



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO**  
POSGRADO DE ASTRONOMÍA  
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

Inestabilidades en discos de acreción debido a una modificación funcional del  
parámetro alfa de la viscosidad

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRÍA EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA:  
MIGUEL ANGEL GONZÁLEZ BOLÍVAR

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. WILLIAM H. LEE ALARDIN  
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

Ciudad Universitaria, CD. MX., AGOSTO DE 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

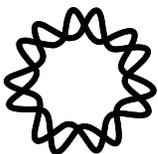
INESTABILIDADES EN DISCOS DE ACRECIÓN DEBIDO A  
UNA MODIFICACIÓN FUNCIONAL DEL PARÁMETRO ALFA  
DE LA VISCOSIDAD

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRÍA EN CIENCIAS ASTROFÍSICAS

PRESENTA:  
MIGUEL ANGEL GONZÁLEZ BOLÍVAR

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. WILLIAM H. LEE ALARDÍN



MÉXICO D.F., MÉXICO

ENERO, 2016

# Inestabilidades en discos de acreción debido a una modificación funcional del parámetro alfa de la viscosidad

por

Miguel Angel González Bolívar

Ing. Fis., Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (2013)

Tesis presentada para obtener el grado de

Maestría en Ciencias Astrofísicas

en el

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

México D.F., México. Enero, 2016

*Dedicada a mi futuro sobrino Emilio.  
Recuerda que estás hecho de estrellas.*

*Do or do not. There is no try*  
— YODA, *The Empire Strikes Back* (1980)

# Agradecimientos

¿Aquí es dónde se agradece a la gente, no es así? Cuando uno no sabe cómo empezar, preguntar lo obvio siempre es un buen inicio.

Obviamente (o quizá no si el lector no me conoce), quiero agradecerle a mis padres, José e Isabel, por todos los sacrificios que han hecho para que llegara a donde estoy. Por cada desvelo, por cada día, hora, instante agotador por el que tuvieron que pasar para poner comida en la mesa. Gracias por enseñarme que el trabajo honesto es el único camino digno al éxito, aunque rara vez dicho camino sea el mas fácil. Gracias por el esfuerzo que fue el educarme todos estos años, por su paciencia cuando no comprendí las lecciones de vida que trataron, y aun tratan, de inculcarme. Gracias, porque de ustedes aprendí que vivir es amar, es luchar, es trabajar por aquello que vale la pena. Gracias por amarme aunque sea difícil comprenderme.

Le agradezco a mi hermano mayor Adrián, porque fue la primera persona que conscientemente admiré. Porque desde niños tenía una seguridad al decir y hacer las cosas que siempre quise adquirir. Le agradezco por protegerme en numerosas ocasiones, como todo hermano mayor debe hacer. Gracias por representar, siendo tan joven, un papel mas grande que el que le tocaba como hermano mayor. Por apoyar siempre mi interés por la ciencia. Le estoy agradecido a mi hermanita Sara, que me viene pisando los talones académicos, que en la vida adulta me ha demostrado que no puedo quedarme atrás. Que la clave de la superación está en uno mismo. Gracias por su amor y paciencia. Gracias por enseñarme que no debo dejar que la vida haga lo que quiera conmigo, sino que yo debo hacer lo que quiera con la vida. A mi hermano menor, Amauri, cuya autosuficiencia tan desarrollada me ha inspirado a desarrollar aún mas la mía. Gracias por entender mi rareza como poca gente lo hace. Gracias porque su lado *geek* y su humor negro refuerzan los míos, ambas cosas aderezan nuestras personalidades y ayudan a crear lazos con gente nueva. Le agradezco porque me ha enseñado que uno nunca deja de crecer como persona, o al menos uno nunca debe dejar de intentarlo.

Le agradezco a Dallon por darme ánimos a lo largo de estos dos años de posgrado. Por las noches en vela que pasamos a distancia, cada uno en su campo. Por eso y más, te estaré siempre agradecido.

A mis compañeros de Ensenada, por su apoyo en el primer año. Porque con ellos aprendí que el 90% del trabajo como estudiante de posgrado esta en hacer la tarea y el otro 10% en entenderla. En particular, le agradezco a Chantal por ayudarme con las tareas que no comprendía del

todo bien, por sus consejos sobre como debe actuar un estudiante de astronomía y desestresarme con su propio estrés; saber que no eres el único sufriendo disminuye el sufrimiento. A David, en quien encontré un espíritu similar al mío, pero con muchas cualidades que le envidio. Gracias por las numerosas charlas que tuvimos, por las bromas entre nosotros, tu amistad mitigo la soledad que se siente al vivir lejos de casa. Le agradezco a Roy por ayudarme a encontrar un lugar donde vivir, por auxiliarme con los problemas que me causaron dolor de cabeza, por los consejos sobre el manejo de la terminal, ssh, escritura de programas por mencionar algunos. A Isbak, porque de él aprendí que la instrumentación es parte fundamental de la astronomía, y por recordarme que uno siempre debe hacer lo que ama. A Génaro, por todos los *tips* sobre el manejo de los artículos, por instalarme TOPCAT que, en este trabajo, me sirvió muchísimo para ver la distribución de las partículas y la dinámica del disco. A Marco, por recomendarme a aprender Python, lo cual me ha servido muchísimo. A Luis Carlos, por resolver mis dudas de dinámica galáctica, aunque al final saliéramos igual. También le agradezco por aceptar de mi café; esos descansos de 5 minutos siempre ayudaron a mi mente a trabajar mejor. A Lily, Tamayo, Toño, Magui, Elisa y Carmen les agradezco porque con ustedes aprendí lo que es relajarse de tanto estudio y por dejar que me integrara a sus grupos de relajo.

Le agradezco a los investigadores del IA-Ensenada por las clases que me impartieron, por los consejos que me brindaron y por el apoyo que me dieron al buscar un asesor. En particular, le agradezco a Elena Jiménez por su ayuda durante el primer año, tanto académico como burocrática. A David Hiriart por su iniciativa al impartir clases, por mas de un consejo útil sobre sistemas operativos, y su carta de recomendacion para el doctorado, que me inspiró a concluir con este trabajo. A Carlos Román por su paciencia durante las clases y demostrarme que es válido tener interés por los campos variados en astronomía.

También merecen mención mis compañeros de CU, en donde encontré mi interés con los objetos compactos; me habría gustado conocerlos por mas tiempo. Gracias por meterme, con cierta dificultad, en la organización de la REA. Les agradezco y los culpo por ello. Gracias por los paseos en la ciudad, por las discusiones de astronomía que disfruté bastante.

A Oriana y Verónica, a quienes considero mis hermanitas. Por su darme la bienvenida en un nuevo lugar, por brindarme su amistad, su apoyo y estar allí en los momentos difíciles, cuando el final del posgrado se veia lejos e inalcanzable. Gracias.

Le doy mis agradecimientos a Bertha Vázquez, pilar fundamental del Posgrado. Sin ti estaríamos ahogados en trámites burocráticos y quizá sin posibilidad de graduarnos (sobre todo yo). Gracias por el apoyo y la paciencia que me has dado todo este tiempo.

Les agradezco mis sinodales, quienes me ayudaron a pulir este trabajo. A Frederic Masset por su consejo de introducir la descripción de la viscosidad del disco. A Alejandro Raga, cuya opinión de mi trabajo hace que me sienta orgulloso del mismo. Además, le agradezco por darme la oportunidad de participar en mi primer artículo, y por su apoyo en mi formación como maestro en ciencias. A Emanuele Bertone, por hacer notar que siempre se puede mejorar la presentación de tus resultados, y motivarme a mejorar mi redacción. A Mauricio Reyes, por sus comentarios sobre mi descripción del modelo de Shakura y Sunyaev y sus sugerencias hacia las

partes finas que discuto en la introducción. Además le agradezco por recomendarme trabajar con mi actual asesor y siempre estar dispuesto a atender mis dudas. También por rentarme un cuarto durante mi estancia en Ensenada.

Finalmente, le estoy enormemente agradecido a William Lee, mi asesor, por estar dispuesto a darme un curso por videoconferencia, por aceptarme como su estudiante de maestría, por prestarme su código y resolver mis numerosas dudas. Por ayudar tanto a mi formación académica y motivarme para seguir con mi meta de entrar al doctorado. Gracias por enseñarme, aún si no fue manera consciente, la clase de investigador que quiero llegar a ser. Gracias.

# Índice general

<b>Prólogo</b>	.....	<b>XI</b>
<b>Resumen</b>	.....	<b>XII</b>
<b>1. Introducción</b>		<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .		1
1.2. Hipótesis . . . . .		3
1.3. Objetivo general . . . . .		3
1.4. Objetivos específicos . . . . .		4
<b>2. Marco teórico: contexto astrofísico</b>		<b>5</b>
2.1. Estrellas binarias y lóbulos de Roche . . . . .		5
2.1.1. Clasificación de sistemas binarios en base a los lóbulos de Roche . . . . .		8
2.1.2. Frecuencia de binarias en poblaciones estelares . . . . .		8
2.1.3. Sistemas binarios con un objeto compacto como componente primario . . . . .		9
2.2. Caso de interés: Binarias de rayos X . . . . .		11
2.2.1. Antecedentes históricos . . . . .		11
2.2.2. Características generales de fuentes de rayos X . . . . .		12
2.2.3. Binarias de rayos X de alta masa . . . . .		14
2.2.4. Binarias de rayos X de baja masa . . . . .		15
2.3. Modelo de Shakura-Sunyaev . . . . .		18
2.3.1. Formación del disco . . . . .		19
2.3.2. Mecanismos de transferencia de momento angular . . . . .		21
2.3.3. Estructura radial del disco . . . . .		27
2.3.4. Estructura local del disco y dependencia temporal . . . . .		31
2.3.5. Espectro emitido . . . . .		33

2.4.	Modelos de discos con flujos dominados por advección: ADAF . . . . .	35
2.4.1.	Soluciones obtenidas por integración vertical . . . . .	36
2.4.2.	Soluciones para un flujo estacionario axisimétrico . . . . .	41
2.4.3.	Comparación de las dos soluciones y observaciones . . . . .	46
<b>3.</b>	<b>Marco teórico: contexto computacional</b>	<b>49</b>
3.1.	Códigos de hidrodinámica de partículas suavizadas (SPH) . . . . .	49
3.2.	Kernel: propiedades y ejemplos . . . . .	50
3.3.	Descripción del sistema: hidrodinámica lagrangiana . . . . .	54
3.4.	Derivadas en SPH . . . . .	56
3.5.	Ecuaciones de conservación . . . . .	57
3.6.	Suavizamiento de partículas: términos “h-grad” . . . . .	59
3.7.	Discontinuidades y choques en SPH . . . . .	61
3.7.1.	Limitaciones de la viscosidad artificial . . . . .	64
3.8.	Integración de las ecuaciones de movimiento . . . . .	66
3.8.1.	Algoritmos de integración temporal . . . . .	66
3.8.2.	Elección del paso de tiempo . . . . .	68
<b>4.</b>	<b>Metodología: Implementación del código</b>	<b>69</b>
4.1.	Códigos utilizados . . . . .	70
4.1.1.	Relajamiento del sistema: <i>disk2d.f</i> . . . . .	70
4.1.2.	Evolución del sistema: <i>diskevol2d.f</i> . . . . .	75
4.2.	Modificaciones realizadas . . . . .	81
4.2.1.	Cálculo de la densidad superficial $\Sigma$ . . . . .	82
4.2.2.	Cálculo de la acreción . . . . .	83
4.2.3.	Modificación del parámetro $\alpha$ . . . . .	85
4.2.4.	Condiciones iniciales y formato de la salida de datos de las simulaciones . . . . .	88
<b>5.</b>	<b>Resultados</b>	<b>91</b>
5.1.	Estructura local: Inestabilidades en la densidad . . . . .	91
5.1.1.	Clasificación de inestabilidades . . . . .	91

5.1.2. Pruebas con dependencia de la energía interna . . . . .	95
5.1.3. Pruebas con dependencia de la densidad . . . . .	105
5.1.4. Pruebas con dependencia de dos variables . . . . .	108
5.2. Densidad máxima . . . . .	123
5.2.1. Pruebas con dependencia de la energía interna . . . . .	123
5.2.2. Pruebas con dependencia de la densidad . . . . .	125
5.2.3. Pruebas con dependencia de dos variables . . . . .	125
5.3. Acreción . . . . .	131
5.3.1. Pruebas con dependencia de la energía interna . . . . .	131
5.3.2. Pruebas con dependencia de dos variables . . . . .	143
<b>6. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>155</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>158</b>

# Prólogo

Redacte aquí el prólogo contando la historia detrás de su trabajo.

# Inestabilidades en discos de acreción debido a una modificación funcional del parámetro alfa de la viscosidad

por

Miguel Angel González Bolívar

## Resumen

Se implementó un código SPH en dos dimensiones escrito en FORTRAN 77 para modelar la interacción de un agujero negro con un disco de acreción, y se llevaron a cabo un total de 13 simulaciones. La masa del agujero negro utilizado es de  $2.5M_{\odot}$ , por lo que tiene radio de Swarzschild  $7.33 \times 10^5 \text{cm}$ . Para obtener las inestabilidades ocasionadas por el cambio en la viscosidad, se utilizaron diez formas funcionales de la eficiencia del transporte de momento angular determinada por el parámetro  $\alpha$  de la prescripción de Shakura y Sunyaev [1973]. Se generaron inestabilidades dentro del disco, las cuales se categorizaron en base a las curvas de densidad superficial asociadas y las isodensidades del disco. Se calculó la tasa de acreción  $\dot{M}$  de cada disco y se encontraron frecuencias en la señal de  $\dot{M}$ .

# Capítulo 1

## Introducción

*Nothing begins in this place.  
This place is beyond beginnings and endings.*  
— DESTINY, *The Sandman: Season of Mist* (1992)

### 1.1. Planteamiento del problema

El modelo de Shakura y Sunyaev [1973] es el más utilizado para describir la dinámica de los discos de acreción delgados, los cuales tienen una curva de rotación kepleriana y la densidad del gas permite que exista un enfriamiento efectivo del disco. Para el caso de discos gruesos, donde la velocidad de rotación del flujo es significativamente menor a la kepleriana, se utiliza el modelo descrito por primera vez en una serie de artículos de Narayan y Yi [1994]. La diferencia entre estos modelos radica en que para discos gruesos la dinámica del disco cambia de forma radical debido a la poca eficiencia del disco para enfriarse, lo que tiene como consecuencia que la advección de la energía a regiones de menor temperatura domine sobre la acreción del material; a este tipo de flujo se le conoce como ADAF<sup>1</sup>. Ambos modelos han sido corroborados mediante observaciones de discos de acreción en sistemas binarios y en AGN, tanto en el visible como en rayos X (Szuszkiewicz *et al.* [1996], Eardley *et al.* [1975], Garcia *et al.* [2001], Meyer-Hofmeister y Meyer [1999], entre otros).

Sin embargo, una parte importante de la información que se desconoce sobre la dinámica de los discos de acreción está contenida en el parámetro  $\alpha$  de viscosidad (Shakura y Sunyaev [1973]), por lo que su análisis resulta vital para comprender de una forma completa cómo las fuerzas

---

<sup>1</sup>Advection Dominated Accretion Flow por sus siglas en inglés.

internas <sup>2</sup> y externas <sup>3</sup> actúan en el disco. Las inestabilidades son acumulaciones repentinas de material en una región relativamente pequeña del disco, lo que conlleva al calentamiento brusco del disco<sup>4</sup>.

Aun existen muchas interrogantes sobre cómo se crean estas inestabilidades, tales como:

- ¿Por qué en binarias de rayos X (así como en variables cataclísmicas y pulsares binarios) persiste una periodicidad en la manera en la que sus discos de acreción aumentan su luminosidad? En particular, casi todos los LMXBs<sup>5</sup> que tienen una estrella de neutrones tienen una emisión constante, mientras que los que poseen un agujero negro son transitorios, produciéndose en sus discos explosiones de radiación que pueden durar semanas o meses para después entrar en largos periodos inactivos (Lewin y Van der Klis [2006]). ¿Por qué el cambio en su comportamiento depende del objeto central?
- ¿Qué mecanismos retrasan o aceleran los periodos de actividad intensa en el disco? ¿Hay manera de determinarlo(s) con métodos observacionales? El modelo de Shakura-Sunyaev ha recibido pocas modificaciones desde que se desarrolló. Con este modelo, se pueden determinar cantidades del disco como la presión del gas que con forma, su altura de escala, la velocidad del sonido en el medio, entre otros, a partir de cuatro parámetros: la tasa de acreción, la masa del objeto compacto, el radio del anillo (coordenada espacial) y la eficiencia del transporte de momento angular  $\alpha$ . Sin embargo, una de las limitantes que existen, no sólo del modelo sino de nuestro entendimiento de la dinámica de gases en general, es que no existe un método analítico que pueda reproducir de manera general el comportamiento de la viscosidad turbulenta del fluido, y tampoco existe un método de observación que permita medirlo. La manera más utilizada para aproximar la viscosidad es utilizando la prescripción  $\alpha$ , que linealiza la dependencia de la viscosidad con la velocidad del sonido y la escala de altura; sin embargo, el comportamiento de la viscosidad puede ser mucho más complejo que eso.
- ¿Existe una relación entre la viscosidad cinemática y alguna otra variable que no se

---

<sup>2</sup>Tales como la viscosidad y autogravedad del disco.

<sup>3</sup>Atracción gravitacional y campo magnético del objeto compacto, aunque la primera no suele influenciar mucho a la viscosidad, sino al estado general del disco.

<sup>4</sup>En el capítulo 5 se da una definición más conveniente para este trabajo.

<sup>5</sup>La definición de LMXB se discute en la sección 2.1.2.

ha considerado? Ha habido intentos de modelar una dependencia de la viscosidad con la resistividad magnética i.e. número de Prandtl magnético (Potter y Balbus [2014]) y posición (Penna *et al.* [2013]). Sin embargo, estas modificaciones a la prescripción son arbitrarias, sin mencionar que podrían existir mecanismos adicionales que intervengan en las explosiones en el disco las cuales podrían no depender de la viscosidad.

## 1.2. Hipótesis

En el modelo original de Shakura-Sunyaev se considera  $\alpha$  como una constante; en base a esto se han generado numerosas simulaciones que recrean con éxito un disco estable. Sin embargo, algunas propiedades que se han observado en los discos no han podido ser replicadas en dichas simulaciones, tales como la periodicidad de los estados de mayor luminosidad, denominados como “flare state”<sup>6</sup>. En la literatura existen modelos que utilizan versiones modificadas de la prescripción  $\alpha$  que reproducen comportamientos periódicos o cuasiperiódicos (Xue *et al.* [2015], Penna *et al.* [2013]), lo cual parece apoyar la idea de que es necesario tener una dependencia de una o varias variables locales del disco para  $\alpha$ .

En este trabajo, se proponen diferentes dependencias para dicho parámetro, en busca de la reproducción de un comportamiento previamente observado en discos de acreción, los cuales podrían ser consecuencia de un aumento en la tasa de material acretado, el cual a su vez sería un efecto directo de una inestabilidad en el sistema.

## 1.3. Objetivo general

Definir una descripción más compleja de la viscosidad cinemática de un disco de acreción alrededor de un agujero negro; esto con el fin de recrear inestabilidades que conlleven a modificar la tasa de material acretado y reproducir comportamientos observados en las curvas de luz de estos sistemas. Para ello, en este trabajo se supone que la variabilidad de la tasa de acreción coincide con la de la luminosidad en altas energías. Esto se justifica considerando que los fotones emitidos por el material acretado no son absorbidos o dispersados en su totalidad.

---

<sup>6</sup>En lo sucesivo se traducirá este término como ‘estado activo’.

## 1.4. Objetivos específicos

Determinar si una modificación del parámetro  $\alpha$  podría dar como resultado un comportamiento cuasiperiódico en la tasa de material acretado; ésto implicaría un comportamiento similar en el cambio de la curva de luz emitida por el disco, lo que explicaría algunas de las observaciones actuales en este tipo de objetos.

Refinar el modelo de Shakura-Sunyaev para incluir una o varias descripciones alternativas a la viscosidad dinámica. Ésto ofrecería diferentes opciones para la simulación de discos en un futuro; así como la posibilidad del desarrollo de una aproximación análoga a otro tipo de discos, tales como los ADAF o los toroides en núcleos activos de galaxias (AGN por sus siglas en inglés).

## Capítulo 2

# Marco teórico: contexto astrofísico

*We move in circles  
Balanced all the while  
On a gleaming razor's edge*  
— JOHN PETRUCCI, *Octavarium* (2005)

Para analizar el problema de las inestabilidades en los discos de acreción, es necesario comprender la física detrás de ellos. Las fuentes compactas de rayos X se forman en estrellas binarias donde una de sus componentes, la más evolucionada, tiene una masa entre 1 y  $4M_{\odot}$ , dependiendo si se trata de una enana blanca, estrella de neutrones o agujero negro (Glendenning [2012], Remillard y McClintock [2006]). La componente secundaria es una estrella que se encuentra en expansión dado que ha terminado con su reserva de hidrógeno para fusionar y esta saliendo de la secuencia principal o se trata de una estrella tipo OB que esta expulsando su envoltente (Hurley *et al.* [2002]). A continuación se describe brevemente la estructura de un sistema binario, tomando en cuenta las características ya mencionadas.

### 2.1. Estrellas binarias y lóbulos de Roche

Una estrella binaria consiste de un par de estrellas que están unidas gravitacionalmente; esto significa que las dos orbitan alrededor del centro de masa del sistema. Es importante definir algunas propiedades típicas de los sistemas binarios para entender como interactúan sus componentes. De ahora en adelante, se hablará del componente primario como el objeto compacto y del secundario como la estrella compañera; asimismo se usarán los subíndices correspondientes, 1 y 2, para referirse las características de cada uno (masa  $M$ , radio  $R$ , momento angular  $\omega$ , etc).

En la mayoría de los sistemas binarios cuyas componentes están a una distancia relativamente corta, ya sea que ambas componentes, una o ninguna se encuentre en la secuencia principal, las órbitas de sus componentes son casi circulares; esto es posible ya que durante el tiempo en el que la primaria evoluciona a una estrella compacta, las fuerzas de marea han logrado disminuir la excentricidad de las órbitas de ambas componentes (Hut [1981], Hurley *et al.* [2002])<sup>1</sup>. Lo anterior permite encontrar un marco de referencia donde se pueda determinar un potencial que no varíe esencialmente con el tiempo. Se define  $a$  como la distancia entre los centros de masa de las estrellas individuales y  $q$  como el cociente entre las masas, esto es:

$$q \equiv \frac{M_2}{M_1}. \quad (2-1)$$

Utilizando la tercera ley de Kepler, se encuentra

$$4\pi^2 a^3 = GM P^2, \quad (2-2)$$

siendo  $M = M_1 + M_2 = m M_\odot$ , donde  $m$  es la masa en masas solares y  $P$  es el periodo orbital. Utilizando las ecuaciones 2-1 y 2-2, Frank *et al.* [2002] reescribe  $a$  como

$$a = \begin{cases} 1.5 \times 10^{13} m_1^{1/3} (1+q)^{1/3} P_{yr}^{2/3} \text{ cm} \\ 2.9 \times 10^{11} m_1^{1/3} (1+q)^{1/3} P_{day}^{2/3} \text{ cm} \\ 3.5 \times 10^{10} m_1^{1/3} (1+q)^{1/3} P_{hr}^{2/3} \text{ cm} \end{cases} \quad (2-3)$$

Este resultado implica que se puede obtener la separación entre las estrellas mediante el periodo orbital. Dado que se trata de un sistema de dos cuerpos masivos, se puede utilizar una partícula de prueba para encontrar el potencial del mismo. Al situarse en un marco de referencia que rota con la rapidez angular del sistema  $\omega_R$ , el potencial gravitacional es

$$\Phi_R(\mathbf{r}) = -\frac{GM_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{GM_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} - \frac{1}{2}(\omega_R \wedge \mathbf{r})^2, \quad (2-4)$$

---

<sup>1</sup>Una excepción importante se da en sistemas binarios sometidos a perturbaciones que hayan alterado sus órbitas de manera significativa o que su periodo sea particularmente alto, del orden de años, por lo que el tiempo en que las órbitas se vuelven circulares es mucho mayor al de la evolución de sus componentes individuales. El ejemplo más común se observa en binarias BeHMXB (Sarty *et al.* [2007]).

donde  $r$ ,  $r_1$  y  $r_2$  son los vectores de posición de la partícula de prueba, y de los cuerpos 1 y 2, respectivamente, de tal manera que el denominador del primer y segundo término son las distancias de la partícula de prueba a los centros de masas de las estrellas individuales y el término del rotacional es debido a la velocidad de rotación del sistema, consecuencia de la elección del marco de referencia. La ecuación 2-4 se conoce como el potencial de Roche.

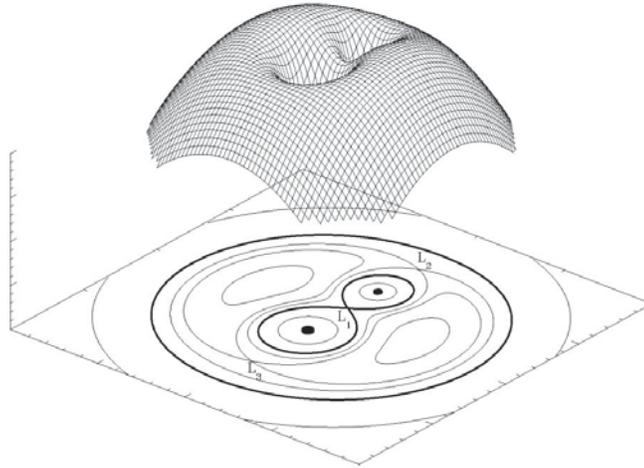


Figura 2-1: Superficie que representa el potencial de Roche de un sistema binario. Los ejes que forman el plano de los isocontornos representan la posición en el plano normal al eje de rotación. El eje vertical es el potencial gravitacional. Los isotenciales proyectados en la base que forman un “ocho” son los lóbulos de Roche de cada componente del sistema binario. Los puntos etiquetados como  $L_1, L_2$  y  $L_3$  son los puntos de Lagrange más cercanos del sistema. Los puntos  $L_4$  y  $L_5$  no se muestran en la figura, pero se localizan dentro de los equipotenciales más pequeños, a cada lado de los lóbulos de Roche (van der Sluys [2006]).

La figura 2-1 muestra el potencial gráfico a partir de la ecuación 2-4. La forma del potencial tiene dos pozos que son producto de la masa de cada compañera del sistema binario. En las fronteras de cada pozo se encuentran los puntos de Lagrange en los cuales el gradiente del potencial es cero; esto significa que son zonas donde, si se dan las circunstancias necesarias (viento estelar débil, que las órbitas de las estrellas sean estables, etc), el material que escapa del lóbulo de Roche más cercano a él puede acumularse momentáneamente. Dado que es de vital importancia el material que pasa del componente secundario al primario, el punto  $L_1$  es el punto de Lagrange de mayor interés en este trabajo, ya que cualquier flujo de gas que cruce de un lóbulo de Roche al otro pasará por esta zona <sup>2</sup>.

<sup>2</sup>La suposición es que el disco no se forma por el viento solar de la estrella secundaria, ya que las condiciones

### 2.1.1. Clasificación de sistemas binarios en base a los lóbulos de Roche

Existen varios tipos de estrellas binarias, las cuales dependen de la masa individual de sus componentes, la distancia entre ellas, el momento angular total y la fase de evolución de cada una. Kopal [1955] menciona el caso de las estrellas binarias donde al menos uno de sus componentes se encuentra en la secuencia principal y el otro no ha pasado la etapa de gigante o supergigante roja<sup>3</sup>, existen tres tipos de configuraciones posibles:

1. *Binarias separadas*: En este caso, las estrellas del sistema no llenan por completo sus respectivos lóbulos de Roche, no existe una deformación de las componentes por la influencia gravitacional. Esto implica que el transporte de material entre las estrellas sólo es posible si el viento estelar de una es mucho más intenso que el de la otra. Para los fines de este trabajo el flujo de material entre componentes en binarias separadas es nulo.
2. *Binarias semiseparadas*: Ocurre cuando una de las estrellas ocupa el mismo volumen del lóbulo de Roche, por lo que es posible el transporte de material a través de  $L_1$ . El material cruza al lóbulo de la otra estrella y puede formar un disco de acreción alrededor de esta. Este caso es el que se explora en este trabajo, con la diferencia de que la estrella de menor tamaño es un agujero negro. Cabe mencionar que, durante la fase de secuencia principal para ambos componentes, podría desarrollarse una envoltura común a las dos estrellas en este sistema, similar al caso de binarias de contacto (Iben Jr y Livio [1993]).
3. *Binarias de contacto*: Ésta se da cuando ambos componentes llenan sus respectivos lóbulos de Roche. La salida de material en éste sistema puede darse a través de los puntos  $L_2$  y  $L_3$ ; en este caso se puede crear una envoltura común para ambas estrellas o un viento estelar binario (Nguyen y Etzel [1999]).

### 2.1.2. Frecuencia de binarias en poblaciones estelares

A pesar de que la literatura sobre sistemas binarios discrepa sobre la fracción de binarias en poblaciones estelares, los sistemas binarios son relativamente frecuentes. Martynov [1979] calcula un valor mayor al 50 %, mientras que trabajos más recientes ofrecen porcentajes menores; para 

---

iniciales serían físicamente diferentes a las que se obtienen cuando el material pasa por  $L_1$ .

<sup>3</sup>Esto aplica sólo si ambas estrellas tienen una masa mínima de  $0.4M_{\odot}$ .

NCG 1818, Elson *et al.* [1998] encontraron que el porcentaje es de  $35 \pm 5\%$  y  $20 \pm 5\%$  dentro y fuera del núcleo, respectivamente. En la vecindad solar, Raghavan *et al.* [2010] determinó una fracción de  $33 \pm 2\%$  para estrellas similares al Sol <sup>4</sup>. Esto implica que deben existir una gran cantidad de estrellas binarias donde alguna de sus componentes ya ha pasado por la fase de secuencia principal y con ello, suficiente evidencia observacional de este tipo de objetos, así como diversos comportamientos medidos a partir de las curvas de luz de sus discos de acreción, de los cuales se entrará en detalle en las siguientes secciones.

### 2.1.3. Sistemas binarios con un objeto compacto como componente primario

El estudio de un sistema binario separado puede entenderse analizando sus componentes individuales como estrellas aisladas y posteriormente añadir la dinámica entre ellos para complementar los resultados. Procesos tales como la nucleosíntesis, equilibrio hidrodinámico, convección del plasma, y otros que se dan dentro de una estrella, no son diferentes si ésta forma parte de un sistema binario separado. Dado que una estrella pasa la mayor parte de su tiempo en la fase de secuencia principal, la evolución de un sistema binario separado cambia en tiempos similares a la evolución de sus componentes. A menos que se trate de una estrella masiva a una distancia muy corta de su compañera, un sistema separado que se vuelva semiseparado es producto de la evolución de la estrella que salga primero de la secuencia principal.

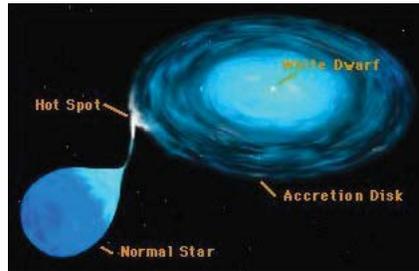


Figura 2-2: Representación de una variable cataclísmica, se muestra la estrella en secuencia principal, el disco de acreción y la enana blanca. El punto caliente (“hot spot”) es donde el material de la estrella secundaria y el disco de acreción colisionan. **Créditos: NASA’s Goddard Space Flight Center.**

Según Heger *et al.* [2003], conforme dicha estrella continua evolucionando, y dependiendo de la masa que tenga, terminará siendo una enana blanca ( $0.5M_{\odot} \lesssim M \lesssim 8M_{\odot}$ ), estre-

<sup>4</sup>El criterio para elegir las fue que la banda V tuviera un flujo entre 0.1 y 10 veces la del Sol, y a una distancia menor de 25 pc del mismo.

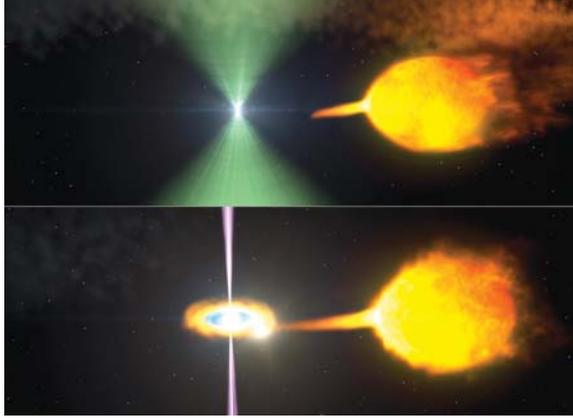


Figura 2-3: Se muestra un modelo del púlsar J1023 que se encuentra en un sistema binario con una estrella de  $0.2M_{\odot}$ . La parte superior muestra el sistema previo a la pulsación en radio del objeto compacto; el viento del púlsar expulsa el material de la estrella compañera, por lo que no fluye a su lóbulo de Roche. Al emitir el pulso se forma el disco y junto a éste se emite un jet en  $\gamma$ . **Créditos: NASA's Goddard Space Flight Center.**

lla de neutrones ( $8 - 9M_{\odot} \lesssim M \lesssim 25M_{\odot}$ , dependiendo de la metalicidad) o agujero negro ( $25M_{\odot} \lesssim M \lesssim 40M_{\odot}$  por retroceso del material en supernovas débiles y directamente para  $M \gtrsim 40M_{\odot}$ , también con dependencia en la metalicidad); cuando esto ocurre se habla de una variable cataclísmica (figura 2-2), un púlsar binario (figura 2-3)<sup>5</sup> o una binaria de rayos X (figura 2-4)<sup>6</sup>, respectivamente (Iben Jr y Livio [1993]). Los discos de acreción se forman en estos tres tipos de binarias <sup>7</sup> al momento de que la estrella secundaria sale de la secuencia principal y aumenta su tamaño, llenando su lóbulo de Roche en el proceso. A pesar de que los tres tipos de binarias tengan una estructura similar, las características de los discos de acreción de cada uno difieren de manera considerable; este trabajo se enfoca en las binarias de rayos X.

<sup>5</sup>También se denomina púlsar binario cuando las combinaciones son dos estrellas de neutrones o una estrella de neutrones y una enana blanca.

<sup>6</sup>También existen binarias de rayos X con una estrella de neutrones en vez de un agujero negro.

<sup>7</sup>Hay sistemas binarios con un objeto compacto donde esto no ocurre, tales como las binarias AM Her (Sahade *et al.* [1992]).

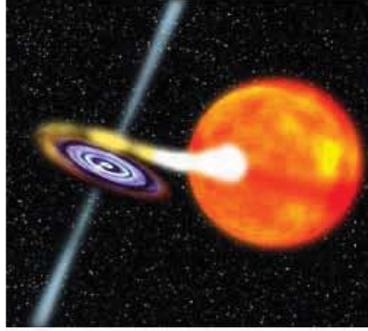


Figura 2-4: Representación artística de una binaria de rayos X Créditos: NASA's Goddard Space Flight Center.

## 2.2. Caso de interés: Binarias de rayos X

### 2.2.1. Antecedentes históricos

Estos objetos son una de las fuentes más intensas de rayos X en el Universo. Su descubrimiento generó gran polémica ya que el primer objeto detectado fue Scorpius X-1 (Giacconi *et al.* [1962]) y en su momento fue la mayor fuente conocida de rayos X, en la región de 1-10 keV. En esa misma década se descubrió que su emisión variaba con el tiempo (Overbeck y Tananbaum [1968]). Los modelos iniciales indicaban que la emisión de rayos X provenía de las altas temperaturas del gas que provenía de la estrella compañera a la estrella de neutrones. Cameron [1967] sugirió que era más probable que el objeto compacto se trata de un agujero negro en vez de una estrella de neutrones; sin embargo, sus ideas fueron aplicadas para acreción esférica. La idea de un disco de acreción fue propuesta en 1968 por Prendergast y Burbidge [1968], con el argumento de que el material acretado a través del punto  $L_1$  llevaba una gran cantidad de momento angular, de manera que un flujo radial hacia el objeto compacto era imposible.

En 1970, fue lanzado Uhuru, el primer satélite dedicado a la astronomía en rayos X. Durante más de dos años identificó 300 fuentes de rayos X; entre los objetos detectados estaban las binarias de pulsares de rayos X y la detección de radiación entre 2 y 20 keV de sistemas binarios estelares. A partir de la información obtenida, se llegó a las siguientes conclusiones (Shapiro y Teukolsky [1983]):

1. La variabilidad de emisión de rayos X en escalas de tiempo cortas (días, semanas) implica

que la región de emisión es pequeña.

2. Se confirmó que una parte importante de las fuentes encontradas eran sistemas binarios, los cuales contenían una estrella masiva en secuencia principal junto a un objeto compacto como compañero.
3. La acreción de material hacia un objeto compacto es una manera muy eficaz de liberar energía potencial gravitacional en forma de radiación, particularmente rayos X.

Con los años se han encontrado fuentes de rayos X con características muy diferentes entre sí, lo que ha obligado a crear un sistema de catálogo en base a la variabilidad, intensidad y banda de emisión.

### 2.2.2. Características generales de fuentes de rayos X

Existen (al menos) dos tipos de fuentes de rayos X: aquellas asociadas con estrellas tardías tipo O o tempranas tipo B. Se puede encontrar en este grupo a Cyg X-1, Cen X-3, and 2U 0900-40 (Shapiro y Teukolsky [1983]). El otro tipo corresponde a sistemas binarios con estrellas compañeras similares al Sol; entre ellas se encuentran Her X-1, Sco X-1, Cyg X-2, and Cyg X-3 (Cowley y Crampton [1975], Gottlieb *et al.* [1975]). Estos grupos son llamados binarias de rayos X de alta masa y binarias de rayos X de baja masa, respectivamente<sup>8</sup>. La dinámica en el disco de HMXB es muy diferente a la del LMXB debido a la masa de la compañera y esto también afecta a las curvas de luz emitidas en la banda de los keV. Asimismo, la edad de las LMXB es mucho mayor al de las HMXB ya que las estrellas OB tienen una vida del orden de  $10^6$  años, mientras que las estrellas de baja masa, K ó M, tienen edades  $\sim 10^9 - 10^{10}$  años (Tanaka y Shibazaki [1996]). En la siguiente sección se verán a detalles las características de ambos grupos. La figura 2-5 muestra de forma más clara la clasificación de binarias de rayos-X. Se puede observar que sólo las compuestas de estrellas de neutrones y agujeros negros entran en los grupos previamente descritos. Cabe mencionar que las fuentes de rayos X con una enana blanca tienen comportamientos que aún no han sido bien entendidos y su dinámica es tan compleja como en las otras clases de fuentes de rayos X que se ven en el diagrama (Tanaka y Shibazaki [1996], Reig [2011]).

---

<sup>8</sup>Frecuentemente referidos como HMXB y LMXB (high-mass X-ray binaries y low-mass X-ray binaries por su traducción del inglés).

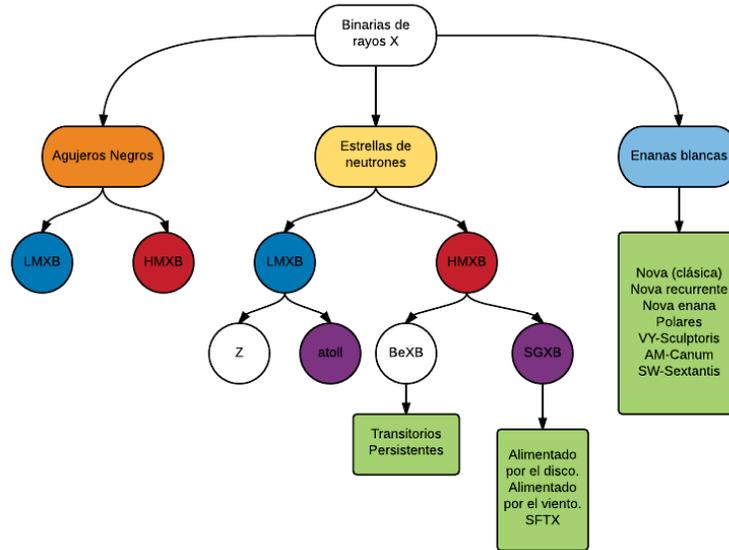


Figura 2-5: Clasificación de las binarias de rayos-X. Adaptado de Reig [2011]

Tanto las HMXB como LMXB tienen dos clases de eventos recurrentes: las explosiones de rayos X de tipo I y II. El gas del disco (hidrógeno) es sometido a presión y temperatura muy altas, por lo que se fusiona en helio en la superficie del objeto compacto<sup>9</sup>. Cuando se acumula suficiente helio, el material vuelve a fusionarse y ocurre una explosión, alcanzando temperaturas muy altas ( $\sim 10^7$  K). Las explosiones de tipo I son causadas por dicho proceso de fusión y el perfil de luminosidad se caracteriza por un rápido ascenso del brillo (0.3 – 10 s), seguido de una lenta caída exponencial (5 – 100 s) (Brandt *et al.* [1992]). El aumento en la luminosidad se debe al incremento súbito de la temperatura, mientras que la caída lenta es consecuencia del enfriamiento de la superficie de la estrella de neutrones. Las explosiones tipo II son producto de un aumento en la tasa de acreción del disco, lo que se traduce en un aumento del cambio de energía potencial gravitacional en energía cinética y, posteriormente, en térmica. Este tipo de explosiones se caracteriza por aumentos súbitos en la luminosidad, con caídas igual de rápidas. La frecuencia de cada tipo de explosión también varía. Para las de tipo I los intervalos entre cada evento son del orden de horas o días. Para las de tipo II se han observado docenas de eventos por hora para un mismo disco (Encyclopedia [2014 (accessed August 10, 2015)]). Ambos

<sup>9</sup>Esto implica que las explosiones de tipo I se dan en estrellas de neutrones y en ocasiones en agujeros negro, si se dan las condiciones necesarias. En el caso de las enanas blancas se les conoce como novae recurrentes.

tipos de explosiones generan la luminosidad característica de rayos X para las binarias, y por lo general son estos eventos los que permiten detectarlas. Cabe mencionar que las binarias también emiten rayos X en su etapa inactiva, aunque para estos casos se desconoce qué proceso genera la radiación. También existe una contribución importante de fotones UV debido a la radiación de cuerpo negro del disco, donde se localiza en máximo de la distribución de densidad de energía para la mayoría de los discos (Frank *et al.* [2002]).

### 2.2.3. Binarias de rayos X de alta masa

Debido a que se componen de una estrella tipo OB, estos sistemas tienen masas  $> 10M_{\odot}$ . Hasta el 2007, se conocían 114 HMXB, representando el 38 % del total de binarias de rayos X detectadas (Liu *et al.* [2006], Liu *et al.* [2007]). En 2015, utilizando el satélite *INTEGRAL*, se detectaron 10 objetos adicionales de este tipo (Krivonos *et al.* [2015]).

Existe una gran variedad de este tipo de sistemas, tales como las BeHMXB. Esta clase de binaria suele tener una estrella de neutrones con una órbita excéntrica y una compañera del tipo B0-B2e, así como de un disco de decreción<sup>10</sup> circunestelar que rodea a ésta última. Presentan periodos inactivos con repentinas explosiones entre ellos. Se han detectado 50 BeHMXB en la Vía Láctea y más de 35 en la Gran Nube de Magallanes (Liu *et al.* [2005]). Sus periodos orbitales son de 10 – 1000 días (Cherepashchuk [2000]). El modelo de rejuvenecimiento se utiliza para explicar la formación de BeHMXBs; éste sostiene que la transferencia de material aumenta la rotación de la envoltura de la estrella tipo B y, eventualmente, también al núcleo. Este proceso crea el disco circunestelar que la caracteriza. En este tipo de sistemas, el disco circunestelar está truncado debido a la presencia de la estrella de neutrones. No hay acreción del material hacia el objeto compacto si ésta se encuentra en una órbita circular, ya que el disco se trunca antes de llegar a su lóbulo de Roche; se forma una emisión persistente de rayos X poco energéticos y en ocasiones, explosiones de tipo II. Por otra parte, si su órbita es suficientemente excéntrica, la acreción es posible y la emisión de rayos X se produce en forma de explosiones de tipo I .

Las binarias de rayos X supergigantes son otro grupo dentro de las HMXB. Estos sistemas se componen de una estrella de neutrones con una órbita circular y una estrella tipo OB como

---

<sup>10</sup>Opuesto a la acreción.

compañera. Se dividen en dos categorías: las que producen acreción por medio del transporte de material a través del punto  $L_1$  y las que lo hacen por medio del viento estelar. Las primeras suelen tener luminosidades típicas del orden de  $10^{38}$  erg  $s^{-1}$  durante las explosiones. El periodo de las binarias con acreción por viento es menor a 15 días, con una excentricidad muy baja. La estrella de neutrones acreta un flujo altamente radiativo y emite rayos X con luminosidades  $\sim 10^{35-36}$  erg  $s^{-1}$ . Las explosiones, en caso de haberlas, son del tipo II. Debido a la alta variabilidad en la dinámica del viento estelar que es acretado, la radiación emitida presenta cambios significativos en escalas de tiempo muy cortas. A lo largo de su evolución las órbitas disminuyen su excentricidad y ésto provoca que la tasa de material acretado aumente (Chaty [2013]). Ambos tipos de HMXB pueden también identificarse a partir de su posición en el diagrama de Corbet (figura 2-6).

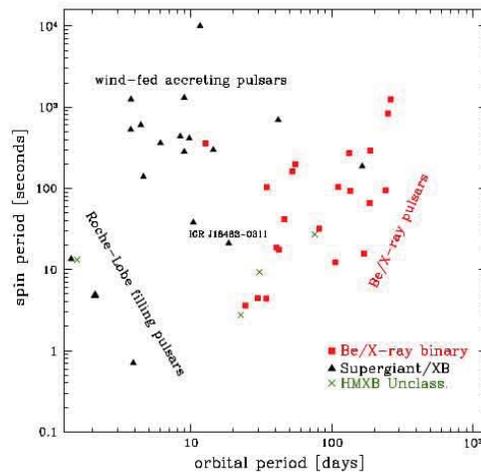


Figura 2-6: Diagrama de Corbet. Los cuadrados representan puntos a las BeHMXB's, los triángulos a las binarias de rayos X supergigantes que llenan su lóbulo de Roche y las cruces a las que transportan material a través del viento estelar. Puede observarse que, con algunas excepciones, las tres poblaciones de HMXB se agrupan en diferentes regiones del diagrama  $P_{spin}$  vs  $P_{orb}$  de las estrellas de neutrones. **Créditos: J.A. Zurita Heras** (Chaty [2013]).

#### 2.2.4. Binarias de rayos X de baja masa

Cuando un objeto compacto tiene una compañera en fase de gigante roja, con una masa  $\lesssim 1M_{\odot}$  (Chaty [2013]), la cual llena su lóbulo de Roche, entonces se tiene una binaria de rayos X de baja masa. La figura 2-5 indica que existen este tipo de sistemas en los que el objeto

compacto es un agujero negro o estrella de neutrones. Sin embargo, también existen en enanas blancas con una compañera tipo K o M que entran en la categoría de LMXB. En tales sistemas, el proceso que permite la acreción al objeto compacto es la transferencia de momento angular hacia las partes externas del disco de acreción (Frank *et al.* [2002], Gammie y Menou [1998], Shakura y Sunyaev [1973]). Como estos sistemas son varios ordenes de magnitud más viejos que sus contrapartes de alta masa, en común encontrar LMXB en cúmulos globulares. Existe evidencia de que la presencia de LMXB es responsable de la supresión de campos estelares as como de la ausencia de pulsaciones periódicas en algunos de ellos (Lewin y Van der Klis [2006]). Asimismo, una alta tasa de material acretado puede generar a una estrella de neutrones con periodos del orden de milisegundo, ya que el flujo de plasma que cae en el objeto compacto transfiere una parte pequeña de momento angular al mismo. Una prueba de esto radica en la baja intensidad del campo magnético asociado a estos objetos, lo cual es propio de objetos con edades mayores; esto hace de la transferencia de momento angular debido al material acretado la mejor explicación para este tipo de pulsares (Wijnands y Van der Klis [1998]).

Una diferencia importante entre las LMXB y las HMXB es la periodicidad; las fases de explosión de las primeras no tienen un periodo determinado, mientras que las del segundo grupo son regulares. El espectro en rayos X, ultravioleta y óptico también es una distinción relevante para separar ambas categorías. En el caso de las HMXB el espectro puede ser constante por largos periodos (con etapas regulares de explosiones de rayos X); por otra parte, el espectro de una LMXB siempre es variable y los mecanismos que producen el cambio en su espectro, y en consecuencia en su tasa de acreción, pueden deberse a diversos fenómenos que no aún no se entienden completamente (Tanaka y Shibasaki [1996]). La forma del espectro cambia de un sistema de alta masa a uno de baja masa: la mayoría de la emisión para HMXB está en el espectro de rayos X, mientras que para los LMXB una parte importante de los fotones dentro del disco son dispersados y remitidos en la banda óptica (Cherepashchuk [2000]). El periodo orbital de las LMXB varia de días a horas, siendo mucho más corto que para las HMXB (sobre todo en el caso de las BeHMXB).

Existe una variedad de LMXB que dependen de la forma en que se observen. Por ejemplo, en las fuentes cuyos discos de acreción presentan una corona, los rayos X que provienen del objeto compacto son dispersados por los electrones de la corona, lo que modifica significativamente

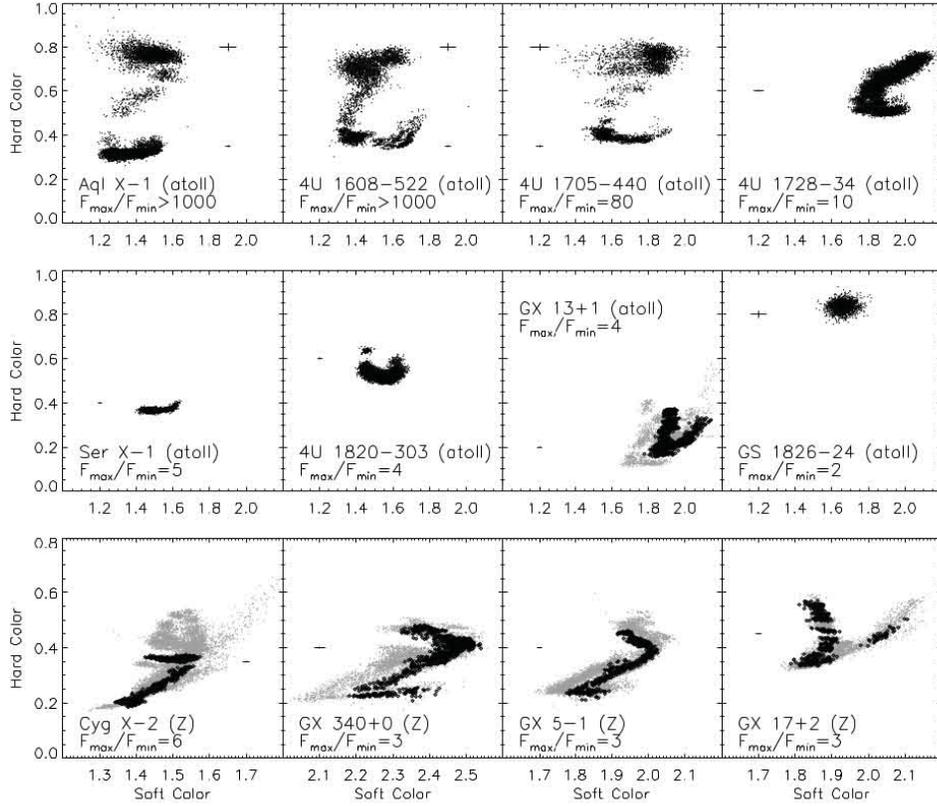


Figura 2-7: Diagrama color color de observaciones del Rossi X-Ray Timing Explorer de ocho binarias de rayos X. El primer y segundo renglones corresponden a fuentes Atoll, mientras que el tercero a fuentes Z (Muno *et al.* [2002]).

la curva de luz que detecta el observador (White y Holt [1982]); por otro lado, si el disco esta de frente al observador, puede observarse la región donde el gas de la estrella compañera colisiona con el disco, esto generará también una variación en la curva de luz debido a las altas temperaturas que se generan en tales condiciones (Lewin y Van der Klis [2006]).

Dentro de las binarias de baja masa existen dos grupos de interés: las de tipo Z y Atoll. Ambas tienen como acretor a una estrella de neutrones con un campo magnético débil. Las primeras reciben su nombre la forma en ‘Z’ que surge en las gráficas de color ‘duro’ contra ‘suave’ en la banda de rayos-X. Suelen tener comportamientos cuasiperiodicos cuyas frecuencias varían entre 1 y 60Hz. Las Atoll, por su parte, tienen zonas ‘islas’ en los mismos diagramas que se muestran en la figura 2-7. Dichas islas suelen durar semanas o meses (Muno *et al.* [2002]).

### 2.3. Modelo de Shakura-Sunyaev

En un disco de acreción alrededor de un objeto compacto se realizan dos procesos simultáneos: el material que lo forma se deshace de su momento angular, y la energía potencial se transforma, a través de diversos mecanismos, en radiación (Frank *et al.* [2002]). Aunque estos dos procesos no son los únicos que le dan forma al disco, son los que permiten entender lo que ocurre cualitativamente en éste. El primero determina la cantidad de momento angular que escapa del sistema y la que el objeto compacto absorbe, así como la rapidez en que los procesos de acreción ocurren en las partes internas del disco. Un ejemplo de lo primero son los pulsares de milisegundo que aumentan su velocidad de rotación gracias a este proceso de transporte de momento angular. Por otro lado, el segundo proceso determina la energía total emitida por el disco, el cual se verá como la integración a lo largo de todo el espectro del mismo y sólo es función del material acretado en él y la eficiencia de la conversión de energía potencial gravitacional. Cabe mencionar que las curvas de luz dependen de diversos procesos los cuales aumentan la temperatura en la corona hasta  $10^9$  K (White y Holt [1982]) y en la parte interna del disco varia entre  $3 \cdot 10^5 - 10^6$  K (Shakura y Sunyaev [1973]). Dichos procesos requieren de un análisis más profundo, y en algunos casos no se entiende aun como se dan.

La forma de la curva de luz y las fases de explosión en el disco han sido investigadas desde que las binarias de rayos X fueron descubiertas, y no existe un modelo que sea capaz de explicar algunos de los comportamientos observados a lo largo de tres décadas en estos objetos (Shapiro y Teukolsky [1983]). Sin embargo, el modelo de Shakura-Sunyaev para discos delgados ha permitido entender muchos de los procesos que intervienen en la formación, estructura y evolución de los discos de acreción, lo que ha permitido desarrollar modelos que reproducen algunas de las principales características observadas en estos sistemas. A continuación se describirá el modelo de Shakura-Sunyaev<sup>11</sup>, el cual permite encontrar formas funcionales de densidad, escala de altura, presión, velocidad del sonido, temperatura plano medio<sup>12</sup>, opacidad y densidad superficial. También propone una forma para la viscosidad turbulenta en el disco, la cual se conoce como la prescripción  $\alpha$  (Shakura y Sunyaev [1973], Hirose *et al.* [2009]).

---

<sup>11</sup>El modelo se describirá en base a las notas de Frank *et al.* [2002], a menos que se indique otra fuente.

<sup>12</sup>Definida como la temperatura del disco en las coordenadas  $(R, z = 0)$ .

### 2.3.1. Formación del disco

Como ya se mencionó, el material que cae en el lóbulo de Roche del objeto compacto proviene de la estrella compañera, la cual ocupa completamente el volumen de su propio lóbulo (se supone este caso y no la acreción por viento estelar para explicar la formación del disco). El material pasa por el punto  $L_1$  con una gran cantidad de momento angular respecto al objeto compacto, de manera que no es acretado directamente hacia el mismo, sino que orbita alrededor de éste.

Es necesario entender la dinámica del gas al momento de entrar en el lóbulo de Roche del objeto acretor<sup>13</sup>, así como a lo largo del disco. El movimiento del gas es descrito por la ecuación de Euler:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla P + f, \quad (2-5)$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del gas,  $\rho$  su densidad,  $P$  su presión y  $f$  la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el mismo. Para un marco de referencia con velocidad  $\omega_R$ , la ecuación de Euler se vuelve

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \Phi_R - 2\vec{\omega} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (2-6)$$

donde  $\Phi_R$  es el potencial de Roche definido en 2-4. El segundo término de la derecha de la ecuación 2-6 nos indica que la velocidad a la que el chorro de gas entra en el lóbulo de  $M_1$  es comparable a la velocidad de una partícula de prueba con velocidad angular  $\omega$  (medida en un marco sin rotación), a una distancia  $b_1$  que va desde el objeto compacto al punto  $L_1$ , por lo que:

$$v_{\perp} \sim b_1 \omega, \quad (2-7)$$

siendo  $v_{\perp}$  la velocidad normal a la órbita circular. Por otro lado, la velocidad radial del gas está determinada por la velocidad a la que las perturbaciones generadas se mueven a través de éste, por lo que:

$$v_{\parallel} \leq c_s. \quad (2-8)$$

Ambas velocidades nos indican que el flujo será supersónico y las fuerzas de presión interna son despreciables para calcular la trayectoria del gas. Un análisis cuantitativo nos brinda más

---

<sup>13</sup>Para este trabajo se utilizará acretor, colapsar y agujero negro como sinónimos.

información sobre la afirmación anterior.

Considerando la ecuación 2-3 y suponiendo que  $b_1 \sim \frac{1}{2}a$ , se tiene

$$v_{\perp} \simeq 100m_1^{1/3} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^{1/3} \left(\frac{P}{1 \text{ día}}\right)^{-1/3} \text{ km s}^{-1}. \quad (2-9)$$

Mientras que la velocidad del sonido se puede aproximar, utilizando la ecuación de estado de gas ideal, como:

$$c_s \simeq 10 \left(\frac{T}{10^4}\right)^{1/2} \text{ km s}^{-1}. \quad (2-10)$$

Para el caso de envolturas estelares,  $T \leq 10^5\text{K}$ , por lo que  $v_{\perp} \sim 100\text{km s}^{-1}$  y  $v_{\parallel} \sim 10\text{km s}^{-1}$ , lo que confirma el comportamiento supersónico del flujo.

La influencia del componente secundario genera perturbaciones a lo largo del disco en escalas de tiempo más pequeñas que el periodo orbital del gas, las cuales desvían a las partículas del potencial  $1/R$ ; esto provoca colisiones con partículas vecinas a menores y mayores radios, lo que ocasiona la disipación de la energía cinética en térmica.

La energía interna aumenta con la turbulencia, ya que las colisiones entre las partículas del gas aumentan su temperatura y con ello su luminosidad. Dado que el disco no tiene un mecanismo eficiente para el transporte de momento angular, y la escala de tiempo en que éste radía por colisiones internas del gas, entonces tiende a circularizar su órbita. En el caso de las fuentes ultraluminosas de rayos X (ULX), la circularización para la órbita del gas es de 1.5 segundos (Hopman *et al.* [2004]). El radio de circularización  $R_{circ}$  está definido como la órbita de menor energía para el gas pasando por  $L_1$ , el cual puede aproximarse como:

$$\frac{R_{circ}}{a} = \frac{4\pi^2}{GM_1P^2} a^3 \left(\frac{b_1}{a}\right)^4 = \left(1 + \frac{M_2}{M_1}\right) \left(\frac{b_1}{a}\right)^4. \quad (2-11)$$

Utilizando la relación

$$\frac{b_1}{a} = 0.5 - 0.227 \log q, \quad (2-12)$$

donde  $q$  es la definida en 2-1, se puede reescribir la ecuación 2-11 como:

$$\frac{R_{circ}}{a} = (1 + q)[0.5 - 0.227 \log q]^4. \quad (2-13)$$

Esto implica que el radio de circularización será al menos 2 ó 3 veces menor al radio del lóbulo de Roche del componente primario, por lo que el disco estará en una región interna del lóbulo, aun para  $q$  muy pequeña ( $q \sim 1$ ). Esto significa que el disco estará contenido en una región interna del lóbulo de Roche, alejado de los límites de éste (Lewin y Van der Klis [2006]).

Finalmente, como la pérdida de momento angular es pequeña en comparación a la de energía, todo el material tiene órbita circular, la cual disminuye su radio de forma paulatina. Este efecto es el que le da forma al disco ya que conforme el material pierde momento angular, va cayendo en forma de espiral al objeto compacto (figura 2-8).

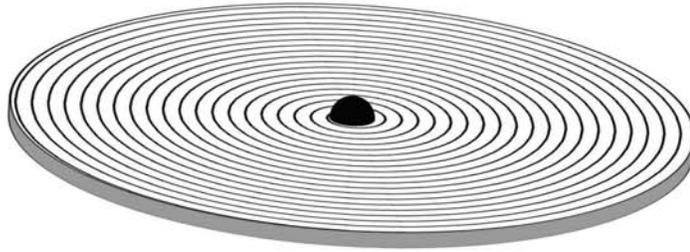


Figura 2-8: Representación gráfica de un disco de acreción idealizado Frank *et al.* [2002].

### 2.3.2. Mecanismos de transferencia de momento angular

#### Torca y viscosidad

Un disco de acreción no tiene una velocidad de rotación  $\Omega$  constante para todo  $R$ , sino que, al menos en el caso más sencillo, obedece a una ley de rotación kepleriana. Dicha ley implica que cada anillo de gas se moverá a una velocidad diferente en relación a sus anillos vecinos, por lo que existirá una fuerza de corte entre cada uno, misma que generará una viscosidad la cual depende de la velocidad relativa entre anillos.

Se define  $\lambda$  como el camino libre medio de una partícula en el gas. La velocidad típica de será de  $\tilde{v} \sim c_s$ . Se considera un flujo de gas entre  $z = 0$  y  $z = H$ , con una velocidad angular  $\Omega(R)$  en dirección  $\phi$ . Para dos anillos del disco de grosor  $\lambda$  (figura 2-9) a una distancia  $R$  del objeto compacto, el elemento de gas B que se encuentra en  $R + \lambda/2$  recorrerá una distancia radial  $\sim \lambda$  antes de interactuar con el otro elemento en el anillo interno, al igual que el elemento A en el anillo externo. El elemento A cargará un momento angular correspondiente al anillo

donde se encontraba originalmente, así como B del suyo; por lo que al pasar de uno a otro ocurre una transferencia de momento angular.

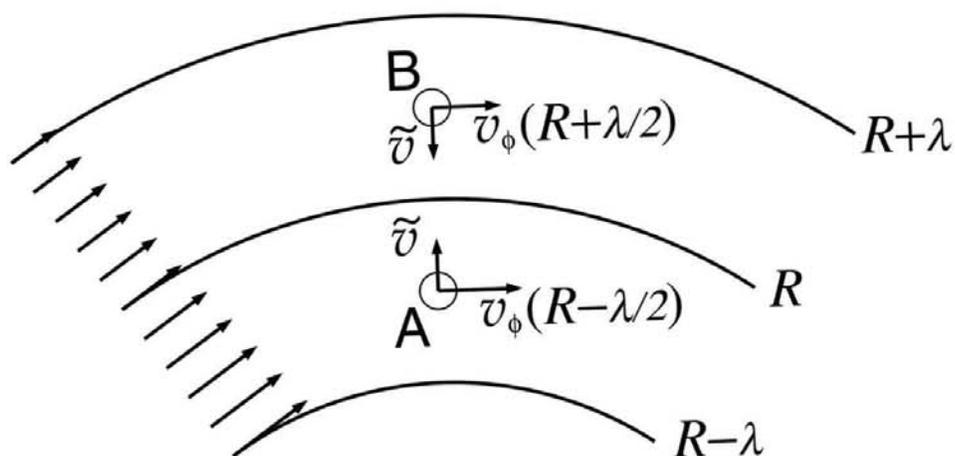


Figura 2-9: Representación gráfica de un disco de acreción idealizado Frank *et al.* [2002].

Sin embargo, las circunstancias en las que se encuentra el gas, sujeto tanto a fuerzas internas como a una fuerza central, implica que la conservación de momento angular no puede ocurrir a expensas del momento lineal de cada elemento individual al cruzar por la frontera  $R$  constante que separa los anillos. Para un disco en estado estacionario la conservación del momento angular no implica la conservación del momento lineal.

Si se considera que el momento lineal de los elementos del gas se conserva, entonces se puede expresar el componente  $\phi$  del flujo de momento por longitud de unidad de arco a través de la frontera  $R$  constante como:

$$\rho \tilde{v} H (R + \lambda/2) v_{\phi} (R - \lambda/2)$$

y con ello obtener a primer orden de  $\lambda$  la torca por longitud de unidad de arco

$$-\rho \tilde{v} H \lambda R^2 \Omega'$$

donde  $\Omega' = d\Omega/dr$ , y se supone que la escala de longitud en el gradiente del momento angular es mucho mayor a la escala de longitud del camino libre medio de las partículas en el

gas. En este caso, la única componente que no se elimina del tensor de esfuerzo es

$$\sigma_{r\phi} = -\eta R\Omega' \sim -\rho\tilde{\nu}\lambda R\Omega', \quad (2-14)$$

donde se utilizó la viscosidad turbulenta  $\eta$ , que se define como:

$$\eta = \rho v_t \lambda_t, \quad (2-15)$$

donde  $v_t$  es la velocidad de las perturbaciones ocasionadas por la turbulencia,  $\lambda_t$  es la escala de distancia típica de la turbulencia y  $\eta$  la viscosidad cinemática. Las ecuaciones 2-14 y 2-15 implican que la distancia característica de la turbulencia  $\lambda_t \sim \lambda$ . Se puede calcular la viscosidad cinemática  $\nu = \eta/\rho$  como:

$$\nu \sim \lambda\tilde{\nu} = \lambda_s\tilde{\nu}. \quad (2-16)$$

El problema se “reduce” a encontrar los valores de la velocidad y distancia típicas de la turbulencia, mismas que sólo se puede determinar de forma cualitativa.

En el caso en que el disco este permeado por un campo magnético turbulento, podemos utilizar la definición de la componente  $r\phi$  del tensor de esfuerzo con la expresión dada por Shakura y Sunyaev [1973]:

$$B_{r\phi} = \left| \frac{\mathbf{H}_r \times \mathbf{H}_\phi}{8\pi} \right|, \quad (2-17)$$

donde  $\mathbf{H}$  es el campo magnético turbulento en el disco. Como  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ , debe existir un cambio de signo en la componente radial del campo magnético, que en caso de darse en el disco generaría una división del campo magnético a escalas más pequeñas. Esto conlleva a que la energía del campo magnético no puede exceder a la energía térmica del gas, por lo que

$$\frac{|\mathbf{H}|^2}{8\pi} < \rho \frac{c_s^2}{2},$$

lo cual nos permite aproximar el tensor de esfuerzo como:

$$\sigma_{r\phi} \sim -\rho c_s^2 \left( \frac{|\mathbf{H}|^2}{4\pi \rho c_s^2} \right). \quad (2-18)$$

Al no haber una teoría de turbulencia que permita profundizar en la naturaleza del origen

de las perturbaciones en el flujo, solamente se pueden realizar suposiciones sobre la magnitud y el comportamiento de la misma en el disco. En escalas  $\ll R$ , la turbulencia es isotrópica y homogénea, por lo que es conveniente describirla en función del promedio de la distancia y velocidad características del flujo turbulento. La escala de la distancia de la turbulencia se vuelve más pequeña conforme el material se acerca más al objeto compacto y en general no supera la escala de altura del disco<sup>14</sup>

$$\lambda_t \sim H. \quad (2-19)$$

Por otro lado, la velocidad asociada a la turbulencia  $\tilde{v}$  no debe ser mayor a la velocidad de las perturbaciones en el gas  $c_s$ . En base a lo anterior:

$$\sigma_{r\phi} = -\eta R\Omega' \sim -\eta \frac{v\phi}{R} \sim -\rho c_s^2 \frac{v_t}{c_s}, \quad (2-20)$$

por lo que la ecuación 2-16 queda como:

$$\nu = \tilde{v}\lambda_t = \alpha c_s H, \quad (2-21)$$

siendo  $\alpha$  la eficiencia del transporte del momento angular en el disco. A la ecuación 2-21 se le conoce como la prescripción  $\alpha$ . Cuando Shakura y Sunyaev [1973] desarrollaron este modelo, supusieron  $\alpha$  como constante para todo el disco, y fijaron un intervalo para su valor:

$$10^{-15} \left( \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{cr}} \right)^2 < \alpha < 1, \quad (2-22)$$

donde  $\dot{M}_{cr}$  es la tasa de acreción crítica en la que el disco alcanza la luminosidad de Eddington, en la que la fuerza de gravedad se anula con la fuerza de la presión de radiación. Sin embargo, la suposición de  $\alpha$  como constante refleja lo poco que se entiende sobre el transporte de momento angular en el disco. De forma cualitativa, la eficiencia para transportar hacia radios mayores el momento angular del material que está siendo acretado debería depender, al menos en principio, de variables locales en el disco.

En el caso de los anillos de Jupiter, por ejemplo, el transporte de momento angular es casi

---

<sup>14</sup>La escala de altura del disco se define más adelante.

nulo, ya que la interacción entre los elementos que forman a su disco se reduce a colisiones de cuerpos y no a la turbulencia de un flujo. Por otro lado si se considera un gas a bajas temperaturas, la influencia hidrodinámica de la turbulencia existe por la diferencia de velocidades angulares. Sin embargo, dicha turbulencia será más baja que la del mismo gas a temperaturas superiores, i.e. si la acreción se vuelve suficientemente grande como para calentar el disco. Se han realizado simulaciones donde  $\alpha$  es función implícita de la temperatura por medio de variables intermedias, tales como el número de Prandtl (Potter y Balbus [2014]). Existen otras en las que se realiza una aproximación relativista, donde  $\alpha$  depende de la distancia al objeto compacto y de la métrica utilizada para describir la geometría del espaciotiempo alrededor del mismo (Penna *et al.* [2013]); mientras que algunos como Meyer y Meyer-Hofmeister [1983] buscan la relación entre la altura de escala  $H$  y el radio  $R$ .

### Efectos de disipación de energía

Se define la densidad superficial del disco como la integral de la densidad en un anillo del disco a lo largo de la coordenada  $z$ :

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(R, z) dz, \quad (2-23)$$

y se considera un disco delgado, es decir, donde se cumpla la condición  $H \ll R$ . Esto es equivalente a que la eficiencia del enfriamiento del disco sea alta, o a que su velocidad sea kepleriana. Si alguna de estas tres condiciones no se cumple, tampoco lo harán las otras dos (Lewin y Van der Klis [2006]).

Para este caso, el mecanismo de transferencia de momento angular se vuelve más sencillo, ya que en la dirección  $z$ , misma en la que se mide la escala de altura del disco, se mantiene el equilibrio hidrostático, y puede desacoplarse el flujo de esta coordenada de las otras dos<sup>15</sup>, por lo que se cumple la ecuación de Euler en una dimensión:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right]. \quad (2-24)$$

Se puede apreciar que los términos de velocidad son despreciados. Asumiendo que  $z \ll R$ ,

---

<sup>15</sup>Se suponen coordenadas cilíndricas y simetría azimutal.

la ecuación 2-24 se vuelve:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{GMz}{R^3}. \quad (2-25)$$

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta fácilmente. Si se utiliza  $P \sim \rho c_s^2$  se obtiene una definición más formal para  $H$ :

$$\rho(R, z) = \rho_c(R) e^{-z^2/(2H^2)}. \quad (2-26)$$

En particular, para el caso de un disco delgado,  $\partial P/\partial z \sim P/H$  y  $z \sim H$ , por lo que la aproximación

$$H \cong c_s \left( \frac{R}{GM} \right)^{1/2} R, \quad (2-27)$$

es valida. La ecuación 2.26 sugiere que  $\Sigma = 2\rho H$ ; En base a esto se calcula la torca ejercida por un anillo externo sobre el interno como

$$G(R) = 2\pi R\nu\Sigma R^2\Omega'. \quad (2-28)$$

Con ello se puede calcular la tasa de trabajo realizado por la torca en la dirección del momento angular  $\Omega(R)$

$$\Omega \frac{\partial G}{\partial R} dR = \frac{\partial}{\partial R} (G\Omega) dR - G\Omega' dR. \quad (2-29)$$

Al integrar a lo largo del disco el primer término del lado derecho de la ecuación, se obtiene la convección total o transporte neto de la energía rotacional del disco, la cual solamente está determinada por las condiciones de frontera del disco. Por otra parte, el segundo término del lado derecho de la ecuación 2-29 representa la tasa de pérdida (local) de energía rotacional del gas en calor.

Debido a lo anterior, es posible calcular la tasa de energía radiada por unidad de área del disco  $D(R)$ :

$$D(R) = \frac{G\Omega'}{4\pi R} = \frac{1}{2}\nu\Sigma(R\Omega')^2, \quad (2-30)$$

entonces para un disco kepleriano la forma es

$$D(R) = \frac{9}{8}\nu\Sigma \frac{GM}{R^3}. \quad (2-31)$$

### 2.3.3. Estructura radial del disco

Se describió cómo surge la torca en el disco a pequeñas escalas, pero es necesario explicar cómo ocurre el transporte a regiones externas del disco. Un anillo de material entre  $R$  y  $R + \Delta R$  tiene una masa de  $2\pi R \Delta R \Sigma$  y un momento angular de  $2\pi R \Delta R \Sigma R^2 \Omega$ . La tasa de cambio de masa en el anillo es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(2\pi R \Delta R \Sigma) &= v_R(R, t) 2\pi R \Sigma(R, t) - v_R(R + \Delta R, t) \cdot 2\pi(R + \Delta R) \Sigma(R + \Delta R, t) \\ &\cong -2\pi \Delta R \frac{\partial}{\partial R}(R \Sigma v_R R^2 \Omega) + \frac{\partial G}{\partial R} \Delta R \end{aligned}$$

En el límite donde  $\Delta R \rightarrow 0$ :

$$R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{(R \Sigma v_R)}{\partial R} = 0. \quad (2-32)$$

Aplicando el mismo método para el momento angular de anillo se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(2\pi R \Delta R \Sigma R^2 \Omega) \cong -2\pi \Delta R \frac{\partial}{\partial R}(R \Sigma v_R R^2 \Omega) + \frac{\partial G}{\partial R} \Delta R.$$

Calculando el límite:

$$R \frac{\partial}{\partial t}(\Sigma R^2 \Omega) + \frac{\partial}{\partial R}(R \Sigma v_R R^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R}. \quad (2-33)$$

Utilizando las ecuaciones 2-28, 2-32 y 2-33, y considerando que  $\partial \Omega / \partial t = 0$  debido a la presencia de un potencial fijo, se obtiene:

$$R \Sigma v_R (R^2 \Omega)' = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R}. \quad (2-34)$$

Utilizando 2-32 y 2-34, y suponiendo  $\Omega = \Omega_k = \left(\frac{GM}{R^3}\right)^{1/2}$ , se llega a la ecuación de difusión que describe a  $\Sigma$  en un disco con rotación kepleriana

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} (\nu \Sigma R^{1/2}) \right]. \quad (2-35)$$

Utilizando las ecuaciones 2-28 y 2-34 se obtiene la velocidad radial en términos de  $\Sigma$ ,  $R$  y

$\nu$ :

$$v_R = -\frac{3}{\Sigma R^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} (\nu \Sigma R^{1/2}). \quad (2-36)$$

Si se considera  $\nu$  constante y se define  $s = 2R^{1/2}$  la ecuación 2.36 se vuelve:

$$\frac{\partial}{\partial t} (R^{1/2} \Sigma) = \frac{12\nu}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (R^{1/2} \Sigma), \quad (2-37)$$

reescribiendo  $R^{1/2} \Sigma = T(t)S(s)$ , se puede aplicar el método de separación de variables para resolver la ecuación diferencial, misma que se vuelve:

$$\frac{T'}{T} = \frac{12\nu}{s^2} \frac{S''}{S} = -\lambda^2. \quad (2-38)$$

Esto implica que  $T$  es una función exponencial y  $S$  una función de Bessel, por lo que la solución para  $\Sigma$  es:

$$\Sigma(R, t = 0) = \frac{m}{2\pi R_0} \delta(R - R_0),$$

donde  $\delta(R - R_0)$  es el funcional delta Dirac y  $R_0$  es el radio inicial del anillo; esto se traduce como

$$\Sigma(R, t = 0) = \frac{m}{\pi R_0^2} \tau^{-1} x^{-1/4} \exp \left[ -\frac{1+x^2}{\tau} \right] I_{1/4}(2x/\tau), \quad (2-39)$$

donde  $I_{1/4}(z)$  es la función de Bessel modificada,  $x = R/R_0$ ,  $\tau = 12\nu t R_0^{-2}$ .

Se define el tiempo viscoso

$$t_{visc} \sim R/v_R, \quad (2-40)$$

como aquel en que un anillo de material se mueve una distancia  $R$ . Lo anterior implica que  $\tau \sim t/t_{visc}$  es la escala de tiempo (adimensional) que describe la dinámica del anillo de masa  $m$ . Mediante la ecuaciones 2-36, 2-39 y manteniendo  $\nu$  constante:

$$v_R = -\frac{3\nu}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{4} \ln x - \frac{1+x^2}{\tau} + \ln_{1/4} \left( \frac{2x}{\tau} \right) \right]. \quad (2-41)$$

El comportamiento asintótico de la función de Bessel es:

$$I_{1/4}(z) \propto \begin{cases} z^{1/2} e^{zz}, & \tau \ll 2x \\ z^{1/4}, & \tau \gg 2x. \end{cases}$$

Por lo que la velocidad radial tiene un comportamiento distinto para caso límite:

$$v_R \sim \left\{ \begin{array}{l} \frac{3\nu}{R_0} \left( \frac{1}{4x} + \frac{2x}{\tau} - \frac{2}{\tau} \right), \quad \tau \ll 2x \\ \frac{-3\nu}{R_0} \left( \frac{1}{2x} - \frac{2x}{\tau} \right), \quad \tau \gg 2x \end{array} \right\}.$$

Una conclusión que surge de este análisis es que las partes externas del disco tienen  $v_R > 0$ , de manera que, a partir de cierto radio, el material escapa del disco. Además, el valor de dicho radio (donde ocurre el cambio de signo en  $v_R$ ) no es constante, sino que se mueve hacia valores mayores. Entonces, a partir de un tiempo dado, el material contenido en una región dada, cuya velocidad radial haga que se aleje del objeto compacto, eventualmente será acretada al mismo. Todo esto conlleva a que la mayor cantidad de momento angular sea transportada a las regiones más externas del disco, por una cantidad relativamente pequeña del material; mientras que la mayor parte del plasma que es acretado al objeto compacto se queda con un porcentaje mínimo de momento angular, el cual se suma al del colapsar.

Mediante la ecuación 2-32, para el caso estacionario, se obtiene  $R\Sigma v_R$  constante. Esto significa que la tasa de entrada de material en cualquier región del disco es la misma:

$$\dot{M} = 2\pi R\Sigma(-v_R), \quad (2-42)$$

donde  $\dot{M}$  es la tasa de acreción. Aplicando el mismo método en la ecuación de conservación de momento:

$$R\Sigma v_R R^2 \Omega = \frac{G}{2\pi} + \frac{C}{2\pi}$$

donde  $C$  es la constante de la solución. Asumiendo un disco con rotación kepleriana:

$$-\nu\Sigma\Omega' = \Sigma(-v_R)\Omega + C/(2\pi R^3). \quad (2-43)$$

La constante  $C$  depende de la cantidad de momento angular que cae en el objeto compacto junto al gas, es decir, la cantidad de momento angular que el anillo de material con  $R_{min}$  tiene al momento de ser acretado.

Existen dos soluciones importantes para  $C$ . La primera es para discos delgados, los cuales

tienen una rotación kepleriana en toda su superficie, hasta el momento en que el material es acretado. Asumiendo que la velocidad de rotación del objeto compacto  $\Omega_*$ , entonces se cumple

$$\Omega_* < \Omega_k(R_*),$$

donde  $\Omega_k(R)$  es la velocidad kepleriana. De esta forma la curva de rotación del disco tendría un máximo cerca del borde interno del disco a una distancia  $R_* + b$ , con  $b \ll R_*$ , lo que implica que  $\Omega' = 0$  y

$$\Omega(R_* + b) = \left( \frac{GM}{R^3} \right)^{1/2} [1 + O(b/R_*)], \quad (2-44)$$

donde  $R_*$  es el radio del objeto compacto y  $R_* + b$  es el radio donde  $\Omega' = 0$ . Sustituyendo  $R$  por  $R_* + b$  en la ecuación 2-43, y utilizando 2-42 y 2-44 se obtiene

$$C = -\dot{M}(GM R_*)^{1/2}. \quad (2-45)$$

Recordando que  $\Omega = \Omega_k$  en 2-43:

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (2-46)$$

En el segundo caso,  $b \sim R_*$ , y la suposición del disco delgado no se aplica; entonces la frontera entre el radio interno y el objeto compacto se vuelve un disco grueso. Este caso se parece más a un disco con una acreción dominada por advección, el cual se discutirá más adelante.

Continuando con el análisis de la velocidad radial en el caso de un disco delgado, se aplica la ecuación de Euler a la presión en esa misma coordenada:

$$v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} - \frac{v_\phi^2}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{GM}{R^2} = 0. \quad (2-47)$$

Se puede despreciar el tercer término de la ecuación 2-47, ya que es comparable a la velocidad del sonido en el medio, la cual es mucho menor al cuarto término (potencial gravitacional).

Utilizando las ecuaciones 2-42 y 2-46 se obtiene la solución para  $v_R$ :

$$v_R = -\frac{3\nu}{2R} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (2-48)$$

Mediante la prescripción  $\alpha$  es posible comprobar que se cumple la condición para discos delgados en la ecuación 2-48:

$$v_R \sim \frac{\nu}{R} \sim \alpha c_s \frac{H}{R} \ll c_s. \quad (2-49)$$

El número de Mach es definido como:

$$\mathcal{M} = v_\phi / c_s, \quad (2-50)$$

y con él se puede reescribir 2-27 y 2-49 como:

$$H \sim \mathcal{M}^{-1} R, \quad (2-51)$$

$$v_R \sim \alpha \mathcal{M}^{-1} c_s. \quad (2-52)$$

### 2.3.4. Estructura local del disco y dependencia temporal

Se había relacionado la densidad y la presión con la velocidad del sonido, ahora se pueden expresar con una definición más precisa:

$$c_s^2 = \frac{P}{\rho}, \quad (2-53)$$

y la presión total es la suma de las contribuciones de la presión de radiación y la del gas:

$$P = \frac{\rho k T_c}{\mu m_p 6} + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4, \quad (2-54)$$

donde  $\sigma$  es la constante de Stephan-Boltzmann y  $T_c = T(R, z = 0)$ . La suposición para discos delgados, nos permite suponer que el gradiente de temperatura se encuentra en dirección  $z$ . Además, enfocándose en el caso de transferencia radiativa de energía (sin convección), entonces

el flujo de radiación a través del plano  $z$  constante es:

$$F(z) = \frac{-16\sigma T^3}{3\kappa_R\rho} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (2-55)$$

siendo  $\kappa_R$  es la opacidad de Rosseland promedio. Para la ecuación 2-55, se supone que

$$\tau = \rho H \kappa_R(\rho, T_c) = \Sigma \kappa_R. \quad (2-56)$$

La relación entre el flujo a lo largo de dirección  $z$  y la tasa de energía radiada en la superficie es:

$$F(H) - F(0) = \int_0^H Q^+(z) dz = D(R), \quad (2-57)$$

donde  $Q^+$  es la tasa de producción de energía debido a la disipación viscosa por volumen. Utilizando la ecuación 2-55, la de profundidad óptica y considerando que  $T_c^4 \gg T^4(H)$  se puede aproximar la energía radiada por unidad de área:

$$D(R) = \frac{4\sigma}{3\tau} T_c^4. \quad (2-58)$$

El disco no es, en general, estable ante una perturbación en  $T_c$ , por lo que se necesita una modificación para calcular la temperatura en  $z = 0$  en casos no estacionarios. Para esto se usa la ecuación 2-31:

$$\frac{4\sigma}{3\tau} T_c^4 = \frac{9}{8} \nu \Sigma \frac{GM}{R^3}. \quad (2-59)$$

Finalmente, reuniendo las 8 ecuaciones que describen la dinámica del disco:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad \rho = \Sigma/H; \\ 2. \quad H = c_s R^{3/2}/(GM)^{1/2}; \\ 3. \quad c_s^2 = P/\rho; \\ 4. \quad P = \frac{\rho k T_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4; \\ 5. \quad \frac{4\sigma}{3c} T_c^4 = \frac{9}{8} \nu \Sigma \frac{GM}{R^3}; \\ 6. \quad \tau = \Sigma \kappa_R(\rho, T_c) = \tau(\Sigma, \rho, T_c); \\ 7. \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} (\nu \Sigma R^{1/2}) \right\}, \\ 8. \quad \nu = \nu(\rho, T_c, \Sigma, \alpha, \dots) \end{array} \right\}. \quad (2-60)$$

### 2.3.5. Espectro emitido

Con la ecuación 2-46 es posible determinar la cantidad de energía emitida debido a la acreción de material. Por medio de las ecuación 2-30 y 2-46, se puede reescribir la disipación viscosa como:

$$D(R) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (2-61)$$

A pesar de la poca información que se tiene de como actúa la turbulencia en el disco (o en cualquier sistema), este resultado permite encontrar una relación entre la energía emitida y la viscosidad turbulenta en el gas. A pesar de que no aparezca  $\nu$  explícitamente en la ecuación,  $\dot{M}$  y  $\Sigma$  tienen una fuerte dependencia en ella. Mediante  $D(R)$  es posible encontrar la luminosidad emitida por el disco entre dos anillos de radio  $R_1$  y  $R_2$ :

$$\begin{aligned} L(R_1, R_2) &= 2 \int_{R_1}^{R_2} D(R) R dR = \frac{3GM\dot{M}}{2} \int_{R_1}^{R_2} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] \frac{dR}{R^2} \\ &= \frac{3GM\dot{M}}{2} \frac{1}{R_1} \left\{ \frac{1}{R_1} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{R_*}{R_1} \right)^{1/2} \right] - \frac{1}{R_2} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{R_*}{R_2} \right)^{1/2} \right] \right\} \end{aligned}$$

En el límite cuando  $R_2 = \infty$  y haciendo  $R_1 = R_*$ :

$$L_{disc} = \frac{GM\dot{M}}{2R_*} = \frac{1}{2} L_{acc}, \quad (2-62)$$

donde  $L_{acc}$  es la luminosidad emitida debido a la acreción de material. Esto significa que el material emite la mitad de la energía potencial conforme se acerca al objeto compacto, y la otra mitad puede ser emitida en la capa límite, es decir, la distancia  $b$  que aparece en la ecuación 2-44.

A pesar de este resultado, aún no hay manera de encontrar la curva de luz del disco. Asumiendo que el disco emite como cuerpo negro, se aplica la ley de Stefan-Boltzmann

$$\sigma T^4(R) = D(R), \quad (2-63)$$

y la ecuación 2-60 para obtener

$$T(R) = \left\{ \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3\sigma} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/4}. \quad (2-64)$$

En base a la ley de Planck, el elemento de área del disco tendrá un espectro cuya forma funcional es:

$$I_\nu = B_\nu[T(R)] = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT(R)} - 1}. \quad (2-65)$$

Se considera que la dispersión causada por la atmósfera del disco es nula, es decir, que no hay dispersión de la radiación que sale desde  $z = 0$ . Con esto, el flujo bolométrico del disco será:

$$F_\nu \frac{2\pi}{D^2} \int_{R_*}^{R_{max}} I_\nu R dR = \frac{4\pi h\nu^3}{(cD)^2} \int_{R_*}^{R_{max}} \frac{R dR}{e^{h\nu/kT(R)} - 1}. \quad (2-66)$$

Para frecuencias que cumplan con  $h\nu \ll kT(R_{max})$  se obtiene que la emisión por unidad de área se puede aproximar con la de Rayleigh-Jeans, por lo que el espectro adquiere la forma  $F_\nu \propto \nu^2$ , para el caso en que  $h\nu \gg kT(R_{max})$  la aproximación de Wien se ajusta mejor a la curva del espectro, la cual es exponencial. Para casos intermedios, se puede aproximar la curva del espectro como

$$F_\nu \propto \nu^{1/3} \int_0^\infty \frac{x^{5/3}}{e^x - 1} dx \propto \nu^{1/3}, \quad (2-67)$$

donde se define  $x \equiv h\nu/kT(R)$ .

La figura 2-10 muestra el espectro de un disco de acreción, en la que se observan tres regiones principales, mismas que coinciden con las aproximaciones de Rayleigh-Jeans, la intermedia y la de Wien. Cabe mencionar que este espectro no toma en cuenta la contribución de la corona, las variaciones ocasionadas por un campo magnético dinámico, o la eyección de jets del objeto compacto. Asimismo, para tasas de acreción suficientemente altas ( $\dot{M} > 0.01 M_\odot \text{s}^{-1}$ ), el enfriamiento por neutrinos supondría un límite al valor máximo de la emisión de fotones provenientes de una fuente térmica (Chen y Beloborodov [2007]).

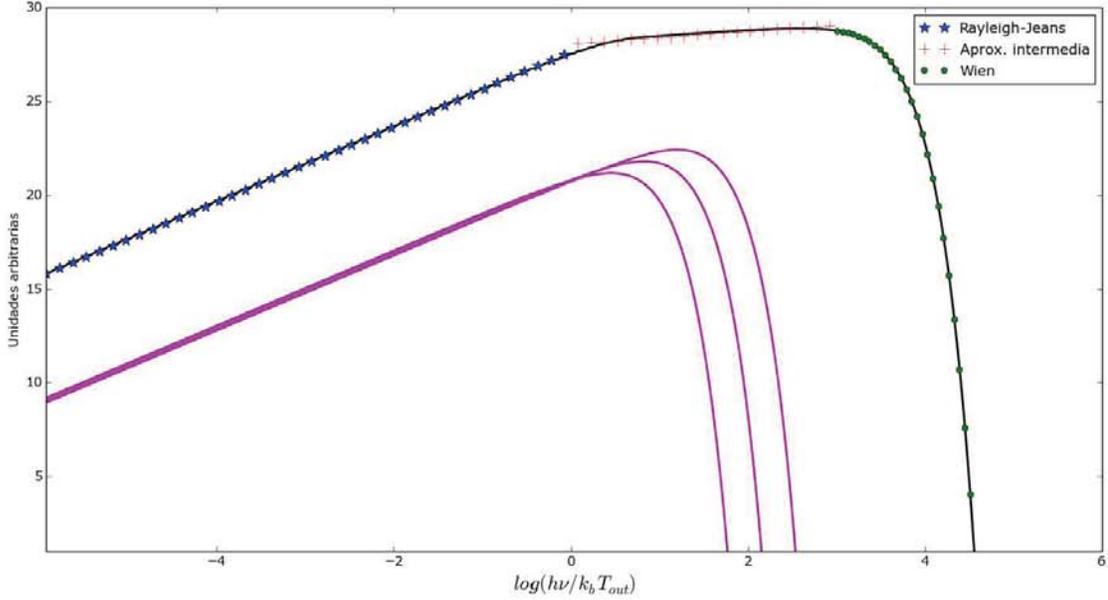


Figura 2-10: Espectro de emisión para un disco con  $R_{max} = 100R_{min}$  alrededor de un agujero negro de  $15M_{\odot}$ , con una tasa de acreción de  $\dot{M} = 0.6M_{\odot}$  al año y una eficiencia del 8% en la luminosidad. La frecuencia en el eje horizontal está normalizada a  $T_{out} = T(R_{out})$ . Los límites para las aproximaciones están en  $h\nu/k_b T_{out} = 1$  (entre Rayleigh-Jeans y la intermedia) y  $T_{out} = (3GM\dot{M})/(8\pi R_{out}^3\sigma)$  (entre la intermedia y Wien). Las curvas violeta representan la contribución al espectro de los anillos en los radios (de derecha a izquierda)  $0.1R_{max}$ ,  $0.31R_{max}$  y  $0.999R_{max}$ .

## 2.4. Modelos de discos con flujos dominados por advección: ADAF

En la sección anterior, se empezó con la descripción de los discos delgados suponiendo que la curva de rotación del gas era kepleriana; esto implica que la eficiencia para emitir la energía liberada por la acreción es alta. Sin embargo, en el caso de los discos ADAF, la emisión de radiación no es tan alta, ya sea por una alta o baja densidad de material en la parte interna del disco. Como se verá, la temperatura del gas en un flujo dominado por advección es mucho mayor que en el caso de un disco de Shakura-Sunyaev; ésto ocasiona que energía interna del gas sea comparable a la energía potencial gravitacional y el disco se vuelve grueso ( $H/R \sim 1$ ). Como la dispersión de velocidad es alta, la velocidad rotacional media se vuelve menor a la kepleriana. Esto genera varios problemas al momento de modelar estos discos. En primer lugar, no siempre es conveniente desacoplar la ecuación de equilibrio hidrostático en

las coordenadas  $z$  y  $R$ . Aunque algunas soluciones autosimilares son descritas en coordenadas cilíndricas, otras requieren el uso de coordenadas esféricas. En segundo lugar, la dinámica del disco se verá afectada por la advección. Por ejemplo, la acreción se vería disminuida debido a la energía interna del gas en las cercanías del objeto compacto, así como por el transporte de material a radios mayores, el cual es el único mecanismo para enfriar el disco. Finalmente, las soluciones para ADAF suelen ser autosimilares, de manera que no admiten soluciones adicionales que expliquen algunos de los efectos observacionales cuya causa se desconoce en la actualidad.

Narayan y Yi obtuvieron dos de las primeras soluciones para un disco ADAF, 20 años después de que Shakura y Sunyaev publicaran su modelo para discos delgados (Narayan y Yi [1994], Narayan y Yi [1995]). Para la primera, se integraron verticalmente las ecuaciones de conservación en coordenadas cilíndricas, y de allí obtuvieron soluciones autosimilares que describen discos gruesos con relativa exactitud. En la segunda solución, se determinaron las ecuaciones de flujo axisimétrico en coordenadas esféricas, y mediante ciertas suposiciones, se calcularon soluciones autosimilares.

### 2.4.1. Soluciones obtenidas por integración vertical

Partiendo de las ecuaciones de discos delgados, se considera un flujo estacionario bidimensional en el plano  $R\phi$ , con simetría axisimétrica ( $\partial/\partial t = \partial/\partial\phi = 0$ ), por lo que todas las variables del flujo son dependientes sólo de  $R$ . Despejando  $P$  de la ecuación 2-53, se obtiene la presión en términos de la densidad, la cual a su vez depende de la coordenada radial ( $\rho = \rho(R)$ ). Como se están tratando cantidades promediadas, se define la densidad superficial como  $\Sigma = 2\rho H$ , y reescribe la escala de altura como  $H \sim Rc_s/v_k$ , siendo  $v_k = \Omega_k R$  la velocidad kepleriana. Utilizando las ecuaciones 2-20 y 2-21, reescribe la viscosidad turbulenta:

$$\nu = \alpha \frac{c_s^2}{\Omega_k}. \quad (2-68)$$

Las ecuaciones de continuidad, de momento (en sus componentes radial y azimutal) y la de energía, son resueltas mediante las funciones de densidad, velocidad radial  $v$ , velocidad angular  $\Omega$  y la velocidad del sonido isotérmica  $c_s$ . La forma de estas ecuaciones en coordenadas

cilíndricas es (Narayan y Popham [1993]):

$$\frac{d}{dR}(\rho R H v) = 0, \quad (2-69)$$

$$v \frac{dv}{dR} - \Omega^2 R = -\Omega_k^2 R - \frac{1}{\rho} \frac{d}{dR}(\rho c_s^2), \quad (2-70)$$

$$v \frac{d(\Omega R^2)}{dR} = \frac{1}{\rho R H} \frac{d}{dR} \left( \frac{\alpha \rho c_s^2 R^3 H}{\Omega_k} \frac{d\Omega}{dR} \right), \quad (2-71)$$

$$\Sigma v T \frac{ds}{dR} = \frac{3 + 3\epsilon}{2} 2\rho H v \frac{dc_s^2}{dR} - 2c_s^2 H v \frac{d\rho}{dR} = Q^+ - Q^-. \quad (2-72)$$

En la ecuación 2-72,  $s$  y  $T$  son la entropía y temperatura, respectivamente. Narayan y Popham definen  $\epsilon = (5/3 - \gamma)(\gamma - 1)$ , donde  $\gamma$  es el cociente del calor específico. Utilizando la ecuación 2-30, se reescribe la disipación viscosa de ambos lados del disco  $2D(R) = Q^+$  para obtener la energía neta atrapada en el disco como

$$Q^+ - Q^- = \frac{2\alpha \rho c_s^2 R^2 H}{\Omega_k} \left( \frac{d\Omega}{dR} \right)^2 - Q^- \equiv f \frac{2\alpha \rho c_s^2 R^2 H}{\Omega_k} \left( \frac{d\Omega}{dR} \right)^2. \quad (2-73)$$

El parámetro  $f$  determina cuánto del flujo es dominado por la advección: para  $f = 0$  la eficiencia en el enfriamiento es máxima, lo que correspondería a un disco Shakura-Sunyaev, y para  $f = 1$  no existiría enfriamiento por radiación. Para ayudar a definir la naturaleza del flujo, se define  $\epsilon' \equiv \epsilon/f$ .

Las ecuaciones 2-69-2-72 pueden ser resueltas con las soluciones de Spruit *et al.* [1987]:

$$\rho \propto R^{-3/2}, \quad v \propto R^{-1/2}, \quad \Omega \propto R^{-3/2}, \quad c_s^2 \propto R^{-1}, \quad (2-74)$$

las cuales se relacionan con sus análogas keplerianas como:

$$v = -(5 + 2\epsilon') \frac{g(\alpha, \epsilon')}{3\alpha} v_k \approx -\frac{3\alpha}{5 + 2\epsilon'} v_k, \quad (2-75)$$

$$\Omega = \left[ \frac{2\epsilon'(5 + 2\epsilon')g(\alpha, \epsilon')}{9\alpha^2} \right]^{1/2} \Omega_k \approx \left( \frac{2\epsilon'}{5 + 2\epsilon'} \right)^{1/2} \Omega_k, \quad (2-76)$$

$$c_s^2 = \frac{2(5 + 2\epsilon')}{9} \frac{g(\alpha, \epsilon')}{\alpha^2} v_k^2 \approx \frac{2}{5 + 2\epsilon'} v_k^2, \quad (2-77)$$

$$g(\alpha, \epsilon') = \left[ 1 + \frac{18\alpha^2}{(5 + 2\epsilon')^2} \right]^{1/2} - 1. \quad (2-78)$$

Usando la ecuación 2-42 y la definición de  $\Sigma$ , se obtiene  $\rho$  a partir de  $\dot{M} = -4\pi R H v \rho =$  constante. Las aproximaciones que aparecen en las ecuaciones 2-75-2-77 corresponden al límite cuando  $\alpha^2 \ll 1$ . Las soluciones autosimilares, en conjunto con la ecuación 2-70 cumplen

$$\frac{1}{2}v^2 + \Omega^2 R^2 - \Omega_k^2 + \frac{5}{2}c_s^2 = 0, \quad (2-79)$$

de donde se puede obtener la constante (normalizada) de Bernoulli  $b \equiv B e / v_k^2$ :

$$b = \frac{1}{v_k^2} \left( \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 R^2 - \Omega_k R^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} c_s^2 \right) = \frac{3\epsilon - \epsilon'}{5 + 2\epsilon'}. \quad (2-80)$$

Cuando  $b > 0$ , entonces el material tiene la energía suficiente para poder escapar del sistema; este resultado explica jets y flujos, lejos del plano medio, de material eyectado los cuales son descritos por Blandford y Begelman [1999]. Este resultado es equivalente a tener un flujo dominado por la advección. Asimismo, la positividad de  $b$  se garantiza si  $\gamma < 5/3$  y  $f > 1/3$ .

La entropía debe ser mayor en la región donde la energía gravitacional es liberada en forma de radiación (i.e. en la parte interna del disco), y disminuir en radios mayores. A partir de esto es posible determinar un criterio en el que el transporte de energía por convección se vuelve significativo. Mediante la condición para generar una inestabilidad convectiva descubierta por Durrant y Klemp [1982]:

$$N_{eff}^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dR} \frac{d \ln(P^{1/\gamma}) / \rho}{dR} + \Omega < 0. \quad (2-81)$$

Para el caso de las soluciones autosimilares obtenidas por integración vertical, la condición se vuelve

$$N_{eff}^2 = \frac{10\epsilon' + 6\epsilon\epsilon' - 15\epsilon}{(5 + 3\epsilon)(5 + 2\epsilon')} \Omega_k^2. \quad (2-82)$$

Por lo que la inestabilidad dinámica aparece cuando

$$f > \frac{2}{3} + \frac{2}{5}\epsilon. \quad (2-83)$$

En caso de que se cumpla dicha condición, el flujo de energía puede ser descrito como

$$F_c = -\Sigma K_c T \frac{ds}{dR}, \quad (2-84)$$

donde  $K_c$  es una constante de difusión asociada al transporte convectivo, la cual se puede definir como  $K_c = \alpha_c c_s^2 / \Omega_k$ . Esto implica que para el caso en que la convección un sea significativo en el transporte de la energía, será necesario considerar dos términos de transporte:  $\alpha$  para procesos relacionados a la viscosidad, y  $\alpha_c$  para efectos convectivos. Cabe mencionar que la forma funcional, en caso de haber una, de  $\alpha_c$  es tan desconocida como la de  $\alpha$ ; incluso podría ser aun más compleja, ya que podría depender de ésta última. La razón es que los procesos convectivos contribuyen a la viscosidad, pero no toda la viscosidad da como resultado un transporte neto de energía.

De manera general, la tasa de disipación de energía del disco se expresa como

$$Q^+ = -\nabla \cdot F_c = -\Sigma \frac{\alpha_c c_s^2}{v_k} T \frac{ds}{dR}. \quad (2-85)$$

Utilizando esta expresión y la ecuación 2-72, se puede reescribir  $\epsilon'$  como

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{f} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha_c}{\alpha} \right). \quad (2-86)$$

Ryu y Goodman [1992] indican que la convección puede llegar a transportar momento angular a las partes internas del disco, lo cual es un resultado opuesto al de los discos delgados. Además, en caso de existir un flujo dominado por la advección,  $b$  se vuelve positivo para un rango de radios mucho mayor, lo que permite un conjunto de soluciones en las cuales pueda haber un flujo de material con velocidad radial positiva. Observacionalmente, la existencia de flujos dominados por advección representa una dificultad adicional al momento de calcular un límite máximo en la acreción en base a la luminosidad. Debido a que estos sistemas presentarían un brillo mucho menor en relación al observado en discos delgado, se producirían errores signi-

ficativos en el cálculo de la tasa de material acretado. Sin embargo, dado que dichos sistemas tendrían una temperatura efectiva de al menos dos órdenes de magnitud mayor en relación a los discos Shakura-Sunyeu, podría inferirse la naturaleza de su flujo en base a la distribución espectral de energía, siempre que no haya algún tipo de dispersión de los fotones externa al sistema. Los resultados que Narayan y Yi [1994] presentan implican que la presencia de convección puede ser importante aun si el flujo no es dominado por la advección, ya que no hay garantía de que el transporte convectivo de energía no sea comparable, o incluso mayor, al de momento angular (i.e.  $\alpha > \alpha_c$  podría no cumplirse en todo el disco y/o todo el tiempo) y eso generaría una perturbación térmica que va más allá de la descripción de este modelo.

Es posible reescribir las soluciones 2-75-2-77 de manera que estén en términos de tres parámetros  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$ , definidos en 2-87-2-89:

$$v(R) = -\frac{(5 + 2\epsilon')}{3\alpha^2} g(\alpha, \epsilon') \alpha v_{ff} \equiv -c_1 \alpha v_{ff}, \quad (2-87)$$

$$\Omega(R) = \left[ \frac{2\epsilon'(5 + 2\epsilon')g(\alpha, \epsilon')}{9\alpha^2} \right]^{1/2} \frac{v_{ff}}{R} \equiv c_2 \frac{v_{ff}}{R}, \quad (2-88)$$

$$c_s^2(R) = \frac{2(5 + 2\epsilon')}{9} \frac{g(\alpha, \epsilon')}{\alpha^2} v_{ff}^2 \equiv c_3 v_{ff}^2, \quad (2-89)$$

donde

$$v_{ff} \equiv \left( \frac{GM}{R} \right)^{1/2}, \quad \epsilon' \equiv \frac{\epsilon}{f} = \frac{1}{f} \left( \frac{5/3 - \gamma}{\gamma - 1} \right). \quad (2-90)$$

Se escribe la disipación viscosa por unidad de volumen como

$$q^+ = \frac{3\epsilon' \rho |v| c_s^2}{2R}, \quad (2-91)$$

entonces la disipación por unidad de superficie es  $Q^+ = 2Hq^+$ .

Finalmente, si se reescalan la masa, la tasa de acreción y la coordenada radial en unidades adimensionales

$$M = mM_\odot,$$

$$\dot{M} = \dot{m} \dot{M}_{Edd},$$

$$\dot{M}_{Edd} = \frac{L_{Edd}}{\eta_{eff}c^2} = \frac{4\pi GM}{\eta_{eff}\kappa_{es}c} = 1.39 \times 10^{18} m \text{ gs}^{-1},$$

$$R = rR_{Schw}, \quad R_{Schw} = \frac{2GM}{c^2} = 2.95 \times 10^5 m \text{ cm}.$$

Utilizando  $\eta_{eff} = 0.1$  como el factor de eficiencia típico para un agujero negro (Frank *et al.* [2002]) y  $\kappa_{es} = 0.4 \text{cm}^2 \text{g}^{-1}$ , entonces las soluciones 2-75-2-77, 2-88, la densidad, presión, y escala de altura quedan expresadas en términos del radio,  $\alpha$  y  $\dot{m}$ :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad v = -2.12 \times 10^{10} \alpha c_1 r^{-1/2} \text{cm s}^{-1}; \\ 2. \quad \Omega = 7.19 \times 10^4 c_2 m^{-1} r^{-3/2} \text{s}^{-1}; \\ 3. \quad c_s^2 = 4.5 \times 10^{20} c_3 r^{-1} \text{cm s}^{-2}; \\ 4. \quad \rho = 3.79 \times 10^{-5} \alpha^{-1} c_1^{-1} c_3^{-1/2} m^{-1} \dot{m} r^{3/2} \text{g cm}^{-3}; \\ 5. \quad P = 1.71 \times 10^{16} \alpha^{-1} c_1^{-1} c_3^{1/2} m^{-1} \dot{m} r^{5/2} \text{g cm}^{-1} \text{s}^{-2}; \\ 6. \quad q^+ = 1.84 \times 10^{21} \epsilon' c_3^{1/2} m^{-2} \dot{m} r^{-4} \text{ergs cm}^{-3} \text{s}^{-1}; \\ 7. \quad H/R \approx (2.5c_3)^{1/3} \end{array} \right\}. \quad (2-92)$$

La advección, así como la eficiencia del enfriamiento son introducidos en las expresiones por medio de los parámetros  $c_1$ ,  $c_2$ , y  $c_3$ . Cuando el flujo se enfría de manera eficiente ( $f = 0$ ), se obtiene la solución trivial; esto ocurre porque al proponer las soluciones autosimilares se considera que el disco no radia el 100% de la energía.

#### 2.4.2. Soluciones para un flujo estacionario axisimétrico

Para este caso, se utilizan las coordenadas esféricas polares  $r$ ,  $\phi$  y  $\theta$ . Las definiciones del parámetro  $\epsilon$ , viscosidad  $\nu$ , escala de altura  $H$  y velocidad del sonido son las mismas que las implementadas en la solución anterior. Además, las condiciones de flujo estacionario ( $\partial/\partial t = 0$ ) y simetría axial ( $\partial/\partial \phi = 0$ ) siguen siendo válidas. Una modificación adicional es suponer que no hay flujo en la dirección azimutal ( $v_\theta = 0$ ).

Mediante un tratamiento análogo al de la solución anterior (ecuaciones 2-69-2-72), se expresan las ecuaciones de conservación en coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) = 0, \quad (2-93)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\phi^2}{r} \right) &= -\frac{GM\rho}{r^2} - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ 2\nu\rho \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\nu\rho \left( \frac{2v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\nu\rho}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\nu\rho}{r} \left[ 4r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_r}{r} \right) + \frac{\cot \theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right], \end{aligned} \quad (2-94)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( -\frac{\cot \theta}{r} v_\phi^2 \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\nu\rho}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{2\nu\rho v_r}{r} - \frac{2\nu\rho}{3r} \left( \frac{2v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right] + \frac{3\nu\rho}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (2-95)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi v_r}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \nu\rho r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\nu\rho \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \\ &+ \frac{\nu\rho}{r} \left[ 3r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{2 \cot \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) \right], \end{aligned} \quad (2-96)$$

$$\begin{aligned} \rho v_r \left( \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) &= -\frac{2f\nu\rho}{3} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) \right]^2 + 2f\nu\rho \\ &\times \left\{ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{v_r}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_r}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_r \phi}{\sin \theta} \right) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2-97)$$

La ecuación 2-93 es la de continuidad, las ecuaciones 2-94-2-96 son las de conservación de momento y 2-97 la de de energía. De la primera se puede obtener la tasa de acreción neta integrando respecto a  $\theta$ :

$$\dot{M} = - \int 2\pi r \rho v_r \sin \theta d\theta. \quad (2-98)$$

En la ecuación de energía el gradiente de entropía (lado izquierdo de la ecuacion) esta expresado en términos de la energía total del gas. La tasa de disipación se encuentra del lado derecho y  $f$  continua midiendo el grado en que el disco es dominado por la advección (si  $f = 0$  la energía es emitida por completo, si  $f = 1$  es transportada a radios mayores por la advección).

Se busca que la solución tenga la forma de la ecuación 2-74, con una dependencia adicional a la coordenada azimutal. Utilizando  $f$  constante, las soluciones autosimilares se escriben

$$\rho = r^{-3/2} \rho(\theta), \quad (2-99)$$

$$v_r = \sqrt{\frac{GM}{r}}v(\theta) = r\Omega_k(r)v(\theta), \quad (2-100)$$

$$v_\phi = r\Omega_k(r)\Omega(\theta), \quad (2-101)$$

$$c_s = r\Omega_k(r)c_s(\theta). \quad (2-102)$$

Mediante estas soluciones y las ecuaciones de conservación de momento y energía (ecs. 2-93-2-96), se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para  $\theta$ :

$$-\frac{1}{2}v^2 - (\Omega \sin \theta)^2 = -1 + c_s \left( \frac{5}{2} - \alpha v + \alpha \cot \theta \frac{dv}{d\theta} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\theta} \left( \alpha \rho c_s^2 \frac{dv}{d\theta} \right), \quad (2-103)$$

$$-\Omega^2 \cos \theta \sin \theta = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\theta} (\rho c_s^2) + \frac{\alpha c_s^2}{2} \frac{dv}{d\theta} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\theta} (\alpha c_s^2 \rho v), \quad (2-104)$$

$$\frac{1}{2}\nu\Omega \sin \theta = -\frac{3\alpha c_s^2 \Omega \sin \theta}{4} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\theta} \left( \alpha \rho c_s^2 \sin \theta \frac{d\Omega}{d\theta} \right) + 2\alpha c_s^2 \cos \theta \frac{d\Omega}{d\theta}, \quad (2-105)$$

$$-\frac{3\epsilon'v}{2\alpha} = 3v^2 + \left( \frac{3}{2}\Omega \sin \theta \right)^2 + \left( \sin \theta \frac{d\Omega}{d\theta} \right)^2 + \left( \frac{dv}{d\theta} \right)^2, \quad (2-106)$$

donde se vuelve a utilizar el parámetro  $\epsilon' = \epsilon/f = \frac{1}{f} \left( \frac{5/3-\gamma}{\gamma-1} \right)$  definido en la solución integrada verticalmente.

El sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones 2-103-2-106 y la definición de  $\epsilon'$  puede ser resuelto al fijar las condiciones de frontera del sistema. Mediante la normalización de la integral en 2-98 se puede definir una de ellas; las otras se encuentran al considerar la simetría del sistema en las coordenadas elegidas. Al posicionarse en  $\theta = \pi/2$  se debe cumplir (por simetría axial):

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{d\Omega}{d\theta} = \frac{dc_s}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} = 0.$$

Como se buscan soluciones bien comportadas y sin singularidades, para  $\theta = 0$  se cumple la misma condición. La ecuación 2-106 admite dos condiciones de frontera para  $v$  en  $\theta = 0$ :  $v_1 = 0$

y  $v_2 = -\epsilon'/2\alpha$ . La segunda condición es una generalización de la acreción esférica descrita por Bondi [1952] cuando se presenta viscosidad.

Calculando el parámetro normalizado de Bernoulli para este conjunto de soluciones se obtiene:

$$b \equiv \frac{Be}{\Omega_k^2 r^2} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}(\Omega \sin \theta)^2 - 1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}c_s^2, \quad (2-107)$$

por lo que  $b$  es función de  $\theta$  pero no de  $r$ . Este resultado contradice el obtenido por la solución integrada verticalmente, lo que implica ciertos límites al tratar con ese método. Una similitud entre ambas soluciones es que para todo flujo dominado por la advección,  $b > 0$ . En particular, para la solución con flujo axisimétrico, se cumple que  $f > 0.466$ ,  $b(\theta) > 0$  para todo  $\theta$ ; esto significa que para un flujo (suficientemente) dominado por advección,  $b$  es siempre positivo y el material está en condiciones para escapar del sistema a cualquier radio.

Para entender cómo ocurre este proceso, es necesario considerar el proceso de transporte de energía. En el caso de un disco delgado, el transporte de energía ocurre de radios menores a mayores y tiene una divergencia negativa, ya que en cada punto del disco parte de la energía es absorbida por el gas. Además, la tasa de pérdida de energía es máxima, esto es consecuencia de la alta eficiencia del enfriamiento y provoca que  $b = -0.5$ . Para valores mayores de  $f$ , el flujo de energía proveniente de la disipación viscosa disminuye debido a que la velocidad de rotación es menor a la kepleriana. Sin embargo, como el enfriamiento se vuelve menos eficiente, un porcentaje mayor de la energía queda almacenada en el gas y  $b$  se incrementa. Como indica la ecuación 2-83, cuando  $f$  alcanza determinado valor,  $b$  se vuelve positiva para todo el flujo.

Cuando se presenta la convección, surge un flujo en dirección contraria al que transporta energía a las partes externas del disco. Este efecto puede ser calculado utilizando la tasa de disipación superficial como la divergencia del flujo de energía. Reescribiendo la ecuación 2-106 y usando 2-85:

$$-\frac{3\epsilon}{2} \frac{\rho v_r c_s^2}{r} = -\nabla \cdot F_c + \frac{f\alpha\rho c_s^2}{\Omega_k} \left[ \frac{3v_r^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{dv_r}{d\theta} \right)^2 + \left( \frac{3}{2}\Omega \sin \theta \right)^2 + \left( \frac{d\Omega}{d\theta} \sin \theta \right)^2 \right]. \quad (2-108)$$

El término de la izquierda es la divergencia de la entropía transportada por advección (término de advección). El primer término del lado derecho de la ecuación es la energía neta transportada por el flujo convectivo al gas (término de convección) y el segundo representa la

energía transportada por viscosidad. Usando el mismo tratamiento que en la ecuación 2-84:

$$F_c \approx -K_c \rho T (\nabla s \cdot \hat{r}) \hat{r} \sim -\frac{\alpha_c c_s^2}{\Omega_k} \rho T (\nabla s \cdot \hat{r}) \hat{r}. \quad (2-109)$$

En un flujo dominado por advección, se cumple  $c_s^2 \lesssim 2\Omega_k^2 r^2/5$  y  $F_c$  es proporcional a  $r^{-3}$ , por lo que el término de convección se vuelve

$$-\nabla \cdot F_c = \frac{F_c}{r} \lesssim \frac{3}{5} \alpha_c \epsilon \rho c_s^2 \Omega_k \quad (2-110)$$

Comparándolo con el término de advección (para  $\epsilon$  suficientemente pequeña):

$$\frac{\text{Convección}}{\text{Advección}} \approx \frac{8}{15 \sin^2 \theta} \frac{\alpha_c}{\alpha}. \quad (2-111)$$

La dependencia de este cociente a  $\sin \theta$  implica que es mínimo en el plano medio y diverge cuando  $\theta \rightarrow 0, \pi$  i.e. al acercarse al eje de rotación. En base al argumento utilizado en la solución integrada verticalmente,  $0 \leq \alpha_c \leq \alpha$ , entonces la expresión no tiene una dependencia fuerte respecto a estos parámetros en relación al que tiene con la coordenada azimutal. Mediante la ecuación 2-108 se puede calcular

$$\text{Advección} - \text{Convección} = \frac{3\epsilon \rho v c_s^2}{2r} \left( 1 - \frac{8}{15 \sin^2 \theta} \frac{\alpha_c}{\alpha} \right). \quad (2-112)$$

Con esta expresión, y con la ecuación 2-106 se puede reescribir  $\epsilon'$  como

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{f} \left( 1 - \frac{8}{15 \sin^2 \theta} \frac{\alpha_c}{\alpha} \right). \quad (2-113)$$

Esta definición de  $\epsilon'$  difiere de la de la ecuación 2-86 en que existe una dependencia explícita en  $\theta$ , mientras que en el caso de la solución integrada verticalmente éste parámetro es independiente de la posición del flujo. El valor de  $\epsilon'$  es reducido por el factor  $\sin^2 \theta$ . Sin embargo, la estructura general del flujo es, esencialmente, la misma que para la solución anterior. Debido a que la escala de tiempo para que ocurran los procesos de advección es más corta que para los de convección, éstos últimos son despreciables. Sin embargo, existe un ángulo crítico  $\theta_{crit}$  para

el cual la convección domina a la advección

$$\theta_{crit} \approx \sin^{-1} \left[ \left( \frac{8\alpha_c}{15\alpha} \right)^{1/2} \right]. \quad (2-114)$$

Para valores  $\theta < \theta_{crit}$ , Narayan y Yi indican que el flujo se tendría un cambio drástico y la convección transportaría la entropía hacia afuera tan rápido, que el flujo tendría una velocidad radial positiva supersonica.

La solución del flujo axisimétrico demuestra que los flujos dominados por la advección son inestables (Begelman y Meier [1982]). Aunque el efecto global de la convección no es significativa, podría ser una fuente importante de viscosidad turbulenta, en especial si se toman en cuenta inestabilidades magnetohidrodinámicas (Balbus y Hawley [1991]).

### 2.4.3. Comparación de las dos soluciones y observaciones

Las dos soluciones propuestas en los trabajos de Narayan y Yi para flujos dominados por la advección son calculadas usando argumentos similares, con la diferencia del sistema de coordenadas utilizado en cada caso, además de suposiciones que las hacen semejantes ( $v_\phi = 0$ , la definición del  $f, \epsilon', \dots$ ). Algunas de sus diferencias son notables a gran escala, la dependencia de  $\epsilon$ , así como la positividad del parámetro de Bernoulli.

Como se observa en la figura 2-11, ambas soluciones tienen un comportamiento similar entre si. Para  $\epsilon' \gg 1$ , las dos soluciones no difieren mucho entre ellas; incluso para valores de  $\epsilon$  donde el flujo es claramente dominado por la advección, ambos resultados varían 25% y 10% para la velocidad radial y angular, respectivamente. Un caso especial es la velocidad del sonido, ya que en el caso donde domina la advección, las soluciones son idénticas, y solamente se separan cuando el flujo se enfría de manera eficiente.

Cualquier modelo de acreción donde la advección tenga un papel importante en la dinámica del flujo añade, en el mejor de los casos, una variable a las ecuaciones que es imposible de determinar de manera observacional. Un ejemplo importante es Sgr A\* (Yuan *et al.* [2002]), para el cual se ha tratado de modelar un disco ADAF que explique la variabilidad y la suavidad del espectro. Para ello, agregó un jet al disco, con lo que se pudo explicar la temperatura de los electrones, del orden de  $\sim 2 \times 10^{11} \text{K}$ , siendo un orden de magnitud más alta que implementando

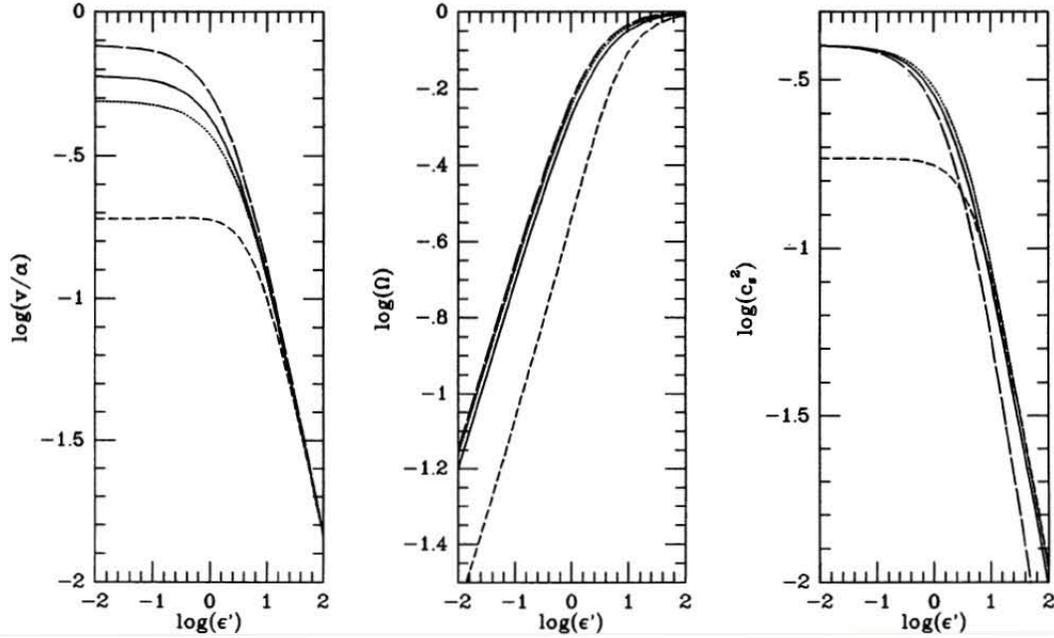


Figura 2-11: Comparación de las soluciones exactas propuestas por Narayan y Yi [1995]. En las tres gráficas, el eje horizontal indica el logaritmo del parámetro  $\epsilon$ . Los ejes verticales son el logaritmo del cociente de la velocidad entre  $\alpha$  (izquierda), el logaritmo de la velocidad angular (centro) y el logaritmo del cuadrado de la velocidad del sonido. La línea continua representa la solución integrada verticalmente; la línea punteada es la solución del flujo axisimétrico promediada sobre la esfera; los segmentos cortos corresponden al promedio en  $z$  en coordenadas cilíndricas, y los segmentos largos a los valores en el plano medio.

solamente el modelo ADAF. Sin embargo, dicho modelo no se ajusta al espectro en el radio.

Narayan y Popham [1993] utilizan el transporte de energía por advección para simular tasas de acreción bajas,  $\sim 10^{-7.5} - 10^{-10.5} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$ , en la capa límite de enanas blancas, reproduciendo condiciones en variables cataclísmicas, mismas que explican la emisión en rayos X duros que han sido detectadas en estos sistemas. Para el modelo no se consideraron la dispersión del flujo horizontal a vertical ( $\nabla \times F = 0$ ) ocasionada por la presencia de electrones ni el transporte de energía que dicho efecto ocasionaría, además de suponer un modelo de transferencia radiativa bastante simple. Sin embargo, los resultados obtenidos no son muy diferentes al tomarse en cuenta estos factores (Popham y Sunyaev [2001]).

Keck *et al.* [2001] recompilaron datos del GRS 1758 – 258 para realizar una curva de luz a diferentes bandas, desde el radio continuo (VLA) hasta rayos  $\gamma$  (*Compton Gamma Ray Observatory*, ROSAT, Granat, entre otros), las cuales fueron modeladas utilizando una combinación

de flujos, uno dominado por la advección, y uno asociado a un disco delgado (kepleriano). El primer modelo se implementó en la región interna del disco, en una corona cuasi esférica que emite rayos X duros. El disco delgado emite en la parte suave de la banda de rayos X. La zona de transición de un flujo al otro depende de la tasa de acreción. El modelo se ajusta para los datos del ROSAT y Granat, mismos que se asocian a un agujero negro en estado inactivo, pero a bajas energías la incertidumbre de las curvas de luz aumenta considerablemente (Esin *et al.* [1998]).

## Capítulo 3

# Marco teórico: contexto computacional

*“Forty-two!” yelled Loonquawl.  
“Is that all you’ve got to show  
for seven and a half million years’ work?”*  
— DOUGLAS ADAMS. *The Hitchhikers Guide to the Galaxy* (1981)

### 3.1. Códigos de hidrodinámica de partículas suavizadas (SPH)

En general, se busca que los procesos físicos puedan ser descritos por medio de modelos. Dichos modelos, ya sea que tengan un alto grado de precisión en sus resultados o que incluyan parámetros libres que generen una gran incertidumbre, se reducen a una serie de ecuaciones diferenciales. La mayoría de ellas no tienen una solución analítica, de manera que la única forma de resolverlas es utilizando métodos numéricos. Debido al esfuerzo que requiere encontrar una solución particular para un sistema descrito por este tipo de ecuaciones (o familias de ecuaciones), se implementan dichos métodos en códigos especializados, de manera que el tiempo de ejecución sea razonablemente corto. En este capítulo se hablará sobre el método SPH, el cual se implementó en el código utilizado en este trabajo.

## 3.2. Kernel: propiedades y ejemplos

Como su nombre indica, el método SPH utiliza partículas que interactúan entre sí como si fueran elementos de un fluido y a partir de sus interacciones es posible interpolar las características del sistema que se está simulando. Estas ‘partículas’<sup>1</sup> tienen propiedades diferentes a las que se consideran en problemas físicos. Cada partícula es representada matemáticamente por medio de un kernel, que es función de un vector posición  $\vec{r} - \vec{r}'$  y un parámetro  $h$  que tiene unidad de longitud y les da a las partículas su característica ‘suavizada’. La integral espacial del kernel indica la ‘influencia’ de la partícula en una posición dada. Esta influencia no es solamente para la masa, sino de cualquier cantidad que la partícula defina en el sistema. Para que una simulación cumpla con las leyes de conservación, el kernel debe cumplir con ciertas condiciones. Definiendo el kernel como  $W \equiv W(\vec{r} - \vec{r}', h)$ , se tiene que:

$$\int W(\vec{r} - \vec{r}', h) d^3 r' = 1. \quad (3-1)$$

La ecuación 3-1 indica que la integral sobre las coordenadas espaciales del kernel está normalizada (Monaghan y Lattanzio [1985]). Además se requiere que el kernel colapse a un punto conforme  $h$  se hace más pequeño, por lo que, en conjunto con la ecuación 3-1, se obtiene una segunda condición (Li y Liu [2007]),

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{r} - \vec{r}', h) = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (3-2)$$

Como consecuencia de la ecuación 3-1 y de las interacciones entre partículas físicas en general, el kernel debe desvanecerse con la distancia a la partícula, es decir,

$$\lim_{\vec{r} - \vec{r}' \rightarrow \infty} W(\vec{r} - \vec{r}', h) = 0. \quad (3-3)$$

Aunque las fuerzas gravitacional y electrostática entre partículas no tienen una distancia máxima de interacción, luego de un radio definido son despreciables. Lo anterior es especialmente cierto para este trabajo. Además, para un número razonablemente pequeño de partículas

---

<sup>1</sup>Cuando se hable de partículas se debe entender que se habla de éstas y no de sus contrapartes físicas. Cuando se quiera hablar de éstas últimas se les llamará partículas físicas para distinguirlas.

el tiempo de cómputo para realizar una simulación sería muy costoso. Por estas dos razones se construye un kernel cuya influencia se limite a un radio finito de manera que no sea necesario calcular todas las interacciones entre las partículas (figura 3-1).

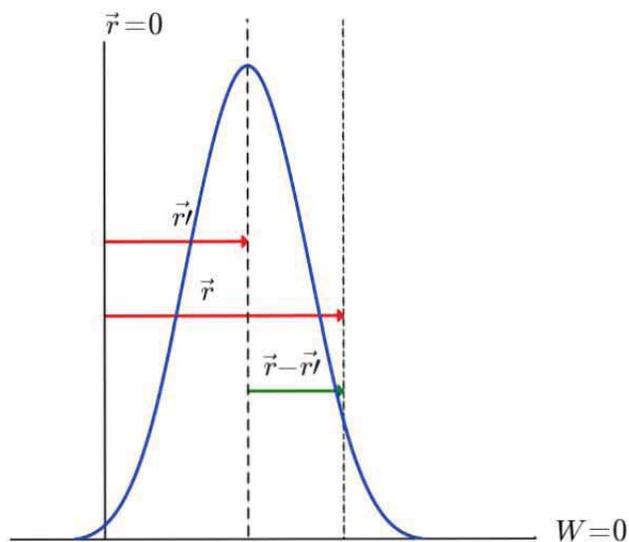


Figura 3-1: Representación gráfica del kernel en una dimensión de una partícula con  $h = 1$ . Las líneas verticales indican las posiciones del sistema de referencia (línea continua), de la partícula (segmentos largos) y de un punto dado (segmentos cortos) donde la partícula tiene influencia i.e.  $W(\vec{r} - \vec{r}', h) > 0$ . Puede observarse que el valor del kernel llega a cero en un radio finito. La función explícita del kernel es la utilizada por Monaghan [1992] (ecuación 3-10).

Las propiedades del kernel permiten relacionarlo con cualquier cantidad del sistema mediante la ecuación 3-4,

$$\tilde{A}_h(\vec{r}) = \int A(\vec{r}') W(\vec{r} - \vec{r}', h) d^3 r', \quad (3-4)$$

donde  $A(\vec{r})$  es la función de una cantidad (densidad, presión, etc.) en términos de la posición, y  $\tilde{A}_h(\vec{r})$  la función evaluada para un  $h$  dado, la cual se calcula por la interpolación del kernel de las partículas vecinas. Por medio de las ecuaciones 3-2 y 3-4:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{A}_h(\vec{r}) = A(\vec{r}). \quad (3-5)$$

La ecuación 3-5 implica que al colapsar el kernel a un punto, el valor interpolado es igual al valor de la función en ese punto. Esta propiedad del kernel es fundamental para que la

simulación sea consistente con su contraparte física. Se puede reescribir la integral 3-4 como

$$\tilde{A}_h(\vec{r}) = \int \frac{A(\vec{r}')}{\rho(\vec{r}')} W(\vec{r} - \vec{r}', h) \rho(\vec{r}') d^3 r', \quad (3-6)$$

siendo  $\rho$  la densidad de masa. Con esto, es posible realizar una aproximación discreta, considerando a las partículas como puntos de interpolación (siendo matemáticamente equivalente). Primero se definen la posición y la masa de una partícula como  $\vec{r}_b$  y  $m_b$ , respectivamente. Luego utilizando  $m_b$  se sustituye el producto  $\rho(\vec{r}') d^3 r'^2$ , con lo que la aproximación discreta queda

$$A(\vec{r}) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} A_b W(\vec{r} - \vec{r}_b, h). \quad (3-7)$$

Esta relación permite encontrar el valor de cualquier cantidad que se esté calculando en la simulación a partir del kernel de las partículas, independientemente de la forma del mismo o de la forma en que  $h$  varíe<sup>3</sup>. Por ejemplo, para la densidad:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_b m_b W(\vec{r} - \vec{r}_b, h), \quad (3-8)$$

lo que significa que para conocer la densidad en un punto del sistema, sólo se necesita tener la masa de cada partícula y el valor del kernel en esa posición. La figura 3-2 muestra cómo las aportaciones individuales de varias partículas contribuyen a la densidad de un punto. Asumiendo que todas las partículas tienen la misma masa, la densidad local en la figura es igual al producto de  $m_b$  por la suma de todas contribuciones de  $W$  de cada partícula (la suma de las longitudes de las líneas verticales moradas).

La elección del kernel es un tema delicado. Hasta el momento, solamente se han mencionado características generales que cualquier kernel debe cumplir. En la literatura se han propuesto numerosas formas funcionales según el sistema que quiera simularse. En el caso de discos aplanados se han implementado kernels no radiales (Fulbright *et al.* [1995], Shapiro *et al.* [1996], Owen *et al.* [1998]), aunque con ellos es complicado cumplir con la conservación de mo-

---

<sup>2</sup>Este cambio de variable es más significativo de lo que parece. Además de que permite pasar de un interpretación continua a una discreta, también elimina la necesidad de calcular la integral del kernel; en lugar de eso sólo se requiere evaluar el kernel en la posición dada.

<sup>3</sup>Por el momento, se supondrá que  $h$  es constante.

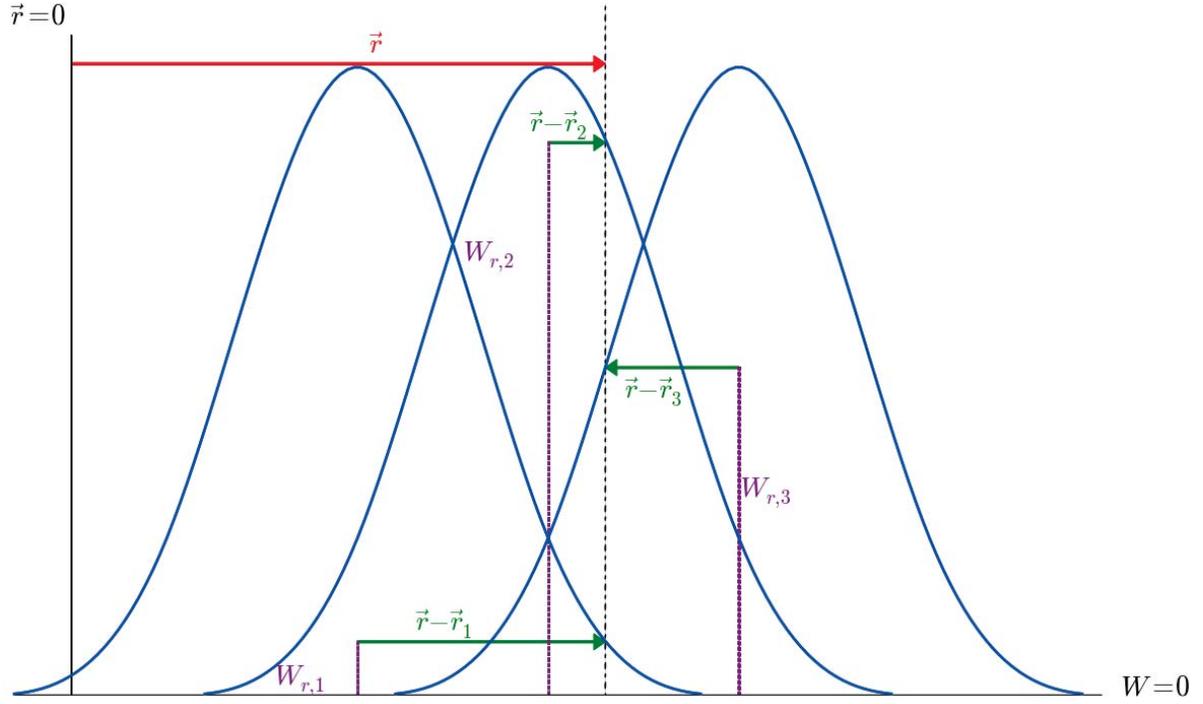


Figura 3-2: Representación gráfica del kernel de tres partículas en una dimensión con  $h = 1$ . El vector  $\vec{r}$  (rojo) representa una posición dada en el sistema. Los vectores en verde son las posiciones relativas de vector  $\vec{r}$  respecto a cada partícula. Las líneas verticales moradas representan el valor del kernel de cada partícula en  $\vec{r}$ . La notación para el kernel en la figura es  $W_{r,b} = W(\vec{r} - \vec{r}_b)$ . La forma funcional del kernel es la misma que en la figura 3-1.

mento angular, por lo que se suelen utilizar funciones de kernel radiales, es decir, que cumplen  $W(\vec{r} - \vec{r}', h) = W(|\vec{r} - \vec{r}'|, h)$ . Una forma de construir formas funcionales de manera analítica, es utilizando la serie de Taylor de la ecuación 3-4:

$$A(\vec{r}') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(\vec{r})}{k!} \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{h} \right)^k, \quad (3-9)$$

de esta manera es posible contruir kernels del orden deseado, según la cantidad de error máximo que deba existir. Sin embargo, se corre el riesgo de que haya valores  $W < 0$ , lo que físicamente no tiene sentido. En la literatura existen trabajos que proponen varias formas funcionales (Fulk y Quinn [1996], Monaghan [1985]); sin embargo, el que ha generado, en general, mejores resultados

en SPH es el kernel cúbico estándar<sup>4</sup> (Monaghan [1992]). La forma funcional de este kernel es:

$$W(q) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3, & 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3, & 1 < q \leq 2 \\ 0, & q > 2 \end{cases} \quad (3-10)$$

donde  $q \equiv |\vec{r} - \vec{r}'|/h$ . Utilizando la aproximación integral de la ecuación 3-4:

$$A_h(\vec{r}) = A(\vec{r}) + Ch^2 + O(h^4) \quad (3-11)$$

donde C contiene  $f''$  lo que permite expresar con exactitud funciones constantes y lineales de la ecuación 3-4. Cabe mencionar que al momento de implementar un kernel dentro de una simulación, los errores suelen ser más pequeños que los estimados, debido principalmente a que la distribución de las partículas no es aleatoria, sino que depende de la dinámica del sistema (Monaghan [2005]).

### 3.3. Descripción del sistema: hidrodinámica lagrangiana

Una diferencia importante entre los códigos de malla, como AMR<sup>5</sup>, y SPH es que la descripción del sistema. Mientras que para el primer caso se utiliza el marco de referencia euleriano, el segundo se basa en la descripción lagrangiana de un sistema.

Para la descripción euleriana, las velocidades de los flujos están fijas en el espacio, y sólo dependen del tiempo. Para este caso las mallas son ideales ya que son marcos de referencia estáticos, mientras que el flujo se mueve a través de ellas. Para representar una cantidad en el sistema, la función asociada debe estar en términos de las coordenadas espaciales y la temporal, por lo que se representan como  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ ,  $p(\vec{x}, t)$ ,  $\rho(\vec{x}, t)$ , etcétera.

En el caso de la descripción lagrangiana, el marco de referencia se mueve con el flujo, de manera que las cantidades se pueden representar como  $\vec{v}_p(t)$ ,  $p_p(t)$ ,  $\rho_p(t)$ , donde el subíndice  $p$  indica que se trata a los elementos del fluido (o partículas físicas) de manera individual (Burr [2000]).

---

<sup>4</sup>standard cubic spline SPH kernel

<sup>5</sup>Refinamiento de malla adaptativa (Adaptive Mesh Refinement por sus siglas en inglés)

Es posible relacionar ambas descripciones por medio de la derivada temporal:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial t} = \vec{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \quad (3-12)$$

donde  $d/dt$  es la derivada lagrangiana temporal, mientras que  $\partial/\partial t$  es la derivada euleriana temporal. La ecuación esta generalizada para  $i$  dimensiones espaciales, de allí la notación con el superíndice. El término  $\vec{v} \cdot \nabla$  representa la velocidad relativa de un marco de referencia al otro.

Con esta notación es posible relacionar la ecuación de continuidad euleriana con su análoga lagrangiana,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3-13)$$

al despejar la derivada lagrangiana  $d\rho/dt = \vec{v} \cdot \nabla \rho + \partial\rho/\partial t$  y sustituir la derivada euleriana en ella:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}. \quad (3-14)$$

De forma similar se puede encontrar la forma lagrangiana de 2-5 (ecuación de momento):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{f}. \quad (3-15)$$

La ecuación 3-15 añade un nuevo término a la ecuación de momento: el gradiente de presión dentro del fluido. Para completar el sistema de ecuaciones de hidrodinámica es necesario obtener la ecuación de energía. Para ello se reescribe la primera de la termodinámica  $dU = dQ - PdV$ . Asumiendo un proceso adiabático se desprecia el primer término del lado derecho. Se define  $u$  como la energía por masa, en lugar de  $U$ ; además se utiliza el volumen por unidad de masa  $1/\rho$ , por lo que  $dV \rightarrow d(1/\rho) = -d\rho/\rho^2$ , por lo que la primera ley queda como

$$du = \frac{P}{\rho^2} d\rho, \quad (3-16)$$

con lo que se llega a las ecuaciones 3-17 y 3-18:

$$\frac{du}{dt} = \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (3-17)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = \frac{P}{\rho^2}. \quad (3-18)$$

Con lo anterior, es posible escribir la ecuación de energía adiabática en forma lagrangiana,

$$\frac{du}{dt} = \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{v}. \quad (3-19)$$

Mediante las ecuaciones 3-14, 3-15, 3-19 y una ecuación de estado apropiada, es posible describir el sistema en el escenario lagrangiano (Rosswog [2009]).

### 3.4. Derivadas en SPH

Es necesario definir las derivadas de las cantidades físicas del sistema en SPH, de manera que la dinámica de las partículas este descrita por las ecuaciones de continuidad. Para el caso del gradiente la forma es trivial:

$$\nabla A(\vec{r}) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} A_b \nabla W(\vec{r} - \vec{r}_b, h) \quad (3-20)$$

Para escribir el laplaciano, el cual aparece en las ecuaciones de difusión, (y de suma importancia para los modelos de discos de acreción), una de las mejores opciones es implementar la prescripción de Brookshaw [1985]:

$$(\nabla^2 A)_a = 2 \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (A_a - A_b) \frac{w_{ab}}{r_{ab}}, \quad (3-21)$$

donde  $w_{ab}$  se relaciona con el kernel como  $\nabla W_{ab} = \hat{e}_{ab} w_{ab}$ , siendo  $\hat{e}_{ab}$  el vector unitario que va de la partícula  $b$  a la partícula  $a$ . Ahora es necesario definir el gradiente de un kernel.

Primero se calcula el gradiente de un vector arbitrario. Para esto se utiliza la notación  $\vec{r}_{bk} = \vec{r}_b - \vec{r}_k$ , siendo  $k$  un punto arbitrario; de igual manera para la velocidad,  $\vec{v}_{bk} = \vec{v}_b - \vec{v}_k$ . Asumiendo que  $h$  es constante, el gradiente de  $|\vec{r}_b - \vec{r}_k|$  es

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_a} |\vec{r}_b - \vec{r}_k| = \frac{(\vec{r}_b - \vec{r}_k)(\delta_{ba} - \delta_{ka})}{|\vec{r}_b - \vec{r}_k|} = \hat{e}_{bk}(\delta_{ba} - \delta_{ka}), \quad (3-22)$$

y el de  $1/|\vec{r}_b - \vec{r}_k|$  es

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_a} \frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_k|} = -\frac{\hat{e}_{bk}(\delta_{ba} - \delta_{ka})}{|\vec{r}_b - \vec{r}_k|^2}. \quad (3-23)$$

El término  $\delta_{ij}$  en las ecuaciones 3-22 y 3-23 es la delta de Kronecker. Al aplicar el operador de la derivada temporal lagrangiana a  $r_{ab}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dr_{ab}}{dt} &= \frac{\partial r_{ab}}{\partial x_a} \frac{dx_a}{dt} + \frac{\partial r_{ab}}{\partial y_a} \frac{dy_a}{dt} + \frac{\partial r_{ab}}{\partial z_a} \frac{dz_a}{dt} + \frac{\partial r_{ab}}{\partial x_b} \frac{dx_b}{dt} + \frac{\partial r_{ab}}{\partial y_b} \frac{dy_b}{dt} + \frac{\partial r_{ab}}{\partial z_b} \frac{dz_b}{dt} \\ &= \nabla_a r_{ab} \cdot \vec{v}_a + \nabla_b r_{ab} \cdot \vec{v}_b = \nabla_a r_{ab} \cdot \vec{v}_a - \nabla_a r_{ab} \cdot \vec{v}_b = \nabla_a r_{ab} \cdot \vec{v}_{ab} = \hat{e} \cdot \vec{v}_{ab}. \end{aligned} \quad (3-24)$$

Considerando solamente kernels radiales ( $W(\vec{r}_b - \vec{r}_k) = W(|\vec{r}_b - \vec{r}_k|) \equiv W_{bk}$ ), y utilizando la ecuación 3-22, el gradiente respecto a una partícula  $a$  es:

$$\nabla_a W_{bk} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_a} W_{bk} = \frac{\partial W_{bk}}{\partial r_{bk}} \frac{\partial r_{bk}}{\partial \vec{r}_a} = \frac{\partial W_{bk}}{\partial r_{bk}} \hat{e}(\delta_{ba} - \delta_{ka}) = \nabla_b W_{kb}(\delta_{ba} - \delta_{ka}). \quad (3-25)$$

de lo anterior se obtiene la siguiente propiedad:

$$\nabla_a W_{ab} = -\nabla_b W_{ab}. \quad (3-26)$$

Finalmente, utilizando la ecuación 3-24 se obtiene la derivada lagrangiana del kernel

$$\frac{dW_{ab}}{dt} = \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}, \quad (3-27)$$

la cual será de importancia en la siguiente sección.

### 3.5. Ecuaciones de conservación

Hasta el momento se ha explicado cómo se obtienen propiedades físicas a partir de una simulación en SPH mediante el kernel. También se han adaptado las ecuaciones de hidrodinámica a una descripción que coincide con dicho método numérico. Sin embargo, aun no es clara la manera en que dichas ecuaciones se implementan en el código y más importante, no hay garantía de que las cantidades que deben conservarse lo hagan en la simulación. Después de todo, el sistema de partículas en SPH no es físico, sino una representación matemática de la dinámica

que se desea reproducir.

Si se discretiza la ecuación de momento en ausencia de fuerzas externas, con la notación de la sección previa, se obtiene:

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = -\frac{1}{\rho_a} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} P_b \nabla_a W_{ab}. \quad (3-28)$$

La cuestión es si esta ecuación conserva el momento. Una forma de demostrarlo es escribir la fuerza ejercida por la partícula  $b$  sobre la partícula  $a$

$$\vec{F}_{ba} = \left( m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_b = -\frac{m_a}{\rho_a} \frac{m_b}{\rho_b} P_b \nabla_a W_{ab}, \quad (3-29)$$

y la fuerza que la partícula  $a$  ejerce sobre  $b$ :

$$\vec{F}_{ab} = \left( m_b \frac{d\vec{v}_b}{dt} \right)_a = -\frac{m_b}{\rho_b} \frac{m_a}{\rho_a} P_a \nabla_b W_{ba}. \quad (3-30)$$

Mediante la ecuación 3-26:

$$\vec{F}_{ab} = \frac{m_b}{\rho_b} \frac{m_a}{\rho_a} P_a \nabla_b W_{ba}, \quad (3-31)$$

como la presión rara vez es constante en todo el sistema,  $\vec{F}_{ba} \neq \vec{F}_{ab}$ , por lo que la tercera ley de Newton no se cumple si se implementa la ecuación 3-28.

Una manera de corregir este problema es utilizar un término que asegure la conservación. Si se utiliza

$$\nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) = \frac{\nabla P}{\rho} - P \frac{\nabla \rho}{\rho^2}, \quad (3-32)$$

y se despeja el primer término del lado derecho, la ecuación de momento se puede reescribir como:

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = -\sum_b m_b \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab}, \quad (3-33)$$

la cual conserva el momento. Por medio de 3-27, la ecuación de energía queda

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2} \frac{d\rho_a}{dt} = \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}. \quad (3-34)$$

Para determinar si la energía se conserva en 3-34, se calcula  $dE/dt$ :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_a \left( m_a u_a + \frac{1}{2} m_a v_a^2 \right) = \sum_a m_a \frac{d\hat{e}_a}{dt} = \sum_a m_a \left( \frac{du_a}{dt} + \vec{v}_a \cdot \frac{d\vec{v}_a}{dt} \right),$$

luego, mediante las ecuaciones 3-33 y 3-34:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_a m_a \left[ \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab} - \vec{v}_a \cdot \sum_b m_b \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} \right] \\ &= - \sum_{a,b} m_a m_b \left( \frac{P_a \vec{v}_b}{\rho_a^2} + \frac{P_b \vec{v}_a}{\rho_b^2} \right) \cdot \nabla_a W_{ab} = -\frac{1}{2} \left[ \sum_{a,b} m_a m_b \left( \frac{P_a \vec{v}_b}{\rho_a^2} + \frac{P_b \vec{v}_a}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{a,b} m_a m_b \left( \frac{P_a \vec{v}_b}{\rho_a^2} + \frac{P_b \vec{v}_a}{\rho_b^2} \right) \nabla_b W_{ba} \right]. \end{aligned}$$

Por último, cambiando el orden de los términos la segunda sumatoria y utilizando la ecuación 3-26:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{2} \left[ \sum_{a,b} m_a m_b \left( \frac{P_a \vec{v}_b}{\rho_a^2} + \frac{P_b \vec{v}_a}{\rho_b^2} \right) \cdot \nabla_a W_{ab} + \sum_{b,a} m_b m_a \left( \frac{P_b \vec{v}_a}{\rho_b^2} + \frac{P_a \vec{v}_b}{\rho_a^2} \right) \cdot \nabla_b W_{ba} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{a,b} 2m_a m_b \left( \frac{P_a \vec{v}_b}{\rho_a^2} + \frac{P_b \vec{v}_a}{\rho_b^2} \right) \cdot (\nabla_a W_{ab} + \nabla_b W_{ba}) = 0 \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que la ecuación 3-34 conserva la energía del sistema.

### 3.6. Suavizamiento de partículas: términos “h-grad”

Es necesario que las partículas se adapten a la configuración del sistema, de manera que las regiones con mayor variabilidad tengan mejor resolución. Esto se logra por medio del parámetro de suavizamiento  $h$ . Hasta el momento se ha supuesto que  $h$  es constante; para que se presente un suavizamiento,  $h$  debe variar acorde a la posición relativa entre partículas. Además,  $h$  no es necesariamente igual para cada partícula. Una relación muy útil es

$$\frac{h(t)}{h_0} = \left( \frac{\rho_0}{\rho(t)} \right)^{1/3}, \quad (3-35)$$

donde la  $h_0$  y  $\rho_0$  son el parámetro de suavizamiento y la densidad de la partícula iniciales. Calculando la derivada lagrangiana de 3-35 se obtiene (Rosswog [2009])

$$\frac{dh_a}{dt} = \frac{1}{3}h_a(\nabla \cdot \vec{v})_a. \quad (3-36)$$

Gingold y Monaghan [1982] proponen implementar esta relación

$$h_a = \eta \left( \frac{m_a}{\rho_a} \right)^{1/3} \quad (3-37)$$

donde  $\eta$  debe tener un valor entre 1.2 y 1.5. Para aplicar cualquier relación en SPH se requiere modificar la ecuación 3-14 para una  $h$  variable. Utilizando las ecuaciones 3-8, 3-24 y 3-26 la derivada lagrangiana de la densidad de una partícula es

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_a}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_b m_b W_{ab}(h_a) = \sum_b m_b \left[ \frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial r_{ab}} \frac{dr_{ab}}{dt} + \frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial h_a} \frac{dh_a}{dt} \right] \\ &= \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{\partial h_a}{\partial \rho_a} \frac{d\rho_a}{dt} \sum_b m_b \frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial h_a} = \frac{1}{\Omega_a} \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a) \end{aligned} \quad (3-38)$$

donde

$$\Omega_a \equiv 1 - \frac{\partial h_a}{\partial \rho_a} \sum_b m_b \frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial h_a} \quad (3-39)$$

son los términos “h-grad”. Con esto, es posible reescribir las ecuaciones de conservación para incluir los efectos de suavizamiento. Para el gradiente de densidad, se obtiene

$$\frac{\rho_b}{\partial \vec{r}_a} = \sum_k m_k \left[ \nabla_a W_{bk}(h_b) + \frac{\partial W_{bk}(h_b)}{\partial h_b} \frac{\partial h_b}{\partial \rho_b} \frac{\partial \rho_b}{\partial \vec{r}_a} \right] = \frac{1}{\Omega_b} \sum_k m_k \nabla_a W_{bk}(h_b), \quad (3-40)$$

La ecuación de conservación de momento (3-33) se reescribe como

$$m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \frac{\partial \rho_b}{\partial \vec{r}_a}. \quad (3-41)$$

Utilizando 3-25 y 3-40:

$$m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} = - \sum_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \left( \frac{1}{\Omega_b} \sum_k m_k \nabla_a W_{bk}(h_b) \right) = - \sum_b m_b \frac{P_b}{\rho_b^2} \frac{1}{\Omega_b} \sum_k m_k \nabla_b W_{kb}(h_b) (\delta_{ba} - \delta_{ka})$$

$$= -m_a \sum_b m_b \left( \frac{P_a}{\Omega_a \rho_a^2} \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{P_b}{\Omega_b \rho_b^2} \nabla_a W_{ab}(h_b) \right), \quad (3-42)$$

por lo que la ecuación de momento queda como

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left( \frac{P_a}{\Omega_a \rho_a^2} \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{P_b}{\Omega_b \rho_b^2} \nabla_a W_{ab}(h_b) \right). \quad (3-43)$$

De manera análoga, la ecuación de energía se reescribe como

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{1}{\Omega_a} \frac{P_a}{\rho_a} \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a). \quad (3-44)$$

Como puede observarse, para realizar la corrección en las ecuaciones de conservación, sólo es necesario incluir el término  $\Omega$  en ellas.

### 3.7. Discontinuidades y choques en SPH

En mecánica de fluidos es común encontrarse con choques de material, los que causan una discontinuidad en las propiedades del flujo. Existen varios modelos analíticos que estudian los choques, como el problema de Riemann (Toro [2013]). Para el estudio de choques por medio de métodos numéricos, la situación es más complicada: las escalas de tiempo y longitud en que ocurren dichos eventos son más cortas que para un fluido cuya velocidad es mucho menor a la del sonido. Debido a esto, las resoluciones espacial  $\Delta x$  y temporal  $\Delta t$  deben tener el tamaño apropiado para eventos que ocurren con una velocidad del flujo  $v$ . Es fundamental que la condición

$$v < \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

se cumpla durante toda la simulación. La manera formal de describir esta condición es dada por el criterio de Courant-Friedrichs-Lewy (Courant *et al.* [1967]):

$$C = \Delta t \sum_{i=1}^n \frac{u_{x_i}}{\Delta x_i} \leq C_{max}, \quad (3-45)$$

donde el límite superior de la sumatoria  $n$  representa el número de dimensiones espaciales de la simulación.

La solución más sencilla para detectar y estudiar los choques en una simulación en SPH es implementar una viscosidad artificial (VA) en el código, la cual permite a las partículas ‘identificar’ alguna a su vecina más próxima o que se mueva en su dirección a velocidades que cumplan con 3-45. La viscosidad artificial debe cumplir con cuatro características. La primera es que introduzca términos disipativos en las ecuaciones de conservación de manera que suavice el choque para eliminar las discontinuidades (VonNeumann y Richtmyer [1950]). La segunda que su implementación en las ecuaciones de momento y energía siga conservando dichas cantidades. La tercer característica es que sólo se presente en discontinuidades y no en compresiones uniformes del medio. Esta condición es fácil de cumplir en simulaciones unidimensionales, pero su formulación no es trivial para más dimensiones. Y por último, la VA siempre debe ser disipativa, es decir, que siempre reduzca la escala de las velocidades de las partículas, cambiando la energía cinética a interna, y no viceversa (Caramana *et al.* [1998]).

La contribución de la viscosidad artificial entre las partículas  $a$  y  $b$ ,  $\Pi_{ab}$ , se implementa como

$$\left( \frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \rightarrow \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right),$$

donde  $\Pi_{ab}$  tiene la forma

$$\Pi_{ab} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{s,ab} \mu_{ab} + \beta \mu_{ab}^2}{\bar{\rho}_{ab}}, & \vec{r}_{ab} \cdot v_{ab} < 0, \\ 0 & \vec{r}_{ab} \cdot v_{ab} \geq 0. \end{cases} \quad (3-46)$$

La notación utilizada en la ecuación 3-46 para el promedio es  $\bar{A} = (A_a + A_b)/2$  y para los subíndices  $ab$  es  $A_{ab} = A_a - A_b$ . Con la misma notación,  $\mu_{ab}$  está dado por

$$\mu_{ab} = \frac{\bar{h}_{ab} \vec{r}_{ab} \cdot v_{ab}}{r_{ab}^2 + \epsilon \bar{h}_{ab}^2}. \quad (3-47)$$

Experimentos numéricos (Rosswog [2009]) indican que los mejores valores para los parámetros adimensionales<sup>6</sup> son  $\alpha \approx 1$ ,  $\beta \approx 2$ ,  $\epsilon \approx 0.01$ .

---

<sup>6</sup>Este parámetro  $\alpha$  no está relacionado al que se utiliza en la prescripción del mismo nombre usada por Shakura-Sunyaev. Afortunadamente, no hay necesidad de distinguirlos ya que sólo se hará mención del parámetro de viscosidad artificial en esta sección.

En el caso de la ecuación de momento, la modificación queda como

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left[ \frac{P_a}{\Omega_a \rho_a^2} \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{P_b}{\Omega_b \rho_b^2} \nabla_a W_{ab}(h_b) + \frac{\Pi_{ab}}{\bar{\Omega}_{ab}} \nabla_a W_{ab}(\bar{h}_{ab}) \right] \quad (3-48)$$

donde se usa la misma notación para  $\Omega_{ab}$  que en la ecuación 3-47. Para el caso de la ecuación de energía, la nueva formulacion es

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{1}{\Omega_a} \frac{P_a}{\rho_a^2} \sum_b m_b \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{1}{2\bar{\Omega}_{ab}} \sum_b m_b \Pi_{ab} \vec{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}(\bar{h}_{ab}) \quad (3-49)$$

Estas modificaciones no afectan a la conservación del momento o energía, además de que elimina efectos numéricos no deseados. La figura 3-3 indica como la ausencia de viscosidad artificial genera dichos efectos, aún para sistemas relativamente sencillos (con soluciones exactas).

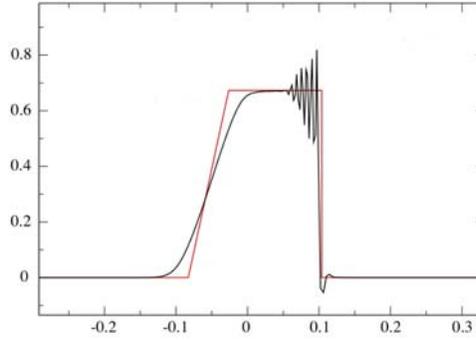


Figura 3-3: Representación de la velocidad en un tiempo dado del problema de choque en el tubo de Sod utilizando SPH. Se utilizan 1000 partículas en la simulación. La línea roja representa la solución exacta (analítica), mientras que la negra es el resultado numérico de la simulación. Las oscilaciones en la región pre choque son el resultado del error numérico debido a la falta de viscosidad artificial (Rosswoog [2009]).

La figura 3-4 muestra las cuatro principales cantidades del gas en el mismo problema, pero con la viscosidad artificial encendida en el código. La diferencia con la figura 3-3 es evidente: la oscilación desaparece completamente de la región prechoque, así como el ‘damping’ en la zona poschoque. Lo anterior implica que la implementación de la VA, a pesar de tener una formulación a posteriori, es necesaria para que los resultados sean físicamente consistentes.

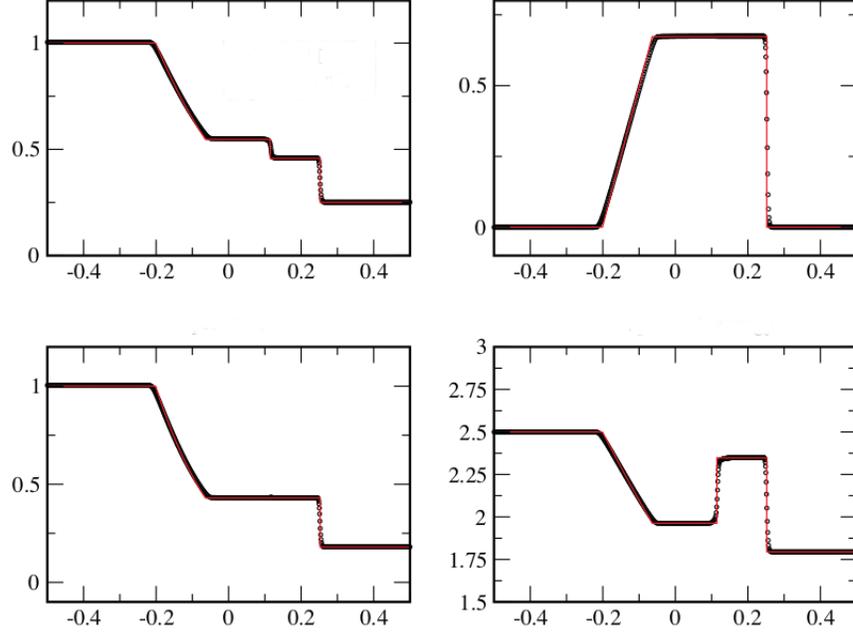


Figura 3-4: Representación en un tiempo dado de la densidad (arriba a la izquierda), velocidad (arriba, derecha), presión (abajo, izquierda) y energía interna (abajo, derecha) del problema de choque en el tubo de Sod. La solución analítica está representada por la línea roja, mientras que los puntos muestran el resultado numérico utilizando SPH con viscosidad artificial (Rosswog [2009]).

### 3.7.1. Limitaciones de la viscosidad artificial

Para simulaciones multidimensionales, la viscosidad descrita en la ecuación 3-46 puede generar efectos falsos (no deseados) de corte. Por ejemplo, para un flujo en dos dimensiones sin choques y cuya velocidad  $\vec{v} \propto \vec{y}$  no dependa de  $\vec{x}$ , no se requiere de la viscosidad artificial. Sin embargo, si se consideran dos partículas,  $a$  y  $b$ , tales que  $\vec{y}_a \neq \vec{y}_b$ , se tendrá que  $\vec{r}_{ab} \cdot \vec{v}_{ab} \neq 0$ , por lo que se generaría una viscosidad no deseada<sup>7</sup>.

Una solución para problemas como el anterior es implementar el “Balsara-switch” (Balsara [1991]), donde se utiliza

$$f_a \equiv \frac{|\langle \nabla \cdot \vec{v} \rangle_a|}{|\langle \nabla \cdot \vec{v} \rangle_a| + |\langle \nabla \times \vec{v} \rangle_a| + 0.0001 c_{s,a} / h_a}, \quad (3-50)$$

de tal forma que  $\Pi'_{ab} = \Pi_{ab} \bar{f}_{ab}$ . Esta modificación de la VA permite distinguir entre el flujo

<sup>7</sup>Esto es particularmente importante para este trabajo ya que la aproximación en discos de acreción con rotación diferencial son similares a este ejemplo.

debido a esfuerzos de corte y choques. Cuando sólo fuerzas de corte están presentes,  $\bar{f}_{ab} \ll 1$  y la viscosidad artificial es despreciable. Por otro lado, cuando la compresión del fluido domina ( $|\langle \nabla \cdot \vec{v} \rangle_a| \neq 0$ ,  $|\langle \nabla \cdot \vec{v} \rangle_a| = 0$ ), para todo efecto práctico  $\bar{f}_{ab} = 1$ . Existen dos inconvenientes con esta receta. El primero es que la viscosidad artificial está presente siempre que haya una combinación de fuerzas de compresión y corte, por lo que su efecto sólo se ve disminuido por el valor de  $\bar{f}_{ab}$ . El segundo problema es que esta prescripción no toma en cuenta la dirección de la compresión, factor importante para ajustar correctamente la disipación en la región del choque (Owen [2004]).

Otro método es el propuesto por Morris y Monaghan [1997] el cual modifica el parámetro  $\alpha$  de la ecuación 3-46 haciéndolo dependiente del tiempo y de una función fuente  $S$ :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\alpha - \alpha^*}{\tau} + S, \quad (3-51)$$

donde  $\alpha^*$  es el valor mínimo de  $\alpha$ . Los valores más utilizados para  $\alpha^*$  y  $\tau$  se relaciona con la velocidad del sonido  $c$  como:

$$\tau = h/\mathcal{C}_1 c.$$

En ausencia de la fuente ( $S = 0$ ), la solución de la ecuación 3-51 es

$$\alpha = \alpha^* + A \exp(-t/\tau). \quad (3-52)$$

Para poder implementar esta modificación, se relaciona  $\mathcal{C}_1$  con el número de Mach en la región poschoque

$$\mathcal{C}_1 = \frac{M_2}{\delta},$$

donde  $\delta$  es el número de longitudes  $h$  en los que la viscosidad artificial está activa. Finalmente, para la función fuente  $S$  se utiliza

$$S = \max(-\nabla \cdot v, 0) \quad (3-53)$$

Con esta receta se han obtenido buenos resultados para recrear inestabilidades Kelvin-Helmholtz en dos dimensiones, de tal manera que la resolución ha sido comparable a la de los métodos de

mallas (Morris y Monaghan [1997]; Price [2008]). Para casos en tres dimensiones, los efectos no deseados que se ven con la ecuación 3-46, en combinación con el “Balsara-switch” y utilizando la prescripción  $\alpha(\tau)$  son despreciables (Dolag *et al.* [2005]; Rosswog *et al.* [2000]).

### 3.8. Integración de las ecuaciones de movimiento

Hasta el momento se han descrito las técnicas implementadas para recrear las interacciones del fluido en el sistema, dejando de lado la cinemática de las partículas. Éstas se mueven como consecuencia de las fuerzas aplicadas en ellas. Luego, la posición y velocidad de cada partícula definen a la densidad, presión y energía interna en el siguiente paso de tiempo. Asimismo, las escalas temporales de los procesos físicos que se tratan de reproducir pueden variar varios ordenes de magnitud, lo que puede representar un problema numérico. Esta sección describe las técnicas de integración que se utilizan para otras áreas en Astrofísica, como la dinámica de estrellas y galaxias, así como las diferentes formas en que se puede elegir el paso de tiempo de una simulación.

#### 3.8.1. Algoritmos de integración temporal

Para la integración numérica de las ecuaciones diferenciales es necesario que haya un balance entre la precisión de los resultados, el error máximo que puede permitirse y el tiempo de cómputo que se necesita para realizar la simulación. Es por esto que la elección del algoritmo utilizado puede ser la diferencia entre obtener o no un resultado aceptable.

Uno de los algoritmos más estables y fáciles de implementar en una simulación es el de Störmer-Verlet. Asumiendo que la aceleración no depende de la velocidad, las subsecuentes posición ( $\vec{r}(t + \Delta t)$ ) y velocidad ( $\vec{v}(t + \Delta t)$ ) de una partícula son

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t^2, \quad (3-54)$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta t \frac{\vec{a}(t) + \vec{a}(t + \Delta t)}{2}. \quad (3-55)$$

Con las condiciones iniciales  $r_0$  y  $v_0$ , y la forma funcional de la aceleración, la cual es dada por las fuerzas que actúan en el sistema, es posible realizar la integración de las ecuaciones de

movimiento. La implementación de este algoritmo conserva el momento angular (Hairer *et al.* [2006]).

A pesar de la estabilidad del algoritmo de Störmer-Verlet, éste tiene un error  $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ , que en muchos sistemas puede llevar a desviaciones significativas. Además, este método no permite introducir pasos de tiempo variables, los cuales son fundamentales para procesos cuya escala temporal varía a lo largo de la simulación. Por esta razón, suele ser preferible implementar el método de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45). Éste permite ajustar un paso de tiempo que sea consistente con el cambio de posición y velocidad del sistema.

El primer paso en RKF45 es resolver el paso con dos aproximaciones y comparar los resultados. Ésto se hace por medio de una función  $f$  tal que:

$$f(t, y) \equiv \frac{dy}{dt}, \quad (3-56)$$

donde  $y$  es la variable que se desea calcular en cada paso de tiempo y la derivada es la asociada a la ecuación diferencial que describe dicha variable.

Si la diferencia entre ambos es menor a cierto valor, se utiliza dicha aproximación, en caso contrario se vuelven a calcular las aproximaciones con un paso de tiempo  $h$  más pequeño (Mathews [2012]). Para un tiempo y variable  $(t_k, y_k)$  se definen seis valores:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_k, y_k), \\ k_2 &= hf\left(t_k + \frac{1}{4}h, y_k + \frac{1}{4}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(t_k + \frac{3}{8}h, y_k + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\ k_4 &= hf\left(t_k + \frac{12}{13}h, y_k + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\ k_5 &= hf\left(t_k + h, y_k + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\ k_6 &= hf\left(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 - \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) \end{aligned}$$

Después, se calculan dos aproximaciones: la primera con

$$y_{k+1} = y_k + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4101}k_4 - \frac{1}{5}k_5, \quad (3-57)$$

y la segunda como

$$z_{k+1} = y_k + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{5}k_6. \quad (3-58)$$

El paso de tiempo óptimo para  $(t_k, y_k)$  está dado por:

$$h_k = \left( \frac{tol \ h}{2|z_{k+1} - y_k + 1|} \right)^{1/4} h \quad (3-59)$$

donde *tol* es la tolerancia específica del error entre ambas aproximaciones. La ventaja de este método es que el paso de tiempo se ajusta a la dinámica del sistema.

### 3.8.2. Elección del paso de tiempo

La elección del paso de tiempo puede estar sujeta a otros parámetros, además del método de aproximación elegido. Uno de los más populares es elegir el valor mínimo, tomando en cuenta cada partícula, entre el criterio de aceleración

$$\Delta t_{f,a} \propto \sqrt{h_a/|\vec{a}_a|}, \quad (3-60)$$

y el que es una combinación del de Courant (Courant *et al.* [1967]) con el paso de tiempo viscoso:

$$\Delta t_{CV,a} \propto \frac{h_a}{v_{s,a} + 0.6(c_{s,a} + 2 \max_b \mu_{ab})}. \quad (3-61)$$

El término  $\max_b \mu_{ab}$  toma el valor más grande de la ecuación 3-47 entre las partículas, lo que minimiza  $\Delta t_{CV,a}$ . En ocasiones es conveniente comparar estos dos pasos de tiempo con

$$\Delta t_{h,a} \propto \frac{h_a}{\dot{h}_a}, \quad (3-62)$$

el cual calcula la escala de tiempo asociada al cambio del parámetro  $h_a$  (Wetzstein *et al.* [2009]).

## Capítulo 4

# Metodología: Implementación del código

*We consider the greatest end of science  
is the classification of past data. It is important,  
but is there no further work to be done?*  
— SALVOR HARDIN, *Foundation* (1942)

En este capítulo se hablará de los códigos SPH implementados para realizar las simulaciones del disco de acreción, utilizados por Rubio-Herrera y Lee [2005]. Uno de ellos genera las condiciones iniciales de las partículas por medio del método Monte Carlo y elimina las perturbaciones producto del error de dicho método relajando el sistema; el otro evoluciona el disco en el tiempo. La primera sección del capítulo describe las características iniciales del código: número de partículas, forma funcional del kernel y de la viscosidad artificial, ecuaciones de estado implementadas, entre otros. La segunda sección trata de las modificaciones realizadas para poder calcular la tasa de acreción, densidad superficial y otras cantidades de relevancia; así como las diferentes formas funcionales propuestas para el parámetro de  $\alpha$  y las justificaciones desde el punto de vista físico para cada una.

## 4.1. Códigos utilizados

### 4.1.1. Relajamiento del sistema: *disk2d.f*

#### Generación de condiciones iniciales

Para definir las condiciones iniciales del disco (posición, velocidad, parámetro  $h$  de suavizado, energía interna y masa de cada partícula) se utiliza el código *disk2d.f*. Primero se generan posiciones al azar dentro de una caja de tamaño  $x = 10R_g$ ,  $y = 10R_g$  y  $z = 6R_g$ , donde  $R_g$  es el radio gravitacional de un agujero negro de  $2.5M_\odot$  (el mismo que se utiliza como acretor en las simulaciones). Para que la distribución de las partículas sea uniforme, se implementa un segundo código que contiene un generador de números aleatorios (*ran1.f*). La figura 4-1 muestra la distribución de partículas generadas y aceptadas.

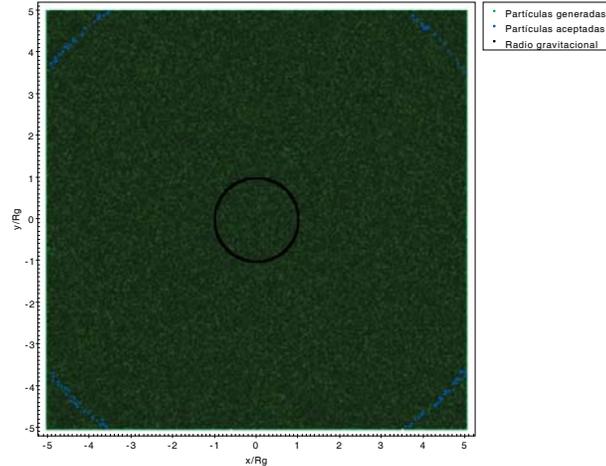


Figura 4-1: Distribución en el plano  $z$  de las posiciones generadas por *disk2d.f*. Los puntos azules simbolizan las partículas cuyas posiciones son ‘aceptadas’ por el sistema. El fondo verde representa el total de posiciones generadas. La superficie del agujero negro (radio gravitacional), se representa por la circunferencia de color negro. El número total de posiciones en la imagen (fondo verde) es de  $10^6$ , mientras que el conjunto de partículas aceptadas (puntos azules) es de 114.

Mediante la técnica de VonNeumann y Richtmyer [1950], se rechazan las partículas que no entran en potencial efectivo alrededor del agujero negro, comparándolo con el potencial a  $R_0 = 6.125R_g$ . También se rechazan aquellas cuya densidad local no coincide con la distribución de densidad dada por la solución de la ecuación 2-26 (figura 4-2). Como se observa en la figura 4-1, el porcentaje de partículas aceptadas es muy bajo, aproximadamente 0.01 %.

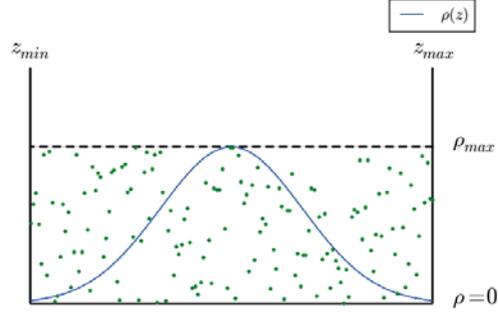


Figura 4-2: Gráfica que muestra el método de rechazo de Von Neumann aplicado a la densidad local como función de  $z$ . Las partículas cuya posición  $(x_b, y_b, z_b)$  está acotada dentro del potencial efectivo asociado a  $R_0$  se muestran dentro de esta caja. Las partículas que cumplen con el criterio están debajo de la curva dada por  $\rho(z)$ . Cabe mencionar que la función completa de la densidad es dependiente de las tres coordenadas espaciales, no únicamente de  $z$ .

Una vez que se completa la selección de las partículas en el sistema, se cambia el sistema de coordenadas de cartesiano en tres dimensiones, a cilíndrico en 2D, con simetría azimutal en el disco. Esto permite una descripción más sencilla del código y disminuye considerablemente el tiempo de cómputo. El código determina la masa total como el producto de la densidad asociada al potencial efectivo en  $R_0$ , por el volumen ocupado por las partículas en la caja.

$$M_{disco} = \frac{\text{Partículas aceptadas}}{\text{Partículas generadas}} \times V \times \rho_{max}, \quad (4-1)$$

luego le asigna la misma masa a cada partícula del disco

$$m_b = \frac{M_{disco}}{\text{Partículas aceptadas}}. \quad (4-2)$$

Después se calcula el perfil de densidad del sistema, utilizando el kernel en dos dimensiones propuesto por Price [2012], el cual es la versión en dos dimensiones del kernel cúbico estándar expresado en la ecuación 3-10

$$W(q) = \frac{10}{7\pi h^2} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3, & 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2-q)^3, & 1 < q \leq 2 \\ 0, & q > 2 \end{cases}. \quad (4-3)$$

Además del kernel, la ecuación 3-8 también es modificada para dos dimensiones:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_b \frac{m_b}{2\pi R_b} W(q, h_b), \quad (4-4)$$

donde  $q = |\vec{r} - \vec{r}_b|/h$  y  $R_b \equiv \sqrt{x_b^2 + y_b^2}$ , es decir, la posición radial de cada partícula; y con ello se calcula el perfil de densidad. Para  $t = 0$ , se utiliza  $h = 366.85\text{m}$ .

## Dinámica del disco

La relajación del sistema se da cuando la distribución de las partículas corresponde a la teórica, de manera que se le dan ciertas características que eliminen perturbaciones iniciales. Para el disco utiliza un potencial de Paczyński–Wiita

$$\Phi(r) = \frac{GM_{bh}}{r - R_g}, \quad (4-5)$$

donde  $M_{bh}$  es la masa del agujero negro. La autogravedad no está implementada en el disco. Para la evolución del parámetro  $h$  en el código de relajamiento, se implementa la relación:

$$h_b(t + \Delta t) = \frac{1}{2}h_b(t) \left[ 1 - \frac{\text{NS}}{\text{length}_b(t)} \right]. \quad (4-6)$$

Para el caso en dos dimensiones,  $\text{NS}=24$ . La función ‘length’ tiene un valor entero para cada caso que va desde 1 a 500 es dependiente de la distancia entre la partícula  $b$  y sus vecinas más cercanas; esta relación es equivalente a la de la ecuación 3-35.

Para calcular la presión y energía interna de cada partícula<sup>1</sup> se utilizan las relaciones

$$P_b = K\rho_b^\gamma, \quad (4-7)$$

$$u_b = \frac{P_b}{\rho_b(\gamma - 1)}. \quad (4-8)$$

---

<sup>1</sup>En el caso de un sistema real, la energía interna y la temperatura se consideran cantidades estadísticas, y no aplicables de forma individual a las partículas físicas; sin embargo, como las partículas en SPH son puntos de interpolación del sistema físico, pueden tener estas cantidades asociadas a cada una.

La velocidad del sonido asociada para la partícula  $b$  está dada por

$$c_{s,b} = \sqrt{u_b(\gamma - 1)\gamma}. \quad (4-9)$$

El paso de tiempo es una combinación de los criterios vistos en la sección 3.8.2. Se elige el paso de tiempo basado en tres criterios. El primero es

$$dt_1 = \min\left(\frac{h_b}{v_b}\right), \quad (4-10)$$

donde  $v_b$  es la velocidad de la partícula. Esto implica que el paso de tiempo no puede ser mayor al tiempo en que la partícula se mueve una distancia equivalente a su tamaño<sup>2</sup>. El segundo criterio es el de Courant

$$dt_2 = \min\left(\frac{h_b}{c_{s,b}}\right), \quad (4-11)$$

en el cual no se está considerando la viscosidad artificial del flujo. El tercer criterio es una modificación del que está expresado en la ecuación 3-60:

$$dt_3 = \min\sqrt{\left(\frac{h_b}{c_{s,b}}\right)}. \quad (4-12)$$

Luego de calcular estas cantidades para cada partícula en un tiempo dado, se calcula el paso de tiempo que se utilizará:

$$dt = 0.25 \min(dt_1, dt_2, dt_3). \quad (4-13)$$

La integración temporal del sistema se hace por medio del algoritmo de Verlet, que asegura tanto la conservación de la energía como del momento. Para mantener el disco estable, no se incluye la viscosidad turbulenta en el disco ( $\alpha = 0$ ) y se fija

$$\Omega_b = \frac{l_0}{R_b^2}, \quad (4-14)$$

siendo  $\Omega_b$  la velocidad angular por partícula y  $l_0$  es el momento angular en el radio  $R_0$  (constante). Además, se agrega un termino de amortiguamiento en las fuerzas radial y vertical, que

---

<sup>2</sup>Para el caso de los pasos de tiempo, se puede utilizar  $h$  como medida de las dimensiones espaciales de la partícula.

a su vez se implementa en la ecuacion de movimiento

$$-\frac{v_{r,b}}{t_\phi} \tag{4-15}$$

Esto permite al sistema alcanzar una configuración estable. Es necesario que la simulación se ejecute hasta que el sistema quede relajado, es decir, que la perturbaciones ocasionadas por la diferencia entre la distribución teórica de la densidad y la distribución producida por el método de Monte Carlo sean eliminadas. Para esto el tiempo de relajamiento que la simulación utiliza es de  $T = 10t_z$ , siendo  $t_z$  la escala de tiempo (o tiempo dinámico) para que una perturbación en la coordenada de altura sea suavizada (Frank *et al.* [2002]):

$$t_\phi \sim \frac{1}{\Omega_k} = \frac{1}{\sqrt{\frac{GM_{bh}}{R_0^3}}}. \tag{4-16}$$

Se puede argumentar que una, o quizá dos escalas de tiempo serían suficientes para relajar el sistema. Sin embargo, debido al reducido tiempo de cómputo que requiere *disk2d.f* para ejecutarse por completo, se pueden costear 10 escalas de tiempo para este proceso, en especial porque no hay un criterio definitivo que asegure en qué momento un sistema está o no relajado; Lee [2000], por ejemplo, utiliza 30 escalas de tiempo para simular la dinámica de un sistema binario de objetos compactos. Las figuras 4-3 y 4-4 muestran las distribuciones de las partículas del sistema antes y después del relajamiento. En ambos casos la distribución inicial presenta diferencias considerables respecto a la curva teórica<sup>3</sup>, las cuales son suavizadas durante la ejecución de *disk2d.f*. Finalmente, el código escribe en un archivo llamado *initial.out* las cantidades asociadas a las partículas relajadas: la coordenada radial  $R_b$ , la coordenada  $z_b$ , el parámetro de suavizamiento  $h_b$ , energía interna  $u_b$  y la masa  $m_b$  de cada partícula. Estos datos son utilizados por el código de evolución para la simulación del disco con  $\alpha > 0$ .

---

<sup>3</sup>Estrictamente hablando, nunca se puede asegurar que un histograma dado sea la representación de una distribución continua definida, por más pequeño que sea el error fraccional entre ambas. Sin embargo, una distribución discreta de puntos puede ser obtenida a partir de una continua.

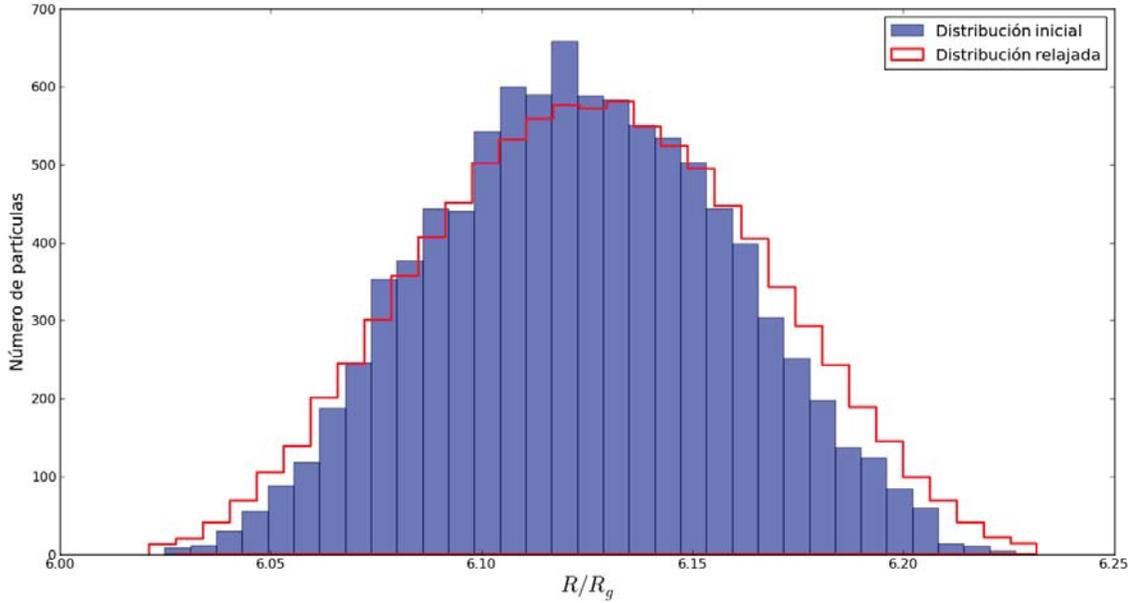


Figura 4-3: Histogramas de la distribución de las partículas en la coordenada radial al inicio y al final del relajamiento del sistema. La distribución relajada se ajusta mejor con la función de densidad en relación a la inicial.

#### 4.1.2. Evolución del sistema: *diskevol2d.f*

Lo primero que hace el código *diskevol2d.f* es leer los datos de *initial.out* y calcular la masa total del disco. Después de eso, encuentra la coordenada  $z$  del centro de masa del disco y calcula la velocidad azimutal de cada partícula; iguala las velocidades radial y vertical a cero.

Posteriormente el código entra en un ciclo *do* cuyas iteraciones describen el sistema en cada paso de tiempo. Aquí se detectan las partículas que hayan cruzado el radio asociado a la órbita circular estable más interna<sup>4</sup>, es decir, que hayan sido acretadas. En caso de no haberlas no hay cambios en el disco. Por otro lado, si existe acreción en ese paso de tiempo, entonces la masa, momento angular y energía interna de la(s) partícula(s) acretada(s) se sustraen del disco. Al igual que el código de relajación, para el disco utiliza un potencial de Paczyński–Wiita y no hay autogravedad en el mismo.

Al igual que en *disk2d.f*, para calcular el movimiento de las partículas se utiliza el algoritmo

<sup>4</sup>Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)

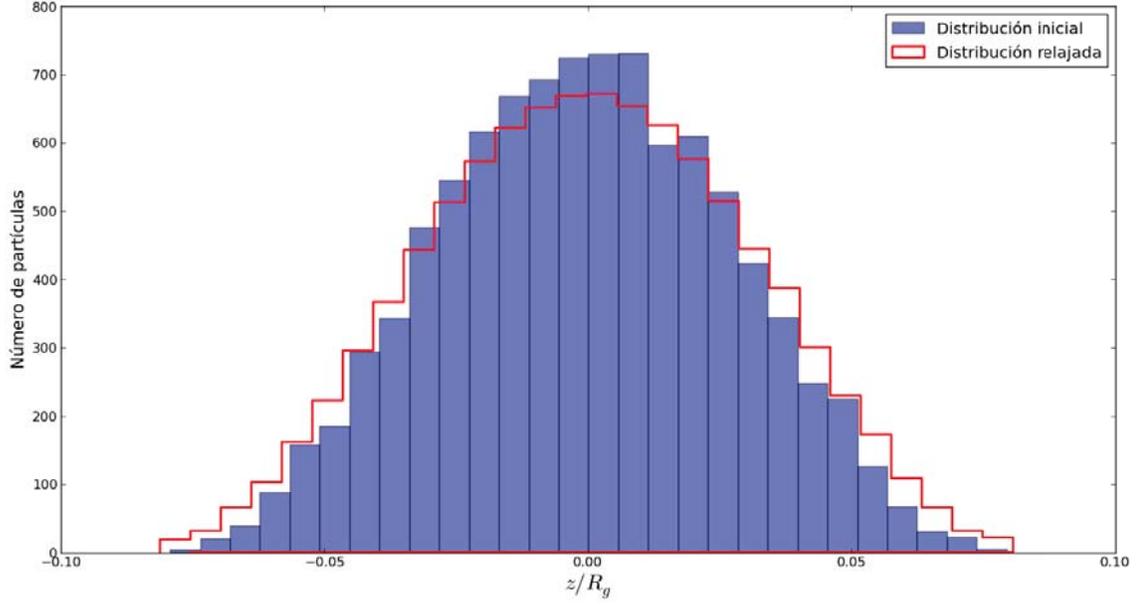


Figura 4-4: Histogramas de la distribución de las partículas en la coordenada  $z$  al inicio y al final del relajamiento del sistema.

de Verlet. Para obtener los valores de  $h_b$ , se modifica la ecuación 4-6:

$$h_b(t + \Delta t) = \frac{1}{2} h_b(t) \sqrt{\left[ 1 + \frac{NS}{\text{length}_{h_b}(t)} \right]}. \quad (4-17)$$

El código no implementa enfriamiento de ningún tipo, de manera que no hay pérdidas radiativas. Esto justifica una modificación de la ecuación de estado (4-7):

$$P_b = \rho_b u_b (\gamma - 1). \quad (4-18)$$

La velocidad del sonido se calcula con la ecuación 4-9. Cabe mencionar que el cálculo de la energía interna es más complicado que en el código de relajamiento. Primero se calculan tres fuentes de energía disipativa. La primera corresponde al primer término (sumatoria incluida) de la ecuación 3-49. La segunda fuente de energía es la viscosidad física del disco, la cual se obtiene mediante la prescripción  $\alpha$ . El tercer término es la viscosidad artificial, dada por la ecuación 3-46. La suma de las tres fuentes de energía debe ser menor a la suma de la siguiente iteración, ya que de lo contrario se tendrían efectos que aumenten la escala de velocidad de las

partículas, es decir, un efecto que disminuya la entropía al disminuir la disipación de la energía. En caso de que no se cumpla con esa condición se seguirá ejecutando la simulación, pero el código lanzará una advertencia al respecto.

La elección del paso del tiempo es similar a la que implementa *disk2d.f*. La única diferencia es que  $dt_2$  toma en cuenta el efecto de la viscosidad artificial y tiene la forma

$$dt_2 = \frac{h_b}{(\alpha_{VA,b} + 1.2\beta_{AV,b} \max \mu_{AB,b}) c_{s,b}}, \quad (4-19)$$

cuya forma es similar a la de la ecuación 3-61. Para la prescripción  $\alpha$ , el código *diskevol2d.f* adapta la ecuación 2-21 para discos gruesos:

$$\nu_b = \alpha c_{s,b}^2 \left( \frac{D_b - R_g}{D_b} \right) \sqrt{\frac{D_b^3}{GM}}, \quad (4-20)$$

donde<sup>5</sup>  $D_b = \sqrt{R_b^2 + z_b^2}$ .

### Implementación general de viscosidad

Para este código, la implementación de la viscosidad se da a través de la ecuación de momento

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = -\frac{P_{,\alpha}}{\rho} - \Phi_{BH,\alpha} + \frac{t_{\alpha\beta,\alpha}}{\rho} + \left( \frac{dv_\alpha}{dt} \right)_{art}, \quad (4-21)$$

donde la coma indica una derivada parcial, los subíndices  $\alpha$  y  $\beta$  son las coordenadas del sistema<sup>6</sup> (Lee y Ramirez-Ruiz [2002]; Flebbe *et al.* [1994]) y  $t_{\alpha\beta}$  es el tensor de esfuerzo dado por

$$t_{\alpha\beta} = \eta \left( v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} v_{\gamma,\gamma} \right). \quad (4-22)$$

Para coordenadas cilíndricas se tiene

$$t_{\alpha\beta,\beta} = \nabla \cdot t_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r t_{\alpha r}] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} t_{\alpha \phi} + \frac{\partial t_{\alpha z}}{\partial z}, \quad (4-23)$$

<sup>5</sup>Para valores característicos de un disco delgado  $D_b \approx R_b$  y  $R_g \ll R_b$ , con lo que se llega a la ecuación original.

<sup>6</sup>Para distinguir la eficiencia del transporte de momento angular de la coordenada utilizada en la notación tensorial, se referirá como subíndice  $\alpha$  a ésta última.

suponiendo simetría axial ( $\partial/\partial\phi = 0$ )

$$\nabla \cdot t_r = \frac{1}{r} \left[ t_{rr} + r \frac{\partial t_{rr}}{\partial r} \right] + \frac{\partial t_{rz}}{\partial z}, \quad (4-24)$$

$$\nabla \cdot t_\phi = \frac{1}{r} \left[ 2t_{r\phi} + r \frac{\partial t_{\phi r}}{\partial r} \right] + \frac{\partial t_{\phi z}}{\partial z}, \quad (4-25)$$

$$\nabla \cdot t_z = \frac{1}{r} \left[ t_{zr} + r \frac{\partial t_{zr}}{\partial r} \right] + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z}, \quad (4-26)$$

por lo que las ecuaciones de momento quedan como

$$\frac{dv_r}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{GM_{BH}r}{D^3} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{t_{rr}}{r} + \frac{\partial t_{rz}}{\partial z} \right) + \left( \frac{dv_r}{dt} \right)_{art}, \quad (4-27)$$

$$\frac{dv_\phi}{dt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{2t_{r\phi}}{r} + \frac{\partial t_{\phi r}}{\partial r} + \frac{\partial t_{\phi z}}{\partial z} \right), \quad (4-28)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{GM_{BH}z}{D^3} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial t_{zr}}{\partial r} + \frac{t_{zr}}{r} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} \right) + \left( \frac{dv_z}{dt} \right)_{art}, \quad (4-29)$$

donde  $D = \sqrt{R^2 + z^2}$  es la distancia al origen.

Recordando que  $\eta = \nu\rho$ , y mediante las ecuaciones 4-20 y 4-22, es posible relacionar la prescripción  $\alpha$  y el tensor de esfuerzo.

La viscosidad artificial tiene una formulación similar a la de la ecuación 3-46<sup>7</sup>:

$$\Pi_{ij} = \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) (-A\mu_{ij} + B\mu_{ij}^2), \quad (4-30)$$

donde

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \frac{\vec{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij}}{(|\vec{r}_{ij}|^2/h_{ij}) + \eta^2} \frac{f_i + f_j}{2c_{ij}}, & \vec{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} < 0, \\ 0 & \vec{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} \geq 0. \end{cases}, \quad (4-31)$$

y  $f_i, f_j$  corresponden a la implementación del ‘‘Balsara-switch’’ de la ecuación 3-50.

---

<sup>7</sup>Para evitar confusión,  $\alpha_b$  y  $\beta_b$  se sustituyen por  $A$  y  $B$ .

También se debe modificar la ecuación de energía, introduciendo el término de disipación de energía por unidad de masa:

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{\eta}{2\rho} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \left( T \frac{ds}{dt} \right)_{art}, \quad (4-32)$$

donde

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{t_{\alpha\beta}}{\eta}. \quad (4-33)$$

Por lo que la ecuación de energía se escribe como

$$\frac{du}{dt} = - \left( \frac{P}{\rho} \right) \nabla \cdot v + T \frac{ds}{dt}. \quad (4-34)$$

Finalmente, los términos de viscosidad artificial de las ecuaciones 4-27, 4-29 y 4-32 se calculan con

$$\left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{i,art} = - \sum_{j \neq i} m_j \Pi_{ij} \nabla_i W_{ij}$$

y

$$\left( T \frac{ds}{dt} \right)_{i,art} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} m_j \Pi_{ij} v_{ij}^{\vec{v}} \cdot \nabla_i W_{ij}.$$

## Prueba inicial

Se realizó una simulación con el código original, utilizando 3163 partículas, con una masa por cada una de  $m_b = 1.66 \times 10^{17}$ g, por lo que la masa inicial del disco fue  $M_{disco} M_0 = 5.25 \times 10^{20}$ g. Para la prescripción de la viscosidad dinámica se definió  $\alpha = 0.01$ . El tiempo total de la simulación fue de 0.666s.

La figura 4-5 muestra la masa del disco como función del tiempo. Esta cantidad comienza a disminuir en  $t \approx 0.43$ s, lo que implica que las partículas están siendo acretadas, con lo que es posible definir la escala de tiempo viscoso como  $t_{visc}(R_0) \equiv 0.43$ s. Se puede estimar  $t_{visc}$  en el código con la definición de  $\tau$  dada en la sección 2.3.3 y la ecuación 2-40:

$$t_{visc}(R_0) = \frac{R_0^2}{12\nu}. \quad (4-35)$$

Con ésto se obtiene  $t'_{visc}(R_0) = 0.913$ s para la prueba. Como esta aproximación se obtiene

suponiendo un disco delgado es de esperar que el  $t_{visc}$  calculado sea diferente al obtenido en la simulación.

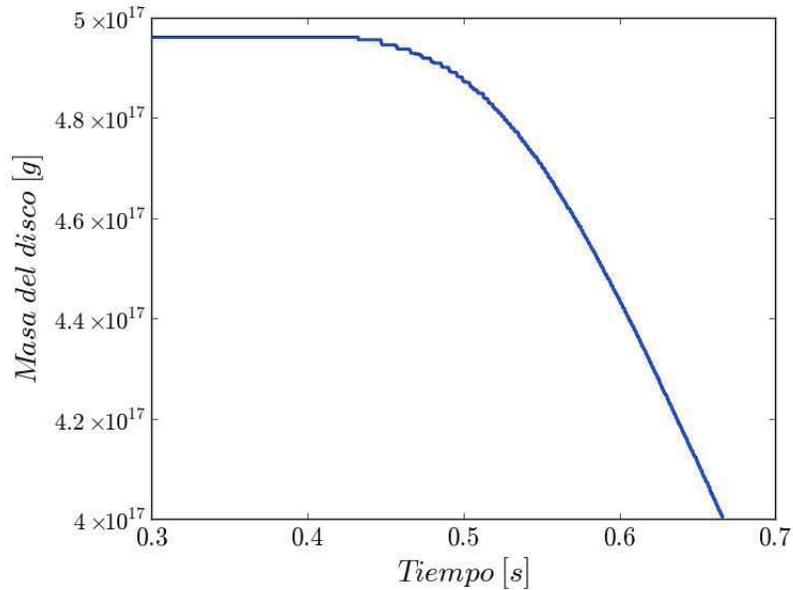


Figura 4-5: Gráfica de masa del disco en el tiempo. La masa es constante para  $t < t_{visc}(R_0)$ .

En la figura 4-6, se observa que el disco transfiere momento angular al agujero negro a partir de  $t_{visc}$ , lo que coincide con el comportamiento de la masa en la figura 4-5. La parte escalonada en la gráfica del momento angular del agujero negro al inicio de la acreción se debe a que este proceso se da de manera discreta, y entre las primeras partículas acretadas transcurren varios pasos de tiempo. Eso también explica el comportamiento ‘suave’ que adquiere para tiempos mayores.

Con base a la gráfica de momento angular, podría decirse que esta cantidad se conserva a lo largo de la simulación. Sin embargo, al calcular el logaritmo del error fraccional (figura 4-7), se observa que éste aumenta para cada cantidad en el tiempo. El error en el momento se presenta desde el inicio de la simulación ya que éste cambia con cada paso de tiempo. Por otra parte, el error en la masa se presenta cuando comienza la acreción, y se empieza a recalcular el número de partículas para el disco en cada momento. La diferencia tan grande en el orden de magnitud entre ambas cantidades se debe a la naturaleza del error. En el caso de la masa, la causa es el redondeo de las sumas aritméticas de cantidades con número finito de dígitos. El

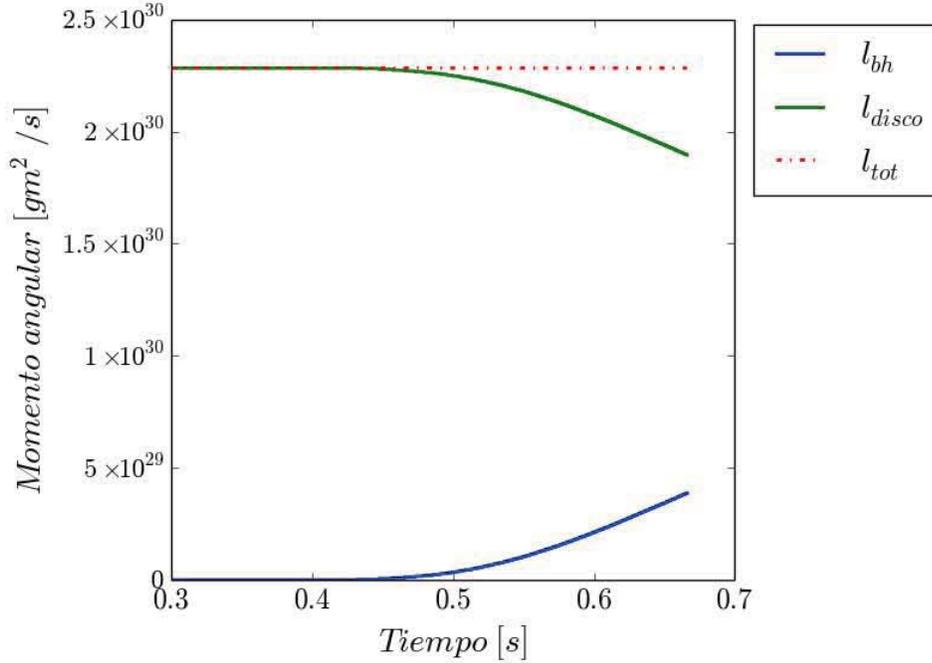


Figura 4-6: Momento angular del agujero negro (azul), del disco (verde) y el total (rojo, líneas punteadas).

momento angular, además del error de redondeo, carga con el error de truncamiento del método numérico, que aumenta con el número de partículas. Considerando la tasa con la que el error se incrementa y comparándola con el tiempo de evolución máximo del disco para las simulaciones, el error numérico no supera el 0.1 %, lo que es aceptable para este trabajo.

## 4.2. Modificaciones realizadas

Cualquier código de este tipo en el que se trabaje requiere de innumerables modificaciones y pruebas para comprobar que se ejecute correctamente (complicado en muchas situaciones) y que arroje resultados físicamente consistentes (muy complicado en cualquier situación). Esto puede llevar a generar múltiples versiones de un mismo programa las cuales muestran diferentes aspectos de un mismo modelo. En este caso, la versión original del código no calcula la densidad superficial del disco ni la tasa de acreción del material, por lo que fue necesario añadirle dichas opciones. A continuación se explican las principales modificaciones realizadas en el código *diskevol2d.f*, las cuales fueron utilizadas para obtener los resultados presentados en el capítulo 5.

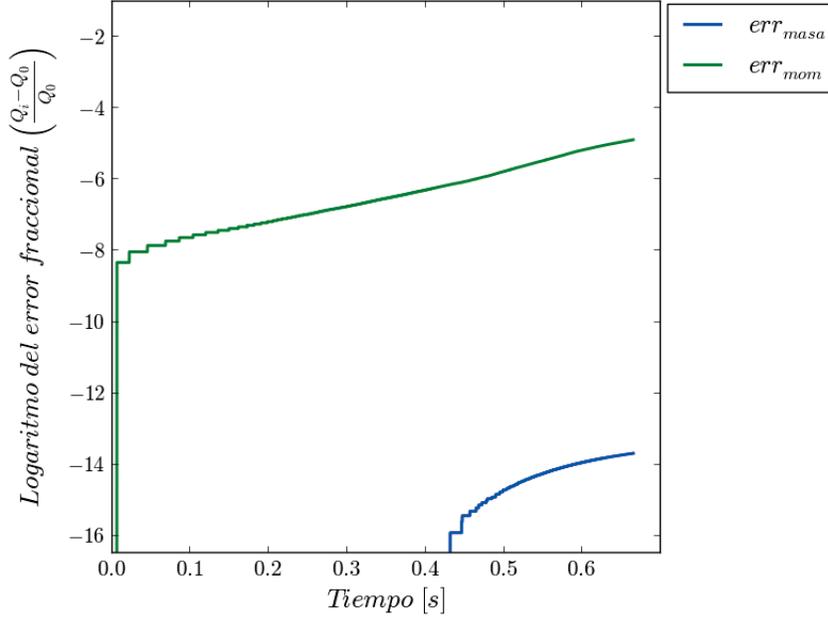


Figura 4-7: Logaritmo del error fraccional del sistema en el tiempo.  $Q_i$  es la cantidad (masa y momento angular) en cada paso de tiempo y  $Q_0$  es la cantidad al inicio de la simulación.

Para esto, se usa como ejemplo una versión del código con las características ( $\alpha = 0.01$ , tiempo total de  $0.666s$ , etc) del utilizado la sección anterior, a menos que se indique otra cosa.

#### 4.2.1. Cálculo de la densidad superficial $\Sigma$

La densidad superficial, definida en la ecuación 2-23, se obtuvo dividiendo el disco en anillos de grosor constante  $\Delta R = 0.02R_g$  y para cada región resultante se contó el número de partículas que contenía, por lo que

$$\Sigma' = \frac{M_n}{A(R_n) - A(R_n - \Delta R)} = \frac{M_n}{\Delta A_n}, \quad (4-36)$$

donde  $M_n$  y  $R_n$  son la masa acumulada y la coordenada radial del  $n$ -ésimo anillo.  $A(R_n)$  es el área de la región circular cuyo radio es  $R_n$ , por lo que al sustraerle el área asociada al radio  $R_n - \Delta R$ , se obtiene el área del anillo,  $\Delta A_n$ . Esta técnica resultó muy útil al inicio de la simulación (figura 4-8). Sin embargo, conforme las partículas se propagan y/o son acretadas, el cálculo pierde calidad debido a que la distancia entre partículas vecinas es mayor al grosor de cada anillo y se generan oscilaciones no deseadas en  $\Sigma$ .

Hay dos métodos de evitar estos efectos: aumentar el número de partículas, o modificar  $\Delta R$

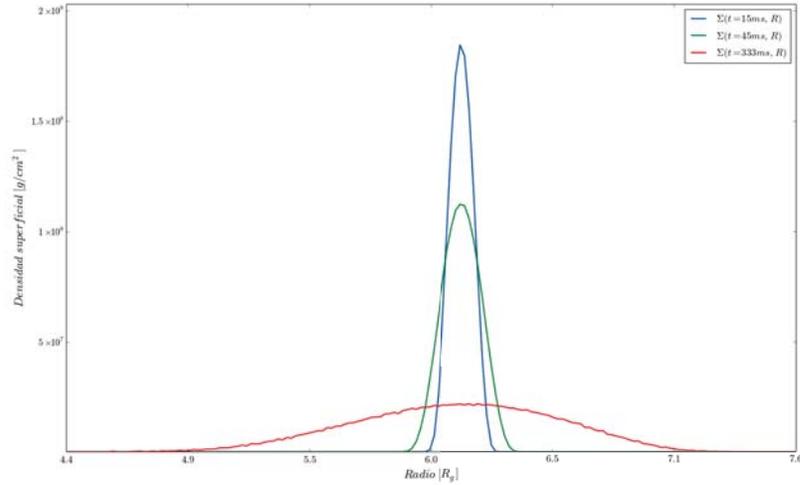


Figura 4-8: Densidades superficiales del disco para distintos tiempos de la simulación.

para hacerlo dependiente de  $h_b$ . El segundo se logró utilizando anillos con un grosor de  $5h_{min}$ , donde  $h_{min}$  es el parámetro  $h$  de la partícula mas pequeña para cada tiempo. En la práctica, para poder obtener una resolución similar entre el primer y segundo método, se necesita incrementar el número de partículas de manera considerable, lo que aumenta el tiempo de cómputo hasta el doble, dependiendo del tipo de disco que se esté simulando. Por esta razón se eligió el segundo método para calcular  $\Sigma$ .

#### 4.2.2. Cálculo de la acreción

A diferencia de la densidad superficial, la cual es una cantidad local, y puede ser calculada usando un rango amplio de valores para  $\Delta R$  (al menos dentro de los límites previamente discutidos), la acreción depende fuertemente de los parámetros que se utilicen para calcularla. En el límite continuo, la acreción se define como la derivada temporal de la masa del disco. Para el caso discreto, el cálculo se limita por el cambio mínimo de masa y de tiempo. De manera que la acreción es aproximada como

$$\dot{M}' = \frac{\Delta M}{\Delta t}. \quad (4-37)$$

Se podría pensar que la mejor aproximación es usar el paso de tiempo definido en 4-13; sin embargo, la acreción de las partículas no se da para cada paso de tiempo mayor a  $t_{visc}$ , sino que existen intervalos temporales donde ninguna partícula es acretada. El efecto ocasionado por estas variaciones se amplifica debido a la gran diferencia del orden de magnitud entre  $\Delta M$  y  $\Delta t$  (figura 4-9).

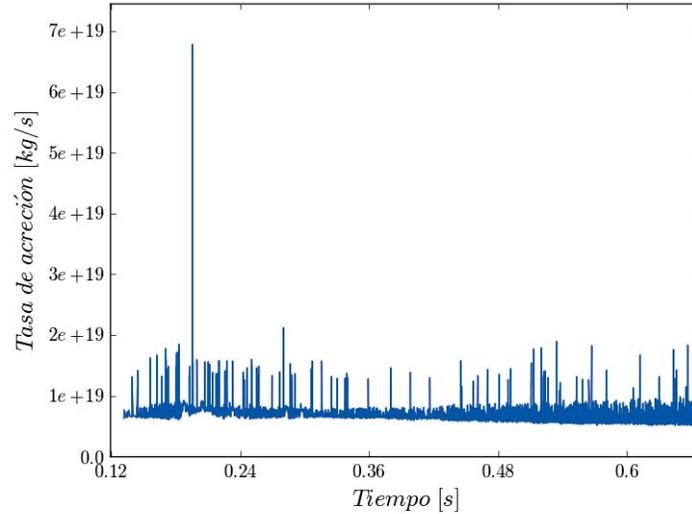


Figura 4-9: Cálculo de la tasa de acreción. La discretización de la masa impide utilizar la aproximación de la ecuación 4-37 para obtener la acreción de material.

Si la información de la acreción se manipula por medio de un histograma, existen dos maneras de reducir las variaciones y obtener una gráfica de la acreción mucho mejor definida. La primera es hacer el número de partículas acretadas constante, y dividir la masa de las mismas entre el tiempo que toma la acreción de la primera a la última (área de cada barra del histograma aproximadamente constante<sup>8</sup>). En este trabajo se utilizó un número de partículas  $N_p = 25$  para calcular  $\dot{M}$  con el primer método. La segunda opción es hacer el intervalo temporal de la acreción constante ('binning' constante para el histograma), mucho mayor al valor promedio del paso de tiempo. A diferencia del cálculo de  $\Sigma$ , para la tasa de acreción se implementaron ambos métodos.

<sup>8</sup>La razón de porque varía el área se discutirá más adelante.

### 4.2.3. Modificación del parámetro $\alpha$

Hasta el momento, todas las modificaciones del código han sido implementadas para extraer la información del sistema original, pero ninguna ha cambiado la dinámica del disco. El parámetro  $\alpha$  se ha mantenido constante para todas las pruebas realizadas. Antes de mostrar las formas funcionales propuestas, es conveniente explicar el proceso mediante el cual se llegó a ellas.

Como se ha mencionado, no hay un modelo analítico que describa con detalle la turbulencia y su efecto en la dinámica de un fluido. Para este caso, se utilizó un análisis cualitativo sobre la forma funcional que podría tener la viscosidad turbulenta, mediante el comportamiento del parámetro  $\alpha$ . Considerando un caso simple sobre la dependencia de  $\alpha$ , se eligió la energía interna como primer variable. Se propuso que para un disco "frío", donde la dispersión de velocidad del fluido es mínima, la viscosidad turbulenta sería baja. Esto se debe a que las colisiones entre partículas físicas tienden a aumentar la turbulencia del fluido, lo que ocurre cuando la energía interna del gas es alta. Por el contrario, al aumentar la temperatura del gas, la turbulencia aumenta, y con ella  $\alpha$ . Es conveniente que la función permita a las partículas distribuirse a lo largo de los valores definidos de  $\alpha$ . Además debe tener una curva suave, de manera que no haya variaciones bruscas en la viscosidad.

Implementando una forma similar a la que utilizan Potter y Balbus [2014], modificada para que varíe con  $u_b$ , se obtiene

$$\alpha_b(U_b) = \alpha_{min} + (\alpha_{max} - \alpha_{min}) \left[ \frac{(\log U_b)^{0.5}}{(\log U_b)^{0.5} + 1} \right], \quad \text{con } U_b \equiv \frac{u_b}{\mu}. \quad (4-38)$$

Como  $u_b \gg 0$ , es necesario normalizar la energía interna de cada partícula de lo contrario todas las partículas tendrían  $\alpha \approx \alpha_{max}$  (figura 4-10). El valor de normalización  $\mu$  se definió como

$$\mu \equiv \frac{1}{M_d(t)} \sum_i m_i u_i, \quad (4-39)$$

donde  $M_d(t)$  es la masa del disco en función del tiempo, por lo que  $\mu$ , además de ser una cantidad global, también se adapta a la dinámica del disco.

La segunda cantidad propuesta como variable fue la densidad. Para este caso, la forma

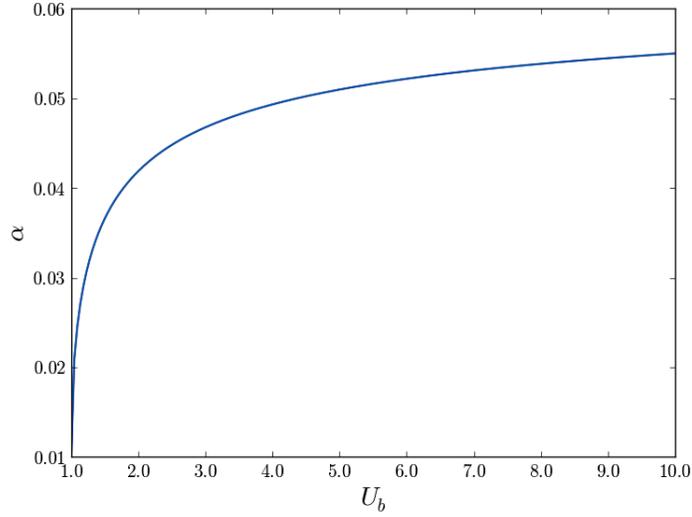


Figura 4-10: Gráfica de la forma funcional de  $\alpha(U_b)$ . Los valores para  $\alpha_{max}$  y  $\alpha_{min}$  son 0.1 y 0.01, respectivamente.

funcional se hizo completamente lineal:

$$\alpha_b(\rho_b) = \alpha_{min} + (\alpha_{max} - \alpha_{min}) \left[ 1 - \frac{\rho_b}{\rho_{max}} \right], \quad (4-40)$$

donde  $\rho_{max}$  es la máxima densidad asociada a una partícula dada, para cada paso de tiempo. De esta forma, el término entre corchetes oscila varía entre 0 y 1. Esta forma funcional se eligió con el fin de que  $\alpha$  disminuya cuando la densidad aumenta, lo que podría generar una inestabilidad en la densidad de una o varias regiones del disco.

Finalmente, la tercera propuesta fue combinar la dependencia de  $\alpha$  con ambas variables. Para ello, se utilizó la ecuación 4-38 como base de la forma funcional, agregando la dependencia con la densidad en  $\alpha_{min}$

$$\alpha_b(\rho_b, U_b) = \alpha_{min}(\rho_b) + [\alpha_{max} - \alpha_{min}(\rho_b)] \left[ \frac{(\log U_b)^{0.5}}{(\log U_b)^{0.5} + 1} \right]. \quad (4-41)$$

La siguiente tabla muestra las variaciones de la forma funcional que se implementaron en el código, utilizando como base las ecuaciones 4-39-4-41. Para todos los casos  $\alpha_{max} = 0.1$ . De ahora en adelante se usarán los subíndices para referirse a cada una de ellas.

Etiqueta de $\alpha$	$\alpha_{min}$	Forma funcional
$\alpha_1$	0.01	$\alpha_b(U_b)$
$\alpha_2$	0.001	$\alpha_b(U_b)$
$\alpha_3$	$2 \times 10^{-4}$	$\alpha_b(U_b)$
$\alpha_4$	0.01	$\alpha_b(\rho_b)$
$\alpha_5$	0.001	$\alpha_b(\rho_b)$
$\alpha_6$	$2 \times 10^{-4}$	$\alpha_b(\rho_b)$
$\alpha_7$	$0.0098 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) + 0.0002$	$\alpha_b(\rho_b, U_b)$
$\alpha_8$	$0.0098 \frac{\rho}{\rho_{max}} + 0.0002$	$\alpha_b(\rho_b, U_b)$
$\alpha_9$	$\begin{cases} 0.0196 \frac{\rho}{\rho_{max}} + 0.0002, & \rho \leq 0.5 \rho_{max} \\ -0.0196 \left(\frac{\rho}{\rho_{max}} - 0.5\right) + 0.01, & \rho > 0.5 \rho_{max} \end{cases}$	$\alpha_b(\rho_b, U_b)$
$\alpha_{10}$	$-0.0392 \left(\frac{\rho}{\rho_{max}} - 0.5\right)^2 + 0.01$	$\alpha_b(\rho_b, U_b)$

Los valores de  $\alpha_{min}$  fueron elegidos con base en la literatura. Por un lado, King *et al.* [2007] indica un límite alto ( $\alpha \sim 0.4 - 0.1$ ) para objetos transitorios de rayos X; sin embargo, sus resultados aplican para la fase de explosiones, lo cual no es necesariamente el caso para los discos en este trabajo. Jiao y Wu [2011] da un valor de  $\alpha = 0.1$  para flujos dominados por la acreción, pero sólo como límite superior para la máxima acreción dentro de los modelos que reproducen. Para valores inferiores, Yuan [2001] obtiene un límite inferior de  $\alpha = 0.001$ . Dado el extremadamente bajo valor de  $M_0$  en este trabajo, se implementa un valor mínimo para  $\alpha$  de  $2 \times 10^{-4}$ , que también coincide con el límite inferior en el cual el código transporta el momento angular de disco.

Para  $\alpha_7$ - $\alpha_{10}$  las modificaciones para el valor mínimo posible son diversas, pero el intervalo en el que se encuentran es  $10^{-2}$  a  $2 \times 10^{-4}$ , como se indica en la figura. La razón de usar una forma lineal en el límite inferior para  $\alpha_7$  y  $\alpha_8$  fue obtener un efecto similar, opuesto para  $\alpha_8$ , al que se buscó en  $\alpha_3$ - $\alpha_5$ . Por otro lado,  $\alpha_9$  y  $\alpha_{10}$ , comparten características de  $\alpha_8$  para bajas densidades y de  $\alpha_3$  para las altas. El razonamiento en estas dos formas funcionales es ampliar las posibilidades sobre el comportamiento de  $\alpha$ , ya que en el extremo de alta densidad, el material podría aglomerarse y disminuir la eficiencia del transporte de momento angular y el mismo escenario podría darse para muy poca densidad, debido a las pocas colisiones que

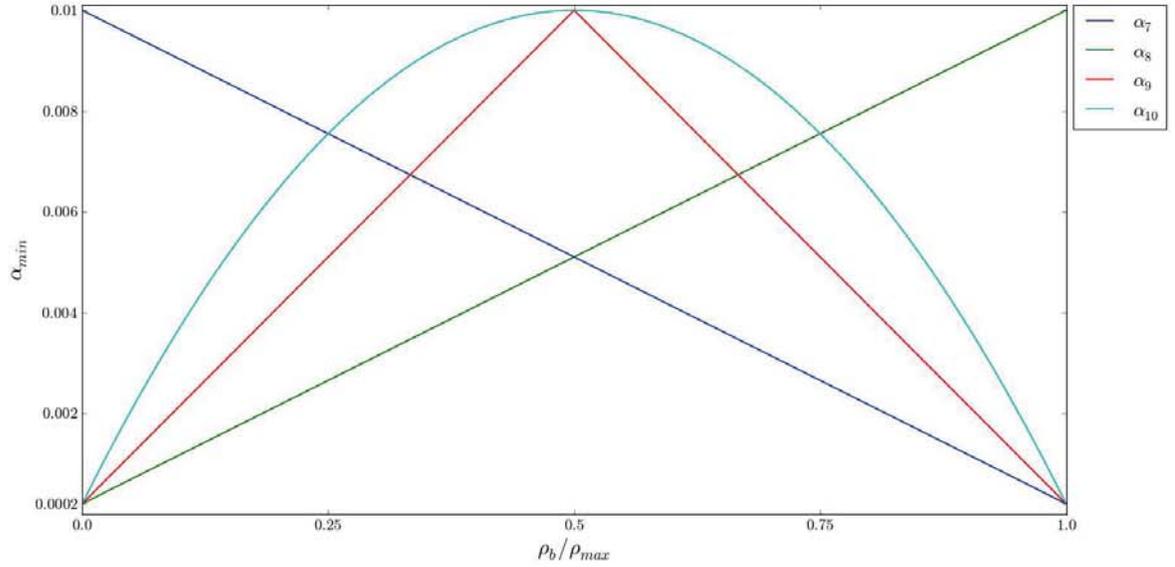


Figura 4-11: Gráfica de las diferentes formas funcionales de  $\alpha_{min}$  dependientes de la densidad para las funciones  $\alpha_7$ - $\alpha_{10}$ .

podrían darse en tales circunstancias.

#### 4.2.4. Condiciones iniciales y formato de la salida de datos de las simulaciones

A excepción de la forma funcional de  $\alpha$ , las condiciones iniciales de cada disco son las mismas. El número de partículas es de 23482. La masa del disco es de  $5.32 \times 10^{20}$ g, mientras que la del disco es de  $4.97 \times 10^{33}$ g. El radio gravitacional  $R_g$  es  $7.337 \times 10^5$ cm. El anillo inicial de material se encuentra distribuido entre  $4.416 \times 10^6$ cm y  $4.57 \times 10^6$ cm, con el máximo de la densidad de masa en  $4.497 \times 10^6$ cm (figura 4-3).

La siguiente tabla muestra los tiempos de simulación de los discos.

Etiqueta de $\alpha$	Tiempo ( $\rho$ y $\Sigma$ ) [s]	Tiempo ( $\rho_{max}$ ) [s]	Tiempo ( $\dot{M}$ ) [s]
$\alpha = 0.06$	NA	5	4
$\alpha = 0.01$	NA	5	4
$\alpha = 0.001$	NA	5	8
$\alpha_1$	0.3	5	4
$\alpha_2$	0.3, 0.6	5	5
$\alpha_3$	0.3, 0.6	5	5
$\alpha_4$	0.15	1	4
$\alpha_5$	0.15	1	4
$\alpha_6$	0.15	1	4
$\alpha_7$	0.3, 0.45	4	2.8
$\alpha_8$	0.3, 0.45	4	2.8
$\alpha_9$	0.3, 0.45	4	2.8
$\alpha_{10}$	0.3, 0.45	4	2.8

La primera columna muestra las etiquetas de cada disco, incluyendo los casos de control ( $\alpha$  constante). El primer valor constante de  $\alpha = 0.06$ , es elegido ya que en las simulaciones realizadas, excepto por las que tienen  $\alpha_b(\rho_b)$ , el valor maximo de  $\alpha$  alcanzado es  $\sim 0.06$ . El valor  $\alpha = 0.01$  es del orden del promedio de los valores de  $\alpha$  en las simulaciones, ademas es el dado por Jiao y Wu [2011], como se menciona en la seccion anterior. El tercer valor constante,  $\alpha = 0.001$ , es el dado Yuan [2001].

La segunda columna muestra los tiempos de simulación de cada disco utilizados para calcular tanto  $\rho$  como  $\Sigma$ . No se asignan valores en esta columna a los casos de control porque en ellos no aparecen inestabilidades. Aunque los pasos de tiempo de la simulación depende de las ecuaciones 4-10, 4-12 y 4-19, los archivos de salida están limitados a 89, de manera que el intervalo entre cada uno esta dado por

$$T/89,$$

donde T es el tiempo de simulación del disco dado.

La tercera indica los tiempos de los discos usados para obtener la densidad de la partícula más pequeña del disco en cada paso de tiempo, es decir, la densidad máxima en términos de las

partículas del código. Como en este caso los valores se imprimen en un solo archivo, la limitación de los archivos de salida del cálculo de  $\rho$  y  $\Sigma$  no aplica en este caso. Por ello, se fija el intervalo

$$T/300.$$

No se deja al código imprimir el valor para cada paso de tiempo  $dt$ . Ésto con el fin de evitar variaciones de ruido numérico en las curvas de  $\rho_{max}$ , en especial para los primeros tiempos de la evolución del disco.

La última columna tiene los tiempos de la simulación usados para calcular la tasa de acreción mediante los dos métodos descritos en la sección 4.2.2. Aquí también se imprimen los valores en un solo archivo, pero el intervalo en el que el código los escribe depende de la dinámica del disco y de cuál de los dos métodos, previamente explicados, es el que se utiliza para calcular la tasa de acreción. Para el primer método, el intervalo varía dependiendo de cuántas partículas estén siendo acretadas y para el segundo método el intervalo es igual al  $\Delta t$  implementado.

# Capítulo 5

## Resultados

*“Data! Data! Data!” he cried impatiently.  
“I cant make bricks without clay.”*

— ARTHUR CONAN DOYLE. *The Adventure of the Copper Beeches* (1982)

Para la presentación de los resultados, se utilizará la notación  $\alpha_n$  de la tabla de la sección 4.2.3. La primera sección trata de las inestabilidades formadas en cada simulación vistas por medio de gráficas de contorno y por medio de la densidad superficial. La segunda sección utiliza la densidad máxima del disco, la cual depende del tiempo, para encontrar la escala temporal en que el disco es acretado. Se usan las curvas de densidad máxima para discos con  $\alpha$  constante como referencia. En la tercera sección se muestran las tasas de acreción calculadas por los métodos previamente descritos, se compara la precisión entre ellos para cada simulación de  $\alpha$  y se analizan las frecuencias dominantes en las curvas de tasa de acreción para cada simulación.

### 5.1. Estructura local: Inestabilidades en la densidad

#### 5.1.1. Clasificación de inestabilidades

Para fines de este trabajo, se define una inestabilidad como la formación repentina de anillos<sup>1</sup> con una densidad superficial y/o volumétrica mayor con respecto a la de los radios adyacentes. Dichos anillos no están necesariamente fijos a un radio en particular, sino que pueden moverse a lo largo del disco. Las inestabilidades observadas en las isodensidades se caracterizarán en tres tipos, a partir de tres criterios.

---

<sup>1</sup>Esta definición excluye al anillo inicial de la simulación

El primer criterio es la consistencia entre la información de la isodensidad ( $\rho$  vs  $R - z$ ) y la gráfica de densidad superficial del disco ( $\Sigma$  vs  $R$ ), ambas del mismo tiempo. La inestabilidad se verá en los isocontornos como una acumulación de densidad en una zona relativamente pequeña y estará representada como un máximo local de la densidad superficial. El tiempo de vida de la acumulación en ambas gráficas debe ser al menos de  $10t_\phi$  (ver ecuación 4-16). En la figura 5-1 se muestra una curva que representa la curva de  $\Sigma$  de un disco hipotético. La curva tiene tres máximos locales ( $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$ ), las cuales son candidatos a ser inestabilidades. También se observan los mínimos locales de la curva, etiquetados como  $m_1$  y  $m_2$ . La figura 5-2 muestra los dos posibles casos que pueden darse al graficar las isodensidades. En el primer caso (izquierda) aparecen dos acumulaciones de material en los radios correspondientes a  $c_1$  y  $c_3$  por lo que ambos candidatos cumplen este criterio<sup>2</sup>. En el segundo escenario,  $c_2$  también tiene correspondencia en la isodensidad, por lo que se tienen 3 inestabilidades. Al exigirse sólo una correspondencia entre  $\Sigma$  y  $\rho$ , incluso la aparición de un ‘grumo’ en las isodensidades cuya densidad sea superior a la del fondo de la gráfica de contorno se considera una inestabilidad si su tiempo de vida es de  $10t_\phi$ . El primer criterio discrimina entre las variaciones de densidad del disco ocasionadas por el ruido numérico de las partículas y las acumulaciones de material que se consideren inestabilidades dentro del contexto de este trabajo.

El segundo criterio permite distinguir entre las inestabilidades en términos de la acumulación del material. Para esto se calcula el cociente entre el máximo de la curva en  $\Sigma$  y los mínimos locales adyacentes. Si el cociente es mayor a 1.1 (lo que equivale a una densidad superficial 10% más grande respecto a los valores cercanos) entonces se aplica el tercer criterio. En caso contrario se dice que la inestabilidad es de tipo I. En el ejemplo de las figuras 5-1 y 5-2b, el segundo criterio indica que las inestabilidades son de tipo I si

$$\frac{c_1}{m_1} < 1.1,$$

$$\frac{c_2}{\text{máx}(m_1, m_2)} < 1.1$$

---

<sup>2</sup>Suponiendo que su tiempo de vida sea el mencionado previamente

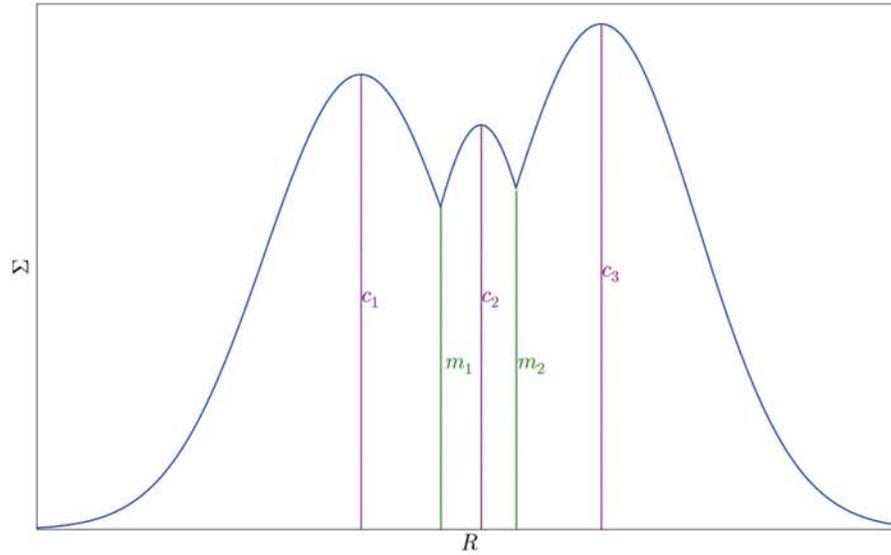


Figura 5-1: Gráfica ilustrativa del primer criterio para clasificar inestabilidades. La curva azul representa la densidad superficial  $\Sigma$  a lo largo de un disco en un tiempo dado. Esta curva fue realizada para explicar los criterios, por lo que no se obtuvo a partir de las simulaciones realizadas.

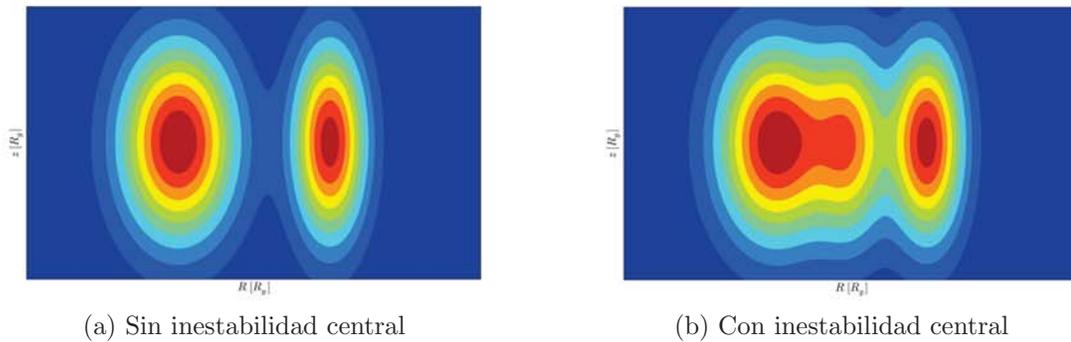


Figura 5-2: Gráficas de contorno de la densidad de masa  $\rho$  que muestran los dos escenarios posibles que pueden relacionarse a la figura 5-1. La de la izquierda solo muestra inestabilidades correspondientes a  $c_1$  y  $c_3$ . La de la derecha muestra una inestabilidad adicional que corresponde a  $c_2$ .

y

$$\frac{c_3}{m_2} < 1.1.$$

El tercer criterio se basa en la influencia de la inestabilidad para retrasar la dispersión del material a lo largo del disco; ésto se observa en la curva de la caída de la densidad superficial ( $\Sigma_{max}$  vs  $t$ ). Con un método similar al del segundo criterio, se calcula el cociente entre el máximo local de  $\Sigma_{max}$  generado por la inestabilidad y el mínimo local previo al aumento de  $\Sigma_{max}$  en la gráfica. Si el máximo es opacado por el ruido numérico, o el cociente entre máximo y mínimo es menor a 1.1, entonces no se pasa el criterio y la inestabilidad es de tipo II. En caso contrario es de tipo III. La figura 5-3 muestra los valores máximos de  $\Sigma$  de un disco para cada tiempo. Aplicando el tercer criterio, los candidatos a inestabilidades  $C_1$  y  $C_2$  serán de tipo III si

$$\frac{C_1}{M_1} > 1.1$$

y

$$\frac{c_2}{M_2} > 1.1.$$

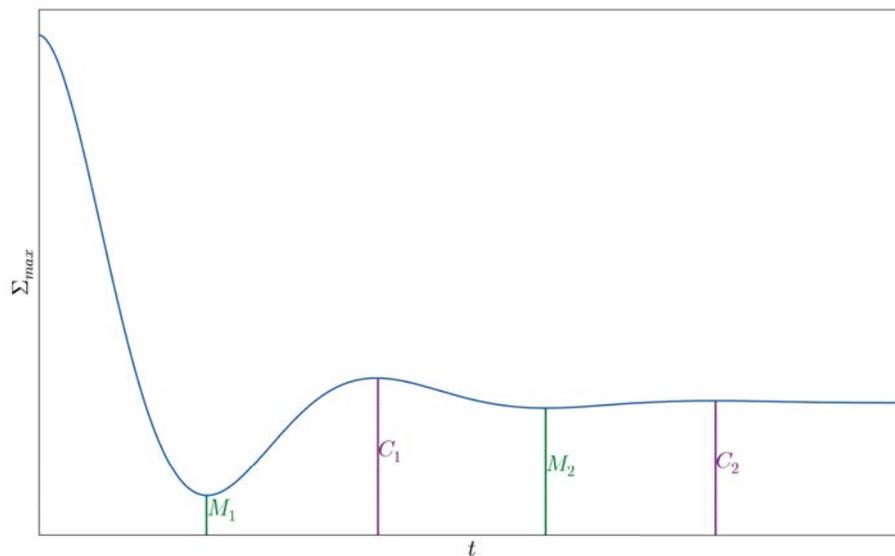


Figura 5-3: Gráfica ilustrativa del tercer criterio para clasificar inestabilidades. La curva azul representa la densidad superficial  $\Sigma$  máxima contra el tiempo. Esta curva fue realizada para explicar los criterios, por lo que no se obtuvo a partir de las simulaciones realizadas.

En resumen, las inestabilidades que sólo cumplen el primer criterio son de tipo I, las que cumplen con el primer y segundo criterio son de tipo II y las que cumplen todos los criterios son de tipo III.

### 5.1.2. Pruebas con dependencia de la energía interna

#### Inestabilidades en $\alpha_1$

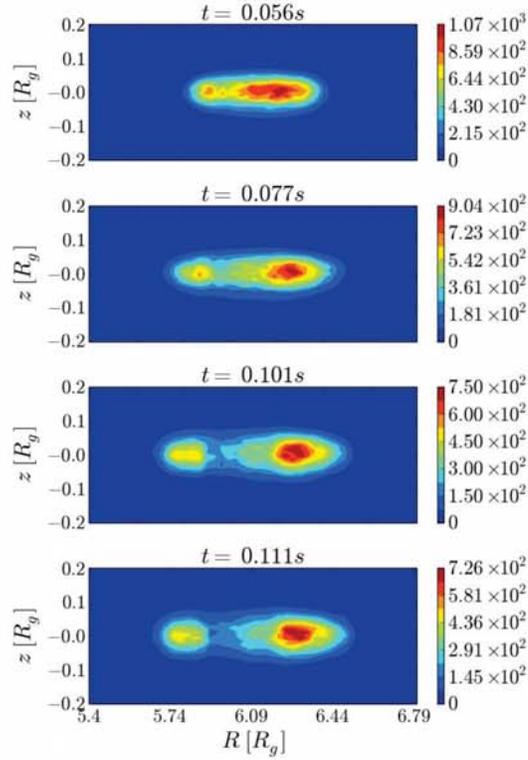
Para la simulación con  $\alpha_1$  se obtienen dos inestabilidades simultáneas, las cuales colapsan para formar una tercera. La figura 5-4 muestra la evolución de las inestabilidades iniciales, así como los valores de densidad volumétrica y superficial<sup>3</sup>. La gráfica de densidad superficial (figura 5-4b) muestra un máximo local en  $5.91R_g$ , el cual se desplaza en dirección al agujero negro hasta llegar a una distancia de  $5.8R_g$  del mismo. El otro máximo, el cual es global, se aleja del acretor, llevándose un porcentaje importante del material consigo. En  $t = 0.056s$  tiene un máximo de  $6.22R_g$  y se traslada hasta  $6.28R_g$ . Implementando los criterios de clasificación, estas inestabilidades son catalogadas como tipo II. Para utilizar el tercer criterio se utiliza la gráfica de la figura 5-6.

Una vez que ambas inestabilidades alcanzan una separación máxima entre ellas, comienzan a acercarse nuevamente, colapsando en  $R \approx 6.1R_g$ , por lo que se genera una nueva inestabilidad (figura 5-5). Al igual que sus predecesoras, esta inestabilidad no cumple con el tercer criterio, por lo que es de tipo II.

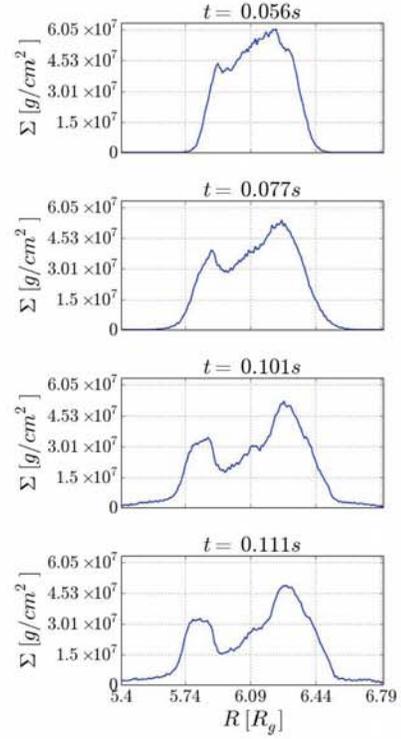
La gráfica de  $\Sigma_{max}$  (figura 5-6) permite entender algunas cosas sobre cómo el disco se ve afectado por las inestabilidades. Al inicio de la simulación ocurre la típica caída exponencial, la cual se detiene momentáneamente en  $\Sigma_{max} \approx 1.15 \times 10^8 \text{g/cm}^2$ . La tercera inestabilidad, por la definición asignada, comienza a formarse poco después de que los picos de densidad superficial alcanzan un máximo de separación entre ellos y comienzan a acercarse, lo que coincide con el segundo punto de inflexión, alrededor de  $0.11s$ . Ambos tiempos están representados en la figura 5-6 por medio de los cuadrados color magenta.

---

<sup>3</sup>En lo sucesivo al hablar de densidad a secas, se referirá a la densidad de masa por volumen,  $\rho$ . Al mencionar la densidad superficial será para referirse a  $\Sigma$ .

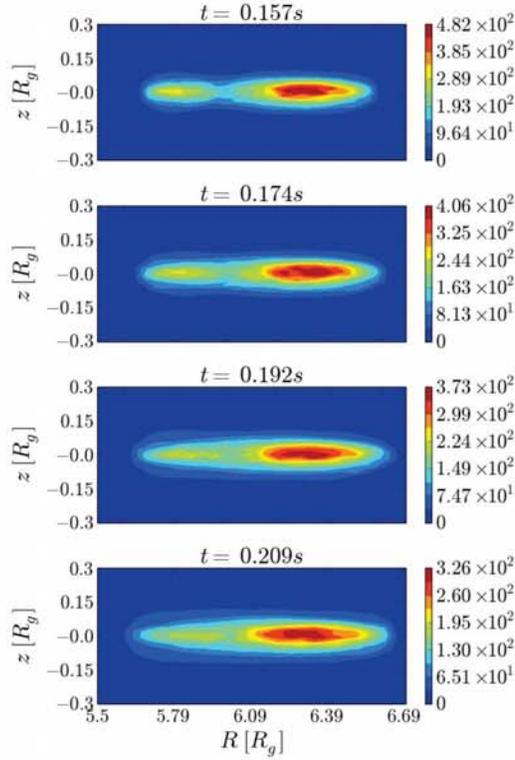


(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$

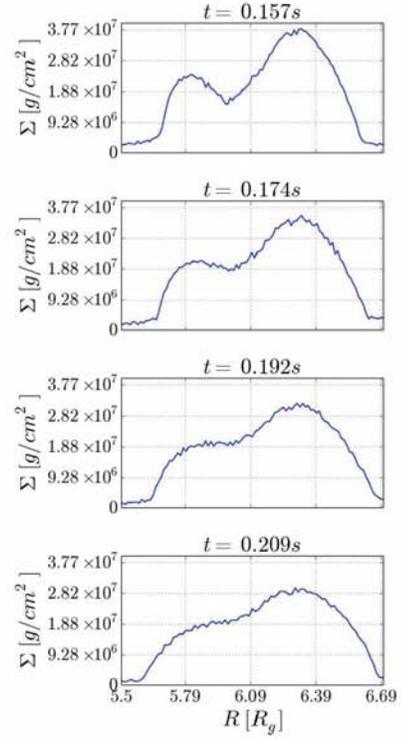


(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-4: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_1$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Las dos inestabilidades mostradas son de tipo II.



(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$



(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-5: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_1$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). La inestabilidad formada es de tipo II.

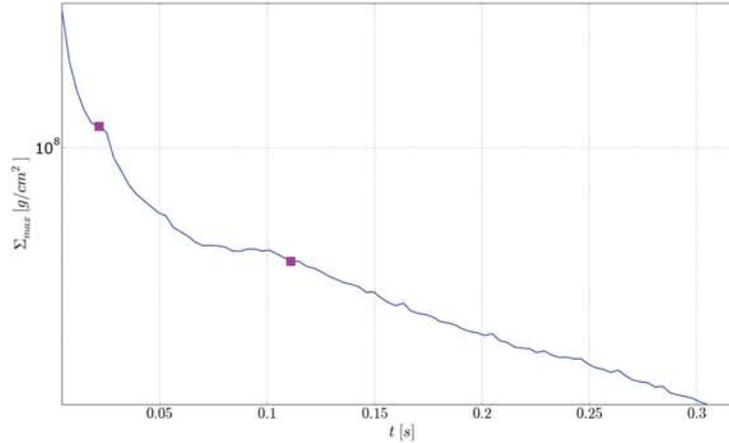


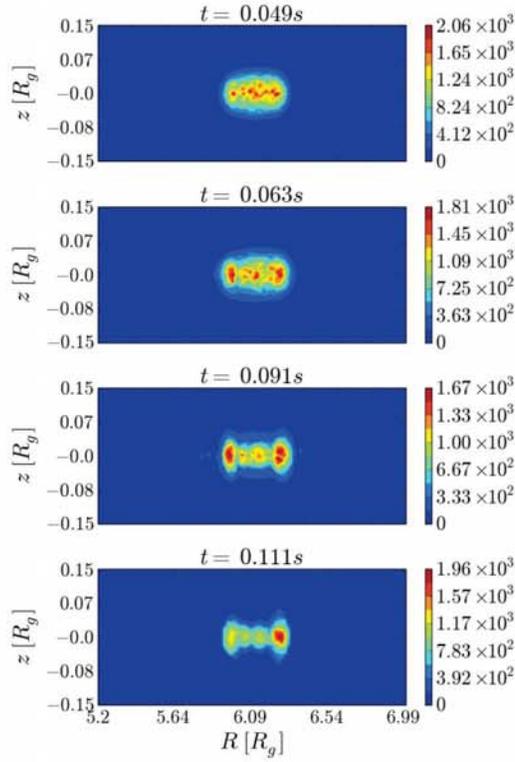
Figura 5-6: Gráfica de densidad superficial máxima en el tiempo. El eje vertical es logarítmico. La formación de las primeras inestabilidades coinciden con el tiempo en que la caída de  $\Sigma_{max}$  cambia de ritmo (punto de inflexión). Alrededor de  $t = 0.1s$  se encuentra el segundo punto de inflexión. Es cerca de este tiempo en que la separación entre las inestabilidades iniciales en  $\alpha_1$  es máxima y la dispersión del material comienza a revertirse, formando la tercera inestabilidad.

### Inestabilidades en $\alpha_2$

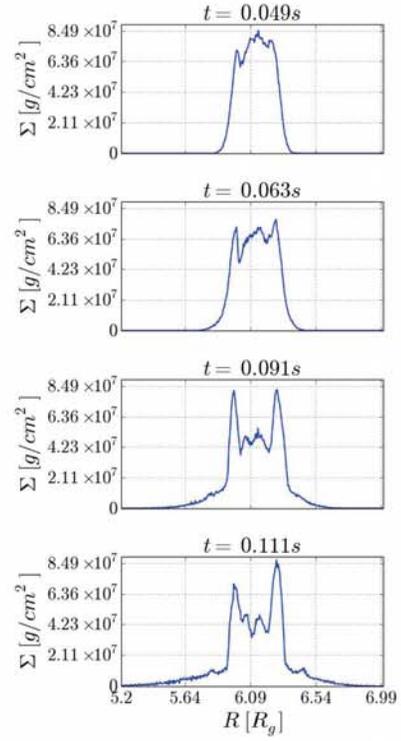
La dinámica de la simulación para  $\alpha_2$  es similar, aunque más compleja, que en el caso de  $\alpha_1$ . Aquí también se forman dos inestabilidades simultáneas al inicio de la simulación. En ambos casos, las inestabilidades se forman en un tiempo similar (figura 5-7). Sin embargo, las diferencias provocadas por cada forma funcional de  $\alpha$  son notables. Para  $\alpha_2$  las inestabilidades ocupan un volumen menor en las isodensidades, lo que se traduce en una densidad de volumen y superficial mayor relativa a  $\alpha_1$ . La diferencia entre ambas es tal que la inestabilidad mayor en  $\alpha_2$  (máximo en  $\Sigma$  de la figura 5-7b) es de tipo III (figura 5-10).

Otra diferencia importante es la presencia de inestabilidades menores, que se forman poco después del primer par. Éstas aparecen durante la evolución de las iniciales, son de tipo II (figura 5-8) y tienen una duración aproximada de 0.03s. Cuando las inestabilidades mayores comienzan a acercarse entre sí, las menores son absorbidas por éstas.

La quinta inestabilidad comienza a formarse en  $t = 0.139s$ . La figura 5-8b muestra que  $\Sigma_{max}$  alcanza el mínimo local cuando las inestabilidades iniciales terminan de colapsar. A partir de entonces, la inestabilidad aumenta su densidad superficial hasta  $8.52 \times 10^7 g/cm^2$ , por lo que cumple el tercer criterio y se cataloga como tipo III. Finalmente, existe una ligera acumulación

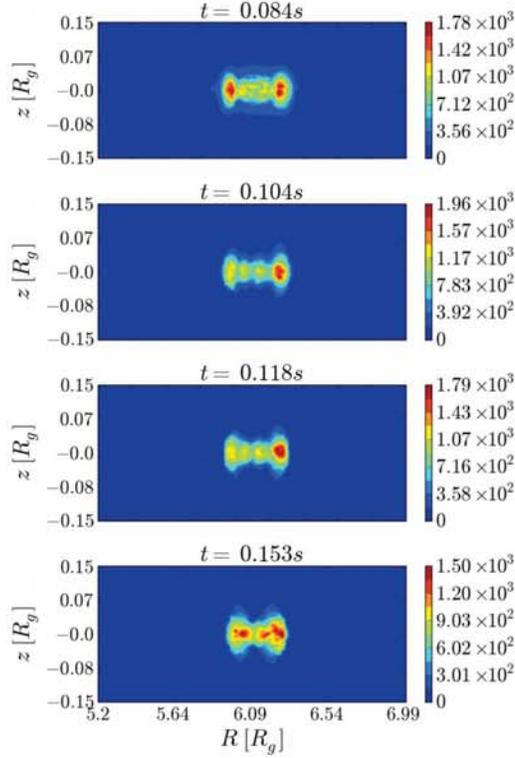


(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$

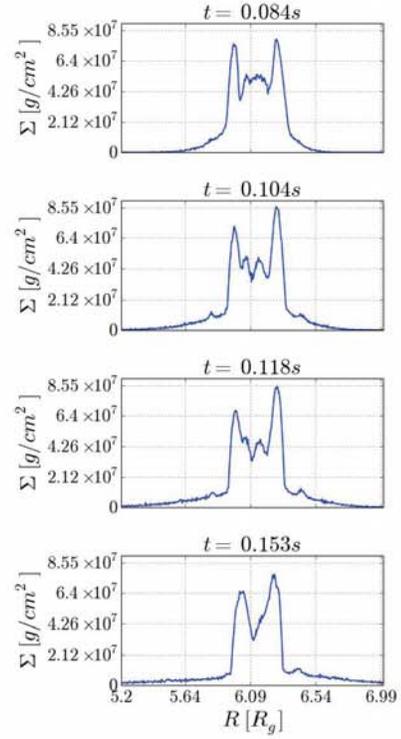


(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-7: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_2$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Las inestabilidades formadas son (de izquierda a derecha) de tipo II, II, II y III.



(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$



(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-8: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_2$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Las inestabilidades formadas son (de izquierda a derecha) de tipo II, II, II y III. En los últimos dos tiempos de  $\Sigma$  aparece un candidato a inestabilidad en la extrema derecha de la curva que no pasa del primer criterio.

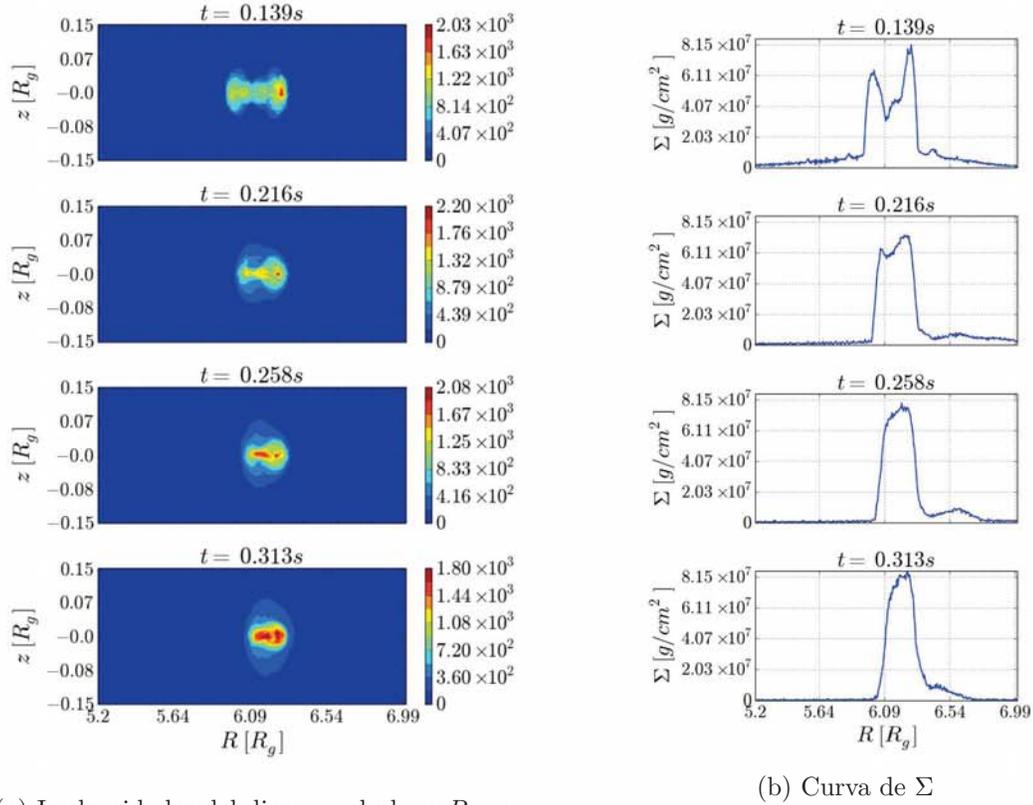


Figura 5-9: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_2$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). La inestabilidad formada es de tipo III. A la derecha, la acumulación de material que no cumple el primer criterio está presente en todos los tiempos de la curva de  $\Sigma$ .

de material que parece en las curvas de densidad superficial de la figuras 5-8b y 5-9b, en el intervalo radial  $\sim 6.4 - 6.6R_g$ . Debido a que no tiene una contraparte en la isodensidad (figuras 5-8a y 5-9a) no es catalogada como inestabilidad. Ésta última tiene una característica interesante. Durante la formación de la segunda inestabilidad tipo III, esta acumulación de material transfiere material desde radios externos hacia el agujero negro, lo que “alimenta” a la mayor.

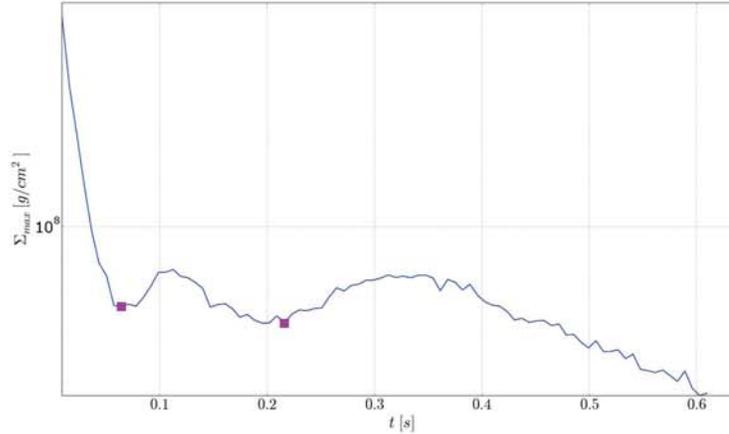
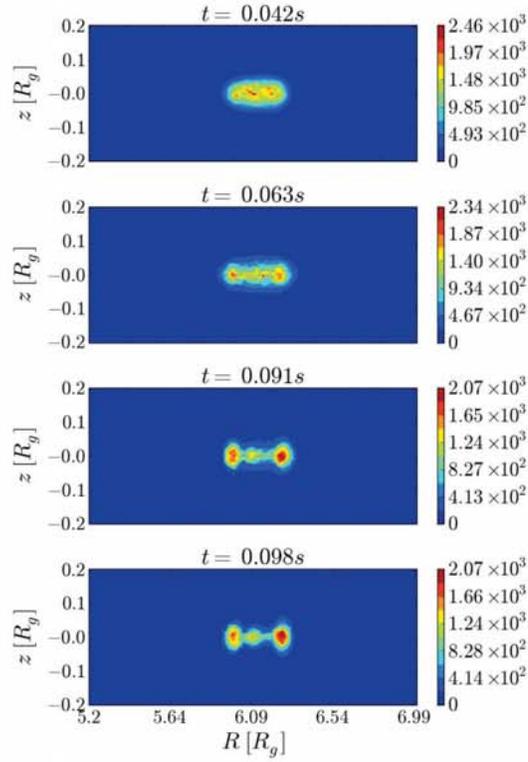


Figura 5-10: Gráfica de densidad superficial máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_2$ . El eje vertical es logarítmico. Existen dos mínimos locales cuyos tiempos coinciden con el inicio de la formación de una o más inestabilidades (cuadrados magenta). Los máximos locales tienen un valor 10% más alto que los valores del mínimo local anterior de cada uno. Los cuadros magenta indican el inicio de la formación de las inestabilidades mayores.

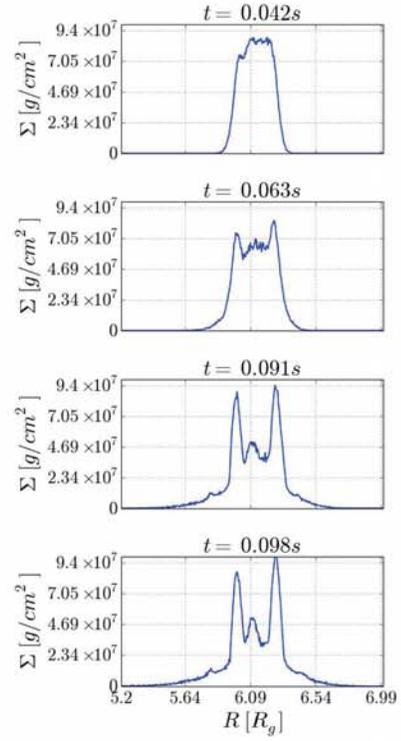
### Inestabilidades en $\alpha_3$

Como es de esperar, la simulación con  $\alpha_3$  tiene una evolución muy similar a la que tiene  $\alpha_2$ . Al inicio surgen dos inestabilidades en los extremos. A diferencia del caso anterior donde aparecen dos inestabilidades menores entre ellas, aquí solo se forma una (figura 5-11,  $t = 0.091s$ ), en el momento en que la densidad superficial de la mayor comienza a incrementarse (figura 5-11b).

Al igual que en los casos anteriores, las inestabilidades iniciales alcanzan un máximo de separación entre ellas y comienzan a moverse hacia  $R \approx 6.1R_g$  donde colapsan, formándose dos nuevas (figura 5-12a). La más pequeña se forma de una manera similar al anillo que no cumple el primer criterio del caso anterior, aunque esta sí tiene contraparte en la isodensidad, de manera que es tipo I. Esta inestabilidad menor alcanza un máximo en 0.258s, cuando las inestabilidades iniciales han colapsado y se llega al mínimo local representado por el segundo cuadro magenta en la figura 5-13. La inestabilidad mayor, al igual que la última inestabilidad del disco con  $\alpha_2$ , es de tipo III.



(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$



(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-11: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_3$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Las tres inestabilidades que se forman en estos tiempos son (de izquierda a derecha) de tipo II, II y III.

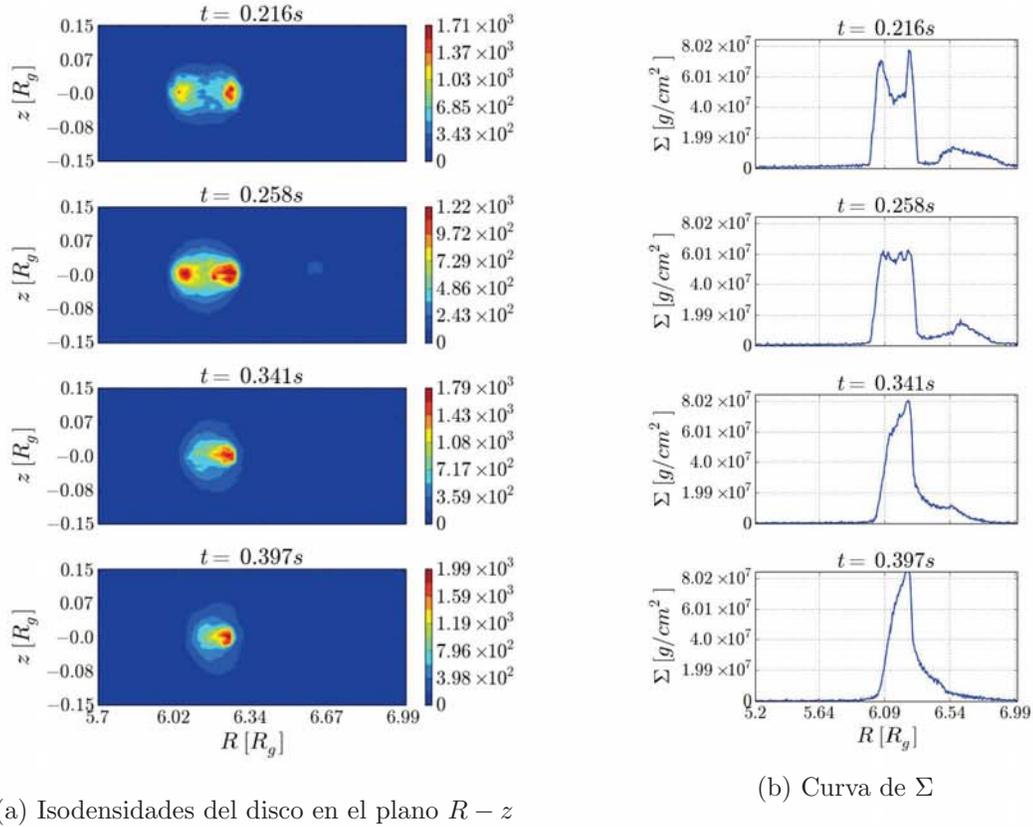


Figura 5-12: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_3$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Aunque la inestabilidad menor no está presente en todos los tiempos, ésta es de tipo I ( $t = 0.258s$ ), mientras que la mayor es de tipo III.

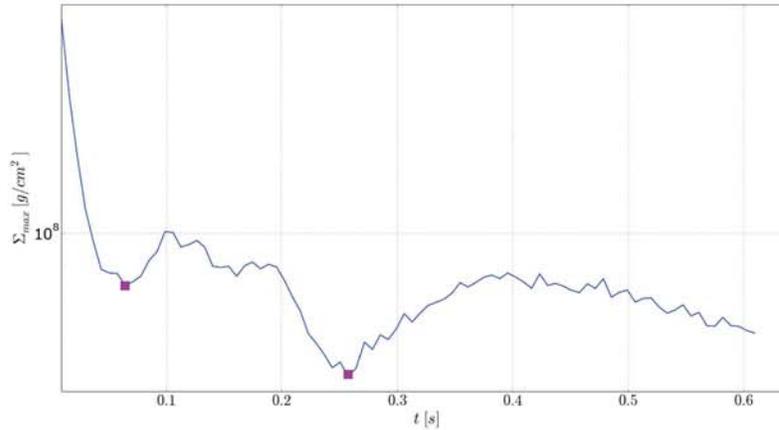


Figura 5-13: Gráfica de densidad superficial máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_3$ . El eje vertical es logarítmico. Existen dos mínimos locales cuyos tiempos coinciden con el inicio de la formación de una o más inestabilidades (cuadrados magenta). Los máximos locales tienen un valor 10% más alto que los valores del mínimo local anterior de cada uno. Los cuadros magenta indican el inicio de la formación de las inestabilidades mayores.

### 5.1.3. Pruebas con dependencia de la densidad

#### Inestabilidades en $\alpha_4$

Para el primer caso con dependencia de la densidad, no se encontraron inestabilidades de ningún tipo. La densidad superficial máxima cae de forma exponencial (figura 5-14). Cabe mencionar que la caída de  $\Sigma_{max}$  es aun más repentina que para  $\alpha = 0.06$ . Esto podría ser consecuencia de la distribución de densidad de las partículas al inicio de la simulación. Como se dijo en el capítulo anterior, la distribución de las partículas es similar a una distribución Gaussiana, por lo que solo unas cuantas de ellas (menos del 1% del total) tendrán un valor superior al 80% de la densidad de la partícula más densa. Además, como la relación entre  $\alpha$  y  $\rho$  es lineal, la eficiencia del transporte del momento angular es mayor para las partículas externas, lo que conlleva a una dispersión aun más rápida del material que para  $\alpha = 0.06$ .

#### Inestabilidades en $\alpha_5$

A diferencia de  $\alpha_4$ , la segunda forma funcional dependiente de la densidad genera un candidato a inestabilidad al inicio de la simulación (figura 5-15). Sin embargo, como su tiempo de vida es inferior a 0.001s, no cumple con el primer criterio y este anillo de material no es consi-

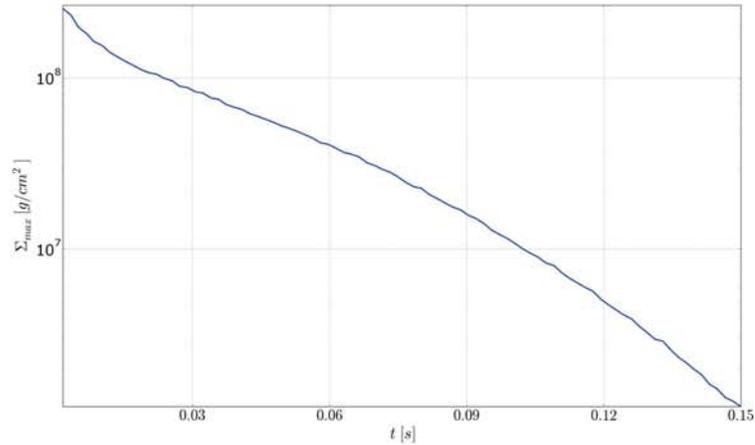
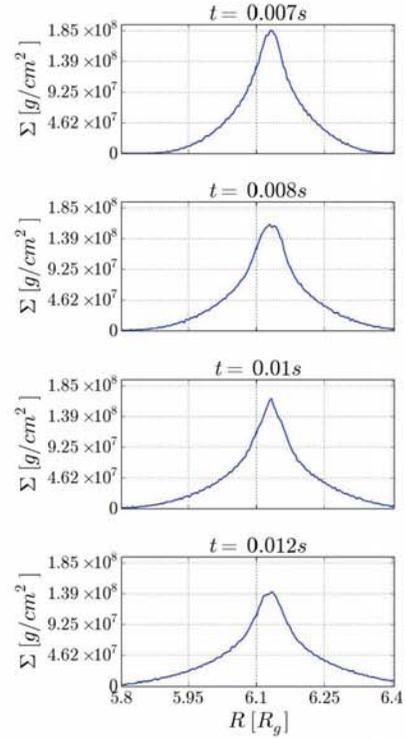
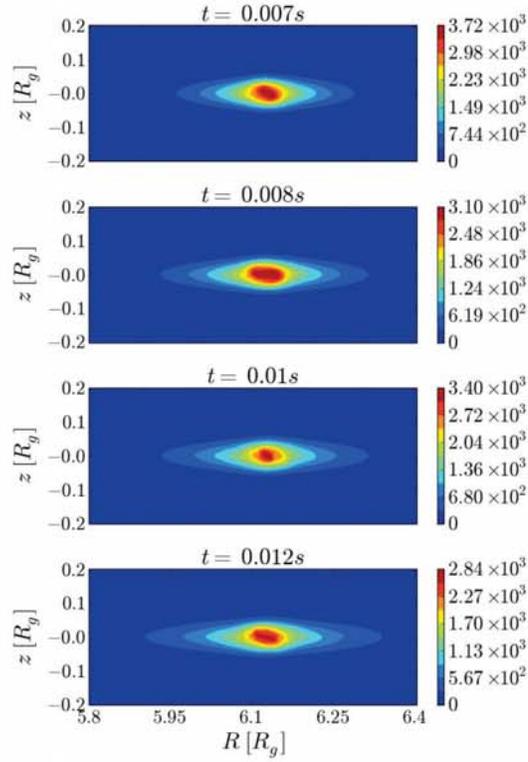


Figura 5-14: Gráfica de densidad superficial máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_4$ . El eje vertical es logarítmico. La curva es monotónicamente decreciente, exceptuando por las variaciones ocasionadas por el ruido numérico.

derado una inestabilidad. Exceptuando esta acumulación de material al inicio de la simulación, no hay alguna otra diferencia importante respecto a la prueba anterior. La curva de  $\Sigma_{max}$  tiene una caída exponencial luego de su única inestabilidad. Aunque la relación entre  $\alpha$  y densidad es la misma que para el caso anterior, los valores posibles de  $\alpha$  para cada partícula se reparten en un rango mayor de valores, lo que permite la presencia de esta inestabilidad.

### Inestabilidades en $\alpha_6$

A pesar de poder alcanzar valores más pequeños de  $\alpha$ , el material se dispersa aun más rapido que en el caso anterior. Se observa un comportamiento de  $\Sigma_{max}$  similar a  $\alpha_5$  en donde se formó la inestabilidad en aquel caso. Sin embargo, no aparece una inestabilidad en los isocontornos o las curvas de  $\Sigma$  cercanas a ese tiempo (figura 5-17). Este resultado es contraintuitivo y difiere de los casos con dependencia de la energía interna, donde las inestabilidades son más notorias al imponer un límite inferior de  $\alpha$  más pequeño.



(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$

(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-15: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_5$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Se observa un incremento de  $\rho$  y  $\Sigma$  entre 0.008 y 0.01s, aunque esta acumulación de material no cumple el primer criterio.

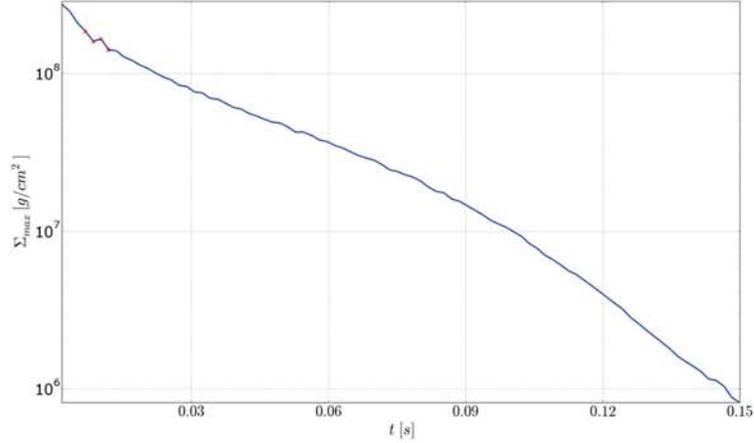


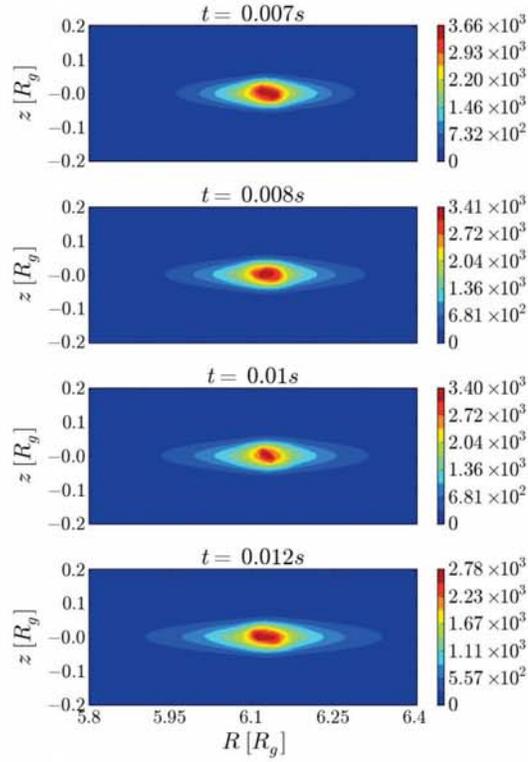
Figura 5-16: Gráfica de densidad superficial máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_5$ . El eje vertical es logarítmico. La curva es monotónicamente decreciente, exceptuando por el pico en  $t = 0.01s$  y las variaciones ocasionadas por el ruido numérico. Las marcas rojas corresponden a los tiempos indicados en la figura 5-15.

#### 5.1.4. Pruebas con dependencia de dos variables

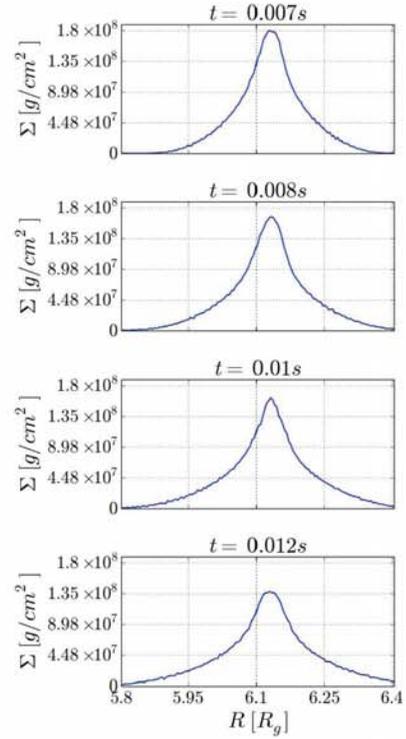
##### Inestabilidades en $\alpha_7$

La dinámica de la simulación con  $\alpha_7$  es similar a la de  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ . La formación de inestabilidades comienza con la separación del anillo original en dos partes, alrededor de 0.035s (figura 5-19a). El anillo mayor, a su vez, empieza a separarse en dos en ese mismo tiempo, aunque esto solo puede observarse inicialmente en la curva de  $\Sigma$  (figura 5-19b). Esto ocurre porque la separación entre la segunda y tercera curva (de izquierda a derecha) es relativamente pequeña. Las tres inestabilidades son de tipo II, ya que la densidad superficial máxima no aumenta durante la formación de éstas (figura 5-21).

Luego de que las dos inestabilidades iniciales más grandes alcanzan su máximo de separación,  $t = 0.076s$ , éstas comienzan su colapso (figura 5-20). La inestabilidad mas pequeña se separa aun más de estas dos hasta alcanza una separación máxima en 0.096s. A diferencia de las simulaciones dependientes solamente de la energía interna, donde el último pico en  $\Sigma$  ocurre en  $R \approx 6.1R_g$ , para este caso los tres anillos de material convergen a  $R \approx 6.3R_g$ . Otra diferencia es que solo hay una inestabilidad final, en vez de una máxima y una menor a su derecha como en  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ . Para  $\alpha_7$ , se forma una sobredensidad que cubre una región más amplia pero creciente



(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$



(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-17: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_6$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Se observa un incremento de  $\rho$  y  $\Sigma$  entre 0.008 y 0.01s, aunque esta acumulación de material no cumple el primer criterio.

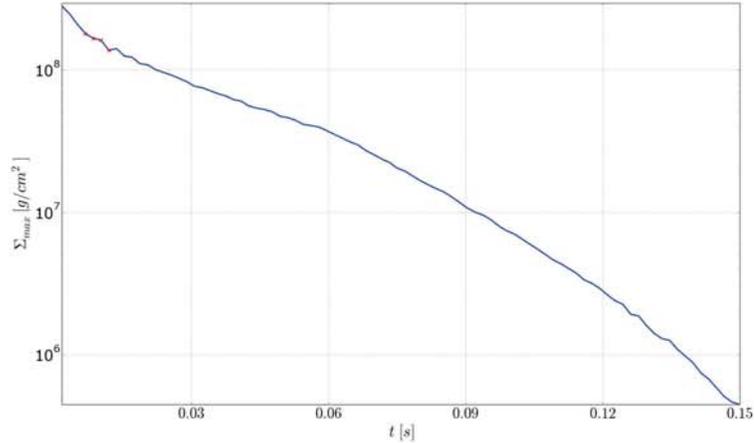


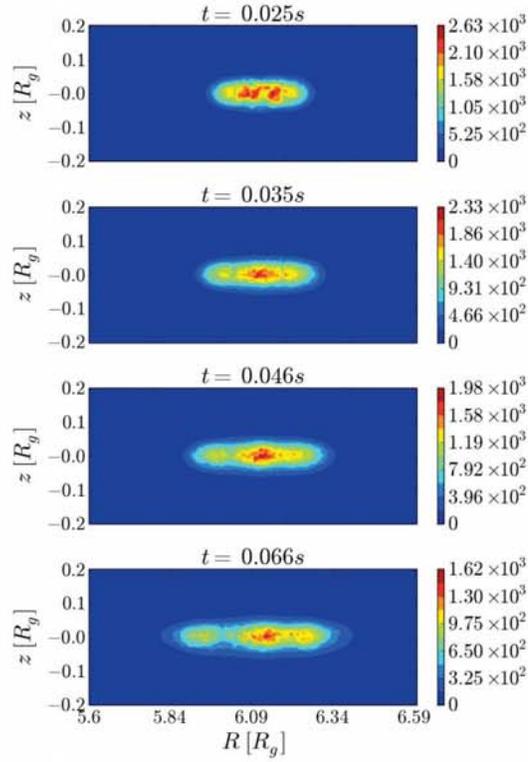
Figura 5-18: Gráfica de densidad superficial máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_6$ . El eje vertical es logarítmico. La curva es monotónicamente decreciente, exceptuando por el pico en  $t = 0.01s$  y las variaciones ocasionadas por el ruido numérico. Las marcas rojas corresponden a los tiempos indicados en la figura 5-17.

hasta llegar al máximo (figura 5-20), luego cae abruptamente a partir de  $t = 0.22s$  (figura 5-21).

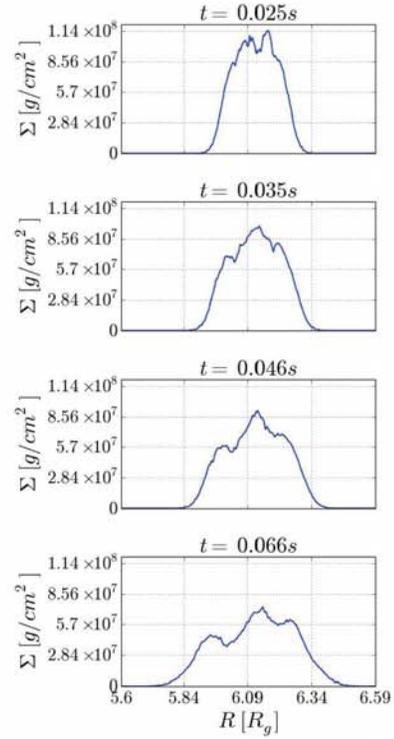
### Inestabilidades en $\alpha_8$

El ruido numérico de las isodensidades y las curvas de densidad superficial hace complicado identificar las inestabilidades. Sin embargo, a partir de  $0.071s$  se distinguen tres inestabilidades de tipo II (figuras 5-24). La inestabilidad central tiene un tiempo de vida considerablemente menor en comparación a la de sus vecinas para los mismos tiempos. Ésta termina siendo asimilada por su vecina del extremo derecho (figura 5-22). La formación de las tres inestabilidades tampoco es simultánea. Las inestabilidades de los extremos para  $t = 0.096s$  aún no llegan al pico de su formación y la inestabilidad central que aparece en los primeros tres tiempos ha desaparecido, transfiriendo su material a la vecina más cercana.

Luego de alcanzar el máximo de separación entre estas inestabilidades, se mantienen de esta forma por un tiempo comparable al de su formación (figura 5-23). Esta simulación posee un contraste mayor que el de las pruebas anteriores en la separación de los anillos. Asimismo, la convergencia de las inestabilidades no es completa, ya que la curva de densidad superficial no tiene un máximo definido, sino que éste se extiende desde  $5.9$  a  $6.3R_g$ . La última inestabilidad formada es de tipo II (figura 5-24). La curva de densidad superficial máxima para  $\alpha_8$  no tiene

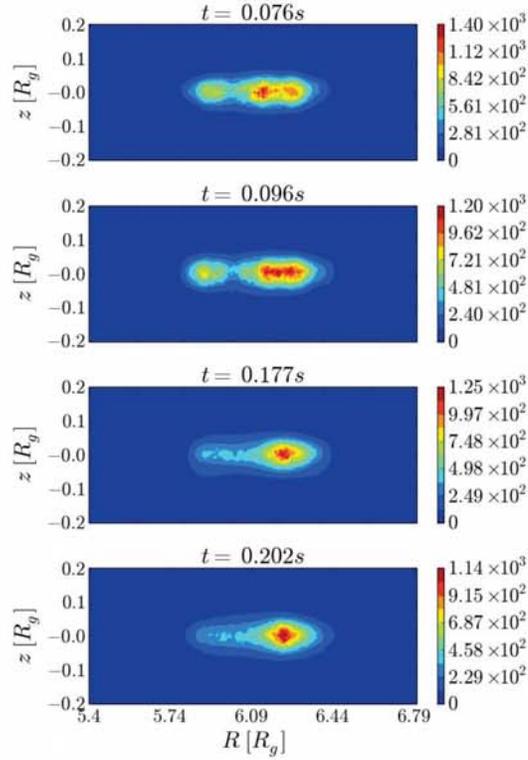


(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$

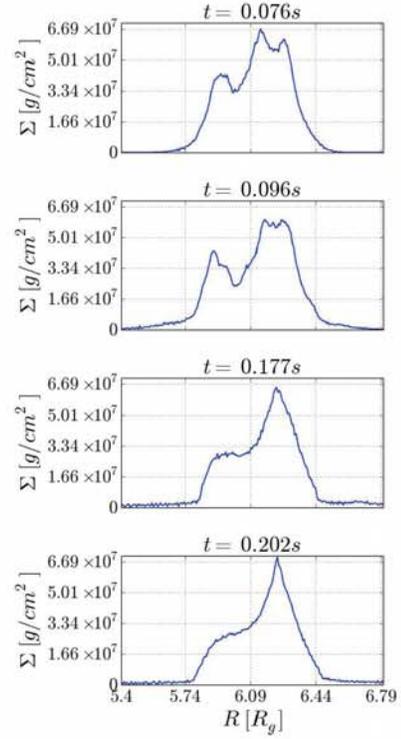


(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-19: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_7$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Las tres inestabilidades son de tipo II, ya que la densidad superficial máxima no aumenta durante la formación de éstas.



(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$



(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-20: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_7$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). La ultima inestabilidad es de tipo III.

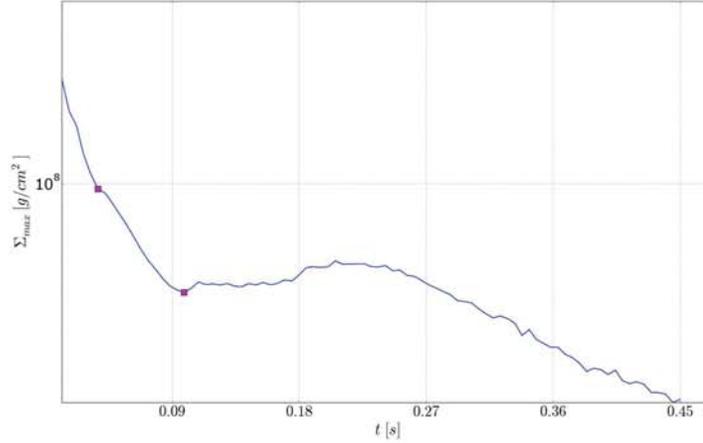


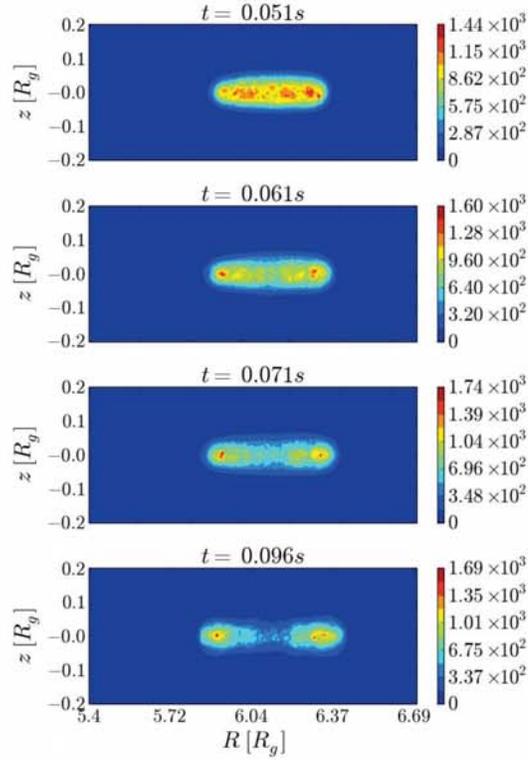
Figura 5-21: Gráfica de densidad superficial máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_7$ . El eje vertical es logarítmico. La curva presenta un cambio en la caída (primer cuadro magenta) donde las primeras tres inestabilidades comienzan a formarse. El mínimo local de la curva (segundo cuadro magenta) coincide con el momento cuando las tres alcanzan su separación máxima.

mínimos locales. Sin embargo, el comportamiento de la curva puede separarse en cuatro partes. La primera es la caída exponencial típica de  $\alpha$  constante que termina alrededor de 0.051s. La segunda parte corresponde al intervalo de la formación y colapso de las inestabilidades iniciales. En la tercera y cuarta se forma y se dispersa la última inestabilidad, respectivamente.

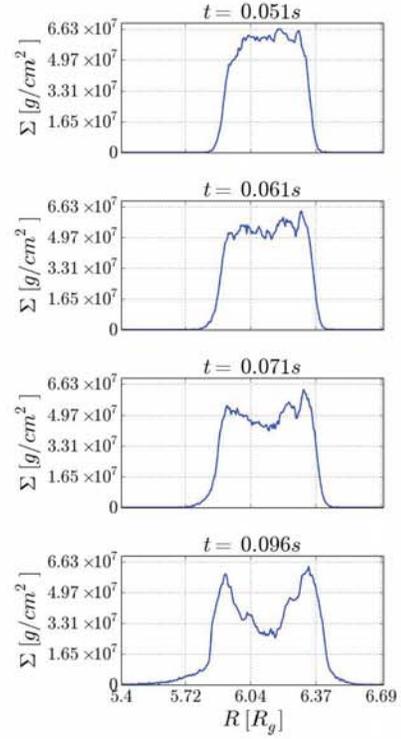
### Inestabilidades en $\alpha_9$

El tiempo de vida de las inestabilidades en el disco con  $\alpha_9$  es menor a la del caso anterior, aproximadamente la mitad. Sin embargo, la separación entre los anillos es similar en cada caso (figura 5-25). Como en el disco con  $\alpha_8$  las inestabilidades se forman luego de un intervalo en que la curva de  $\Sigma$  tiene una variabilidad muy grande en su pico. En el tercer tiempo se identifican tres estructuras dentro del disco que corresponden a las inestabilidades iniciales. Mientras que las inestabilidades de los extremos para  $t = 0.096s$  aun no llegan al pico de su formación, la inestabilidad central que apareció en los primeros tres tiempos ha desaparecido, transfiriendo su material a la vecina más cercana.

El colapso de las inestabilidades iniciales comienza en  $t = 0.157s$  (figura 5-26). Como en el caso anterior, la separación de los anillos está bien definida en la curva de densidad superficial, y conforme se mueven a  $R = 6.1R_g$  el máximo local de cada inestabilidad disminuye. Todas

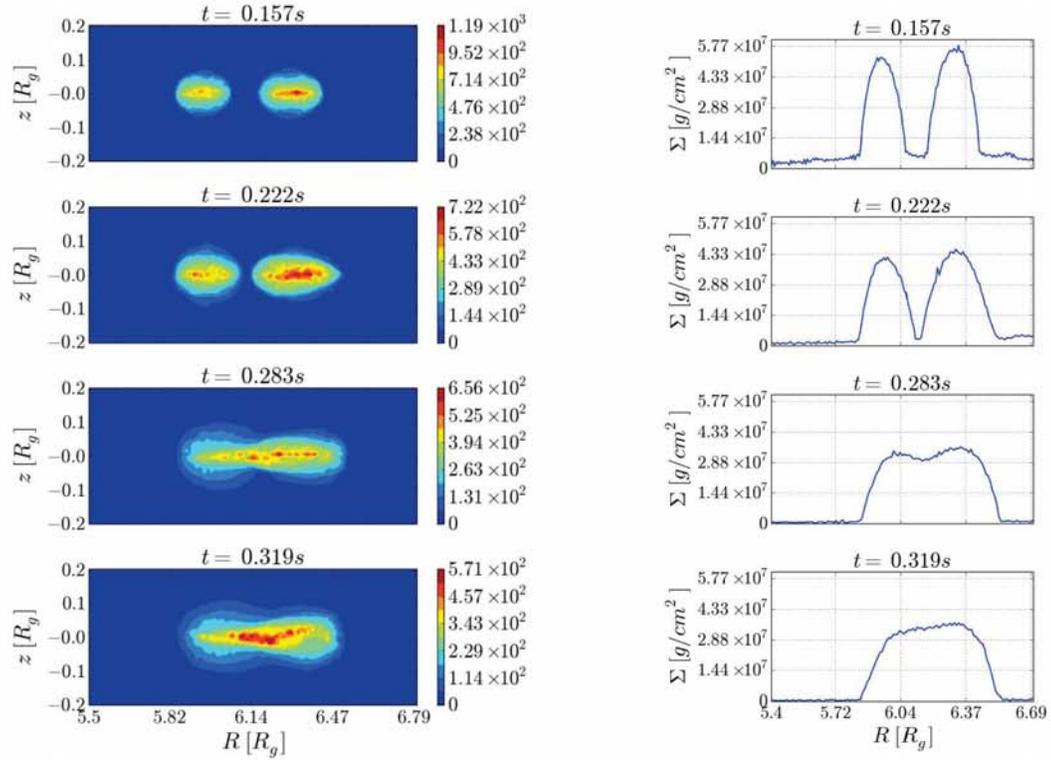


(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$



(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-22: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_8$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Las tres inestabilidades son de tipo II.



(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$

(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-23: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_8$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Las dos inestabilidades, y la inestabilidad final, son de tipo II.

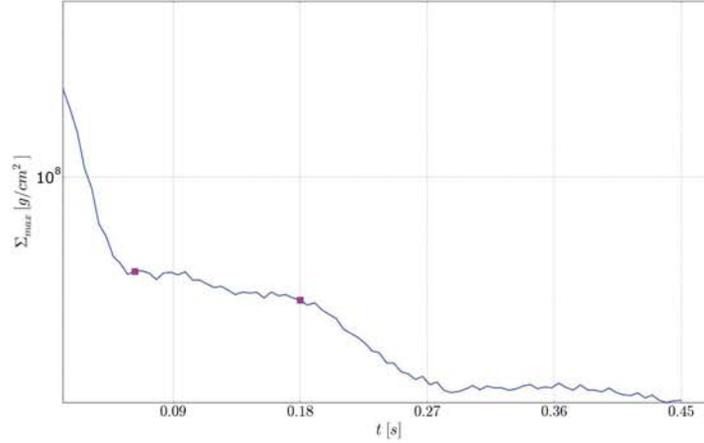
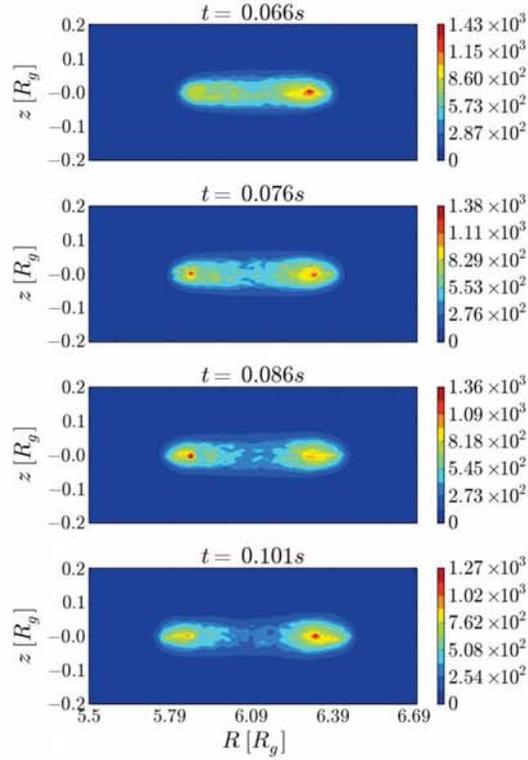


Figura 5-24: Gráfica de densidad superficial máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_8$ . El eje vertical es logarítmico. La curva presenta un punto de inflexión (primer cuadro magenta) donde las primeras tres inestabilidades comienzan a formarse. El mínimo local de la curva (segundo cuadro magenta) coincide con el momento cuando las tres alcanzan su separación máxima.

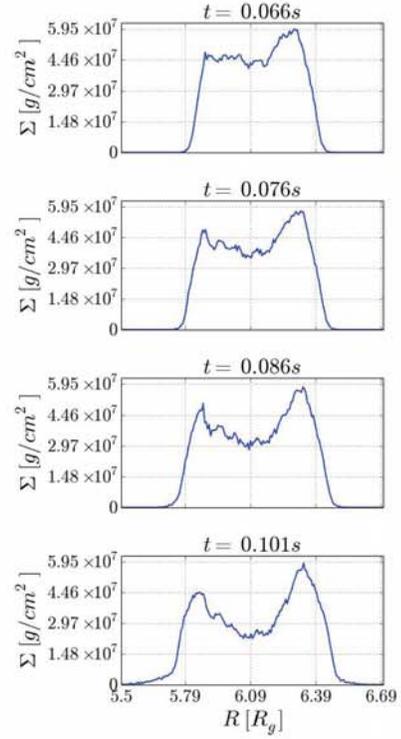
las inestabilidades de esta simulación son de tipo II, ya que la curva de densidad máxima es monótonamente decreciente (figura 5-27). Comparando las formas funcionales de la figura 4-11, y recordando el comportamiento de las formas funcionales que solo dependen de la densidad, puede entenderse como es que exista una gran similitud entre  $\alpha_8$  y  $\alpha_9$ . Como la mayoría de las partículas tienen  $\rho_b \ll \rho_{max}$ , el dominio de  $\alpha_{min}(\rho)$  para ambas formas funcionales, la eficiencia de transporte de momento angular para cada partícula difiere solo para las que tienen densidades comparables a  $\rho_{max}$ .

### Inestabilidades en $\alpha_{10}$

La forma funcional de  $\alpha_{10}$  es un más parecida a  $\alpha_9$  que ésta última a  $\alpha_8$ , ya que ambas tienen los mismos límites máximos y mínimos para  $\alpha$  (figura 4-11). Sin embargo, para partículas con densidad  $\rho_b = 0.25\rho_{max}$  la diferencia entre valores de  $\alpha$  para los discos con  $\alpha_9$  y  $\alpha_{10}$  es máxima y, dado que cerca del 70 % de partículas con  $\alpha = \alpha_{min}$  tiene ese valor de densidad, las dos simulaciones no son completamente idénticas. En general,  $\alpha_{10}$  tiene valores asociados de  $\alpha$  mayores que los que puede asignar  $\alpha_9$  a las partículas del código. Esto explica que la densidad máxima del disco en un tiempo dado sea menor a la correspondiente de la simulación anterior para el mismo instante. Las figuras 5-25a y 5-28a tienen una estructura similar, pero en el caso

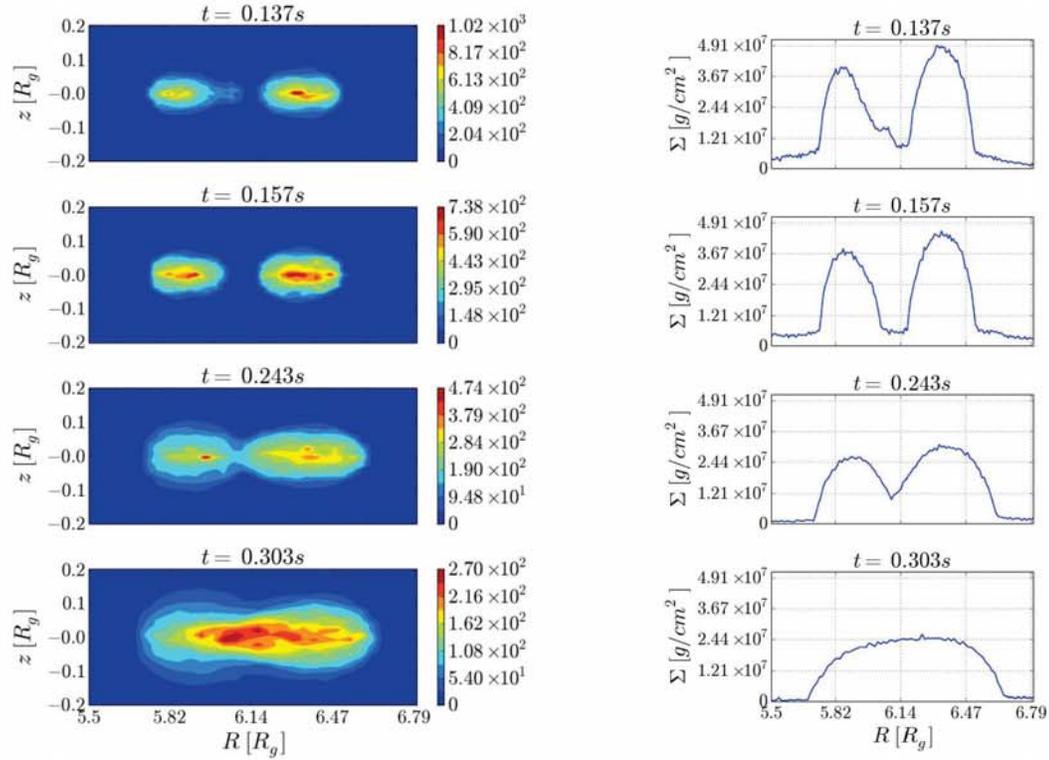


(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$



(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-25: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_9$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Las dos inestabilidades son de tipo II.



(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$

(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-26: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_9$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Las dos inestabilidades, y la inestabilidad final, son de tipo II.

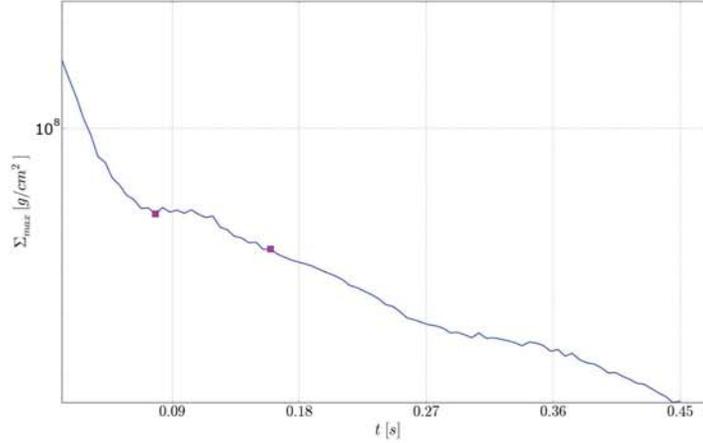
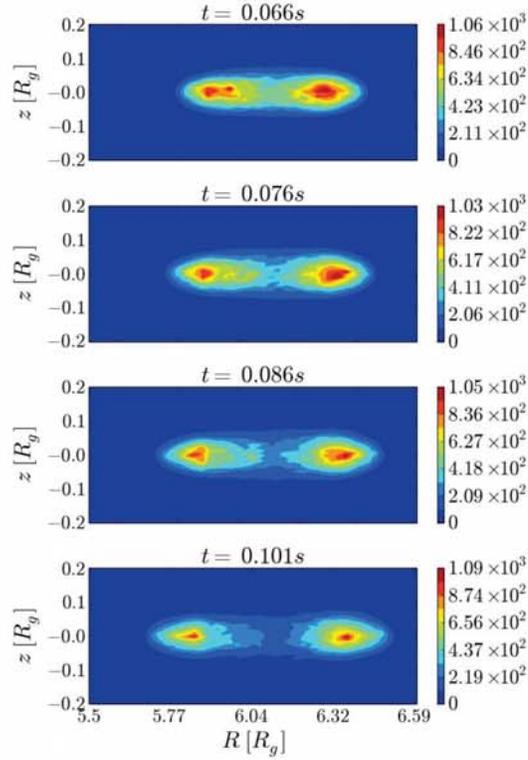


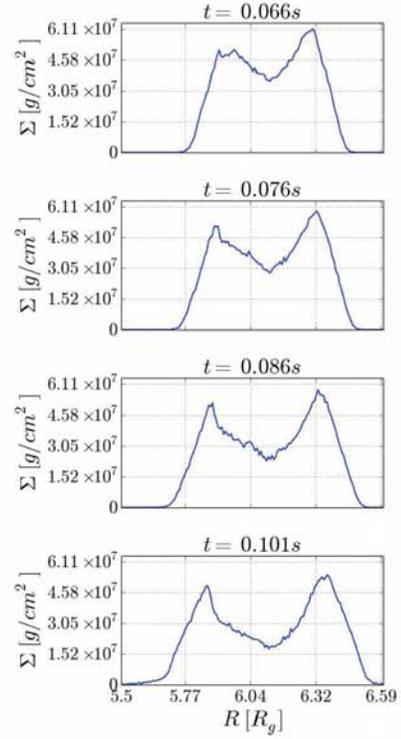
Figura 5-27: Gráfica de densidad superficial máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_9$ . El eje vertical es logarítmico. La curva presenta un punto de inflexión (primer cuadro magenta) donde las primeras tres inestabilidades comienzan a formarse. El mínimo local de la curva (segundo cuadro magenta) coincide con el momento cuando las tres alcanzan su separación máxima.

de la segunda, la densidad máxima interpolada en los isocontornos es menor. Además, para  $\alpha_{10}$  el material del disco es acretao más rápido (figuras 5-59 y 5-62) y la curva de densidad superficial máxima tiene un decaimiento más abrupto (figura 5-30). Cabe mencionar que las primeras inestabilidades formadas en el disco con  $\alpha_{10}$  son de tipo II.

Como en las dos simulaciones anteriores, donde la forma funcional de  $\alpha_{min}(\rho)$  es creciente al menos para  $\rho_b < 0.5\rho_{max}$ , la separación de las inestabilidades iniciales está bien definida. Asimismo, conforme las inestabilidades evolucionan el máximo local de cada una va disminuyendo, culminando en el colapso de ambas, lo que forma a la tercera inestabilidad (figura 5-29). A diferencia de  $\alpha_9$ , hay un pico en  $\Sigma$  para la última inestabilidad, alrededor de  $6.4R_g$ , aunque este no es tan pronunciado en comparación a simulaciones anteriores. Finalmente, la curva de  $\Sigma_{max}$  mostrada en la figura 5-30 indica que no existen máximos locales de la misma, por lo que no hay inestabilidades de tipo III.

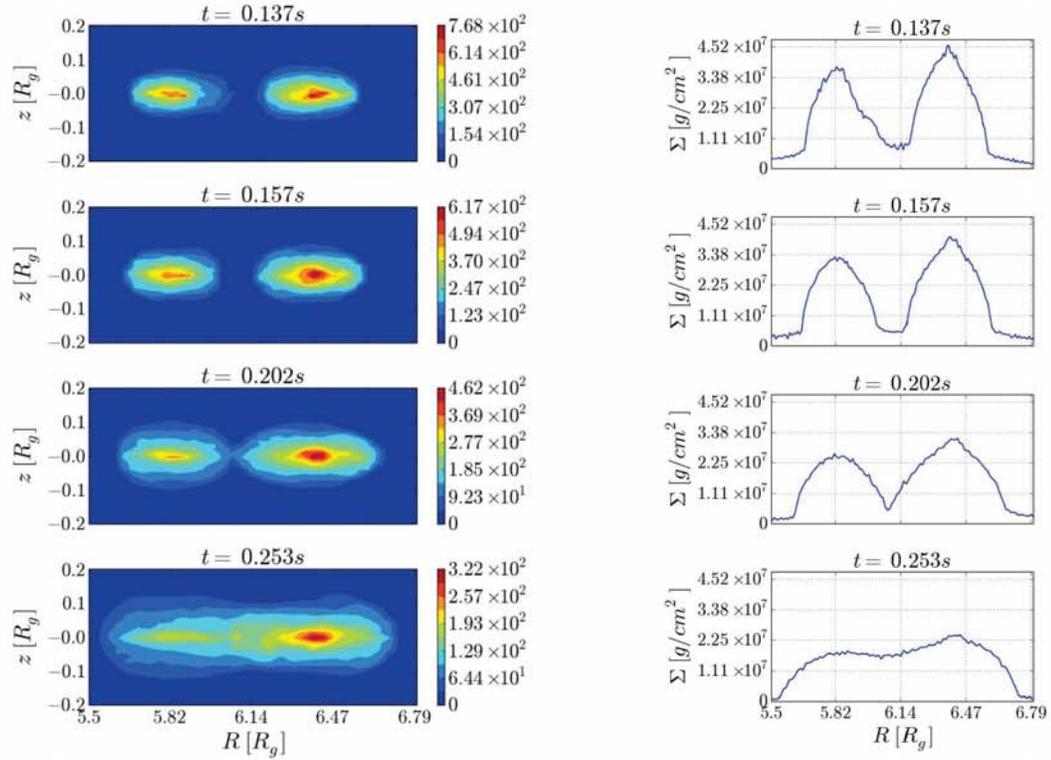


(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$



(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-28: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_{10}$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Las dos inestabilidades son de tipo II.



(a) Isodensidades del disco en el plano  $R - z$

(b) Curva de  $\Sigma$

Figura 5-29: Evolución de  $\rho$  y  $\Sigma$  en el disco con  $\alpha_{10}$ . En las gráficas de la izquierda se observan los isocontornos de  $\rho$  del disco en  $R - z$ . Las coordenadas espaciales tienen unidades del radio gravitacional del agujero negro central. Las gráficas de la derecha indican la forma de  $\Sigma$  a lo largo del disco (coordenada radial). Las dos inestabilidades, y la inestabilidad final, son de tipo II.

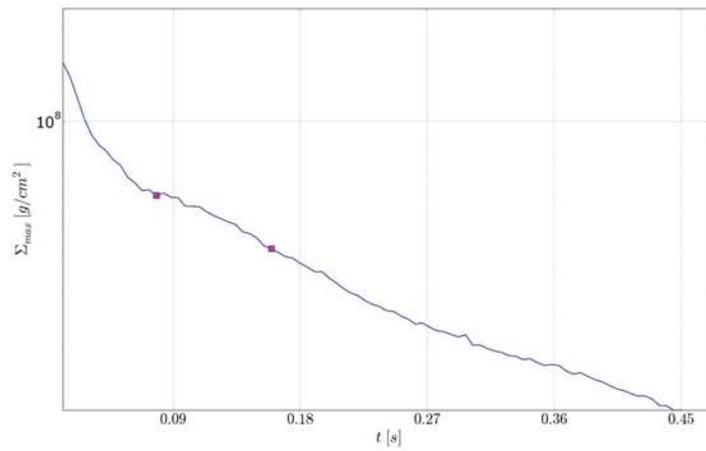


Figura 5-30: Gráfica de densidad superficial máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_{10}$ . El eje vertical es logarítmico. La curva presenta un punto de inflexión (primer cuadro magenta) donde las primeras tres inestabilidades comienzan a formarse. El mínimo local de la curva (segundo cuadro magenta) coincide con el momento cuando las tres alcanzan su separación máxima.

## 5.2. Densidad máxima

### 5.2.1. Pruebas con dependencia de la energía interna

La caída de densidad de material (volumétrica) máxima permite saber cual es el tiempo de vida del disco. En esta se compara la curva de  $\rho_{max}$  de cada simulación, con las curvas correspondientes a discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ . La densidad máxima en cada tiempo corresponde a la densidad de la partícula de menor tamaño. Como la masa por partícula  $m_b$  es constante, entonces  $\rho_{max}$  es el valor de la densidad de la partícula con el menor valor de  $h_b$  para cada tiempo de la simulación.

#### Densidad máxima con $\alpha_1$

En la simulación con  $\alpha_1$ , la curva de  $\rho_{max}$  se aproxima a la curva de  $\alpha = 0.01$ . Sin embargo la primera nunca es mayor a la segunda. Esto concuerda con la forma funcional de  $\alpha_1$ , donde las partículas tienen valores de  $\alpha$  entre 0.01 y 0.001. Utilizando la figura 5-31 como referencia, se observa que el tiempo de vida de este disco es comparable, pero menor a uno con  $\alpha = 0.01$ .

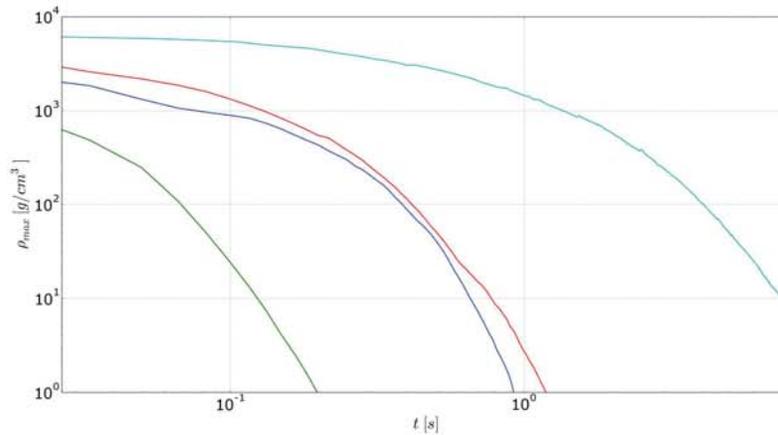


Figura 5-31: Gráfica de densidad máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_1$ . Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde, roja y cian corresponden a las curvas de  $\rho_{max}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ , respectivamente. La línea azul es la curva de  $\rho_{max}$  de  $\alpha_1$ .

### Densidad máxima con $\alpha_2$

Para el caso con  $\alpha_2$ , la curva de  $\rho_{max}$  se localiza en la región entre las curvas de  $\alpha = 0.01$  y  $\alpha = 0.001$ . Al inicio de la simulación, los valores de la densidad máxima se aproximan a los que corresponden a un disco con  $\alpha = 0.01$ . Posteriormente, el disco forma las primeras inestabilidades y  $\rho_{max}$  aumenta hasta llegar al doble de los valores de  $\alpha = 0.01$ . Cuando se forma la última inestabilidad, la curva experimenta otro aumento de sus valores, alcanzando un 80 % de la densidad máxima de un disco con  $\alpha = 0.001$  durante el pico de dicha inestabilidad. En la última fase del disco, alrededor de  $t = 2.5s$ , la caída de la densidad se vuelve exponencial (figura 5-32).

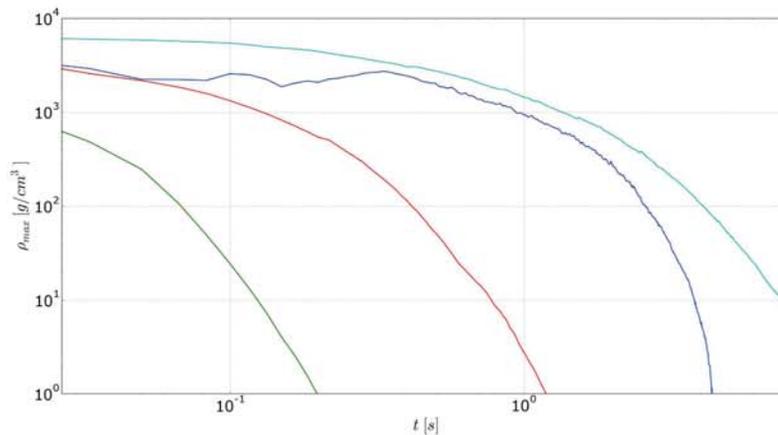


Figura 5-32: Gráfica de densidad máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_2$ . Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde, roja y cian corresponden a las curvas de  $\rho_{max}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ , respectivamente. La línea azul es la curva de  $\rho_{max}$  de  $\alpha_2$ .

### Densidad máxima con $\alpha_3$

El comportamiento de la curva de  $\rho_{max}$  para la simulación con  $\alpha_3$  es similar al caso anterior. Aunque el limite inferior para la forma funcional de  $\alpha_3$  es 0.0002, la curva de  $\rho_{max}$  nunca es mayor a la del disco con  $\alpha = 0.001$ . Sin embargo, los valores de  $\rho_{max}$  se aproximan a los del disco con  $\alpha = 0.001$  en un 99 %. Se presenta una caída exponencial en el mismo tiempo que para la simulación anterior (2.5s).

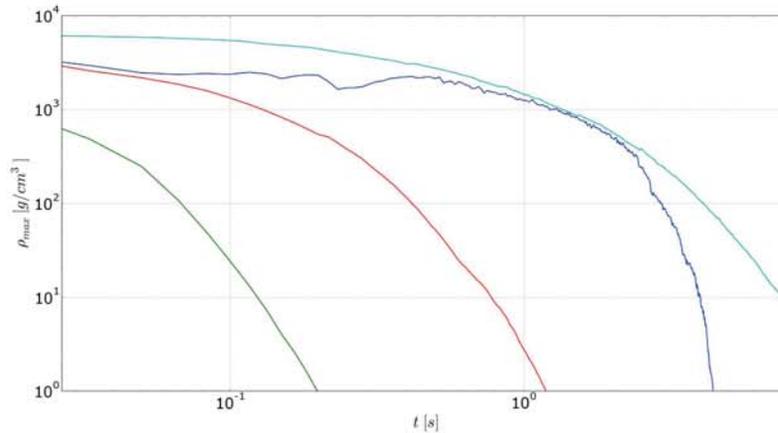


Figura 5-33: Gráfica de densidad máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_3$ . Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde, roja y cian corresponden a las curvas de  $\rho_{max}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ , respectivamente. La línea azul es la curva de  $\rho_{max}$  de  $\alpha_3$ .

### 5.2.2. Pruebas con dependencia de la densidad

Debido a la distribución de la densidad de las partículas en el disco, la curva de  $\rho_{max}$  tiene una caída exponencial para las simulaciones con  $\alpha(\rho)$ . Ignorando variaciones por ruido numérico, la curva para los tres casos es idéntica (figuras 5-34, 5-35 y 5-36). Los valores de  $\rho_{max}$  se sitúan entre los que corresponden a los discos con  $\alpha = 0.06$  y  $\alpha = 0.01$ . Debido a la abrupta caída de la densidad máxima, en  $t = 0.13s$  los valores se vuelven menores a los del disco con  $\alpha = 0.06$ . Estos son los únicos casos donde el disco se dispersa a un ritmo superior en comparación al disco de control con el menor tiempo de vida. Asimismo, la falta de variabilidad en las curvas indica que el cambio en el límite inferior para las formas funcionales no afecta la dispersión del disco.

### 5.2.3. Pruebas con dependencia de dos variables

#### Densidad máxima con $\alpha_7$

La curva correspondiente a  $\alpha_7$  se aproxima a la del disco con  $\alpha = 0.01$  con una diferencia menor al 7% durante los primeros 0.096s de la simulación, tiempo en el que se forma la última inestabilidad. Como dicha acumulación de material se aumenta el valor de la densidad máxima, la caída de la curva de la figura 5-37 se detiene y la densidad máxima aumenta. A partir de

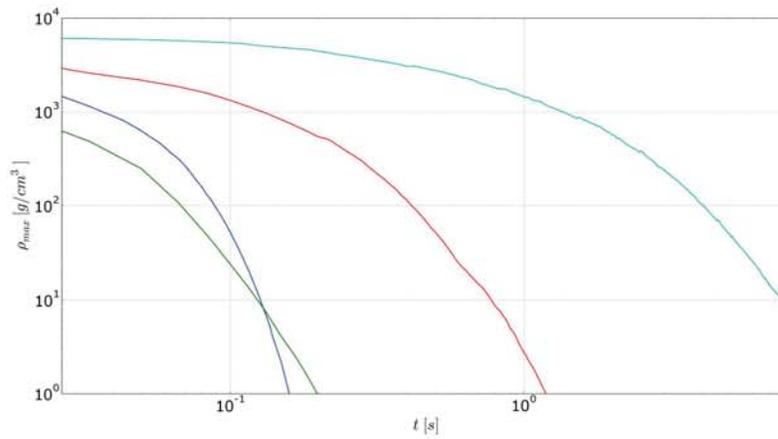


Figura 5-34: Gráfica de densidad máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_4$ . Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde, roja y cian corresponden a las curvas de  $\rho_{max}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ , respectivamente. La línea azul es la curva de  $\rho_{max}$  de  $\alpha_4$ .

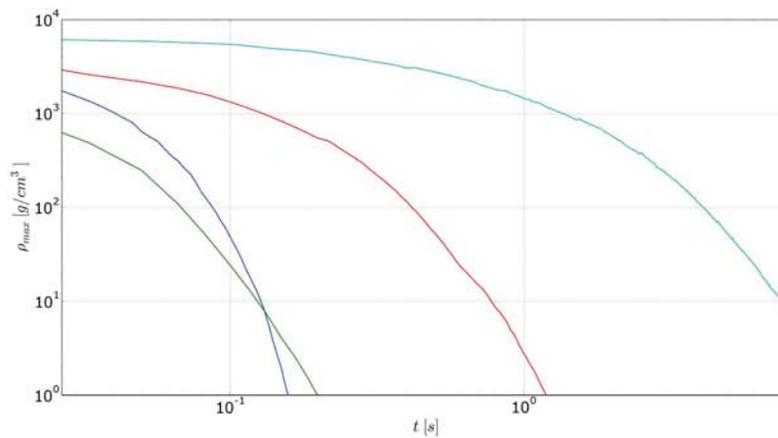


Figura 5-35: Gráfica de densidad máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_5$ . Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde, roja y cian corresponden a las curvas de  $\rho_{max}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ , respectivamente. La línea azul es la curva de  $\rho_{max}$  de  $\alpha_5$ .

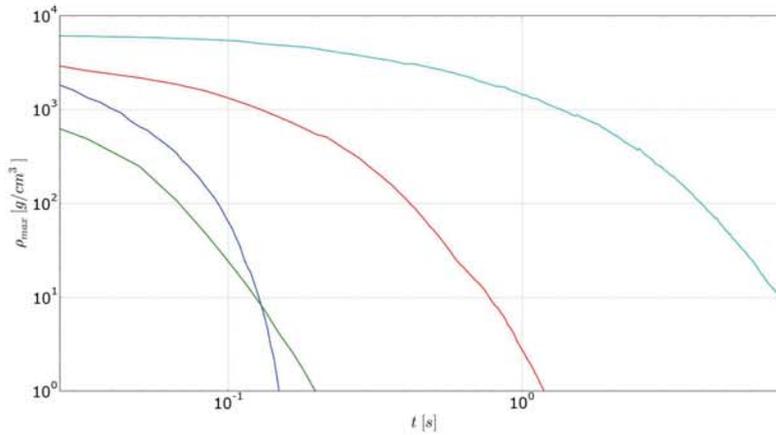


Figura 5-36: Gráfica de densidad máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_6$ . Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde, roja y cian corresponden a las curvas de  $\rho_{max}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ , respectivamente. La línea azul es la curva de  $\rho_{max}$  de  $\alpha_6$ .

0.24s, la densidad máxima presenta una caída exponencial abrupta. Esta caída corresponde a la dispersión de la última estabilidad y tiene una escala de tiempo comparable a la de un disco con  $\alpha = 0.01$  (figura 5-37).

### Densidad máxima con $\alpha_8$

En la primera etapa del disco con  $\alpha_8$ , cuando los valores de  $\rho_{max}$  son menores que los del disco con  $\alpha = 0.01$ , no se han formado las inestabilidades. Cuando la densidad máxima de  $\alpha_8$  se incrementa, comienzan a definirse los anillos de densidad superficial que se observan en la figura 5-21 (segunda etapa del disco). La tercera etapa del disco va desde 0.25s a 1.28s y se caracteriza por que la densidad máxima se mantiene razonablemente estable, consecuencia de la formación de la última inestabilidad. En la última etapa se da la característica caída exponencial (figura 5-38).

### Densidad máxima con $\alpha_9$

La primera etapa del disco con  $\alpha_9$  tiene valores de  $\rho_{max}$  cercanos a la curva de  $\alpha = 0.001$  y una dispersión similar a la del disco con  $\alpha = 0.01$ . El mínimo local en 0.06s coincide con el inicio de la formación de las primeras inestabilidades. A partir de allí,  $\rho_{max}$  se incrementa

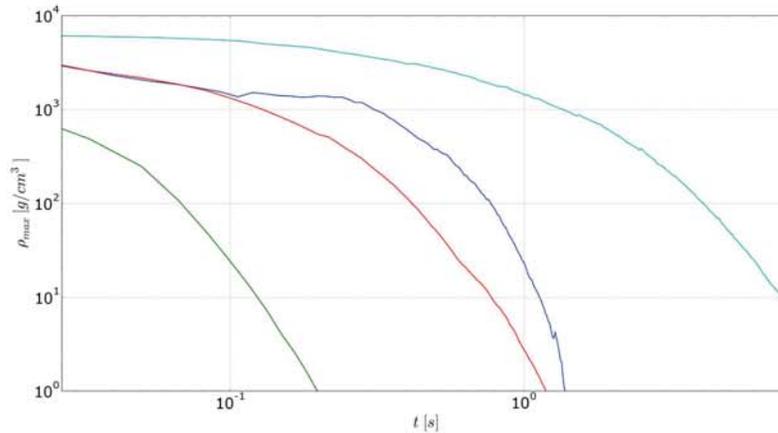


Figura 5-37: Gráfica de densidad máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_7$ . Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde, roja y cian corresponden a las curvas de  $\rho_{max}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ , respectivamente. La línea azul es la curva de  $\rho_{max}$  de  $\alpha_7$ .

hasta alcanzar un valor de 95 % relativo al de la curva de  $\alpha = 0.001$ . La segunda etapa inicia en 0.09s y se caracteriza por mantener una diferencia relativa máxima de 14 % respecto a curva de  $\alpha = 0.001$ . Esta etapa termina en 1.27s y coincide con el inicio de la formación de la última inestabilidad hasta el momento en que el ésta comienza a perder la forma de meseta que la caracteriza (figura 5-26b). Antes de que comience a decaer exponencialmente, se presentan una serie de picos en la densidad máxima (figura 5-39).

### Densidad máxima con $\alpha_{10}$

En general, el comportamiento de la curva de  $\rho_{max}$  para  $\alpha_{10}$  es el más similar a la curva de densidad máxima que corresponde a  $\alpha = 0.01$ . El mínimo local en 0.06s coincide con el inicio de la formación de las primeras inestabilidades. En este caso no parece haber alguna otra relación entre las inestabilidades del disco y el comportamiento de la curva en la figura 5-40. Cabe recordar que aunque la forma funcional de  $\alpha_9$  y  $\alpha_{10}$  son cualitativamente similares (figura 4-11) las curvas de densidad máxima, son completamente diferentes entre sí. Mientras que la curva de la densidad máxima del disco con  $\alpha_9$  se mantiene cerca de la curva asociada a  $\alpha = 0.001$ , la de  $\alpha_{10}$  se mantiene alrededor de la curva correspondiente a  $\alpha = 0.01$ .

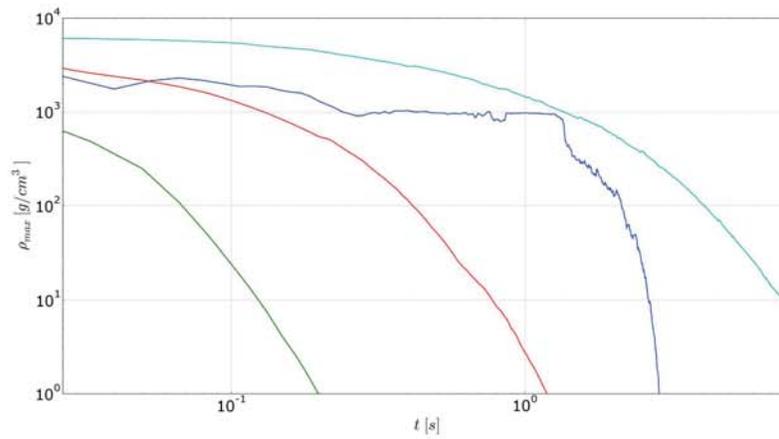


Figura 5-38: Gráfica de densidad máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_8$ . Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde, roja y cian corresponden a las curvas de  $\rho_{max}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ , respectivamente. La línea azul es la curva de  $\rho_{max}$  de  $\alpha_8$ .

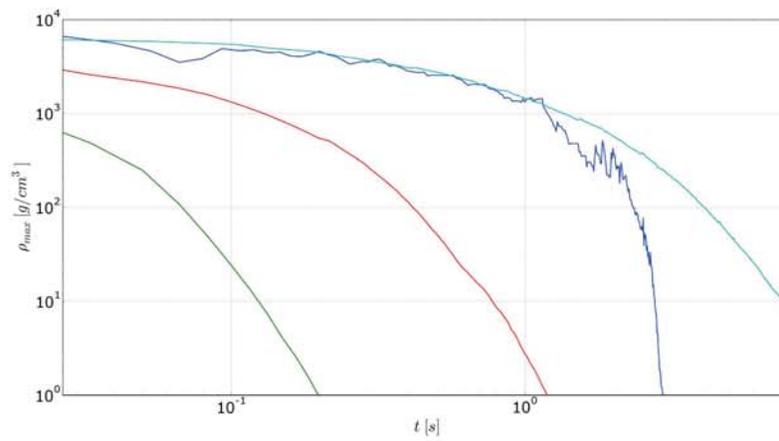


Figura 5-39: Gráfica de densidad máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_9$ . Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde, roja y cian corresponden a las curvas de  $\rho_{max}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ , respectivamente. La línea azul es la curva de  $\rho_{max}$  de  $\alpha_9$ .

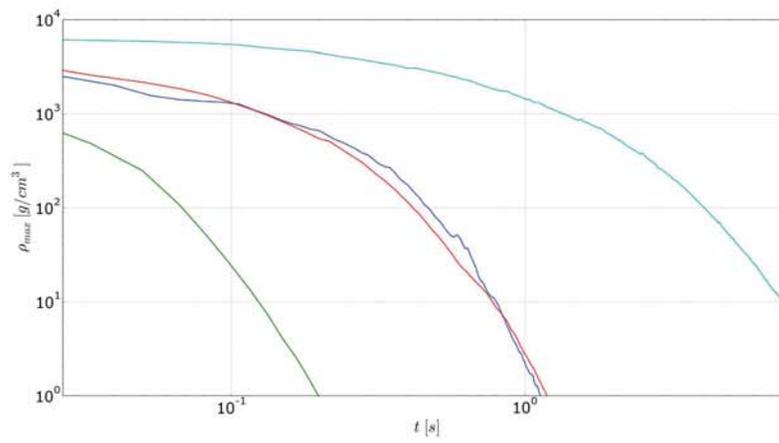


Figura 5-40: Gráfica de densidad máxima en el tiempo para la prueba de  $\alpha_{10}$ . Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde, roja y cian corresponden a las curvas de  $\rho_{max}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ , respectivamente. La línea azul es la curva de  $\rho_{max}$  de  $\alpha_{10}$ .

### 5.3. Acreción

En esta sección se muestra la tasa de acreción para cada simulación. Para hacer el cálculo se implementaron los dos métodos descritos en la sección 4.2.2. Para el primer método se utilizaron un límite de 25 partículas acretadas por binning. Para el segundo método se implementaron cuatro binnings (intervalos de tiempo):  $\Delta t = 0.002, 0.004, 0.006$  y  $0.008$ s. El número típico de partículas en cada bin es de  $9 - 11, 18 - 20, 26 - 27$  y  $27$ , respectivamente. Estos valores no cambian mucho entre las simulaciones, aún si las curvas de  $\dot{M}$  varían considerablemente.

Se muestran tres figuras por simulación. La primera muestra las tasas de acreción calculadas con el primer método. Como referencia se muestran las tasas de acreción de los discos con  $\alpha$  constante. En la segunda figura se compara la acreción calculada por el segundo método con el primero. La tercera figura indica las frecuencias dominantes encontradas en la señal. Este tercer grupo de gráfica permite determinar si el disco que se está modelando tiene un comportamiento cuasiperiódico, lo que implicaría que podría existir una componente hidrodinámica que ocasione la periodicidad de estos sistemas.

#### 5.3.1. Pruebas con dependencia de la energía interna

##### Acreción de disco con $\alpha_1$

El disco con  $\alpha_1$  comienza a ser acretado en  $t = 0.136$ s. Desde que comienza hasta  $1.33$ s, la tasa de acreción se mantiene en  $10^{20}$ g/s. El pico de la acreción se da alrededor de  $0.5$ s y la intensidad coincide con el máximo del disco con  $\alpha = 0.01$  (figura 5-41).

Para esta simulación el cálculo con ambos métodos no difiere mucho durante los primeros  $1.2$ s. Sin embargo, el primer método tiene una mayor cantidad de ruido numérico. A partir de ese momento, la tasa de acreción decrece hasta  $10^{20}$ g/s y la cantidad de ruido del segundo método domina a la señal. Como consecuencia del aumento del binning, el ruido también se incrementa. Por otro lado, el momento en que se incrementa el ruido se recorre a la derecha conforme se aumenta el binning (figura 5-42).

Al hacer un análisis de la señal de cada binning del segundo método mediante un periodograma (figura 5-43), se obtienen las frecuencias  $3.2, 6, 9.4$  y  $11.6$ Hz para los binnings  $\Delta t = 0.002$  y  $0.004$ s. Para  $\Delta t = 0.006$ s los valores son  $3.19, 5.99, 9.39$  y  $11.59$ Hz.

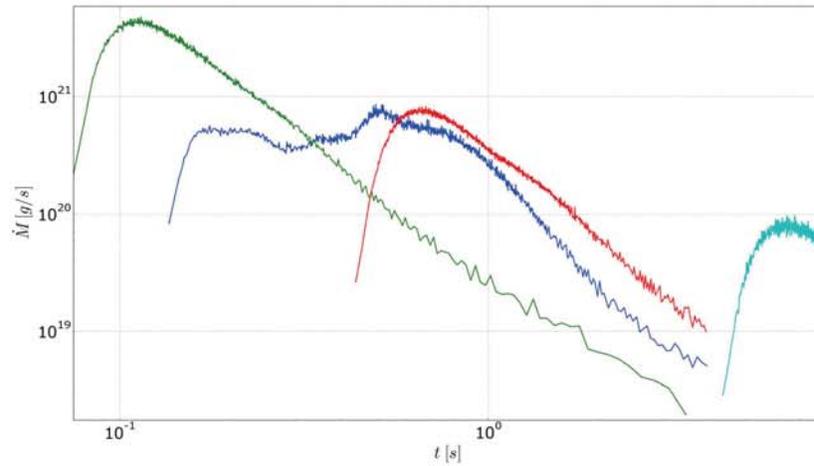


Figura 5-41: Gráfica de la tasa de acreción del disco con  $\alpha_1$  utilizando el primer método. Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde, roja y cian corresponden a las curvas de  $\dot{M}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ , respectivamente. Éstos comienzan a acretar 0.074, 0.43 y 4.33s. La línea azul es la curva de  $\dot{M}$  de  $\alpha_1$ .

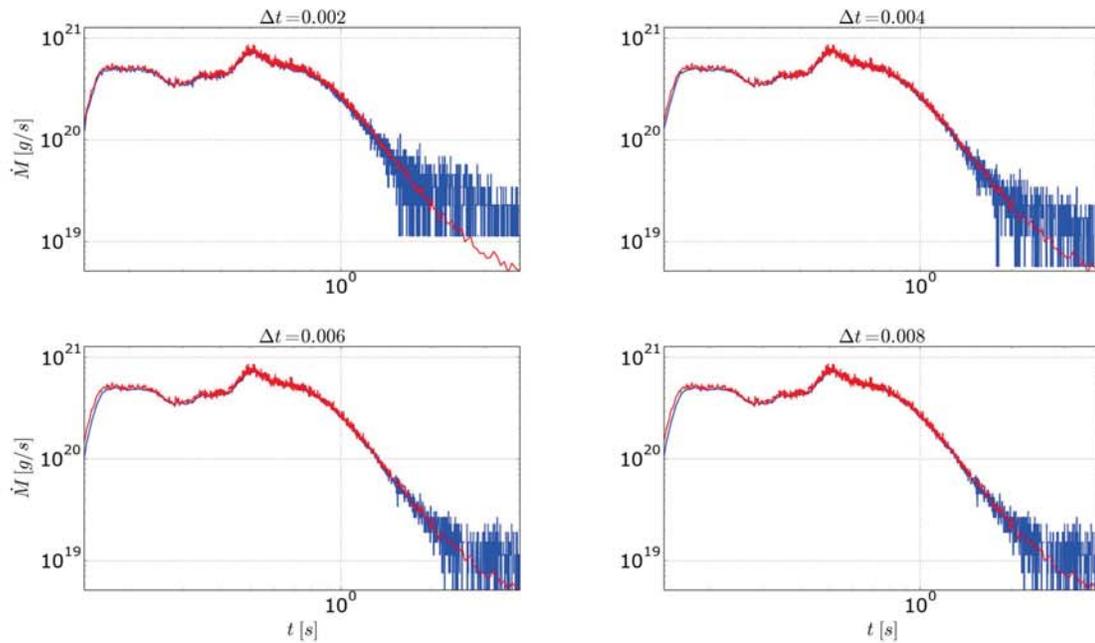


Figura 5-42: Comparación entre los dos métodos del cálculo de acreción para el disco con  $\alpha_1$ . Cada gráfica tiene ambos métodos, variando el binning del segundo. La línea roja es la curva de  $\dot{M}$  calculada con el primer método, mientras que cada gráfica contiene una curva azul que representa el cálculo mediante el segundo método.

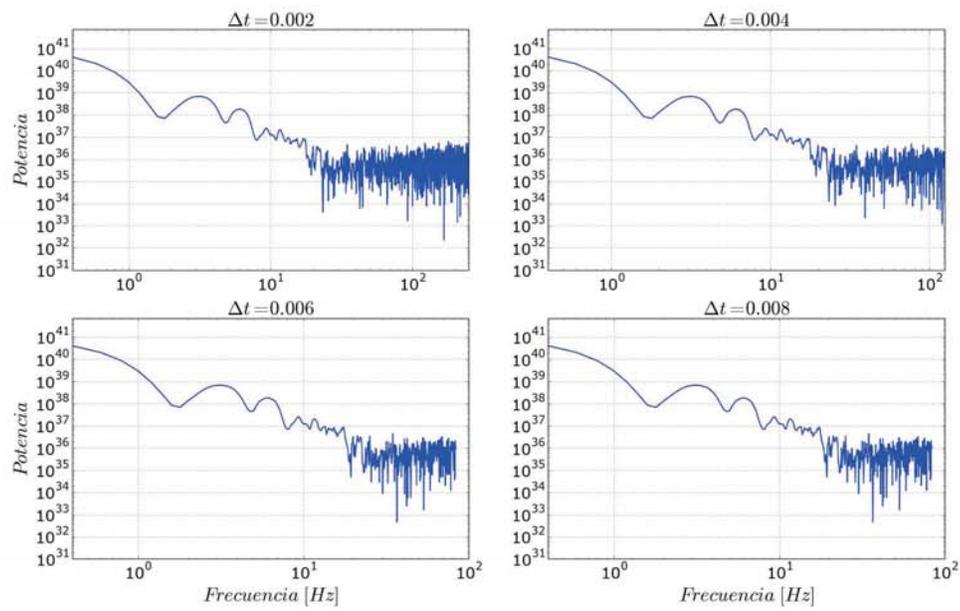


Figura 5-43: Periodogramas de la tasa de acreción del segundo método para el disco con  $\alpha_1$ . Cada gráfica tiene el análisis de la curva de cada binning.

## Acreción de disco con $\alpha_2$

El disco con  $\alpha_2$  comienza a ser acretado en  $t = 0.14$ s. Aumenta de forma exponencial hasta llegar al máximo en 0.19s y a partir de ese momento empieza a decrecer con amortiguamiento. Al llegar a 4.65s, la tasa de acreción cae abruptamente (5-44).

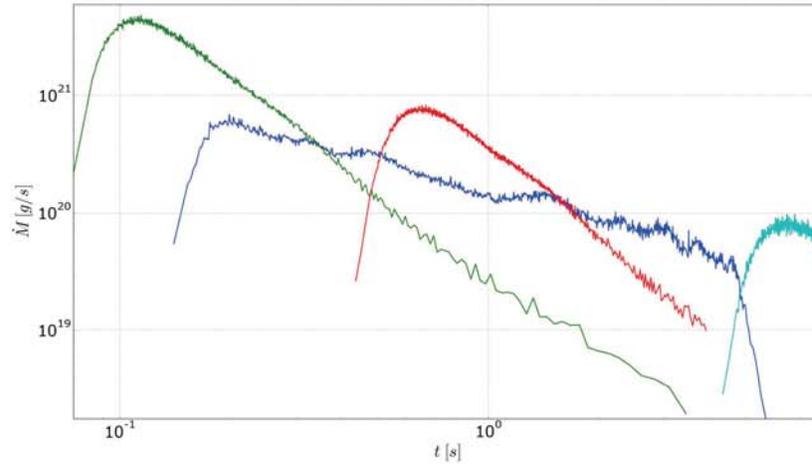


Figura 5-44: Gráfica de la tasa de acreción del disco con  $\alpha_2$  utilizando el primer método. Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde, roja y cian corresponden a las curvas de  $\dot{M}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ , respectivamente. Éstos comienzan a acretar 0.074, 0.43 y 4.33s. La línea azul es la curva de  $\dot{M}$  de  $\alpha_2$ .

El ruido numérico aumenta considerablemente cuando la tasa de acreción desciende a  $10^{20}$ g/s. Para los intervalos mayores en el segundo metodo, el ruido numérico disminuye considerablemente, pero el pico de la tasa de acreción se recorre a la derecha (figura 5-45).

A pesar de la caída con amortiguamiento, el análisis de la señal no muestra frecuencias dominantes tan definidas como en el caso anterior (figura 5-46). Para el binning de tamaño 0.006s, las frecuencias dominantes son 0.79, 2.99 y 6.59Hz; para el resto de los binnings, las frecuencias son 0.8, 3 y 6.6Hz.

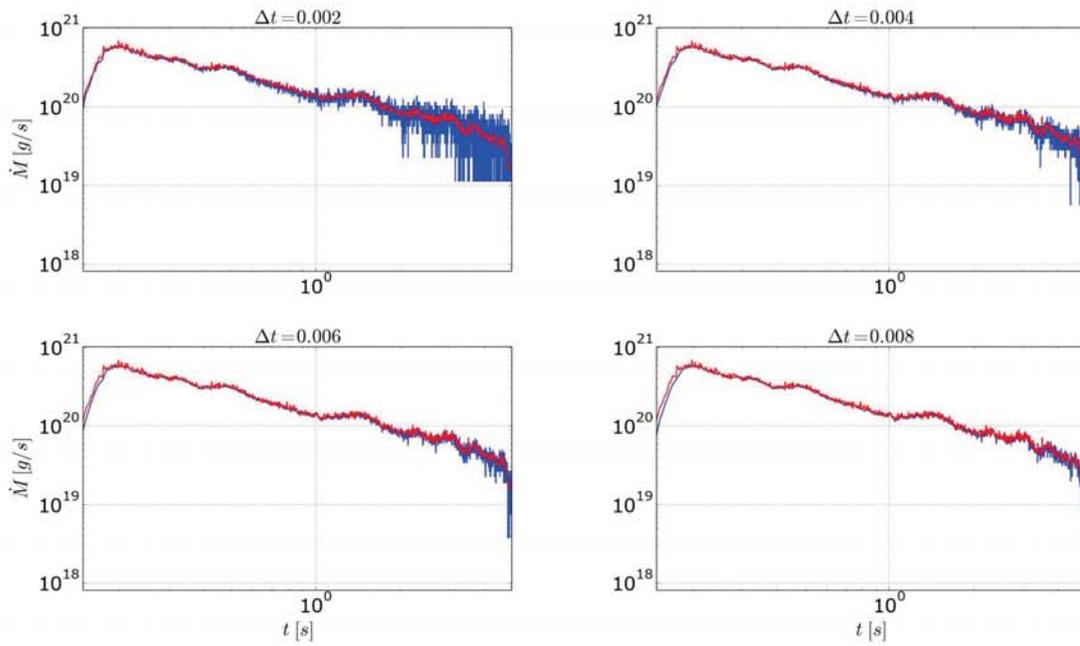


Figura 5-45: Comparación entre los dos métodos del cálculo de acreción para el disco con  $\alpha_2$ . Cada gráfica tiene ambos métodos, variando el binning del segundo. La línea roja es la curva de  $\dot{M}$  calculada con el primer método, mientras que cada gráfica contiene una curva azul que representa el cálculo mediante el segundo método.

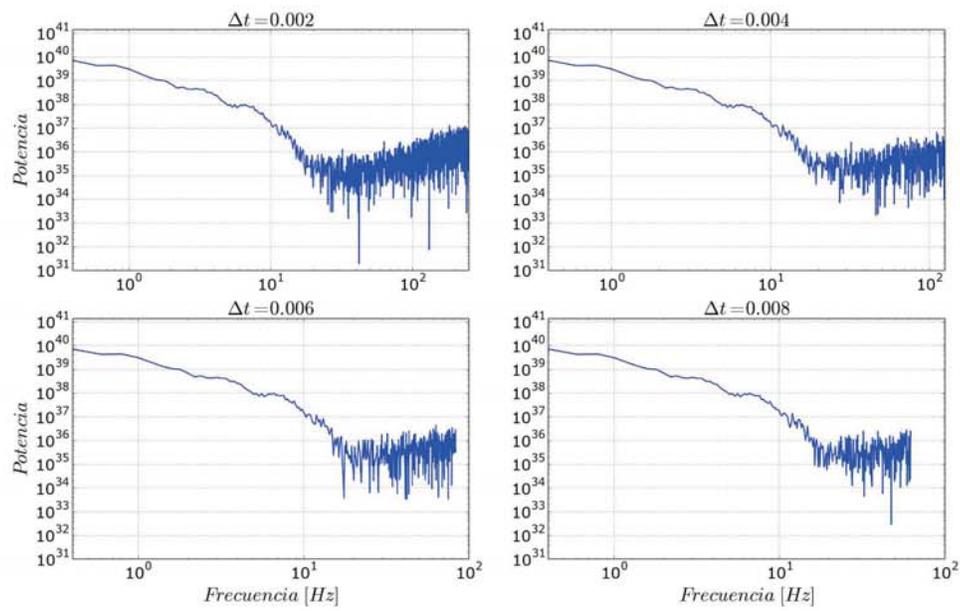


Figura 5-46: Periodogramas de la tasa de acreción del segundo método para el disco con  $\alpha_2$ . Cada gráfica tiene el análisis de la curva de cada binning.

### Acreción de disco con $\alpha_3$

El disco con  $\alpha_3$  comienza a ser acretado en  $t = 0.139\text{s}$ . Al igual que el caso anterior, se alcanza el máximo en  $0.19\text{s}$  y después decae con amortiguamiento. Sin embargo, tiene un máximo local que llega a un 50% del máximo global y el amortiguamiento se vuelve despreciable y reinicia  $1.5\text{s}$ . También se da una caída abrupta en  $4.65\text{s}$  (figura 5-47).

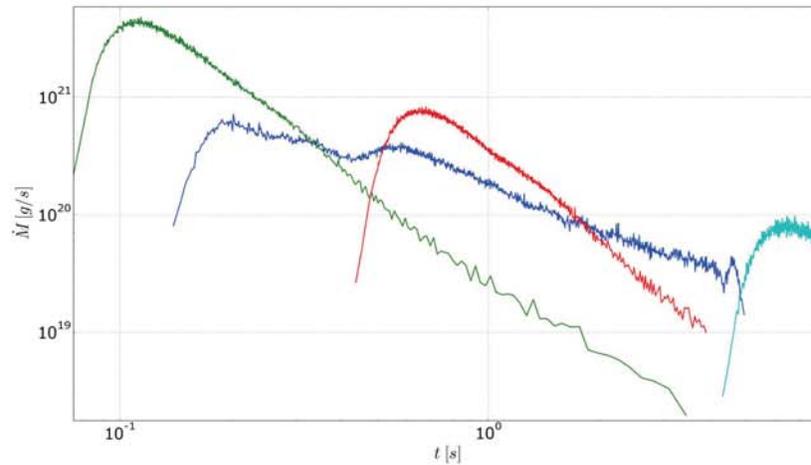


Figura 5-47: Gráfica de la tasa de acreción del disco con  $\alpha_3$  utilizando el primer método. Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde, roja y cian corresponden a las curvas de  $\dot{M}$  para las simulaciones de discos con  $\alpha = 0.06, 0.01, 0.001$ , respectivamente. Éstos comienzan a acretar  $0.074, 0.43$  y  $4.33\text{s}$ . La línea azul es la curva de  $\dot{M}$  de  $\alpha_3$ .

Al igual que el disco con  $\alpha_2$ , el ruido numérico del segundo método crece abruptamente cuando la tasa de acreción desciende a  $10^{20}\text{g/s}$ . Asimismo, el ruido disminuye para mayores valores de binning. En las gráficas de la figura 5-48 se observa como se recorre la curva del segundo método al inicio de la acreción. Los periodogramas tienen no muestran frecuencias definidas (figura 5-49).

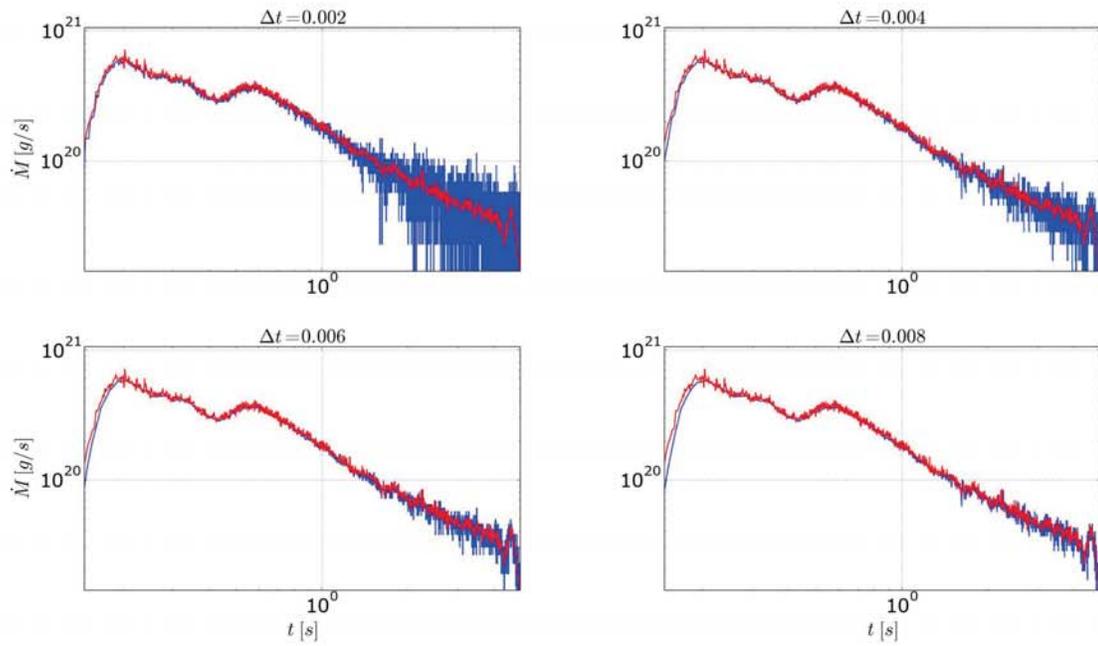


Figura 5-48: Comparación entre los dos métodos del cálculo de acreción para el disco con  $\alpha_3$ . Cada gráfica tiene ambos métodos, variando el binning del segundo. La línea roja es la curva de  $\dot{M}$  calculada con el primer método, mientras que cada gráfica contiene una curva azul que representa el cálculo mediante el segundo método.

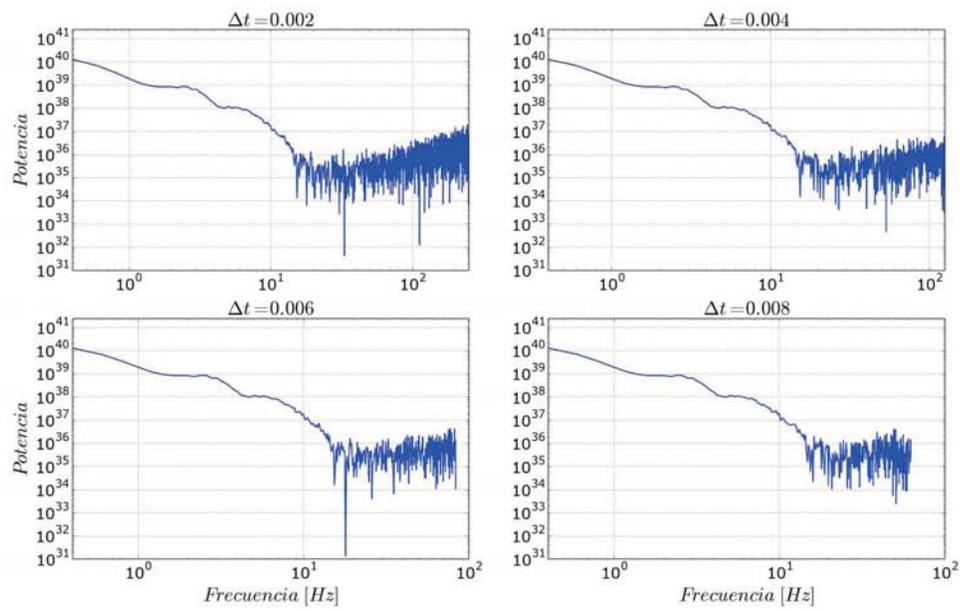


Figura 5-49: Periodogramas de la tasa de acreción del segundo método para el disco con  $\alpha_3$ . Cada gráfica tiene el análisis de la curva de cada binning.

### 5.3.2. Pruebas con dependencia de la densidad

Como la tasa de acreción de los discos con formas funcionales dependientes de la densidad son idénticas, solo se muestran las gráficas referentes al disco con  $\alpha_4$ . En la figura 5-50 se observa que la acreción de material en esta simulación empieza antes que en el disco con  $\alpha = 0.06$ . El máximo de la acreción coincide en ambos casos, y las curvas tienen valores muy cercanos hasta  $t = 0.17s$ , momento en que la tasa de acreción del disco con  $\alpha_4$  crece en un 30%. Luego, la tasa de acreción desciende a un valor de  $10^{21}g/s$  y comienza una caída exponencial.

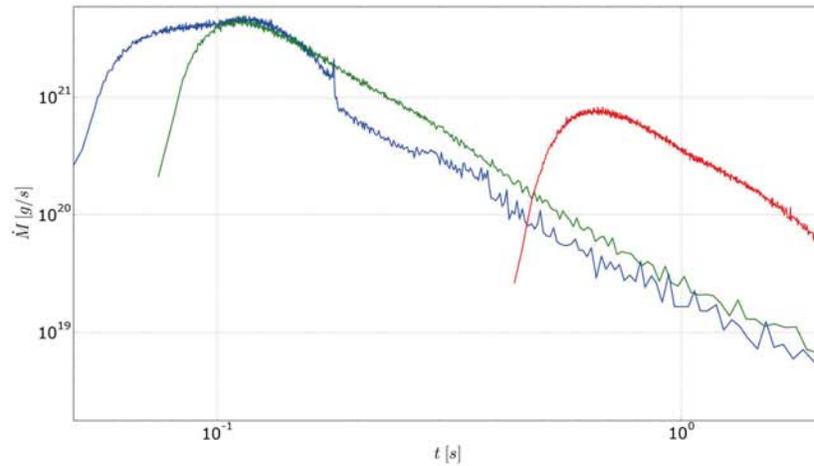


Figura 5-50: Gráfica de la tasa de acreción del disco con  $\alpha_4$  utilizando el primer método. Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde y roja corresponden a las curvas de  $\dot{M}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06$  y  $0.01$ , respectivamente. Éstos comienzan a acretar  $0.074$  y  $0.43s$ . La línea azul es la curva de  $\dot{M}$  de  $\alpha_4$ .

El ruido numérico de ambos métodos para la tasa de acreción del disco es menor a la de los casos anteriores. Sin embargo, para tiempos iniciales ambas curvas se separan más que en los discos anteriores (figura 5-51). Para el binning de tamaño  $0.006s$ , las frecuencias dominantes son  $13.97$ ,  $20.25$  y  $28.94Hz$ ; para el resto de los binnings, las frecuencias son  $14$ ,  $21$  y  $29Hz$  (figura 5-52).

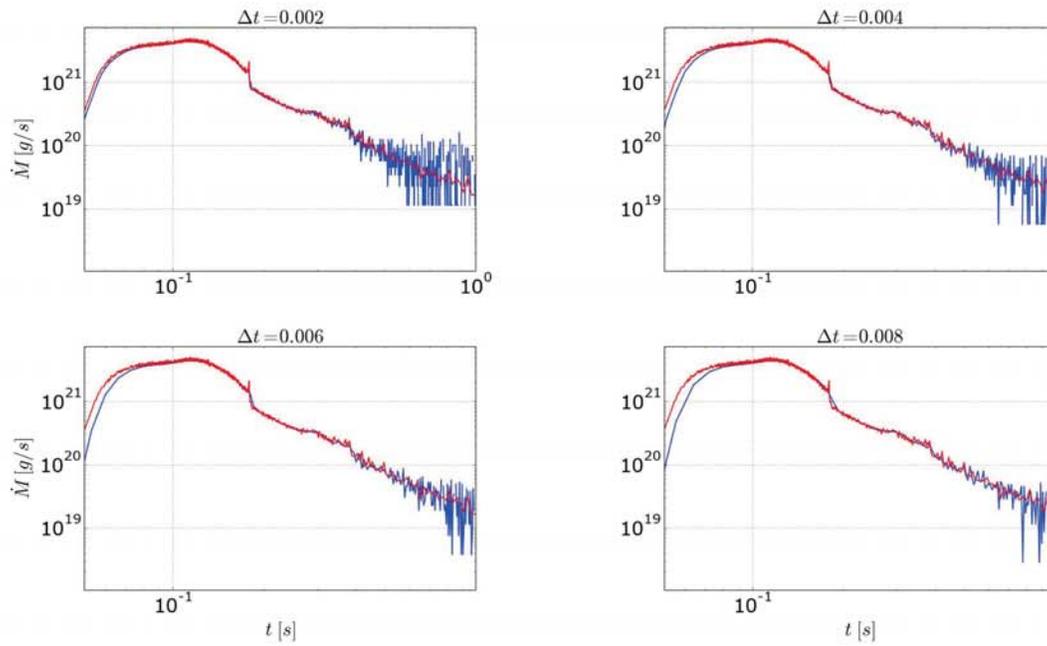


Figura 5-51: Comparación entre los dos métodos del cálculo de acreción para el disco con  $\alpha_4$ . Cada gráfica tiene ambos métodos, variando el binning del segundo. La línea roja es la curva de  $\dot{M}$  calculada con el primer método, mientras que cada gráfica contiene una curva azul que representa el cálculo mediante el segundo método.

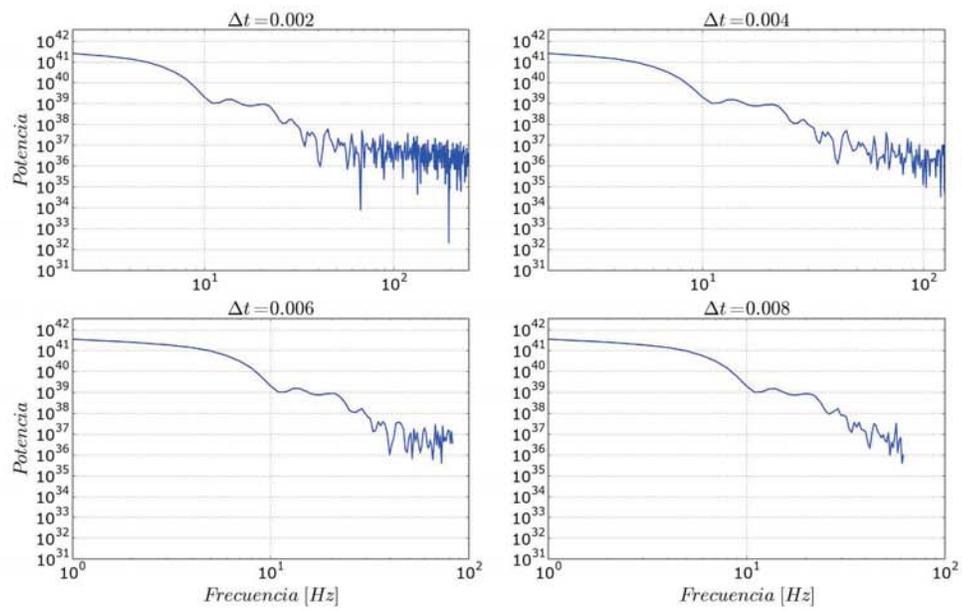


Figura 5-52: Periodogramas de la tasa de acreción del segundo método para el disco con  $\alpha_4$ . Cada gráfica tiene el análisis de la curva de cada binning.

### 5.3.3. Pruebas con dependencia de dos variables

#### Acreción de disco con $\alpha_7$

La acreción de  $\alpha_7$  se mantiene aproximadamente constante en  $10^{21}$ g/s desde 0.13s hasta 1.55s. Existe un mínimo local en 0.35s, donde la tasa de acreción cae a un 50% del valor máximo. A partir de 1.48s se presenta un decaimiento exponencial de la curva (figura 5-53).

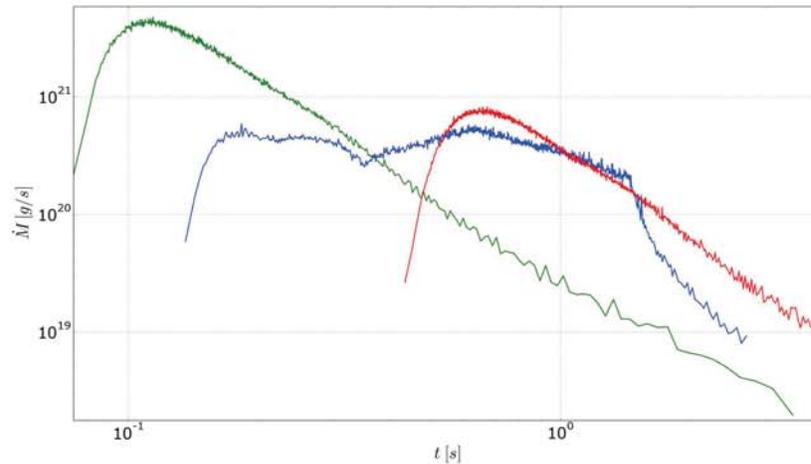


Figura 5-53: Gráfica de la tasa de acreción del disco con  $\alpha_7$  utilizando el primer método. Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde y roja corresponden a las curvas de  $\dot{M}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06$  y  $0.01$ , respectivamente. Éstos comienzan a acretar 0.074 y 0.43s. La línea azul es la curva de  $\dot{M}$  de  $\alpha_7$ .

El ruido del segundo método opaca la señal durante el decaimiento, debajo de  $10^{20}$ g/s. Para los binnings de 0.006 y 0.008s, el ruido del segundo método es menor que el del primero hasta que la simulación alcanza los  $8 \times 10^{19}$ g/s. Para el binning de tamaño 0.006s, las frecuencias dominantes son 2.49 y 8.74Hz; para el resto de los binnings, las frecuencias son 2.5 y 8.75Hz (figura 5-55).

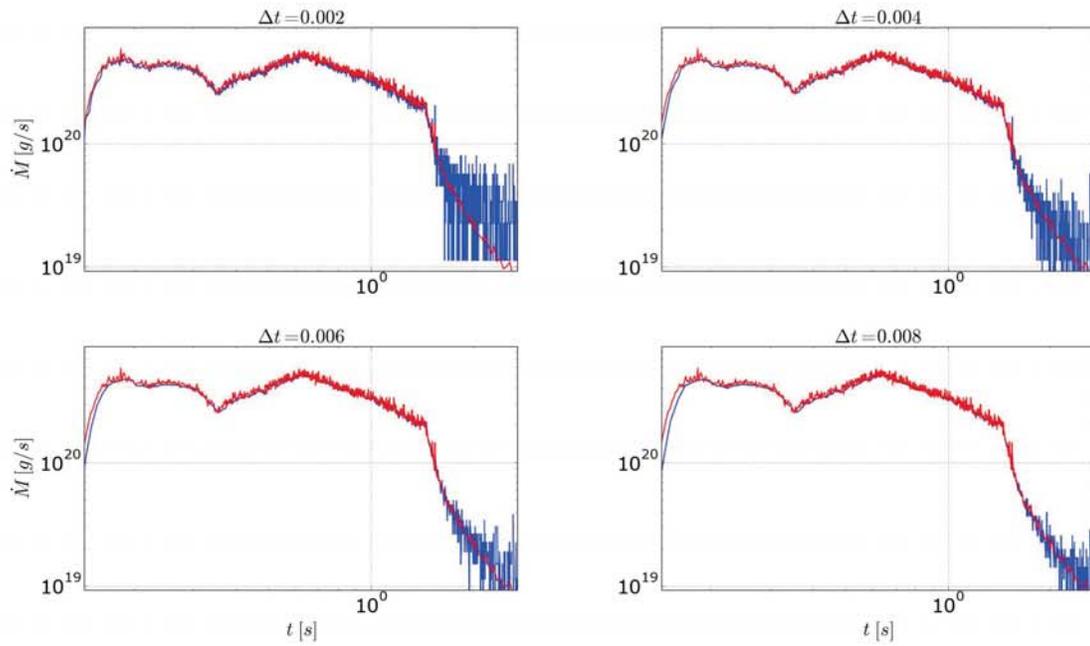


Figura 5-54: Comparación entre los dos métodos del cálculo de acreción para el disco con  $\alpha_7$ . Cada gráfica tiene ambos métodos, variando el binning del segundo. La línea roja es la curva de  $\dot{M}$  calculada con el primer método, mientras que cada gráfica contiene una curva azul que representa el cálculo mediante el segundo método.

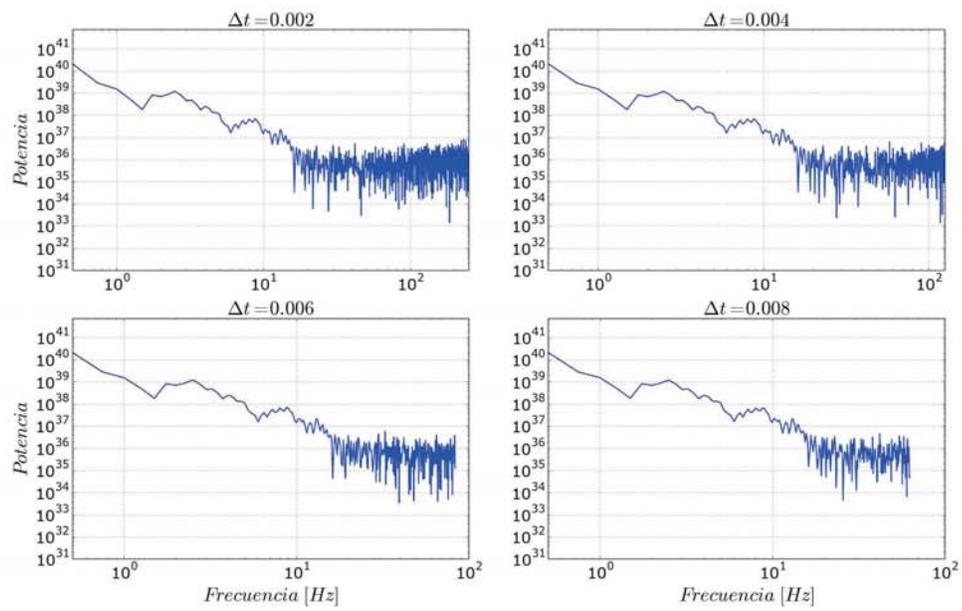


Figura 5-55: Periodigramas de la tasa de acreción del segundo método para el disco con  $\alpha_7$ . Cada gráfica tiene el análisis de la curva de cada binning.

### Acreción de disco con $\alpha_8$

La tasa de acreción del disco con  $\alpha_8$ , presenta un máximo local 0.2s y el global en 0.24s. Entre el máximo local y  $t = 0.36s$  la acreción disminuye un 30%. Después de ese tiempo la curva decae más rapido hasta alcanza un mínimo local 0.78s. A partir de ello la acreción vuelve a incrementarse hasta alcanzar otro máximo en  $t = 1.98s$  (figura 5-53).

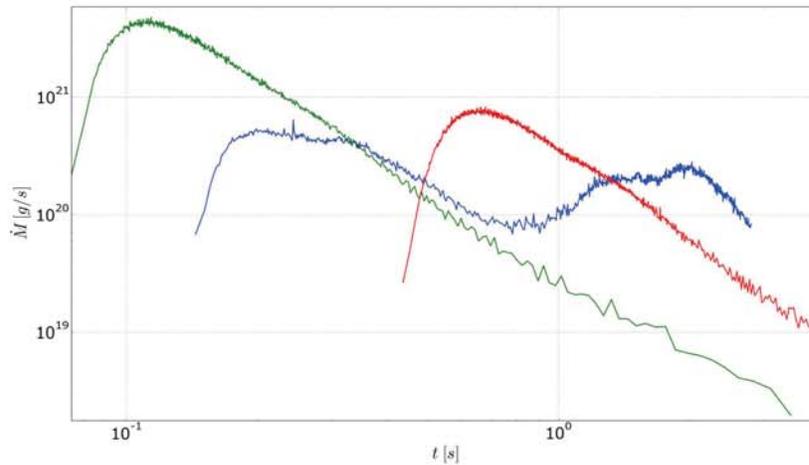


Figura 5-56: Gráfica de la tasa de acreción del disco con  $\alpha_8$  utilizando el primer método. Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde y roja corresponden a las curvas de  $\dot{M}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06$  y  $0.01$ , respectivamente. Éstos comienzan a acretar 0.074 y 0.43s. La línea azul es la curva de  $\dot{M}$  de  $\alpha_8$ .

Los métodos de calculo de acreción no convergen al mismo valor para el mínimo local. El primer método alcanza una valor 42% menor que el del segundo método. Además, el máximo local ocurre 0.6s antes en el primer método que en el segundo (figura 5-57). Para el binning de tamaño 0.006s, las frecuencias dominantes son 0.74, 1.74 y 2.49Hz; para el resto de los binnings, las frecuencias son 0.75, 1.75 y 2.5Hz (figura 5-58).

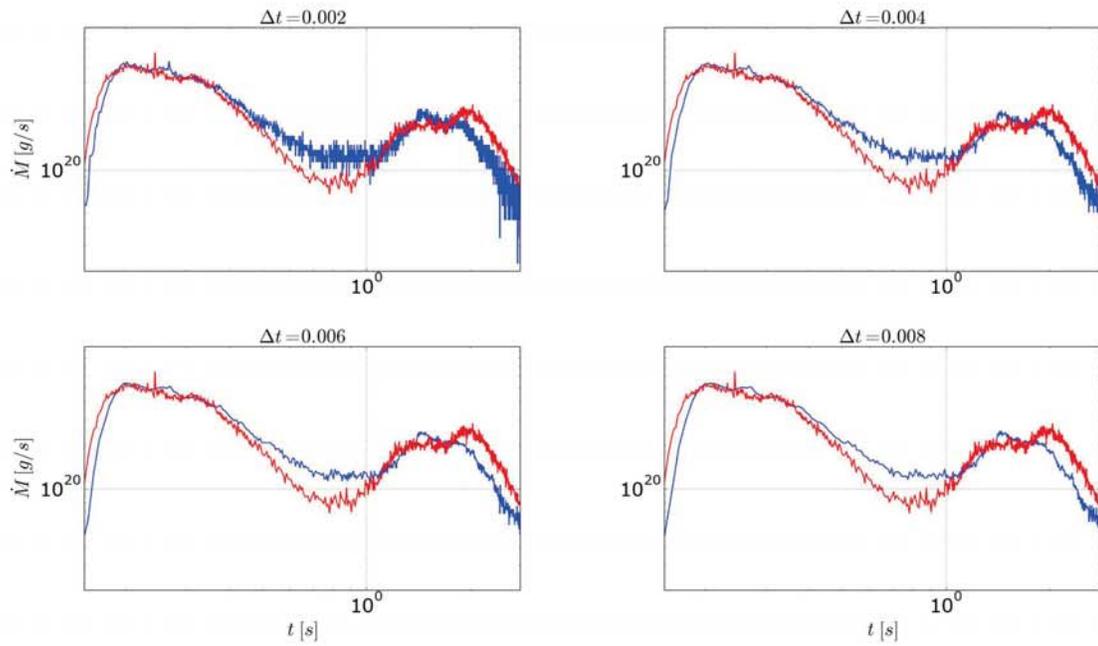


Figura 5-57: Comparación entre los dos métodos del cálculo de acreción para el disco con  $\alpha_8$ . Cada gráfica tiene ambos métodos, variando el binning del segundo. La línea roja es la curva de  $\dot{M}$  calculada con el primer método, mientras que cada gráfica contiene una curva azul que representa el cálculo mediante el segundo método.

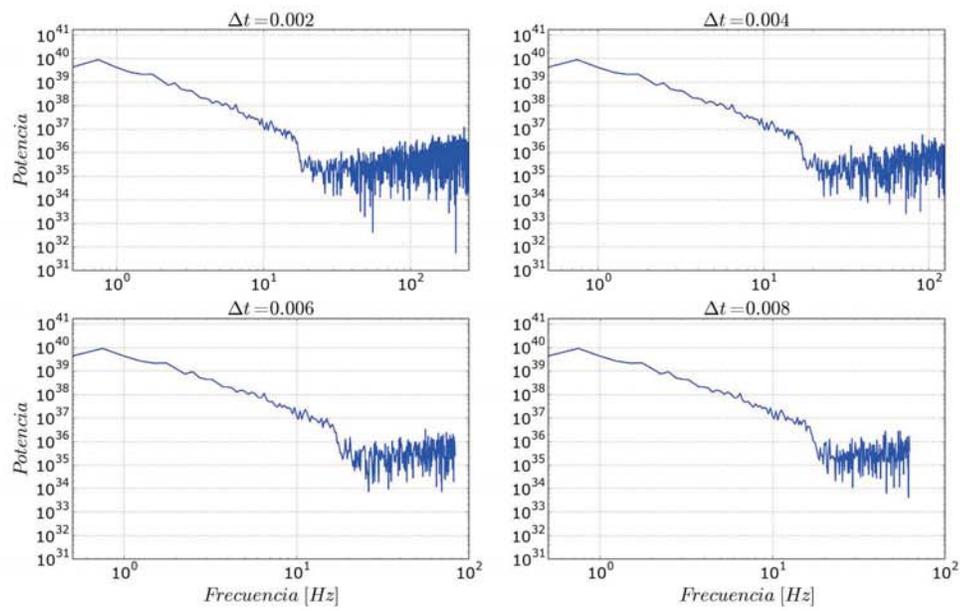


Figura 5-58: Periodogramas de la tasa de acreción del segundo método para el disco con  $\alpha_8$ . Cada gráfica tiene el análisis de la curva de cada binning.

## Acreción de disco con $\alpha_9$

La primera parte de la curva es similar a la del caso anterior. Sin embargo, lo más notable de la tasa de acreción del disco con  $\alpha_9$  es que el máximo global, alrededor de 0.64s, se da después del mínimo local a la mitad de la curva de la tasa de acreción. En el intervalo en que la acreción pasa del mínimo al máximo global, alrededor de 0.08s, la acreción aumenta más de 15 veces. Después del máximo, la tasa de acreción decae como en el disco con  $\alpha = 0.01$ .

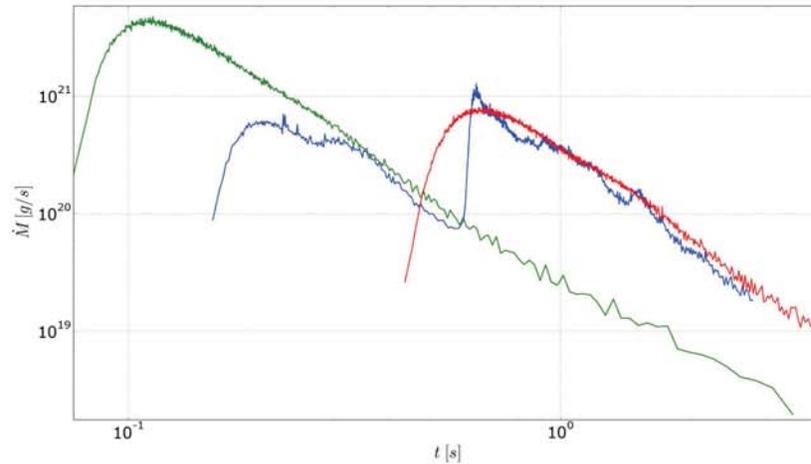


Figura 5-59: Gráfica de la tasa de acreción del disco con  $\alpha_9$  utilizando el primer método. Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde y roja corresponden a las curvas de  $\dot{M}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06$  y  $0.01$ , respectivamente. Éstos comienzan a acretar 0.074 y 0.43s. La línea azul es la curva de  $\dot{M}$  de  $\alpha_9$ .

La diferencia entre los métodos de calculo de acreción se ven durante el valle entre los máximos de la curva. En esta simulación se observa como disminuye el ruido conforme se aumenta el binning. Además, el tamaño de binning no afecta el desfase entre ambas curvas. Para el binning de tamaño 0.006s, las primeras seis frecuencias dominantes son 2, 4.25, 6.25, 8, 10.25 y 12.5Hz; para el resto de los binnings, las frecuencias son 1.99, 4.24, 6.24, 7.99, 6.24 y 12.49Hz (figura 5-61).

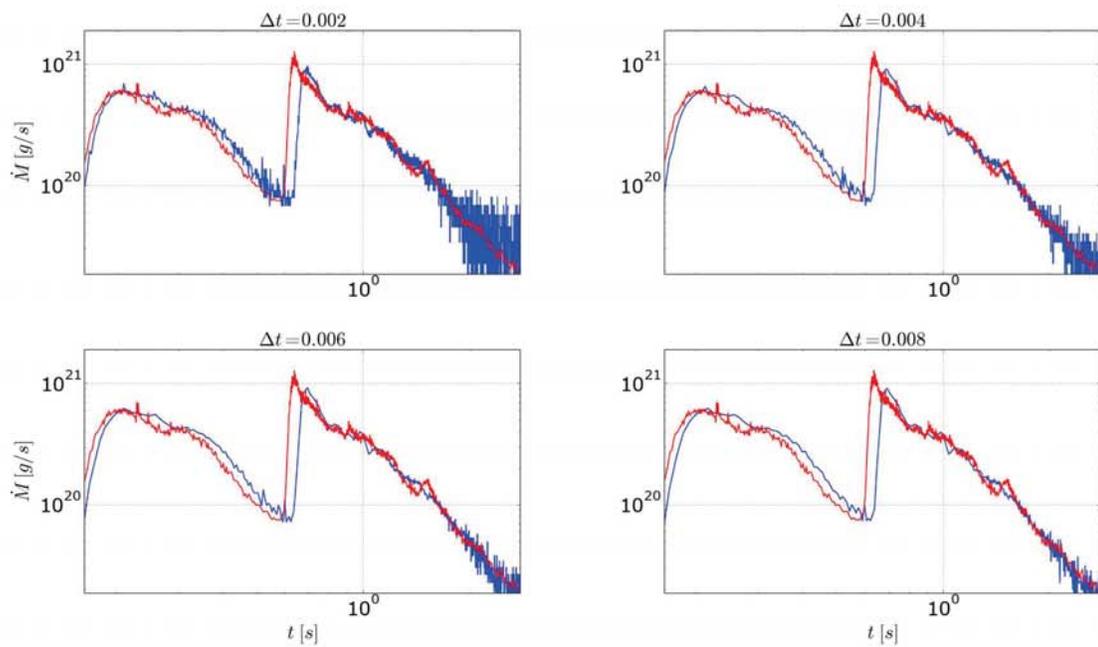


Figura 5-60: Comparación entre los dos métodos del cálculo de acreción para el disco con  $\alpha_9$ . Cada gráfica tiene ambos métodos, variando el binning del segundo. La línea roja es la curva de  $\dot{M}$  calculada con el primer método, mientras que cada gráfica contiene una curva azul que representa el cálculo mediante el segundo método.

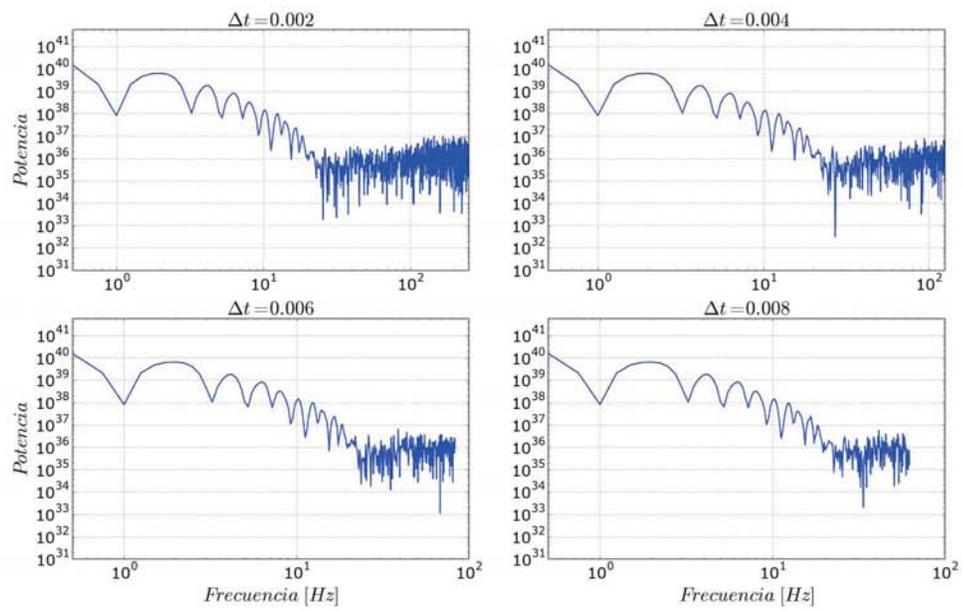


Figura 5-61: Periodigramas de la tasa de acreción del segundo método para el disco con  $\alpha_9$ . Cada gráfica tiene el análisis de la curva de cada binning.

## Acreción de disco con $\alpha_{10}$

La curva de esta simulación tiene un comportamiento similar a la del disco anterior. A excepción de los valores iniciales de la acreción y la caída exponencial al final de la simulación, los valores de la tasa de acreción son del orden de  $10^{21}$ g/s. Lo más notable de la tasa de acreción del disco con  $\alpha_{10}$  es que el máximo global, alrededor de 0.57s, se da después del mínimo local a la mitad de la curva de la tasa de acreción. En el intervalo en que la acreción pasa del mínimo al máximo global, alrededor de 0.08s, la acreción aumenta 10 veces. Después del máximo, la tasa de acreción decae como en el disco con  $\alpha = 0.01$ .

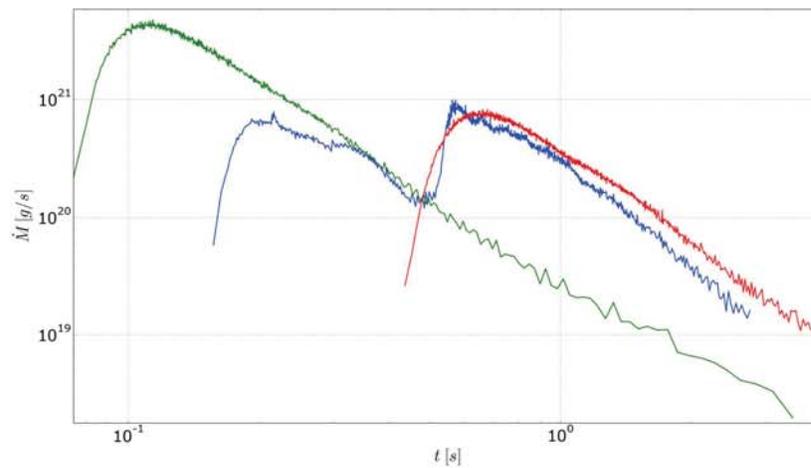


Figura 5-62: Gráfica de la tasa de acreción del disco con  $\alpha_{10}$  utilizando el primer método. Los ejes están en escala logarítmica. Las líneas verde y roja corresponden a las curvas de  $\dot{M}$  para las simulación de discos con  $\alpha = 0.06$  y  $0.01$ , respectivamente. Éstos comienzan a acretar 0.074 y 0.43s. La línea azul es la curva de  $\dot{M}$  de  $\alpha_{10}$ .

En esta simulación se observa como disminuye el ruido conforme se aumenta el binning. Además, no se presenta el desfase de la acreción entre los máximos como en la figura 5-61. Para el binning de tamaño 0.006s, las primeras seis frecuencias dominantes son 2.49, 5.24, 7.29, 10.74, 12.99 y 16.24Hz; para el resto de los binnings, las frecuencias son 2.5, 5.25, 8, 10.75, 13 y 16.5Hz (figura 5-61).

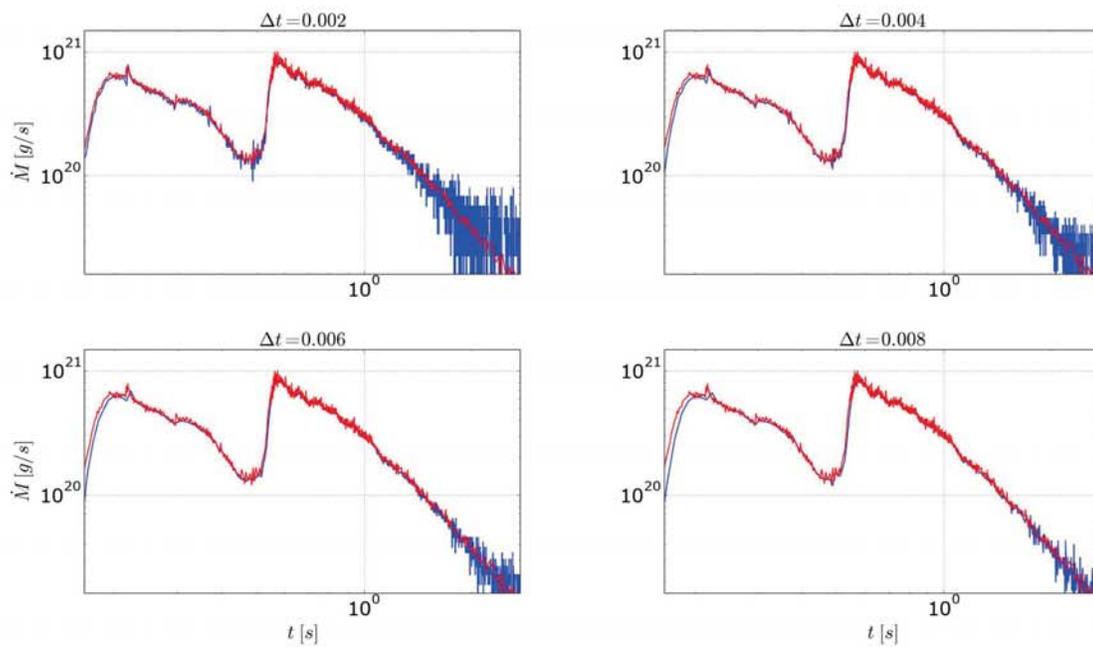


Figura 5-63: Comparación entre los dos métodos del cálculo de acreción para el disco con  $\alpha_{10}$ . Cada gráfica tiene ambos métodos, variando el binning del segundo. La línea roja es la curva de  $\dot{M}$  calculada con el primer método, mientras que cada gráfica contiene una curva azul que representa el cálculo mediante el segundo método.

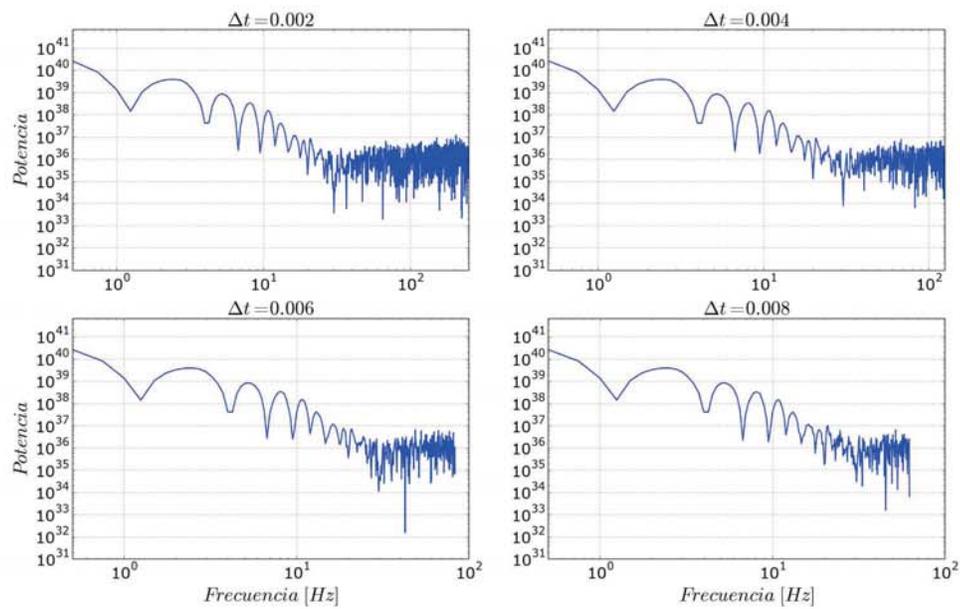


Figura 5-64: Periodigramas de la tasa de acreción del segundo método para el disco con  $\alpha_{10}$ . Cada gráfica tiene el análisis de la curva de cada binning.

## Capítulo 6

# Conclusiones y trabajo futuro

*The road and the tale have both been long, would you not say so?  
The trip has been long and the cost has been high...  
but no great thing was ever attained easily.  
A long tale, like a tall Tower, must be built a stone at a time..*  
— STEPHEN KING. *The Dark Tower VII: The Dark Tower* (2004)

De las diez formas funcionales de  $\alpha$ , nueve generaron inestabilidades en el disco. En general, la dinámica de estos sistemas puede representarse como un anillo inicial de masa, el cual se separa en dos. Cada uno se desplaza alrededor de  $0.3R_g$  en la dirección radial opuesta al otro. Eventualmente los anillos alcanzan una separación máxima. Algunas de las inestabilidades se mantuvieron en este estado más de  $10t_\phi = 0.005s$ , donde  $t_\phi$  es el tiempo dinámico del disco relajado (ecuación 4-16). Posteriormente, estos anillos de material colapsaron cerca del lugar de origen del anillo inicial de material, formando otra inestabilidad. Finalmente, este último anillo se dispersa de forma similar a un disco con  $\alpha$  constante. Se diseñó un sistema para catalogar las inestabilidades en base a la cantidad de material que se acumulaba en cada región. Por definición, las inestabilidades de tipo I son las más débiles, y es probable que un análisis más exhaustivo podría encontrar que muchas de ellas son efectos del ruido numérico, en vez de efectos causados por la forma funcional de la eficiencia del transporte de momento angular. Un ejemplo es la única inestabilidad encontrada en  $\alpha_8$ , la cual tiene una duración menor a cinco tiempos dinámicos y tiene una influencia mínima en la curva de densidad superficial. Las inestabilidades de tipo II son más intensas y el movimiento de los anillos es evidente, así como el aumento de densidad respecto a las regiones adyacentes. Estas inestabilidades fueron las más comunes

dentro de las simulaciones. Las inestabilidades de tipo III fueron las más interesantes, ya que éstas son las que afectan más a la dinámica del disco. Se presentaron en los discos ( $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  y  $\alpha_7$ ) cuya forma funcional hacia que el 80 % de las partículas tuvieran  $\alpha_b = 0.001$ . En las curvas de densidad superficial, los puntos de inflexión y los mínimos locales definen la formación de las primeras y consecuentes estabilidades, respectivamente.

La densidad máxima del disco fue un parámetro útil para determinar el tiempo de vida de las inestabilidades. Algunas de las curvas coincidieron con lo que se esperaba por la forma funcional de los discos: los discos con  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  tenían características combinadas de las curvas de densidad máxima con  $\alpha$  constante. El caso de  $\alpha_8$  es especial, ya que su forma funcional estabilizó la densidad máxima en  $10^{18}$ g/s por poco más de un segundo. Esto debido a que al disminuir  $\rho_{max}$ , consecuencia de la dispersión del material, el cociente de  $\rho/\rho_{max}$  aumenta para cada partícula y  $\alpha$  disminuye, lo detiene la dispersión y mantiene fija la distribución espacial de las partículas. Dado que este es el parámetro para calcular la densidad de cada partícula, entonces  $\rho_{max}$  se estabiliza en un valor dado. Aunque las curvas de los discos con  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  se caracterizan por aproximarse a la curva de  $\alpha = 0.001$ , la de  $\alpha_7$  no cumple esto, por lo que no es un parámetro para identificar inestabilidades de tipo III usando la densidad de volumen máxima.

Hubo una gran variabilidad en el comportamiento de las tasas de acreción. En el caso de  $\alpha(U_b)$  la acreción del material tuvo un comportamiento con características de las curvas de  $\dot{M}$  de los discos con  $\alpha$  constante. Las caídas en los casos con  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  mostraban un amortiguamiento de la señal, pero en los periodogramas correspondientes no se observaron frecuencias que dominaran a la señal. Por otro lado  $\alpha_1$ , que no tenía el amortiguamiento si presenta tres frecuencias bien definidas. Esto puede significar dos cosas, que el amortiguamiento no tiene una frecuencia asociada o que se requiere de un análisis más riguroso para encontrar una periodicidad. Las curvas de  $\dot{M}$  de los discos con  $\alpha(\rho_b)$  mostró picos inesperados, todos en  $t \approx 0.15$ s, y un máximo global superior al de  $\alpha = 0.06$ . Los casos de los discos con  $\alpha_7$ - $\alpha_{10}$  muestran curvas de  $\dot{M}$  con dos picos de intensidad similar, separadas por  $\sim 0.5 - 1.5$ s. Suponiendo que la acreción genere fotones de altas energías (rayos X), y un porcentaje de ellos no sea absorbido en la atmósfera, e ignorando efectos de campos magnéticos, la señal recibida tendría una luminosidad cuya curva sería similar a la de  $\dot{M}$ . De ser así, se podría inferir el comportamiento del transporte de

momento angular y la viscosidad turbulenta a partir de las curvas de luminosidad; los discos con  $\alpha_b(\rho_b, U_b)$  son ejemplos de esto. Las curvas de  $\dot{M}$  para los discos con  $\alpha_9$  y  $\alpha_{10}$  muestran dos picos de intensidad similar en un intervalo de 0.35s. Es posible que en un escenario donde el disco sea alimentado de material por una fuente externa, como una estrella compañera, pudiera darse una periodicidad comparable a la detectada en los *QPO*. Además, la mayoría de las frecuencias dominantes encontradas en los periodogramas corresponden a valores de *QPO* de baja frecuencia, entre 1 y 10Hz (Belloni *et al.* [2002]). Esto sugiere que la variabilidad de la luminosidad podría ser modelada, considerando también los efectos de campos magnéticos, mediante el comportamiento del transporte de momento angular en el disco.

# Bibliografía

- BALBUS, S.A. Y HAWLEY, J.F. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I-Linear analysis. II-Nonlinear evolution. *The Astrophysical Journal* **376**:214–233 (1991)
- BALSARA, D.S. Asymmetries in extragalactic radio sources. Informe técnico, Illinois Univ., Urbana, IL (United States) (1991)
- BEGELMAN, M. Y MEIER, D. Thick accretion disks-Self-similar, supercritical models. *The Astrophysical Journal* **253**:873–896 (1982)
- BELLONI, T., PSALTIS, D., Y VAN DER KLIS, M. A unified description of the timing features of accreting X-ray binaries. *The Astrophysical Journal* **572**(1):392 (2002)
- BLANDFORD, R.D. Y BEGELMAN, M.C. On the fate of gas accreting at a low rate on to a black hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **303**(1):L1–L5 (1999)
- BONDI, H. On spherically symmetrical accretion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **112**(2):195–204 (1952)
- BRANDT, S., CASTRO-TIRADO, A., LUND, N., DREMIN, V., LAPSHOV, I., Y SYUNYAEV, R. Detection of a type-I X-ray burst from 4U 0614+ 09. *Astronomy and Astrophysics* **262**:L15 (1992)
- BROOKSHAW, L. A method of calculating radiative heat diffusion in particle simulations. En *Proceedings of the Astronomical Society of Australia*, tomo 6, págs. 207–210 (1985)
- BURR, K.P. Marine Hydrodynamics. University Lecture (2000)
- CAMERON, A. Stellar accretion and X-ray emission. *Nature* **215**:464–466 (1967)

- CARAMANA, E.J., SHASHKOV, M.J., Y WHALEN, P.P. Formulations of artificial viscosity for multi-dimensional shock wave computations. *Journal of Computational Physics* **144**(1):70–97 (1998)
- CHATY, S. Optical/infrared observations unveiling the formation, nature and evolution of High-Mass X-ray Binaries. *Advances in Space Research* **52**(12):2132–2142 (2013)
- CHEN, W.X. Y BELOBORODOV, A.M. Neutrino-cooled accretion disks around spinning black holes. *The Astrophysical Journal* **657**(1):383 (2007)
- CHEREPASHCHUK, A. X-ray nova binary systems. *Space Science Reviews* **93**(3-4):473–580 (2000)
- COURANT, R., FRIEDRICHS, K., Y LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal* **11**(2):215–234 (1967)
- COWLEY, A.P. Y CRAMPTON, D. The spectroscopic binary Scorpius X-1. *The Astrophysical Journal* **201**:L65–L68 (1975)
- DOLAG, K., VAZZA, F., BRUNETTI, G., Y TORMEN, G. Turbulent gas motions in galaxy cluster simulations: the role of smoothed particle hydrodynamics viscosity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **364**(3):753–772 (2005)
- DURRAN, D.R. Y KLEMP, J.B. On the effects of moisture on the Brunt-Väisälä frequency. *Journal of the Atmospheric Sciences* **39**(10):2152–2158 (1982)
- EARDLEY, D.M., LIGHTMAN, A.P., Y SHAPIRO, S.L. Cygnus X-1-A two-temperature accretion disk model which explains the observed hard X-ray spectrum. *The Astrophysical Journal* **199**:L153–L155 (1975)
- ELSON, R.A., SIGURDSSON, S., DAVIES, M., HURLEY, J., Y GILMORE, G. The binary star population of the young cluster NGC 1818 in the Large Magellanic Cloud. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **300**(3):857–862 (1998)
- ENCYCLOPEDIA, S. *X-ray burst* (2014 (accessed August 10, 2015))

- ESIN, A.A., NARAYAN, R., CUI, W., GROVE, J.E., Y ZHANG, S.N. Spectral transitions in cygnus X-1 and other black hole X-ray binaries. *The Astrophysical Journal* **505**(2):854 (1998)
- FLEBBE, O., MUENZEL, S., HEROLD, H., RIFFERT, H., Y RUDER, H. Smoothed particle hydrodynamics: physical viscosity and the simulation of accretion disks. *The Astrophysical Journal* **431**:754–760 (1994)
- FRANK, J., KING, A., Y RAINE, D. *Accretion power in astrophysics*. Cambridge University Press (2002)
- FULBRIGHT, M.S., BENZ, W., Y DAVIES, M.B. A method of smoothed particle hydrodynamics using spheroidal kernels. *The Astrophysical Journal* **440**:254–262 (1995)
- FULK, D.A. Y QUINN, D.W. An analysis of 1-D smoothed particle hydrodynamics kernels. *Journal of Computational Physics* **126**(1):165–180 (1996)
- GAMMIE, C.F. Y MENO, K. On the origin of episodic accretion in dwarf novae. *The Astrophysical Journal Letters* **492**(1):L75 (1998)
- GARCIA, M.R., MCCLINTOCK, J.E., NARAYAN, R., CALLANAN, P., BARRET, D., Y MURRAY, S.S. New evidence for black hole event horizons from Chandra. *The Astrophysical Journal Letters* **553**(1):L47 (2001)
- GIACCONI, R., GURSKY, H., PAOLINI, F.R., Y ROSSI, B.B. Evidence for X rays from sources outside the solar system. *Physical Review Letters* **9**(11):439 (1962)
- GINGOLD, R. Y MONAGHAN, J. Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics. *Journal of Computational Physics* **46**(3):429–453 (1982)
- GLENDENNING, N.K. *Compact stars: Nuclear physics, particle physics and general relativity*. Springer Science & Business Media (2012)
- GOTTLIEB, E., WRIGHT, E., Y LILLER, W. Optical studies of UHURU sources. XI. A probable period for Scorpius X-1= V818 Scorpii. *The Astrophysical Journal* **195**:L33–L35 (1975)

- HAIRER, E., LUBICH, C., Y WANNER, G. *Geometric numerical integration: structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*, tomo 31. Springer Science & Business Media (2006)
- HEGER, A., FRYER, C., WOOSLEY, S., LANGER, N., Y HARTMANN, D. How massive single stars end their life. *The Astrophysical Journal* **591**(1):288 (2003)
- HIROSE, S., BLAES, O., Y KROLIK, J.H. Turbulent stresses in local simulations of radiation-dominated accretion disks, and the possibility of the lightman-eardley instability. *The Astrophysical Journal* **704**(1):781 (2009)
- HOPMAN, C., ZWART, S.F.P., Y ALEXANDER, T. Ultraluminous X-ray sources as intermediate-mass black holes fed by tidally captured stars. *The Astrophysical Journal Letters* **604**(2):L101 (2004)
- HURLEY, J.R., TOUT, C.A., Y POLS, O.R. Evolution of binary stars and the effect of tides on binary populations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **329**(4):897–928 (2002)
- HUT, P. Tidal evolution in close binary systems. *Astronomy and Astrophysics* **99**:126–140 (1981)
- IBEN JR, I. Y LIVIO, M. Common envelopes in binary star evolution. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* págs. 1373–1406 (1993)
- JIAO, C.L. Y WU, X.B. On the structure of Accretion Disks with Outflows. *The Astrophysical Journal* **733**(2):112 (2011)
- KECK, J.W., CRAIG, W.W., HAILEY, C.J., HARRISON, F., HONG, J.S., KAHN, S.M., LUBIN, P.M., MCLEAN, R., PIVOVAROFF, M.J., SEIFFERT, M. *et al.* Long-Term Multiwavelength Observations of GRS 1758–258 and the Advection-dominated Accretion Flow Model. *The Astrophysical Journal* **563**(1):301 (2001)
- KING, A., PRINGLE, J., Y LIVIO, M. Accretion disc viscosity: how big is alpha? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **376**(4):1740–1746 (2007)

- KOPAL, Z. The classification of close binary systems. En *Annales d'Astrophysique*, tomo 18, pág. 379 (1955)
- KRIVONOS, R., TSYGANKOV, S., LUTOVINOV, A., REVNIVTSEV, M., CHURAZOV, E., Y SUN-YAEV, R. INTEGRAL 11-year hard X-ray survey above 100 keV. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **448**(4):3766–3774 (2015)
- LEE, W.H. Newtonian hydrodynamics of the coalescence of black holes with neutron starsIII. Irrotational binaries with a stiff equation of state. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **318**(2):606–624 (2000)
- LEE, W.H. Y RAMIREZ-RUIZ, E. Accretion disks around black holes: dynamical evolution, meridional circulations, and gamma-ray bursts. *The Astrophysical Journal* **577**(2):893 (2002)
- LEWIN, W. Y VAN DER KLIS, M. *Compact stellar X-ray sources*, tomo 39. Cambridge University Press (2006)
- LI, S. Y LIU, W.K. *Meshfree particle methods*. Springer Science & Business Media (2007)
- LIU, Q., VAN PARADIJS, J., Y VAN DEN HEUVEL, E. High-mass X-ray binaries in the Magellanic Clouds. *Astronomy & Astrophysics* **442**(3):1135–1138 (2005)
- LIU, Q., VAN PARADIJS, J., Y VAN DEN HEUVEL, E. Catalogue of high-mass X-ray binaries in the Galaxy. *Astronomy & Astrophysics* **455**(3):1165–1168 (2006)
- LIU, Q., VAN PARADIJS, J., Y VAN DEN HEUVEL, E. A catalogue of low-mass X-ray binaries in the Galaxy, LMC, and SMC. *Astronomy & Astrophysics* **469**(2):807–810 (2007)
- MARTYNOV, D.Y. Course of general astrophysics. Text-book for students of universities. *Course of general astrophysics. Text-book for students of universities., by Martynov, D. Ya.. Third revised and completed edition. Moskva: Nauka, 640 p. 1* (1979)
- MATHEWS, J.H. Numerical Methods using Mathematica Complementary software supplements for Numerical Methods textbooks. Webpage (2012)

- MEYER, F. Y MEYER-HOFMEISTER, E. Accretion disks in cataclysmic variables-The influence of the frictional parameter  $\alpha$  on the structure. *Astronomy and Astrophysics* **128**:420–425 (1983)
- MEYER-HOFMEISTER, E. Y MEYER, F. Black hole soft X-ray transients: evolution of the cool disk and mass supply for the ADAF. *Astron. Astrophys* **348**:154–160 (1999)
- MONAGHAN, J. Extrapolating B splines for interpolation. *Journal of Computational Physics* **60**(2):253–262 (1985)
- MONAGHAN, J.J. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual review of astronomy and astrophysics* **30**:543–574 (1992)
- MONAGHAN, J.J. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on progress in physics* **68**(8):1703 (2005)
- MONAGHAN, J.J. Y LATTANZIO, J.C. A refined particle method for astrophysical problems. *Astronomy and astrophysics* **149**:135–143 (1985)
- MORRIS, J. Y MONAGHAN, J. A switch to reduce SPH viscosity. *Journal of Computational Physics* **136**(1):41–50 (1997)
- MUNO, M.P., REMILLARD, R.A., Y CHAKRABARTY, D. How do Z and atoll x-ray binaries differ? *The Astrophysical Journal Letters* **568**(1):L35 (2002)
- NARAYAN, R. Y YI, I. Advection-dominated accretion: Self-similar solution. *The Astrophysical journal* **428**(1):L13–L13 (1994)
- NARAYAN, R. Y POPHAM, R. Hard X-rays from accretion disk boundary layers. *Nature* **362**(6423):820–822 (1993)
- NARAYAN, R. Y YI, I. Advection-dominated accretion: Self-similarity and bipolar outflows. *The Astrophysical Journal* **444**:231–243 (1995)
- NGUYEN, Q. Y ETZEL, P. Doppler tomography of the accretion disk in the Algol binary KU Cygni. En *Bulletin of the American Astronomical Society*, tomo 31, pág. 1485 (1999)

- OVERBECK, J.W. Y TANANBAUM, H.D. Time Variations in Scorpius X-1 and Cygnus XR-1. *The Astrophysical Journal* **153**:899 (1968)
- OWEN, J.M. A tensor artificial viscosity for SPH. *Journal of Computational Physics* **201**(2):601–629 (2004)
- OWEN, J.M., VILLUMSEN, J.V., SHAPIRO, P.R., Y MARTEL, H. Adaptive Smoothed Particle Hydrodynamics: Methodology. II. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **116**(2):155 (1998)
- PENNA, R.F., SADOWSKI, A., KULKARNI, A.K., Y NARAYAN, R. The Shakura-Sunyaev viscosity prescription with variable  $\alpha$  (r). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **428**(3):2255–2274 (2013)
- POPHAM, R. Y SUNYAEV, R. Accretion disk boundary layers around neutron stars: X-ray production in low-mass X-ray binaries. *The Astrophysical Journal* **547**(1):355 (2001)
- POTTER, W.J. Y BALBUS, S.A. An accretion disc instability induced by a temperature sensitive  $\alpha$  parameter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **441**(1):681–689 (2014)
- PRENDERGAST, K. Y BURBIDGE, G. On the nature of some galactic X-ray sources. *The Astrophysical Journal* **151**:L83 (1968)
- PRICE, D.J. Modelling discontinuities and Kelvin–Helmholtz instabilities in SPH. *Journal of Computational Physics* **227**(24):10040–10057 (2008)
- PRICE, D.J. Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics* **231**(3):759–794 (2012)
- RAGHAVAN, D., MCALISTER, H.A., HENRY, T.J., LATHAM, D.W., MARCY, G.W., MASON, B.D., GIES, D.R., WHITE, R.J., Y THEO, A. A survey of stellar families: multiplicity of solar-type stars. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **190**(1):1 (2010)
- REIG, P. Be/X-ray binaries. *Astrophysics and Space Science* **332**(1):1–29 (2011)
- REMILLARD, R.A. Y MCCLINTOCK, J.E. X-Ray Properties of Black-Hole Binaries. *Annu. Rev. Astron. Astrophys* **44**:49–92 (2006)

- ROSSWOG, S., DAVIES, M., THIELEMANN, F.K., Y PIRAN, T. Merging neutron stars: asymmetric systems. *Astronomy and Astrophysics* **360**:171–184 (2000)
- ROSSWOG, S. Astrophysical smooth particle hydrodynamics. *New Astronomy Reviews* **53**(4):78–104 (2009)
- RUBIO-HERRERA, E. Y LEE, W.H. Oscillations of thick accretion discs around black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* **357**(1):L31–L34 (2005)
- RYU, D. Y GOODMAN, J. Convective instability in differentially rotating disks. *The Astrophysical Journal* **388**:438–450 (1992)
- SAHADE, J., MCCLUSKEY, G.E., Y KONDO, Y. *The realm of interacting binary stars*, tomo 177 (1992)
- SARTY, G., KISS, L., JOHNSTON, H., HUZIAK, R., Y WU, K. Finding Periods in High Mass X-Ray Binaries. *Journal of the American Association of Variable Star Observers (JAAVSO)* **35**:327 (2007)
- SHAKURA, N. Y SUNYAEV, R. Black holes in binary systems: observational appearances. En *X-and Gamma-Ray Astronomy*, págs. 155–164. Springer (1973)
- SHAPIRO, P.R., MARTEL, H., VILLUMSEN, J.V., Y OWEN, J.M. Adaptive smoothed particle hydrodynamics, with application to cosmology: methodology. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **103**:269 (1996)
- SHAPIRO, S.L. Y TEUKOLSKY, S.A. Black holes. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* págs. 335–369 (1983)
- SPRUIT, H.C., MATSUDA, T., INOUE, M., Y SAWADA, K. Spiral shocks and accretion in discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **229**(4):517–527 (1987)
- SZUSZKIEWICZ, E., MALKAN, M.A., Y ABRAMOWICZ, M.A. The Observational Appearance of Slim Accretion Disks. *The Astrophysical Journal* **458**:474 (1996)
- TANAKA, Y. Y SHIBAZAKI, N. X-ray Novae. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **34**(1):607–644 (1996)

- TORO, E.F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media (2013)
- VAN DER SLUYS, M. *Formation and evolution of compact binaries*. Tesis Doctoral, PhD thesis, Utrecht University (2006)
- VONNEUMANN, J. Y RICHTMYER, R.D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of applied physics* **21**(3):232–237 (1950)
- WETZSTEIN, M., NELSON, A.F., NAAB, T., Y BURKERT, A. VineA Numerical Code for Simulating Astrophysical Systems Using Particles. I. Description of the Physics and the Numerical Methods. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **184**(2):298 (2009)
- WHITE, N. Y HOLT, S. Accretion disk coronae. *The Astrophysical Journal* **257**:318–337 (1982)
- WIJNANDS, R. Y VAN DER KLIS, M. A millisecond pulsar in an X-ray binary system. *nature* **394**(6691):344–346 (1998)
- XUE, L., KLUZNIAK, W., SADOWSKI, A., LU, J.F., Y ABRAMOWICZ, M. High frequency oscillations in outbursts of Kerr-metric slim disks. *arXiv preprint arXiv:1501.07482* (2015)
- YUAN, F. Luminous hot accretion discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **324**(1):119–127 (2001)
- YUAN, F., MARKOFF, S., Y FALCKE, H. A Jet-ADAF model for Sgr A \*. *Astronomy & Astrophysics* **383**(3):854–863 (2002)