



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
MAESTRÍA EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)  
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA, UNAM.

SIMULACIÓN 3D DE LA COLISIÓN DE DOS ESTRELLAS DE QUARKS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRA EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA:  
VERÓNICA VÁZQUEZ ACEVES

TUTOR PRINCIPAL:  
DR. WILLIAM HENRY LEE ALARDÍN  
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA UNAM

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA, CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO 2016.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Objetos Compactos: Enanas Blancas, Estrellas de Neutrones, ¿Estrellas de Quarks? y Agujeros Negros . . . . .	3
1.2. La hipótesis de Materia Extraña y Las Estrellas de Quarks . . . . .	6
1.2.1. Ecuación de Estado de la Materia Extraña . . . . .	7
1.2.2. Consideraciones energéticas . . . . .	10
1.2.3. Estructura de una estrella de Quarks . . . . .	11
1.2.4. Candidatos a Estrellas de Quarks . . . . .	21
1.3. Sistemas Binarios de Objetos Compactos . . . . .	25
1.4. Relatividad General . . . . .	28
1.4.1. La métrica del espacio-tiempo, tensores de curvatura y ecuaciones de Einstein . . . . .	29
1.5. Ondas Gravitacionales . . . . .	32
1.5.1. Luminosidad de Ondas Gravitacionales . . . . .	36
1.5.2. Detección de Ondas Gravitacionales . . . . .	39
<b>2. Simulación Numérica</b>	<b>42</b>
2.1. Ecuaciones Hidrodinámicas. La ecuación de continuidad y la ecuación de Euler. .	43
2.2. Las Ecuaciones Hidrodinámicas Lagrangianas. . . . .	45
2.3. El Método Numérico. Smoothed Particle Hydrodynamics . . . . .	47
2.3.1. Derivadas en SPH. . . . .	49

2.3.2.	Ecuaciones de Conservación. . . . .	50
2.3.3.	El Método Jerárquico de Árbol Binario. . . . .	53
2.3.4.	Resolución Adaptativa. . . . .	54
2.4.	Implementación del código SPH. . . . .	56
2.5.	Condiciones iniciales . . . . .	60
<b>3.</b>	<b>Resultados</b>	<b>63</b>
3.1.	Simulación Dinámica . . . . .	63
3.1.1.	Casos 1 a 6 con $q = 1$ . . . . .	65
3.2.	Casos 7 a 10 con $q \neq 1$ . . . . .	70
3.3.	Comparación de evolución Dinámica . . . . .	75
3.3.1.	Casos con $q = 1$ . . . . .	75
3.3.2.	Casos con $q \neq 1$ . . . . .	78
3.4.	Comparación de Radiación Gravitacional . . . . .	82
3.4.1.	Casos con $q = 1$ . . . . .	82
3.4.2.	Casos con $q \neq 1$ . . . . .	84
<b>4.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>5.</b>	<b>Apéndice</b>	<b>88</b>
5.1.	Simulación Dinámica . . . . .	88
5.1.1.	Caso 1. $q = 1$ , $M = 1.5 M_{\odot}$ , $R = 9.0$ km, $\rho_{0_1} = 7.318 \times 10^{14}$ g cm $^{-3}$ . Tiempo de evolución = $40 t_{ff}$ . . . . .	88
5.1.2.	Caso 2. $q = 1$ , $M = 1.5 M_{\odot}$ , $R = 9.0$ km, $\rho_{0_2} = 4.116 \times 10^{14}$ g cm $^{-3}$ . Tiempo de evolución = $40 t_{ff}$ . . . . .	94
5.1.3.	Caso 3. $q = 1$ , $M = 2.0 M_{\odot}$ , $R = 12.0$ km, $\rho_{0_2} = 4.116 \times 10^{14}$ g cm $^{-3}$ . Tiempo de evolución = $40 t_{ff}$ . . . . .	100
5.1.4.	Caso 4. $q = 1$ , $M = 1.5 M_{\odot}$ , $R = 9.0$ km, $\rho_{0_3} = 2.634 \times 10^{14}$ g cm $^{-3}$ . Tiempo de evolución = $80 t_{ff}$ . . . . .	106
5.1.5.	Caso 5. $q = 1$ , $M = 2.0 M_{\odot}$ , $R = 12.0$ km, $\rho_{0_3} = 2.634 \times 10^{14}$ g cm $^{-3}$ . Tiempo de evolución = $40 t_{ff}$ . . . . .	112

5.1.6.	Caso 6. $q = 1$ , $M = 2.5 M_{\odot}$ , $R = 15.0$ km, $\rho_{0_3} = 2.634 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$ . Tiempo de evolución = $40 t_{ff}$ . . . . .	118
5.1.7.	Caso 7. $q = 0.75$ , $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ , $M_{Estrella2} = 2.0 M_{\odot}$ , $R_{Estrella1} = 9.0$ km, $R_{Estrella2} = 12.0$ km, $\rho_{0_2} = 2.634 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$ . Tiempo de evolución = $40 t_{ff}$ . . . . .	124
5.1.8.	Caso 8. $q = 0.75$ , $M_{Estrella1} = 1.5 M_{\odot}$ , $M_{Estrella2} = 2.0 M_{\odot}$ , $R_{Estrella1} = 9.0$ km, $R_{Estrella2} = 12.0$ km, $\rho_{0_3} = 2.634 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$ . Tiempo de evolución = $120 t_{ff}$ . . . . .	130
5.1.9.	Caso 9. $q = 0.8$ , $M_{Estrella1} = 2.0 M_{\odot}$ , $M_{Estrella2} = 2.5 M_{\odot}$ , $R_{Estrella1} = 12.0$ km, $R_{Estrella2} = 15.0$ km, $\rho_{0_3} = 2.634 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$ . Tiempo de evolución = $186 t_{ff}$ . . . . .	136
5.1.10.	Caso 10. $q = 0.6$ , $M_{Estrella1} = 1.5 M_{\odot}$ , $M_{Estrella2} = 2.5 M_{\odot}$ , $R_{Estrella1} = 9.0$ km, $R_{Estrella2} = 15.0$ km, $\rho_{0_3} = 2.634 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$ . Tiempo de evolución = $198 t_{ff}$ . . . . .	142

**Bibliografía**

## Resumen

En este trabajo se hacen simulaciones bajo distintas condiciones iniciales de un sistema binario de estrellas compuestas completamente por quarks que siguen una órbita circular que va haciéndose cada vez más pequeña debido a la emisión de ondas gravitacionales. Las estrellas colisionan generando una estrella de quarks más grande o posiblemente un agujero negro. Se calcula materia eyectada del sistema y su emisión en ondas gravitacionales.

En 1984, Edward Witten propuso la existencia de las estrellas de quarks que son estrellas formadas de quarks tipo  $u$ ,  $d$  y  $s$ . Según su hipótesis, puede ocurrir una transición de fase de quarks  $u$ ,  $d$  a quarks  $s$  cuando los quarks se encuentran desconfiados.

Las condiciones necesarias para que los quarks se encuentren desconfiados pueden encontrarse en las estrellas de neutrones; estas estrellas se soportan por la presión de neutrones degenerados pero su centro es tan denso que los quarks que forman a los neutrones pueden dejar de estar desconfiados y posteriormente podría ocurrir una transición de fase en la cuál, cerca de un tercio de los quarks que forman a los neutrones ( $u$  y  $d$ ) se conviertan en quarks tipo  $s$ . Esto podría implicar un estado de menor energía y por lo tanto un estado en el que la materia es estable, convirtiéndose a la estrella de neutrones en una estrella de quarks desconfiados tipo  $u$ ,  $d$  y  $s$ . A la materia que tiene quarks tipo  $s$ , se le llama *materia extraña* pues toma el nombre del quark más pesado que la compone y a las estrellas formadas de este material se les llama estrellas extrañas o de quarks.

Como resultado de una colisión de estrellas de quarks en un sistema binario, podrían haber aglomerados de materia extraña que salen eyectados por la galaxia. Estos aglomerados podrían colisionar con una estrella de neutrones y llegar a su centro convirtiéndola en una estrella de quarks. Es de interés por estos motivos, estudiar cuánta materia extraña puede salir eyectada de un sistema binario y el tipo de emisión gravitacional que genera.

# Capítulo 1

## Introducción

De acuerdo con la hipótesis de Boder-Witten bajo condiciones de densidad muy alta como las que se puede encontrar en el núcleo de las estrellas de neutrones ( $\sim 10^{14}g/cm^3$ ) los quarks que forman los hadrones podrían pasar a un estado deconfinado y posteriormente aparecerían quarks tipo  $s$ , a esta materia se le llama “*Materia Extraña*”. Este estado de la materia sería estable por lo que podrían existir estrellas formadas de esta materia llamadas *Estrellas Extrañas* o *de Quarks*.

Existe también la posibilidad de que pequeños aglomerados de quarks con un número de bariones ( $A$ ) del orden de  $\sim 10^{28}$ , viajen por el universo a grandes velocidades como resultado de la colisión de estrellas de quarks con algún otro objeto compacto o incluso, con otra estrella de quarks. Si uno de estos aglomerados colisiona con una estrella de neutrones y llega al núcleo, comenzaría a absorber los neutrones convirtiendo la materia de la estrella en materia extraña; no así si se topan con materia nuclear normal porque estos aglomerados tendrían una carga positiva ( $\sim 10$  MeV) en la superficie y serían repelidos. Por esta razón es importante calcular cuánta materia extraña sale expulsada cuando existe una colisión de dos estrellas de quarks y de esta manera estimar cuánta materia extraña puede estar viajando por el universo convirtiendo estrellas de neutrones en estrellas de quarks si no es que ya todas las estrellas de neutrones son estrellas de quarks.

En este trabajo se considera un sistema binario de estrellas compuestas completamente

por quarks que siguen una órbita circular que va haciéndose cada vez más pequeña debido a la emisión de ondas gravitacionales hasta que colisionan y se fusionan generando una estrella de quarks más grande o probablemente, un agujero negro. Se obtiene la cantidad de materia eyectada y la emisión de radiación gravitacional.

## 1.1. Objetos Compactos: Enanas Blancas, Estrellas de Neutrones, ¿Estrellas de Quarks? y Agujeros Negros

Los objetos compactos se forman cuando una estrella muere y dependiendo de la masa de la estrella progenitora se pueden formar básicamente tres tipos de objetos compactos: *Enanas blancas*, *Estrellas de Neutrones* y *Agujeros Negros*, sin embargo en 1984, Edward Witten [71] propuso la existencia de *Estrellas de Quarks*. Según su hipótesis, la materia compuesta por quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$  no confinados sería estable y bajo las condiciones adecuadas (densidades  $\gtrsim 10^{14} \text{gm/cm}^3$ ) podría llegar a formar aglomerados de quarks que van desde algunos cuantos fermis hasta estrellas con un radio de  $\sim 10$  km, a esta materia se le llama “Materia Extraña”.

La figura 1.1 muestra un diagrama de la evolución que sufren las estrellas a lo largo del tiempo dependiendo de su masa [61], el eje  $x$  representa el tiempo y el eje  $y$  la masa de las estrellas. Las enanas marrón tienen tan poca masa que no alcanzan a prenderse, es decir, no alcanzan las condiciones necesarias para comenzar a quemar combustible nuclear y brillar, por lo tanto, como se ve en el diagrama, nunca evolucionan. En la tabla 1-1 se muestran los objetos compactos que se forman de acuerdo a la masa de la remanente de la estrella progenitora<sup>1</sup>, sin embargo se han observado estrellas de neutrones entre  $1.25$  y  $2 M_{\odot}$  y teóricamente se podrían formar agujeros negros con  $M \sim 1 - 3M_{\odot}$ .

Las enanas blancas están en equilibrio gracias a la presión de electrones degenerados. Esta presión proviene del principio de exclusión de Pauli que dice que dos fermiones (partículas con espín  $1/2$ ) en un sistema no pueden tener los mismos números cuánticos. La materia al estar

---

<sup>1</sup> $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{kg}$



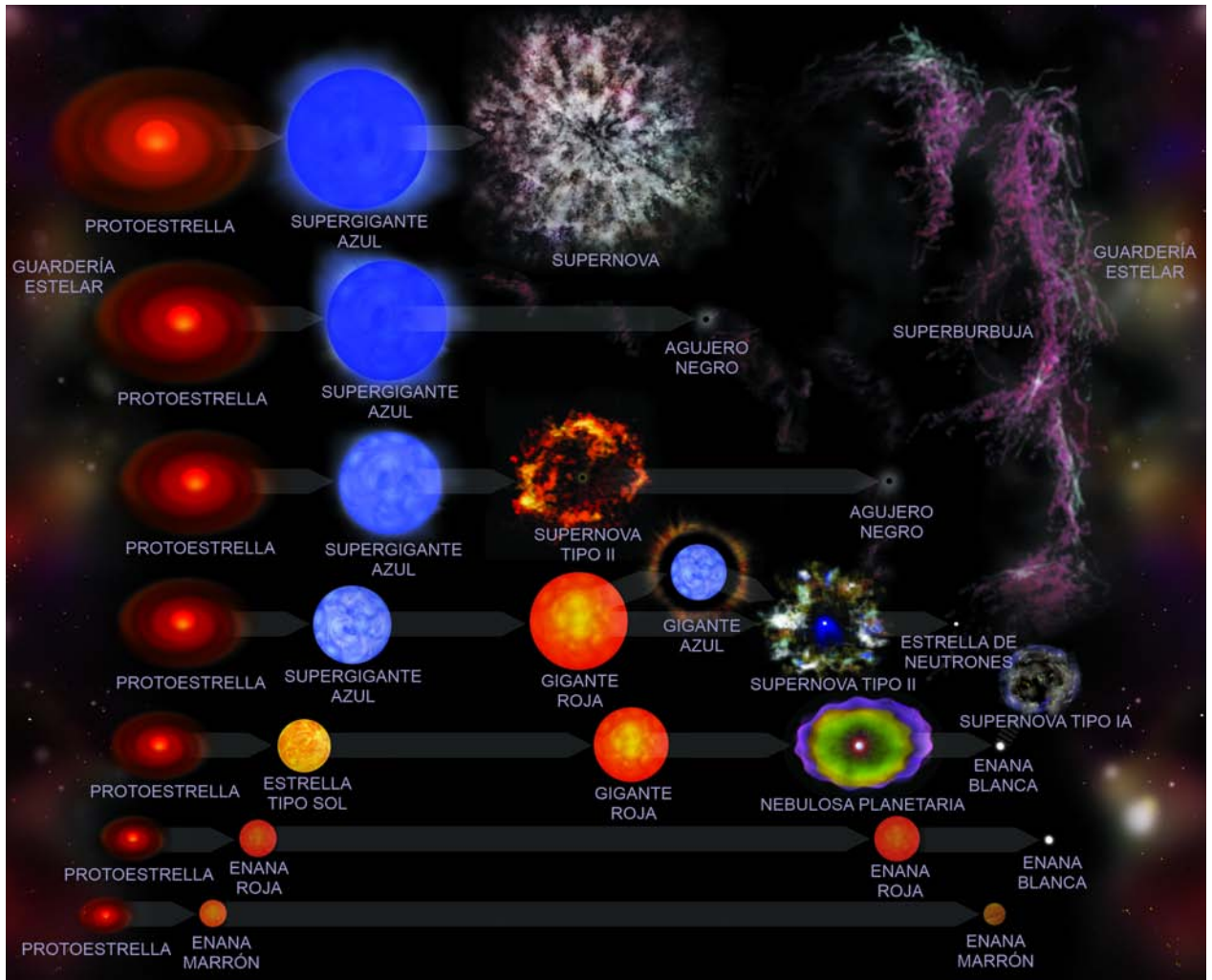


Figura 1-1: Diagrama de evolución estelar. Imagen tomada de [www.nasa.gov/audience/forstudents/9-12/features/stellar\\_evol\\_feat\\_912.html](http://www.nasa.gov/audience/forstudents/9-12/features/stellar_evol_feat_912.html)

$M_{\star remanente}$ [ $M_{\odot}$ ]	Objeto Compacto Resultante
$\lesssim 1.4$	Enana Blanca
$\gtrsim 1.4 - \lesssim 3$	Estrella de Neutrones / ¿Estrella de quarks?
$\sim 3$	Agujero Negro

Tabla 1-1: Objetos Compactos de acuerdo a la masa de la remanente.

muy compacta obliga a los electrones a ocupar todos los estados de momento permitidos por el principio de exclusión de Pauli lo cuál, genera una presión que puede contrarrestar el colapso gravitacional pero en 1930, Subrahmanyam Chandrasekhar se dio cuenta de que si una enana blanca tenía suficiente masa la presión de electrones degenerados no sería suficiente para contrarrestar el colapso gravitacional, este límite se llama *El Límite de Chandrasekhar* y es  $\sim 1.4 M_{\odot}$ . Para masas mayores los electrones se recombinan con protones por medio de decaimiento beta inverso ( $p + e^{-} \rightarrow n + \nu_e$ ) formando neutrones; es la presión de estos neutrones degenerados la que evita el colapso. De no ser suficiente ésta presión, la estrella colapsa totalmente convirtiéndose en un agujero negro.

Las partículas se dividen en dos clases: *leptones* y *hadrones*. Los leptones que se conocen hasta ahora son el electrón ( $e^{-}$ ), el muón ( $\mu^{-}$ ) y el tau ( $\tau^{-}$ ) con sus correspondientes neutrinos  $\nu_e, \nu_{\mu}, \nu_{\tau}$  y sus antipartículas (positrón  $e^{+}$ , antimuón  $\mu^{+}$  y antitau  $\tau^{-}$ ) con sus antineutrinos ( $\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_{\mu}, \bar{\nu}_{\tau}$ ). Los hadrones se dividen en *bariones*, los cuáles están formados por 3 quarks y en *mesones* que se forman de un quark y su antiquark. Hasta la fecha se cree que existen 6 *sabores* de quarks que son, *extraño* (*strange*), *encanto* (*charm*), *cima* (*top*), *fondo* (*bottom*), *arriba* (*up*) y *abajo* (*down*) ( $s, c, t, b, u, d$ ). Éstos tienen espín 1/2 y cada uno viene en 3 colores (rojo, verde y azul). Se cree que la fuerza fuerte entre los quarks proviene del intercambio de una partícula sin masa de espín 1 llamada *gluón* la cuál carga con números cuánticos de color. A esta teoría se le llama *Cromodinámica Cuántica* y es abreviada QCD por sus siglas en ingles “*Quantum Chromodynamics*”. Las interacciones débiles pueden hacer que los quarks cambien de sabor y se cree que éstas ocurren por medio del intercambio de partículas muy masivas ( $\sim 80$  MeV) de espín 1 llamadas  $W^{+}, W^{-}$  y  $Z^0$ . Los neutrones se forman con 3 quarks, 2 quarks down (d) y 1 up (u). En la tabla 1-2 se muestran las masas y cargas de los distintos sabores de quarks.

Sabor	Masa	Carga
<b>u</b> $\rightarrow$ up	5 MeV	2/3 $e$
<b>d</b> $\rightarrow$ down	7 MeV	-1/3 $e$
<b>c</b> $\rightarrow$ charm	1.5 GeV	2/3 $e$
<b>s</b> $\rightarrow$ strange	150 MeV	-1/3 $e$
<b>t</b> $\rightarrow$ top	100 GeV	2/3 $e$
<b>b</b> $\rightarrow$ bottom	5 GeV	-1/3 $e$

Tabla 1-2: Masa y carga de los quarks,  $e$  es la carga del electrón.

Ya desde 1971, Bodmer [9] había hablado acerca de la posibilidad de que el estado base de las interacciones fuertes fuera el estado deconfinado de materia de quarks, la cuál tendría en igual proporción quarks  $u$ ,  $d$ , y  $s$ . A esta hipótesis se le conoce como la hipótesis de Bodmer-Witten y a este tipo de materia se le llama “Materia Extraña”. Como consecuencia de esto podrían existir estrellas formadas totalmente de materia extraña, sin embargo aún no se ha confirmado su existencia.

La transición de fase de un quark  $u$  o  $d$  a un  $s$  puede ocurrir por medio de interacciones débiles si hay presión suficiente como para que ya no existan hadrones y los quarks dejen de estar localmente confinados. En la siguiente sección hablaré con más detalle acerca de las estrellas de quarks.

## 1.2. La hipótesis de Materia Extraña y Las Estrellas de Quarks

En los primeros segundos de existencia del Universo cuando su temperatura era muy alta los quarks se encontraban deconfinados, pero cuando universo se enfrió hasta aproximadamente 200 MeV, los quarks se confinaron formando hadrones. Existe la posibilidad de que bajo ciertas condiciones los quarks dejen de estar confinados y la materia se convierta en una mezcla de quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ ; a esta materia se le llama *Materia Extraña* porque toma el nombre del quark más pesado que la forma. Las condiciones que se necesitan son extremas (densidades  $\sim 10^{14}g/cm^3$ ) pero se pueden encontrar en uno los objetos más compactos que existen en el Universo: *Las Estrellas de Neutrones*.

Las estrellas de neutrones se soportan por la presión de neutrones degenerados, su centro es tan denso ( $\rho \sim 10^{14}g/cm^3$ ) que puede ocurrir una transición de fase en la cuál los quarks que forman los hadrones dejan de estar confinados y una vez que están libres, las interacciones débiles pueden hacer que cerca de un tercio de los quarks se transformen en quarks tipo  $s$ . Según la hipótesis de Bodmer-Witten a cualquier presión, tener 3 sabores de quarks implica un estado de menor energía comparado con el estado en el que hay sólo 2 sabores, además de que a presión cero la materia de 3 quarks tiene una energía por barión menor que la materia nuclear por lo

que éste sería el estado base. Si en el centro de una estrella de neutrones comienza a aparecer este estado deconfinado y los quarks  $u$  y  $d$  comienzan a decaer formando quarks  $s$ , la estrella se convertiría en una estrella híbrida, es decir con una capa de materia nuclear que rodea a un núcleo de materia extraña, sin embargo nada impediría que una vez que comienzan a aparecer los quarks  $s$  en el centro, toda la materia de la estrella se convierta en materia extraña.

### 1.2.1. Ecuación de Estado de la Materia Extraña

Generalmente se puede decir que hay dos tipos de ecuaciones de estado. Las ecuaciones *normales* en las que la presión tiende a cero cuando la densidad también y las ecuaciones *auto ligadas* en las que la presión se desvanece a una densidad finita. Las ecuaciones que consideran que la materia de quarks extraños es el estado base de la materia, son ecuaciones auto ligadas.

Para describir a la materia extraña, se puede pensar en un gas de Fermi de quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$  neutralizado por electrones. En realidad, se tendría que resolver las ecuaciones de cromodinámica cuántica para la materia extraña a densidad finita para poder resolver el sistema, sin embargo esto no se puede hacer. Lo que se hace es describirla mediante un modelo simple que contiene fundamentos de cromodinámica cuántica. Para hacer esto se considera el modelo de **Bolsa MIT** para hadrones [10]. Este modelo en resumen, nos dice que la región en la que viven los quarks tiene una energía potencial positiva  $B$ , por unidad de volumen  $V$ , por lo que la existencia de quarks en ese espacio, cuesta una energía  $BV$ . El parámetro  $B$  puede pensarse como la presión que ejerce el vacío en una bolsa, es decir en un volumen definido; es la densidad de energía del vacío. Este parámetro no es posible de calcular actualmente.

La estrella debe ser neutra, por lo que la conservación de carga eléctrica (ecuación 1-1) y de carga bariónica determinarán la relación entre las densidades,

$$\frac{2}{3}n_u = \frac{1}{3}n_d + \frac{1}{3}n_s + n_e \quad , \quad (1-1)$$

en donde  $n_i$  es la densidad numérica del quark  $i$ .

Todas las propiedades termodinámicas de la materia extraña se pueden deducir a partir del potencial de Landau ( $\Omega$ ) o Gran potencial termodinámico, el cuál es función del potencial químico ( $\mu_i$ ), de la masa ( $m_s$ ) y de su constante de acoplamiento de interacción fuerte ( $\alpha_c$ ).

También hay que considerar que la estrella está en equilibrio con respecto a las interacciones débiles, lo cuál lo describimos por medio de las siguientes ecuaciones 1-2.



La densidad numérica está dada por

$$n_i = -\frac{\partial \Omega_i}{\partial \mu_i}, \tag{1-3}$$

en donde  $\Omega_i$  es el Gran potencial termodinámico del quark  $i$ .

La densidad bariónica total es

$$n_B = \frac{1}{3}(n_u + n_d + n_s). \tag{1-4}$$

Estas condiciones de equilibrio pueden ser escritas en términos de sus potenciales químicos. Las primeras cuatro reacciones, generan una pérdida de energía, es decir, enfriamiento por medio de los neutrinos que se pierden, así que el potencial químico de los neutrinos se iguala a cero. Entonces todo se puede reescribir en términos de un sólo potencial químico independiente  $\mu$ :

$$\begin{aligned}
 \mu_d &= \mu_s \equiv \mu \\
 \mu_u + \mu_e &= \mu.
 \end{aligned}
 \tag{1-5}$$

La densidad total de energía  $\epsilon$  es

$$\epsilon = \rho c^2 = \sum (\Omega_i + \mu_i n_i) + B \quad , \quad (1-6)$$

en donde se agrega la energía del vacío  $B$  del modelo de Bolsa MIT. La presión es

$$P = n_b \frac{\partial \epsilon}{\partial n_B} - \epsilon \quad , \quad (1-7)$$

con

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial n_B} = \mu_u + \mu_d + \mu_s. \quad (1-8)$$

Considerando que los quarks no tienen masa, lo cuál es válido dentro de una estrella de neutrones ya que los potenciales químicos son mucho más altos y que  $\alpha_c \rightarrow 0$ , la ecuación de estado queda como

$$P = \frac{1}{3}(\epsilon - 4B). \quad (1-9)$$

En donde  $B$  proviene del modo MIT de bolsa.

A densidad cero  $\rho_0 = 4B$  por lo que

$$P = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{3} \quad , \quad (1-10)$$

reescrita en términos de la densidad queda como

$$P = c^2 \frac{(\rho - \rho_0)}{3}. \quad (1-11)$$

Esta es la ecuación utilizada en las simulaciones. Esta misma ecuación es la que utilizó Witten [71] para obtener la relación para la masa máxima de una estrella de quarks

$$M_{\text{máx}} \propto \rho_0^{-1/2}. \quad (1-12)$$

En resumen, la masa del quark  $s$  ( $m_s$ ), la constante de acoplamiento ( $\alpha_c$ ) y el valor de  $B$  son parámetros importantes para entender la materia de quarks,  $m_s$  y  $\alpha_c$  determinan la relación entre  $\rho$  y  $n_B$  lo que determinará la energía de amarre de la estrella. Además la abundancia

de electrones depende mucho de estos parámetros porque los electrones son los encargados de conservar la carga, en el límite en el que  $m_s \rightarrow 0$  y  $n_u = n_d = n_s$ , no hay electrones. Ninguno de estos tres parámetros ( $B, m_s, \alpha_c$ ) está completamente determinado experimentalmente.

### 1.2.2. Consideraciones energéticas

El momento de Fermi en la materia de quarks es de entre 300 y 350 MeV. La masa del quark  $s$  es menor ( $\sim 150$  MeV) por lo que energéticamente es favorable que alguno de los quarks se convierta en un quark  $s$  para así reducir el momento de Fermi. Se puede estimar qué tan favorable es esta transformación basándonos en el modelo de bolsa [10]. Un quark de cualquier sabor con momento de Fermi  $p_F$  ejerce una presión  $p_F^4/4\pi^2$ . Si  $\mu$  es el momento de Fermi del quark  $u$ , entonces para que haya neutralidad de carga, el momento del quark  $d$  debe ser  $2^{1/3}\mu$ . Si se considera que el quark  $s$  no tiene masa, entonces los quarks  $u, d$  y  $s$ , ejercen una presión

$$\tilde{\mu} = \left[ \frac{1}{3}(1 + 2^{4/3}) \right]^{1/4} \mu. \quad (1-13)$$

La energía cinética promedio es igual al potencial químico  $\mu$ , así que para el caso en el que hay 3 sabores de quarks ( $u, d, s$ ), la energía cinética promedio es menor en un factor de 0.89 [71].

$$\frac{\tilde{\mu}}{\frac{1}{3}\mu + \frac{2}{3}2^{1/3}\mu} = \left( \frac{3}{1 + 2^{4/3}} \right)^{3/4} \sim 0.89. \quad (1-14)$$

En equilibrio, la energía por quark es igual al potencial químico, así que la energía por quark en materia extraña es menor que la energía por quark en materia sin quarks extraños por un factor de 0.89.

La materia extraña no afecta a la materia normal ya que un aglomerado de quarks, tendría una carga positiva en la superficie de  $\sim 10$  MeV [3] [21] lo cuál es más que suficiente para hacer que los aglomerados repelieran a los núcleos de la materia normal, sin embargo sí podrían absorber neutrones. Teniendo esto en cuenta, podría ser posible que en realidad todas las estrellas

de neutrones fueran estrellas de quarks.

Los quarks  $t$ ,  $b$  y  $c$  son mucho más masivos que los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$  por lo que no se espera que aparezcan bajo las condiciones que se consideran. Para ver esto se considera que los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$  no tienen masa, no interactúan y están en equilibrio con respecto a las interacciones débiles. Entonces  $n_B = n_u = n_d = n_s$ . La creación del quark menos masivo a través de interacciones débiles requiere que la energía de Fermi de estos quarks no masivos sea al menos igual a la masa en reposo del quark  $c$  (ver ecuación 1-15), lo cual implica  $n_B \geq 9.7 \text{ fm}^{-3}$  y esto es, una densidad numérica bariónica al menos 60 veces la densidad normal de saturación de la materia nuclear ( $n_s \sim 0.16 \text{ fm}^{-3}$ ). Mucho más grande que la densidad central esperada para estrellas de neutrones o estrellas extrañas.

$$E_{F_q} = \hbar c k_{F_q} = \hbar c (3\pi^2 n_B)^{1/3} \geq 1.3 \text{ GeV}. \quad (1-15)$$

Por lo tanto en este escenario, no es necesario considerar a los quarks  $t$ ,  $b$  y  $c$ .

### 1.2.3. Estructura de una estrella de Quarks

Las propiedades de las estrellas de quarks se obtienen integrando las ecuaciones TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff)

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho \\ \frac{dP}{dr} &= -\frac{\rho m}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi P r^3}{m}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (1-16)$$

utilizando la ecuación de estado 1-10.

En el borde de la estrella, la presión es cero y en esta región la densidad de energía cae muy rápido, desde  $\sim 10^{14} \text{ g/cm}^3$  hasta  $0 \text{ g/cm}^3$  en una distancia que es característica del rango que tiene la fuerza fuerte, unos  $10^{-13} \text{ cm}$ .

En la figura 1-2 se muestran los perfiles de masa y energía para una estrella de neutrones y



una estrella de quarks [26] con  $M = 1.3M_{\odot}$ . El perfil de la estrella de neutrones tiene también un borde abrupto, sin embargo la escala a la que cae a cero es la escala de separación atómica y la densidad a la que la estrella de neutrones tiene presión cero es la densidad del hierro sólido  $\sim 7.85 \text{ g/cm}^3$ .

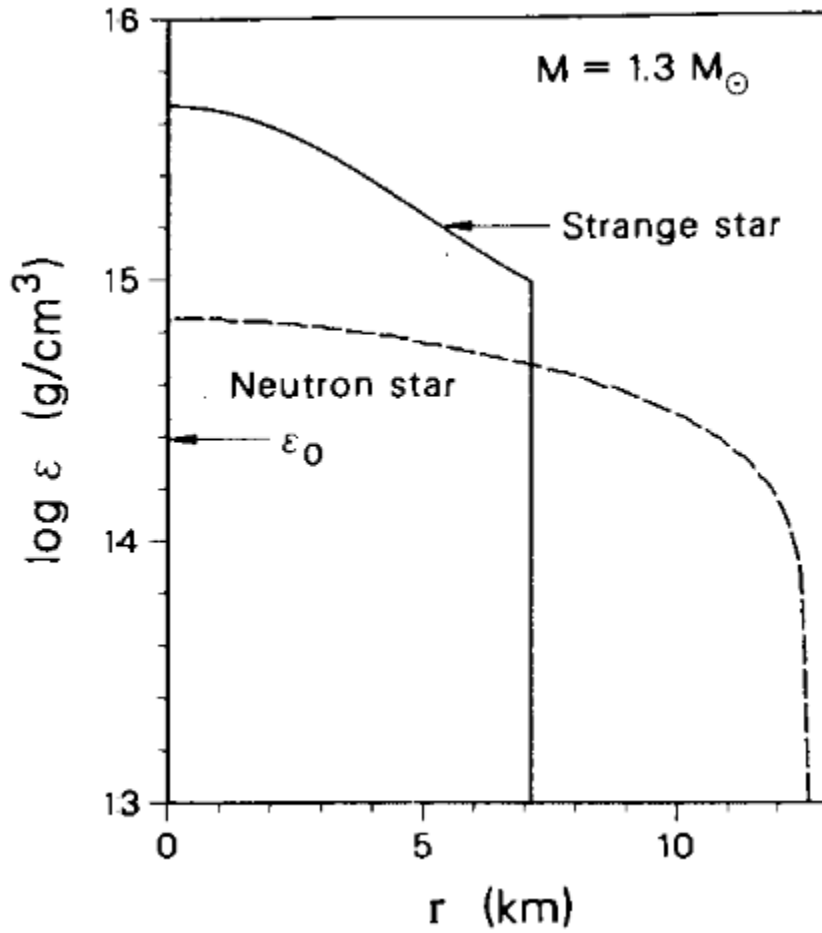


Figura 1-2: Perfiles de densidad y radio para una estrella de neutrones y una estrella de quarks con  $B=(180 \text{ MeV})^4$ [26].

En la figura 1-3, se muestra la densidad  $\rho$  de cuatro modelos representativos con un valor de  $B = (145 \text{ MeV})^4$  [3]. La variación de  $\rho$  es mínima cuando el radio crece, en especial para el caso para el caso *a*). Una estrella de neutrones, en cambio tiene una envolvente cuya densidad cae varios órdenes de magnitud mientras más cerca esté del borde.

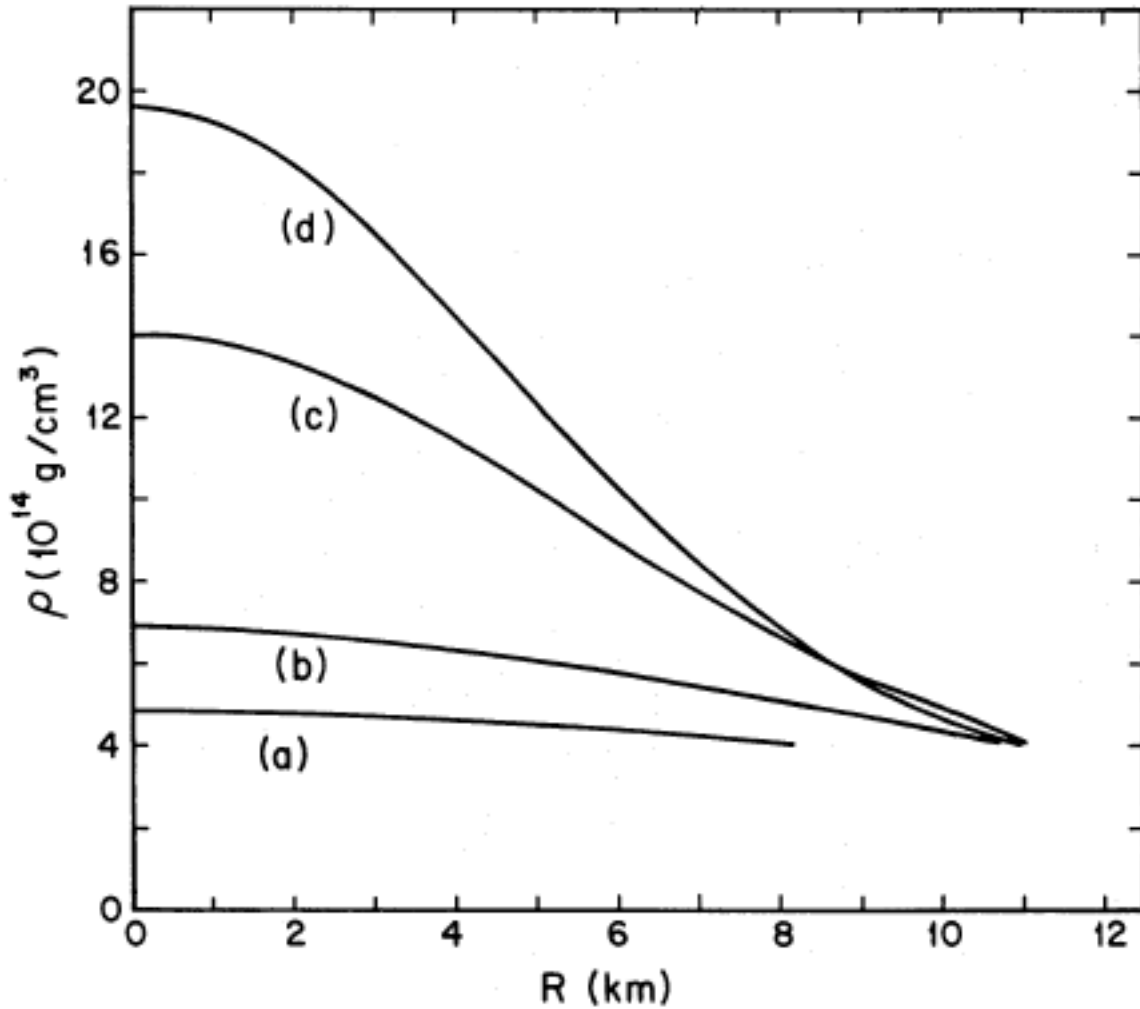


Figura 1-3: Densidad ( $\rho$ ) vs Radio ( $R$ ) para estrellas de quarks de masa a)  $0.53 M_{\odot}$ , b)  $1.4 M_{\odot}$ , c)  $1.95 M_{\odot}$ , d)  $1.99 M_{\odot}$  [3].

La masa total como función de la densidad central  $\rho_c$  se muestra en la figura 1-4. Al principio, hay una subida asintótica a  $\rho_c = 4B$ , aquí la gravedad no juega ningún papel importante, sin

embargo, mientras  $M$  va aumentando, la gravedad comienza a cobrar importancia y la densidad central comienza a crecer. En este caso, se alcanza un máximo en  $M = 2.0 M_{\odot}$  que ocurre cuando  $\rho_c = 4B \times 4.8 = 2 \times 10^{15} \text{g/cm}^3$ .

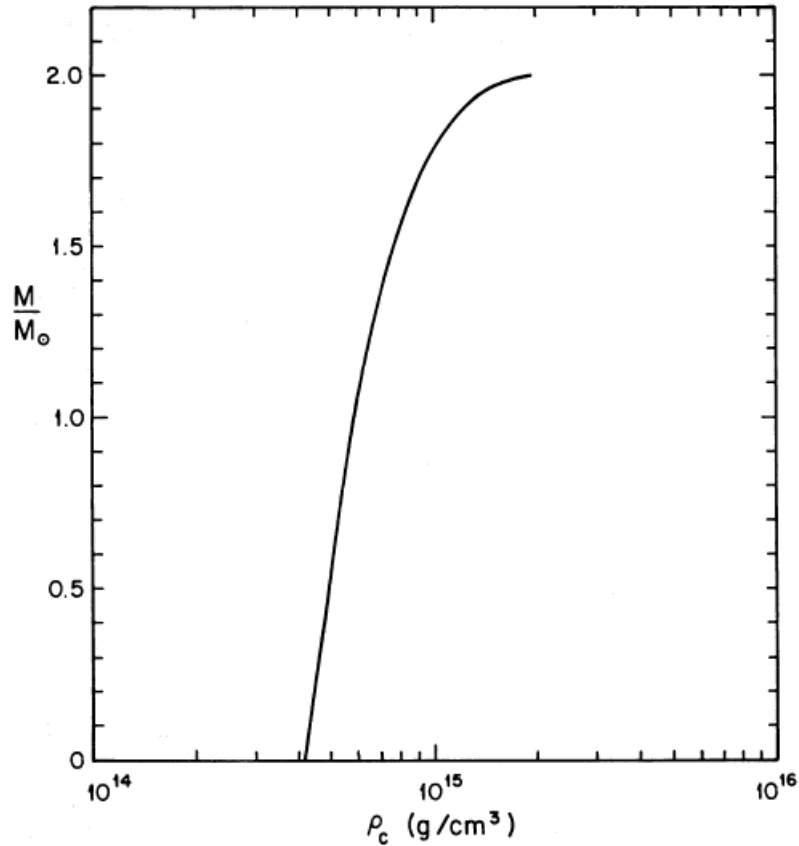


Figura 1-4: Masa total ( $M$ ) vs densidad central ( $\rho_c$ ) para estrellas de quarks [3].

La figura 1-5 muestra la relación entre la masa y el radio para estrellas de quarks. Esta relación es muy distinta entre las estrellas de quarks y las estrellas de neutrones. Para las estrellas de neutrones hay un mínimo para la masa que ocurre porque la formación de núcleos se favorece a baja densidad, para las estrellas de quarks (estrellas auto ligadas) no existe este límite siempre y cuando el número bariónico sea mayor a  $\sim 100$  ya que el número crítico sobre el cuál la masa de quarks es estable está entre 10 y 100.

Para una masa máxima, las estrellas auto ligadas tienen casi el radio máximo posible dada una ecuación de estado. En 1990 Prakash et al mostraron que si se considera una masa finita para el quark  $s$  y/o interacciones, se pueden tener masas aún mayores. El radio de las estrellas de neutrones se hace más pequeño cuando la masa es mayor, mientras las estrellas de quarks van como  $M \propto R^3$  y la densidad es casi uniforme si  $\rho = 4B$ , pero cuando la masa es mayor a  $1M_{\odot}$ , el comportamiento cambia porque la gravedad comienza a jugar un papel importante, la gráfica muestra cómo a  $R \gtrsim 10\text{km}$ , hay dos posibles valores para la masa. Las estrellas de quarks y las de neutrones tienen prácticamente el mismo radio mientras  $M = 1.4M_{\odot}$ .

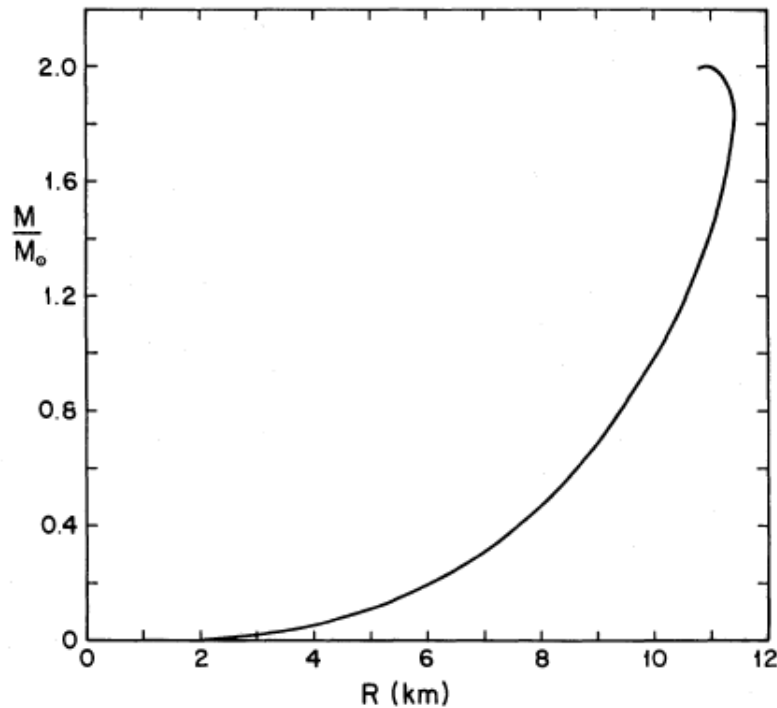


Figura 1-5: Masa total (M) vs Radio (R) para estrellas de quarks[3].

La figura 1-6 es un diagrama de radio vs masa para estrellas con componentes exóticos. Las líneas SQM1, SQM2 y SQM3 representan estrellas compuestas completamente por materia extraña de quarks utilizando el modelo MIT de bolsa con los valores que se muestran en la tabla 1-3 [21]. Las líneas GS1 y GS2 son modelos para estrellas con una fase mixta en la que a relativamente baja densidad, aparecen condensados de kaones [28]. PCL2 modela una fase

mixta con materia extraña de quarks [63]. El modelo PS tiene únicamente bariones y aunque es una ecuación de estado dura tiene una masa máxima relativamente baja pero, radios muy grandes comparando con las otras ecuaciones de estado [62], por lo general para ecuaciones de estado duras, se esperan masas y radios máximos grandes. Se muestra también el límite de causalidad (línea punteada), la constricción que se deriva de los cambios en el momento de inercia  $I$  del pulsar Vela (línea  $\Delta I/I = 0.014$ ), curvas de radio constante  $R_\infty = R/(1 - 2GM/c^2)^{1/2}$  y por último una trayectoria de masas y radio máximo para estrellas compuestas totalmente por quarks extraños utilizando el modelo MIT de bolsa,  $R = 1.85 R_s$ , en donde  $R_s$  es el radio de Schwarzschild  $R_s = 2GM/c^2$ .

El pulsar Vela aumenta su momento de inercia  $I$  aproximadamente cada 3 años. Después regresa a su estado normal y al parecer estos cambios no son al azar [44], el incremento en el espín es de aproximadamente una parte en  $10^6$ . Estos cambios se conocen como glitches en el pulsar.

Se cree que estos glitches se ocasionan cuando hay transferencia de momento angular entre la corteza y otra componente de la estrella, esta transferencia se puede dar en la interfaz entre la corteza y el núcleo. En ésta región la presión y la densidad son  $P_t$  y  $n_t$  respectivamente, los valores para la presión, por lo general se encuentran entre  $0.25$  y  $0.65 \text{ MeV fm}^{-3}$ .

La cantidad  $\Delta I/I$  es función de  $R$  y  $M$  y depende de la ecuación de estado a través valores de  $P_t$  y  $n_t$  [41] por lo que se puede obtener información de  $R$  y  $M$  si se miden los glitches en los pulsares.

Modelo	B [Mev fm <sup>-3</sup> ]	m <sub>s</sub> [MeV]	α <sub>s</sub>
SQM1	94.92	0	0
SQM2	64.21	150	0.3
SQM3	57.93	50	0.6

Tabla 1-3: Valores utilizados en el modelo MIT de Bolsa [21], se muestra en la figura 1-6 la relación entre la masa y el radio.

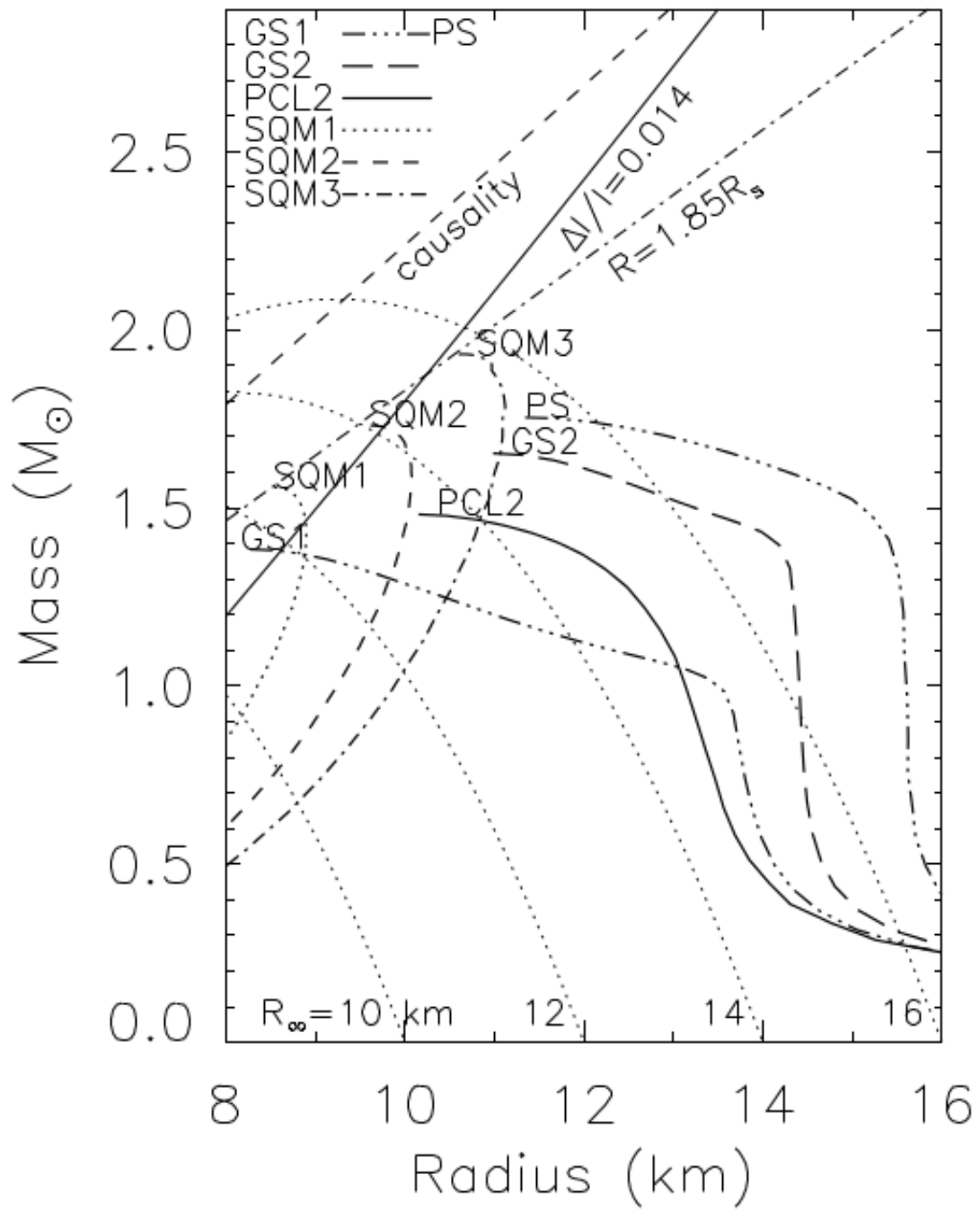


Figura 1-6: Radio vs Masa para estrellas que contienen fases mixtas con condensados de kaones o materia extraña de quarks así como para estrellas de quarks (SQM1, SQM2 y SQM3 con los valores mostrados en la tabla 1-3) [41].

En la figura 1-7 se muestran varias curvas de Radio vs Masa, correspondientes a distintos modelos. Las líneas negras son modelos cuya ecuación de estado describe y las líneas verdes son modelos para estrellas de quarks extraños.

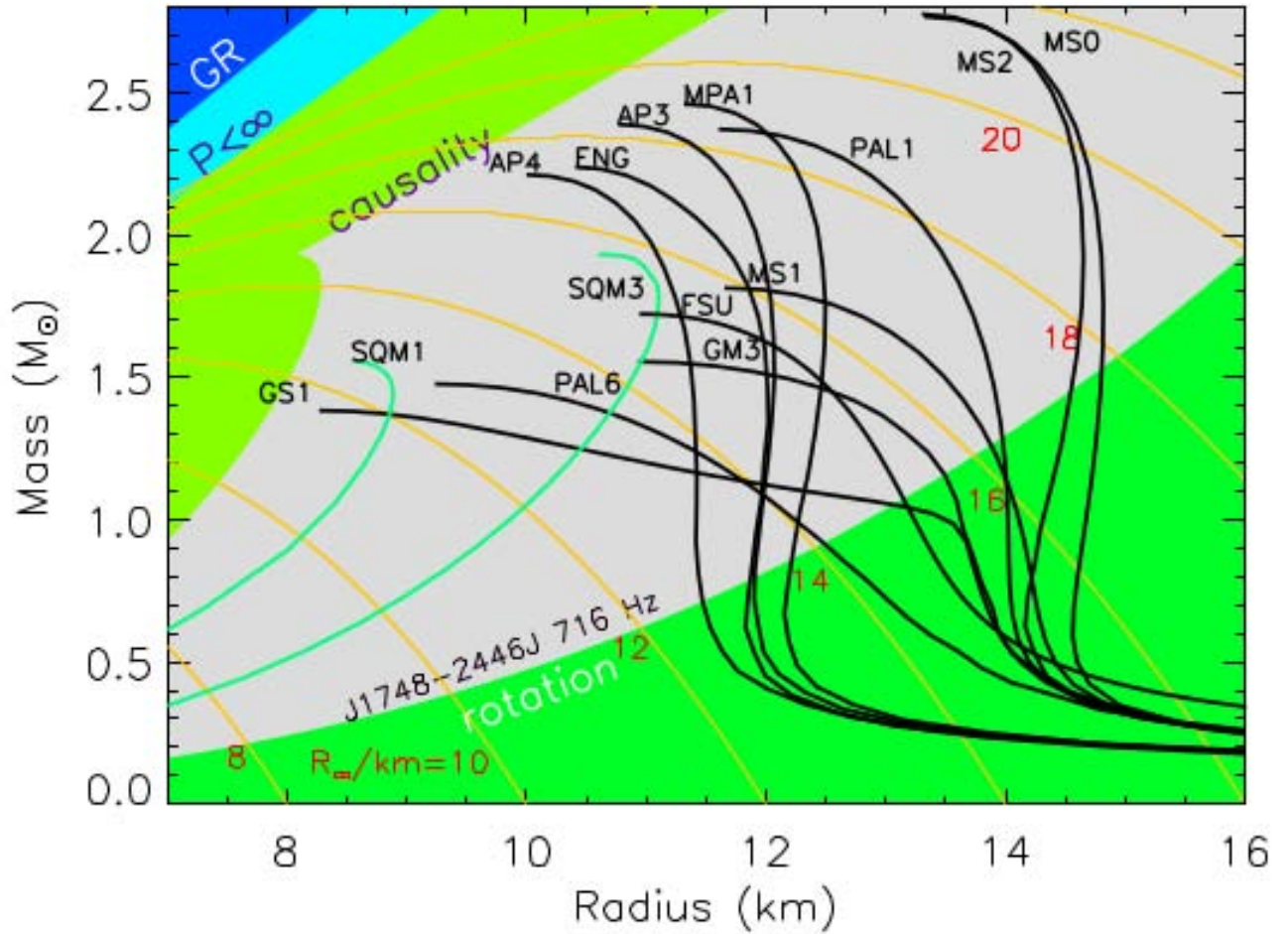


Figura 1-7: Ecuaciones de estado para hadrones (líneas negras) y materia de quarks extraños (líneas verdes). En anaranjado se muestran curvas de radio constante [39].

Se muestra en verde el límite debido a la causalidad, en azul oscuro la región en la que la relatividad general es ya importante y en azul claro la región de incompresibilidad. La región verde que se encuentra abajo, es la región excluida por los pulsares de rotación más rápida. Las líneas SQU1, SQU3 y GS1 representan los mismos modelos que en la figura 1-6. Las líneas MS0,

MS1 y MS2 son modelos con neutrones y protones [58]. Las líneas llamadas PAL, son modelos de potencial fenomenológico no relativista propuestos por Prakash. GM son modelos propuestos por [27] mientras que MPA1, MPA2 y ENG son modelos de Mütter [59], Prakash & Ainsworth [64] y Engvik [20] respectivamente, ambos son modelos relativistas de Dirac-Breueckner-Hartree-Fock. Por último las líneas AP representan modelos variacionales con distintas relaciones entre densidades de energía y presión y densidad bariónica propuestas por Akmal [2].

### La conjetura de máxima compacidad para la ecuación de estado.

En un fluido incompresible la velocidad del sonido ( $c_s^2$ ) al cuadrado es infinita y por lo tanto no es realista. Se define la compacidad  $s$  como  $\frac{c_s^2}{c^2} = s = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ . Al imponer causalidad  $s \leq 1$ , se tiene un radio mínimo más grande,  $R \gtrsim 2.823 \ GM/c^2$  [33]. Koranda, Stergioulas y Friedman [37] conjeturaron que las configuraciones más compactas se producen cuando la ecuación de estado a baja densidad es muy suave, mientras que a altas densidades la ecuación debería ser muy dura. La ecuación de estado de máxima compacidad es

$$\begin{aligned} P &= \rho - \rho_0, & \rho &\geq \rho_0 \\ P &= 0, & \rho &< \rho_0. \end{aligned} \tag{1-17}$$

Un resultado fenomenológico [43] para estrellas de neutrones que contienen materia de quarks deconfinados o centros con una fase mezclada de quarks y hadrones, un radio limitado por la ecuación de estado de mayor compacidad con  $s = 1/3$ , es decir  $P = (\rho - \rho_0)/3$  para  $\rho > \rho_0$ , lo cuál permite que el radio pueda tener valores más altos. La figura 1-8 muestra los radios esperados junto con las regiones excluidas por causalidad (azul) y la conjetura de máxima compacidad (blanco). Se toman dos valores límite,  $M_{\text{máx}} = 2.01M_{\odot}$  y  $M_{\text{máx}} = 2.4M_{\odot}$  para  $s = 1$  y  $s = 1/3$ .



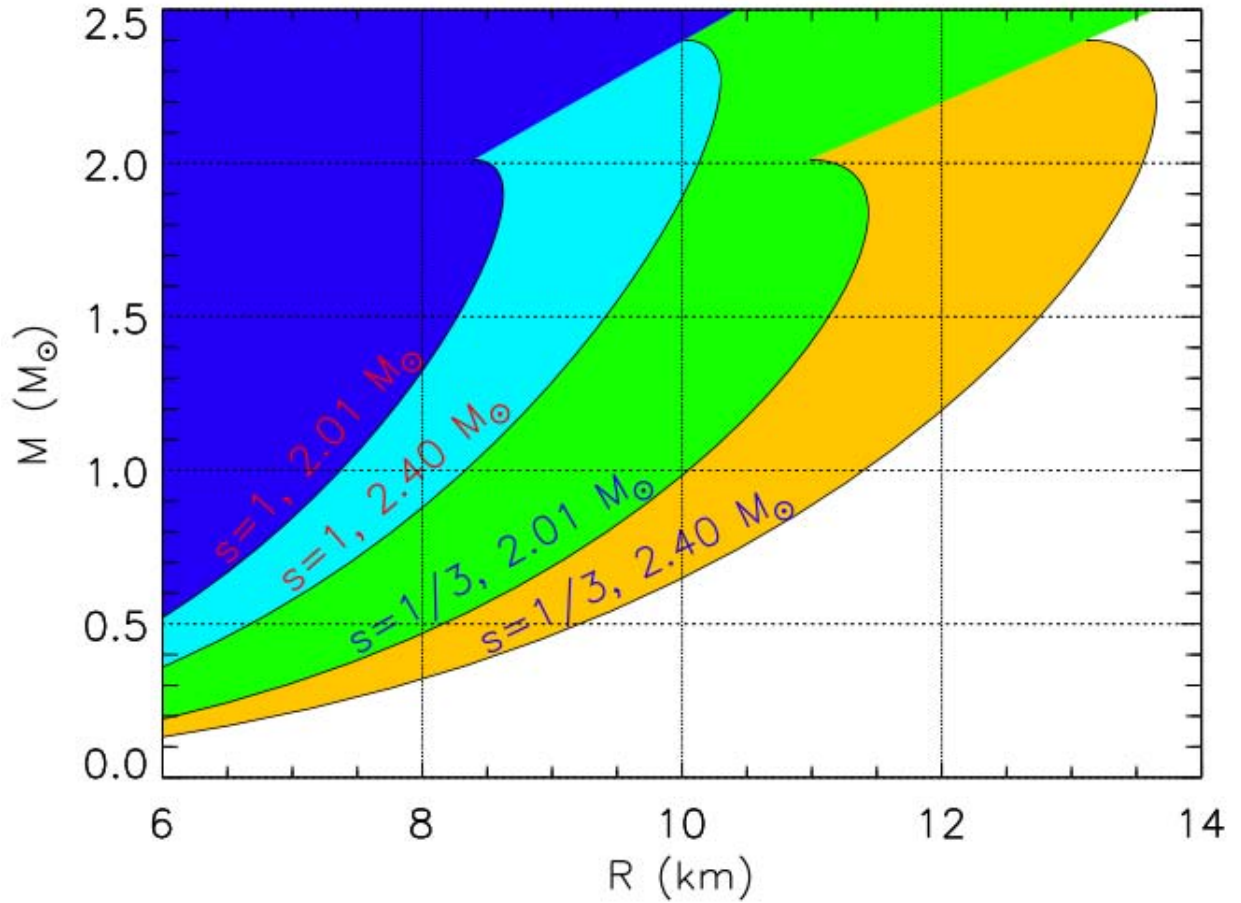


Figura 1-8: Masa vs Radio para estrellas con quarks deconfinados o con una mezcla de quarks y hadrones en el centro. En azul está la región excluida por causalidad, tomando el límite de  $s = 1$  y en blanco, la región excluida por la conjetura de máxima compactidad ( $s = 1/3$ ) para dos valores de masa máxima  $M_{\text{máx}} = 2.01M_{\odot}$  y  $M_{\text{máx}} = 2.4M_{\odot}$  [39].

#### 1.2.4. Candidatos a Estrellas de Quarks

Las estrellas de quarks podrían ser las responsables de fenómenos muy energéticos como los destellos de Rayos Gamma (GRB's<sup>2</sup> [14], radio pulsares [72], oscilaciones cuasiperiódicas en el flujo de rayos X [29][30], repetidores de rayos gamma suaves [4], entre otros.

Como las estrellas de quarks pueden mantener luminosidades muy altas por periodos más largos que la escala de tiempo dinámico de la estrella, de acuerdo con Alcock [3] podría ser que el famoso transiente de rayos  $\gamma$  del 5 de Marzo de 1979 no sea un magnetar, sino una estrella de quarks.

La diferencia más significativa que puede ser medida, entre una estrella de neutrones y una estrella de quarks es la relación entre su masa y su radio. Existen algunos objetos que han clasificados como posibles estrellas extrañas [11]:

#### **Fuente de Destellos de Rayos X. 4U 1820-30**

Se localiza en cúmulo globular NGC6624 a una distancia de  $6.4 \pm 0.6$  Kpc, ha sido observada por EXOSAT.

Haberl y Titarchuk [32] obtuvieron una relación semiempírica para la masa y el radio a partir de estas observaciones. Para una masa fija y considerando una ecuación de estado suave, se espera un radio menor con respecto a una ecuación de estado más rígida. Todos los modelos usados considerando una estrella de neutrones fallan al describir la relación de masa radio para esta fuente.

#### **SAX J1808.4-3658**

Esta fuente fue descubierta en septiembre de 1996 por el satélite BeppoSAX y se encuentra a 4 Kpc. Se detectaron 2 destellos de rayos X, cada uno duraba menos de 30 segundos, tiene una luminosidad pico en rayos X de  $6 \times 10^{36}$  erg/s en su estado brillante, y una luminosidad por debajo de los  $10^{35}$  erg/s en su estado calmado [73]. También se descubrieron pulsaciones

---

<sup>2</sup>Por sus siglas en inglés "Gamma Ray Bursts"

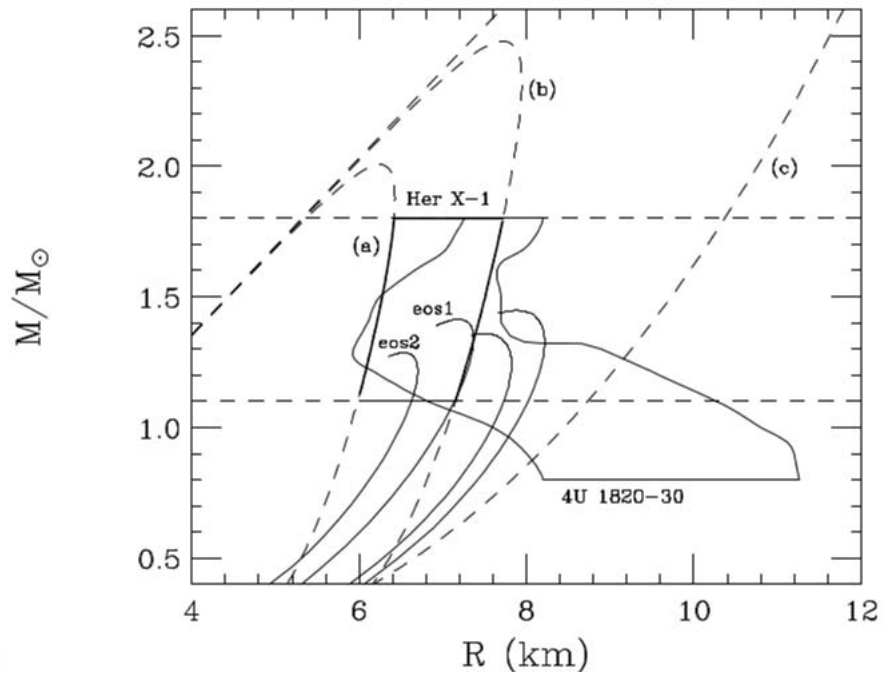


Figura 1-9: La región encerrada representa la relación semiempírica para masa y radio de la fuente 4U 1820-30. Las líneas eos1 y eos2 se obtienen con el modelo de Dey et al [19] con  $B = 110 \text{ MeV/fm}^3$  en ambos casos y  $m_s = 0$  y  $m_s = 150 \text{ MeV}$  respectivamente.

coherentes con un periodo de 2.49 milisegundos [23]. Después se verificó que era un sistema binario porque se observó al compañero y se determinó que tenía un periodo orbital de 2 horas [13].

La figura 1-10 muestra la relación masa-radio obtenida a partir de las observaciones. La curva Hyp describe la relación Masa-Radius para una estrella de neutrones en la que se considera que hay hiperiones. La curva  $K^-$  representa una estrella de neutrones con un condensado de Bose-Einstein de kaones negativos en el núcleo. Ninguno de estos modelos es consistente con las observaciones.

La curva B90 representa una estrella de quarks bajo el modelo MIT de bolsa con  $B = 90$  MeV/fm<sup>3</sup>. SS1 y SS2 son estrellas de quarks bajo el modelo de Dey et al. [19]. Los modelos para estrellas de quarks son más compatibles con las observaciones que los modelos de estrellas de neutrones.

#### **4U 1728-34**

Esta es una fuente de oscilaciones cuasi-periódicas (QPO's por sus siglas en inglés Quasi-Periodic oscillations) en kilohertz. Las líneas punteadas encierran la región permitida para las relaciones de masa y radio de la fuente 4U 1728-34. Las líneas sólidas representan varios modelos para estrellas de quarks con la misma ecuación de estado utilizada para la fuente SAX J1808.4-3658. Estos resultados sugieren que ésta fuente podría ser una estrella de quarks.

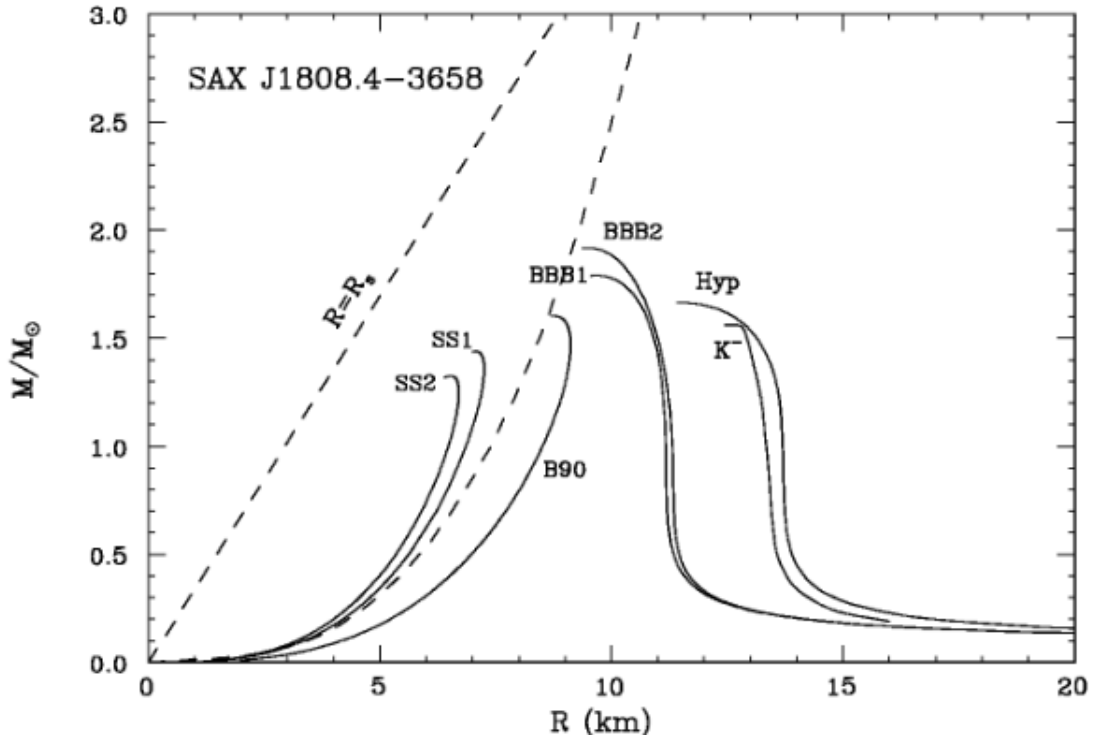


Figura 1-10: Relación de Masa y Radio para la fuente SAX J1808.4-3658 determinada observacionalmente, comparada con modelos de estrellas de neutrones y de estrellas de quarks. Los modelos para las estrellas de quarks son las líneas sólidas[11].

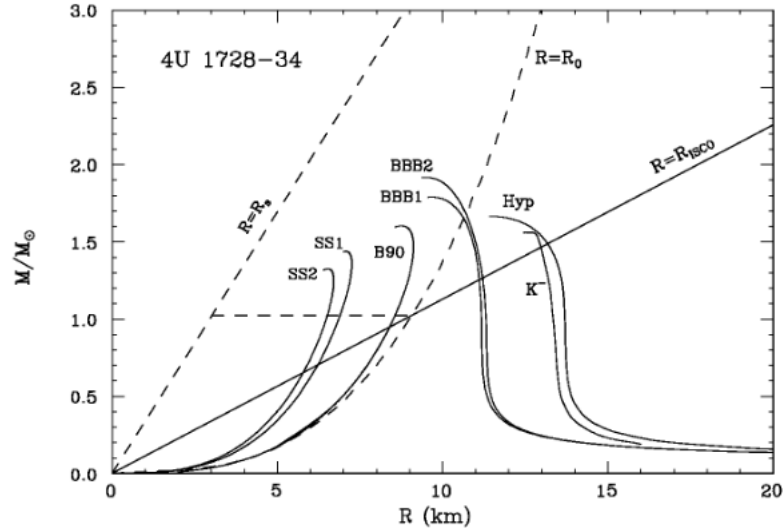


Figura 1-11: Relación de Masa y Radio para la fuente 4U 1728-34 determinada observacionalmente, comparada con modelos de estrellas de neutrones y de estrellas de quarks.[11]

### 1.3. Sistemas Binarios de Objetos Compactos

Los sistemas binarios de objetos compactos son, como su nombre lo indica, un sistema con dos objetos compactos ligados gravitacionalmente. Puede ser un sistema de dos enanas blancas, dos estrellas de neutrones, dos agujeros negros o alguna mezcla (binaria) de los anteriores. Son el resultado de un sistema de estrellas binarias que han alcanzado el final de su vida, dependiendo del tipo de estrellas que lo forme y de qué tan cerca estén una de la otra, el sistema binario puede tomar distintos caminos. Por ejemplo, si alguna de las estrellas es muy grande en comparación con su compañera (a esta estrella se le llamará *estrella primaria*) evolucionará más rápido y en el proceso de convertirse en un objeto compacto podría llegar a destruir a su compañera o bien, hacer que la separación entre ellas crezca hasta que ya no se encuentren ligadas gravitacionalmente y por lo tanto el sistema binario quede destruido.

Los sistemas binarios de interés para este trabajo son sistemas en los que ambas estrellas han logrado sobrevivir la transformación propia y de la compañera a un objeto compacto, específicamente, un sistema con dos estrellas de quarks, pensando que existen sistemas binarios de pulsares y de estrellas de neutrones, si la hipótesis de Witten es cierta, es probable que también

exista un sistema binario de estrellas de quarks, y es incluso posible que alguno de los sistemas compuestos por pulsares o estrellas de neutrones que ya se han observado sean en realidad un sistema de estrellas de quarks.

El sistema es entonces uno en el cuál una estrella orbita a otra siguiendo una órbita circular. Esto tiene sentido ya que las fuerzas de marea reducen la excentricidad de las órbitas de ambas estrellas en un tiempo corto comparado con el tiempo que le toma a la estrella primaria evolucionar dejando órbitas prácticamente circulares. Se pueden considerar órbitas Keplerianas coplanares y circulares. El potencial gravitacional efectivo en un marco de referencia que gira con el sistema binario genera superficies equipotenciales llamadas superficies de Roche.

La separación  $a$  de la binaria está dada por:

$$4\pi^2 a^3 = GMP^2 \quad (1-18)$$

En donde  $M = M_1 + M_2 = mM_\odot$  y  $P$  es el periodo. La forma de las superficies equipotenciales se determina completamente por la razón entre las masas  $q = \frac{M_1}{M_2}$ . La figura 1-12 [22] muestra las superficies equipotenciales generadas por una  $q = 2.5$ . La materia que se encuentra lejos de  $a$  por ejemplo en los círculos externos 2 y 3, sigue equipotenciales correspondientes a un sistema rotatorio con un punto de masa en CM. Hay equipotenciales circulares alrededor de los centros de ambas estrellas ( $r_1, r_2$ ), en esta area el movimiento se rige por la atracción gravitacional de la estrella más cercana.

El potencial de Roche está dado por

$$\Phi_R(r) = -\frac{GM_1}{|r - r_1|} - \frac{GM_2}{|r - r_2|} - \frac{1}{2}(\omega \wedge r)^2, \quad (1-19)$$

en donde  $r_1$  y  $r_2$  son los vectores de posición del centro de las estrellas y  $\omega$  es la velocidad angular de la binaria  $\omega = \left[\frac{GM}{a^3}\right]^{1/2} \mathbf{e}$ , con  $\mathbf{e}$  un vector unitario normal al plano de la órbita.

Este potencial  $\Phi_R$  (ecuación 1-19) tiene dos valles centrados en  $r_1, r_2$  que se conectan en

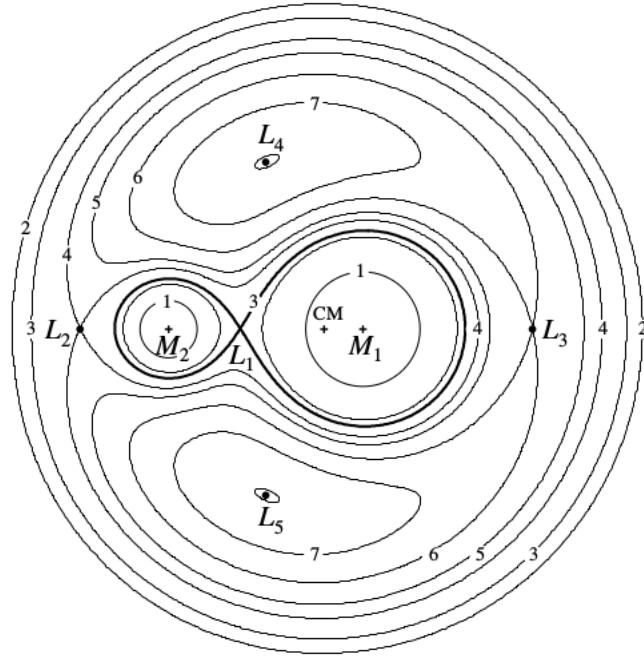


Figura 1-12: Lóbulo de Roche (línea gruesa), superficies equipotenciales y puntos de Lagrange para  $q = 0.25$  [22].

la superficie crítica, esta es la línea gruesa que se ve en la figura 1-12 con forma de 8. Esta superficie determina el lóbulo de Roche de cada estrella. También se encuentra el primer punto de Lagrange  $L_1$ . Este punto es un máximo local entre ambos valles generados por el potencial, lo que causa que para el material cercano a este punto sea fácil pasar al otro lóbulo.

El radio del lóbulo de Roche se determina por una esfera cuyo volumen encierra la superficie crítica de Roche que en la figura 1-12 es la línea 3 interna. Si alguna estrella llena su lóbulo de Roche, entonces el material de la estrella fluye por los puntos de Lagrange internos que conectan ambos lóbulos y se lleva a cabo un fenómeno de transferencia de masa. Esto es lo que va a ocurrir cuando las estrellas de quarks de los sistemas que se consideran más adelante, se acerquen demasiado. Debido a la atracción gravitacional, las estrellas comienzan a deformarse hasta que el lóbulo de Roche de alguna de ellas, o de ambas se llena y comienza a haber transferencia de masa.



Los sistemas binarios son importantes en este caso ya que una estrella de neutrones sola, podría no tener las condiciones necesarias para transformarse en una estrella de quarks, pero en un sistema binario, gracias a la transferencia de masa, los objetos compactos pueden evolucionar. Por ejemplo, una enana blanca que recibe masa de una compañera, podría convertirse en una estrella de neutrones, si la masa es suficiente podría incluso llegar a formar un agujero negro. Hay varias combinaciones posibles, también podría formarse un sistema binario de dos objetos compactos que debido a la emisión de ondas gravitacionales termine colisionando y por supuesto, también se puede dar el caso de que una estrella de neutrones comience a acretar material de su compañera (no tanto como para formar un agujero negro) y se generen las condiciones de presión suficientes para que se formen semillas de quarks en el interior de la estrella que podrían transformarla completamente en una estrella de quarks.

Es importante mencionar que al ser objetos muy masivos y compactos, es necesario tomar en cuenta efectos relativistas por lo que las superficies y el potencial de Roche antes presentados son una aproximación. El sistema también está perdiendo energía debido a la emisión de ondas gravitacionales; debido a esto, la órbita se va haciendo cada vez más pequeña hasta que las estrellas colisionan. Las ondas gravitacionales son un resultado directo de la teoría de la relatividad general propuesta por Einstein en 1915, es por eso que aunque el código a utilizar es Newtoniano, es importante hablar de relatividad para entender el origen de las ondas gravitacionales.

## 1.4. Relatividad General

La Teoría de la Relatividad General fue propuesta por Einstein a finales de 1915. Esta teoría, considera a la gravedad no como una fuerza (como Newton la describió) sino como una consecuencia de la deformación que el espacio-tiempo sufre debido a la presencia de masa. Un objeto masivo genera una curvatura en el espacio-tiempo y es esta distorsión lo que dicta el movimiento de los objetos. Cuando en 1905 Einstein postula la teoría de la relatividad especial, se da cuenta de que la teoría de la gravitación de Newton tenía que ser modificada ya que

contradecía uno de los principios fundamentales de la relatividad especial: Nada puede moverse más rápido que la velocidad de la luz. En ese nada, se incluyen las interacciones y en la teoría de Newton, la gravedad actuaba inmediatamente en los cuerpos, es decir, la fuerza de gravedad se propaga a velocidad infinita entre cuerpos distintos. A Newton tampoco le convencía esta condición de *acción a distancia*, pero no había una mejor explicación.

Las ideas principales de la relatividad general son:

- i) Las leyes de la física deben tomar la misma forma para todo observador (principio de covariancia general).
- ii) Los objetos caen exactamente de la misma forma en un campo gravitacional (principio de equivalencia).
- iii) La inercia local de un objeto es producida por la distribución total de la materia en el Universo (principio de Mach).

Entonces, el principio de equivalencia da una pista acerca de la naturaleza de la gravitación. Debido a que el comportamiento debe ser igual para todos los objetos, entonces debe haber una relación más general con el espacio-tiempo, esto lleva a la idea de que la gravedad es una consecuencia de la forma que toma el espacio-tiempo.

### 1.4.1. La métrica del espacio-tiempo, tensores de curvatura y ecuaciones de Einstein

Para describir la geometría del espacio tiempo de manera que la gravedad sea una consecuencia de su deformación, se utilizan tensores. Considerando un espacio-tiempo continuo formado por 3 dimensiones espaciales y 1 temporal, la métrica es la distancia invariante entre dos eventos infinitamente cercanos con coordenadas  $x^\alpha$  y  $x^\alpha + dx^\alpha$

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1-20)$$

donde  $g_{\alpha\beta}$  es el tensor métrico o “la métrica” en donde la última igualdad define la convención de suma de Einstein, es decir, los índices que aparecen repetidos, se suman.

En cada punto del espacio-tiempo, las componentes de la métrica forman una matriz simétrica no singular de  $4 \times 4$  elementos, escribiendo  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ , la ecuación 1-20 se puede escribir como

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1-21)$$

con  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , la ecuación 1-21 representa un espacio pseudo-Euclideo, un espacio Euclideo excepto por el signo menos del primer término, llamado el espacio de Minskowski. En un campo débil, la métrica se puede expandir en series de potencia y quedarse sólo con los términos lineales.

En relatividad general, en ausencia de fuerzas externas los objetos se mueven en líneas rectas en el espacio-tiempo, estas trayectorias corresponden a un movimiento rectilíneo-uniforme y es una trayectoria de longitud extrema llamada *geodésica* que se escribe como

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0, \quad (1-22)$$

en donde  $\tau$  es el tiempo propio y  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  son los símbolos de Christoffel que están dados en términos de derivadas de la métrica

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{g^{\alpha\mu}}{2} \left( \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} \right). \quad (1-23)$$

Para diferenciar entre un espacio que es plano y uno que no lo es, se construye el tensor de curvatura de Riemman. Este tensor mide el cambio de un vector al ser transportado alrededor de un circuito manteniéndolo siempre parelo a sí mismo. En un espacio plano el vector no cambia, pero en uno curvo sí. El tensor de Riemman es

$$R_{\mu\nu\rho}^\sigma = \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma + (\Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma), \quad (1-24)$$

en donde  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Éste tensor tiene 4 índices, lo cuál implica 256 componentes, afortunadamente debido a que tiene muchas simetrías, en 4 dimensiones sólo tiene 20 componentes independientes.

A partir del tensor de Riemman, se define el tensor de Ricci contrayendo dos de los índices libres

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}. \quad (1-25)$$

El tensor de Ricci sólo tiene 10 componentes independientes porque es simétrico en sus dos índices. Hay que tener siempre en cuenta que aunque el tensor de Ricci sea cero, no implica que el espacio sea plano ya que las otras 10 componentes del tensor de Riemman podrían no ser cero.

Tomando la traza del tensor de Ricci, se obtiene el escalar de curvatura

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1-26)$$

La forma de conectar la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia y energía es a través de las ecuaciones de campo de Einstein, que en su forma más compacta son

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1-27)$$

en donde en el lado izquierdo se tiene la parte de la geometría encerrada en  $G_{\mu\nu}$ , el tensor de Einstein y del lado derecho está la parte de la distribución de materia y energía con  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento de la materia. El término  $8\pi$  es una normalización que es necesaria para obtener el límite Newtoniano correcto [5].

El tensor de Einstein se define en términos del tensor de Ricci y el escalar de curvatura como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1-28)$$

En el caso del espacio vacío, el tensor de energía momento es cero y entonces las ecuaciones de Einstein son

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (1-29)$$

Esto equivale a  $R_{\mu\nu} = 0$ , lo cuál no implica un espacio plano. Esto está bien ya que el campo

gravitacional de un objeto se extiende más allá del objeto en sí y la curvatura del espacio en una región vacía que está cerca de un objeto masivo no puede ser cero. Una aplicación muy importante de las ecuaciones de Einstein en el vacío es que describen la forma en la que el campo gravitacional se propaga por el vacío, es decir, predice la existencia de las Ondas Gravitacionales.

## 1.5. Ondas Gravitacionales

Las ondas gravitacionales son deformaciones del espacio-tiempo que se deben a perturbaciones en el tensor de momento energía o bien, a deformaciones generadas en el espacio tiempo causadas por ejemplo por objetos compactos o sistemas binarios. Se propagan a la velocidad de la luz y no tienen emisión dipolar por lo que se utiliza por lo general, la aproximación cuadrupolar para describir su emisión.

En el sistema solar  $R$  es grande, es decir que la gravedad es débil. En general para un campo gravitacional débil se pueden utilizar coordenadas de Minkowski y en este caso la métrica se puede expandir en series de Taylor y se pueden tomar únicamente los términos lineales, es decir, se puede escribir como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1-30)$$

en donde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  contiene las contribuciones cuasiestáticas del sol y los planetas más cualquier posible efecto causado por ondas gravitacionales de alguna fuente astrofísica. En el caso del sistema solar se tiene que  $|h_{\mu\nu}| \sim |\phi| \leq M_{\odot}/R_{\odot} \sim 10^{-6}$ .

Tomando en cuenta sólo en las contribuciones provenientes de las ondas gravitacionales al término  $|h_{\mu\nu}|$ . Se puede utilizar la aproximación de campo débil en este caso ya que por lo general cuando las ondas gravitacionales comienzan a propagarse, su longitud de onda  $\lambda$  es muy pequeña en comparación con el radio de curvatura  $R$  del espacio-tiempo en el que se están propagando.

Las ondas gravitacionales se describen completamente por medio de dos amplitudes adi-

mensionales:  $h_{\times}$  y  $h_{+}$ . Si la propagación va en la dirección  $z$ , entonces  $h_{\times}$  y  $h_{+}$  son función de  $t - z/c$ . Tomando los tensores de polarización  $\underline{e}^{+}$  y  $\underline{e}^{\times}$  tales que

$$\begin{aligned} e_{xx}^{+} &= -e_{yy}^{+} = 1 \\ e_{xy}^{+} &= e_{yx}^{+} = 1, \end{aligned} \tag{1-31}$$

y todas sus otras componentes sean cero, se pueden escribir las ondas gravitacionales como

$$h_{jk}^{TT} = h_{+}e_{jk}^{+} + h_{\times}e_{jk}^{\times}. \tag{1-32}$$

Este es un tensor espacial simétrico análogo al vector de potencial en electrodinámica en la norma de Lorentz, que en el vacío cumple

$$A_0 = 0, \quad A_{i,i} = 0, \quad \square A_i = 0, \tag{1-33}$$

en donde la última ecuación proviene de las ecuaciones de Maxwell en esta norma. Análogamente en relatividad, los sistemas coordenados que cumplen con la norma TT<sup>3</sup>(norma transversa y sin traza), tienen

$$\begin{aligned} h_{0\mu}^{TT} &= 0, \\ h_{jk,k}^{TT} &= 0, \\ \square h_{jk}^{TT} &= 0, \end{aligned} \tag{1-34}$$

en donde la última ecuación es la ecuación de campo de Einstein en esta norma y es la ecuación de propagación en el vacío para campos gravitacionales, es decir, la ecuación de onda. La norma es transversa porque es solamente espacial (primer ecuación de 1-34) y si se piensa como una onda, es transversa a su dirección de propagación (segunda ecuación de 1-34) y su traza es cero porque  $h_{kk} = 0$ .

---

<sup>3</sup>por sus siglas en inglés Transverse-Traceless

La solución más simple es una onda plana monocromática

$$h_{jk} = \Re[A_{jk} \exp(ik_\alpha x^\alpha)], \quad (1-35)$$

en donde  $\Re[\dots]$  indica que se debe tomar la parte real de la expresión dentro de los corchetes,  $A_{jk}$  es la amplitud y  $k_\alpha$  es el vector de onda, ambos son constantes que satisfacen  $k_\alpha^\alpha = 0$  y  $A_{j\alpha}k^\alpha = 0$ . Esta solución describe una onda con frecuencia

$$\omega \equiv k^0 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}, \quad (1-36)$$

que se propaga a la velocidad de la luz en dirección  $(1/k^0)(k_x, k_y, k_z)$ .

En la norma TT, las componentes del tensor de curvatura de Riemman  $R_{j0k0} = R_{0j0k} = -R_{j00k} = -R_{0j0k}$ , tienen la forma

$$R_{j0k0} = -\frac{1}{2}h_{jk}^{TT}, 00. \quad (1-37)$$

El tensor de curvatura es un invariante y  $h_{jk}$  en la norma TT tiene la menor cantidad de componentes posibles, en cualquier otra norma, no sería así.

Una onda plana, monocromática que se propaga en dirección z, tiene las siguientes componentes

$$\begin{aligned} h_{xx}^{TT} &= -h_{yy}^{TT} = \Re(A_+ e^{-i\omega(t-z)}), \\ h_{xy}^{TT} &= h_{yz}^{TT} = \Re(A_\times e^{-i\omega(t-z)}). \end{aligned} \quad (1-38)$$

Las amplitudes  $A_+$  y  $A_\times$  representan dos modos de polarización independientes. Las ondas gravitacionales, como las electromagnéticas se pueden resolver en dos componentes lineales polarizadas o en dos tensores unitarios de polarización circulares que son

$$\mathbf{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ + i\mathbf{e}_\times), \quad \mathbf{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ - i\mathbf{e}_\times). \quad (1-39)$$

Un anillo de partículas de prueba que es golpeado por una onda gravitacional con polarización

$\mathbf{e}_R$ , resulta en una deformación en dirección de las manecillas del reloj, si por el contrario, la onda tiene polarización  $\mathbf{e}_L$ , entonces la deformación es en el sentido contrario. La figura 1-13 muestra gráficamente la derfomación que un anillo de partículas de prueba sufriría dependiendo de la polarización de la onda gravitacional que lo golpea.

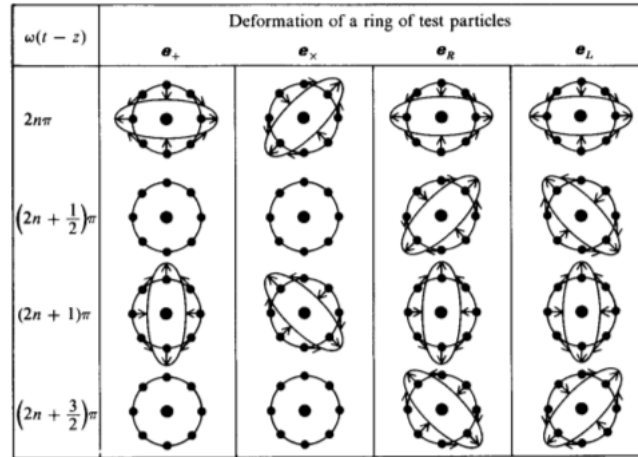


Figura 1-13: Deformación de un anillo de partículas prueba debido a una onda gravitacional.[53]

Cuando una onda gravitacional golpea una partícula, le produce una aceleración transversal. Considerando dos partículas de prueba en un sistema inercial local de referencia, la aceleración que una partícula sentiría debido a las ondas gravitacionales es

$$\ddot{\xi}_j = \frac{1}{2} \ddot{h}_{jk}^{TT} \xi_k, \quad (1-40)$$

esta aceleración es ortogonal a la dirección de propagación y es cero si  $\xi_j$  es paralela a la dirección de propagación. Esto produciría un cambio en la separación de las partículas

$$\delta\xi_j = \frac{1}{2} h_{jk}^{TT} \xi_k, \quad (1-41)$$

en orden de magnitud, la tensión producida por una onda gravitacional es  $\frac{\delta\xi}{\xi} \sim h$ .

Las ondas gravitacionales pueden ejercer fuerza sobre los objetos y hacerlos oscilar, la fuerza



que siente cada elemento de masa  $m$  es

$$F_j = \frac{1}{2} m \ddot{h}_{jk}^{TT} \xi_k, \quad (1-42)$$

en donde  $\xi_k$  es el desplazamiento del elemento de masa medido desde el centro de masa. También pueden hacer trabajo y por lo tanto tienen densidades de energía y momento. El tensor de estrés-energía para ondas que se propagan en dirección  $z$  es

$$T^{00} = \frac{T^{0z}}{c} = \frac{T^{zz}}{c^2} = \frac{1}{16\pi G} \frac{c^2}{G} \langle (\dot{h}_+)^2 + (\dot{h}_\times)^2 \rangle, \quad (1-43)$$

en donde  $\langle \rangle$  indica un porcentaje sobre varias longitudes de onda,  $T^{00}$  es la densidad de energía,  $T^{0z}$  el flujo de energía y  $T^{zz}$  el flujo de momento. Hay que hacer notar que éstas densidades no se localizan en un punto sino que están distribuidas en una banda angosta de longitudes de onda [69].

### 1.5.1. Luminosidad de Ondas Gravitacionales

Para saber cuánta radiación gravitacional emite un par de masas que se acercan la una a la otra, se aplican las fórmulas para la radiación electromagnética pero tomando a la masa de la partícula como si fuera la carga y así se obtiene un estimado de la potencia total radiada.

En electromagnetismo, la componente que domina la radiación es la componente dipolar eléctrica ( $de$ ) que da una luminosidad  $L_{de}$

$$L_{de} = \frac{2}{3} e^2 a^2, \quad (1-44)$$

para una sólo partícula con aceleración  $a$ ,  $\ddot{d} = e\ddot{x} = ea$ , entonces el momento dipolar es

$$L_{de} = \frac{2}{3} \ddot{d}^2, \quad (1-45)$$

Para hacer el análogo gravitacional para el dipolo, cambiando  $e$  con  $m$ , entonces

$$d = \sum_A m_A x_A, \quad (1-46)$$

en donde A son las partículas. La primera derivada nos da el momento total del sistema

$$\dot{d} = \sum_A m_a \dot{x}_A = p. \quad (1-47)$$

La segunda derivada tiene que ser cero para cumplir con la conservación del momento,  $\ddot{d} = \dot{p} = 0$ , lo cuál implica que la componente dipolar de la radiación gravitacional es cero.

Lo mismo pasa para la radiación del dipolo magnético

$$\mu = \frac{1}{c} \sum_A x^A \times (m_A \dot{x}^A) = \frac{1}{c} \sum_A j^A, \quad (1-48)$$

siendo  $j^A$  el momento angular de la partícula A. Por conservación de momento  $\dot{\mu} = 0$  por lo que tampoco hay radiación de dipolo magnético.

El siguiente orden en los términos para la radiación es el cuadrupolo

$$h_{jk}^{TT}(t, x) = \frac{2G}{r c^4} \ddot{\dagger}_{jk}^{TT} \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad (1-49)$$

con

$$\dagger_{jk} = \sum_A m_a [x_k^A x_k^A - \frac{1}{3} \delta_{jk} (x^A)^2], \quad (1-50)$$

el momento cuadrupolar. Éste ya no es cero.  $\dagger_{jk}^{TT}$  significa tomar la componente transpuesta.

$$\dagger_{jk}^{TT} \equiv P_{jl} P_{km} \dagger_{lm} - \frac{1}{2} P_{jk} (P_{lm} \dagger_{lm}). \quad (1-51)$$

$P_{jk}$  es el tensor de proyección  $P_{jk} = \delta_{jk} - n_j n_k$ .

Para ver cómo es la luminosidad en un sistema binario, se toman dos masas puntuales  $M_1$

y  $M_2$  en una órbita circular de radio  $a$ ,  $a_1$  y  $a_2$  son las distancias al centro de masa de cada una de las partículas, la masa reducida es  $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$  y

$$M_1 a_1 = M_2 a_2 = \mu a. \quad (1-52)$$

Si el eje  $z$  es el eje de rotación y  $\phi$  es el ángulo azimutal a la línea que une las masas, como  $M_i a_i^3$ ,  $i = 1, 2$  es constante para cada partícula, entonces el momento cuadrupolar es

$$\dagger_{xx} = (M_1 a_1^2 + M_2 a_2^2) \cos^2 \phi + cte = \frac{1}{2} \mu a^2 \cos 2\phi + cte, \quad (1-53)$$

también

$$\begin{aligned} \dagger_{yy} &= -\frac{1}{2} \mu a^2 \cos 2\phi + cte, \\ \dagger_{xy} = \dagger_{yx} &= \frac{1}{2} \mu a^2 \sin 2\phi + cte. \end{aligned} \quad (1-54)$$

Como  $\phi = \Omega t$ , con  $\Omega$  la velocidad angular, la luminosidad de las ondas gravitacionales ( $L_{GW} = dE/dt$ ) es

$$\begin{aligned} L_{GW} &= \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{\dagger}_{jk} \ddot{\dagger}_{jk} \rangle \\ &= \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} (2\Omega)^6 \left( \frac{1}{2} \mu a^2 \right) \langle \sin^2 2\Omega t + 2 \cos^2 2\Omega t \rangle, \end{aligned} \quad (1-55)$$

y como la tercera ley de Kepler dice que  $\Omega^2 = \frac{GM}{a^3}$  y usando  $M = M_1 + M_2$

$$L_{GW} = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^3 \mu^2}{a^5}. \quad (1-56)$$

La pérdida de energía hace que la separación entre las estrellas se reduzca con un periodo orbital  $P = 2\pi/\Omega$ . Como la energía es

$$\begin{aligned} E &= \left( \frac{1}{2} M_1 a_1^2 + \frac{1}{2} M_2 a_2^2 \right) \Omega^2 - \frac{GM_1 M_2}{a} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{GM\mu}{a}, \end{aligned} \quad (1-57)$$

entonces para el periodo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} &= \frac{3}{2} \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \\
&= -\frac{3}{2} \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \\
&= -\frac{96}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{M^2 \mu}{a^4}.
\end{aligned} \tag{1-58}$$

En cuanto al momento angular, para una órbita circular se tiene

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G^{7/2}}{c^5} \frac{\mu^2 M^{5/2}}{a^{7/2}}. \tag{1-59}$$

### 1.5.2. Detección de Ondas Gravitacionales

La primera evidencia de las existencia de las ondas gravitacionales se dio cuando se estudió la órbita del primer sistema binario de pulsares descubierto, el sistema es **PSR 1913 + 16** y fue descubierto por Hulse y Taylor en 1974, ellos observaron un pulsar en una órbita elíptica pero no observaron a la compañera. El pulsar tiene una velocidad orbital de  $\sim 300$  km/s. La variación en el tiempo de llegada de los pulsos a la tierra da información acerca de la órbita.

El sistema se caracterizó por 4 elementos. La masa de ambas estrellas ( $M_1 + M_2 = 2.8278 M_\odot$ ), el semieje mayor de la órbita y la inclinación del plano orbital con respecto a la línea de vista. Con todos los parámetros que se midieron, se puede predecir el valor de  $\dot{P}$  y si este concuerda con lo medido, sería una evidencia de la existencia de las ondas gravitacionales.

Según la teoría de la relatividad general, debería haber un decaimiento en el periodo orbital debido a la emisión de ondas gravitacionales. Se predijo  $\dot{P} = -2.40 \times 10^{-12}$  y se midió  $\dot{P} = (-2.30 \pm 0.22) \times 10^{-12}$ , la fórmula de la emisión gravitacional cuadrupolar se confirmó con un error de aproximadamente el 10% [69], con esto no quedó duda de la existencia de las ondas gravitacionales. Sin embargo esta detección es indirecta. Detectar directamente las ondas gravitacionales nos puede dar mucha información sobre el sistema que las generó.

La ecuación 1-56 se puede escribir como

$$L_{GW} = \frac{32}{5} \mu^2 R^4 \Omega^6. \tag{1-60}$$

En donde  $R$  es la separación entre las estrellas y  $\Omega$  es la velocidad angular. La velocidad angular está determinada por la separación y la masa de las estrellas, al observar un sistema por lo general no se puede medir  $R$  directamente, pero a partir de la frecuencia de las ondas gravitacionales observadas se puede inferir  $\Omega$  y entonces es posible obtener las masas de las estrellas.

Como  $R^3 = \frac{m_1+m_2}{\Omega^2}$  y usando la frecuencia de las ondas gravitacionales  $\Omega_{GW} = 2\Omega$ , se tiene

$$\bar{h}^{TTxx} = -2^{1/3} \frac{\mathcal{M}^{5/3} \Omega_{GW}^{2/3}}{r} \cos[\Omega_{GW}(t-r)], \quad (1-61)$$

$$L_{GW} = \frac{4}{5 \times 2^{1/3}} (\mathcal{M} \Omega_{GW})^{10/3}, \quad (1-62)$$

en donde se define  $\mathcal{M}$  como la masa de gorjeo<sup>4</sup> del sistema binario

$$\mathcal{M} = \mu^{3/5} (m_1 + m_2)^{2/5} = \frac{c^3}{G} \left( \frac{5}{96} \pi^{-8/3} \Omega^{-11/3} \dot{\Omega} \right)^{3/5}, \quad (1-63)$$

en donde  $\Omega$  y  $\dot{\Omega}$  son la frecuencia observada y su derivada [8]. Ésta determina qué tan rápido el sistema binario barre una banda de frecuencias.

La energía que genera la luminosidad de las ondas gravitacionales (ecuación 1-56) proviene de la energía de la órbita  $E = -m_1 m_2 / 2R$ , que en términos de  $\mathcal{M}$  es

$$E = -\frac{1}{2^{5/3}} \mathcal{M}^{5/3} \Omega_{GW}^{2/3}. \quad (1-64)$$

El campo, la luminosidad y la energía dependen de  $\mathcal{M}$ . Este tipo de sistema puede servir como candelas estándar porque se puede determinar con precisión la distancia a la cuál se encuentran a partir de las mediciones de las ondas gravitacionales que emite[15].

Los experimentos para detectar ondas gravitacionales comenzaron en los años 60s con Weber y sus barras resonantes [70]. Los experimentos basados en interferometría se propusieron a principios de los 60s y en los 70s. Para principios del 2000 se habían construido ya algunos de-

---

<sup>4</sup>Chirp Mass

tectores: TAMA en Japón, GEO 600 en Alemania, Virgo en Italia y LIGO<sup>5</sup> en Estados Unidos. Estos detectores estuvieron buscando ondas gravitacionales de 2002 a 2011 sin resultado alguno. LIGO fue mejorado y en 2015 tenía una sensibilidad mayor que todos los demás detectores.

Los detectores por interferometría funcionan básicamente como un interferómetro de Michelson, es decir, un haz de luz láser se divide en dos haces que recorren un camino de 4km, en el caso de LIGO y mide la deformación causada por una onda gravitacional como la diferencia en longitud de sus brazos ortogonales.

A principios de febrero de este año (2016) se anunció la medición directa de las ondas gravitacionales generadas por la colisión de dos agujeros negros de masa estelar por medio de LIGO [1], el sistema se conoce como **GW150914**. Las masas de los agujeros negros son de  $36_{-4}^{+5}M_{\odot}$  y  $29_{-4}^{+4}M_{\odot}$ , el agujero negro final es de  $62_{-4}^{+4}M_{\odot}$  y radió  $3.0_{-0,5}^{+0,5}M_{\odot}c^2$  en ondas gravitacionales, la señal se detecto de los 35 a los 250 Hz.

Este fue un evento muy importante ya que es la primera vez que se ha detectado directamente la emisión de ondas gravitacionales y también la primera vez que se observa la colisión de dos agujeros negros.

---

<sup>5</sup>Por sus siglas en inglés “Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatoy”

## Capítulo 2

# Simulación Numérica

Muchos de los sistemas físicos que se estudian en la actualidad, son descritos a través de modelos que nos ayudan a predecir su comportamiento. Estos pueden llegar a ser muy complejos y en muchos casos no es posible encontrar soluciones analíticas. Por lo general, los modelos son una serie de ecuaciones diferenciales y la meta es resolverlas de manera rápida pero al mismo tiempo asegurar que los resultados que se obtienen resuelvan el sistema de una manera físicamente posible y que concuerde con la realidad, para esto se han desarrollado códigos numéricos tomando en cuenta las necesidades específicas de cada sistema físico y se han ido desarrollando para hacerlos cada vez más eficientes y obtener resultados en el menor tiempo posible, de todas maneras, resolver un sistema físico con muchas partículas siempre toma tiempo ya que hay que resolver muchas ecuaciones para poder describir adecuadamente su comportamiento. El sistema que se quiere modelar en este caso se puede considerar como un fluido en 3 dimensiones, por lo tanto se necesita resolver las ecuaciones hidrodinámicas de éste.

El código numérico que se utiliza en este trabajo es un código Hidrodinámico de Partículas Suavizadas o SPH por sus siglas en inglés (Smoothed Particle Hydrodynamics). Es esencialmente un método Lagrangiano y fue desarrollado por Gingold & Monaghan en 1977 [24]. Las ventajas principales de este método son que no es necesario hacer suposiciones a priori acerca de la naturaleza del fluido además como va siguiendo las partículas, no se consumen recursos computacionales en modelar regiones en las que no hay partículas.

Este método ha sido probado exitosamente en varios problemas, por ejemplo Monaghan & Gingold (1983)[55] lo usaron para estudiar ondas de choque en un tubo, Monaghan & Philips en 1985 lo usaron para describir la propagación de ondas de Alfvén, Phillips en 1986 [66] y Habe en 1989 [31] estudiaron el colapso de nubes de gas magnéticas, Žurek & Benz (1986) [74] estudiaron la redistribución del momento angular en un toro de acreción grueso, Benz et al (1990) [7]; Rasio & Shapiro (1992) [67]; Davies et al (1994) [18] lo usaron para estudiar hidrodinámica de sistemas de binarias cercanas, Coleman & Bicknell (1985) [17] estudiaron jets astrofísicos.

## 2.1. Ecuaciones Hidrodinámicas. La ecuación de continuidad y la ecuación de Euler.

### La ecuación de Continuidad.

Un fluido en movimiento se describe por medio de funciones que dan la distribución de la velocidad del fluido  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  y de otras dos magnitudes termodinámicas que pertenezcan al fluido, por ejemplo la presión  $P(x, y, z, t)$  y la densidad  $\rho(x, y, z, t)$ . Todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas si se conocen los valores de cualesquiera dos de ellas y con ayuda de la ecuación de estado [38].

Se considera ahora un cierto volumen  $V_0$ , la masa de fluido contenida en ese volumen es  $\int \rho dV$  y el fluido que atraviesa la superficie  $S$  delimitada por ese volumen es  $\rho \mathbf{v} \cdot dS$ , esta cantidad es positiva si el flujo está saliendo y negativa si entra; la masa total de fluido que sale del volumen  $V_0$  por unidad de tiempo es  $\oint \rho \mathbf{v} \cdot dS$  mientras que la disminución de masa del fluido en el mismo volumen es  $-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$ . Igualando se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \mathbf{v} \cdot dS. \quad (2-1)$$

Transformando la integral anterior a una integral de volumen por medio de la fórmula de Green



se tiene  $-\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla(\rho \mathbf{v}) dV$ , por lo que la ecuación 2-1 queda como

$$\int \left( \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV, \quad (2-2)$$

y como esto debe ser cierto para cualquier volumen entonces queda la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2-3)$$

### La ecuación de Euler.

Considerando un volumen de fluido, la fuerza total que actúa sobre el volumen es  $-\oint P dS$ , con  $P$  la presión y  $S$  la superficie que encierra al volumen. Esto se puede transformar en una integral de volumen por lo que

$$-\oint P dS = -\int \nabla P dV. \quad (2-4)$$

En donde  $-\nabla P$  es la fuerza por unidad de volumen que actúa sobre el fluido. Aplicando la segunda ley de Newton para obtener la ecuación de movimiento de un elemento de volumen del fluido, se tiene

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P, \quad (2-5)$$

en donde  $d\mathbf{v}/dt$  es la derivada temporal de la velocidad de una partícula fluida determinada cuando se mueve en el espacio, para ponerla en términos de magnitudes que se refieren a puntos fijos en el espacio, se usa la relación  $d\mathbf{v} = (\partial \mathbf{v} / \partial t) dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  por lo que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2-6)$$

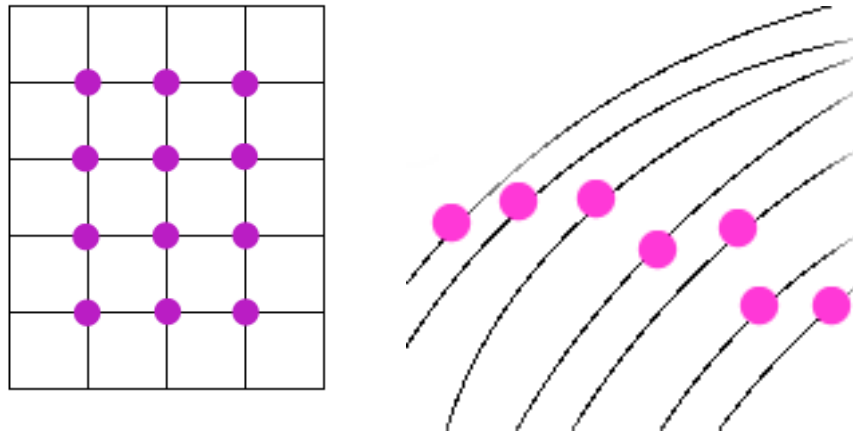
Sustituyendo en la ecuación 2-5 se obtiene la ecuación de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho}. \quad (2-7)$$

Esta es la ecuación para la conservación de momento de un fluido no viscoso.

## 2.2. Las Ecuaciones Hidrodinámicas Lagrangianas.

Existen dos formas de estudiar los problemas físicos por medio de códigos numéricos, uno es por medio del método Euleriano, en el cuál se fija una malla de puntos y se calculan las derivadas en éstos lugares fijos; el flujo atraviesa esta malla y las propiedades de las partículas que van cayendo en estos puntos están determinadas por los valores de las propiedades que tiene ese punto de la malla en ese instante.



(a) Descripción de Euler. Las propiedades de las partículas toman los valores que tiene la malla en ese instante. (b) Descripción de Lagrange. Se calculan las derivadas en un sistema coordenado que se mueve con las partículas.

Figura 2-1: Esquema de las descripciones de Euler y Lagrange.

El otro método es el Lagrangiano, en el cuál se sigue a cada una de las partículas en el tiempo calculando las derivadas en un sistema coordenado que se mueve con el fluido; las propiedades dependientes del tiempo pueden representarse como  $\mathbf{f}_i(t)$  en donde el subíndice indica la partícula  $i$  del fluido y las derivadas temporales se pueden calcular como  $d/dt$ , mientras que en el método Euleriano, las propiedades dependen también de la posición en la malla por lo que se representan como  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  y sus derivadas temporales son derivadas parciales  $\partial/\partial t$ , la figura 2-1 muestra esquemáticamente éstas descripciones.

Se pueden escribir las ecuaciones hidrodinámicas de manera lagrangiana. Las derivadas temporales de Euler y de Lagrange se relacionan como

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2-8)$$

Ahora se puede aplicar la ecuación Euleriana de continuidad 2-1 y usando  $d\rho/dt = \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \partial\rho/\partial t$  se obtiene la forma lagrangiana de la ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2-9)$$

La ecuación de Euler 2-7 en forma lagrangiana es

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{f}, \quad (2-10)$$

en donde  $f$  encierra términos de gravedad o campos magnéticos.

A continuación debe obtenerse la ecuación de energía y esto se hace con ayuda de la primera ley (adiabática) de la termodinámica  $dU = dQ - PdV$  escrita en términos de volumen por masa; de esta manera la energía  $U$ , se convierte en energía por masa  $u$  y el volumen se convierte en volumen por masa  $dV \rightarrow d(1/\rho) = -d\rho/\rho^2$  por lo que la primera ley de la termodinámica se escribe como

$$du = \frac{P}{\rho^2} d\rho, \quad (2-11)$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_s &= \frac{P}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (2-12)$$

Usando las ecuaciones 2-12 y 2-9, se tiene que la ecuación Lagrangiana para la energía es

$$\frac{du}{dt} = \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2-13)$$

Con estas ecuaciones (continuidad, Euler y energía) más una ecuación de estado que relacione cantidades como por ejemplo la velocidad del sonido o la presión con cantidades macroscópicas del fluido como la temperatura o la densidad, se puede describir el fluido de manera Lagrangiana.

### 2.3. El Método Numérico. Smoothed Particle Hydrodynamics

El método SPH se basa en un núcleo que depende de un vector de posición y un parametro  $h$  que tiene unidades de longitud. Éste aproxima a una función  $f(\mathbf{r})$  como

$$\tilde{f}(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}')W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)d^3r', \quad (2-14)$$

en donde  $W$  es el núcleo<sup>1</sup> y  $h$  es la longitud de suavizamiento<sup>2</sup> que determina el ancho del núcleo. Las partículas están representadas por este núcleo y su integral espacial indica qué tanta influencia tiene la partícula en alguna posición dada. Se debe pedir que el núcleo permita recuperar la función original si se toma el límite de una región suavizada infinitesimal, por lo que el núcleo debe cumplir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{f}_h(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad (2-15)$$

y

$$\int W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)d^3r' = 1. \quad (2-16)$$

Así que el núcleo debe estar normalizado y debe colapsar a un punto si la longitud de suavizamiento tiende a cero, por lo que se debe cumplir lo siguiente

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2-17)$$

además, como el núcleo representa a las partículas y a que tanto contribuyen a las interacciones, entonces debe tener a cero con la distancia

$$\lim_{h \rightarrow \infty} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = 0 \quad (2-18)$$

Esta propiedad del núcleo es muy importante ya se puede elegir un núcleo que limite la influencia de las partículas a un radio finito, esto mejora mucho el tiempo de computo requerido ya que no es necesario calcular las interacciones entre todas las partículas del sistema.

---

<sup>1</sup>smoothing núcleo

<sup>2</sup>smoothing lenght

Para implementar estas ecuaciones en un código numérico, se deben reescribir discretamente. La ecuación 2-14 se puede reescribir como

$$\tilde{f}_h(\mathbf{r}) = \int \frac{f(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \rho(\mathbf{r}) d^3 r', \quad (2-19)$$

y en forma de suma como

$$f(\mathbf{r}) = \sum_b \frac{f_b m_b}{\rho_b} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h), \quad (2-20)$$

en donde el subíndice  $b$  denota a la partícula  $b$ . Se puede entonces construir un interpolador diferenciable de una función a partir de sus valores en las partículas usando un núcleo que es diferenciable y donde las partículas son los puntos interpolantes. Por ejemplo, para la densidad se tiene

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_b m_b W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h). \quad (2-21)$$

Elegir el núcleo adecuado para el sistema en particular que se quiere estudiar es muy importante. La exactitud de la interpolación que puede dar el núcleo es difícil de cuantificar en la práctica a menos que se hagan suposiciones acerca de la distribución de partículas que la simplifiquen mucho y por lo general, estas configuraciones no se dan en la realidad. Se puede expandir  $f(\mathbf{r}')$  por medio de la serie de Taylor de la ecuación 2-14 alrededor de  $\mathbf{r}$

$$f(\mathbf{r}') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k h^k g^{(k)}(\mathbf{r})}{k!} \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{h} \right)^k. \quad (2-22)$$

Escribiendo explícitamente los términos en serie de Taylor, se puede determinar qué tan buena es la aproximación a la función original y haciendo que el error se desvanezca se pueden construir núcleos del orden que se desee. Se han propuesto varios núcleos (Natanson 1960; Monaghan 1985, Fulk & Quinn 1996, Cabezón et al, 2008) pero en la práctica el mejor es el núcleo cúbico estándar (Monaghan, 1992)[54]

$$W(r, h) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3, & 0 \leq q < 1, \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3, & 1 \leq q < 2, \\ 0, & 2 \leq q. \end{cases} \quad (2-23)$$

en donde  $q = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/h$ . Este núcleo es radial, es decir, depende únicamente del valor absoluto de  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Con este núcleo, la aproximación de la ecuación 2-14 es

$$\tilde{f}_h(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + Ch^2 + O(h^4), \quad (2-24)$$

la cantidad C contiene las segundas derivadas de la función f, así es posible reproducir exactamente funciones lineales y constantes con esta representación integral (ecuación 2-14).

En la práctica se utilizan dos aproximaciones, la primera es la integral de interpolación (ecuación 2-14) y la segunda es la discretización (ecuación 2-20). La exactitud de las ecuaciones discretizadas dependen de la distribución de los puntos interpolantes, es decir, de las partículas. Se pueden estimar los errores basados en una distribución aleatoria de los puntos, pero en las simulaciones los errores son más pequeños de lo esperado porque la distribución de las partículas no es aleatoria. Ésta depende tanto del núcleo utilizado como de la dinámica del sistema mismo (Monaghan, 2005).

### 2.3.1. Derivadas en SPH.

Para obtener las derivadas, se toma la expresión analítica de la ecuación 2-20

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} f_b \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h), \quad (2-25)$$

es decir, se utiliza la derivada exacta de la función aproximada.

Algunos procesos como la difusión o la conducción térmica requieren de segundas derivadas y esas se escriben como

$$(\nabla^2 f) = 2 \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (f_a - f_b) \frac{w_{ab}}{r_{ab}}, \quad (2-26)$$

en donde  $w_{ab}$  se relaciona con el núcleo como  $\nabla W_{ab} = \hat{e}_{ab} w_{ab}$  y  $\hat{e}_{ab} = \mathbf{r}_{ab}/r_{ab}$  es el vector unitario de la partícula a la partícula b.

El gradiente de un vector es

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} |\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_k| = \frac{(\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_k)(\delta_{ab} - \delta_{ka})}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_k|} = \hat{e}_{bk}(\delta_{ba} - \delta_{ka}), \quad (2-27)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} \frac{1}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_k|} = -\frac{\hat{e}_{bk}(\delta_{ba} - \delta_{ka})}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_k|^2}, \quad (2-28)$$

con  $\hat{e}_{bk}$  el vector unitario de la partícula k a la partícula b y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. Otra derivada que frecuentemente se utiliza es

$$\frac{dr_{ab}}{dt} = \nabla_a r_{ab} \cdot \mathbf{v}_{ab} = \hat{e}_{ab} \cdot \mathbf{v}_{ab}. \quad (2-29)$$

Para derivar un núcleo que depende sólo de la magnitud de la separación se cumple que  $W(\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_k) = W(|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_k|) \equiv W_{bk}$ , la derivada con respecto a las coordenadas de una partícula  $a$  es

$$\nabla_a W_{bk} = \nabla_b W_{kb}(\delta_{ba} - \delta_{ka}), \quad (2-30)$$

lo cuál lleva a la siguiente propiedad

$$\nabla_a W_{bk} = -\nabla_b W_{ab}. \quad (2-31)$$

Por otro lado, la derivada temporal del núcleo es

$$\frac{dW_{ab}}{dt} = \frac{\partial W_{ab}}{\partial r_{ab}} \hat{e}_{ab} \cdot \mathbf{v}_{ab} = \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla W_{ab}. \quad (2-32)$$

### 2.3.2. Ecuaciones de Conservación.

Historicamente, se discretizó directamente la ecuación de Euler (ecuación 2-1) esperando que funcionara adecuadamente

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = -\frac{1}{\rho} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} P_b \nabla_a W_{ab} \quad (2-33)$$

La ecuación 2-33 es lo que sale de hacer la discretización y resuelve la ecuación de Euler,

pero no conserva el momento. Para ver esto consideremos la fuerza que una partícula  $b$  ejerce sobre la partícula  $a$

$$\mathbf{F}_{ab} = \left( m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right)_b = -\frac{m_a m_b}{\rho_a \rho_b} P_b \nabla_a W_{ab}, \quad (2-34)$$

y de manera similar, la fuerza que ejerce  $a$  sobre  $b$  es

$$\mathbf{F}_{ab} = \left( m_b \frac{d\mathbf{v}_b}{dt} \right)_a = \left( m_b \frac{d\mathbf{v}_b}{dt} \right)_a = -\frac{m_b m_a}{\rho_b \rho_a} P_a \nabla_b W_{ba} = \frac{m_a m_b}{\rho_a \rho_b} P_b \nabla_a W_{ab}, \quad (2-35)$$

como en general  $P_a \neq P_b$ , esta ecuación no conserva el momento. Para corregir esto, se utiliza una aproximación un poco distinta. Si se comienza con

$$\nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) = \frac{\nabla P}{\rho} - P \frac{\nabla \rho}{\rho^2}, \quad (2-36)$$

se resuelve para  $\nabla P/\rho$  y usando la ecuación 2-25 se obtiene la ecuación de momento

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = -\frac{P}{\rho^2} \sum m_b \nabla_a W_{ab} - \sum_b \frac{m_b P_b}{\rho_b^2} \nabla_a W_{ab} = -\sum_b m_b \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab}, \quad (2-37)$$

y como  $\nabla_a W_{ab} = -\nabla_b W_{ba}$  y la parte que contiene la presión ya es simétrica, las fuerzas son ahora iguales y de signo opuesto, cumpliendo con la tercera ley de Newton y entonces el momento total y el momento angular se conserva.

Utilizando la ecuación 2-32 la ecuación de energía queda como

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{P_a d\rho_a}{\rho_a^2 dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}, \quad (2-38)$$

y para ver si esta ecuación se conserva se calcula  $dE/dt$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_a \left( m_a u_a + \frac{1}{2} m_a v_a^2 \right) = \sum_a m_a \frac{d\hat{e}_a}{dt} = \sum_a m_a \left( \frac{du_a}{dt} + \mathbf{v}_a \cdot \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right), \quad (2-39)$$



Usando las ecuaciones 2-37 y 2-38 se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \sum_a m_a \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab} - \mathbf{v}_a \cdot \sum_b m_b \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} \right) \\
&= \sum_{a,b} m_a m_b \frac{P_a}{\rho_a^2} \mathbf{v}_a \cdot \nabla_a W_{ab} - \sum_{a,b} m_a m_b \frac{P_a}{\rho_a^2} \mathbf{v}_b \cdot \nabla_a W_{ab} \\
&\quad - \sum_{a,b} m_a m_b \frac{P_a}{\rho_a^2} \mathbf{v}_a \cdot \nabla_a W_{ab} - \sum_{a,b} m_a m_b \frac{P_a}{\rho_b^2} \mathbf{v}_a \cdot \nabla_a W_{ab} \\
&= - \sum_{a,b} m_a m_b \left( \frac{P_a \mathbf{v}_b}{\rho_a^2} + \frac{P_b \mathbf{v}_a}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab}.
\end{aligned} \tag{2-40}$$

Reescribiendo el último término de la ecuación anterior cambiando los índices

$$\begin{aligned}
&- \sum_{a,b} m_a m_b \left( \frac{P_a \mathbf{v}_b}{\rho_a^2} + \frac{P_b \mathbf{v}_a}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} \\
&= - \frac{1}{2} \left( \sum_{a,b} m_a m_b \left( \frac{P_a \mathbf{v}_b}{\rho_a^2} + \frac{P_b \mathbf{v}_a}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} + \sum_{b,a} m_b m_a \left( \frac{P_b \mathbf{v}_a}{\rho_b^2} + \frac{P_a \mathbf{v}_b}{\rho_a^2} \right) \nabla_b W_{ba} \right) \\
&= - \frac{1}{2} \sum_{a,b} 2 m_a m_b \left( \frac{P_a \mathbf{v}_b}{\rho_a^2} + \frac{P_b \mathbf{v}_a}{\rho_b^2} \right) \cdot (\nabla_a W_{ab} + \nabla_b W_{ba}) = 0.
\end{aligned} \tag{2-41}$$

Algunos puntos importantes son:

*i*) La conservación se garantiza si se utilizan longitudes de suavizamiento ( $h$ ) constantes o si  $\nabla_a W_{ab}$  es simétrico en las longitudes de suavizamiento ( $h$ ). Esto puede lograrse usando  $h_{ab} = (h_a + h_b)/2$  como propuso Benz en 1990 [7] o reemplazando el gradiente von  $[\nabla_a W(r_{ab}, h_a) + \nabla_a W(r_{ab}, h_b)]/2$  como propusieron Hernquist y Katz [34].

*ii*) La conservación se basa en que la fuerza sea un término simétrico en  $a\hat{e}_{ab}$  y  $b\hat{e}_{ab}$ . Recordando que  $\nabla_a W_{ab} \propto \hat{e}_{ab}$ .

*iii*) El éxito del método SPH depende de sus propiedades de conservación y esto se garantiza con la simetría correcta en los índices de las partículas.

### 2.3.3. El Método Jerárquico de Árbol Binario.

Una estructura de árbol binario permite calcular más eficientemente las fuerzas gravitacionales, esto reduce el número de operaciones requeridas por paso de tiempo de  $O(N^2)$  a  $O(N \log N)$ .

Un árbol es un tipo de dato abstracto que guarda elementos de manera jerárquica; con excepción del elemento inicial, llamado *raíz*, cada elemento en un árbol tiene un *padre* y puede tener 1 ó 2 *hijos*, si hay dos hijos, estos son hermanos. Un par de nodos  $(u, v)$  forman un borde si  $u$  es el padre de  $v$  o vice versa. Un camino en un árbol es una secuencia de nodos tales que cualquiera dos nodos consecutivos en la secuencia, forman un borde. En la figura 2-2 se muestra una gráfica que representa los niveles y los nodos de un árbol.

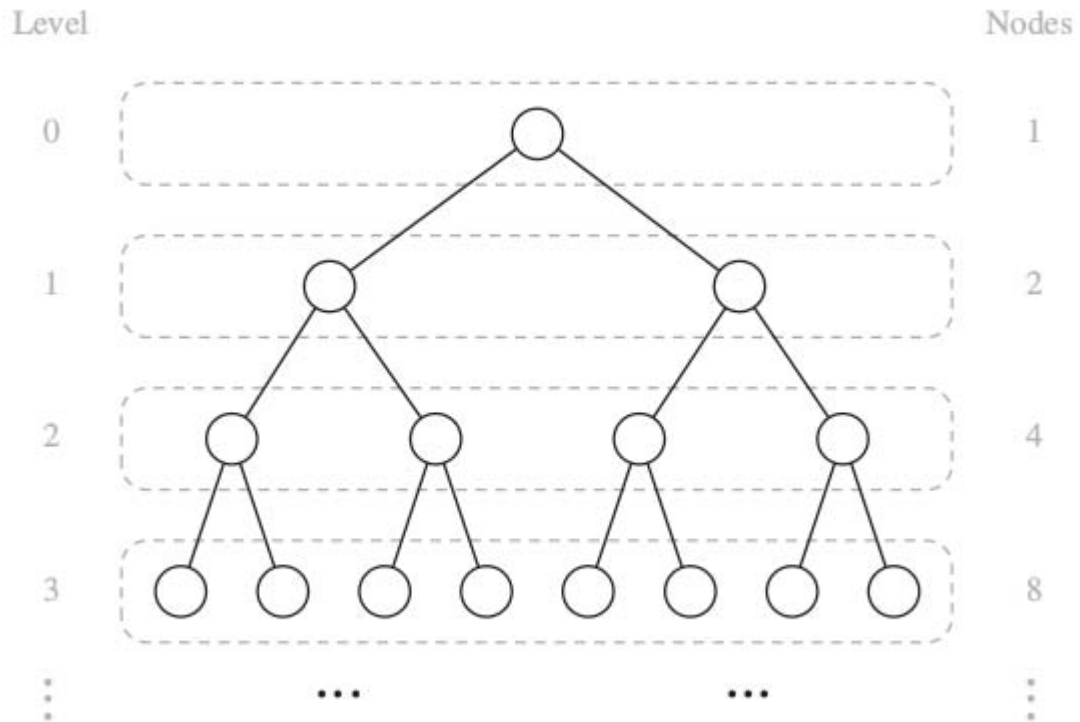


Figura 2-2: Diagrama de nodos y niveles en un árbol.

Cada nodo en el árbol se asocia con un volumen cúbico del espacio que contiene cierto número de partículas. Para 3 dimensiones, cada volumen se subdivide en 8 subunidades de

volumen igual, estos son los descendientes del nodo original en el árbol. Este proceso continúa hasta que cada subcelda contiene 1 ó 0 partículas. La masa total, las coordenadas del centro de masa y los momentos cuadrupolares se calculan recursivamente para cada celda.

Entonces, las partículas se organizan jerárquicamente en celdas, la aceleración gravitacional se obtiene permitiendo que cada partícula interactúe con otros elementos de la jerarquía. La influencia de partículas más alejadas se incluye evaluando las expansiones multipolares de las celdas que satisfagan los requerimientos de exactitud para cada partícula. Las fuerzas se determinan caminando por el árbol, comenzando en la jerarquía más alta (el volumen más grande) y a cada paso, el tamaño  $s$  de la celda se compara con la distancia a la partícula  $d$ . Si  $s/d \leq \theta$ , con  $\theta$  un parámetro fijo de tolerancia, entonces la influencia de todas las partículas en una celda se calcula como una sola interacción, de otra manera, la celda se subdivide (se baja por el árbol) hasta que el criterio de tolerancia se satisface o se encuentra una celda elemental (con 1 ó 0 partículas). De esta forma todas las operaciones, incluyendo la construcción del árbol y la evaluación de fuerzas, se puede llevar a cabo en un tiempo  $O(N \log N)$ .

En el núcleo definido en la ecuación 2-50 únicamente las partículas que quedan dentro de  $2h$  van a ser consideradas para contribuir al suavizamiento, entonces se requiere una búsqueda eficiente de partículas vecinas para así considerar únicamente a los vecinos más cercanos. Esto se hacía típicamente con una red y listas ligadas, sin embargo este método no puede usarse para una  $h$  que varía en el espacio. Es por esto que basados en una estructura de árbol jerárquico, se utiliza un método de búsqueda por rango para buscar a los vecinos más cercanos. En general, la búsqueda por rango consiste en encontrar todos los puntos (partículas) que caigan en un intervalo específico tomando en cuenta puntos que están dentro del intervalo e ignorando las partes del árbol que quedan fuera [34].

### 2.3.4. Resolución Adaptativa.

La cantidad  $h$ , que se ha llamado *longitud de suavizamiento*, debe adaptarse en el espacio y el tiempo para que el sistema tenga por ejemplo mayor resolución en zonas que lo requieran, por lo que  $h$  no es necesariamente igual para cada partícula. Una relación que resulta muy útil

es

$$\frac{h(t)}{h_0} = \left( \frac{\rho_0}{\rho(t)} \right)^{1/3}, \quad (2-42)$$

en donde  $h_0$  es el parámetro de suavizamiento y  $\rho_0$  la densidad inicial de la partícula. Calculando la derivada lagrangiana se obtiene [68]

$$\frac{dh_a}{dt} = \frac{1}{3} h_a (\nabla_a \cdot \mathbf{v})_a. \quad (2-43)$$

En 1982 Gingold y Monaghan [25] propusieron utilizar

$$h_a = \eta \left( \frac{m_a}{\rho_a} \right)^{1/3}, \quad (2-44)$$

en donde  $\eta$  debe tener un valor entre 1.2 y 1.5. Se necesita ahora escribir las ecuaciones de momento y energía en términos de una  $h$  variable.

La derivada lagrangiana de la densidad de una partícula es

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \frac{1}{\Omega_a} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a), \quad (2-45)$$

en donde

$$\Omega_a \equiv 1 - \frac{\partial h_a}{\partial \rho_a} \sum_b m_b \frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial h_a} \quad (2-46)$$

La ecuación de momento 2-37 se reescribe como

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left( \frac{P_a}{\Omega_a \rho_a^2} \nabla_a W_{ab} + \frac{P_b}{\Omega_b \rho_b^2} \nabla_a W_{ab}(h_b) \right), \quad (2-47)$$

y la ecuación de energía queda

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{P_a}{\Omega_a \rho_a} \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a). \quad (2-48)$$

La manera óptima de actualizar la longitud de suavizamiento para cada partícula no se ha determinado aún. Idealmente,  $h$  debería ser proporcional a la separación local media entre las

partículas y debería ir como  $h \propto n^{-1/3}$  en 3 dimensiones. Considerando arreglo de árbol binario, la manera de ir actualizando el valor de  $h$  se hace de tal manera que cada partícula interactúe con un número máximo de vecinos. Si  $h_{i,n}$  es la longitud de suavizamiento para una partícula  $i$  en el paso  $n$ , el valor en el paso  $n + 1$  se predice con

$$h_i^{n+1} = (h_i^n/2)(1 + \nu/\nu^n)^{1/3}, \quad (2-49)$$

en donde  $\nu$  es el número de vecinos[34].

## 2.4. Implementación del código SPH.

Se utiliza un código numérico SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics)[54] en el régimen Newtoniano para simular la colisión de dos estrellas formadas totalmente por quarks, el rango de masas va de  $1.5 M_\odot$  a  $2.5 M_\odot$ .

En 1998 Lee, [46] desarrolló su propio código SPH. Pruebas con problemas ya conocidos dieron resultados excelentes y ha sido utilizado para estudiar la coalescencia de una estrella de neutrones con un agujero negro [47], [48], [49], [50] y la de una estrella de quarks y un agujero negro [45]. Este código es el que se usa para las presentes simulaciones pero considerando dos estrellas de quarks.

El núcleo a utilizar es el de Monaghan & Lattanzio (1985)[56], ecuación 2-23

$$W(r, h) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}(\frac{r}{h})^2 + \frac{3}{4}(\frac{r}{h})^3, & 0 \leq r/h < 1, \\ \frac{1}{4}(2 - \frac{r}{h})^3, & 1 \leq r/h < 2, \\ 0, & 2 \leq r/h. \end{cases} \quad (2-50)$$

Al estudiar fluidos, es común que se generen choques de material, estos choques causan una discontinuidad en las propiedades del flujo, dentro de los métodos numéricos, las escalas de tiempo y de longitud en los que ocurren los choques son más cortas que para un fluido cuya velocidad es mucho menor a la velocidad del sonido y es por esto que dichas resoluciones deben

cumplir  $v < \Delta x / \Delta t$  durante toda la simulación. Esto se escribe formalmente por medio del criterio de Courant-Friedrichs-Lewy [16]

$$C = \Delta t \sum_{i=1}^n \frac{u_{x_i}}{\Delta x_i} \leq C_{\text{máx}} \quad (2-51)$$

en donde  $n$ , es el número de dimensiones espaciales de la simulación.

La forma más sencilla para detectar y estudiar los choques en el método SPH es introducir un término de viscosidad artificial que debe ser siempre positiva para que cambie la energía cinética a energía interna y debe disipar el choque para eliminar las discontinuidades, por lo que debe introducir términos disipativos en las ecuaciones de conservación, además debe respetar la conservación de momento y energía y por último debe aparecer sólo cuando se presenten discontinuidades y no en compresiones uniformes del medio.

Entonces, el término de viscosidad artificial evita que las partículas se interpenetren y permite manejar la presencia de choques. Las ecuaciones de momento y energía son:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left( \frac{2\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i \rho_j} + \prod_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} - \nabla \Phi_i - \vec{\mathbf{a}}_i^{RR}, \quad (2-52)$$

y

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left( \frac{2\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i \rho_j} + \prod_{ij} \right) (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}, \quad (2-53)$$

en donde  $\mathbf{v}$ ,  $P$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $\Phi$ ,  $\vec{\mathbf{a}}_i^{RR}$ ,  $W$  son los términos de velocidad, presión, densidad, energía interna por unidad de masa, potencial gravitacional, reacción de radiación y núcleo de interpolación y  $\prod_{ij}$  es el término de la viscosidad artificial, se utiliza el término presentado por Balsara en 1995 [6].

$$\prod_{ij} = \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) (-\alpha \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2), \quad (2-54)$$

con

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \frac{(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) f_i + f_j}{h_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2/h_{ij}^2) + \eta'^2 2c_{ij}}, & (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) < 0, \\ 0, & (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \geq 0. \end{cases}, \quad (2-55)$$

y  $f_i$  la función de partícula, definida como

$$f_i = \frac{|\nabla \cdot \mathbf{v}|_i}{|\nabla \cdot \mathbf{v}|_i + |\nabla \times \mathbf{v}|_i + \eta' c_i/h_i}. \quad (2-56)$$

El factor  $\eta' \simeq 10^{-3}$  evita divergencias numéricas,  $c_{ij}$  es la velocidad del sonido en el lugar en donde se encuentra la partícula  $i$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes  $\sim 1$ . La divergencia y el rotacional del campo de velocidades son

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla_i W_{ij}, \quad (2-57)$$

y

$$(\nabla \times \mathbf{v})_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \times \nabla_i W_{ij}. \quad (2-58)$$

Esta forma de la viscosidad se hace cero en regiones de vorticidad alta ( $|\nabla \times \mathbf{v}| \gg \nabla \cdot \mathbf{v}$ ) pero permanece en regiones de compresión alta ( $\nabla \cdot \mathbf{v} \gg |\nabla \times \mathbf{v}|$ ) por lo cuál no afecta la evolución de estructuras tipo disco en la simulación en caso de que aparecieran. Es importante utilizar un término de viscosidad artificial que no genere efectos falsos de corte.

Se toma la aceleración gravitacional de un volumen de fluido como proporcional a su densidad de energía total, de esta manera  $\rho$  es la densidad de energía dividida por  $c^2$  [45].

Se calcula la luminosidad de ondas gravitacionales con la aproximación cuadrupolar descrita en el capítulo 1, ecuación 1-56. El efecto que causa en el sistema la radiación de ondas gravitacionales se modela por medio del término de reacción de radiación, el cuál es válido mientras la estrella no esté tan deformada y se pueda seguir considerando un punto de masa; la reacción de radiación se apaga en el código cuando la separación entre las estrellas es menor a 2 veces el radio de la estrella más grande. Se aplica la misma aceleración para cada partícula del fluido que forma la estrella  $i$

$$\mathbf{a}^i = -\frac{1}{q(M_{Estrella1} + M_{Estrella2})} \frac{dE}{dt} \frac{\mathbf{v}_{cm}^*}{(v_{cm}^*)^2}, \quad (2-59)$$

en donde  $dE/dt$  es la ecuación 1-56 y  $\mathbf{v}^*$  es la velocidad de la estrella de quarks.

Se ha incorporado una estructura de árbol binario para calcular más eficientemente las fuerzas gravitacionales. La subrutina que corresponde a esta aproximación, nos da simultaneamente los vecinos hidrodinámicos para cada partícula que se necesitan para obtener  $d\mathbf{v}_i/dt$  y  $d\mathbf{u}_i/dt$  en las ecuaciones 2-52 y 2-53 [47].

Las longitudes de suavizamiento se ajustan para que cada partícula tenga 64 partículas vecinas y se calculan con la ecuación 2-49.

El paso en el tiempo es adaptativo  $\Delta t = \min(0.15\Delta t_1, \Delta t_2)$  en donde  $\Delta t_1 = h/(c_{s_i} + 1.2c_{s_i} + 2.4\mu_i)$  con  $c_{s_j}$  la velocidad del sonido para la partícula  $j$ ; y  $\Delta t_2 = \sqrt{(h_j/a_j)}$ , con  $a$  la aceleración. Además  $\Delta t \leq 1 \times 10^{-5}$ .

Como en SPH, la aceleración de las partículas depende de la velocidad a través de la viscosidad artificial, la exactitud a segundo orden se mantiene si la velocidad se actualiza en dos etapas, primero se predice un estimado de  $\mathbf{v}_i^{(n+1/2)}$  con  $\mathbf{v}_i^{(n+1/2)} = \mathbf{v}_i^n + 0.5\Delta t\mathbf{a}_i^{n-1/2}$ . Éste valor se usa para calcular la aceleración en el tiempo  $n + 1/2$ , lo cuál permite que la velocidad sea calculada con las ecuaciones ???. El paso de tiempo utilizado se elige tal que cumpla con la condición de Courant 2-51.

Las fuerzas de largo alcance se calculan por medio de aproximaciones, entonces un método de integración de mayor orden probablemente tendería a amplificar el ruido aleatorio en la aceleración. El algoritmo de paso de rana no tiene este problema ya que la aceleración se calcula sólo una vez por paso de tiempo [34].

Una vez relaizada la simulación dinámica, se utiliza un código para calcular la luminosidad total integrada de las ondas gravitacionales  $L_{total}$  y la eficiencia de emisión que es



$\eta = L_{total}/M_{total}c^2$ , esta eficiencia compara la luminosidad total integrada en el tiempo, que se emite en forma de ondas gravitacionales y la energía que tiene el sistema dada su masa. Se calcula también la materia eyectada del sistema dada la configuración final considerando un potencial esférico generado por el objeto central y calculando la energía total de cada partícula para saber si está o no ligada gravitacionalmente al objeto central.

## 2.5. Condiciones iniciales

En todos los casos, se consideran estrellas compuestas totalmente por quarks con la ecuación de estado

$$\begin{aligned} P &= c^2(\rho - \rho_0)/3, & \rho > \rho_0 \\ P &= 0, & \rho \leq \rho_0. \end{aligned} \tag{2-60}$$

Se genera primero una estrella esférica con  $N = 34,512$  partículas y se relaja a equilibrio a hidrostático durante 20 tiempos de caída libre, en donde el tiempo de caída libre ( $t_{ff}$ ) está dado por la ecuación 2-61. Esto se elige así ya que después de 20  $t_{ff}$  no hay cambios significativos en el sistema.

$$t_{ff} = (G\rho)^{-1/2} \quad . \tag{2-61}$$

Se construyen todas las estrellas de acuerdo a Witten [71]  $M_{\text{máx}} \propto \rho_0^{1/2}$  con el mismo número de partículas en todos los casos. Después se colocan dos estrellas separadas 3.5 veces el radio de la estrella más grande, se les asigna una velocidad azimutal correspondiente a una binaria Kepleriana:  $2\pi v_{orb} = \sqrt{G(M_{Estrella1} + M_{Estrella2})/r^3}$  más la velocidad radial.

Finalmente se ejecuta la simulación dinámica con estas condiciones iniciales. La razón entre las masas es el parámetro  $q = M_{Estrella1}/M_{Estrella2}$  siendo estrella2 la estrella más masiva. Todas las cantidades están en MKS y el centro de coordenadas está en el centro de masas del sistema.

Cada partícula SPH de la estrella tiene la misma velocidad azimutal, por lo que las estrellas se encuentran en un sistema en el cuál no rotan en un marco de referencia inercial externo.

Como notaron Lee et al [45], los sistemas con estrellas que no rotan al principio, eyectan más materia pues tienen una coalescencia más violenta que las estrellas que se encuentran en rotación síncrona. Considerar que las estrellas de quarks no rotan al principio es una condición realista ya que se cree que la viscosidad de corte es menor que en las estrellas de neutrones y éstas, tienen una viscosidad que no es suficiente para mantener la sincronización durante la fase en la que se acercan haciendo una espiral. Con estas condiciones se obtiene entonces un límite superior para la materia eyectada.

Siguiendo la simulación realizada por Lee, Kluźniak y Nix [45] se utilizaron tres valores para  $\rho_0$

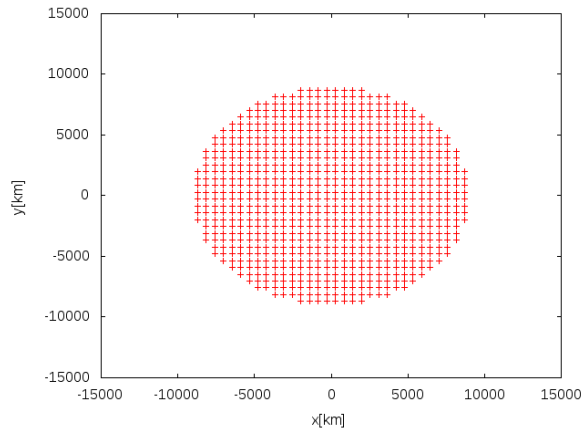
$$\rho_{0_1} = 7.318 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}, \quad \rho_{0_2} = 4.116 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}, \quad \rho_{0_3} = 2.634 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}. \quad (2-62)$$

En la tabla 2-1, se muestran las condiciones iniciales utilizadas para la masa, densidad y radio de las estrellas además de por cuántos  $t_{ff}$  evolucionó el sistema ( $t_{evolución}$ ).

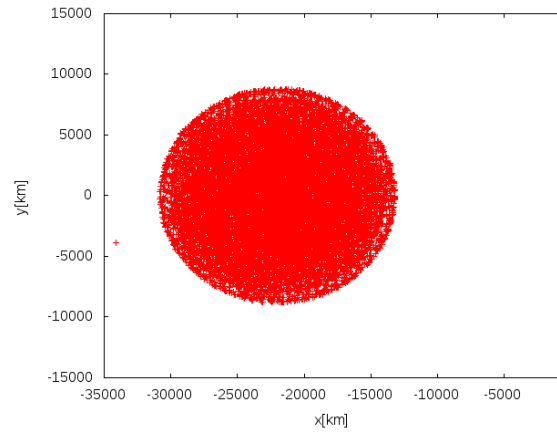
Caso	q	$M_{Estrella1}$ [ $M_{\odot}$ ]	$R_{Estrella1}$ [Km]	$M_{Estrella2}$ [ $M_{\odot}$ ]	$R_{Estrella2}$ [Km]	$\rho_0$ [ $10^{14} \text{g cm}^{-3}$ ]	$t_{evolución}$ [ $t_{ff}$ ]
1	1.0	1.5	9.0	1.5	9.0	7.318	40
2	1.0	1.5	9.0	1.5	9.0	4.116	40
3	1.0	2.0	12.0	2.0	12.0	4.116	40
4	1.0	1.5	9.0	1.5	9.0	2.634	80
5	1.0	2.0	12.0	2.0	12.0	2.634	40
6	1.0	2.5	15.0	2.5	15.0	2.634	40
7	0.75	1.5	9.0	2.0	12.0	4.116	40
8	0.75	1.5	9.0	2.0	12.0	2.634	120
9	0.8	1.5	9.0	2.5	15.0	2.634	186
10	0.6	2.0	12.0	2.5	15.0	2.634	198

Tabla 2-1: Condiciones Iniciales.

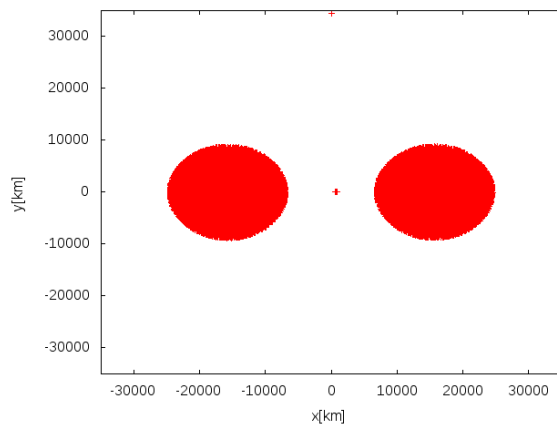
La figura 2-3 muestra en general la forma de las condiciones iniciales a utilizar.



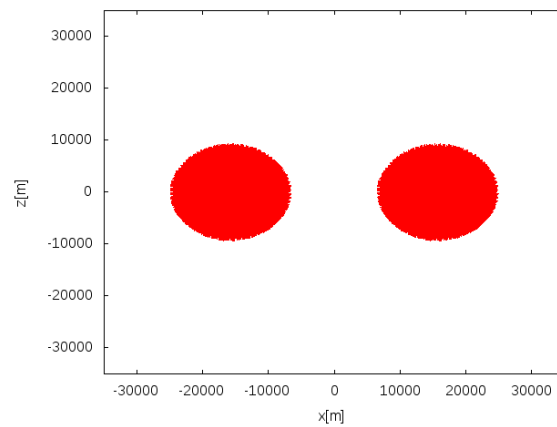
(a) Malla esférica inicial.



(b) Estrella relajada a equilibrio hidrostático.



(c) Se coloca la otra estrella a 3.5 veces el radio de la más masiva.



(d) Plano xz. Condiciones iniciales.

Figura 2-3: La figura (a) muestra la estrella esférica que se construye con  $N$  puntos. La figura (b), es la estrella después de llevarla a equilibrio hidrostático y en la figura (c), se coloca la otra estrella (también relajada) a 3.5 veces el radio de la estrella más masiva para comenzar la simulación dinámica y la figura (d) muestra las condiciones iniciales en el plano xz.

# Capítulo 3

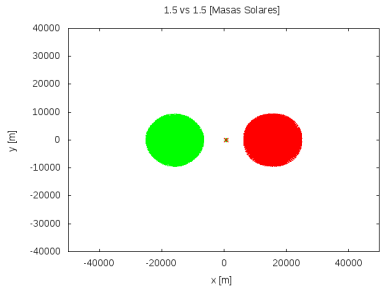
## Resultados

### 3.1. Simulación Dinámica

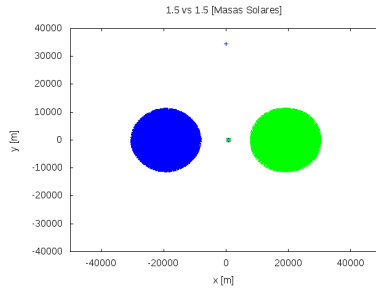
A continuación se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones. Para una comparación más ágil de los resultados se separan los casos 1 - 6 de los casos 7 - 10 ya que para los primeros, la evolución es similar. Se muestran figuras que representan las etapas importantes del sistema: La configuración inicial, el momento en el que el o los brazos ya son claramente visibles, un poco de la evolución de los mismos y la configuración final. Además se muestran las amplitudes  $h_{\times}$  y  $h_{+}$ , la luminosidad de las ondas gravitacionales, la trayectoria del centro de masa de las estrellas, la luminosidad total integrada de las ondas gravitacionales y la eficiencia de emisión de las mismas.

En el **Apéndice 5.1** se muestran 18 gráficas de la evolución dinámica para cada sistema en la cuáles se puede observar con mayor detalle la evolución, es decir, el acercamiento de las estrellas, la elongación, la aparición de brazos su expansión y en los casos 4, 7, 8, 9 y 10 se presenta también un acercamiento al objeto central resultante.

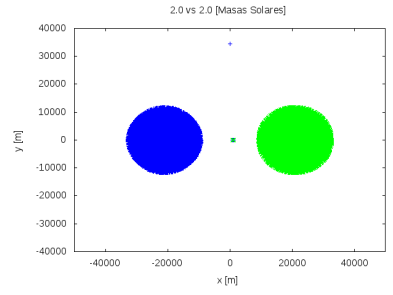
Dado que se pueden identificar qué puntos corresponden a qué estrella se grafica cada una de un color diferente para observar mejor su evolución y un color distinto para indicar la masa que sale eyectada. En la figura 3-1 se muestran las configuraciones iniciales para todos los casos.



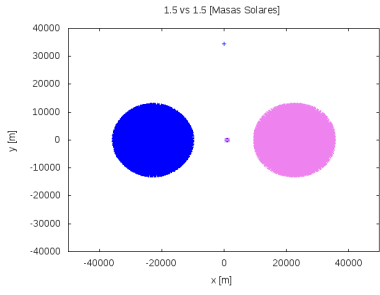
(a) Configuración inicial caso 1.



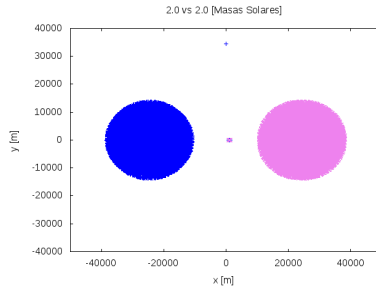
(b) Configuración inicial caso 2



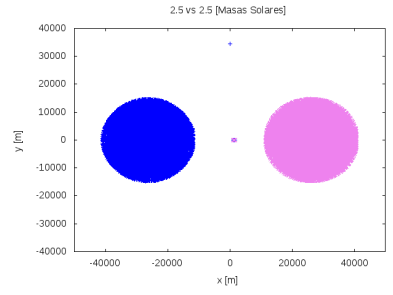
(c) Configuración inicial caso 3.



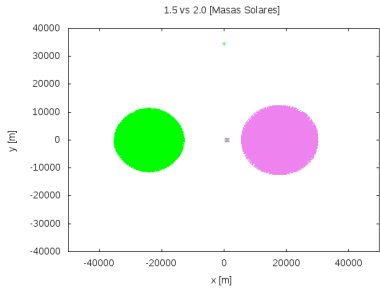
(d) Configuración inicial caso 4.



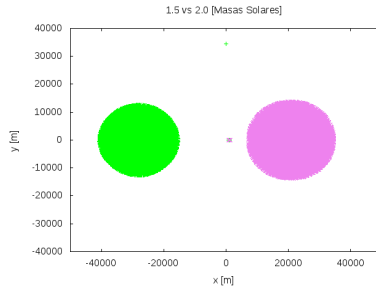
(e) Configuración inicial caso 5.



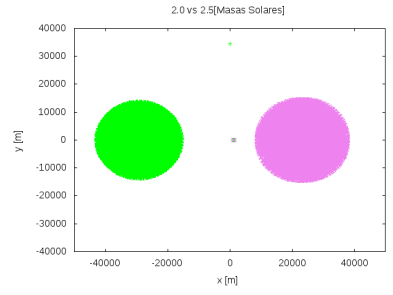
(f) Configuración inicial caso 6.



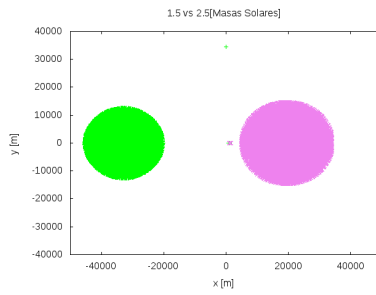
(g) Configuración inicial caso 7.



(h) Configuración inicial caso 8



(i) Configuración inicial caso 9.



(j) Configuración inicial caso 10

Figura 3-1: Configuraciones iniciales para todos los casos. Todos los casos comienzan con la misma separación entre estrellas (3.5 veces el radio de la estrella más masiva) y lo único que puede observarse en las gráficas son los cambios de tamaño de las estrellas.

### 3.1.1. Casos 1 a 6 con $q = 1$ .

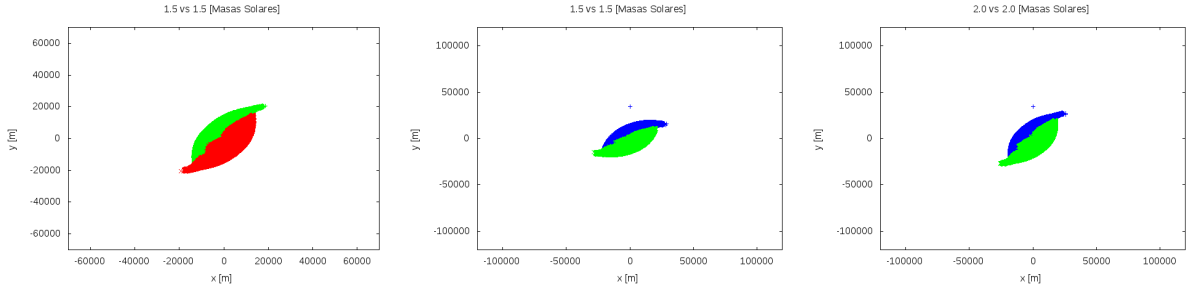
Se puede ver de las figuras 3-2 y 3-3 que la evolución dinámica es muy parecida, las estrellas comienzan a rotar alrededor del centro de masas mientras se acercan, entran en contacto y de cada una de las estrellas sale un brazo que comienza a expandirse. La materia que sale eyectada de ellos se muestra en un color diferente a las estrellas. Al tiempo  $t_{ff} = 30$ , los brazos ya se notan y es la gráfica que se muestra para todos los casos con  $q = 1$ . El objeto central queda rotando en el centro y tiene una forma pronunciada de elipsoide (ver Apéndice 5.1). Las trayectorias que van describiendo los centros de masas de las estrellas mientras se acercan son espirales simétricas y centradas en el origen. Como el caso 4 se dejó evolucionar por más tiempo ( $80 t_{ff}$ ) los brazos alcanzan a acomodarse en un anillo al rededor del objeto central (ver figura 3-3 (g)) sin embargo la materia que sale expulsada se atribuye al valor utilizado para  $\rho_0$  ya que el valor de la misma prácticamente no cambia después  $\sim 40 t_{ff}$ .

En la tabla 3-1 se muestran las características de las estrellas en estos casos y su tiempo de evolución.

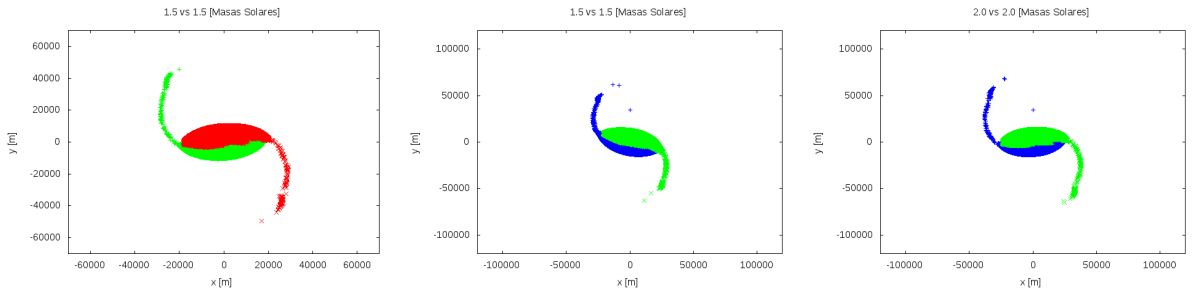
Caso	$M_{Estrella1} = M_{Estrella2}$ [ $M_{\odot}$ ]	$R_{Estrella1} = R_{Estrella2}$ [Km]	$\rho_0$ [ $10^{14} \text{g cm}^{-3}$ ]	$t_{evolución}$ [ $t_{ff}$ ]
1	1.5	9.0	7.318	40
2	1.5	9.0	4.116	40
3	2.0	12.0	4.116	40
4	1.5	9.0	2.634	80
5	2.0	12.0	2.634	40
6	2.5	15.0	2.634	40

Tabla 3-1: Condiciones iniciales para casos  $q \neq 1$ .

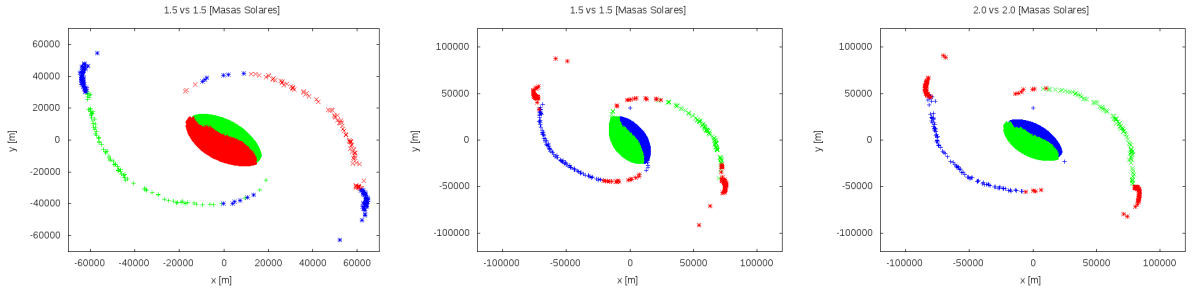
En las figuras 3-4 y 3-5 se muestran las amplitudes  $h_{\times}$  y  $h_{+}$ , la luminosidad de ondas gravitacionales, la luminosidad total integrada y la eficiencia. Se puede ver que la luminosidad de las ondas gravitacionales es del orden de  $10^{48}$  J/s, lo cuál representa una energía de varios ordenes de magnitud mayor a la de una supernova ( $\sim 10^{44}$ J).



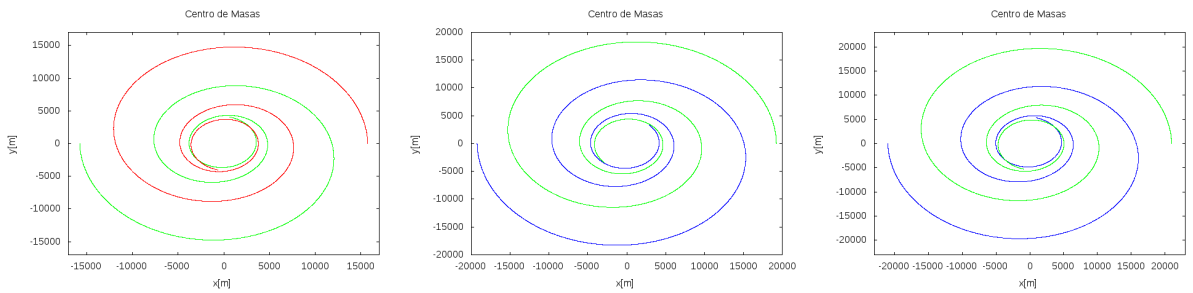
(a) Evolución del sistema a  $30t_{ff}$  caso 1 (b) Evolución del sistema a  $30t_{ff}$  caso 2 (c) Evolución del sistema a  $30t_{ff}$  caso 3.



(d) Evolución del sistema a  $35t_{ff}$  caso 1. (e) Evolución del sistema a  $35t_{ff}$  caso 2. (f) Evolución del sistema a  $35t_{ff}$  caso 3.

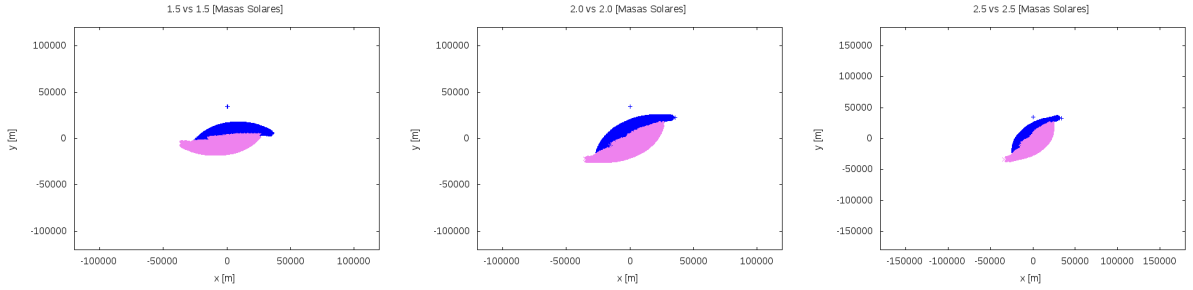


(g) Evolución del sistema a  $40t_{ff}$  caso 1. (h) Evolución del sistema a  $40t_{ff}$  caso 2. (i) Evolución del sistema a  $40t_{ff}$  caso 3.

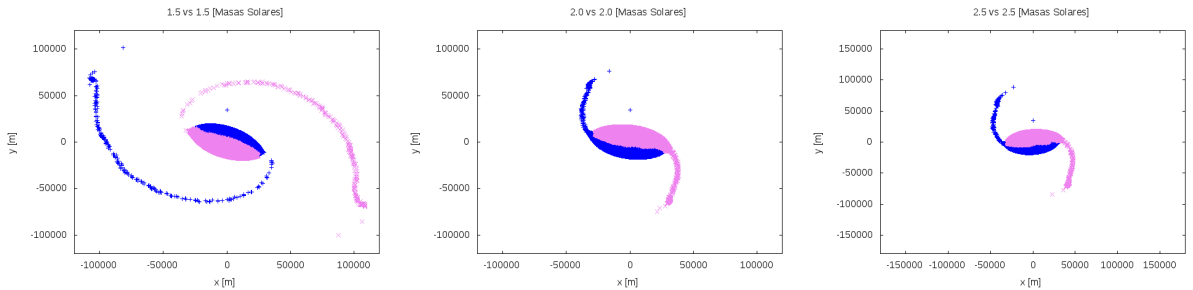


(j) Trayectoria del Centro de Masas caso 1. (k) Trayectoria del Centro de Masa caso 1. (l) Trayectoria del Centro de Masa caso 3.

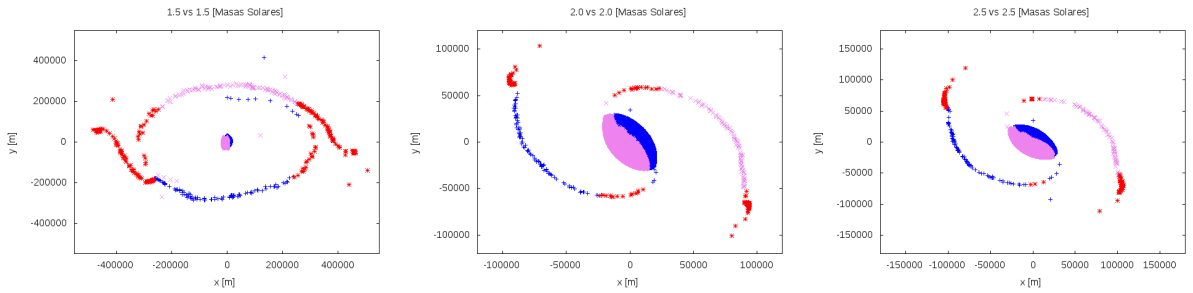
Figura 3-2: Evolución del sistema y trayectoria del centro de masas. Caso 1: Estrella 1 en verde, Estrella 2 en rojo, materia eyectada en azul. Caso 2 y 3: Estrella 1 en azul, Estrella 2 en verde, materia eyectada en rojo.



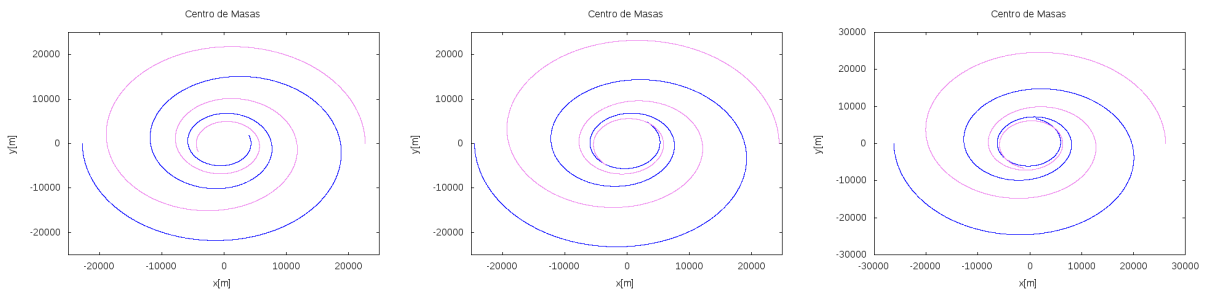
(a) Evolución del sistema a  $30t_{ff}$  caso 4. (b) Evolución del sistema a  $30t_{ff}$  caso 5. (c) Evolución del sistema a  $30t_{ff}$  caso 6.



(d) Evolución del sistema a  $42t_{ff}$  caso 4. (e) Evolución del sistema a  $35t_{ff}$  caso 5. (f) Evolución del sistema a  $35t_{ff}$  caso 6.



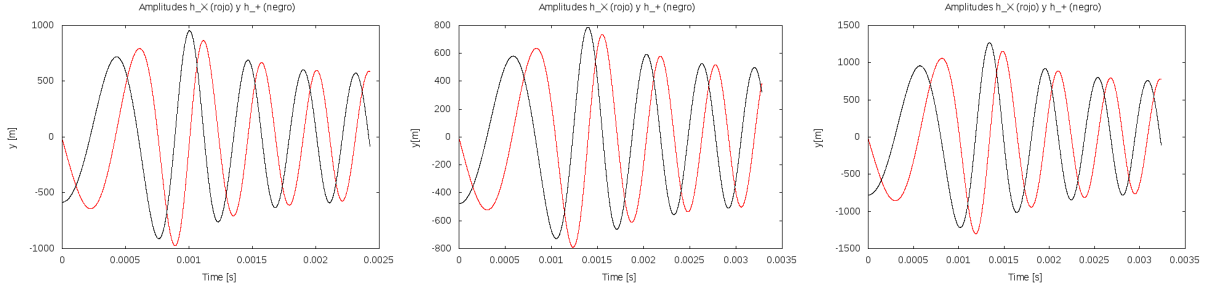
(g) Evolución del sistema a  $80t_{ff}$  caso 4. (h) Evolución del sistema a  $40t_{ff}$  caso 5. (i) Evolución del sistema a  $40t_{ff}$  caso 6.



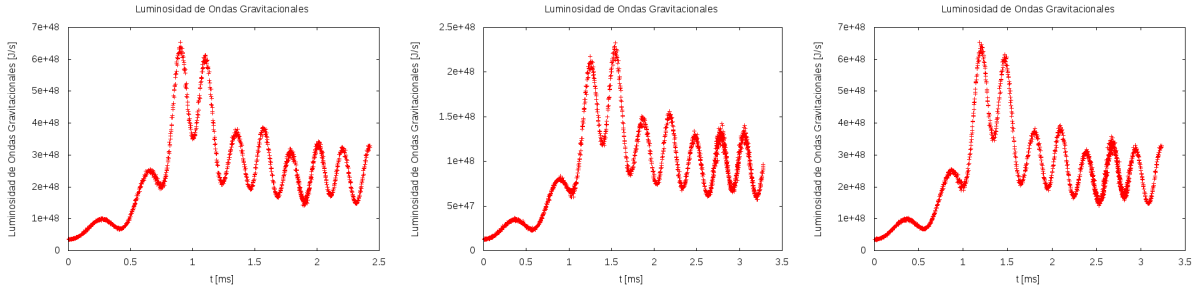
(j) Trayectoria del Centro de Masa caso 4. (k) Trayectoria del Centro de Masa caso 5. (l) Trayectoria del Centro de Masa caso 6.

Figura 3-3: Evolución del sistema. Caso 4, 5 y 6: Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado, materia expulsada en rojo.

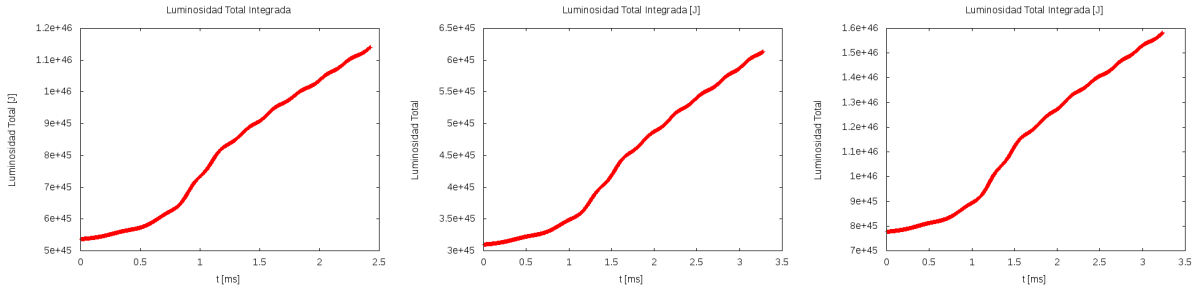




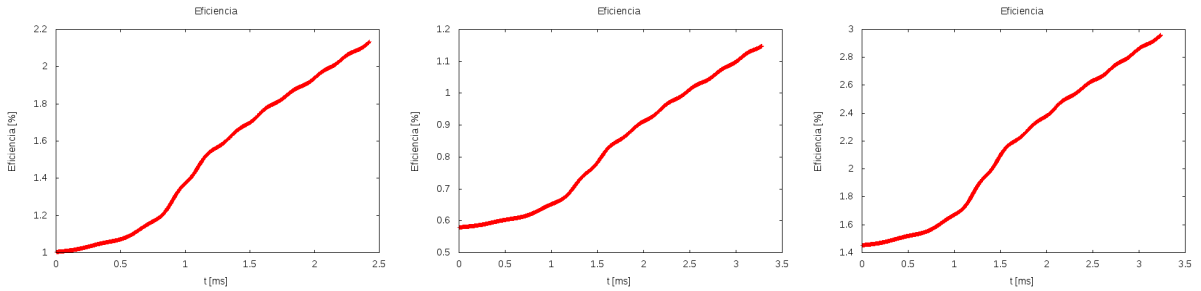
(a) Amplitudes  $h_x$  (rojo) y  $h_+$  (negro) caso 1. (b) Amplitudes  $h_x$  (rojo) y  $h_+$  (negro) caso 2. (c) Amplitudes  $h_x$  (rojo) y  $h_+$  (negro) caso 3.



(d) Luminosidad de Ondas Gravitacionales (J/s) vs tiempo (ms) caso 1. (e) Luminosidad de Ondas Gravitacionales (J/s) vs tiempo (ms) caso 2. (f) Luminosidad de Ondas Gravitacionales (J/s) vs tiempo (ms) caso 3.

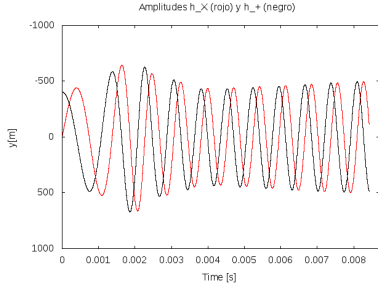


(g) Luminosidad Total Integrada caso 1. (h) Luminosidad Total Integrada caso 2. (i) Luminosidad Total Integrada caso 3.

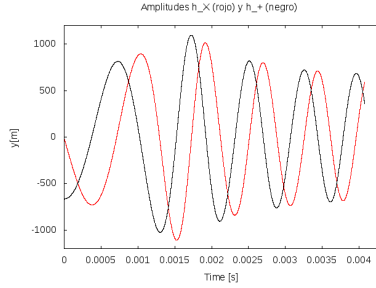


(j) Eficiencia caso 1. (k) Eficiencia caso 2. (l) Eficiencia caso 3.

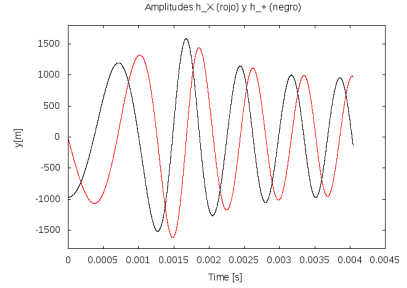
Figura 3-4: Amplitudes  $h_x$  (rojo) y  $h_+$  (negro), Luminosidad de Ondas Gravitacionales, Luminosidad Total Integrada y Eficiencia, casos 1 a 3.



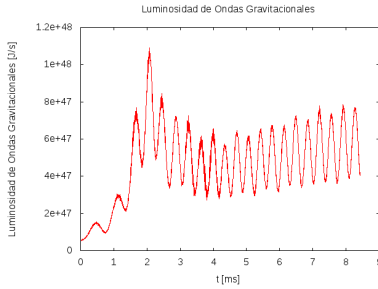
(a) Amplitudes  $h_x$  (rojo) y  $h_+$  (negro) caso 4.



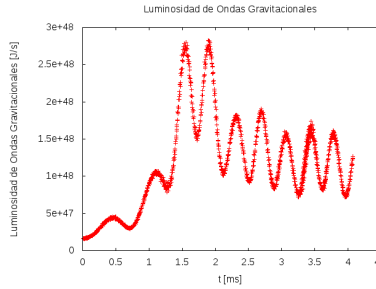
(b) Amplitudes  $h_x$  (rojo) y  $h_+$  (negro) caso 5.



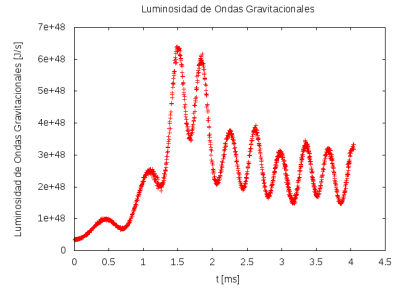
(c) Amplitudes  $h_x$  (rojo) y  $h_+$  (negro) caso 6.



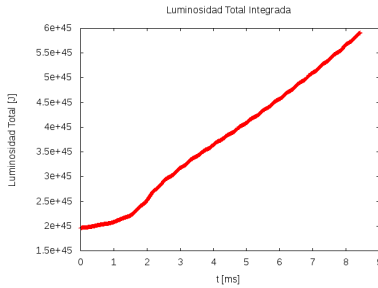
(d) Luminosidad de Ondas Gravitacionales (J/s) vs tiempo (ms) caso 4.



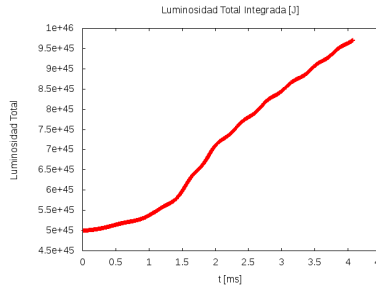
(e) Luminosidad de Ondas Gravitacionales (J/s) vs tiempo (ms) caso 5.



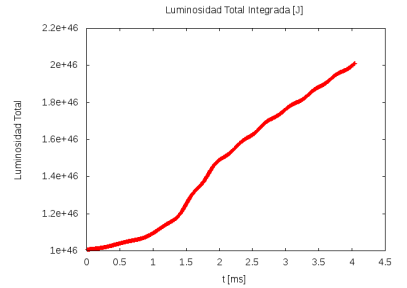
(f) Luminosidad de Ondas Gravitacionales (J/s) vs tiempo (ms) caso 6.



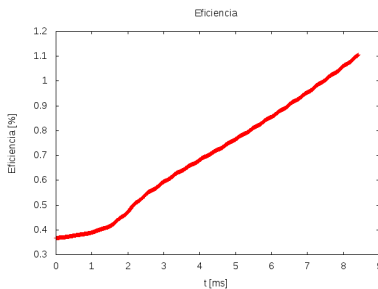
(g) Luminosidad Total Integrada caso 4.



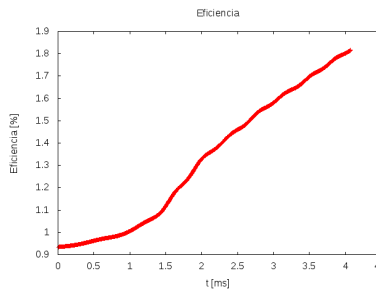
(h) Luminosidad Total Integrada caso 5.



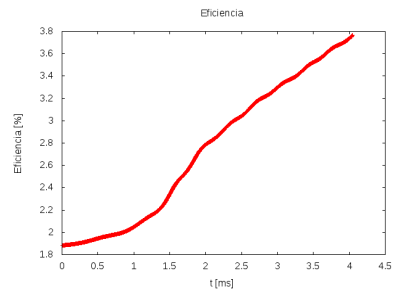
(i) Luminosidad Total Integrada caso 6.



(j) Eficiencia caso 4.



(k) Eficiencia caso 5.



(l) Eficiencia caso 6.

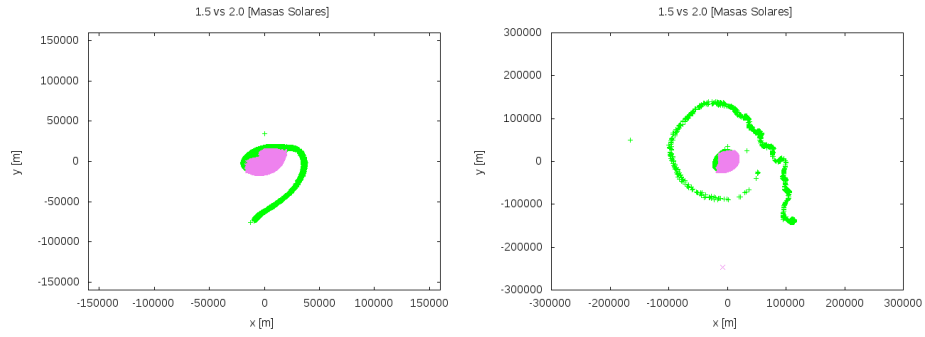
Figura 3-5: Amplitudes  $h_x$  (rojo) y  $h_+$  (negro), Luminosidad de Ondas Gravitacionales, Luminosidad Total Integrada y Eficiencia, casos 4 a 6.

### 3.2. Casos 7 a 10 con $q \neq 1$ .

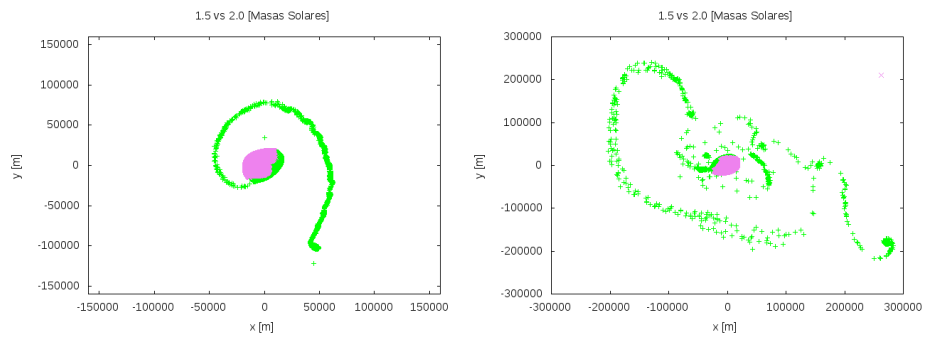
Para los casos con  $q \neq 1$  se forma únicamente 1 brazo con material proveniente de la estrella menos masiva y en los casos 8, 9 y 10, una parte del brazo vuelve a caer al objeto central, en el caso 10 (figura 3-7 inciso f) se puede observar que el brazo se desintegra totalmente y su materia queda orbitando el objeto central.

Las trayectorias del centro de masa son espirales que se van desplazando (figura 3-6 y 3-7), la trayectoria de la estrella menos masiva se ve especialmente afectada por el choque con la estrella grande pero la trayectoria de la estrella más masiva también se desplaza un poco del origen de coordenadas. Este efecto se puede ver en las imagenes que muestran un acercamiento al objeto central final porque se observa que se mueve del origen de coordenadas, en los casos  $q \neq 1$  éste se queda en el origen de coordenadas (ver Apéndice 5.1).

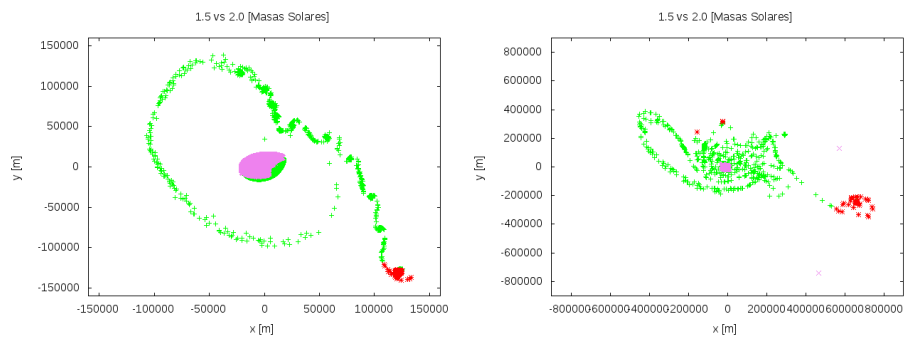
En todos los casos se observa que la luminosidad en ondas gravitacionales es baja al principio y alcanza su máximo cuando ocurre la colisión para después volver a bajar debido a que el sistema se está estabilizando, sin embargo salvo en el caso 10, la luminosidad parece ir incrementando. Para todos los casos, la luminosidad es del orden de  $10^{48}$  J/s, esto es varios ordenes de magnitud por encima de la luminosidad de una supernova que es del orden de  $10^{44}$  J/s.



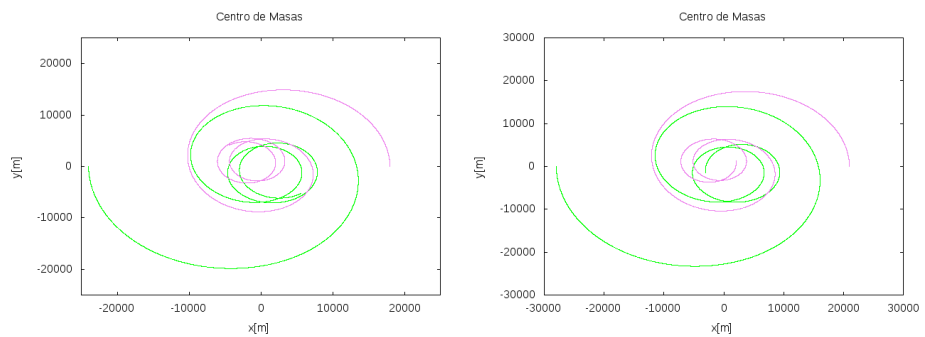
(a) Evolución del sistema a  $24t_{ff}$  caso 7 (b) Evolución del sistema a  $36t_{ff}$  caso 8



(c) Evolución del sistema a  $30t_{ff}$  caso 7. (d) Evolución del sistema a  $57t_{ff}$  caso 8.

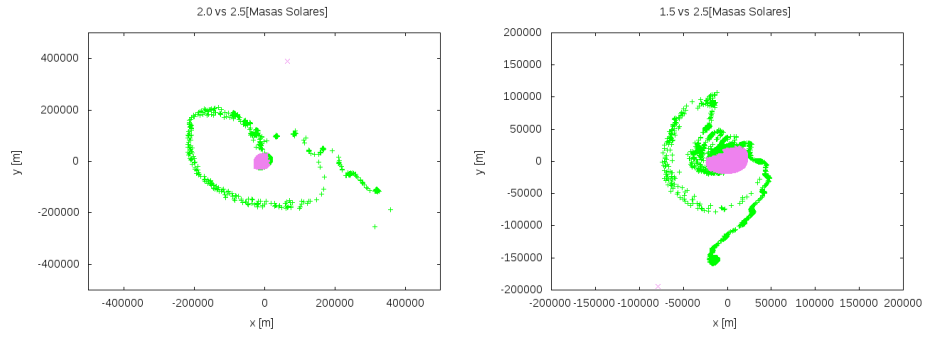


(e) Evolución del sistema a  $40t_{ff}$  caso 7. (f) Evolución del sistema a  $120t_{ff}$  caso 8.

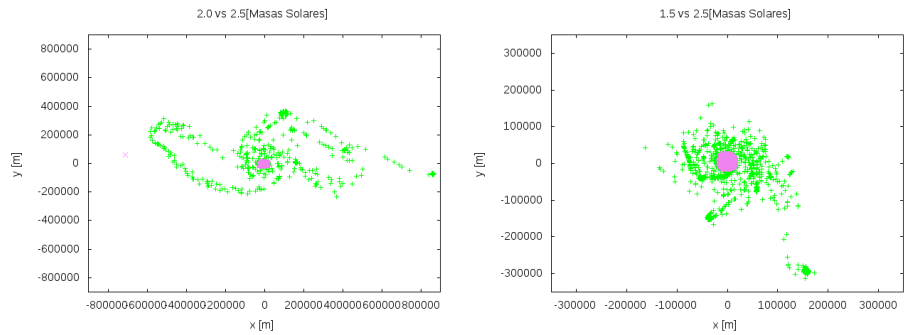


(g) Trayectoria del Centro de Masas caso 7. (h) Trayectoria del Centro de Masa caso 8.

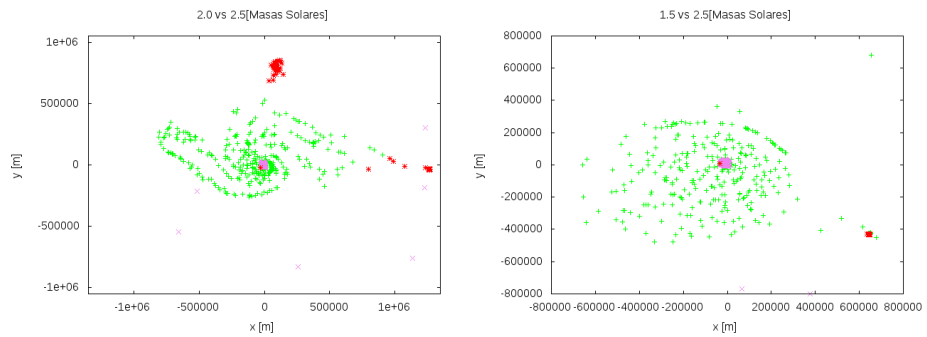
Figura 3-6: Evolución del sistema. Casos 7 y 8. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado, materia expulsada en rojo.



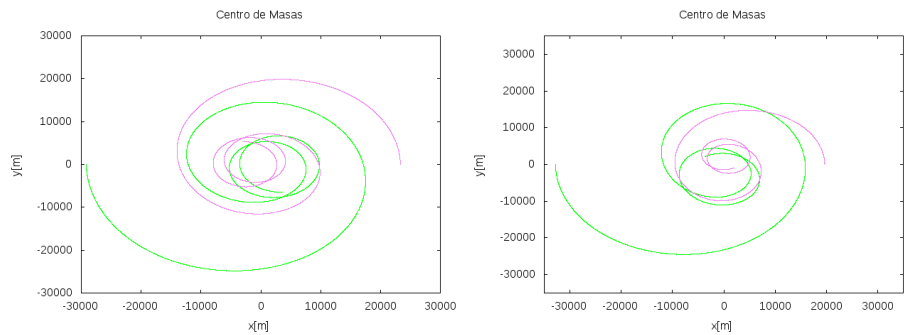
(a) Evolución del sistema a  $54t_{ff}$  caso 9 (b) Evolución del sistema a  $30t_{ff}$  caso 10



(c) Evolución del sistema a  $126t_{ff}$  caso 9. (d) Evolución del sistema a  $60t_{ff}$  caso 10.

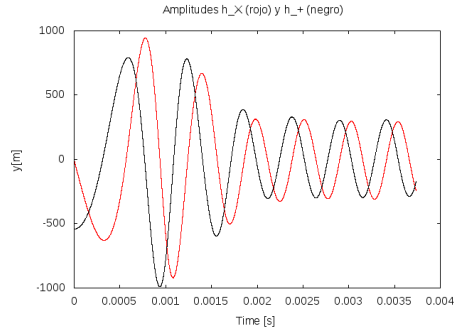


(e) Evolución del sistema a  $186t_{ff}$  caso 9. (f) Evolución del sistema a  $198t_{ff}$  caso 10.

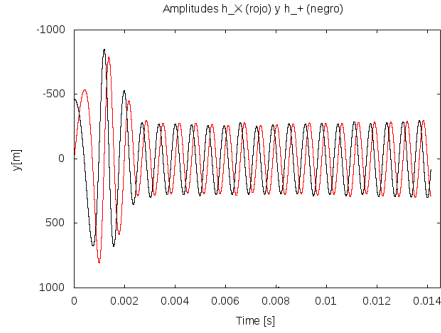


(g) Trayectoria del Centro de Masas caso 9. (h) Trayectoria del Centro de Masa caso 10.

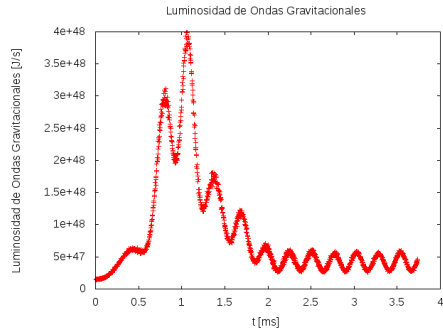
Figura 3-7: Evolución del sistema. Casos 9 y 10. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado, materia expulsada en rojo.



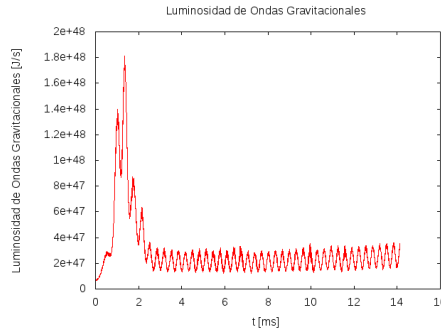
(a) Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro) caso 7.



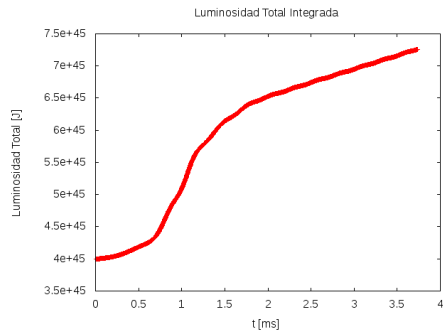
(b) Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro) caso 8.



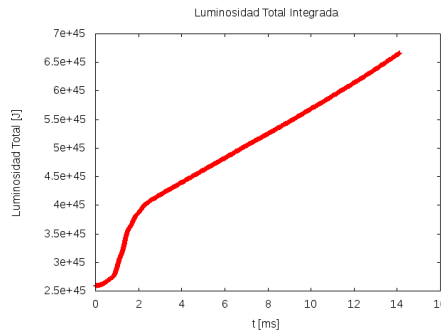
(c) Luminosidad de Ondas Gravitacionales (J/s) vs tiempo (ms) caso 7.



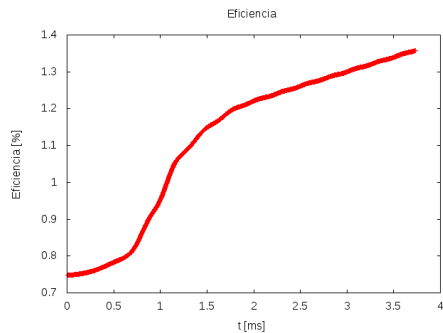
(d) Luminosidad de Ondas Gravitacionales (J/s) vs tiempo (ms) caso 8.



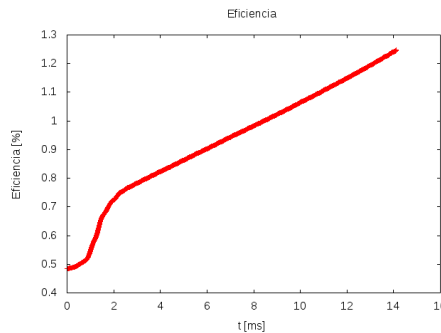
(e) Luminosidad Total Integrada caso 7.



(f) Luminosidad Total Integrada caso 8.

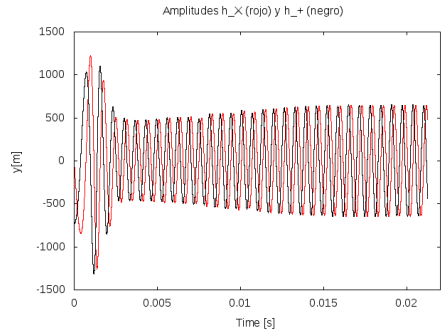


(g) Eficiencia caso 7.

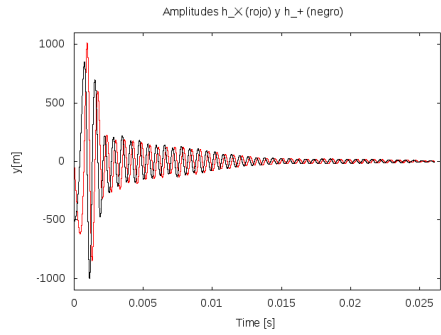


(h) Eficiencia caso 8.

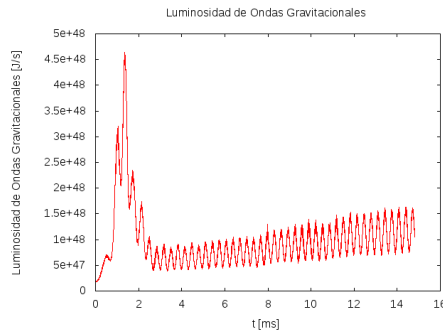
73  
 Figura 3-8: Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro), Luminosidad de Ondas Gravitacionales, Luminosidad Total Integrada y Eficiencia, casos 1 a 3.



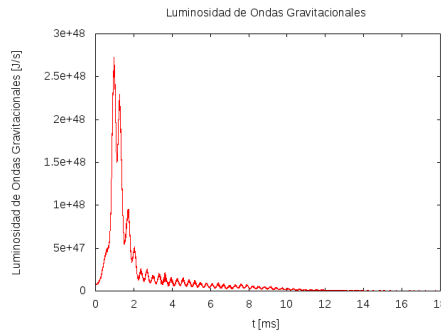
(a) Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro) caso 9.



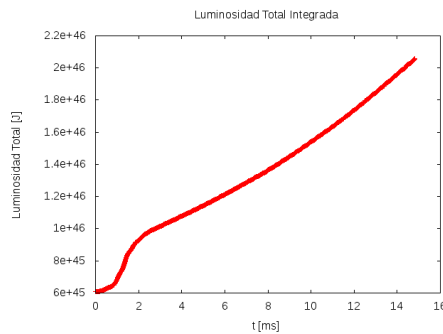
(b) Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro) caso 10.



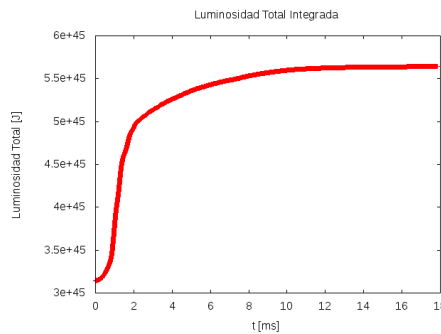
(c) Luminosidad de Ondas Gravitacionales (J/s) vs tiempo (ms) caso 9.



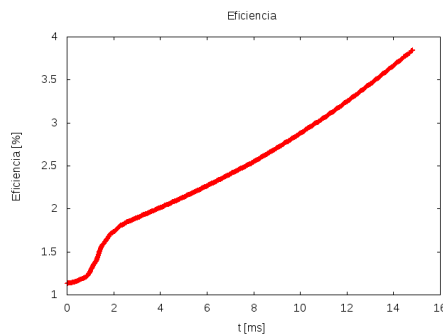
(d) Luminosidad de Ondas Gravitacionales (J/s) vs tiempo (ms) caso 10.



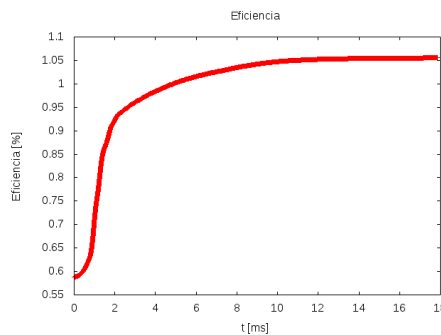
(e) Luminosidad Total Integrada caso 9.



(f) Luminosidad Total Integrada caso 10.



(g) Eficiencia caso 9.



(h) Eficiencia caso 10.

74  
 Figura 3-9: Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro), Luminosidad de Ondas Gravitacionales, Luminosidad Total Integrada y Eficiencia, casos 1 a 3.

### 3.3. Comparación de evolución Dinámica

En esta parte, se comparan la evolución dinámica de los sistemas, es decir, cómo se van fusionando las estrellas, cómo se forman los brazos y qué tanta materia de quark sale expulsada.

Se muestran los casos separados para  $q = 1$  y  $q \neq 1$ . Se obtiene la masa que se encuentra en los brazos, la que forma el objeto central y la masa eyectada.

#### 3.3.1. Casos con $q = 1$ .

En la tabla 3-2 se observa que para estrellas con iguales características la cantidad de materia eyectada y la de los brazos crece conforme el valor de  $\rho_0$  decrece, esto es de esperarse ya que es más difícil deformar una estrella conforme más densa sea y la mayor parte de la materia se quedará en el objeto central.

El caso 4, es el que más eyecta materia; este sistema se dejó evolucionar durante  $80 t_{ff}$  para ver cómo evolucionaban los brazos sin embargo, se verificó que la materia eyectada no fuera creciendo conforme pasaba el tiempo, la diferencia entre la materia eyectada a  $40 t_{ff}$  y a  $80 t_{ff}$  es despreciable por lo que se puede concluir que la materia eyectada ya no cambia con el tiempo y la diferencia en la cantidad de materia eyectada se puede atribuir a que en este caso se utilizó  $\rho_{0_3}$  el cuál corresponde al valor más pequeño de los valores considerados.

Las estrellas (relajadas a equilibrio hidrostático) comienzan a rotar entorno al centro de masas que en estos casos coincide con el origen de coordenadas. Éstas rotan de manera síncrona, es decir rotan viéndose siempre la misma cara y es esta parte de la estrella la primera que se deforma debido a la presencia de la otra estrella. El extremo que está frente a la estrella compañera comienza a elongarse dando a la estrella una forma de gota, estos extremos se tocan y siguen estirándose hasta formar un elipsoide mientras que el material en el otro extremo de la estrella adquiere la energía suficiente como para comenzar a separarse de la misma y comienza a formarse un brazos de cada una de las estrellas, éstos se van separando poco a poco.



Algo de este material en los brazos tendrá la energía suficiente para escapar la atracción gravitacional del objeto que queda en el centro.

En el caso 2, los brazos no se separan del objeto central; el que los brazos se separen o no, depende del tiempo que se deje evolucionar el sistema ya que en todos los casos hay materia que escapa a la gravedad generada por el objeto central.

Se espera que todos los casos evolucionen conforme al caso 4, es decir, que los brazos sigan expandiéndose hasta formar un anillo que rodea el objeto central y que la materia que escapa al objeto central, lo haga de forma simétrica. El objeto central queda rotando pero centrado en el origen de coordenadas.

En la figura 3-10 se muestran las configuraciones finales para estos casos, la configuración y evolución espacial es siempre similar se observan dos brazos simétricos. Se puede ver de dónde proviene la materia que sale eyectada (materia de color distinto a las estrellas) y se tiene en todos los casos una buena correspondencia con la configuración final del caso 4, es decir, la materia que sale eyectada en todos los casos corresponde a materia que se encuentra en los extremos de los brazos y a la región en la que terminan los brazos (la parte más cercana al objeto central).

Casos q = 1	M [ $M_{\odot}$ ]	R [Km]	$M_{eyectada}$ [ $M_{\odot}$ ]	$M_{brazos}$ [ $M_{\odot}$ ]	$M_{ObjetoCentral}$ [ $M_{\odot}$ ]	$\rho_0$
1	1.5	9.0	0.0086	0.0235	2.9764	$\rho_{0_1}$
2	1.5	9.0	0.0128	0.0275	2.9724	$\rho_{0_2}$
4	1.5	9.0	0.0264	0.0452	2.9547	$\rho_{0_3}$
3	2.0	12.0	0.0129	0.0330	3.9669	$\rho_{0_2}$
5	2.0	12.0	0.0163	0.0381	3.9618	$\rho_{0_3}$
6	2.5	15.0	0.0149	0.0398	4.9601	$\rho_{0_3}$

Tabla 3-2: Casos con q=1.  $M = M_{Estrella1} = M_{Estrella2}$ ,  $R = R_{Estrella1} = R_{Estrella2}$ ,  $\rho_{0_1}=7.318 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$ ,  $\rho_{0_2}=4.116 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$ ,  $\rho_{0_3}=2.634 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$ . Evolución durante  $40 t_{ff}$  para todos los casos con excepción del 4 que evolucionó durante  $80 t_{ff}$ . Las cantidades  $M[M_{\odot}]$  y  $R[\text{Km}]$  se refieren a los valores de las estrellas al inicio de la simulación.

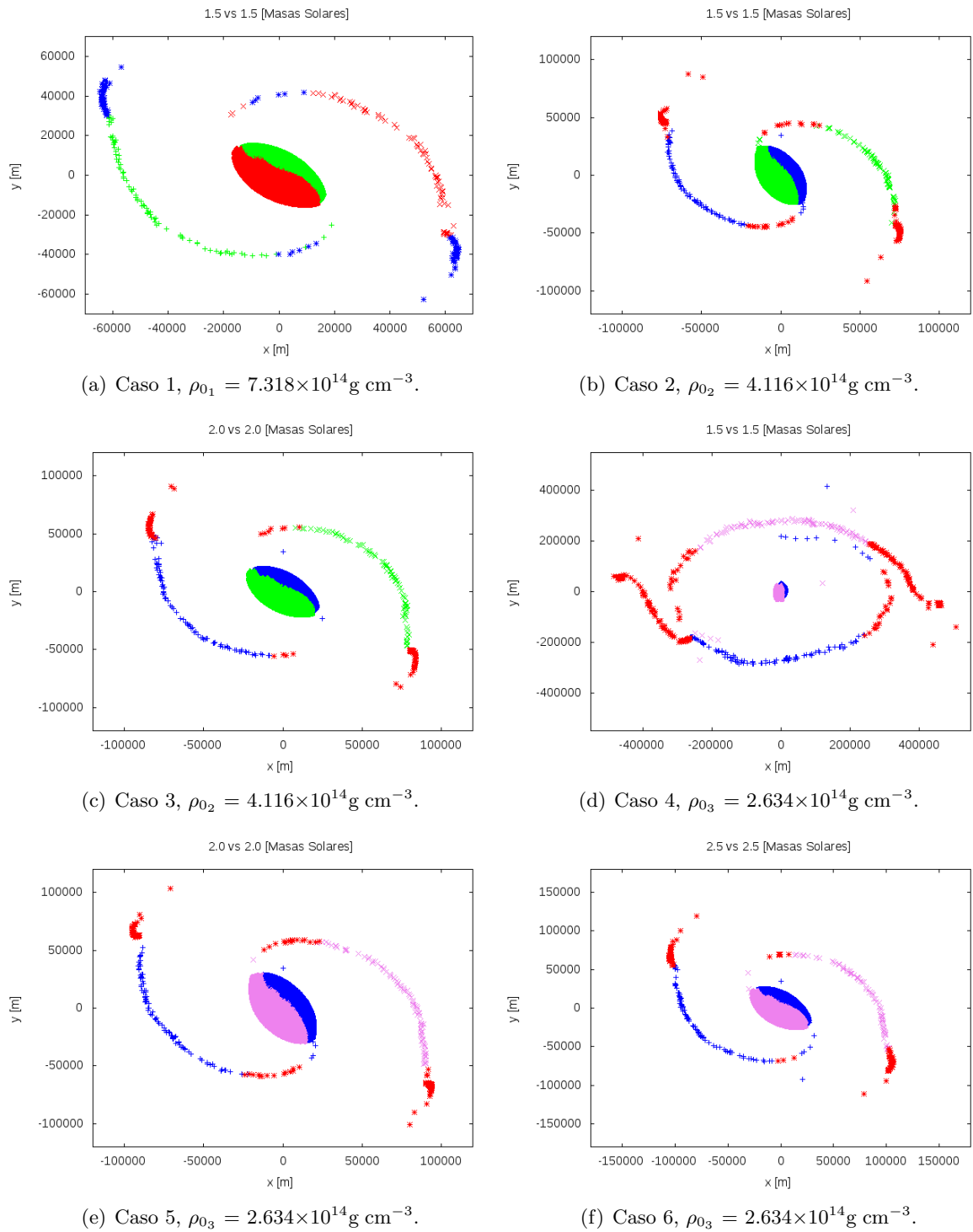


Figura 3-10: Configuración final de casos con  $q=1$ . Evolución durante  $40 t_{ff}$  para todos los casos con excepción del caso 4 en el que la evolución fue de  $80 t_{ff}$ .

### 3.3.2. Casos con $q \neq 1$ .

En la tabla 3-3 se muestran los valores para la masa eyectada, la masa en los brazos y la masa del objeto central para los casos con  $q \neq 1$ . Los casos 7 y 8 tienen estrellas de iguales características pero valores de  $\rho_0$  distintos y es el caso 8 el que eyecta más masa, lo cuál concuerda con los casos pasados; mientras el valor de  $\rho_0$  decrece, el sistema eyecta más masa.

Casos	q	$M_{Estrella1}$ [ $M_{\odot}$ ]	$R_{Estrella1}$ [km]	$M_{Estrella2}$ [ $M_{\odot}$ ]	$R_{Estrella2}$ [Km]	$M_{eyectada}$ [ $M_{\odot}$ ]	$M_{brazos}$ [ $M_{\odot}$ ]	$M_{ObjetoCentral}$ [ $M_{\odot}$ ]	$\rho_0$
7	0.75	1.5	9.0	2.0	12.0	0.0257	0.1330	3.3669	$\rho_{0_2}$
8	0.75	1.5	9.0	2.0	12.0	0.0372	0.1062	3.3937	$\rho_{0_3}$
9	0.8	2.0	12.0	2.5	15.0	0.0392	0.1112	4.3887	$\rho_{0_3}$
10	0.6	1.5	9.0	2.5	15.0	0.0127	0.5889	3.4110	$\rho_{0_3}$

Tabla 3-3: Casos con  $q \neq 1$ .  $\rho_{0_2} = 4.116 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$ ,  $\rho_{0_3} = 2.634 \times 10^{14} \text{g cm}^{-3}$ . Tiempo de evolución: caso 7 = 40  $t_{ff}$ , caso 8 = 120  $t_{ff}$ , caso 9 = 186  $t_{ff}$  y caso 10 = 198  $t_{ff}$ .

En estos casos la estrella de menor masa se destruye y la materia que sale eyectada es totalmente de esa estrella; el objeto central tiene materia de ambas estrellas y está más mezclado que en los casos con  $q=1$ , en estos el objeto central tenía casi la mitad de una estrella y la mitad de la otra.

El objeto que queda en el centro se mueve del origen de coordenadas; en las gráficas que siguen el centro de masas de las estrellas se observa que la trayectoria de la estrella menos masiva es la más afectada, sin embargo la estrella más masiva también sufre un cambio debido al choque y el objeto central queda rotando pero durante la evolución se desplaza del origen de coordenadas.

La evolución con  $q \neq 1$  también es similar para todos los casos, la estrella pequeña va formando un brazo que comienza a rodear al objeto central, mucho de ese material vuelve a caer al objeto central por lo que el brazo se deforma y se destruye, mucha materia que queda orbitando el objeto y una poca que sale eyectada.

Aunque el caso 7 evolucionó por menos tiempo, se observa la misma tendencia: un brazo

que rodea la el objeto central, se puede ver cómo hay materia que se comienza a acercarse de nuevo al objeto central y que puede llegar a caer en éste. Sale materia eyectada del extremo del brazo.

En el caso 8 se observa como el brazo se deforma, hay materia que vuelve a caer al objeto central y mucha queda orbitando cerca del objeto, una cantidad pequeña de materia de ésta región logra escapar, la mayor parte de la materia eyectada corresponde a la que se encuentra en el extremo (el más lejos del objeto central) del brazo y se puede observar que ésta queda rotando y forma un pequeño remolino.

En el caso 9 es lo mismo, se forma un brazo que es destruido pero algo de esa materia logra escapar (más materia que en el caso 8), también lo hace la que se encuentra en el extremo del brazo más lejano al objeto central. En estos casos, aunque el brazo se deforma, se observan ciertas estructuras en la configuración final a diferencia del caso 10.

En el caso 10 hay un poco más de media masa solar en lo que se ha llamado “los brazos”, que en este caso es toda la materia que no se encuentra en el objeto central sin embargo, no es el sistema que eyecta la mayor cantidad de materia. En este caso, la materia de los brazos alcanza una distribución un poco más homogénea, el brazo es destruído totalmente y no se alcanzan a formar estructuras como las que se observan en los demás casos.

En la tabla 3-4 se observa que el caso 8 es el que más materia extraña eyecta, seguido del caso 4 y que el caso 10 aunque es el que más materia tiene en los brazos, es uno de los que tiene menor cantidad de materia eyectada. La cantidad extraña de materia que puede escapar depende de qué tan violento es el choque y de qué tan masivo es el objeto central.

Los casos 1, 2 y 4 tienen en total  $3 M_{\odot}$  y lo que cambia es el valor de  $\rho_0$ , mientras este valor disminuye, la cantidad de materia extraña que forma al objeto central comparada con la masa total del sistema va disminuyendo, lo mismo se observa en los casos 3, 5 y 10; estos sistemas tienen una masa total de  $3 M_{\odot}$  y los últimos dos casos tienen  $\rho_0 = \rho_{0_3}$  mientras que el caso 3

tiene  $\rho_0 = \rho_{0_2}$ . Del caso 5 al 10 hay una gran diferencia entre el valor de la masa central y eso se debe únicamente a que las estrellas en un caso, tenían la misma masa y en el otro no, por lo que la colisión es más violenta en éste último y se desprende más materia extraña del objeto central. Los casos 7 y 8 tienen una masa total de  $3.5 M_{\odot}$  pero se puede ver que el valor para la masa en el objeto central es mayor en el caso 8 que tiene el valor más pequeño para la densidad  $\rho_0 = \rho_{0_3}$  pero es al mismo tiempo, como se mencionó anteriormente el sistema que más materia extraña eyecta.

El caso 9 tiene más materia extraña eyectada que el caso 10 a pesar de que la masa total del caso 9 es mayor que la del caso 10. Esto indica que las condiciones del caso 9 generan una colisión más violenta que las del caso 10, puede verse en las configuraciones finales (figura 3-11) que en el caso 10 hay una distribución de materia alrededor del objeto del centro bastante más uniforme que en el caso 9, en éste la materia no está nada uniforme. Ambos casos evolucionaron la misma cantidad de tiempo lo que indica que el caso 10 llega a un cierto equilibrio más rápidamente que el caso 9.

Las configuraciones finales en este caso son distintas que en los casos con  $q=1$ , ya que en estos todo parece indicar que al final la materia está acomodada en un anillo alrededor del objeto del centro, mientras que para los casos con  $q \neq 1$  la materia tiende a distribuirse casi uniformemente (aunque no simétricamente) alrededor del objeto central.

Casos	q	$M_{eyectada}/M_{Total}$	$M_{Brazos}/M_{Central}$	$M_{Central}/M_{Total}$
1	1	0.0029	0.0079	<b>0.9921</b>
2	1	0.0043	0.0093	0.9908
3	1	0.0032	0.0083	0.9917
4	1	0.0088	0.0153	0.9849
5	1	0.0041	0.0096	0.9905
6	1	0.0030	0.0080	0.9920
7	0.75	0.0074	0.0395	0.9620
<b>8</b>	<b>0.75</b>	<b>0.0106</b>	0.0313	0.9696
9	0.8	0.0087	0.0253	0.9753
<b>10</b>	<b>0.6</b>	0.0032	<b>0.1727</b>	0.8528

Tabla 3-4: Comparación entre la masa eyectada, masa total, masa en brazos y masa en objeto central para todos los casos. En negritas se señalan los valores máximos.

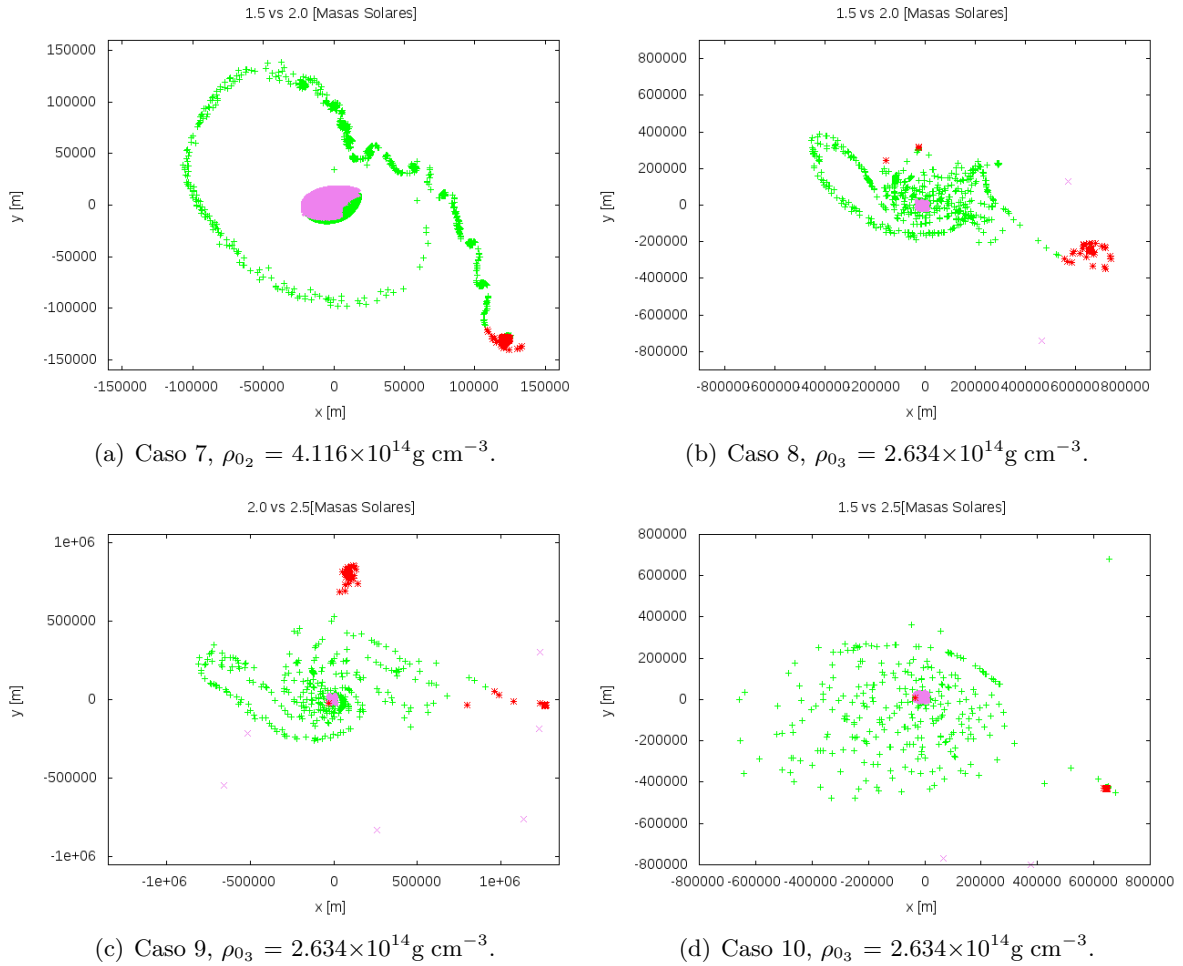


Figura 3-11: Configuración final de casos con  $q \neq 1$ . Tiempo de evolución: caso 7=40  $t_{ff}$ , caso 8=120  $t_{ff}$ , caso 9=186  $t_{ff}$  y caso 10 = 198  $t_{ff}$ .

### 3.4. Comparación de Radiación Gravitacional

A continuación se hace la comparación para los resultados de la emisión gravitacional, es decir, la luminosidad y las amplitudes  $h_+$  y  $h_\times$ , la luminosidad total integrada y la eficiencia de la emisión.

En las figuras 3-4, 3-5, 3-8 y 3-9 se muestran las amplitudes  $h_\times$  y  $h_+$  de las ondas gravitacionales así como su luminosidad. Se observa que la luminosidad al final de la simulación todavía es alta en 3-4 y 3-5, esto se debe a que el sistema está lejos del equilibrio, en los casos que se presentan en las figuras 3-8 y 3-9, la amplitud disminuye considerablemente al igual que la luminosidad después de alcanzar su máximo en el momento de la colisión, sin embargo en algunos casos se ve que la luminosidad va aumentando y hasta parece oscilar. Especialmente en el caso 10 puede verse que tanto las amplitudes como la luminosidad caen prácticamente a cero lo cuál indica que el tiempo que se ha dejado evolucionar el sistema es suficiente para que el objeto central llegue a un estado de equilibrio y la emisión de ondas gravitacionales sea mínima, en la figura 5-85 inciso f, se observa que la configuración final del objeto central se acerca mucho a una esfera. En los demás casos el objeto central tiene forma de elipsoide.

#### 3.4.1. Casos con $q = 1$ .

En la tabla 3-5 , se muestran los valores para la luminosidad máxima de ondas gravitacionales, el tiempo al cuál ocurre este máximo, el tiempo  $t_{total}$  en milisegundos que dura la simulación y el tiempo  $t_{rr=0}$  al cuál se apaga la reacción de radiación en el código; esto ocurre cuando la separación es 2 veces menor al radio de la estrella más grande. Se puede ver que la luminosidad después de alcanzar el máximo, oscila y la amplitud no parece disminuir, incluso la luminosidad total integrada va subiendo al igual que la eficiencia.

En todos los casos, la luminosidad es del orden de  $10^{48}$ . La luminosidad integrada es mayor a la energía de una supernova. Se puede ver en la tabla 3-5 que para los casos 1,3,5 y 6, la emisión máxima de ondas gravitacionales ocurre antes de que la reacción de radiación se apague, es decir, antes de que las estrellas estén separadas a menos de 2 veces el radio de la estrella

Caso	$L_{\text{máx}}$ [J/s]	$t_{L_{\text{máx}}}$ [ms]	$t_{\text{total}}$ [ms]	$t_{rr=0}$ [ms]
1	$6.5337 \times 10^{48}$	0.9012	2.4260	0.9741
2	$2.3297 \times 10^{48}$	1.5442	3.2786	1.4290
3	$6.4582 \times 10^{48}$	1.2040	3.2345	1.3016
4	$1.0912 \times 10^{48}$	2.0830	8.4240	2.0598
5	$2.7875 \times 10^{48}$	1.5343	4.0746	1.7410
6	$2.5544 \times 10^{48}$	1.1341	4.0436	1.6271

Tabla 3-5: Resultados para luminosidad máxima.

más grande mientras que para los casos 2 y 4, las estrellas deben estar más cerca para que la luminosidad alcance su máximo.

En la figura 3-4 y 3-5 se observan las amplitudes  $h_{\times}$  y  $h_{+}$  de las ondas gravitacionales en  $m$  y su luminosidad en  $J/s$ . Se observan al principio amplitudes y luminosidades bajas, después 2 picos máximos claramente definidos en los casos 1 y 2, es en ese momento en que las estrellas colisionan, después tanto las amplitudes como la luminosidad bajan de magnitud y parecieran oscilar con una amplitud más o menos constante, es más claro el descenso en la luminosidad, sin embargo en el caso 4, la luminosidad comienza a incrementar de nuevo y las amplitudes también aunque éstas parecen terminar con una amplitud constante. La luminosidad en los casos 1 y 2 sigue aumentando y en el caso 4, la luminosidad total integrada y la eficiencia van creciendo casi linealmente por lo que podría ser que la luminosidad haya alcanzado un valor constante.

Para los casos 3, 5 y 6 igualmente se observa un máximo en luminosidad que corresponde con el máximo en las amplitudes, la luminosidad parece oscilar después del máximo, la magnitud es menor pero no cae cero. La luminosidad total integrada indica que la luminosidad no ha alcanzado un valor constante sino que sigue creciendo, de igual manera la eficiencia de la emisión.



### 3.4.2. Casos con $q \neq 1$ .

En la tabla 3-6 , se muestran los valores para la luminosidad máxima de ondas gravitacionales, el tiempo al cuál ocurre este máximo, el tiempo  $t_{total}$  en milisegundos que dura la simulación y el tiempo  $t_{rr=0}$  al cuál se apaga la reacción de radiación en el código.

Caso	$L_{m\acute{a}x}$ [J/s]	$t_{L_{m\acute{a}x}}$ [ms]	$t_{total}$ [ms]	$t_{rr=0}$ [ms]
7	$1.8087 \times 10^{48}$	1.3603	3.7350	0.9135
8	$1.7099 \times 10^{48}$	1.3839	14.1232	1.1782
9	$3.0281 \times 10^{48}$	1.0271	4.5209	1.2265
10	$2.7274 \times 10^{48}$	0.9782	17.8668	0.9301

Tabla 3-6: Resultados para luminosidad máxima.

En todos los casos la luminosidad alcanza su máximo después de que las estrellas están más cerca que 2 veces el radio de la estrella más grande, es decir, la reacción de radiación se apaga antes de que aparezca el máximo en la luminosidad. El evento más luminoso es el causado por las condiciones para el caso 9, se observa de la figura 3-9 cómo la emisión alcanza rápidamente su máximo y cae considerablemente, sin embargo después comienza a subir un poco, lo mismo ocurre claramente en el caso 8 y aunque en las gráficas de las amplitudes y luminosidad (figura 3-8 para el caso 7 no se ve claramente que la luminosidad vaya creciendo, la luminosidad total integrada muestra que efectivamente sigue creciendo; no así el caso 10. La luminosidad y las amplitudes en este caso caen a cero, se observa que las amplitudes oscilan un poco pero se amortiguan hasta casi desvanecerse, en la figura 3-9 se observa que en el caso 9 la luminosidad total integrada va claramente aumentando mientras que para el caso 10, primero sube rápidamente y después parece alcanzar un valor constante.

Prácticamente en todos los casos, la luminosidad va subiendo con excepción del caso 10 en el que como dijimos antes, parece llegar a un valor constante. En cuanto a la forma de las amplitudes  $h_+$  y  $h_{\times}$ , ningún caso se ve tan amortiguado como el caso 10.

## Capítulo 4

# Conclusiones

En general puede observarse que para los casos con  $q = 1$  la evolución dinámica es muy parecida, las estrellas comienzan a acercarse, rápidamente entran en contacto y comienzan a formarse dos brazos simétricos de material, cada brazo sale de una estrella distinta. Se espera que el material que forma los brazos termine en un anillo alrededor del objeto central como se puede observar en el caso 4. Éste caso es el que más eyecta materia pero se debe a la combinación entre la masa de las estrellas y el valor de  $\rho_0$  y no a que el sistema evolucionó por más tiempo. El objeto central queda rotando en el centro y tiene una forma pronunciada de elipsoide. La evolución dinámica es completamente diferente para los casos con  $q = 1$  y los casos  $q \neq 1$  aún cuando el valor de  $q \sim 1$  (caso 9 con  $q = 0,8$ ), si las masas son distintas la estrella menos masiva es destruida por las fuerzas de marea y el material que escapa del sistema proviene de esta estrella.

Para los centros de masas de las estrellas, en los casos con  $q = 1$  se ven espirales simétricas y centradas en el origen, esto indica que ambas estrellas están girando alrededor del centro de masas que queda en el origen de coordenadas, pero para  $q \neq 1$  las espirales se van desplazando, la trayectoria de la estrella menos masiva se ve especialmente afectada por el choque con la estrella grande, pero la trayectoria de la estrella más masiva también se desplaza un poco del origen de coordenadas. Este efecto se puede ver en las imagenes que muestran un acercamiento al objeto central final 5.1, éste tiene también un movimiento de desplazamiento que lo mueve del origen de coordenadas.

En todos los casos se observa que la luminosidad en ondas gravitacionales es baja al principio y alcanza su máximo cuando ocurre la colisión para después volver a bajar aproximadamente un orden de magnitud debido a que el sistema se está estabilizando, sin embargo salvo en los casos 4,8 y 10 en el que al parecer tiende a un valor constante, la luminosidad parece ir incrementando. En los casos con  $q \neq 1$ , el objeto central tiene aparte de un movimiento de rotación, uno de traslación; el objeto central se mueve del centro de coordenadas, entonces al final existe otra componente en el movimiento que podría afectar la emisión de las ondas gravitacionales. En todos los casos la luminosidad que se obtiene ( $\sim 10^{48}$  J/s) es varios ordenes de magnitud mayor que la energía de una supernova ( $\sim 10^{44}$  J/s).

Especialmente en el caso 10 puede verse que tanto las amplitudes como la luminosidad caen prácticamente a cero lo cuál indica que el tiempo que se ha dejado evolucionar el sistema ( $198 t_{ff}$ ) es suficiente para que el objeto central llegue a un estado de equilibrio y la emisión de ondas gravitacionales cese, la configuración final del objeto central se acerca mucho a una esfera mientras que en todos los demás casos el objeto central tiene forma de elipsoide.

En todos los casos se observan al menos dos picos importantes en la luminosidad de ondas gravitacionales. Después de esto, la luminosidad baja, el caso 4 dado que evolucionó durante más tiempo permite ver que la luminosidad pareciera ser una emisión modulada. Se puede ver que después del máximo hay un valor mínimo y después comienza a subir de nuevo; las amplitudes parecen quedar con una amplitud constante. Se puede decir también que la emisión total integrada y la eficiencia tienen dos partes, la primera antes de la emisión máxima en luminosidad y la segunda después de la emisión máxima, se puede ver como al principio va subiendo lentamente para de pronto cambiar la pendiente y subir un poco más rápido cuando se da la luminosidad máxima y después la pendiente vuelve a cambiar indicando un crecimiento más lento, sin embargo la luminosidad total integrada sigue aumentando y pareciera oscilar un poco. En 4 y 8 se observa claramente como la luminosidad total integrada y la eficiencia van subiendo casi linealmente por lo que podría ser que la luminosidad es ya constante, en el caso 7 el crecimiento no es tan rápido y en el caso 10, tanto la luminosidad total integrada como la eficiencia parecen alcanzar un valor constante después de una rápida subida en magnitud. Hay

que tener en cuenta que la eficiencia no puede ser extrapolada en el tiempo, de ser así se llegaría a un 100 % lo cuál no es realista, pero sí sirve para observar estos cambios en la pendiente.

De las tablas 3-2, 3-3, 3-6, 3-5 y 3-4, se puede ver que para los casos con  $q = 1$ , la materia máxima eyectada es de  $0.0264 M_{\odot}$  (caso 4) y la mínima corresponde al caso 1 con  $0.0086 M_{\odot}$ , mientras que para los casos  $q \neq 1$ , la materia eyectada máxima es de  $0.0392 M_{\odot}$  en el caso 9 y la mínima de  $0.0127 M_{\odot}$  para el caso 10, entonces se tiene un rango de materia eyectada de  $0.0086$  a  $0.0392 M_{\odot}$ . Se consideran aquí 3 densidades y se observa que mientras más bajo sea el valor de la densidad más fácilmente el sistema pierde masa durante la colisión por lo tanto, el objeto central queda con menos masa.

# Capítulo 5

## Apéndice

### 5.1. Simulación Dinámica

- 5.1.1. Caso 1.  $q = 1$ ,  $M = 1.5 M_{\odot}$ ,  $R = 9.0 \text{ km}$ ,  $\rho_{0_1} = 7.318 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ .  
Tiempo de evolución =  $40 t_{ff}$

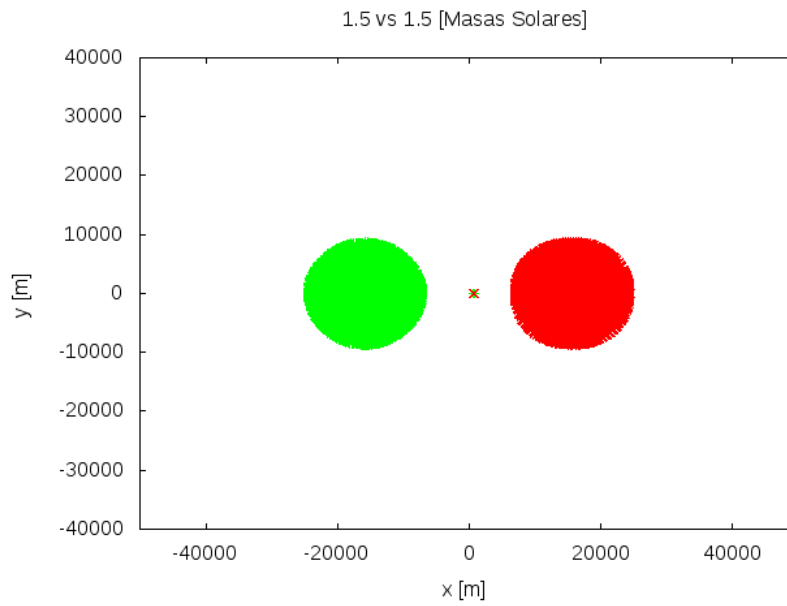
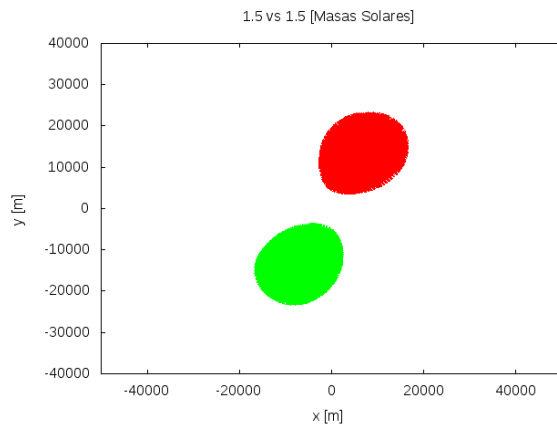
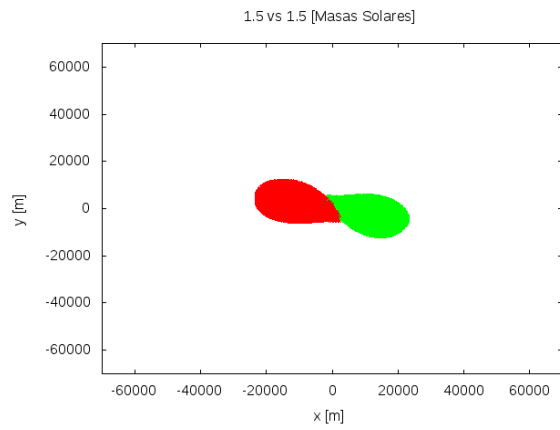


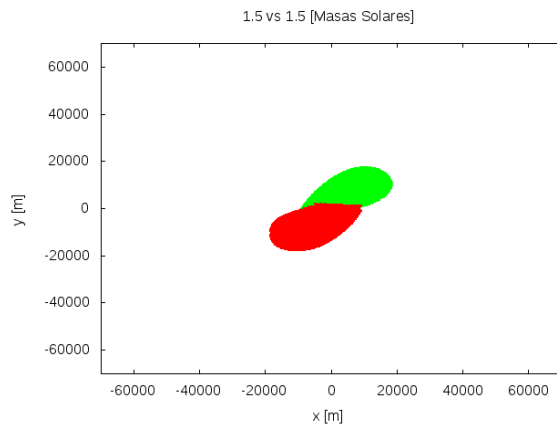
Figura 5-1: Configuración inicial. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en rojo.



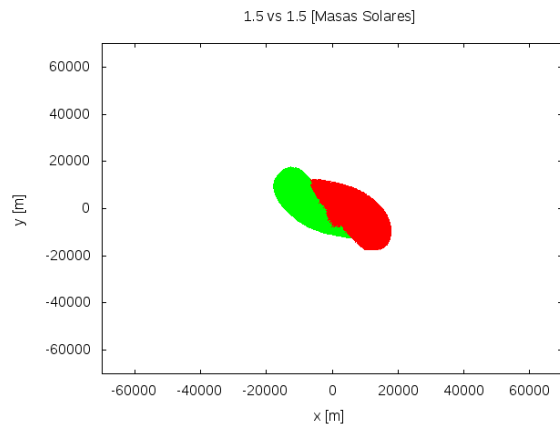
(a) Evolución del sistema a  $5t_{ff}$



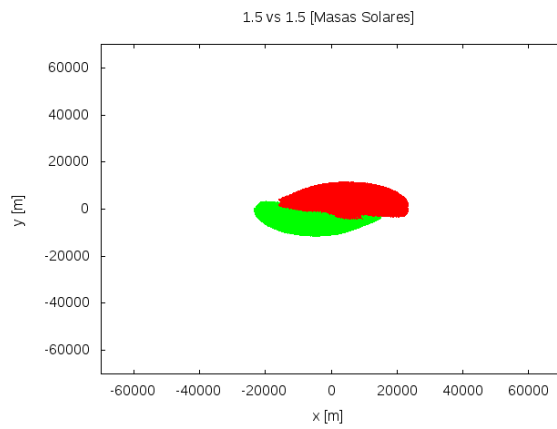
(b) Evolución del sistema a  $12t_{ff}$



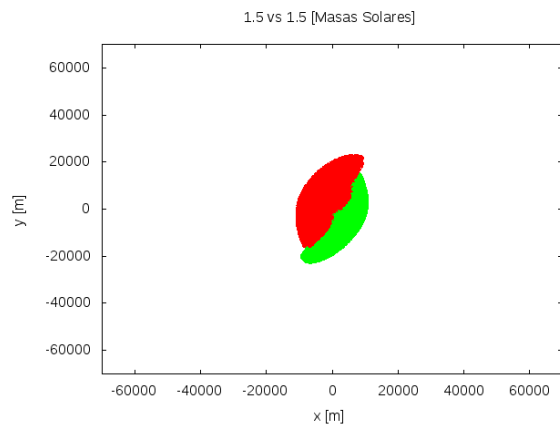
(c) Evolución del sistema a  $15t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $19t_{ff}$

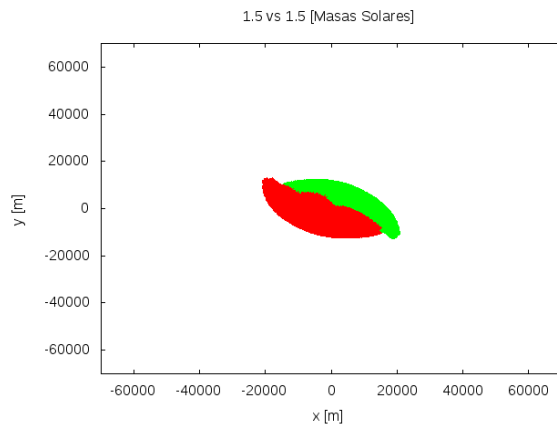


(e) Evolución del sistema a  $21t_{ff}$

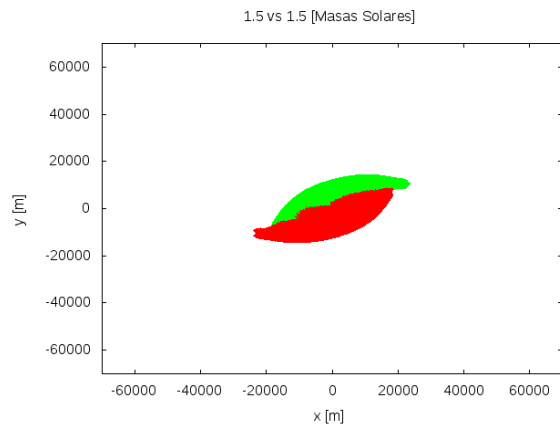


(f) Evolución del sistema a  $24t_{ff}$

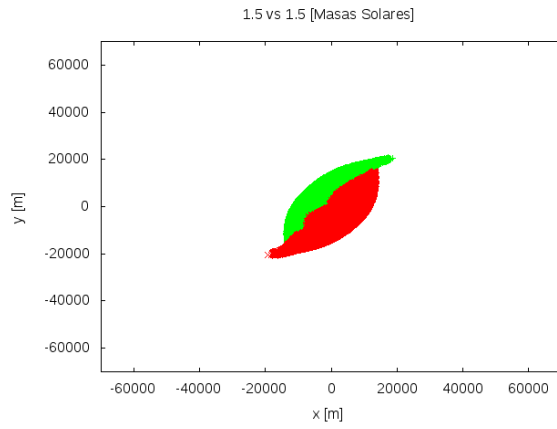
Figura 5-2: Evolución del sistema. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en rojo.



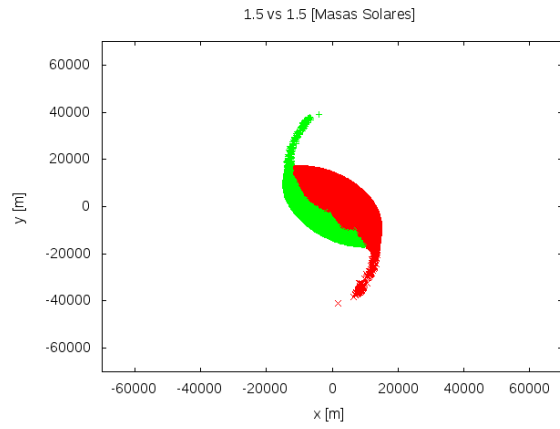
(a) Evolución del sistema a  $27t_{ff}$



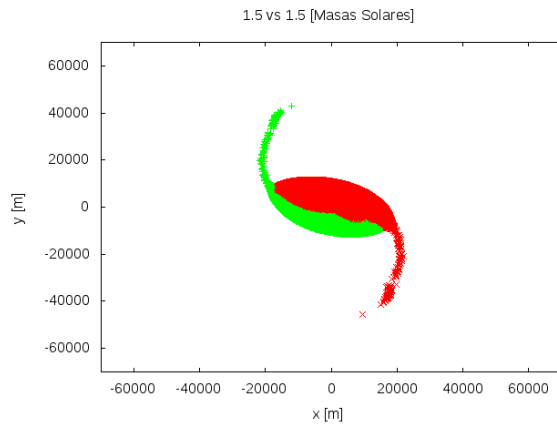
(b) Evolución del sistema a  $29t_{ff}$



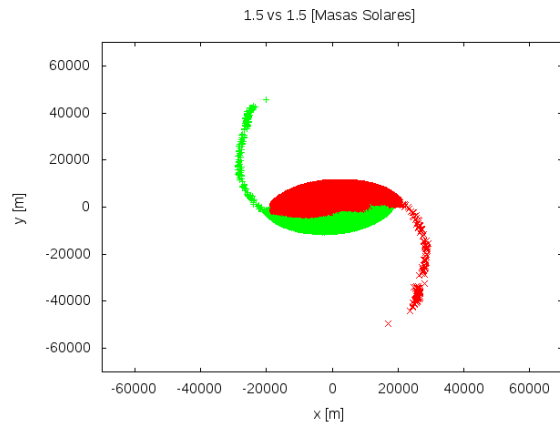
(c) Evolución del sistema a  $30t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $33t_{ff}$



(e) Evolución del sistema a  $34t_{ff}$



(f) Evolución del sistema a  $35t_{ff}$

Figura 5-3: Evolución del sistema. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en rojo.

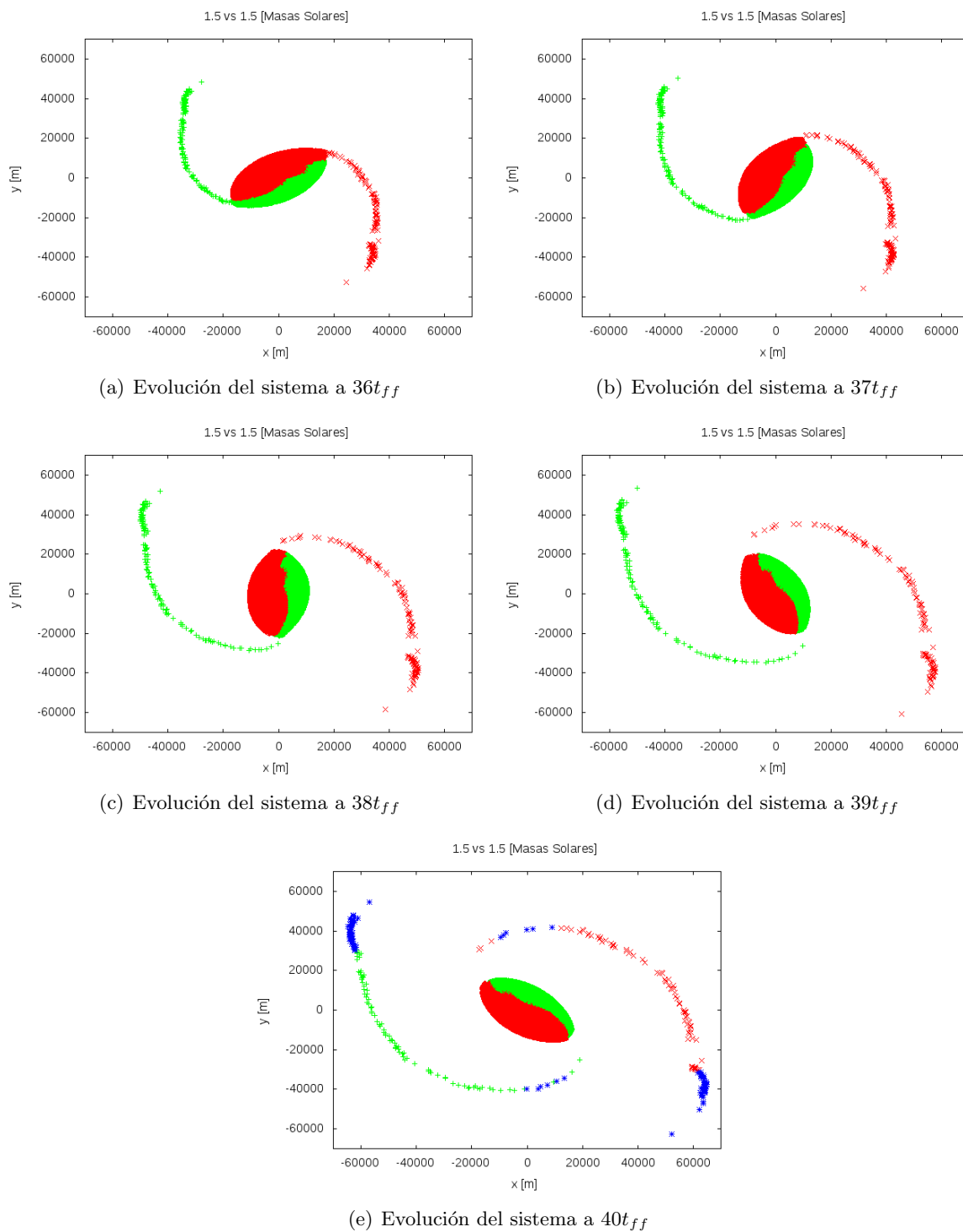


Figura 5-4: Evolución del sistema, etapa final. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en rojo. La última gráfica muestra en azul la materia que es expulsada.



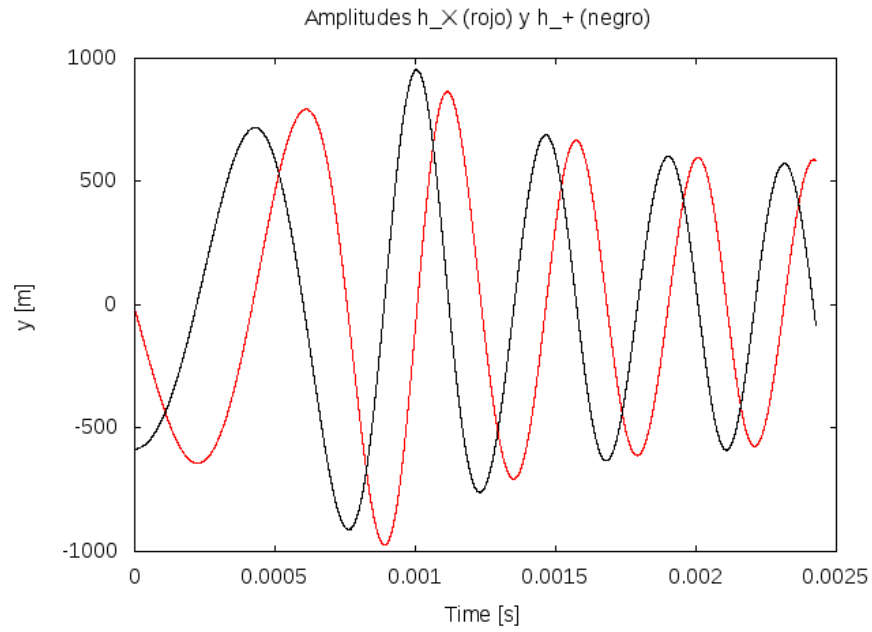


Figura 5-5: Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro).  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{01}$ .

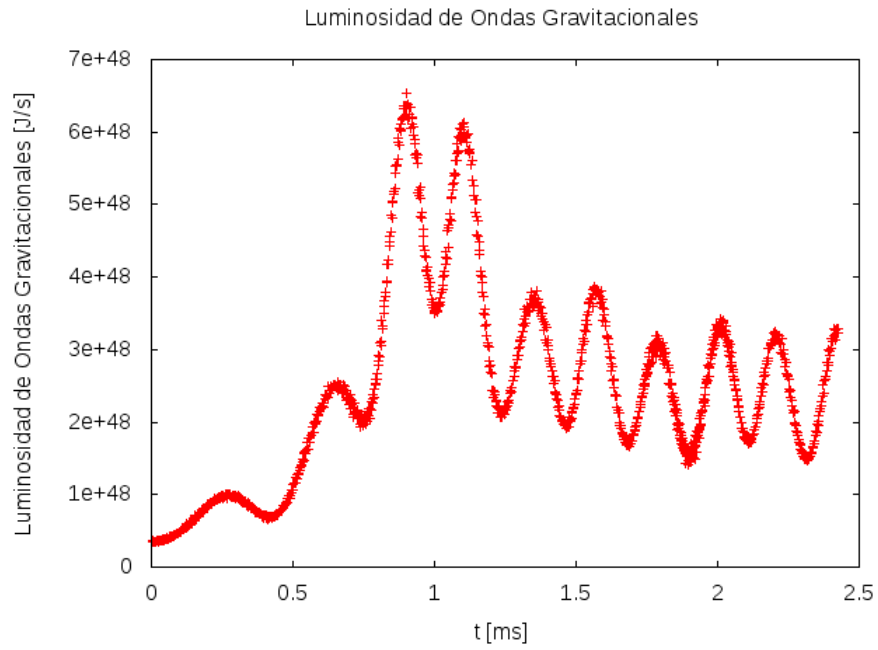


Figura 5-6: Luminosidad de Ondas Gravitacionales [J/s] vs tiempo [ms].  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{01}$ .

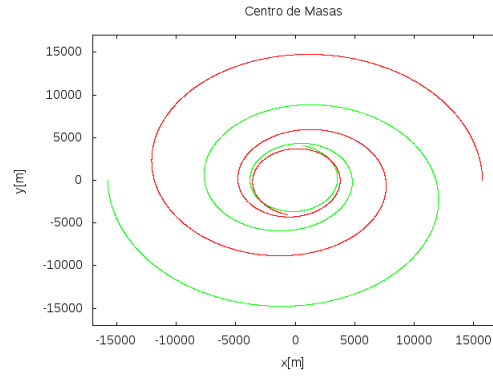


Figura 5-7: Trayectoria del Centro de Masas.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{01}$ , Estrella 1 en verde, Estrella 2 en rojo.

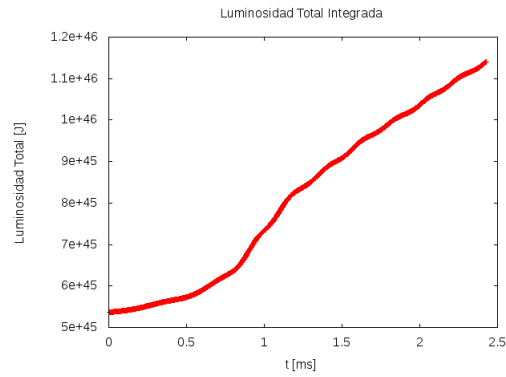


Figura 5-8: Luminosidad Total Integrada.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{01}$ .

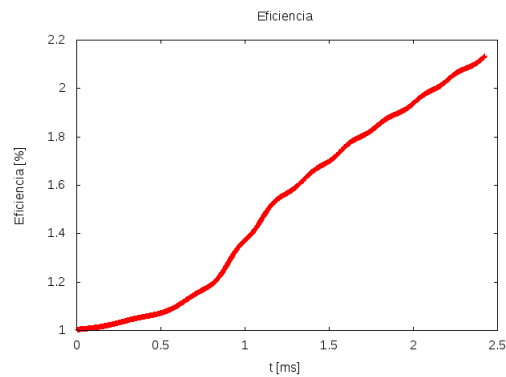


Figura 5-9: Eficiencia.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{01}$ .

5.1.2. Caso 2.  $q = 1$ ,  $M = 1.5 M_{\odot}$ ,  $R = 9.0 \text{ km}$ ,  $\rho_{0_2} = 4.116 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ .  
Tiempo de evolución =  $40 t_{ff}$ .

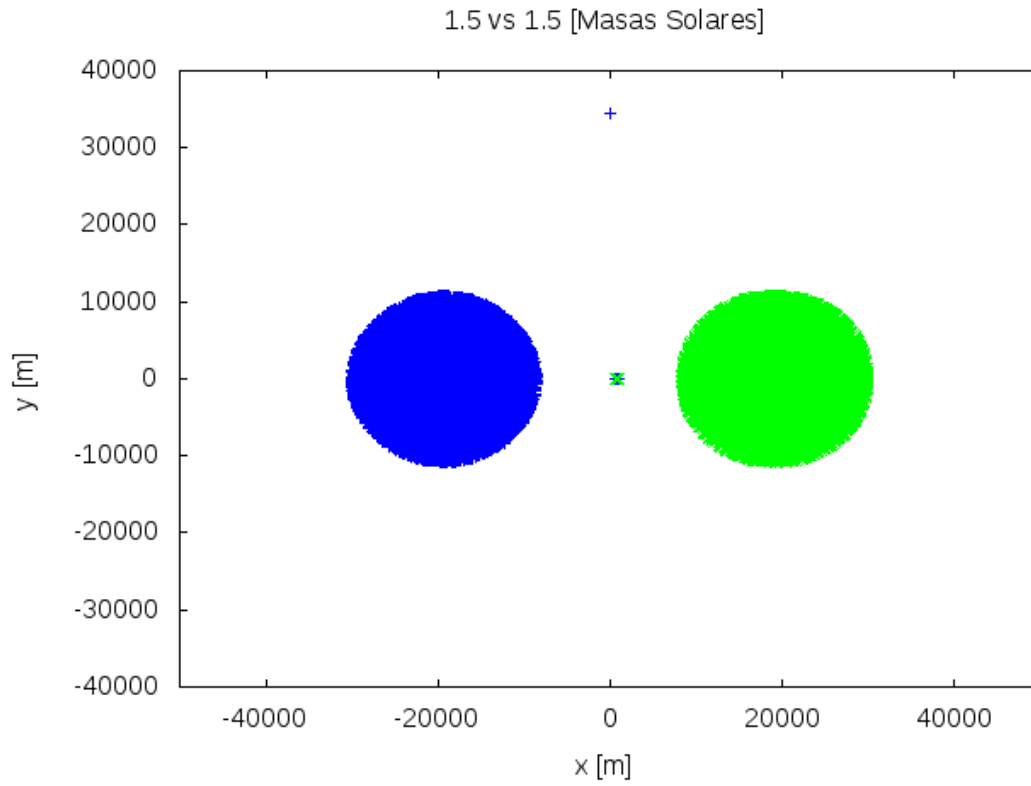
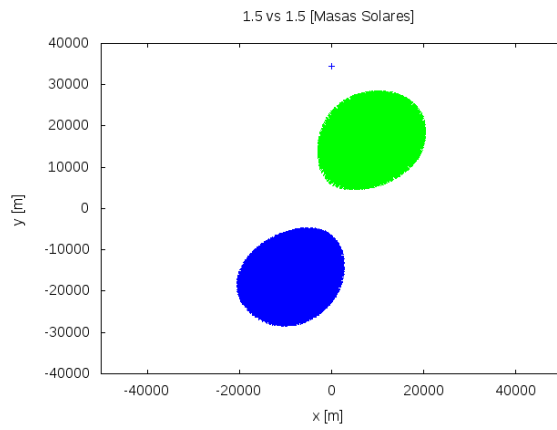
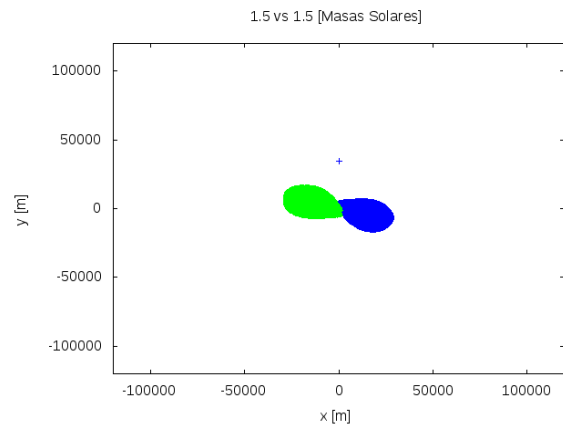


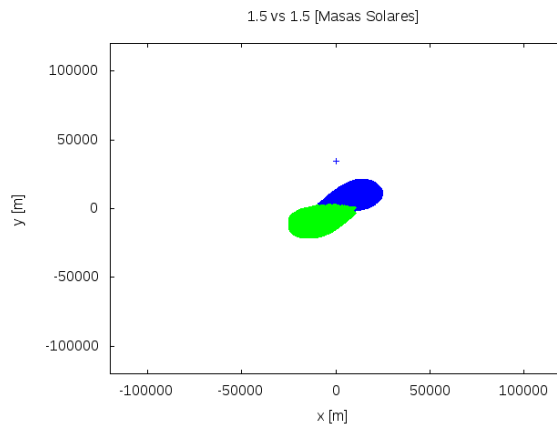
Figura 5-10: Configuración inicial. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en verde.



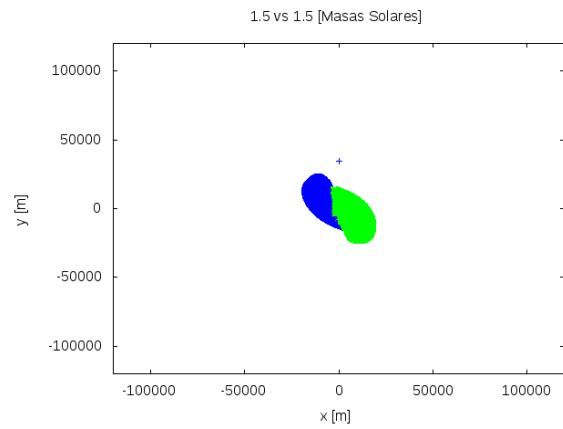
(a) Evolución del sistema a  $5t_{ff}$



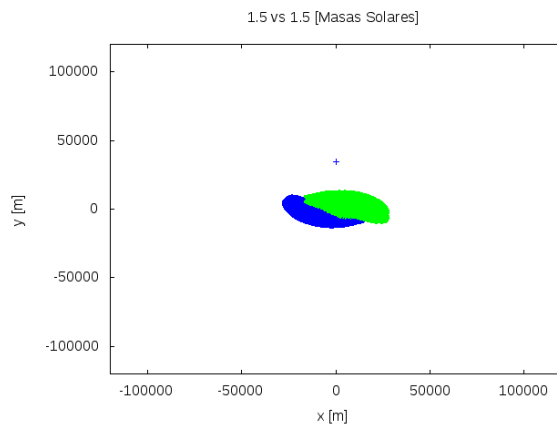
(b) Evolución del sistema a  $12t_{ff}$



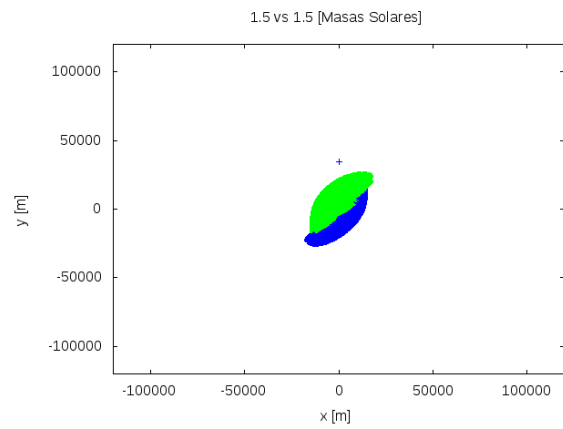
(c) Evolución del sistema a  $15t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $19t_{ff}$



(e) Evolución del sistema a  $21t_{ff}$



(f) Evolución del sistema a  $24t_{ff}$

Figura 5-11: Evolución del sistema. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en verde.

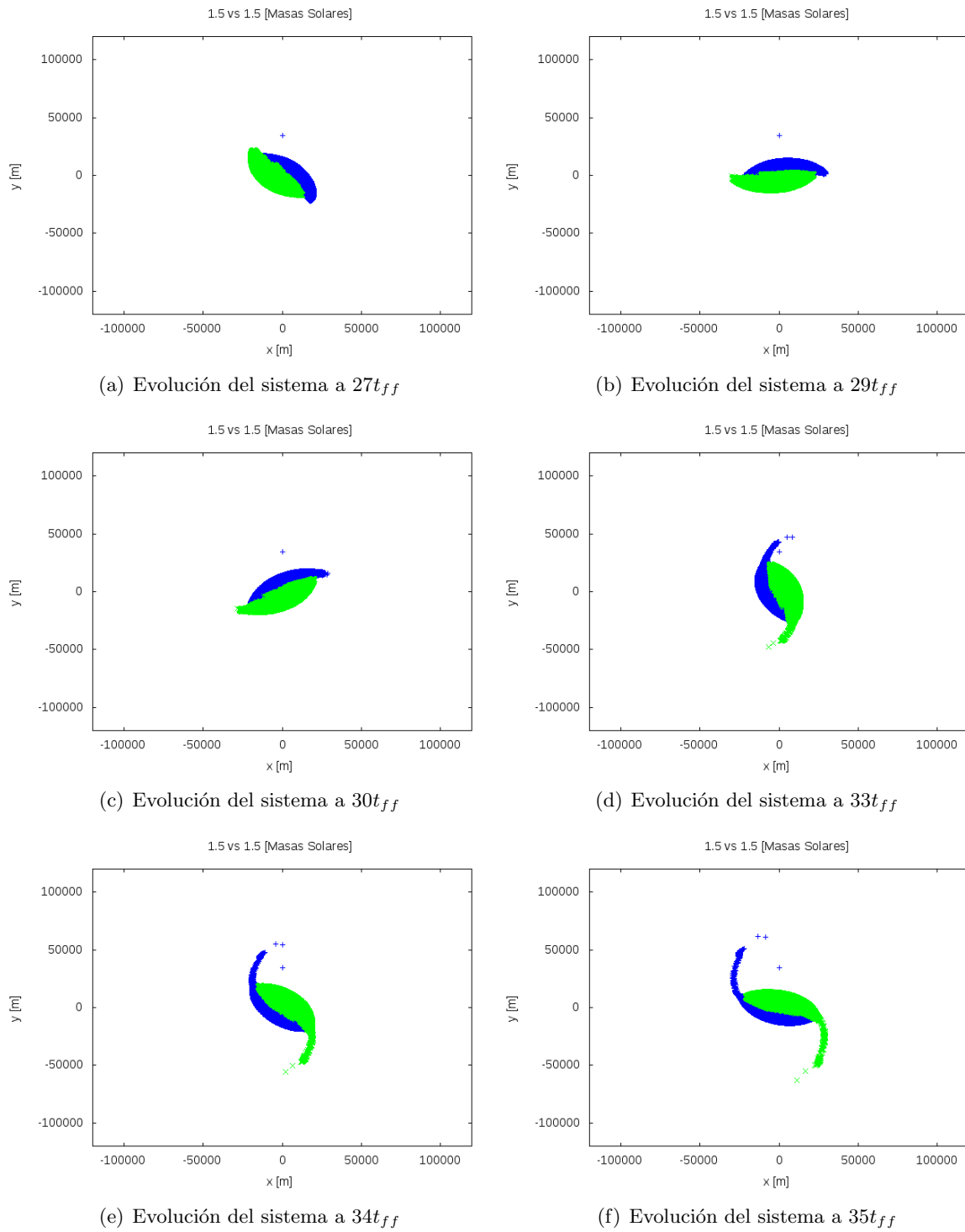


Figura 5-12: Evolución del sistema. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en verde.

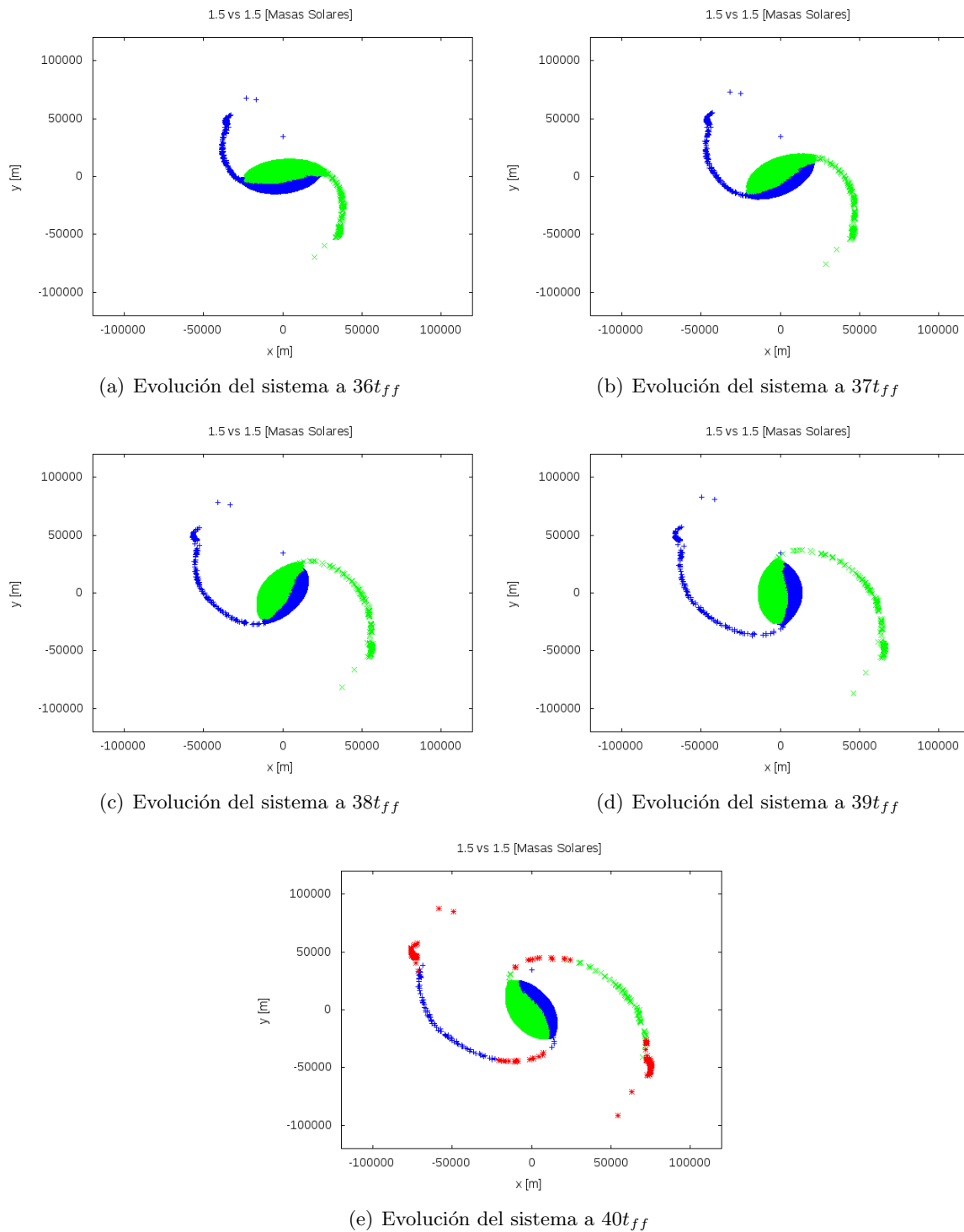


Figura 5-13: Evolución del sistema, etapa final. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en verde. La última gráfica muestra en rojo la materia que es expulsada.

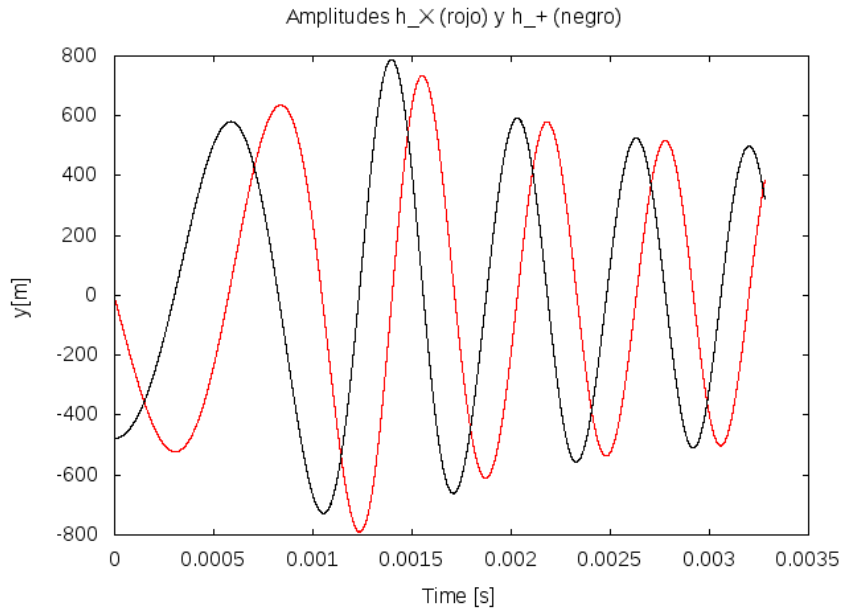


Figura 5-14: Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro).  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$

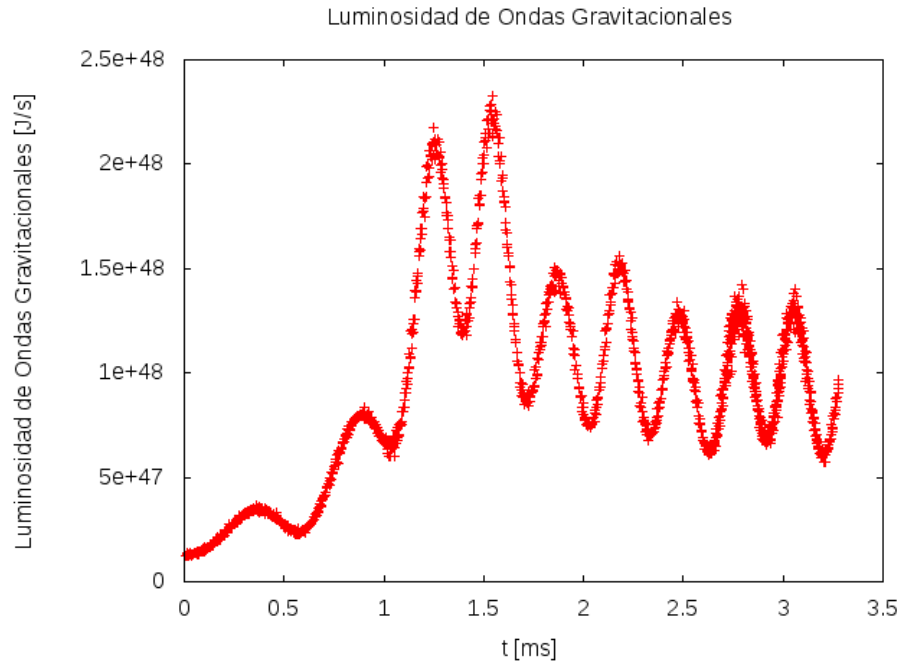


Figura 5-15: Luminosidad de Ondas Gravitacionales [J/s] vs tiempo [ms].  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$

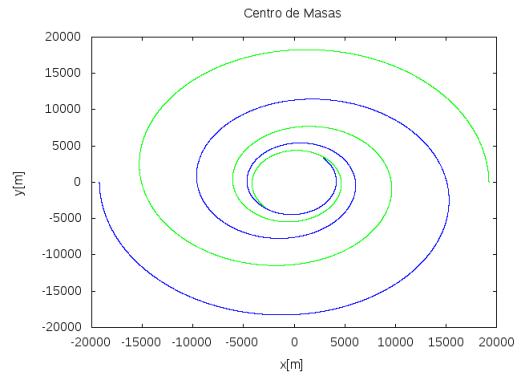


Figura 5-16: Trayectoria del Centro de Masa.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$ .

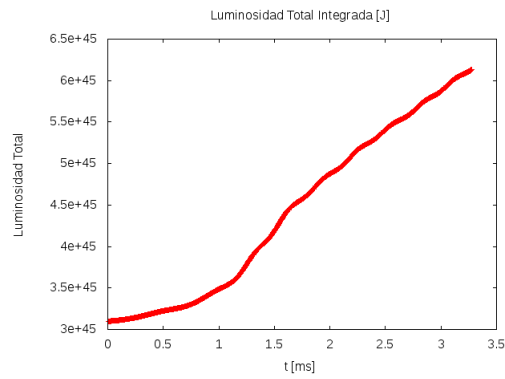


Figura 5-17: Luminosidad Total Integrada.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$

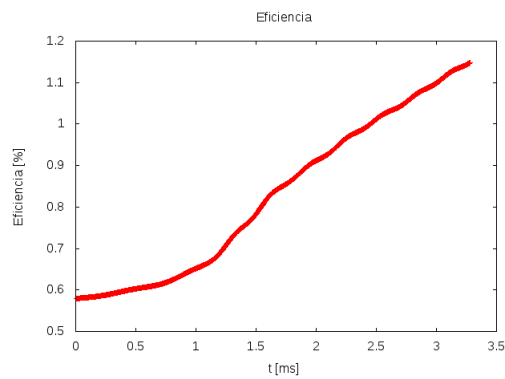


Figura 5-18: Eficiencia.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$



5.1.3. Caso 3.  $q = 1$ ,  $M = 2.0 M_{\odot}$ ,  $R = 12.0 \text{ km}$ ,  $\rho_{0_2} = 4.116 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ .  
Tiempo de evolución =  $40 t_{ff}$ .

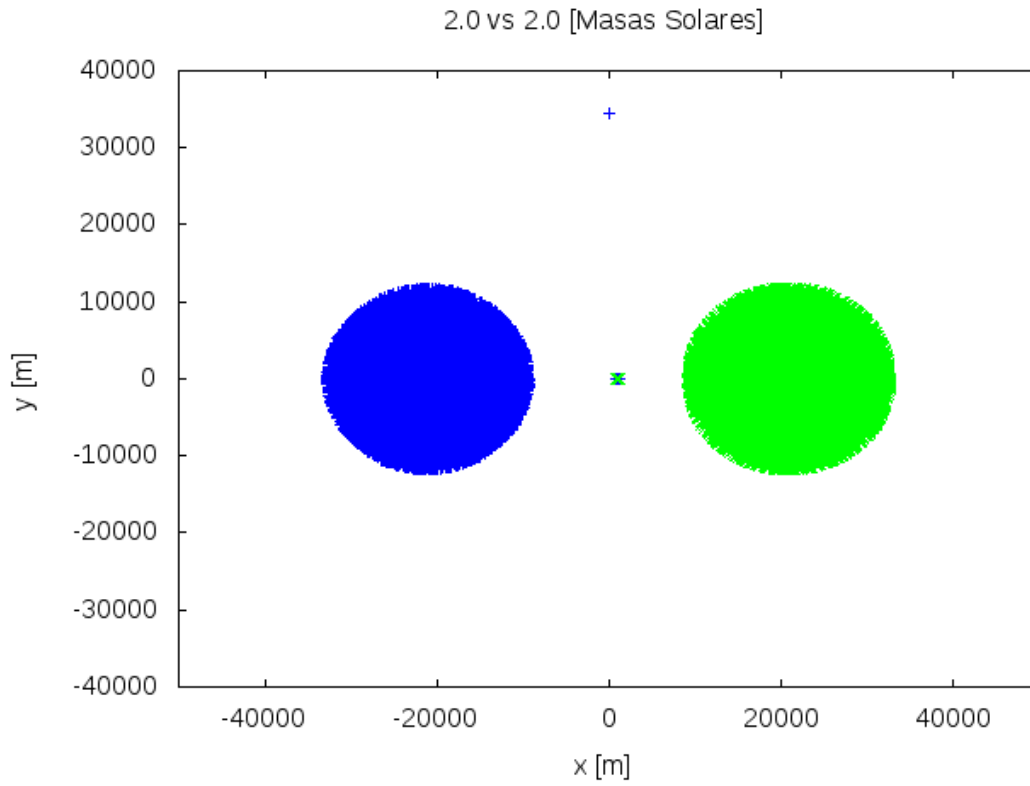
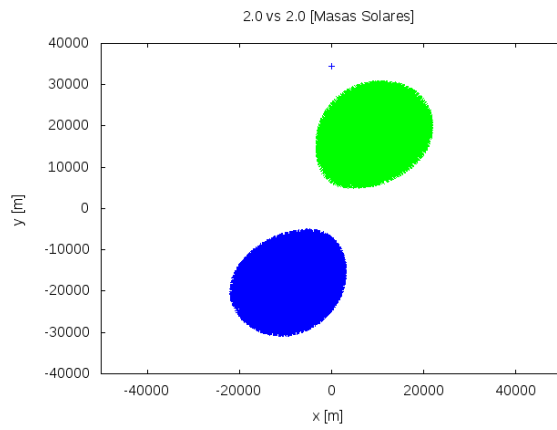
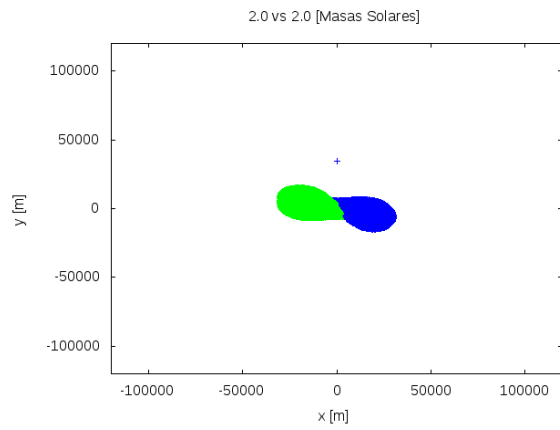


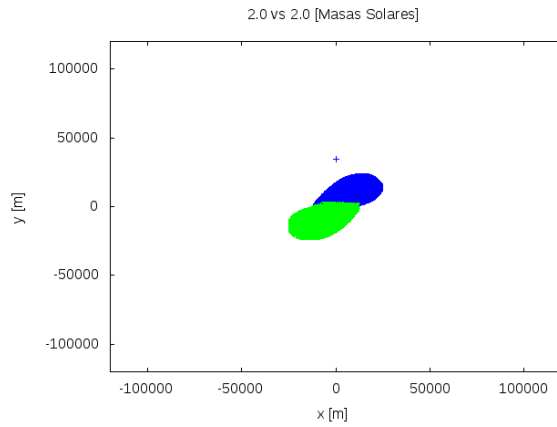
Figura 5-19: Configuración inicial. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en verde.



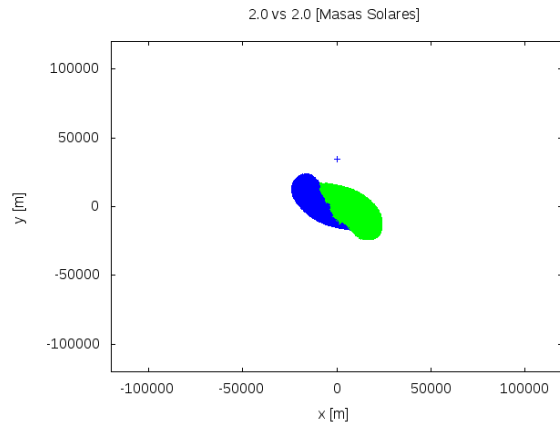
(a) Evolución del sistema a  $5t_{ff}$



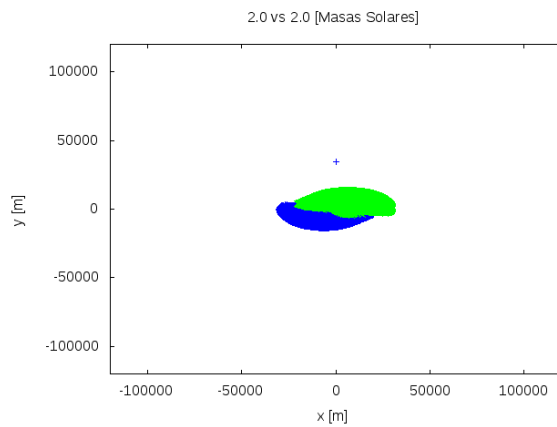
(b) Evolución del sistema a  $12t_{ff}$



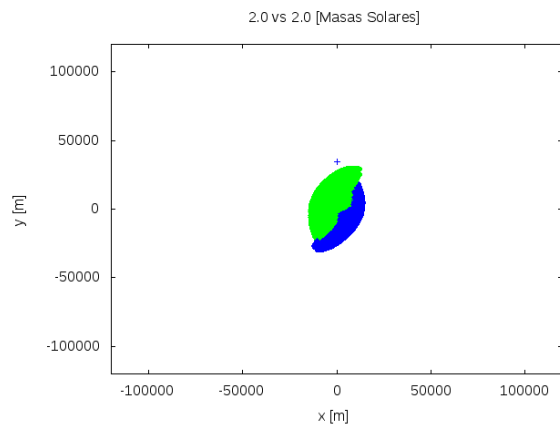
(c) Evolución del sistema a  $15t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $19t_{ff}$



(e) Evolución del sistema a  $21t_{ff}$



(f) Evolución del sistema a  $24t_{ff}$

Figura 5-20: Evolución del sistema. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en verde.

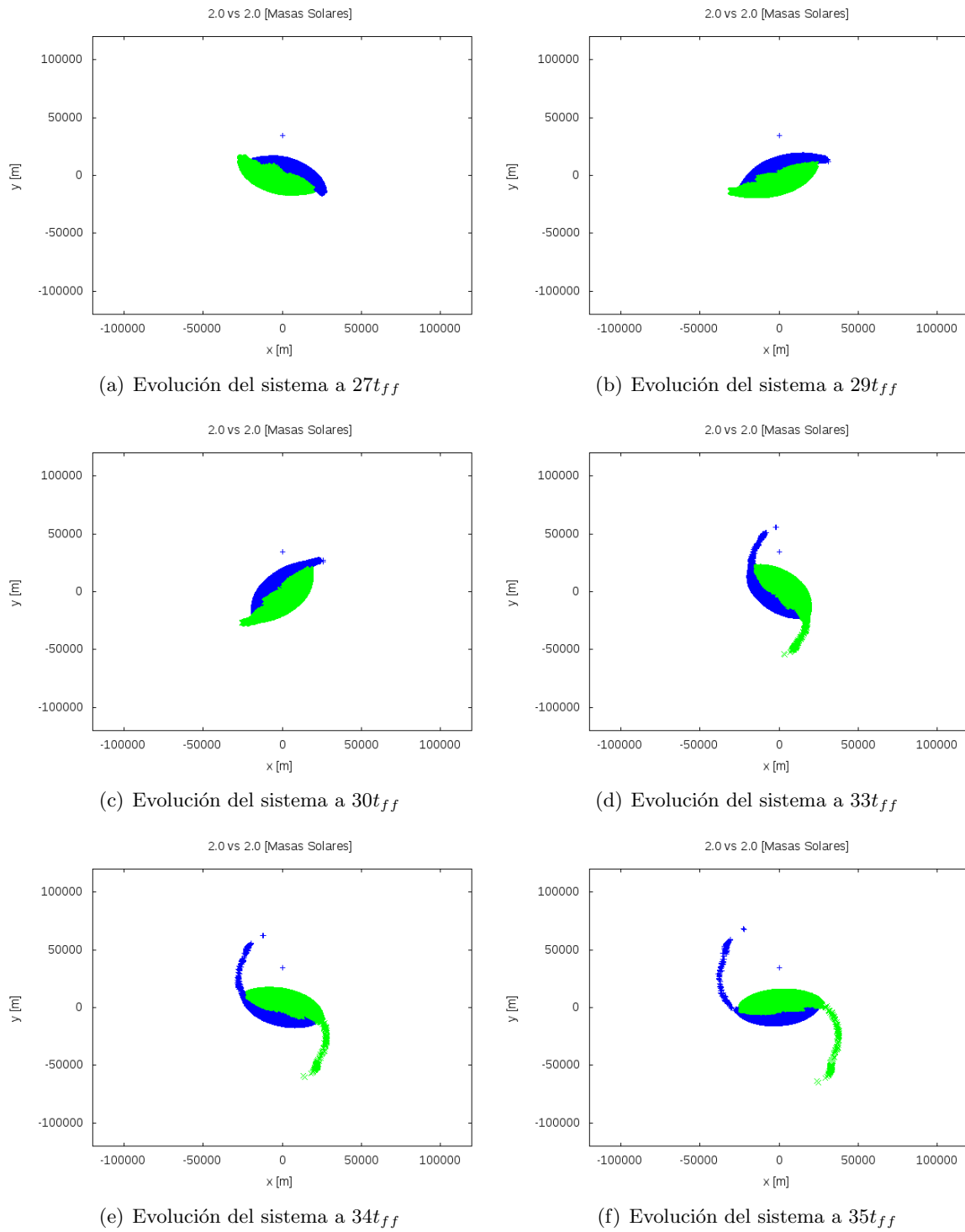
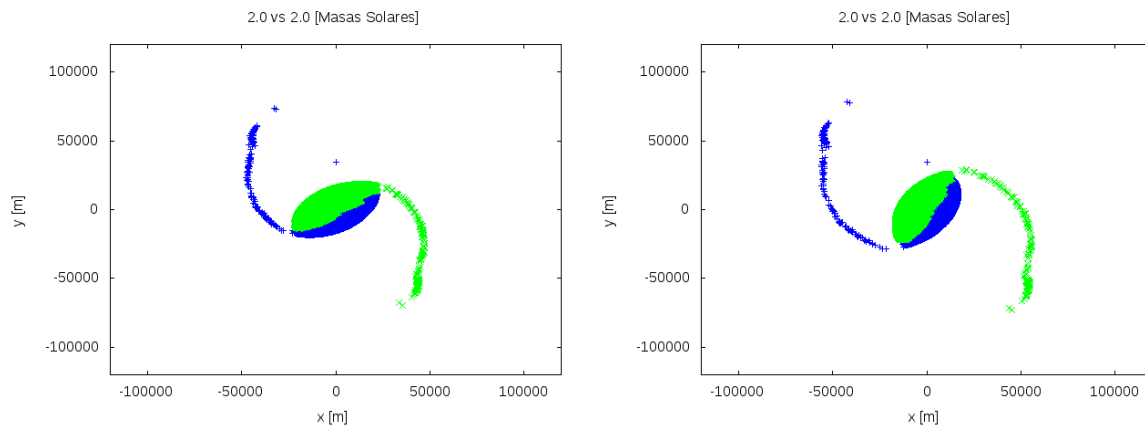
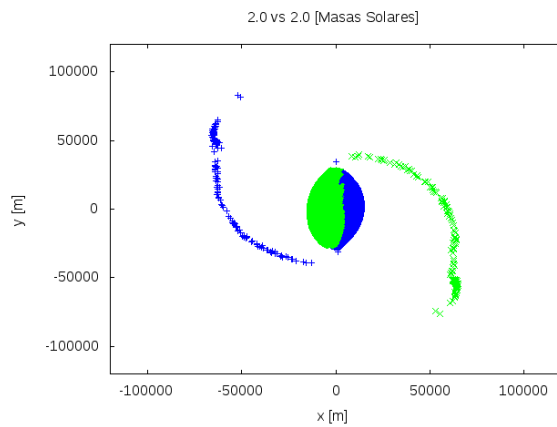


Figura 5-21: Evolución del sistema. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en verde.

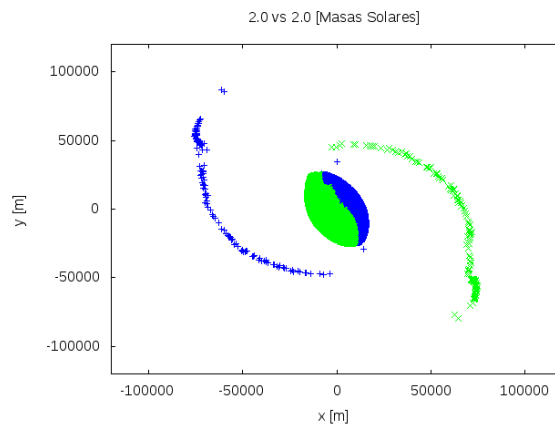


(a) Evolución del sistema a  $36t_{ff}$

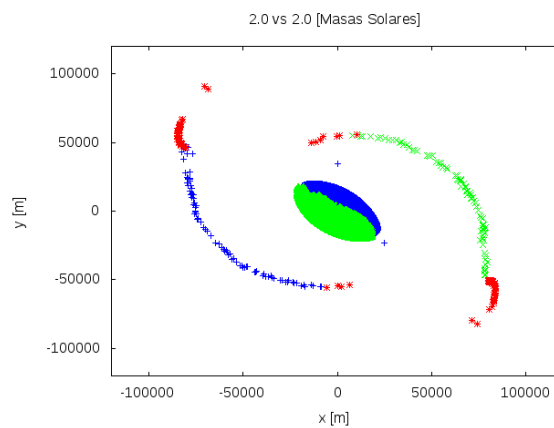
(b) Evolución del sistema a  $37t_{ff}$



(c) Evolución del sistema a  $38t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $39t_{ff}$



(e) Evolución del sistema a  $40t_{ff}$

Figura 5-22: Evolución del sistema, etapa final. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en verde. La última gráfica muestra en rojo la materia que es expulsada.

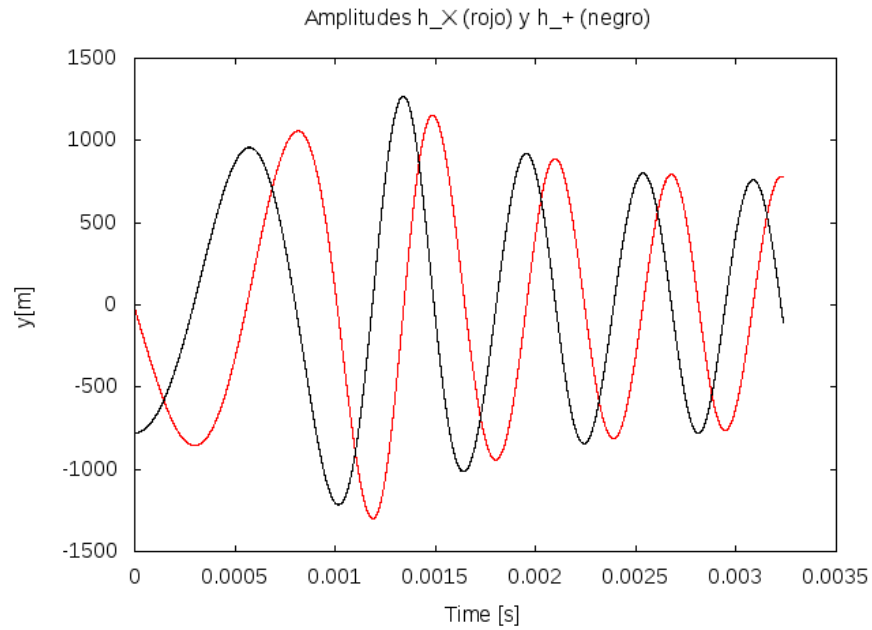


Figura 5-23: Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro).  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$

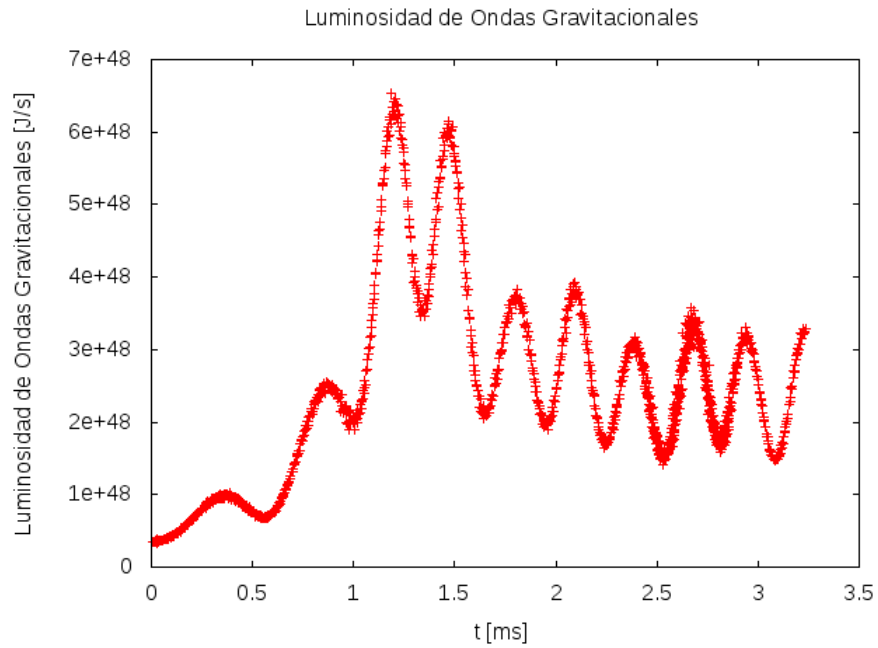


Figura 5-24: Luminosidad de Ondas Gravitacionales [J/s] vs tiempo [ms].  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$

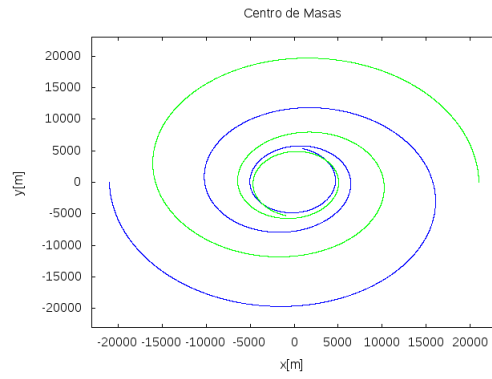


Figura 5-25: Trayectoria del Centro de Masa.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$

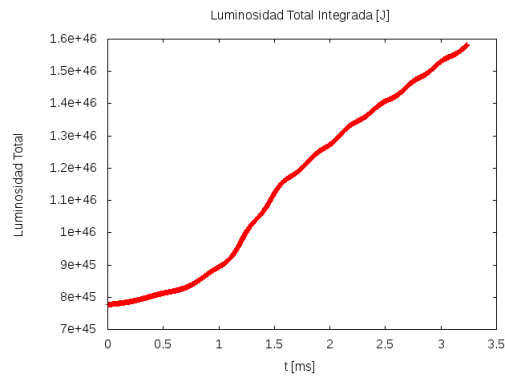


Figura 5-26: Luminosidad Total Integrada.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$

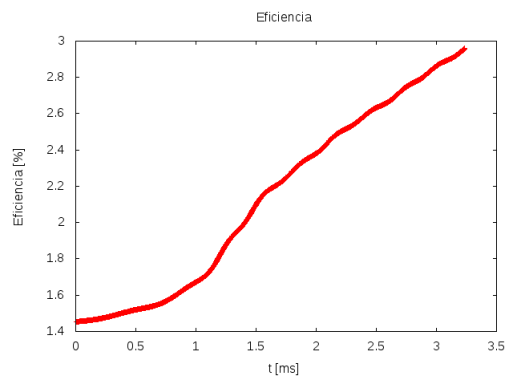


Figura 5-27: Eficiencia.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$

5.1.4. Caso 4.  $q = 1$ ,  $M = 1.5 M_{\odot}$ ,  $R = 9.0 \text{ km}$ ,  $\rho_{0_3} = 2.634 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ .  
Tiempo de evolución =  $80 t_{ff}$ .

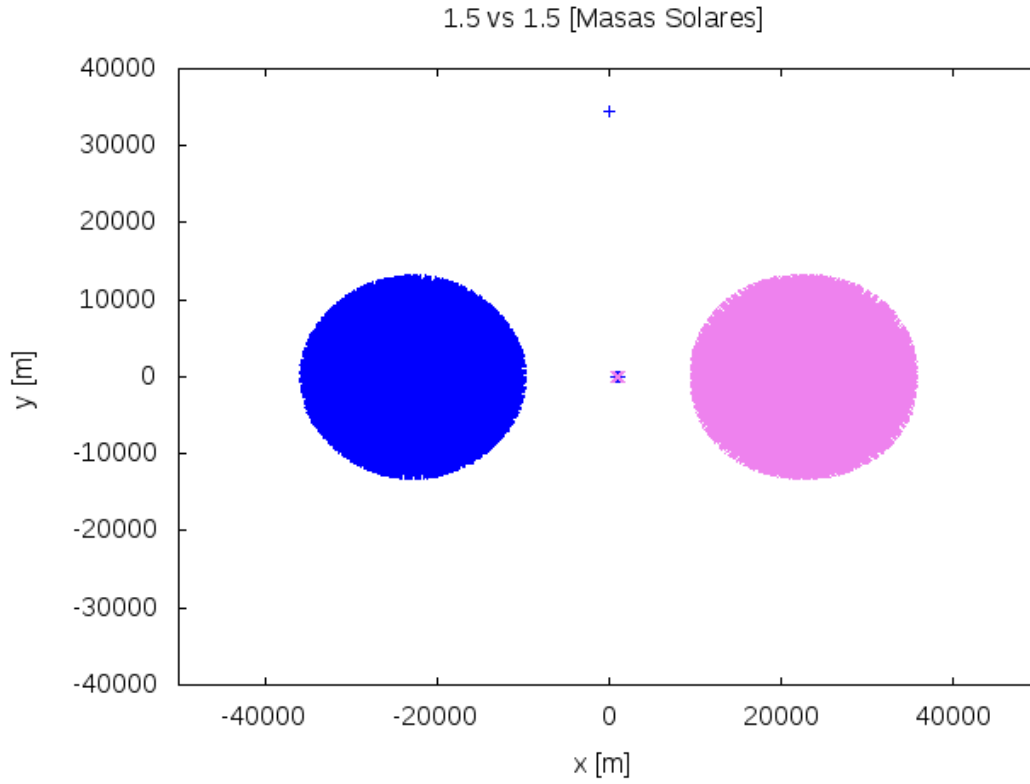


Figura 5-28: Configuración inicial. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado.

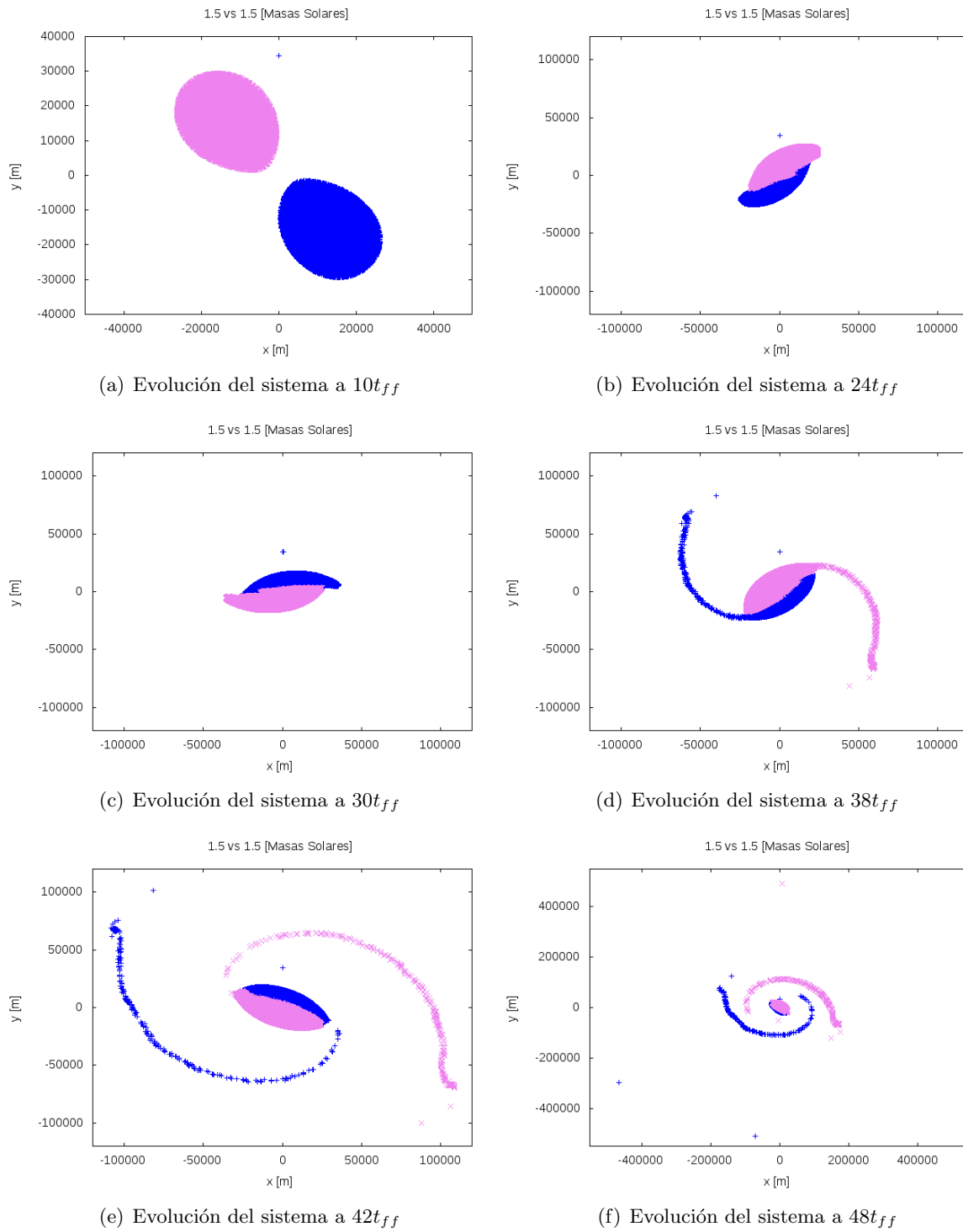


Figura 5-29: Evolución del sistema. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado.



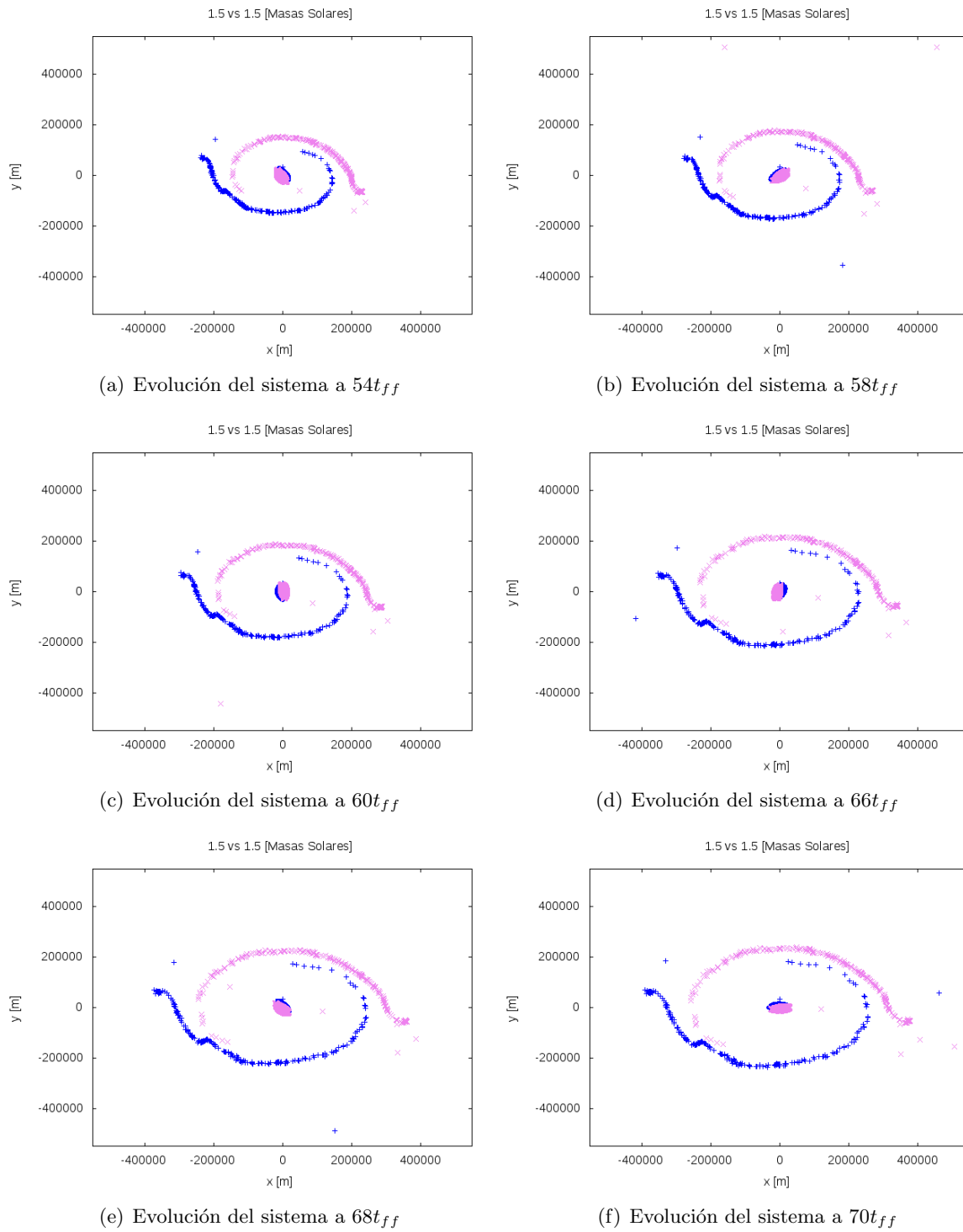


Figura 5-30: Evolución del sistema. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado.

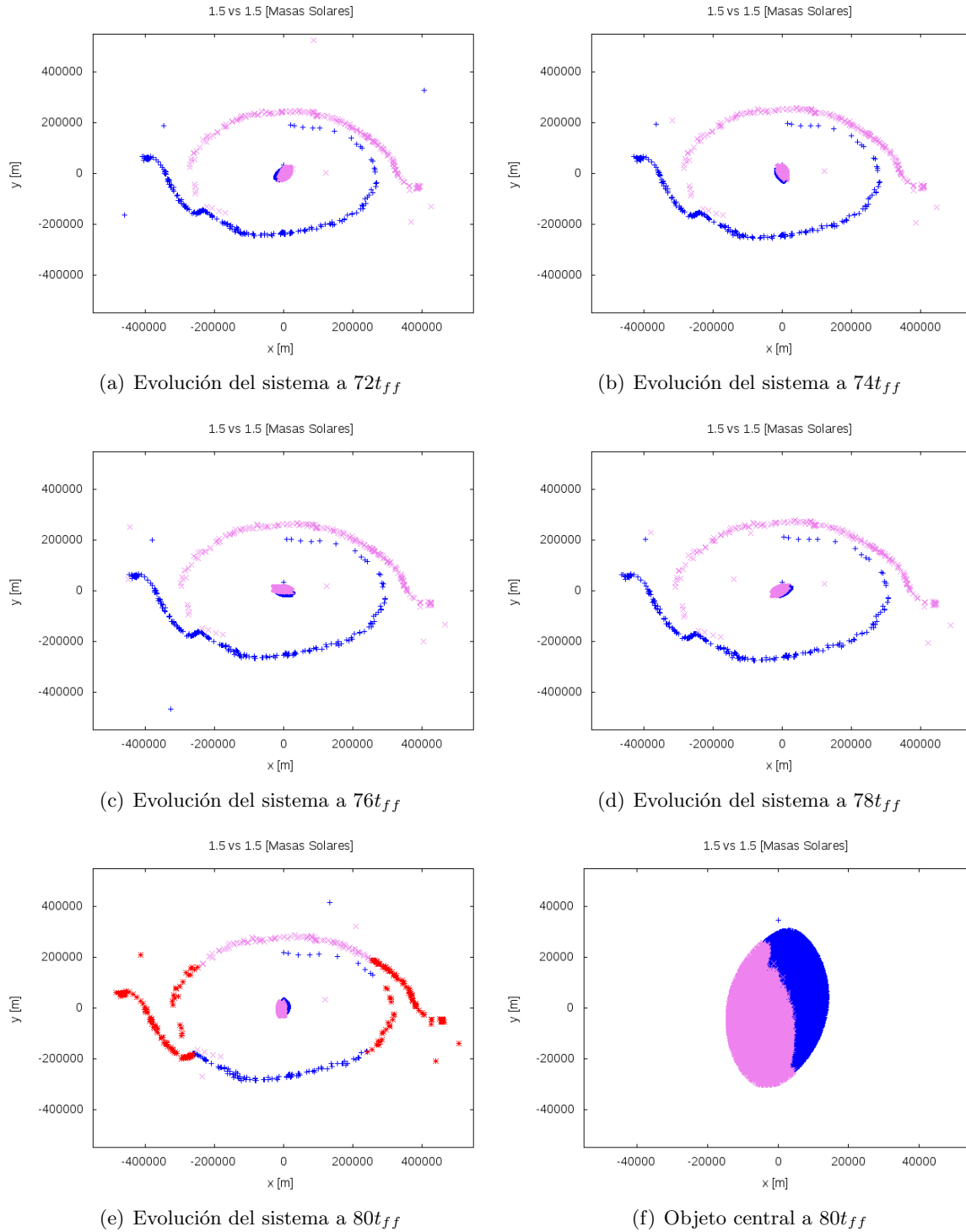


Figura 5-31: Evolución del sistema, etapa final. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado. La penúltima gráfica muestra en rojo la materia que es expulsada, la última es un acercamiento al objeto central.

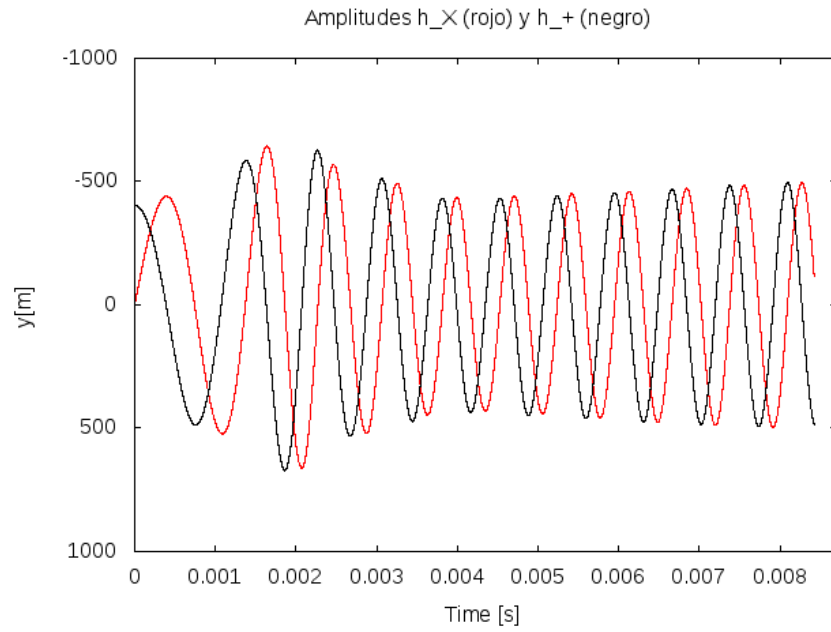


Figura 5-32: Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro).  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

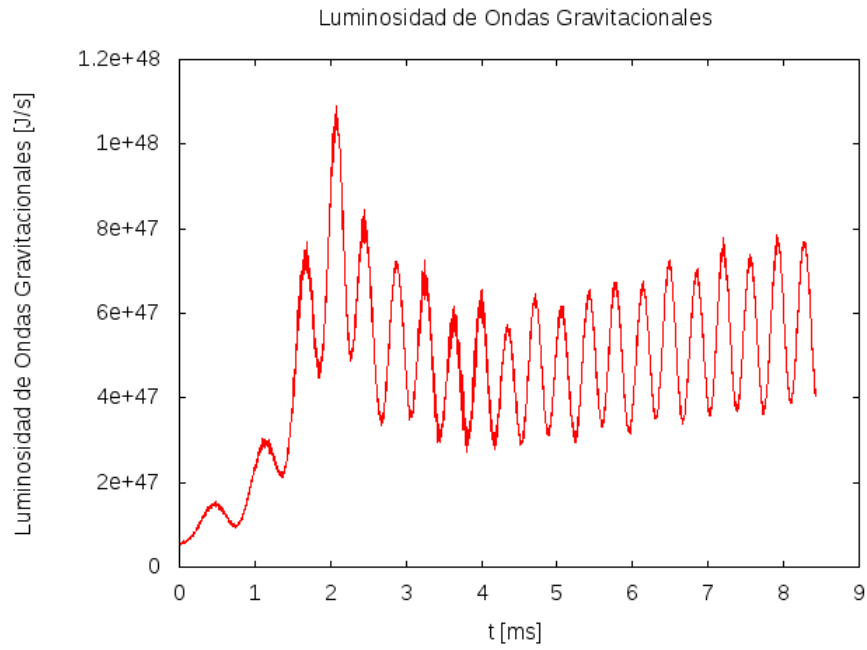


Figura 5-33: Luminosidad de Ondas Gravitacionales [J/s] vs tiempo [ms].  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

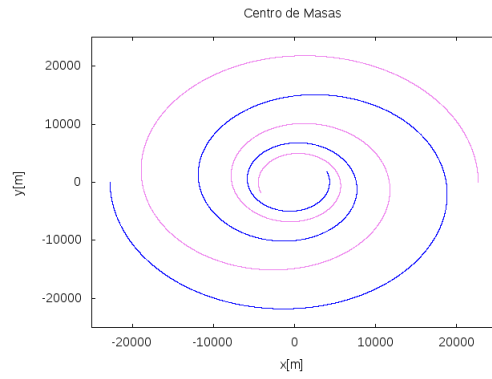


Figura 5-34: Trayectoria del Centro de Masa.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

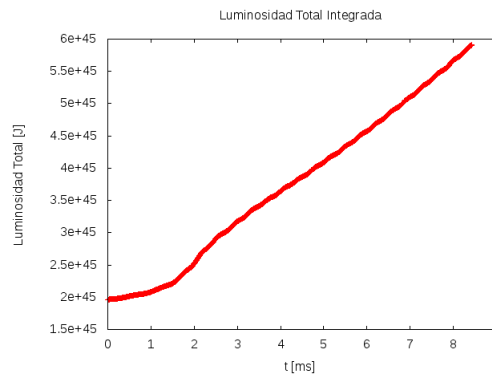


Figura 5-35: Luminosidad Total Integrada.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

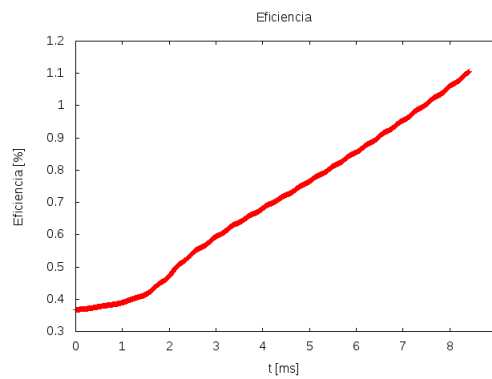


Figura 5-36: Eficiencia.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 1.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

5.1.5. Caso 5.  $q = 1$ ,  $M = 2.0 M_{\odot}$ ,  $R = 12.0 \text{ km}$ ,  $\rho_{0_3} = 2.634 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ .  
Tiempo de evolución =  $40 t_{ff}$ .

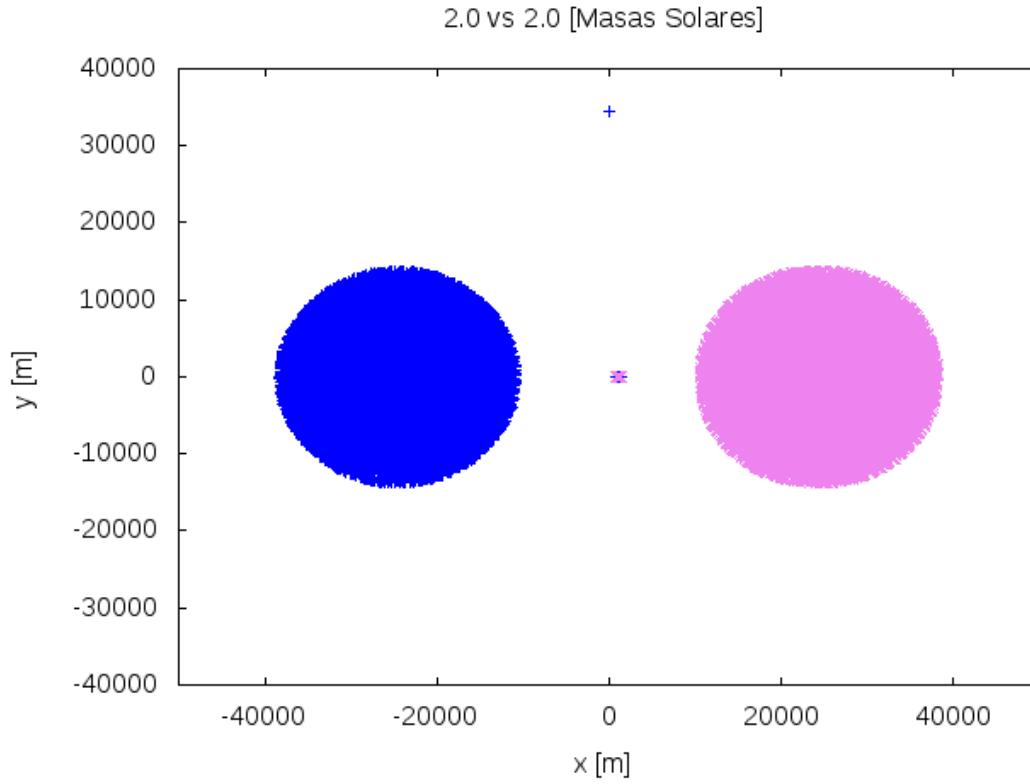
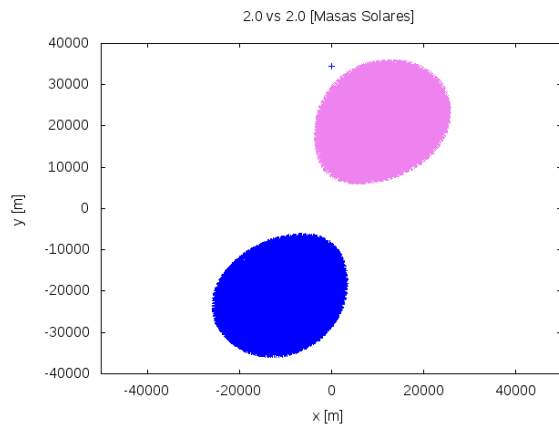
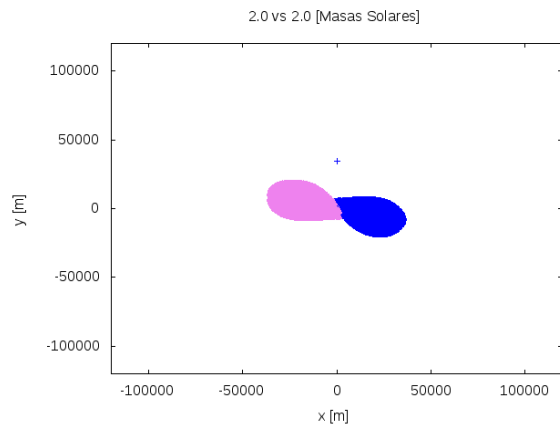


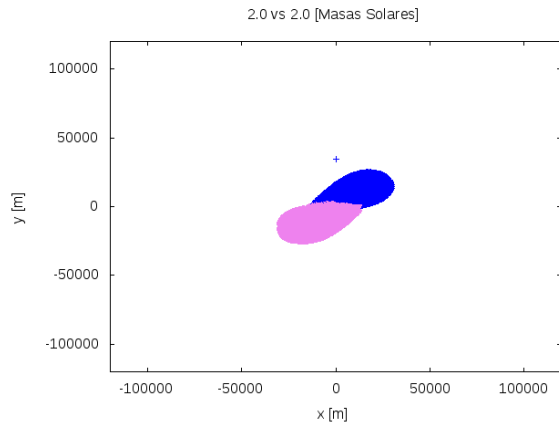
Figura 5-37: Configuración inicial. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado.



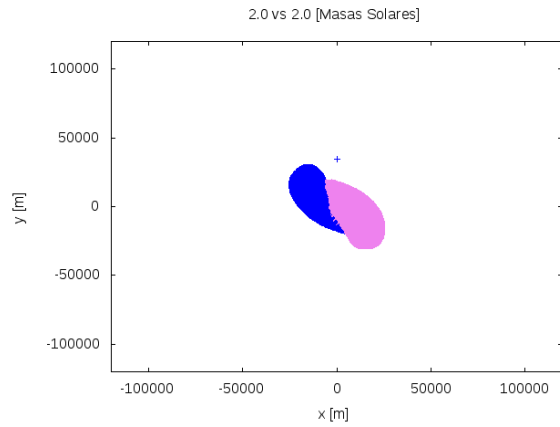
(a) Evolución del sistema a  $5t_{ff}$



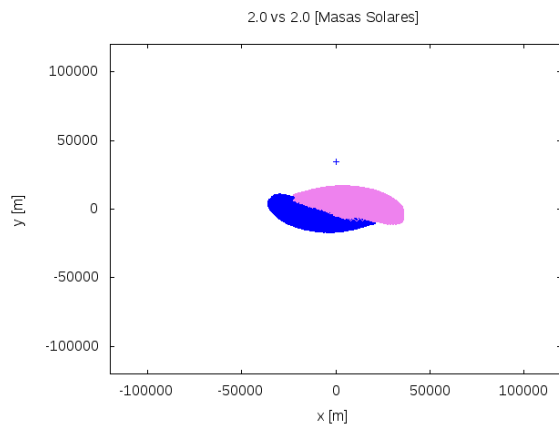
(b) Evolución del sistema a  $12t_{ff}$



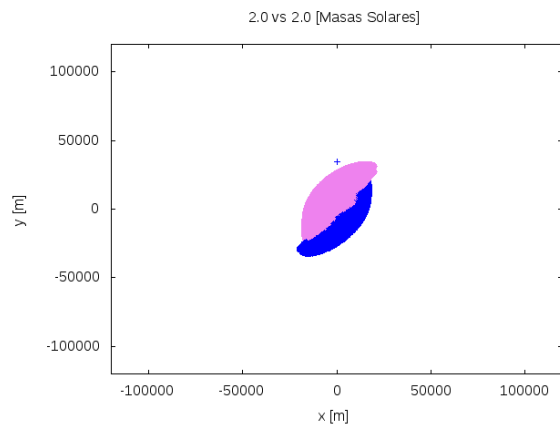
(c) Evolución del sistema a  $15t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $19t_{ff}$



(e) Evolución del sistema a  $21t_{ff}$



(f) Evolución del sistema a  $24t_{ff}$

Figura 5-38: Evolución del sistema. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado.

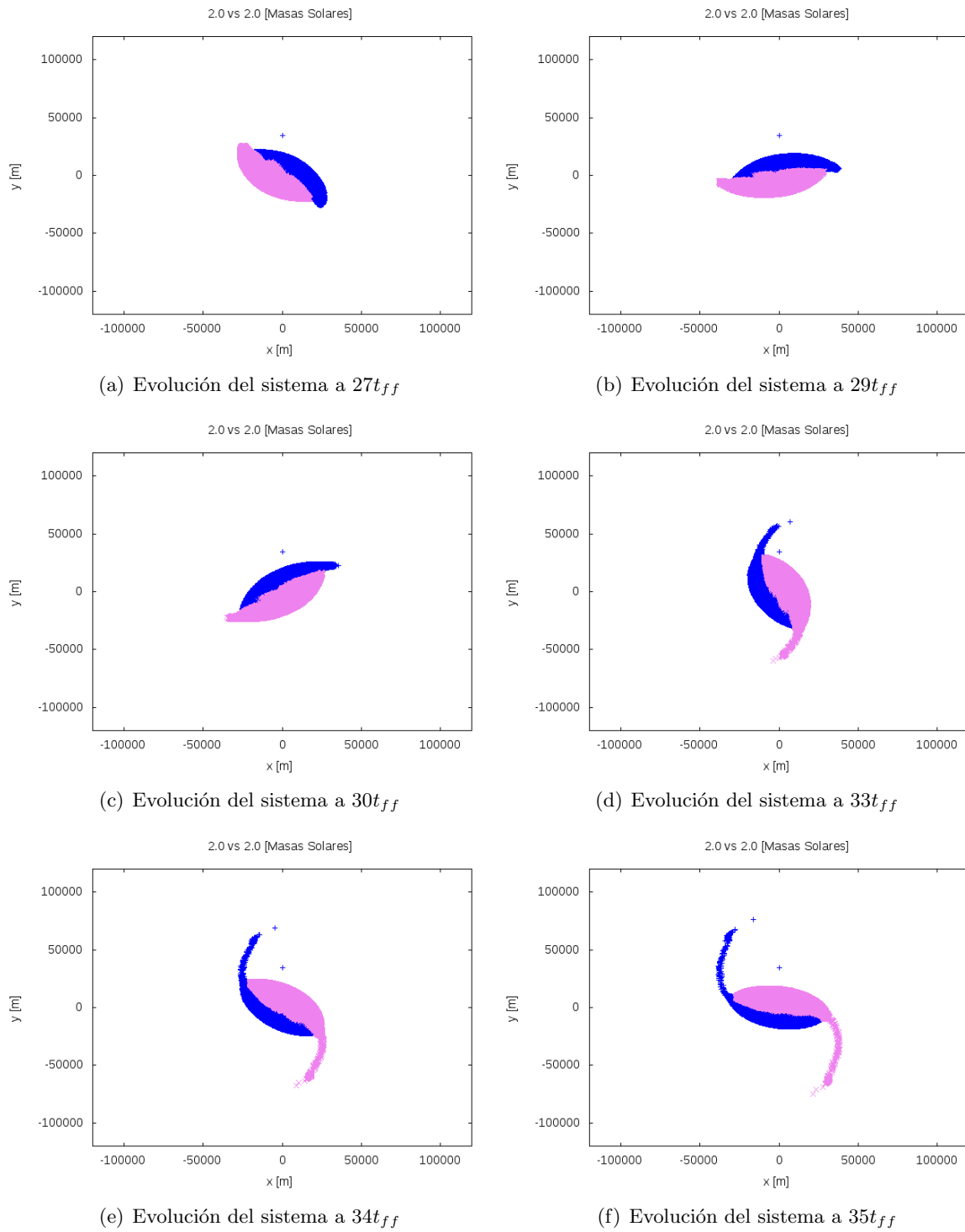
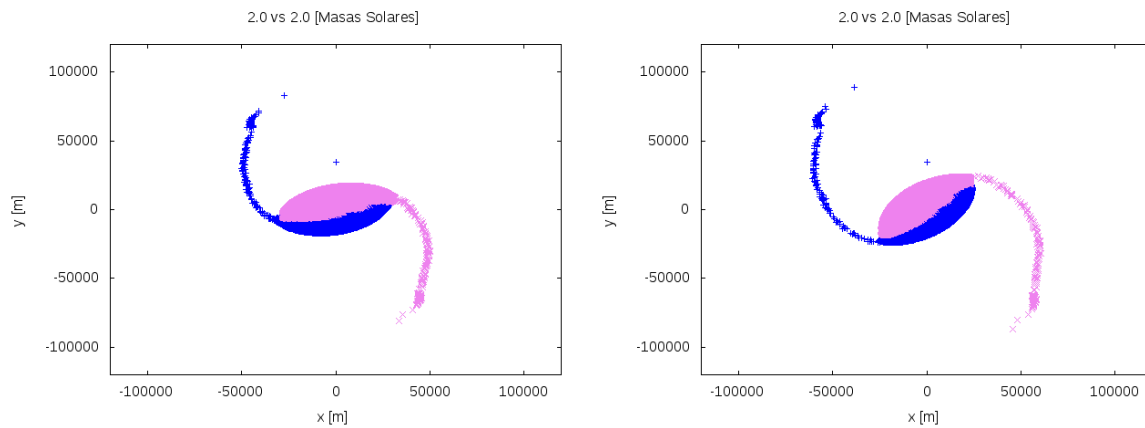
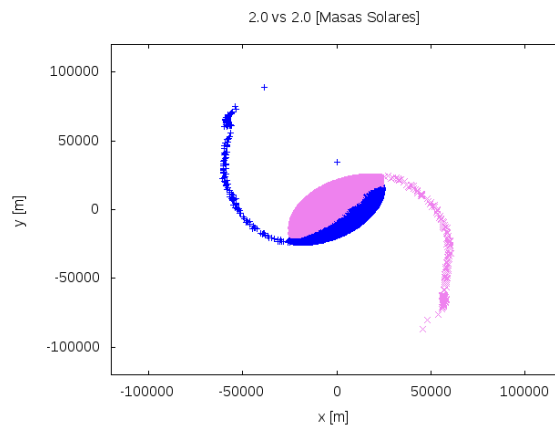


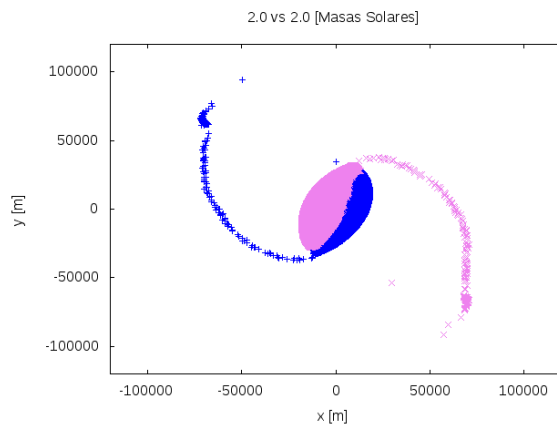
Figura 5-39: Evolución del sistema. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado.



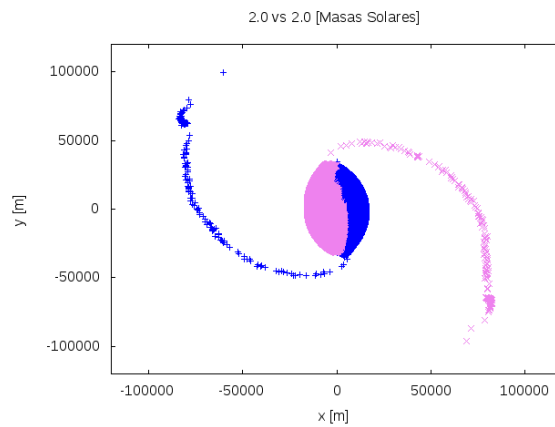
(a) Evolución del sistema a  $36t_{ff}$



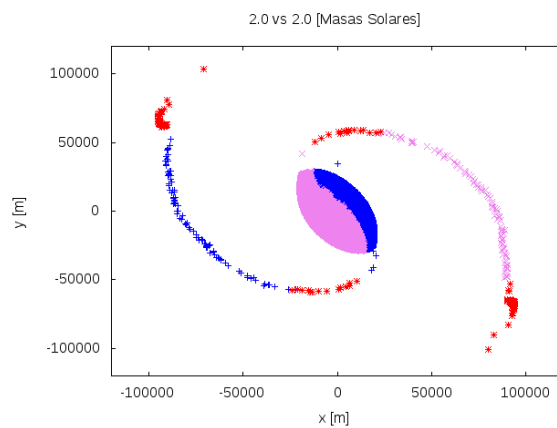
(b) Evolución del sistema a  $37t_{ff}$



(c) Evolución del sistema a  $38t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $39t_{ff}$



(e) Evolución del sistema a  $40t_{ff}$

Figura 5-40: Evolución del sistema, etapa final. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado. La última gráfica muestra en rojo la materia que es expulsada.



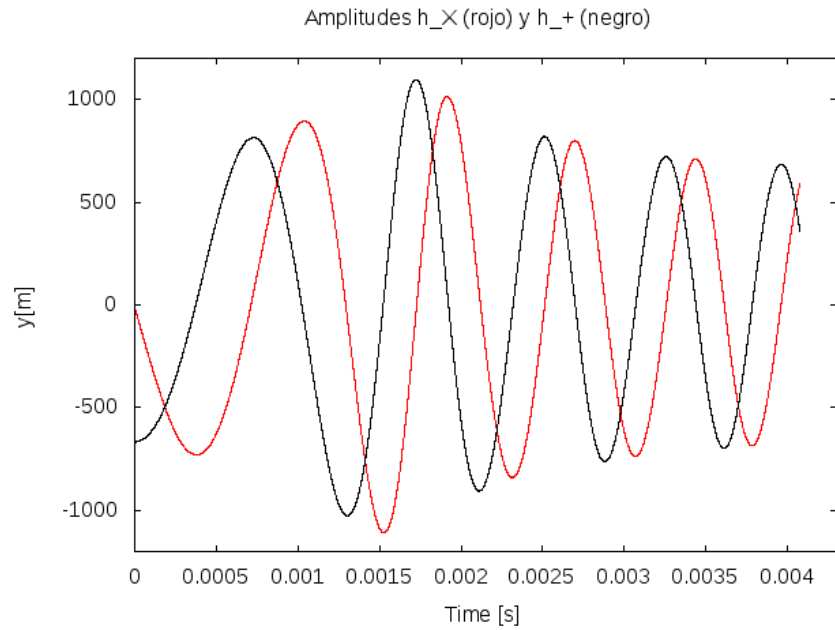


Figura 5-41: Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro).  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

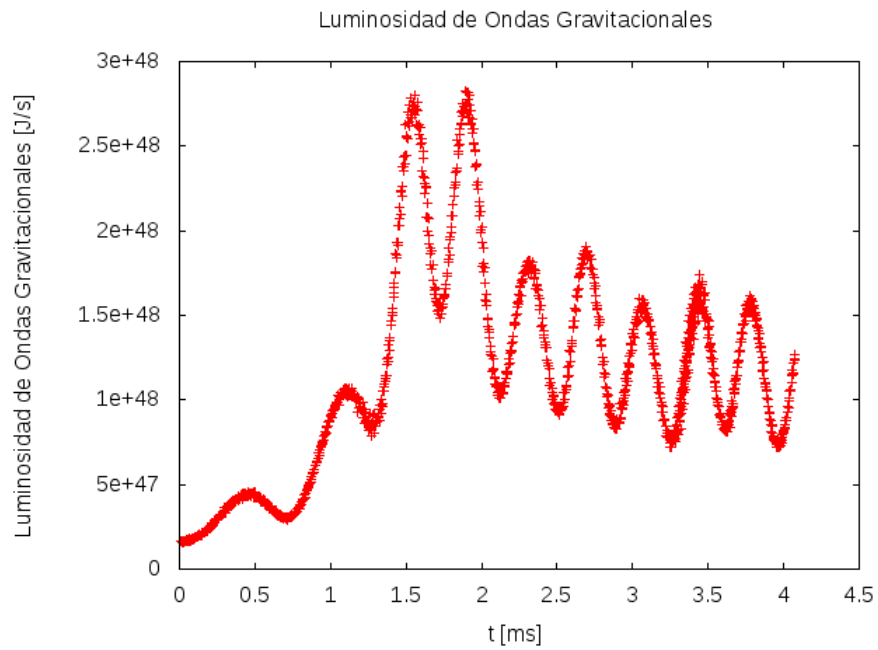


Figura 5-42: Luminosidad de Ondas Gravitacionales [J/s] vs tiempo [ms].  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

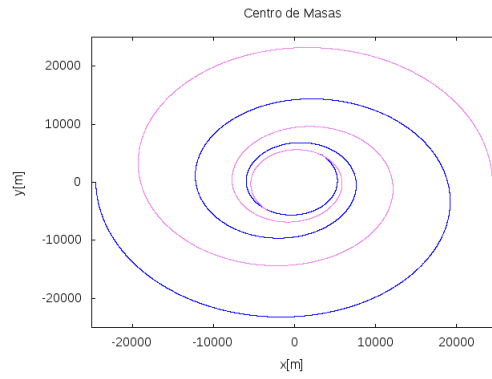


Figura 5-43: Trayectoria del Centro de Masa.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

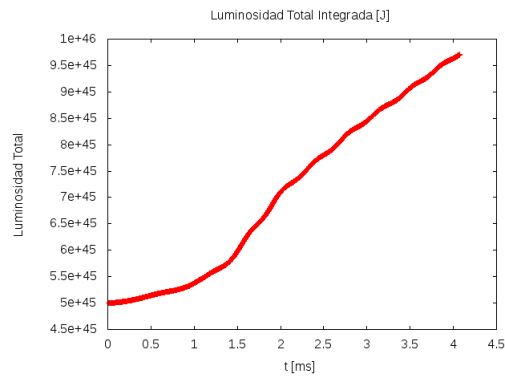


Figura 5-44: Luminosidad Total Integrada.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

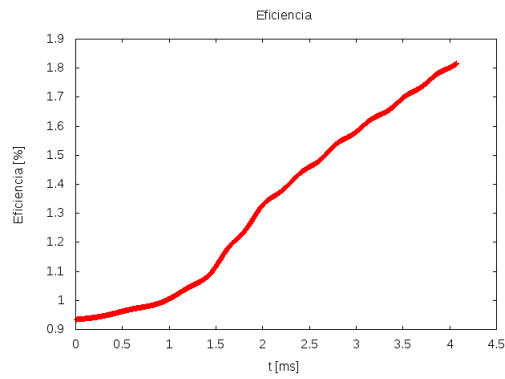


Figura 5-45: Eficiencia.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

5.1.6. Caso 6.  $q = 1$ ,  $M = 2.5 M_{\odot}$ ,  $R = 15.0 \text{ km}$ ,  $\rho_{0_3} = 2.634 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ .  
Tiempo de evolución =  $40 t_{ff}$ .

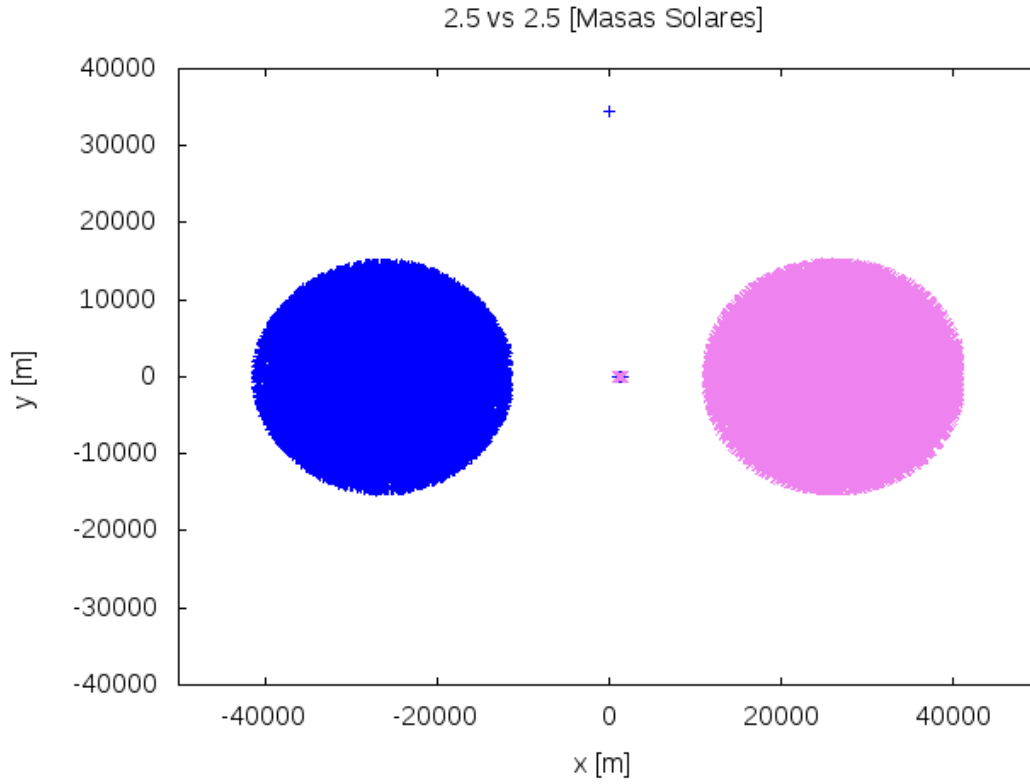
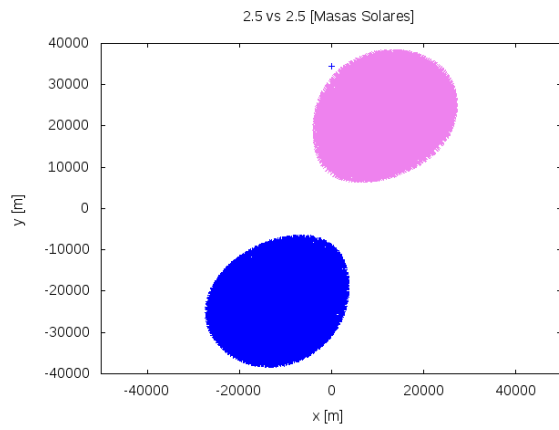
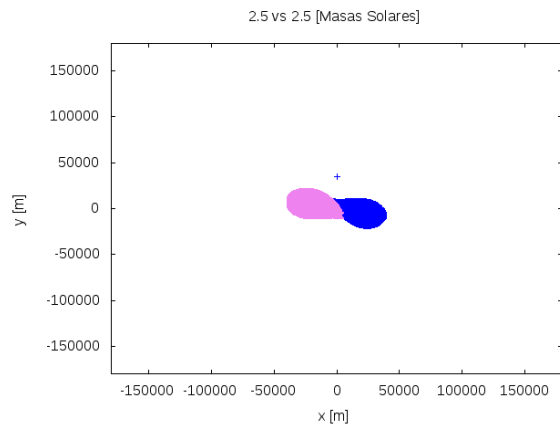


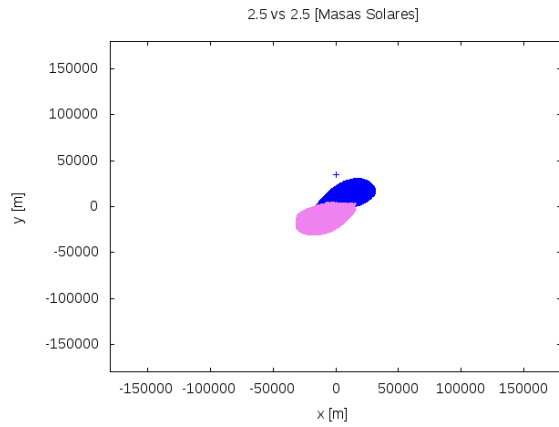
Figura 5-46: Configuración inicial. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado.



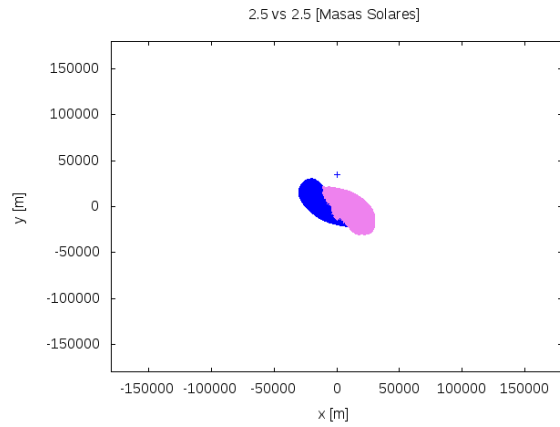
(a) Evolución del sistema a  $5t_{ff}$



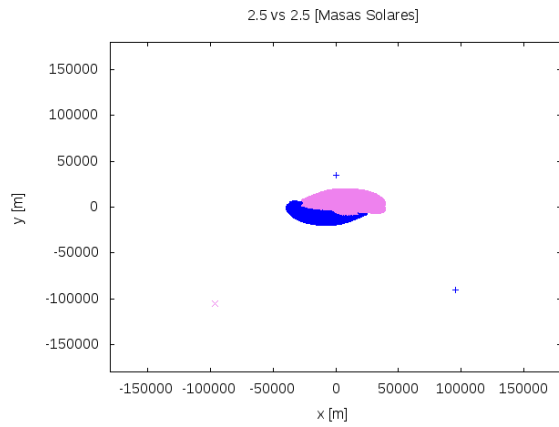
(b) Evolución del sistema a  $12t_{ff}$



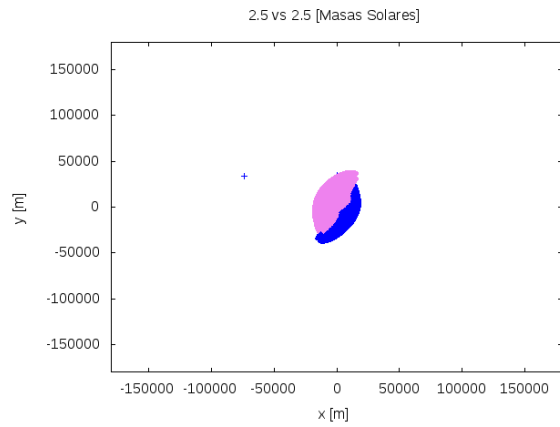
(c) Evolución del sistema a  $15t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $19t_{ff}$



(e) Evolución del sistema a  $21t_{ff}$



(f) Evolución del sistema a  $24t_{ff}$

Figura 5-47: Evolución del sistema. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado.

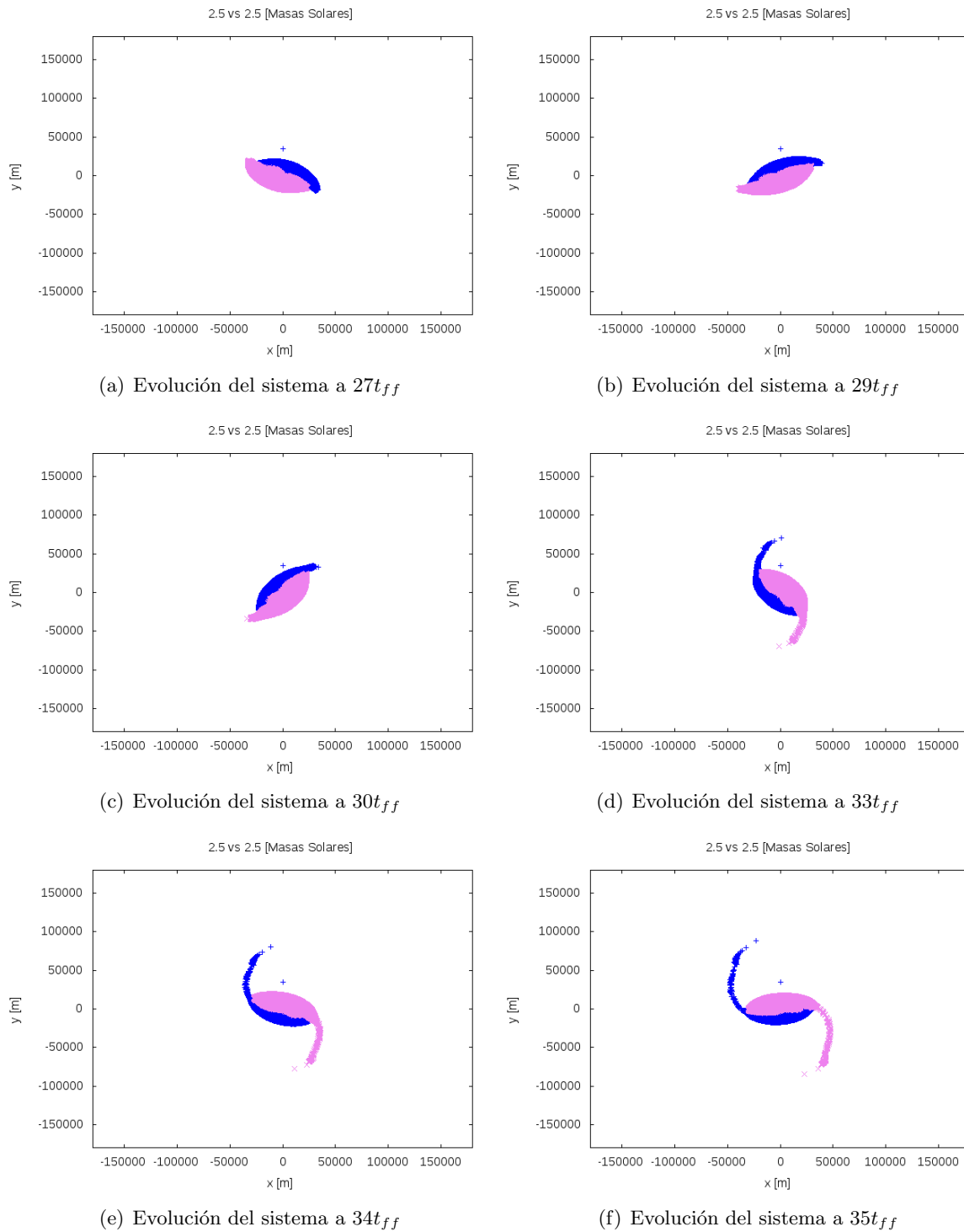
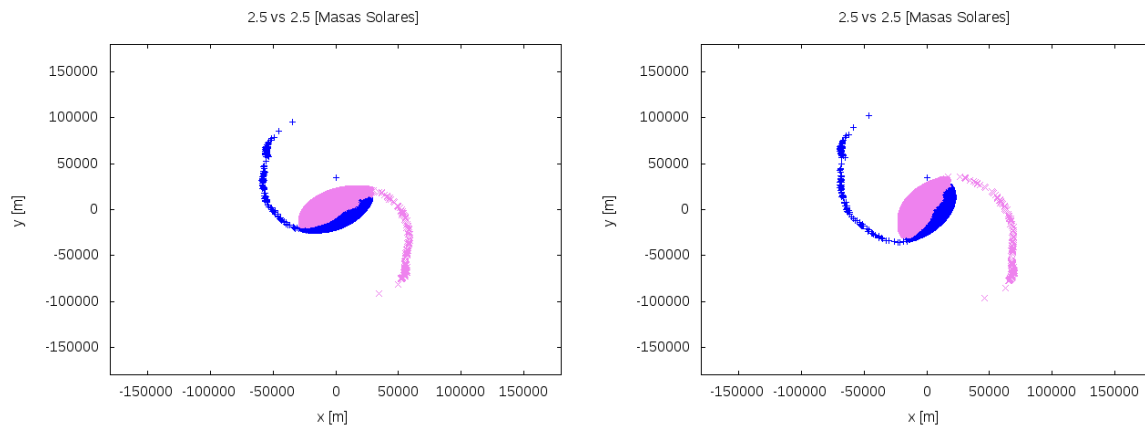
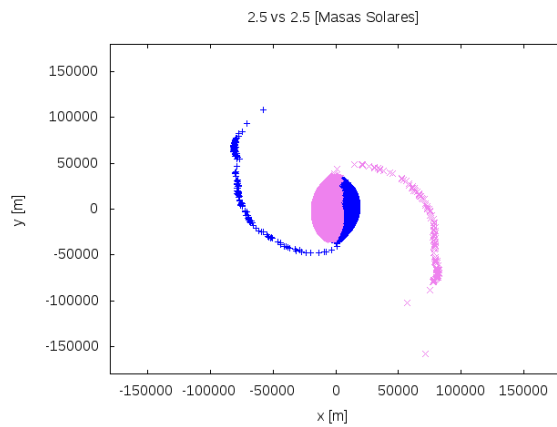


Figura 5-48: Evolución del sistema. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado.

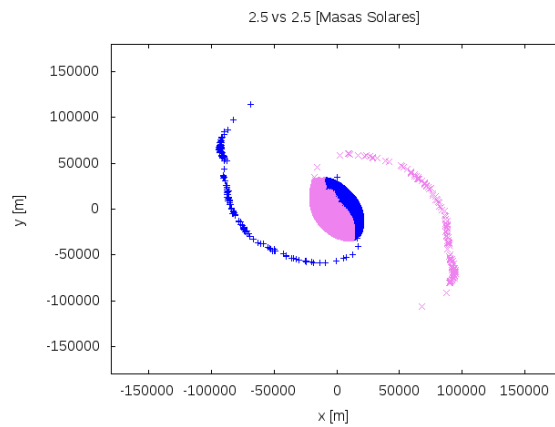


(a) Evolución del sistema a  $36t_{ff}$

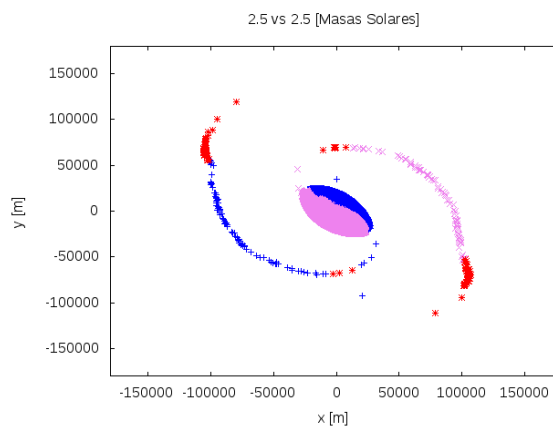
(b) Evolución del sistema a  $37t_{ff}$



(c) Evolución del sistema a  $38t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $39t_{ff}$



(e) Evolución del sistema a  $40t_{ff}$

Figura 5-49: Evolución del sistema, etapa final. Estrella 1 en azul, Estrella 2 en morado. La última gráfica muestra en rojo la materia que es expulsada.

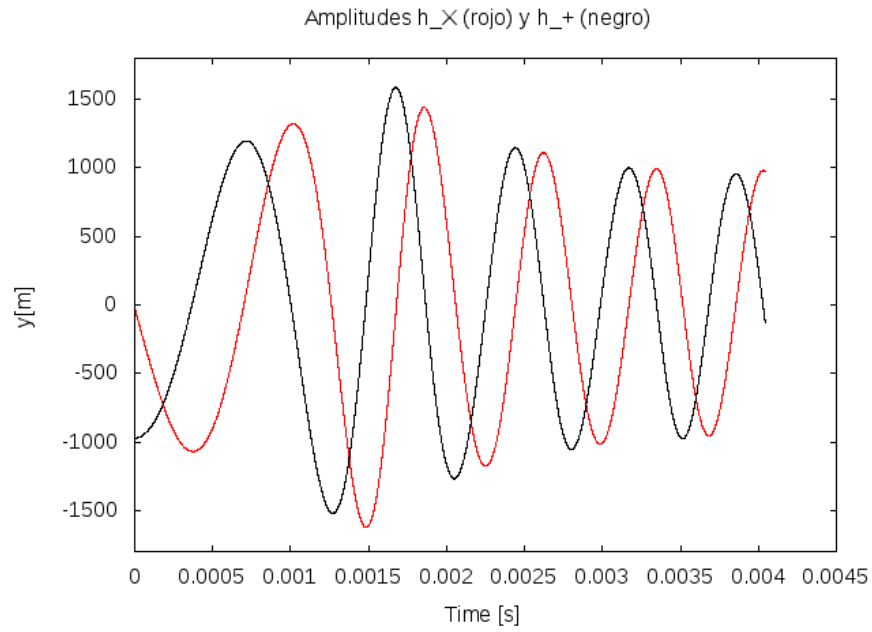


Figura 5-50: Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro).  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

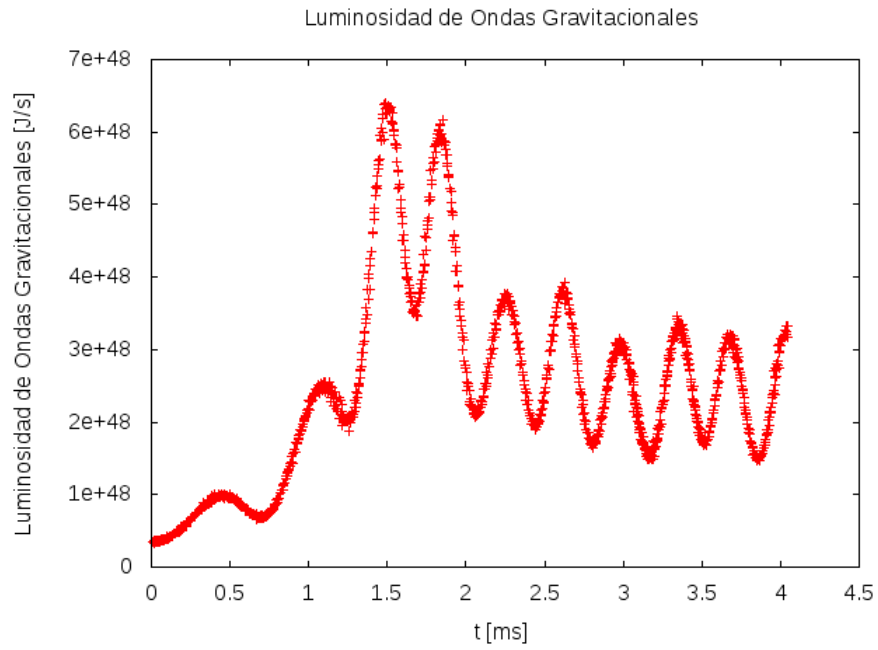


Figura 5-51: Luminosidad de Ondas Gravitacionales [J/s] vs tiempo [ms].  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

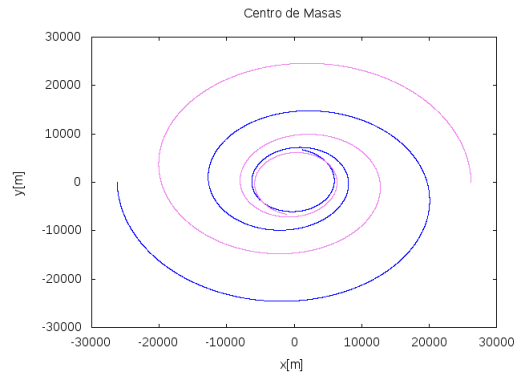


Figura 5-52: Trayectoria del Centro de Masa.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

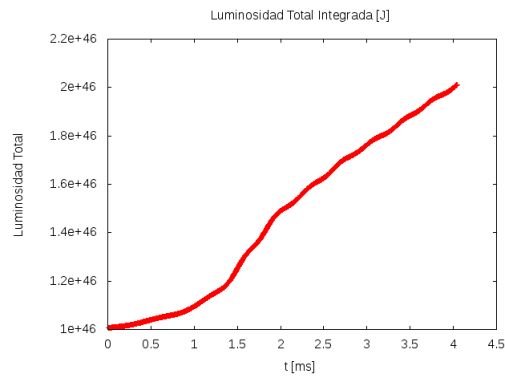


Figura 5-53: Luminosidad Total Integrada.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$

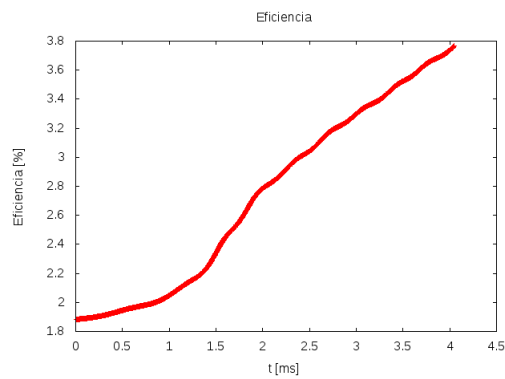


Figura 5-54: Eficiencia.  $M_{Estrella1} = M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$



5.1.7. Caso 7.  $q = 0.75$ ,  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.0 M_{\odot}$ ,  $R_{Estrella1} = 9.0 \text{ km}$ ,  $R_{Estrella2} = 12.0 \text{ km}$ ,  $\rho_{0_2} = 2.634 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ . Tiempo de evolución =  $40 t_{ff}$ .

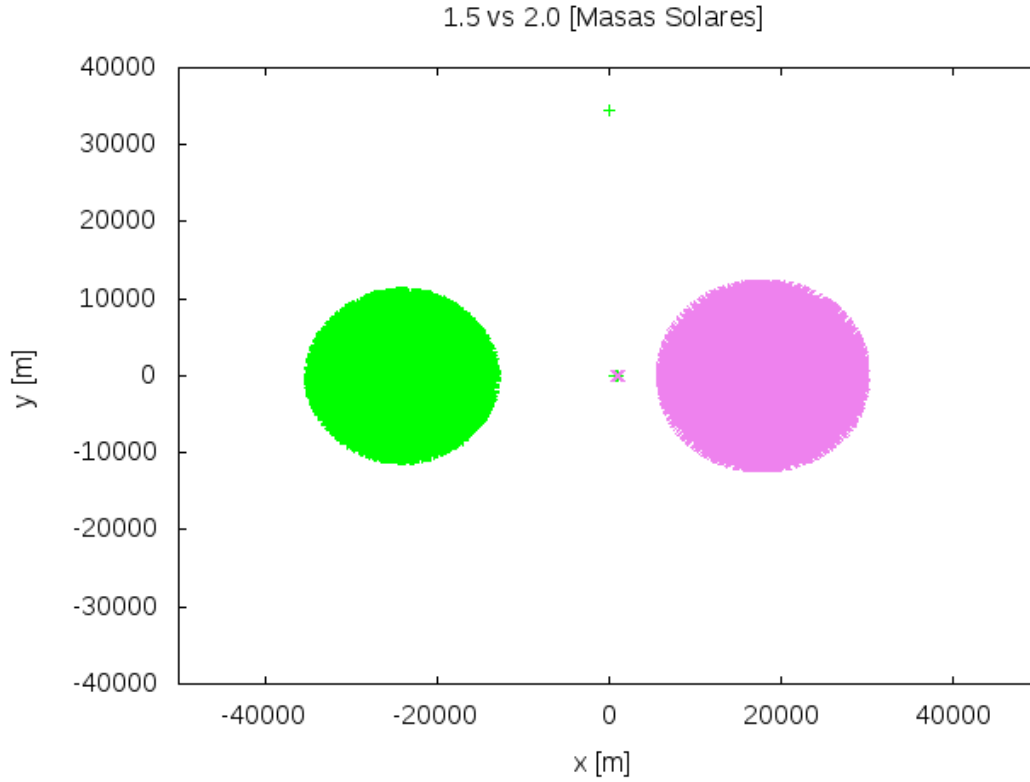
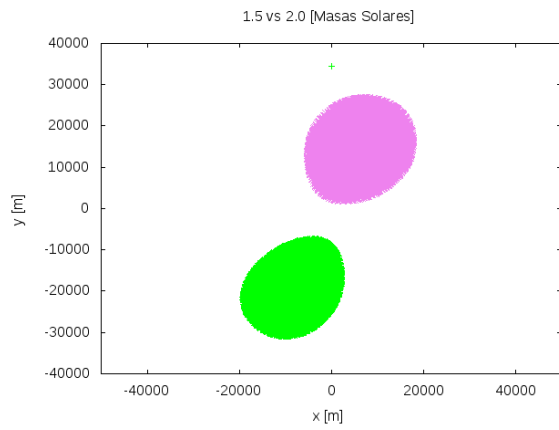
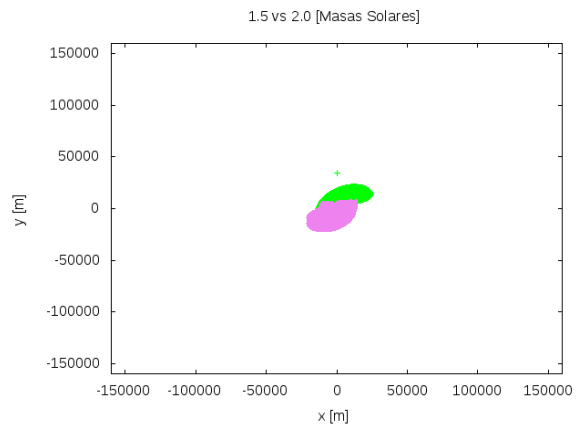


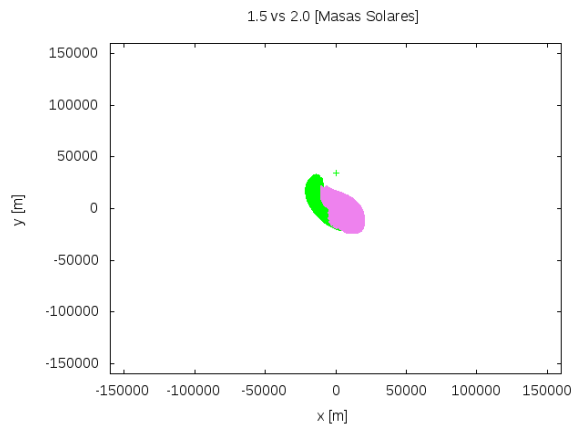
Figura 5-55: Configuración inicial. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado.



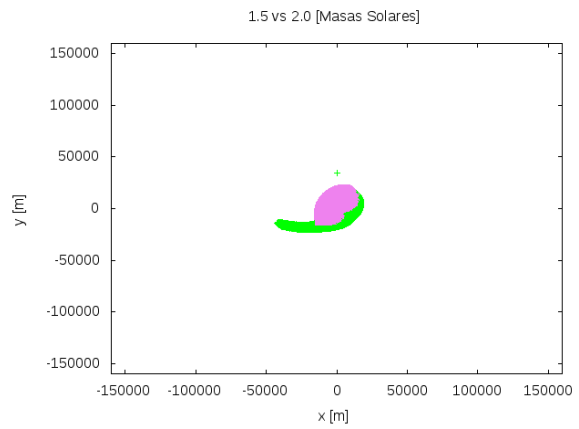
(a) Evolución del sistema a  $5t_{ff}$



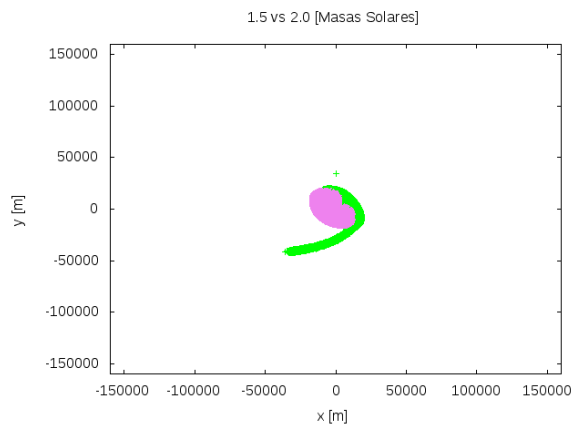
(b) Evolución del sistema a  $12t_{ff}$



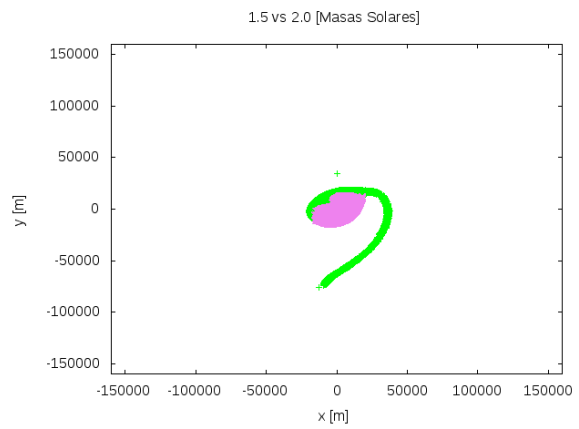
(c) Evolución del sistema a  $15t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $19t_{ff}$



(e) Evolución del sistema a  $21t_{ff}$



(f) Evolución del sistema a  $24t_{ff}$

Figura 5-56: Evolución del sistema. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado.

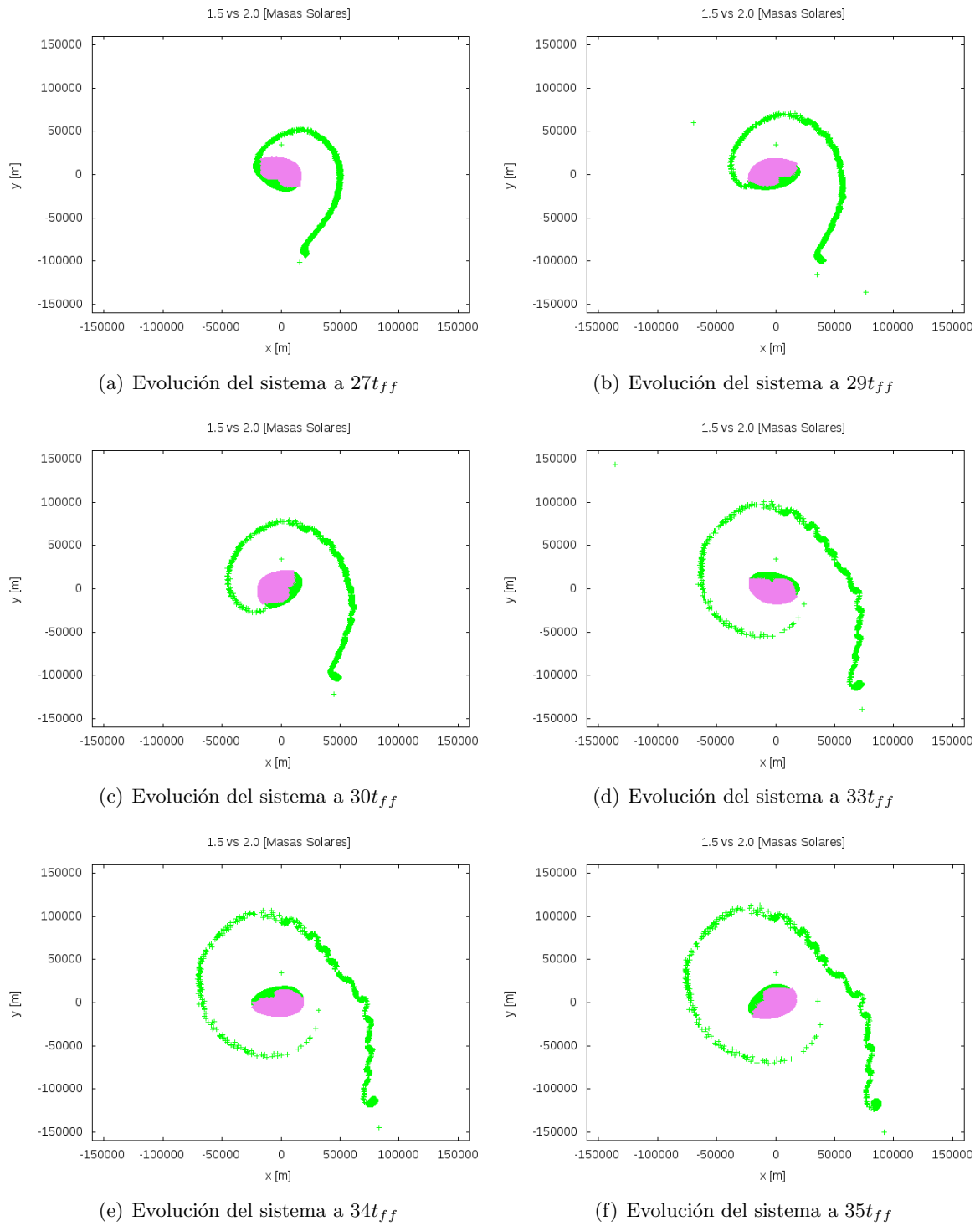


Figura 5-57: Evolución del sistema. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado.

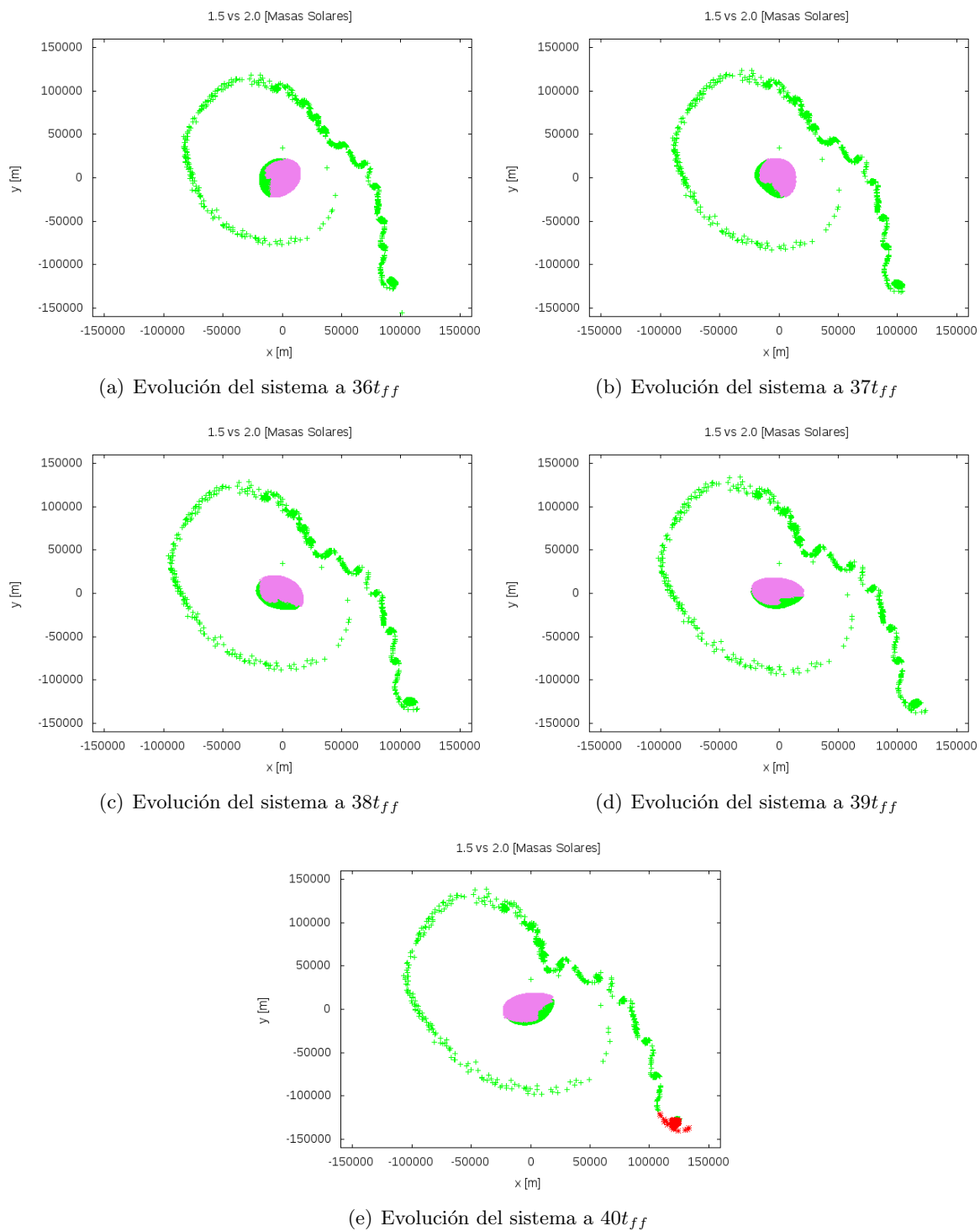


Figura 5-58: Evolución del sistema, etapa final. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado. La última gráfica muestra en rojo la materia que es expulsada.

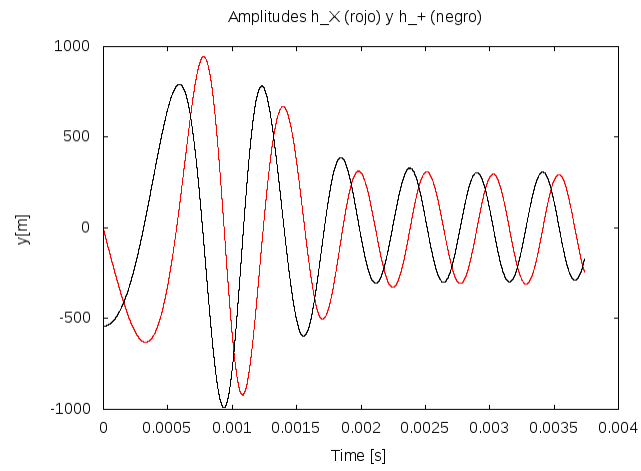


Figura 5-59: Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro).  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$ .

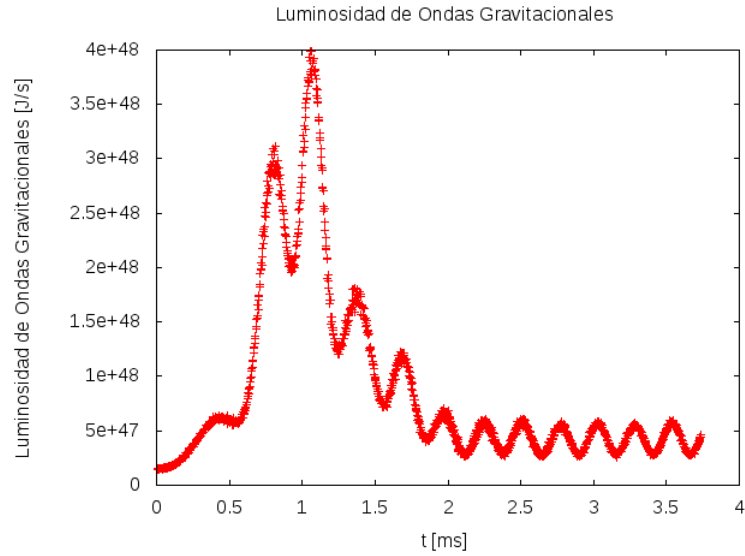


Figura 5-60: Luminosidad de Ondas Gravitacionales [J/s] vs tiempo [ms].  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$ .

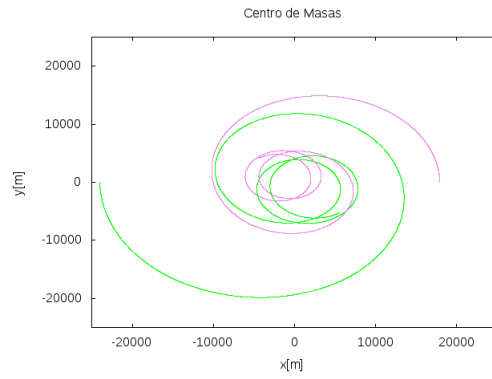


Figura 5-61: Trayectoria del Centro de Masa.  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$ .

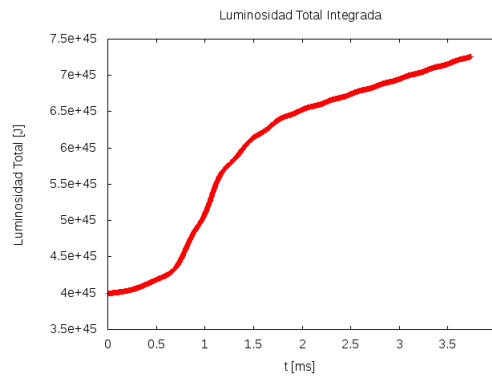


Figura 5-62: Luminosidad Total Integrada.  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$ .

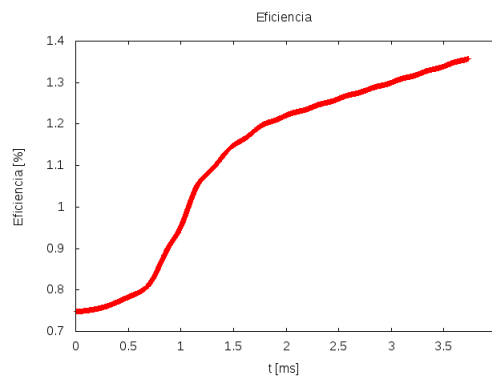


Figura 5-63: Eficiencia.  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{02}$ .

5.1.8. Caso 8.  $q = 0.75$ ,  $M_{Estrella1} = 1.5 M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.0 M_{\odot}$ ,  $R_{Estrella1} = 9.0 \text{ km}$ ,  $R_{Estrella2} = 12.0 \text{ km}$ ,  $\rho_{03} = 2.634 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ . Tiempo de evolución =  $120 t_{ff}$ .

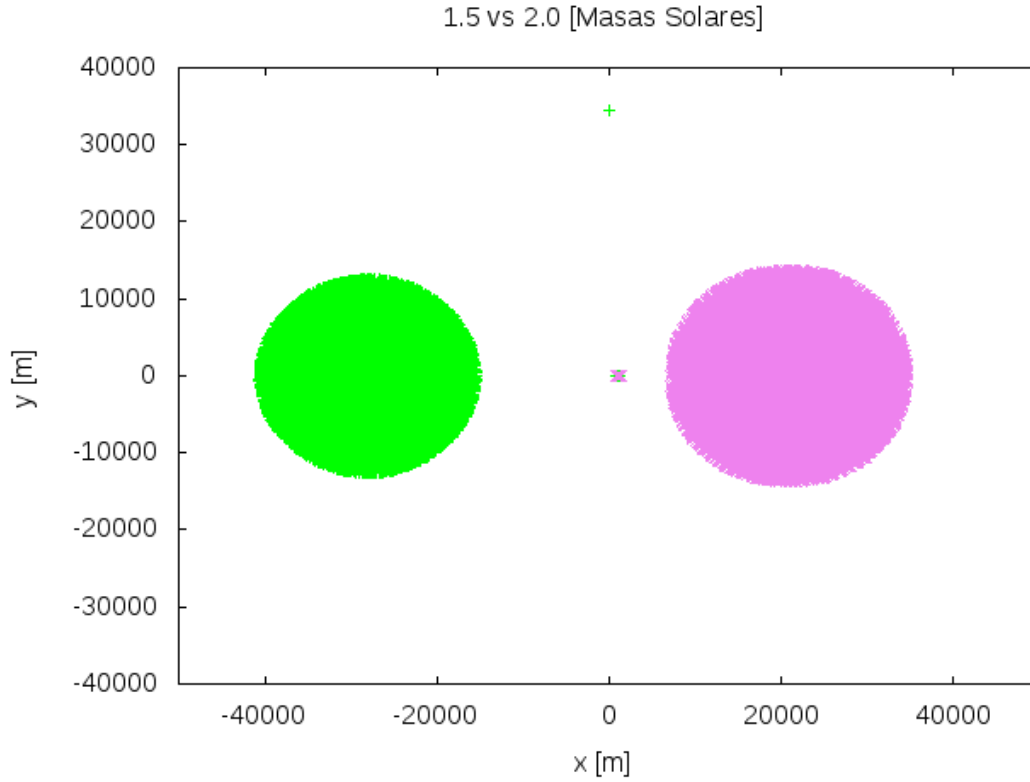
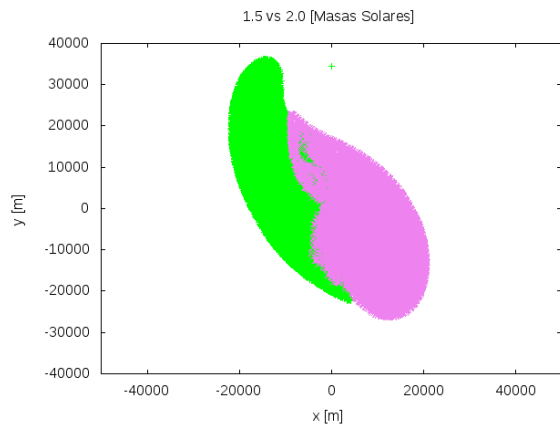
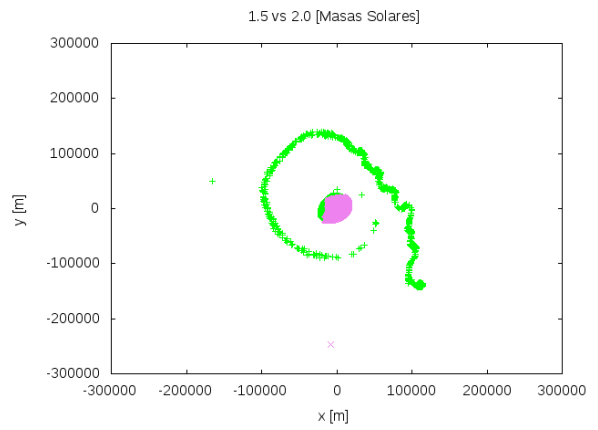


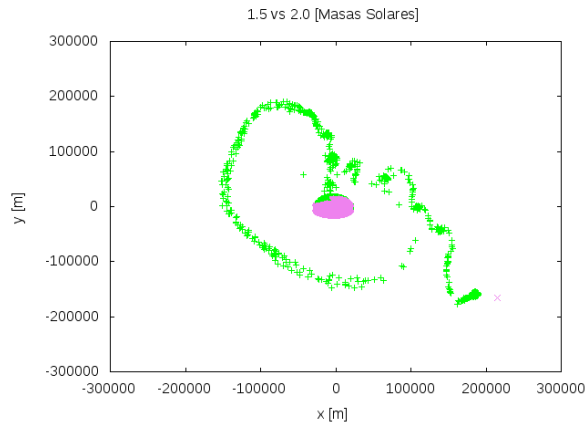
Figura 5-64: Configuración inicial. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado.



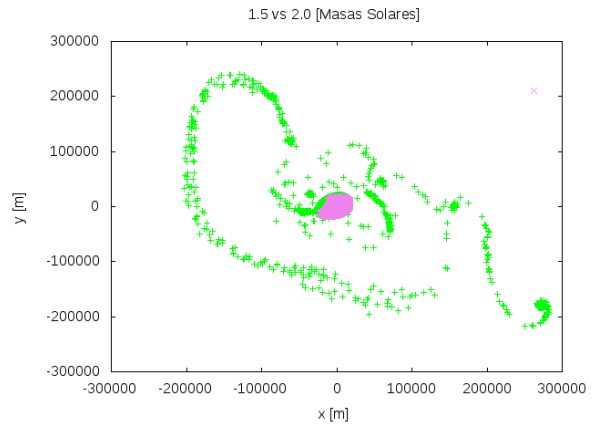
(a) Evolución del sistema a  $15t_{ff}$



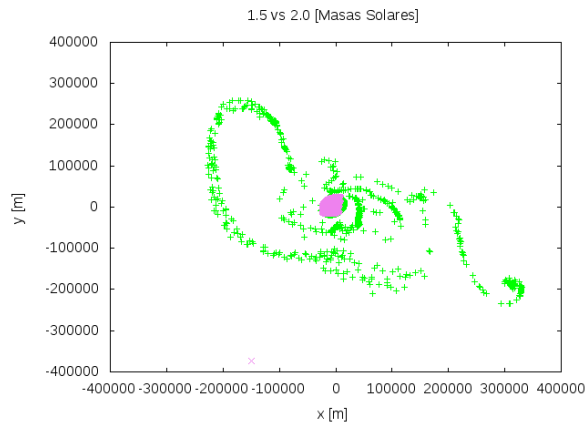
(b) Evolución del sistema a  $36t_{ff}$



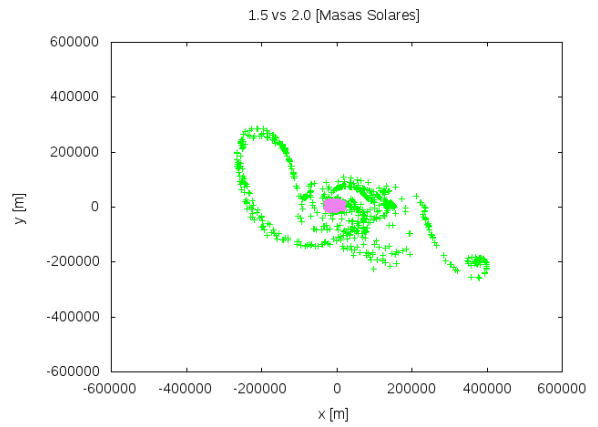
(c) Evolución del sistema a  $45t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $57t_{ff}$



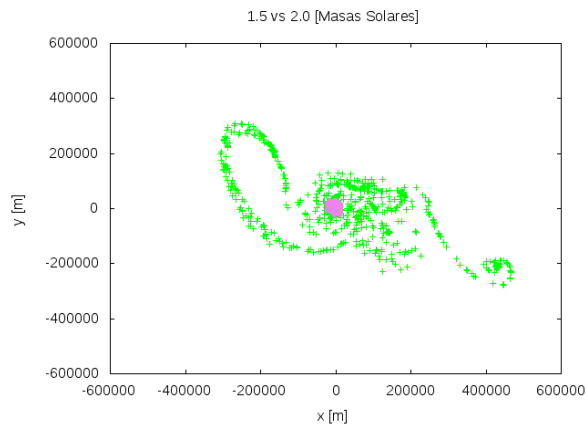
(e) Evolución del sistema a  $63t_{ff}$



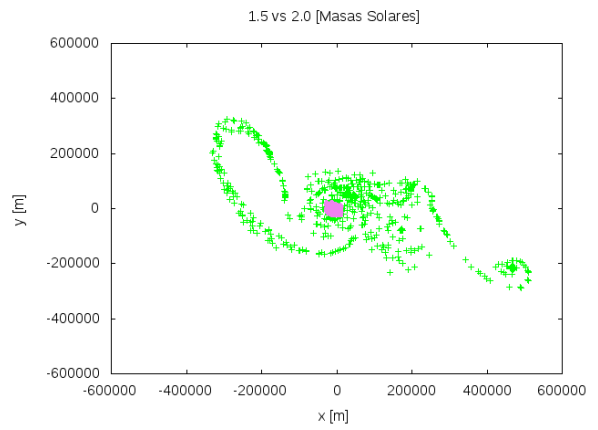
(f) Evolución del sistema a  $72t_{ff}$

Figura 5-65: Evolución del sistema. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado.

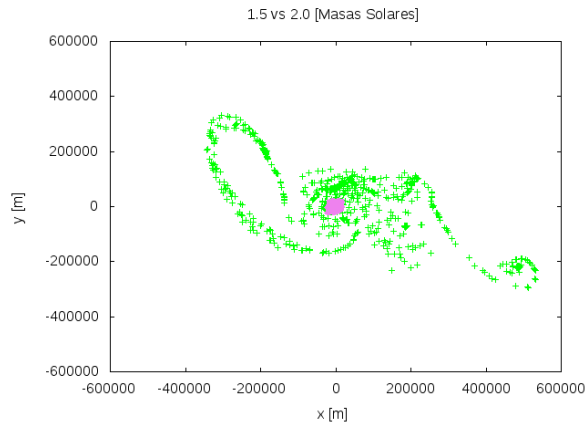




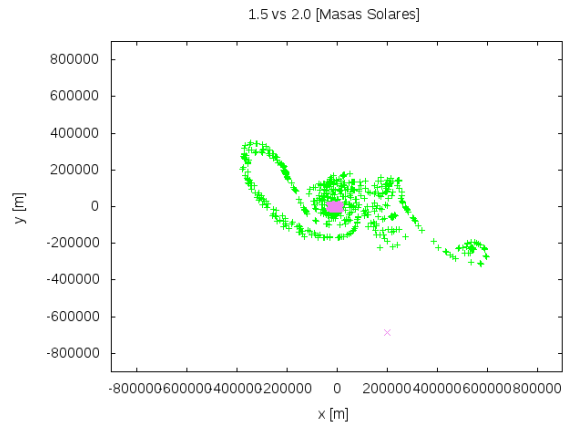
(a) Evolución del sistema a  $81t_{ff}$



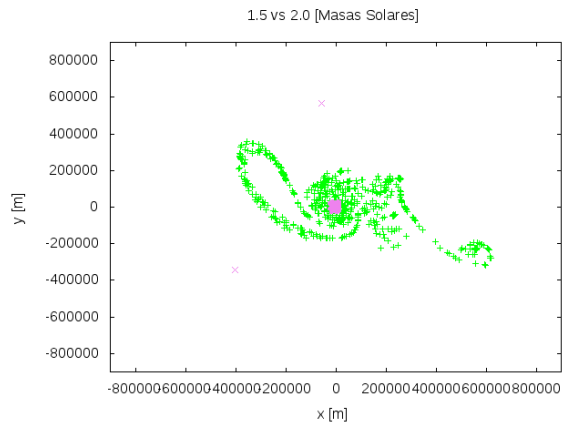
(b) Evolución del sistema a  $87t_{ff}$



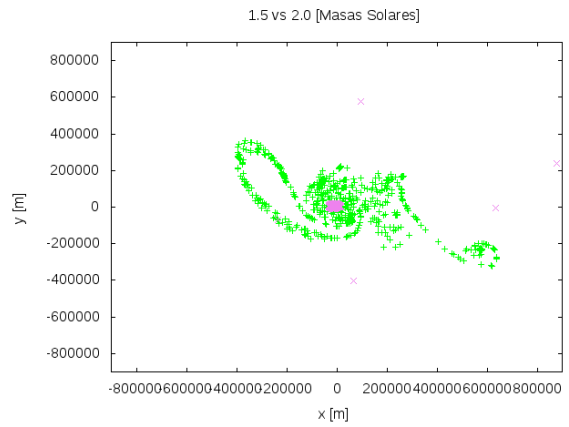
(c) Evolución del sistema a  $90t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $99t_{ff}$



(e) Evolución del sistema a  $102t_{ff}$



(f) Evolución del sistema a  $105t_{ff}$

Figura 5-66: Evolución del sistema. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado.

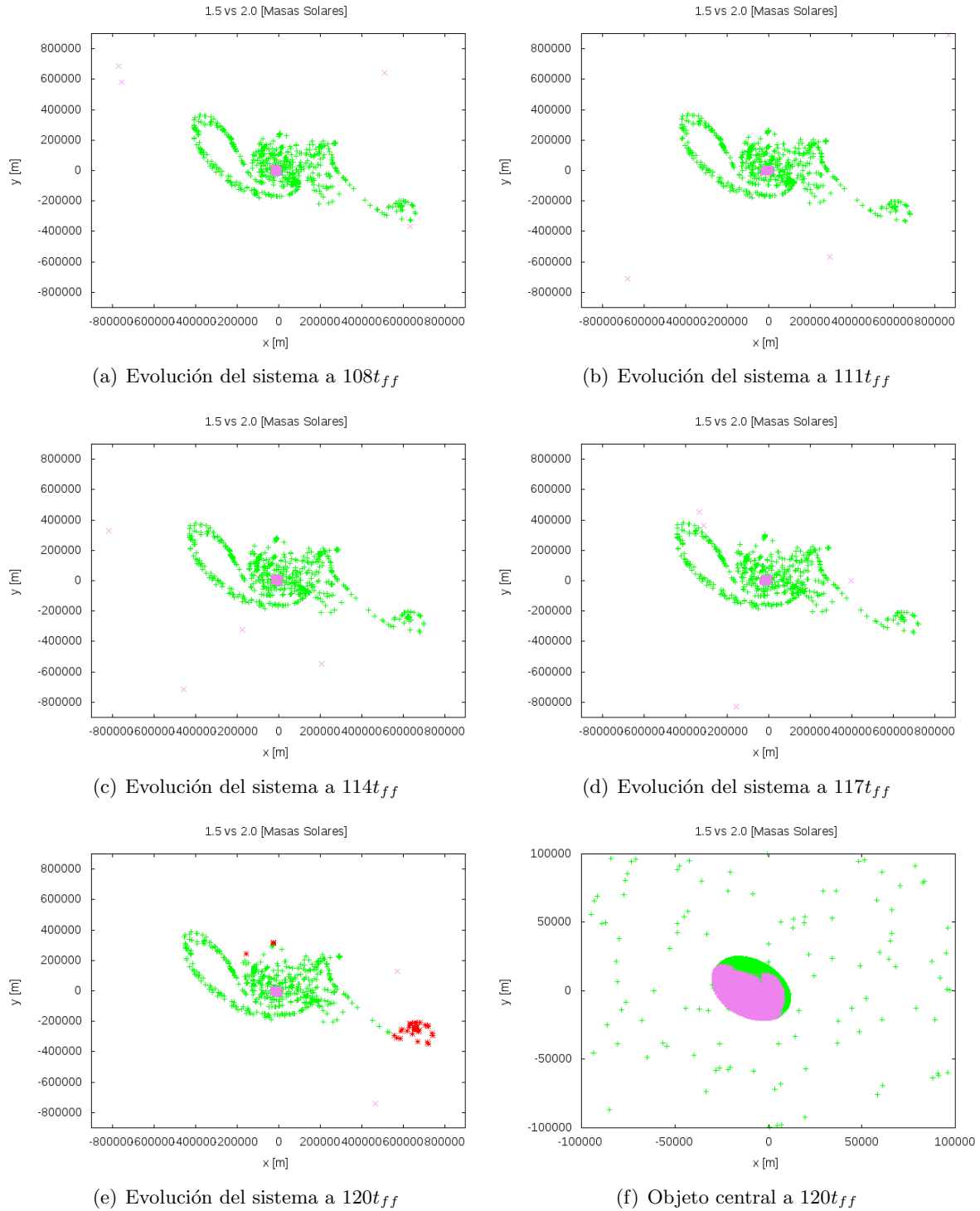


Figura 5-67: Evolución del sistema, etapa final. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado. La penúltima gráfica muestra en rojo la materia que es expulsada, la última es un acercamiento al objeto central.

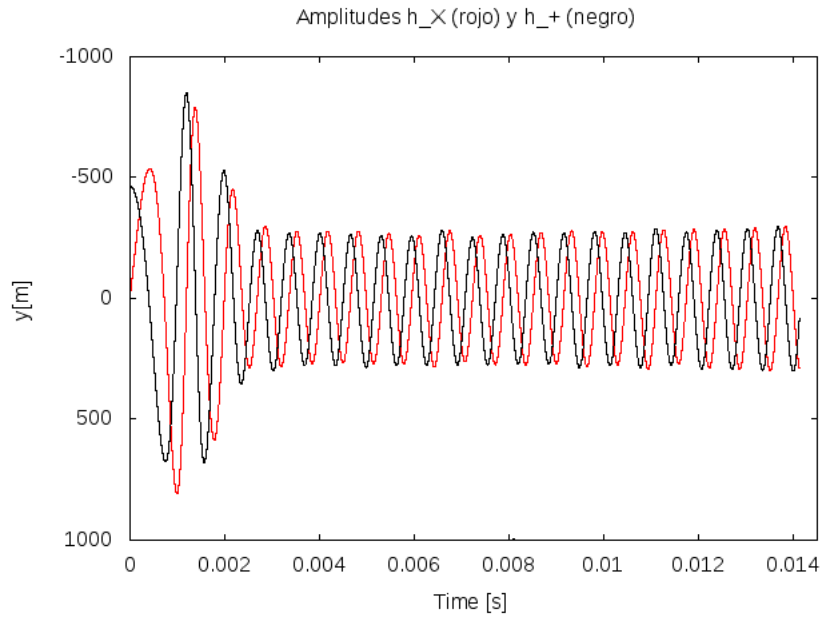


Figura 5-68: Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro).  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

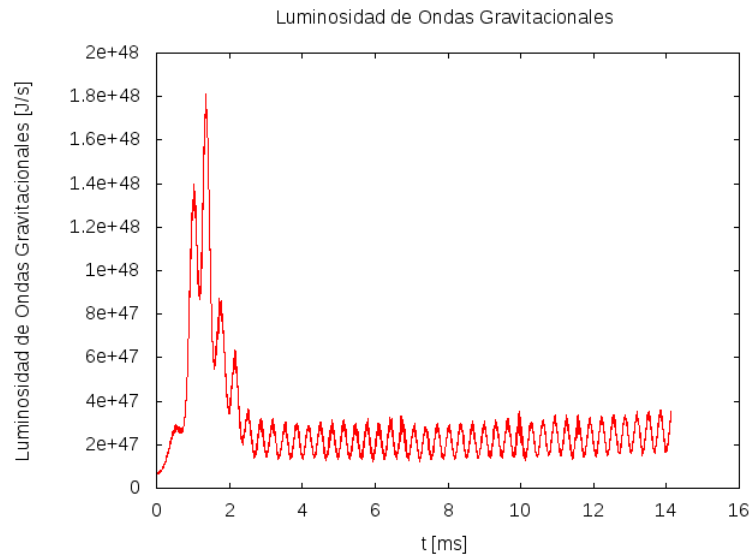


Figura 5-69: Luminosidad de Ondas Gravitacionales [J/s] vs tiempo [ms].  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

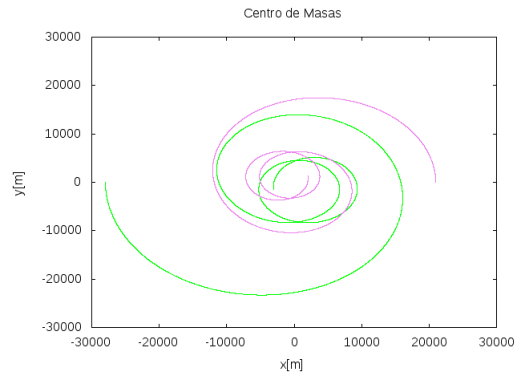


Figura 5-70: Trayectoria del Centro de Masa.  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

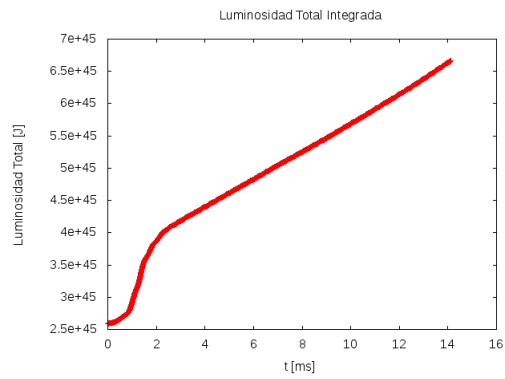


Figura 5-71: Luminosidad Total Integrada.  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

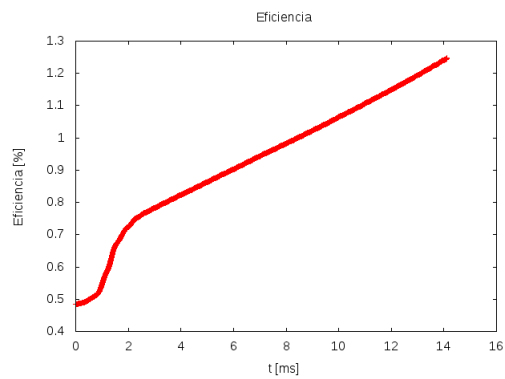


Figura 5-72: Eficiencia.  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.0M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

5.1.9. Caso 9.  $q = 0.8$ ,  $M_{Estrella1} = 2.0 M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.5 M_{\odot}$ ,  $R_{Estrella1} = 12.0 \text{ km}$ ,  $R_{Estrella2} = 15.0 \text{ km}$ ,  $\rho_{03} = 2.634 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ . Tiempo de evolución =  $186 t_{ff}$ .

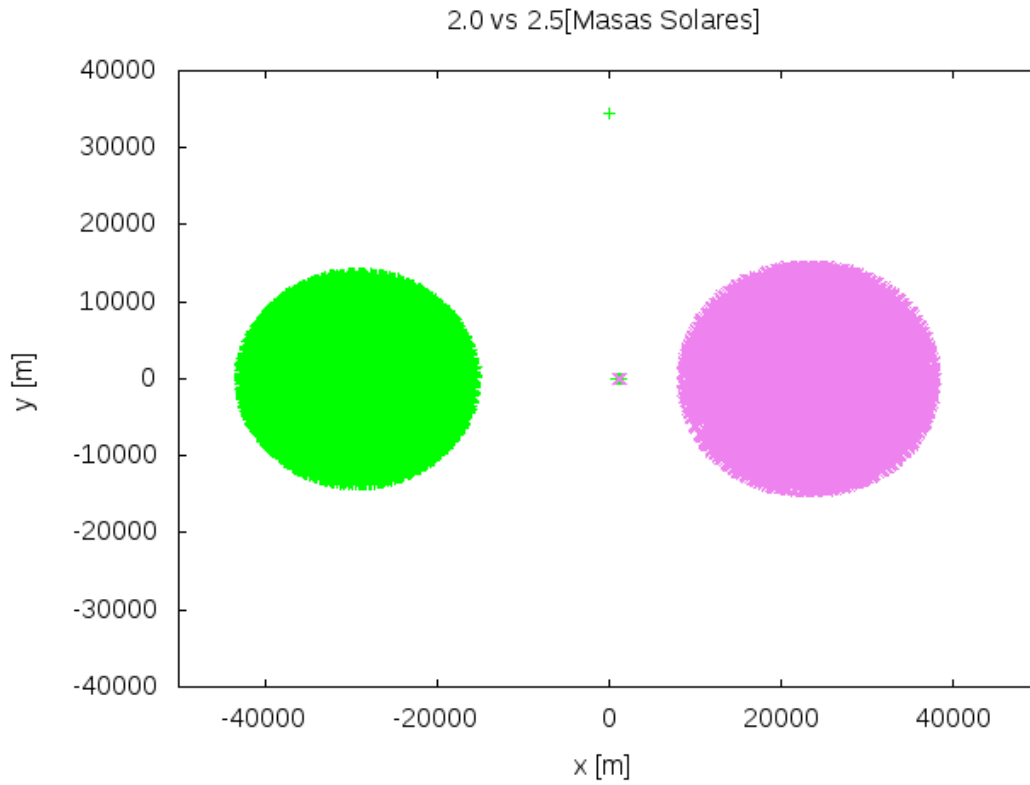
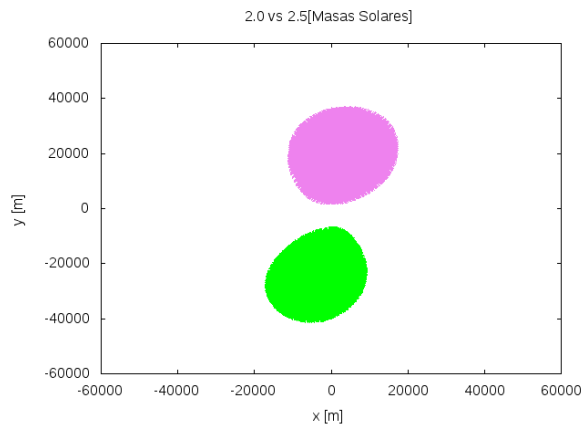
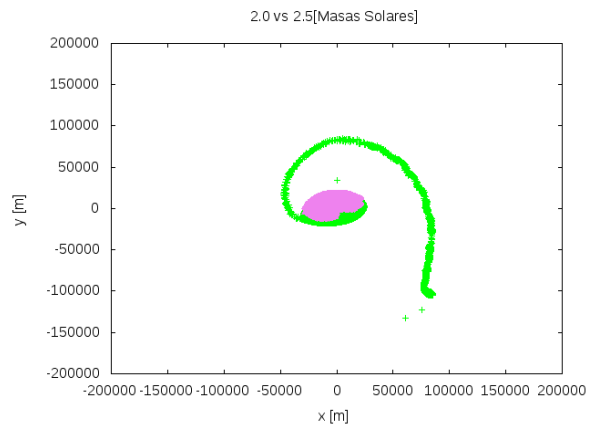


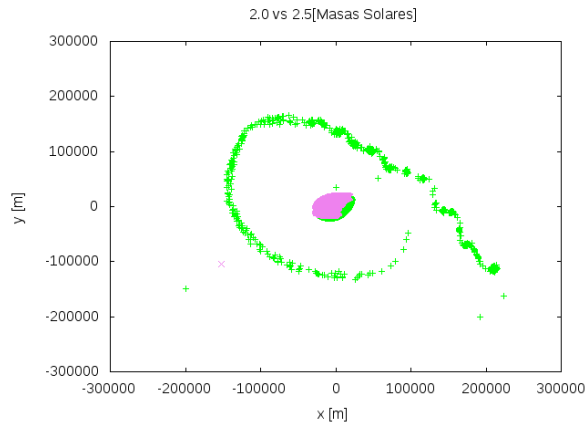
Figura 5-73: Configuración inicial. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado.



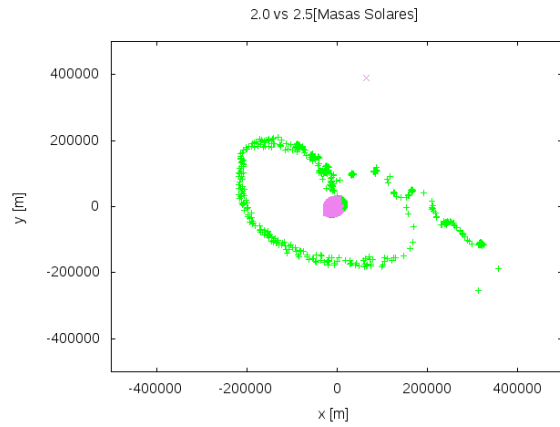
(a) Evolución del sistema a  $6t_{ff}$



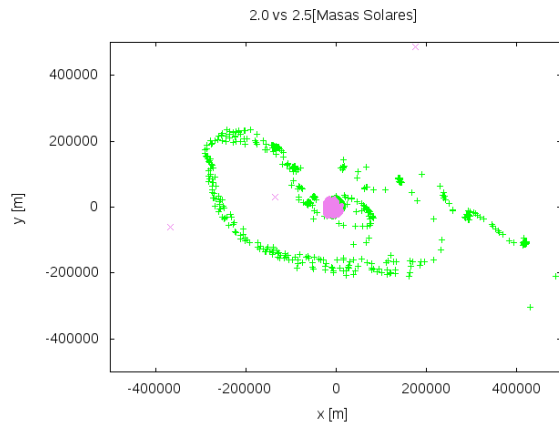
(b) Evolución del sistema a  $30t_{ff}$



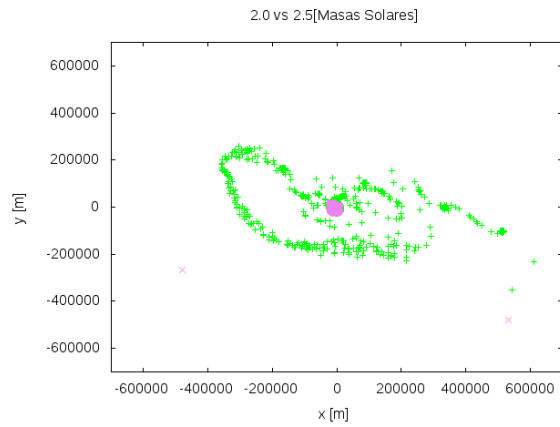
(c) Evolución del sistema a  $42t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $54t_{ff}$

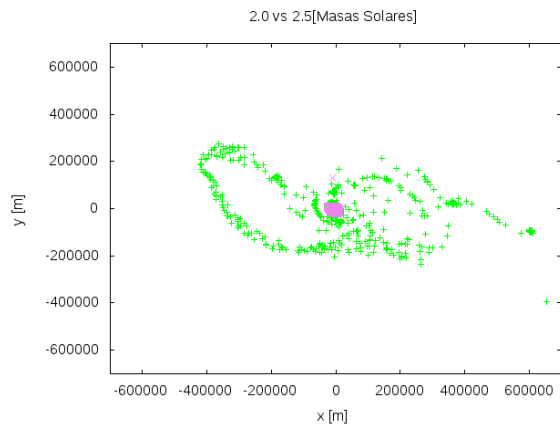


(e) Evolución del sistema a  $66t_{ff}$

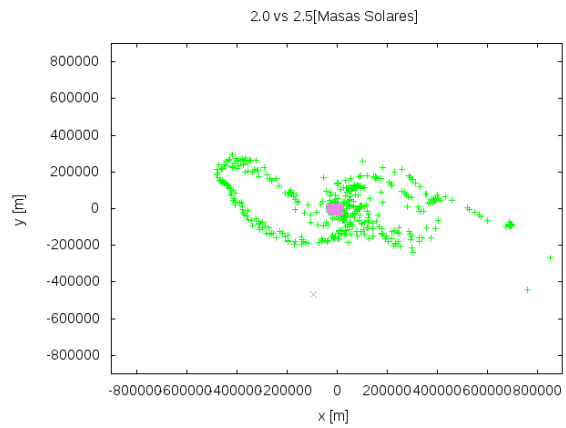


(f) Evolución del sistema a  $78t_{ff}$

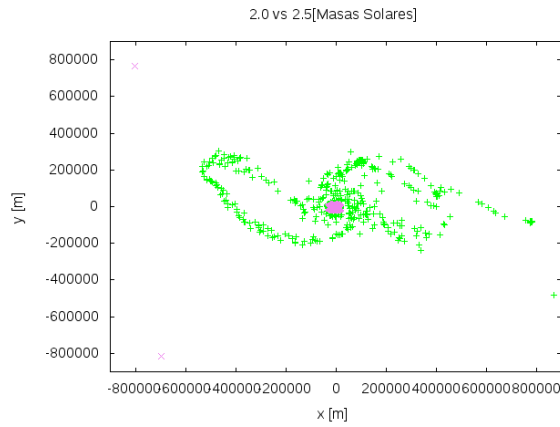
Figura 5-74: Evolución del sistema. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado.



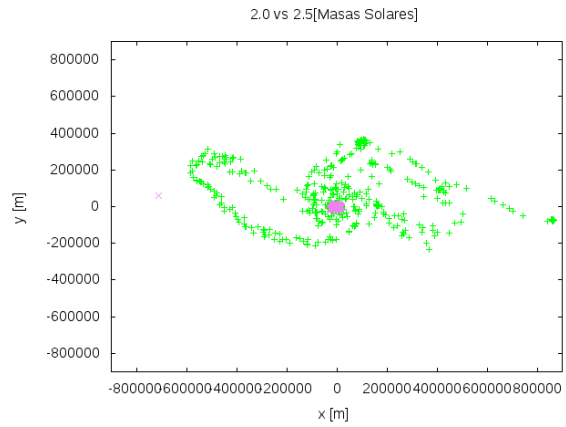
(a) Evolución del sistema a  $90t_{ff}$



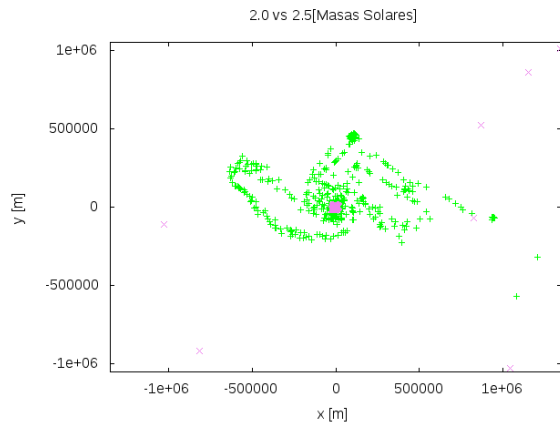
(b) Evolución del sistema a  $102t_{ff}$



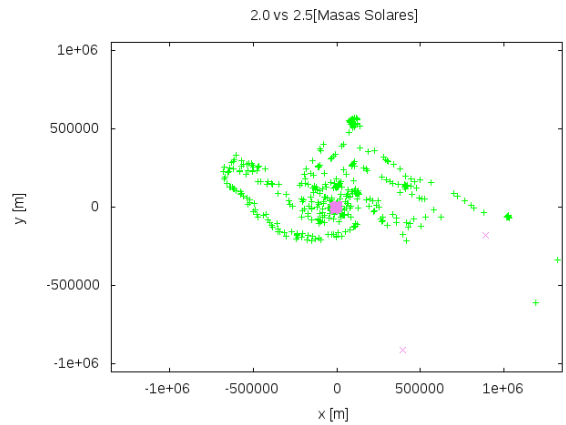
(c) Evolución del sistema a  $114t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $126t_{ff}$

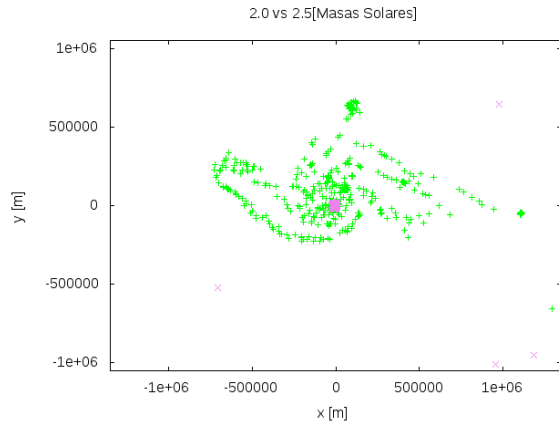


(e) Evolución del sistema a  $138t_{ff}$

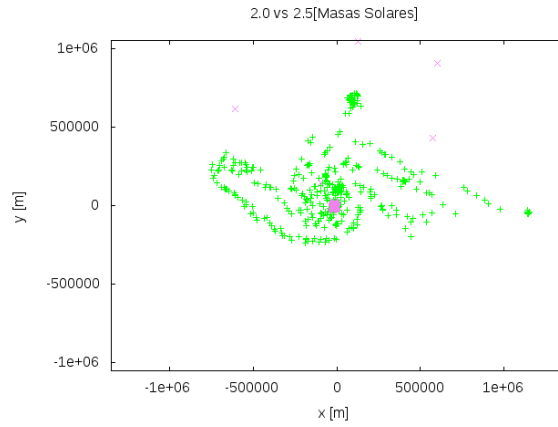


(f) Evolución del sistema a  $150t_{ff}$

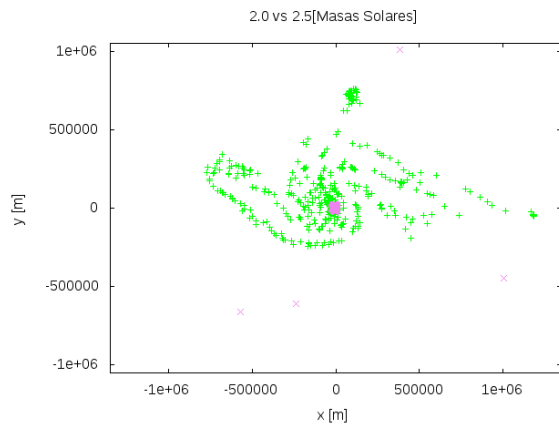
Figura 5-75: Evolución del sistema. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado.



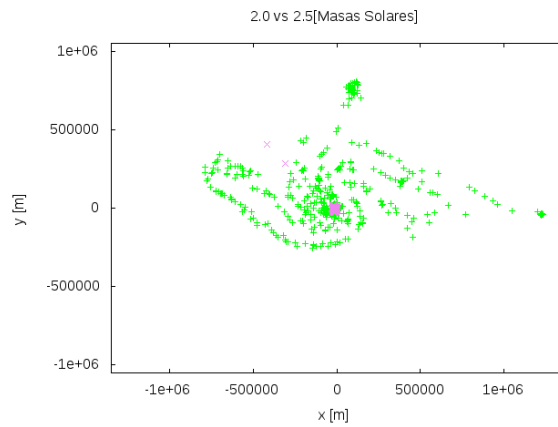
(a) Evolución del sistema a  $162t_{ff}$



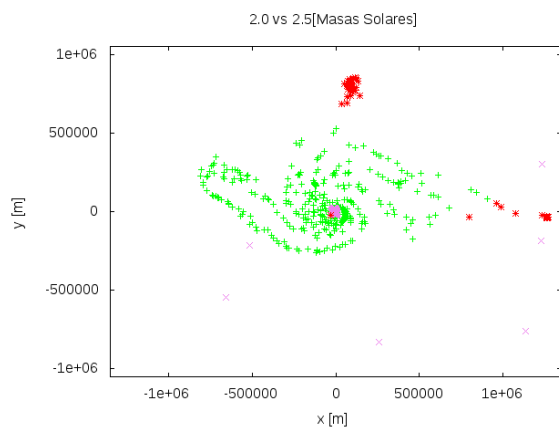
(b) Evolución del sistema a  $168t_{ff}$



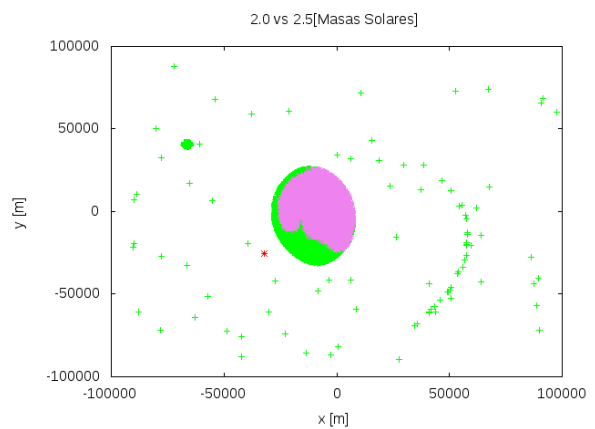
(c) Evolución del sistema a  $174t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $180t_{ff}$



(e) Evolución del sistema a  $186t_{ff}$



(f) Objeto central a  $186t_{ff}$

Figura 5-76: Evolución del sistema, etapa final. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado. La penúltima gráfica muestra en rojo la materia que es expulsada, la última es un acercamiento al objeto central.



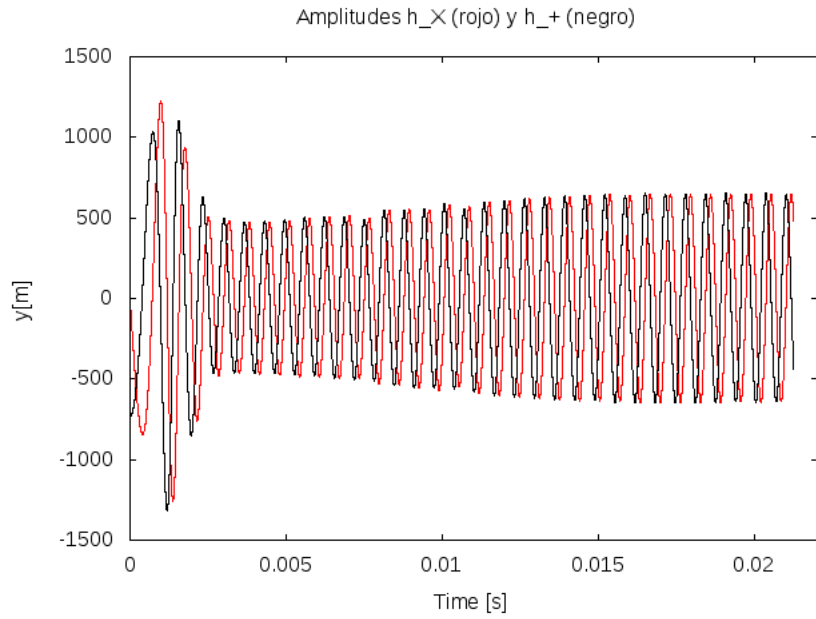


Figura 5-77: Amplitudes  $h_{\times}$  (rojo) y  $h_{+}$  (negro).  $M_{Estrella1} = 2.0M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

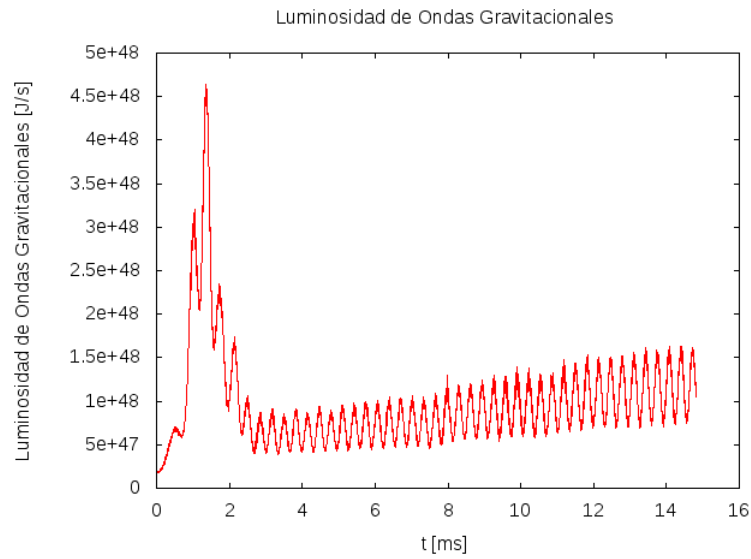


Figura 5-78: Luminosidad de Ondas Gravitacionales [J/s] vs tiempo [ms].  $M_{Estrella1} = 2.0M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

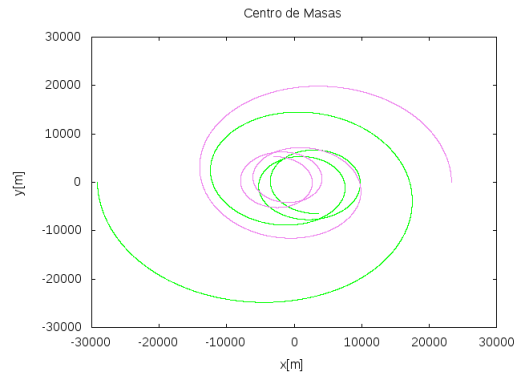


Figura 5-79: Trayectoria del Centro de Masa.  $M_{Estrella1} = 2.0M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

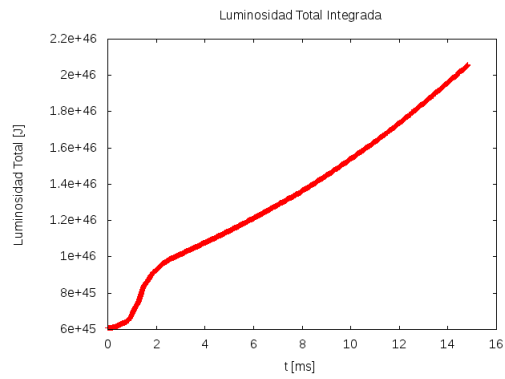


Figura 5-80: Luminosidad Total Integrada.  $M_{Estrella1} = 2.0M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

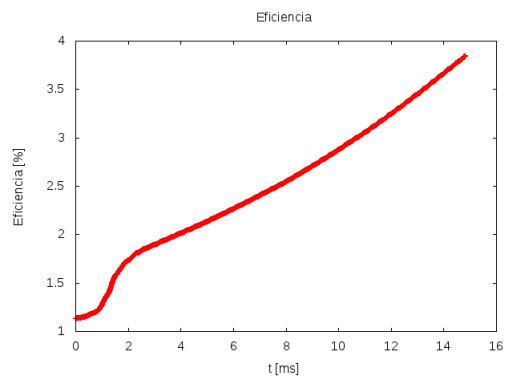


Figura 5-81: Eficiencia.  $M_{Estrella1} = 2.0M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

5.1.10. Caso 10.  $q = 0.6$ ,  $M_{Estrella1} = 1.5 M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.5 M_{\odot}$ ,  $R_{Estrella1} = 9.0 \text{ km}$ ,  $R_{Estrella2} = 15.0 \text{ km}$ ,  $\rho_{03} = 2.634 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ . Tiempo de evolución =  $198 t_{ff}$ .

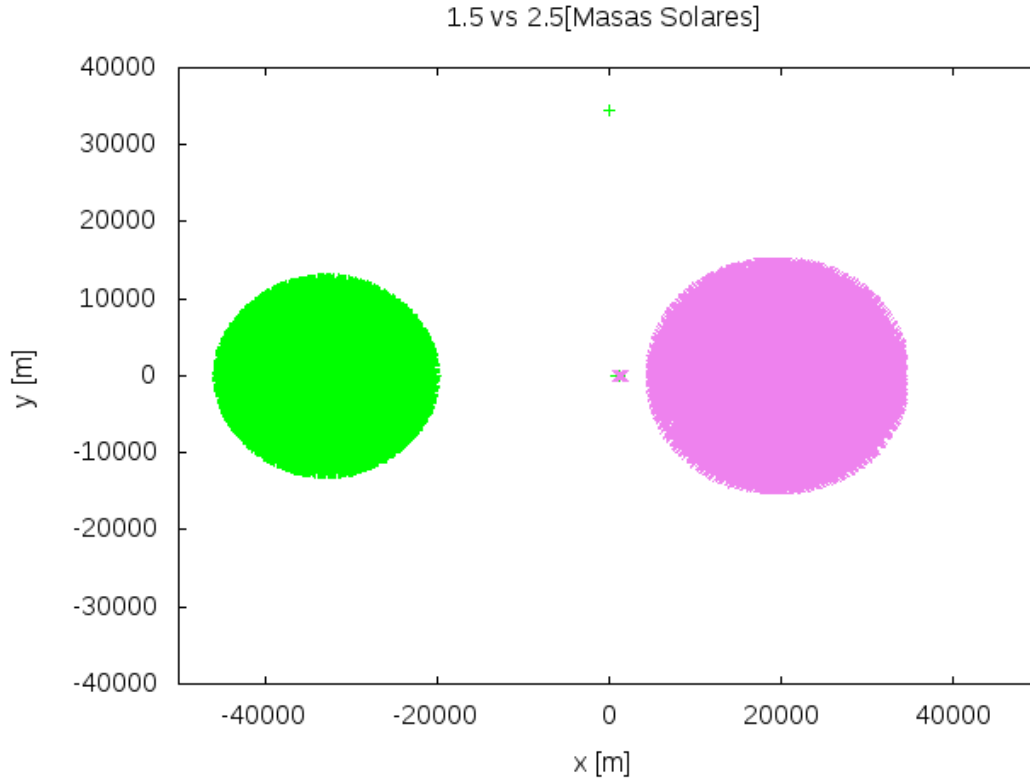


Figura 5-82: Configuración inicial. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado.

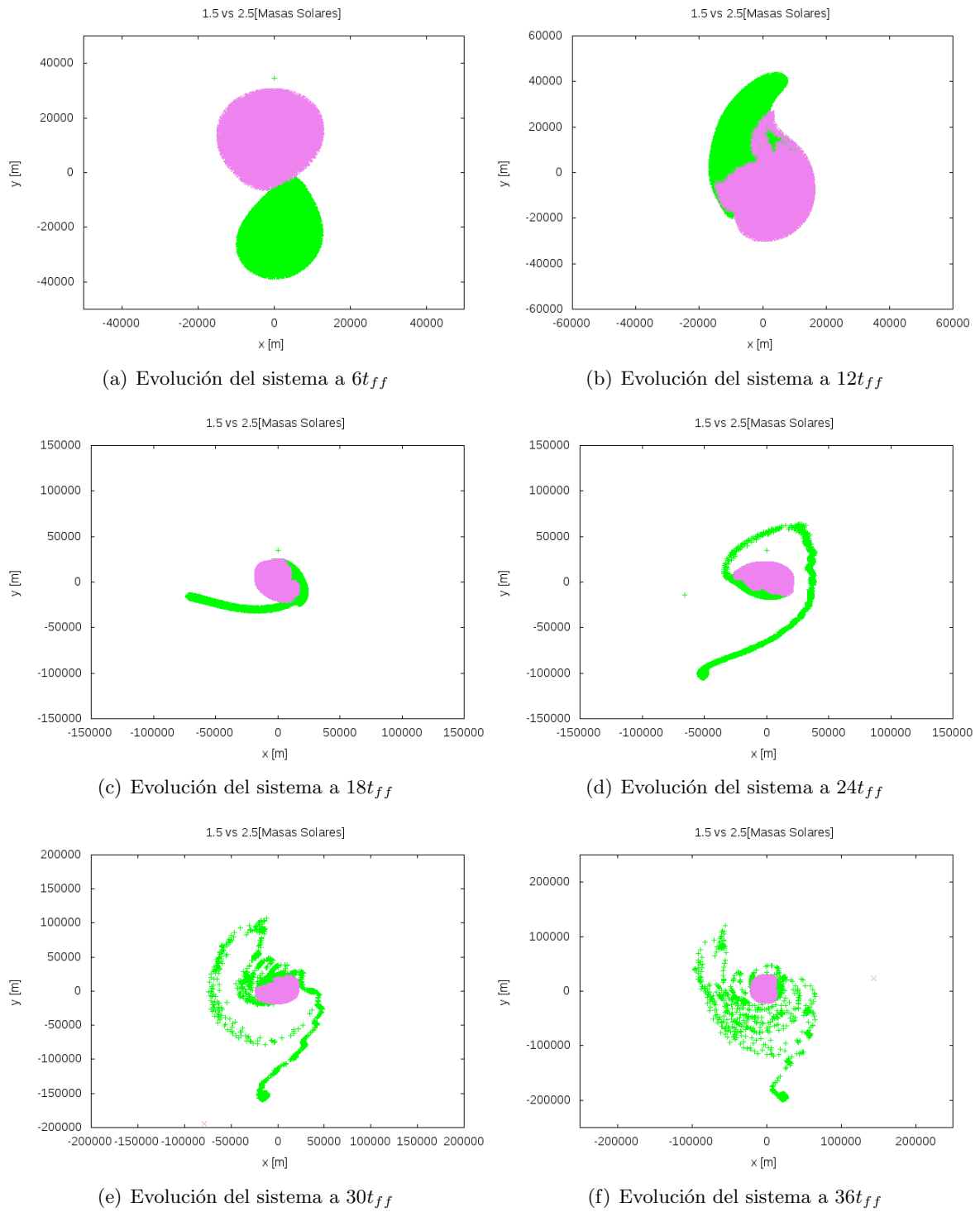


Figura 5-83: Evolución del sistema. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado.

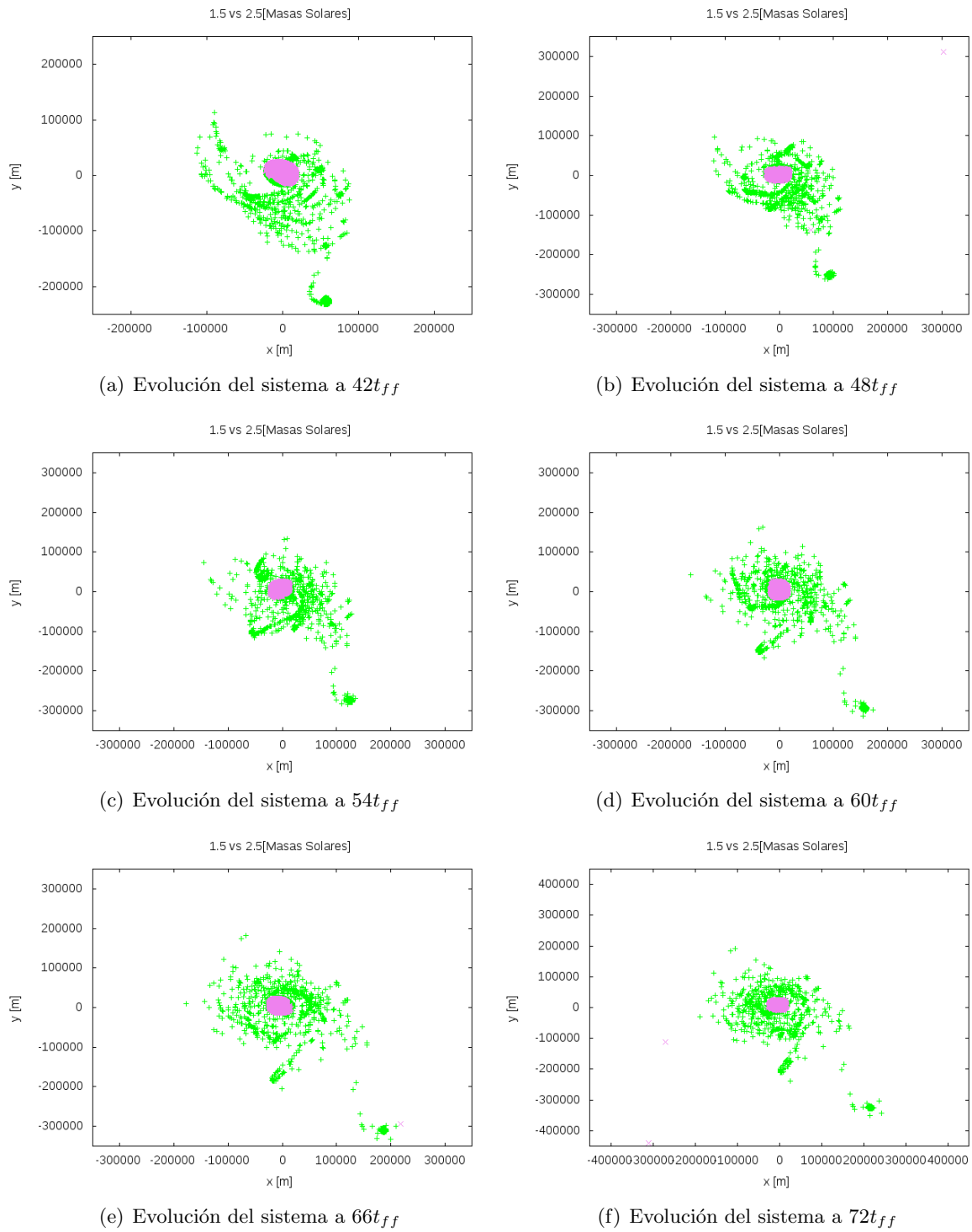
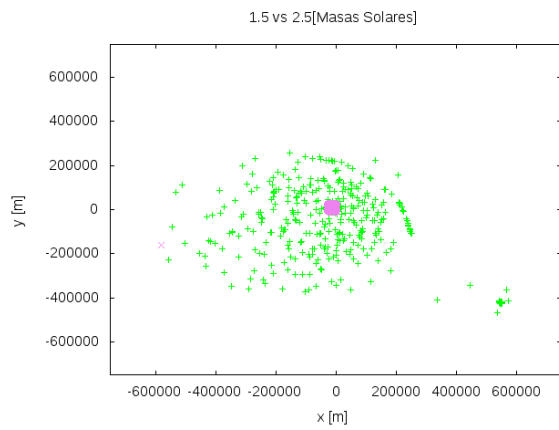
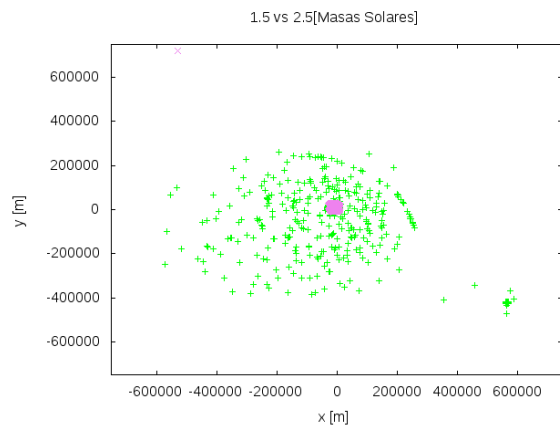


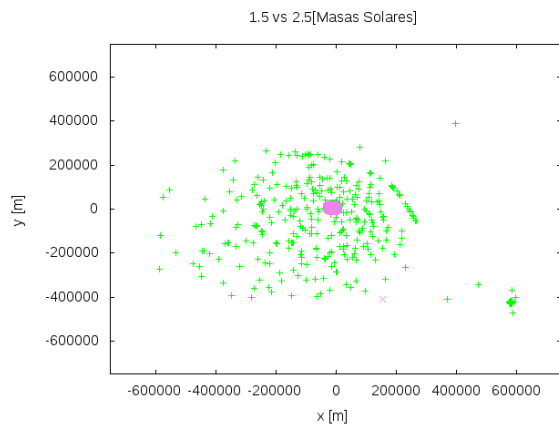
Figura 5-84: Evolución del sistema. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado.



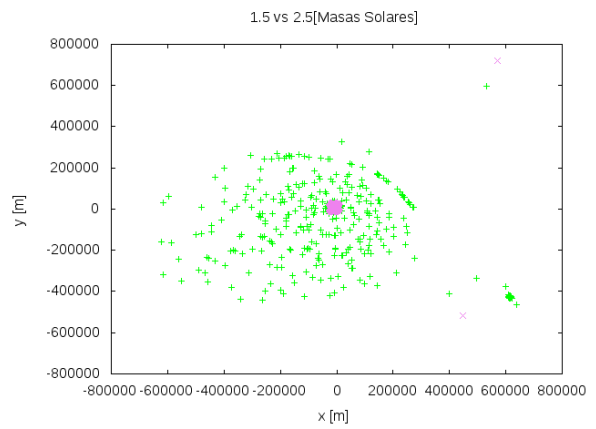
(a) Evolución del sistema a  $174t_{ff}$



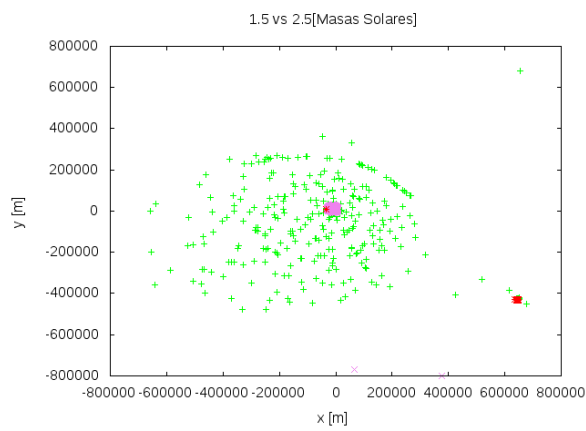
(b) Evolución del sistema a  $180t_{ff}$



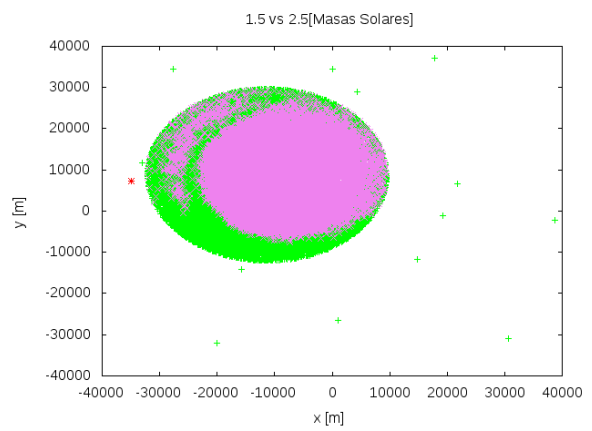
(c) Evolución del sistema a  $186t_{ff}$



(d) Evolución del sistema a  $192t_{ff}$



(e) Evolución del sistema a  $198t_{ff}$



(f) Objeto central a  $198t_{ff}$

Figura 5-85: Evolución del sistema, etapa final. Estrella 1 en verde, Estrella 2 en morado. La última gráfica muestra en rojo la materia que es expulsada.

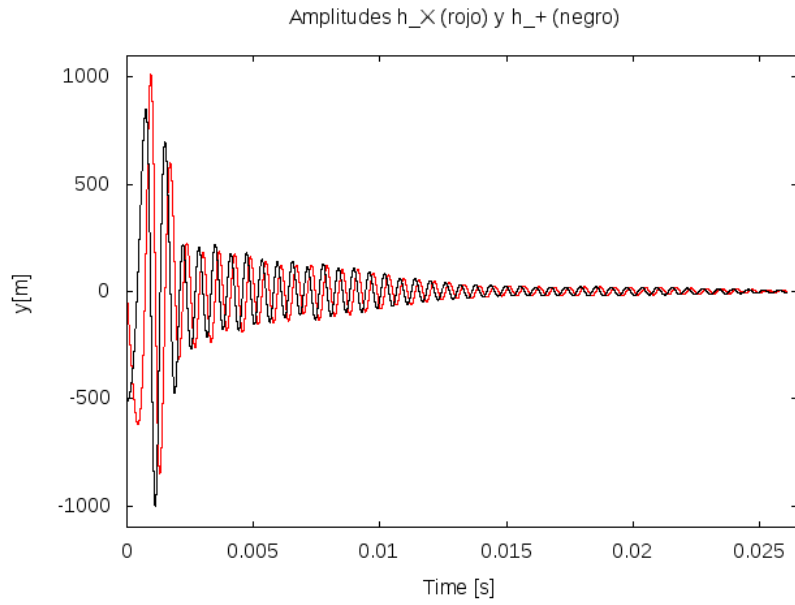


Figura 5-86: Amplitudes  $h_x$  (rojo) y  $h_+$  (negro).  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

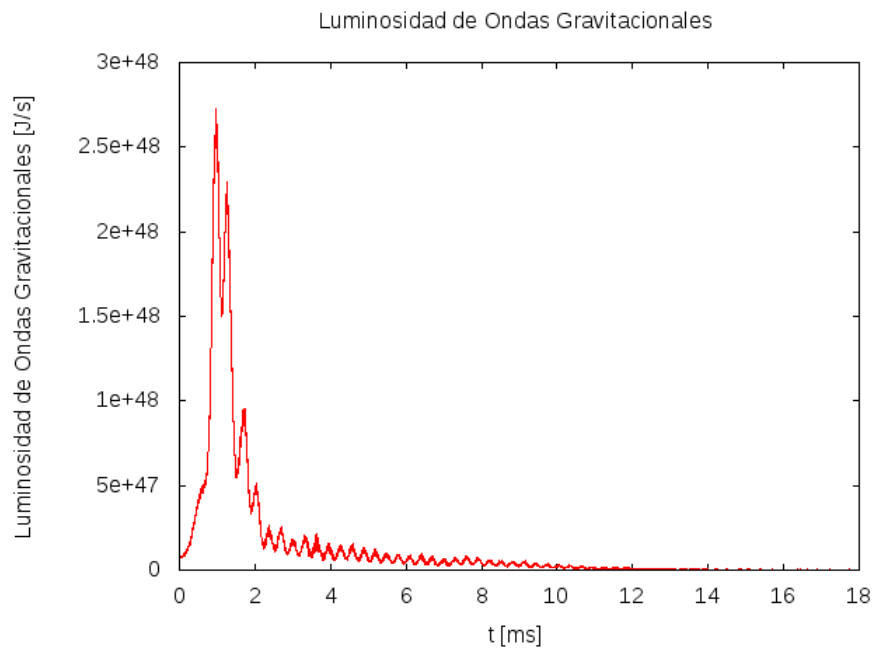


Figura 5-87: Luminosidad de Ondas Gravitacionales [J/s] vs tiempo [ms].  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

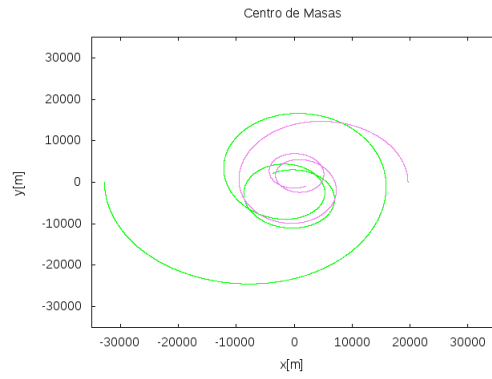


Figura 5-88: Trayectoria del Centro de Masa.  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

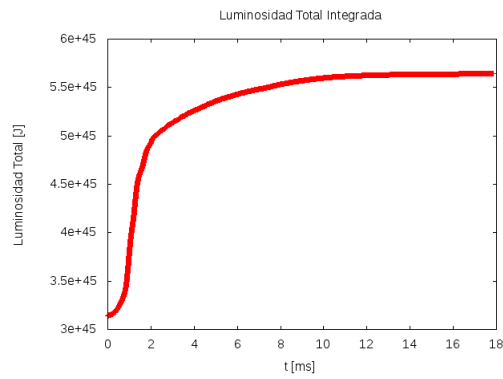


Figura 5-89: Luminosidad Total Integrada.  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .

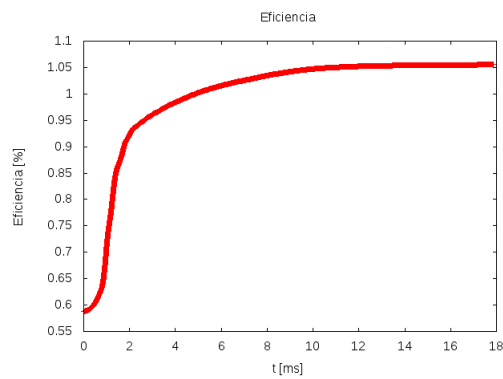


Figura 5-90: Eficiencia.  $M_{Estrella1} = 1.5M_{\odot}$ ,  $M_{Estrella2} = 2.5M_{\odot}$ ,  $\rho_{03}$ .



# Bibliografía

- [1] B.P.Abbott et al, Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016)
- [2] Akmal, A., V. R. Pandharipande, and D. G. Ravenhall. Phy Rev C 58.3 (1998): 1804.
- [3] Alcock, C., Farhi, E., Olinto, A. 1986a, ApJ 310, 261-272.
- [4] Alcock, C., Farhi, E., Olinto, A. 1986b, Phys. Rev. Lett. 57, 2088
- [5] Introduction to 3 + 1 Numerical Relativity. Miguel Alcubierre. Oxford University Press, 2008
- [6] Balsara D. 1995, J. Comp. Phys. 121, 357
- [7] Benz, W., Bowers, R. L., Cameron, A. G. W., & Press, W. H. 1990, ApJ, 348, 647
- [8] L. Blanchet, T. Damour, B. R. Iyer, C. M. Will, and A. G. Wiseman, Phys. Rev. Lett. 74, 3515 (1995).
- [9] A. R. Bodmer, Phys.Rev. D 4, 1601 (1971)
- [10] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf, Phys. Rev. D 9, 3471 (1974)
- [11] Bombaci, Ignazio. Strange Quark Stars: Structural Properties and Possible Signatures for Their Existence, 2001. Springer
- [12] Cabezon, R.M., Garcia-Senz, D., Relano, A., 2008. Journal of Computational Physics 227, 8523–8540.
- [13] D. Chakrabarty E.H. Morgan, Nature 394, 346 (1998).

- [14] Cheng, K.S., Dai, Z.G. 1996, Phys. Rev. Lett. 77, 1210
- [15] Gravitational Waves. Edited by I. Ciufolini, V. Gorini, U. Moshella, P. Fré. IOP, 2001.
- [16] Courant, R., Friedrichs, K., y Lewy, H. IBM journal 11(2):215–234
- [17] Coleman, C. S., & Bicknell, G. V. 1985, MNRAS, 214, 337
- [18] Davies, M. B., Benz, W., Piran, T., & Thielemann, F. K. 1994, ApJ, 431, 742
- [19] M. Dey, I. Bombaci, J. Dey, S. Ray, B.C. Samanta, Phys Lett. B 428, 123 (1988(; erratum, Phy. Lett. B 467, 303 (1999)
- [20] Engvik, L., Hjorth-Jensen, M., Machleidt, R., Muther, H. and Polls, A.: 1997, Nucl. Phys. A627, 85
- [21] Farhi, E., Jaffe, R.L. 1984, Phys. Rev. D 30, 2379
- [22] Frank, King and Raine. Accretion Power in Astrophysics. Third Edition, Cambridge.
- [23] M. Gilfanov, M. Revnivtsev, R. Sunyaev, E. Churazov: Astron. Astrophys. 338, L84 (1998)
- [24] Gingold, R. A., & Monaghan, J. J. 1977, MNRAS, 181, 375
- [25] Gingold, R. & Monaghan, J. Journal of Computational Physics 46(3): 429–453 (1982).
- [26] N. K. Glendenning. Compact Stars. Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity. Second Edition, Springer.
- [27] N. K. Glendenning and S. A. Moszkowski, Phys. Rev. Lett. 67, 2414 (1991)
- [28] Glendenning & Schaffner-Bielich, Phys Rev. C 60, 025803 1999.
- [29] D. Gondek-Rosinska, W. Kluzniak. arXiv:astro-ph/0206363
- [30] D. Gondek-Rosinska, T. Bulik, W. Kluzniak, J.L. Zdunik, E. Gourgoulhon. arXiv:astro-ph/0012540
- [31] Habe, A. 1989. In Status Rep. Super Computing Japan, ed. T. Nakamura, M. Nagasawa. NAtional Lah High Energy Phys.

- [32] F. Haberl, L. Titarchuk; *Astron. Astrophys*, 299, 414 (1995).
- [33] P. Haensel, J.P. Lasota, J.L. Zdunik, *Astron. & Astrophys.* 344 (1999) 151.
- [34] Hernquist, L., Katz, N., 1989. *ApJS* 70, 419.
- [35] Wm. G. Hoover. *Advanced Series in Nonlinear Dynamics -Vol. 25. Smooth Particle Applied Mechanics. The State of Art.* World Scientific, 2006.
- [36] Hurley J. R., Tout C. A., Pols O. R., *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 329, 897–928 (2002).
- [37] S. Koranda, N. Stergioulas, J. L. Friedman, *Astrophys. J.* 488 (1997) 799.
- [38] L. D. Landau & E. M. Lifshitz. *Curso de Física Teórica, Vol 6. Mecánica de Fluidos.* 2<sup>a</sup> ed. Reverté, 2001.
- [39] J. M. Lattimer, M. Prakash, arXiv:1512.07820 (2015)
- [40] J. M. Lattimer, Y. Lim, *Astrophys. J.* 771 (2013) 51.
- [41] J. M. Lattimer, M. Prakash, *Astrophys. J.* 550 (2001) 426.
- [42] J. M. Lattimer, M. Prakash, in: S. Lee (Ed.), *From Nuclei to Neutron Stars*, World Scientific, Singapore, 2011.
- [43] J. M. Lattimer, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci* 62 (2012) 488.
- [44] Link, Bennett, Richard I. Epstein, and James M. Lattimer. *Phys Rev* 83.17 (1999): 3362.
- [45] Lee W. H., Kluźniak W., Nix J., astro-ph/0101132
- [46] Lee, W. H. 1998, Ph.D. thesis, Univ. Wisconsin, Madison
- [47] Lee W. H., Kluźniak W., 1999a, *ApJ*, 526, 178 (Paper I)
- [48] Lee W. H., Kluźniak W., 1999b, *MNRAS*, 308, 780 (Paper II)
- [49] Lee W.H. 2000, *MNRAS* 318, 606 (paper III)
- [50] Lee W.H. 2001, *MNRAS* 328, 583 (paper IV)

- [51] G. R. Liu, M. B. Liu. Smoothed Particle Hydrodynamics, a meshfree particle method. World Scientific, 2003.
- [52] R. J. LeVeque, D. Mihalas, E.A. Dorfi, E. Müller. Computational Methods for Astrophysical Fluid Flow. Saas-Fee Advanced Course 27. Lecture Notes 1997. Swiss Society for Astrophysics and Astronomy. Springer 1997.
- [53] Gravitation. Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, W.H. Freeman and Company, 1973.
- [54] Monaghan J.J. 1992, ARAA 30, 543.
- [55] Monaghan, J. J., & Gingold, R. A. 1983, J. Comput. Phys., 52, 375
- [56] Monaghan, J. J., & Lattanzio, J. C. Astron&Astrophys, 149, 135-143, 1985
- [57] Monaghan, J. J., 2005. Reports on Progress in Physics 68, 1703–1759.
- [58] Müller, B.D. Serot: Nucl. Phys. A 606 (1996) 508
- [59] H. Müther, M. Prakash, T. L. Ainsworth: Phys. Lett. 199 469 (1987)
- [60] Natanson, I. P. 1960. Theory of Functions of Real Variable, New York: Ungar
- [61] [http : //www.nasa.gov/audience/forstudents/9-12/features/stellar\\_evol\\_feat\\_912.html](http://www.nasa.gov/audience/forstudents/9-12/features/stellar_evol_feat_912.html)
- [62] Pandharipande, V. R. & Smith, R. A. Nucl. Phys. A237, 507 (1975)
- [63] Prakash M., Cooke J. R. & Lattimer J. M.. Phys Rev D 52, 661 (1995)
- [64] Prakash, M., Ainsworth, T.L. and Lattimer, J.M.: 1988, Phys. Rev. Lett. 61, 2518.
- [65] G.X. Peng, P.Z. Ning, H.Q. Chiang: Phys Rev. C 56, 491 (1997)
- [66] Phillips, G. J. 1986. MNRAS 221:571
- [67] Rasio, F., & Shapiro, S. L. 1992, ApJ, 401, 226
- [68] Rosswog S. New Astronomy Reviews 53 (2009) 78–104.

- [69] Stuart L. Shapiro, Saul A. Teukolsky. Black Holes, White Dwarfs, Neutron Stars. The physics of compact objects. Wiley-Vch, 2004.
- [70] J. Weber, Phys. Rev. 117, 306 (1960).
- [71] Witten, E. 1984, Phys. Rev. D 30, 272
- [72] Xu, R.X., Qiao, G.J., Zhang, B. 1999, ApJ 522, L109
- [73] J.J. M in't Zand, et al.:Astron, Astrophys. 331, 344 (1988)
- [74] Żurek, W. H., & Benz, W. 1986, ApJ, 308, 123