualquier valor inicial  $X_0$ . Esta propiedad es llamada ergodicidad.*

La propiedad de ergodicidad tiene muchas consecuencias importantes al momento de realizar simulaciones, ya que si un kernel  $p_{ij}$  produce una cadena de Markov ergódica con distribución estacionaria  $f$ , entonces generar una cadena de variables aleatorias  $X_t, X_{t+1}, \dots$  de este kernel, eventualmente producirá simulaciones de  $f$ . A continuación presentaremos un algoritmo que se basa en estas propiedades de las cadenas de Markov para simular una distribución  $f$ .

# Apéndice G

## Métodos Monte Carlo: Algoritmo de Metropolis

### G.1. Introducción

En esta sección explicaremos de manera breve el principal método numérico que utilizaremos en este trabajo: el algoritmo de Metropolis. Para una versión más extendida de este tema vea [69, 70, 71].

El método de Monte Carlo es un procedimiento que sirve para obtener un resultado numérico a través de la generación de una sucesión de muestras tomadas de una distribución de probabilidad [69]. Uno de los ejemplos clásicos donde se utiliza el método de Monte Carlo, es en la aproximación de integrales. Supongamos una integral definida de la siguiente forma:

$$\int_{\mathcal{X}} dx h(x) f(x), \quad (\text{G.1})$$

donde  $f$  es una densidad de probabilidad,  $h$  es una función y  $\mathcal{X}$  representa la región de integración. Por simplicidad tomamos que  $f$  está normalizada en  $\mathcal{X}$ . En este caso la integral anterior es la esperanza de la variable aleatoria  $h(X)$  respecto a la densidad de probabilidad  $f$ , es decir,

$$\langle h(X) \rangle_f = \int_{\mathcal{X}} dx h(x) f(x). \quad (\text{G.2})$$

Entonces utilizando el método de Monte Carlo al generar una muestra  $x_1, \dots, x_N$  de la densidad  $f$ , la cantidad

$$\bar{h}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(x_i),$$

será una buena aproximación de  $\langle h(X) \rangle_f$  [69].

Pero no sigamos dando más ejemplos particulares de este método y mejor presentemos el algoritmo de Metropolis.

## G.2. Algoritmo de Metropolis

El algoritmo de Metropolis es un método basado en cadenas de Markov. Dada una función de densidad objetivo  $f$  con dominio  $S$ , el algoritmo de Metropolis genera una cadena de Markov  $\{X_t : t = 0, 1, \dots, \}$  con espacio de estados  $S$  y con kernel de Markov (véase definición F.1)  $p_{ij}$ , tal que su distribución estacionaria sea  $f$ . Para construir el kernel de Markov, a la densidad objetivo  $f$  se le asocia una densidad condicional  $q(y|x)$ , que es fácil de simular. Esta densidad  $q$  puede ser casi cualquier densidad arbitraria, con la condición de que debe cumplir ciertos requerimientos teóricos como que el cociente  $\frac{f(y)}{q(y|x)}$  es constante e independiente de  $x$  y que  $q(\cdot|x)$  lleva a una exploración de todo  $S$ . Tomando todo lo anterior en consideración, podemos formular el algoritmo de Metropolis como sigue.

**Definición G.1 (Algoritmo de Metropolis)** *Dados  $M \in \mathbb{N}$ , el número de iteraciones a realizar en el algoritmo (conocido como el número de pasos Monte Carlo, MCS (Monte Carlo steps, por sus siglas en inglés)), el estado inicial  $X_0 = x_0 \in S$  y  $t = 1$ , el estado  $X_t$  de la cadena de Markov  $\{X_t : t = 0, \dots, M\}$  se determina de la siguiente manera [69, 70]:*

1. Si  $t \leq M$ , generamos  $Y_t$  de acuerdo a la densidad  $q(y|X_{t-1})$  para cualquier  $y \in S$ . Si  $t > M$  se termina el algoritmo.
2. Definimos  $p = \min \left\{ 1, \frac{f(y)}{f(x_{t-1})} \right\}$  (Llamada la probabilidad de aceptación).
3. Aceptamos  $Y_t$  con probabilidad  $p$ , es decir, generamos una variable aleatoria  $u$  de acuerdo a la distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$  y si  $u \leq p$ , entonces  $X_t = Y_t$ . Si  $u > p$ ,  $X_t = X_{t-1}$ .
4. Actualizamos  $t = t + 1$  y volvemos al paso 1.

Esta nueva cadena de Markov  $\{X_t : t = 0, \dots, M\}$ , tendrá probabilidades de transición [70]:

$$p_{ij} = \begin{cases} q(j|i) \min \left\{ 1, \frac{f(j)}{f(i)} \right\}, & j \neq i \\ 1 - \sum_{k \neq i}^M q(k|i) \min \left\{ 1, \frac{f(k)}{f(i)} \right\}, & j = i \end{cases}. \quad (\text{G.3})$$

El hecho importante del algoritmo de Metropolis es que la distribución estacionaria será  $f$  y junto con el kernel  $p_{ij}$  satisfarán [69, 70]:

$$\sum_{i \in S} p_{ij} f(i) = f(j), \quad (\text{G.4})$$

para cualquier  $j \in S$ .

Podemos notar dos cosas sobre el algoritmo de Metropolis:

1. Si el estado propuesto  $Y_t$  tiene una probabilidad más grande que el estado  $X_{t-1}$ , entonces el estado propuesto  $Y_t$  siempre será aceptado.
2. Para implementar el algoritmo de Metropolis sólo necesitamos conocer los cocientes  $\frac{f(y)}{f(x_{t-1})}$ . Nótese de forma importante que no necesitamos conocer la constante de normalización de  $f$ .

Para las aplicaciones referidas en esta tesis, en el paso 1 de la definición G.1, generaremos a  $Y_t$  de acuerdo a una caminata aleatoria continua en el espacio de estados  $S$ , es decir,  $Y_t = X_t + \varepsilon_t$  donde  $\varepsilon_t$  provendrá de una distribución uniforme en el intervalo  $[-1, 1]$  o de una distribución  $t$  de Student<sup>1</sup> con 0.5 grados de libertad. Además, para garantizar que la cadena de Markov generada sea estacionaria tendremos que *termalizarla*, es decir, primero realizaremos el algoritmo de Metropolis para una cantidad fija de MCS garantizando de esta manera que la cadena de Markov haya alcanzado la estacionariedad. Al terminar con este número de pasos comenzaremos el algoritmo de Metropolis tomando como valor inicial el último estado de la cadena de Markov previamente obtenida, para así generar la cadena de Markov final que consideraremos para aproximar nuestra función  $f$  de interés. Esto podrá entenderse mejor dando la definición explícita del algoritmo de Metropolis que nosotros ocuparemos.

**Definición G.2** Sean  $\{y_1, \dots, y_N\}$  un conjunto de variables aleatorias y  $p_{y_1, \dots, y_N} : A^N \rightarrow \mathbb{R}$  su función de densidad de probabilidad conjunta, donde  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Supongamos que esta densidad puede escribirse como  $p_{y_1, \dots, y_N}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{Z_0} e^{\zeta F(\boldsymbol{\lambda})}$ , donde  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es una función con  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  tal que  $\lambda_i \in A$ , para cualquier  $i = 1, \dots, N$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}$  y donde  $Z_0$  es una constante de normalización. Fijemos  $R_1$  y  $R_2 \in \mathbb{N}$ , el número de MCS para termalizar y para generar nuestra cadena de Markov, respectivamente. Escojamos  $X_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_N^{(0)}) \in A^N$ , un vector inicial para nuestra cadena de Markov  $\{X_t : t = 0, \dots, R_2\}$ , y definamos  $t = 1$ , entonces procederemos de la manera siguiente:

*Primer loop para termalizar la cadena, es decir, para asegurar que esta es estacionaria:*

1. Si  $t \leq R_1$  pasamos al paso siguiente. En caso contrario, haga  $t = 1$  y pase al segundo loop.

---

<sup>1</sup>Se elige esta distribución para evitar correlación entre los elementos de la cadena de Markov [69].

2. Generamos  $\varepsilon_i$  de acuerdo a una distribución uniforme en el intervalo  $[-1, 1]$  o a una distribución  $t$  de Student con 0.5 grados de libertad. Si  $x_i^{(0)} + \varepsilon_i \notin A$ , para alguna  $i = 1, \dots, N$ , entonces se vuelve a generar  $\varepsilon_i$  hasta que  $x_i^{(0)} + \varepsilon_i \in A$ .
3. Definimos  $Y = (x_1^{(0)} + \varepsilon_1, \dots, x_N^{(0)} + \varepsilon_N)$  y  $p = \min \{1, e^{\zeta(F(Y)-F(X_0))}\}$ .
4. Aceptamos  $Y$  con probabilidad  $p$ , es decir, generamos una variable aleatoria  $u$  de acuerdo a la distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$  y si  $u \leq p$ , entonces actualizamos  $X_0 = Y$ . Si  $u > p$ ,  $X_0 = X_0$ .
5. Actualizamos  $t = t + 1$  y volvemos al paso 1.

Segundo loop para generar la cadena de Markov:

1. Si  $t \leq R_2$  pasamos al paso siguiente. En caso contrario, se termina el algoritmo.
2. Generamos  $\varepsilon_i$  de acuerdo a una distribución uniforme en el intervalo  $[-1, 1]$  o a una distribución  $t$  de Student con 0.5 grados de libertad. Si  $x_i^{(t-1)} + \varepsilon_i \notin A$ , para alguna  $i = 1, \dots, N$ , entonces se vuelve a generar  $\varepsilon_i$  hasta que  $x_i^{(t-1)} + \varepsilon_i \in A$ .
3. Definimos  $Y = (x_1^{(t-1)} + \varepsilon_1, \dots, x_N^{(t-1)} + \varepsilon_N)$  y  $p = \min \{1, e^{\zeta(F(Y)-F(X_{t-1}))}\}$ .
4. Aceptamos  $Y$  con probabilidad  $p$ , es decir, generamos una variable aleatoria  $u$  de acuerdo a la distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$  y si  $u \leq p$ , entonces definimos  $X_t = Y$ . Si  $u > p$ ,  $X_t = X_{t-1}$ .
5. Actualizamos  $t = t + 1$  y volvemos al paso 1.

En la definición anterior podemos ver que en el *loop* de termalización no estamos guardando los valores de la cadena, sino tan sólo actualizando la variable inicial  $X_0$ . Después de realizar la termalización, en el segundo *loop* comenzamos a guardar los valores de la cadena.

Veamos un ejemplo.

**Ejemplo G.2.1** Simulemos la densidad gaussiana estándar, es decir, simulemos a  $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ . Sabemos que en este caso  $A = \mathbb{R}$ ,  $N = 1$  y  $F(x) = -x^2/2$ , para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ . Existen maneras más eficientes de simular variables aleatorias gaussianas, sin embargo lo utilizaremos con el fin de dar un ejemplo práctico. El siguiente programa en R utiliza el algoritmo de la definición G.2 para  $p_X$ .

```
Fm=function(x,eps){
return(-(2*x*eps+eps^2)/2)
}

simulation=function(M1,M2){
```

```

x0=0
x=0*seq(1,M2)

for(i in 1:M1){
eps=runif(1,-1,1)
p=min(1,exp(Fm(x0,eps)))
m1=runif(1,0,1)
x0=x0+eps*ifelse(m1<p,1,0)
}

x[1]=x0
for(i in 1:(M2-1)){
E=runif(1,-1,1)
p=min(1,exp(Fm(x[i],eps)))
m1=runif(1,0,1)
x[i+1]=x[i]+eps*ifelse(m1<p,1,0)
}

return(x)
}

```

En la figura G.1 podemos ver el histograma generado por este algoritmo junto con la curva teórica exacta de la distribución gaussiana estándar.

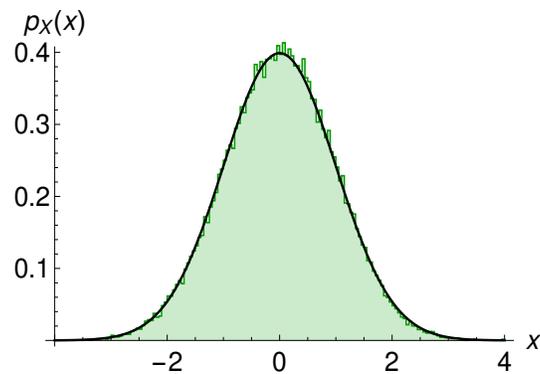


Figura G.1: Simulación de una densidad gaussiana estándar. La curva negra corresponde a la función de densidad  $p_X$  y el fondo verde corresponde al histograma de la cadena de Markov producido con el algoritmo de Metropolis. En este caso  $R_1 = R_2 = 10^3$ .

También utilizaremos un segundo algoritmo de Metropolis un poco más general que el primero.

**Definición G.3** Sean  $\{y_1, \dots, y_N\}$  un conjunto de variables aleatorias y  $p_{y_1, \dots, y_N} : A^N \rightarrow \mathbb{R}$  su función de densidad de probabilidad conjunta, donde  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Supongamos que esta densidad puede escribirse como  $p_{y_1, \dots, y_N}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{Z_0} e^{\zeta F(\boldsymbol{\lambda})}$ , donde  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es una función con  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  tal que  $\lambda_i \in A$ , para cualquier  $i = 1, \dots, N$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}$  y donde  $Z_0$  es una constante de normalización. Supongamos también que podemos escribir a  $A = A_1 \cup A_2$ , con  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ . Fijemos  $R_1$  y  $R_2 \in \mathbb{N}$ , el número de MCS para termalizar y para generar nuestra cadena de Markov, respectivamente, y  $N_1 < N$ . Escojamos dos vectores iniciales  $X_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_{N_1}^{(0)})$ , tal que  $x_i^{(0)} \in A_1$  para cada  $i = 1, \dots, N_1$ , y  $Y_0 = (y_1^{(0)}, \dots, y_{N-N_1}^{(0)})$ , tal que  $y_j^{(0)} \in A_2$  para cada  $j = 1, \dots, N - N_1$ . Definimos  $W_0 = (w_1^{(0)}, \dots, w_N^{(0)})$  con  $w_i^{(0)} = x_i^{(0)}$ , para  $i = 1, \dots, N_1$ , y  $w_{j+N_1}^{(0)} = y_j^{(0)}$ , para  $j = 1, \dots, N - N_1$ , nuestro estado inicial de la cadena de Markov  $\{W_t : t = 0, \dots, R_2\}$ . Definamos  $t = 1$  y procedamos de la manera siguiente.

Primer loop para termalizar la cadena, es decir, para asegurar que es estacionaria:

1. Si  $t \leq R_1$  pasamos al paso siguiente. En caso contrario, haga  $t = 1$  y pase al segundo loop.
2. Generamos  $\varepsilon_i$  proveniente de una distribución uniforme en el intervalo  $[-1, 1]$  o de una distribución  $t$  de Student con 0.5 grados de libertad, para  $i = 1, \dots, N$ . Si  $x_i^{(0)} + \varepsilon_i \notin A_1$ , para alguna  $i = 1, \dots, N_1$ , se genera nuevamente  $\varepsilon_i$  hasta que  $x_i^{(0)} + \varepsilon_i \in A_1$ . De manera análoga, si  $y_j^{(0)} + \varepsilon_{j+N_1} \notin A_2$ , para alguna  $j = 1, \dots, N - N_1$ , se genera nuevamente  $\varepsilon_{j+N_1}$  hasta que  $y_j^{(0)} + \varepsilon_{j+N_1} \in A_2$ .
3. Definimos el vector  $W = (x_1^{(0)} + \varepsilon_1, \dots, x_{N_1}^{(0)} + \varepsilon_{N_1}, y_1^{(0)} + \varepsilon_{N_1+1}, \dots, y_{N-N_1}^{(0)} + \varepsilon_N)$ , de tamaño  $N$ , y  $p = \min\{1, e^{\zeta(F(W) - F(W_0))}\}$ .
4. Aceptamos  $W$  con probabilidad  $p$ , es decir, generamos una variable aleatoria  $u$  de acuerdo a la distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$  y si  $u \leq p$ , actualizamos  $w_i^{(0)} = x_i^{(0)} + \varepsilon_i$ , para cada  $i = 1, \dots, N_1$ , y  $w_{j+N_1}^{(0)} = y_j^{(0)} + \varepsilon_{j+N_1}$ , para cada  $j = 1, \dots, N - N_1$ . Si  $u > p$ , no se actualiza el vector  $W_0$ .
5. Actualizamos  $t = t + 1$  y volvemos al paso 1.

Segundo loop para generar la cadena de Markov:

1. Si  $t \leq R_2$  pasamos al paso siguiente. En caso contrario se termina el algoritmo.
2. Generamos  $\varepsilon_i$  proveniente de una distribución uniforme en el intervalo  $[-1, 1]$  o de una distribución  $t$  de Student con 0.5 grados de libertad, para  $i = 1, \dots, N$ . Si  $x_i^{(t)} + \varepsilon_i \notin A_1$ , para alguna  $i = 1, \dots, N_1$ , se genera nuevamente  $\varepsilon_i$  hasta que  $x_i^{(t)} + \varepsilon_i \in A_1$ . De manera análoga, si  $y_j^{(t)} + \varepsilon_{j+N_1} \notin A_2$ , para alguna  $j = 1, \dots, N - N_1$ , se genera nuevamente  $\varepsilon_{j+N_1}$  hasta que  $y_j^{(t)} + \varepsilon_{j+N_1} \in A_2$ .

3. Definimos el vector  $W = (x_1^{(t)} + \varepsilon_1, \dots, x_{N_1}^{(t)} + \varepsilon_{N_1}, y_1^{(t)} + \varepsilon_{N_1+1}, \dots, y_{N-N_1}^{(t)} + \varepsilon_N)$ , de tamaño  $N$ , y  $p = \min \{1, e^{\zeta(F(W) - F(W_{t-1}))}\}$ .
4. Aceptamos  $W$  con probabilidad  $p$ , es decir, generamos una variable aleatoria  $u$  de acuerdo a la distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$  y si  $u \leq p$ , definimos  $w_i^{(t)} = x_i^{(t-1)} + \varepsilon_i$ , para cada  $i = 1, \dots, N_1$ , y  $w_{j+N_1}^{(t)} = y_j^{(t-1)} + \varepsilon_{j+N_1}$  para cada  $j = 1, \dots, N - N_1$ . Si  $u > p$ ,  $w_i^{(t)} = x_i^{(t-1)}$ , para cada  $i = 1, \dots, N_1$ , y  $w_{j+N_1}^{(t)} = y_j^{(t-1)}$ , para cada  $j = 1, \dots, N - N_1$ .
5. Actualizamos  $t = t + 1$  y volvemos al paso 1.

Un ejemplo de este algoritmo lo encontraremos en la sección 4.2.8.

# Apéndice H

## Integrales elípticas

En esta sección presentaremos las integrales elípticas que utilizaremos en el capítulo 4. Las siguientes definiciones provienen de [2, 57].

**Definición H.1 (Integral elíptica incompleta del primer tipo)** *Definimos la integral elíptica incompleta del primer tipo como:*

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, \quad (\text{H.1})$$

para  $|k| \leq 1$  y  $|\varphi| \leq 2\pi$ .

**Definición H.2 (Integral elíptica completa del primer tipo)** *Definimos la integral elíptica completa del primer tipo como:*

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad (\text{H.2})$$

para  $|k| \leq 1$ .

**Definición H.3 (Integral elíptica incompleta del segundo tipo)** *Definimos la integral elíptica incompleta del segundo tipo como:*

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi dt \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}, \quad (\text{H.3})$$

para  $|k| \leq 1$  y para  $|\varphi| \leq 2\pi$ .

**Definición H.4 (Integral elíptica completa del segundo tipo)** *Definimos la integral elíptica completa del segundo tipo como:*

$$E(k) \equiv E\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad (\text{H.4})$$

para  $|k| \leq 1$ .

**Definición H.5 (Integral elíptica incompleta del tercer tipo)** *Definimos la integral elíptica incompleta del tercer tipo como:*

$$\widehat{\Pi}(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{(1 - n^2 \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, \quad (\text{H.5})$$

para  $|k| \leq 1$ ,  $|\varphi| \leq 2\pi$  y  $n \in \mathbb{R}$ .

**Definición H.6 (Integral elíptica completa del tercer tipo)** *Definimos la integral elíptica completa del tercer tipo como:*

$$\Pi(n, k) \equiv \widehat{\Pi}\left(\frac{\pi}{2}, n, k\right) \quad (\text{H.6})$$

para  $|k| \leq 1$ ,  $n \in \mathbb{R}$ .

En las definiciones anteriores,  $k$  es llamado el módulo elíptico.

## H.1. Funciones elípticas de Jacobi

Las tres funciones elípticas de Jacobi son  $\text{cn}(u, k)$ ,  $\text{dn}(u, k)$  y  $\text{sn}(u, k)$  donde  $k$  es el módulo elíptico definido en la sección anterior y  $u = F(\varphi, k)$  es la integral elíptica incompleta del primer tipo. Estas funciones se definen de la siguiente manera:

1.  $\text{sn}(u, k) = \sin(\varphi)$ ,
2.  $\text{cn}(u, k) = \cos(\varphi)$ ,
3.  $\text{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)}$ ,

donde  $\varphi = F^{-1}(u, k)$ .

Las siguientes expresiones nos servirán para reescribir algunas integrales del capítulo 4 a través de integrales elípticas. Estas expresiones se han obtenido de [57].

$$Z_m = \int \left( \frac{1 - \tilde{\alpha}_1^2 \operatorname{sn}^2(u)}{1 - \tilde{\alpha}^2 \operatorname{sn}^2(u)} \right)^m du, \quad (\text{H.7})$$

$$\bar{Z}_m = \int \left( \frac{1 - \tilde{\alpha}^2 \operatorname{sn}^2(u)}{1 - \tilde{\alpha}_1^2 \operatorname{sn}^2(u)} \right)^m du, \quad (\text{H.8})$$

$$Z_0 = F(\varphi, k), \quad (\text{H.9})$$

$$Z_1 = \frac{1}{\tilde{\alpha}^2} [(\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\alpha}_1^2) \hat{\Pi}(\varphi, \tilde{\alpha}^2, k) + \tilde{\alpha}_1^2 u], \quad (\text{H.10})$$

$$\bar{Z}_1 = \frac{1}{\tilde{\alpha}_1^2} [(\tilde{\alpha}_1^2 - \tilde{\alpha}^2) \hat{\Pi}(\varphi, \tilde{\alpha}_1^2, k) + \tilde{\alpha}^2 u], \quad (\text{H.11})$$

$$Z_2 = \frac{1}{\tilde{\alpha}^4} [\tilde{\alpha}_1^4 u + 2\tilde{\alpha}_1^2 (\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\alpha}_1^2) V_1 + (\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\alpha}_1^2)^2 V_2], \quad (\text{H.12})$$

$$V_1 = \hat{\Pi}(\varphi, \tilde{\alpha}^2, k), \quad (\text{H.13})$$

$$V_2 = \frac{1}{2(\tilde{\alpha}^2 - 1)(k^2 - \tilde{\alpha}^2)} [\tilde{\alpha}^2 E(u) + (k^2 - \alpha^2)u + (2\tilde{\alpha}^2 k^2 + 2\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\alpha}^4 - 3k^2) \hat{\Pi}(\varphi, \tilde{\alpha}^2, k) - \frac{\tilde{\alpha}^4 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - \tilde{\alpha}^2 \operatorname{sn}^2(u)}], \quad (\text{H.14})$$

donde  $E(u)$  es la integral elíptica completa del segundo tipo,  $F(\varphi, k)$  y  $\hat{\Pi}(\varphi, n, k)$  son las integrales elípticas incompletas del primer y tercer tipo, respectivamente,  $k$  es el módulo elíptico, y  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\alpha}_1$  son constantes reales.