



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ZARAGOZA**

**MODELADO MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN COMPUTACIONAL
DE UN SEPARADOR ELECTROSTÁTICO DE POLVO**

TESIS:

PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO QUÍMICO

PRESENTA:

PÉREZ MARTIN JONATHAN

DIRECTOR DE TESIS:

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO, 26 AGOSTO DE 2016





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS
SUPERIORES "ZARAGOZA"

DIRECCIÓN

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE.

Comunico a usted que al alumno(a) **Pérez Martín Jonathan**, con número de cuenta 30623270-5 de la carrera Ingeniería Química, se le ha fijado el día 26 del mes de Agosto de 2016 a las 15:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

PRESIDENTE	M. EN I. ESTEBAN MINOR PÉREZ
VOCAL	DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA
SECRETARIO	DR. MARIANO PÉREZ CAMACHO
SUPLENTE	M. EN C. FRANCISCO JAVIER ALMANZA RUIZ
SUPLENTE	DRA. BLANCA ESTELA GARCÍA ROJAS

[Firma]
 Edtson Herrera Valencia
 Mariano Pérez Camacho
[Firma]
[Firma]

El título de la tesis que se presenta es: "Modelado matemático y simulación computacional de un separador electrostático de polvo".

Opción de Titulación: Convencional

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
México, D. F. a 26 de Julio de 2016

[Firma]
 DR. VÍCTOR MANUEL MENDOZA NÚÑEZ
 DIRECTOR

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES "ZARAGOZA" DIRECCIÓN



Vo.Bo

[Firma]
 I.Q. DOMINGA ORTIZ BAUTISTA
 JEFA DE LA CARRERA DE I.Q.

RECIBÍ:
 OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES
 Y DE GRADO

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, por la formación recibida durante mis estudios.

Al Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia por haber permitido y aceptado como su alumno como fue en el servicio social y en la tesis, también por haber compartido un poco de todo su conocimiento para la elaboración de esta tesis.

Al M. en I. Esteban Minor Pérez por los aportes realizados para el presente trabajo.

Al Dr. Mariano Camacho Pérez por sus aportaciones y las sugerencias dadas para que el trabajo quedara correctamente.

A la Dra. Blanca Estela García Rojas por sus comentarios así como el tiempo dedicado para la revisión de dicho proyecto de tesis.

Al M. en C. Francisco Javier Almazan Ruiz por la dedicación de la revisión del trabajo y los comentarios hechos.

Al M. Cuauhtémoc Lagos Chávez, al Dr. Néstor Noe, M. Alejandro Juvenal Guzmán, a la Ing. Dominga Baustista, por mencionar algunos de los buenos profesores con los cuales tome clases a lo largo de la carrera.

Investigación realizada gracias al Apoyo a proyectos de investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM << IN115615>> << Fenómenos de Transporte y reología de fluidos complejos aplicados a sistemas biológicos >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para la innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM << PE112716>> <<Material didáctico teórico, protocolos experimentales y aula virtual de las materias de Fenómenos de Transporte (Cuarto Semestre) y Transferencia de Masa (Séptimo semestre) correspondiente a los ciclos intermedio y terminal de la carrera de Ingeniera Química >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

DEDICATORIAS

A mi madre Otilia Martin Romero, que siempre ha luchado por darnos lo mejor a mi hermano y a mí, por formarme como persona, por siempre tener esa determinación y nunca dejarse caer pese a las adversidades a las cuales hemos pasado y de alguna u otra forma siempre me muestra su apoyo y con quien estaré agradecido de por vida.

A mi padre Serapio Pérez Ramírez, porque toda su vida siempre estuvo orgulloso de mi, que siempre intento darme lo mejor y quien siempre estuvo dando su apoyo durante toda mi formación escolar y personal. Aunque ya no alcanzo a verme como el tanto anhelaba, sé que él se fue con esa felicidad de que me recibiría como ingeniero y también sé que era la persona a quien le daba más orgullo, incluso más orgullo del que a mí me da haber finalizado esta parte de mis estudios. Aunque no se lo pude decir mientras podía le agradezco todo lo que hizo por mí y todo ese apoyo incondicional.

A mi novia Laura Patricia Zamora Téllez, por haber estado apoyándome y animándome en un momento tan difícil en mi vida y por todos esos momentos que hemos pasado a lo largo de este tiempo y los que pasemos hasta que el tiempo decida.

A Lucky y Chabelo quienes no los seres vivos no humanos a los cuales quiero demasiado.

Y por último pero no menos importantes a las personas que considero mis amigos.

ÍNDICE

	Pág.
AGRADECIMIENTOS.....	I
DEDICATORIAS.....	II
ÍNDICE.....	III
ÍNDICE DE FIGURAS	VI
ÍNDICE DE TABLAS	VII
NOMENCLATURA	VIII
GLOSARIO	X
RESUMEN	XII
ABSTRACT.....	XIII
CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Fluidos electroreológicos	2
1.1.1 Separadores electrostáticos.....	2
1.1.2 Separador de placa.....	3
1.1.3 Separador de placa.....	3
1.2 Aplicaciones de los fluidos electroreológicos	4
1.2.1 Células ciliadas externas.....	4
1.2.2 Polímeros inteligentes.....	5
1.2.3 Electroforesis.....	5
1.2.4 Micro-dispositivos y liberado de fármacos	5
1.2.5 Liberado de fármacos en Biofluidos: (Sangre con colesterol).....	7
1.3 Antecedentes: Flujos electro-osmóticos de fluidos newtonianos y no newtonianos	8
1.4 Elementos importantes de este trabajo	10
1.5 Distribución del material de estudio	11
1.6 Objetivos.	13
1.6.1 Objetivo General.	13
1.6.2 Objetivos Particulares.	13
1.7 Hipótesis.....	13
1.8 Justificación	13
CAPITULO II MARCO TEÓRICO	15
2.1 Fenómenos de Transporte.	16
2.1.1 La ecuación de transporte de cantidad de movimiento.	17
2.2 Fluido newtoniano.	17

MODELADO MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE UN SEPARADOR
ELECTROSTÁTICO DE POLVO

2.3 Casos particulares de la ecuación de Navier-Stokes.....	19
2.3.1 Flujo cortante en estado estacionario: Flujo de Poiseuille con mecanismos gravitacionales	19
2.3.2 Flujo cortante en estado estacionario: Flujo de Poiseuille sin mecanismos gravitacionales	19
2.3.3 Flujo cortante en estado estacionario : Flujo por Arrastre	19
2.3.4 Flujo cortante en estado no estacionario: Inicio de Flujo de Poiseuille sin mecanismos gravitacionales	19
2.3.5 Flujo cortante en estado no estacionario: Inicio de Flujo de Poiseuille con mecanismos gravitacionales	19
2.4 Reología.....	19
2.4.1 Tensor de deformación.....	20
2.4.2 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta.....	20
2.4.3 El tensor rapidez de deformación.....	21
2.4.4 El tensor de Vorticidad.....	21
2.4.5 Tensor de esfuerzos.....	22
CAPITULO III DESCRIPCIÓN FÍSICA DEL PROBLEMA	23
3.1 Separador de placas paralelas.....	24
3.2 Dinámica de flujo.....	25
3.3 Tensores cinemáticos.....	25
3.3.1 Tensor gradiente de velocidad.....	25
3.3.2 Traspuesta del tensor gradiente de velocidad.....	25
3.3.3 Tensor rapidez de deformación	26
3.3.5 Tensor de Vorticidad	26
3.3.6 Tensor de esfuerzos	26
3.4 Ecuaciones de continuidad y momento	27
3.4.1 Ecuación de continuidad	27
3.4.2 Ecuación de momento modificada por el campo eléctrico	28
CAPITULO IV MODELADO MATEMÁTICO	30
4.1 ESTADO ESTACIONARIO	31
4.1.1 Separador electrostático de polvo	31
4.1.2 Calculo de la velocidad media axial.....	32
4.1.3 Calculo del flujo másico.....	33
4.1.4 Calculo del esfuerzo cortante.....	34

MODELADO MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE UN SEPARADOR
ELECTROSTÁTICO DE POLVO

4.1.5	Calculo de la trayectoria de la partícula.....	34
4.1.6	Longitud del separador	37
4.1.7	Optimización de la longitud del separador	39
CAPITULO V MODELADO MATEMÁTICO		42
5.1	ESTADO NO ESTACIONARIO	43
5.2	Variables y ecuaciones adimensionales	43
5.3	Estado estacionario	43
5.4	Estado transitorio	44
5.4.1	Método de separación de variables	45
5.5	Velocidad en estado no estacionario	52
5.6	Velocidad media en estado no estacionario	53
5.7	Calculo del flujo másico y volumétrico.....	54
5.8	Calculo del esfuerzo cortante.....	55
5.9	Velocidad con campo eléctrico en estado no estacionario	57
5.10	Velocidad media con campo eléctrico	58
5.11	Calculo del flujo másico y volumétrico con campo eléctrico	59
5.12	Calculo del esfuerzo con campo eléctrico.....	60
5.13	Calculo de la longitud	61
CAPITULO VI VARIABLES Y ECUACIONES ADIMENSIONALES		65
6.1	Estado estacionario	66
6.2	Estado no estacionario	67
CAPÍTULO VII SIMULACIÓN COMPUTACIONAL		69
7.1	Estado estacionario	70
7.2	Estado no estacionario	76
CAPÍTULO VIII ANÁLISIS DE RESULTADOS		89
8.1	Análisis de resultados.....	90
8.2	CONCLUSIONES	91
8.3	TRABAJO FUTURO	92
8.3.1	Diferentes ecuaciones constitutivas	92
8.3.2	Mecanismos.	93
8.3.3	Simulaciones numéricas y computacionales.....	93
8.3.4	Fluidos no newtonianos.	93
BIBLIOGRAFÍA.....		95

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Ilustra el sistema de flujo estudiado en la descripción de las células ciliadas externas. Se tienen dos fases viscoelásticas y una membrana flexo eléctrica en la mitad del capilar la cual, es deformable debido a un campo eléctrico. EL efecto oscilante de este sistema induce la amplificación acústica en el sistema.	4
Figura 2 Ilustra una capa de colágeno que colocada en un sustrato para formar una capa y que pueda ser utilizada para minimizar los efectos de cicatrización.....	5
Figura 3 Ilustra el estudio de partículas (sistema coloidal) en una rendija de espesor $2H$ y longitud en donde es aplicado un campo eléctrico generado por una diferencial de potencial..	7
Figura 4. Ilustra la función viscosidad vs rapidez de deformación de la sangre humana. Nótese que en la figura se aprecian las tres zonas de un reograma a bajas y altas rapidezces de deformación se observan dos regiones constantes, mientras que a moderados cortes una zona tipo ley de potencia.....	8
Figura 5. Se estudia la sangre con altos contenidos de colesterol. Obsérvese que las dos zonas constantes desaparecen y solo queda la zona intermedia tipo ley de potencia.	8
Figura 6 Organización del proyecto de tesis.....	12
Figura 7 Ilustra el sistema de estudio. Dos placas paralelas separadas a una distancia $2B$ y Longitud L respectivamente y tiene una partícula de polvo en el fluido. Al cual se le induce un campo eléctrico.....	24
Figura 8 Ilustra los perfiles de velocidad como función de la coordenada x , en este caso una x reducida (x^*), para diferentes valores del gradiente de presión. Se observa el perfil clásico que se muestra en la literatura.....	70
Figura 9 Ilustra los perfiles del esfuerzo cortante como función de la coordenada x , en este caso es una x reducida (x^*) con diferentes valores del gradiente de presión.	71
Figura 10 Ilustra los perfiles de velocidad como función del tiempo característico para diferentes valores de la longitud característica.	72
Figura 11 Ilustra la velocidad de la partícula en función de la longitud característica con diferentes valores del tiempo característico.....	73
Figura 12 Ilustra los perfiles de esfuerzo cortante en función del tiempo característico con diferentes valores de la distancia característica.	74
Figura 13 Ilustra los perfiles de esfuerzo cortante en función de la distancia característica con diferentes valores del tiempo característico.....	75
Figura 14 Muestra los perfiles de velocidad para tiempos de difusión bajos.	76
Figura 15 Muestra perfiles de velocidad con diferentes valores de tiempo difusivo.....	77
Figura 16 Muestra los perfiles de velocidad en un punto fijo de la coordenada axial.	78
Figura 17 Muestra los perfiles de velocidad con diferentes parámetros para z , f y v_{max}	79
Figura 18 Muestra los perfiles de velocidad con diferentes cantidades de términos usados de la serie de Fourier y manteniendo el mismo gradiente de presión.....	80
Figura 19 Muestra los perfiles de velocidad con diferentes cantidades de términos usados de la serie de Fourier y variando las velocidades máximas.	80
Figura 20 Muestra el esfuerzo cortante en la coordenada axial x^*	82
Figura 21 Ilustra los perfiles de velocidad con un tiempo característico igual a 0.....	83
Figura 22 Muestra el perfil de velocidad contra la evolución del tiempo característico.	84
Figura 23 Muestra los perfiles de velocidad en diferentes posiciones en las placas.	85

Figura 24 Muestra perfiles de velocidad con respecto en la coordenada axial x^* con campo eléctrico	86
Figura 25 Muestra los perfiles del esfuerzo con respecto a la coordenada axial.	87
Figura 26 Muestra los perfiles de esfuerzo vs el tiempo característico.	88

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Muestra las ecuaciones de transporte y su ley asociada a cada una de ellas.....	16
Tabla 2 Resumen de las ecuaciones utilizadas en el estado estacionario.....	41
Tabla 3 Resumen de las ecuaciones utilizadas para el estado no estacionario.	63

NOMENCLATURA

Vectores y tensores

$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de esfuerzos viscoso [Pa]
\mathbf{D}	Tensor rapidez de deformación [1/s]
$\nabla \mathbf{V}$	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
$[\nabla \mathbf{V}]^T$	Tensor gradiente de velocidad transpuesto [1/s]
\mathbf{V}	Vector de velocidad [m/s]
\mathbf{g}	Vector de aceleración de la gravedad [1/s]

Operadores Matemáticos

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$	Derivada material y sustancial [1/s]
$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$	Operador Nabla [1/m]
$\frac{\partial}{\partial x^i}$	Derivada parcial de la coordenada x^i [1/m]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]
π	Constante Pi [1]

Variables dimensionales

m	Masa de la partícula [kg]
L	Longitud del separador [m]
e	Carga eléctrica [C]
V_z	Componente axial del vector de velocidad [m/s]
t_f	Tiempo final [s]
t	Tiempo [s]
Q	Flujo volumétrico [m ³ /s]
M	Flujo másico [kg/s]

Variables adimensionales

x^*	Longitud característica
t^*	Tiempo característico

MODELADO MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE UN SEPARADOR
ELECTROSTÁTICO DE POLVO

T	Tiempo difusivo
ϕ	Velocidad adimensional
ξ	Longitud adimensional
τ	Tiempo adimensional

Letras Griegas

μ	Viscosidad [Pa s]
ε	Intensidad del campo eléctrico [N/C]
ρ	Densidad [kg/m ³]
σ_{xz}	Componente xz del esfuerzo cortante [Pa]

GLOSARIO

Campo eléctrico	Es un campo de fuerza creado por la atracción y repulsión de cargas eléctricas.
Carga eléctrica	Es una propiedad física intrínseca de algunas partículas subatómicas que se manifiesta mediante fuerzas de atracción y repulsión entre ellas.
Ecuación constitutiva	Ecuación que relaciona las variables dinámicas de un sistema. En particular en reología es el esfuerzo y la deformación.
Ecuación de continuidad	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento	Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.
Estado estacionario	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Estado no estacionario	Estado en que las variables dinámicas del sistema depende del tiempo.
Fluido	Es aquel que al aplicarle un esfuerzo se deforma continua e irreversiblemente.
Fluido incompresible	Fluido en cual los cambios de presión es insignificante el cambio de densidad.
Fluido compresible	Fluido en cual la densidad no permanece constante con cambios de presión.
Fluido newtoniano	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
Fluido no newtoniano	La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.
Rapidez de deformación	Evolución temporal de la deformación.

MODELADO MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE UN SEPARADOR ELECTROSTÁTICO DE POLVO

Tiempo difusivo	También llamado de proceso, es un tiempo adimensional, el cual relaciona el tiempo con las variables físicas del sistema como son viscosidad, densidad y separación de las placas.
Tiempo eléctrico	También llamado característico, es un tiempo adimensional, relaciona los efectos del campo eléctrico con la masa de la partícula y el espacio de las placas, este nos dicta el tiempo en que la partícula termina su recorrido.
Viscosidad	Medida de resistencia a fluir de la materia.
Partícula	Cuerpo material de pequeñas dimensiones constituyente de la materia.

RESUMEN

En este trabajo, se analiza un separador electrostático de polvo el cual consiste en dos placas separadas a una distancia de $2B$ y longitud finita $z = L$. El fluido se deforma continua e irreversiblemente debido a dos fuerzas motrices asociadas al gradiente de presión constante en la dirección axial del flujo y al campo eléctrico que se aplica al sistema, debido a una diferencia de potencial por unidad de longitud. En el fluido se analiza una partícula esférica de radio $r = a$ y masa m . En particular, en este sistema la masa y la forma de la partícula no son consideradas en el desarrollo del problema. Para caracterizar la transferencia de momento y reología, se propone la ecuación constitutiva del modelo Newtoniano, acoplada con la de momento modificada por los mecanismos eléctricos. Suponiendo estado estacionario, fluido incompresible, efectos gravitacionales despreciable, no existe deslizamiento en la pared, se obtienen expresiones analíticas para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, esfuerzo cortante, posición de la partícula expuesta al campo eléctrico y la longitud mínima para que el sistema sea lo más eficiente posible, i.e. las partículas queden completamente en la placa inferior. Con el fin de contrastar el efecto del campo eléctrico sobre el sistema se hacen comparaciones sin y con campo eléctrico. En todos los casos (estacionario y no estacionario), el campo eléctrico afecta la dinámica del sistema, i.e. se inducen cambios en el perfil de velocidades, el esfuerzo cortante y flujo volumétrico respectivamente. Es importante resaltar que los sistemas en estado estacionario y no estacionario se modifican los perfiles de velocidad, esfuerzo cortante, así como el flujo volumétrico y la longitud del separador debido a las propiedades eléctricas del sistema.

Palabras clave: gradiente de presión, campo eléctrico, separador electrostático, transferencia de momento, reología, estado estacionario y no estacionario.

ABSTRACT

In this work, an electrostatic separator of dust is analyzed which consist of two plaque separated at a distance of $2B$ and finite length $z = L$. The fluid is deformed continuously and irreversibly due to two diving forces associated at constant pressure gradient and electrical field in the axial direction of the fluid and electrical field that is applied to system due to at a potential difference per unit length. In the Fluid is analyzed a spherical particle of radius $r = a$ and mass m . In particular, in this system the mass and particle shape are not considered in the development of the problem. In order to characterize the moment transfer and rheology the Newton's law constitutive equation was proposed. This simplest equation was coupled with modify momentum equation by effect of the electrical mechanisms. It is assumed stationary state, incompressible fluid, negligible effect gravitational, there is no slip on the wall, it is obtained analytic expressions for to velocity profile, volumetric flow, shear stress, position of the particle exposed to electrical field and minimum length for the system as efficiently as possible, i.e. particles stay completely in bottom plate. With the final purpose to contrast the effect of the electric field on the system comparisons are made without and with electrical field. In all cases (stationary and non-stationary), electric field affects the dynamics of the system, i.e. it induces changes in the velocity profile, shear strength and volumetric flow respectively. It is important to highlight that the system in stationary state and non-stationary are modified velocity profile, shear strength, so as volumetric flow and length of the separator due to electric properties of the system.

Key words: pressure gradient, electrical field, electrostatic separator, momentum transfer, rheology, stationary and non-stationary state.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 Fluidos electroreológicos

El análisis teórico y experimental de flujos electroreológicos ha sido estudiado considerablemente por sus aplicaciones a distintos sistemas físicos como son: (i) Liberado de fármacos, (ii) Sistema auditivo humano (Células ciliadas externas) y (iii) Electro-osmosis, en flujos Newtonianos y no-Newtonianos en micro canales ha sido sujeto de análisis por varios grupos de investigación en el mundo ^{1,2} Una de las aplicaciones más importantes de fluidos en campos eléctricos se centra en su aplicación a la ingeniería ambiental, específicamente en los separadores electrostáticos de polvo de placas paralelas (Ver la ref. 3, Cap.2 Problema 2C.1). En estos sistemas, se hace pasar un gas con partículas cargadas que se encuentran dispersas, y mediante la aplicación de una diferencia de potencial por unidad de longitud, se genera un campo eléctrico que induce que las partículas de menor masa sean depositadas en la placa inferior y que puedan ser recolectadas y utilizadas posteriormente. Las partículas recolectadas han sido empleadas para aumentar las propiedades mecánicas del cemento, debido a que estas forman entrecruzamientos físicos en las mallas del cemento, aumentando las propiedades mecánico-estructurales. Sistemas similares han sido estudiados con nanoarcillas para aumentar las propiedades mecánicas de la mezcla PET-PEN ⁴.

1.1.2 Separadores electrostáticos

Los separadores electrostáticos de polvo son dispositivos que se utilizan para atrapar partículas mediante su ionización, atrayéndolas por una carga electrostática inducida ³. Estos sistemas son empleados para reducir la contaminación atmosférica producida por humos y otros desechos industriales gaseosos, especialmente en las fábricas que funcionan con combustibles fósiles ⁵. Los separadores electrostáticos son dispositivos de filtración altamente eficientes, que mínimamente impiden el flujo de los gases a través del dispositivo, y pueden eliminar fácilmente finas partículas como polvo y humo de la corriente de aire ⁵. Existen diferentes tipos de separadores electrostáticos, algunos de los más comunes son: (i) Separador de placa, (ii) Separadores de fábricas y (iii) Separadores electrostáticos húmedos. Debido a que este trabajo se centra en el estudio dinámico de una partícula en un fluido viscoso newtoniano en un sistema de placas paralelas, solo se expondrá las características y cualidades de un separador electrostático de placas paralelas.

1.1.3 Separador de placa

El separador más básico contiene una fila de alambres finos, seguido por pilas de placas planas de metal espaciadas entre ellas de aproximadamente 1 centímetro ⁶. La corriente de aire pasa a través de los espacios entre los alambres y después atraviesa el apilado de placas ⁶. Una fuente de alto voltaje transfiere electrones de las placas hacia los alambres, desarrollando así una carga negativa de varios miles de voltios en los alambres, relativa a la carga positiva de las placas. Mientras que la materia de partículas, atraviesa la fuente de carga negativa de los alambres, la materia de partículas toma la carga negativa y se ioniza ⁶. Las partículas ionizadas entonces pasan a través de las placas cargadas positivamente, siendo atraídas por estas placas ⁶. Una vez que las partículas están en contacto con la placa positiva, entonces ceden sus electrones y se convierten en partículas cargadas positivamente como la placa, y comienzan a actuar así como parte del colector. Debido a este mecanismo, los descontaminadores electrostáticos pueden tolerar grandes cantidades de acumulación de residuo en las placas de recolección y seguir funcionando eficiente, puesto que la materia por si misma ayuda a recolectar más materia de la corriente de aire.

- a) La falla del separador electrostático de polvo usualmente solo ocurre una vez que se haya formado en las placas una acumulación muy pesada del material.
- b) La acumulación puede llegar a ser bastante pesada como para bloquear la circulación de aire, o puede ser bastante densa como para ocasionar un corto circuito al permitir que la corriente atraviere el aislamiento.
- c) Los separadores electrostáticos de polvo tienen una rica y vasta aplicación en el control de emisiones de gases industriales, incluyendo el humo de instalaciones de generación eléctrica (alimentos por carbón o petróleo) ⁵.
- d) Los separadores electrostáticos ofrecen beneficios sobre otras tecnologías de purificación de aire, como la filtración HEPA que requiere filtros caros y puede convertirse en una producción inmensa de muchas formas dañinas de bacterias ^{5,6}.

La base de estos sistemas de gran interés debido a la problemática actual de emisión de contaminantes en la atmosfera radica en la descripción dinámica de los cúmulos de partículas involucradas. Estas presentan interacciones partícula-partícula, cumulo-cumulo o partícula-

cúmulo por lo que su entendimiento y comprensión son un reto actual. A continuación, se presentan algunas de las aplicaciones más importantes de los flujos electroreológicos

1.2 Aplicaciones de los fluidos electroreológicos

El análisis de fluidos complejos sometidos a campos externos gravitacionales, eléctricos y magnéticos que los deforman continuamente e irreversiblemente, ha sido de mucho interés para diferentes grupos de investigación en el mundo, debido a sus aplicaciones potenciales en las áreas de medicina (liberado de fármacos), ingeniería ambiental (separadores electrostáticos de polvo), sistemas biológicos (células ciliadas externas) y en general diseño de dispositivos a niveles micro y nano respectivamente ^{7,8,9}. A continuación se presentan algunas de ellas:

1.2.1 Células ciliadas externas

Por otra parte, mucho de los mecanismos utilizados en la naturaleza presentan fenómenos de tipo eléctrico en donde existe un intercambio de iones, lo que básicamente es un sistema de partículas sometidas a un campo eléctrico ². Las células ciliadas externas, las cuales son las causantes de amplificar la información en el oído interno, trabajan transformando la energía eléctrica a energía mecánica por medio de un complejo dispositivo, el cual tiene que ver con la naturaleza elástica de la membrana y los líquidos viscoelásticos que entran en contacto con ellas ².(Véase la Fig. 1)

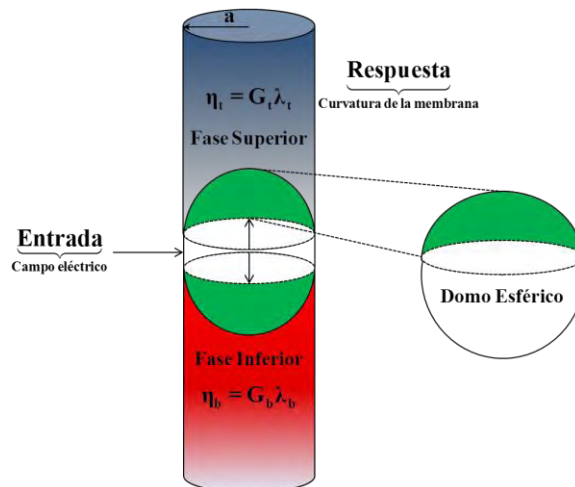


Figura 1 Ilustra el sistema de flujo estudiado en la descripción de las células ciliadas externas. Se tienen dos fases viscoelásticas y una membrana flexo eléctrica en la mitad del capilar la cual, es deformable debido a un campo eléctrico. EL efecto oscilante de este sistema induce la amplificación acústica en el sistema.

1.2.2 Polímeros inteligentes

Se presentan en la ciencia de polímeros aplicada a medicina, en donde la matriz del polímero libera una cantidad de fármacos controlados que ayuda a prevenir infecciones ¹⁰. Estos sistemas son estudiados en un bases de silicona, la cual es conocido por su aplicación en los materiales de implante. Estos sistemas complejos pueden liberar diclofenaco o ibuprofeno. Otro ejemplo importante, es en la elaboración de material quirúrgico como las gasas inteligentes de colágeno. La ventaja de usar este biomaterial, radica en que al liberar el fármaco que contenga, ya se vancomicina o diclofenaco, se evitara a estar cambiando las gasa y se prevendrán infecciones, mientras que el colágeno ayuda a mejorar la cicatrización, en la regeneración de hueso y en los implantes dentales.

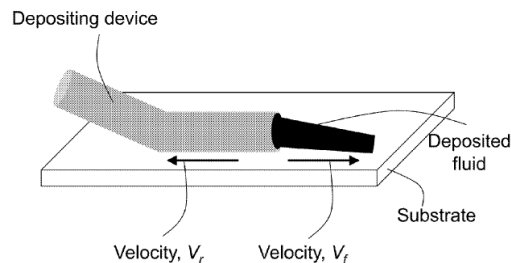


Figura 2 Ilustra una capa de colágeno que colocada en un sustrato para formar una capa y que pueda ser utilizada para minimizar los efectos de cicatrización

1.2.3 Electroforesis

Utiliza campos eléctricos para separar las biomoléculas de un sistema. La gran mayoría de macromoléculas están cargadas eléctricamente y, al igual que los electrolitos, se pueden clasificar en fuertes y débiles dependiendo de sus propiedades fisicoquímicas (constante de ionización de grupos ácidos y básicos). Por lo general, para caracterizar la molécula se determina la velocidad a la que esta se mueve en un campo eléctrico y se utiliza para calcular la masa molecular de las proteínas, o para detectar cambios de aminoácidos y separar cuantitativamente distintas especies moleculares.

1.2.4 Micro-dispositivos y liberado de fármacos

Por otra parte, los micros dispositivos utilizados en la industria de la farmacia son de vital importancia en estos tiempos ¹¹. Estos sistemas presentan grandes ventajas debido a que se necesitan cantidades diminutas de fluido y que siempre el sistema de flujo es en régimen

laminar, i.e. los efectos inerciales son despreciables en la ecuación de balance de cantidad de movimiento, por lo que se tiene un balance entre los superficiales (viscosos y debido a la presión) y las fuerzas de bulto (fuerzas gravitacionales por unidad de volumen ¹¹). Finalmente, estos fenómenos presentan mecanismos acoplados entre la transferencia de energía y masa respectivamente ¹¹. El estudio del liberado de fármacos y la liberación controlada ha causado un gran revuelo en la industria química y la ciencia de la medicina en general. Básicamente, el librado de fármacos consiste en una fase dispersa que se difunde en un medio continuo, en este caso la fase continua es la sangre con diferentes trastornos alimenticios. Este tipo de sistemas físicos se han estudiado en geometrías de platos paralelos. En la Fig. 3 se muestra un sistema coloidal en el cual, se aplica una diferencia de potencial entre las dos placas por lo que, se induce un corte debido al gradiente de presión y la fuerza eléctrica en el sistema. Las variaciones en el campo eléctrico son de tipo periódico y puede ser representadas por medio de un función exponencial compleja.

La electroósmosis es el movimiento de un fluido inducido por la aplicación de una diferencia de potencial en un material poroso, capilar, tubo, membrana o micro canal ^{7,9,12,13,14}. Un hecho importante de la electro-osmosis, es la que su mayor aplicación se presenta en mico canales por lo que su uso, es inmediata en la liberación de fármacos en el organismo humano ¹⁵. Evidentemente, estas investigaciones están dirigidas en el descubrimiento de nuevos fármacos que sean de ayuda contra enfermedades como: (i) diabetes, (ii) hiperglucemia, (iii) cáncer, etc, las cuales han sido una pandemia en los últimos 30 años. Por último, la mayoría de las aplicaciones de los fluidos electro-reológicos se centran en las áreas de la biología, física y química son no newtonianos ¹⁶, i.e. su viscosidad no permanece constante por efecto de la rapidez de deformación, por lo que se debe considerar como una función material (Ver Cap. 4 ref. 16) la cual, depende de la concentración, temperatura, y del escalar asociado al tensor gradiente de velocidad (segundo invariante del tensor rapidez de deformación ^{15,17}).

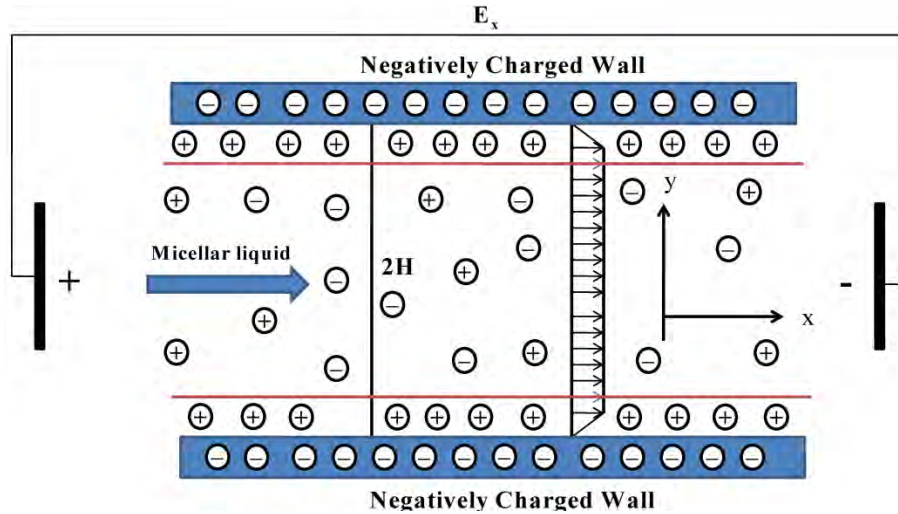


Figura 3 Ilustra el estudio de partículas (sistema coloidal) en una rendija de espesor $2H$ y longitud en donde es aplicado un campo eléctrico generado por una diferencial de potencial.

1.2.5 Liberado de fármacos en Biofluidos: (Sangre con colesterol)

Por otra parte, los bio-fluidos (sangre con diferentes patologías y fluidos corporales) son sistemas que contienen cadenas moleculares largas y que por su misma naturaleza y peso molecular adquieren características no-Newtonianas ^{16,18}. En este tipo de fluidos, la viscosidad es una función material que depende de la rapidez de deformación, elasticidad a través de la primera diferencia de esfuerzos normales (cambian la forma del elemento de control, pero su volumen es constante) y presentan ciclos de histéresis asociados a la tixotropía y reopexía ¹⁶. Estos fluidos son encontrados en dispositivos usados para análisis químicos y biológicos en micro reómetros ¹⁸.

El estudio teórico de flujos electro-osmóticos en fluidos no-Newtonianos es reciente y ha sido en su mayoría limitado a modelos inelásticos simples, tales como el de ley de potencia, debido a dificultades analíticas inherentes para introducir ecuaciones constitutivas más complejas. Das y Chakraborty ¹⁹ presentan resultados acerca de los perfiles de velocidad, temperatura y concentración en flujos electro-osmóticos en micro canales con bio-fluidos no-Newtonianos descritos por un modelo inelástico no newtoniano tipo ley de potencia, el cual en un reograma describe la zona intermedia de rapidez de deformación y contiene dos propiedades materiales, las cuales se interpretan como una viscosidad generalizada (parámetro de consistencia) y el exponente asociado a los mecanismos adelgazantes o espesantes al corte respectivamente ¹⁶.

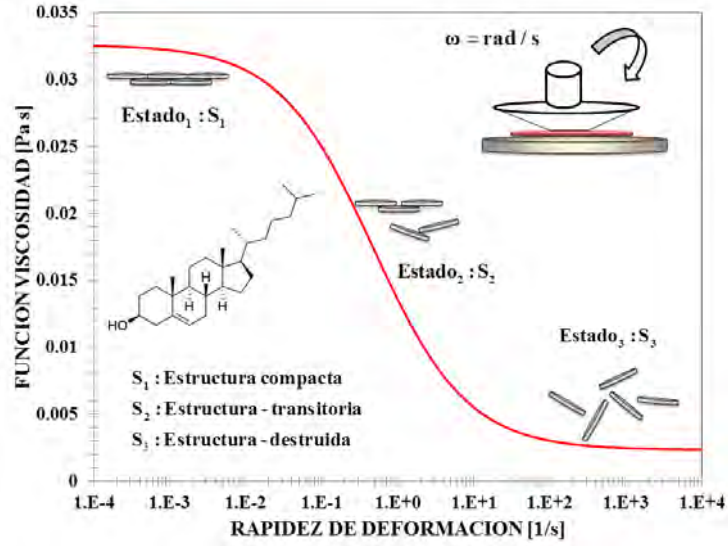


Figura 4. Ilustra la función viscosidad vs rapidez de deformación de la sangre humana. Nótese que en la figura se aprecian las tres zonas de un reograma a bajas y altas rapidezces de deformación se observan dos regiones constantes, mientras que a moderados cortes una zona tipo ley de potencia.

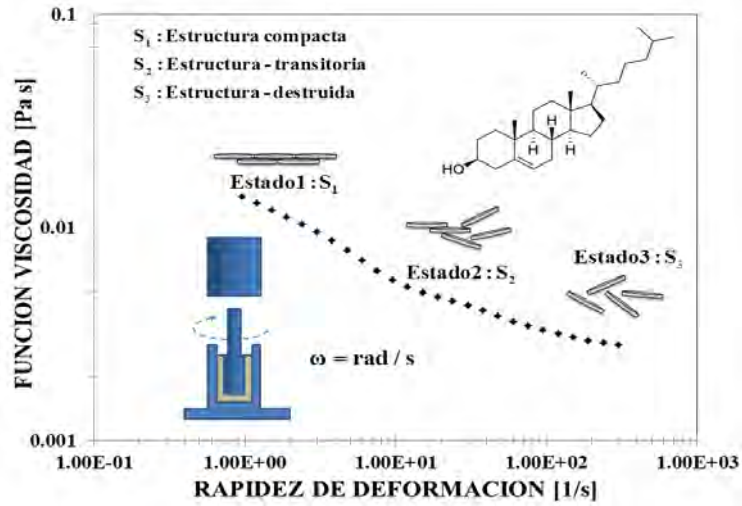


Figura 5. Se estudia la sangre con altos contenidos de colesterol. Obsérvese que las dos zonas constantes desaparecen y solo queda la zona intermedia tipo ley de potencia.

1.3 Antecedentes: Flujos electro-osmóticos de fluidos newtonianos y no newtonianos

El análisis teórico de flujos electro-osmóticos en líquidos Newtonianos y no newtonianos en ha sido sujeto de diversos estudios utilizando ecuaciones de transporte (momento, energía y masa). Para caracterizar el flujo, y la transferencia de momento se han utilizado diferente tipo

de ecuaciones constitutivas inelásticas, elásticas y viscoelásticas respectivamente ^{7,9,19,20,21}. La más simple de ellas, es la ecuación constitutiva de Newton, la cual relaciona la rapidez de deformación con el esfuerzo cortante mediante una sola función material ^{16,22,23}. Este modelo permite obtener expresiones analíticas para el perfil de velocidades, velocidad media y flujo volumétrico respectivamente. Para describir las propiedades no newtonianas de estos sistemas, se han empleado diferentes modelos constitutivos no newtoniano: (i) Viscosos (Ley de potencia, Ellis, Reiner-Phillipoff, Cross, etc.), (ii) Viscoelásticos lineales (Maxwell, Jeffrey, Burguers, etc), (iii) Viscoelásticos no lineales (Tanner, White-Metzner, Oldroyd B, Johnson-Segalman etc), a continuación, se presentan algunos de estos resultados ^{16,21,24}. Algunos autores han estudiado la transferencia de momento y reología en diferentes geometrías (rendijas, cilindros y cilindros coaxiales ^{25,26}. Para caracterizar el flujo y la reología en el sistema, utilizan diferentes ecuaciones viscoelásticas no lineales ^{25,26,27,28}.

En este contexto, Afonso et al. ⁷ estudian el flujo combinado eléctrico-osmótico y gradiente de presión constante de fluidos viscoelásticos en micro rendijas con diferentes fluidos viscoelásticos. Para describir la transferencia de momento y reología utilizan dos ecuaciones constitutivas. La primera de ellas el modelo de Phan-Thien y el segundo el de mancuernas tipo FENE-P basados en la teoría cinética. Sus resultados muestran que los perfiles de velocidad, velocidad promedio, flujo volumétrico, primera y segunda diferencia de esfuerzos normales dependen fuertemente del campo externo aplicado y de los mecanismos no newtonianos a través de las propiedades materiales de las ecuaciones constitutivas mencionadas antes.

Burgen y Nakache¹⁰ estudiaron el efecto del potencial de superficie en el transporte de un líquido dentro de un capilar ultra fino, el cual bajo ciertas aproximaciones locales, puede aproximarse por medio de una rendija validando la aproximación lineal de Debye-Hukel la cual, se utiliza en soluciones de electrolitos y plasmas (gases ionizados) para la distribución del potencial eléctrico que está expuesto a un campo eléctrico.

En este mismo contexto, Dutta y Beskok²⁹ desarrollaron soluciones analíticas en rendijas rectangulares en flujos combinados electro-osmótico y gradiente de presión axial en la dirección del flujo, obteniendo expresiones analíticas para la distribución de velocidades, velocidad promedio, gradiente de presión, flujo volumétrico y másico. En su investigación,

estudiaron el efecto de la doble capa eléctrica la cual, se forma debido al contacto de la pared del sistema el fluido, en donde los iones interactúan con el sólido debido a un mecanismo de adsorción en la superficie y debido a las fuerzas colombianas se forma una segunda capa que se aleja de los iones que se encuentran en el bulto del fluido. Es importante resaltar que la primera capa se forma por efecto de interacciones químicas y la segunda por efecto de las interacciones físicas electricas (fuerzas Coulombianas).

En este mismo rubro, Olivares et al. Estudiaron el efecto de fluido electro-reológicos aplicado bajo la acción combinada de fuerzas electro-osmóticas y gradientes de presión modificados por efecto de la gravedad. Ellos estudiaron las propiedades de transporte del fluido (Bulto) alejado de la pared por lo que se desprecian efectos de capa y doble capa en el sistema, por lo que los mecanismos de adsorción y Su análisis se hace en el bulto del fluido y alejando de la pared en donde se puede presentar fenómenos químicos de adsorción y de tipo eléctrico.

Afonso et al.⁷ analizaron el fenómeno electro-osmótico mediante ecuaciones visco elásticas no lineales tipo Phan-Thien, tomando en cuenta los efectos del solvente y del polímero. Ellos obtuvieron expresiones analíticas y numéricas para el perfil de velocidades, velocidad media, flujo volumétrico, primera y segunda diferencias de esfuerzos normales etc. Su trabajo demostró que los perfiles de velocidad, velocidad promedio, flujo volumétrico, primera y diferencia de esfuerzos normales se ven influenciados a través de los mecanismos visco elásticos a través de las propiedades materiales (viscosidades a corte bajo, alto, tiempos de relajación, tiempos de flujo etc). La influencia de estos materiales fue analizada a través de grupos adimensionales asociados a los diferentes mecanismos aplicados¹⁶

1.4 Elementos importantes de este trabajo

Finalmente, debido a la búsqueda constante de ecuaciones constitutivas que expliquen y describan las propiedades de flujo y transporte en estos sistemas, así como su aplicación en tecnologías que resuelvan las necesidades de la industria, se justifica plenamente la el trabajo de licenciatura contenida en el presente proyecto.

Esta tesis tiene por objetivo el de entender la dinámica de flujo de una partícula en un fluido newtoniano en un campo eléctrico.

- a) El primer punto importante es analizar la cinemática y dinámica de una partícula inmersa en un fluido newtoniano el cual está expuesto a un campo eléctrico.

- b) El segundo punto es obtener una expresión para la longitud mínima del separador electrostático de polvo con el fin de optimizar el sistema.
- c) El tercer punto es estudiar el inicio de flujo a través de la incorporación de los mecanismos inerciales en la ecuación de movimiento, y observar el efecto de la inercia sobre la dinámica del sistema partícula-fluido.

1.5 Distribución del material de estudio

La organización del trabajo es la siguiente: La primera sección se dedica a definir los conceptos básicos relacionados con el transporte de fluidos en un medio el cual está expuesto a un campo eléctrico. En el segundo capítulo se hace hincapié en las bases de Fenómenos de transporte, ecuaciones constitutivas y reología de la ecuación constitutiva de Newton. En el tercer capítulo se describe el problema físico centrándonos en la descripción del separador electrostático de polvo en fluidos newtonianos. En el cuarto capítulo se resuelven las ecuaciones de transporte y reológica en estado estacionario, suponiendo un proceso isotérmico. En este capítulo se obtiene las expresiones dinámicas de la velocidad, flujo volumétrico asociada con el tipo de ecuación constitutiva. En el quinto capítulo al igual que en el capítulo anterior se resuelven las ecuaciones de transporte con el caso peculiar que en este capítulo el sistema es en estado no estacionario por lo cual las propiedades dinámicas del sistema dependen del tiempo y la posición. En el sexto capítulo son presentadas las variables así como las ecuaciones adimensionales utilizadas en capítulo posterior. En el séptimo capítulo se hacen las simulaciones correspondientes, y se obtienen las respectivas predicciones de nuestro modelo. En el último capítulo se dan las conclusiones de este trabajo, perspectivas futuras y recomendaciones. Finalmente en la Fig. 6 se presenta la organización general de este trabajo.

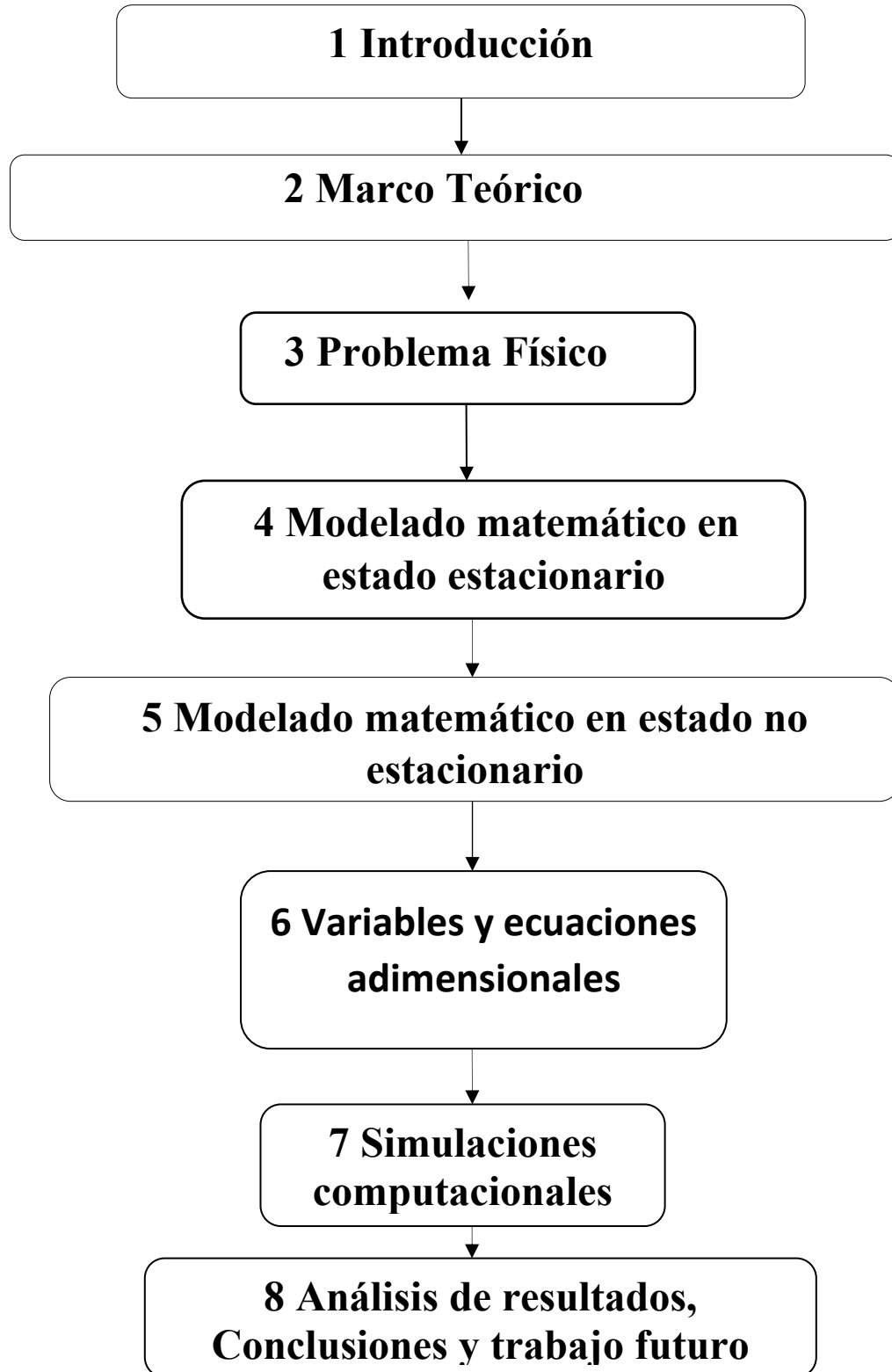


Figura 6 Organización del proyecto de tesis.

1.6 Objetivos.

1.6.1 Objetivo General.

El objetivo esencial del presente trabajo es contribuir al entendimiento del comportamiento mecánico de una partícula en fluidos newtonianos y expuestos a campos eléctricos.

1.6.2 Objetivos Particulares.

- a) Obtener las expresiones analíticas para un sistema en estado estacionario y no estacionario expuesto a un campo eléctrico.
- b) Obtener expresiones analíticas para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, flujo másico, esfuerzo cortante, posición de la partícula y longitud mínima del separador electrostático de polvo.
- c) Observar las diferencias de un sistema de inicio de flujo (estado no estacionario) y un sistema de un flujo desarrollado (estado estacionario).

1.7 Hipótesis

Si la partícula en el medio viscoso se ve afectada por las propiedades intrínsecas del material y los mecanismos eléctricos, entonces la dinámica del sistema puede ser descrita mediante las ecuaciones de continuidad y momento extendidas.

1.8 Justificación

El trabajo de esta tesis contempla el análisis dinámico de una partícula en una rendija de longitud L y separación $2B$. La partícula es expuesta a un campo eléctrico de la placa superior a la inferior. Debido a los problemas de contaminación y en general de polución en el mundo el uso de dispositivos para separar y limpiar las partículas de polvo en el medio ambiente son de vital importancia para las necesidades actuales debido a los problemas de salud. Este trabajo representa una primera aproximación en el entendimiento de la dinámica de flujo sobre partículas dispersas en fluidos newtonianos (aire).

La primera aproximación que se hace es suponer que el sistema se lleva a cabo en estado estacionario, i.e. las variables dinámicas o intrínsecas del sistema no dependen del tiempo, por lo que el sistema se describe en el régimen laminar [Bird] y los efectos inerciales no son tomados en cuenta. A partir de esta hipótesis las soluciones para el campo de velocidades, velocidad promedio, esfuerzo cortante, flujo másico, flujo volumétrico y

longitud mínima del separador son cerradas, i.e. analíticas. Por otra parte al incorporar los efectos inerciales en la ecuación de movimiento la descripción matemática se complica por lo que representa un reto desde el punto de vista del modelado. Académicamente, el uso de matemáticas avanzadas como son ecuaciones diferenciales parciales requiere soluciones analíticas (separación de variables) y expansiones basadas en el formalismo de Fourier para encontrar expresiones analíticas para las variables dinámicas de flujo antes expuestas.

Finalmente, el propósito de presente trabajo es entender estas herramientas aplicadas al modelamiento de un separador electrostático de Polvo incorporando los efectos inerciales el cual, se conoce en reología como problemas de inicio de flujo. Académicamente este cambio complica la matemática y el modelado computacional de este sistema. La segunda aportación de este trabajo versa en el detalle explícito de todos los pasos matemáticos que comúnmente son omitidos o no se muestra en la literatura concerniente al tema. Po ultimo este trabajo se enfoca en la descripción matemática y versa en el estudio de la transferencia de momento y reología de sistema que interactúan con partículas y es punto de partida en en estudios posteriores experimentales en donde se podría contrastar los resultados teóricos encontrados en esta propuesta con aplicaciones a nivel laboratorio, planta piloto y escalarlo o proponerlos a diferentes industrias.

Este es un esfuerzo en la búsqueda constante de sistemas físicos modelados mediante la ingeniería y representa un reto en la solución matemática y descripción física, lo que motiva posteriores estudios con diferentes geometrías y fluidos.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Fenómenos de Transporte.

Este capítulo y la información de esta sección se basan en la información clásica que se encuentra en los libros de fenómenos de transporte y reología clásicos en la literatura ^{16,30,31}. La mecánica de los cuerpos deformables, se define como la rama de la ingeniería química que estudia los mecanismos de transporte en momento, energía y masa. Los fenómenos de transporte pueden ser estudiados a nivel macroscópico, microscópico y molecular (Capítulo 1 Ref. 16). La ecuación diferencial básica de transporte puede ser descrita en término de la derivada material D/Dt ^{16,30,31} por lo que se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{DX}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{X} = -\nabla \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{f} \quad (2.1)$$

Tabla 1 Muestra las ecuaciones de transporte y su ley asociada a cada una de ellas.

Ecuación de transporte	Forma Vectorial	Ley asociada	
Movimiento $\mathbf{X} = \mathbf{v}$ $\mathbf{Y} = \mathbf{T}$ $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$	$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}$ $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}$ \mathbf{T} <small>Tensor Total de Esfuerzos</small>	Segunda ley de newton $F = ma$	Ley de Newton $\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D}$ $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger)$
Energía $\mathbf{X} = U$ $\mathbf{Y} = \mathbf{q}$ $\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$	$\frac{DU}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$	Primera ley de la termodinámica $U = Q - W$	Ley de Fourier $\mathbf{q} = -k \nabla T$
Masa	$\frac{DC_A}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{N}_A + R_A$	Balance de Masa con Generación	1ª Ley de Fick $\mathbf{N}_A = \underbrace{-cD_{AB} \nabla X_A}_{\text{Molecular}} + \underbrace{X_A (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B)}_{\text{Global}}$
Continuidad	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$		

El primer término de la Ec. (2.1), representa la derivada material de la propiedad X, la cual se separa en dos contribuciones, una asociada a los temporales y la otra a los espaciales en dirección del campo de velocidades. El primer término del miembro derecho está asociado con divergencia del tensor Y. Este tensor, puede ser de segundo o de primer orden dependiendo de la naturaleza del sistema que se analice. Físicamente esta divergencia está relacionado con las fuentes en el sistema. Por último, el termino f corresponde a una fuerza

externa al sistema que por lo regular corresponde al campo gravitacional, i.e. al producto de la densidad por la gravedad ^{16,30,31}.

2.1.1 La ecuación de transporte de cantidad de movimiento.

La ecuación de momento, se basa principalmente en la segunda ley de newton del movimiento en un medio continuo, la cual puede ser escrita de la siguiente manera ^{16,30,31}

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2.2)$$

En la Ec. (2.2) ρ es la densidad del líquido, \mathbf{v} es el vector de velocidad, p es el gradiente de presión, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos viscoso, y \mathbf{g} es el vector aceleración de la gravedad, que en el campo terrestre es constante.

2.2 Fluido newtoniano.

Los newtonianos son fluidos en los que el deslizamiento relativo de los elementos de fluido al circular uno sobre otro es proporcional al esfuerzo cortante sobre el fluido. Todos los gases, agua líquida y líquidos de moléculas sencillas (amoníaco, alcohol, benceno, petróleo, cloroformo, butano, etc.) son newtonianos. Las pastas, emulsiones, fluidos biológicos, polímeros, suspensiones de sólidos y otras mezclas son probablemente no newtonianos. Un fluido newtoniano se caracteriza por cumplir la Ley de Newton, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación. La viscosidad de un fluido newtoniano no depende del tiempo de aplicación de esfuerzo, aunque sí puede depender tanto de la temperatura como de la presión a la que se encuentre. En esta ecuación tan simple, el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación, siguen una relación lineal, y la ecuación básica de este sistema, se define como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} = \mu \left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T \right) \quad (2.3)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad newtoniana μ y se mide en Pa s (en SI). En la Ec. (2.11), el tensor de esfuerzo cortante, $\boldsymbol{\sigma}$ tiene unidades de Pa y el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} tiene inverso de segundo respectivamente (1/s). Por definición, todos aquellos fluidos que no siguen la Ec. (2.3) son no newtonianos.

Al sustituir la ecuación constitutiva del newtoniano en la Ec. (2.2) se obtiene lo siguiente:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \mu \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger \right) + \rho \mathbf{g}$$

Suponiendo que las propiedades materiales no dependen de la posición, la viscosidad puede salir de la divergencia obteniéndose la siguiente expresión:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla \cdot \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger \right) + \rho \mathbf{g}; \nabla \cdot \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger \right) = \begin{cases} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) = \nabla^2 \mathbf{v} \\ \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})^\dagger = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \end{cases}$$

Aplicando las propiedades vectoriales ³¹ la ecuación de balance de cantidad de movimiento se reduce a:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \left(\nabla \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})^\dagger \right) + \rho \mathbf{g} = -\nabla p + \mu \left(\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) + \rho \mathbf{g}$$

Considerando la hipótesis de incompresibilidad, i.e, que la densidad no depende de la posición y del tiempo por lo que el campo de velocidades es solenoidal y se puede simplificar de la siguiente manera (ver la referencia 31 capítulo 8, teorema 12)

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

Por lo tanto, combinando las últimas dos ecuaciones se llega a la famosa ecuación de Navier-Stokes, la cual, fue aplicada para describir fluidos con viscosidad constante y que son deformados continua e irreversiblemente por la fuerzas: (i) superficiales (presión); (ii) de bulto (gravitacionales) ^{29,30,31}:

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}} \quad (2.4)$$

La Ec. (2.3) es base para describir la cinemática y dinámica en un medio continuo en donde la viscosidad es independiente de la rapidez de deformación, i.e. el fluido tiene una viscosidad constante no importa como este sea deformado. Por otra parte, si el sistema es deformado por varias fuerza externas diferentes a los mecanismos gravitacionales, la Ec. (2.3) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i} \quad (2.5)$$

2.3 Casos particulares de la ecuación de Navier-Stokes.

2.3.1 Flujo cortante en estado estacionario: Flujo de Poiseuille con mecanismos gravitacionales

Esto quiere decir que ningún atributo o característica dinámica no depende del tiempo y el campo de velocidades es ortogonal al gradiente de velocidades, por lo que la aceleración convectiva de la derivada material es cero, i.e. $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{0}$, por lo que la Ec. (2.3) se simplifica a un balance entre las fuerzas superficiales y de volumen respectivamente:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \frac{1}{\mu} (\nabla p - \rho \mathbf{g})$$

Para resolver la ecuación diferencial parcial descrita por el La palaciano se necesita especificar dos condiciones de frontera para el campo de velocidades.

2.3.2 Flujo cortante en estado estacionario: Flujo de Poiseuille sin mecanismos gravitacionales

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \frac{1}{\mu} (\nabla p)$$

2.3.3 Flujo cortante en estado estacionario : Flujo por Arrastre

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

2.3.4 Flujo cortante en estado no estacionario: Inicio de Flujo de Poiseuille sin mecanismos gravitacionales

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

2.3.5 Flujo cortante en estado no estacionario: Inicio de Flujo de Poiseuille con mecanismos gravitacionales

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$$

Los incisos (a-e) son casos particulares de la Ecuacion no Lineal de Navier-Stokes.

2.4 Reología.

La reología, es decir la ciencia del flujo y la deformación, estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas, materiales cristalinos y otros. Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke por otra parte ^{16,30}. La reología es

la disciplina científica que se dedica al estudio de la deformación y flujo de la materia ^{16,30}. Su objetivo está restringido a la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades reológicas del material. Un sistema es capaz de fluir debido a las fuerzas de cohesión en sus moléculas y suele deformarse continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante ^{16,30}. En su forma más simple, la viscosidad μ es una propiedad de transporte, que se puede interpretar como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo ^{16,30}.

2.4.1 Tensor de deformación.

El tensor de deformación es un tensor de segundo orden, el cual nos describe la deformación relativa de un medio continuo con respecto a una variable ^{32,33}. El tensor de deformación, es adimensional debido a que $[u_i] = L; [x_i] = L$ Matemáticamente, se puede representar de la siguiente manera ^{16,30}.

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Nótese, que el tensor de deformación carece de unidades por ser el cociente de dos longitudes características variable ^{32,33}.

2.4.2 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta.

Al tomar la derivada temporal del tensor de deformación, obtenemos el tensor gradiente de velocidad, el cual se puede expresar de la siguiente manera ^{16,30}.

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

A diferencia del tensor de deformación, el tensor gradiente tiene unidades de inverso del tiempo variable ^{32,33} .

2.4.3 El tensor rapidez de deformación.

El tensor gradiente de velocidad físicamente, nos da información acerca de la evolución de la deformación en el medio continuo, y sus unidades son de inverso de tiempo. El tensor gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{v}$ puede ser separado en una parte simétrica $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v})_S$ y anti simétrica $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{v})_A$ llamados tensor rapidez de deformación y tensor de vorticidad ^{30,31} .

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.8)$$

En coordenadas cartesianas (x, y, z), el tensor rapidez de deformación puede ser descrito matemáticamente en la siguiente forma matricial ^{16,30} .

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Es importante notar, que el tensor rapidez de deformación es un tensor de segundo orden simétrico, esto implica que su transpuesta es igual al tensor, i.e. $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$. Físicamente, esta matriz simétrica nos da información acerca de la rapidez con la que es deformado el sistema ^{16,30} .

2.4.4 El tensor de Vorticidad.

El tensor de Vorticidad nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el sistema ^{16,30} .

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Es importante notar, que el tensor de Vorticidad, es un tensor de segundo orden simétrico, es decir, $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$. Físicamente nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el medio continuo ^{16,30}.

2.4.5 Tensor de esfuerzos.

El tensor de esfuerzos, es un tensor de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz de 3 x 3 formada por nueve elementos. Los elementos a fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzos normales ^{16,30}. Nótese, que los esfuerzos cortantes deforman continua e irreversiblemente el material, por lo que el sistema fluye. Mientras que los elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica del elemento de control, pero no su volumen. La representación del tensor de esfuerzos se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Matemáticamente, es importante destacar que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir los elementos fuera de la diagonal principal, son iguales.

Finalmente este capítulo es base de un proyecto PAPIME PE 112716 “Material didáctico teórico, protocolos experimentales y aula virtual de las materias de fenómenos de transporte (cuarto semestre) y transferencia de masa (séptimo semestre) correspondientes a los ciclos intermedio y terminal de la carrera de Ingeniería Química.

CAPITULO III

DESCRIPCIÓN FÍSICA

DEL PROBLEMA

3.1 Separador de placas paralelas

En esta sección se modela el sistema coloidal sometido a un campo eléctrico en un fluido Newtoniano, es decir un fluido con viscosidad constante. La Fig. (7) ilustra el sistema de estudio en la presente tesis de licenciatura. Se tienen dos placas paralelas separadas una distancia $2B$ en donde un sistema coloidal (partículas dispersas en un medio) fluye por efecto de un campo eléctrico homogéneo.

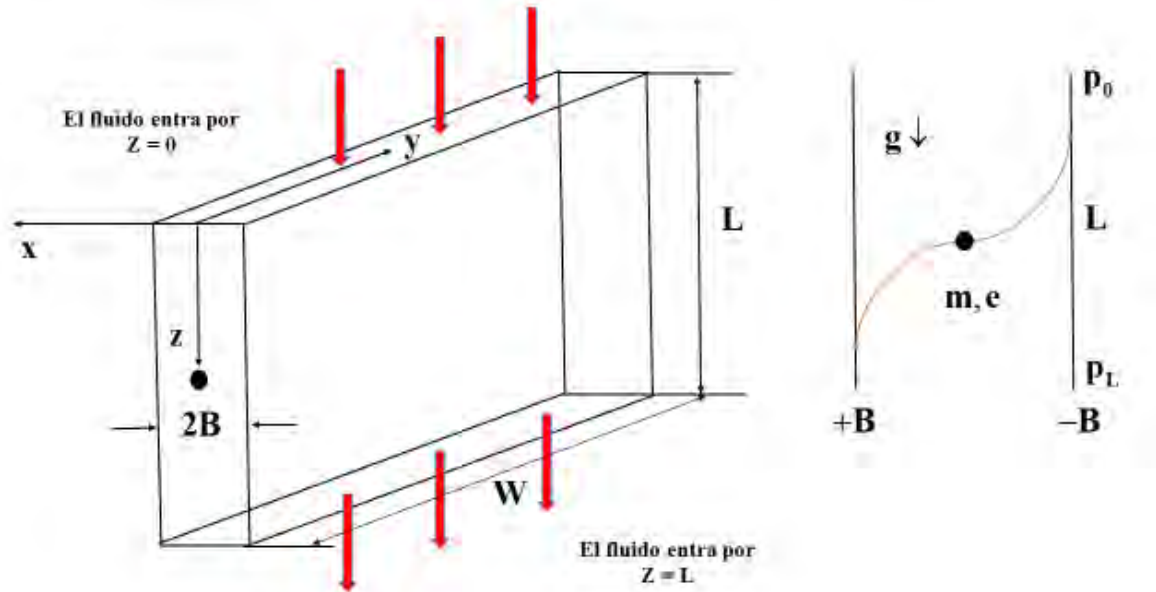


Figura 7 Ilustra el sistema de estudio. Dos placas paralelas separadas a una distancia $2B$ y Longitud L respectivamente y tiene una partícula de polvo en el fluido. Al cual se le induce un campo eléctrico.

Las condiciones de proceso son mencionadas a continuación

- Proceso en estado estacionario (No depende del tiempo): $\partial\{ \} / \partial t = 0$
- Proceso Isotérmico (Temperatura constante)
- Fluido Incompresible (densidad no depende ni del tiempo ni de la presión):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$
- El fluido se mueve por la influencia de un gradiente de presión en la dirección axial.
- Flujo unidireccional, i.e. el campo de velocidades solo tiene una componente en la dirección del eje coordenado z : $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (0, 0, v_z(x, y, z))$

- f) Efectos gravitacionales en dirección del campo de velocidades : $\mathbf{g} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, g_z)$
- g) El sistema de coordenadas se coloca a la mitad de las placas paralelas, en dirección del flujo (Fig. 5). EL eje z corresponde al campo de velocidades del sistema \mathbf{v} , el eje y al del gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{v}$ y el eje x representa el eje neutro asociado a la vorticidad $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$

3.2 Dinámica de flujo

Vector de velocidad

El vector de velocidad en este sistema de flujo está dado por el siguiente vector renglón:

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (0, 0, v_z(x, y, z, t)) \quad (3.1)$$

3.3 Tensores cinemáticos

3.3.1 Tensor gradiente de velocidad

Utilizando el tensor gradiente de velocidad definido en el Cap. II en coordenadas cartesianas, y el vector de velocidad en 4.1, se tiene la siguiente matriz cuadrada

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dx} & \frac{dv_y}{dx} & \frac{dv_z}{dx} \\ \frac{dv_x}{dy} & \frac{dv_y}{dy} & \frac{dv_z}{dy} \\ \frac{dv_x}{dz} & \frac{dv_y}{dz} & \frac{dv_z}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dv_z}{dx} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Físicamente el tensor gradiente de velocidad, da información acerca de los cambios de la velocidad en dirección espacial.

3.3.2 Transpuesta del tensor gradiente de velocidad

$$(\nabla \mathbf{v})^T = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dx} & \frac{dv_y}{dx} & \frac{dv_z}{dx} \\ \frac{dv_x}{dy} & \frac{dv_y}{dy} & \frac{dv_z}{dy} \\ \frac{dv_x}{dz} & \frac{dv_y}{dz} & \frac{dv_z}{dz} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dv_z}{dx} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dv_z}{dx} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

3.3.3 Tensor rapidez de deformación

A partir de las definiciones del capítulo II, el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} se construye a partir del tensor gradiente de velocidad y su transpuesta respectivamente, i.e. $\mathbf{D} = (\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T)/2$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dv_z}{dx} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dv_z}{dx} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \frac{dv_z}{dx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Físicamente, este tensor nos da información acerca de la rapidez con la que es deformado el sistema, en este caso, la transferencia de momento se da en la dirección del eje coordenado z y se transmite en la dirección x.

3.3.5 Tensor de Vorticidad

A partir de las definiciones del capítulo II, el tensor rapidez de Vorticidad \mathbf{W} se construye a partir del tensor gradiente de velocidad y su transpuesta respectivamente, i.e. $\mathbf{W} = (\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^T)/2$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} - \nabla\mathbf{v}^T) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dv_z}{dx} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dv_z}{dx} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \frac{dv_z}{dx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Este tensor nos da información acerca de las rotaciones materiales en el sistema. Por lo tanto, en un fluido cortante existen elementos cortantes que se deforman continua e irreversiblemente y que rotan por efecto del flujo.

3.3.6 Tensor de esfuerzos

Matemáticamente el tensor de esfuerzos es una matriz simétrica que describe la transferencia de cantidad movimiento y físicamente nos da la distribución de las fuerzas en cada área de los elementos de control que son expuestos al flujo cortante.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

La Ec. (3.6) contiene información acerca de los elementos cortantes y extensionales respectivamente. Por ejemplo, los elementos cortantes son los responsables de deformar continua e irreversiblemente el fluido, y cumplen la condición $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ debido a la simetría del tensor de esfuerzo. Los elementos en la diagonal principal $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}\}$, están asociados con la elasticidad del material en flujo cortante en estado estacionario. A partir de estos, se define la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales:

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \begin{cases} \neq 0; \text{No-Newtoniano viscoelastico} \\ = 0; \text{Newtoniano} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} = \begin{cases} \neq 0; \text{No-Newtoniano viscoelastico} \\ = 0; \text{Newtoniano} \end{cases}$$

El cálculo de la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales puede ser aplicado para explicar la formación de vórtices en contracciones expansiones de flujo.

3.4 Ecuaciones de continuidad y momento

En esta sección se presentan las ecuaciones generales para el estudio del flujo electrosmótico.

3.4.1 Ecuación de continuidad

Suponiendo que el fluido es incompresible y que el flujo es unidireccional, es decir que el vector velocidad solo tiene componente en z, de acuerdo con la Ec. (3.1)

$$\overbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{\text{Fluido-Incompresible}} + \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; v_z \neq f(z) \quad (3.8)$$

La Ec. (3.8) implica que el campo de velocidades no depende de la variable z y suponiendo que solo depende de la coordenada ortogonal y al campo de velocidades toma la forma:

$$\mathbf{v} = (0, 0, v_z(x, y)) \cong (0, 0, v_z(x, y)) \quad (3.9)$$

Si suponemos por simplicidad, que la velocidad en dirección x solo depende de y. Este hecho solo puede ser válido cuando una de las longitudes características L en dirección x y W en la dirección z, i.e. los cambios con respecto a la variable z son despreciables

3.4.2 Ecuación de momento modificada por el campo eléctrico

La ecuación de momento es la segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo. Aplicando un balance de fuerza a un elemento de control, se tiene la siguiente ecuación de carácter vectorial desacoplada toma la forma:

Componente x de la ecuación de movimiento modificada

$$\begin{aligned}
 \frac{\overset{=0}{\partial v_z}}{\partial t} &+ \underbrace{v_x \frac{\overset{=0}{\partial v_z}}{\partial x} + v_y \frac{\overset{=0}{\partial v_z}}{\partial y}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \underbrace{v_z \frac{\overset{=0}{\partial v_z}}{\partial z}}_{\text{Ecuacion de Continuidad}} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{yz}}}{\partial y} + \frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{zz}}}{\partial z} + \underbrace{\rho g_x}_{\text{Efectos Gravitacionales}}
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Aplicando las hipótesis anteriores (estado estacionario, fluido incompresible, solo hay transferencia de momento en la componente zx del tensor de esfuerzos, se llega a la siguiente expresión simplificada.

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z}
 \tag{3.11}$$

La Ec. (3.8) representa el balance de la divergencia del tensor de esfuerzos con el gradiente de presión axial y la fuerza eléctrica.

3.4.3 Ecuación constitutiva del modelo de Newton

El modelo newtoniano es el más simple de todas las ecuaciones constitutiva debido a que la relación entre el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación es lineal y contiene solamente una propiedad material conocida como viscosidad:

$$\sigma_{xz} = \mu \dot{\gamma}_{xz} = \mu \frac{dv_z}{dx}
 \tag{3.12}$$

En la ecuación anterior μ es la viscosidad newtoniana. Sustituyendo las matrices, se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{dvz}{dx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dvz}{dx} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Desacoplando las matrices se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{zx} &= \mu \frac{dvz}{dx} \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.4.4 Funciones materiales del modelo de Newton

Tres importantes resultados pueden ser calculados en flujo cortante y son básicos en reología y son conocidas como funciones materiales: (i) La función viscosidad, (ii) La primera diferencia de esfuerzos normales y (iii) La segunda diferencia de esfuerzos normales

$$\begin{aligned} \eta \left(\frac{dvz}{dx} \right) &= \frac{\sigma_{xz}}{\frac{dvz}{dx}} = \mu \\ N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} &= 0 \\ N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Las Ecs. 3.17 confirma que para un fluido newtoniano, no existe contribución de la primera diferencia de esfuerzos normales, i.e. no existen efectos elásticos en el sistema. En el siguiente capítulo, serán calculadas las variables dinámicas del sistema en función de los parámetros materiales de los modelos constitutivos utilizados. Es importante recordar que este capítulo permitió desarrollar las ecuaciones principales que serán punto de partida en el siguiente capítulo.

3.4.5 Mecanismos eléctricos

La fuerza Eléctrica por unidad de volumen que deforma el sistema fluido-coloide esta dad por la siguiente expresión:

$$Fe_x = \rho_e E_x \quad (3.16)$$

La ecuación anterior representa la fuerza eléctrica que experimenta el sistema fluido-coloide.

Nótese que ρ_e es la densidad de carga en el sistema.

CAPITULO IV

MODELADO

MATEMÁTICO

(Estado estacionario)

4.1 ESTADO ESTACIONARIO

4.1.1 Separador electrostático de polvo

Un separador de polvo consta de dos láminas con cargas opuestas entre las cuales fluyen gases que contienen el polvo. Se desea establecer un criterio para longitud mínima del separador en términos de la carga sobre la partícula e , la intensidad del campo eléctrico ϵ , la diferencia de presión ($p_0 - p_L$), la masa de la partícula m , y la viscosidad μ del gas. Es decir, ¿para qué longitud L habrá alcanzado la partícula más pequeña presente (de masa m) la lámina inferior justo antes de que pueda ser arrastrada fuera del canal? Supóngase que el flujo entre las láminas es laminar. También supóngase que la velocidad de la partícula en la dirección z es la misma que la velocidad del fluido en la dirección z . Todavía más, supóngase que es posible ignorar la resistencia de Stokes y la fuerza de gravedad que actúa sobre la esfera en la medida en que esta se acelera en la dirección x negativa.

Con los postulados anteriores la ecuación de movimiento se simplifica a:

$$\frac{dp}{dz} = \mu \frac{d^2vz}{dx^2} \quad (6.1)$$

Integrando la Ec. (4.1) respecto a la presión y la longitud:

$$\int_{p_0}^{p_L} dp = \mu \frac{d^2vz}{dx^2} \int_0^L dz \quad (6.2)$$

Al integrar la Ec. (4.2) se obtiene:

$$\frac{d^2vz}{dx^2} = \frac{p_L - p_0}{\mu L} \quad (6.3)$$

Integrando la Ec. (4.3) con respecto a la coordenada x ,

$$\int d\left(\frac{dvz}{dx}\right) = \frac{(p_L - p_0)}{\mu L} \int dx \quad (6.4)$$

Finalmente se tiene lo siguiente:

$$\frac{dv_z}{dx} = \frac{p_L - p_0}{\mu L} x + C_1 \quad (6.5)$$

En la Ec. (4.5) C_1 es una constante de integración. Separando variables e integrando respecto a la variable independiente x se tiene lo siguiente:

$$v_z(x) = \frac{p_L - p_0}{2\mu L} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (6.6)$$

En la Ec. (4.6) C_2 es una segunda constante de integración. La Ec. (4.6) tiene dos constantes de integración C_1 y C_2 , para determinarlas es necesario plantear las condiciones de frontera en el sistema:

$$\begin{aligned} x = B; v_z &= 0 \\ x = -B; v_z &= 0 \end{aligned}$$

Evaluando las condiciones límites para obtener los valores de las constantes de integración C_1 y C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= -\frac{p_L - p_0}{2\mu L} B^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la Ec. (4.6) las constantes de integración se obtiene lo siguiente:

$$v_z(x) = \frac{(p_0 - p_L) B^2}{2\mu L} \left[1 - \left(\frac{x}{B} \right)^2 \right] \quad (6.7)$$

4.1.2 Cálculo de la velocidad media axial

Se calcula la velocidad media en el sistema, integrando el perfil de velocidades sobre el área de sección transversal, $\langle v_z(x) \rangle$ a partir de la Ec. (4.7):

$$\langle v_z(x) \rangle = \frac{\int_0^W \int_0^B v_z(x) dx dy}{\int_0^W \int_0^B dx dy} = \frac{1}{B} \int_0^B v_z(x) dx$$

Al sustituir el perfil de velocidades en la integral promedio, se tiene lo siguientes:

$$\langle v_z(x) \rangle = \frac{1}{B} \int_0^B \frac{(p_0 - p_L) B^2}{2\mu L} \left[1 - \left(\frac{x}{B} \right)^2 \right] dx$$

En este caso, se usara un método

Proponiendo el siguiente cambio de variable:

$$u = \frac{x}{B} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 0; u \rightarrow 0 \\ x \rightarrow B; u \rightarrow 1 \end{cases}$$

Sustituyendo el cambio de variable en la integral de la velocidad, se tiene lo siguiente:

$$\langle v_z(x) \rangle = \frac{(p_0 - p_L) B^2}{2\mu L} \int_0^1 [1 - u^2] du$$

Integrando y aplicando el teorema fundamental del cálculo

$$\langle v_z(x) \rangle = \frac{(p_0 - p_L) B^2}{3\mu L} \quad (6.8)$$

4.1.3 Calculo del flujo másico

A partir de la ecuación (4.8) se obtendrá el flujo volumétrico y el flujo másico. Para obtener el flujo másico se multiplica el área de sección transversal por la velocidad media y la densidad del fluido.

$$M = \rho \int_0^W \int_0^B v_z(x) dx dy = \rho \left(\int_0^W \int_0^B v_z(x) dx dy \right); M = \rho Q \quad (6.9)$$

La segunda integral, proviene del hecho que es un operador lineal. Sustituyendo la Ec. (4.8) en la Ec. (4.9):

$$Q = \frac{(p_0 - p_L) B^3 W}{3\mu L}$$

$$M = \frac{\rho(p_0 - p_L)B^3W}{3\mu L} \quad (6.10)$$

La Ec. (4.10) representa el flujo másico del sistema. Es importante resaltar, que el flujo másico depende de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión, variables geométricas del medio y propiedades materiales del sistema como lo es la densidad y la viscosidad.

4.1.4 Calculo del esfuerzo cortante

El esfuerzo cortante se obtiene como se muestra a continuación:

$$\sigma_{xz} = -\mu \frac{dV_z}{dx}$$

Al sustituir el perfil de velocidades y derivando con respecto a la coordenada espacial x, se tiene la componente zx del esfuerzo cortante:

$$\sigma_{xz} = \frac{(p_0 - p_L)}{L} x \quad (6.11)$$

4.1.5 Calculo de la trayectoria de la partícula

Para el cálculo de la trayectoria de la partícula debido al campo eléctrico se tiene:

$$F_x = e\varepsilon$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = e\varepsilon \quad (6.12)$$

Integrando la ecuación (4.12) se obtiene:

$$x = \frac{e\varepsilon t^2}{2m} + C_1 t + C_2 \quad (6.13)$$

En donde C_1 y C_2 son constantes de integración

Condiciones límites:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad t=0$$

$$x=x_0 \quad t=0$$

Evaluando condiciones límite:

$$C_1=0$$

$$C_2=x_0$$

Sustituyendo condiciones límites en la ecuación (4.13):

$$x = \frac{e\epsilon t^2}{2m} + x_0 \quad (6.14)$$

Debido a que el recorrido de la partícula terminara en la placa electrificada que es la placa inferior, la ecuación (4.14) nos queda:

$$x = x_0 - \frac{e\epsilon t^2}{2m} \quad (6.15)$$

Para obtener el tiempo en que tarda la partícula en llegar a la lámina inferior:

$$\text{En } t_f \quad x = -B$$

$$-B = x_0 - \frac{e\epsilon t_f^2}{2m}$$

Despejando el tiempo final t_f :

$$t_f = \sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}}$$

Para la velocidad con influencia del campo eléctrico en la Ec. (4.7) se sustituye la Ec. (4.15) y quedaría de la siguiente forma:

$$V_z = \frac{B^2}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \left[1 - \left(\frac{x_0 - \frac{e\epsilon t^2}{2m}}{B} \right)^2 \right] \quad (6.16)$$

$$V_z = \frac{B^2}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \left[1 - \left(\frac{x(t)}{B} \right)^2 \right]; V_z = \frac{B^2}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \left[1 - (x^*(t))^2 \right] \quad (6.17)$$

$$x^*(t) = \frac{x_0}{B} - \left(\frac{t}{\sqrt{\frac{2mB}{e\varepsilon}}} \right)^2 = x_0^* - t^{*2} \quad (6.18)$$

$$V_z(t^*) = \frac{B^2}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \left[1 - (x_0^* - t^{*2})^2 \right] \quad (6.19)$$

Desarrollando:

$$V_z(t) = \frac{B^2}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \left[1 - \frac{x_0^2}{B^2} + \frac{x_0 e \varepsilon t^2}{B^2 m} - \frac{e^2 \varepsilon^2 t^4}{4B^2 m^2} \right] \quad (6.20)$$

$$V_z(t^*) = \frac{B^2}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \left[1 - x_0^{*2} + 2x_0^* t^{*2} - t^{*4} \right] \quad (6.21)$$

Se calcula la velocidad media $\langle V_z \rangle$:

$$\langle V_z(t^*) \rangle = \frac{\int_0^W \int_0^B V_z dx_0 dy}{\int_0^W \int_0^B dx_0 dy} = \frac{1}{B} \int_0^B V_z dx_0$$

Se utilizara el método de escalamiento integral como se mostró anteriormente con lo que la velocidad media queda de la siguiente forma:

$$\langle V_z(t^*) \rangle = \frac{B^2}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \left[\frac{2}{3} + t^{*2} - t^{*4} \right] \quad (6.22)$$

A partir de la velocidad promedio (Ec. 4.22) se integra con respecto a la sección transversal de flujo obteniéndose el flujo volumétrico:

$$Q(t^*) = \frac{WB^3}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \left[\frac{2}{3} + t^{*2} - t^{*4} \right] \quad (6.23)$$

El flujo másico, se obtiene a partir del flujo volumétrico: $M = \rho \langle V_z \rangle BW$

$$M(t^*) = \frac{\rho WB^3}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \left[\frac{2}{3} + t^{*2} - t^{*4} \right] \quad (6.24)$$

Para el esfuerzo cortante:

$$\sigma_{xz} = \frac{(p_0 - p_L)B}{L} \left(\frac{x_0}{B} - \frac{e\epsilon t^2}{2mB} \right) \quad (6.25)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{(p_0 - p_L)B}{L} (x_0^* - t^{*2})$$

4.1.6 Longitud del separador

Sustituyendo $x(t)$ y la ecuación de velocidad en función del tiempo y la distancia z :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(p_0 - p_L)B^2}{2\mu L} \left[1 - \frac{x_0^2}{B^2} + \frac{x_0 e\epsilon t^2}{B^2 m} - \frac{e^2 \epsilon^2 t^4}{4B^2 m^2} \right] = \frac{(p_0 - p_L)B^2}{2\mu L} [1 - x_0^{*2} + 2x_0^* t^{*2} - t^{*4}] \quad (6.26)$$

Desarrollando la ecuación y separando variables para la integración:

Integrando:

$$L = \int_0^L dz = \frac{B^2 t_c}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \int_0^{t_f^*} [1 - x_0^{*2} + 2x_0^* t^{*2} - t^{*4}] d\left(\frac{t}{t_c} \right) = \frac{B^2 t_c}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \int_0^{t_f^*} [1 - x_0^{*2} + 2x_0^* t^{*2} - t^{*4}] dt^* \quad (6.27)$$

$$L = \frac{B^2 t_c}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \int_0^{t_f^*} [1 - x_0^{*2} + 2x_0^* t^{*2} - t^{*4}] dt^* \quad (6.28)$$

$$L = \frac{B^2 t_c}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \left[t_f^* - x_0^{*2} t_f^* + \frac{2x_0^* t_f^{*3}}{3} - \frac{t_f^{*5}}{5} \right]$$

Sustituyendo el tiempo adimensional, realizando operaciones algebraicas y factorizando se tiene lo siguiente:

$$L = \frac{B^2}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \left[t_f - \frac{1}{B^2} \left(x_0^2 t_f - \frac{x_0 e\epsilon t_f^3}{3m} + \frac{e^2 \epsilon^2 t_f^5}{20m^2} \right) \right] \quad (6.29)$$

Simplificando, obtenemos:

$$L^2 = \frac{(p_0 - p_L)}{2\mu} \left[(B^2 - x_0^2)t_f + \frac{x_0 e \epsilon t_f^3}{3m} - \frac{e^2 \epsilon^2 t_f^5}{20m^2} \right] \quad (6.30)$$

Sustituyendo t_f :

$$L^2 = \frac{(p_0 - p_L)}{2\mu} \left[(B^2 - x_0^2) \sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}} + \frac{x_0 e \epsilon}{3m} \left(\sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}} \right)^3 - \frac{e^2 \epsilon^2}{20m^2} \left(\sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}} \right)^5 \right] \quad (6.31)$$

Simplificando los radicales, se tiene:

$$L^2 = \frac{(p_0 - p_L)}{2\mu} \left[(B^2 - x_0^2) \sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}} + \frac{x_0 e \epsilon}{3m} \left(\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon} \right) \sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}} - \frac{e^2 \epsilon^2}{20m^2} \left(\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon} \right)^2 \sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}} \right] \quad (6.32)$$

Factorizando:

$$L^2 = \frac{(p_0 - p_L)}{2\mu} \sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}} \left[(B^2 - x_0^2) + \frac{2x_0(B+x_0)}{3} - \frac{(B^2 + 2Bx_0 + x_0^2)}{5} \right] \quad (6.33)$$

Realizando los quebrados de las funciones racionales, se llega a la siguiente expresión algebraica:

$$L^2 = \frac{2(p_0 - p_L)}{15\mu} \sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}} (3B - 2x_0)(B + X_0) \quad (6.34)$$

Elevando al cuadrado:

$$L^4 = \frac{8m(p_0 - p_L)^2 (B+x_0)^3 (3B-2x_0)^2}{225\mu^2 e\epsilon} \quad (6.35)$$

4.1.7 Optimización de la longitud del separador

Derivando con respecto a x_0 :

$$\frac{dL^4}{dx_0} = \frac{8m(p_0 - p_L)^2}{225\mu^2 e \epsilon} \left[-4(B+x_0)^3(3B-2x_0) + 3(3B-2x_0)^2(B+x_0)^2 \right]$$

Igualando a cero, obteniendo sus puntos críticos y sustituyendo el valor donde la función tiene su mínimo físicamente aceptable, se tiene lo siguiente:

$$0 = \frac{8m(p_0 - p_L)^2}{225\mu^2 e \epsilon} \left[-4(B+x_0)^3(3B-2x_0) + 3(3B-2x_0)^2(B+x_0)^2 \right]$$

Simplificando y resolviendo para x_0 :

$$0 = \left[-4(B+x_0)^3(3B-2x_0) + 3(3B-2x_0)^2(B+x_0)^2 \right]$$

De este resultado podemos factorizar $(B+x_0)^2$:

$$0 = (B+x_0)^2 \left[-4(B+x_0)(3B-2x_0) + 3(3B-2x_0)^2 \right]$$

De la factorización con el término $(B+x_0)^2$ podemos obtener las primeras dos raíces:

$$x_{0,1,2} = -B$$

Despejando $(B+x_0)^2$ se obtiene:

$$0 = \left[-4(B+x_0)(3B-2x_0) + 3(3B-2x_0)^2 \right]$$

Factorizando $(3B-2x_0)$ obtenemos:

$$0 = (3B-2x_0) \left[-4(B+x_0) + 3(3B-2x_0) \right]$$

De este resultado podemos obtener la tercera raíz:

$$x_{0,3} = \frac{3}{2}B$$

Despejando $(3B-2x_0)$ obtenemos:

$$0 = -4(B + x_0) + 3(3B - 2x_0)$$

Realizando las operaciones obtenemos:

$$0 = -10x_0 + 5B$$

Despejando y simplificando obtenemos la última raíz:

$$x_{0,4} = \frac{1}{2}B$$

Sustituyendo en la Ec. (4.35) la cuarta raíz que es el único valor permisible se obtiene:

$$L^4 = \frac{8m(p_0 - p_L)^2 \left(B + \frac{1}{2}B\right)^3 \left(3B - 2\left(\frac{1}{2}B\right)\right)^2}{225\mu^2 e\epsilon}$$

Finalmente se obtiene la longitud que minimiza el separador de polvo:

$$L_{\min} = \left(\frac{12m(p_0 - p_L)^2 B^5}{25\mu^2 e\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (6.36)$$

La Ec. (4.36) representa la longitud mínima para la cual la partícula más pequeña sea depositada en la placa inferior del separador, esta longitud depende de las propiedades físicas de la partícula así como de la del fluido y también de la carga eléctrica aplicada al separador. Nótese, que depende de la diferencia de presiones, la separación de la placa, la masa de la partícula y de las propiedades eléctricas del sistema como son: (i) La carga y (ii) El campo eléctrico y la viscosidad asociada a la resistencia del medio a fluir. Nótese que la longitud es inversamente proporcional a la viscosidad del fluido y a la carga aplicada al sistema, es decir, cuanto mayor sea la carga aplicada y la viscosidad del fluido se mas grande, el separador reducida su longitud.

También el sistema tiene relaciones directamente proporcionales como son, la diferencia de presiones, la masa de la partícula y la separación de placas, es decir, cuanto mayor sean

estas características el sistema tendera a incrementar su longitud. A continuación, se hace un resumen de las principales ecuaciones de este capítulo:

Tabla 2 Resumen de las ecuaciones utilizadas en el estado estacionario.

Esfuerzo cortante	σ_{xz}	$\sigma_{xz} = \frac{(p_0 - p_L)}{L} x$	Pa Ec. (4.14)
Velocidad axial	$V_Z(x)$	$V_Z(x) = \frac{B^2}{2\mu} \left(\frac{p_0 - p_L}{L} \right) \left[1 - \left(\frac{x}{B} \right)^2 \right]$	m/s Ec. (4.9)
Flujo volumétrico	Q	$Q = \frac{(P_0 - P_L) B^3 W}{3\mu L}$	m ³ /s
Flujo Másico	M	$M = \frac{\rho (P_0 - P_L) B^3 W}{3\mu L}$	Kg/s Ec. (4.12)
Posición de la partícula a tiempo (t)	X	$x = x_0 - \frac{e\epsilon t^2}{2m}$	m Ec. (4.18)
Velocidad con la posición de la partícula	$V_Z(t)$	$V_Z(t) = \frac{(p_0 - p_L) B^2}{2\mu L} \left[1 - \left(\frac{x_0 - \frac{e\epsilon t^2}{2m}}{B} \right)^2 \right]$	m/s Ec. (4.19)
Longitud mínima	L_{\min}	$L_{\min} = \left(\frac{12m(p_0 - p_L)^2 B^5}{25\mu^2 e\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}$	M Ec.(4.36)

Algunas de las ecuaciones mostradas en la tabla se usaran para simularlas y serán mostradas en un capitulo posterior.

También en siguiente capítulo se abordara el mismo problema, con la diferencia que se resolverá en estado no estacionario, lo que reverá a un problema de inicio de flujo.

CAPITULO V

MODELADO

MATEMÁTICO

(Estado no estacionario)

5.1 ESTADO NO ESTACIONARIO

En el estado no estacionario el problema es el mismo que el de la Fig. (2), sin embargo, en este punto las variables dinámicas del sistema dependen del tiempo. En particular, la ecuación dinámica que describe los cambios en la velocidad toma la forma:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

Las condiciones límites son:

$$\begin{aligned} t=0 & \quad V_z=0 \\ x=0 & \quad V_z=V_{z,\max} \\ x=B & \quad V_z=0 \end{aligned}$$

Al integrar el gradiente de presión da como resultado:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = \frac{P_0 - P_L}{L} + \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} \quad (5.2)$$

5.2 Variables y ecuaciones adimensionales

Para hacer más simple la solución del problema se escogen los siguientes grupos adimensionales y se introducen en la ecuación (5.2):

$$\phi = \frac{V_z}{(P_0 - P_L) B^2 / 2\mu L} \quad \xi = \frac{x}{B} \quad \tau = \frac{\mu t}{\rho B^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \quad (5.3)$$

5.3 Estado estacionario

Cuando τ tiende a ∞ la ecuación (5.3) se simplifica a:

$$0 = 2 + \frac{\partial^2 \phi_\infty}{\partial \xi^2} \quad (5.4)$$

Al integrar dos veces la ecuación (5.4) para obtener las constantes de integración y evaluar cómo sigue:

$$\frac{d^2\phi_\infty}{d\xi^2} = -2 \quad (5.5)$$

$$\int d\left(\frac{d\phi_\infty}{d\xi}\right) = -2\int d\xi \quad (5.6)$$

$$\frac{d\phi_\infty}{d\xi} = -2\xi + C_1 \quad (5.7)$$

$$\int \phi_\infty = -2\int \xi d\xi + C_1 \int d\xi \quad (5.8)$$

$$\phi_\infty = -\xi^2 + C_1\xi + C_2 \quad (5.9)$$

Las condiciones limite son las siguientes:

$$\phi_\infty = \phi_{\infty,\max} = 0 \quad \xi = 0$$

$$\phi_\infty = 0 \quad \xi = 1$$

Evaluando las condiciones límites los valores de las contantes son los siguientes:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 1$$

Sustituyendo los valores de las constantes en la ecuación (5.9) da como resultado:

$$\phi_\infty = 1 - \xi^2 \quad (5.10)$$

5.4 Estado transitorio

La ecuación que describe el fenómeno está dada por una parte estacionaria ϕ_∞ y una transitoria ϕ_t , esta ecuación se muestra a continuación:

$$\phi(\xi, \tau) = \phi_\infty(\xi) - \phi_t(\xi, \tau) \quad (5.11)$$

A la ecuación (5.11) se sustituye la parte estacionaria que es la ecuación (10):

$$\phi(\xi, \tau) = 1 - \xi^2 - \phi_t(\xi, \tau) \quad (5.12)$$

La ecuación se sustituye en la ecuación diferencial la ecuación (5.3):

$$\frac{\partial(1 - \xi^2 - \phi_t)}{\partial \tau} = 2 + \frac{\partial^2(1 - \xi^2 - \phi_t)}{\partial \xi^2} \quad (5.13)$$

Realizando las derivadas parciales de la ecuación (5.13) da como resultado:

$$-\frac{\partial \phi_t}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \phi_t}{\partial \xi^2} \quad (5.14)$$

Quitando el negativo de ambas partes de la ecuación nos queda:

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial \xi^2} \quad (5.15)$$

5.4.1 Método de separación de variables

Para poder resolver esta ecuación diferencial parcial se propone el método de separación de variables con una función que depende de ξ y una función que depende de τ y se propone esta ecuación:

$$\phi_t(\xi, \tau) = \eta(\xi)T(\tau) \quad (5.16)$$

La ecuación (5.16) se sustituye en la ecuación diferencial parcial (5.15) y deriva:

$$\frac{\partial(\eta T)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2(\eta T)}{\partial \xi^2} \quad (5.17)$$

Al realizar la derivación parcial nos da como resultado una ecuación diferencial ordinaria:

$$\eta \frac{dT}{d\tau} = T \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \quad (5.18)$$

Dividimos la ecuación (5.18) por el producto de las funciones ηT :

$$\left(\eta \frac{dT}{d\tau} = T \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right) \frac{1}{\eta T} \quad (5.19)$$

La ecuación (5.19) se puede igualar a una constante la cual se propone $-\alpha^2$:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{\eta} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\alpha^2 \quad (5.20)$$

La ecuación (5.20) la podemos separar de la siguiente forma:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{d\tau} = -\alpha^2 \quad (5.21)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\alpha^2 \quad (5.22)$$

Se integraran por separado las ecuaciones (5.21) y (5.22):

Integración de la ecuación (5.21):

La ecuación diferencial es de variables separables y se integra de la siguiente forma:

$$\ln T = -\alpha^2 \tau + C_1$$

Calculando el antilogaritmo, se tiene la expresión analítica de T

$$T = C_1 e^{-\alpha^2 \tau}$$

Resolviendo la Ec. diferencial de segundo orden de coeficientes constantes:

$$\frac{1}{\eta} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\alpha^2$$

Multiplicamos a la ecuación por η y despejamos a α^2 :

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \alpha^2 \eta = 0$$

Calculando el polinomio característico de la Ec. Diferencial de segundo orden, se tiene lo siguiente:

$$p(m) = m^2 + \alpha^2$$

Las raíces del polinomio son complejas, i.e.

$$m_{1,2} = \sqrt{-\alpha^2} = \sqrt{\alpha^2 i^2} = \pm \alpha i = 0 \pm \alpha i$$

En donde la solución general toma la forma:

$$\eta = C_2 \sin \alpha \xi + C_3 \cos \alpha \xi$$

Las ecuaciones diferenciales integradas son:

$$T = C_1 e^{-\alpha^2 \tau} \quad (5.23)$$

$$\eta = C_2 \sin \alpha \xi + C_3 \cos \alpha \xi \quad (5.24)$$

De acuerdo a las condiciones limite, la ecuación (5.24) se reduce a:

$$\begin{aligned} \xi = 0 & \quad \phi_l = 0 \\ \xi = 1 & \quad \phi_l = 0 \end{aligned}$$

De acuerdo a las condiciones limites antes mostradas el valor de C_3 debe ser cero, con esto la ecuación (5.24) se reduce a:

$$\eta = C_2 \sin \alpha \xi \quad (5.25)$$

Debido que la ecuación (5.25) es una función senoidal existen muchas raíces para esta función, con lo que α debería tomar los valores de $\alpha = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$, con lo que tomamos una α_n la cual nos representaría todos los valores permisibles para α .

Entonces

$$\alpha_n = n\pi \quad \text{donde} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Haciendo la sustitución de α con $\alpha_n = n\pi$ en la ecuaciones (5.23) y (5.25):

$$T_n = C_{1n} e^{-n^2 \pi^2 \tau} \quad (5.26)$$

$$\eta_n = C_{2n} \sin n\pi\xi \quad (5.27)$$

Para obtener la parte transitoria se propuso el producto de dos funciones, así como se muestra en la ecuación (5.16), estas funciones son las ecuaciones (5.26) y (5.27) y con la α_n propuesta finalmente la ecuación para la parte transitoria queda de la siguiente forma:

$$\phi_t(\xi, \tau) = \eta(\xi)T(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{1n} e^{-n^2\pi^2\tau} C_{2n} \sin n\pi\xi \quad (5.28)$$

$$\text{Si } C_{1n}C_{2n} = B_n$$

$$\phi_t(\xi, \tau) = \eta(\xi)T(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-n^2\pi^2\tau} \sin n\pi\xi \quad (5.29)$$

Debido a que en toda la operación suma el término 0 no contribuye en lo absoluto y también ya que $\sin(-n)\pi\xi = -\sin(+n)\pi\xi$ se pueden omitir todos los valores negativos correspondientes a n, así la ecuación (1.29) se reduce a:

$$\phi_t = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2\pi^2\tau} \sin n\pi\xi \quad (5.30)$$

Con la condición inicial:

$$\tau = 0 \quad \phi_t = \phi_\infty = 1 - \xi^2$$

$$1 - \xi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi\xi \quad (5.31)$$

Ahora se debe determinar todos los valores de B_n a partir de la Ec. (5.31), esto se realizara multiplicando ambos lados de la ecuación por $\sin m\pi\xi$ donde m es un número entero y luego integrando sobre el intervalo físicamente pertinente desde $\xi = 0$ hasta $\xi = 1$, con esto:

$$\int_0^1 (1 - \xi^2) \sin m\pi\xi d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \sin n\pi\xi \sin m\pi\xi d\xi \quad (5.32)$$

Integración de la Ec. (5.32):

La integración se empezara por el lado izquierdo de la Ec. (5.32), posteriormente se realizara la integración de la parte derecha.

$$\int_0^1 (1 - \xi^2) \sin m\pi\xi d\xi = \int_0^1 \sin m\pi\xi d\xi - \int_0^1 \xi^2 \sin m\pi\xi d\xi$$

Separando integrales:

$$\int_0^1 \sin m\pi\xi d\xi (I)$$

$$- \int_0^1 \xi^2 \sin m\pi\xi d\xi (II)$$

Integración y evaluación de límites en la integral (I) :

$$\int_0^1 \sin m\pi\xi d\xi = -\frac{\cos m\pi\xi}{m\pi} \Big|_0^1 = \frac{1}{m\pi} (1 - \cos m\pi) = \frac{1}{m\pi} - \frac{\cos m\pi}{m\pi} = \frac{1}{m\pi} - \frac{(-1)^m}{m\pi}$$

Integración de (II) :

$$- \int_0^1 \xi^2 \sin m\pi\xi d\xi$$

Esta integral se realiza por el método de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Siendo:

$$u = \xi^2 \quad dv = \sin m\pi\xi d\xi$$

$$du = 2\xi d\xi \quad v = \frac{-\cos m\pi\xi}{m\pi}$$

$$-\int_0^1 \xi^2 \sin m\pi\xi d\xi = -\left(\frac{-\xi^2 \cos m\pi\xi}{m\pi} - \int \frac{-2\xi \cos m\pi\xi d\xi}{m\pi} \right) = -\left(\frac{-\xi^2 \cos m\pi\xi}{m\pi} + \frac{2}{m\pi} \int \xi \cos m\pi\xi d\xi \right)$$

Integrando por partes $\int \xi \cos m\pi\xi d\xi$:

$$\begin{aligned} u &= \xi & dv &= \cos m\pi\xi d\xi \\ du &= d\xi & v &= \frac{\sin m\pi\xi}{m\pi} \end{aligned}$$

$$\int \xi \cos m\pi\xi d\xi = \frac{\xi \sin m\pi\xi}{m\pi} - \int \frac{\sin m\pi\xi d\xi}{m\pi} = \frac{\xi \sin m\pi\xi}{m\pi} + \frac{\cos m\pi\xi}{m^2 \pi^2}$$

Sustituyendo en la integral (II) :

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \xi^2 \sin m\pi\xi d\xi &= -\left(\frac{-\xi^2 \cos m\pi\xi}{m\pi} + \frac{2}{m\pi} \left(\frac{\xi \sin m\pi\xi}{m\pi} + \frac{\cos m\pi\xi}{m^2 \pi^2} \right) \right)_0^1 \\ -\int_0^1 \xi^2 \sin m\pi\xi d\xi &= \left(\frac{\xi^2 \cos m\pi\xi}{m\pi} - \frac{2\xi \sin m\pi\xi}{m^2 \pi^2} - \frac{2 \cos m\pi\xi}{m^3 \pi^3} \right)_0^1 \end{aligned}$$

Evaluando los límites de integración en la integral (II) :

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \xi^2 \sin m\pi\xi d\xi &= \frac{\cos m\pi}{m\pi} - \frac{2 \cos m\pi}{m^3 \pi^3} + \frac{2}{m^3 \pi^3} \\ -\int_0^1 \xi^2 \sin m\pi\xi d\xi &= \frac{(-1)^m}{m\pi} - \frac{2(-1)^m}{m^3 \pi^3} + \frac{2}{m^3 \pi^3} \end{aligned}$$

Sumando las integrales (I) y (II) :

$$\int_0^1 \sin m\pi\xi d\xi + \left(-\int_0^1 \xi^2 \sin m\pi\xi d\xi \right) = \frac{1}{m\pi} - \frac{\cos m\pi}{m\pi} + \frac{\cos m\pi}{m\pi} - \frac{2 \cos m\pi}{m^3 \pi^3} + \frac{2}{m^3 \pi^3}$$

$$\int_0^1 \sin m\pi\xi d\xi - \int_0^1 \xi^2 \sin m\pi\xi d\xi = \frac{1}{m\pi} - \frac{2(-1)^m}{m^3\pi^3} + \frac{2}{m^3\pi^3}$$

Integración de la parte derecha de la ecuación (5.32):

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^1 \sin n\pi\xi \sin m\pi\xi d\xi$$

En esta integral por ser ortogonal la integración cuando $m \approx n$ nos dará valor de 0; así que el único valor que se puede tomar es cuando $m = n$ como se muestra a continuación:

$$si \quad m = n$$

$$\int_0^1 \sin^2 n\pi\xi d\xi$$

Por tanto se utilizara una identidad trigonométrica:

$$\sin^2(n\pi\xi) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2n\pi\xi)}{2}$$

Entonces con esta identidad trigonométrica podemos integrar:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2n\pi\xi)}{2} \right) d\xi$$

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{2} - \int_0^1 \frac{\cos(2n\pi\xi)}{2} d\xi = \left[\frac{\xi}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{\sin(2n\pi\xi)}{4n\pi} \right]_0^1$$

Evaluando los límites de integración nos da como resultado:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2n\pi\xi)}{2} \right) d\xi = \int_0^1 \sin^2(n\pi\xi) d\xi = \frac{1}{2}$$

Ahora con los resultados de las integrales del miembro derecho e izquierdo de la Ec. (5.32), los igualamos y despejamos el valor de B_m

$$\frac{1}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n^3\pi^3} = \frac{B_n}{2}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3}$$

Sustituyendo el valor en la Ec. (5.30):

$$\phi_t = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2\tau} \sin(n\pi\xi) \quad (5.33)$$

Sustituyendo la Ec. (5.33) que es la parte transitoria del problema en la Ec. (1.12):

$$\phi(\xi, \tau) = 1 - \xi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2\tau} \sin(n\pi\xi) \quad (5.34)$$

La Ec. (5.34) nos representa el perfil de velocidades del sistema en estado transitorio y como se puede ver en la ecuación cuando el tiempo tiende a infinito solo se quedara la parte estacionaria del problema. Ahora sustituimos los valores adimensionales que se propusieron en un inicio para obtener el flujo másico y volumétrico

5.5 Velocidad en estado no estacionario

Los valores adimensionales fueron los siguientes:

$$\phi = \frac{V_z}{(P_0 - P_L)B^2/2\mu L} \quad \xi = \frac{x}{B} \quad \tau = \frac{\mu t}{\rho B^2}$$

$$\frac{V_z 2\mu L}{(P_0 - P_L)B^2} = 1 - \left(\frac{x}{B} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \sin \left(n\pi \frac{x}{B} \right) \quad (5.35)$$

$$V_z = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \left[1 - \left(\frac{x}{B} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \sin \left(n\pi \frac{x}{B} \right) \right] \quad (5.36)$$

$$V_z = V_{zmax} \left[1 - x^{*2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \sin(n\pi x^*) \right]$$

5.6 Velocidad media en estado no estacionario

Se obtendrá la velocidad media $\langle V_z \rangle$, esto se obtiene mediante la división del flujo másico entre el área de sección transversal como se muestra a continuación:

$$\langle V_z \rangle = \frac{\int_0^W \int_0^B V_z dx dy}{\int_0^W \int_0^B dx dy}$$

Integrando el denominador e integrando el denominador solo en y queda:

$$\langle V_z \rangle = \frac{W \int_0^B V_z dx}{WB} = \frac{1}{B} \int_0^B V_z dx$$

Sustituyendo V_z :

$$\langle V_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{2\mu L} \frac{1}{B} \int_0^B \left[1 - \left(\frac{x}{B} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \sin \left(n\pi \frac{x}{B} \right) \right] dx$$

En este caso se usara el método de escalamiento integral:

Haciendo que:

$$\langle V_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{2\mu L} \int_0^B \left[1 - \left(\frac{x}{B} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \sin \left(n\pi \left(\frac{x}{B} \right) \right) \right] d \left(\frac{x}{B} \right)$$

$$u = \frac{x}{B} \quad \text{si} \quad \begin{array}{ll} x \rightarrow 0 & u \rightarrow 0 \\ x \rightarrow B & u \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\langle V_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{2\mu L} \left[\int_0^1 du - \int_0^1 u^2 du - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \int_0^1 \sin(n\pi u) du \right]$$

Integrando y aplicando el teorema fundamental del cálculo, i.e., evaluando la antiderivada en los límites superior e inferior, se tiene la velocidad promedio en el sistema:

$$\langle V_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{2\mu L} \left[1 - \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \left(\frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right) \right] \quad (5.37)$$

$$\langle V_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{2\mu L} \left[\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \left(\frac{(-1)^n}{n\pi} \right) - \left(\frac{1}{n\pi} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \right] \quad (5.38)$$

$$\langle V_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{\mu L} \left[\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{2(-1)^n}{n^4\pi^4} + \frac{2}{n^4\pi^4} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} (-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{2(-1)^n}{n^4\pi^4} + \frac{2}{n^4\pi^4} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \right] \quad (5.39)$$

5.7 Calculo del flujo másico y volumétrico

A partir de la Ec. (5.39) se obtendrá el flujo volumétrico y el flujo másico como se muestra a continuación:

Para obtener el flujo másico se multiplica el área de sección transversal por la velocidad media y la densidad del fluido.

$$w = \int_0^B \int_0^W \rho \langle V_z \rangle dx dy = \rho \langle V_z \rangle \int_0^B \int_0^W dy dx$$

Integrando y evaluando límites:

$$M = \rho \langle V_z \rangle BW$$

Sustituyendo $\langle V_z \rangle$ que es la Ec. (5.39):

$$M = \frac{(P_0 - P_L) B^3 W \rho}{\mu L} \left[\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 \pi^2} - \frac{2(-1)^n}{n^4 \pi^4} + \frac{2}{n^4 \pi^4} \right) e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} (-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 \pi^2} - \frac{2(-1)^n}{n^4 \pi^4} + \frac{2}{n^4 \pi^4} \right) e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \right] \quad (5.40)$$

Ahora para se divide el flujo másico entre la densidad del fluido para obtener de esta manera el flujo volumétrico:

$$Q = \frac{W}{\rho}$$

$$Q = \frac{(P_0 - P_L) B^3 W}{\mu L} \left[\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 \pi^2} - \frac{2(-1)^n}{n^4 \pi^4} + \frac{2}{n^4 \pi^4} \right) e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} (-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 \pi^2} - \frac{2(-1)^m}{n^4 \pi^4} + \frac{2}{n^4 \pi^4} \right) e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \right] \quad (5.41)$$

5.8 Calculo del esfuerzo cortante

A partir de la Ec. (5.36) se obtendrá el esfuerzo cortante que es mediante la siguiente ecuación:

$$\sigma_{xz} = -\mu \frac{dV_z}{dx}$$

$$\frac{dV_z}{dx} = \frac{(P_0 - P_L) B}{\mu L} \left[-\frac{x}{B} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n^3 \pi^3} + \frac{2}{n^3 \pi^3} \right) e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \cos \left(n\pi \frac{x}{B} \right) n\pi \right]$$

$$\sigma_{xz} = \frac{(P_0 - P_L) B}{L} \left[\frac{x}{B} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n^3 \pi^3} + \frac{2}{n^3 \pi^3} \right) e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \cos \left(n\pi \frac{x}{B} \right) n\pi \right] \quad (5.42)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_w \left[x^* + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n^3 \pi^3} + \frac{2}{n^3 \pi^3} \right) e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \cos \left(n\pi x^* \right) n\pi \right]$$

MODELADO MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE UN SEPARADOR
ELECTROSTÁTICO DE POLVO

Estas ecuaciones son para un sistema normal ahora se realizara para un sistema en donde se le induce un campo eléctrico.

La ecuación diferencial que nos describe la influencia del campo eléctrico es la siguiente:

$$F = q\varepsilon$$

$$F = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e\varepsilon$$

Integrando:

$$\int d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{e\varepsilon}{m} \int dt$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e\varepsilon}{m} t + C_1$$

$$\int dx = \frac{e\varepsilon}{m} \int t dt + C_1 \int dt$$

$$x = \frac{e\varepsilon t^2}{2m} + C_1 t + C_2$$

Evaluando las constantes de integración con las condiciones límites:

$$\frac{dx_0}{dt} = 0 \quad t=0$$

$$x = x_0 \quad t=0$$

$$C_1 = 0 \quad C_2 = x_0$$

Como el campo eléctrico es la parte negativa de \mathcal{X} la ecuación diferencial queda de la siguiente forma:

$$x = x_0 - \frac{e\epsilon t^2}{2m} \quad (5.43)$$

Para obtener el tiempo final que se necesita para que la partícula alcance la placa electrificada, esto se hace cuando:

$$t_f \text{ cuando } x = -B$$

Sustituyendo:

$$-B = x_0 - \frac{e\epsilon t_f^2}{2m}$$

Despejando t_f :

$$t_f = \sqrt{\frac{2m(B + x_0)}{e\epsilon}} \quad (5.44)$$

Las Ecs. (5.43) y (5.44) que describen el efecto en el campo eléctrico y el tiempo que tarda la partícula en depositarse en la placa inferior respectivamente.

Sustituyendo la Ec. (5.43) en la Ec. (5.36).

5.9 Velocidad con campo eléctrico en estado no estacionario

$$V_z = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \left[1 - \frac{1}{B^2} \left(x_0 - \frac{e\epsilon t^2}{2m} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin \left(\frac{n\pi}{B} \left(x_0 - \frac{e\epsilon t^2}{2m} \right) \right) \right] \quad (5.45)$$

Donde:

$$G_n = \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)}$$

Reacomodando la ecuación y utilizando las ecuaciones del capítulo anterior:

$$V_z = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \left[1 - \left(\frac{x_0 - \frac{e\epsilon t^2}{2m}}{B} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} G \sin \left(n\pi \left(\frac{x_0 - \frac{e\epsilon t^2}{2m}}{B} \right) \right) \right]$$

$$V_z = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \left[1 - (x_0^* - t^{*2})^2 - \sum_{n=1}^{\infty} G \sin(n\pi(x_0^* - t^{*2})) \right]$$

Desarrollando el polinomio:

$$V_z(t) = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \left[1 - \frac{1}{B^2} \left(x_0^2 - \frac{x_0 e\epsilon t^2}{m} + \frac{e^2 \epsilon^2 t^4}{4m^2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin \frac{n\pi}{B} \left(x_0 - \frac{e\epsilon t^2}{2m} \right) \right] \quad (5.46)$$

$$V_z(t^*) = V_{zmax} \left[1 - x_0^{*2} + 2x_0^* t^{*2} - t^{*4} - \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin(n\pi(x_0^* - t^{*2})) \right]$$

$$G_n = \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3 \pi^3} + \frac{4}{n^3 \pi^3} \right) e^{-n^2 \pi^2 T t^*}; \quad T = \frac{t_c}{\rho B^2}; \quad t^* = \frac{t}{t_c}$$

μ

$$V_z = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \left[1 - \frac{x_0^2}{B^2} + \frac{x_0 e\epsilon t^2}{B^2 m} - \frac{e^2 \epsilon^2 t^4}{4B^2 m^2} - \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin \left(\frac{x_0 n\pi}{B} - \frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) \right] \quad (5.47)$$

5.10 Velocidad media con campo eléctrico

Se calcula la velocidad media $\langle V_z \rangle$:

$$\langle V_z(t^*) \rangle = \frac{\int_0^W \int_0^B V_z dx_0 dy}{\int_0^W \int_0^B dx_0 dy} = \frac{1}{B} \int_0^B V_z dx_0$$

$$\langle V_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \int_0^B \left[1 - \frac{x_0^2}{B^2} + \frac{e\epsilon t^2}{Bm} \left(\frac{x_0}{B} \right) - \frac{e^2 \epsilon^2 t^4}{4B^2 m^2} - \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin \left(n\pi \left(\frac{x_0}{B} \right) - \frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) \right] d \left(\frac{x_0}{B} \right)$$

Utilizando el método de escalamiento integral:

Donde:

$$u = \frac{x_0}{B}$$

Con esto:

$$u = 0 \text{ cuando } x_0 \rightarrow 0$$

$$u = 1 \text{ cuando } x_0 \rightarrow B$$

$$\langle V_z \rangle = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \left[\int_0^1 du - \int_0^1 u^2 du + \frac{e\epsilon t^2}{Bm} \int_0^1 u du - \frac{e^2 \epsilon^2 t^4}{4B^2 m^2} \int_0^1 du - \sum_{n=1}^{\infty} G \int_0^1 \sin \left(n\pi u - \frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) du \right]$$

Integrando y aplicando el teorema fundamental del cálculo, i.e., evaluando la antiderivada en los límites superior e inferior, se tiene la velocidad promedio en el sistema:

$$\langle V_z(t) \rangle = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \left[\frac{2}{3} + \frac{e\epsilon t^2}{2Bm} - \frac{e^2 \epsilon^2 t^4}{4B^2 m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{n\pi} \left(\cos \left(n\pi - \frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) - \cos \left(-\frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) \right) \right] \quad (5.48)$$

$$\langle V_z(t^*) \rangle = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \int_0^1 \left[1 - x_0^{*2} + 2t^{*2} x_0^* - t^{*4} - \sum_{n=1}^{\infty} G \sin(n\pi x_0^* - n\pi t^{*2}) \right] dx_0^*$$

$$\langle V_z(t^*) \rangle = V_{z\max} \left[\frac{2}{3} + t^{*2} - t^{*4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G}{n\pi} \left(\cos(n\pi - n\pi t^{*2}) - \cos(-n\pi t^{*2}) \right) \right]$$

5.11 Calculo del flujo másico y volumétrico con campo eléctrico

Con la Ec. (5.47) se obtendrá el flujo másico y el flujo volumétrico como se muestra a continuación:

Para el flujo másico:

$$M = \int_0^B \int_0^W \rho \langle V_z \rangle dx dy = BW \rho \langle V_z \rangle$$

Sustituyendo la Ec. (5.48):

$$M = \frac{(P_0 - P_L) WB^3 \rho}{2\mu L} \left[\frac{2}{3} + \frac{e\epsilon t^2}{2Bm} - \frac{e^2 \epsilon^2 t^4}{4B^2 m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{n\pi} \left(\cos \left(n\pi - \frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) - \cos \left(-\frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) \right) \right] \quad (5.49)$$

Sustituyendo G_n en la Ec. (5.49):

$$M = \frac{(P_0 - P_L) WB^3 \rho}{2\mu L} \left[\frac{2}{3} + \frac{e\epsilon t^2}{2Bm} - \frac{e^2 \epsilon^2 t^4}{4B^2 m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2 \pi^2} - \frac{4(-1)^n}{n^4 \pi^4} + \frac{4}{n^4 \pi^4} \right) e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \left(\cos \left(n\pi - \frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) - \cos \left(-\frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) \right) \right] \quad (5.50)$$

El flujo volumétrico se obtiene por medio de la Ec. (5.50):

$$Q = \frac{M}{\rho} \quad (5.51)$$

$$Q = \frac{(P_0 - P_L) WB^3}{2\mu L} \left[\frac{2}{3} + \frac{e\epsilon t^2}{2Bm} - \frac{e^2 \epsilon^2 t^4}{4B^2 m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2 \pi^2} - \frac{4(-1)^n}{n^4 \pi^4} + \frac{4}{n^4 \pi^4} \right) e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \left(\cos \left(n\pi - \frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) - \cos \left(-\frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) \right) \right]$$

5.12 Calculo del esfuerzo con campo eléctrico

A partir de la Ec. (5.46) se obtendrá el esfuerzo cortante que es mediante la siguiente ecuación:

$$\sigma_{xz} = -\mu \frac{dV_z}{dx_0} \quad (5.52)$$

Derivando la Ec. (5.46) con respecto a x_0 nos queda de la siguiente forma:

$$\frac{dV_z}{dx_0} = \frac{(P_0 - P_L)B}{\mu L} \left[-\frac{x_0}{B} + \frac{e\epsilon t^2}{2Bm} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2\left(\frac{\mu t}{\rho B^2}\right)} \cos\left(n\pi\left(\frac{x_0}{B}\right) - \frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) n\pi \right] \quad (5.53)$$

Sustituyendo en la ecuación del esfuerzo cortante Ec. (5.52):

$$\sigma_{xz} = -\mu \left\{ \frac{(P_0 - P_L)B}{\mu L} \left[-\frac{x_0}{B} + \frac{e\epsilon t^2}{2Bm} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2\left(\frac{\mu t}{\rho B^2}\right)} \cos\left(n\pi\left(\frac{x_0}{B}\right) - \frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) n\pi \right] \right\} \quad (5.54)$$

Finalmente la ecuación del esfuerzo cortante queda:

$$\sigma_{xz} = \frac{(P_0 - P_L)B}{\mu L} \left[\frac{x_0}{B} - \frac{e\epsilon t^2}{2Bm} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2\left(\frac{\mu t}{\rho B^2}\right)} \cos\left(n\pi\left(\frac{x_0}{B}\right) - \frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) n\pi \right] \quad (5.55)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{(P_0 - P_L)B}{\mu L} \left[x_0^* - t^{*2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2\Gamma t^*} \cos(n\pi x_0^* - n\pi t^{*2}) n\pi \right]$$

5.13 Calculo de la longitud

A partir de la velocidad se obtendrá la longitud que necesita el separador:

$$\frac{dz}{dt} = V_z$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \left[1 - \frac{x_0^2}{B^2} + \frac{x_0 e\epsilon t^2}{B^2 m} - \frac{e^2 \epsilon^2 t^4}{4B^2 m^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4\cos n\pi}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2\left(\frac{\mu t}{\rho B^2}\right)} \sin\left(\frac{x_0 n\pi}{B} - \frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) \right] \quad (5.56)$$

$$\frac{dz^*}{dt^*} = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \left[1 - x_0^{*2} + 2x_0^* t^{*2} - t^{*4} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4\cos n\pi}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2\left(\frac{\mu t}{\rho B^2}\right)} \sin(n\pi x_0^* - n\pi t^{*2}) \right]$$

Integrando la Ec. (5.56):

$$\int_0^L dz = \int_0^{t_f} \frac{(P_0 - P_L) B^2}{2\mu L} \left[1 - \frac{x_0^2}{B^2} + \frac{x_0 e \epsilon t^2}{B^2 m} - \frac{e^2 \epsilon^2 t^4}{4B^2 m^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4 \cos n\pi}{n^3 \pi^3} + \frac{4}{n^3 \pi^3} \right) e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \sin \left(\frac{x_0 n \pi}{B} - \frac{n \pi e \epsilon t^2}{2Bm} \right) \right] dt$$

$$L = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{2\mu L} \left[t_f - \frac{x_0^2}{B^2} t_f + \frac{x_0 e \epsilon}{3B^2 m} t_f^3 - \frac{e^2 \epsilon^2}{20B^2 m^2} t_f^5 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4 \cos n\pi}{n^3 \pi^3} + \frac{4}{n^3 \pi^3} \right) \int_0^{t_f} e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \sin \left(\frac{x_0 n \pi}{B} - \frac{n \pi e \epsilon t^2}{2Bm} \right) dt \right]$$

$$L^2 = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{2\mu} \left[t_f - \frac{x_0^2}{B^2} t_f + \frac{x_0 e \epsilon}{3B^2 m} t_f^3 - \frac{e^2 \epsilon^2}{20B^2 m^2} t_f^5 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4 \cos n\pi}{n^3 \pi^3} + \frac{4}{n^3 \pi^3} \right) \int_0^{t_f} e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \sin \left(\frac{x_0 n \pi}{B} - \frac{n \pi e \epsilon t^2}{2Bm} \right) dt \right]$$

Sustituyendo la Ec. (5.44):

$$L^2 = A \left[\sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}} - \frac{x_0^2}{B^2} \left(\sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}} \right) + \frac{x_0 e \epsilon}{3B^2 m} \left(\sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}} \right)^3 - \frac{e^2 \epsilon^2}{20B^2 m^2} \left(\sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}} \right)^5 - G_n \int_0^{t_f} e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \sin \left(\frac{x_0 n \pi}{B} - \frac{n \pi e \epsilon t^2}{2Bm} \right) dt \right]$$

Donde:

$$A = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{2\mu}; \text{ y } G_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4 \cos n\pi}{n^3 \pi^3} + \frac{4}{n^3 \pi^3} \right)$$

Simplificando queda:

$$L^2 = A \left[\sqrt{\frac{2m(B+x_0)}{e\epsilon}} \left(1 - \frac{x_0^2}{B^2} + \frac{2x_0(B+x_0)}{3B^2} - \frac{(B+x_0)^2}{5B^2} \right) - G_n \int_0^{t_f} e^{-n^2 \pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \sin \left(\frac{x_0 n \pi}{B} - \frac{n \pi e \epsilon t^2}{2Bm} \right) dt \right] \quad (5.57)$$

En el capítulo siguiente del presente trabajo se simularán algunas de las ecuaciones para observar el comportamiento del sistema resuelto en esta sección

A continuación, se hace un resumen de las principales ecuaciones de este capítulo:

Tabla 3 Resumen de las ecuaciones utilizadas para el estado no estacionario.

Esfuerzo cortante	σ_{xz}	$\sigma_{xz} = A \left[\frac{x}{B} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos \left(n\pi \frac{x}{B} \right) n\pi \right]$	Pa Ec. (5.42)
Velocidad axial	$V_z(x(t))$	$V_z = A_1 \left[1 - \left(\frac{x}{B} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} G_{1n} \sin \left(n\pi \frac{x}{B} \right) \right]$	m/s Ec. (5.36)
Flujo volumétrico	Q	$Q = \frac{(P_0 - P_L) B^3 W}{2\mu L} \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{n\pi} \sum_{n=1}^{\infty} G_{1n} (-1)^n - \frac{1}{n\pi} \sum_{n=1}^{\infty} G_{1n} \right]$	m ³ /s Ec. (5.41)
Flujo Másico	M	$M = \frac{(P_0 - P_L) B^3 W \rho}{2\mu L} \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{n\pi} \sum_{n=1}^{\infty} G_{1n} (-1)^n - \frac{1}{n\pi} \sum_{n=1}^{\infty} G_{1n} \right]$	Kg/s Ec. (5.40)
Posición de la partícula a tiempo (t)	X	$x = x_0 - \frac{e\epsilon t^2}{2m}$	m Ec. (5.43)
Velocidad con la posición de la partícula	$V_z(t)$	$V_z(t) = A_1 \left[1 - \frac{x_0^2}{B^2} + \frac{x_0 e\epsilon t^2}{B^2 m} - \frac{e^2 \epsilon^2 t^4}{4B^2 m^2} - \sum_{n=1}^{\infty} G_{1n} \sin \left(\frac{x_0 n\pi}{B} - \frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) \right]$	m/s Ec. (5.47)
Esfuerzo cortante	σ_{xz}	$\sigma_{xz} = A \left[\frac{x_0}{B} - \frac{e\epsilon t^2}{2Bm} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos \left(n\pi \left(\frac{x_0}{B} \right) - \frac{n\pi e\epsilon t^2}{2Bm} \right) n\pi \right]$	Pa Ec. (5.55)

$$A = \frac{(P_0 - P_L)B}{L}; \quad A_1 = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L}$$

$$G_n = \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2\left(\frac{\mu t}{\rho B^2}\right)}; \quad G_{1n} = \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2\left(\frac{\mu t}{\rho B^2}\right)}$$

CAPITULO VI

VARIABLES Y

ECUACIONES

ADIMENSIONALES

6.1 Estado estacionario

En esta sección se proponen las variables y ecuaciones adimensionales que describen la dinámica de flujo. Estas nos servirán en la siguiente sección para presentar las simulaciones correspondientes. Las variables escaladas son: (i)

$$\sigma_{zx}^* = \frac{\sigma_{xz}}{(P_0 - P_L)B}; Vz^*(x) = \frac{Vz(x)}{(P_0 - P_L)B^2}, x^* = \frac{x}{x_c}; x_0^* = \frac{x_0}{x_{0c}}; t^* = \frac{t}{t_c};$$

En donde las variables características están definidas de la siguiente manera

$$x_c = B; x_{0c} = B; t_c = \sqrt{\frac{2mB}{e\varepsilon}};$$

Nótese, que el esfuerzo característico está asociado al gradiente de presión multiplicado por la longitud característica ortogonal al flujo B. Por otra parte, la velocidad axial característica fue escalada con la velocidad máxima del fluido lo que induce que la velocidad este acotada entre 0 y 1. Así mismo, las posiciones x_0 y x_t son hechas adimensionales con la longitud característica ortogonal al flujo B, y por último, el tiempo característico está asociado a las propiedades inerciales y eléctricas asociadas con la masa de la partícula, carga eléctrica, campo eléctrico y longitud característica B respectivamente. La elección de estas variables se hizo por dos razones principales: (i) la primera de ellas fue la de escalar las ecuaciones y facilitar los cálculos computacionales, y la segunda (ii) fue para que aparezcan grupos adimensionales que permitan cuantificar los mecanismos que describen la dinámica de flujo del sistema. A continuación, se presentan las ecuaciones adimensionales:

$$\sigma_{xz}^* = x; \sigma_{xz} = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{2\mu L} x$$

$$V_Z^*(x) = 1 - x^2; V_Z = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{2\mu L} [1 - x^2]$$

$$x^*(t^*) = x_0^* - t^{*2}$$

$$V_Z^*(t^*) = 1 - (x_0^* - t^{*2})^2; V_Z(t^*) = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{2\mu L} [1 - (x_0^* - t^{*2})^2]$$

$$w^* = \frac{w}{\rho(P_0 - P_L) B^3 W / \mu L} = \frac{1}{3}$$

$$L_{\min}^* = \frac{L_{\min}}{B} = \left(\frac{12m(p_0 - p_L)^2 B^5}{25\mu^2 \epsilon \epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} B^{-1}$$

6.2 Estado no estacionario

Al igual que en el caso que se mostró en el estado estacionario, aquí, igualmente se propusieron variables y grupos adimensionales, estos grupos fueron los mismos que se utilizaron anteriormente, con la excepción que se agregó un nuevo grupo que relaciona el tiempo característico con el tiempo difusivo del sistema con el fin de poder simular las ecuaciones, que fuera dimensionalmente consistente y principalmente para observar como es el comportamiento de los diferentes tiempo, el de proceso (difusivo) y el característico (el que relaciona el campo eléctrico), y con esto hacer notar como es la influencia que tiene uno sobre otro conforme evoluciona el sistema.

La nueva variable escalada agregada es:

$$T = \frac{t_c}{\frac{\rho B^2}{\mu}}$$

Es importante hacer mención que esta nueva variable es solo usada para el sistema en estado no estacionario con la presencia de un campo eléctrico.

Las ecuaciones adimensionales son mostradas a continuación:

$$\sigma_{xz} = \frac{(P_0 - P_L)B}{L} \left[x^* + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \cos(n\pi x^*) n\pi \right]$$

$$V_z = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \left[1 - x^{*2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \left(\frac{\mu t}{\rho B^2} \right)} \sin(n\pi x^*) \right]$$

$$\sigma_{xz} = \frac{(P_0 - P_L)B}{L} \left[x_0^* - t^{*2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \Gamma t^*} \cos(n\pi x_0^* - n\pi t^{*2}) n\pi \right]$$

$$V_z(t^*) = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu L} \left[1 - x_0^{*2} + 2x_0^* t^{*2} - t^{*4} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^3\pi^3} \right) e^{-n^2\pi^2 \Gamma t^*} \sin(n\pi (x_0^* - t^{*2})) \right]$$

CAPÍTULO VII

SIMULACIÓN

COMPUTACIONAL

7.1 Estado estacionario

Perfil de velocidad sin campo eléctrico.

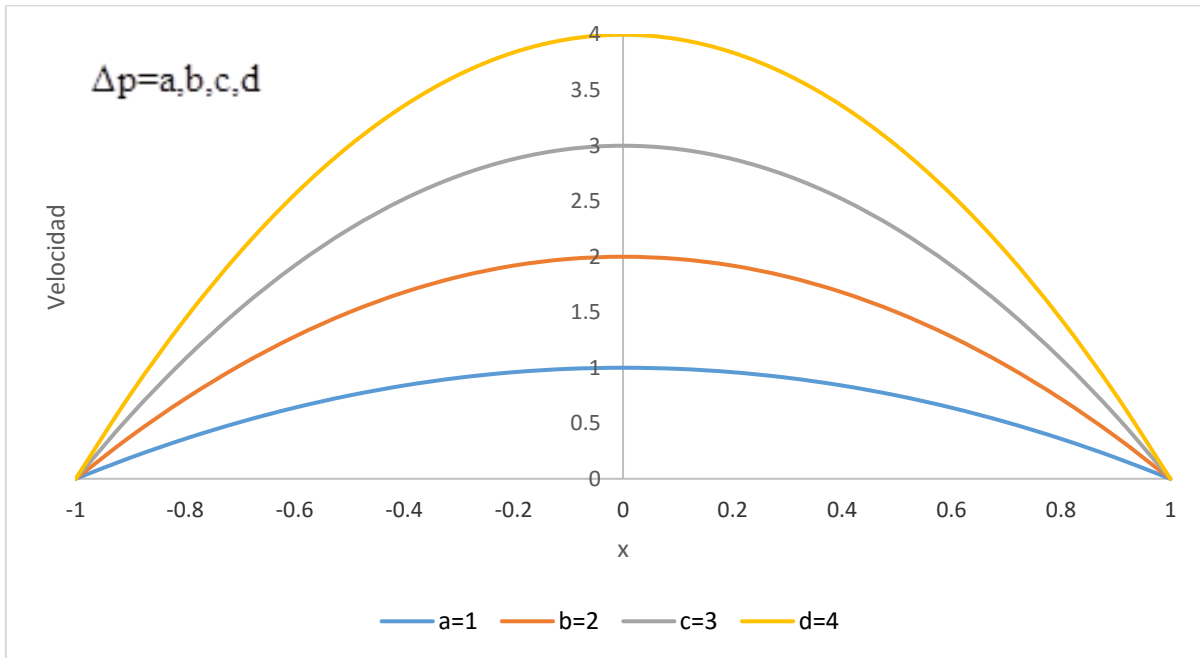


Figura 8 Ilustra los perfiles de velocidad como función de la coordenada x , en este caso una x reducida (x^*), para diferentes valores del gradiente de presión. Se observa el perfil clásico que se muestra en la literatura.

En la Fig. 8 se muestran los resultados del perfil de velocidades en función del gradiente de presión. A diferentes valores del gradiente de presión se puede observar el perfil parabólico se incrementa, cuando mayor es el gradiente de presión el perfil parabólico se desfasa a un valor mayor.

También se puede observar que cuando el fluido se acerca hacia las paredes del sistema la velocidad es mínima, cuando el fluido se aproxima al centro del sistema la velocidad incrementa hasta un valor máximo.

Perfil de esfuerzo sin campo eléctrico.

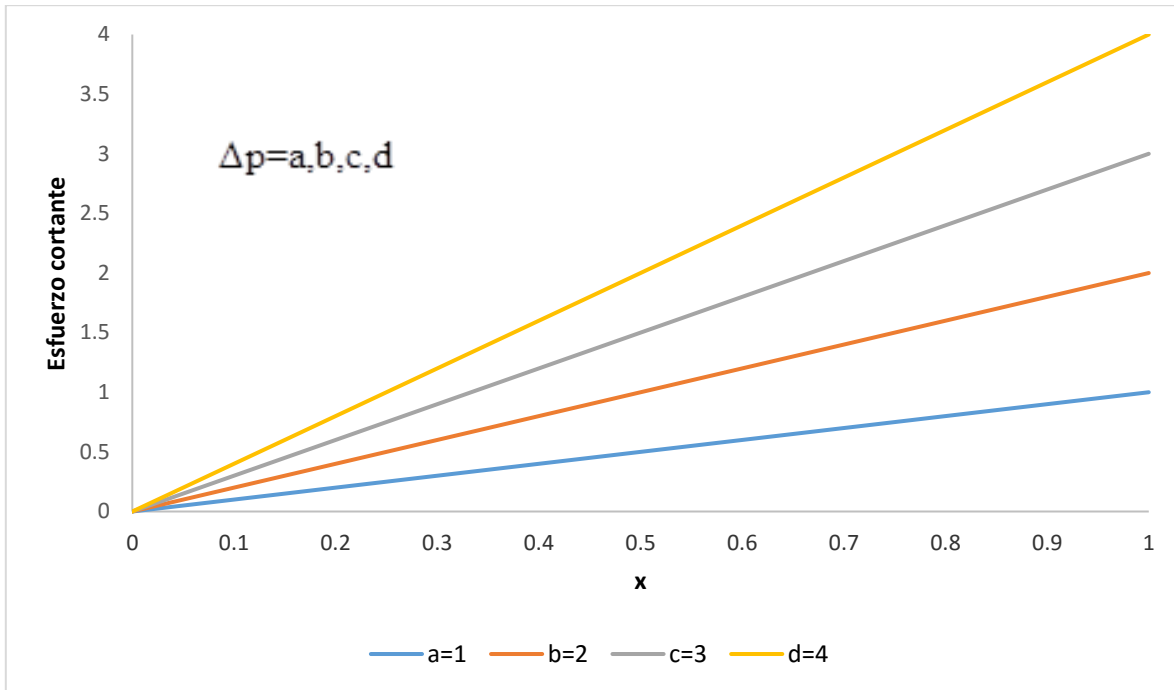


Figura 9 Ilustra los perfiles del esfuerzo cortante como función de la coordenada x, en este caso es una x reducida (x^*) con diferentes valores del gradiente de presión.

En la Fig. 9 se muestran los resultados del perfil de esfuerzos cortantes en función de los gradientes de presión. A diferentes valores del gradiente de presión se puede observar el incremento del esfuerzo cortante.

También se observa que el fluido cuando se acerca a la pared del sistema el esfuerzo cortante es máximo, mientras que cuando se aproxima hacia el centro del sistema el esfuerzo decrece hasta un valor mínimo.

Velocidad puntal de la partícula expuesta a un campo eléctrico.

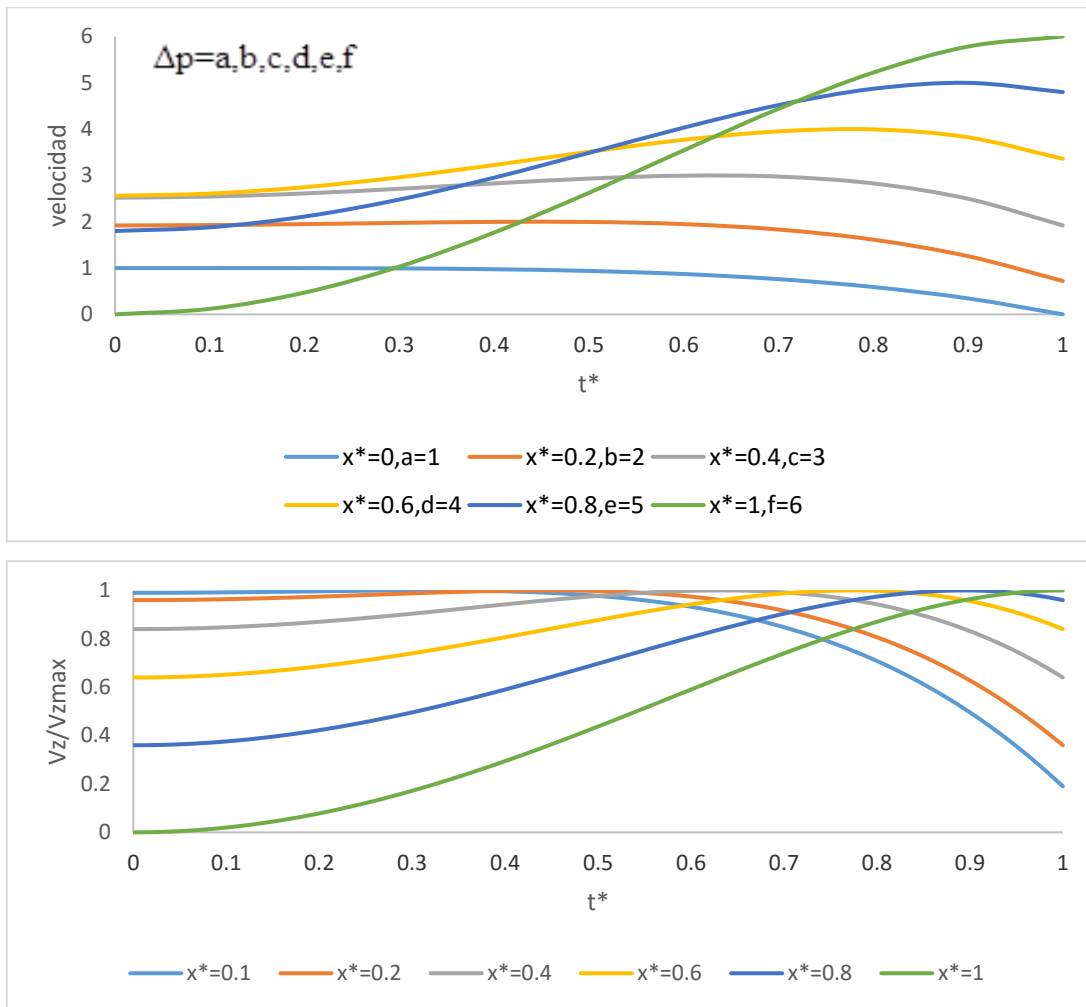


Figura 10 Ilustra los perfiles de velocidad como función del tiempo característico para diferentes valores de la longitud característica.

En la Fig. 10 se observa que para valores pequeños de la distancia característica es casi constante y posteriormente empieza a decrecer en cuanto evoluciona en el tiempo.

También se observa que cuando el valor de la distancia característica se aproxima a 1 el valor inicial es pequeño, posteriormente tiene un incremento hasta un valor máximo y posteriormente empieza a decrecer en cuanto el sistema evoluciona en el tiempo.

Se observa que cuando el tiempo característico incrementa el efecto del campo eléctrico tiene mayor una influencia especialmente sobre la partícula la cual se acelera hasta que se deposita en la placa electrificada.

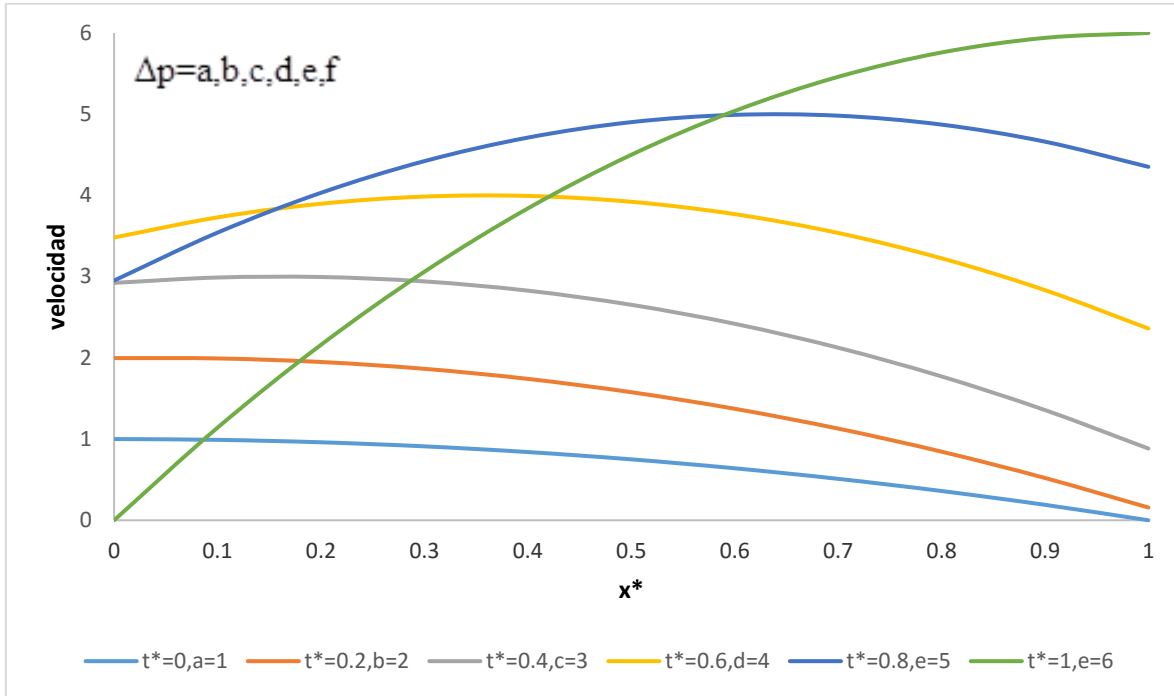


Figura 11 Ilustra la velocidad de la partícula en función de la longitud característica con diferentes valores del tiempo característico.

En la Fig. 11 se puede observar que para valores pequeños de tiempo característicos el comportamiento es casi contantes y posteriormente empieza a decrecer.

Se observa que cuando el valor de del tiempo característico se aproxima a 1 se observa un comportamiento parabólico, entre mayor es el valor del tiempo característico el perfil parabólico es mayor. También se aprecia que para valores cercanos a 0 para t^* , el perfil parabólico es similar al que se muestra en la Fig. 1 donde prácticamente la partícula de polvo se mueve a la misma velocidad del fluido en el cual se desplaza, cuando se incrementa el valor de t^* el efecto es visible al acelerar a la partícula, esta aceleración que es debido a la diferencia de potencial eléctrico que se genera.

Perfil de esfuerzo cortante con campo eléctrico.

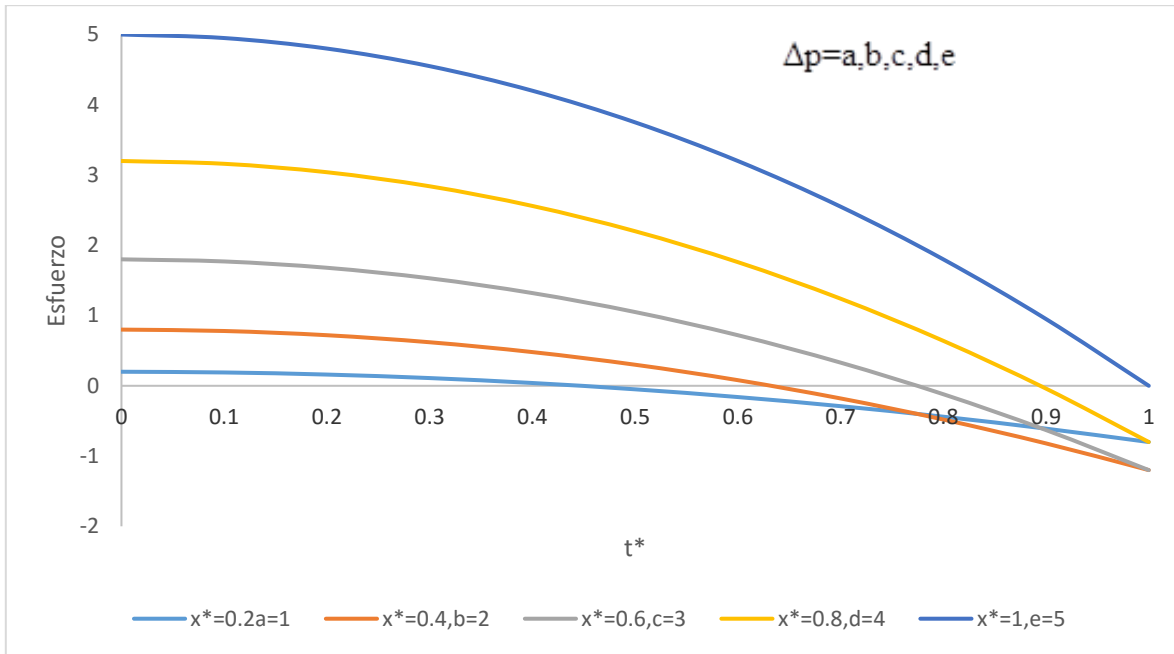


Figura 12 Ilustra los perfiles de esfuerzo cortante en función del tiempo característico con diferentes valores de la distancia característica.

En la fig. 12 se observa que para valores pequeños de la distancia característica son valores pequeños del esfuerzo cortante que disminuyen conforme evoluciona en el tiempo, estos valores pequeños del esfuerzo son razonables debido a que la partícula que está sometida a un esfuerzo igual al que está el fluido, cuando la partícula se está alejado de las paredes del sistema existe un menor esfuerzo, debido a que se aproxima al centro en donde el esfuerzo es casi nulo.

En la fig. 12 se observa que cuando el valor de la longitud característica tiende a 1 el esfuerzo es mayor que va disminuyendo con forme evoluciona el sistema en el tiempo, los valores que se observan son razonables porque cuando el fluido, en el cual se encuentra la partícula, está muy cercano a las paredes existe un mayor esfuerzo.

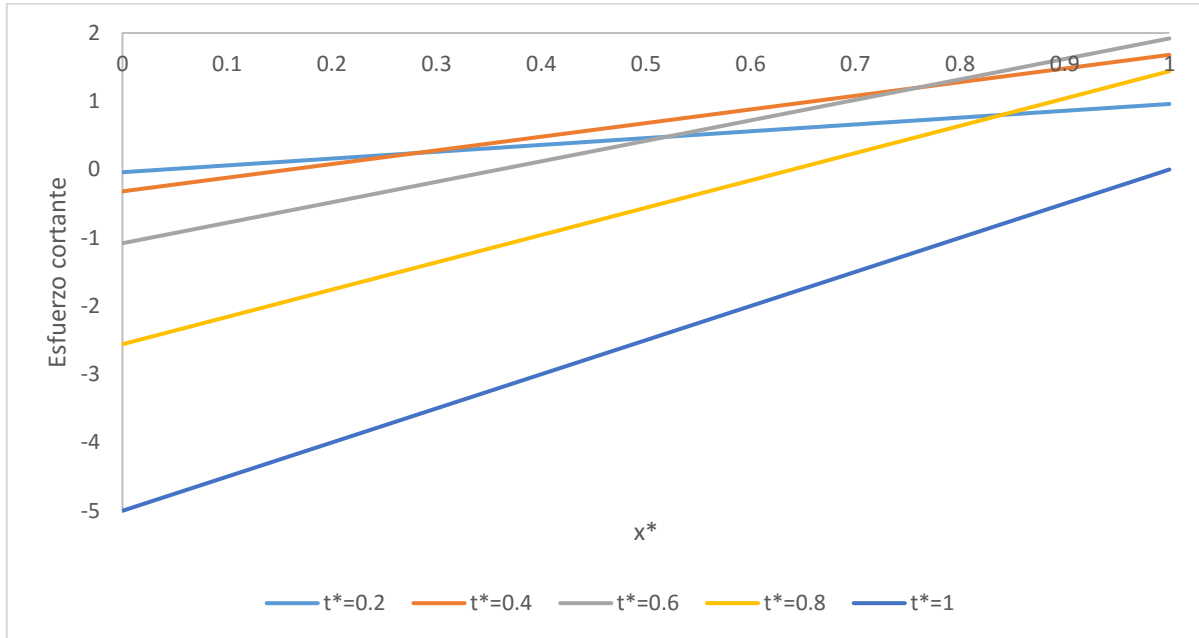


Figura 13 Ilustra los perfiles de esfuerzo cortante en función de la distancia característica con diferentes valores del tiempo característico.

En la Fig. 13 se observa que para valores pequeños de tiempo característico el esfuerzo es mayor y se incrementa conforme incrementa la distancia característica.

También se muestra que cuando el tiempo característico incrementa su valor, el esfuerzo disminuye y se mantiene la tendencia cuando se aproxima a la pared de las placas. Es importante resaltar que para valores pequeños de t^* el comportamiento del esfuerzo es igual al mostrado en los perfiles comúnmente observados para un fluido newtoniano. Caso contrario al que pasa cuando t^* se aproxima a la unidad, donde el esfuerzo disminuye pero manteniendo la tendencia de un incremento lineal.

Matemáticamente se observa un incremento lineal cuando x^* se aproxima al valor de la unidad.

7.2 Estado no estacionario

Perfil de velocidad sin campo eléctrico.

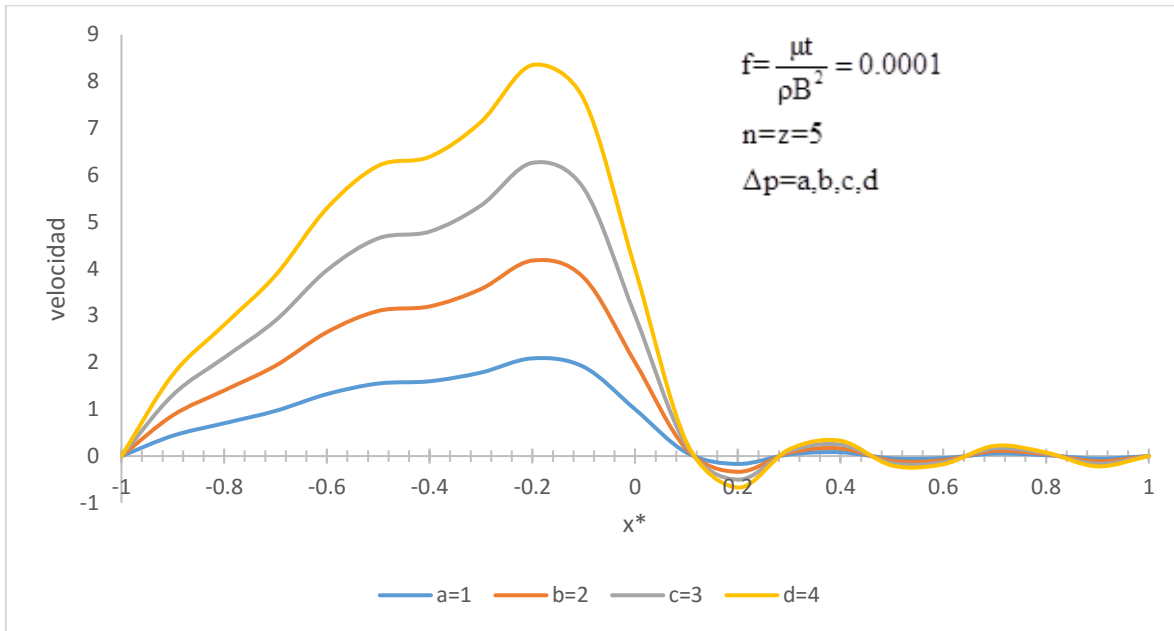


Figura 14 Muestra los perfiles de velocidad para tiempos de difusión bajos.

En la Fig. 14 Se observa el perfil de velocidades en función de la coordenada axial adimensional, para un tiempo adimensional fijo. Este tiempo reducido, relaciona el de proceso con la difusiva asociada a la transferencia de momento. En la gráfica se observan 4 simulaciones correspondientes a diferentes gradientes de presión. Para intervalos de -1 a 0, se observa que la función es monótona creciente hasta un valor máximo cercano a -0.2 y para un valor mayor, i.e. $x > -0.2$ la función decrece hasta un valor mínimo en $x = 0.1$ y a partir de valores mayores a $x = 0.1$ la función oscila por efecto de la contribución de la serie de cinco términos. Matemáticamente, esta función es dominada en el intervalo de (-1,0) la función exponencial mientras que el efecto oscilatorio de las series de Fourier lo hace en el intervalo (0,1). Lo que significa que el sistema está en el régimen transitorio, es decir evoluciona en el tiempo. Estos experimentos son clásicos en la pruebas de inicio de flujo.

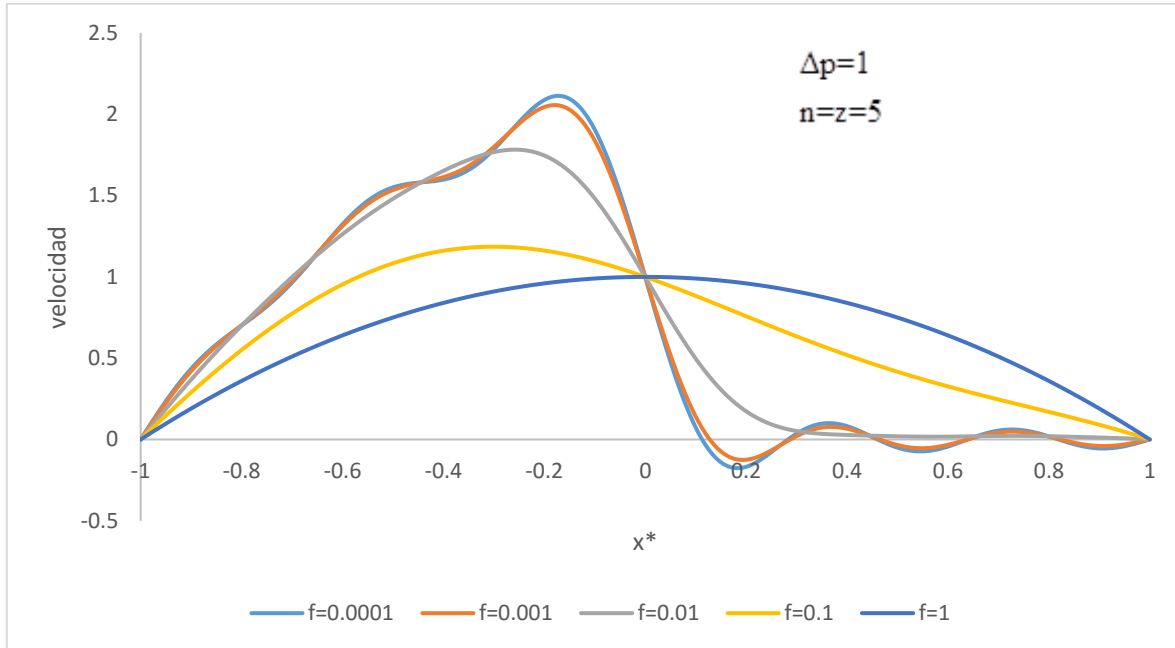


Figura 15 Muestra perfiles de velocidad con diferentes valores de tiempo difusivo.

En la Fig. 15 se simula el perfil de velocidades vs coordenada axial adimensional x^* en función del tiempo adimensional f , el cual relaciona los mecanismos difusivos y de proceso. En esta simulación solo fue usado un gradiente de presión el cual es igual a la unidad. Es notorio, que entre más se incrementa el valor del tiempo proceso, el perfil de velocidades tiende a la solución clásica parabólica en estado estacionario, i.e. cuando las variables dinámicas o atributos del sistema no son función del tiempo. A valores de tiempo adimensional de 0.1 el comportamiento parabólico domina sobre el perfil asociado al inicio del flujo.

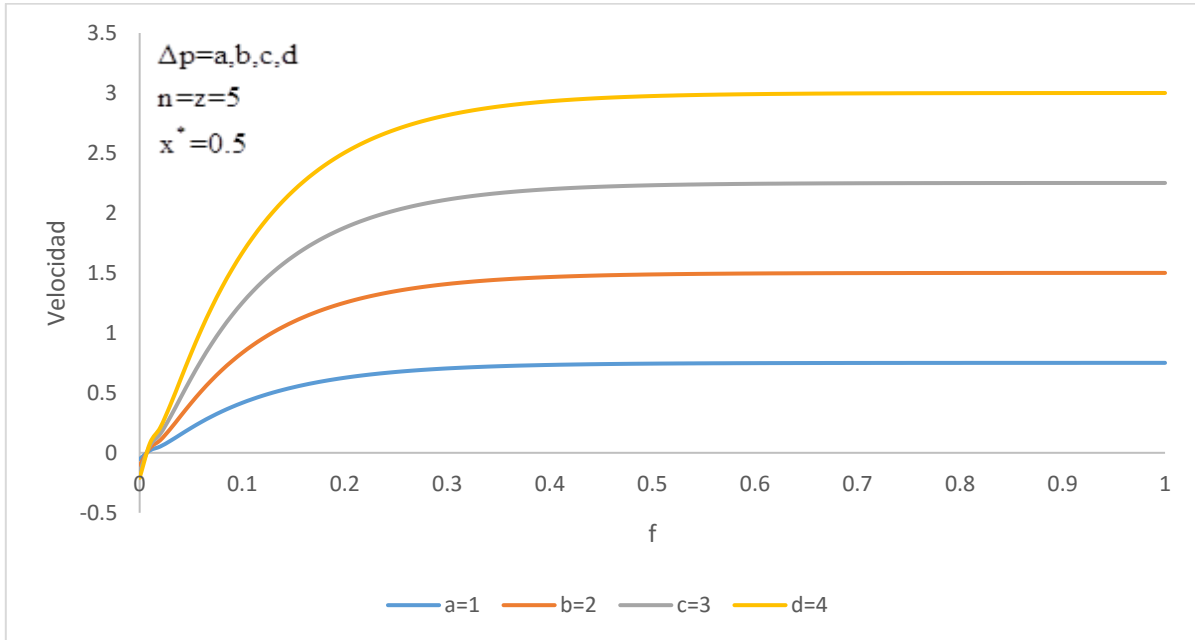


Figura 16 Muestra los perfiles de velocidad en un punto fijo de la coordenada axial.

En la Fig. 16 se simula el perfil de velocidades contra el tiempo difusivo, esta grafica fue realizada con una valor fijo de la coordenada axial x^* , con diferentes gradientes de presión y con los primeros valores de la serie mostrada en la ecuación que describe el fenómeno. Para valores de $f < 0.2$ el comportamiento de la curva casi es linealmente creciente, para valores de $f > 0.4$ el comportamiento es constante con lo que concuerda con la gráfica antes vista donde se mostraba que al incrementar los valores de f el efecto parabólico prevalece. Con esto se confirma que para valores grandes de f el sistema está en estado estacionario.

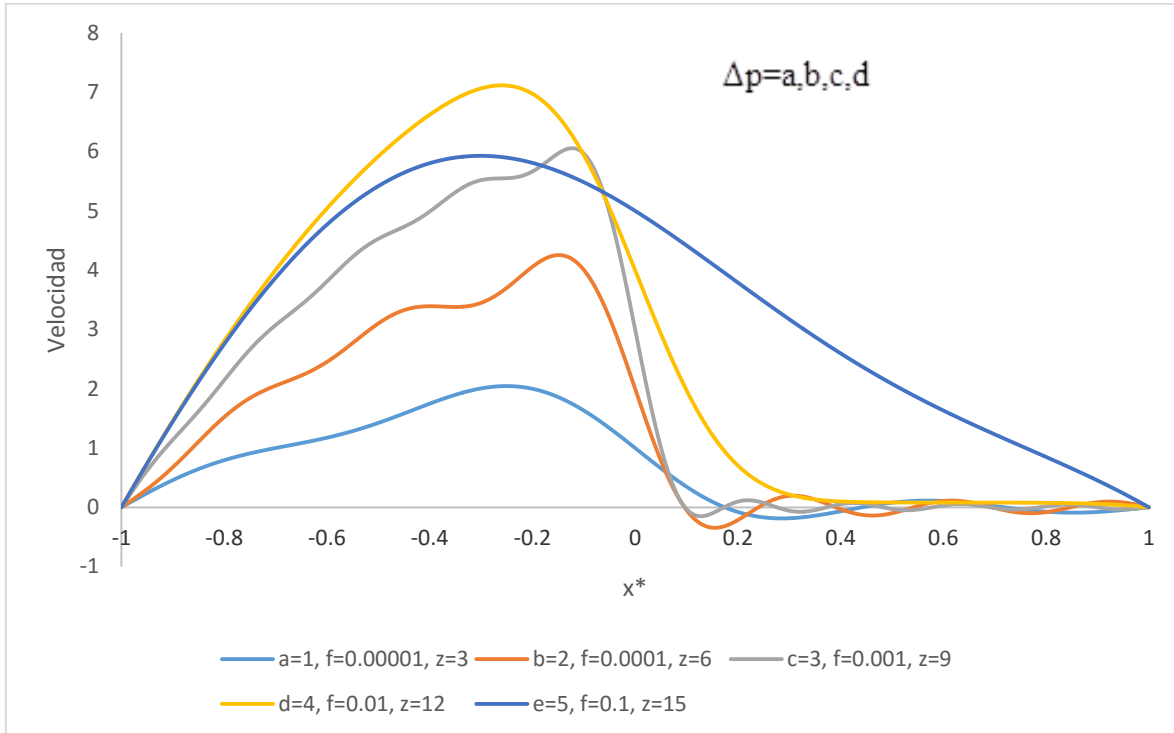


Figura 17 Muestra los perfiles de velocidad con diferentes parámetros para z, f y v_{max}

En la Fig. 17 Es mostrado un contraste de la velocidad con respecto a la coordenada axial x^* , es las 5 simulaciones los valores que se proponen para cada parámetro como son el gradiente de presión (Δp), el tiempo difusivo (f) y la cantidad de términos usados en la serie (z) fueron diferentes para observar el efecto que tiene cada uno de ellos en el perfil de velocidades y como es que este se ve afectado, al igual que en las gráficas anteriores, cuando el tiempo adimensional llega a tomar valores más grandes el perfil parabólico se hace más notorio por ende empieza a predominar.

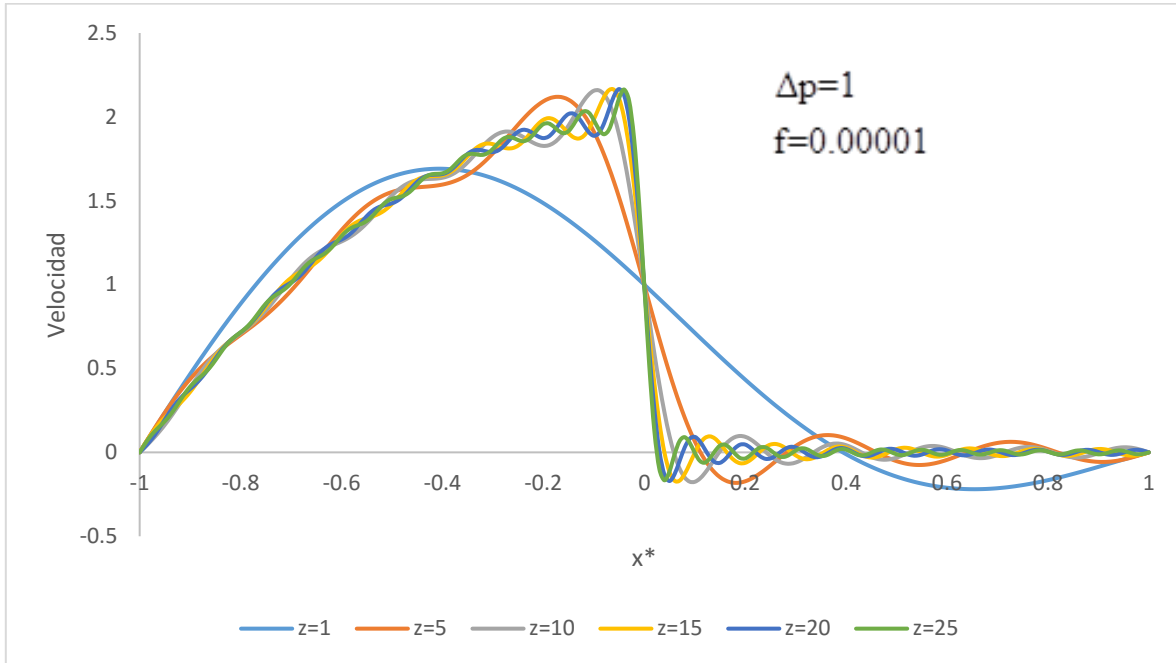


Figura 18 Muestra los perfiles de velocidad con diferentes cantidades de términos usados de la serie de Fourier y manteniendo el mismo gradiente de presión.

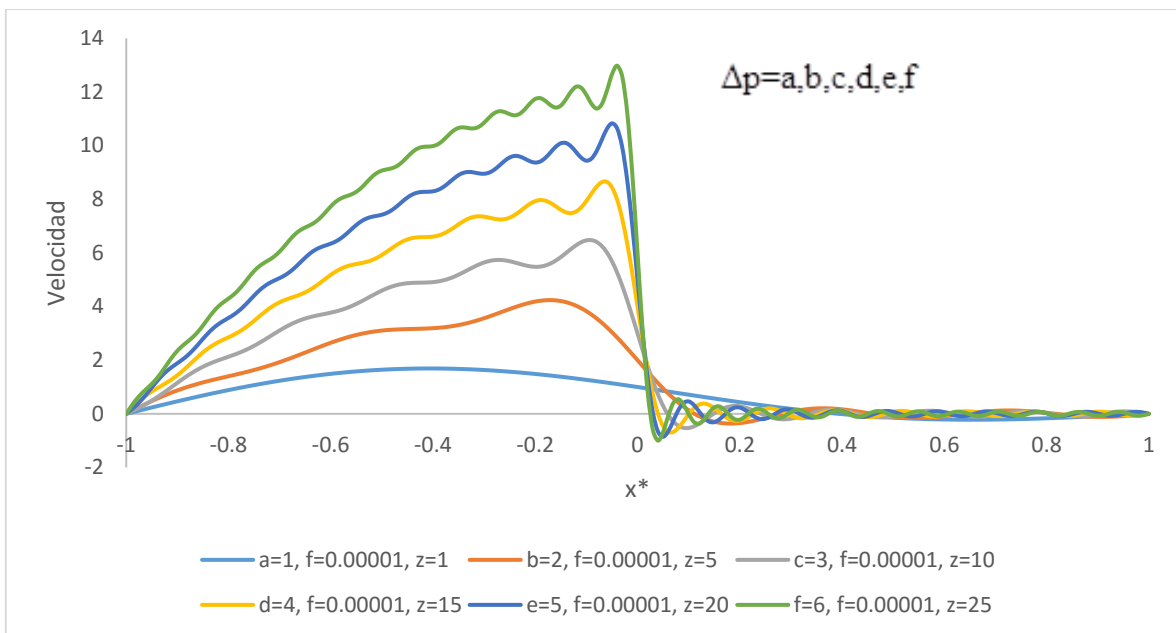


Figura 19 Muestra los perfiles de velocidad con diferentes cantidades de términos usados de la serie de Fourier y variando las velocidades máximas.

En la Figs. 18 y 19 Se observa el cambio de los diferentes perfiles de velocidad simulados que conlleva la cantidad de términos usados de la serie de Fourier, es claramente observable que entre menos términos sean usados en la serie la curva tiene un comportamiento casi parabólico. Cuando son usados más términos de la serie la curva tiende a tener un mayor número de oscilaciones tanto en la parte dominada por la función exponencial así como en la parte senoidal. En estas simulaciones solo se usaron hasta 25 términos como máximo debido que al incrementar esta cantidad las ondas oscilatorias ya no son apreciadas. En ambas figuras se mantuvo un tiempo difusivo adimensional constante con el fin de poder apreciar el cambio que es provocado solo por la cantidad de términos usados.

Perfiles de esfuerzo sin campo eléctrico.

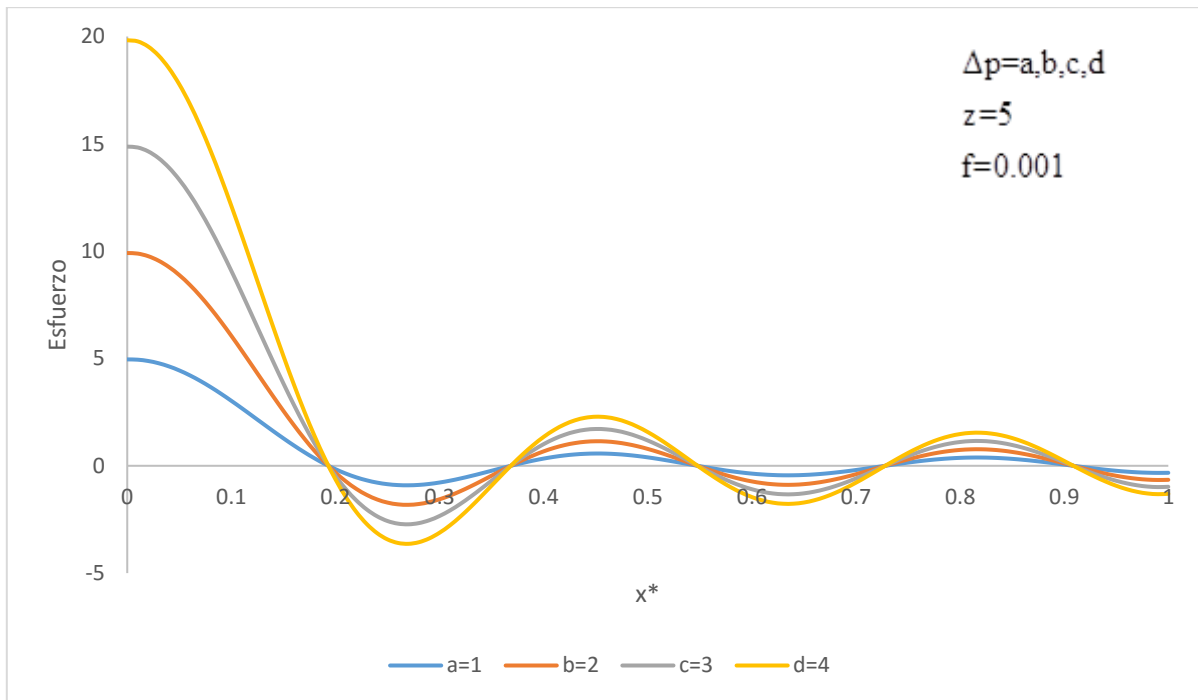


Figura 20 Muestra el esfuerzo cortante en la coordenada axial x^*

En la Fig. 20 es ilustrado el esfuerzo cortante contra la coordenada axial x^* , en función del tiempo difusivo y la cantidad de términos usados de la serie. En esta grafica es comparado el esfuerzo cortante con un tiempo de proceso pequeño, en el cual se observa que es el fuerzo es mayor en el centro de las placas. Cuando el tiempo difusivo se incrementa los perfiles de esfuerzo llegan a ser las rectas clásicas mostradas en la literatura para los fluidos newtonianos, en donde, el esfuerzo máximo se presenta en la pared, mientras que en el centro el esfuerzo es mínimo.

Perfiles de velocidad con campo eléctrico.

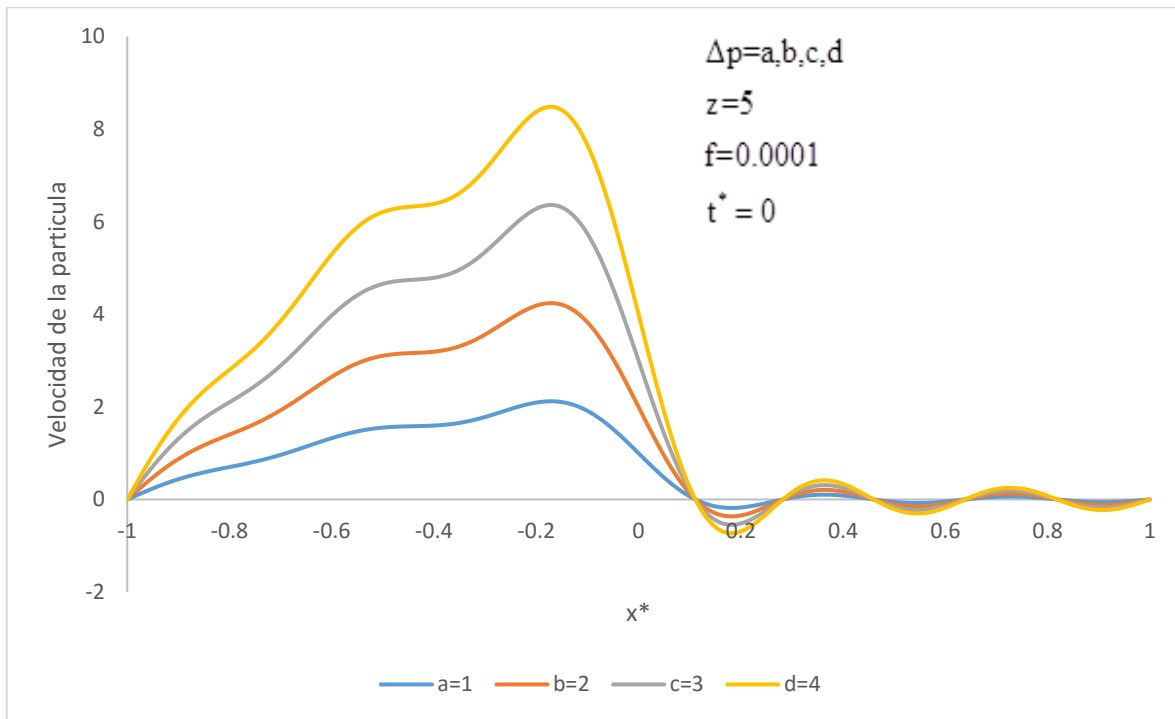


Figura 21 Ilustra los perfiles de velocidad con un tiempo característico igual a 0.

En la Fig. 21 se observan los perfiles de velocidad contra la coordenada axial x^* , en función del tiempo característico y el tiempo de difusión y la cantidad de términos usados en la serie de Fourier. Se mantuvieron fijos el tiempo de proceso y el característico y se fue variando el espacio entre placas. En esta grafica se le dio un valor de cero al tiempo característico, por lo cual, en esta simulación no hay contribución del campo eléctrico con lo que la gráfica es similar a la Fig 13 en donde solo depende de la cantidad de términos usados y del tiempo difusivo.

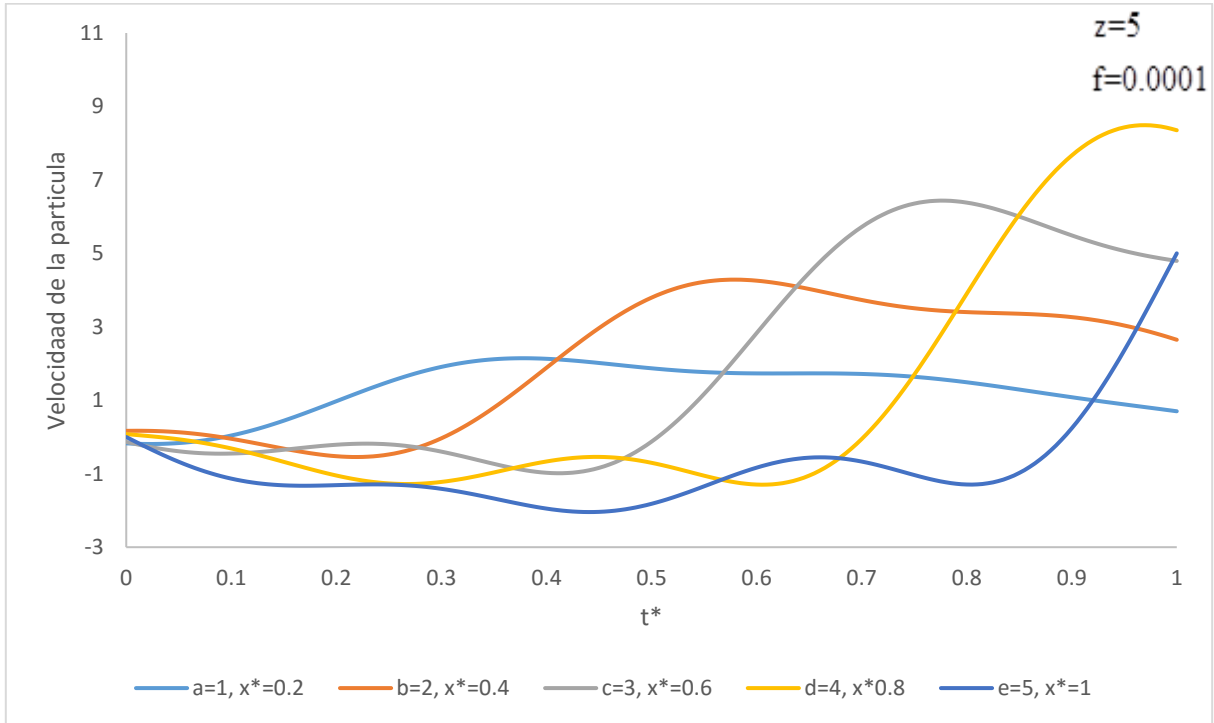


Figura 22 Muestra el perfil de velocidad contra la evolución del tiempo característico.

En la Fig. 22 Se observa el perfil de velocidades vs el tiempo característico, que está en función del tiempo de proceso y de la cantidad de términos. Se graficaron cinco diferentes curvas asociadas al gradiente de presión diferentes y así mismo con diferente posición que se extienden de la mitad del canal hasta la placa superior. El efecto que tiene la velocidad en cada caso es un efecto oscilatorio de velocidades negativas hasta positivas hasta un valor aproximado de $t^* = 0.6$ en el cual la oscilación es menor para dar lugar a curvas parabólicas.

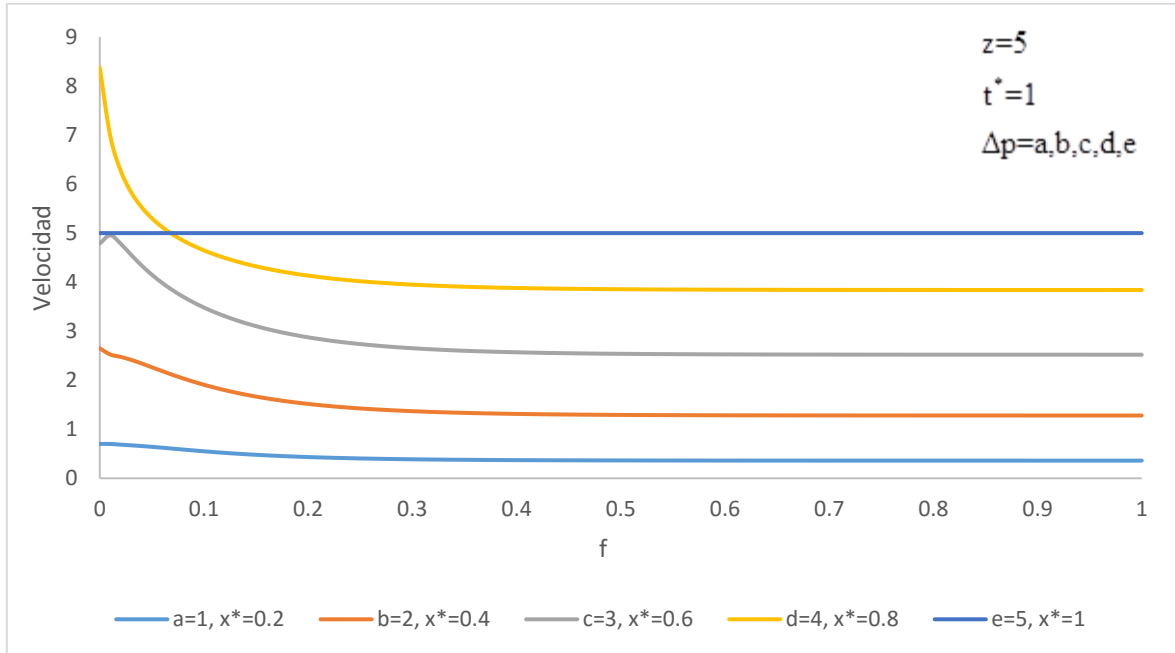


Figura 23 Muestra los perfiles de velocidad en diferentes posiciones en las placas.

En la Fig. 23 Se ilustran los perfiles de velocidad respecto al tiempo difusivo en función del tiempo característico y la cantidad de términos usados. En esta grafica son apreciables cinco simulaciones con diferentes gradientes de presión y en cada una están situadas en diferentes posiciones espaciales a lo ancho de la apertura de las placas.

En la simulación es observable que para tiempos difusivos, los cuales relacionan los efectos asociados a la transferencia de momento, son bajos el efecto en la velocidad es decreciente hasta un valor aproximado de 0.3 en donde la velocidad llega a un estado constante, en otras palabras para $T > 0.3$ los perfiles de velocidad llegan a ser los representados en el estado estacionario, en donde solo los efectos del tiempo característico afectan el proceso.

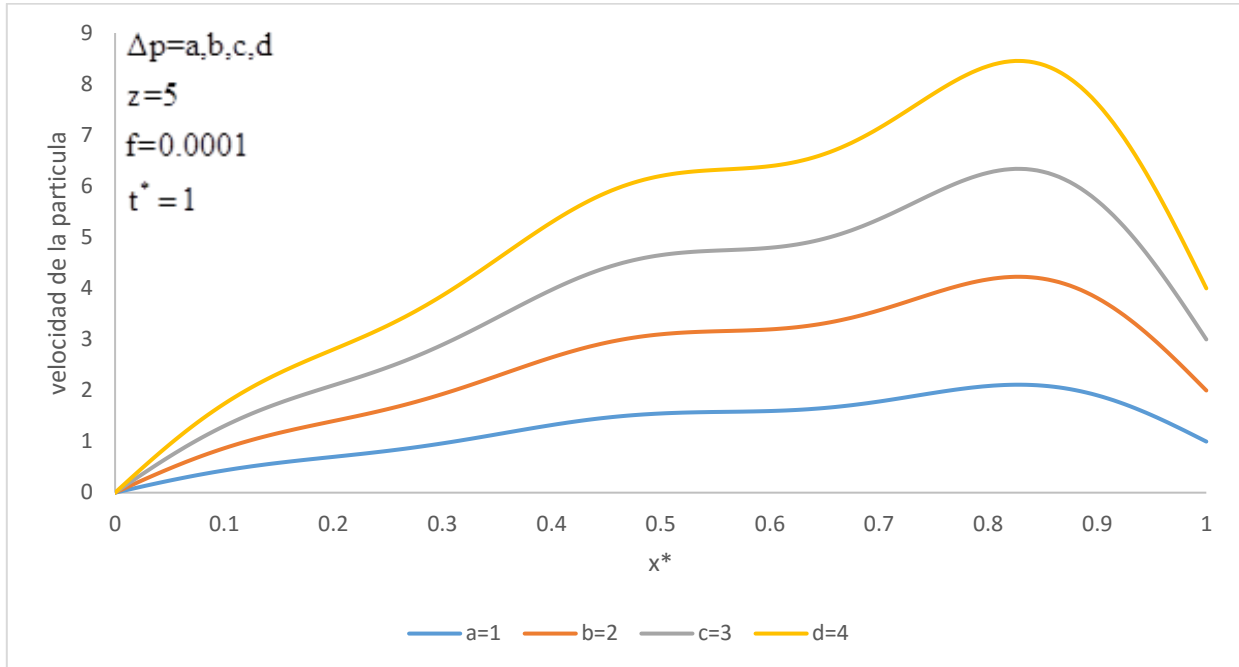


Figura 24 Muestra perfiles de velocidad con respecto en la coordenada axial x^* con campo eléctrico

En la Fig. 24 Son simulados los perfiles de velocidad contra la coordenada axial x^* , en función del tiempo de proceso así como el tiempo característico y la cantidad de términos de la serie de Fourier, cada curva tiene un gradiente de presión diferente. En la gráfica se observa el efecto que tiene el campo eléctrico al ser inducido en la placa inferior, es notorio que para tiempos bajos de proceso el perfil se modifica a comparación de las gráficas en estado estacionario.

Perfiles de esfuerzo con campo eléctrico.

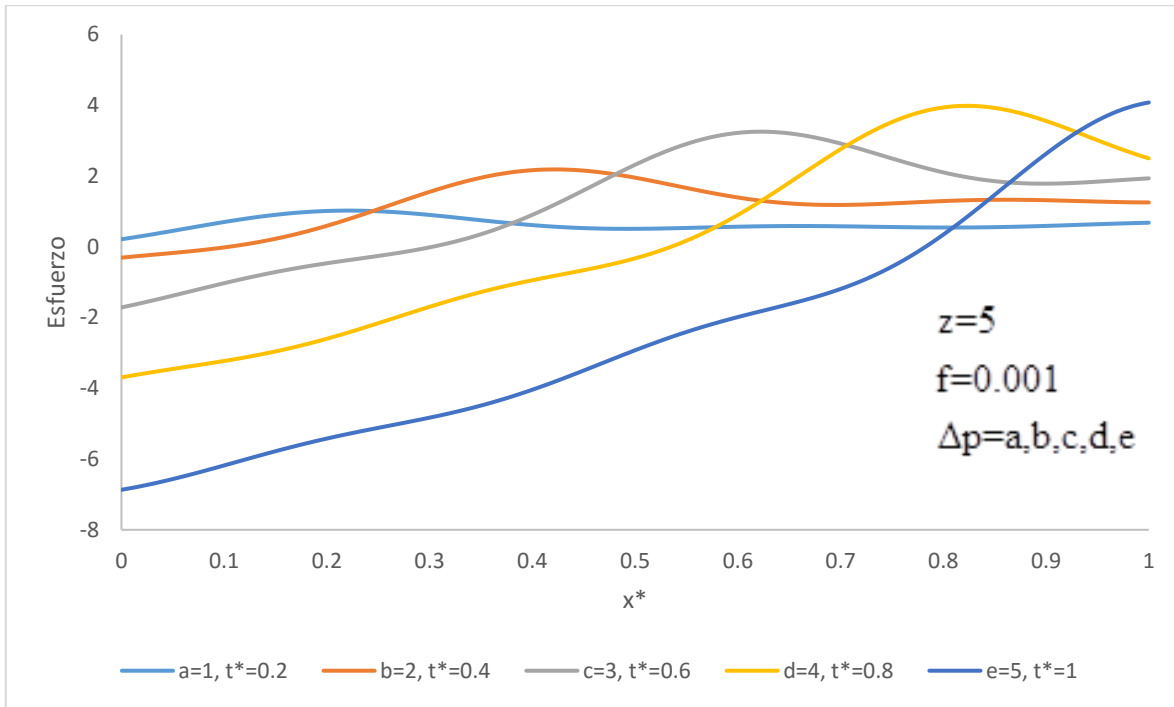


Figura 25 Muestra los perfiles del esfuerzo con respecto a la coordenada axial.

En la Fig. 25 son ilustrados los perfiles de esfuerzos en diferentes posiciones de la coordenada axial en función de los términos usados en la serie de Fourier y con un tiempo difusivo fijo. Son simulados diferentes esfuerzos con diferentes tiempos característicos. Se pueden apreciar un comportamiento casi lineal y un comportamiento parabólico casi en las fronteras de las placas. El esfuerzo se incrementa conforme el fluido está cerca de las paredes del sistema, así como cuando el fluido se aproxima al centro de las placas el esfuerzo es menor.

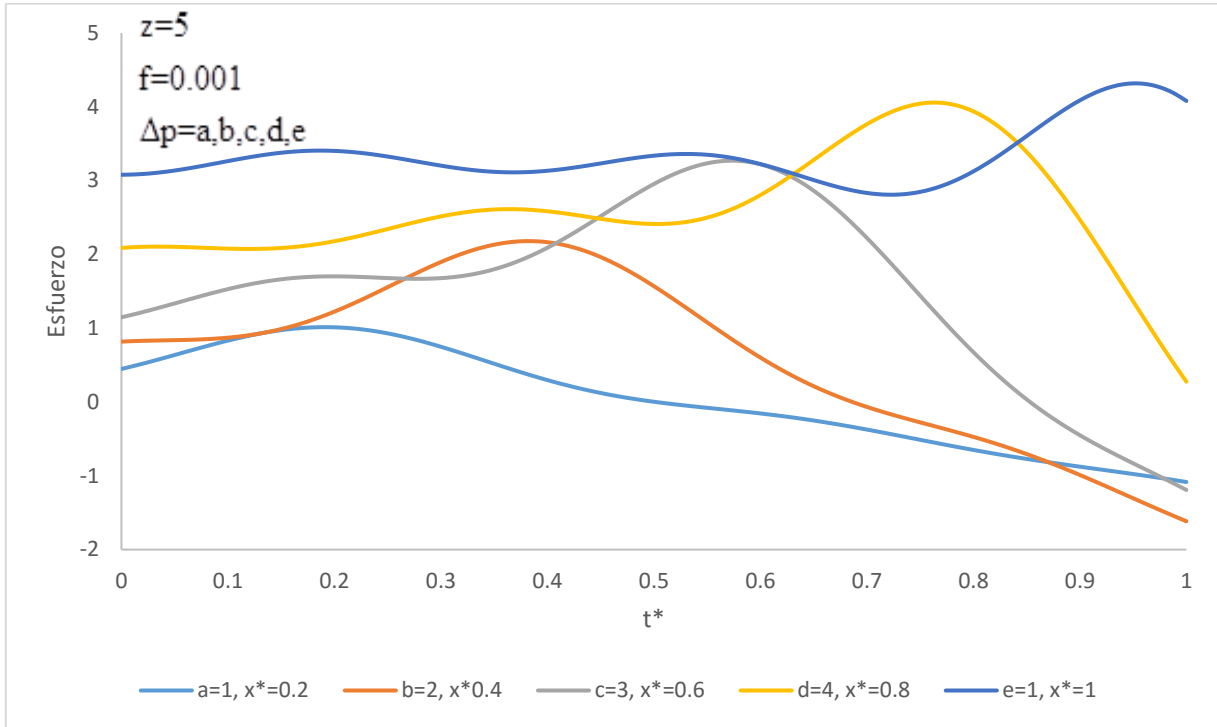


Figura 26 Muestra los perfiles de esfuerzo vs el tiempo característico.

En la Fig. 26 se observan los perfiles de esfuerzo cortante contra el tiempo característico del sistema en función del tiempo difusivo y la cantidad de términos usados en la serie de Fourier.

En las simulaciones mostradas se observa que a tiempos característicos bajos la influencia del campo no es muy fuerte, evidentemente cuando $t^*=0$ no hay influencia de dicho campo, en cuanto el tiempo empieza a evolucionar es observable la acción del campo. También se muestra como es la influencia del campo en las posiciones específicas que son simuladas, para posiciones pequeñas, es decir cuando la posición está cercana cero, es campo eléctrico tiene mayor influencia en el esfuerzo haciendo que este disminuya. En cuanto al tiempo difusivo cuando este incrementa los perfiles de esfuerzo llegarán a tener la forma de los perfiles en el caso estacionario. El tiempo difusivo solo tiene presencia en intervalos cortos que oscilan entre 0 y 1.

CAPÍTULO VIII

ANÁLISIS DE RESULTADOS

8.1 Análisis de resultados

En esta sección se analizan los resultados de las simulaciones computacionales del separador electrostático de polvo, además se compararon dos sistemas en estado estacionario y dos sistemas en estado no estacionario. El primer sistema estudiado en estado estacionario i) consta de placas paralelas a través de las cuales fluye un fluido newtoniano y el segundo sistema en estado estacionario ii) consta de dos placas paralelas a través de las cuales pasa un fluido newtoniano pero a diferencia del sistema anterior este tiene la influencia de un campo eléctrico de la placa inferior a la superior por efecto de una diferencial de potencial aplicada en la dirección ortogonal, i.e. la dirección del tensor gradiente de velocidad. El segundo sistema es el mismo pero se incorpora la variable temporal t , i.e., el sistema se encuentra en estado no estacionario. A partir de la ecuación de Navier-Stokes se obtiene un balance entre los mecanismos viscosos y de superficie asociados al gradiente de presión y al campo eléctrico inducido en el sistema. A partir de esto, se calculan los perfiles de velocidad, flujo volumétrico, másico y la longitud mínima del separador para depositar una partícula cargada del bulto del líquido a la placa inferior. En el caso estacionario, en todos los casos las expresiones son analíticas lo que no sucede en el caso transitorio. Por una parte la longitud mínima asociada con el sistema físico, depende de la masa, la carga de la partícula que es arrastrada por el campo eléctrico, la intensidad de campo eléctrico, la diferencia de presiones y de sus propiedades geométricas en el medio. Por otra parte en el caso no estacionario, se incorpora al sistema los efectos inerciales de la ecuación de Navier-Stokes. Aplicando el método de separación de variables y el formalismo de Fourier, se obtiene expresiones cerradas para la velocidad, esfuerzo cortante, flujo volumétrico y la longitud del sistema permiten estudiar el inicio de flujo en estos sistemas.

8.2 CONCLUSIONES

En este trabajo se analiza un fluido en este caso aire el cual trae en su seno una partícula esférica el cual pasa a través de un sistema de dos placas paralelas, en la placa inferior tiene la inducción de un campo eléctrico el cual separara la partícula atrayéndola hacia la placa inferior, el sistema tiene un separación entre placas $x = 2 B$ y una longitud de placas $z = L$. El proceso es isotérmico y el fluido de estudio es aire con una partícula esférica. El problema se trabajó en dos sistemas diferentes en el cual uno consistía en el sistema sin campo eléctrico y el otro sistema tenía la influencia de campo eléctrico, también estos dos sistemas se estudiaron el estado estacionario y no estacionario. El fluido es deformado irreversiblemente por un gradiente de presión y un campo eléctrico. A partir del balance momento se obtuvieron las variables dinámicas del sistema como son: la velocidad que se pudo observar que al inducir un campo eléctrico su comportamiento cambia aunque sigue siendo parabólico, donde se observa que al estar en contacto de la pared su velocidad es mínima mientras que cuando se aproxima al centro del fluido su velocidad es máxima, caso que en la partícula esférica si cambia su trayectoria creando un perfil parabólico que depende de su posición en el sistema. El esfuerzo cortante donde se observa que el fluido al estar en contacto con la pared el esfuerzo es máximo y cuando lejos de la pared el esfuerzo es mínimo, en cuanto al tener el efecto del campo eléctrico se pudo observar que el esfuerzo cambia en dirección contraria al flujo. El flujo volumétrico se puede considerar como una constante ya que depende de la configuración geométrica del sistema y del gradiente de presión que son proporcionales nótese, que el flujo volumétrico no será afectado por la partícula esférica. Flujo másico al igual que en el caso del flujo volumétrico no será afectado al retirar la partícula, debido a que la partícula no contribuye en gran medida de la masa del sistema.

A partir de la ecuación de velocidad se pudo deducir la ecuación que permitirá obtener la longitud mínima del separador, de acuerdo con los máximos y mínimos de la función, para que la partícula pase de la placa superior a la inferior debido a la inducción del campo eléctrico y de acuerdo a las propiedades materiales del sistema, de la partícula y de las dos fuerzas motrices. Al igual se comparó como cambia la longitud en el caso de un sistema en estado estacionario así como en el estado no estacionario debido a que la velocidad se ve afectada al evolucionar en el tiempo.

Las ecuaciones que se utilizaron fueron necesarias para obtener velocidad axial, esfuerzo cortante, flujo másico, flujo volumétrico así como la longitud del separador.

En el caso cuando el sistema está en estado transitorio también se calculó el perfil de velocidades así como el esfuerzo cortante, flujo másico, flujo volumétrico y se obtuvo la ecuación que al resolverla por métodos numéricos se obtendría la longitud que podría tener el separador. En las la graficas se observa el cambio de las variables dinámicas cuando estas dependen del tiempo y la posición, cuando los tiempo del sistema son pequeños se observa el inicio de flujo, el cual va evolucionando, una vez que el tiempo llega a tomar valores grandes se considera como un flujo totalmente desarrollado en el cual las variables dinámicas llegan a estar en estado estacionario en donde estas ya solo dependen de la posición en el sistema.

8.3 TRABAJO FUTURO

8.3.1 Diferentes ecuaciones constitutivas

Una continuación natural de este trabajo, sería simular con diferentes ecuaciones constitutivas que nos arrojen otro tipo de información acerca de la estructura de estos sistemas. En este contexto, se propone modelar las propiedades estructurales con ecuaciones no newtonianas de tipo: (i) viscoso. (i) Viscoelásticas lineales, y (iii) Viscoelásticas no lineales. En este contexto, se puede estudiar el flujo, reología y transferencia de momento a través de ecuaciones de tipo cinético-estructurales como son: (i) Bautista Manero Puig,(ii) Phan-Thien y (ii) Giesekus ´por citar algunas. Por otra parte, se podría estudiar la dinámica lineal y no lineal de diferentes sistemas complejos con el fin de obtener datos reométricos que puedan ser alimentados a los modelos teóricos, en este contexto se proponen pruebas con diferentes geometrías y en estado estacionario y no estacionario, como son:

- Prueba de flujo
- Flujo oscilatorio lineal y no lineal
- Relajación de esfuerzos.
- Pruebas de tixotropía con diferentes rampas de flujos.

8.3.2 Mecanismos.

Una de las continuaciones naturales de este trabajo es la incorporación de nuevos mecanismos que permitan clarificar las propiedades de flujo. En este punto, se recomienda incorporar los efectos inerciales asociados a la ecuación de transferencia de momento con el fin de analizar los diferentes regímenes de flujo. Por otra parte, se puede extender la ecuación de momento a través de la incorporación de otro tipo de mecanismos como son:

- Fuerzas magnéticas
- Fuerzas electromagnéticas
- Transferencia de masa asociada al corte.
- Liberado de fármacos en la sangre
- Sistemas coloidales
- Electro-osmosis.

8.3.3 Simulaciones numéricas y computacionales.

Se propone emplear diferentes paquetes comerciales con el fin de simular la respuesta dinámica molecular de los sistemas complejos de estudio y las diferentes interacciones moleculares. Es decir las interacciones solvente-partícula y partícula-partícula. En este contexto se recomienda utilizar paquetes comerciales basados en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales, los cuales confluyen las soluciones en términos de elemento finito.

Finalmente este trabajo representa un esfuerzo en la búsqueda constante de sistemas visco-elásticos acoplados con fuerzas eléctricas que permitan obtener información relevante y fundamental en la creación de dispositivos que permitan ser utilizados en el tratamiento y liberación de fármacos en la industria farmacéutica.

8.3.4 Fluidos no newtonianos.

Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son, en general, no-newtonianos. La relación entre esfuerzo cortante y la velocidad de deformación para fluidos no newtonianos no es lineal. Estados fluidos a su vez se diferencian en dependientes e independientes del tiempo.

Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-newtonianos, son aquellos que presentan propiedades aplicaciones tecnológicas y científicas más interesantes. La definición más simple de un fluido newtoniano, es aquella en donde la rapidez de deformación, no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. En este punto, la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme, temperatura, presión, composición, pH y la rapidez con la que se deforma ^{30,31}.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_{\mathbf{D}})\mathbf{D} = \eta(\Pi_{\mathbf{D}})(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T)$$

En la ecuación $\eta(\Pi_{\mathbf{D}})$ es la función viscosidad generalizada, la cual depende del segundo invariante del tensor de rapidez de deformación, de la siguiente forma:

$$\Pi_{\mathbf{D}} = \sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})}$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Herrera-Valencia EE, Rey AD (2014) Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells, *Phil, Trans R.Soc A* 372: 2013.0369/1/-2013.0369/28
2. Abou-Dakka M, Herrera-Valencia EE, Rey AD (2012) Linear oscillatory dynamics of flexoelectric membranes embedded in viscoelastic media with applications to outer hair cells. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 185-186: 1-17
3. Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N., *Transport Phenomena*, 2^{ed}, 2002
4. F. Calderas, A. Sánchez-Solis, A. Maciel, O. Manero, The transient Flow of the PETPEN-montmorillonite clay nanocomposite. *Macromol. Symp.* (283-284) (2009) 354-360. doi:10.1002/masy.200950942.
5. Nonalaya Soto Carlos Enrique. Precipitador electrostático. Consulta del 23 de Octubre de 2015
<http://www.miliarium.com/prontuario/MedioAmbiente/Atmosfera/PrecipitadorElectrostatico.htm>
6. Turner, J.H., Lawless, P. A., Ymamamoto, T., Coy, D. W., (1999). Precipitadores Electrostáticos, Cap. 3. Consulta 15 de Octubre, 2015.
<http://www3.epa.gov/ttnecat1/dir2/cs6ch3-s.pdf>
7. Afonso A.M, Alves, A.M. Pinho F.T. Analytical solution of mixed electro-osmotic/pressure driven flows of viscoelastic fluids in microchannels. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 159 50-63 (2009).
8. Chakraborty S. Electroosmotically driven capillary transport of typical non-Newtonian biofluids in rectangular microchannels, *Anal. Chim. Acta* 605 (2007) 175-184.
9. Alves M.A., F.T. Pinho, P.J. Oliveira, Study of steady pipe and channel flows of a single-mode Phan Thien-Tanner fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 101 55-76 (2001).
10. Burgreen, D., Nakache, F.R. Electrokinetic flow in ultrafine cylindrical capillary, *J. Phys. Chem.* 68 (1964) 1084-1091.

11. Bruss, H. Theoretical microfluidics, Oxford Master Series in Condensed Matter Physics, Oxford University Press, Oxford, UK, 2008.
12. Arulanandam S., Li D. Liquid transport in rectangular microchannels by electroosmotic pumping, Colloids Surf.A. 161 (2000) 29-102.
13. Yang C., Li D. Electrokinetic effect on pressure-driven liquid flows in rectangular microchannels, J. Colloid interface Sci.194 (1997) 95-107.
14. Wang C., Wong T.N., Yang, C., Ooi K.T. Characterization of electro-osmotic flow in rectangular microchannels, Int. J. Heat Mass Transf. 50 (2007) 3115-3121.
15. Jendrejack R. M., Dimalanta, E.T. Schwartz, D.C., Graham, M.D., de Pablo, J.J. DNA dynamics in a microchannel, Phys. Rev. Lett.91 (2003) 038102.
16. Bird R. B., Armstrong R.C., Hassager O. Dynamics of polymeric liquids, vol 1. Fluid Mechanics. Wiley, New York (1977).
17. Thurston G.B., Greiling H. Viscoelastic properties of pathological synovial fluids, for a wide range of oscillatory shear and frequencies, Rheol. Acta 17 (1978) 433-445.
18. Fam H., Bryant J.T., Konopoulou M. Rheological properties of synovial fluids, Biorheology 44 (2007) 59-74.
19. Das S., Chakraborty S. Analytical solutions for velocity, temperature and concentration distribution in electroosmotic microchannel flows of a non-Newtonian bio-fluid, Anal. Chim. Acta 559 (2006) 15-24.
20. Cruz, D.O.A., Pinho, P.J. Kkewed Poiseuille-Couette flows of SPTT fluid in concentric annuli and channels, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 121 (2004) 1-14.
21. Cruz D.O.A., Pinho, F.T. Oliveira, P.J. Analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a Newtonian solvent contribution, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 132 (2005) 28-35.
22. Fredrickson AG Principles and Applications of Rheology. Prentice-Hall, Anglewood Cliffs (1964)

23. Lamb H, Hydrodynamic, 6th edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1932
24. Fyrrillas, M.M. Georgiou, G.C., Vlassopoulos, D. Time dependent plane Poiseuille flow of a Johnson-Segalman fluid, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 82 (1999) 105-123.
25. Oliveira P.J., Pinho, F.T. Analytical solution for fully developed channel and pipe flow of Phan-Thien-Tanner fluids, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 387 (1999) 271-280
26. Pinho, F.T. Oliveira, P.J. Axial annular flow of a nonlinear viscoelastic fluid-an analytical solution, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 93 (2000) 325-337
27. Phan-Thien N, R. I. Tanner, New constitutive equation derived from network theory, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2 (1977) 353-365
28. Phan-Thien, N. A non-linear network viscoelastic model, J. Rheol. 22 (1978) 259-283
29. Dutta P., Beskok A. Analytical solution of combined electroosmotic/pressure driven flows in two-dimensional straight channel: finite Debye layer effects, Anal. Chem. 73 (2001) 1979-1986
30. Bird R. B., Dotson, P.J. Johnson, N.L. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 101 (2001) 55-76.
31. Marsden, J. E., Tromba, A. J. Cálculo Vectorial, 5^a ed. 2007.
32. Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N., Transport Phenomena, 2^{ed}, 2002.
33. Barnes, H. A., An introduction to rheology, 5^a 1997
34. H. Kimura. K. Aikawa. Y. Masabuchi. J. Kimoto and K. Koyama. Proc 7th Int. Conf. on ER Fluids and MR suspensions. Editado por R. Tao (World Scientific, Singapore, 2000).
35. H. Block and P. Rattray. Progress in Electrorheology. Editado por K.O. Havela y F. E. Filisko, 1994.

36. K. M. Blackwood, H. Block, P. Rattray, G. Tsangaris and D. N. Vorobiev, Proc. 4th Int. Conf. on ER fluids. Editado por R. Tao y G. D. Roy (1994).
37. Van Schaftingen, J.J. Crochet, M.J. Analytical and numerical of the Poiseuille flow of a Johnson-Segalman fluid, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 18 (1985) 335-351.
38. F. Donado. M. E. Mendoza, V. Dossetti, E. Lopez-Cruz, and J. L. Carrillo. Ferroelectrics. 270, 93 (2002).
39. J. Liu, E. M. Lawrence, M. L. Ivey, G. A. Flores, J. Bibette, and J. Richard, Proc. 4th Int. Conf. on ER Fluids. Editado por R. Tao y G. D. Roy. 1994
40. J. Lin, T. Mou, J. Pousset, Progress in electrorheology. Editado por K. O. Havelka y F. E. Filisko (1994).
41. Rice C.L., Whitehead, R. Electrokinetic flow in a narrow cylindrical capillary, J. Phys. Chem. 69 (1965) 4017-4024.
42. Yang C., Li D. Electrokinetic effect on pressure-driven liquid flows in rectangular microchannels, J. Colloid interface Sci.194 (1997) 95-107.
43. Berli C.L.A., Olivares M.L. Electrokinetic flow of non-Newtonian fluids in microchannels, J. Colloid Interface Sci. 320 (2008) 582-589.
44. Chakkraborty, S. Dynamics of capillary of blood into a microfluidic channel, Lab-on-a-chip 5, (2005) 421-430.
45. Levine S., Marriot J.R., Neale G., Epstein N. Theory of electrokinetic flow in fine cylindrical capillaries at high zeta potentials, J. Colloid Interface Sci. 52 (1975) 136.
46. Mala G.M., Li D, Dale J. D. Heat transfer and fluid flow in microchannels, Int. J. Heat Mass Transfer 40 (1997) 3079-3088.
47. Wang C., Wong T.N., Yang, C., Ooi K.T. Chracterization of electro-osmotic flow in rectangular microchannels, Int. J. Heat Mass Transf. 50 (2007) 3115-3121.