UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

UN ESTUDIO DE LAS OPERACIONES Y RELACIONES ENTRE LAS GRANDES RETÍCULAS ASOCIADAS A UN ANILLO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

MARTHA LIZBETH SHAID SANDOVAL MIRANDA

DIRECTOR DE TESIS

DR. HUGO ALBERTO RINCON MEJIA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. JOSÉ RÍOS MONTES
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

DR. ALEJANDRO ALVARADO GARCIA,
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. 2016

A Minerva, Martha
y Jansuo

Agradecimientos

El presente trabajo representa el fin de un ciclo y el inicio de otra etapa en mi vida. Estos diez años en la Facultad de Ciencias de la UNAM, me dieron la oportunidad de conocer muchas personas que de distintas maneras me dieron importantes lecciones en la vida, profesores maravillosos y amigos grandiosos. Si bien agradecerle a todos es practicamente imposible, quiero mostrar mis agradecimientos en especial:

A mi familia por estar siempre conmigo, brindarme su amor y enseñarme a luchar por mis sueños.

A mi director de tesis, el Dr. Hugo A. Rincón Mejía, por darme la oportunidad de ser su alumna de doctorado, dirigir esta tesis y además brindarme su amistad. Gracias al tiempo que me ha dedicado este trabajo ha sido posible.

A mis amigos Angel, Mauricio, Lorena, Rolando y Valente, por permitirme conocerlos, compartir tiempo de estudio y aprender de su pasión por las matemáticas y la vida.

Al comité tutoral y sinodales, los doctores Alejandro Alvarado, Diana Avella, Jaime Castro, Hugo Rincón, José Ríos y Rafael Villarreal, por haber aceptado ser los revisores de esta tesis y por las valiosas sugerencias y correcciones que hicieron posible el mejoramiento de este trabajo. Deseo agradecierle al Dr. José Ríos Montes por el apoyo que me ha brindado durante mis estudios de doctorado.

A todos los que conforman el grupo del seminario de álgebra de teoría de anillos y módulos, por permitirme compartir con ellos distintas pláticas tanto de álgebra como de la vida misma; en especial a la Dra. María José Arroyo, por su apoyo y motivación.

Al Dr. Sergio López-Permouth que me permitió visitarlo en el *Ohio University Center of Ring Theory and its Applications* para realizar una estancia corta durante la cual conviví con él y sus estudiantes.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por la beca de doctorado que hizo posible la realización de estos estudios de posgrado; al Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, por haberme brindado el espacio de estudio y los recursos necesarios para mi desarrollo profesional.

A la Fundación Sofía Kovalevskaya y la Sociedad Matemática Mexicana por la beca que me brindaron para realizar una estancia corta en Ohio University, así como la conclusión e impresión de este trabajo.

Índice general

Introducción

De acuerdo con [38], una gran retícula es una clase propia $\mathcal{C}$ con un orden parcial $\leq$ tal que $\mathcal{C}$ con este orden es una retícula, salvo por el hecho de que no es un conjunto.

Desde que Garry Birkhoff comenzó en 1930 el desarrollo general de la teoría de retículas, ésta ha demostrado tener una gran importancia para el desarrollo de muchas disciplinas de las matemáticas.

En los últimos 20 años, las grandes retículas han sido consideradas para su estudio. Por ejemplo, en [30] los autores estudian la gran retícula de clases abiertas de módulos, mostrando que en efecto no es un conjunto; y en [28], los autores consideran la gran retícula de clases de Serre.

Por otro lado, en la década de los años sesenta, J. M. Maranda introdujo los conceptos de prerradical y radical; y en esta misma década, S. E. Dickson comenzó el estudio de las teorías de torsión en una categoría abeliana, demostrando que este concepto es equivalente a la noción de radical idempotente en el sentido de Maranda y estableció una correspondencia biyectiva entre las teorías de torsión hereditarias y los radicales exactos izquierdos.

En la década de 1980, F. Raggi y J. Ríos realizaron estudios de la retícula de teorías de torsión. Posteriormente, en [25], R. Fernández-Alonso, F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón y C. Signoret iniciaron el estudio de la gran retícula de prerradicales, denotada $\mathrm{R}\text{-}\mathrm{pr}$; y continuaron el estudio de ésta, por ejemplo en [26] y [27]. Así surgieron varios artículos relacionados con $\mathrm{R}\text{-}\mathrm{pr}$, tales como [31] y [32], donde los autores introdujeron los conceptos de módulo inyectivo principal y módulo principal, respectivamente. También dieron condiciones para que $\mathrm{R}\text{-}\mathrm{pr}$ sea un conjunto.

En el presente trabajo, continuamos con el estudio de la gran retícula de prerradicales y de su relación con otras grandes retículas asociadas a un anillo.

En la primera parte de mi tesis, desarrollaremos la teoría básica de preradicales, de algunas de sus propiedades y de los prerradicales alfa y omega, que serán de gran ayuda durante los capítulos posteriores; además del material necesario y los preliminares para que de esta forma la tesis sea lo más autocontenida posible.

Posteriormente, mencionamos que $\mathrm{R}\text{-}\mathrm{pr}$ es un ejemplo de *casi-cuantal*, concepto introducido en [21], un trabajo realizado en conjunto con M. Medina y A. Zaldivar; y que ya fue publicado.

Continuando con $\mathrm{R}\text{-}\mathrm{pr}$, estudiamos aspectos relacionados con seudocomplementos y suplementos para prerradicales. Además, consideramos prerradicales esenciales y superfluos. Caracterizamos la situación en la que todos los prerradicales distintos de cero son esenciales, así como también la situación en la que todos los prerradicales propios son superfluos. Estos resultados se encuentran publicados en [34], en conjunto con H. Rincón.

Finalmente, en la última parte del texto, estudiamos condiciones de compacidad y co-compacidad en R-pr.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo del texto, R denotará un anillo asociativo con 1 y $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ denotará a la categoría de $\mathrm{R}-$módulos izquierdos unitarios. Para cada $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$, $N \leq M$ significa que N es un submódulo de M.

Para temas relacionados con la teoría de módulos, el lector puede consultar [4], [41] o bien [19].

Enseguida recordamos algunas nociones de clases de módulos, de retículas de éstas; y de prerradicales en $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ (en algunos casos en $\sigma[M]$).

1.1 Clases de módulos.

En esta sección, veremos algunas propiedades sobre clases de módulos.

Definición 1.1.1 *Sea $\mathcal{C}$ una clase de objetos en $\mathrm{Mod}(R)$. Diremos que:*

(a) *$\mathcal{C}$ es* **abstracta** *si es cerrada bajo copias isomorfas. Esto es, si $N \cong K$ y $K \in \mathcal{C}$, entonces $N \in \mathcal{C}$.*

(b) *$\mathcal{C}$ es* **hereditaria** *si es abstracta y cerrada bajo submódulos.*

(c) *$\mathcal{C}$ es* **cohereditaria** *si es cerrada bajo imágenes de morfismos.*

(d) *$\mathcal{C}$ es* **estable** *si cada $M \in \mathcal{C}$ tiene una presentación invectiva en $\mathcal{C}$, esto es, hay un monomorfismo $\alpha : M \to Q$ con $Q \in \mathcal{C}$ inyectivo.*

(e) *$\mathcal{C}$ es* **coestable** *si cada $M \in \mathcal{C}$ tiene una presentación proyectiva en $\mathcal{C}$, esto es, hay un epimorfismo $\beta : P \to M$ con $P \in \mathcal{C}$ proyectivo.*

(f) *$\mathcal{C}$ es* **cerrada por extensiones** *si para cada sucesión exacta corta $0 \to L \to M \to N \to 0$, con $L, N \in \mathcal{C}$ se tiene que $M \in \mathcal{C}$.*

(g) *$\mathcal{C}$ es de* **pretorsión** *si es cerrada bajo coproductos e imágenes de morfismos.*

(h) *$\mathcal{C}$ es* **libre de pretorsión** *si es hereditaria y cerrada bajo productos directos.*

(i) *$\mathcal{C}$ es de* **torsión** *si es de pretorsión y cerrada bajo extensiones.*

(j) *$\mathcal{C}$ es* **libre de torsión** *si es libre de pretorsión y cerrada bajo extensiones.*

(k) *$\mathcal{C}$ es una clase* **TTF** *si es de torsión y libre de torsión.*

(l) *Decimos que $\mathcal{C}$ es una clase* **abierta** *en $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ si $\mathcal{C}$ es hereditaria y cohereditaria.*

1.1.1 Monomorfismos esenciales, clases estables y cápsulas inyectivas.

Definición 1.1.2 *Sea $\mathcal{C}$ una clase de módulos en $\mathrm{Mod}(R)$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una clase* **estable** *si para cada $M \in \mathcal{C}$, existe un monomorfismo $\alpha : M \to E$, con $E \in \mathcal{C}$ un módulo inyectivo.*

Definición 1.1.3 *Sea $f : M \to N$ un monomorfismo en $\mathrm{R{-}Mod}$. Decimos que f es un monomorfismo* **esencial** *si para cada morfismo $h : N \to L$ tal que hf es un monomorfismo, entonces h es monomorfismo. Equivalentemente, si f es un monomorfismo y $f(M)$ es un submódulo esencial de N.*

Recordemos que para cada módulo M, existe un monomorfismo esencial $f : M \to E$ con E inyectivo, esto se llama una **cápsula inyectiva de** M. A la elección de una cápsula inyectiva de M, la denotaremos $\varepsilon_M : M \to E(M)$.

Observación 1.1.4 *(a) Sean $f : M \to N$ y $g : N \to L$ monomorfismos. Entonces, $gf : M \to L$ es un monomorfismo esencial si y sólo si f y g son monomorfismos esenciales.*

(b) Considere el siguiente diagrama conmutativo D :

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"'] & N \arrow[d, "f"] \\ L \arrow[r, "\alpha"] & M. \end{tikzcd}$$

Si D es un producto fibrado con f un monomorfismo esencial y α un monomorfismo, entonces f' es un monomorfismo esencial.

(c) Sea $N \leq M$. N es un submódulo esencial en M (denotado $N \leq_e M$) si y sólo si el morfismo inclusión de N en M,$\iota_N : N \to M$ es un monomorfismo esencial.

Observación 1.1.5 *Nótese que las siguientes condiciones son equivalentes para una clase $\mathcal{C}$ abstracta.*

(a) *($M \in \mathcal{C}$ y $\alpha : M \to N$ monomorfismo esencial) $\implies$ $N \in \mathcal{C}$.*

(b) *Para cada $N \in \mathcal{C}$, si $N \leq_e M$, entonces $M \in \mathcal{C}$. (En este caso, decimos que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo* **extensiones esenciales.***)*

Observación 1.1.6 *Sea $\mathcal{C}$ una clase de $\mathrm{R}-$módulos. Considere las siguientes condiciones.*

(a) *$\mathcal{C}$ es cerrado bajo extensiones esenciales*

(b) *$\mathcal{C}$ es cerrado bajo cápsulas inyectivas.*

La condición (a) implica (b). Para clases hereditarias las dos condiciones son equivalentes.

<u>Demostración.</u> (a) $\implies$ (b) Nótese que una cápsula inyectiva es una extensión esencial.

Ahora, supongamos que $\mathcal{C}$ es una clase hereditaria. Para ver la equivalencia de las condiciones (a) y (b), sólo nos resta verificar (b) $\Longrightarrow$ (a).

Sea $M \in \mathcal{C}$ y $\alpha : M \to N$ un monomorfismo esencial. Veamos que $N \in \mathcal{C}$. Consideremos $\varepsilon_N : N \to E(N)$ la cápsula inyectiva de N. Entonces $\varepsilon_N\alpha : M \to E(N)$ es un monomorfismo esencial con $E(N)$ inyectivo. Esto es, $\varepsilon_N\alpha : M \to E(N)$ es una cápsula inyectiva para M, y dado que éstas son únicas salvo isomorfismos, existe $h : E(M) \to E(N)$ isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varepsilon_M"'] & N \arrow[d, "\varepsilon_N"'] \\ E(M) \arrow[r, "\cong", "h"'] & E(N) \end{tikzcd}$$

Como $M \in \mathcal{C}$, por (b) se tiene que $E(M) \in \mathcal{C}$. Luego, dado que $\mathcal{C}$ es abstracta y $E(M) \cong E(N)$, concluimos que $E(N) \in \mathcal{C}$. Finalmente, como $\mathcal{C}$ es hereditaria y ε_N es un monomorfismo, podemos concluir que $N \in \mathcal{C}$.

□

Proposición 1.1.7 *Sea $\mathcal{C}$ una clase de módulos en $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ y considere las siguientes condiciones:*

(a) *$\mathcal{C}$ es cerrado bajo cápsulas inyectivas,*

(b) *$\mathcal{C}$ es una clase estable.*

La condición (a) siempre implica (b). Si además $\mathcal{C}$ es una clase hereditarias, las condiciones (a) y (b) son equivalentes.

1.1.2 Epimorfismos superfluos, clases coestables y cubiertas proyectivas.

Definición 1.1.8 *Sea $f : M \to N$ un epimorfismo en $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$. Decimos que f es un epimorfismo* **superfluo** *si para cada morfismo $h : L \to M$ tal que fh es un epimorfismo, entonces h es un epimorfismo. Equivalentemente, si f es un epimorfismo con núcleo superfluo.*

Definición 1.1.9 *Sea $\mathcal{C}$ una clase de módulos en $\mathrm{Mod}(R)$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una clase* **coestable** *si para cada $M \in \mathcal{C}$, existe un epimorfismo $\alpha : P \to M$, con $P \in \mathcal{C}$ un módulo proyectivo.*

Recordemos que si M es un módulo con un epimorfismo superfluo $\nu_M : P \to M$ con P proyectivo, éste es llamado una **cubierta proyectiva de** M. Notemos que no todos los módulos tienen cubierta proyectiva.

Recordemos que en el caso en que cada $\mathrm{R}{-}$módulo izquierdo finitamente generado tenga cubierta proyectiva, se dice que R es un anillo semiperfecto. Por otro lado, si cada $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ tiene cubierta proyectiva, se dice que R es un anillo perfecto izquierdo.

Proposición 1.1.10 *Sean R un anillo perfecto y $\mathcal{C}$ una clase de módulos en $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$. Considere las siguientes condiciones.*

(a) *$\mathcal{C}$ es una cubierta proyectiva.*

(b) *$\mathcal{C}$ es una clase coestable.*

La condición (a) siempre implica (b). Si además $\mathcal{C}$ es una clase cohereditarias, las condiciones (a) y (b) son equivalentes.

Demostración. Es dual a la demostración de la Proposición 1.1.7.

□

1.1.3 $Gen(M)$, $Cog(M)$ y $\sigma[M]$.

La siguiente definición puede ser encontrada en [4, Cap. 2 Secc. 8, pag. 106].

Definición 1.1.11 *Sean $N \in \mathrm{R} - Mod$ y $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{R} - Mod$ una clase de módulos.*

(a) Decimos que N es **generado por** *$\mathcal{C}$, si existe una familia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{C}$ con Λ un conjunto de índices, y un epimorfismo $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\{U_\lambda\} \xrightarrow{f} M \to 0$. En el caso de que Λ sea un conjunto finito, diremos que N está* **finitamente generado por** *$\mathcal{C}$.*

(b) Decimos que N es **cogenerado por** *$\mathcal{C}$, si existe una familia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{C}$ con Λ un conjunto de índices, y un monomorfismo $0 \to M \xrightarrow{f} \prod_{\alpha\in\Lambda}\{U_\lambda\}$. En el caso en que Λ es un conjunto finito, diremos que N está* **finitamente cogenerado por** *$\mathcal{C}$.*

Se denota por $Gen(\mathcal{C})$ a la clase de todos los $\mathrm{R}-$módulos izquierdos que son generados por M; y $Cog(\mathcal{C})$ denota a la clase de todos los $\mathrm{R}-$módulos izquierdos M que son cogenerados por $\mathcal{C}$.

En el caso de que $\mathcal{C}$ conste de un único módulo en la definición anterior, se tiene lo siguiente:

Definición 1.1.12 *Sea $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$.*

*(a) Un $\mathrm{R}-$módulo L es $M-$***generado** *si existen un conjunto X y un epimorfismo $\beta : M^{(X)} \to L$.*

*(b) Un $\mathrm{R}-$módulo L es $M-$***cogenerado** *si existen un conjunto X y un monomorfismo $\beta : L \to M^X$.*

La clase de todos los módulos $M-$generados se denota por $Gen(M)$; y la clase de módulos $M-$cogenerados se denota por $Cog(M)$.

Observación 1.1.13 *Sea $\mathcal{C}$ una clase de $\mathrm{R}-$módulos. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $Gen(\mathcal{C})$ es una clase de pretorsión.

(b) $Cog(\mathcal{C})$ es una clase libre de pretorsión.

Demostración. Ver [4, Cap. 2 Secc. 8, pag. 106].

Definición 1.1.14 *Sea $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$. Un $\mathrm{R}-$módulo N es* **subgenerado** *por M si N es isomorfo a un submódulo de un módulo $M-$generado.*

Se denota por $\sigma[M]$ a la clase de todos los $\mathrm{R}-$modulos subgenerados por M. Un módulo N es llamado un *subgenerador* de $\sigma[M]$ si $\sigma[M] = \sigma[N]$.

Proposición 1.1.15 *Sea $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *$\sigma[M]$ es una clase de pretorsión hereditaria. Mas aún, $\sigma[M]$ es la menor clase hereditaria que contiene a $Gen(M)$.*

(b) *$\sigma[M]$ es una subcategoría plena de $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$. Mas aún, $\sigma[M]$ es una categoría abeliana de Grothendieck.*

(c) *$\sigma[M]$ es cerrada bajo sumas directas, coproductos, núcleos y conúcleos; y el producto de una familia de módulos $\{N_i\}_{i\in I}$ en la categoría $\sigma[M]$ está dada por $\prod_I^M \{N_i\} := Tr(\sigma[M], \prod_I \{N_i\})$.*

Demostración. (a) Se sigue de la definición de $\sigma[M]$; y dada cualquier clase hereditaria $\mathcal{C}$ tal que $Gen(M) \subseteq \mathcal{C}$, se verifica que $\sigma[M] \subseteq \mathcal{C}$. Para los incisos (b) y (c) consultar [41].

$\square$

Observación 1.1.16 *Una clase de $\mathrm{R}-$módulos $\mathcal{C}$ es una clase de pretorsión hereditaria si y sólo si existe $M_{\mathcal{C}} \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ tal que $\mathcal{C} = \sigma[M_{\mathcal{C}}]$.*

Dado un módulo M, a $\sigma[M]$ se le suele llamar clase (o categoría) de **Wisbauer.** En vista de la Observación 1.1.16, a las clases de pretorsión hereditarias también se les suele llamar **clases de Wisbauer**.

Para profundizar en la teoría de módulos en $\sigma[M]$, el lector puede consultar [41]. Notése que para $M = \mathrm{R}$ se satisface que $\sigma[M] = \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$.

1.2 Retículas de clases de módulos

Recordemos que una **retícula** es un conjunto parcialmente ordenado $(\mathscr{L}, \leq)$ tal que para cualesquiera dos elementos $a, b \in \mathscr{L}$, existen $a \wedge b \in \mathscr{L}$ (el ínfimo de a y b) y $a \vee b \in \mathscr{L}$ (el supremo de a y b). En el caso de que cualquier subconjunto $\mathcal{C}$ de una retícula $(\mathscr{L}, \leq)$ tenga un supremo y un ínfimo en $\mathscr{L}$, se dice que $\mathscr{L}$ es una **retícula completa**.

De acuerdo con [38], una gran retícula es una clase propia $\mathcal{C}$ con un orden parcial $\leq$ tal que $\mathcal{C}$ con este orden es una retícula, salvo por el hecho de que no es un conjunto.

En este texto trabajaremos algunas (grandes) retículas.

Para profundizar en el estudio de la Teoría de retículas, el lector puede consultar [8], [16] y [23].

Dada $\mathcal{P}$ una propiedad de cerradura en $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$. Denotaremos por $\mathscr{L}_{\mathcal{P}}$ a todas las clases $\mathcal{C}$ de $\mathrm{R}-$módulos que son cerradas bajo la propiedad $\mathcal{P}$. Esto es,

$$\mathscr{L}_{\mathcal{P}} := \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ es una clase de módulos cerrada bajo la propiedad } \mathcal{C}\}.$$

Símbolo	Denota la propiedad de ser:
$\rightarrowtail$	Hereditaria
$\twoheadrightarrow$	Cohereditaria
E	Cápsulas inyectivas
P	Cubiertas proyectivas
Π	Productos directos
$\oplus$	sumas directas
ext	Extensiones

De acuerdo con la Definición 1.1.1, tenemos la siguiente notación.

Dado el conjunto de estos símbolos $\mathcal{S} = \{\rightarrowtail, \twoheadrightarrow, E, P, \Pi, \oplus, ext\}$, en este texto, consideraremos clases de módulos que satisfacen propiedades de cerradura $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$. En ese caso, $\mathscr{L}_{\mathcal{D}}$ denotará a la clase de clases de módulos que satisfacen las propiedades de cerradura denotadas con los símbolos en $\mathcal{D}$. En el estudio de clases de clases de módulos se ha visto que tienen propiedades retículares y el desarrollo de la teoría en esta línea de investigación ha permitido dar caracterizaciónes de anillos y módulos.

Símbolo	Clase de las clases de módulos	
$\mathscr{L}_{\rightarrowtail}$	hereditarias	
$\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$	cohereditaria	
$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow}$	hereditarias y cohereditarias	(abiertas)
$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\Pi}$	libres de pretorsión	
$\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus}$	de pretorsión	
$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\Pi,\twoheadrightarrow}$	libres de pretorsión cohereditaria	
$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow,\oplus}$	de pretorsión hereditarias	(de Wisbauer o cerradas)
$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\Pi,ext}$	libres de torsión	
$\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$	de torsión	
$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\Pi,\twoheadrightarrow,ext}$	clases libres de torsión cohereditarias	
$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$	de torsión hereditarias	(localizantes)
$\mathscr{L}_E$	cerradas bajo cápsulas inyectivas	
$\mathscr{L}_P$	cerradas bajo cubiertas proyectivas	
$\mathscr{L}_\Pi$	cerradas bajo productos directos	(de Jans o jansianas)
$\mathscr{L}\oplus$	cerradas bajo sumas directas	
$\mathscr{L}_{ext}$	cerradas bajo extensiones	
$\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,\rightarrowtail,ext}$	de Serre	
$\mathrm{R}-nat := \mathscr{L}_{\rightarrowtail,E,\oplus}$	hereditarias,cerradas bajo sumas directas y cápsulas inyectivas	(naturales)

A continuación hacemos mención de la estructuras retícular de algunas de estas clases de clases de módulos.

Proposición 1.2.1 *Las siguientes clases de módulos tienen estructura de gran retícula completa:*

$\mathscr{L}_{\rightarrowtail}$,	$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow}$,	$\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus}$
$\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$,	$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\Pi}$	$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\Pi,\twoheadrightarrow}$

$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow,\oplus}$	$\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$	$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow,\oplus,ext}$
$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\Pi,ext}$	$\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\Pi,\twoheadrightarrow,ext}$	$\mathrm{R}-nat = \mathscr{L}_{\rightarrowtail,E,\oplus}$

Demostración. Ver, [1], [2], [3], [12], [28] y[30].

$\square$

1.2.1 Operación $(- : -)$ de clases de $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ y retículas relacionadas.

Para comenzar esta sección, veamos algunos resultados relacionados con extensiones y clases cerradas bajo extensiones. Cabe mencionar que a lo largo de esta sección, consideraremos clases de módulos que son abstractas y que contienen a 0.

Observación 1.2.2 *Sea $\mathcal{C}$ una clase de $\mathrm{R}-$módulos tal que $\mathcal{C} \in \mathscr{L}_{ext}$. Entonces, $\mathcal{C}$ es una clase abstracta cerrada bajo sumas directas finitas.*

Lema 1.2.3 *[11] Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ una clase de módulos tal que $\mathcal{C} \in \mathscr{L}_{ext,\Pi}$. Sea*

$$\eta : 0 \to Y \overset{f}{\to} X \overset{g}{\to} L \to 0$$

una sucesión exacta corta tal que $Y \in \mathrm{Cog}(\mathcal{E})$ y $L \in \mathcal{E}$. Entonces $X \in \mathrm{Cog}(\mathcal{E})$.

Demostración. Como $Y \in \mathrm{Cog}(\mathcal{C})$, existe un monomorfismo $h : Y \to F$, con $F := \prod_{\alpha\in\Lambda}\{E_\alpha\}$ y $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{C}$. Notemos que $F \in \mathcal{C}$, ya que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo productos.

Consideremos el siguiente diagrama en $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & & & \\ \eta : & 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\ & & F & & & \end{tikzcd}$$

Haciendo el coproducto fibrado (push out) de los morfismos h y f, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos (ver [37, Lemas 7.28 y 7.29]).

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & & & \\ \eta : & 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "push\ out"] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"] & L \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "l"] & 0 \\ \eta' : & 0 \arrow[r] & F \arrow[r, "f'"] & Q \arrow[r, "g'"] & L' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Notemos que por el Lema del Quinto, k es un monomorfismo.

Por otro lado, como $L' \cong L \in \mathcal{E}$, entonces $L' \in \mathcal{E}$. Luego, como $\mathcal{E}$ es cerrada bajo extensiones y η' es una sucesión exacta con $L', F \in \mathcal{E}$, y concluimos que $Q \in \mathcal{E}$.

Por lo tanto, $X \in \mathrm{Cog}(\mathcal{E})$.

□

Denotaremos por $\mathrm{Fcog}(\mathcal{C})$ a la clase de todos los $R-$módulos izquierdos que son finitamente cogenerados por $\mathcal{C}$. Esto es, los $\mathrm{R}-$módulos M que se sumergen en un producto directo finito de elementos de $\mathcal{C}$.

Lema 1.2.4 *[11] Sea $\mathcal{E}$ una clase de módulos de $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ con $\mathcal{E} \in \mathscr{L}_{ext}$. Si $\eta : 0 \to Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} L \to 0$ es una sucesión exacta corta con $Y \in \mathrm{Fcog}(\mathcal{E})$ y $L \in \mathcal{E}$; entonces $X \in \mathrm{Fcog}(\mathcal{C})$.*

Demostración. La demostración es similar a la dada en el Lema anterior, notando que $\mathcal{E}$ es cerrada bajo productos directos finitos, pues es cerrada bajo extensiones.

□

Definición 1.2.5 *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ clases de $R-$módulos izquierdos. Definimos,*
$(\mathcal{C} : \mathcal{D}) := \{E \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod} :\ \exists\, 0 \to C \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} D \to 0$ *exacta, con* $C \in \mathcal{C},\ D \in \mathcal{D}\}$.

Cabe mencionar, que la definición anterior, puede ser encontrada en distintos contextos, por ejemplo en [43, Definition 1.1] Yoshizawa lo define para subcategorías de Serre en $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$; en [42, 1.2 Definition] Wisbauer da esta definición para clases en $\sigma[M]$; y en [12, 6.4] Dauns define esto para clases en $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ y al operador $(- : -)$ le llama "module extension operator."

Ejemplo 1.2.6 (a) *Del Lema 1.2.3, se sigue que si $\mathcal{C} \in \mathscr{L}_{ext}$, entonces $(Cog(\mathcal{C}) : \mathcal{C}) \subseteq Cog(\mathcal{C})$. Similarmente, Del Lema1.2.4 se sigue que si $\mathcal{C} \in \mathscr{L}_{ext}$, entonces $(FCog(\mathcal{C}) : \mathcal{C}) \subseteq FCog(\mathcal{C})$.*

(b) *Sea $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión hereditaria. Entonces, sabemos que para cada $M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$, existe una sucesión exacta en $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$,*
$$0 \to T \to M \to F \to 0,$$
con $T \in \mathbb{T}$ y $F \in \mathbb{F}$. Por lo tanto, $(\mathbb{T} : \mathbb{F}) = \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$.

Lema 1.2.7 *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ clases abstractas y que contienen al cero, es claro que $\mathcal{C} \subseteq (\mathcal{C} : \mathcal{D})$ y $\mathcal{D} \subseteq (\mathcal{C} : \mathcal{D})$.*

Demostración. En efecto, para cada $X \in \mathcal{C}$, basta tomar la sucesión exacta $0 \to X \xrightarrow{1_X} X \to 0 \to 0$; y para cada $Y \in \mathcal{D}$ basta tomar la sucesión exacta $0 \to 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{1_Y} Y \to 0$.

□

Observación 1.2.8 *Sea $\mathcal{E}$ una clase abstracta de $\mathrm{R}-$módulos , que contiene al cero y tal que $\mathcal{E} \in \mathscr{L}_{\rightarrowtail, ext}$. Entonces, para cada $\mathcal{C} \in \mathscr{L}_{\{0, \rightarrowtail\}}$, se satisface que $\mathcal{D} := \{X \oplus Y : X \in \mathcal{C}\ \ \&\ \ Y \in \mathcal{E}\} \subseteq (\mathcal{C} : \mathcal{E})$.*

Demostración. Sea $D \in \mathcal{D}$, entonces existen $X \in \mathcal{C}$ y $Y \in \mathcal{E}$ tales que $D \cong X \oplus Y$. Por lo tanto, la sucesión exacta $0 \to X \xrightarrow{\rho} D \xrightarrow{\pi} Y \to 0$, muestra que $D \in (\mathcal{C} : \mathcal{E})$.

□

Lema 1.2.9 *Si $\mathcal{E}$ es una clase de $\mathrm{R}-$módulos izquierdos que contiene al cero y tal que $\mathcal{E} \in \mathscr{L}_{ext}$ entonces $(\mathcal{E} : \mathcal{E}) = \mathcal{E}$.*

<u>Demostración.</u> Ya hemos notado que siempre se satisface que $\mathcal{E} \subseteq (\mathcal{E} : \mathcal{E})$. Por otro lado, si $X \in (\mathcal{E} : \mathcal{E})$, entonces tenemos una sucesión exacta $0 \to M \to X \to N \to 0$, con $M, N \in \mathcal{E}$; y dado que $\mathcal{E}$ es cerrada bajo extensiones, se sigue que $X \in \mathcal{E}$.

□

Las siguientes tres proposiciones pueden encontrarse en [42] para la categoría $\sigma[M]$.

Proposición 1.2.10 *[42, Proposición 1.3] Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ subclases abstractas de $\mathrm{R}-$módulos. Para cada ideal izquierdo I de R, $R/I \in (\mathcal{C} : \mathcal{D})$ si y sólo si existe un ideal izquierdo J de R tal que $I \subset J$, $J/I \in \mathcal{C}$ y $R/J \in \mathcal{D}$.*

<u>Demostración.</u> $(\Rightarrow)$ Sea I un ideal izquierdo de R. Por hipótesis, existe una sucesión exacta $\eta :\ 0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} R/I \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0$ en $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$, con $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$. Por el teorema de la correspondencia, existe un ideal izquierdo J de R tal que $I \subseteq J$, y $J/I = Ker(g) \cong C \in \mathcal{C}$. Finalmente, usando el tercer teorema de isomorfismo y la sucesión exacta η, concluimos que $D \cong R/J$.

$(\Leftarrow)$ Sea I un ideal izquierdo de R. Por hipótesis, existe un ideal izquierdo J de R tal que $I \subseteq J$, $J/I \in \mathcal{C}$ y $R/I \in \mathcal{D}$. Por lo tanto, la sucesión exacta $0 \to J/I \to R/I \to R/J \to 0$ implica que $R/I \in (\mathcal{C} : \mathcal{D})$.

□

Proposición 1.2.11 *[42, Propiedades 1.4(i)] Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathrm{R}-Mod$ clases abstractas. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son hereditarias, entonces $(\mathcal{C} : \mathcal{D})$ es hereditaria.*

(b) *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son cohereditarias, entonces $(\mathcal{C} : \mathcal{D})$ es cohereditaria.*

(c) *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son cerradas bajo sumas directas, entonces $(\mathcal{C} : \mathcal{D})$ es cerrada bajo sumas directas.*

<u>Demostración.</u> (a) Sean $M \in (\mathcal{C} : \mathcal{D})$ y $0 \neq \alpha : N \to M$ un monomorfismo. Dado que $M \in (\mathcal{C} : \mathcal{D})$, existe una sucesión exacta $\eta :\ 0 \to C \xrightarrow{f} M \to D \overset{g}{\to} 0$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & & \\
\eta' : & 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "f", "producto"'] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & X \arrow[r] \arrow[d, "l"] & 0 \\
\eta : & 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "fibrado", "f'"'] & M \arrow[r, "g'"] & D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Notemos que h y l son monomorfismos.

Entonces, dado que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son hereditarias, concluimos que $Y \in \mathcal{C}$ y $X \in \mathcal{D}$. Por lo tanto, $N \in (\mathcal{C} : \mathcal{D})$.

(b) La demostración es análoga a la hecha en (a).

(c) Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq (\mathcal{C} : \mathcal{D})$. Entonces, para cada $\alpha \in \Lambda$, existe una sucesión exacta $\eta_\alpha :\ 0 \longrightarrow C_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} M_\alpha \xrightarrow{g_\alpha} D_\alpha \longrightarrow 0$. Por lo tanto, existe la sucesión exacta $\eta :\ 0 \longrightarrow \bigoplus C_\alpha \xrightarrow{f} \bigoplus M_\alpha \xrightarrow{g} \bigoplus D_\alpha \longrightarrow 0$ (ver [41, 9.7(6)]). Con esto concluimos que $\bigoplus M_\alpha \in (\mathcal{C} : \mathcal{D})$, ya que por hipótesis $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son cerradas bajo sumas directas.

$\square$

Proposición 1.2.12 *[42, Propiedades 1.4(ii)] Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathrm{R} - Mod$ abstractas. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son abiertas entonces $(\mathcal{C} : \mathcal{D})$ es abierta.*

(b) *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son cerradas bajo submódulos, cocientes y sumas directas (finitas) entonces $(\mathcal{C} : \mathcal{D})$ también lo es.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Proposición 1.2.11.

$\square$

Observación 1.2.13 *La operación $(- : -)$ es asociativa y está bien definida en $\mathscr{L}_{\rightarrowtail}$, $\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$, $\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow}$ y $\mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow,\oplus}$, respectivamente. Esto es,*

$$(- : -) : \mathscr{L}_{\rightarrowtail} \times \mathscr{L}_{\rightarrowtail} \longrightarrow \mathscr{L}_{\rightarrowtail}$$

$$(- : -) : \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow} \times \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow} \longrightarrow \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$$

$$(- : -) : \mathscr{L}_{\oplus} \times \mathscr{L}_{\oplus} \longrightarrow \mathscr{L}_{\oplus}$$

$$(- : -) : \mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow} \times \mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow} \longrightarrow \mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow}$$

$$(- : -) : \mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow,\oplus} \times \mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow,\oplus} \longrightarrow \mathscr{L}_{\rightarrowtail,\twoheadrightarrow,\oplus}$$

son operaciones asociativas.

El siguiente lema, nos permitirá probar que la operación $(- : -)$ también está bien definida en las retículas $\mathscr{L}_{\leq,E()}$ y en $\mathscr{L}_{\leq,E(),\oplus}$, la retícula de clases naturales en $\mathrm{R} - \mathrm{Mod}$.

Lema 1.2.14 *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathscr{L}_{\{\leq,E()\}}$. Entonces $(\mathcal{C} : \mathcal{D}) \in \mathscr{L}_{\{\leq,E()\}}$.*

Demostración. Ya hemos visto que si $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathscr{L}_{\leq}$, entonces $(\mathcal{C} : \mathcal{D}) \in \mathscr{L}_{\leq}$.

Ahora veamos que $(\mathcal{C} : \mathcal{D})$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Sean $M \in (\mathcal{C} : \mathcal{D})$. y $\eta :\ 0 \to C \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} D \to 0$ una sucesión exacta en $R - Mod$ con $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$.

Sean $\varepsilon_C : C \to E(C)$ y $\varepsilon_D : D \to E(D)$ las cápsulas inyectivas de C y D, respectivamente. Consideremos la sucesión exacta $\eta' :\ 0 \to E(C) \xrightarrow{\iota_{E(C)}} E(C) \oplus E(D) \xrightarrow{p_{E(D)}} E(D) \to 0$. Esta en particular implica que $E(C) \oplus E(D) \in (\mathcal{C} : \mathcal{D})$, ya que por hipótesis $E(C) \in \mathcal{C}$ y $E(D) \in \mathcal{D}$.

Por otro lado, como f es un monomorfismo y $E(C)$ es inyectivo, existe un morfismo $h : M \to E(C)$ tal que $h \circ f = \varepsilon_C$.

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_C"] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & E(C). & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, obtenemos por la propiedad universal del producto para $E(C) \oplus E(D)$, existe un único morfismo $\varphi : M \to E(C) \oplus E(D)$, tal que

$$\varepsilon_D \circ g = p_{E(D)} \circ \varphi \text{ y } h = p_{E(C)\circ\varphi} ...(+)$$

Veamos que el siguiente diagrama (**) es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \eta: 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_L"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & d \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_D"] & 0 \\ \eta': 0 \arrow[r] & E(C) \arrow[r, "\iota_{E(C)}"] & E(C) \oplus E(D) \arrow[r, "p_{E(D)}"] & E(D) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por $(+)$, tenemos que el cuadrado de la derecha conmuta.

Por otro lado, recordemos que $1_{E(C)\oplus E(D)} = \iota_{E(C)}p_{E(C)} + \iota_{E(D)}p_{E(D)}$. Luego, $\varphi f = 1_{E(C)\oplus E(D)}(\varphi f) = \iota_{E(C)}p_{E(C)}\varphi f + \iota_{E(D)}p_{E(D)}\varphi f = \iota_{E(C)}hf + \iota_{E(D)}\varepsilon_D g f = \iota_{E(C)}hf = \iota_{E(C)}\varepsilon_C$.

Esto es, $\varphi f = \iota_{E(C)}\varepsilon_C$. Por lo tanto, el cuadrado de la izquierda también conmuta.

De lo anterior, concluimos que el diagrama (**) conmuta. Ahora, como ε_C y ε_D son monomorfismos, concluimos que φ es un monomorfismo.

Finalmente, al considerar la cápsula inyectiva de M y el hecho de que $E(C) \oplus E(D)$ es inyectivo, obtenemos un morfismo $w : E(M) \to E(C) \oplus E(D)$

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & E(C) \oplus E(D) \arrow[dl, dashed, "w"] \\ & E(M) & \end{tikzcd}$$

tal que $\varphi = w \circ \varepsilon_M$. Luego, dado que φ es un monomorfismo y ε_M es un monomorfismo esencial, concluimos que w es un monomorfismo.

Finalmente, como $(\mathcal{C} : \mathcal{D})$ es una clase hereditaria y w es un monomorfismo con $E(C) \oplus E(D) \in (\mathcal{C} : \mathcal{D})$, podemos concluir que $E(M) \in (\mathcal{C} : \mathcal{D})$. $\square$

Lema 1.2.15 *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathscr{L}_{\leq}$, con $\mathcal{D}$ cerrada bajo cápsulas inyectivas. Entonces, $(\mathcal{D} : \mathcal{C}) \leq (\mathcal{C} : \mathcal{D})$.*

Demostración. Sea $M \in (\mathcal{D} : \mathcal{C})$, entonces existe una sucesión exacta $\eta : 0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$, con $L \in \mathcal{D}$ y $N \in \mathcal{C}$. Consideremos además $\varepsilon_L : L \to E(L)$, la cápsula inyectiva de L. Tomando el coproducto fibrado de los morfismos f y ε_L, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\eta:\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_L"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[r] \arrow[d, "1_N"] & 0 \\
\eta':\ 0 \arrow[r] & E(L) \arrow[r, "u"] & Q \arrow[r, "v"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Notemos que h es un monomorfismo; y la sucesión exacta η' se escinde, pues $E(L)$ es inyectivo.

Así, obtenemos una sucesión exacta $0 \to N \xrightarrow{v'} Q \xrightarrow{u'} E(L) \to 0$. Por lo tanto, $Q \in (\mathcal{C} : \mathcal{D})$. Finalmente, como h es un monomorfismo y la clase $(\mathcal{C} : \mathcal{D})$ es hereditaria, concluimos que $M \in (\mathcal{C} : \mathcal{D})$.

$\square$

Corolario 1.2.16 *Si* $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathscr{L}_{\leq, E()}$; *entonces* $(\mathcal{C} : \mathcal{D}) = (\mathcal{D} : \mathcal{C})$.

Demostración. Por el lema 1.2.15, tenemos que $(\mathcal{C} : \mathcal{D}) \subseteq (\mathcal{D} : \mathcal{C})$ y $(\mathcal{D} : \mathcal{C}) \subseteq (\mathcal{C} : \mathcal{D})$.

$\square$

Corolario 1.2.17 *La operación* $(- : -)$ *está bien definida en* $\mathscr{L}_{\leq, E(\,)}$ *y es conmutativa.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de 1.2.14 y 1.2.16.

$\square$

En el siguiente corolario, damos una demostración alternativa de [12, Corolario 6.1.7].

Corolario 1.2.18 *Si* $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathscr{L}_{\leq, E(), \oplus}$; *entonces* $(\mathcal{C} : \mathcal{D}) = \mathcal{C} \bigvee \mathcal{D}$.

Demostración. Primero, dado que $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathscr{L}_{\leq, E(-), \oplus}$, por el Lema 1.2.11 y el Lema1.2.14, se tiene que $(\mathcal{C} : \mathcal{D}) \in \mathscr{L}_{\leq, E(-), \oplus}$. Ahora, por el Lema 1.2.7, tenemos que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \subseteq (\mathcal{C} : \mathcal{D})$. Así, concluimos que $\xi_{R-Nat}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \subseteq (\mathcal{C} : \mathcal{D})$.

Por otro lado, usando el hecho que $\xi_{R-Nat}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$ es cerrada bajo extensiones, tenemos que $(\mathcal{C} : \mathcal{D}) \subseteq (\xi_{R-Nat}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) : \xi_{R-Nat}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})) = \xi_{R-Nat}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$. Esto es, $(\mathcal{C} : \mathcal{D}) \subseteq \xi_{R-Nat}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$.

$\square$

1.2.2 Operaciones $(- : \mathcal{E})$ y $(\mathcal{E} : -)$, con $\mathcal{E}$ cerrada bajo extensiones.

Proposición 1.2.19 *Sean* $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E} \subseteq \mathrm{R-Mod}$, *con* $\mathcal{E} \in \mathscr{L}_{\{0, ext, \rightarrowtail\}}$ *y* $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathscr{L}_{\{0, \rightarrowtail\}}$. *Entonces* $(\mathcal{C} : (\mathcal{D} : \mathcal{E})) = ((\mathcal{C} : \mathcal{D}) : \mathcal{E})$.

Demostración. Veamos primero que $(\mathcal{C} : (\mathcal{D} : \mathcal{E})) \subseteq ((\mathcal{C} : \mathcal{D}) : \mathcal{E})$. Sea $U \in (\mathcal{C} : (\mathcal{D} : \mathcal{E}))$. Entonces, existe una sucesión exacta $\eta_1 : 0 \to C \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} F \to 0$, con $C \in \mathcal{C}$ y $F \in (\mathcal{D} : \mathcal{E})$. Por otro lado, como $F \in (\mathcal{D} : \mathcal{E})$, existe una sucesión exacta $\eta_2 : 0 \to D \xrightarrow{h} F \xrightarrow{k} E \to 0$, con $D \in \mathcal{D}$ y $E \in \mathcal{E}$.

Haciendo el producto fibrado de los morfismos g y h, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{R-Mod}$ (ver [37, Lemas 7.28 y 7.29])

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\gamma:\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"] & P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h'"] \arrow[dr, phantom, "producto\ fibrado"] & D \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
\eta_1:\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] & U \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "k'"] & F \arrow[r] \arrow[d, "k"] & 0 \\
 & & W \arrow[r, "g''"] \arrow[d] & E \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Veamos que la sucesión exacta $\gamma : 0 \to P \xrightarrow{h'} U \xrightarrow{k'} W \to 0$, satisface las condiciones para que $U \in ((\mathcal{C} : \mathcal{D}) : \mathcal{E})$.

Como $C \cong C'$, se sigue que $C' \in \mathcal{C}$. Entonces, la sucesión exacta $\gamma : 0 \to C' \xrightarrow{f'} P \xrightarrow{g'} D \to 0$, del diagrama anterior, garantiza que $P \in (\mathcal{C} : \mathcal{D})$. Por otro lado, como $W \cong E \in \mathcal{E}$, se tiene que $W \in \mathcal{E}$. Por lo tanto, tenemos que $U \in ((\mathcal{C} : \mathcal{D}) : \mathcal{E})$.

De manera similar, se puede probar que $((\mathcal{C} : \mathcal{D}) : \mathcal{E}) \subseteq (\mathcal{C} : (\mathcal{D} : \mathcal{E}))$.

$\square$

Observación 1.2.20 $\mathrm{R{-}Mod}$ *satisface que* $(\mathrm{R}-\mathrm{Mod} : \mathcal{E}) = \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$.

Definición 1.2.21 *Sea* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{R{-}Mod}$ *tal que* $0 \in \mathcal{C}$. *Decimos que* $\mathcal{C}$ *es* **cerrada bajo** $(-{:}\mathcal{E})$**−extensiones** *(o bien,* $\mathcal{E}$*−extensiones a izquierda), si para cualquier sucesión exacta*

$$\eta : 0 \to C \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} E \to 0$$

con $C \in \mathcal{C}$ *y* $E \in \mathcal{E}$, *se tiene que* $Q \in \mathcal{C}$.

Denotaremos por $\mathscr{L}_{\{-:\mathcal{E}\}}$ a la clase de todas las clases $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{R{-}Mod}$ que son cerradas bajo $(- : \mathcal{E})$−extensiones.

Ejemplo 1.2.22

(a) *Sea* $\mathcal{E} \in \mathscr{L}_{\{0,ext,\rightarrowtail,\prod\}}$. *Por el Lema 1.2.3, tenemos que* $\mathrm{Cog}(\mathcal{E}) \in \mathscr{L}_{\{-:\mathcal{E}\}}$.

(b) *Sea* $\mathcal{E} \in \mathscr{L}_{\{0,ext,\rightarrowtail\}}$. *Por el Lema 1.2.4, tenemos que* $\mathrm{Fcog}(\mathcal{E}) \in \mathscr{L}_{\{-:\mathcal{E}\}}$.

Proposición 1.2.23 *Sea* $\mathcal{C} \in \mathscr{L}_{\{0,\rightarrowtail\}}$. *Entonces* $(\mathcal{C} : \mathcal{E}) \in \mathscr{L}_{\{-:\mathcal{E}\}}$.

<u>Demostración.</u> Veamos que $(\mathcal{C} : \mathcal{E})$ es cerrada bajo $(- : \mathcal{E})$−extensiones. Sea $\eta :\ 0 \to D \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} E_1 \to 0$, con $D \in (\mathcal{C} : \mathcal{E})$ y $E_1 \in \mathcal{E}$. Probemos que $M \in (\mathcal{C} : \mathcal{E})$.

Como $D \in (\mathcal{C} : \mathcal{E})$, entonces existe una sucesión exacta $\gamma : 0 \to C \xrightarrow{h} D \xrightarrow{k} E_2 \to 0$, con $C \in \mathcal{C}$ y $E_2 \in \mathcal{E}$. Haciendo el coproducto fibrado de los morfismos f y k, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& C \arrow[r, "\cong", "q"'] \arrow[d, "h"] & C' \arrow[d, "w"] & & \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r, "f", "coproducto"'] \arrow[d, "k"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & E_1 \arrow[r] \arrow[d, "v", "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_2 \arrow[r, "fibrado", "f'"'] \arrow[d] & Q \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & L \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

En vista de que E_2 y $L \cong E_1$ estan en $\mathcal{E} \in \mathscr{L}_{\{ext\}}$, concluimos que $Q \in \mathcal{E}$. Por otro lado, $C' \cong C \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, la sucesión exacta $0 \to C' \xrightarrow{w} M \xrightarrow{v} Q \to 0$ implica que $M \in (\mathcal{C} : \mathcal{E})$.

Por lo tanto, $(\mathcal{C} : E) \in \mathscr{L}_{\{(-:\mathcal{E})\}}$.

□

Lema 1.2.24 *Sean $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{R-Mod}$ y $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{R-Mod}$, con $\mathcal{E} \in \mathscr{L}_{\{0,\rightarrowtail,ext\}}$. Entonces $\xi_{\{-:\mathcal{E},\rightarrowtail\}}(\mathcal{C}) = \{M \in \mathrm{R{-}Mod} : \forall N \rightarrowtail M, \exists\ \eta :\ 0 \to C \to N \to E \to 0,$ exacta en $\mathrm{R-Mod}$ con $C \in \mathcal{C}$ y $E \in \mathcal{E}\}$.*

El siguiente lema nos da condiciones equivalentes para que una clase sea cerrada bajo $(- : \mathcal{E})-$extensiones.

Lema 1.2.25 *Sea $\mathcal{C} \in \mathscr{L}_{\{0,\rightarrowtail\}}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\mathcal{C} \in \mathscr{L}_{\{-:\mathcal{E}\}}$.

(b) $\mathcal{C} = (\mathcal{C} : \mathcal{E})$.

Demostración. [(a)⇒(b)] Siempre se cumple que $\mathcal{C} \subseteq (\mathcal{C} : \mathcal{E})$, así que sólo resta probar que $(\mathcal{C} : \mathcal{E}) \subseteq \mathcal{C}$.

Sea $D \in (\mathcal{C} : \mathcal{E})$. Entonces, existe una sucesión exacta $\eta :\ 0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$, con $C \in \mathcal{C}$ y $E \in \mathcal{E}$. Como $C \in \mathscr{L}_{\{-:\mathcal{E}\}}$, se sigue en η que $D \in \mathcal{C}$.

[(b)⇒(a)] Como $C = (\mathcal{C} : \mathcal{E})$; se sigue por la proposición 1.2.23 que $C \in \mathscr{L}_{\{-:\mathcal{E}\}}$.

□

Observación 1.2.26 *Para cada $\mathcal{C} \in \mathscr{L}_{\{0,\rightarrowtail,(-:\mathcal{E})\}}$ se cumple que $\mathcal{C} \cap \mathcal{E} = \mathcal{E}$; y en particular $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$.*

Observación 1.2.27 *Para cada $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathscr{L}_{\{0,\rightarrowtail,(-:\mathcal{E})\}}$, definimos $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D} := \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Podemos probar que $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \in \mathscr{L}_{\{0,\rightarrowtail,(-:\mathcal{E})\}}$.*

En [29], F. Raggi y C. Signoret dieron una caracterización de la clase de Serre generado por una clase dada. En la siguiente proposición, veremos dicho resultado.

Proposición 1.2.28 *[29] Sea $\mathcal{A}$ una clase de $\mathrm{R}-$módulos. Sea $\mathcal{A}^0 := \{0\}$; $\mathcal{A}^{n+1} := (\mathcal{A}^n : A)$ para $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^n$ es la clase de Serre generada por $\mathcal{A}$.*

Otra caracterización es dada por M. Prest en [24] para subcategorías de Serre en una categoría abeliana. Enseguida, retomamos dicho resultado.

Proposición 1.2.29 (Prest) *[24, Lema 2.1] Sea $\mathcal{X}$ una colección de objetos en la categoría abeliana $\mathscr{A}$; y $\langle\mathcal{X}\rangle$ la clase de Serre generada por $\mathcal{X}$. Entonces $A \in \langle\mathcal{X}\rangle$ si y sólo si A tiene una filtración $A = A_n \geq A_{n-1} \geq \cdots \geq a_0 = 0$, con factores A_{i+1}/A_i cada uno de los cuales es un subcociente de un objeto de $\mathcal{X}$.*

En particular, si $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ son clases de Serre en $\mathscr{A}$; entonces $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}'$ consiste de aquellos objetos una filtración finita, donde cada factor esta en $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$.

1.2.3 (Grandes) retículas fuertemente seudocomplementadas y sus esqueletos.

Definición 1.2.30 *Sea $\mathscr{L}$ una (gran) retícula con elemento menor 0. decimos que un elemento $a' \in L$ es un* **seudocomplemento fuerte de** *$a \in L$ si $a \wedge a' = 0$ y para cada $b \in L$ tal que $a \wedge b = 0$, entonces $b \leq a'$.*

Observación 1.2.31 *Sean $\mathscr{L}$ una retícula con menor elemento 0 y $a \in \mathscr{L}$. Si a tiene un seudocomplemento fuerte, éste es único.*

Demostración. Sean $b, b' \in \mathscr{L}$ seudocomplementos fuertes de a. Como $a \wedge b = 0$ y b' es un seudocomplemento fuerte de a, se sigue que $b' \leq b$. Similarmente, Como $a \wedge b' = 0$ y b es un seudocomplemento fuerte de a, se sigue que $b \leq b'$. Finalmente $b \leq b' \leq b$ implican $b = b'$.

□

Si $a \in \mathscr{L}$ tiene seudocomplemento fuerte en $\mathscr{L}$, denotamos por $a^{\perp_{\mathscr{L}}}$ a su seudocomplemento fuerte.

Decimos que L es una (gran) retícula **fuertemente seudocomplementada** cuando cada $a \in L$ tiene un seudocomplemento fuerte. En este caso,

$$Skel(\mathscr{L}) = \{a \in \mathscr{L} : a \text{ es un seudocomplemento fuerte en} \mathscr{L}\}$$

es el esqueleto de $\mathscr{L}$.

Recordemos que una **retícula es de Boole** si es distributiva y complementada.

Proposición 1.2.32 *Sea $\mathscr{L}$ una retícula con menor elemento 0 y fuertemente seudocomplementada. Entonces $Skel(\mathscr{L})$ es una retícula de Boole.*

Proposición 1.2.33 *Sea $\mathscr{L}$ una retícula fuertemente seudocomplementada. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\mathscr{L}$ *es de Boole.*

(b) $\mathscr{L} = Skel(\mathscr{L})$

1.2.4 Clases naturales,conaturales y prenaturales.

Definición 1.2.34 *Una clase $\mathcal{C} \in Skel(\mathscr{L}_{\leq})$ ess llamada* **clase natural**.

Definición 1.2.35 *Una class $\mathcal{C} \in Skel(\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow})$ es llamada* **clase conatural**.

Proposición 1.2.36 *Sea r es un radical idempotente; y $\tau_r = (\mathbb{T}_r, \mathbb{F}_r)$ la teoría de torsión asociada a r. Si $\mathbb{F}_r$ es cohereditaria, entonces $\mathbb{T}_r$ es cerrada bajo cubrimientos superfluos.*

Demostración. Sea $M \in \mathbb{T}_r$ y $\eta : 0 \to K \to P \xrightarrow{f} M \to 0$, con f un epimorfismo suplerfluo, esto es, $K := Ker(f) << P$.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & r(P) \cap K \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\alpha''"] & r(P) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha"] & \frac{r(P)+K}{K} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta''"] & P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{K+r(P)}{r(P)} \arrow[r, "g''"] \arrow[d] & \frac{P}{r(P)} \arrow[r, "f''"] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Notemos que $q_r = \dfrac{P}{r(P)} \in \mathbb{F}_r$. Como $\mathbb{F}_r \in \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$, se sigue que $M' \in \mathbb{F}_r$. Po otro lado, como $M \in \mathbb{T}_r$ y β' es un epimorfismo, se sigue que $M' \in \mathbb{T}_r$. Así, $M' \in \mathbb{T}_r \cap \mathbb{F}_r = \{0\}$. Por lo tanto, $M' = 0$.

Luego, $\dfrac{P}{r(P)} = \dfrac{K + r(P)}{r(P)}$; y por lo tanto $K + r(P) = P$. Como K es un submódulo superfluo de P, concluimos que $P = r(P)$. Por lo tanto, $P \in \mathbb{T}_r$.

□

Corolario 1.2.37 *Si r es un $t-$radical idempotente, entonces $\mathbb{T}_r$ es cerrada bajo cubrimientos superfluos.*

Proposición 1.2.38 *Sea r es un radical idempotente y $\tau_r = (\mathbb{T}_r, \mathbb{F}_r)$ la teoría de torsión asociada a r. Si $\mathbb{F}_r$ es cohereditaria; y para todo $M \in \mathbb{T}_r$, M tiene cubierta proyectiva; entonces $\mathbb{T}_r$ es cerrado bajo cubiertas superfluos.*

Demostración. Sea $M \in \mathbb{T}_r$ y $\varepsilon_M : P(M) \to M$ una cubierta proyectiva de M. Como ε_M es un epimorfismo superfluo, por la Proposición 1.2.36 se concluye que $P(M) \in \mathbb{T}_r$.

□

Proposición 1.2.39 *Sea* R *un anillo perfecto y* $\mathcal{T}$ *una clase de módulos. Consideremos las siguientes condiciones.*

(a) $\mathcal{T}$ *es cerrado bajo cubrimientos superfluos.*

(b) $\mathcal{T}$ *es cerrada bajo cubiertas proyectivas.*

La condición (a) implica (b). Si además $\mathcal{T}$ *es cohereditaria, entonces las condiciones (a) y (b) son equivalentes.*

Demostración. Notemos primero que si $M \in \mathcal{T}$ y $\varepsilon_M : P(M) \to M$ es una cubierta proyectiva de M. Esta en particular es un cubrimiento superfluo; así que por la condición (a) concluimos que $P(M) \in \mathcal{T}$.

Ahora, supongamos que además $\mathcal{T}$ es cohereditaria. Vemos que (b)⇒(a). Sean $M \in \mathcal{T}$, $f : P \to M$ un epimorfismo superfluo y $\varepsilon_M : P(M) \to M$ es una cubierta proyectiva de M.

Luego, existe $h : P(M) \to P$ tal que $\varepsilon_M = fh$. Como ε_M es un epimorfismo superfluo, se sigue que h es un epimorfismo. Como $P(M) \in \mathcal{T}$, concluimos que $P \in \mathcal{T}$. □

Corolario 1.2.40 *Sea* r *es un radical idempotente y* $\tau_r = (\mathbb{T}_r, \mathbb{F}_r)$ *y* R *perfecto (izquierdo). Son equivalentes.*

(a) $\mathbb{T}_r$ *es cerrada bajo cubrimientos superfluos.*

(b) $\mathbb{T}_r$ *es cerrado bajo cubiertas proyectivas (y cocientes).*

(c) $\mathbb{F}_r$ *es cohereditaria.*

(d) r *es un* $t-$*radical.*

Proposición 1.2.41 *Sea* $\mathcal{A} \in \mathscr{L}_{\leq,\prod}$, $r_{\mathcal{A}} := Rej(\mathcal{A}) \in \mathrm{R}\text{-rad}$ *el radical asociado a* $\mathcal{A}$; *y* $\mathbb{T}_{r_{\mathcal{A}}}$ *la clase de pretorsión asociada a* $r_{\mathcal{A}}$. *Si* $f : N \to M$ *es un epimorfismo superfluo con* $M \in \mathcal{A}$, *entonces* $q_{r_{\mathcal{A}}}(f) : q_{r_{\mathcal{A}}}(N) \to M$ *es un epimorfismo superfluo.*

Demostración. Como $M \in \mathcal{A}$, se sigue que $r_{\mathcal{A}}(M) = 0$ □

1.3 Prerradicales

En [38, Chapter VI], se encuentra desarrollado el tema de prerradicales sobre categorías abelianas de Grothendieck. En esta sección presentamos definiciones y algunas propiedades de los prerradicales, para dos categorías en particular, $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ y $\sigma[M]$, con M un $\mathrm{R}-$módulo. En [6] el lector puede consultar la teoría de prerradicales sobre $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$; y en [10, Chapter 2], se puede consultar teoría de prerradicales en $\sigma[M]$.

En esta sección presentamos definiciones y algunas propiedades de los prerradicales, principalmente en $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$; pero que pueden ser extendidas también a $\sigma[M]$, con M un $\mathrm{R}-$módulo.

Definición 1.3.1 *Sea* $r : \mathrm{R}-\mathrm{Mod} \to \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ *un funtor. Decimos que* r *es un* **prerradical en** $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ *si es un subfuntor de la identidad; esto es, si se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *Para cada* $M \in \mathrm{R{-}Mod}$, $r(M)$ *es un submódulo de* M.

(b) *Para cada* $f : M \to N$ *morfismo en* $\mathrm{R{-}Mod}$, *se tiene el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} r(M) \arrow[r, "r(f)"] \arrow[d, hook, "\iota_M"'] & (N) \arrow[d, hook, "\iota_N"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.3.2 (a) *En* $\mathrm{R{-}Mod}$, $\mathrm{rad} : \mathrm{R{-}Mod} \to \mathrm{R{-}Mod}$, *donde* $\mathrm{rad}(M) = \bigcap\{N \mid M$ *es un submódulos máximo de* $M\}$ *es un prerradical.*

(b) *En* $\mathrm{R{-}Mod}$, $\mathrm{zoc} : \mathrm{R{-}Mod} \to \mathrm{R{-}Mod}$, *es un prerradical; donde* $\mathrm{zoc}(M) = \sum\{N \mid N$ *es un submódulo simple de* $M\}$ *para cada* $\mathrm{R}-$*módulo* M.

(c) *Sea* I *un ideal bilateral de* R, $r_I : \mathrm{R{-}Mod} \to \mathrm{R{-}Mod}$ *dado por* $r_I(M) = IM$, *es un prerradical.*

(d) *Sea* $\mathcal{C}$ *una clase de módulos,* $Tr_{\mathcal{C}} : \mathrm{R{-}Mod} \to \mathrm{R{-}Mod}$ *definido por* $Tr_{\mathcal{C}}(N) = \sum\{Im(f) \mid f : C \to N$ *para algún* $C \in \mathcal{C}\}$, *es un prerradical. Para cada módulo* N, $Tr_{\mathcal{C}}(N)$ *es la* **la traza de** $\mathcal{C}$ **en** N.

(e) *Sea* $\mathcal{C}$ *una clase de módulos,* $Rej_{\mathcal{C}} : \mathrm{R{-}Mod} \to \mathrm{R{-}Mod}$ *definido por* $Rej_{\mathcal{C}}(N) = \bigcap\{Ker(f) \mid f : N \to C$ *para algún* $C \in \mathcal{C}\}$, *es un prerradical. Para cada módulo* N, $Rej_{\mathcal{C}}(N)$ *es el* **rechazo** $\mathcal{C}$ **en** N.

Definición 1.3.3 *Sea* $N \in \mathrm{R{-}Mod}$ *y* $\mathrm{S} := \mathrm{End_R(N)}$. *Un* $(R,S)-$*submódulo de* N *es llamado* **totalmente invariante** *o* **característico.**

Denotamos

$\mathrm{S}_{fi}(N) = \{L \in \mathrm{R{-}Mod} \mid L$ es un submódulo totalmente invariante de $N\}$.

Dados $M \in \mathrm{R{-}Mod}$ y $N \in \sigma[M]$, denotamos

$\mathrm{S}^M_{fi}(N) = \{L \in \sigma[M] \mid L$ es un submódulo totalmente invariante de $N\}$.

Proposición 1.3.4 *[6] Sea* r *un prerradical. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Para cada* $r \in \mathrm{R{-}Mod}$, $r(M) \in \mathrm{S}_{fi}(M)$.

(b) *Si* M *es proyectivo, entonces* $r(M) = r(R)M$.

(c) *Sea* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *una familia de* $\mathrm{R}-$*módulos y* $r : \mathrm{R{-}Mod} \to \mathrm{R{-}Mod}$ *un prerradical. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

   (i) $r(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha) = \bigoplus_{\alpha\in I} r(M_\alpha)$.

   (ii) $r(\prod_{\alpha\in I} M_\alpha) \leq \prod_{\alpha\in I} r(M_\alpha)$.

La clase de todos los prerradicales en $\mathrm{R{-}Mod}$ es denotada por $\mathrm{R\text{-}pr}$. Así mismo, dado un módulo M, la clase de todos los prerradicales en $\sigma[M]$ es denotada por $M - \mathrm{pr}$.

$\mathrm{R\text{-}pr}$ tiene las siguientes operaciones. Para cada $M \in \mathrm{R{-}Mod}$, $r, s \in \mathrm{R\text{-}pr}$,

(a) $(r \cdot s)(M) := r(s(M))$.

(b) $(r : s)(M)$ es tal que $(r : s)(M)/r(M) = s(M/r(M))$.

(c) $(r \vee s)(M) := r(M) + s(M)$.

(d) $(r \wedge s)(M) = r(M) \cap s(M)$.

Para una clase $\mathcal{C}$ de prerradicales se satisface:

(e) $(\bigwedge\{r \in \mathcal{C}\})(M) := \bigcap\{r(M) \mid r \in \mathcal{C}\}$,

(f) $(\bigvee\{r \in \mathcal{C}\})(M) := \sum\{r(M) \mid r \in \mathcal{C}\}$.

Se puede observar que aún cuando $\mathcal{C}$ sea una clase propia, $\{r(M) \mid r \in \mathcal{C}\}$ es un conjunto para cada $M \in \mathrm{R{-}Mod}$.

En R-pr existe un orden parcial dado por $r \preceq s$ si $r(M) \leq s(M)$ para cada $M \in \mathrm{R{-}Mod}$. Es fácil ver que $r \cdot s \preceq r \wedge s$ y $r \vee s \preceq (r : s)$.

Definición 1.3.5 *Sea $r \in$ R-pr. Decimos que:*

(a) *r es* **idempotente** *si $r \cdot r = r$.*

(b) *r is a* **radical** *si $(r : r) = r$.*

(c) *r es* **exacto izquierdo***(o* **hereditario***) si satisface que para cualquier $M \in \mathrm{R{-}Mod}$ y $N \leq M$, se satisface que $r(N) = r(M) \cap N$.*

(d) *r es un* **$t-$radical** *(o* **cohereditario***) si satisface que $r(M) = r(\mathrm{R})M$ para cada $M \in \mathrm{R{-}Mod}$.*

Observación 1.3.6 *Sea r un prerradical. Entonces*

(a) *$\mathbb{T}_r = \{M \in \mathrm{R{-}Mod} \mid r(M) = M\}$ es una clase de pretosión.*

(b) *$\mathbb{F}_r = \{M \in \mathrm{R{-}Mod} \mid r(M) = 0\}$ es una clase libre de de pretosión.*

Para cada $r \in$ R-pr, las clases $\mathbb{T}_r$ y $\mathbb{F}_r$ son llamadas la **clase de pretorsión** y la **clase libre de pretorsión** asociada a r, respectivamente.

Proposición 1.3.7 *Sea r un prerradical. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *$\hat{r} : \mathrm{R{-}Mod} \to \mathrm{R{-}Mod}$ definido por $\hat{r}(M) = \sum\{A \mid A \leq M$ y $A \in \mathbb{T}_r\}$ es el mayor prerradical idempotente por abajo de r.*

(b) *$\bar{r} : \mathrm{R{-}Mod} \to \mathrm{R{-}Mod}$ definido por $\bar{r}(M) = \bigcap\{B \mid B \leq M$ y $M/B \in \mathbb{F}_r\}$ es el menor radical $\bar{r}$ por arriba de r.*

(c) *$\tilde{r} : \mathrm{R{-}Mod} \to \mathrm{R{-}Mod}$ dado por $\tilde{r}(M) = M \cap r(E(M))$ es un prerradical exacto izquierdo. Más aún, $\tilde{r}$ es el menor prerradical exacto izquierdo por arriba de r.*

Proposición 1.3.8 *Sea r un prerradical. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) r *es exacto izquierdo.*

(b) r *es un funtor exacto izquierdo.*

(c) r *es idempotente y* $\mathbb{T}_r$ *es una clase hereditaria.*

(d) $r = \tilde{r}$.

Proposición 1.3.9 *Sea r un prerradical. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) r *es un* $t-$*radical.*

(b) r *preserva epimorfismos.*

(c) r *es un radical y* $\mathbb{F}_r$ *es una clase cohereditaria.*

(d) *El funtor* $q_r : \mathrm{R-Mod} \to \mathrm{R-Mod}$ *definido por* $q_r(M) = M/r(M)$ *es exacto derecho.*

1.3.1 Prerradicales alfa y omega

Definición 1.3.10 *Dado* $M \in \mathrm{R-Mod}$ *y* $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$, *existen dos prerradicales distinguidos en* $\mathrm{R\text{-}pr}$, $\alpha_N^M, \omega_N^M : \mathrm{R-Mod} \to \mathrm{R-Mod}$ *asignando* M *a* N. *Estos se definen como sigue:*

$$\alpha_N^M(L) := \sum\{f(N) \mid f \in \mathrm{Hom_R}(M, L)\}$$

,

$$\omega_N^M(L) := \cap\{f^{-1}(N) \mid f \in \mathrm{Hom_R}(L, M)\},$$

para cada $L \in \mathrm{R-Mod}$.

Definición 1.3.11 *Sea* $M \in \mathrm{R-Mod}$, $r \in M-pr$ *y* $N, L \in \sigma[M]$, *con* $L \in {\mathrm{S}_{fi}}^M(N)$. *Se definen dos prerradicales en* $M-pr$,α_L^N, $\omega_L^N : \sigma[M] \to \sigma[M]$,

$$\alpha_L^N(K) := \sum\{f(L) \mid f \in \mathrm{Hom_R}(N, K)\},$$

$$\omega_L^N(K) := \cap\{f^{-1}(L) \mid f \in \mathrm{Hom_R}(K, N)\},$$

para cada $K \in \sigma[M]$.

Proposición 1.3.12 *[25] Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Sea* $r \in \mathrm{R\text{-}pr}$, N *un* $\mathrm{R}-$*módulo, y* $L \in \mathrm{S}_{fi}(N)$. *Entonces* $r(N) = L$ *si y sólo si* $\alpha_L^N \preceq r \preceq \omega_L^N$.

(b) *Sea* $M \in \mathrm{R-Mod}$, $r \in M - pr$ *y* $N, L \in \sigma[M]$, *con* $L \in {\mathrm{S}_{fi}}^M(N)$. *Entonces* $r(N) = L$ *si y sólo si* $\alpha_L^N \preceq r \preceq \omega_L^N$.

Denotaremos por $\mathrm{R}\text{-simp}$ un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de módulos simples; y $\mathcal{E}$ denotará a la clase de módulos inyectivos. Para cada $M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$, $E(M)$ denota una cápsula inyectiva de M; y $P(M)$ denota una cubierta proyectiva de M (en caso de existir).

Establecemos la notación, $C_0 := \bigoplus\{S \mid S \in \mathrm{R}\text{-simp}\}$, $D_0 := \bigoplus\{E(S) \mid S \in \mathrm{R}\text{-simp}\}$ y $E_0 := E(\bigoplus\{S \mid S \in \mathrm{R}\text{-simp}\})$. Cabe mencionar que E_0 es el cogenerador inyectivo mínimo de $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$. Obsérvese que $\mathrm{rad} = \omega_0^{C_0}$ y $\mathrm{zoc} = \alpha_{C_0}^{C_0}$.

Para conveniencia del lector, a continuación enlistamos algunas propiedades de estos prerradicales en $\mathrm{R}\text{-pr}$ (ver [31, Proposition 1.3]).

Proposición 1.3.13 *Para cada $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$ se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $r = \bigvee\{\alpha_{r(M)}^{M} \mid M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod}\} = \bigwedge\{\omega_{r(M)}^{M} \mid M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod}\}$.

(b) α_M^M *es idempotente para cada* $M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$. *Más aún, r es idempotente si y sólo si* $r = \bigvee\{\alpha_M^M \mid M \in \mathbb{T}_r\}$.

(c) ω_0^M *es radical para cada* $M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$. *Más aún, r es radical si y sólo si* $r = \bigwedge\{\omega_0^M \mid M \in \mathbb{F}_r\}$.

(d) ω_K^E *es un prerradical exacto izquierdo para cada $E \in \mathcal{E}$ y $K \in \mathrm{S}_{fi}(E)$. Más aún, r es un prerradical exacto izquierdo si y sólo si* $r = \bigwedge\{\omega_{r(E)}^E \mid E \in \mathcal{E}\}$.

(e) ω_0^E *es un radical exacto izquierdo para cada $E \in \mathcal{E}$. Más aún, r es un radical exacto izquierdo si y sólo si $r = \bigwedge\{\omega_0^E \mid r(E) = 0$ and $E \in \mathcal{E}\}$.*

(f) α_I^{R} *es un $t-$radical. De hecho, r es un $t-$radical si y sólo si* $r = \alpha_{r(\mathrm{R}).}^{\mathrm{R}}$

La siguiente proposición puede ser consutada en [25, Lemma 16] y [15, Proposición 2.39].

Proposición 1.3.14 *Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Sean $M = \bigoplus\{M_i\}_{i\in I}$ y $N = \bigoplus\{N_i\}_{i\in I}$ en $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ tales que $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$. Entonces $N_i \in \mathrm{S}_{fi}(M_i)$ para cada $i \in I$; y $\alpha_N^M = \bigvee\{\alpha_{N_i}^{M_i} \mid i \in I\}$.*

(b) *Sean $M = \prod\{M_i\}_{i\in I}$ y $N = \prod\{N_i\}_{i\in I}$ en $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ tales que $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$. Entonces $N_i \in \mathrm{S}_{fi}(M_i)$ para cada $i \in I$; y $\omega_N^M = \bigwedge\{\omega_{N_i}^{M_i} \mid i \in I\}$.*

A continuación mencionamos algunas propiedades de prerradicales en $\sigma[M]$ (ver [33, Section 2]).

Proposición 1.3.15 *[33] Sean $N, L \in \sigma[M]$ y K un submódulo totalmente invariante de N. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\alpha_N^N(L) = Tr_N(L)$.

(b) $\omega_0^N(L) = Rej_N(L)$.

(c) *Si L es $N-$inyectivo, entonces* $\alpha_K^N(L) = \alpha_K^K(L)$.

(d) *Si L es $M-$proyectivo, entonces $\omega_K^N(L) = \omega_0^{N/K}(L)$.*

(e) *Si N es proyectivo en $\sigma[M]$, entonces α_K^N es un prerradical cohereditario.*

(f) *Si N es $M-$inyectivo, entonces ω_K^N es un prerradical hereditario.*

Proposición 1.3.16 *[25, Theorem 8] Sean $\sigma,\tau,\eta \in \mathrm{R}\text{-pr}$, $\{r_\alpha\}_\alpha \subseteq \mathrm{R}\text{-pr}$ y $M \in \mathrm{R-Mod}$. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si $\sigma \preceq \tau$, entonces $\sigma \vee (\tau \wedge \eta) = \tau \wedge (\sigma \vee \tau)$.*

(b) *Si $\{r_\alpha\}_\alpha$ es una familia dirigida, entonces $\tau \wedge (\bigvee_\alpha r_\alpha) = \bigvee_\alpha (\tau \wedge r_\alpha)$.*

(c) $(\bigwedge_\alpha r_\alpha)\tau = \bigwedge_\alpha (r_\alpha \tau)$

(d) $(\bigvee_\alpha r_\alpha)\tau = \bigvee_\alpha (r_\alpha \tau)$

(e) $(\tau : \bigwedge_\alpha r_\alpha) = \bigwedge_\alpha (\tau : r_\alpha)$

1.3.2 Estructura retícular de $\mathrm{R}\text{-pr}$ y $\mathrm{M}\text{-pr}$.

Dada una categoría abeliana de Grothendieck $\mathbf{C}$, se satisface que la clase de los prerradicales de $\mathbf{C}$ forma una gran retícula completa, modular y superiormente continua, ver [38, Chapter VI, Exercise $\S 1.7$].

En el caso de $\mathrm{R-Mod}$, R. Fernández-Alonso, F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón y C. Signoret comenzaron el estudio de la estructura reticular de $\mathrm{R}\text{-pr}$. Ellos demostraron que $\mathrm{R}\text{-pr}$ con el orden parcial $\preceq$, es una gran retícula completa, atómica, coatómica, modular y superiormente continua, ver [25, Theorem 7] y [25, Theorem 8].

El menor y el mayor elemento son denotados respectivamente por $\underline{0}$ y $\underline{1}$. La clase de los átomos y la clases de los coátomos de $\mathrm{R}\text{-pr}$ son, $\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in \mathrm{R}\text{-simp}\}$ y $\{\omega_I^{\mathrm{R}} \mid I$ es un ideal bilateral máximo de $\mathrm{R}\}$, respectivamente.

Posteriormente, en [33] F. Raggi, J. Ríos y R. Wisbauer, demostraron que en el caso de $\sigma[M]$, $M - pr$ resulta ser una gran retícula completa, modular, superiormente continua y atómica. La clase de los átomos en $M - pr$ es $\{\alpha_S^{E(S)} \mid S$ es simple en $\sigma[M]\}$, donde $\widehat{S}$ denota la cápusla M-inyectiva de S. Sin embargo, $M - pr$ no necesariamente es coatómica (ver [33, Example 2.7]). En el siguiente teorema, F. Raggi, J. Ríos y R. Wisbauer describen cuando $M - pr$ es coatómico.

Teorema 1.3.17 *[33, Theorem 2.7] Para $M \in \mathrm{R-Mod}$ y G un generador en $\sigma[M]$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *La gran retícula $M - pr$ es coatómica.*

(b) *Cada submódulo propio totalmente invariante de G está contenido en un submódulo totalmente invariante máximo.*

Por otro lado, en [27, Theorem 4], se demostró que $\mathrm{R}\text{-pr}$ es una gran retícula fuertemente seudocomplementada, describiendo específicamente el seudocomplemento fuerte de cada elemento en $\mathrm{R}\text{-pr}$. Para cada $r \in \mathrm{R} - pr$,

$$\bigwedge\{\omega_0^{E(S)} \mid S \in \mathrm{R}\text{-simp}, r(E(S)) \neq 0\}$$

es el seudocomplemento fuerte de r en R-pr; y se denota $r^{\perp}$.

Notemos que $r^{\perp}$ es un radical exacto izquierdo; y puede ser descrito también como $r^{\perp} = \omega_0^{U_r}$, donde $U_r := \prod\{E(S) \mid r(E(S)) \neq 0\}$.

Cabe mencionar que en [33, 2.4] los autores también demostraron que $M - pr$ es fuertemente seudocomplementada.

En el Capítulo siguiente, abordaremos dos demostraciones más al hecho de que R-pr es fuertemente seudocomplementada.

1.3.3 Cuantales y casi-cuantales.

Como se menciona en [20], el concepto de cuantal surgió en la decada de los 20, cuando W. Krull, R.P. Dilworth y M. Ward consideraron una retícula de ideales equipada con una multiplicación; debiéndose el nombre de cuantal a C.J. Mulvey.

Definición 1.3.18 *Sea Q una $\bigvee$-semiretícula, Q es un* **cuantal** *si Q tiene una operación binaria asociativa $\cdot : Q \times Q \to Q$ tal que*

$$\text{(LQ)} \qquad l\left(\bigvee X\right) = \bigvee \{lx \mid x \in X\}, \text{ y}$$

$$\text{(RQ)} \qquad \left(\bigvee X\right) r = \bigvee \{xr \mid x \in X\}$$

se satisfacen para cada $l, r \in Q$ y $X \subseteq Q$.

Notemos que si en la previa definición consideramos ´nfimos en lugar de supremos, entonces obtenemos el cuantal dual con respecto a ínfimos.

En caso de que sólo la condición (LQ) (respectivamente (RQ)) se satisfaga, algunos autores le llaman a Q un quantal izquierdo (respectivamente cuantal derecho).

Obsérvese que cualquier marco es un cuantal, con la operación $\wedge$. Otros ejemplos de cuantales son la retícula de ideales izquierdos, la retícula de ideales derechos y la retícula de ideales bilaterales de un anillo dado, con la operación de multiplicación de ideales conocida. Además de estos, de acuerdo con [20], también la retícula de filtros prerradicales con la operación de multiplicación de Gabriel para filtros prerradicales satisface (LQ).

En [21], se introduce una generalizacón del concepto de cuantal. A continuación presentamos la definición de casi-cuantal y mencionamos algunos ejemplos.

Definición 1.3.19 *Sea A una $\bigvee$-semiretícula. Decimos que A es un* **casi-cuantal** *si tiene un poducto asociativo $\cdot : A \times A \to A$ tal que para cualesquiera subconjuntos dirigidos $X, Y \subseteq A$ y $a \in A$:*

$$\text{(RDQ)} \qquad \left(\bigvee X\right) a = \bigvee \{xa \mid x \in X\}, \text{ y}$$

$$\text{(LDQ)} \qquad a\left(\bigvee Y\right) = \bigvee \{ay \mid y \in Y\}.$$

Decimos que A es un **casi-cuantal unitario-izquierdo (resp.unitario-derecho, resp. unitario-bilateral)** *si existe $e \in A$ tal que $e(a) = a$ (resp. $(a)e = a$, resp. $e(a) = a = (a)e$) para todo $a \in A$.*

Ejemplo 1.3.20 *1. Si A es una retícula completa, modular y superiormente continua; entonces A es un casi-cuantal bilateral, con $\wedge\colon A \times A \to A$.*

2. *Sean R un anillo con identidad y $\mathrm{S}_{fi}(R) = \{I \subseteq R \mid I$ ideal bilateral $\}$. Entonces, $Bil(R)$ es un casi-cuantal bilateral con el producto de ideales. Además, $RI = I = IR$ para cada $I \in Bil(R)$. Mas aún, $\mathrm{S}_{fi}(R)$ satisface $(\sum_{\mathcal{J}} I_i)J = \sum_{\mathcal{J}} (I_i J)$ y $J(\sum_{\mathcal{J}} I_i) = \sum_{\mathcal{J}} (JI_i)$, para cada $\{I_i\}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{S}_{fi}(R)$.*

   Por otro lado, nótese que $S(R) = \{I \subseteq R \mid I$ es un ideal izquierdo$\}$ es únicamente un casi-cuantal unitario-izquierdo.

3. *Cualquier cuantal es un casi-cuantal.*

Proposición 1.3.21 *En R-pr se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) R-pr, *con el producto de prerradicales* $\cdot : \mathrm{R}\text{-}\mathrm{pr} \times \mathrm{R}\text{-}\mathrm{pr} \to \mathrm{R}\text{-}\mathrm{pr}$, *definido por* $(r \cdot s)(M) = r(s(M))$ *para cada* $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$, *satisface (RQD).*

(b) R-pr *con la operación* $\wedge$ *es un casi-cuantal unitario-bilateral que no es un cuantal.*

Demostración. Es consecuencia de 1.3.16.

□

Definición 1.3.22 *[5, Lemma 2.1] Sea $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$, $N, L \in \S(M)$. Se define el producto $N_M L = \sum\{f(N) | f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M, L)\}$.*

Observación 1.3.23 *[21, Remark 4.1] Este producto satisface las siguientes condiciones para cada $K, K' \in S(M)$:*

(a) *Si $K \subseteq K'$ entonces $K_M X \subseteq K'_M X$ para cada módulo X.*

(b) *Si X es un módulo izquierdo y $Y \subseteq X$ entonces $K_M Y \subseteq K_M X$.*

(c) $M_M X \subseteq X$ *para cada módulo X.*

(d) $K_M X = 0$ *si y sólo si* $f(K) = 0$ *para cada* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M, X)$.

(e) $0_M X = 0$ *para cada X.*

(f) *Sea $\{X_i \mid i \in I\}$ una familia de submódulos de M, entonces $\sum_{i \in I} (K_M X_i) \subseteq K_M \left(\sum_{i \in I} X_i\right)$.*

(g) $\left(\sum_{i \in I} K_i\right)_M N = \sum_{i \in I} K_{iM} N$ *para cada familia de submódulos $\{K_i \mid i \in I\}$ of M.*

En general, este producto no es asociativo; pero en el caso en que M sea proyectivo en $\sigma[M]$, eso se satisface.

Observación 1.3.24 *[21, Remark 4.2] Sea $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ y proyectivo en $\sigma[M]$. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *El producto* $-_M- : \Lambda(M) \times \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ *es asociativo.*

(b) $K_M\left(\sum_{i\in I} X_i\right) = \sum_i (K_M X_i)$ *para cada familia dirigida de submódulos* $\{X_i \mid i \in I\}$ *de* M.

(c) *Si* $N, L \in \mathrm{S}_{fi}(M)$, *entonces* $N_M L \in \mathrm{S}_{fi}(M)$ *y por lo tanto el producto* $-_M-$ *está bien restrigido en* $\mathrm{S}_{fi}(M)$.

Proposición 1.3.25 *[21, Proposition 4.3] Sea* $M \in \mathrm{R{-}Mod}$. *Si* M *es proyectivo en* $\sigma[M]$, *las siguientes condiciones se satisfacen.*

(1) $S(M)$ *es un casi-cuantal.*

(2) $\mathrm{S}_{fi}(M)$ *es un sub casi-cuantal unitario-derecho de* $S(M)$.

Capítulo 2

Seudocomplementos

2.1 $\mathrm{R\text{-}pr}$ es una gran retícula fuertemente seudocomplementada, dos demostraciones más.

Los siguientes dos resultados nos permiten exhibir que $\mathrm{R\text{-}pr}$ tiene seudocomplementos únicos, de una forma distinta a las ya exhibidas, utilizando propiedades del cogenerador inyectivo mínimo de $\mathrm{R-Mod}$.

Definición 2.1.1 *Sean* $M \in \mathrm{R{-}Mod}$ *y* $L, N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$. *Decimos que* L *es un* $\boldsymbol{fi}$**−suplemento (fuerte) de** N *si* L *es un suplemento (fuerte) de* N *en* $\mathrm{S}_{fi}(M)$.

Proposición 2.1.2 *En* $\mathrm{R\text{-}pr}$ *las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\mathrm{R\text{-}pr}$ *es fuertemente seudocomplementada.*

(b) $S_{fi}(E)$ *es fuertemente seudocomplementada, donde* $E \in \mathrm{R-Mod}$ *es el cogenerador inyectivo mínimo de* $\mathrm{R-Mod}$.

Demostración. (a)⇒(b) Sea $N \in S_{fi}(E)$. Consideremos el prerradical ω_N^E. Por (a), sea $s \in \mathrm{R\text{-}pr}$ el seudocomplemento fuerte de ω_N^E en $\mathrm{R\text{-}pr}$. Veamos que $s(E)$ es fi-seudocomplemento fuerte de N en E.

Primero, $N \cap s(E) = \omega_N^E(E) \cap s(E) = (\omega \wedge s)(E) = 0$. Ahora, sea $K \in S_{fi}(E)$ tal que $K \cap N = 0$. Entonces, $(\omega_K^E \wedge \omega_N^E)(E) = 0$. Por el Lema 3.1.6, $\omega_K^E \wedge \omega_N^E = \underline{0}$. De ahí que $\omega_K^E \leq s$; y por lo tanto $K \leq s(E)$.

(b)⇒(a) Sea $r \in \mathrm{R\text{-}pr}$, con $r \neq \underline{0}$. Entonces, por 3.1.6, $r(E) \neq 0$. Sea $C \in S_{fi}(E)$ el $fi-$seudocomplemento fuerte de $r(E)$ en E.

Veamos que ω_C^E es el seudocomplemento fuerte de r en $\mathrm{R\text{-}pr}$.

Primero, notemos que $(\omega_C^E \wedge r)(E) = C \cap r(E) = 0$. Así que por 3.1.6, $\omega_C^E \wedge r = \underline{0}$ Finalmente, sea $\tau \in \mathrm{R\text{-}pr}$ tal que $\tau \neq \underline{0}$ y $\tau \wedge r = \underline{0}$. Entonces, por el Lema 3.1.6, $\tau(E) \cap r(E) = 0$. Luego, $\tau(E) \leq C$, pues C es el $fi-$seudocomplemento fuerte de $r(E)$. Por lo tanto, $\tau \preceq \omega_C^E$.

□

Teorema 2.1.3 *Sean* $E_0 := E(\bigoplus\{S : S \in \mathrm{R\text{-}simp}\})$ *el cogenerador inyectivo mínimo de* $\mathrm{R-Mod}$. *Entonces,* $S_{fi}(E_0)$ *(la retícula de submódulos totalmente invariantes de* E_0*) es fuertemente seudocomplementada.*

Demostración. Sea $N \in S_{fi}(E)$. Afirmamos que $\omega_N^E(E)$ es fi-seudocomplemento fuerte para N en E.

Primero notemos que $\omega_N^E(E) \cap N = 0$.

Ahora, sea $K \in S_{fi}(E)$ tal que $K \cap N = 0$. Veamos que $\omega_N^E(E)$

□

Finalmente, damos una segunda demostración alternativa a que R-pr es fuertemente seudocomplementada, basada en el comportamiento de la retícula se submódulos totalmente invariantes del cogenerador inyectivo mínimo de $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$.

Teorema 2.1.4 R-pr *es fuertemente seudocomplementada.*

Demostración. Es consecuencia de los teorema 2.1.2 y 2.1.3.

□

2.1.1 Segunda demostración alternativa.

Denotemos por $\mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus\}}$ la retícula de las clases de pretorsión hereditarias en $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$, ordenadas por la inclusión de clases. Denotaremos por $\mathrm{R}{-}\mathrm{lep}$ a la retícula de prerradicales exactos izquierdos en $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$.

Teorema 2.1.5 *Existe un isomorfismo de retículas* $\psi : \mathrm{R}-\mathrm{lep} \longrightarrow \mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus\}}$ *dado por* $\psi(r) := \mathbb{T}_r$.

Demostración. Es suficiente ver que ψ es una correspondencia biyectiva que preserva el orden en ambas direcciones. Esto se puede consultar en [38, Corollary 1.8].

□

Ahora, denotaremos por $\mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$ a la gran retícula de clases abiertas en $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$. Cabe mencionar, que una clase abierta en $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ es una clase de módulos que es cerrada bajo tomar submódulos y cocientes. Es claro que cada clase de pretorsión hereditaria es una clase abierta.

Teorema 2.1.6 *[30, Section 2] [3, Lemma 1.7]* $\mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ *es una gran retícula fuertemente seudocomplementada. El seudocomplemento fuerte de* $\mathcal{C} \in \mathscr{L}_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ *está dado por*

$$\mathcal{C}^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}} := \{M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod} \mid M \text{ no tiene subcocientes distintos de cero en } \mathcal{C}\}.$$

Más aún, $\mathcal{C}^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}}$ *es una clase de torsión hereditaria que pertenece al esqueleto de* $\mathrm{R}-\mathrm{tors}$.

Lema 2.1.7 $\mathrm{R}-\mathrm{lep}$ *es una retícula fuertemente seudocomplementada.*

Demostración. Sean $r \in \mathrm{R}$-pr y $\mathbb{T}_r$ la correspondiente clase de pretorsión hereditaria asociada a r. Definimos $\tau_r := \psi^{-1}((\mathbb{T}_r)^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}})$, donde ψ es el isomorfismo de retículas del Teorema 2.1.6.

Para comenzar, notemos que $r \wedge \tau_r = \underline{0}$. Esto se debe a que ψ es un isomorfismo de retículas y por lo tanto, $r \wedge \tau_r = \underline{0}$ si y sólo si $\psi(r \wedge \tau_r) = \psi(r) \cap \psi(\tau_r) = \mathbb{T}_r \cap (\mathbb{T}_r)^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}} = \{0\}$.

Ahora, sea $t \in \mathrm{R}$-pr tal que $r \wedge t = \underline{0}$. Dado que ψ es un isomorfismo de retículas, entonces $\{0\} = \psi(r) \cap \psi(t) = \mathbb{T}_r \cap \mathbb{T}_t$, luego, $\mathbb{T}_t \leq (\mathbb{T}_r)^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}}$. Por lo tanto, $t = \psi^{-1}(\mathbb{T}_t) \leq \psi^{-1}((\mathbb{T}_r)^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}}) = \tau_r$. Finalmente, concluimos que τ_r es el seudocomplemento fuerte de r en $\mathrm{R}{-}\mathrm{lep}$.

Sea $r \in \mathrm{R}{-}\mathrm{lep}$. Denotaremos por $r^{\perp_{lep}} := \tau_r$ al seudocomplemento fuerte de r in $R{-}\mathrm{lep}$.

Teorema 2.1.8 R-pr *es una gran retícula fuertemente seudocomplementada.*

Demostración. Sean $\gamma \in \mathrm{R}$-pr $\widetilde{\gamma}$ el prerradical exacto izquierdo asociado a γ. Por el Lema 2.1.7, $(\widetilde{\gamma})^{\perp_{lep}}$ es el seudocomplemento fuerte de γ en $\mathrm{R}{-}\mathrm{lep}$.

Veremos que $(\widetilde{\gamma})^{\perp_{lep}}$ también es el seudocomplemento fuerte de γ en R-pr. Como $\gamma \preceq \widetilde{\gamma}$, entonces $\gamma \wedge (\widetilde{\gamma})^{\perp_{pei}} \preceq \widetilde{\gamma} \wedge (\widetilde{\gamma})^{\perp_{pei}} = \underline{0}$. Por lo tanto, $\gamma \wedge (\widetilde{\gamma})^{\perp_{pei}} = \underline{0}$.

Ahora, sea $\tau \in \mathrm{R}{-}\mathrm{pr}$ tal que $\gamma \wedge \tau = \underline{0}$. El hecho que $\gamma \wedge \tau = \underline{0}$ implica que para cada $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ se tiene que $(\widetilde{\tau} \wedge \widetilde{\gamma})(M) = [M \cap \tau(E(M))] \cap [M \cap \gamma(E(M))] = M \cap \tau(E(M)) \cap \gamma(E(M)) = M \cap (\tau \wedge \gamma)(E(M)) = 0$.

Entonces, $\widetilde{\tau} \wedge \widetilde{\gamma} = \underline{0}$. Finalmente, por el Lema 2.1.7 , concluimos que $\widetilde{\tau} \preceq (\widetilde{\gamma})^{\perp_{lep}}$. Por lo tanto, $\tau \preceq \widetilde{\tau} \preceq (\gamma)^{\perp_{lep}}$.

Por lo tanto, R-pr es una gran retícula fuertemente seudocomplementada.

□

Sean $\mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus}$ la retícula de clases de pretorsión hereditarias en $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$; y $\mathrm{R}{-}\mathrm{pei}$ la retícula de prerradicales exactos izquierdos en $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$. Como sabemos, existe un isomorfismo de retículas

$$\psi : \mathrm{R}{-}pei \longrightarrow \mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus} \text{ con}$$
$$\psi(\sigma) := \mathbb{T}_\sigma, \text{ y } \psi^{-1}(\mathcal{C}) := Tr_{\mathcal{C}};$$

donde $\mathbb{T}_\sigma$ es la clase de pretorsión hereditaria asociada a σ y $Tr_{\mathcal{C}}$ es el prerradical traza a lo largo de $\mathcal{C}$.

Observación 2.1.9 $\mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus} \subseteq \mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$, *donde* $\mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$ *es la reticula de clases abiertas en* $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$. *Por [30] y [3, Lema 1.7], sabemos* $\mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$ *es* $S-$*pseudocomplementada y que para cada* $\mathcal{C} \in \mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$, $\mathcal{C}^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}}$ *es cerrada por sumas directas y extensiones. Por lo tanto, para cada* $\mathbb{T} \in \mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus}$, *tenemos que* $\mathbb{T}^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}} \in \mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\oplus}$.

Enseguida, usando el isomorfismo de retículas ψ, demostraremos que:

(a) $\mathrm{R} - pei$ es fuertemente seudocomplementada; y

(b) $\mathrm{R} - pr$ es fuertemente seudocomplementada.

Demostración. (a) Sean $\sigma \in \mathrm{R}{-}\mathrm{pei}$ y $\mathbb{T}_\sigma$ la clase de pretorsión hereditaria asociada a σ. Consideremos la clase $(\mathbb{T}_\sigma)^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}}$ y definamos $\tilde{\sigma} := \psi^{-1}((\mathbb{T}_\sigma)^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}})$. Esto es, $\tilde{\sigma} = Tr_T$, con
$T = (\mathbb{T}_\sigma)^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}} = \{M : M$ no tiene subcocientes distintos de cero en $\mathbb{T}_\sigma\}$.

Notemos que,

(i) $\sigma \wedge \tilde{\sigma} = 0$.

En efecto, ya que por el hecho de que ψ es un isomorfismo de retículas, tenemos que $\sigma \wedge \tilde{\sigma} = 0$ si y sólo si $\psi(\sigma \wedge \tilde{\sigma}) = 0$. Pero $\psi(\sigma \wedge \tilde{\sigma}) = \psi(\sigma) \cap \psi(\tilde{\sigma}) = \mathbb{T}_\sigma \cap (\mathbb{T}_\sigma)^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}} = \{0\}$.

(ii) Si $\tau \in \mathrm{R}{-}\mathrm{pei}$ satisface que $\sigma \wedge \tau = 0$, entonces $\tau \leq \tilde{\sigma}$.

Como ψ es un isomorfismo, $\sigma \wedge \tau = 0$ si y sólo si $\psi(\sigma \wedge \tau) = 0$. Esto es, $\sigma \wedge \tau = 0$ si y sólo si $\mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_\sigma = \{0\}$ si y sólo si $\mathbb{T}_\tau \leq (\mathbb{T}_\sigma)^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}}$ si y sólo si $\tau = \psi^{-1}_{(}\mathbb{T}_\tau) \leq \psi^{-1}((\mathbb{T}_\sigma)^{\perp_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}}) = \tilde{\sigma}$.

De los incisos (i) y (ii) concluimos que $\tilde{\sigma}$ es el seudocomplemento fuerte de σ en $\mathrm{R-pei}$. Por lo tanto, $\mathrm{R}-pei$ es fuertemente pseudocomplementada.

Denotaremos $\sigma^{\perp_{pei}} := \tilde{\sigma} = \psi^{-1}((\mathbb{T}_\sigma)^{\perp_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}})$ al $S-$pseudocomplemento de σ en $\mathrm{R-pei}$.

(b) Para cada $\gamma \in \mathrm{R}-pr$, tenemos asociado el prerradical exacto izquierdo ρ_γ : $\mathrm{R-Mod} \longrightarrow \mathrm{R-Mod}$ dado por $\rho_\gamma(M) = M \cap \gamma(E(M))$; el cual satisface la desigualdad $\gamma \leq \rho_\gamma$.

Sea $\gamma^{\smile} := (\rho_\gamma)^{\perp}$.

Notemos que,

(i) $\gamma \wedge \gamma^{\smile} = 0$.

Como $\gamma \leq \rho_\gamma$, entonces $\gamma \wedge (\rho_\gamma)^{\perp_{pei}} \leq \rho_\gamma \wedge (\rho_\gamma)^{\perp_{pei}}$

(ii) Si $\tau \in \mathrm{R-pr}$ satisface que $\gamma \wedge \tau = 0$, entonces $\tau \leq \sigma^{\smile}$.

Dado que $\gamma \wedge \tau = 0$, entonces para cada $M \in \mathrm{R-Mod}$ tenemos que

$(\rho_\tau \wedge \rho_\gamma)(M) = M \cap \tau(E(M)) \cap M \cap \gamma(E(M)) = \tau(M) \cap \gamma(E(M)) = (\tau \wedge \gamma)(E(M)) = 0$. Por lo tanto, $\rho_\tau \wedge \rho_\gamma = 0$. Aplicando el inciso (a)(ii), $\rho_\tau \leq (\rho_\gamma)^{\perp_{pei}} = \gamma^{\smile}$.

De lo anterior, concluimos que $\tau \leq \rho_\tau \leq \gamma^{\smile}$.

Por lo tanto, $\mathrm{R-pr}$ es fuertemente seudocomplementada.

$\square$

Capítulo 3

Esencialidad en R-pr.

3.1 Preliminares

Proposición 3.1.1 *Sean $S, T \in \mathrm{R}$-simp tales que $S \ncong T$. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $\alpha_T^{E(T)}(S) = 0.$

(b) $\alpha_T^{E(T)}(E(S)) = 0.$

Demostración. (a) $\alpha_T^{E(T)}(S) \neq 0$ implica $\alpha_T^{E(T)}(S) = S$. Entonces, $\alpha_S^S \preceq \alpha_T^{E(T)} \preceq \alpha_T^T$. De donde, $\alpha_S^S = \alpha_T^{E(T)} \preceq \alpha_T^T$. Por lo tanto llegamos a la contradicción $S = \alpha_S^S(S) \leq \alpha_T^T(S) = 0$.
(b) Sean $0 \neq f : E(T) \to E(S)$ y $\varepsilon_T : T \to E(T)$ la cápsula inyectiva de T. Consideremos $f \circ \varepsilon_T : T \to E(S)$. Si $f \circ \varepsilon \neq 0$, entonces es un monomorfismo y $S \cap T \neq 0$ llegando a la contradicción $T \cong S$.

Así, para cada $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(E(T), E(S))$, se tiene que $f(T) = 0$. Por lo tanto, $\alpha_T^{E(T)}(E(S)) = 0$.

□

Definición 3.1.2 *[27, Def. 14] Sea $\sigma \in \mathrm{R}$-pr. Decimos que σ es* **extremo** *si $E(S) \in \mathbb{T}_r$ o $E(S) \in \mathbb{F}_r$ para cada $S \in \mathrm{R}$-simp.*

Proposición 3.1.3 *Sea $S \in \mathrm{R}$-simp. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$

(b) S *es inyectivo.*

(c) $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_{E(S)}^{E(S)}$

(d) $\alpha_S^{E(S)}$ *es un prerradical extremo.*

(e) $\alpha_S^{E(S)}$ *es idempotente.*

Demostración. (a)⇒(b) $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$ implica $\alpha_S^{E(S)}(S) = S$. Supongamos que $S \ncong E(S)$. Sea $0 \neq f : E(S) \to S$. Como S es simple, f es suprayectivo. Si $\mathrm{Ker}(f) \neq 0$, entonces $S \subseteq \mathrm{Ker}(f)$; y por lo tanto $f(S) = 0$.

De donde, si cada $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(E(S), S)$ f no fuera inyectiva, entonces $\alpha_S^{E(S)}(S) = 0$, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, existe $g : E(S) \to S$ isomorfismo.

(b) $\Rightarrow$ (a) S inyectivo implica $E(S) = S$. Por lo tanto es claro que $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$.

(b)$\Rightarrow$ (c) Es inmediato, pues en este caso, $S = E(S)$.

(c)$\Rightarrow$ (b) $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_{E(S)}^{E(S)}$ implica que $S = \alpha_S^{E(S)}(E(S)) = \alpha_{E(S)}^{E(S)}(E(S)) = E(S)$.

(c)$\Rightarrow$ (d) La Observación 3.1.1 implica que $\alpha_S^{E(S)}(E(T)) = 0$ para cada $T \in \mathrm{R}\text{-simp}$ con $T \ncong S$; y el inciso (c) implican que $\alpha_S^{E(S)}(E(S)) = E(S)$.

(d)$\Rightarrow$(b) Dado que $\alpha_S^{E(S)}$ es extremo y $\alpha^{E(S)}S(E(S)) = S \neq 0$, se sigue que $\alpha^{E(S)}S(E(S)) = E(S)$. Por lo tanto, S es inyectivo.

$\square$

Observación 3.1.4 *Para* $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$ *y* $S \in \mathrm{R}\text{-simp}$, $r(E(S)) \neq 0$ *si y sólo si* $\alpha_S^{E(S)} \preceq r$.

Observación 3.1.5 *Para* $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$, *es fácil ver que* $r = \underline{1}$ *si y sólo si* $r(\mathrm{R}) = \mathrm{R}$. *Además,* $r = \underline{0}$ *si y sólo si* $r(E(S)) = 0$ *para cada* $S \in \mathrm{R}\text{-simp}$.

Lema 3.1.6 *Sea* E *un cogenerador para* $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ *y* $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$. *Entonces* $r = \underline{0}$ *si y sólo si* $r(E) = 0$.

Demostración. Primero, si $r = \underline{0}$ entonces $r(E) = 0$. Recíprocamente, sea $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$ tal que $r(E) = 0$. Si $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$, existe un monomorfismo $0 \to M \xrightarrow{f} E^X$. Así que obtenemos una sucesión exacta $0 \to r(M) \xrightarrow{r(f)} r(E^X)$. Como $r(E^X) \leq E^X$, entonces tenemos que cada x-th projection $\pi_x : E^X \to E$ se restringe a un morfismo $r(\pi_x) : r(E^X) \to r(E)$. De ahí que $r(E^X) \leq r(E)^X = 0$. Por lo tanto $r(M) = 0$ para cada $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$.

3.2 Zoclos y prerradicales esenciales.

Definición 3.2.1 *El* **zoclo reticular** *en* $\mathrm{R}\text{-pr}$, *se define como*

$$\underline{\mathrm{zoc}} := \bigvee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in \mathrm{R}\text{-simp}\},$$

el supremo de los átomos en $\mathrm{R}\text{-pr}$.

Por otro lado, recordemos que en $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ también tenemos el prerradical exacto izquierdo $\mathrm{zoc} : \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ dado por $\mathrm{zoc}(M) := \sum\{S \leq M : S \in \mathrm{R}\text{-simp}\}$. Además, $\mathrm{zoc}(M) := \cap\{N \leq M : N$ es esencial en $M\}$.

Notemos que $\mathrm{zoc} = \bigvee\{\alpha_S^S \mid S \in \mathrm{R}\text{-simp}\}$.

Observación 3.2.2 *En* $\mathrm{R}\text{-pr}$ *se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $\alpha_S^{E(S)} \leq \alpha_S^S$ *para cada* $S \in \mathrm{R}\text{-simp}$.

(b) $\underline{\mathrm{zoc}} \leq \mathrm{zoc}$.

Demostración. (a) Sea $S \in \mathrm{R}$-simp. Para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(S, E(S))$, se tiene que f es un monomorfismo y con ello $f(S) \cong S$. De donde, $\alpha_S^S(E(S)) = \sum\{f(S) : f \in \mathrm{Hom}(S, E(S))\} = S$. Por lo tanto, $\alpha_S^{E(S)} \leq \alpha_S^S$.

(b) Por (a), tenemos que $\alpha_S^{E(S)} \leq \alpha_S^S$ para cada $S \in \mathrm{R}$-simp. De ahí es inmediato que $\underline{\mathrm{zoc}} = \bigvee\{\alpha_S^{E(S)} : S \in \mathrm{R}\text{-simp}\} \leq \bigvee\{\alpha_S^S : S \in \mathrm{R}\text{-simp}\} = \mathrm{zoc}$.

□

Lema 3.2.3 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\alpha_S^{E(S)} \lneqq \alpha_S^S$ *para algún* $S \in \mathrm{R}$-simp.

(b) $\underline{\mathrm{zoc}} \lneqq \mathrm{zoc}$.

Demostración. [(a)⇒(b)] La condición $\alpha_S^{E(S)} \lneqq \alpha_S^S$ implica que $\alpha_S^{E(S)}(S) = 0$. Así que $\underline{\mathrm{zoc}}(S) = 0$ mientras que $\mathrm{zoc}(S) = S$. Por lo tanto, la desigualdad vista en la observación 3.2.2 (b) es estricta.

[(b)⇒(a)] Por (a) $\underline{\mathrm{zoc}} \lneqq \mathrm{zoc}$. Si ocurriera $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$ para cada $S \in \mathrm{R}$-simp, obtendríamos que $\underline{\mathrm{zoc}} = \mathrm{zoc}$.

Por lo tanto, existe $S \in \mathrm{R}$-simp tal que $\alpha_S^{E(S)} \lneqq \alpha_S^S$.

□

En la siguiente proposición, agregamos algunas equivalencias a [25, Theorem 15].

Proposición 3.2.4 *Sea* R *un anillo con* 1. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) R *es un V-anillo.*

(b) $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$ *para cada* $S \in \mathrm{R}$-simp.

(c) $\underline{\mathrm{zoc}} = \mathrm{zoc}$.

Demostración. [(a) $\Longleftrightarrow$ (b)] Ver [25, Theorem 15]

[(b) $\Longleftrightarrow$ (c)] Se sigue de la Observación 3.2.2 y el Lema 3.2.3.

Observación 3.2.5 *Sea* $S \in \mathrm{R}$-simp. *Entonces,* $\underline{\mathrm{zoc}}(S) = 0$ *si y sólo si* S *no es inyectivo.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ $\underline{\mathrm{zoc}}(S) = 0$ implica $\alpha_S^{E(S)}(S) = 0$. De ahí $\alpha_S^{E(S)} \lneqq \alpha_S^S$; y por lo tanto, S no puede ser inyectivo.

$(\Leftarrow)$ Notemos que $\underline{\mathrm{zoc}}(S) = \alpha_S^{E(S)}(S)$. Luego, si $\alpha_S^{E(S)}(S)$. Luego, si $\alpha_S^{E(S)}(S) = S$, entonces $\alpha_S^S \leq \alpha_S^{E(S)}$ y por lo tanto $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$, concluyéndose que S es inyectivo.

□

Recordemos que la teoría de torsión de Dickson es la teoría de torsión hereditaria generada por R-simp. Observe que $\overline{\mathrm{zoc}}$ corresponde al radical exacto izquierdo para la Teoría de torsión de Dickson.

Proposición 3.2.6 *Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\overline{\widetilde{(\underline{\mathrm{zoc}})}} = \overline{\mathrm{zoc}}$.

(b) $\overline{(\underline{\mathrm{zoc}})} \preceq \bigwedge\{\omega_0^S \mid S \in \text{R-simp}, S \neq E(S)\}$.

<u>Demostración.</u> (a) Primero, como una consecuencia de la Observación 3.2.2, se sigue que $\overline{\widetilde{(\underline{\mathrm{zoc}})}} \preceq \overline{\mathrm{zoc}}$.

Para la otra desigualdad, notemos que $S \in \mathbb{T}_{\widetilde{(\underline{\mathrm{zoc}})}}$ para cada $S \in \text{R-simp}$. En efecto, $\widetilde{(\underline{\mathrm{zoc}})}(S) = S \cap \underline{\mathrm{zoc}}(E(S)) = S \cap (\alpha_S^{E(S)})(E(S)) = S$. De donde, $\text{R-simp} \subseteq \mathbb{T}_{\widetilde{(\underline{\mathrm{zoc}})}}$. Entonces $\mathbb{T}_{\widetilde{(\underline{\mathrm{zoc}})}} \subseteq \mathbb{T}_{\overline{\widetilde{(\underline{\mathrm{zoc}})}}}$, por lo tanto $\text{R-simp} \subseteq \mathbb{T}_{\overline{\widetilde{(\underline{\mathrm{zoc}})}}}$. Dado que $\overline{\mathrm{zoc}}$ es el radical exacto izquierdo para la teoría de torsión generada por R-simp, concluimos que $\mathbb{T}_{\overline{\mathrm{zoc}}} \subseteq \mathbb{T}_{\overline{\widetilde{(\underline{\mathrm{zoc}})}}}$. Por lo tanto, $\overline{\mathrm{zoc}} \preceq \overline{\widetilde{(\underline{\mathrm{zoc}})}}$.

(b) Para cada $S \in \text{R-simp}$ con $S \neq E(S)$, de la Observación 3.2.5 tenemos que $\underline{\mathrm{zoc}}(S) = 0$. Entonces $\underline{\mathrm{zoc}} \preceq \omega_0^S$ para cada $S \in \text{R-simp}$ tal que $S \neq E(S)$. Luego, $\underline{\mathrm{zoc}} \preceq \bigwedge\{\omega_0^S \mid S \in \text{R-simp}, S \neq E(S)\}$. Dado que la clase de radicales es cerrada bajo tomar ínfimos, tenemos que $\bigwedge\{\omega_0^S \mid S \in \text{R-simp}, S \neq E(S)\}$ es un radical. Por lo tanto, $\overline{(\underline{\mathrm{zoc}})} \preceq \bigwedge\{\omega_0^S \mid S \in \text{R-simp}, S \neq E(S)\}$.

□

3.2.1 Prerradicales esenciales.

Definición 3.2.7 *Sea* $\underline{0} \neq r \in \text{R-pr}$. *Decimos que* $s \in [\underline{0}, r]$ *es un prerradical* $r-$**esencial** *si* $s \wedge t \neq \underline{0}$ *para cada* $\underline{0} \neq t \in [\underline{0}, r]$.

Definición 3.2.8 *Sea* $r \in \text{R-pr}$. *Decimos que* r *es un prerradical* **esencial** *si para cada* $\underline{0} \neq s \in \text{R-pr}$ *se satisface que* $r \wedge s \neq \underline{0}$.

Entonces, decimos que r es un prerradical **esencial** en R-pr, si r es un prerradical $\underline{1}-$esencial.

Denotamos por $\mathrm{Ess}(r)$ a la clase de los prerradicales $r-$esenciales; y $\mathrm{Ess}(\text{R-pr})$ a la clase de los prerradicales esenciales en R-pr.

Definimos **el** $r-$**zoclo** como $\underline{\mathrm{zoc}}_r := \bigvee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in \text{R-simp}, r(E(S)) \neq 0\}$. De esta definición se sigue que $\underline{\mathrm{zoc}}_r \preceq \underline{\mathrm{zoc}}$.

Proposición 3.2.9 *Sea* $r \in \text{R-pr}$. *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $r \in \mathrm{Ess}(\text{R-pr})$

(b) $r^{\perp} = \underline{0}$.

(c) U_r *es un cogenerador inyectivo para* $\mathrm{R} - \mathrm{Mod}$.

<u>Demostración.</u> [(a) $\iff$ (b)] Esto es una consecuencia de las definiciones de prerradical esencial y del seudocomplemento fuerte de un prerradical.

[(b) $\Rightarrow$ (c)] Por hipótesis, $r^{\perp} = \omega_0^{U_r} = \underline{0}$. Entonces, para cada $M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ tenemos que $0 = \omega_0^{U_r}(M) = \bigcap\{Ker(f) \mid f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M, Ur)\}$. Entonces, existe un monomorfismo $\varphi : M \to (U_r)^X$, mostrando que M está cogenerado por U_r. Por lo tanto, U_r es un cogenerador para $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$. Por definición, U_r es un módulo inyectivo.

$[(\mathrm{c}) \Rightarrow (\mathrm{b})]$ Recordemos que $r^{\perp} = \omega_0^{U_r}$. El hecho de que U_r sea un cogenerador para $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ implica que existe un monomorfismo $\varphi : M \to (U_r)^X$. Luego, $\omega_0^{U_r}(M) = 0$ para cada $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$. Por lo tanto, $\omega_0^{U_r} = \underline{0}$.

□

Observación 3.2.10 *En* R-pr *se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $r \in$ R-pr *es esencial si y sólo si* $r^{\perp} = \underline{0}$.

(b) *Para cada* $r \in$ R-pr, *se puede demostrar que* $r^{\perp} = \omega_0^{U_r}$, *con* $U_r = \prod\{E(S) : \sigma(E(S)) \neq 0\}$. *Así que en particular, para cada* $r \in$ R-pr *esencial, se satisface que* U_r *es un cogenerador inyectivo de* $\mathrm{R} - \mathrm{Mod}$.

Si ahora consideramos el radical exacto izquierdo ω_0^U, *donde* $U = \prod\{E(S) : S \in \text{R-simp}\}$ *es un cogenerador inyectivo de* $\mathrm{R} - Mod$; *tenemos que* $\underline{0} = \omega_0^U = \sigma^{\perp}$, *con* $\sigma := \bigvee\{\alpha_S^{E(S)} : S \in \text{R-simp}\}$.

(c) *En* [27, Proposition 11] *está definida la relación de equivalencia:* $r \sim s$ *en* R-pr *si y sólo si* $r^{\perp} = s^{\perp}$. *Además, demostraron que para cada* $r \in$ R-pr, $[r]_{\perp} = [\bigvee\{\alpha_S^{E(S)} : r(E(S)) \neq 0\}, r^{\perp\perp}]$.

(d) *En particular, observaron en* [27, Remark 12] *que* $[\underline{1}]_{\perp} = [\underline{\mathrm{zoc}}, \underline{1}]$,

De la definición de prerradical esencial, se sigue que esta clase es precisamente la de los esenciales. Esto es,

$$Esc(\text{R-pr}) = [\underline{1}]_{\perp} = [\underline{\mathrm{zoc}(\text{R-pr})}, \underline{1}].$$

Por lo tanto, $\underline{\mathrm{zoc}} = \bigwedge\{r \in \text{R-pr} : r \in Esc(\text{R-pr})\}$.

Observación 3.2.11 *Notemos que el hecho de que* $\underline{\mathrm{zoc}} \preceq \mathrm{zoc}$ *implica que* zoc *también es un prerradical esencial.*

Proposición 3.2.12 *Para cada* $r \in$ R-pr, *la clase de los prerradicales* $r-$*esenciales es precisamente el intervalo* $[\underline{\mathrm{zoc}}_r, r]$.

<u>Demostración.</u> Veamos que $\mathrm{Ess}(r) = [\underline{\mathrm{zoc}}_r, r]$.

Para cada $\underline{0} \neq t \in [\underline{0}, r]$, notemos que existe un átomo $\alpha_S^{E(S)}$ tal que $\alpha_S^{E(S)} \preceq r$ y $\alpha_S^{E(S)} \preceq t$; y por ende, $\alpha_S^{E(S)} \preceq t \wedge \underline{\mathrm{zoc}}_r$. Por lo tanto, $\underline{\mathrm{zoc}}_r$ es un prerradical $r-$esencial. Ahora, sea t un perradical $r-$esencial. Entonces, para cada átomo $\alpha_S^{E(S)} \preceq r$ se sigue que $\alpha_S^{E(S)} \preceq t$. De donde, $\underline{\mathrm{zoc}}_r \preceq t$, así que $\mathrm{Ess}(r) \subseteq [\underline{\mathrm{zoc}}_r, r]$.

Finalmente, si $s \in [\underline{\mathrm{zoc}}_r, r]$ y $\underline{0} \neq t \in [\underline{0}, r]$ entonces existe un átomo $\alpha_S^{E(S)} \preceq r$ tal que $\alpha_S^{E(S)} \preceq t$. Luego, $\alpha_S^{E(S)} = \underline{\mathrm{zoc}}_r \wedge \alpha_S^{E(S)} \preceq \underline{\mathrm{zoc}}_r \wedge t \preceq s \wedge t$; y por lo tanto $s \in \mathrm{Ess}(r)$.

□

Corolario 3.2.13 *En* R-pr, *la clase de los prerradicales esenciales es precisamente el intervalo* $[\underline{\mathrm{zoc}}, \underline{1}]$.

Demostración. Es una consecuencia de la Proposición 3.2.12 con $r := \underline{1}$.

□

Corolario 3.2.14 *Sea* $0 \neq r \in$ R-pr. *Entonces,* $r \in \mathrm{Ess}(\text{R-pr})$ *si y sólo si* $\underline{\mathrm{zoc}}_r = \underline{\mathrm{zoc}}$.

Demostración. [$\Rightarrow$] Dado que r es un prerradical esencial, tenemos que $\alpha_S^{E(S)} \preceq r$, esto es, $r(E(S)) \neq 0$ para cada $S \in$ R-simp. Por lo tanto, $\underline{\mathrm{zoc}}_r = \underline{\mathrm{zoc}}$.

[$\Leftarrow$] Dado que $\underline{\mathrm{zoc}}_r = \underline{\mathrm{zoc}}$ y $\mathrm{zoc}_r \preceq r$, se sigue que $\underline{\mathrm{zoc}} \preceq r$. Por el Corolario 3.2.13, r es un prerradical esencial.

□

En [27, Proposition 11] se definió la relación de equivalencia $\sim_\perp$ en R-pr como $r \sim_\perp s$ si y sólo si $r^\perp = s^\perp$. Para cada $r \in$ R-pr se demostró que $\{\tau \in \text{R-pr} \mid r^\perp = \tau^\perp\} = [\bigvee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in \text{R-simp}, r(E(S)) \neq 0\}, r^{\perp\perp}]$.

La clase $\{r \in \text{R-pr} \mid r^\perp = \underline{0}\}$ consiste de los prerradicales esenciales.

Notemos que $\mathrm{zoc} \in \mathrm{Ess}(\text{R-pr})$, en vista de la Observación 3.2.2 y del Corolario 3.2.13.

3.2.2 Prerradicales uniformes.

Definición 3.2.15 *Decimos que* $\underline{0} \neq r \in$ R-pr *es un prerradical* **uniforme** *si cada* $0 \neq s \in [\underline{0}, r]$ *es un prerradical* $r-$*esencial.*

Proposición 3.2.16 *Las siguientes condiciones son equivalentes para* $\underline{0} \neq r \in$ R-pr.

(a) r *es un prerradical uniforme.*

(b) *Para cada pareja* $s, t \in [\underline{0}, r]$ *distintos de* $\underline{0}$, *sucede que* $s \wedge t \neq \underline{0}$.

Demostración. [(a) $\Rightarrow$ (b)] Sean $s, t \in [\underline{0}, r]$ tales que $s \neq \underline{0}$, $t \neq \underline{0}$. Dado que r es un prerradical uniforme, se sigue que s, t son $r-$esenciales . Por lo tanto, $s \wedge t \neq \underline{0}$.

[(b) $\Rightarrow$ (a)] Sea $\underline{0} \neq s \in [\underline{0}, r]$. Por (b), $s \wedge t \neq \underline{0}$ para cada $\underline{0} \neq t \in [\underline{0}, r]$. Entonces, s es un prerradical $r-$esencial. Por lo tanto, r is uniforme.

Lema 3.2.17 *Sea* $\underline{0} \neq r \in$ R-pr. *Entonces,* r *es un prerradical uniforme si y sólo si existe un único* $S \in$ R-simp *tal que* $r(E(S)) \neq 0$.

Demostración. Primero, supongamos que r es un prerradical uniforme. Sean $S, T \in$ R-simp tales que $r(E(S)) \neq 0$ y $r(E(T)) \neq 0$. Entonces, por la Observación 3.1.4, los átomos $\alpha_S^{E(S)}, \alpha_T^{E(T)} \in [\underline{0}, r]$. Dado que r es un prerradical uniforme, obtenemos que $\alpha_S^{E(S)} \wedge \alpha_T^{E(T)} \neq \underline{0}$. Por lo tanto, $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_T^{E(T)}$; y consecuentemente $S = T$.

Recíprocamente, si existe un único $\alpha_S^{E(S)} \in [\underline{0}, r]$, entonces para cada $\underline{0} \neq s, t \in [\underline{0}, r]$ tenemos que $\alpha_S^{E(S)} \preceq s$ y $\alpha_S^{E(S)} \preceq t$. Por lo tanto, $\underline{0} \neq \alpha_S^{E(S)} \preceq t \wedge s$.

□

Teorema 3.2.18 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) R *es un anillo local izquierdo (esto es,* R-simp *tiene un único elemento).*

(b) R-pr *tiene un único átomo.*

(c) *Cada* $0 \neq r \in \text{R-pr}$ *es un prerradical esencial.*

(d) *Cada* $0 \neq r \in \text{R-pr}$ *es un prerradical uniforme.*

(e) $\underline{1}$ *es un perradical uniforme.*

Demostración. $[(a) \iff (b)]$ Es una consecuencia de la caracterización de los átomos en R-pr.

$[(b) \Rightarrow (c)]$ Sea $\alpha_S^{E(S)}$ el único átomo en R-pr. Entonces, para cada $\underline{0} \neq r \in \text{R-pr}$ tenemos $\underline{\text{zoc}}_r = \underline{\text{zoc}}$. Por lo tanto, por el Corolario 3.2.14, podemos concluir que $r \in \text{Ess}(\text{R-pr})$.

$[(c) \Rightarrow (d)]$ Sean $\underline{0} \neq r \in \text{R-pr}$ y $\underline{0} \neq s \in [\underline{0}, r]$. Por (c) y el Corolario 3.2.14 tenemos que $\underline{\text{zoc}}_r = \underline{\text{zoc}}$. Además, por (c) y el Corolario 3.2.13, tenemos que $s \in [\underline{\text{zoc}}, \underline{1}.]$ Por lo tanto, $s \in [\underline{\text{zoc}}_r, r]$.

$[(d) \Rightarrow (e)]$ Esta es una consecuencia inmediata de (d).

$[(e) \Rightarrow (b)]$ Esta es una consecuencia del Lema 3.2.17 y la Observación 3.1.4. □

3.2.3 Prerradicales con anulador esencial.

Definición 3.2.19 *[26, Theorem 3.1(2)] Sea* $\sigma \in \mathrm{R}-pr$. *El* **anulador de** σ, *es el mayor prerradical* τ *tal que* $\tau \cdot r = \underline{0}$. *Esto es,* $a(\sigma) = \bigvee\{\tau \in \text{R-pr} \mid \tau \cdot r = \underline{0}\}$,

Denotamos $a(\sigma)$ *también por* a_σ.

A continuación recordamos algunos hechos conocidos sobre el anulador de un prerradical, ver [26] y [27].

Observación 3.2.20 *Las siguientes propiedades del anulador de un prerradical* σ *son conocidas y pueden ser encontradas en [26] y [27].*

(a) a_σ *es el mayor prerradical con la propiedad* $a_\sigma \sigma = \underline{0}$.

(b) a_σ *es un radical. De hecho, también se conocen las siguientes caracterizaciones,*

$a_\sigma = \bigwedge\{\omega_0^{\sigma(M)} : M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod}\}$,

$a_\sigma = \omega_0^{\sigma(C_1)}$, *donde* $C_1 := \bigoplus\{E(S) : S \in \text{R-simp}\}$.

(c) $\sigma^\perp \preceq a_\sigma$.

Observación 3.2.21 *Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si* $S \in \text{R-simp}$, *entonces* $a(\alpha_S^{E(S)}) = \omega_0^S$.

(b) $a(\underline{\text{zoc}}) = \omega_0^{C_0}$, *donde* $C_0 := \bigoplus\{S : S \in \text{R-simp}\}$.

Demostración. (a) Notemos que $[\omega_0^S \cdot \alpha_S^{E(S)}](E(S)) = \omega_0^S[\alpha_S^{E(S)}(E(S))] = 0$ y $[\omega_0^S \cdot \alpha_S^{E(S)}](E(T)) = \omega_0^S[\alpha_S^{E(S)}(E(T)] = \omega_0^S(0) = 0$ para cada $T \in \text{R-simp}$ con $T \ncong S$. Entonces, $\omega_0^S \cdot \alpha_S^{E(S)} = \underline{0}$, por lo tanto $\omega_0^S \preceq a(\alpha_S^{E(S)})$. Además, $a(\alpha_S^{E(S)}) \preceq$

ω_0^S ya que $a(\alpha_S^{E(S)})(S) = a(\alpha_S^{E(S)})(\alpha_S^{E(S)}(E(S))) = [a(\alpha_S^{E(S)}) \cdot \alpha_S^{E(S)}](E(S)) = 0$. Con ello, se sigue el resultado.

(b) Para cada $S \in$ R-simp, $(a(\underline{\text{zoc}}))(S) = [(a(\underline{\text{zoc}})) \cdot \alpha_S^{E(S)}](S)$. Pero $(a(\underline{\text{zoc}})) \cdot \alpha_S^{E(S)} \preceq (a(\underline{\text{zoc}})) \cdot \underline{\text{zoc}} = \underline{0}$. Entonces, $(a(\underline{\text{zoc}}))(S) = 0$ para cada $S \in$ R-simp. Por lo tanto $(a(\underline{\text{zoc}}))(C_0) = 0$. Esto es, $a(\underline{\text{zoc}}) \preceq \omega_0^{C_0}$.

Por otro lado, $\omega_0^{C_0} \cdot \underline{\text{zoc}} = \underline{0}$. En efecto, para cada $S \in$ R-simp tenemos que $(\omega_0^{C_0} \cdot \underline{\text{zoc}})(E(S)) = [\omega_0^{C_0} \cdot (\bigvee\{\alpha_T^{E(T)} \mid T \in \text{R-simp}\})](E(S)) = \omega_0^{C_0}(\alpha_S^{E(S)}(E(S)))$ $= \omega_0^{C_0}(S) = 0$, esto es $(\omega_0^{C_0} \cdot \underline{\text{zoc}})(E(S)) = 0$ para cada $S \in$ R-simp. Por lo tanto $\omega_0^{C_0} \preceq a(\underline{\text{zoc}})$.

□

Observación 3.2.22 *Sea $r \in$ R-pr. Entonces $a(r) \in [\underline{\text{zoc}}, \underline{1}]$ si y sólo si $\underline{\text{zoc}} \cdot r = \underline{0}$.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Como $a(r) \in [\underline{\text{zoc}}, \underline{1}]$ entonces $\underline{\text{zoc}} \preceq a(r)$. Luego $\underline{\text{zoc}} \cdot r \preceq a(r) \cdot r = \underline{0}$. Por lo tanto, $\underline{\text{zoc}} \cdot r = \underline{0}$. $[\Leftarrow]$ Es inmediato de la hipótesis y del hecho de que $a(r)$ es el mayor prerradical con tal propiedad.

□

Observación 3.2.23 *Sea $\sigma \in$ R-pr. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $a_\sigma \in Ess(\text{R-pr}) = [\underline{\text{zoc}}, \underline{1}]$.

(b) $\underline{\text{zoc}} \cdot \sigma = \underline{0}$.

Demostración. $[(a) \Rightarrow (b)]$ El hecho de que $a_\sigma \in [\underline{soc}, \underline{1}]$ implica $\underline{\text{zoc}} \leq a_\sigma$. Entonces $\underline{\text{zoc}} \cdot \sigma \leq a_\sigma \cdot \sigma = \underline{0}$; y por lo tanto $\underline{\text{zoc}} \cdot \sigma = \underline{0}$.

$[(b) \Rightarrow (a)]$ Es inmediato de (b) y de la Observación 3.2.20 (a).

□

Definición 3.2.24 *Sea $\sigma \in$ R-pr. Decimos que σ es* **singular en** R-pr *cuando* $a(\sigma) \in \text{Ess(R-pr)}$.

Denotaremos por Sing(R-pr) a la clase de los prerradicales singulares.

Observación 3.2.25 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *Existe* $\sigma \in Sing(\text{R-pr}) \cap Ess(\text{R-pr})$.

(b) $\underline{soc} \cdot \underline{soc} = \underline{0}$.

Demostración. [(a)⇒ (b)] Por (a), existe $\sigma \in$ R-pr tal que $\underline{\text{zoc}} \preceq \sigma$ y $\underline{\text{zoc}} \preceq a_\sigma$. Por lo tanto, $\underline{\text{zoc}} \cdot \underline{\text{zoc}} \preceq \underline{\text{zoc}} \cdot \sigma = \underline{0}$.

[(b)⇒ (a)] Por (b) y la Observación 3.2.23 se sigue que $a_{\underline{\text{zoc}}} \succeq \underline{\text{zoc}}$. Por lo tanto, $\underline{\text{zoc}} \in Sing(\text{R-pr}) \cap EsS(\text{R-pr})$.

□

Observación 3.2.26 *Sea $S \in$ R-simp. Las siguientes condiciones se cumplen.*

(a) $(\alpha_S^{E(S)})^\perp = \omega_0^{E(S)}$.

(b) $\alpha_S^{E(S)}$ *es un prerradical singular si y sólo si* S *es un módulo izquierdo simple no inyectivo.*

Demostración. (a) Veamos primero que $\omega_0^{E(S)} \wedge \alpha_S^{E(S)} = \underline{0}$. Para cada $T \in \mathrm{R}$-simp con $T \ncong S$, $(\omega_0^{E(S)} \wedge \alpha_S^{E(S)})(E(T)) = [\omega_0^{E(S)}(E(T))] \cap [\alpha_S^{E(S)}(E(T))] = 0$ y $[\omega_0^{E(S)} \wedge \alpha_S^{E(S)}](E(S)) = [\omega_0^{E(S)}(E(S))] \cap [\alpha_S^{E(S)}(E(S))] = 0 \cap S = 0$. Por lo tanto, $\omega_0^{E(S)} \preceq (\alpha_S^{E(S)})^{\perp}$.

Además tenemos que $(\alpha_S^{E(S)})^{\perp}(E(S)) = 0$, ya que en otro caso $S \leq_e E(S)$ podría implicar que $0 \neq S \wedge (\alpha_S^{E(S)})^{\perp}(E(S)) = [\alpha_S^{E(S)} \wedge (\alpha_S^{E(S)})^{\perp}](E(S))$, una contradicción.

(b) $[\Rightarrow]$ Supongamos que $a(\alpha_S^{E(S)}) = \omega_0^S$ es un prerradical esencial. Luego, en vista de la Observación 3.2.23, $\underline{\mathrm{zoc}} \cdot \alpha_S^{E(S)} = \underline{0}$. De ahí que $\underline{\mathrm{zoc}}(S) = \underline{\mathrm{zoc}} \cdot \alpha_S^{E(S)}(E(S)) = 0$. Así, por la Observación 3.2.5, S es un módulo simple no inyectivo.

$[\Leftarrow]$ Supongamos que S es un módulo simple no inyectivo. Usando la Observación 3.2.5, concluimos que $\underline{\mathrm{zoc}} \cdot \alpha_S^{E(S)} = \underline{0}$. De la Observación 3.2.23 concluimos que $\alpha_S^{E(S)}$ es un prerradical singular.

□

Observación 3.2.27 *Sea* $\underline{0} \neq r \in \mathrm{R}$-pr *tal que* $a(r)$ *es un prerradical exacto izquierdo. Entonces,* $r \notin \mathrm{Sing}(\mathrm{R}\text{-pr})$.

Demostración. Dado que $a(r)$ es un prerradical exacto izquierdo, tenemos que $0 = (a(r) \cdot r)(M) = [a(r)](r(M)) = r(M) \cap [a(r)(M)]$, para cada $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$. Entonces, $a(r) \wedge r = \underline{0}$ con $r \neq \underline{0}$. Por lo tanto, $a(r)$ no es un prerradical esencial. Esto es, $r \notin \mathrm{Sing}(\mathrm{R}\text{-pr})$.

□

Observación 3.2.28 *[27, Theorem 15] Las siguientes condiciones son equivalentes para* $\sigma \in \mathrm{R}$-pr.

(a) $\sigma^{\perp} = a(\sigma)$.

(b) σ *es un prerradical extremo.*

Observación 3.2.29 *[27, Theorem 30] Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) R *es un* $V{-}$*anillo.*

(b) $\mathrm{R}\text{-pr} = \mathrm{R}{-}\mathrm{prex}$.

Lema 3.2.30 $\mathrm{R}{-}\mathrm{prex} \cap \mathrm{Sing}(\mathrm{R}\text{-pr}) = \{\underline{0}\}$.

Demostración. Sea $\sigma \in \mathrm{R}{-}\mathrm{prex} \cap \mathrm{Sing}(\mathrm{R}\text{-pr})$. Entonces, $a(\sigma) = \sigma^{\perp}$ es un prerradical esencial. Luego, $\sigma^{\perp} \wedge \sigma = \underline{0}$ implica que $\sigma = \underline{0}$.

□

Proposición 3.2.31 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) R *es un* $V{-}$*anillo.*

(b) $\mathrm{Sing}(\text{R-pr}) = \{\underline{0}\}$.

Demostración. [(a)⇒ (b)] Del Lema 3.2.30 y la Observación 3.2.29 concluimos que $\mathrm{Sing}(\text{R-pr}) = \{\underline{0}\}$.

[(b)⇒(a)] Supongamos que R no es un $V-$anillo. Entonces, existe $S \in \text{R-simp}$ no inyectivo. Luego, por la Observación, 3.2.26, $\alpha_S^{E(S)}$ podría ser un prerradical singular distinto de cero, lo que es una contradicción.

Para cada $\sigma \in \text{R-pr}$, obsérvese que $\sigma^{\perp} \cdot \sigma \preceq \sigma^{\perp} \wedge \sigma = \underline{0}$. Por lo tanto, $\sigma^{\perp} \preceq a(\sigma)$.

Lema 3.2.32 $\mathrm{R-prex} \cap \mathrm{Ess}(\text{R-pr}) = \{\sigma \in \text{R-pr} \mid a(\sigma) = \underline{0}\}$.

Demostración. Sea $\sigma \in \mathrm{R-prex} \cap \mathrm{Ess}(\text{R-pr})$. Entonces, $\underline{0} = \sigma^{\perp} = a(\sigma)$.

Recíprocamente, sea $\sigma \in \text{R-pr}$ tal que $a(\sigma) = \underline{0}$. Como $\sigma^{\perp} \preceq a(\sigma) = \underline{0}$, entonces $\sigma \in \mathrm{Ess}(\text{R-pr})$. En vista del Teorema 3.2.28 concluimos que $\sigma \in \mathrm{R-prex}$. □

3.3 Comparación entre dos definiciones de prerradicales esenciales.

En esta sección revisaremos otra definición de prerradical esencial dada en el artículo [13].

Definición 3.3.1 *[13] Sean $r, s \in \text{R-pr}$. Diremos que r es* **pt−esencial en** *s, si para cada $M \in \mathrm{R-Mod}$ se satisface que $r(M)$ es un submódulo esencial de $s(M)$.*

Proposición 3.3.2 *Sean $s, r \in \text{R-pr}$. Si r es $pt-$esencial en s, entonces r es esencial en $[0, s]$.*

Demostración. De las hipótesis se sigue que $r \preceq s$.Sea $t \in \text{R-pr}$ tal que $t \preceq s$ y $t \wedge r = \underline{0}$. De donde $t(M) \cap r(M) = 0$ para cada $M \in \mathrm{R-Mod}$, pero dado que $r(M)$ es esencial en $s(M)$ para cada $M \in \mathrm{R-Mod}$, concluimos que $t = \underline{0}$. □

Recordemos el siguiente resultado,

Proposición 3.3.3 *Para cada $r \in \text{R-pr}$ tenemos que,*

(a) *$[\underline{\mathrm{zoc}}_r, r]$ es la clase de prerradicales $r-$esenciales.*

(b) *$[\underline{\mathrm{zoc}}_r, r^{\perp\perp}]$ es la clase de los prerradicales que tienen el mismo seudocomplemento de r en R-pr.*

Proposición 3.3.4 *[6, I.1.7] Sea $r \in \text{R-pr}$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *r es $pt-$esencial.*

(b) *$r(M) \neq 0$ para cada $0 \neq M \in \mathrm{R-Mod}$.*

(c) *$\overline{r} = \underline{1}$, donde $\overline{r}$ es el menor radical tal que $r \preceq \overline{r}$ and $\overline{r}(M) = \bigcap\{B \leq M \mid M/B \in \mathbb{F}_r\}$.*

Proposición 3.3.5 *Si para cada $r \in$ R-pr se satisface que $[\underline{\mathrm{zoc}}_r, r] = \{p \in \text{R-pr} \mid p(M) \leq_e r(M), \forall\, M \in \mathrm{R{-}Mod}\}$. Entonces* R *es un anillo semiartiniano izquierdo y* $\overline{\mathrm{zoc}} = \underline{1}$.

Demostración. De las hipótesis, se sigue que $\mathrm{zoc}(M) \leq_e M$ para todo $M \in \mathrm{R{-}Mod}$, lo cual es equivalente a que R sea semiartiniano izquierdo.

De hecho, por [6, II.4.1] Sabemos que $\overline{\mathrm{zoc}} = \underline{1}$ si y sólo si R es semiartiniano.

□

Observemos que el regreso de la proposición anterior no se espera. Sabemos que si R es semiartiniano, entonces zoc es $pt-$ esencial en $\underline{1}$. Pero además siempre zoc es un prerradical esencial ya que $\mathrm{zoc} \in [\underline{\mathrm{zoc}}, \underline{1}] = Esc(\text{R-pr})$. En particular, podemos tener que $\underline{\mathrm{zoc}}(M) = 0$ a pesar de que $\mathrm{zoc}(M) \neq 0$. Así que la condición de ser semiartiniano, no es suficiente para garantizar que ser "esencial" en R-pr implique $pt-$esencialidad.

Proposición 3.3.6 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\underline{\mathrm{zoc}}(M) \leq_e M$ *para cada* $0 \neq M \in \mathrm{R{-}Mod}$.

(b) $\overline{(\underline{\mathrm{zoc}})} = \underline{1}$.

(c) *Para cada* $M \in \mathrm{R{-}Mod}$, *existe* $S \in$ R-simp *y* $f \in \mathrm{Hom_R}(E(S), M)$ *tal que* $f(S) \neq M$.

Proposición 3.3.7 *Si* $\underline{\mathrm{zoc}}$ *es $pt-$esencial, entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) R *es semiartiniano izquierdo.*

(b) $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$ *para cada* $S \in$ R-simp. *En consecuencia,* R *es un $V-$anillo izquierdo.*

(c) R *es regular de von Neumann.*

Demostración. (a) De la hipótesis se sigue que $0 \neq \underline{\mathrm{zoc}}(M) \leq \mathrm{zoc}(M)$ para cada $M \in \mathrm{R{-}Mod}$. Por lo tanto, R es semiartiniano izquierdo.

(b) De la hipótesis, tenemos en particular que $\underline{\mathrm{zoc}}(S) = S$ para cada $S \in$ R-simp. Entonces, $S = \underline{\mathrm{zoc}}(S) = \alpha_S^{E(S)}(S)$ y por lo tanto, $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$ para cada $S \in$ R-simp. Esto último es equivalente a que R sea un $V-$anillo izquierdo y $\underline{\mathrm{zoc}} = \mathrm{zoc}$.

(c) Se sigue del hecho de que un $V-$anillo izquierdo semiartiniano izquierdo es von Neumann regular.

□

Proposición 3.3.8 *Si* R *es semiartiniano izquierdo y $V-$anillo izquiedo, entonces* $[\underline{\mathrm{zoc}}_r, r] = \{p \in \text{R-pr} \mid p(M) \leq_e r(M),\ \forall\, M \in \mathrm{R{-}Mod}\}$ *para todo* $r \in$ R-pr.

Proposición 3.3.9 *Sea $r \in$ R-pr tal que $\underline{\mathrm{zoc}}_r \preceq r$ y supongamos que es $pt-$esencial. Entonces,*

(a) $\underline{\mathrm{zoc}}_r(M) \leq_e r(M)$ para cada $0 \neq M \in \mathrm{R{-}Mod}$.

(b) Debe ocurrir que $r(E(S)) \neq 0$ para cada $S \in \mathrm{R}$-simp y entonces, $\mathrm{zoc}_r = \underline{\mathrm{zoc}}$. Así que $\underline{\mathrm{zoc}} \preceq r \preceq \underline{1}$. Luego, $\underline{\mathrm{zoc}}(M) \leq_e r(M)$ para cada $M \in \mathrm{R-Mod}$. En particular, $\underline{\mathrm{zoc}}(M) \neq 0$ para cada $M \in \mathrm{R-Mod}$. Y por la proposición anterior, R es $V-$anillo semiartiniano izquierdo.

Proposición 3.3.10 *Si se satisface que $\underline{\mathrm{zoc}}_r$ es $pt-$esencial en r para cada $0 \neq r \in \mathrm{R}$-pr. Entonces $r \in [\underline{\mathrm{zoc}}, \underline{1}]$ para cada $0 \neq r \in \mathrm{R}$-pr. Consecuentemente, R es un anillo con un único átomo.*

3.4 Condiciones para que R-pr sea una retícula semiartiniana.

Definición 3.4.1 *Sea $\mathscr{L}$ una retícula acotada modular y superiormente continua.*

(a) *Se dice que $\mathscr{L}$ es* **semiartiniana** *si para cada $y \in \mathscr{L}$, $[y, 1] := \{x \in \mathscr{L} \mid y \leq x \leq 1\}$ contiene al menos un átomo.*

(b) *Se dice que $\mathscr{L}$ es* **fuertemente atómica** *si para cada $x, y \in \mathscr{L}$ con $x \leq y$, se satisface que la retícula $[x, y]$ es atómica.*

Por otro lado, tenemos la longitud de Loewy para una retícula.

Definición 3.4.2 *Sea $\mathscr{L}$ una retícula acotada, modular y superiormente continua. La* **serie de Loewy de** $\mathscr{L}$ *se define por inducción transfinita como sigue:*

Si $\alpha = 0,\ s_\alpha = 0.$

Si $\alpha = 1,\ s_\alpha = \underline{\mathrm{zoc}}(\mathscr{L}).$

Si $\alpha = \beta + 1,\ s_\alpha = \underline{\mathrm{zoc}}([\underline{\mathrm{zoc}}_\beta, 1]).$

Si α es un ordinal límite, $s_\alpha = \bigvee_{\beta < \alpha} \underline{\mathrm{zoc}}_\beta.$

Si $1 = s_\alpha$ para algún ordinal α, entonces se dice que $\mathscr{L}$ es una retícula de **Loewy**. *La* **longitud de Loewy**, *$\ell\ell(\mathscr{L})$, es el menor ordinal γ tal que $1 = s_\gamma$.*

Se conoce el siguiente resultado,

Proposición 3.4.3 *[23, Proposition 1.9.3] Sea $\mathscr{L}$ una retícula acotada, modular y superiormente continua. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *$\mathscr{L}$ es semiartiniana.*

(b) *$\mathscr{L}$ es fuertemente atómica.*

(c) *$\mathscr{L}$ es de Loewy.*

Ejemplo 3.4.4 *En el artículo Atomical Grothendieck Categories [C. Năstăcescu, B. Torrecillas, IJMMS 2003:71, 4501-4509]; los autores demuestra en el Teorema 3 de este, que si $\mathcal{C}$ es una categoría de Grothendieck con dimensión de Gabriel α, entonces $Tors(\mathcal{C})$, la retícula de subcategorías localizantes de $\mathcal{C}$, es semiartiniana con longitud de Loewy α.*

El siguiente teorema nos da condiciones equivalentes para que R-pr sea una retícula semiartiniana. Cabe mencionar, que este teorema se relaciona con la sección 2.3, donde comparamos dos definiciones de prerradicales esenciales.

Teorema 3.4.5 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) R-pr *es semiartiniana.*

(b) $\overline{\mathrm{zoc}} = \underline{1}$.

(c) $\underline{\mathrm{zoc}}(M) \leq_e M$ *para cada* $0 \neq M \in \mathrm{R{-}Mod}$.

(d) *Para cada* $M \in \mathrm{R{-}Mod}$, *existe* $S \in \text{R-simp}$ *y* $f \in \mathrm{Hom_R}(E(S), M)$ *tal que* $f(S) \neq M$.

Corolario 3.4.6 *Si* R *es un* $V-$*anillo izquierdo semiartiniano izquierdo, entonces* R-pr *es semiartiniana.*

Capítulo 4

Superfluidad

4.1 Radicales y prerradicales superfluos.

En esta sección estudiaremos los prerradicales superfluos.

Recordemos que el prerradical $\mathrm{rad} : \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod} \to \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ está dado por

$$\mathrm{rad}(M) := \bigcap\{K{\leq}M \mid K \text{ es un submódulo máximo de } M\}.$$

Este radical puede ser descrito como $\mathrm{rad} = \omega_0^{C_0}$. Por otro lado, tenemos el radical reticular de R-pr.

Definición 4.1.1 *En* R-pr, *el* **radical (reticular) de** R-pr *se define como*

$$\underline{\mathrm{rad}(\mathrm{R}\text{-}\mathrm{pr})} := \bigwedge\{\omega_I^R : I \textit{ es un ideal bilateral máximo de } R\}.$$

En lo sucesivo, denotaremos $\underline{\mathrm{rad}} := \underline{\mathrm{rad}(\mathrm{R}\text{-}\mathrm{pr})}$.

Definición 4.1.2 *En* R-pr, *definimos el* **w-radical** *como*

$$\underset{\sim}{\mathrm{rad}} := \bigwedge\{\omega_0^{\mathrm{R}/I} \mid I \textit{ es un ideal bilateral máximo de } \mathrm{R}\}.$$

Observación 4.1.3 $\omega_0^{\mathrm{R}/I} \preceq \omega_I^{\mathrm{R}}$ *para cada ideal bilateral máximo* I *de* R.

Proposición 4.1.4 *[19, Chapter 2, Ex. 4.8] Cada ideal bilateral máximo de* R *es el anulador izquierdo de algún* $\mathrm{R}-$*módulo izquierdo simple* S.

Como consecuencia del resultado y de la Observación 4.1.3 se tiene lo siguiente.

Observación 4.1.5 (a) *Para cada ideal bilateral máximo* I *de* R, *exist un* $R-$*módulo izquierdo simple* S *tal que* $\omega_0^S \preceq \omega_0^{\mathrm{R}/I} \preceq \omega_I^{\mathrm{R}}$.

(b) *Por* (a), *se sigue que* $\mathrm{rad} \preceq \underset{\sim}{rad} \preceq \underline{\mathrm{rad}}$. *En particular,* $\mathrm{rad}(\mathrm{R}) \leq \underset{\sim}{\mathrm{rad}}(\mathrm{R}) \leq \underline{\mathrm{rad}}(\mathrm{R})$.

Obsérvese que $\mathrm{rad}(\mathrm{R})$ es el *radical de Jacobson* de R y $\underline{\mathrm{rad}}(\mathrm{R})$ es el *radical de Brown-McCoy* de R (ver [22, Section C.19].)

Observación 4.1.6 *Sea* I *un ideal bilateral máximo de* R, *entonces* $(\omega_I^{\mathrm{R}} : \underline{\mathrm{rad}}) = (\omega_I^{\mathrm{R}} : \omega_I^{\mathrm{R}})$.

Demostración. En vista de [25, Theorem 8.2 (c)] tenemos que $(\omega_I^{\mathrm{R}} : \underline{\mathrm{rad}}) = (\omega_I^{\mathrm{R}} : \bigwedge\{\omega_J^{\mathrm{R}} \mid J$ es un ideal bilateral máximo de $\mathrm{R}\}) = \bigwedge\{(\omega_I^{\mathrm{R}} : \omega_J^{\mathrm{R}}) \mid J$ es un ideal bilateral máximo de $\mathrm{R}\})$. Además, notemos que $(\omega_I^{\mathrm{R}} : \omega_J^{\mathrm{R}}) \succeq \omega_I^{\mathrm{R}} \vee \omega_J^{\mathrm{R}} = \underline{1}$ para cada ideal bilateral máximo $J \neq I$. Por lo tanto, $(\omega_I^{\mathrm{R}} : \underline{\mathrm{rad}}) = (\omega_I^{\mathrm{R}} : \omega_I^{\mathrm{R}})$. $\square$

Lema 4.1.7 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\omega_{\bar{0}}^{\mathrm{R}/I} \precneqq \omega_I^{\mathrm{R}}$, *para algún ideal bilateral máximo* I *de* R.

(b) $\utilde{\mathrm{rad}} \precneqq \underline{\mathrm{rad}}$.

Demostración. $[(a) \Rightarrow (b)]$ Por hipótesis, existe un ideal bilateral máximo I de R tal que $\omega_{\bar{0}}^{\mathrm{R}/I} \precneqq \omega_I^{\mathrm{R}}$. Esto implica que $\omega_I^{\mathrm{R}}\left(\frac{\mathrm{R}}{I}\right) \neq \bar{0}$. Dado que I es un ideal bilateral máximo de R, concluimos que $\omega_I^{\mathrm{R}}\left(\frac{\mathrm{R}}{I}\right) = \frac{\mathrm{R}}{I}$. Luego, $\frac{\mathrm{R}}{I} = \omega_I^{\mathrm{R}}\left(\frac{\mathrm{R}}{I}\right) = \omega_I^{\mathrm{R}}\left(\frac{\mathrm{R}}{\omega_I^{\mathrm{R}}(\mathrm{R})}\right) = \frac{(\omega_I^{\mathrm{R}} : \omega_I^{\mathrm{R}})(\mathrm{R})}{\omega_I^{\mathrm{R}}(\mathrm{R})} = \frac{(\omega_I^{\mathrm{R}} : \omega_I^{\mathrm{R}})(\mathrm{R})}{I}$, de donde $(\omega_I^{\mathrm{R}} : \omega_I^{\mathrm{R}})(\mathrm{R}) = \mathrm{R}$. Por lo tanto, $(\omega_I^{\mathrm{R}} : \omega_I^{\mathrm{R}}) = \underline{1}$. Ahora, por la Observación 4.1.6, obtenemos que $(\omega_I^{\mathrm{R}} : \underline{\mathrm{rad}}) = \underline{1}$. Entonces, $\underline{\mathrm{rad}}\left(\frac{\mathrm{R}}{I}\right) = \frac{(\omega_I^{\mathrm{R}} : \underline{\mathrm{rad}})(\mathrm{R})}{\omega_I^{\mathrm{R}}(\mathrm{R})} = \frac{\mathrm{R}}{I}$. Por otro lado, $\utilde{\mathrm{rad}}\left(\frac{\mathrm{R}}{I}\right) = \bigwedge\left\{\omega_{\bar{0}}^{\mathrm{R}/J}\left(\frac{\mathrm{R}}{I}\right) \mid J \text{ es un ideal bilateral máximo de } \mathrm{R}\right\} = \bar{0}$. Por lo tanto $\utilde{\mathrm{rad}} \precneqq \underline{\mathrm{rad}}$.

$[(b) \Rightarrow (a)]$ Esta es una consecuencia de las definiciones de $\underline{\mathrm{rad}}$ y $\utilde{\mathrm{rad}}$.

Proposición 4.1.8 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) R *es un producto directo de un número finito de anillos simples.*

(b) $\omega_0^{\mathrm{R}/I} = \omega_I^{\mathrm{R}}$ *para cada ideal bilateral máximo* I *de* R.

(c) *Todos los coátomos son radicales.*

(d) $\utilde{\mathrm{rad}} = \underline{\mathrm{rad}}$.

Demostración. Las equivalencias entre $(\mathrm{a}), (\mathrm{b})$ y (c) se pueden encontrar en [25, Theorem 17].

$[(b) \iff (d)]$ Se sigue del Lema 4.1.7.

$\square$

4.1.1 Prerradicales superfluos.

Definición 4.1.9 *Let* $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$. *Decimos que* $s \in [r, \underline{1}]$ *es* $r-$**superfluo** *si* $t \vee s = \underline{1}$ *implica que* $t = \underline{1}$.

Definición 4.1.10 *Sea* $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$. *Decimos que* r *es un prerradical* **superfluo**, *si* $r \vee s \neq \underline{1}$ *para cada* $\underline{1} \neq s \in \mathrm{R}\text{-pr}$. *Esto es,* r *es* $\underline{0}-$*superfluo.*

Para cada $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$, definimos el r-**radical** como sigue: $\underline{\mathrm{rad}}_r := \bigwedge\{\omega_I^{\mathrm{R}} \mid r \preceq \omega_I^{\mathrm{R}}, I$ es un ideal bilateral máximo de $\mathrm{R}\}$.

De las definiciones es claro que $\underline{\mathrm{rad}} \preceq \underline{\mathrm{rad}}_r$.

Proposición 4.1.11 *Sea $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$. Entonces, la clase de los prerradicales $r-$superfluos es el intervalo $[r, \underline{\mathrm{rad}}_r]$.*

Demostración. Notemos que para cada $\underline{1} \neq t \in [r, \underline{1}]$, existe un coátomo ω_I^{R} tal que $t \preceq \omega_I^{\mathrm{R}}$.

Supongamos que $\underline{\mathrm{rad}}_r \vee t = \underline{1}$, con $t \succeq r$. Si t fuera propio, entonces existiría un coátomo ω_I^{R} tal que $t \preceq \omega_I^{\mathrm{R}}$. Luego, $\underline{1} = \underline{\mathrm{rad}}_r \vee t \preceq \omega_I^{\mathrm{R}}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\underline{\mathrm{rad}}_r$ es $r-$ superfluo. Además, si $s \in [r, \underline{\mathrm{rad}}_r]$ entonces s es $r-$ superfluo, ya que si para algún $\underline{1} \neq t \in [r, \underline{1}]$ se satisface que $s \vee t = \underline{1}$, entonces $\underline{\mathrm{rad}}_r \vee t = \underline{1}$.

Ahora, sea $t \in [r, \underline{1}]$ un prerradical $r-$superfluo. Entonces es claro que $t \preceq \omega_I^{\mathrm{R}}$ para cada $\omega_I^{\mathrm{R}} \in [r, \underline{1}]$.

□

Corolario 4.1.12 *La clase de los prerradicales superfluos es el intervalo $[\underline{0}, \underline{\mathrm{rad}}]$.*

Demostración. Esto es una consecuencia de la Proposición 4.1.11 para $r := \underline{0}$.

□

4.1.2 Prerradicales huecos.

Decimos que $\underline{1}$ es un prerradical **hueco** cuando cada $\underline{1} \neq t \in \mathrm{R}\text{-pr}$ es un prerradical superfluo.

Proposición 4.1.13 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *$\underline{1}$ es un prerradical hueco.*

(b) *$\mathrm{R}\text{-pr}$ tiene un único coátomo.*

(c) *Res un anillo con un único ideal bilateral máximo.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sean $\omega_{I_1}^{\mathrm{R}}$ y $\omega_{I_2}^{\mathrm{R}}$ coátomos en $\mathrm{R}\text{-pr}$. Por hipótesis, $\omega_{I_1}^{\mathrm{R}} \vee \omega_{I_2}^{\mathrm{R}} \precneqq \underline{1}$. Entonces, $I_1 + I_2 \lneqq \mathrm{R}$. Pero I_1 e I_2 son ideales bilaterales máximos, así que $I_1 = I_1 + I_2 = I_2$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sean I_1 e I_2 ideales bilaterales máximos. Dado que $\mathrm{R}\text{-pr}$ tiene un único coátomo, se tiene que $\omega_{I_1}^{\mathrm{R}} = \omega_{I_2}^{\mathrm{R}}$. Evaluando estos en R concluimos que $I_1 = I_2$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Sean $1 \neq r, s \in \mathrm{R}\text{-pr}$. Consideremos los ideales bilaterales $r(\mathrm{R})$ y $s(\mathrm{R})$. Dado que R tiene un único ideal bilateral máximo J, tenemos que $r(\mathrm{R}) \leq J$ y $s(\mathrm{R}) \leq J$. Entonces $(r \vee s)(\mathrm{R}) \lneqq \mathrm{R}$, por lo tanto $r \vee s \precneqq \underline{1}$.

□

Corolario 4.1.14 *Sea R un anillo conmutativo con 1. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *$\underline{1}$ es un prerradical hueco.*

(b) *$\mathrm{R}\text{-pr}$ tiene un único coátomo.*

(c) *R es un anillo local.*

4.1.3 Preradicales y módulos superfluos.

Lema 4.1.15 *Sean* $r, s \in \mathrm{R}\text{-pr}$ *and* $M \in \mathrm{R-Mod}$. *Si* $r(M) \ll M$ *y* $r \vee s = \underline{1}$, *entonces* $M \in \mathbb{T}_s$.

Demostración. Como $r(M) + s(M) = (r \vee s)(M) = M$ y $r(M) \ll M$, entonces $s(M) = M$. Por lo tanto, $M \in \mathbb{T}_s$.

Proposición 4.1.16 *Sea* $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$. *Si* $\mathscr{S}_r := \{M \in \mathrm{R-Mod} \mid r(M) \ll M\}$ *genera* $\mathrm{R-Mod}$, *entonces* r *es superfluo en* $\mathrm{R}\text{-pr}$.

Demostración. Si $r \vee s = \underline{1}$, entonces por el Lema 4.1.15, $\mathscr{S}_r \subseteq \mathbb{T}_s$. De donde, $\mathbb{T}_s$ genera $\mathrm{R-Mod}$. Por lo tanto, $s = \underline{1}$.

Lema 4.1.17 *Sea* $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *Existe* $\mathscr{F} := \{M_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \subseteq \mathrm{R-Mod}$ *que genera* $\mathrm{R-Mod}$, *y* $r(M_\alpha) \ll M_\alpha$ *para cada* $\alpha \in \Lambda$.

(b) $r(\mathrm{R}) \ll \mathrm{R}$.

Demostración. $[(a) \Rightarrow (b)]$ Sea $\mathscr{F} = \{M_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ una clase generadora de $\mathrm{R-Mod}$, donde $r(M_\alpha) \ll M_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. De la hipótesis, existe un epimorfismo $\beta : \bigoplus_{\gamma \in \Gamma \subseteq \Lambda} M_\gamma \twoheadrightarrow {}_{\mathrm{R}}\mathrm{R}$.

En vista de que ${}_{\mathrm{R}}\mathrm{R}$ es un módulo proyectivo finitamente generado, existe un monomorfismo $\varphi : {}_{\mathrm{R}}\mathrm{R} \rightarrowtail \bigoplus_{i=1}^{n} M_{\gamma_i}$ tal que $(\beta \circ \kappa) \circ \varphi = 1_{\mathrm{R}}$, donde $\kappa : \bigoplus_{i=1}^{n} M_{\gamma_i} \hookrightarrow \bigoplus_{\gamma \in \Gamma \subseteq \Lambda} M_\gamma$ es la inclusión. Entonces, existe un submódulo $U \leq \bigoplus_{i=1}^{n} M_{\gamma_i}$ tal que $\bigoplus_{i=1}^{n} M_{\gamma_i} = \varphi(\mathrm{R}) \oplus U$. Tomando la proyección $\pi^U_{\varphi(\mathrm{R})} : \bigoplus_{i=1}^{n} M_{\gamma_i} \twoheadrightarrow \varphi(\mathrm{R})$ y aplicando r, obtenemos la proyección $\pi^{r(U)}_{r(\varphi(\mathrm{R}))} = r(\pi^U_{\varphi(\mathrm{R})}) : r\left(\bigoplus_{i=1}^{n} M_{\gamma_i}\right) \twoheadrightarrow r(\varphi(\mathrm{R}))$. Dado que cada $r(M_{\gamma_i}) \ll M_{\gamma_i}$, se sigue que $r\left(\bigoplus_{i=1}^{n} M_{\gamma_i}\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} r(M_{\gamma_i}) \ll \bigoplus_{i=1}^{n} M_{\gamma_i}$.

Puesto que los morfismos envían submódulos superfluos a submódulos superfluos, concluimos que $r(\varphi(\mathrm{R})) \ll \varphi(\mathrm{R}) \cong \mathrm{R}$.

$[(b) \Rightarrow (a)]$ Esto se debe a que R es un generador para $\mathrm{R-Mod}$ y a la hipótesis de que $r(\mathrm{R}) \ll \mathrm{R}$.

□

Proposición 4.1.18 *Sea* $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$ *un* $t-$*radical. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $r(M) \ll M$, *para cada* $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ *finitamente generado.*

(b) $r(\mathrm{R}) \ll \mathrm{R}$.

(c) *Existe* $\mathscr{F} := \{M_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \subseteq \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ *que genera* $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$, *con* $r(M_\alpha) \ll M_\alpha$ *para cada* $\alpha \in \Lambda$.

Demostración. $[(a) \Rightarrow (b)]$ Esto es un caso particular de (a), ya que R es un módulo finitamente generado.

$[(b) \Rightarrow (a)]$ Sea M un módulo finitamente generado. Entonces, existe un epimorfismo $f : \mathrm{R}^n \twoheadrightarrow M$. Como r es un $t-$radical, obtenemos el epimorfismo $r(f) : r(\mathrm{R}^n) \twoheadrightarrow r(M)$.

Notemos que $r(\mathrm{R}^n) = (r(\mathrm{R}))^n$, entonces aplicando (b) obtenemos que $r(\mathrm{R})^n \ll \mathrm{R}^n$. Finalmente, en vista de que los morfismos envian submódulos superfluos a submódulos superfluos, concluimos que $r(M) = f(r(\mathrm{R})^n) \ll M$.

$[(b) \iff (c)]$ Es una consecuencia del Lema 4.1.17.

□

Recordemos que un anillo R es **duo-izquierdo** si satisface que cada ideal izquierdo es bilateral.

Proposición 4.1.19 *Si* R *es un anillo duo-izquierdo, entonces las siguientes conditions son equivalents para cada* $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$.

(a) r *es un prerradical superfluo.*

(b) $r(\mathrm{R}) \ll \mathrm{R}$.

Demostración. $[(a) \Rightarrow (b)]$ Sea $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$ un prerradical superfluous, si $r(\mathrm{R}) \not\ll \mathrm{R}$, entonces existiría un ideal izquierdo propio ${}_{\mathrm{R}}J$ de Rtal que $r(\mathrm{R}) + J = \mathrm{R}$. Por hipótesis, J es un ideal bilateral también. Así, $J = \alpha_J^{\mathrm{R}}(\mathrm{R})$; y entonces $\mathrm{R} = r(\mathrm{R}) + J = (r \vee \alpha_J^{\mathrm{R}})(\mathrm{R})$. Esto implica que $r \vee \alpha_J^{\mathrm{R}} = \underline{1}$. Dado que r is un prerradical superfluo, concluimos que $\alpha_J^{\mathrm{R}} = \underline{1}$. Evaluando en R, obtenemos la contradicción $\mathrm{R} = J$.

$[(b) \Rightarrow (a)]$ Sea $\underline{1} \neq r \in \mathrm{R}\text{-pr}$ tal que $r(\mathrm{R}) \ll \mathrm{R}$. Sea $s \in \mathrm{R}\text{-pr}$ tal que $r \vee s = \underline{1}$. Esto implica que $r(\mathrm{R}) + s(\mathrm{R}) = \mathrm{R}$. Luego $s(\mathrm{R}) = \mathrm{R}$; y por lo tanto, $s = \underline{1}$. En vista de lo anterior, concluimos que r es un prerradical superfluo.

□

Definición 4.1.20 *Sean* $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$ *y* $[\underline{0}, r] := \{\sigma \in \mathrm{R}\text{-pr} : \sigma \leq r\}$. *Decimos que* $s \in [0, r]$ *es* **superfluo respecto a** r, *si para cada* $t \in [0, r]$ *tal que* $t \vee s = r$, *se satisface que* $t = r$.

Definición 4.1.21 *Sea* $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$. *Decimos que* r *es un prerradical* **superfluo**, *si* r *es superfluo respecto a* $\underline{1}$. *Esto es, para cada* $s \in \mathrm{R}\text{-pr}$, $r \vee s \neq \underline{1}$.

Definición 4.1.22 *Sea* $\underline{0} \neq r \in \mathrm{R}\text{-pr}$. *Decimos que* r *es un prerradical* **hueco**, *si para cada* $t \in [\underline{0}, r]$ *se satisface que* t *es superfluo respecto a* r.

Proposición 4.1.23 *Sean* R *un anillo con* 1 *y* $\mathrm{R}\text{-pr}$ *la retícula de prerradicales en* $\mathrm{R} - \mathrm{Mod}$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\underline{1}$ *es hueco.*

(b) R-pr *tiene un solo coátomo.*

(c) R *es un anillo con un único ideal bilateral máximo.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $\omega_{I_1}^R$ y $\omega_{I_2}^R$ coátomos de R-pr. Por la hipótesis, $\omega_{I_1}^R \vee \omega_{I_2}^R \lneq \underline{1}$. Entonces, $I_1 + I_2 \leq R$. Pero I_1 e I_2 son ideales maximos. Por lo tanto, $I_1 = I_1 + I_2 = I_2$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sean I_1 e I_2 ideales bilaterales máximo de R. Como R-pr tiene un único coátomo, tenemos que $\omega_{I_1}^R = \omega_{I_2}^R$, evaluando estos en R, concluimos que $I_1 = 1_2$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Sean $1 \neq r, s \in \mathrm{R}$-pr. Consideremos los ideales $r(R)$ y $s(R)$. Dado que R tiene un único ideal máximo J, entonces $r(R) \leq J$ y $s(R) \leq J$. Por lo tanto, $(r \vee s)(R) \lneq R$; y con ello, $r \vee s \lneq \underline{1}$.

□

Corolario 4.1.24 *Sea* R *un anillo conmutativo con* 1. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalente.*

(a) $\underline{1}$ *es hueco.*

(b) R-pr *tiene un único coátomo.*

(c) R *es local.*

Proposición 4.1.25 *Sean* $r, s \in \mathrm{R}$-pr *con* r *es superfluo en* R-pr *y* $M \in \mathrm{R}-Mod$. *Si* $r(M) \ll M$ *y* $r \vee s = \underline{1}$, *entonces* $M \in \mathbb{T}_s$.

Demostración. Sea $M \in \mathrm{R} - Mod$. Evaluando $r \vee s$ en M, es inmediato que $r(M) + s(M) = M$; y dado que $r(M) \ll M$, entonces $s(M) = M$. Por lo tanto, $s = \underline{1}$.

□

Proposición 4.1.26 *Sean* R *un anillo con* 1, $r \in \mathrm{R}$-pr *un prerradical. Si* $\mathscr{S}_r := \{M \in \mathrm{R} - Mod : r(M) \ll M\}$ *genera* $R - Mod$, *entonces* r *es superfluo.*

Demostración. Sea $s \in \mathrm{R}$-pr tal que $r \vee s = \underline{1}$. Por 4.1.23, se sigue que $\mathscr{S}_r \subseteq \mathbb{T}_s$. De donde, $\mathrm{R{-}Mod} = \mathrm{Gen}(\mathscr{S}_r) \subseteq \mathrm{Gen}(\mathbb{T}_s)$. Por lo tanto, $s = \underline{1}$.

□

Lema 4.1.27 *Sean* R *un anillo con* 1 *y* $r \in \mathrm{R}$-pr. *Entonces,*

(a) *Existe* $\mathscr{F} := \{M_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subseteq \mathrm{R{-}Mod}$ *que genera* $\mathrm{R{-}Mod}$ *tal que* $r(M_\alpha) \ll M_\alpha$ *para cada* $\alpha \in \Lambda$.

(b) $r(R) \ll R$

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$

Sea $\mathscr{F} = \{M_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ que genera a $\mathrm{R} - \mathrm{Mod}$ y tal que $r(M_\alpha) \ll M_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. De la hipótesis, existe un epimorfismo

$$\bigoplus\{M_\gamma : M_\gamma \in \mathcal{F},\, \gamma \in \Gamma\} \xrightarrow{\beta} {}_RR \to 0.$$

Ahora bien, dado que ${}_RR$ es proyectivo, el morfismo β se escinde. Esto es, existe un monomorfismo $0 \to {}_RR \xrightarrow{\varphi} \bigoplus\{M_\gamma : M_\gamma \in \mathcal{F},\, \gamma \in \Gamma\}$ tal que $\beta \circ \varphi = 0$.

Finalmente, como R esta generado por 1, existen existen $\{\gamma_i\}_{i=1}^{n}$ tales que ${}_RR \cong \varphi({}_RR) = \bigoplus_{i=1}^{n}\{M_{\gamma_i} : M_{\gamma_i} \in \mathcal{F}\}$.

Aplicando el prerradical r a β y usando que r es un $t-$radical, obtenemos el epimorfismo $\bigoplus_{\gamma} r(M_\gamma) \xrightarrow{r(\beta)} r(R) \to 0$. Finalmente, si ocurre que $\bigoplus_{\gamma} r(M_\gamma)) \ll \bigoplus_{\gamma} M_\gamma$, podemos concluir que $r(R) \ll R$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Esta implicación es inmediata ya que R siempre es un generador de $R-\mathrm{Mod}$; y por hipótesis $r(R) \ll R$.

$\square$

Notemos que si en el lema anterior, r es un $t-$radical, entonces obtenemos las siguientes equivalencias.

Proposición 4.1.28 *Sea $r \in \mathrm{R}-pr$ un $t-$radical. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *Para cada $M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ finitamente generado, se satisface que $r(M) \ll M$.*

(b) $r(R) \ll R$.

(c) *Existe $\mathscr{F} := \{M_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subseteq \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ que genera $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ tal que $r(M_\alpha) \ll M_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Es inmediato, pues ${}_RR$ es finitamente generado; y por el lema anterior, se tiene $(b) \iff (c)$. As que nos resta demostrar $(b) \Rightarrow (a)$. Sea $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ finitamente generado. Entonces, existe un epimorfismo $h : R^n \to M$; y dado que $\mathscr{F}$ genera $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$, existe un epimorfismo $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\{M_\gamma\} \xrightarrow{f} M$. Luego, como R^n es proyectivo, existe un morfismo $g : \mathrm{R}^n \to \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\{M_\gamma\}$ tal que $fg = h$. Factorizando g a través de su imagen, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Im}(g) \arrow[dl, hook', "j"'] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & R^n \arrow[l, two heads, "\bar{g}"] \arrow[dl, "\exists\, g"] \arrow[d, two heads, "h"] \\
\bigoplus_{i=1}^{n}\{M_{\gamma_i}\} \arrow[r, "k"] & \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\{M_\gamma\} \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[ur, phantom, "="] & M
\end{tikzcd}$$

Como $(fk)(j\bar{g}) = h$ y h es un epimorfismo, concluimos que fk también es un epimorfismo. Por lo tanto M es $\mathscr{F}-$finitamente generado.

Finalmente, aplicando el $t-$radical r al epimorfismo fk; obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^{n}\{r(M_{\gamma_i})\} \arrow[r, two heads, "r(k)"] \arrow[d, hook, "s"'] & r(M) \arrow[d, hook, "t"] \\
\bigoplus_{i=1}^{n}\{M_{\gamma_i}\} \arrow[r, two heads, "k"] & M.
\end{tikzcd}
$$

Por hipótesis $r(M_{\gamma_i}) \ll M_{\gamma_i}$ para cada i; así que usando que suma directa finita de superfluos es superflua y que los morfismos preservan superfluos, concluimos que $r(M) = r(k)\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\{r(M_{\gamma_i})\}\right) \ll M.$

$\square$

Proposición 4.1.29 *Si R es un anillo duo-izquierdo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes, para $r \in \mathrm{R\text{-}pr}$:*

(a) *r es superfluo.*

(b) $r(R) \ll R$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $r \in \mathrm{R\text{-}pr}$ un prerradical superfluo. Supongamos que $r(R) \not\ll R$. Entonces, existe un ideal izquierdo propio $_RJ$ de R tal que $r(R)+J = R$. Ahora, como R es un anillo duo-izquierdo, se sique que J también es un ideal bilateral. De donde, $J = \alpha_J^R(R)$ y $R = r(R) + J = (r \vee \alpha_J^R)(R)$. Esto implica $r \vee \alpha_J^R = \underline{1}$; y dado que r es superfluo, concluimos que $\alpha_J^R = \underline{1}$. Por lo tanto, $R = J$ que es una contradicción.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $\underline{1} \neq r \in \mathrm{R\text{-}pr}$ tal que $r(R) \ll R$. Sea $s \in \mathrm{R\text{-}pr}$ tal que $r \vee s = \underline{1}$. Esto implica que $r(R) + s(R) = R$. De donde, $s(R) = R$ y por lo tanto, $s = \underline{1}$. De lo anterior concluimos que r es un prerradical superfluo.

$\square$

4.2 Submódulos fi-máximos y $\underline{\mathrm{rad}}$.

Observación 4.2.1 *Para cualesquiera p, q números primos, se tiene que $\omega_{p\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_q) = \bigcap\{f^{-1}(p\mathbb{Z}) : f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_q, \mathbb{Z})\} = \mathbb{Z}_q$. Por lo tanto, en $\mathbb{Z} - pr$ tenemos que $\underline{\mathrm{rad}}(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$ para cada p primo.*

Observación 4.2.2 *Sea $M \in \mathbb{T}_{\underline{\mathrm{rad}}}$. Entonces, $M = \omega_I^{\mathrm{R}}(M) = \bigcap\{f^{-1}(I) : f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M, \mathrm{R})\}$. Esto implica que $f(M) \subseteq I$ para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M, \mathrm{R})$.*

Ahora, consideremos la sucesión exacta $\eta : 0 \to I \xrightarrow{j} R \xrightarrow{\pi} R/I \to 0$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M, -)$ a la sucesión exacta η obtenemos la sucesión exacta $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M, I) \xrightarrow{j_\star} \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M, R) \xrightarrow{\pi_\star} \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M, R/I)$.

El hecho de que $f(M) \subseteq I$ para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M, \mathrm{R})$, implica, que $j_\star$ es suprayectiva. Por lo tanto, $\pi_\star = 0$.

Definición 4.2.3 *Sean $M \in \mathrm{R{-}Mod}$ y $N \leq M$. Decimos que N es un* **submódulo fi-máximo de** *M, si $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$ y para cada $L \in \mathrm{S}_{fi}(M)$ tal que $N \lneq L \leq M$, se tiene que $L = M$*

Observación 4.2.4 *Sean* $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$, $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$ *y* $\rho \in \mathrm{R}\text{-pr}$ *tal que* $\rho(M) \leq N$. *Entonces* $\rho \preceq \omega_N^M$.

Demostración. Sea $K \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ y $f : K \to M$. Aplicando el prerradical ρ se tiene que $f(\rho(K))) \subseteq \rho(M) \subseteq N$. Luego, $\rho(K) \subseteq f^{-1}(N)$. Por lo tanto, $\rho(K) \leq \omega_N^M(K)$.

□

Observación 4.2.5 *Sean* I *un ideal bilateral máximo de* R *y* $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$. *Entonces* $M \in \mathbb{T}_{\omega_I^{\mathrm{R}}}$ *o* $\omega_I^{\mathrm{R}}(M)$ *es un submódulo* $fi-$*máximo de* M.

Demostración. Supongamos que $\omega_I^{\mathrm{R}}(M) \lneqq M$. Sea $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$ tal que $\omega_I^{\mathrm{R}}(M) \lneqq N \leq M$. Por la Observación 4.2.4 se sigue que $\omega_I^{\mathrm{R}} \preceq \omega_N^M$. Como ω_I^{R} es un coátomo, concluimos que $N = M$. Por lo tanto $\omega_I^{\mathrm{R}}(M)$ es un submódulo $fi-$máximo de M.

□

Observación 4.2.6 *Sean* $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ *y* K *un submódulo* $fi-$*máximo de* M. *Entonces existe* I, *un ideal bilateral máximo de* R, *tal que* $\omega_I^{\mathrm{R}}(M) = M$ *o bien* $K = \omega_I^{\mathrm{R}}(M)$.

Demostración. Consideremos el prerradical ω_K^M. Dado que $\mathrm{R}\text{-pr}$ es coatómica, existe I un ideal máximo de R tal que $\omega_K^M \preceq \omega_I^{\mathrm{R}}$. Evaluándolos en M tenemos que $K \leq \omega_I^{\mathrm{R}}(M) \leq M$. En vista de que K es un submódulo $fi-$máximo de M, concluimos que $\omega_I^{\mathrm{R}}(M) = M$ o bien $K = \omega_I^{\mathrm{R}}(M)$.

□

Observación 4.2.7 *Sea* $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ *tal que* $M \notin \mathbb{T}_{\omega_I^{\mathrm{R}}}$ *para cada* I *ideal máximo de* R. *Entonces existe una biyección entre* $\mathrm{Coat}(\mathrm{R}\text{-pr})$ *(los coátomos de* $\mathrm{R}\text{-pr}$*) y* $\mathrm{Fi}-\max(M)$ *(los submódulos fi-máximos de* M*).*

Demostración. Sea $\Phi : \mathrm{Coat}(\mathrm{R}\text{-pr}) \longrightarrow \mathrm{Fi}{-}\max(M)$, dado por $\Phi(\omega_I^{\mathrm{R}}) := \omega_I^{\mathrm{R}}(M)$. Por la Observación 4.2.5, Φ está bien definida, y de la Observación 4.2.6 se tiene que Φ es suprayectiva.

□

Proposición 4.2.8 *Si* $M \notin \mathbb{T}_{\omega_I^{\mathrm{R}}}$ *para cada* I *ideal máximo de* R, *entonces* $\underline{\mathrm{rad}}(M) = \bigcap\{N \in \mathrm{S}_{fi}(M) : N$ *es un submódulo fi-máximo de* $M\}$.

4.3 Módulos multiplicativos y prerradicales.

Definición 4.3.1 *[40] Sea* $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$. *Decimos que* M *es un* **módulo multiplicativo** *(izquierdo) si para cada submódulo* N *de* M, *existe un ideal bilateral* I *de* R *tal que* $N = IM$.

Observación 4.3.2 *Si* $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ *es un módulo multiplicativo, entonces cada submódulo de* M *es totalmente invariante. Esto es,* $\mathrm{S}(M) = \mathrm{S}_{fi}(M)$.

Demostración. En efecto, dado $N \leq M$, existe I un ideal bilateral de M tal que $N = IM$. Luego, para cada $f \in \mathrm{End}_{\mathrm{R}}(M)$ se tiene que $f(N) = f(IM) = If(M) \subseteq IM = N$; y por lo tanto, $f(N) \subseteq N$.

□

De las observaciones de [40], se tiene los siguiente.

Proposición 4.3.3 *Sea* $M \in \mathrm{R{-}Mod}$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) M *es un módulo multiplicativo.*

(b) $\alpha^{\mathrm{R}}_{(N:M)}(M) = N$ *para todo* $N \in \mathrm{S}(M)$.

(c) $\alpha^{\mathrm{R}}_{(0:M/N)}(M) = N$ *para todo* $N \in \mathrm{S}(M)$.

Demostración. La demostración es consecuencia del hecho que M es un módulo multiplicativo si y sólo si $(N : M)M = N$ si y sólo si $(0 : M/N)M = N$ para cada $N \in \mathrm{S}(M)$.

□

Corolario 4.3.4 *Sea* $M \in \mathrm{R{-}Mod}$. *Entonces,*

(a) M *es un módulo multiplicativo.*

(b) $\alpha^{\mathrm{R}}_{(N:M)} \in [\alpha^M_N, \omega^M_N]$ *y cada* $N \leq M$ *es totalmente invariante.*

(c) $\alpha^{\mathrm{R}}_{(0:M/N)} \in [\alpha^M_N, \omega^M_N]$ *y cada* $N \leq M$ *es totalmente invariante.*

Observación 4.3.5 *Para cada* $M \in \mathrm{R{-}Mod}$, *se tiene la aplicación*

$$\varphi_M : \mathrm{R} - \mathrm{trad} \to \mathrm{S}_{fi}(M) \text{ dada por}$$
$$\alpha^{\mathrm{R}}_I \mapsto \alpha^{\mathrm{R}}_I(M) = IM.$$

Notemos que φ_M *preserva* $\bigvee$ *y* $\varphi_M(\underline{1}) = M$.

Además, como $\mathrm{R} - \mathrm{trad}$, el ínfimo de $\alpha^{\mathrm{R}}_{I_1}$ y $\alpha^{\mathrm{R}}_{I_2}$es $\alpha^{\mathrm{R}}_{I_1} \triangle \alpha^{\mathrm{R}}_{I_2} = \alpha^{\mathrm{R}}_{I_1 \cap I_2}$, se sigue que $\varphi_M(\alpha^{\mathrm{R}}_{I_1} \triangle \alpha^{\mathrm{R}}_{I_2}) = (I_1 \cap I_2)M \subsetneq I_1M \cap I_2M = \varphi_M(\alpha^{\mathrm{R}}_{I_1}) \cap \varphi_M(\alpha^{\mathrm{R}}_{I_2})$.

Proposición 4.3.6 *Si* M *es un módulo multiplicativo, entonces* $\mathrm{S}_{fi}(M) = \mathrm{S}(M)$ *y* $\varphi_M : \mathrm{R} - \mathrm{trad} \to \mathrm{S}(M)$ *es suprayectiva, con inversa derecha* $\rho_M : \mathrm{S}(M) \to \mathrm{R} - \mathrm{trad}$, *asignando* $N \mapsto \alpha^{\mathrm{R}}_{(N:M)}$.

Demostración. Es una consecuencia de la Proposición 3.2.3.

Se puede notar que $(\varphi_M \circ \rho_M)(N) = \varphi_M(\alpha^{\mathrm{R}}_{(N:M)}) = \alpha^{\mathrm{R}}_{(N:M)}M = N$. Por lo tanto, $\varphi_M \circ \rho_M = \mathbf{1}_{\mathrm{S}(M)}$. Por otro lado, para cada ideal I se tiene que $\alpha^{\mathrm{R}}_I \leq \alpha^{\mathrm{R}}_{(IM:M)}$, asi que $\mathbf{1}_{\mathrm{R-trad}} \leq \rho \circ \varphi$.

□

Observemos que si M es multiplicativo, fiel y finitamente generado, entonces M es cancelable por la izquierda (esto es, $IM = JM \implies I = J$); y por lo tanto, se satisface que φ_M es inyectiva.

Observación 4.3.7 *Si* M *es un módulo multiplicativo y* $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$, *entonces se tienen las siguientes desigualdades:*

$$\alpha^{\mathrm{R}}_{\alpha^M_N(\mathrm{R})} \preceq \alpha^M_N \preceq \alpha^R_{(N:M)} \preceq \omega^M_N$$

Demostración. La primera desigualdad siempre se tiene; y las otras desigualdades son consecuencia del Corolario 3.2.4 (b).

□

Observación 4.3.8 *Si* $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$, *entonces* $(N : M) = \alpha^{R}_{(N:M)}(R) = \omega^{M}_{N}(R)$.

Demostración. Notemos que $(N : M) = \{r \in R : rm \in N, \forall m \in M\} = \bigcap_{m\in M}\{(- \cdot m)^{-1}(N) \mid - \cdot m : R \to M, r \mapsto rm\}$. Luego, $\bigcap_{m\in M}(- \cdot m)^{-1}(N) = \bigcap\{f^{-1}(N) : f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(R : M)\} = \omega^{M}_{N}(R)$.

□

Observación 4.3.9 *Sea* $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$. *(a) Para cada* $N \leq M$ *se tiene que* $(N : M)$ *un ideal bilateral de* R, *así que podemos definir una asignación*

$$\rho_M : \mathrm{S}(M) \to \mathrm{R} - \mathrm{trad}.$$
$$N \mapsto \alpha^{\mathrm{R}}_{(N:M)}.$$

(b) Para cada $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$, *tenemos también*

$$\gamma_M : \mathrm{S}_{fi}(M) \to \mathrm{R} - \mathrm{trad}.$$
$$N \mapsto \alpha^{\mathrm{R}}_{\alpha^{M}_{N}(R)}.$$

(c) Como consecuencia de lo anterior, tenemos $\bar{\rho}_M, \gamma_M : \mathrm{S}_{fi}(M) \to \mathrm{R} - \mathrm{rad}$ *definidas por* $\bar{\rho}_M(N) = \alpha^{\mathrm{R}}_{(N:M)}$ *y* $\gamma_M(N) = \alpha^{\mathrm{R}}_{\alpha^{M}_{N}(\mathrm{R})}$, *respectivamente. Por la Observación 3.2.7 se sigue que* $\gamma_M \leq \bar{\rho}_M$

En vista de la observación 3.2.8, ver en que casos ambas asignaciones coinciden es equivalente a ver cuando $\omega^{M}_{N}(R) = \alpha^{M}_{N}(R)$ *para cada* $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$. *En particular, para* M *tendremos que* $\alpha^{M}_{M}(\mathrm{R}) = \omega^{M}_{M}(\mathrm{R}) = \mathrm{R}$, *esto es,* $\alpha^{M}_{M} = \underline{1}$, *lo cual ocurre si y sólo si* M *es un generador de* $\mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$.

Ejemplo 4.3.10 *Sea* $0 \neq \mathrm{R}$ *un anillo simple, entonces para cada* $0 \neq M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$, *se satisface que* $\varphi_M : \mathrm{R} - \mathrm{trad} \to S(M)$ *es una biyección.*

4.4 Anillos y módulos aritméticos.

De [39, 3.10] tomamos las siguientes definiciones.

Definición 4.4.1 *Sean* A *un anillo con* 1, $M \in \mathrm{R} - \mathrm{Mod}$.

(a) *Decimos que* M *es un módulo* **aritmético** *si* $S_{fi}(M)$, *la retícula de submódulos totalmente invariantes de* M, *es distributiva.*

(b) *Decimos que* R *es* **aritmético** *si* $\mathrm{Id}(\mathrm{R})$, *la retícula de ideales bilaterales de* R, *es distributiva.*

Observación 4.4.2 *[39, 3.10] Cualquier anillo Von Neumann regular es aritmético.*

Observación 4.4.3 *Sea* R *un anillo con* 1*. Si para cada* $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$*, se satisface que* M *es aritmético; entonces, en particular* R *es un anillo aritmético.*

Proposición 4.4.4 *Sea* R *un anillo con* 1*, tal que para cualesquiera* $r, s, t \in \mathrm{R} - trad$ *se satisface que* $r \wedge (s \vee t) = (r \wedge s) \vee (r \wedge t)$*; entonces* R *es aritmético.*

Demostración. Sean $I, J, K \in \mathrm{Id}(\mathrm{R})$. Consideremos los $t-$radicales α_I^R, α_J^R y α_K^R. Recordemos que éstos satisfacen $\alpha_I^R(R) = I, \alpha_J^R(R) = J$ y $\alpha_K^R(R) = K$.

Por la hipótesis, se sigue que $I \cap (J + K) = [\alpha_I^R \wedge (\alpha_J^R \vee \alpha_K^R)](R) = [(\alpha_I^R \wedge \alpha_J^R) \vee (\alpha_I^R \wedge \alpha_K^R)](R) = (I \cap J) + (I \cap K)$. Por lo tanto, $\mathrm{Id}(\mathrm{R})$ es distributiva. □

Corolario 4.4.5 *Sea* R *un anillo con* 1 *tal que* R-pr *es una retícula distributiva. Entonces,* R *es aritmético.*

Demostración. Dado que por hipótesis, R-pr es distributiva; en particular se cumple que $r \wedge (s \vee t) = (r \wedge s) \vee (r \wedge t)$ para cualesquiera $r, s, t \in \mathrm{R}{-}trad$. Así que por la Proposición 4.4.4, concluimos que R es aritmético.

Proposición 4.4.6 *Sea* R *un anillo con* 1*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *Para cada* $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$*, se satisface que* M *es aritmético.*

(b) R-pr *es una retícula distributiva.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sean $r, s, t \in \mathrm{R}$-pr y $M \in \mathrm{R} - \mathrm{Mod}$. Como sabemos $r(M), s(M), t(M) \in S_{fi}(M)$. Entonces, por (a) se sigue que $[r \wedge (s \vee t)](M) = r(M) \cap [s(M) + t(M)] = [r(M) \cap s(M)] + [r(M) \cap t(M)] = [(r \wedge s) \vee (r \wedge t)](M)$.

Por lo tanto, $r \wedge (s \vee t) = (r \wedge s) \vee (r \wedge t)$. Esto es, R-pr es distributiva.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sean $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ y $K, L, N \in S_{fi}(M)$. Consideremos los prerradicales α_L^M, α_N^M y α_K^M. Entonces, usando (b) obtenemos lo siguiente,
$L \cap (N + K) = [\alpha_L^M \wedge (\alpha_N^M \vee \alpha_K^M)](M) = [(\alpha_L^M \wedge \alpha_N^M) \vee (\alpha_L^M \wedge \alpha_K^M)](M) = (L \cap N) + (L \cap K)$. Por lo tanto, $L \cap (N + K) = (L \cap N) + (L \cap K)$; con lo cual concluimos que $S_{fi}(M)$ es distributiva.

□

Observación 4.4.7 *Sea* R *un anillo con* 1*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) R *es un anilo totalmente-idempotente (cada ideal bilateral es idempotente).*

(b) *Cada* $t-$*radical es idempotente.*

(c) *Para cada* $I, J \in \mathrm{Id}(\mathrm{R})$ *se satisface que* $IJ = I \cap J$*.*

(d) *Para cada* $\alpha_I^R, \alpha_J^R \in R - trad$*, se satisface que* $\alpha_I^R \cdot \alpha_J^R = \alpha_{IJ}^R = \alpha_{(I \cap J)}^R$*.*

Observación 4.4.8 *Si* R *es un anillo regular de von Neumann, entonces cada* $t-$*radical es exacto izquierdo.*

Observación 4.4.9 *[19] (Lema de la base dual) Sea $P \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$. Entonces, P es proyectivo si y sólo si existen $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq P$ y $\{f_i\}_{i\in I} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(P, \mathrm{R})$ tales que para cada $a \in P$, $f_i(a) = 0$ para casi todo i, y $a = \sum_{i\in I} f_i(a)a_i$.*

Haciendo uso de [19][2.40 Proposition], se tiene la siguiente observación.

Observación 4.4.10 *Sea P un módulo proyectivo. Entonces α_P^P es un $t-$radical idempotente. De hecho, $\alpha^R_{\alpha^P_P(R)} = \alpha^P_P$.*

Demostración. Dado que P es proyectivo, por el Lema de la base dual, existen $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq P$ y $\{f_i\}_{i\in I} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(P, \mathrm{R})$ tales que para cada $a \in P$, $f_i(a) = 0$ para casi todo i, y $a = \sum_{i\in I} f_i(a)a_i \in \alpha^P_P(\mathrm{R})P$. Lo anterior quiere decir que $\alpha^{\mathrm{R}}_{\alpha^P_P(\mathrm{R})}(P) = P$. Por lo tanto, $\alpha^P_P \leq \alpha^{\mathrm{R}}_{\alpha^P_P(\mathrm{R})}$. La otra desigualdad siempre se tiene. Por lo tanto, $\alpha^P_P = \alpha^{\mathrm{R}}_{\alpha^P_P(\mathrm{R})}$

□

Capítulo 5

Suplementos en R-pr.

5.1 Suplementos en R-pr.

En esta sección, estudiaremos suplementos en R-pr.

5.1.1 Definiciones y propiededes básicas.

Definición 5.1.1 *Sean $\mathcal{L}$ una retícula con $\underline{1}$ y $a, b \in \mathcal{L}$. Decimos que*

(a) *b es un* **suplemento para un elemento** $a \in \mathcal{L}$ *si b es un elemento mínimo en $\{c \in \mathcal{L} \mid c \vee a = \underline{1}\}$.*

(b) *b es un* **suplemento fuerte para** a **en** $\mathcal{L}$ *si b is el menor elemento en $\{c \in \mathcal{L} \mid c \vee a = \underline{1}\}$.*

Definición 5.1.2 *Sean $M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ y $L, N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$. Decimos que L es un* **fi−suplemento (fuerte) de** N *si L es un suplemento (fuerte) de N en $\mathrm{S}_{fi}(M)$.*

Lema 5.1.3 *Sean r, $s \in \mathrm{R}$-pr. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si s es un suplemento de r, entonces $s(\mathrm{R})$ es un fi−suplemento de $r(\mathrm{R})$.*

(b) *Si s es un suplemento fuerte de r, entonces $s(\mathrm{R})$ es un fi−suplemento fuerte de $r(\mathrm{R})$.*

<u>Demostración.</u> (a) Dado que $s \vee r = \underline{1}$, entonces $s(\mathrm{R}) + r(\mathrm{R}) = \mathrm{R}$. Ahora, si I es un ideal bilateral de R tal que $I \leq s(\mathrm{R})$ y $r(\mathrm{R}) + I = \mathrm{R}$, entonces $\alpha_I^{\mathrm{R}} \preceq \alpha_{s(\mathrm{R})}^{\mathrm{R}} \preceq s$. Como $\mathrm{R} = r(\mathrm{R}) + I = (r \vee \alpha_I^{\mathrm{R}})(\mathrm{R})$, entonces $r \vee \alpha_I^{\mathrm{R}} = \underline{1}$. Luego $\alpha_I^{\mathrm{R}} = s$, ya que s es un suplemento de r. Por lo tanto, $I = (\alpha_I^{\mathrm{R}})(\mathrm{R}) = s(\mathrm{R})$.

(b) Si s es un suplemento fuerte de r, entonces $s(\mathrm{R})$ es un fi−suplemento de $r(\mathrm{R})$. Si $r(\mathrm{R}) + I = \mathrm{R}$, con $I \in \mathrm{S}_{fi}(\mathrm{R})$, entonces $r \vee \alpha_I^{\mathrm{R}} = \underline{1}$. Por lo tanto, $s \preceq \alpha_I^{\mathrm{R}}$ por hipótesis. Concluimos evaluando estos prerradicales en R.

Lema 5.1.4 *Sea $r \in \mathrm{R}$-pr. Si I es un fi−suplemento de $r(\mathrm{R})$, entonces α_I^{R} es un suplemento de r.*

<u>Demostración.</u> Notemos que $(\alpha_I^{\mathrm{R}} \vee r)(\mathrm{R}) = I + r(\mathrm{R}) = \mathrm{R}$. Luego, $\alpha_I^{\mathrm{R}} \vee r = \underline{1}$. Ahora, sea $\sigma \in \mathrm{R}$-pr tak que $\sigma \preceq \alpha_I^{\mathrm{R}}$ y $\sigma \vee r = \underline{1}$. Entonces, $\sigma(\mathrm{R}) \leq I$ y $\sigma(\mathrm{R}) + r(\mathrm{R}) = \mathrm{R}$. Como I es un fi−suplemento de $r(\mathrm{R})$, entonces $\sigma(\mathrm{R}) = I$. Luego $\alpha_I^{\mathrm{R}} \preceq \sigma$; y por lo tanto, $\sigma = \alpha_I^{\mathrm{R}}$.

□

Lema 5.1.5 *Sea $r \in \mathrm{R}$-pr. Si I es un $fi-$suplemento fuerte de $r(\mathrm{R})$, entonces α_I^{R} es un suplemento fuerte de r.*

Demostración. Es similar a la demostración vista en el Lema 5.1.4.

Proposición 5.1.6 *Sea $r \in \mathrm{R}$-pr un $t-$radical. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *r tiene un suplemento en R-pr si y sólo si $r(\mathrm{R})$ tiene un $fi-$suplemento en R.*

(b) *r tiene un suplemento fuerte en R-pr si y sólo si $r(\mathrm{R})$ tiene un $fi-$ suplemento fuerte en R.*

Demostración. (a) Dado que r es un $t-$radical, se tiene que $r = \alpha_{r(\mathrm{R})}^{\mathrm{R}}$. Sea s un suplemento para r en R-pr. Entonces, por el Lema 5.1.3 (a), $s(\mathrm{R})$ es un $fi-$suplemento de $r(\mathrm{R})$ in R. El recíproco se sigue del Lema 5.1.4.

(b) Es similar a la demostración de (a).

Proposición 5.1.7 *Sea $s \in \mathrm{R}$-pr. Las siguientes condiciones se satisfacen*

(a) *Si s es un suplemento para algún $r \in \mathrm{R}$-pr, entonces s es un $t-$radical .*

(b) *Si s es el suplemento fuerte para algún $r \in \mathrm{R}$-pr, entonces s es un $t-$radical idempotente.*

Demostración. (a) Si s es un suplemento de r, entonces $s(\mathrm{R})$ es un $fi-$suplemento de $r(\mathrm{R})$. Entonces, $\alpha_{s(\mathrm{R})}^{\mathrm{R}}$ es un suplemento de r. Como $\alpha_{s(\mathrm{R})}^{\mathrm{R}} \preceq s$, entonces $\alpha_{s(\mathrm{R})}^{\mathrm{R}} = s$.

(b) Si s es un suplemento fuerte de r,entonces por (a) $s = \alpha_{s(\mathrm{R})}^{\mathrm{R}}$. Ahora veamos que s es idempotente.

Dado que $\underline{1} = r \vee s$, entonces $\underline{1} = r \vee (\underline{1} \cdot s) = r \vee [(r \vee s) \cdot s] = r \vee (r \cdot s) \vee (s \cdot s) = r \vee (s \cdot s)$. Esto es, $r \vee (s \cdot s) = \underline{1}$. Por la hipótesis sobre$s$, entonces $s \preceq s \cdot s$. Por lo tanto, $s = s \cdot s$.

□

5.2 Condiciones para que R-pr sea una gran retícula suplementada o fuertemente suplementada.

Teorema 5.2.1 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *R-pr es una gran retícula suplementada.*

(b) *$\mathrm{R} - \mathrm{Mod}$ tiene un generador M tal que $\mathrm{S}_{fi}(M)$es una retícula suplementada.*

Demostración. [(a) $\Rightarrow$ (b)] Haciendo uso de la Proposición 5.1.6, tenemos que R es un generador para $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ con $\mathrm{S}_{fi}(\mathrm{R})$ suplementada.

[(b)$\Rightarrow$ (a)] Sea $M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ un generador de $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ tal que $\mathrm{S}_{fi}(M)$ es una retícula suplementada.

Si $r \in$ R-pr, tenemos que $r(M) \in \mathrm{S}_{fi}(M)$. Por hipótesis, $r(M)$ tiene un $fi-$suplemento $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$. Ahora, veamos que α_N^M es un suplemento de r. Como $r(M)+N=M$ entonces $\alpha_M^M \preceq (r \vee \alpha_N^M)$. Dado que M es un generador de $\mathrm{R-Mod}$, entonces $\alpha_M^M = \underline{1}$. De donde, $r \vee \alpha_N^M = \underline{1}$.

Ahora, si t es un prerradical tal que $t \preceq \alpha_N^M$ y $t \vee r = \underline{1}$; entonces $t(M) \leq N$ y $t(M)+r(M) = M$. Como N es un $fi-$suplemento de $r(M)$, obtenemos que $t(M) = N$. Luego, $\alpha_N^M \preceq t$. Por lo tanto, $t = \alpha_N^M$.

□

Teorema 5.2.2 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) R-pr *es una gran retícula fuertemente suplementada.*

(b) $\mathrm{R-Mod}$ *tiene un generador* M *tal que* $\mathrm{S}_{fi}(M)$ *es una retícula suplementada.*

<u>Demostración.</u> Es similar a la demostración vista en el Teorema 5.2.1.

Teorema 5.2.3 *En* R-pr, *las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) R-pr *es suplementada.*

(b) *Existe* $M \in \mathrm{R}-Mod$ *generador de* $\mathrm{R-Mod}$ *tal que* $S_{fi}(M)$ *es suplementada.*

<u>Demostración.</u> [(a)⇒ (b)] Dado que R-pr es suplementada por hipótesis, entonces tenemos esto en particular para los $t-$radicales, que estan en correspondencia biyectiva con los ideales bilaterales de R; y dado que R es un generador de $\mathrm{R-Mod}$, concluimos observando lo deseado: $S_{fi}(R)$ es suplementada.

[(a)⇒ (b)] Veamos que R-pr es suplementda.

Sea $M \in \mathrm{R-Mod}$ un generador de $\mathrm{R-Mod}$ que satisface las condiciones de (b).

Sea $r \in \mathrm{R}-pr$, consderemos el módulo $r(M) \in S_{fi}(M)$ y el prerradical $\alpha_{r(M)}^M \leq r$. Dado que $S_{fi}(M)$ es suplementada, existe $N \in S_{fi}(M)$ tal que N es suplemento de $r(M)$ en M.

Consideremos el prerradical α_N^M. Primero notemos que $r \vee \alpha_N^M = \underline{1}$. Notemos que $r(M)+N=M$ implica que $r \vee \alpha_N^M \geq \alpha_{r(M)}^M \vee \alpha_N^M \geq \alpha_M^M = \underline{1}$.

Ahora, sea $t \leq \alpha_N^M$ tal que $t \vee r = \underline{1}$. Entonces, $t(M) \leq N$ y $t(M)+r(M) = M$. Luego, dado que N es un suplemento de $r(M)$, se sigue que $t(M) = N$ y con ello α_N^M. Por lo tanto $t = \alpha_N^M$.

□

Observación 5.2.4 *Si* $M \in \mathrm{R-Mod}$ *es principal; en particular es un generador de* $\mathrm{R-Mod}$.

<u>Demostración.</u> En efecto, dado que M es principal se tiene que $r = \alpha_r^M(M)$ para cada $r \in$ R-pr. En particular, $\underline{1} = \alpha_M^M$. Esto último es equivalente a que M sea un generador de $\mathrm{R-Mod}$.

□

Teorema 5.2.5 *Sea* $M \in \mathrm{R-Mod}$ *que es principal. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\mathrm{R\text{-}pr}$ *es suplementada.*

(b) $S_{fi}(M)$ *es suplementada.*

Demostración. [(a)⇒(b)] Sea $N \in S_{fi}(M)$. Consideremos el prerradical α_N^M. Luego por (a), existe $s \in \mathrm{R\text{-}pr}$ que es un suplemento de α_N^M. Entonces, $M = (s \vee \alpha_N^M)(M) = s(M) + N) = M$. Ahora, sea $K \in S_{fi}(M)$ tal que $K \leq s(M)$ y $K + s(M) = M$. Como $K = \alpha_K^M(M)$, tenemos que $(\alpha_K^M \vee \alpha_N^M)(M) = M = \alpha_M^M(M)$. De donde, por la observación 5.2.4, tenemos que $\underline{1} = \alpha_M^M = \alpha_K^M + \alpha_N^M$.

Finalmente, como s es suplemento de α_N^M, concluimos que $\alpha_K^M = s$. Por lo tanto, $K = \alpha_K^M(M) = s(M)$.

[(a)⇒(b)] Sea $r \in \mathrm{R\text{-}pr}$. Por la hipótesis, $r = \alpha_{r(M)}^M$. Ahora bien, dado que $S_{fi}(M)$ es suplementada, existe $L \in S_{fi}(M)$ un fi-suplemento de $r(M)$. Notemos que α_L^M es un suplemento de r en $\mathrm{R\text{-}pr}$.

□

5.2.1 Prerradicales con suplemento fuerte.

Denotemos por $S_s(\mathrm{R\text{-}pr})$ a la clase de prerradicales que tienen suplemento fuerte en $\mathrm{R\text{-}pr}$. Para cada $r \in S_s(\mathrm{R\text{-}pr})$ denotaremos por $r_\perp$ tal suplemento fuerte de r.

Notemos que $\underline{0}, \underline{1} \in S_s(\mathrm{R\text{-}pr})$.

Definimos la relación $\sim_\perp$ en $S_s(\mathrm{R\text{-}pr})$ como $r{\sim_\perp}s$ si y sólo si $r_\perp = s_\perp$. La relación $\sim_\perp$ es una relación de equivalencia en $S_s(\mathrm{R\text{-}pr})$. Para cada $r \in S_s(\mathrm{R\text{-}pr})$, $[r]_\perp := \{s \in \mathrm{R\text{-}pr} \mid r \sim_\perp s\}$.

Observación 5.2.6 $[\underline{0}]_\perp = \{r \in S_s(\mathrm{R\text{-}pr}) \mid r$ *es un prerradical superfluo* $\}$. *Además,* $[\underline{1}]_\perp = \{\underline{1}\}$.

Observación 5.2.7 *Si* $\mathrm{R\text{-}pr}$ *es un suplemento fuerte, entonces* $(r_\perp)_\perp \preceq r$ *para cada* $r \in \mathrm{R\text{-}pr}$.

Proposición 5.2.8 *Sea* R *un anillo tal que* $\mathrm{R\text{-}pr}$ *es una gran retícula fuertemente suplementada. Entonces,* $[r]_\perp = [r_{\perp\perp}, \underline{\mathrm{rad}}_r]$. *En particular,* $[\underline{0}, \underline{\mathrm{rad}}]$ *consiste de todos los prerradicales superfluos.*

Observación 5.2.9 *El* **totalizador** *in* $\mathrm{R\text{-}pr}$ *está definido por* $\mathrm{t}(r) := \bigwedge\{\tau \in \mathrm{R\text{-}pr} \mid (r : \tau) = \underline{1}\}$. *Las propiedades del totalizador pueden encontrarse en [26], [27] y [6, I.2.E5]. Para conveniencia del lector, enlistamos aquí algunas de sus propiedades.*

(a) $\mathrm{t}(r)$ *es el menor prerradical en la clase* $\{\tau \in \mathrm{R\text{-}pr} \mid (r : \tau) = \underline{1}\}$.

(b) $r^\perp \preceq \mathrm{t}(r)$.

(c) $\mathrm{t}(r)(\mathrm{R}) = (0 : r(\mathrm{R}))$, *donde* $(0 : r(\mathrm{R})) := \{x \in \mathrm{R} \mid r(\mathrm{R})x = 0\}$. *Más aún,* $\alpha^{\mathrm{R}}_{(0:r(\mathrm{R}))} \preceq \mathrm{t}(r)$.

Lema 5.2.10 *Si* $r \in S_s(\mathrm{R\text{-}pr})$ *entonces* $t(r) \preceq r_\perp$.

Demostración. Como $\underline{1} = r \vee r_\perp \preceq (r : r_\perp)$. Así, $(r : r_\perp) = \underline{1}$. Por lo tanto, por la Observación 5.2.9 (a), obtenemos que $\mathrm{t}(r) \preceq r_\perp$.

Teorema 5.2.11 *Sea* R *un anillo con* 1 *tal que* R-pr *es una gran retícula fuertemente suplementada. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *Para cada* $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$, $t(r) = r_\perp$.

(b) *Para cada* $I \in \mathrm{S}_{fi}(\mathrm{R})$, $(0 : I)$ *es el* $fi-$*suplemento fuerte de* I.

Demostración. Notemos que por la demostración del Teorema 5.2.2, $\mathrm{S}_{fi}(\mathrm{R})$ es una retícila fuertemente suplementada.

$[(\mathrm{a}) \Rightarrow (\mathrm{b})]$ Sea I un ideal bilateral de R. Consideremos el $t-$radical α_I^{R}. Aplicando la Observación 5.2.9 (c) a α_I^{R}, obtenemos que $[\mathrm{t}(\alpha_I^{\mathrm{R}})](\mathrm{R}) = (0 : [\alpha_I^{\mathrm{R}}](\mathrm{R}))$. Además, por el Lema 5.1.5 $t(\alpha_I^{\mathrm{R}}) = (\alpha_I^{\mathrm{R}})_\perp = \alpha_{I_\perp}^{\mathrm{R}}$, donde $I_\perp$ denota el $fi-$suplemento fuerte de I. Entonces tenemos que $(0 : I) = (0 : [\alpha_I^{\mathrm{R}}](\mathrm{R})) = [\mathrm{t}(\alpha_I^{\mathrm{R}})](\mathrm{R}) = (\alpha_I^{\mathrm{R}})_\perp(\mathrm{R}) = (\alpha_{I_\perp}^{\mathrm{R}})(\mathrm{R}) = I_\perp$.

$[(\mathrm{b}) \Rightarrow (\mathrm{a})]$ Sea $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$. Por el Lema 5.1.5 y la hipótesis, se sigue que $r_\perp = (\alpha_{r(\mathrm{R})}^{\mathrm{R}})_\perp = (\alpha_{r(\mathrm{R})_\perp}^{\mathrm{R}}) = \alpha_{(0:r(\mathrm{R}))}^{\mathrm{R}}$. Además, el Lema 5.2.10 implica que $\mathrm{t}(r) \preceq r_\perp$. De donde, $\mathrm{t}(r) \preceq \alpha_{(0:r(\mathrm{R}))}^{\mathrm{R}}$. Por otto lado, la Observación 5.2.9(c) implica que $\alpha_{(0:r(\mathrm{R}))}^{\mathrm{R}} \preceq \mathrm{t}(r)$. Por lo tanto, $\mathrm{t}(r) = \alpha_{(0:r(\mathrm{R}))}^{\mathrm{R}} = r_\perp$.

□

5.3 $\mathrm{R} - trad$ y $\mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\prod}$ para anillos perfectos.

Lema 5.3.1 *La asignación* $\varphi : \mathrm{R} - trad \to \mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\prod}$. *dado por* $\alpha_I^{\mathrm{R}} \mapsto \mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}}$, *es un anti-isomorfismo de retículas.*

Demostración. Sean J, J ideales bilaterales de R tales que $I \leq J$. Entonces $\alpha_I^{\mathrm{R}} \preceq \alpha_J^{\mathrm{R}}$ y se satisface que $\mathbb{F}_{\alpha_J^{\mathrm{R}}} \subseteq \mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}}$. Esto es, φ invierte el orden.

Por otro lado, sean I, J ideales de R y $M \in \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod}$ tal que $(\alpha_I^{\mathrm{R}} \vee \alpha_J^{\mathrm{R}})(M) = 0$, entonces $\alpha_I^{\mathrm{R}}(M) = 0$ y $\alpha_J^{\mathrm{R}}(M) = 0$. Por lo tanto, $\varphi(\alpha_I^{\mathrm{R}} \vee \alpha_J^{\mathrm{R}}) = \mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}} \cap \mathbb{F}_{\alpha_J^{\mathrm{R}}}$.

Ahora bien, en $\mathrm{R} - trad$,$\alpha\,{}_I^{\mathrm{R}} \bar{\wedge} \alpha_J^{\mathrm{R}} = \alpha_{I\cap J}^{\mathrm{R}}$; mientras que $\mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}} \underline{\bigvee} \mathbb{F}_{\alpha_J^{\mathrm{R}}} = \mathbb{F}_{\alpha_{I\cap J}^{\mathrm{R}}}$. De donde, $\varphi(\alpha_I^{\mathrm{R}} \bar{\wedge} \alpha_J^{\mathrm{R}}) = \mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}} \underline{\bigvee} \mathbb{F}_{\alpha_J^{\mathrm{R}}}$.

□

Comentarios 5.3.2

(a) *En el artículo* **TTF-Classes over perfect rings**, *J.S. Alin y E. P. Armendariz (J. Austral. Math. Soc. 11 (1970), 490-503); los autores demostraron que en un anillo* R *perfecto derecho, cada clase de torsión hereditaria es cerrada bajo productos directos; y determinada por un ideal idempotente del anillo.*

Cabe mencionar, que el comentario anterior, fue tomado del artículo **Torsion Theories over semiperfect rings**, *Edgar A. Rutter, Jr. (Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 34, Numb. 2, August 1972).*

(b) *Por otro lado, en el artículo* **On big lattices of classes of** $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ **defined by Closure properties**, *los autores demostraron los siguientes resultados.*

[3][Theorem 1.4] *Supongamos que* $\mathscr{L}_P$ *y* $\mathscr{L}_Q$ *son retículas fuertemente seudocomplementadas. Si* $Skel(\mathscr{L}_P) \subseteq \mathscr{L}_Q\mathscr{L}_P$; *entonces* $Skel(\mathscr{L}_P) = Skel(\mathscr{L}_Q)$.

[3][Lemma 1.7] $\mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$ *es una gran retícula fuertemente seudocomplementada. El seudocomplemento fuerte de* $\mathcal{C} \in \mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$ *está dado por* $\mathcal{C}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}} = \{M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod} : M$ *no tiene subcocientes distintos de cero en* $\mathbb{F}.\}$ *Más aún,* $\mathcal{C}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$ *es una clase de torsión hereditaria que pertenece al esqueleto de* $\mathrm{R}?tors$.

(c) *Ver también el artículo* **Hereditary and cohereditary preradicals**, *Bican, Jambor, Kepka y Nemec (Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 26 (1976), No. 2, 192–206).*

Utilizando los resultados anteriores, tenemos lo siguiente:

Proposición 5.3.3 *Sea* R *un anillo perfecto derecho. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $\mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\prod}$ *es fuertemente suplementada y para cada* $\mathbb{F} \in \mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\prod}$, *tenemos que* $\mathbb{F}^{\perp} = \mathbb{F}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}} = \{M \in \mathrm{R}-\mathrm{Mod} : M$ *no tiene subcocientes distintos de cero en* $\mathbb{F}\}$.

(b) $\mathrm{R}-trad$ *es fuertemente suplementada y para cada* α_I^{R}, *se tiene que* α_J^{R}, *donde* $J_I := \bigcap\{_RL \leq R \mid R/L \in (\mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}})^{\perp}\}$ *es el suplemento fuerte de* α_I^{R}.

(c) $\mathrm{R}-pr$ *es fuertemente suplementada; y para cada* $\sigma \in \mathrm{R}\text{-pr}$; *el suplemento fuerte de* σ, *es* $\sigma_{\perp} = \alpha^{\mathrm{R}}_{J_{\sigma(R)}}$

Demostración. (a) Dado que R es un anillo perfecto izquierdo, se sigue que cada clase de torsión es cerrada bajo productos directos. Así que para cada clase $\mathbb{F} \in \mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\prod}$ se tiene que $\mathbb{F}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$, su seudocomplemento en $\mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}$, es una clase de torsión hereditaria cerrada bajo productos. De donde,

$$Skel(\mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}) \subseteq \mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\prod,ext} \subseteq \mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\prod} \subseteq \mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}.$$

Por lo tanto, $Skel(\mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow}) = Skel(\mathscr{L}_{\leq,\twoheadrightarrow,\prod})$ y $\mathbb{F}^{\perp} = \mathbb{F}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$

(b) Ahora, sea I un ideal de R y α_I^{R} el $t-$radical correspondiente. Consideremos la clase libre de torsión cohereditaria $\mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}}$. Por el inciso (a), tenemos que $(\mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}})^{\perp}$ es una clase de torsión hereditaria jansiana. Sea t el radical exacto izquierdo jansiano correspondiente a $(\mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}})^{\perp}$; y consideremos el ideal bilateral $\mathcal{J}_I := \bigcap\{_RL \leq R \mid R/L \in (\mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}})^{\perp}\}$.

Se puede probar que $\mathcal{J}_I$ es un ideal idempotente y que $(\mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}})^{\perp} = \mathbb{F}_{\alpha^R_{\mathcal{J}_I}}$.

Finalmente, veamos que $\alpha^{\mathrm{R}}_{\mathcal{J}_I}$ es el suplemento fuerte de α_I^{R}.

$\varphi(\alpha^{\mathrm{R}}_{\mathcal{J}_I} \vee \alpha_I^{\mathrm{R}}) = \mathbb{F}_{\alpha^{\mathrm{R}}_{\mathcal{J}_I}} \cap \mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}} = (\mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}})^{\perp} \cap \mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}} = \{0\}$. Dado que φ es biyectiva, se sigue que $\alpha^{\mathrm{R}}_{\mathcal{J}_I} \vee \alpha_I^{\mathrm{R}} = \underline{1}$. Por otro lado, sea α_K^{R} tal que $\alpha_K^{\mathrm{R}} \vee \alpha_I^{\mathrm{R}} = \underline{1}$. Entonces, $0 = \varphi(\alpha_K^{\mathrm{R}} \vee \alpha_I^{\mathrm{R}}) = \mathbb{F}_{\alpha_K^{\mathrm{R}}} \cap \mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}}$. Luego, $\mathbb{F}_{\alpha_K^{\mathrm{R}}} \subseteq (\mathbb{F}_{\alpha_I^{\mathrm{R}}})^{\perp}$; y por lo tanto, al aplicar φ, tenemos que $\alpha^{\mathrm{R}}_{\mathcal{J}_I} = \varphi^{-1}((\mathbb{F}_{\alpha^{\mathrm{R}}_I})^{\perp}) \preceq \alpha^{\mathrm{R}}_K$. Por lo tanto, $\alpha^{\mathrm{R}}_{\mathcal{J}_I}$ es el suplemento fuerte de α^{R}_I.

(c) Por el inciso (b) se tiene que $\mathrm{R}-trad$ es fuertemente suplementada y dado que $\mathrm{R}-trad$ es isomorfa a $\mathrm{S}_{fi}(R)$, la retícula de ideales bilaterales del anillo; se sigue que $\mathrm{S}_{fi}(R)$ es fuertemente $fi-$suplementada. Luego, por el Lema 1.5.5 de estas notas, concluimos que $\alpha^{\mathrm{R}}_{\mathcal{J}_I}$ es el suplemento fuerte de r, para cada $\sigma \in \mathrm{R}\text{-pr}$; donde $I := \sigma(R)$.

$\square$

Capítulo 6

Compacidad y cocompacidad.

6.1 Compacidad en R-pr.

En [8, Chapters 2 y 11] han sido abordados los temas de compacidad y cocompacidad para retículas.

En esta sección estudiaremos el caso particular de la gran retícula de prerradicales, que ha pesar de no ser un conjunta, tiene un comportamiento similar al de una retícula usual.

A continuación, recordamos algunas definiciones y propiedades básicas.

Definición 6.1.1 *[8, Cap. 2]*

(a) *Un elemento c de una retícula completa L es* **compacto** *si para cada subconjunto X de L y $c \leq \bigvee X$ existe $F \subseteq X$ finito tal que $c \leq \bigvee F$.*

(b) *Un elemento c de una retícula L es* **S-compacto** *si para cada subconjunto dirigido superiormente D de L y $c \leq \bigvee D$ existe $d_0 \in D$ tal que $c \leq d_0$.*

En el caso de una gran retícula $\mathscr{L}$, diremos que $a \in \mathscr{L}$ es **fuertemente compacto**, si para cualesquiera X subclase de $\mathscr{L}$ tal que $a \leq \bigvee X$ (dirigido), existe $F \subseteq X$ conjunto finito tal que $a \leq \bigvee F$.

Proposición 6.1.2 *[8, Remark 2.1] Sea $\mathscr{L}$ una (gran) retícula completa y $a \in \mathscr{L}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *a es compacto.*

(b) *a es $S-$compacto.*

Demostración. $[(a) \Rightarrow (b)]$ Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathscr{L}$ un conjunto dirigido tal que $a \leq \bigvee \mathcal{D}$. Como a es compacto en $\mathscr{L}$, existe $X \subseteq \mathcal{D}$ tal que $a \leq \bigvee X$. Tomando $d := \bigvee X \in \mathcal{D}$, concluimos que a es $S-$compacto.

$[(b) \Rightarrow (a)]$ Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{L}$ tal que $a \leq \bigvee \mathcal{C}$. Sea $D := \{\bigvee X \mid X \subseteq \mathcal{C},\ X \text{ finito}\}$. Notemos que $(D, \subseteq)$ es un conjunto dirigido y $\bigvee D = \bigvee \mathcal{C}$. Dado que a es $S-$compacto, existe $Y \in D$ tal que $a \leq Y = \bigvee X$ con $X \subseteq \mathcal{C}$ finito.

$\square$

Proposición 6.1.3 *[8, Proposition 2.1] Sea $\mathscr{L}$ una (gran) retícula completa y superiormente continua. Si X es un conjunto finito de elementos compactos de $\mathscr{L}$, entonces $\bigvee X$ es compacto en $\mathscr{L}$.*

Demostración. Sea $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{L}$ un conjunto dirigido tal que $\bigvee X \leq \bigvee \mathcal{C}$. Dado que cada a_i es compacto en $\mathscr{L}$, existen $d_i \in \mathcal{C}$ tal que $a_i \leq \mathcal{C}$. Luego, como $\{d_1, \ldots, d_n\} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es dirigido, existe $d = \bigvee\{d_1, \ldots, d_n\} \in \mathcal{C}$; satisfaciendo que $a_i \leq d$ para cada i. Por lo tanto, $\bigvee X \leq d$.

□

En general, para dos elementos compactos $a, b \in \mathscr{L}$, no se satisface que $a \wedge b$ sea compacto.

6.1.1 R-pr

El siguiente resultado se satisface en cualquier retícula superiormente continua (ver [8, Proposition 2.2]), pero lo presentamos sólo para el caso de los prerradicales

Proposición 6.1.4 *En* R-pr, *se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $r \in \mathrm{R}\text{-pr}$ *es compacto si y sólo si es S-compacto.*

(b) *Cada átomo es compacto.*

Demostración. (a) Es consecuencia de que R-pr es completa y superiormente continua.

(b) Sean $S \in \mathrm{R}\text{-simp}$, $\alpha_S^{E(S)}$ un átomo de R-pr y D un conjunto de prerradicales dirigido tal que $\alpha_S^{E(S)} \leq \bigvee\limits_{\gamma \in D} r_\gamma$. Supongamos que $\alpha_S^{E(S)}$ no es S-compacto, entonces $\alpha_S^{E(S)} \not\leq r_\gamma$ para todo $\gamma \in D$. Luego, $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^{E(S)} \wedge (\bigvee_{\gamma \in D} r_\gamma) = \bigvee_{\gamma \in D}(\alpha_S^{E(S)} \wedge r_\gamma) = 0$, lo cual es una contradicción.

□

Proposición 6.1.5 *[6] Para cada* $M \in \mathrm{R}\text{−Mod}$ *y* $N \leq M$, *se define el prerradical* $\beta_N^M : \mathrm{R}\text{−Mod} \to \mathrm{R}\text{−Mod}$ *dado por* $\beta_N^M(L) := \sum\{f(N) \mid f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M, L)\}$. *Además* $\beta_N^M(M)$ *es el menor submódulo totalmente invariante de* M *que contiene a* N.

Demostración. Ver [6], donde este tipo de prerradicales ya han sido definidos.

□

Proposición 6.1.6 *Sea* $0 \neq M \in \mathrm{R}\text{−Mod}$ *y* $0 \neq m \in M$. *Entonces,* $\beta_{\mathrm{R}m}^M$ *es (fuertemente) compacto en* R-pr.

Demostración. Sea $\{r_\alpha\}_\Lambda \subseteq \mathrm{R}\text{-pr}$ tal que $\beta_{\mathrm{R}m}^M \preceq \bigvee\{r_\alpha\}$.

Evaluando en M, obtenemos que $m \in \beta_{\mathrm{R}m}^M(M) \leq \sum r_\alpha(M)$. Luego, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Lambda$ y $r_1, \ldots, r_k$ tal que $\mathrm{R}m \subseteq r_{\alpha_1}(M) + \cdots + r_{\alpha_k}(M)$.

De donde, $\beta_{\mathrm{R}m}^M \preceq \alpha^M_{\sum_{i=1}^k r_{\alpha_i}(M)} \preceq \bigvee_{i=1}^k r_{\alpha_i}$.

□

Proposición 6.1.7 *Si* $N \leq M$ *es finitamente generado, entonces* β_N^M *es compacto en* R-pr. *Si en particular* $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$, *entonces* α_N^M *es compacto.*

Demostración. Sea $N = \sum_{i=1}^n \mathrm{R}x_i$. Notemos que $\beta_N^M = \bigvee_{i=1}^n \beta_{\mathrm{R}x_i}^M$. Luego, el resultado se sigue de 6.1.6 y 6.1.3.

Corolario 6.1.8 *En* R-pr, *las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *El prerradical* $\underline{1}$ *es (fuertemente) compacto.*

(b) *Para cada* $S \in \mathrm{R} - simp$,$\alpha\ {}^{S}_{S}$ *es (fuertemente) compacto en* R-pr.

Demostración. (a) Recordemos que $\underline{1} = \alpha^{\mathrm{R}}_{\mathrm{R}}$. Así que el resultado es consecuencia directa de 6.1.7, ya que R es finitamente generado como R$-$módulo.

(b) Se sigue de 6.1.7 y del hecho de que cada R$-$módulo simple es finitamente generado.

□

Notemos que para cada R$-$módulo M y $0 \neq m \in M$, se tiene que $\beta^{M}_{Rm}(M)$ *es el submódulo totalmente invariante generado por* $\mathrm{R}m$. Denotaremos este por, $\langle m \rangle_{\mathrm{fi}} := \beta^{M}_{\mathrm{R}m}(M)$.

Corolario 6.1.9 *Sea* $M \in \mathrm{R{-}Mod}$. *Entonces, para cada* $m \in \mathrm{R{-}Mod}$, $\alpha^{M}_{\langle m \rangle_{\mathrm{fi}}}$ *es compacto en* R-pr.

Lema 6.1.10 *Sean* $M \in \mathrm{R} - \mathrm{Mod}$ *y* $N \in S_{fi}(M)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) N *es compacto en* $S_{fi}(M)$.

(b) α^{M}_{N} *es compacto en* R-pr.

Demostración. [(a)⇒(b)] Se sigue de 6.1.7.
[(b)⇒(a)] Sea $\{L_\beta : \beta \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathrm{S}_{fi}(M)$ tal que $N \leq \sum_{\beta \in \mathcal{B}} L_\beta$. Esto es, $N \leq (\bigvee\{\alpha^{M}_{L_\beta} : \beta \in \mathcal{B}\})(M)$. Entonces, $\alpha^{M}_{N} \leq \alpha^{M}_{(\bigvee\{\alpha^{M}_{L_\beta} : \beta \in \mathcal{B}\})(M))} \leq \bigvee\{\alpha^{M}_{L_\beta} : \beta \in \mathcal{B}\}$.

Luego, α^{M}_{N} compacto implica que existe $\{\beta_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\alpha^{M}_{N} \leq \bigvee_{i=1}^{n}\{\alpha^{M}_{L_{\beta_i}}\}$. De ahí concluimos que $N = \alpha^{M}_{N}(M) \leq \bigvee_{i=1}^{n}\{\alpha^{M}_{L_{\beta_i}}\}(M) = \sum_{i=1}^{n} L_{\beta_i}$.

□

Lema 6.1.11 *Sean* $M \in \mathrm{R} - \mathrm{Mod}$, $S := \mathrm{End}_R(M)$ *y* $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) N *es compacto en* $\mathrm{S}_{fi}(M)$.

(b) *Existen* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in N$ *tales que* $N = (x_1)_{fi} + (x_2)_{fi} + \cdots + (x_n)_{fi}$.

Proposición 6.1.12 *Sea* $r \in$ R-pr. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalente.*

(a) r *es compacto.*

(b) $r = \alpha^{M}_{N}$ *con* $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$ *compacto (en* $\mathrm{S}_{fi}(M)$*), para algún* $M \in \mathrm{R} - \mathrm{Mod}$.

(c) $r = \alpha^{M}_{N}$ *con* $N \leq M$ *tal que* $N = \sum_{i=1}^{n}(x_i)_{fi}$, *para algún* $M \in \mathrm{R} - \mathrm{Mod}$.

Demostración. [(a)⇒(b)] Sabemos que $r = \bigvee\{\alpha^M_{r(M)} : M \in \text{R} - \text{Mod}\}$. Ahora bien, como r es compacto en R-pr deben existir $M_1, \ldots, M_n$ tales que $r \leq \bigvee_{i=1}^n\{\alpha^{M_i}_{r(M_i)}\} \leq r$. Por lo tanto, $r = \bigvee_{i=1}^n\{\alpha^{M_i}_{r(M_i)}\} = \alpha^M_N$, donde $M := \coprod_{i=1}^n\{M_i\}$ y $N := \coprod_{i=1}^n\{r(M_i)\}$.

[(b)⇒(a)] Se sigue de (b) y del lema 6.1.10

[(b) $\iff$ (c)] Es consecuencia de los lemas 6.1.10 y 6.1.11.

□

Proposición 6.1.13 (a) *Sean* $M \in \text{R}-\text{Mod}$, $\text{S} := \text{End}_\text{R}(M)$ *y* $r \in \text{R-pr}$. *Entonces,* $\alpha^M_{r(M)} = \bigvee\{\alpha^M_{(x)_{fi}} : x \in r(M)\}$. *Si cada* $(x)_{fi}$ *es finitamente generado en* $S - Mod$, *entonces* $\alpha^M_{r(M)}$ *es compactamente generado.*

(b) *Si para cada* $M \in \text{R}-\text{Mod}$ *satisface que* $(m)_{fi}$ *es finitamente generado en* $S - Mod$, *entonces cada* $r \in \text{R-pr}$ *es supremo de prerradicales compactamente generados.*

Demostración. (a) Dado que $r(M) \in \text{S}_{fi}(M)$, se tiene que $r(M) = \sum_{x \in r(M)} (x)_{fi}$.

De donde,

$$(\alpha^M_{r(M)})(M) = r(M) = \sum_{x\in r(M)} (x)_{fi} = \sum_{x\in r(M)} (\alpha^M_{(x)_{fi}})(M) = (\bigvee_{x\in r(M)} \alpha^M_{(x)_{fi}})(M).$$

Entonces, $\alpha^M_{r(M)} \leq \bigvee_{x\in r(M)} \alpha^M_{(x)_{fi}}$. Por otro lado, $(x)_{fi} \leq r(M)$ implica $\alpha^M_{(x)_{fi}} \leq \alpha^M_{r(M)}$ para cada $x \in r(M)$. Por lo tanto, $\alpha^M_{r(M)} = \bigvee_{x\in r(M)} \alpha^M_{(x)_{fi}}$.

(b) Es consecuencia de (a) y del hecho que $r = \bigvee\{\alpha^M_{r(M)} \mid M \in \text{R}-\text{Mod}\}$ para cada $r \in \text{R-pr}$.

□

Definición 6.1.14 *[8] Sea $\mathscr{L}$ una retícula completa. Decimos que $a \in \mathscr{L}$ es un elemento* **compactamente generado** *de $\mathscr{L}$ si a supremo de compactos. En el caso en que cada elemento de $\mathscr{L}$ sea compactamente generado, decimos que $\mathscr{L}$ es compactamente generada (o algebraica).*

Teorema 6.1.15 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) R-pr *es compactamente generada.*

(b) *Para cada* $r \in \text{R-pr}$, $r = \bigvee\{\tau \mid \tau \preceq r, \tau$ *compacto*$\}$.

(c) *Para cada* $r \in \text{R-pr}$, $r = \bigvee\{\alpha^M_{r(M)} \mid M \in \text{R}-\text{Mod},\ r(M)$ *es finitamente generado* $\}$.

Para cada $r \in \text{R-pr}$, consideremos

$$\mathcal{A}_r := \{M \in \text{R}-\text{Mod} \mid r(M) \leq M \text{ finitamente generado}\}$$

Notemos que para cada $r \in \text{R-pr}$, $\text{R-simp} \subseteq \mathcal{A}_r$.

Ejemplo 6.1.16 *En el libro Lifting Modules, el Lema 18.12 afirma que* $\mathrm{zoc}(M)$ *es finitamente generado si y sólo si existe* $K \leq M$ *tal que* $\mathrm{zoc}(K) = 0$ *y* M/K *es finitamente cogenerado. Esto nos permite notar*

$\mathcal{A}_{\mathrm{zoc}} = \{M \in \mathrm{R{-}Mod} \mid \exists K \leq M \; K \in \mathbb{F}_{\mathrm{zoc}} \quad \& \quad M/K$ *es f.cog.*$\}$. *Así,* $\mathcal{A}_{\mathrm{zoc}} = (\mathbb{F}_{\mathrm{zoc}}; FCog)$

En este caso, $\mathrm{zoc} = \bigvee\{\alpha^M_{\mathrm{zoc}}(M) \mid M \in \mathcal{A}_{\mathrm{zoc}}\}$.

En efecto, siempre $\bigvee\{\alpha^M_{\mathrm{zoc}}(M) \mid M \in \mathcal{A}_{\mathrm{zoc}}\} \preceq \mathrm{zoc}$. *Por otro lado, sabemos que* $\mathrm{zoc} = \bigvee\{\alpha^S_S \mid S \in \mathrm{R\text{-}simp}\}$ *y* $S = \mathrm{zoc}(S)$ *es finitamente generado, para cada* $S \in \mathrm{R\text{-}simp}$. *De donde,* $\mathrm{zoc} \preceq \bigvee\{\alpha^M_{\mathrm{zoc}}(M) \mid M \in \mathcal{A}_{\mathrm{zoc}}\}$.

Proposición 6.1.17 *Sea* $M \in \mathrm{R{-}Mod}$ *y* $S := \mathrm{End_R}(M)$. *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\mathrm{S}_{fi}(M)$ *es compactamente generada.*

(b) *Para cada* $m \in M$, $(m)_{fi}$ *es un* $(R-S)-$*bimódulo finitamente generado.*

(c) *Para cada* $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$, α^M_N *es compactamente generado.*

Proposición 6.1.18 *Si* M *es un módulo principal para* $\mathrm{R\text{-}pr}$, *entonces* $\mathrm{S}_{fi}(M)$ *es compactamente generada si y sólo si* $\mathrm{R\text{-}pr}$ *es compactamente generada.*

Consecuentemente, cada $N \in \mathrm{S}_{fi}(M)$ *es un* $(R-S)-$*bimódulo finitamente generado si y sólo si cada* $r \in \mathrm{R\text{-}pr}$ *es compacto.*

<u>Demostración.</u> Sea $r \in \mathrm{R\text{-}pr}$. Dado que M es principal, $\alpha^M_{r(M)} = r$. Luego, el resultado es una consecuencia inmediata de 6.1.13 (a).

□

En [9] G. Calugareanu, introduce definiciones equivalentes y generalizaciones para retículas compactamente generadas.

Definición 6.1.19 *Sea* $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathscr{L}$, *con* $\mathscr{L}$ *una retícula completa. Se dice que:*

(a) $\mathscr{L}$ *es* $\mathcal{A}-$*generada si cada elemento de* $\mathcal{A}$ *es supremo de elementos de* $\mathcal{A}$.

(b) $\mathscr{L}$ *esta* $\mathcal{A}-$*separada si para cadda* $a > b$ *existe* $x \in \mathcal{A}$ *tal que* $x \leq a$ *y* $x \nleq b$.

(c) $\mathscr{L}$ *es* $\mathcal{A}-$*larga si* $a \leq b$ *siempre que* $\emptyset \neq a/\mathcal{A} \subseteq b/0$, *donde* $a/\mathcal{A} := \{x \in \mathcal{A} \mid x \leq a\}$.

Observación 6.1.20 $\mathscr{L}$ *es* $\mathcal{A}-$*generada si y sólo si para cada* $a \in \mathscr{L}$, $a = \bigvee\{x \in \mathcal{A} \mid x \leq a\}$.

Teorema 6.1.21 *[9, Theorem 2] Las siguientes condiciones son equivalentes para una retácula* $\mathscr{L}$.

(a) $\mathscr{L}$ *esta* $A-$*separada.*

(b) $\mathscr{L}$ *es* $A-$*generada.*

(c) $\mathscr{L}$ *es* $A-$*larga.*

Ejemplo 6.1.22 *En* R-pr, *tenemos los siguientes ejemplos:*

(a) *Para* $\mathcal{A} := \{\alpha_M^M \mid M \in \mathrm{R-Mod}\}$, *tenemos que cada prerradical idempotente es* $\mathcal{A}-$*generado. De hecho, en este caso,* R-pr *es* $\mathcal{A}-$*generada si y sólo si* R-pr $=$ $\mathrm{R}-id$ *si y sólo si* R *es un* $V-$*anillo izquierdo tal que para cada* $M \in \mathrm{R-Mod}$ *y cada* $N \leq M$ *máximo, se satisface que* $\omega^M_{\eta^M_N(M)}$ *es un prerradical semiprimo, ver [32, Theorem 4.8].*

(b) *Para* $\mathcal{A} := Atom(\text{R-pr})$, *sabemos que* R-pr *es* $\mathcal{A}-$*generada si y sólo si* R *es un anillo semisimple, ver [25, Theorem 11].*

(c) *Si* R *es un anillo izquierdo semisimple puro, en [32, Comment on page 7], se hace notar que* R-pr *es en este caso un conjunto, y que existe* I *un conjunto de* R$-$*módulos izquierdos tal que* $r = \bigvee_{M\in I} \alpha^M_{\sigma(M)}$, *para cada* $r \in$ R-pr.

(d) *Si* M *es principal duo, dado que* $\mathrm{S}_{fi}(M)$ *y* R-pr *resultan retículas isomorfas, se sigue que* R-pr *es compactamente generada.*

6.2 Compacidad dual y co-compacidad.

Las siguientes definiciones son tomadas de [8, Chapter 11].

Definición 6.2.1 *Una retícula completa* L *es llamada* **co-compacta** *(o* **finitamente cogenerada***) si para cada subconjunto* X *de* L *tal que* $\bigwedge X = 0_L$ *existe un subconjunto finito* F *de* X *tal que* $\bigwedge F = 0_L$.

Definición 6.2.2 *Sea* a *un elemento de una retícula completa* $\mathscr{L}$. *Decimos que* a *es* **dualmente compacto** *si para todo* $X \subseteq \mathscr{L}$ *tal que* $\bigwedge X \leq a$, *existe un subconjunto finito* $F \subseteq X$ *tal ue* $\bigwedge F \leq$.

Proposición 6.2.3 R-pr *es co-compacta si y sólo si* E_0 *es* $fi-$*finitamente cogenerado.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in \mathrm{S}_{fi}(E_0)$ tal que $\bigcap\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} = \underline{0}$. Esto es, $\bigwedge_{\alpha\in\Lambda} \omega^{E_0}_{N_\alpha}(E_0) = 0$. Esto implica que $\bigwedge_{\alpha\in\Lambda} \omega^{E_0}_{N_\alpha} = \underline{0}$. Dado que R-pr es co-compacta, se sigue que existen $\mathcal{C} \subseteq \Lambda$ finito tal que $\underline{0} = \bigwedge_{\alpha\in\mathcal{C}} \omega^{E_0}_{N_\alpha}$ Evaluando en E_0 concluimos que $0 = \bigcap\{N_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{C}}$.

[$\Leftarrow$] Sea $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ en R-pr tal que $\bigwedge_{\alpha\in\Lambda}\{r_\alpha\} = \underline{0}$. En particular, $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\{r_\alpha(E_0)\} = 0$. Como E_0 es $fi-$finitamente cogenerado, concluimos que existe $\mathcal{C} \subseteq \Lambda$ finito tal que $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{C}}\{r_\alpha\}(E_0) = 0$. Luego, por una proposición vista, concluimos que $\bigwedge_{\alpha\in\mathcal{C}}\{r_\alpha\} = \underline{0}$.

□

Proposición 6.2.4 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\mathrm{R} - simp$ *es finita.*

(b) R-pr *es co-compacta.*

(c) $\underline{\mathrm{zoc}}$ *es esencial y co-compacto(esto es,* $[\underline{0}, \underline{\mathrm{zoc}}]$ *es co-compacta).*

(d) $\underline{soc}$ *es esencial y compacto.*

<u>Demostración.</u> $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $R - simp = \{S_1, \ldots, S_n\}$. Veamos que R-pr es co-compacta.

Sean $\{r_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que $\bigwedge_{\alpha \in \Lambda}\{r_\alpha\} = \underline{0}$. Entonces, para cada $\alpha_{S_i}^{E(S_i)}$, existe r_{α_i} tal que $\alpha_{S_i}^{E(S_i)} \nleq r_{\alpha_i}$ y así $r_{\alpha_i}(E(S_i)) = 0$. Esto implica que $\bigwedge_{i=1}^{n}\{r_{\alpha_i}\} = 0$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $C_0 := E(\bigoplus\{S : S \in \mathrm{R} - simp\})$ el cogenerador inyectivo mínimo de $\mathrm{R} - \mathrm{Mod}$.

Consideremos $\displaystyle\bigwedge_{S \in \mathrm{R}-simp}\{\omega_0^{E(S)}\} = \omega_0^U = \underline{0}$, donde $U := \prod\{E(S) : S \in \mathrm{R} - simp\}$. Como R-pr es co-compacta, existen $S_1, \ldots, S_n \in \mathrm{R} - simp$ tales que $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n}\{\omega_0^{E(S_i)}\} = \underline{0}$ y por lo tanto, $\omega_0^{E(\bigoplus_{i=1}^{n}\{S_i\})} = \underline{0}.$ Esto implica que $E(\bigoplus_{i=1}^{n}\{S_i\}) \leq C_0$ es un cogenerador inyectivo de $\mathrm{R} - \mathrm{Mod}$. Finalmente, por la minimidad de C_0, concluimos que $C_0 = E(\bigoplus_{i=1}^{n}\{S_i\})$. De aquí inferimos que $R - simp = \{S_i\}_{i=1}^{n}$.

(En efecto, sea $S \in \mathrm{R} - simp$. Entonces, existe un monomorfismo $\alpha : S \to E(S_i)$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como S_i es esencial en $E(S_i)$ se sigue que $S \cap S_i \neq 0$, pero como S y S_i son simples, concluimos que $S \cong S_i$.)

$(b) \Rightarrow (c)$ Por 3.2.13 (d), sabemos que $\underline{\mathrm{zoc}}$ siempre es un elemento esencial de R-pr. Por otro lado, dado que R-pr es co-compacta, es inmediato que $[\underline{0}, \underline{\mathrm{zoc}}]$ también lo es.

$(c) \Rightarrow (b)$ Sea $\{r_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq$ R-pr tal que $\bigwedge\{r_\alpha : \alpha \in \Lambda\} = \underline{0}$. Esto implica que $\underline{\mathrm{zoc}} \wedge (\bigwedge\{r_\alpha : \alpha \in \Lambda\}) = \bigwedge\{\underline{\mathrm{zoc}} \wedge r_\alpha : \alpha \in \Lambda\} = \underline{0}$. Luego, como $\underline{\mathrm{zoc}}$ es co-compacto, se sigue que existen $r_{\alpha_1}, \ldots, r_{\alpha_n}$ tales que $\bigwedge_{i=1}^{n}\{\underline{\mathrm{zoc}} \wedge r_{\alpha_i}\} = \underline{0}$. Finalmente, dado que $\underline{\mathrm{zoc}}$ es esencial y $\underline{\mathrm{zoc}} \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n}\{r_{\alpha_i}\}) = \underline{0}$, concluimos que $\bigwedge_{i=1}^{n}\{r_{\alpha_i}\} = \underline{0}$

$(a) \Rightarrow (d)$ Siempre se satisface que $\underline{\mathrm{zoc}}$ es esencial. Veamos que es compacto. Por hipótesis, $\mathrm{R} - simp = \{S_1, \ldots, S_n\}$ y dado que cada átomo $\alpha_{S_i}^{E(S_i)}$ es compacto. Finalmente, como suma finita de compactos es compacto, podemos concluir que $\underline{\mathrm{zoc}} = \bigvee_{i=1}^{n}\{\alpha_{S_i}^{E(S_i)}\}$ es compacto.

$(d) \Rightarrow (a)$ Como sabemos, $\underline{\mathrm{zoc}} = \bigvee\{\alpha_S^{E(S)} : S \in \mathrm{R} - simp\}$. Luego, por ser compacto, existen $\{S_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathrm{R} - simp$ tales que $\underline{\mathrm{zoc}} = \bigvee_{i=1}^{n}\{\alpha_{S_i}^{E(S_i)}\}$. Del hecho que $\underline{\mathrm{zoc}}$ es esencial, se sigue que $\underline{\mathrm{zoc}}^{\perp} = \omega_0^U = \underline{0}$, con $U = \bigoplus_{i=1}^{n} E(S_i)$. Por lo tanto U es un cogenerador inyectivo de $\mathrm{R} - Mod$ y de ahí se puede concluir que es el cogenerador mínimo y por lo tanto $\mathrm{R} - simp = \{S_i\}_{i=1}^{n}$.

□

Proposición 6.2.5 *Si* R *es artiniano, entonces* $\mathrm{R} - pr$ *es co-compacta.*

<u>Demostración.</u> Por ser R artiniano, se sigue que $\mathrm{R} - simp$ es finita. Aplicando la proposición anterior concluimos que R-pr es co-compacta.

□

Bibliografía

[1] Alvarado A., Rincón H., Ríos M. *On the lattices of natural and conatural classes in $R-mod$.* Communications in Algebra 29 (2001), no. 2, 541 - 556.

[2] Alvarado A., Rincón H., Ríos J.*On some lattices of module classes.* Journal of Algebra and its Applicatios, 5 (2006), no. 1, 105 - 117.

[3] Alvarado A., Rincón H., Ríos J. *On big lattices of classes of* $\mathrm{R}-$*modules defined by closure properties.* Advances in Ring Theory Trends in Mathematics, 19-36, 2010.

[4] Anderson F., Fuller K. *Rings and categories of modules.*

[5] Bican, L., Jambor P., Kepka T., Němec P. *Prime and coprime modules.* Fundamenta Mathematicae, Vol. 107, 33-44 (1980).

[6] Bican L., Kepka T., Nemec P. *Rings, Modules and Preradicals.* Books on Demand.

[7] Bland P. *Topics in torsion theory.* Mathematical Research, Vol. 103. Wyley-VCH, 1998.

[8] Calugareanu G. *Lattice concepts of module theory.* Kluwer Academic Publishers. Kluwer Texts in Mathematical Sciences, Vol. 22.

[9] Calugareanu G. *Equivalent definitions and generalizations for algebraic lattices.* `http://math.ubbcluj.ro/~calu/co-sh.pdf`

[10] Clark J., Lomp C., N. Vanaja, R. Wisbauer *Lifting Modules: Supplements and Projectivity in Module Theory.* Birkhauser, 2006.

[11] Colby R., Fuller K. *Equivalence and duality for module categories, with Tilting and Cotilting for Rings.* Cambridge University Press, 2004.

[12] Dauns J., Zhou Yiquiang. *Classes of Modules.* Chapman & Hall / CRC, 2006.

[13] Fieldhouse David J. $T-$*nilpotence and preradicals.* Arch. Math., Vol. 45, 219-222 (1985)

[14] Golan J. *Torsion theories.* Longman Scientific & Technical, 1986.

[15] Gavito S. *Las retículas de prerradicales sobre los anillos* $\mathbb{Z}_{p^n}$. Tesis para obtener el grado de Maestra en Ciencias, UAM, 2005.

[16] Grätzer G. *Lattice theory: Foundation.* Springer Basel 2011.

[17] Jara P. *Teorías de torsión: zócalo y radical.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, 1983.

[18] Lam T. Y. *Exercises in modules and rings.* Problem books in Mathematics, Springer, 2007.

[19] Lam T. Y. *Lectures on modules and rings.* Springer, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 189, 1999.

[20] Melnyk I. *On quantales of preradical Bland filters and differential preradical filters.* Algebra and Discrete Mathematics Number 4. (2007) pgas. 108-122

[21] Medina M., Sandoval L., Zaldivar A.*A generalization of quantales with applications to modules and rings.* Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 220, 5, pags. 1837 - 1857.

[22] Mikhalev A. V., Pilz Günter F. *The concise handbook of algebra.* Kluwer Academic Publishers, 2002.

[23] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. *Dimensions of ring theory.* RSR Academy Press, 1983.

[24] Prest M. *Spectra of small abelian categories.* Preprint, February 2, 2012. `http://www.maths.manchester.ac.uk/~mprest/SpecAbCatm0.pdf`

[25] Raggi F., Ríos J., Rincón H., Fernández-Alonso R., Signoret C. *The lattice structure of preradicals I.* Communications in Algebra 30 (3) (2002) 1533-1544.

[26] Raggi F., Ríos J., Rincón H., Fernández-Alonso R., Signoret C. *The lattice structure of preradicals II: partitions.* Journal of Algebra and Its Applications Vol. 1 No. 2 (2002) 201-214.

[27] Raggi F., Ríos J., Rincón H., Fernández-Alonso R., Signoret C. *The lattice structure of preradicals III: operators.* Journal of Pure Applied Algebra 190(2004) 251-265.

[28] Raggi F., Signoret C. *Serre subcategories of* $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$. Communications in Algebra, 24(9), 2877-2886(1996).

[29] Raggi F., Signoret C. *On* $\{\omega^\star,\omega\}-$*deviation of a module.* Communications in Algebra 21(6), 2155-2174(1993).

[30] Raggi F., Rincón H., Signoret C. *On some classes of* $\mathrm{R}-$*modules and congruences in* $\mathrm{R}-tors$. Communications in Algebra, 27(2), 889-901(1999).

[31] Raggi F., Ríos J., Rincón H., Fernández-Alonso R. *Basic preradicals and main injective modules.* Journal of Algebra and Its Applications. Vol. 8, No. 1 (2009) 1-16.

[32] Raggi F. Ríos, J., Rincón, H., Fernández-Alonso, R., Gavito, S., *Main modules and some characterizations of rings with global conditions on preradicals.* Journal of Algebra and Its Applications. Vol.13 No. 2 (2014)

[33] Raggi F. Ríos, J., Rincón, H., Fernández-Alonso, R., Gavito, S. Coprime preradicals and modules. Journa of Pure and Applied Algebra 299 ()2005, 51-69.

[34] Rincón H., Sandoval L. *On pseudo complements and supplements in the big lattice of preradicals.* Journal of Algebra and Its Applications 2 Vol. 13, No. 7 (2014).

[35] Rincón H., Sandoval L., Zorrilla M. *Mappings between R-tors and other lattices.* *Preprint* https://www.dropbox.com/s/auln9doil6c6vhw/morfismos.pdf?dl=0

[36] Rosenthal K. I. *Quantales and their applications.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Higher Education (1990).

[37] Rotman J. *An introduction to homological algebra.* Springer, 2da. edición, 2008.

[38] Stenstrom B. *Rings and modules of quotients.* Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1971.

[39] Tuganbaev A. *Semidistributive Modules and Rings*. Kluwer Academic Publishers. Mathematics and Its applications. Vol. 449 (1998).

[40] Tuganbaev A. *Multiplication modules over non-commutative rings.* 2002 Sb. Math. Vol. 194 No. 12, 1837-1864.http://iopscience.iop.org/1064-5616/194/12/A04

[41] Wisbauer R. *Foundations of Module and Ring Theory. A handbook for study and research.* Gordon and Breach Science Publishers, 1991.

[42] Wisbauer R. *On module classes closed under extensions.* http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~wisbauer/classes.pdf

[43] Yoshizawa Takeshi. *Subcategories of extension modules by Serre subcategories.* Proceeding of the American Mathematical Society. 2012 Vol. 140, No. 7 2293-2305.

[44] Zorrilla M. *Estudio de algunas grandes retículas de clases cohereditarias de módulos*. Tesis para obtener el grado de Doctor, UNAM, 2015.