



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA

TRANSICIÓN DINÁMICA ENTRE DOS MESONES Y UN TETRAQUARK

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICAS (FÍSICA)

PRESENTA:
IVÁN ALEJANDRO TOLEDANO JUÁREZ

TUTOR PRINCIPAL:
DR. GENARO TOLEDO SÁNCHEZ
INSTITUTO DE FÍSICA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. VARLEN GRABSKI
INSTITUTO DE FÍSICA
DR. ROELOF BIJKER
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MÉXICO, D.F. Junio 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres y a mi hermana, a los que quiero tanto

...

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Toledano

Juárez

Iván

Alejandro

56 36 62 87

Universidad Nacional Autónoma de México

Instituto de Física

407072280

2. Datos del tutor

Dr.

Genaro

Toledo

Sánchez

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Ángel

Sánchez

Cecilio

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Pablo

Roig

Garcés

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Luis

Manuel

Montaño

Zetina

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Antonio

Ortiz

Velásquez

7. Datos del trabajo escrito

Transición dinámica entre dos mesones y un tetraquark 98p

2016

Agradecimientos

La presente tesis es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron varias personas leyendo, opinando, corrigiendo, teniéndome paciencia, dando ánimo, acompañando en los momentos de crisis y en los momentos de felicidad.

Agradezco a mis padres, Julia Adriana Juárez Rodríguez y Mario A. Toledano Espinosa, por todo su apoyo incondicional durante toda formación académica. A mi hermana Danielle, que me recuerda por qué estoy haciendo esto.

Agradezco a mi tutor, el Dr. Genaro Toledo Sánchez por haber confiado en mi persona, por la paciencia y por la dirección apoyo en la realización de este trabajo. A mi comité de tutores, Dr. Roelof Bijker y Dr. Varlen Grabski, así como los sinodales, el Dr. Pablo Roig Garcés, el Dr. Ángel Sánchez Cecilio, el Dr. Luis Manuel Montaña Zetina y el Dr. Antonio Ortiz Velásquez, por la atenta lectura de este trabajo y por sus comentarios en el proceso de revisión.

Gracias a mis queridos compañeros, que de una u otra forma me acompañaron en los momentos clave en mi vida: Edgar Pérez, Marín Zumaya, Tonatiuh Jiménez.

Agradezco a Conacyt por el apoyo económico durante los estudios de maestría.

Gracias a todos.

Prefacio

En el Modelo Estándar de Partículas Elementales, la Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas en inglés) describe la interacción fuerte entre partículas que llevan una carga de color. Los constituyentes básicos de la teoría son quarks y gluones. Con estos grados de libertad fundamentales, partículas compuestas de color neutro son formadas. En un panorama simple del modelo de quarks, estas partículas son *mesones*, que son estados ligados de un quark y un antiquark, y *bariones*, constituídos por tres quarks, uno de cada color. Las llamadas partículas exóticas, fuera de esta clasificación, como pueden ser los *glueballs* (su nombre en inglés), estados ligados formados únicamente por gluones, *híbridos* (quarks y gluones) y estados multiquark, también pueden arreglarse en estados incoloros, y son predichas como estados ligados en modelos basados en QCD. El estado multiquark con la forma más simple ($q - q - \bar{q} - \bar{q}$), llamado *Tetraquark*, se ha estudiado tanto teórica como experimentalmente, para encontrar claras muestras de su existencia.

En esta tesis se estudia la formación de un estado Tetraquark considerando un sistema de 2 quarks idénticos, y de dos antiquarks también idénticos, pero de sabor variable. Este sistema es analizado utilizando un modelo basado en QCD (*String-Flip*), en el cual se introduce un potencial de muchos cuerpos de tipo lineal para simular la interacción fuerte y ser capaz de confinar a los quarks en singletes de color; en este caso, pueden ser dos mesones o un tetraquark. Mediante una simulación Monte Carlo y una aproximación variacional, el sistema es hecho evolucionar tridimensionalmente, forzando que las partículas se aproximen entre sí, y donde se incluyen correlaciones cuánticas entre partículas idénticas, incluyendo el Principio de exclusión de Pauli. En condiciones donde la distancia entre partículas es potencialmente grande, el sistema describe propiedades de dos mesones aislados. De manera opuesta, a distancias muy cortas, éste describe un gas de partículas fermiónicas libres. Mediante esta simulación, se busca calcular observables tales como la energía total, radio cuadrado promedio, funciones de correlación y recombinación de partículas, que puedan resultar sensibles a la presencia del estado tetraquark en el sistema, y de esta forma, poder caracterizarlo. Esperamos que con los ingredientes incluidos en el modelo, las propiedades relevantes de la física de

la interacción fuerte hayan sido consideradas, dando solidez a nuestros resultados.

Índice general

Agradecimientos	v
Prefacio	vii
1. Introducción	1
1.1. Materia subatómica e interacciones fundamentales	1
1.1.1. Modelo Estándar	4
1.2. Interacción Fuerte	5
1.2.1. Lagrangiano de QCD	6
1.2.2. Evidencia de carga de color	10
1.2.3. Evidencia de gluones	12
1.3. Modelos potenciales: Potencial de Cornell	13
1.4. Factores de Color	14
1.5. Estados multiquark	17
1.5.1. Objetivo del trabajo	17
1.6. Tetraquark experimental	22
1.7. Trabajos similares	23
1.8. Descripción del trabajo	25
2. El problema de 2 cuerpos: Mesones	27
2.1. Ecuación de Schrödinger para un potencial lineal en una dimensión	27
2.2. Problema de 2 cuerpos: Mesones	30
2.3. Aproximación variacional	33
2.4. Radio cuadrado promedio	34
3. Sistema de 4 cuerpos	37
3.1. Potencial de muchos cuerpos	37
3.1.1. Potencial de dos cuerpos: mesón	38
3.1.2. Potencial de 4 cuerpos: Tetraquark	38
3.1.3. Potencial de 4 cuerpos: vectores auxiliares \vec{k}, \vec{l}	40
3.2. Función de onda variacional	41

3.3. Energía variacional	43
3.4. Cálculo Monte Carlo	45
4. Resultados	49
4.1. Parámetro variacional óptimo	49
4.2. Evolución de la energía	53
4.3. Distribución radial	59
4.4. Funciones de correlación	64
4.5. Recombinación dinámica	75
4.6. Potencial Tetraquark	78
5. Conclusiones	81
A. Término Cinético $\langle W \rangle_\lambda$	83
A.1. Mesón	84
A.2. Tetraquark	84
B. Método Monte Carlo: Algoritmo de Metrópolis	87
B.1. Integración Monte Carlo	87
B.2. Monte Carlo Variacional	88
B.3. Método de Metrópolis	89
C. Conversión de unidades	91
D. Correlación de dos cuerpos para N partículas	93
D.1. Función de distribución radial	94
Referencias	95

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se presentan los elementos de la teoría del Modelo Estándar de las Partículas Elementales, haciendo énfasis en la interacción fuerte, y se plantea la motivación y el objetivo de este trabajo.

1.1. Materia subatómica e interacciones fundamentales

La materia subatómica [1, 2] está compuesta por fermiones de espín $1/2$, de los cuales cada uno tiene una correspondiente antipartícula con carga eléctrica opuesta. Estos fermiones están organizados en tres generaciones: aquellos que pertenecen a la misma generación tienen propiedades similares, y la masa se incrementa de una generación a la siguiente; con la posible excepción de los neutrinos. Cada una de estas generaciones contiene dos *leptones* (cuadro 1.1) y dos *quarks* (cuadro 1.2), dando un total de *doce constituyentes fundamentales de la materia*. La jerarquía de masas provoca que las partículas decaigan a generaciones más bajas, de ser posible, lo que explica por qué la materia ordinaria (átomos) esté compuesta de partículas de primera generación. Los electrones rodean el núcleo atómico compuesto de protones y neutrones, y éstos últimos compuestos por quarks de primera generación. Los neutrinos $\nu_{e,\mu,\tau}$ de todas las generaciones raramente interactúan con la materia normal.

Los quarks y leptones interactúan por el intercambio de bosones de espín 1, o también llamados *bosones de norma*, que son los responsables de las fuerzas electromagnética, débil y fuerte. La fuerza electromagnética se ha conocido por mucho tiempo, y las otras dos fuerzas, “débil” y “fuerte” son llamadas así por su fuerza relativa con respecto a la fuerza electromagnética a bajas energías. La interacción gravitacional entre partículas elementales es tan pequeña en comparación con

Generación	Leptones	Masa	Carga Eléctrica	Vida Media
I	ν_e, e^-	$m_{\nu_e} < 2 \text{ eV}$ $m_e \sim 0.51 \text{ MeV}$	0, -1	ν_e estable $\tau_e > 4.6 \times 10^{26} \text{ años}$
II	ν_μ, μ^-	$m_{\nu_\mu} < 0.19 \text{ MeV}$ $m_\mu \sim 105.6 \text{ MeV}$	0, -1	ν_μ estable $\tau_\mu > 2.197 \times 10^{-6} \text{ s}$
III	ν_τ, τ^-	$m_{\nu_\tau} < 18.2 \text{ MeV}$ $m_\tau \sim 1.777 \text{ GeV}$	0, -1	ν_τ estable $\tau_\tau > 290.6 \times 10^{-15} \text{ s}$

Cuadro 1.1: Características de Leptones: masa, carga eléctrica y vida media. [3]

Generación	Tipo de quark (sabor)	Carga eléctrica	Masa
I	(u, d)	$(2/3, -1/3)$	$\sim (2.3 \text{ MeV}, 4.8 \text{ MeV})$
II	(c, s)	$(2/3, -1/3)$	$(1.27 \text{ GeV}, 0.095 \text{ GeV})$
III	(t, b)	$(2/3, -1/3)$	$(173.2 \text{ GeV}, 4.1 \text{ GeV})$

Cuadro 1.2: Características de Quarks: carga eléctrica y masa. [3]

las otras, que puede ser descartada en el modelo. Estas fuerzas tienen diferente magnitud, caracterizadas por una constante de acoplamiento.

Interacción electromagnética

La fuerza electromagnética afecta a todas las partículas con carga eléctrica. Es mediada por fotones y tiene un rango infinito. La naturaleza de largo alcance de la interacción tiene que ver con el hecho de que los fotones tienen una masa igual a cero. Incluye a todas las partículas con carga eléctrica, es decir, todos los fermiones con excepción de los neutrinos, y los bosones de norma cargados de la interacción débil. La magnitud de la interacción electromagnética es proporcional a $\alpha \sim \frac{1}{137}$.

Interacción débil

La fuerza débil es mediada por los bosones de norma Z^0 y W^\pm , cuya interacción fundamental de estos últimos cambia el sabor de los quarks, y tiene un rango finito, menos de 10^{-16} m , puesto que los bosones W y Z son masivos, aproximadamente 90 veces más que el protón. Esta es la única interacción que tienen los neutrinos. La teoría de Fermi original utilizada para el decaimiento beta utiliza una constante de acoplamiento dimensional G_F (constante de Fermi) con un valor alrededor de 10^{-5} . Esta constante está relacionada con una más fundamental adimensional g_W , donde se toma en cuenta la masa de los bosones W , $G_F = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g_W^2}{m_W^2}$, cuyo valor es de alrededor de $g_W \sim 0.6$, comparable con aquella de la interacción electromagnética.

Interacciones	Magnitud relativa	Leptones ν_i, l_i	Quarks u_i, d_i
Fuerte	1	✓ , ✓	✓
Electromagnética	10^{-2}	✓ , ✓	✓
Débil	10^{-5}	✓, ✓	✓
Gravitacional	10^{-40}	✓, ✓	✓

Cuadro 1.3: Interacciones fundamentales. Se muestra en qué tipo de interacciones participan las partículas elementales.

Interacción fuerte

La interacción fuerte es mediada por gluones y actúa sólo en quarks, debido a que llevan asociada una de tres cargas de color: **blue (b)**, **green (g)** o **red (r)** (azul, verde y rojo, respectivamente). Además de esto, los quarks llevan una carga eléctrica fraccionaria de $2/3$ ó $1/3$ y vienen en seis *sabores* o tipos distintos (figura 1.2): **u** (up), **d** (down), **c** (charm), **s** (strange), **b** (bottom) y **t** (top). Estos sabores se organizan en generaciones bajo interacciones débiles. Las antipartículas correspondientes, los antiquarks, llevan una correspondiente carga anticolor, y los denotaremos con la notación \bar{q} . Los quarks tienen un papel similar en la espectroscopía de hadrones de la misma forma que los neutrones y protones en la espectroscopía nuclear y los electrones y núcleos en la atómica [5]. En el cuadro 1.3 se muestran las interacciones en las cuales participan las partículas.

La primera generación de quarks u y d tienen masas similares por la cual se les asigna una simetría de *Isospín*, y conforman un isodoublete, i. e., tienen asignado un isospín $I = 1/2$ y $I_3 = \pm 1/2$. La segunda y tercera generación de quarks tienen asignados los siguientes números cuánticos: quark s ($S = -1$), quark c ($C = +1$), quark b ($B = -1$), quark t ($T = +1$). Estas generaciones contienen a los hadrones extraños, hadrones charm, y hadrones B creados en un laboratorio de altas energías, donde colisionan hadrones de primera generación. Estos siempre son creados en pares, de tal forma que el estado final tiene $S = 0, C = 0, B = 0$ y $T = 0$; estos números cuánticos son conservados en la interacción fuerte y electromagnética [4].

La simetría de color de la teoría nos dice que hay 8 tipos de gluones, con masa cero y eléctricamente neutros, como el fotón. Entonces, por analogía, la interacción fuerte entre quarks debería ser de largo alcance, sin embargo, se observa que los quarks se encuentran confinados en lo que se conoce como *hadrones*, y la interacción fuerte residual entre estos estados ligados de los quarks, es de corto alcance.

La interacción fuerte tiene dos características peculiares, que lo diferencian de las demás fuerzas. Primero, los gluones llevan carga de color, y por tanto pueden interactuar no sólo con los quarks sino también entre ellos. En segundo lugar, la evolución con la energía de la constante de acoplamiento de la teoría, $\alpha_s(Q^2)$ (Q como momento transferido) muestra que es más débil a altas energías, cuando normalmente es de $\alpha_s \sim 1$ con un rango de $\sim 10^{-15}m$. Estas dos propiedades tienen una consecuencia importante, los quarks no se observan de forma aislada sino en hadrones, como se mencionó antes, y a este efecto se le llama *confinamiento de color*. Usando esta terminología, la teoría señala que *todas las partículas en la naturaleza son incoloras*. Eso significa que, ya sea que los tres colores (anticolores) se encuentran en la misma cantidad, o que la cantidad total de cada color es cero (ej. *red-antired*). Las combinaciones incoloras típicas son quark-antiquark con la misma carga de color (anticolor) ($q_r\bar{q}_r; q_g\bar{q}_g; q_b\bar{q}_b$) llamados mesones, y combinaciones de 3 quarks (antiquarks) con distinta carga de color $q_r q_g q_b (\bar{q}_r \bar{q}_g \bar{q}_b)$ llamados bariones. Algunos ejemplos de hadrones en la naturaleza son el protón p (uud), constituyente del núcleo atómico, y el pión π^+ ($u\bar{d}$), una partícula que se puede detectar en rayos cósmicos.

De forma general, las únicas combinaciones $q^m\bar{q}^n$ permitidas por el confinamiento de color son de la forma:

$$(3q)^p (q\bar{q})^n; \quad (p, n \geq 0)$$

y su correspondiente en antipartículas. Combinaciones inusuales como $qq\bar{q}\bar{q}$ y $qqq\bar{q}$ pueden ser mesones y bariones denominados exóticos, respectivamente. En este trabajo estamos interesados en un estado de la forma $(qq\bar{q}\bar{q})$.

1.1.1. Modelo Estándar

El **Modelo Estándar** (ME) de la física de partículas elementales describe a las partículas tal como se mencionó en párrafos anteriores, combinando dos teorías, la relatividad y la mecánica cuántica. Todas las partículas son interpretadas como excitaciones de campos cuánticos relativistas, y su comportamiento es descrito por el Lagrangiano del ME, que es una función de estos campos. Las partículas bosónicas (espín entero) son las responsables de transmitir las fuerzas fundamentales de la naturaleza, y las fermiónicas (espín semi entero) son los constituyentes de la materia. Estas partículas llevan estos nombres debido a que los primeros cumplen con la estadística de Bose-Einstein, y los segundos con la de Fermi-Dirac.

Estas interacciones fundamentales pueden ser vistas como manifestaciones de la invariancia bajo la simetría de norma local correspondiente: $\mathbf{U}(1)$ para la interacción electromagnética, $\mathbf{SU}(2)$ para la débil y $\mathbf{SU}(3)$ para la fuerte. Las interacciones electromagnética y débil son englobadas en la teoría electrodébil en un grupo local $SU_L(2) \times U(1)$ donde el subíndice L en el grupo de isospín $SU(2)$ indica que se trata con fermiones quirales, o que los fermiones izquierdos son dobletes bajo $SU(2)_L$ mientras que los derechos se toman singletes. Entonces en resumen, el Modelo Estándar incluye los grupos de simetría

$$SU_C(3) \times SU_L(2) \times U(1).$$

Un último bosón en la teoría es el bosón de Higgs, una partícula de espín cero y no cargado, con una masa alrededor de 125 GeV, descubierto en Julio de 2012. De acuerdo al ME las masas de las partículas son generadas por un campo dinámico resultante de las fluctuaciones cuánticas entorno al valor de expectación del vacío en un rompimiento espontáneo de simetría electrodébil $\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{U}(1)$, lo que resulta en la existencia del bosón de Higgs.

En la siguientes secciones se explicarán más cosas sobre la interacción fuerte, que dará la base a modelos fenomenológicos y así tener las bases para la realización del trabajo.

1.2. Interacción Fuerte

Es más común hablar de la interacción fuerte en la física nuclear, donde las interacciones de protones y neutrones son estudiadas a energías relativamente bajas (decenas de MeV). Aún así, en 1947 se descubrieron nuevos tipos de hadrones en rayos cósmicos, que no estaban presentes en la materia ordinaria. Para crear estas partículas se requería de energías altas, y con el tiempo, al tener una tecnología más avanzada en aceleradores de partículas, y por lo tanto mayor energía en las colisiones, se fueron descubriendo un número mayor de hadrones. Para finales de la década de los 60's se descubrieron tantos hadrones que fue necesario un esquema teórico para interpretar esta multitud de estados; el resultado fue el *Modelo de Quarks*. En 1964, Gell-Mann [6] e independientemente Zweig [7], propusieron que todos los hadrones observados, como los núcleos atómicos, no son fundamentales, y pueden ser interpretados como estados ligados de sólo tres partículas fundamentales de espín $\frac{1}{2}$: los quarks [1].

Si uno considera tres sabores de quarks u , d y s en una simetría de sabor $SU_F(3)$, en este panorama los mesones son estados ligados de quark-antiquark, mientras que los bariones están compuestos por tres quarks. Considerando esta simetría de

sabor, las tablas de Young [8, 9] proveen una aproximación sencilla para obtener una descomposición del producto de representaciones 3 y $\bar{3}$. Para mesones se tiene que:

$$\bar{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1 \quad (1.1a)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad (1.1b)$$

y para bariones

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \quad (1.2a)$$

$$\square \otimes \square \otimes \square = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}. \quad (1.2b)$$

Esto permite clasificar a los hadrones en multipletes, caracterizados bajo su isospín I e hipercarga Y .

Como se había mencionado anteriormente, las fuerzas entre los quarks tienen que ser de largo alcance, puesto que los gluones no tienen masa, lo que no implica que las fuerzas entre los hadrones tengan que ser de largo alcance, pues no tienen color; las fuerzas entre éstos son fuerzas residuales que experimentan sus quarks constituyentes y que se cancelan cuando los hadrones se alejan.

La cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés) es la teoría que describe la interacción fuerte en el Modelo Estándar, o sea, la dinámica de los quarks y de los gluones. QCD es una teoría de norma no-abeliana con simetría exacta $\mathbf{SU}_C(\mathbf{3})$ de color, lo que implica una independencia del sabor y del color en la interacción. Aunque QCD no ha sido probada con la misma precisión que la teoría de la interacción electromagnética (QED por sus siglas en inglés), aún no ha estado en contradicción con ningún experimento [10].

1.2.1. Lagrangiano de QCD

QCD es parecida a QED, en el sentido en que los vértices fundamentales de las interacciones son parecidos (tomando el color el papel de la carga eléctrica), como se muestra en la figura 1.1. Sin embargo, la carga de color de los gluones permite otro tipo de vértices fundamentales en la teoría, como son la interacción únicamente entre gluones .

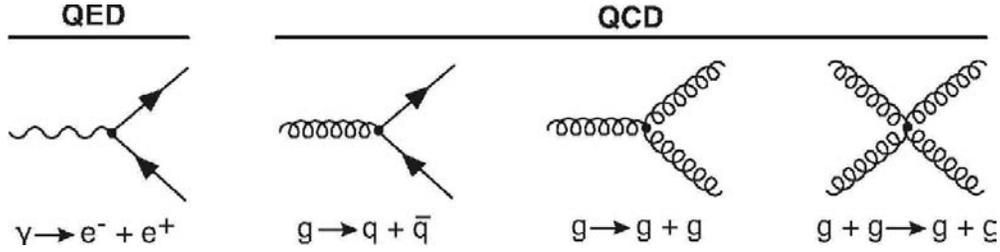


Figura 1.1: Vértices fundamental para QED y QCD. El color de un quark cambia en un vértice quark gluón, puesto que en el vértice se tiene carga de color neutra.

Representando a los gluones por un potencial vectorial $G_\mu^a(x)$ con índice de Lorentz $\mu = 0, 1, 2, 3$, como en electromagnetismo, se tienen que dar condiciones de norma para $G_\mu^a(x)$ para tener los grados de libertad necesarios [11]. Partiendo de una densidad Lagrangiana para un quark (fermión) libre

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{q}_j(x)(i\not{\partial} - m_0)q_j(x), \quad (1.3)$$

donde m_0 es una matriz diagonal cuyas entradas son las masas crudas de los quarks, que se pueden poner $m = 0$ si son considerados sin masa, y $j = 1, 2, 3$ denotan los —'índices de color. Por simplicidad no mostramos este índice. Aunque los sabores de quarks llevan una masa distinta, éstas son indistintas en la teoría. Este Lagrangiano es invariante bajo una transformación *global* $SU(3)$,

$$q'(x) = Uq(x),$$

donde U es una matriz unitaria 3×3 que actúa sobre el índice de color, y “global” se refiere a una independencia en el espacio tiempo. Una matriz $SU(3)$ genérica requiere 8 parámetros reales, usualmente escritos de la siguiente forma:

$$U = \exp(i \sum_a \theta_a t^a); \quad t^a = \lambda^a/2,$$

donde θ^a son parámetros del grupo, y $\lambda^a/2$ ($a = 1, \dots, 8$) son matrices hermitianas 3×3 . Usualmente se utilizan las matrices de Gell-Mann como una representación de éstas,

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

donde los generadores obedecen el álgebra de Lie,

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c; \quad \text{Tr}[\lambda_a, \lambda_b] = 2\delta_{ab},$$

con f^{abc} constantes reales de estructura de la simetría, y la identidad de Jacobi asociada con esta álgebra,

$$[[t^a, t^b], t^c] + [[t^c, t^a], t^b] + [[t^b, t^c], t^a] = 0. \quad (1.7)$$

Este grupo es no-Abeliano puesto que no todos los generadores t_a conmutan entre sí.

Al imponer una simetría *local* de color ($\theta_a = \theta_a(x)$), con dependencia en el espacio, se encuentra que los quarks no son partículas libres sino que interactúan entre ellos a través de estos nuevos potenciales, es decir, la simetría de norma genera una dinámica de las cargas de color.

Se introducen 8 potenciales gluónicos, G_μ^a , cada uno transformando como

$$G_\mu^a \rightarrow G_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a - f^{abc}\theta_b G_{\mu c}, \quad (1.8)$$

y su derivada covariante,

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + igt_a G_\mu^a, \quad (1.9)$$

y agregando un término cinético $\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$, el Lagrangiano libre puede ser modificado para tener el Lagrangiano invariante de norma de QCD,

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}(i\not{D} - m)q - g(\bar{q}\gamma^\mu t_a q)G_\mu^a - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

Este nuevo Lagrangiano tiene una simetría de norma, invariante bajo una rotación $U(x)$ en función del espacio tiempo en los campos de los quarks. Para tener una invariancia del término cinético, se tiene que:

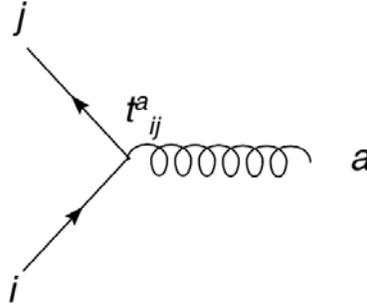


Figura 1.2: El color de un quark puede cambiar $i \rightarrow j$ por un gluón de color a , acoplado por un generador de $SU(3)$ $t_{ij}^a = \lambda_{ij}^a/2$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - gf_{abc}G_\mu^b G_\nu^c. \quad (1.11)$$

Este último término es no lineal en términos del potencial de norma. Aquí tenemos una diferencia con respecto a la electrodinámica cuántica, pues los gluones pueden tener autointeracción como se muestra en la figura 1.1.

El término de interacción en el Lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{int} = -g\bar{q}_j G_\mu^a \frac{\lambda_{ji}^a}{2} \gamma_\mu q_i, \quad (1.12)$$

donde g es una constante de acoplamiento. Un quark puede cambiar su color $i \rightarrow j$, como se muestra en la figura 1.2.

Debido a la libertad asintótica, una expansión en serie de QCD en teoría de perturbaciones no funciona a baja energía. El parámetro de expansión, la constante de acoplamiento, se vuelve demasiado grande y por tanto no se puede confiar en los resultados. El valor de la constante se aproxima a 1 a una energía de algunos cientos de MeV, una escala llamada $\Lambda_{QCD} \sim 250$ MeV. La teoría de perturbaciones se vuelve confiable por encima de esta escala.

En bajas energías es donde se tiene la mayor contribución de masas a los hadrones [12]. Los quarks usualmente se clasifican en *ligeros* $m_u, m_d \ll \Lambda_{QCD}$ y *pesados* $m_c, m_b, m_t \gg \Lambda_{QCD}$, y los sistemas compuestos por quarks pesados se consideran no relativistas. En QCD, las masas de los quarks son llamadas “masas corriente”, y la masa de los quarks u y d son de alrededor de 5 MeV. En contraste, un modelo de quarks constituyentes, como el que será utilizado en esta tesis, la masa es estimada a partir del valor de la masa medida de los hadrones que constituyen. Por ejemplo, la diferencia de masas entre el protón (uud) y el neutrón (udd) debe

de estar relacionada con la diferencia de masas entre el quark u y d . Las masas de QCD son mucho más ligeras, puesto que la energía dominante es atribuida a los gluones.

Las masas constituyentes que generalmente se utilizan para los quarks [5] se muestran en el cuadro 1.4. También se muestra la razón de masas en relación con la masa del quark u .

Sabor de quark	Masa constituyente [MeV]	Razón de masa
u	340	$m_u/m_u = 1$
d	340	$m_d/m_u = 1$
s	486	$m_s/m_u = 1.44643$
c	1550	$m_c/m_u = 4.6131$
b	4730	$m_b/m_u = 14.0774$

Cuadro 1.4: Masas constituyentes de quarks. Se muestra la razón de masa en comparación con el quark u .

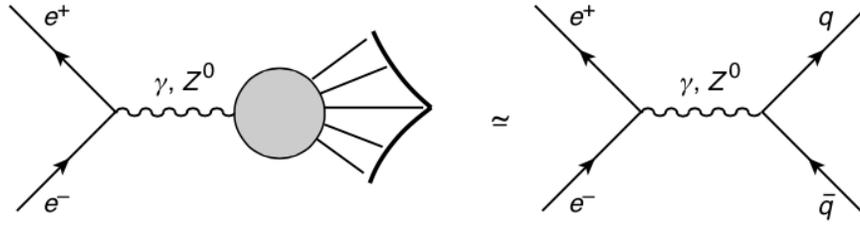
En el trabajo se utilizan masas constituyentes de quarks, pero sólo es de interés la razón de masas descrita, no el valor numérico como tal.

En las siguientes secciones se presentan algunas de las evidencias de las propiedades descritas por el Lagrangiano de QCD, como el color y los gluones.

1.2.2. Evidencia de carga de color

Como ya se mencionó anteriormente, cada sabor de quarks tiene asociada una de las tres cargas posibles de color, entonces, cada quark pertenece a un triplete de la representación de color $SU(3)_C$. Cualquier partícula física que observemos debe de ser un singlete de color debido al confinamiento. Utilizando tablas de Young para realizar una descomposición en representaciones, el cálculo es análogo al exhibido en las tablas de Young 1.1 y 1.2. Entonces, los bariones (estados ligados de 3 quarks) pertenecen al singlete, que es totalmente antisimétrico tal como lo requiere el principio de Pauli, y los mesones (estados ligados quark-antiquark) pertenecen a uno totalmente simétrico. Se tiene que todos los hadrones conocidos son singletes de color, por lo que este número cuántico es considerado oculto. Este es el postulado de confinamiento de color y explica la no existencia de quarks libres. Más adelante se discutirá cómo también el estado exótico de tetraquark puede estar en un singlete de color.

Históricamente [12], la introducción de los colores fue motivada por el hecho de que el Modelo de Quarks no podía explicar la naturaleza peculiar del barión Δ^{++} ,

Figura 1.3: Proceso $e^+e^- \rightarrow$ hadrones

que tiene momento angular total cero $J = 3/2$. Para cumplir con esta propiedad, uno tiene que poner sus tres constituyentes, quarks u con espines alineados. Esta configuración no está permitida en una estadística de Dirac puesto que los quarks son fermiones. Esto es resuelto cuando uno incluye otro número cuántico a los quarks, el de color (con al menos 3 colores), de tal forma que Δ^{++} puede representarse como:

$$|\Delta^{++}, J = 3/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} |u_\alpha \uparrow, u_\beta \uparrow, u_\gamma \uparrow\rangle, \quad (1.13)$$

con una función de onda antisimétrica con α, β, γ como índices de color.

Una evidencia directa de que el color viene en tres tipos puede encontrarse en diferentes experimentos. Un ejemplo clásico es en una colisión electrón positrón (e^+e^-), en la cual la sección eficaz total $R_{e^+e^-}$ en la producción de hadrones $e^+e^- \rightarrow$ hadrones, normalizada a la sección eficaz $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, tiene que ser igual al número de colores N_c multiplicada por la suma de los cuadrados de las cargas de los quarks involucrados (si estos superan el umbral de energía de producción), si uno asume la producción de pares $q\bar{q}$ (modelo de partones) antes de la hadronización (ver figura 1.3).

$$R_{e^+e^-} \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma, Z^0 \rightarrow \text{hadrones})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \sim N_c \sum_{u,d,s,\dots} Q_i^2. \quad (1.14)$$

Los datos experimentales concuerdan con el valor de R para tres colores en todos los casos ($N_c = 3$)[10]. De manera similar, la tasa de decaimiento del bosón Z^0 también tiene dependencia en N_c . Su razón de decaimiento hadrónico es:

$$R_Z \equiv \frac{\Gamma(Z^0 \rightarrow \text{hadrones})}{\Gamma(Z^0 \rightarrow e^+e^-)} \sim \frac{N_c}{v_e^2 + a_e^2} \sum_{u,d,s,\dots} (v_i^2 + a_i^2), \quad (1.15)$$

donde v_i y a_i son acoplamientos de los vectores y vectores axiales electrodébiles del par $q\bar{q}$ o e^+e^- acoplados al Z^0 . Experimentalmente, uno tiene [13]:

$$R_Z = 20,77 \pm 0,08$$

1.2.3. Evidencia de gluones

Una de las evidencias de la existencia de gluones se puede observar en la dispersión $e^-p \rightarrow e^-p$, donde se estudia la estructura interna del protón, además de la dispersión $e^-n \rightarrow e^-n$ en una colisión de un electrón con un blanco fijo de deuterio [5]. Para esto, la corriente hadrónica se parametriza usando las funciones de estructura $F_1(x)$ y $F_2(x)$, que están relacionadas con propiedades electromagnéticas del protón. Estas funciones satisfacen las siguientes relaciones, para protón (ep) y neutrón (en) respectivamente:

$$\frac{1}{x}F_2^{ep}(x) = \frac{4}{9}u^p(x) + \frac{1}{9}d^p(x), \quad (1.16)$$

$$\frac{1}{x}F_2^{en}(x) = \frac{4}{9}d^p(x) + \frac{1}{9}u^p(x), \quad (1.17)$$

donde $u^p(x)$ y $d^p(x)$ son las funciones de probabilidad de que el quark correspondiente se lleve una fracción del momento (x). Observamos que se desprecia la contribución de quarks s puesto que llevan una fracción muy pequeña del momento del nucleón. Al integrar los datos experimentales en $F_2^{ep,en}$ se tiene la siguiente información:

$$\int_0^1 F_2^{ep}(x)dx = \frac{4}{9}\epsilon_u + \frac{1}{9}\epsilon_d = 0.18, \quad (1.18)$$

$$\int_0^1 F_2^{en}(x)dx = \frac{1}{9}\epsilon_u + \frac{4}{9}\epsilon_d = 0.12, \quad (1.19)$$

donde ϵ_q es la fracción de momento llevada por el quark q .

$$\epsilon_u \equiv \int_0^1 dx x(u + \bar{u}), \quad \epsilon_d \equiv \int_0^1 dx x(d + \bar{d}).$$

Resolviendo para ϵ_u y ϵ_d y tomando que $\epsilon_g \sim 1 - \epsilon_u - \epsilon_d$, siendo ϵ_g un elemento ajeno a los quarks u y d se tiene que:

$$\epsilon_u = 0.36; \quad \epsilon_d = 0.18; \quad \epsilon_g = 0.46.$$

Entonces, ϵ_g se lleva cerca de 50 % del momento del protón, lo cual se identifica como los gluones (g).

1.3. Modelos potenciales: Potencial de Cornell

Ya se ha mencionado antes que las interacciones entre quarks van del intercambio de uno a muchos gluones y autointeracciones del gluón, siendo responsable esto último del confinamiento de quarks, que a bajas energías, permanecen confinados en hadrones, pero a altas energías y momentos se comportan casi como partículas libres. Es necesario el uso de técnicas altamente sofisticadas para estudiar esta parte de la teoría, y los cálculos en *Lattice* [14] se han establecido como una herramienta de confianza a la hora de hacer cálculos no perturbativos en QCD. Uno de los resultados obtenidos mediante esta técnica es la forma cualitativa para el potencial de confinamiento de los quarks pesados, tomando como modelo una interacción estática quark-antiquark, que consiste en un potencial con un término tipo Coulomb (inverso a la distancia) más un término lineal (figura 1.4): Potencial de Cornell [15]:

$$V_{\bar{Q}Q} \sim C_F \frac{\alpha_s(r)}{r} + \sigma r, \quad (1.20)$$

donde C_F es un factor de color dado por

$$C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} = 4/3 \quad (N_c = 3 \text{ para } \text{SU}(3)_C),$$

y σ es llamada tensión de la cuerda en QCD. El término lineal da lugar a que la separación del par $\bar{Q}Q$ es energéticamente imposible. Conociendo la forma del potencial, es posible resolver el problema mecánico cuántico para obtener el espectro de masa y las funciones de onda para la interacción entre quarks. Algunas ideas cualitativas de la naturaleza del confinamiento llevan a una imagen de los quarks [18, 19, 20] en la cual éstos son ligados por cuerdas o tubos de flujo cromoelectrónicos. Existen más modelos potenciales [21] para estados ligados quark-antiquark, como pueden ser el potencial de Martin [22], potencial de Richardson [23], potencial logarítmico [24], por citar algunos. La condición básica seguida en estos potenciales es la independencia de sabor y la existencia de un confinamiento lineal.

De todos los modelos potenciales con órdenes de potencia en r , se piensa que el potencial fenomenológico de Cornell es el más “cercano a la realidad” para mesones, pues está basado en la extrapolación de dos comportamientos: ultravioleta a cortas distancias (término de Coulomb) e infrarrojo a largas distancias (término lineal). Incluye dos conceptos de QCD: confinamiento y libertad asintótica. Frecuentemente se menciona que mientras que la parte de Coulomb del potencial está contenida en la parte perturbativa de QCD, la parte lineal es puramente no perturbativa y que necesita ser añadida para obtener un potencial completo.

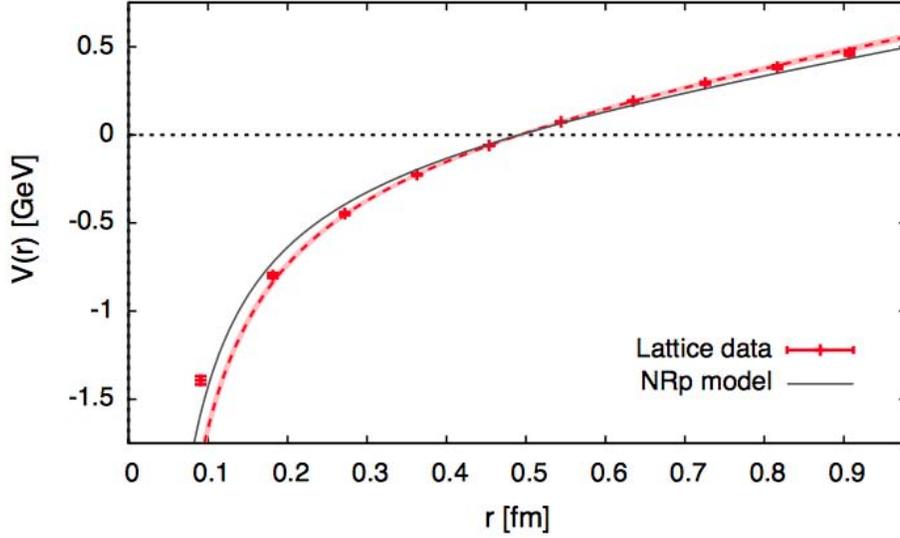


Figura 1.4: Potencial de charmonio independiente de espín calculado de una función de onda Nambu-Bethe-Salpeter en Lattice QCD. Aquí se compara con un modelo potencial en la curva sólida. La gráfica se toma de las referencias [16] y [17].

Es sabido que uno no puede resolver la ecuación de Schrödinger en mecánica cuántica utilizando este potencial (ecuación 1.20), excepto para algunos modelos simples. Algunos trabajos [21] utilizan teoría de perturbaciones para estudiar este potencial. Aquí la ventaja de tomar el potencial de Cornell para el estudio es que se tiene naturalmente dos opciones de Hamiltoniano de referencia, uno basado en el término de Coulomb y otro en el término lineal. Se espera que r_0 juega un papel importante, donde el potencial $V(r_0) = 0$. En las referencias [25, 26] se argumenta que si el tamaño medido del estado estudiado es $\langle r \rangle < r_0$, entonces la parte de Coulomb funciona mejor como Hamiltoniano de referencia, y en caso contrario la parte lineal funciona mejor.

1.4. Factores de Color

Si consideramos teoría de perturbaciones en el orden más bajo la interacción entre dos quarks es mediada por el intercambio de un sólo gluón [5], como se muestra en la figura 1.5. Utilizando las reglas de Feynman correspondientes tenemos la siguiente amplitud de dispersión para la interacción quark-antiquark:

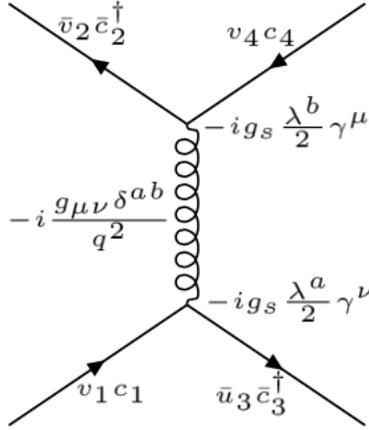


Figura 1.5: Diagrama de Feynman para la interacción quark-antiquark a nivel árbol. Se muestran los términos de propagador y vértice.

$$-i\mathcal{M} = \bar{u}_3 \bar{c}_3^\dagger \left(-ig_s \frac{\lambda^a}{2} \gamma^\nu \right) u_1 c_1 \left(-i \frac{g_{\mu\nu} \delta^{ab}}{q^2} \right) \bar{u}_2 \bar{c}_2^\dagger \left(-ig_s \frac{\lambda^b}{2} \gamma^\mu \right) v_4 c_4 \quad (1.21)$$

$$\mathcal{M} = -\frac{g_s^2}{q^2} (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) (\bar{v}_2 \gamma^\mu v_4) \times \underbrace{\frac{1}{4} (c_3^\dagger \lambda^a c_1) (c_2^\dagger \lambda^a c_4)}_{\text{Factor de color}}, \quad (1.22)$$

y el correspondiente análogo para una interacción quark-quark.

$$\mathcal{M} = -\frac{g_s^2}{q^2} (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_2 \gamma^\mu u_4) \times \underbrace{\frac{1}{4} (c_3^\dagger \lambda^a c_1) (c_4^\dagger \lambda^a c_2)}_{\text{Factor de color}}, \quad (1.23)$$

donde g_s es la constante de interacción fuerte, $c_i (i = r, g, b)$ corresponde al color asociado al quark, y λ^i son las matrices de Gell-Mann mencionadas con anterioridad. Una diferencia con respecto a QED es el factor de color adicional, al menos en los diagramas donde es válido sustituir un fotón por un gluón. De igual forma, el signo de este factor nos dirá si el potencial es atractivo o repulsivo, y así poder tener un estado ligado o no. Utilizando la notación para el factor de color $c_i^\dagger \lambda^a c_j = \langle i | \lambda^a | j \rangle = \lambda_{ij}^a$, éste se puede calcular como

$$\frac{1}{4} \sum_a \lambda_{ij}^a \lambda_{kl}^a = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{6} \delta_{ij} \delta_{kl} \equiv f(ijkl), \quad (1.24)$$

de tal forma que $f(ijkl)$ depende si los pares de color son los mismos o no,

$$f(ijkl) = \begin{cases} -\frac{1}{6} & \text{si } i = j & k = l \\ \frac{1}{2} & \text{si } i = l & j = k \\ \frac{1}{3} & \text{si } i = j = k = l \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Aquí se tiene que tomar en cuenta que el gluón puede estar en un octete o en un singlete de color. Tomamos el singlete como eje principal en el espacio de color-anticolor,

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}); \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

y consideramos las matrices de Gell-Mann ($i = 1, 2, \dots, 8$) en esta base,

$$\begin{aligned} |1\rangle &= r\bar{g}; & |2\rangle &= g\bar{r}; & |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}) \\ |4\rangle &= r\bar{b}; & |5\rangle &= b\bar{r}; & |6\rangle &= g\bar{b} \\ |7\rangle &= b\bar{g}; & |8\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}). \end{aligned}$$

Haciendo los cálculos correspondientes para la interacción $q - \bar{q}$ en un octete de color, sólo se tienen interacciones de la forma $ij \rightarrow ij$, de tal forma que haciendo la suma sobre todos los posibles colores (diagramas), y promediando sobre todos, tenemos el mismo factor en todos los diagramas $f = 1/6$. Tenemos un potencial repulsivo.

En el caso de $q - \bar{q}$ en un singlete de color, tenemos tres combinaciones para una transición $ii \rightarrow ii$ y 6 combinaciones para $ii \rightarrow jj$, y el factor de color sobre todos los estados posibles resulta $f = -4/3$, el potencial es atractivo. Hay que recordar que esto es válido a cortas distancias, correspondiente al término de Coulomb de la ecuación 1.20, y es por esto que los mesones son singletes de color.

Un sistema de interés en este trabajo es la interacción $q - q$ ($\bar{q} - \bar{q}$), llamado diquark (antidiquark), pues son la base del sistema de 4 cuerpos. En este caso, en SU(3) tenemos representaciones $3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6$ ($\bar{3} \otimes \bar{3} = \bar{6} \oplus 3$), y el potencial atractivo ocurre en un estado triplete, con un factor de color $f = -2/3$.

$$\text{Triplete de color } \bar{3} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(rg - gr) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(br - rb) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(gb - bg) \end{cases}$$

Tenemos un estado ligado con un potencial con la mitad de la intensidad de un sistema $q - \bar{q}$, pero no tenemos un singlete de color, que no existe de forma aislada. El cuadro 1.5 muestra los factores de color correspondientes a las representaciones $SU(3)_C$ de los quarks.

$R_1 \otimes R_2 \in R$	$3 \otimes \bar{3} \in 1$	$3 \otimes \bar{3} \in 8$	$3 \otimes 3 \in \bar{3}$	$3 \otimes 3 \in 6$
$f(R)$	$-4/3$	$1/6$	$-2/3$	$1/3$

Cuadro 1.5: Factores de color para interacciones $q - \bar{q}$ y $q - q$.

1.5. Estados multiquark

Los mesones convencionales [27] están compuestos por un quark y un anti-quark, y los (anti)bariones por tres (anti)quarks. Desde su introducción en 1964, el modelo de quarks puede acomodar hadrones no convencionales. El primer análisis detallado de hadrones exóticos fue estudiado por R. L. Jaffe en 1977 [28]. Estos hadrones “exóticos” han sido estudiados teóricamente desde entonces, pero no hubo evidencias experimentales de su existencia hasta hace aproximadamente 10 años.

Todos los hadrones no convencionales son considerados *exóticos*. El término multiquark es dado para cualquier mesón que consiste de más de dos quarks/antiquarks o cualquier barión con más de tres. Los mesones *ordinarios* [29] incluyen a los mesones tradicionales ($q\bar{q}$), híbridos ($q\bar{q}g$), y glueballs, compuesta de gluones. En este trabajo consideramos mesones exóticos, los cuales están formados por 4 quarks.

1.5.1. Objetivo del trabajo

En este trabajo se planteó investigar, mediante una aproximación variacional y una simulación Monte Carlo, cómo evoluciona un sistema de 2 quarks qq y 2 antiquarks $\bar{Q}\bar{Q}$, donde se consideran los sabores de los antiquarks $Q = u, s, c, b$. En este sistema de 4 cuerpos se introduce la posibilidad de formar dos estados de mesones o un estado diquark-antidiquark (tetraquark). Esto ayudará a entender cómo está formada la estructura hadrónica de un tetraquark a partir de dos mesones, tratando de identificar observables que sean sensibles a la formación de este estado, tales como la correlación entre quarks, la recombinación entre ellos y la energía asociada a estos estados.

A continuación se darán características de diversas formas de cómo se ha estudiado este sistema y características que tomaremos en cuenta en el trabajo.

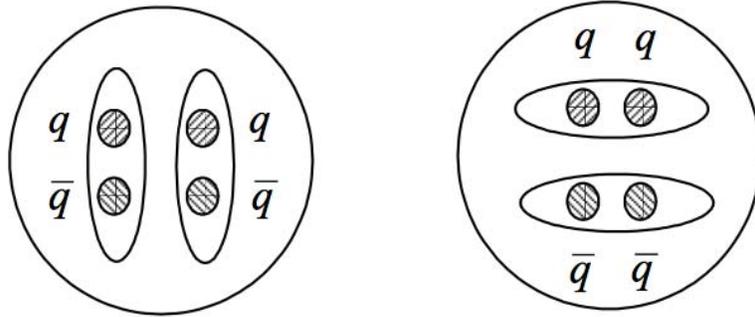


Figura 1.6: Molécula de mesones, diquark-antidiquark.

Moléculas de Mesones

Cerca del umbral cinemático en la dispersión mesón-mesón, las fuerzas entre éstos pueden ser lo suficientemente fuertes para formar un estado ligado (molécula de mesón). La aniquilación de este estado no es posible tal que la interacción es dominada por el intercambio de quarks/antiquarks pertenecientes a diferentes mesones dentro de la molécula. Estos estados pueden estar mezclados con los de mesón, y no hay una clara distinción entre un tetraquark y una molécula de mesón [29].

Uno de los conceptos teóricos importantes en el estudio de tetraquarks es el diquark/antidiquark. Aunque este estado no es un singlete de color, existe evidencia teórica de que pueden existir dentro de los hadrones. Además de los tetraquarks, su estudio puede ser relevante para otros problemas, tales como el plasma quark-gluón, o en algunos modelos de bariones.

En el espacio de color en QCD, la simetría de grupo es $SU(3)_c$, y los diquarks pertenecen a los multipletes del producto directo de dos tripletes, $3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6$. Claramente estos estados no son singletes de color, de tal forma que sólo pueden existir dentro de la materia hadrónica. Si queremos considerar tetraquarks, tenemos que expandir el siguiente producto directo:

$$(3 \otimes 3) \otimes (\bar{3} \otimes \bar{3}) \quad (1.26a)$$

$$\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right), \quad (1.26b)$$

donde los diquarks tienen la siguiente estructura

- Diquark

$$3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6 \tag{1.27a}$$

$$\square \otimes \square = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} . \tag{1.27b}$$

■ Antiquark

$$\bar{3} \otimes \bar{3} = \bar{6} \oplus 3 \tag{1.28a}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} . \tag{1.28b}$$

Entonces,

$$(3 \otimes 3) \otimes (\bar{3} \otimes \bar{3}) = (\bar{3} \oplus 6) \otimes (\bar{6} \oplus 3) \tag{1.29a}$$

$$(\square \otimes \square) \otimes \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) . \tag{1.29b}$$

Aquí se tienen que considerar 4 términos,

■

$$\bar{6} \otimes \bar{3} = 8 \oplus 10 \tag{1.30a}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} , \tag{1.30b}$$

■

$$\bar{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1 \tag{1.31a}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} , \tag{1.31b}$$

■

$$\bar{6} \otimes 6 = 8 \oplus 27 \oplus 1 \tag{1.32a}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \square \\ \hline \square & & & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} , \tag{1.32b}$$

■

$$6 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \quad (1.33a)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \square = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}. \quad (1.33b)$$

Entonces, la representación irreducible del grupo $SU(3)_c$ para un sistema $qq\bar{q}\bar{q}$ es:

$$\begin{aligned} (\bar{3} \oplus 6) \otimes (3 \oplus \bar{6}) &= (\bar{3} \otimes 3) \oplus (\bar{3} \otimes \bar{6}) \oplus (6 \otimes 3) \oplus (6 \otimes \bar{6}) \\ &= (1 \oplus 8) \oplus (8 \oplus 10) \oplus (8 \oplus \bar{10}) \oplus (1 \oplus 8 \oplus 27). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Utilizando los elementos mostrados en la sección anterior, sólo el singlete proveniente de la ecuación 1.31 es atractivo y observable.

Los valores de isospín permitidos [30] son $I = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$, y los valores de hipercarga son $Y = 0, \pm 1, \pm 2$. Los valores $I = \frac{3}{2}, 2$ y $Y = \pm 2$ son exóticos, prohibidos para mesones $q\bar{q}$.

En cuanto al espín, la representación correspondiente en $SU(2)$ es obtenida del producto directo $2 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 2 = 1 \oplus 3 \oplus 1 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 5$. Los tetraquarks tienen espín exótico $S = 2$. En este trabajo no consideramos una interacción por espín, sólo estamos considerando un estado base.

Como QCD es no perturbativa a bajas energías, varios métodos alternativos se utilizan para el análisis de estados ligados, entre los cuales Lattice-QCD es considerado el método no fenomenológico más completo y directo.

Una de las primeras aproximaciones (1974) [31] fue el modelo fenomenológico del MIT “Bag Model”, utilizado para explicar el espectro hadrónico y diferentes propiedades de las partículas. Las suposiciones fenomenológicas del modelo están basadas en el hecho de que los quarks y gluones están confinados en un espacio pequeño donde pueden ser consideradas partículas libres. Aún así, tan pronto como Lattice QCD fue capaz de calcular potenciales estáticos entre quarks, esta imagen de confinamiento de quarks cambi a una que describe la interacción mediante tubos de flujo [32]. Este concepto se utilizará en este trabajo.

En el esquema de los flujos de tubo gluónico se asume que los quarks están unidos por éstos, confinando el flujo de color. Un tubo de flujo empieza desde cada quark y termina en un antiquark o en una unión con forma de Y , donde tres tubos se aniquilan o son creados [33]. Por ejemplo, en este tipo de modelos, los bariones

se consideran como configuraciones de tres “cuerdas” (por sus tres quarks de valencia) mostradas en la figura 1.7. Esta unión de cuerdas tiene un origen no perturbativo en QCD.

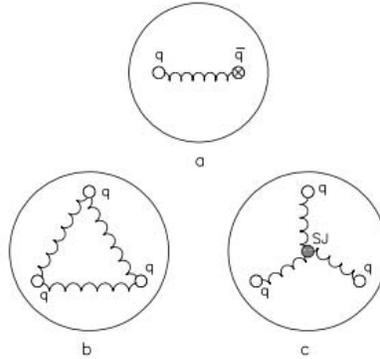


Figura 1.7: Estructura de un mesón y un barión en los modelos de tubos de flujo gluónicos. Obtenida de la referencia [34]

Las reglas de suma de QCD son otra aproximación fenomenológica para estudiar fenómenos no perturbativos y parece eficaz en el cálculo de masas de los estados hadrónicos más bajos y constantes de acoplamiento efectivas. Para estos cálculos esencialmente uno intenta separar las contribuciones en dos partes: las perturbativas que uno puede evaluar de primeros principios, y las no perturbativas, que uno puede manejar fenomenológicamente.

Una categoría de modelos fenomenológicos muy común involucra la introducción de un potencial efectivo en el formalismo Hamiltoniano. Este método utiliza masas constituyentes para los quarks que luego son ajustadas con datos experimentales. El quark es tratado de una forma no relativista y los efectos del campo gluónico en las propiedades de los hadrones son representadas por potencial efectivo instantáneo. Como ya habíamos mencionado antes, el modelo más simple emplea un potencial tipo Cornell. Modelos más sofisticados toman en cuenta interacciones espín-espín y espín-órbita.

Esta última categoría descrita es la que se utilizó para realizar este trabajo. En conjunto con el esquema de tubos de flujo, y utilizando un sistema de dos quark y dos antiquarks, introducimos un potencial efectivo de tipo lineal que simula la interacción fuerte. En base a las masas utilizadas, y a que un sistema de cuatro quarks en principio debería tener un radio mayor al mesón correspondiente, elegimos utilizar sólo la parte lineal del potencial de Cornell.

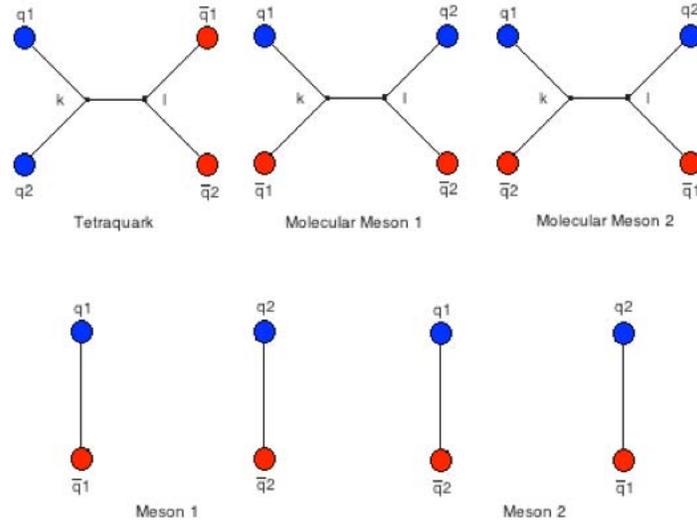


Figura 1.8: Posibles estructuras de 4 quarks

Algunas posibles estructuras para el tetraquark son mostradas en la figura 1.8, donde dos vectores adicionales k, l son utilizados en las uniones de tres tubos. Cada línea además corresponde y representa un triplete de color. Otras configuraciones pueden encontrarse en la referencia [35]. El estado tetraquark mostrado en la figura puede considerarse como una estructura diquark-antidiquark. En el modelo de quarks constituyentes, un quark es masivo y uno puede suponer que la recombinación de tubos de flujo es más rápida que el movimiento de quarks. En la configuración de cuatro cuerpos no hay una conexión directa entre quarks sino una interacción que pasa por los vectores auxiliares, de tal forma que utilizamos el mismo acoplamiento en todos los tubos de flujo, que toma en cuenta que el acoplamiento de un diquark corresponde a la mitad de uno quark-antiquark.

En este trabajo no se consideraron las contribuciones de las estructuras de moléculas de mesón, puesto que no se incluyen parámetros suficientes para caracterizarlas y diferenciarlas con respecto a las otras estructuras en este esquema de tubos de flujo.

1.6. Tetraquark experimental

Este es un problema difícil experimentalmente, puesto que los candidatos exóticos son resonancias inmersas en el espectro de hadrones excitados, además de que usualmente decaen en varios hadrones.

En 2013, la colaboración BESIII [36] reportó un estado $Z_c(3900)^+$ en los estados

finales de $J/\psi\pi^+$ en el proceso $Y(4260) \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$, de la misma forma que la colaboración Belle [37]. Tomando el proceso como $Y(4260) \rightarrow [c\bar{c}u\bar{d}] \pi^- \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$, este estado debería contener mínimamente un par $c\bar{c}$ pesado y un par $u\bar{d}$ ligero, debido que es de tipo charmonio y que además es cargado. Este en principio corresponde a un estado exótico. De manera similar, la colaboración Belle también observó dos estados cargados tipo botonio ($b\bar{b}$) $Z_b(10610)$ y $Z_b(10650)$, con contenido mínimo de quarks $b\bar{b}u\bar{d}$.

Recientemente, una nueva resonancia cargada $Z_c(4430)^+$ fue confirmada por el experimento LHCb [38], con $J = 1^+$. Esto representa una colección cada vez más grande de estados de tipo charmonio, comenzando con el estado $X(3872)$ observado por Belle en 2003 [39]. Es natural entender estos estados como manifestaciones de estados de cuatros quarks como podrían ser moléculas hadrónicas o tetraquarks [40].

Es de interés en este trabajo el sistema utilizando quarks pesados $qq\bar{Q}\bar{Q}$, puesto que en algunos trabajos [42, 43] se ha mostrado que la diferencia de masas da lugar a cierta estabilidad. Estos estados tendrían un número cuántico de sabor pesado y su observación sería una prueba directa de la existencia de los estados multiquark. En el trabajo [44] se discute la dificultad de producir y observar este tipo de estados ("Doubly-Heavy Tetraquarks"). Uno necesita producir dos pares $\bar{Q}Q$ de tal forma que se reestructuren en diquarks QQ y $\bar{Q}\bar{Q}$, en lugar de la configuración más favorable de dos $\bar{Q}Q$ y singletes de color. Después de esto, el diquark QQ necesita ligarse con un diquark ligero (por decir, $\bar{u}\bar{d}$), en lugar de un quark q y formar un barión. La observación de mesones pesados ($\bar{b}c$) sugiere que la producción simultánea de pares $\bar{b}b$ y $\bar{c}c$ que están cercanos espacialmente no es especialmente rara.

1.7. Trabajos similares

En este trabajo se utilizó el llamado modelo *String-flip* o *flip-flop* [18, 19, 20], en el cual se trabaja en el esquema de tubos de flujo gluónico entre quark para simular la interacción entre éstos utilizando un potencial efectivo. Los tubos de flujo son recombinados para describir y distinguir distintos tipos de sistemas, en específico mesones y tetraquarks para este caso. Estas estructuras se describieron anteriormente y una representación de ellas se muestra en la figura 1.8. La recombinación de los tubos de flujo ocurre cuando los quarks están lo suficientemente cerca y de acuerdo a su estado de energía.

En combinación con otros resultados mostrados en secciones anteriores, tales co-

mo la estructura de color de los hadrones involucrados, y el potencial lineal que elegimos a partir del potencial de Cornell, un método Monte Carlo es utilizado en conjunto con una aproximación variacional para caracterizar el estado de 4 quarks (tetraquark). Se utilizarán 3 dimensiones para describir al sistema, y se introducirán correlaciones cuánticas entre las partículas de acuerdo a su color y sabor, de tal forma que el principio de exclusión de Pauli esté presente y que la función de onda sea antisimétrica ante intercambio de quarks idénticos.

Trabajos anteriores que utilizan una aproximación similar fueron revisados para explorar qué tipo de consideraciones utilizan para estudiar el estado de 4 quarks. Aunque a veces las diferencias entre estos trabajos son sutiles, podemos resumir sus consideraciones en: qué tipo de función de onda utilizan para describir al sistema, qué tipo de potencial *flip-flop* utilizan, y qué grados de libertad tienen.

En un trabajo similar realizado por Vijande et. ál. [43, 45] se utilizan potenciales lineales para describir a los mesones y tetraquarks, siendo:

$$V_f = \lambda \min(r_{13} + r_{24}, r_{14} + r_{23}) \text{ potencial de mesones,}$$

$$V_b = \lambda \min_{lk} (r_{1k} + r_{2k} + r_{kl} + r_{3l} + r_{4l}) \text{ potencial de tetraquark,}$$

donde r_i ; $i = 1, 2, 3, 4$, k, l son las posiciones de los quarks 1,2,3 y 4, o la posición de los puntos k y l utilizados en el potencial de tetraquark para disminuir la energía potencial. r_{ij} es la distancia entre las posiciones ij y λ es la tensión del tubo de flujo utilizado. El potencial mínimo entre ambas configuraciones es el que describe al sistema total.

El término de energía cinética se calcula mediante el teorema del virial. El estudio está realizado en 2 dimensiones, con todos los quarks y antiquarks en un mismo plano. Con estas consideraciones se concluye que el confinamiento de $QQ\bar{q}\bar{q}$ se obtiene para una diferencia de masas entre quarks y antiquarks suficientemente grande.

En un trabajo realizado por P. Bicudo y M. Cardoso [46] se utilizan potenciales lineales de largo alcance para confinar a las partículas en clusters, además de un término de corto alcance proporcional a $1/r$, siendo r la distancia entre quarks en un cluster.

En otro trabajo realizado por Chengrong et. ál. [47], se utiliza un potencial cuadrático para confinar a las partículas, de tal forma que el potencial de tetraquark tiene la siguiente forma

$$V^C = k [(r_1 - k)^2 + (r_2 - k)^2 + (r_3 - l)^2 + (r_4 - l)^2 + k_d(k - l)^2],$$

donde k es la tensión de los tubos de flujos y k_d es la tensión del tubo de flujo adicional en la configuración de tetraquark. Se utilizó información sobre estas constantes en este trabajo. Se consideraron 3 dimensiones en el trabajo.

A continuación se explica la forma en que se encuentra distribuida la información en los diversos capítulos.

1.8. Descripción del trabajo

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 2 estudiamos a detalle el problema cuántico de un sistema de dos cuerpos, interactuando a través de un potencial lineal, describiendo a un mesón en un caso aislado. Junto a esto, se realiza el cálculo del valor promedio del radio al cuadrado. Estos resultados servirán como puntos de referencia en la simulación.

En el capítulo 3 hacemos una descripción del modelo que utilizaremos para simular la evolución del sistema de quarks ligados por gluones (Modelo *String Flip*), en el cual consideramos una aproximación variacional. Primero empezamos a describir la función de onda variacional del sistema y el tipo de potencial lineal utilizado para el caso mesónico y de tetraquark. A partir de esto, mostraremos cómo se puede calcular la energía variacional. En el capítulo también se explica un poco la forma de implementar la simulación Monte Carlo que se utilizará.

En el capítulo 4 presentamos los resultados obtenidos en la simulación para diferentes casos. Sistemas independientes de mesones y tetraquarks, y el sistema de la mezcla entre los estados. Determinamos el parámetro variacional óptimo para distintas condiciones, minimizando el valor de la energía variacional. Obtenemos las distribuciones radiales de los estados y las funciones de correlación entre quarks y entre mesones.

En el capítulo 5 exponemos las conclusiones derivadas de estos resultados y sus perspectivas.

Incluimos 4 apéndices. En el apéndice A se muestran a detalle los cálculos para obtener el término cinético para los sistemas mesónico y de tetraquark.

Dado que la simulación Monte Carlo está basada en el *Algoritmo de Metrópolis*, en el apéndice B se da información sobre la integración Monte Carlo y el procedimiento utilizado para realizar esta simulación.

El apéndice C establece factores de conversión de unidades para el caso mesónico, basado en valores experimentales de las propiedades de los mesones.

Finalmente, en el apéndice D se muestra teoría relacionada con las funciones de correlación entre dos cuerpos, y el procedimiento utilizado para calcularlas.

Capítulo 2

El problema de 2 cuerpos: Mesones

Estudiaremos primero el límite de un sistema de partículas (quarks) tales que la distancia entre ellas sea lo suficientemente grande para que el sistema se comporte como un arreglo de dos mesones aislados. Por lo tanto, por simplicidad, consideramos a un mesón como un sistema no relativista de quarks interactuando por medio de un potencial lineal, el cual provee el efecto confinante que necesitamos.

En este capítulo calculamos las eigen-funciones y eigen-energías correspondientes a dicho potencial, de manera exacta en una dimensión, y mostramos el equivalente en 3 dimensiones. Usando estos resultados realizamos una aproximación variacional, con la cual calculamos el valor promedio del radio al cuadrado. Esto se calcula con el fin de tener valores de referencia cuando estudiemos el sistema de muchos cuerpos interactuantes.

2.1. Ecuación de Schrödinger para un potencial lineal en una dimensión

Para resolver el problema de dos partículas interactuando por un potencial lineal, para describir un mesón, de manera genérica utilizamos un potencial lineal en una dimensión $V(x) = kx$, donde k es una constante, y resolvemos la ecuación de Schrödinger estacionaria correspondiente:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + kx\Psi(x) = E\Psi(x). \quad (2.1)$$

Considerando unidades con $\hbar = 1$;

$$-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + kx\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (2.2)$$

y haciendo un cambio de variable

$$\xi = \left(x - \frac{E}{k}\right) (2mk)^{1/3}; \quad \Psi(x) = \eta(\xi), \quad (2.3)$$

tenemos que

$$\frac{\xi}{(2mk)^{1/3}} = x - \frac{E}{k} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\xi}{(2mk)^{1/3}} + \frac{E}{k}, \quad (2.4)$$

$$dx = \frac{1}{(2mk)^{1/3}} d\xi. \quad (2.5)$$

Entonces, de la ecuación 2.2 tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + 2mk \left(\frac{E}{k} - x\right) \Psi(x) &= 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \eta(\xi) - (2mk)^{1/3} \xi \eta(\xi) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\xi^2} \eta(\xi) - \xi \eta(\xi) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Una solución general a la ecuación 2.6 es una combinación lineal de las funciones de Airy $\text{Ai}(\xi)$ y $\text{Bi}(\xi)$. Observando que para $\xi \rightarrow \infty$, $\lim \text{Ai}(\xi) = 0$ y $\lim \text{Bi}(\xi) = \infty$, entonces las funciones $\text{Bi}(\xi)$ tienen una forma asintótica inapropiada y por tanto se descartan. La solución de la ecuación 2.6 tiene la forma:

$$\eta(\xi) = \text{Ai}(\xi). \quad (2.7)$$

Estableciendo una relación entre $\eta(\xi)$ (la función $\text{Ai}(\xi)$) y $\Psi(x)$, la solución a la ecuación 2.2.

$$\eta(\xi) = \eta \left(\left[x - \frac{E}{k} \right] [2mk]^{1/3} \right) = \Psi(x). \quad (2.8)$$

Aún así, como la condición de frontera en el origen requiere que $\Psi(0) = 0$, se deduce de la ecuación 2.8,

$$\eta(\xi) = \eta \left(\left[x - \frac{E}{k} \right] [2mk]^{1/3} \right) = 0. \quad (2.9)$$

Esta ecuación se satisface para los valores de ξ correspondientes a las raíces de la función de Airy. Designando a estos valores ξ_n y denotando la cantidad asociada de energía E_n entonces concluimos que ξ_n y E_n están relacionadas por la función

$$\left[-\frac{E_n}{k} \right] (2mk)^{1/3} = \xi_n. \quad (2.10)$$

Entonces, podemos obtener los valores de E_n como

$$E_n = -\xi_n \left(\frac{k^2}{2m} \right)^{1/3}, \quad (2.11)$$

y como los valores ξ_n son negativos, escribimos la ecuación como

$$E_n = -|\xi_n| \left(\frac{k^2}{2m} \right)^{1/3}. \quad (2.12)$$

donde $|\xi_n|$ es el valor absoluto de cada raíz.

La primera raíz de la función de Airy es $\xi_1 = -2.3381$.

La eigenfunción para el estado base se obtiene usando las ecuaciones 2.7 y 2.8, además del valor de la energía exacta en la primera raíz de la función de Airy.

$$\Psi_1^{\text{exacta}}(x) = \text{Ai} \left[(2mk)^{1/3} x + |\xi_1| \right] = \text{Ai} \left[(2mk)^{1/3} x - 2,3381 \right]. \quad (2.13)$$

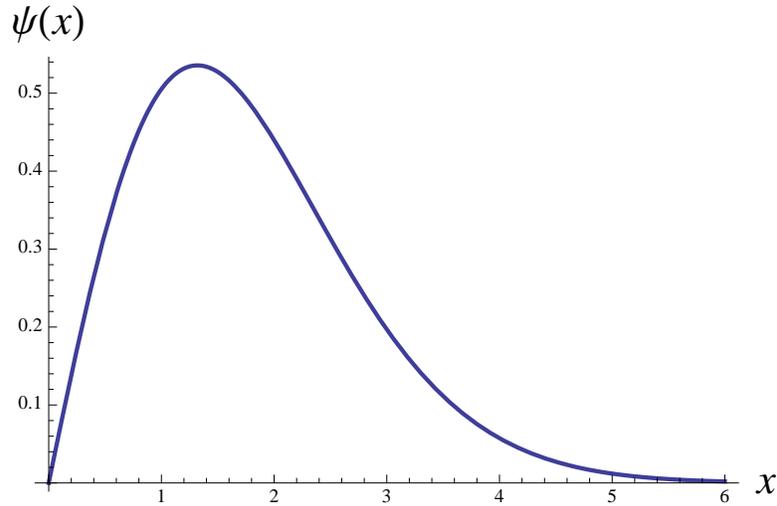


Figura 2.1: Función de onda exacta para 2 cuerpos ligados por un potencial lineal

2.2. Problema de 2 cuerpos: Mesones

Consideramos a un mesón como un sistema formado por dos quarks (dos cuerpos) de masas m_1 y m_2 distintas, respectivamente, interactuando por un potencial lineal. Entonces la función de onda depende de seis coordenadas [48]

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + k |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \right] \chi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E \chi(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (2.14)$$

Como V solo depende en la distancia relativa r entre los quarks, en lugar de utilizar coordenadas \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , es más apropiado usar las coordenadas de centro de masa, $\vec{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$, y las coordenadas relativas entre los dos quarks, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. La transformación desde (\vec{r}_1, \vec{r}_2) hacia (\vec{R}, \vec{r}) está dada por

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}; \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (2.15)$$

Tomando el Hamiltoniano de este sistema de la siguiente forma:

$$H_2 = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} + k |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|, \quad (2.16)$$

siendo $\vec{P}_1 = -i\hbar\nabla_1$ y $\vec{P}_2 = -i\hbar\nabla_2$ las magnitudes de los momentos de los cuerpos 1 y 2 respectivamente, y k una constante de interacción.

Usando la transformación inversa de coordenadas,

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}; \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}, \quad (2.17)$$

donde $M = m_1 + m_2$, tenemos que los momentos $\vec{P}_1 = m\dot{\vec{r}}_1$ y $\vec{P}_2 = m\dot{\vec{r}}_2$ se pueden escribir en términos del momento en el sistema de coordenadas del centro de masa y el momento relativo del sistema:

$$\vec{P}_R = M\dot{\vec{R}}; \quad \vec{P}_r = \mu\dot{\vec{r}}, \quad (2.18)$$

donde $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida.

Sustituyendo las nuevas coordenadas en \vec{P}_1 y \vec{P}_2 tenemos que:

$$\vec{P}_1 = m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}} \right), \quad (2.19)$$

$$\vec{P}_2 = m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}} \right). \quad (2.20)$$

De aquí, las magnitudes de los momentos pueden ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
\frac{P_1^2}{2m_1} &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{R}^2 + 2\frac{m_2}{M} \dot{R} \cdot \dot{r} + \frac{m_2^2}{M} \dot{r}^2 \right), \\
\frac{P_2^2}{2m_2} &= \frac{m_2}{2} \left(\dot{R}^2 - 2\frac{m_1}{M} \dot{R} \cdot \dot{r} + \frac{m_1^2}{M} \dot{r}^2 \right), \\
\Rightarrow \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} &= \frac{P_R^2}{2M} + \frac{P_r^2}{2\mu}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Con esto podemos entonces reescribir el hamiltoniano como:

$$H_2 = \frac{P_R^2}{2M} + \frac{P_r^2}{2\mu} + V(r).$$

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo se escribe entonces

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) \right] \Psi_E(\vec{R}, \vec{r}) = E \Psi_E(\vec{R}, \vec{r}), \tag{2.22}$$

donde $\Psi_E(\vec{R}, \vec{r}) = \chi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. Por separación de variables, buscamos soluciones de la forma

$$\Psi_E(\vec{R}, \vec{r}) = \Phi(\vec{R})\rho(\vec{r}), \tag{2.23}$$

donde $\Phi(\vec{R})$ y $\rho(\vec{r})$ son funciones de onda del sistema CM y del relativo, respectivamente. Sustituyendo esto en la ecuación 2.22 y dividiendo entre $\Phi(\vec{R})\rho(\vec{r})$, obtenemos que

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 \Phi(\vec{R}) = E_R \Phi(\vec{R}), \tag{2.24}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \rho(\vec{r}) + V(r)\rho(\vec{r}) = E_r \rho(\vec{r}), \tag{2.25}$$

con la condición

$$E_R + E_r = E. \tag{2.26}$$

Con esto tenemos la ecuación de Schrödinger 2.22 separada en dos ecuaciones 2.24 y 2.25 que sólo involucran una sola variable. La primera de estas ecuaciones muestra como el centro de masa se comporta como una partícula libre de masa M . La segunda ecuación representa una ecuación de Schrödinger para una partícula virtual de masa μ moviéndose en un potencial central $V(r) = kr$.

Normalmente, en un problema de potencial central de este estilo, no se considera la función de onda para el centro de masa, dejando como principal el movimiento relativo y su función de onda $\rho(\vec{r})$, cuya solución a la ecuación de Schrödinger es un producto de una parte angular y una radial. La parte angular está dada por los armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$; la parte radial $\psi(r)$ se puede obtener resolviendo la siguiente ecuación radial

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \left[\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + kr \right] U(r) = EU(r), \quad (2.27)$$

donde $U(r) = r\psi(r)$.

Restringiendo esto a una simetría esférica ($l = 0$) podemos usar de referencia la ecuación de Schrödinger para un potencial lineal en una dimensión. Con esto, tenemos que las eigenenergías y eigenfunciones correspondientes son[49]:

$$E_n = \left[\frac{k^2}{2\mu} \right]^{1/3} \xi_n, \quad (2.28)$$

$$\psi_n(r) = \frac{1}{r} \text{Ai} \left(r [2\mu k]^{1/3} + |\xi_n| \right), \quad (2.29)$$

donde ξ_n son los ceros negativos de la función de Airy. En particular nos interesa el estado base, con $|\xi_n| \sim 2.3381$.

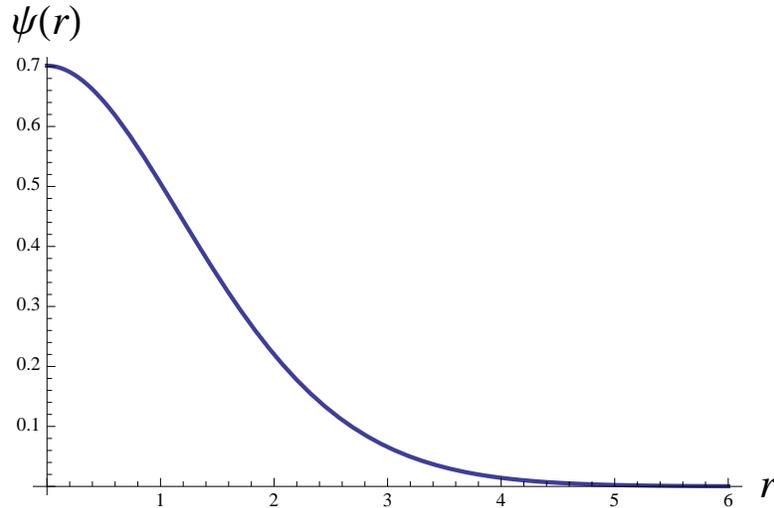


Figura 2.2: Función de onda exacta para 2 cuerpos ligados por un potencial lineal

2.3. Aproximación variacional

El objetivo del trabajo es estudiar al sistema de cuatro quarks ligados, tomando como referencia el caso de 2 cuerpos. Haciendo una aproximación variacional para el sistema mesónico, se puede generalizar el resultado y agregar una interacción de cuatro cuerpos.

En la referencia [50], basándose en los límites de la función de Airy $\text{Ai}(\xi)$, cuando $\xi \rightarrow +\infty$, que tiene la forma

$$\text{Ai}(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\xi^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right), \quad (2.30)$$

se muestrea la siguiente función de onda variacional, para el caso de una dimensión,

$$\psi_\lambda(x) = xe^{\alpha x^\beta}, \quad (2.31)$$

para diferentes valores de α y de β . Usando estos mismos resultados para el caso de 3 dimensiones, donde la variable es la distancia relativa r y considerando que tenemos un término $\frac{1}{r}$ adicional, la función de onda variacional que muestreamos es

$$\psi_\lambda(r) = e^{-\lambda r^b}. \quad (2.32)$$

Para un valor de b general, uno puede minimizar la energía total con esta función de onda variacional, de tal forma que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\langle \psi_\lambda | \hat{H} | \psi_\lambda \rangle}{\langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle} = 0; \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d}{dr^2} + kr, \quad (2.33)$$

y así obtener una expresión para un valor óptimo del parámetro variacional λ_0 en términos de b .

Tomando unidades donde $m_1 = m_2 = k = \hbar = 1$, de la ecuación 2.28 tenemos que la energía del estado base corresponde a la primera raíz de la función de Airy $E_{\text{exacta}} \sim 2.3381$. Los valores que minimizan la energía total con la función de onda variacional son $b = 1.74716$ y $\lambda_0(b) = 0.350132$, lo que resulta en una energía óptima de $E_{\lambda_0} = 2.3382$ y una diferencia de $\sim 0.0042\%$ con respecto a la energía exacta. En la figura 2.3 se muestra una comparación entre la función de onda exacta y la variacional, utilizando el mínimo de λ y diferente valor de b .

Por razones de simplificación el valor que escogemos para la función de onda variacional es $b = 3/2$, de tal forma que la función de onda variacional que utilizamos para un sistema de dos cuerpos es:

$$\psi_\lambda(r) = A^2 e^{-\lambda r^{3/2}}; \quad A^2 = \frac{3\lambda^2}{2\pi}. \quad (2.34)$$

Si consideramos una diferencia de masas entre las dos partículas, basándonos en las masas constituyentes de los quarks u, d, s, c, b , en unidades donde $m_u = 1$, los correspondientes parámetros variacionales óptimos y energías se muestran en el cuadro 2.1, así como su comparación con el valor exacto.

m_1	m_2	λ_0	E_{λ_0}	E_{exacta}
1	1	0.4714	2.3472	2.33811
1	1.44643	0.5125	2.2197	2.21106
1	4.6131	0.6043	1.9889	1.98118
1	14.0774	0.6441	1.9061	1.8987

Cuadro 2.1: Parámetros variacionales y energías óptimas.

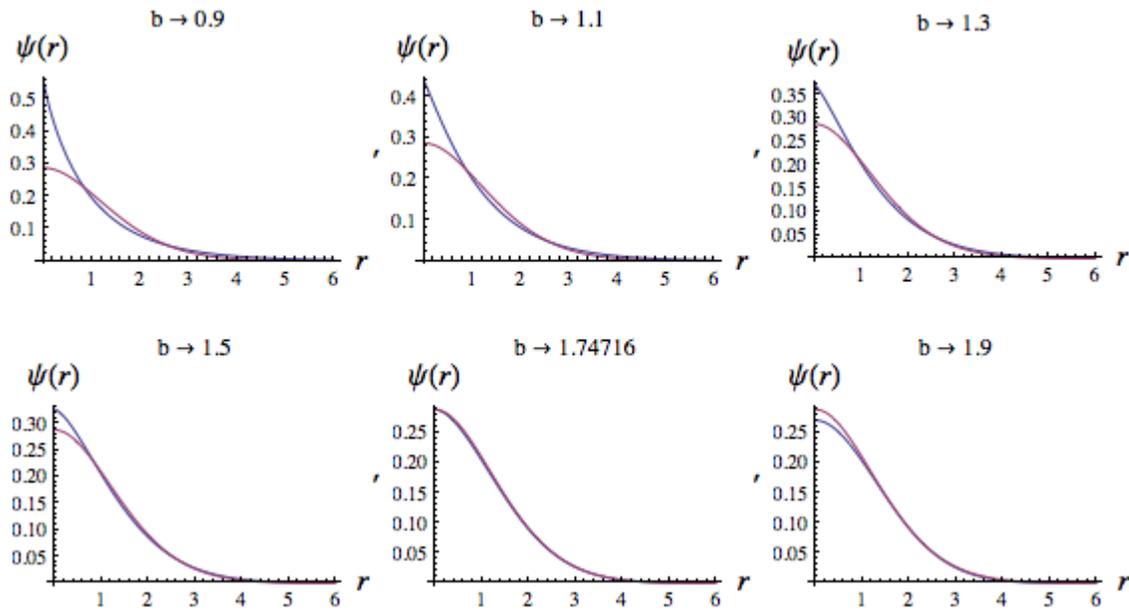


Figura 2.3: Función de onda exacta para 2 cuerpos ligados por un potencial lineal

2.4. Radio cuadrado promedio

El valor esperado del radio al cuadrado de una partícula, con respecto al centro de masa del sistema del cual forma parte, lo podemos definir de la siguiente

manera:

$$\langle r_M^2 \rangle \equiv \left\langle \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R})^2 \right\rangle, \quad (2.35)$$

siendo \vec{R} el vector de centro de masa. En el caso de un sistema de dos partículas 1 y 2 con masas m_1 y m_2 , de acuerdo a la ecuación 2.15,

$$\langle r_M^2 \rangle = \left(\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \right) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \langle r^2 \rangle,$$

donde $r^2 \equiv |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2$. Tomando la función de onda variacional elegida, tenemos que

$$\langle r^2 \rangle = \int \Psi_\lambda(\vec{r}) r^2 \Psi_\lambda(\vec{r}) d^3r,$$

con $d^3r = r^2 dr d\Omega$, y como no tenemos dependencia angular $\int d\Omega = 4\pi$, por lo tanto:

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int r^4 e^{-2\lambda r^{3/2}} dr.$$

Usando la siguiente fórmula de integración para la función Γ ,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx,$$

y haciendo un cambio de variable $u = 2\lambda r^{3/2}$,

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{(2\lambda)^{4/3}} \int_0^\infty u^{7/3} e^{-u} du = \frac{1}{(2\lambda)^{4/3}} \Gamma \left[\frac{10}{3} \right].$$

De la misma forma que se hizo en la sección anterior, el valor de $\langle r^2 \rangle$ se calcula para diferentes masas de m_1 y m_2 acorde a las masas constituyentes de quarks y tomando como referencia $m_u = 1$

Los resultados obtenidos en este capítulo, para los valores óptimos λ_0 , E_{λ_0} , y $\langle r_M^2 \rangle_{\lambda_0}$ para el problema de dos cuerpos, con masas m_1 y m_2 , establecen los valores de observables de los hadrones aislados correspondientes en los límites de bajas densidades, donde la distancia entre partículas es grande.

Este límite será el punto de partida para dar un ansatz de una función de onda variacional más general, que incluya el sistema de 4 quarks ligados (tetraquark) que nos interesa analizar.

m_1	m_2	λ_0	$\langle r_M^2 \rangle_{\lambda_0}$
1	1	0.4714	1.50255
1	1.44643	0.5125	1.38885
1	4.6131	0.6043	1.52605
1	14.0774	0.6441	1.73656

Cuadro 2.2: Valores óptimos de radios al cuadrado

En el siguiente capítulo se estudiará dicha función de onda, y describiremos el modelo utilizado para realizar la simulación con varios cuerpos (quarks).

Capítulo 3

Sistema de 4 cuerpos

Para realizar el estudio de la formación de un estado compuesto de 4 quarks, como función de la densidad de energía, necesitamos un modelo que pueda realizar una descripción de un sistema de partículas basado en propiedades de quarks y la interacción fuerte. El modelo tiene que reproducir que, a bajas densidades, donde la distancia entre quarks es grande, éstos sean confinados en hadrones, formando grupos de 2 o 4 cuerpos (mesones o tetraquarks). Así mismo, a altas densidades, donde la distancia entre quarks es muy corta, los quarks deberán comportarse como partículas fermiónicas libres, y que esta transición, de baja a alta densidad, debe de ser generada dinámicamente. El modelo *String-Flip* cumple con estas características [18, 19, 20].

En este modelo, el confinamiento de quarks en un singlete de color está descrito en términos de un potencial V . En un sistema de muchos quarks, éstos son ligados mediante tubos de flujo gluónicos. La configuración óptima del sistema está descrita por aquella con una mínima energía potencial.

En este capítulo se analizarán detalles del modelo, así como la obtención de las observables relacionadas con los sistemas de mesones y tetraquark, los cuales se estudian de manera independiente y mixta. A continuación se hace una descripción de los potenciales efectivos utilizados para simular la interacción fuerte entre quarks.

3.1. Potencial de muchos cuerpos

El potencial de muchos cuerpos está basado en encontrar las configuraciones de mínima energía potencial cuando hacemos interactuar sistemas de 2 ó 4 quarks que tengan carga de color total neutra, y tomando por simplicidad una interacción de tipo lineal. Se desprecia la parte $1/r$ del potencial de Cornell, como se mencionó en el capítulo anterior.

En este trabajo estudiamos la formación de mesones y tetraquarks en un sistema de 4 quarks (2 quarks y 2 antiquarks), que son externamente forzados a aproximarse entre sí. Consideramos a todas las partículas con un mismo número cuántico de color (anticolor).

En cuestión de masas, el modelo String-Flip utiliza masas constituyentes de quarks. Nos interesa estudiar el efecto que se tiene al utilizar una asimetría de masas entre los quarks involucrados. Dicho esto, consideramos a todos los quarks de un mismo sabor u , y a los antiquarks de un mismo sabor d, s, c , ó b .

3.1.1. Potencial de dos cuerpos: mesón

De forma general, si tenemos dos sistemas de dos quarks de colores c y anticolor respectivo \bar{c} , entonces el potencial total del sistema está definido como:

$$V_{c\bar{c}} = \min_{[P]} \sum_{ij} V(\vec{r}_i, \vec{r}_j), \quad (3.1)$$

siendo r_i un quark de color c y r_j un antiquark del anticolor correspondiente \bar{c} . $V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \equiv k|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ potencial lineal y donde $\min_{[P]}$ el mínimo de energía de todas las permutaciones posibles en las que el sistema de quarks con colores c_1 y c_2 tenga carga de color neutra.

Entonces, en general para un sistema de mesones el potencial total toma la siguiente forma:

$$V_m = V_{r\bar{r}} + V_{g\bar{g}} + V_{b\bar{b}}. \quad (3.2)$$

En este trabajo, el sistema estudiado sólo contiene dos quarks ($\vec{r}_{q_1}, \vec{r}_{q_2}$) y dos antiquarks ($\vec{r}_{\bar{q}_1}, \vec{r}_{\bar{q}_2}$) con la misma carga de color y anticolor (ver figura 3.1), por lo que sólo tenemos que utilizar uno de los términos de la ecuación 3.2. Esto tiene como consecuencia la posibilidad de tener intercambio de quarks entre mesones, y poder distinguir dos configuraciones de tipo mesón:

$$V_{m1} = V(\vec{r}_{q_1}, \vec{r}_{\bar{q}_1}) + V(\vec{r}_{q_2}, \vec{r}_{\bar{q}_2}), \quad (3.3)$$

y el intercambio entre el antiquark 1 y el antiquark 2,

$$V_{m2} = V(\vec{r}_{q_1}, \vec{r}_{\bar{q}_2}) + V(\vec{r}_{q_2}, \vec{r}_{\bar{q}_1}). \quad (3.4)$$

3.1.2. Potencial de 4 cuerpos: Tetraquark

La forma en que se ligan 4 cuerpos para tener una configuración tetraquark (diquark-antidiquark) está basado en resultados de Lattice [33], donde los cuatro quarks son conectados por dos tubos de flujo en forma de Y , donde la longitud

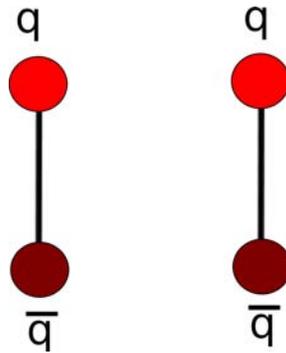
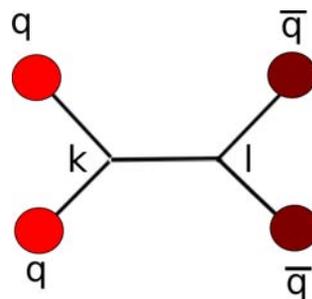


Figura 3.1: Configuraciones de tipo mesón en el sistema.

Figura 3.2: Potencial de 4 cuerpos. Problema de *Steiner Tree*

total es minimizada, de tal forma que el potencial se puede escribir de la siguiente manera:

$$V_{4Q} = \sum_{i=1}^2 V'(\vec{k}, \vec{r}_i) + \sum_{i=1}^2 V'(\vec{l}, \vec{r}_i) + V'(\vec{k}, \vec{l}), \quad (3.5)$$

donde \vec{k} y \vec{l} son dos vectores “auxiliares” que ayudan a minimizar la energía potencial total del sistema, y el potencial efectivo V es de tipo lineal pero con una constante de interacción modificada, $V'(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{k}{2} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$. Esto último resulta de considerar que la intensidad del potencial de un diquark es la mitad de la de un mesón, lo cual se describió en el Capítulo 1.

En la figura 3.2 se muestra una representación simple para visualizar el potencial V_{4Q} .

3.1.3. Potencial de 4 cuerpos: vectores auxiliares \vec{k} , \vec{l}

Encontrar los vectores óptimos \vec{k} y \vec{l} de la ecuación 3.5, de tal forma que se tenga una energía potencial mínima, es un problema geométrico de *Steiner Tree* [51].

En general, este problema busca encontrar la red de longitud más corta que une un número determinado de puntos. Este problema también introduce puntos auxiliares entre los puntos originales, de tal forma que la nueva red (utilizando los nuevos puntos) sea la más corta de todas las posibilidades. De esta forma, algunos trabajos anteriores nombran a este potencial V_{tree} .

En el potencial V_{4Q} , los vectores \vec{k} y \vec{l} corresponderían a estos puntos adicionales en un problema de *Steiner tree*. A primera aproximación, no se conoce la dependencia de estos nuevos vectores con respecto a las posiciones de las demás partículas, por lo que es necesario introducir algún tipo de algoritmo para calcularlos.

En el espacio de coordenadas, el algoritmo que utilizamos muestrea de forma discreta los componentes dimensionales de estos vectores, dentro del espacio delimitado por los cuatro cuerpos (ver figura 3.3); se escoge la mejor configuración posible de estos vectores con estos valores discretos. Para mejorar la búsqueda, un segundo muestreo se realiza alrededor de estas configuraciones óptimas; esto se puede seguir haciendo de forma indefinida si uno lo desea. Se espera que esta forma de muestreo nos permita evitar algunos mínimos locales en el valor de la energía potencial.

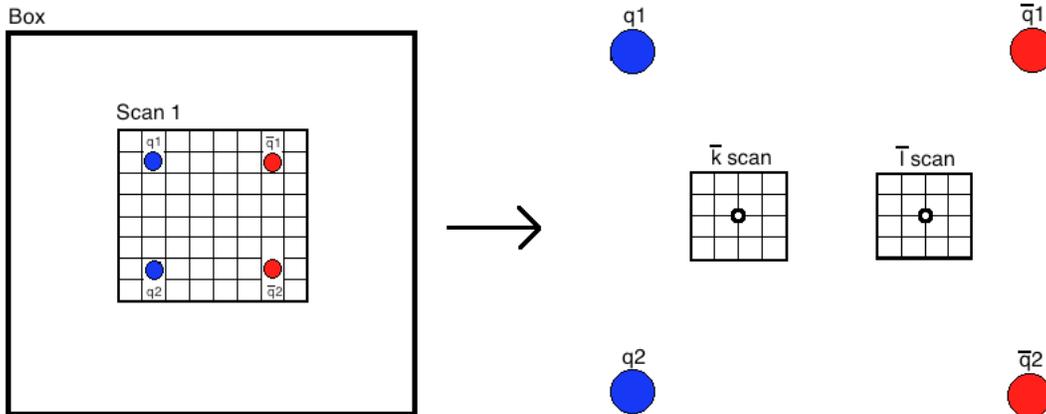


Figura 3.3: Escaneo general para los vectores \vec{k} y \vec{l} para un potencial de 4 cuerpos.

El potencial V_{4Q} pretende mostrar lo que sería un estado ligado de un diquark y un anti-diquark en un singlete de color. Como se había discutido anteriormente en la

introducción, la combinación de estos dos estados produce un potencial atractivo, necesario para confinar a las 4 partículas en un cluster (un hadrón).

Los vértices fundamentales de QCD, descritos en la introducción, en teoría nos permiten introducir loops de gluones dentro de las cuerdas de flujo gluónico, sin embargo, el modelo trata de simplificar todos estos procesos en una sola cuerda efectiva.

3.2. Función de onda variacional

En el capítulo 2 se discutió el problema de dos cuerpos ligados con un potencial lineal, y se propuso una función de onda de prueba para reproducir los resultados exactos usando el método variacional, en el límite de distancias largas entre partículas.

Para incluir la configuración de 4 cuerpos (tetraquark), es necesario tener lo que consideramos una configuración óptima del sistema, mediante la minimización de la energía potencial ($\text{mín}[V_{m1}, V_{m2}, V_{4Q}]$) y así poder distinguir entre estos dos tipos de estados.

Para un sistema de dos mesones, por ejemplo, un potencial V_{m1} , la función de onda variacional tiene la forma $\psi_\lambda = \exp(-\lambda(r_{q_1\bar{q}_1} + r_{q_2\bar{q}_2}))$, y el argumento de la exponencial incluye la potencia $\frac{3}{2}$ de cada una de las distancias de los tubos de flujo gluónico.

Con estos resultados, la función de onda variacional general que se propone tiene la siguiente forma:

$$\Psi_\lambda \equiv \Phi_{FG} F_\lambda = \Phi_{FG} e^{-\lambda Q}, \quad (3.6)$$

donde:

- λ es el parámetro variacional único
- Q puede tomar la siguiente forma dependiendo de la configuración óptima:

$$Q_{m1} = r_{q_1\bar{q}_1}^{3/2} + r_{q_2\bar{q}_2}^{3/2}, \quad (3.7)$$

$$Q_{m2} = r_{q_1\bar{q}_2}^{3/2} + r_{q_2\bar{q}_1}^{3/2}, \quad (3.8)$$

$$Q_{4Q} = r_{q_1k}^{3/2} + r_{q_2k}^{3/2} + r_{kl}^{3/2} + r_{\bar{q}_1l}^{3/2} + r_{\bar{q}_2l}^{3/2}. \quad (3.9)$$

- Φ_{FG} es un producto de determinantes de Slater, uno por cada combinación de color sabor, el cual corresponde a la función de onda de un gas de Fermi. Cada uno de los determinantes de Slater tiene la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} \psi_{n1}(\vec{x}_1) & \cdots & \psi_{n1}(\vec{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{nN}(\vec{x}_1) & \cdots & \psi_{nN}(\vec{x}_N) \end{vmatrix}.$$

Este determinante permite que la función de onda que describe al sistema de quarks sea antisimétrica ante el intercambio de quarks idénticos. Cada una de las entradas del determinante es solución al problema de una partícula en una caja (espacio donde se realiza la simulación), descrita a continuación.

Para una partícula en una dimensión dentro de un potencial cuadrado de ancho L , se tienen las eigen-funciones [52]:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.10)$$

donde n es un entero positivo. Las eigen-energías son:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}. \quad (3.11)$$

En el caso de 3 dimensiones, si se trata de una partícula encerrada en una caja cuadrada de lado L , la solución para las eigenfunciones es un producto de tres funciones independientes (una por cada dimensión espacial) de la forma (3.10) y las eigen-energías serán tres sumandos similares a (3.11).

$$\psi_n(\vec{r}) = \phi_{n_x}(x) \phi_{n_y}(y) \phi_{n_z}(z), \quad (3.12)$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \quad (3.13)$$

siendo $\phi_{n_i} = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left(\frac{n_i \pi i}{L} \right)$, $i = x, y, z$ y $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$

Por lo que la eigen-función resultante es:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{8}{L^3}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x n_x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi y n_y}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi z n_z}{L} \right). \quad (3.14)$$

Podemos definir un parámetro de densidad como una medida de la separación entre partículas,

$$\rho = \frac{N}{V}; \quad V = L^3, \quad (3.15)$$

donde $N = 4$ es el número de partículas del sistema y V el volumen de la caja donde están contenidas. Para un número fijo de partículas el cambio en densidad corresponde a modificar el tamaño de la caja y por tanto la separación entre partículas.

Como (3.10) también puede escribirse en términos de la función coseno, la eigenfunción dada por (3.11) puede presentar un total de 8 combinaciones de productos de funciones senos y cosenos:

$$\begin{pmatrix} \text{sen} & \text{sen} & \text{sen} \\ \text{sen} & \text{sen} & \text{cos} \\ \text{sen} & \text{cos} & \text{sen} \\ \text{cos} & \text{sen} & \text{sen} \\ \text{sen} & \text{cos} & \text{cos} \\ \text{cos} & \text{sen} & \text{cos} \\ \text{cos} & \text{cos} & \text{sen} \\ \text{cos} & \text{cos} & \text{cos} \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que cada valor de la energía tiene al menos 8 degeneraciones, lo que crea una estructura de “capas” con cada capa conteniendo, al menos, 8 quarks de una misma combinación color-sabor. Sin embargo, debido al número limitado de partículas que se incluirán en la simulación, sólo usaremos la primer capa, donde $n_x = n_y = n_z = 1$.

3.3. Energía variacional

El Hamiltoniano de un sistema de N quarks interactuando a través de un potencial V es:

$$H = \sum_i^N \frac{P_i^2}{2m_i} + V, \quad (3.16)$$

donde V toma la forma $V = V_{m1}$, V_{m2} o V_{4Q} dependiendo del tipo de hadrón que se forme. Cuando consideramos una función de onda del tipo (3.6) como solución a una ecuación de Schrödinger para un hamiltoniano dado por ??, entonces del valor esperado de la energía total $\langle H \rangle_\lambda$, es igual a:

$$\langle H \rangle_\lambda = \langle T \rangle_\lambda + \langle V \rangle_\lambda. \quad (3.17)$$

La energía cinética $\langle T \rangle$ la podemos reescribir de la siguiente forma (omitiendo un factor de masa m_i en el denominador):

$$\langle T \rangle_\lambda = \frac{1}{Z(\lambda)} \int dx \psi_\lambda(x) \left(\sum_i -\frac{1}{2} \partial_i^2 \right) \psi_\lambda(x), \quad (3.18)$$

donde $Z(\lambda) = \langle \psi_\lambda(x) | \psi_\lambda(x) \rangle$ y $-\frac{1}{2} \partial_i^2$ es el operador de momento \hat{p} para la i -ésima partícula.

Sea $F_\lambda(x) = e^{-\lambda Q} \Rightarrow \psi_\lambda(x) = F_\lambda(x) \phi(x)$, entonces,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_i \partial_i^2 \Psi_\lambda(x) &= F_\lambda(x) \left(-\frac{1}{2} \sum_i \partial_i^2 \phi(x) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_i [(\partial_i^2 F_\lambda(x)) \phi(x) + 2(\partial_i F_\lambda(x)) (\partial_i \phi(x))]. \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo en $\langle T \rangle_\lambda$,

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_\lambda &= \frac{1}{Z(\lambda)} \int dx \Psi_\lambda(x) \left[F_\lambda(x) \left(-\frac{1}{2} \sum_i \partial_i^2 \phi(x) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_i ((\partial_i^2 F_\lambda(x)) \phi(x) + 2\partial_i F_\lambda(x) \partial_i \phi(x)) \right]. \end{aligned}$$

Aquí podemos observar que el primer término de la integral corresponde a la energía cinética del gas de Fermi (T_{FG}). La energía de Fermi es aquella energía de la última capa llenada por los quark. En nuestro caso todas las partículas contribuyen. Entonces podemos reescribir $\langle T \rangle_\lambda$:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_\lambda &= T_{FG} - \frac{1}{2} \frac{1}{Z(\lambda)} \sum_i \int dx [\phi(x) F_\lambda(x) (\partial_i^2 F_\lambda(x)) \phi(x) \\ &\quad + 2\phi(x) F_\lambda(x) \partial_i F_\lambda(x) \partial_i \phi(x)]. \end{aligned}$$

Al desarrollar y simplificar términos podemos llegar a la siguiente expresión:

$$\langle T \rangle_\lambda = T_{FG} + \frac{1}{2Z(\lambda)} \sum_i \int dx \phi^2(x) [\partial_i F_\lambda(x)]^2.$$

Entonces, multiplicando por $\frac{F_\lambda^2(x)}{F_\lambda^2(x)}$, resulta que:

$$\langle T \rangle_\lambda = T_{FG} + \frac{1}{2Z(\lambda)} \sum_i \int dx \Psi_\lambda^2(x) [\partial_i \log F_\lambda(x)]^2.$$

Sea $W = \frac{1}{2} \sum_i [\partial_i \log F_\lambda(x)]^2$, finalmente podemos escribir:

$$\langle T \rangle_\lambda = T_{FG} + \langle W \rangle_\lambda. \quad (3.19)$$

Entonces la energía total se puede escribir como:

$$\langle H \rangle_\lambda = T_{FG} + \langle W \rangle_\lambda + \langle V \rangle. \quad (3.20)$$

En el apéndice **A** se realizan los cálculos de $\langle W \rangle_\lambda$ usando los potenciales $V_{m_{1,2}}$ y V_{4Q} .

En el extremo de altas densidades, es decir, cuando $\rho \gg 1$, esperamos que los quarks se comporten como un gas de Fermi. Normalmente, para un sistema de varias partículas, la energía por partícula resultaría de la siguiente forma:

$$\frac{E}{N} = mc^2 + \frac{3}{10} \frac{(\hbar k_F)^2}{m} \equiv \frac{T_{FG}}{N}, \quad (3.21)$$

siendo N el número de partículas del sistema, y donde se toma que para una partícula de masa m la energía es: $\epsilon_i = mc^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. k_F representa el momento de las partículas hasta la energía de Fermi.

Sin embargo, nosotros tenemos un sistema finito de 4 quarks, por lo que no podemos utilizar esta aproximación. Entonces, para calcular la energía de Fermi correspondiente a cada quark, usamos el valor de las eigenenergías de la ecuación (3.13) asociada a cada quark.

3.4. Cálculo Monte Carlo

Los valores esperados de V y W se calculan mediante una integral de 12 variables, y un método Monte Carlo (MC) es eficiente para este propósito [53, 54].

La aplicación de un método MC requiere la generación de variables $\{\vec{x}\}$ estadísticamente independientes distribuidas de acuerdo a una distribución de probabilidad $P(\vec{x})$. Este método es utilizado para muestrar estadísticamente los eventos. Esto requiere generar la distribución de probabilidades deseada de manera directa. Una de las formas de realizarlo es usando una simulación MC de procesos de Markov [55].

Los números aleatorios se generan por medio de un algoritmo diseñado para producir una secuencia de números aparentemente sin correlación, los cuales están uniformemente distribuidos sobre un rango definido. En general, el generador de números aleatorios debe satisfacer los siguientes criterios básicos:

- La distribución de los números tiene que ser uniforme en un rango específico y debe satisfacer pruebas estadísticas de estocasticidad, tales como carencia de predictibilidad y de correlación entre números cercanos.
- El cálculo debe producir una gran cantidad de números únicos antes de que se repita el ciclo.
- El cálculo debe ser muy rápido.

Se utilizó el algoritmo de Metrópolis [56] (ver apéndice **B**) para calcular los valores de expectación de W y V . Este algoritmo es muy popular dada su simplicidad computacional.

Para nuestra simulación, utilizamos un sistema de 2 quarks y dos antiquarks confinados en una “caja” cúbica con una longitud de lados L iguales, donde por simplicidad los valores de \hbar , m_u (masa del quark u) y k son tomados iguales a 1. En el límite de baja densidad ($\rho \rightarrow 0$), los resultados deberán concordar con los valores calculados teóricamente para el parámetro variacional λ_0 y E_{λ_0} , de acuerdo a la tabla 2.1.

A fin de expresar estos valores en unidades de GeV/fm^3 para la densidad de energía ϵ y de fm^2 para el valor promedio del radio al cuadrado $\langle r^2 \rangle$, realizamos una conversión basada en datos experimentales (ver apéndice **C**).

El procedimiento fue el siguiente:

- Se realizaron simulaciones para 3 sistemas distintos:
 - *Mesón independiente*. En el modelo sólo se incluyen los potenciales de tipo mesónico V_{m1} y V_{m2}
 - *Tetraquark independiente*. El modelo sólo incluye el potencial V_{4Q}
 - *Mixto*. El modelo incluye los potenciales de tipo mesónico V_{m1} y V_{m2} y el potencial de tipo tetraquark V_{4Q}
 - Todos estos sistemas contienen dos quarks con masa fijada en $m_u = 1$, y dos antiquarks con masa variable $m_{d,s,c,b}$.
- Con base en la ecuación (3.15) se fijan distintos valores de ρ entre 0.000001 y 0.3 para todos los casos. El límite de partículas es fijo y esto equivale a cambiar el valor L de la longitud de los lados de la caja donde están contenidos los quarks. Estos valores de densidad son suficientes para obtener resultados esperados para los límites de baja y alta densidad.
- Con un valor fijo de densidad, se realiza la simulación en un rango de valores del parámetro variacional λ adecuados. Los valores esperados de término cinético y potencial son ajustados en función de λ , con una exponencial

decreciente y un polinomio de grado 3, respectivamente. Con esto se puede obtener un valor óptimo λ_0 y energía E_{λ_0} , de acuerdo al método variacional.

- Posteriormente, con el valor de λ_0 por cada valor de ρ , se calculan las observables requeridas (Energía total, frecuencias de distribución radial, funciones de correlación, recombinación de partículas, etc.)

En el siguiente capítulo se muestran los resultados obtenidos de estas simulaciones.

Capítulo 4

Resultados

En este Capítulo se presentan los resultados de la simulación Monte Carlo, para estudiar cómo evoluciona un sistema de 2 quarks qq y 2 antiquarks $\bar{Q}\bar{Q}$, donde consideramos los sabores de los antiquarks $Q = u, s, c, b$. Introdujimos la posibilidad de formar dos estados de mesones o un estado diquark-antidiquark (tetraquark), identificando observables que sean sensibles a la formación del estado tetraquark.

Mostramos el comportamiento del parámetro variacional óptimo, así como también de distintas observables del sistema (Energía total, raíz del radio promedio al cuadrado, correlaciones entre quarks, recombinación) para los estados de tipo mesónico y de tetraquark (4Q), así como la mezcla entre ambos estados. Los cálculos se realizaron mediante el procedimiento descrito en el capítulo 3.

Para incluir unidades de energía (GeV) y de distancia (fm) apropiadas para los sistemas que estamos estudiando, se utilizaron como referencia valores experimentales (ver apéndice C). Para un valor fijo de la densidad de partículas ρ , se tiene una correspondencia en energía total, por lo que es conveniente utilizar la **densidad de energía** ϵ en su lugar para mostrar la evolución de las observables. Aún así, ρ también es una variable útil para hacer comparación entre sistemas con una asimetría de masas quark-antiquark distinta. Un aumento de la densidad está relacionado directamente con una disminución en la distancia entre partículas.

4.1. Parámetro variacional óptimo

Para checar si la aproximación variacional describe los resultados esperados en los límites de baja y alta densidad, en las figuras 4.1-4.3 se muestra el comportamiento del parámetro variacional óptimo λ como función de la densidad de partículas ρ , para los diferentes sistemas simulados (mesón, tetraquark, mixto). Se utiliza la variable ρ para poder observar además el efecto de la asimetría de

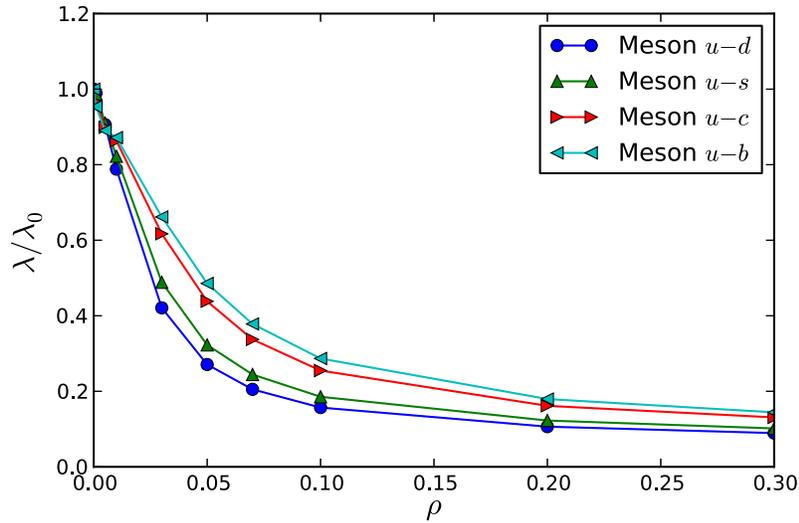


Figura 4.1: Evolución del parámetro variacional óptimo con respecto a la densidad de partículas, para diferente asimetría de masas: Sistema mesón independiente.

masas quark-antiquark. Para todos los casos, λ se normalizó con respecto al valor analítico variacional del mesón λ_0 , obtenido en el capítulo 2 (cuadro 2.1) para toda asimetría de masas empleada.

Se observa que el comportamiento del parámetro variacional es el esperado a bajas densidades, puesto que en el caso mesónico λ/λ_0 tiende a 1. En el caso del tetraquark independiente, este comportamiento también se puede apreciar.

En el límite de altas densidades, se aprecia que λ/λ_0 tiende suavemente a 0 de forma asintótica, y esta evolución es más pronunciada en el caso del sistema de tetraquark independiente, donde a un valor $\rho = 0.05$ el parámetro variacional es muy cercano a cero. Esta tendencia muestra, como se esperaba, que el sistema se comporta como un sistema de partículas fermiónicas libres en este límite. Se observa que al aumentar la asimetría de masas, el parámetro variacional óptimo aumenta y se retrasa su aproximación a cero conforme aumenta la densidad.

En la figura 4.4 se muestra el comportamiento del parámetro variacional, pero en este caso se hace una comparación entre los tres sistemas simulados, para cada razón de masas. Aquí observamos como el valor λ/λ_0 en el sistema mixto, cae completamente entre los dos sistemas independientes. La información que contiene el parámetro variacional da una idea aproximada de la distancia promedio

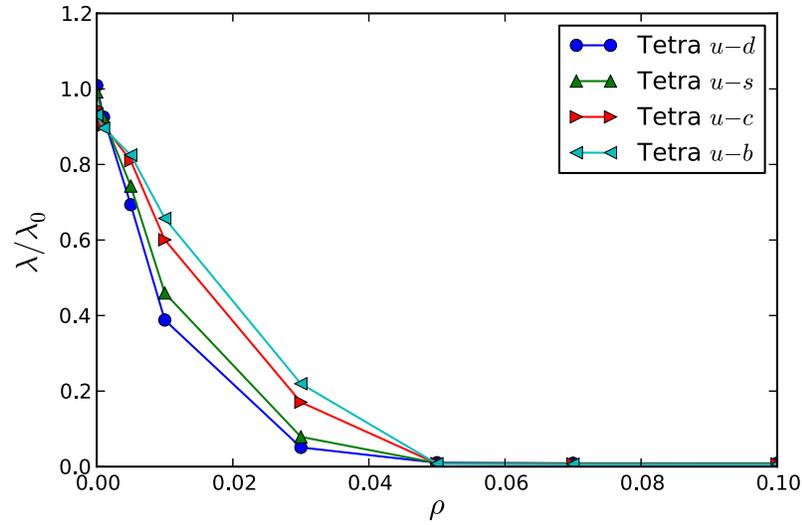


Figura 4.2: Evolución del parámetro variacional óptimo con respecto a la densidad de partículas, para diferente asimetría de masas: Sistema tetraquark independiente.

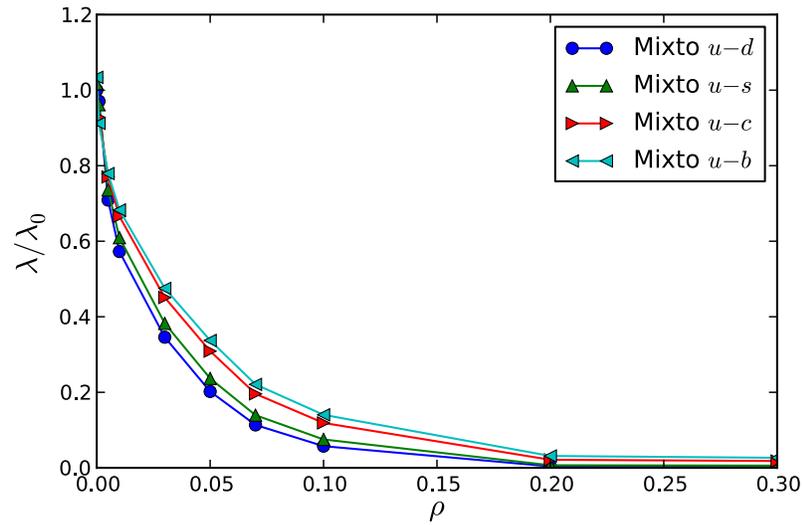


Figura 4.3: Evolución del parámetro variacional óptimo con respecto a la densidad de partículas, para diferente asimetría de masas: Sistema mixto.

entre partículas a una densidad dada, que no es necesariamente la misma para quarks en un sólo cluster. Al aumentar ϵ , ocurren eventos en la simulación en la que el potencial del sistema tetraquark favorece más al sistema, y la información de su tamaño también está contenida en el valor de λ . Esto se traduce en una disminución del parámetro λ con respecto al sistema de mesón independiente.

Después de un valor aproximado $\lambda/\lambda_0 \sim 0,2$, el sistema mixto muestra una tendencia más fuerte hacia los valores del sistema independiente de tetraquark, y se estabiliza después de un valor $\sim 0,1$. Recordando la función de onda variacional empleada (ecuación 3.6), éstas son regiones donde el sistema se aproxima a un gas de Fermi, y aunque el potencial de 4 cuerpos sea cada vez más óptimo para la energía potencial y se pueda cuantificar, realmente se tiene un sistema cada vez más diluido.

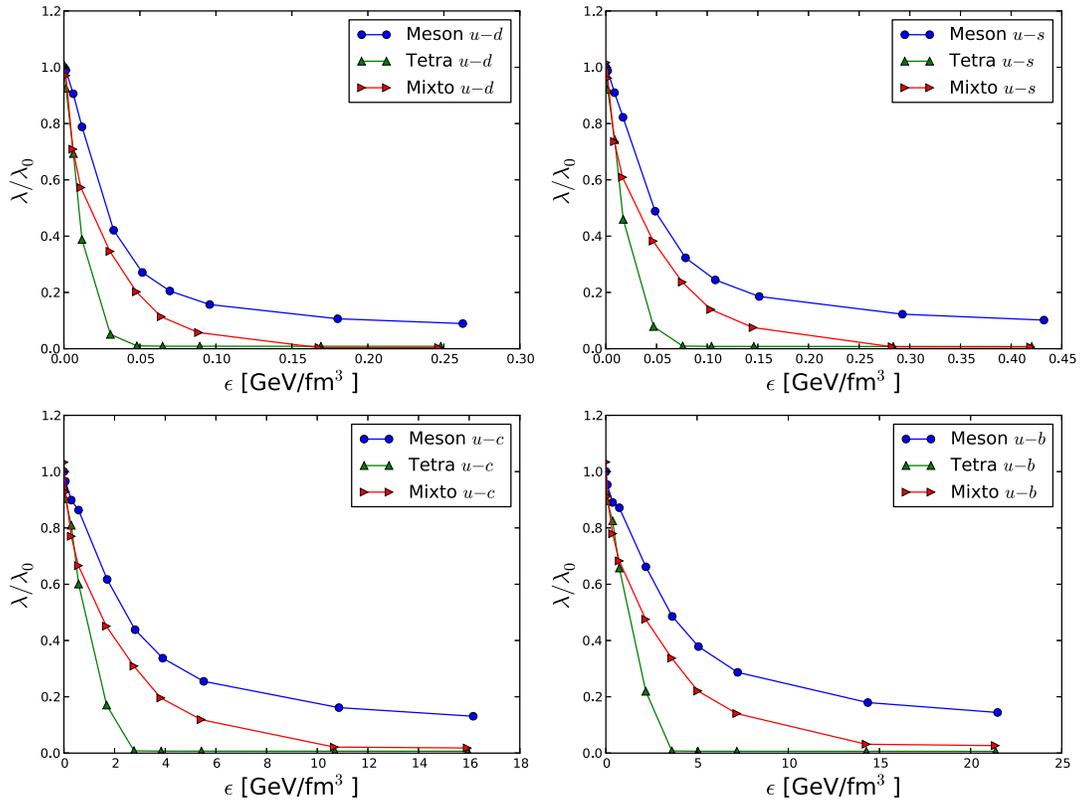


Figura 4.4: Evolución del parámetro variacional óptimo con respecto a la densidad de energía ϵ para diferente asimetría de masas: Comparación de todos los sistemas

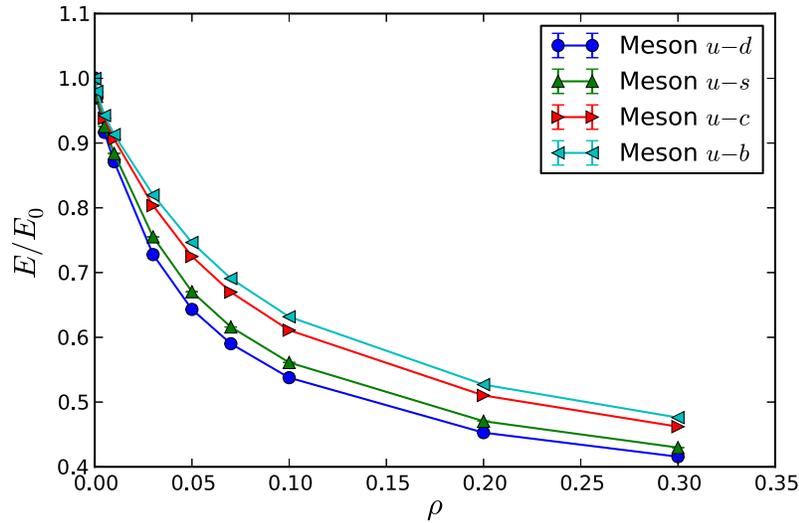


Figura 4.5: Evolución de la energía con respecto a la densidad de partículas, para toda asimetría de masas: Sistema de mesón independiente.

4.2. Evolución de la energía

En las figuras 4.5-4.7 se muestran las gráficas correspondientes de los valores de la energía de interacción E en función de la densidad de partículas ρ , para los tres casos estudiados, haciendo una normalización de la energía con respecto al valor de E_{λ_0} de la tabla 2.1. A bajas densidades, la energía por partícula en el caso mesónico converge a los valores esperados, puesto que E/E_{λ_0} converge a 1. Al tener una diferencia más grande en las masas quark-antiquark, la energía de interacción aumenta, aunque el comportamiento descendente en densidad es similar.

En el caso del sistema donde sólo se considera el potencial de 4 cuerpos, la tendencia a bajas densidades es $E/E_0 \sim 1,06$ para todos los casos, como se muestra en la tabla 4.1. No se tiene una dependencia clara en relación a la asimetría de masas en este límite, pero en la evolución en densidad es similar a la presentada en el sistema de mesón independiente.

Para el sistema mixto, la evolución de la energía con respecto a la densidad presenta los límites esperados en densidades bajas (donde el mesón es la configuración dominante) y la misma dependencia en la asimetría de masas durante la evolución.

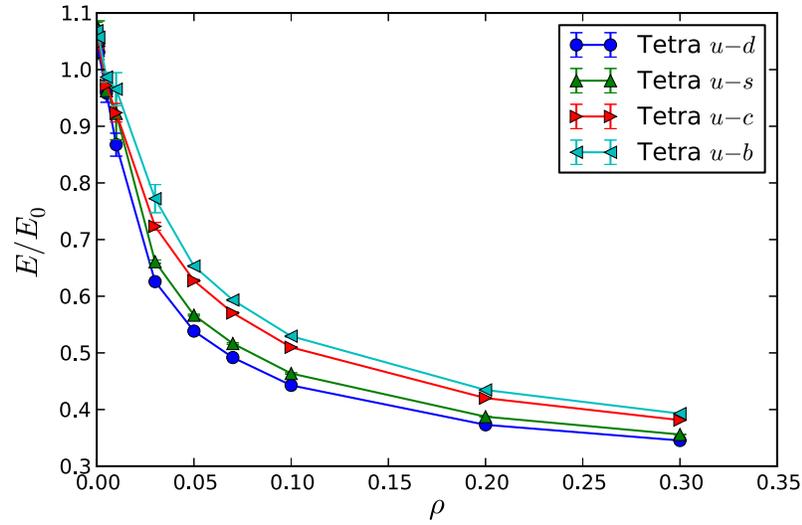


Figura 4.6: Evolución de la energía con respecto a la densidad de partículas, para toda asimetría de masas: Sistema de tetraquark independiente.

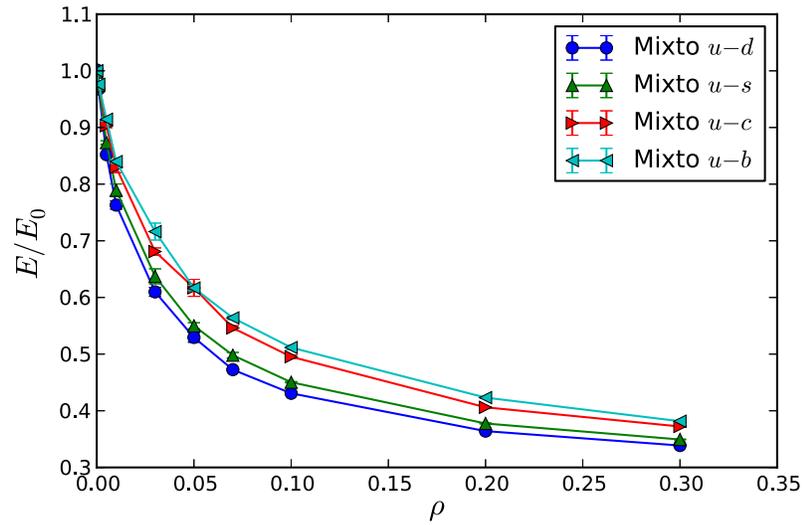


Figura 4.7: Evolución de la energía con respecto a la densidad de partículas, para toda asimetría de masas: Sistema mixto.

m_1	m_2	E/E_{λ_0}	E/N [GeV]
$m_u = 1$	$m_u = 1$	1.06939 ± 0.00791	0.07239
$m_u = 1$	$m_s = 1.44643$	1.07518 ± 0.00862	0.19254
$m_u = 1$	$m_c = 4.6131$	1.06561 ± 0.00758	0.82054
$m_u = 1$	$m_b = 14.0774$	1.06868 ± 0.00743	2.50167

Cuadro 4.1: Energía de interacción normalizada E/E_{λ_0} y energía total por partícula E/N en la densidad más baja simulada, para toda asimetría de masas.

En la figura 4.8 se muestra la evolución de la energía total por partícula (E/N) en función de la densidad de energía ϵ , donde se usan unidades de energía y distancia ajustadas con valores experimentales (ver apéndice **B**), y se hace una comparación entre los sistemas simulados, para cada una de las asimetrías de masas de quark-antiquark.

A densidades bajas, para la configuración tetraquark $4Q$ la energía por partícula del sistema se encuentra por encima de aquella del sistema independiente de mesón (cuadro 4.1), pero al alcanzar una densidad de energía el comportamiento se invierte y el sistema tetraquark puede alcanzar una energía menor. La energía del sistema mixto muestra que la energía del sistema tetraquark independiente es mayoritaria a partir de una densidad de energía similar a aquella donde el parámetro variacional mostraba un comportamiento entre los dos sistemas independientes.

En el sistema mixto, se tiene una disminución de la energía por partícula con respecto a los sistemas independientes, lo cual nos dice que al incluir ambas configuraciones, mesón y tetraquark, el sistema encuentra más configuraciones óptimas y de esta forma disminuye aún más la energía.

En la figuras 4.9 - 4.12 se muestran las contribuciones de los términos cinéticos y potencial a la energía total, para el sistema tetraquark independiente $4Q$. En la energía cinética se incluye la masa constituyente de los quarks involucrados y la energía de gas de Fermi. Dado que el valor de $\langle W \rangle$ es proporcional a λ^2 (ver apéndice **A**), a densidades bajas donde el valor de λ es grande, la contribución de $\langle W \rangle$ es también alta. Por el contrario, cuando la densidad se vuelve alta, el valor de λ se vuelve muy pequeño por lo que la contribución de $\langle W \rangle$ es muy pequeña también, y lo mismo sucede para la contribución de $\langle V \rangle$. En cambio, la contribución debido a la energía cinética de un gas de Fermi, siempre va en aumento, de tal forma que para altas densidades, la energía total del sistema es mayoritariamente ésta. Se incrementa la energía cinética al incluir antiquarks de mayor masa (s, c, b),

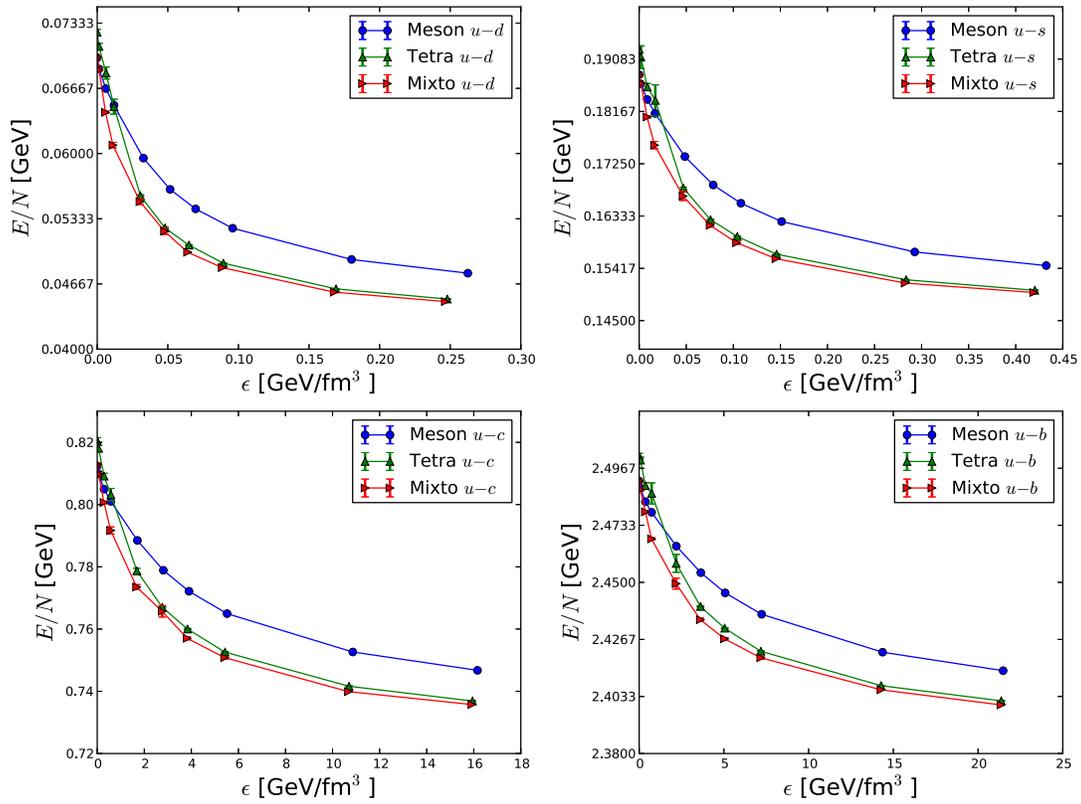


Figura 4.8: Evolución de la energía por partícula con respecto a la densidad de energía del sistema ϵ para diferente asimetría de masas: Comparación de todos los sistemas.

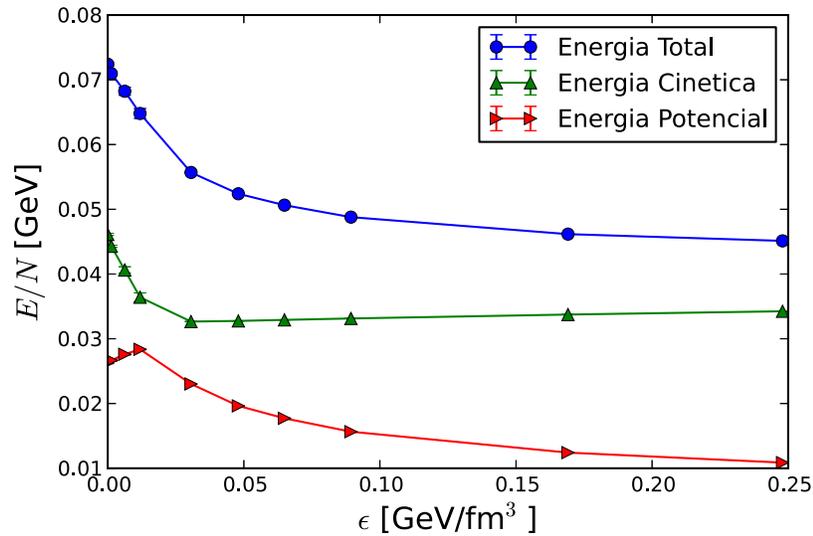


Figura 4.9: Energía por partícula vs densidad de energía para el sistema independiente tetraquark. Se muestran las contribuciones cinética y potencial. Caso $u - d$.

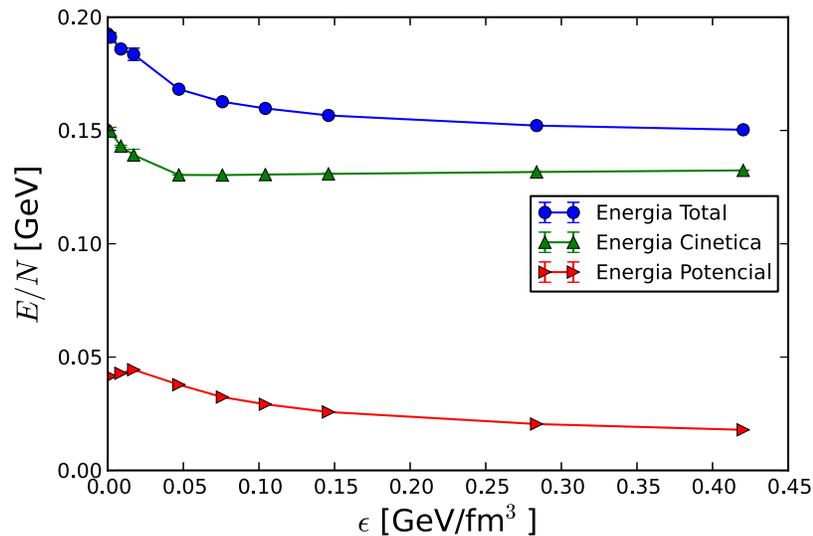


Figura 4.10: Energía por partícula vs densidad de energía para el sistema independiente tetraquark. Se muestran las contribuciones cinética y potencial. Caso $u - s$.

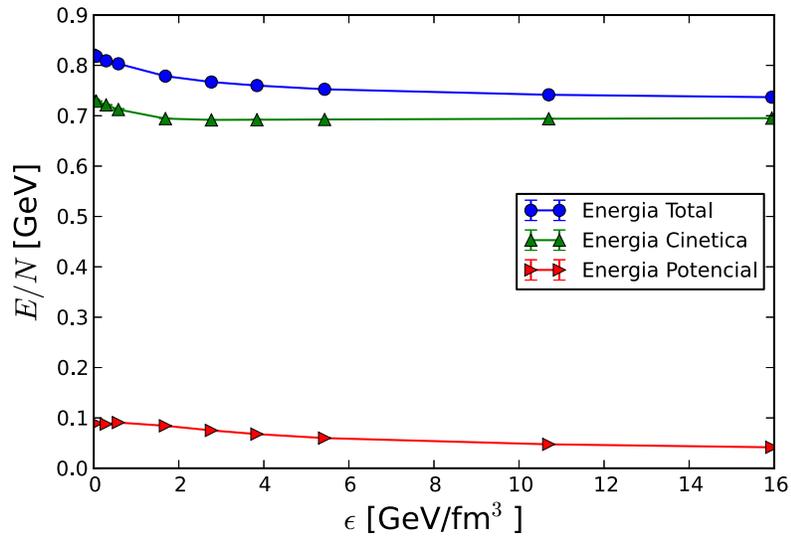


Figura 4.11: Energía por partícula vs densidad de energía para el sistema independiente tetraquark. Se muestran las contribuciones cinética y potencial. Caso $u - c$.

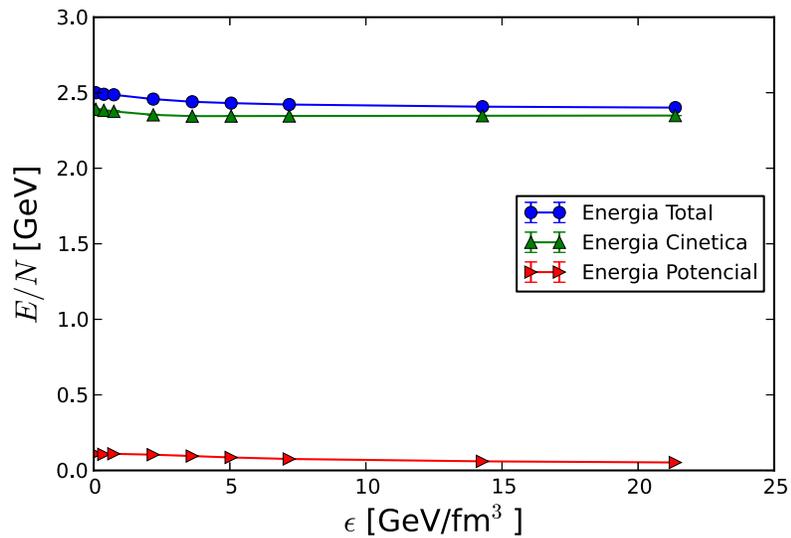


Figura 4.12: Energía por partícula vs densidad de energía para el sistema independiente tetraquark. Se muestran las contribuciones cinética y potencial. Caso $u - b$.

4.3. Distribución radial

Para obtener una información más precisa sobre el tamaño de los clusters, observamos cómo es la distribución de partículas dentro de uno, caracterizado por un valor promedio del radio al cuadrado.

De acuerdo a la ecuación 2.35 se obtuvieron los valores esperados de esta observable para todos los casos, así como sus frecuencias de distribución con respecto a la raíz del valor promedio al cuadrado $D_r(\epsilon)$. Las curvas de distribución se normalizaron de tal forma que el área bajo la curva es igual a uno. Las unidades de distancia para $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ se muestran en unidades de fm , cuya escala es tomada de datos experimentales para el caso mesónico (ver apéndice C); la misma escala se usa para todos los sistemas, incluidos los de tetraquark, para cada asimetría de masas.

En las figuras 4.13 - 4.15 se muestran las curvas de distribución de $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ para los tres sistemas estudiados, para algunas densidades de energía y una asimetría de masas $m_q = u, m_{\bar{q}} = d$. En esta comparación, en general se experimenta un desplazamiento hacia la izquierda de la curva de distribución, al aumentar la densidad de energía, para todos los casos. Es importante recalcar que en el caso del sistema mixto, el radio considerado es aquel de la configuración óptima, que puede incluir casos de uno u otro cluster de mesón o tetraquark, y en la gráfica 4.15 se observa que para la densidad más baja la distribución es puramente debido a la configuración de mesón, pero al aumentar la densidad la configuración de tetraquark es óptima en mayor número y eso se refleja en la amplitud de las dos crestas de la distribución radial. Dentro de este sistema mixto, las figuras 4.16 y 4.17 muestran como se comportan estas curvas de distribución, para los sistemas mesón y tetraquark por separado. Los datos obtenidos son tales que no se toma en cuenta cuál de los dos es el potencial óptimo, y da información de una desviación con respecto a tener cada sistema independiente.

En base a estas curvas de distribución, se calcularon los valores esperados de $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ y en las figuras 4.18 - 4.21 se muestra su evolución con respecto a la densidad de energía, para cada asimetría de masas analizada.

Para todos los sistemas, a excepción del tetraquark en el sistema mixto, se observa un pequeño aumento en el valor de $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ en la región de densidades bajas, para luego mantener el descenso general al aumentar la densidad de energía. A densidades bajas el radio promedio de los clusters de 4 cuerpos en presencia de la configuración de 2 cuerpos, comienza por encima de todas, aunque se tiene que considerar que ésta es una región donde la configuración tetraquark es menos favorecida para el confinamiento. Este efecto de aumento en el radio promedio

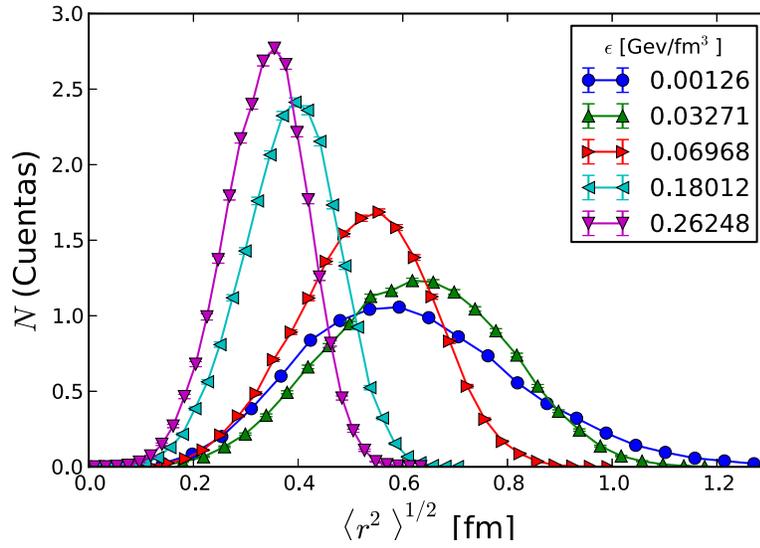


Figura 4.13: Frecuencias de distribución $D_r(\epsilon)$ para distintos valores de ϵ : Sistema mesón independiente $u - d$.

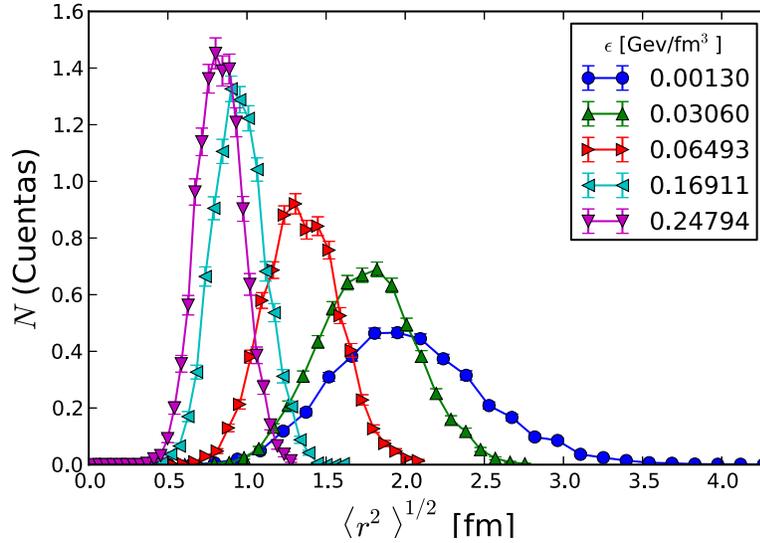


Figura 4.14: Frecuencias de distribución $D_r(\epsilon)$ para distintos valores de ϵ : Sistema tetraquark $4Q$ independiente $u - d$.

para el sistema tetraquark es mayor al aumentar la asimetría de masas, y eso se puede observar en la figura 4.21, donde el valor de $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ para el tetraquark en el

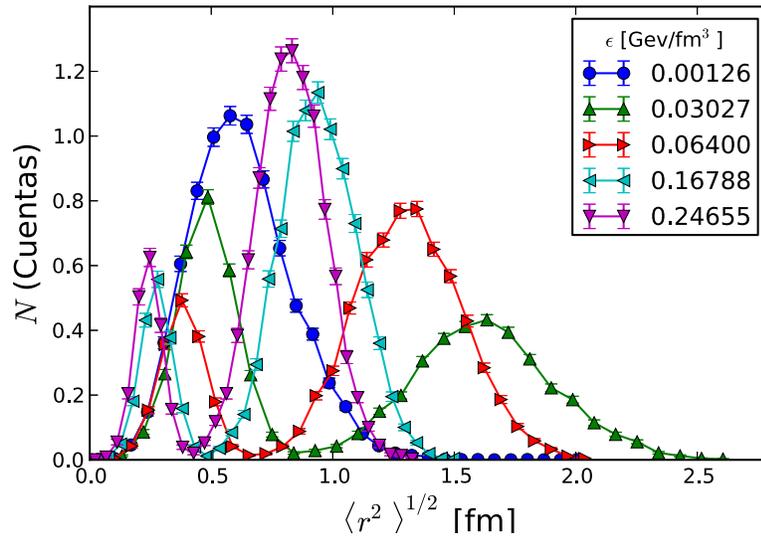


Figura 4.15: Frecuencias de distribución $D_r(\epsilon)$ para distintos valores de ϵ : Sistema Mixto $u - d$.

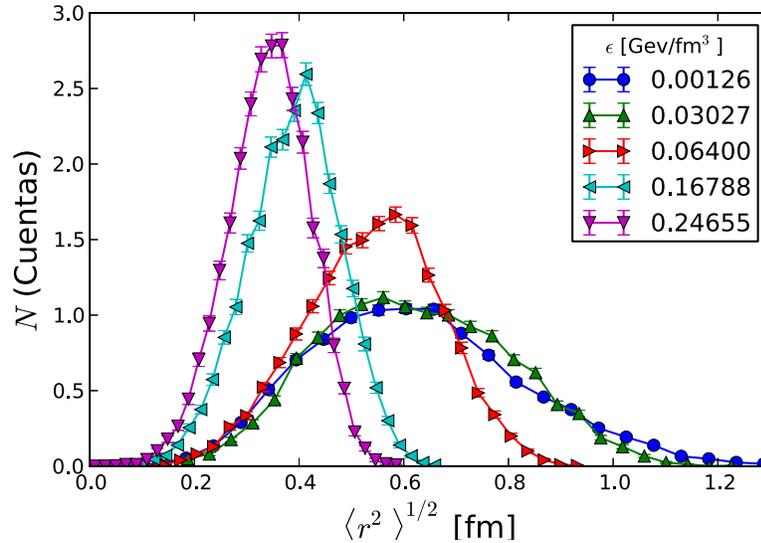


Figura 4.16: Frecuencias de distribución $D_r(\epsilon)$ para distintos valores de ϵ : Mesón en sistema mixto $u - d$.

sistema mixto, siempre está por encima de todos los demás sistemas estudiados. El caso es diferente en el sistema mesónico, pues presenta la misma evolución de

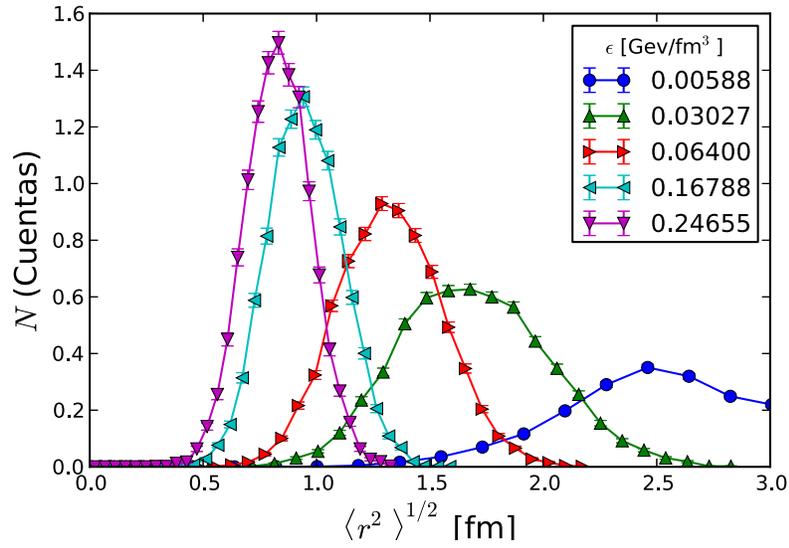


Figura 4.17: Frecuencias de distribución $D_r(\epsilon)$ para distintos valores de ϵ : tetraquark en sistema mixto $u - d$.

radio así sea independiente o mezclado.

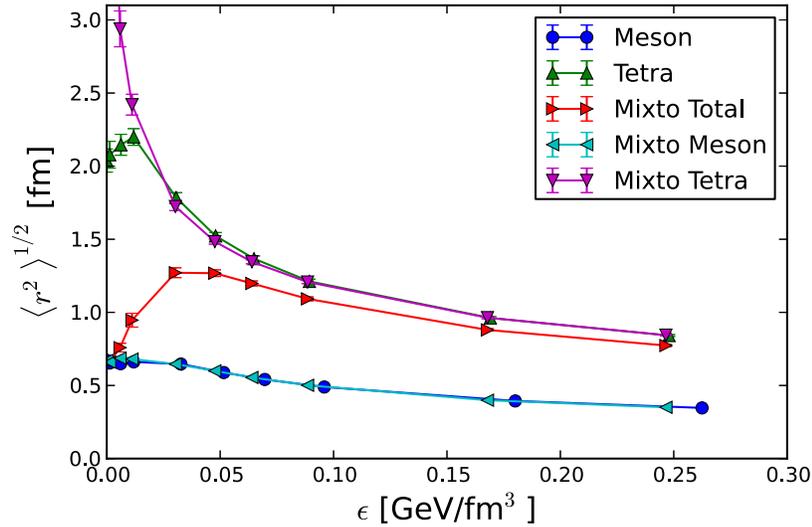


Figura 4.18: Evolución de la raíz del valor promedio del radio al cuadrado $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ con respecto a la densidad de energía ϵ para todos los sistemas. Caso $u - d$.

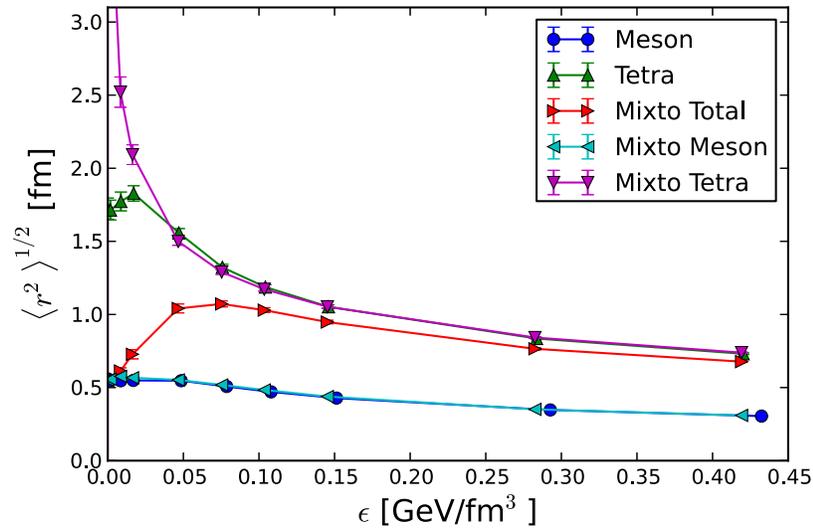


Figura 4.19: Evolución de la raíz del valor promedio del radio al cuadrado $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ con respecto a la densidad de energía ϵ para todos los sistemas. Caso $u - s$.

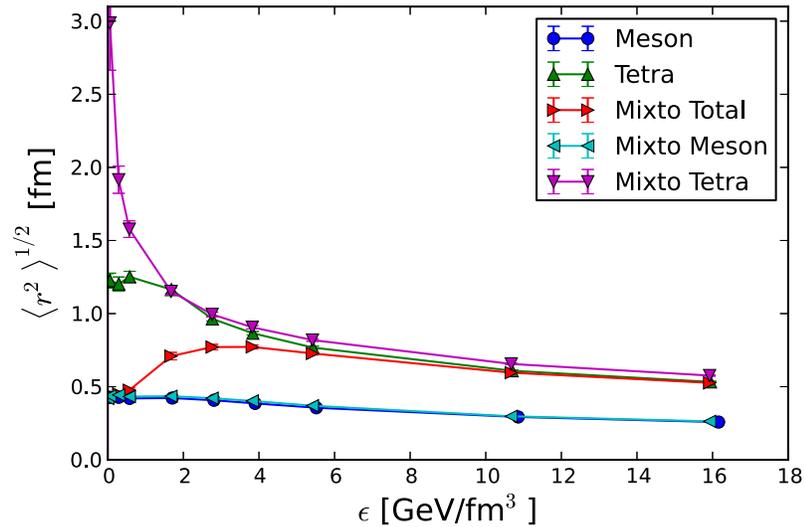


Figura 4.20: Evolución de la raíz del valor promedio del radio al cuadrado $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ con respecto a la densidad de energía ϵ para todos los sistemas. Caso $u - c$.

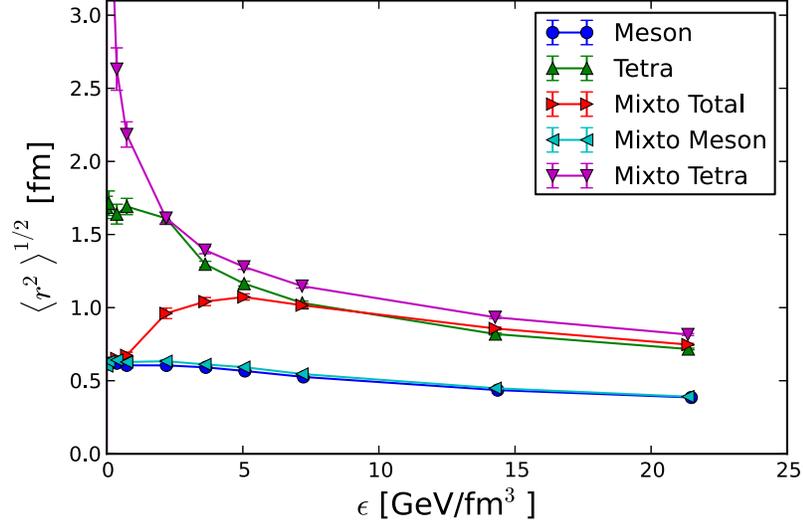


Figura 4.21: Evolución de la raíz del valor promedio del radio al cuadrado $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ con respecto a la densidad de energía ϵ para todos los sistemas. Caso $u - b$.

4.4. Funciones de correlación

Una observable útil que nos permite diferenciar entre los sistemas de dos o cuatro cuerpos es la función de correlación de dos cuerpos, dada por [57]:

$$\rho_2(r) = \sum_{\alpha\beta} \left\langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\alpha^\dagger(r) \hat{\Psi}_\beta^\dagger(0) \hat{\Psi}_\beta^\dagger(0) \hat{\Psi}_\alpha^\dagger(r) | \Psi_0 \right\rangle, \quad (4.1)$$

siendo α y β el conjunto de todos los números cuánticos internos, tales como el sabor y el color. La función de correlación mide la probabilidad de encontrar dos partículas, con números cuánticos dados, a una distancia relativa r .

En nuestro caso, tenemos un sistema finito de 4 partículas, y las correlaciones que se calcularon entre los quarks del sistema convergen a cero para distancias largas. Entonces, definimos que:

$$g(r) \equiv \frac{V}{4\pi r^2} \rho_2(r), \quad (4.2)$$

donde V corresponde al volumen de la caja donde se realiza la simulación. En el apéndice **D** se muestra la forma de realizar el cálculo dentro de la simulación, y también que la normalización se toma de tal manera que la dependencia importante es con respecto a la densidad de partículas ρ , y el límite de $g(r)$ sea cero a distancias cortas ($\rho \gg 1$). Así, para la densidad de referencia (la densidad más

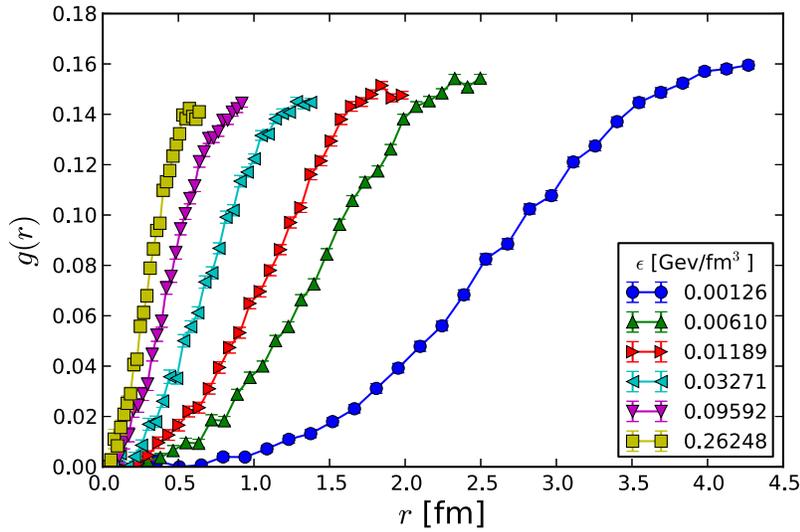


Figura 4.22: Función de correlación $g(r)$ entre quarks del mismo tipo para distintos valores de ϵ : mesones $u - d$.

baja mostrada en las figuras), la magnitud relativa refleja la probabilidad de que una partícula se encuentre correlacionada con otra aunque su valor individual no es explícitamente indicativo.

Es importante mencionar que debido a que el escaneo es de forma radial, y por tanto con simetría esférica, y que el espacio donde se realiza la simulación es cúbico, el cálculo es restringido a un máximo correspondiente a la mitad de la longitud L de los lados de la caja.

En las figuras 4.22 y 4.23 se muestra la función de correlación $g(r)$ entre quarks del mismo tipo ($q - q$), para el sistema independiente de mesón y de tetraquark $4Q$, respectivamente.

En el caso del sistema de mesón independiente, se observa que para toda densidad de energía, la correlación tiene su valor mínimo en $r \rightarrow 0$ y alcanza un valor máximo y estable en su máxima región de muestreo ($g(r) \sim 0,14$), correspondiente a la mitad de la longitud de la caja. El espacio vacío a la izquierda de las curvas se debe al principio de exclusión de Pauli.

A densidades bajas, esta correlación además corresponde a aquella entre los dos sistemas de mesones aislados, que se mencionará más adelante. Lo que nos muestra esto, es que si solamente se incluye el potencial efectivo de mesón, los quarks del mismo tipo tienden a estar lo más alejado posible, y por tanto se considera que en este caso los quarks del mismo tipo **no** están correlacionados.

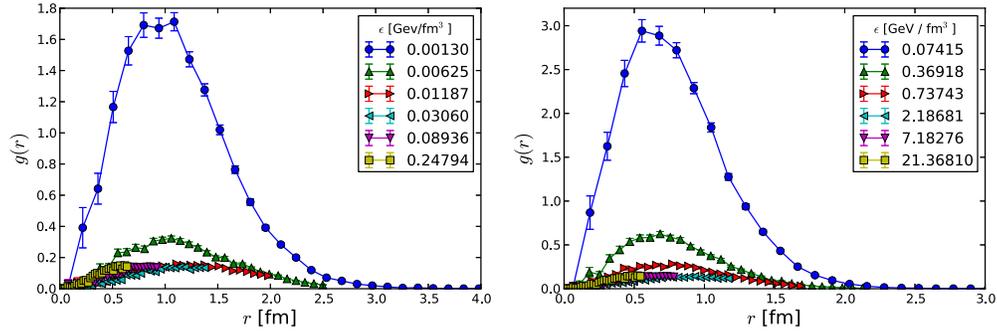


Figura 4.23: Función de correlación $g(r)$ entre quarks del mismo tipo para distintos valores de ϵ : Caso $u - d$ (izquierda) y $u - b$ (derecha).

Para este mismo tipo de correlación, en el caso donde sólo se incluye el potencial efectivo de 4 cuerpos, tenemos de forma similar que a distancias cortas la correlación tiende a cero. La diferencia con el sistema de 2 cuerpos reside en que a densidades bajas el máximo se alcanza a cierto valor de r , que con esta asimetría de masas $u - d$ resulta ser de alrededor de 1,0 fm, y con una correlación mucho mayor ($g(r) \sim 1,6$) que en el caso de mesón independiente, pues el potencial efectivo es atractivo (tipo diquark $q - q$) y se puede observar que tan compacto es el cluster de 4 cuerpos. La magnitud de la correlación va disminuyendo al aumentar la densidad de energía, aunque la forma se mantiene y el máximo se mantiene para este valor de distancia hasta llegar a una densidad donde dichas distancias de escaneo ya no son posibles. A partir de la densidad mostrada en $\epsilon = 0.03060$ GeV/fm³ densidades grandes (distancias cortas) para el caso $u - d$, la correlación vuelve a mostrar su máximo en la región máxima de muestreo. La figura 4.23 también muestra el efecto de una diferencia de masas más grande $u - b$, y el máximo aparece en un valor de r más bajo, cercano a 0,75 fm, lo que aumenta la magnitud de la correlación en esa región.

Es importante recalcar que los colores de los puntos mostrados en esta comparación, corresponden a valores iguales de densidad de partículas ρ , aunque esto no corresponde a una misma densidad de energía.

Un efecto que se tiene a densidades de energía altas (ver figura 4.24), para el caso $u - d$, es que las funciones de correlación entre ambos sistemas independientes de simulación son muy parecidas y no son sensibles a diferenciar el potencial efectivo empleado. Estas son zonas donde el sistema ya se comporta más como un gas de Fermi.

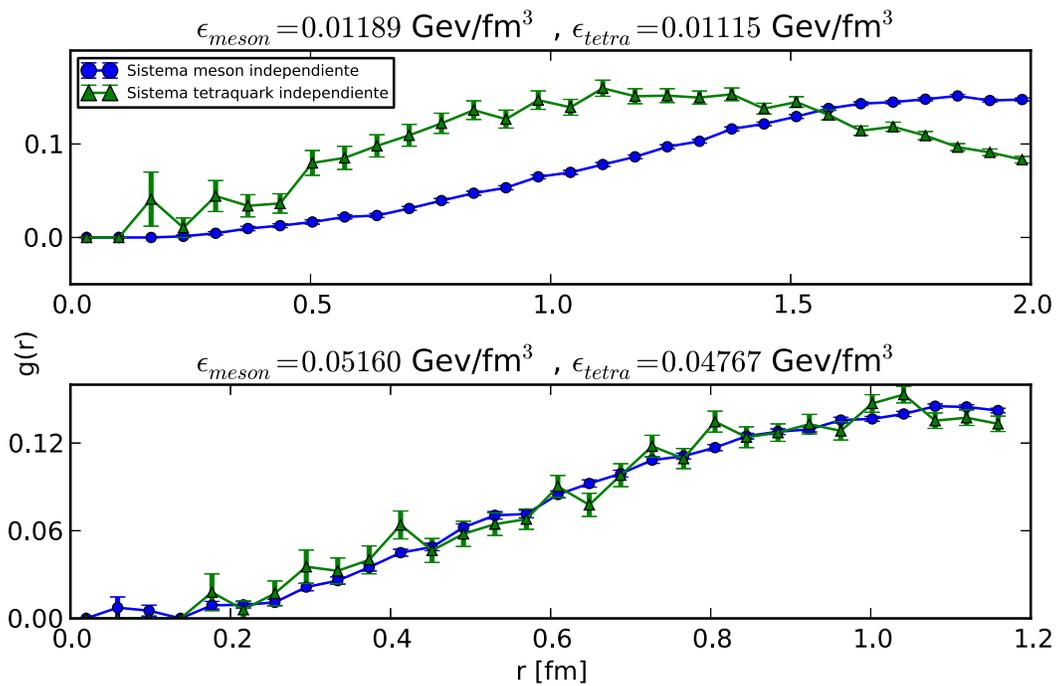


Figura 4.24: Función de correlación $g(r)$ entre quarks del mismo tipo para ciertos valores de ϵ : Comparación entre sistemas independientes de mesón y de tetraquark, caso $u - d$.

En las figuras 4.25 y 4.26 se muestra la función de correlación entre quark y antiquarks de tipo diferente. En este caso, $g(r)$ tiene su valor máximo en $r \rightarrow 0$, $g(r) \sim 21$ para el sistema de mesón independiente, y desciende suavemente al aumentar la distancia, hasta llegar a un valor $r = 1,5$ fm. Esto es de esperarse, pues en este sistema la distancia $q - \bar{q}$ tiene una correspondencia con el tamaño del hadrón formado (mesón), que tiene una magnitud característica, por decir, en el radio, mostrado en la sección anterior, muy por debajo del correspondiente al tamaño de la caja. Al aumentar la densidad de energía el comportamiento se mantiene, pero la magnitud de la correlación desciende considerablemente. A la densidad mostrada $\epsilon = 0,03271$ GeV/fm³ la correlación es prácticamente nula, aunque λ no sea cero. Esto implica que a densidades muy altas, los quarks ya no son capaces de ligarse de manera efectiva entre sí.

Para el sistema de tetraquark independiente, este comportamiento es similar, los valores de correlación más altos están a las distancias más bajas muestreadas y descienden suavemente, pero lo hacen hasta una distancia $r = 2,5$ fm (en el caso $u - d$). Aquí observamos que el potencial de 4 cuerpos mantiene forma de correlación $q - \bar{q}$ similar a la de los mesones aunque con menor valor relativo de correlación ($g(r) \sim 2,7$ en su punto más alto), que en este caso sería más correspondiente con una distancia *diquark-antidiquark*. De igual forma, a las densidades de energía mayores, este tipo de correlación para los dos potenciales efectivos es prácticamente indistinguible. Al igual que en la correlación $q - q$, un aumento en la asimetría de masas aumenta la magnitud de la correlación en distancias más cortas, y se anula en una distancia $g(r) \sim 2,0$ fm.

En la figura 4.27 se muestra una comparación entre funciones de correlación $g(r)$ $q - q$, $q - \bar{q}$ y $q - (q, \bar{q})$, donde esta última corresponde a la de una partícula con todas las demas del sistema. Esta comparación se realiza en la simulación del sistema mixto, donde se incluyen los dos potenciales efectivos, a una densidad $\epsilon = 0.011147$ GeV/fm³. Podemos observar como la correlación $q - q$ es mucho más repulsiva que en el caso $q - \bar{q}$. Esto se debe al hecho de la presencia de más casos de mesones (cluster quark-antiquark), además del principio de exclusión de Pauli por ser un sistema de partículas fermiónicas idénticas, por lo que es difícil tener dos quarks a muy cortas distancias. En general, las magnitudes de correlación $q - \bar{q}$ son más grandes que las de $q - q$, y sólo a valores de densidad altas, como la mostrada, es que son comparables. La correlación debida al confinamiento de los quarks en hadrones es mayor que aquella debido al principio de exclusión de Pauli. La correlación $q - (q, \bar{q})$ toma cuenta de ambas correlaciones discutidas, y se normaliza de acuerdo a esto.

Finalmente, las figuras 4.28 - 4.30 muestran correlaciones $q - q$ y mesón-mesón para

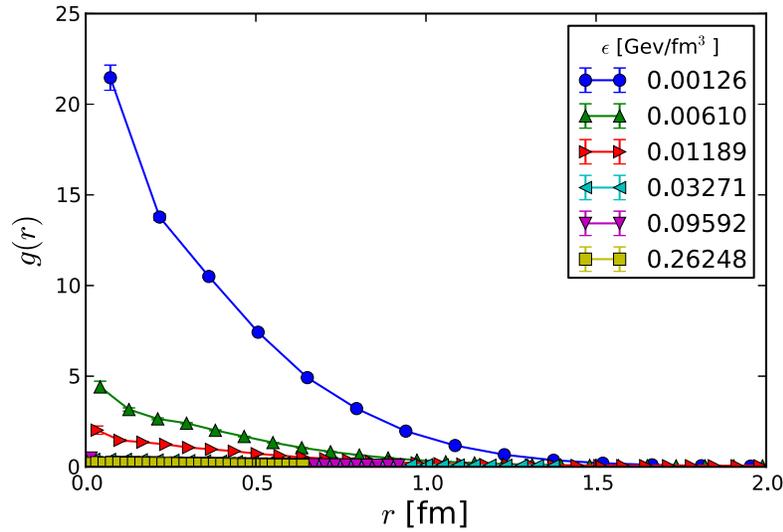


Figura 4.25: Función de correlación $g(r)$ entre quarks-antiquarks para distintos valores de ϵ : mesones $u - d$.

distintos sistemas simulados, y densidades de energía. Para obtener este último tipo de correlación observamos la distancia entre los centros de masa de ambos mesones.

En la primer figura 4.28 se muestra como la correlación $q - q$ y mesón-mesón para el sistema de mesón independiente, corresponden totalmente a la densidad menor mostrada. Esto es de esperarse, pues los quarks del mismo tipo se encuentran en mesones diferentes y a las distancias más grandes posibles. A densidades más grandes (distancias cortas) es donde se observa diferencias, pues los quarks se reordenan dentro del hadrón sin mayor cambio en el centro de masa, y la resolución en las distancias muestreadas son capaces de dar cuenta de ello. Además, se tiene una disminución en la magnitud de la correlación $q - q$, aunque los máximos están en la misma región de distancias mayores muestreadas. En la figura 4.29 se muestra la misma comparación para el sistema mixto, donde en general el efecto es el mismo, sólo con mayor ruido debido a la estadística más baja.

Una comparación de la función de correlación mesón-mesón entre el sistema independiente de mesón y el mixto se puede observar en la figura 4.30, en la cual la observable sólo es sensible al sistema de 4 cuerpos durante la transición de densidades bajas altas, pues en los límites no hay mucha diferencia.

Si comparamos la correlación mesón-mesón en un sistema independiente de mesón

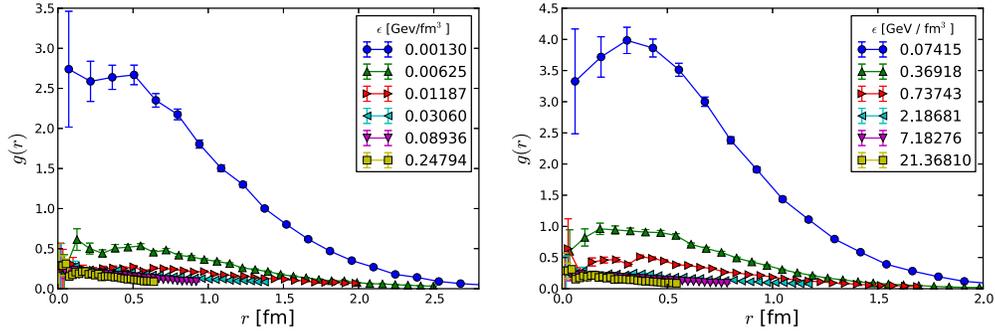


Figura 4.26: Función de correlación $g(r)$ entre quarks-antiquarks para distintos valores de ϵ : Caso $u - d$ (izquierda) y $u - b$ (derecha).

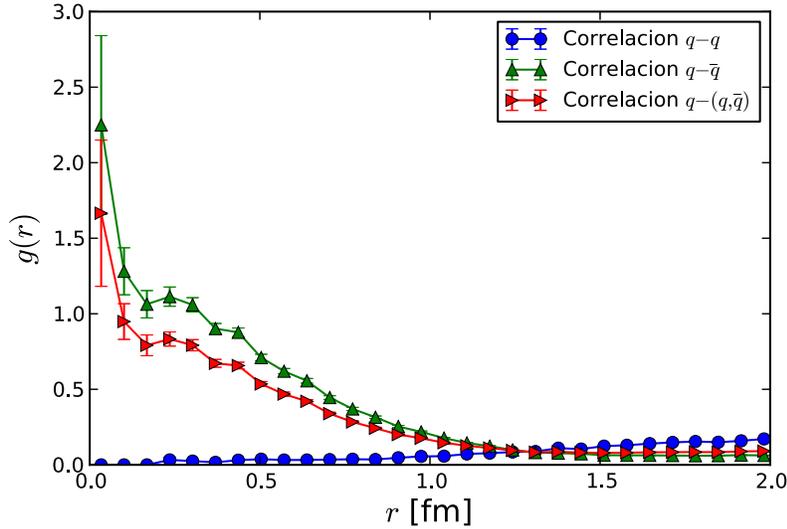


Figura 4.27: Función de correlación $g(r)$ entre todos los tipos de partículas $q - (q, \bar{q})$ para una densidad de energía $\epsilon = 0.011147$ GeV/fm^3 : Sistema mixto $u - d$.

(figura 4.28) con respecto a aquél en la mezcla 2 (figura 4.30), para una densidad alta vemos una diferencia entre los valores máximo de $g(r)$. En el sistema mesónico el máximo valor de $g(r)$ es de alrededor de 0.08 mientras que en el sistema mezclado sólo alcanza un valor de 0.03. Además, existe una diferencia de 0.077 fm en r , entre los máximos del valor $g(r)$, debido a la mezcla de los sistemas. El sistema tetraquark inhibe la identificación de mesones y por tanto la correlación relativa es menor en el sistema mezclado. Así, la presencia de un estado de cua-

tro quarks se puede identificar en la correlación mesón-mesón, aún sin saber de manera directa que se han formado estados de cuatro quarks.

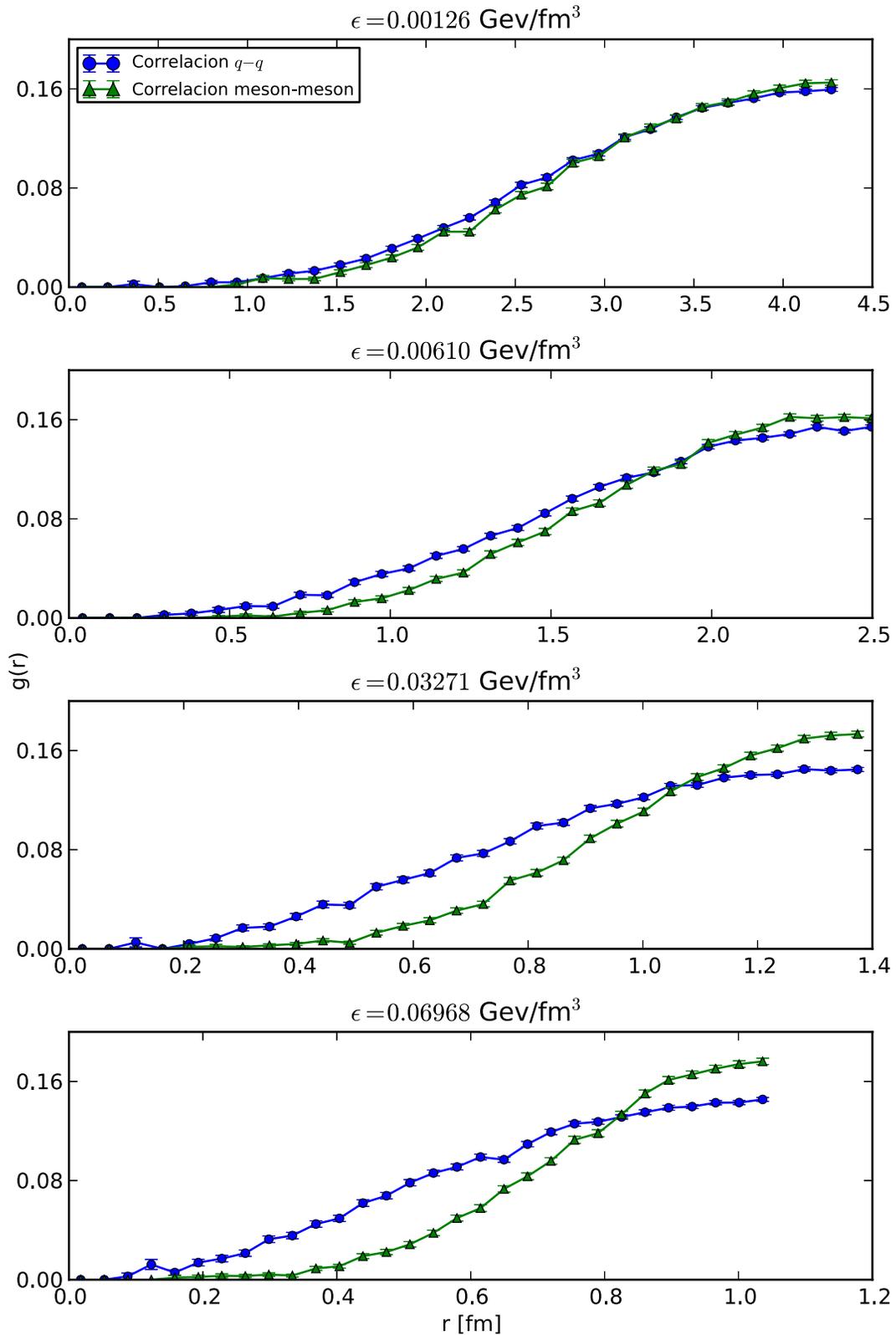


Figura 4.28: Función de correlación $g(r)$ entre quarks del mismo tipo y entre mesones: mesón independiente $u - d$.

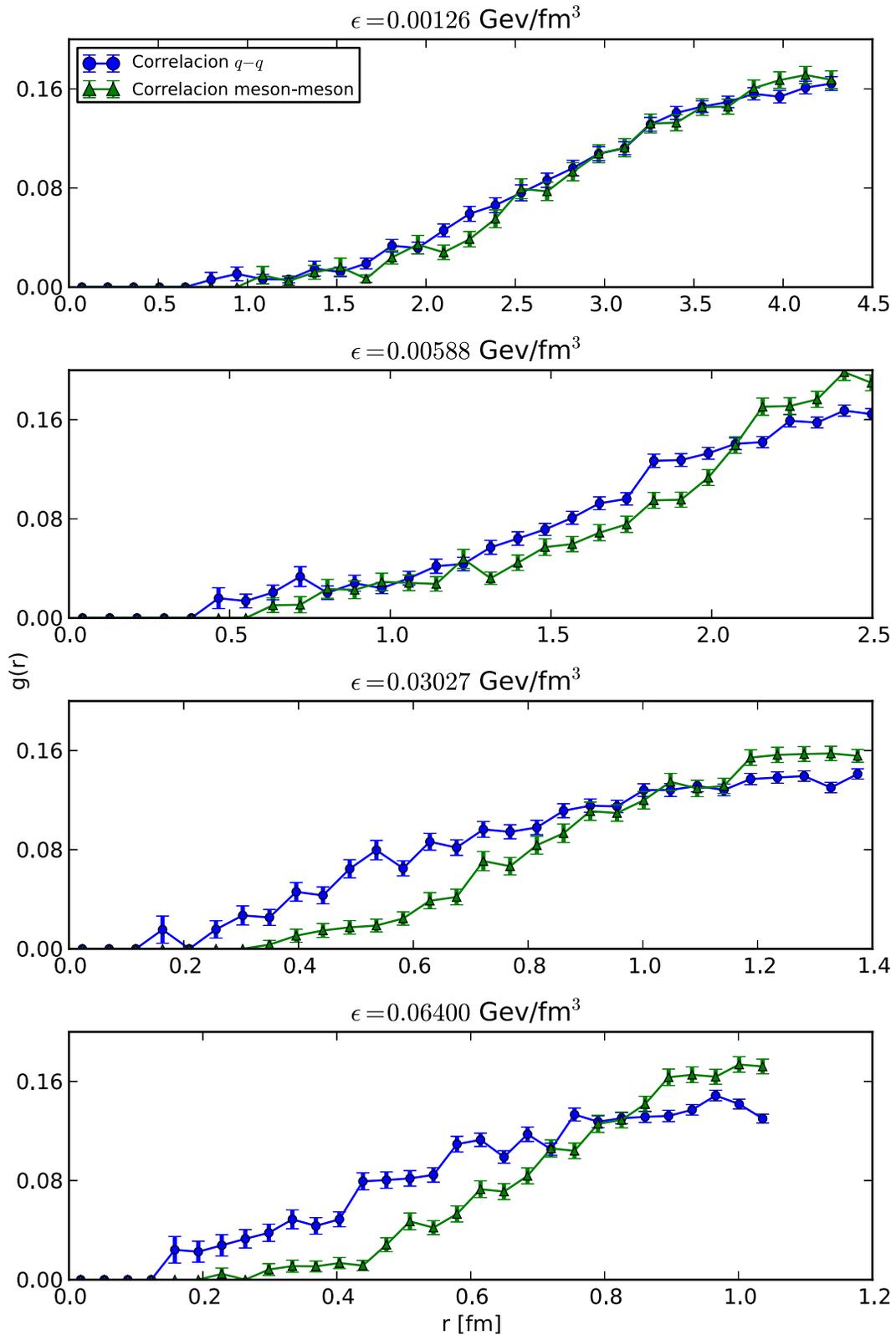


Figura 4.29: Función de correlación $g(r)$ entre quarks del mismo tipo y entre mesones: tetraquark independiente $u - d$.

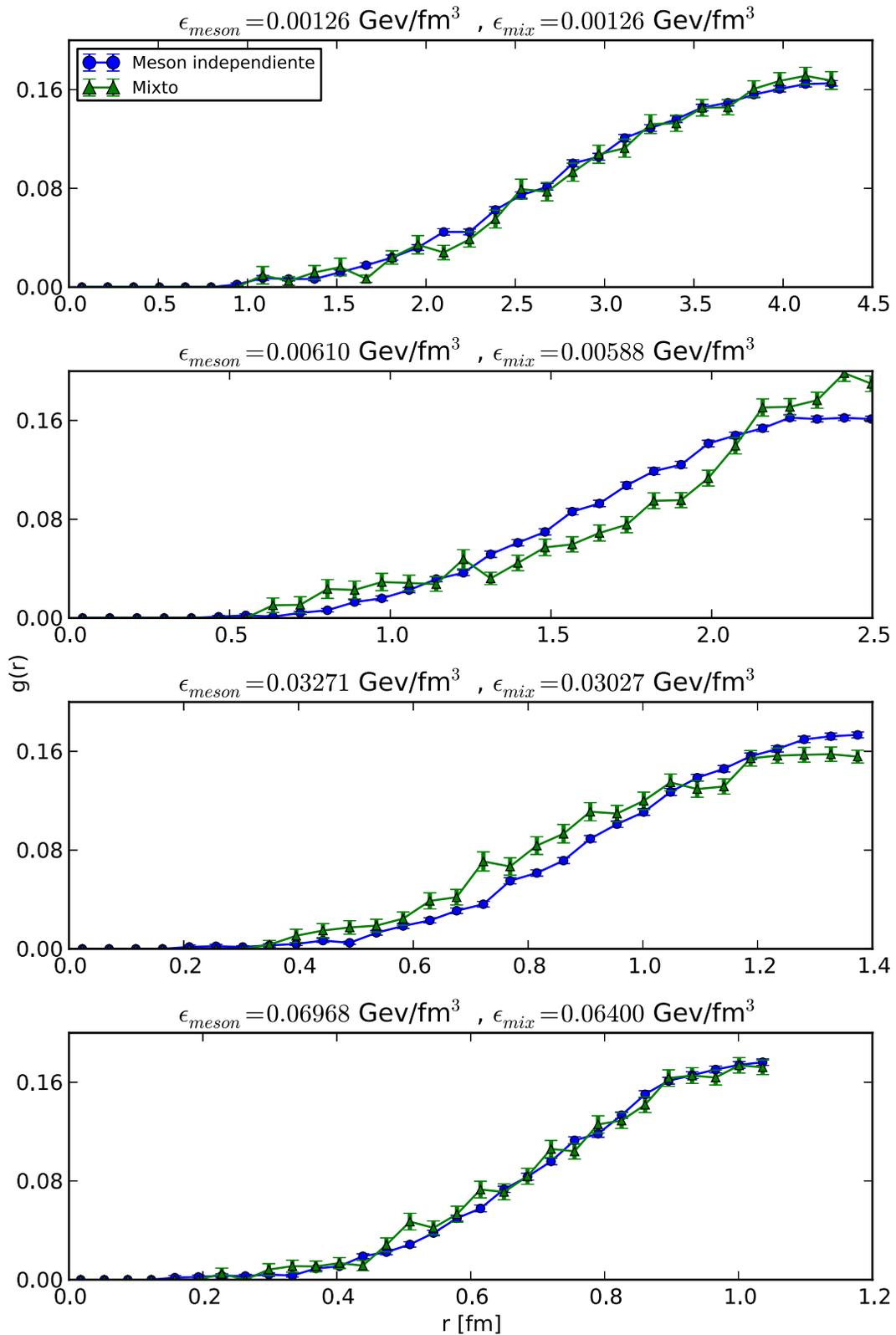


Figura 4.30: Función de correlación $g(r)$ meson-meson para los sistemas de mesón independiente y mixto.

4.5. Recombinación dinámica

La recombinación de cuatro quarks puede tener importantes efectos en sistemas que son producidos a una distancia lo suficientemente corta en el espacio. Un ejemplo puede tomarse en el decaimiento $WW \rightarrow qq\bar{Q}\bar{Q}$, cuya distancia de separación en LEP2 es de alrededor de 0.1 fm [59]. Aunque en el límite perturbativo el efecto de recombinación es pequeño, en el régimen no perturbativo podría ser importante. Un escenario típico para estimar la recombinación es considerar “bolsas” esféricas o alargadas como fuentes de color y la reconexión es proporcional al traslape entre éstas. La recombinación entre dos configuraciones de mesón es implementada [60].

En nuestro caso, además de esto, tenemos recombinaciones entre estados similares al tetraquark y sistemas de dos mesones. Caracterizamos esta modificación a la recombinación de dos mesones por la presencia del estado tetraquark.

En la figura 4.31 se muestra la probabilidad de tener un sistema óptimo de dos mesones o de un tetraquark en una simulación donde se incluyen los tres potenciales efectivos $(V_{m_1}, V_{m_2}, V_{4Q})$, sistema mixto, en función de la densidad de partículas del sistema ρ .

Se observa que el porcentaje de mesones formados es mayoritario a densidades bajas, partiendo de un valor total 1,0, para cualquier diferencia de masas. Este porcentaje decrece al aumentar la densidad, y el porcentaje de formación de un cluster de 4 cuerpos aumenta.

Las probabilidades se asemejan alrededor de un valor $\rho = 0.05$, y a partir de ahí el sistema de 4 cuerpos es más probable al aumentar la densidad; el aumento en la asimetría de masas quark-antiquark traslada esta transición a una densidad mayor.

A partir de una densidad de partículas $\rho = 0.15$, se alcanza una estabilidad en las probabilidades de formación para todas las diferencias de masas, aunque como se verá más adelante, esto también entra en juego con el parámetro variacional óptimo de la función de onda variacional.

El modelo requiere que los clusters formados sean incoloros. El cambio de una configuración a otra, dada por el requerimiento del mínimo de energía potencial, es una medida de la propiedad de recombinación dinámica del sistema. Definimos la probabilidad de recombinación para los mesones como

$$P_{r_{2m}} = \frac{N(V_{m1} \leftrightarrow V_{m2})}{N(V_{m1}) + N(V_{m2})}, \quad (4.3)$$

donde $N(V_i \leftrightarrow V_j)$ denota el número de transiciones entre una configuración i y

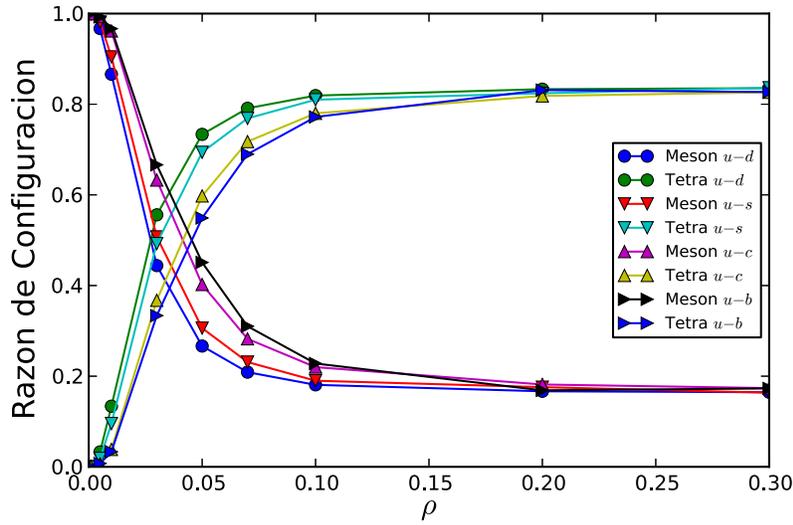


Figura 4.31: Probabilidad de tener un estado mesónico o tetraquark en la simulación, para todas las diferencias de masas: Sistema mixto.

una j , y $N(V_i)$ es el número de veces que el sistema estuvo en la configuración i . Añadida la posibilidad de una configuración tetraquark, es decir, para un sistema mixto, la probabilidad se vuelve

$$P_{r_{mix}} = \frac{N(V_{m1} \leftrightarrow V_{m2}) + N(V_{m1} + N(V_{4Q})) + N(V_{m2} \leftrightarrow V_{4Q}) + N(V_{4Q} \rightarrow V_{4Q})}{N(V_{m1}) + N(V_{m2}) + N(V_{4Q})},$$

En la figura 4.32, se muestran las probabilidades como una función de la densidad. La probabilidad de recombinación entre las dos configuraciones de dos mesones ($P_{r_{2m}}$) se muestra para el caso independiente de mesón y el mixto. En el caso mixto se observa una supresión en la recombinación de mesones. La probabilidad cuando la configuración de tetraquark es tomada en cuenta ($P_{r_{mix}}$) corresponde al caso mixto. Las líneas sólidas (discontinuas) corresponden a una asimetría de masas $q = u, \bar{Q} = d$ ($q = u, \bar{Q} = b$). En el sistema mixto, a densidades altas, la configuración tetraquark es más óptima y en consecuencia las recombinaciones vienen en gran medida de esta configuración.

Un estimado cualitativo de este efecto puede ser exhibido considerando un modelo simple de expansión, de tal forma que el sistema pueda evolucionar con respecto a la densidad. Podemos definir esta función de color como

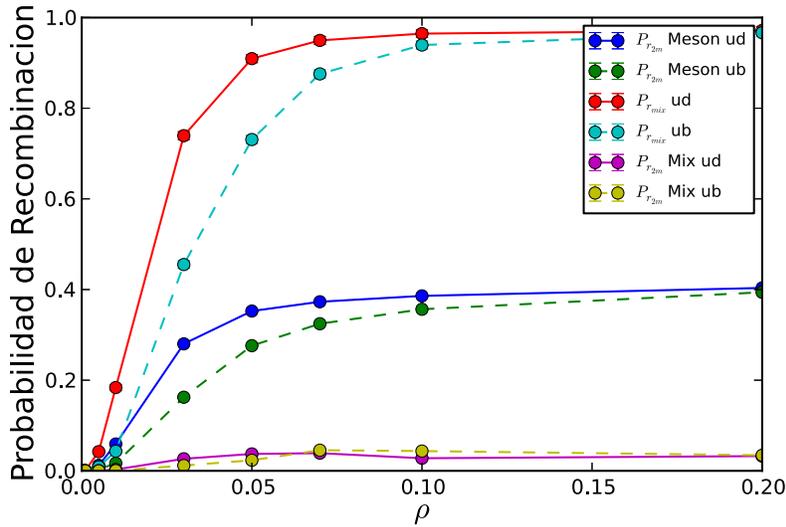


Figura 4.32: Probabilidad de recombinación como función de la densidad.

$$\Omega(x) \equiv P_{frag}(t)P_r(x) \quad (4.4)$$

donde $P_{frag}(t) = \exp(-t^2/\tau_{frag}^2)$ es la probabilidad de que el sistema todavía no se haya fragmentado, con $\tau_{frag} \sim 3r_h$ siendo la vida media, tomada como tres veces la radio del mesón [60]. La probabilidad de recombinación $P_r(\rho)$ puede ponerse en términos del radio de una esfera (x) correspondiente a la densidad dada $\rho = 3N/4\pi r_h^3 x^3$, usando unidades de radio hadrónico. Considerando la expansión del sistema con una velocidad $c = 1$ de tal forma que $x = ct$, entonces $P_{frag} = \exp(-\frac{x^2}{9})$.

En la figura 4.33, mostramos la evolución de esta función de color como una función del tamaño radial del sistema, en unidades del radio del mesón. Se muestra una interpolación de los datos para adaptar una curva para valores pequeños de x . En el caso cuando se considera la recombinación entre mesón y tetraquark ($P_{r_{mix}}$) modifica el estimado en comparación a cuando no se incluye ($P_{r_{2m}}$). La composición de sabor modifica el comportamiento a distancias intermedias, y el efecto total se vuelve muy débil después de 4 veces el tamaño del hadrón.

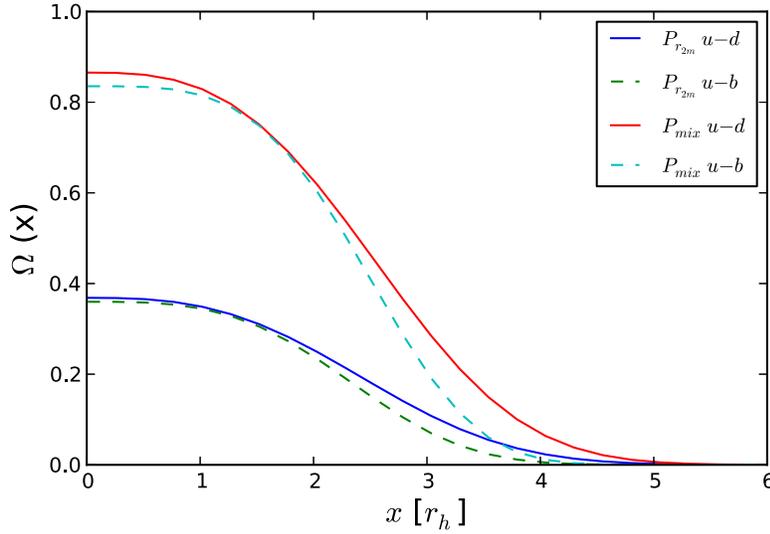


Figura 4.33: Evolución de la probabilidad como función del tamaño radial del sistema.

4.6. Potencial Tetraquark

Como se ha descrito anteriormente, el potencial de tetraquark depende de las posiciones de los quarks y de dos vectores auxiliares, puestos de tal forma que la longitud total de los tubos de flujo que unen a los quarks es la mínima. Estos vectores auxiliares son modificados en una manera no trivial cuando un solo quark cambia de posición. De forma efectiva, este potencial puede ser descrito como lineal con respecto a la longitud invariante

$$R \equiv \sqrt{\sum r_{ij}^2} = [r_{q_1,k}^2 + r_{q_2,k}^2 + r_{k,l}^2 + r_{\bar{q}_1,l}^2 + r_{\bar{q}_2,l}^2]^{1/2}, \quad (4.5)$$

$$V(R) = R_0 + BR, \quad (4.6)$$

donde R_0 es el valor del potencial a distancia cero, que se espera que se modifique por una corrección de tipo Coulomb para distancias cortas. En la gráfica 4.34 mostramos la pendiente B del comportamiento lineal de la simulación como una función de la densidad para el caso independiente de tetraquark. La pendiente, en el caso de tetraquark muestra una pequeña dependencia con respecto a la densidad, y $B(\rho \sim 0) = 0.84 \pm 0.02$. En el caso mixto se aprecia una mayor dependencia de la densidad, que tiene un valor menor cerca de densidad cero [$B(\rho \sim 0) = 0.67 \pm 0.02$]. El comportamiento entre el sistema mixto y el independiente se asemejan al aumentar la densidad. Este comportamiento es similar

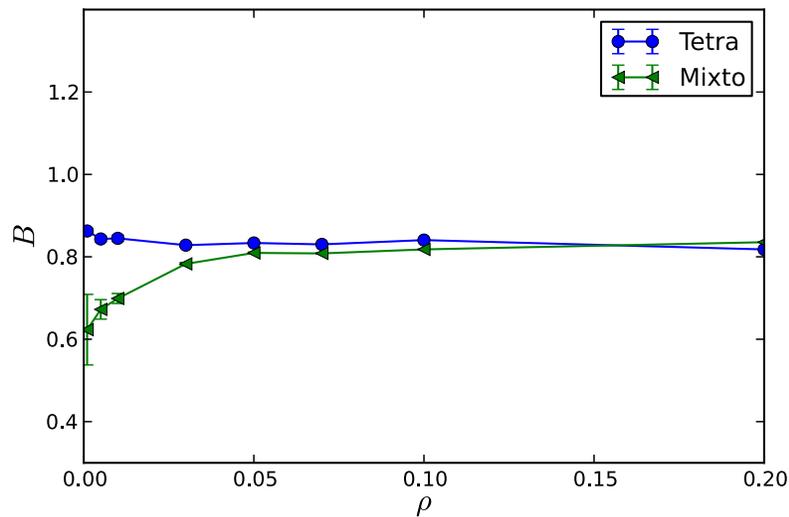


Figura 4.34: Pendiente B del potencial lineal efectivo del tetraquark.

cuando se consideran otros sabores de quarks.

En la gráfica 4.35, mostramos un potencial efectivo de contacto, $V_4(\text{contacto})$, como una función de la densidad, determinada por el valor promedio del potencial, independientemente de la longitud de los tubos de flujo. El sistema de tetraquark puro (sistemas ud y ub) muestra una dependencia con respecto a la razón de masas en el régimen de baja energía y, conforme la densidad crece, se vuelven similares. El sistema mixto no muestra dependencia en la razón de masas, pero sí a la presencia de mesones, en el cual se vuelve muy grande en el régimen de bajas energías. Este comportamiento corresponde al incremento de la distancia entre los quarks, donde la configuración de dos mesones separados tiende a separar a las partículas.

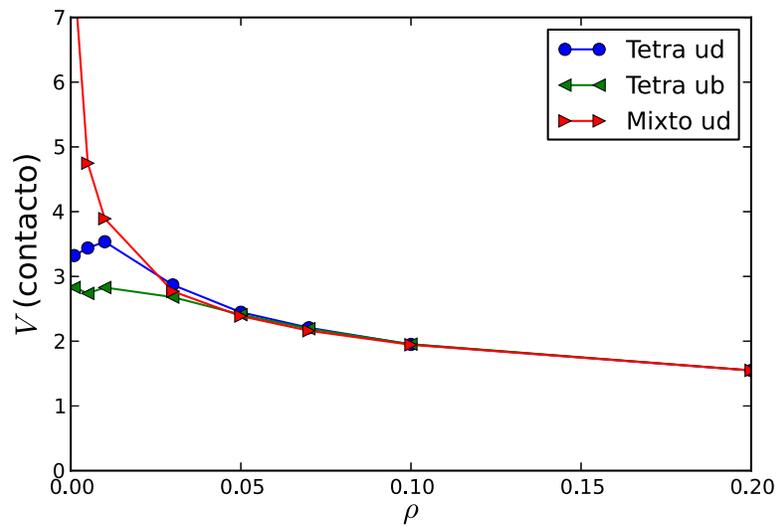


Figura 4.35: Potencial de contacto V_4 para configuración Tetraquark. El valor del potencial se muestra en unidades arbitrarias utilizadas en la simulación.

Capítulo 5

Conclusiones

Hemos utilizado una simulación Monte Carlo en un sistema compuesto por dos quarks ligeros qq idénticos y dos antiquarks $\bar{Q}\bar{Q}$ idénticos de sabor variable, considerando tres posibles estructuras: dos mesones, tetraquark, o una combinación entre éstos. La interacción entre partículas es simulada de manera efectiva por un potencial lineal, y la configuración de Tetraquark requiere un algoritmo para buscar dos vectores auxiliares que minimicen la energía potencial. El sabor de los antiquarks nos permite considerar varias razones de masa para el sistema y su efecto es mostrado.

El sistema de quarks es simulado dentro de una caja cúbica. Éstos forman mesones aislados cuando el volumen de ésta es muy grande. Así, podemos identificar un parámetro de densidad de partículas ρ (o de energía ϵ), la cual puede modificarse cambiando el tamaño de la caja.

Se mostró que considerando la posibilidad de una configuración de 4 cuerpos, el sistema disminuye su energía total de manera notable, al aumentar la densidad. Además, se muestra un valor numérico para el límite de densidades bajas, donde no se encontró una dependencia observable con respecto a la asimetría de masas de quarks y antiquarks. De la misma forma, el parámetro variacional óptimo λ disminuye más rápidamente al incluir al estado tetraquark, lo que indica que éste favorece una disipación en la interacción fuerte.

Se encuentra que la evolución del radio cuadrado promedio para el mesón es dependiente de esta razón de masas. La combinación ud desciende más rápido que el caso ub , mientras que la dependencia al estar junto a un sistema de tetraquark es ambigua. En el caso del tetraquark, esta evolución también muestra una dependencia con respecto a la asimetría de masa y la presencia de mesones, mostrando una mayor diferencia entre el sistema mixto y el independiente considerando un sabor de antiquark $\bar{Q} = b$.

La presencia de una configuración de 4 cuerpos influye en la función de correlación para quarks del mismo tipo mostrando una formación de diquark para densidades bajas y una caída de correlación al aumentar la densidad. Encontramos una modificación en la función de correlación mesón-mesón por la presencia de tetraquark, para densidades intermedias.

La probabilidad de cambio entre las dos configuraciones de meson (intercambio de quarks) se ve afectada cuando se considera la configuración de tetraquark. Usando un modelo simple para describir una evolución del sistema con respecto a un parámetro de densidad se muestra que los efectos de recombinación son importantes aún después de una distancia de 2 veces la del mesón.

En cuanto al potencial efectivo de 4 cuerpos, no se encuentra una dependencia fuerte con respecto a la asimetría de masas. Se observa una dependencia a densidades bajas, debido a la presencia de mesones. Considerando un potencial efectivo de contacto, dado como el valor promedio del potencial de 4 cuerpos a una densidad dada, independiente de la longitud de los tubos de flujo. Utilizando unidades arbitrarias de la simulación, no se encuentra una dependencia con respecto a la asimetría de masas, pero sí a la presencia de mesones, para densidades bajas.

La intención de este trabajo fue mostrar variables del sistema que puedan caracterizar esta configuración tetraquark. Con respecto al potencial efectivo lineal, información adicional es requerida para distancias cortas (un término de Coulomb, por ejemplo). Nos hemos limitado a considerar quarks (antiquarks) idénticos, y se podrían considerar diferentes sabores de quarks, teniendo un efecto debido a la ausencia de correlaciones de tipo Fermi. Una interacción de espín también debe considerarse.

Apéndice A

Término Cinético $\langle W \rangle_\lambda$

La ecuación 3.19 nos dice que el término cinético del sistema de partículas está dado por:

$$\langle T \rangle_\lambda = T_{FG} + \langle W \rangle_\lambda,$$

donde $\langle W \rangle_\lambda = \sum_i \frac{1}{2m_i} [\partial_i \ln F_\lambda(x)]^2$, y

$$F_\lambda = e^{-\lambda Q}; \quad Q = \sum_{i \neq j} r_{ij}^{3/2}; \quad i, j = 1, 2, 3, 4, k, l; \quad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|, \quad (\text{A.1})$$

siendo Q un término que considera la configuración óptima para el potencial de muchos cuerpos (mesones y tetraquarks) mencionados en el capítulo 3, y ∂_i la derivada con respecto a la posición de la i -ésima partícula. Si hacemos el desarrollo para $\langle W \rangle_\lambda$ podemos ver que

$$\partial_i \ln F_\lambda(x) = \lambda [\partial_i Q],$$

y por lo tanto, el término $\langle W \rangle_\lambda$ está dado por:

$$\langle W \rangle_\lambda = \langle W \rangle_1 + \langle W \rangle_2 + \langle W \rangle_3 + \langle W \rangle_4 = \frac{\lambda^2}{2} \sum_i^4 \frac{1}{m_i} [\partial_i Q]^2. \quad (\text{A.2})$$

Para realizar la simulación es necesario calcular el valor de $\langle W \rangle_\lambda$ para cada uno de los potenciales utilizados $V_{m1}, V_{m2}, V_{4Q-tree}$, es decir, para cada una de las configuraciones del sistema.

El sistema que utilizamos sólo contiene dos quarks y dos antiquarks, con carga de color y anticolor correspondiente. Para el cálculo usaremos la notación siguiente para las posiciones de los quarks: $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ donde \vec{r}_1 y \vec{r}_2 serán las posiciones de los quarks, \vec{r}_3 y \vec{r}_4 las posiciones de los antiquarks.

A.1. Mesón

Comenzando con los potenciales de tipo mesón, podemos distinguir dos configuraciones del sistema, con los siguientes términos Q :

$$Q_{m_1} = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^{3/2} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_4)^{3/2}], \quad (\text{A.3})$$

$$Q_{m_2} = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_4)^{3/2} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^{3/2}]. \quad (\text{A.4})$$

A manera de ejemplo, tomando la derivada con respecto a la coordenada x de la partícula 1, tenemos que

$$\partial_{x_1} r_{13} = \frac{3}{2} r_{13}^{1/2} (\partial_{x_1}) = \frac{(x_1 - x_2)}{r_{13}}; \quad r_{13} = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2},$$

de tal forma que para toda coordenada, para la partícula 1

$$[\partial_1 Q_{m_1}]^2 = \frac{9}{4} \frac{1}{r_{13}} [(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2] = \frac{9}{4} r_{13}.$$

Realizando el mismo cálculo de forma análoga para las partículas restantes y la segunda configuración de mesones, el término cinético para cada configuración está dado por:

$$\begin{aligned} \langle W \rangle_\lambda &= \frac{9\lambda^2}{8} \left(\frac{1}{m_1} r_{13} + \frac{1}{m_2} r_{24} + \frac{1}{m_3} r_{13} + \frac{1}{m_4} r_{24} \right), \\ \langle W \rangle_\lambda &= \frac{9\lambda^2}{8} \left(\frac{1}{m_1} r_{14} + \frac{1}{m_2} r_{23} + \frac{1}{m_3} r_{14} + \frac{1}{m_4} r_{23} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A.2. Tetraquark

Continuamos ahora con el cálculo utilizando el término Q_{tree} para un estado ligado de 4 quarks. Este término está dado por:

$$Q_{\text{tree}} = \left[r_{1k}^{3/2} + r_{2k}^{3/2} + r_{kl}^{3/2} + r_{3l}^{3/2} + r_{4l}^{3/2} \right], \quad (\text{A.6})$$

donde los vectores \vec{k} y \vec{l} ayudan a minimizar el potencial de 4 cuerpos, y la forma en que se calcularon se mencionó en el capítulo 3. Debido a este tipo de aproximación, desconocemos la dependencia real de estos vectores con respecto a las demás partículas. Entonces, de manera general, se toma en cuenta que los vectores $\vec{k} = \vec{k}(\vec{r}_i)$ y $\vec{l} = \vec{l}(\vec{r}_i)$ tienen una dependencia con respecto a las posiciones de todas las partículas.

A manera de ejemplo, si comenzamos el cálculo usando sólo la derivada con respecto a la coordenada x de la primera partícula, tenemos que:

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} Q_{\text{tree}} &= \partial_{x_1} \left(r_{1k}^{3/2} + r_{2k}^{3/2} + r_{kl}^{3/2} + r_{3l}^{3/2} + r_{4l}^{3/2} \right), \\ &= \frac{3}{2} r_{1k}^{1/2} \partial_{x_1} r_{1k} + \frac{3}{2} r_{2k}^{1/2} \partial_{x_1} r_{2k} + \frac{3}{2} r_{kl}^{1/2} \partial_{x_1} r_{kl} + \frac{3}{2} r_{3l}^{1/2} \partial_{x_1} r_{3l} + \frac{3}{2} r_{4l}^{1/2} \partial_{x_1} r_{4l}.\end{aligned}$$

Realizando el cálculo de la primera derivada de la ecuación,

$$\partial_{x_1} r_{1k} = \frac{1}{r_{1k}} [(x_1 - x_k) (1 - \partial_{x_1}(x_k)) + (y_1 - y_k) (-\partial_{x_1}(y_k)) + (z_1 - z_k) (-\partial_{x_1}(z_k))].$$

Aquí observamos derivadas del vector \vec{k} con respecto a la coordenada x de la partícula 1. Estos vectores adicionales que se utilizan en el potencial de 4 cuerpos se calculan de forma numérica, y se desconoce la forma de la dependencia que tienen éstos con respecto a las demás partículas, por lo que fue necesario hacer una aproximación a la derivada.

El método Monte Carlo que usamos como herramienta en la simulación trabaja con cadenas de Markov, o una secuencias de variables. Basándonos en esto, la aproximación que se realizó a estas derivadas fue entre un paso i e $i + 1$ de esta secuencia. El tipo de aproximación que utilizamos fue lineal, de tal forma que para la derivada expuesta anteriormente,

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} x_k &\sim \frac{\Delta x_k}{\Delta x_1} = \frac{x_{k\{i+1\}} - x_{k\{i\}}}{x_{1\{i+1\}} - x_{1\{i\}}}, \\ &= \frac{(x_{k\{i+1\}} - x_{1\{i+1\}}) - (x_{k\{i\}} - x_{1\{i\}})}{x_{1\{i+1\}} - x_{1\{i\}}} + \frac{x_{1\{i+1\}} - x_{1\{i\}}}{x_{1\{i+1\}} - x_{1\{i\}}}, \\ &= \frac{(x_k - x_1)_{\{i+1\}} - (x_k - x_1)_{\{i\}}}{\Delta x_{\{i \rightarrow i+1\}}} + \frac{\Delta x_{1\{i \rightarrow i+1\}}}{\Delta x_{1\{i \rightarrow i+1\}}}.\end{aligned}$$

donde las diferencias entre paréntesis que se muestran entre coordenadas están dentro de un mismo paso de la secuencia i ó $i + 1$, y se realiza con respecto a variables relativas del sistema. La variable $\Delta x_{1\{i \rightarrow i+1\}}$ es calculada y es parte de la simulación.

El cálculo restante del término cinético es de forma análoga, y 72 derivadas se aproximaron de esta manera.

Apéndice B

Método Monte Carlo: Algoritmo de Metrópolis

Los métodos Monte Carlo [58] son un grupo de algoritmos que usan números aleatorios o pseudo-aleatorios para resolver problemas matemáticos. Son usados usualmente para resolver integrales, tales como son los valores esperados que nos interesan. La dificultad principal en resolver una integral con métodos convencionales es que el esfuerzo computacional se incrementa exponencialmente con la dimensionalidad de la integración. El método MC no tiene este problema, y la evaluación de una integral multivariable es realizada mediante un muestreo del integrando y promediando sobre los valores muestreados. El error estadístico en el valor de la integral disminuye como la raíz del número de iteraciones muestreadas, sin importar la dimensión. Esto es una consecuencia del *Teorema de límite medio*.

Los valores esperados $\langle W \rangle$ y $\langle V \rangle$ se calcularon por medio de una simulación Monte Carlo en la cual se utilizó el *algoritmo de Metrópolis* [56]. A continuación describimos en qué consiste dicho algoritmo.

B.1. Integración Monte Carlo

El método Monte Carlo (MC) original utiliza una generación de números aleatorios para aproximar integrales, por ejemplo, la siguiente:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b h(x)p(x) dx. \quad (\text{B.1})$$

Se puede descomponer la función $f(x)$ en el producto de una función $h(x)$ y una función de densidad de probabilidad $p(x)$ definida sobre un intervalo (a, b) , de tal forma que la integral pueda ser expresada como el valor esperado de $h(x)$ sobre la

densidad $p(x)$. Haciendo un muestreo de un número grande de valores x_1, \dots, x_n de variables aleatorias de la densidad $p(x)$, podemos estimar la integral por una suma finita,

$$I \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i). \quad (\text{B.2})$$

Dada una colección ordenada de variables aleatorias:

$$\{X_t : t \in T\},$$

donde t es frecuentemente referido como índice de tiempo. Si pensamos X_t como un estado X a un tiempo t y tomamos una condición para cada estado de tal forma que

$$\Pr(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_0 = x_0) = \Pr(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t),$$

entonces el proceso estocástico es conocido como una cadena de Markov. Esta condición especifica que las variables futuras a un tiempo $t+1$ dependen solamente de las variables a un tiempo t , y no de los estados anteriores. La colección de probabilidades de transición es generalmente llamado *kernel de transición*.

B.2. Monte Carlo Variacional

El método Monte Carlo Variacional se basa en el Principio Variacional. El valor esperado de \hat{H} es evaluado con una función variacional de prueba ψ_T , la cual resulta en una aproximación por límite superior al valor exacto de la energía del estado base E_0 .

$$E_V = \frac{\int \psi_T^*(R) \hat{H} \psi_T(R) dR}{\int \psi_T^*(R) \psi_T(R) dR} \geq E_0, \quad (\text{B.3})$$

donde $R = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ es el vector 3N-dimensional y \vec{r}_i es la posición de la i -ésima partícula.

En particular, el método MC utilizado en el trabajo [55] es el método de Metrópolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller y Teller (1953). En este caso, la integral B.3 es reescrita de la siguiente manera:

$$E_V = \frac{\int |\psi_T(R)|^2 \left[\psi_T(R)^{-1} \hat{H} \psi_T(R) \right] dR}{\int |\psi_T(R)|^2 dR}, \quad (\text{B.4})$$

donde $|\psi_T(R)|^2$ se vuelve una densidad de probabilidad y $\psi_T(R)^{-1}\hat{H}\psi_T(R)$ es la cantidad a acumular. En los métodos MC variacionales las configuraciones R son muestreadas de acuerdo a una densidad de probabilidad.

B.3. Método de Metrópolis

El *Método de Metrópolis* (MM) tiene la ventaja de permitirnos muestrear una distribución arbitraria de una forma muy sencilla, sin necesidad de conocer la normalización de la distribución.

Definiendo un vector de posiciones R , $3N - dimensional$, con $N = 4$ (2 quarks y 2 antiquarks), un valor particular de R lo llamaremos *configuración*. Dado R , un valor tentativo R^T es generado por alguna distribución de probabilidad simétrica $F(R \rightarrow R^T) = F(R^T \rightarrow R)$. Este valor tentativo es aceptado con probabilidad $\min\left(1, \frac{F(R^T)}{F(R)}\right)$, de lo contrario, es rechazado.

Una fácil implementación de esta regla es rechazar el paso R^T si $\frac{F(R^T)}{F(R)} < \xi$ para un cierto valor ξ uniformemente distribuido en $(0, 1)$. La implementación más común es actualizando las variables de R , las posiciones por partícula i y coordenada x, y, z , $\{x_i\}$ secuencialmente definiendo $x_i^T = x_i + \xi\Delta x$ donde el valor de ξ está uniformemente distribuido en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Dada una configuración k en el sistema, en algoritmo de Metrópolis se propone una nueva configuración l aleatoria a partir de la configuración inicial

$$f(l, k) \text{ con normalización } \sum_l f(l, k) = 1$$

Esta nueva configuración l tiene una probabilidad de ser aceptada o rechazada, dada por:

$$P^{(l)(k)} = \min\left[1, \frac{P_B^k}{P_B^l}\right],$$

de tal forma que para una configuración a un tiempo $t + 1$,

$$R_{t+1} = \begin{cases} R^T & P^{(l)(k)}, \\ R_t & 1 - P^{(l)(k)} \end{cases}$$

Este kernel de transición implica que el movimiento no está garantizado en cada paso. Si la configuración nueva es rechazada, la configuración original se mantiene y el algoritmo busca otra configuración nueva.

Podemos describir los pasos del algoritmo de la siguiente manera:

-
- Sea \vec{x}_0 un valor inicial y $\omega(\vec{x})$ la función de distribución que se desea generar.
 - Sea \vec{x}_t un paso aleatorio en la vecindad de \vec{x}_0
 - Evaluar la razón $r = \frac{\omega(\vec{x}_t)}{\omega(\vec{x}_0)}$
 - Si $r > 1$ Tome el número como un valor permitido del paso
 - Si $r < 1$ Genere un valor r_2 (aleatorio) tal que $0 < r_2 < 1$
 - Si $r > r_2$ Tome un valor permitido del paso. Si esto no se cumple, quédese en la posición anterior

En nuestro caso tenemos que la función de onda variacional general descrita en el capítulo 3, toma el papel de una distribución de probabilidad. De esta forma, esperamos que el sistema evolucione con una alta probabilidad a puntos de alta densidad en la distribución, y con baja probabilidad en el caso contrario.

Apéndice C

Conversión de unidades

En el capítulo 2 se determinaron los valores del parámetro variacional λ_0 y la energía por mesón E_{λ_0} as como el valor promedio del radio al cuadrado $\langle r_M \rangle$, tomando en cuenta una diferencia de masas $m_1 = m_u = 1$; $m_2 = m_{d,s,c,b}$. Al calcular estos valores se consideraron unidades arbitrarias $\hbar = c = 1 = m_u = k$ a fin de simplificar los cálculos, por lo que los valores son adimensionales. Para expresar las unidades de distancia en fm y las de energía en GeV hacemos las siguientes identificaciones con datos experimentales.

Para el mesón $u - d$, utilizamos los valores experimentales [3] relacionados con el pión π para fijar las unidades.

Utilizamos el valor promedio del radio al cuadrado para la unidad de distancia:

$$\langle r_{ud}^2 \rangle = 1.50854.$$

El valor experimental del promedio del radio al cuadrado para el caso del mesón es:

$$\langle r_{\pi}^2 \rangle = 0.451 \text{ fm}^2.$$

Por lo tanto, el factor de conversión para las distancias es R_{π}

$$R_{ud} = \sqrt{\frac{\langle r_{\pi}^2 \rangle}{\langle r_{ud}^2 \rangle}} = 0.5468 \text{ fm}.$$

Para fijar la unidad de energía, tomamos en cuenta la relación entre distancia y energía $\hbar c = 197.32 \text{ MeV fm}$. Sin embargo, para nuestro modelo, este procedimiento predice un valor de la masa del pión más pequeña de la observada. Para dar cuenta de este problema necesitamos realizar un reescalamiento de la energía, o lo que es equivalente, fijar la unidad de energía a partir de la masa medida del pión, como se describe a continuación.

Tenemos que la energía total por mesón, incluyendo la masa en reposo, con $m_u = m_d = 1$ es:

$$E_{ud} = 1 + 1 + 2.3472 = 4.3472.$$

Esta cantidad tiene que estar en correspondencia con la masa experimental del pión, $m_\pi \sim 0.140$ GeV, por lo que si nuestro factor de conversión lo denotamos como K , entonces:

$$K_{ud} = \frac{m_\pi}{E_{ud}} = 0.03211 \text{ GeV}.$$

Haciendo un cálculo análogo, usando los valores mostrados en la tabla C.1, los factores de conversión de distancia y energía para los otros sistemas de masa distinta, son

$$R_{us} = 0.4751 \text{ fm}; \quad R_{uc} = 0.3464 \text{ fm}; \quad R_{ub} = 0.4659 \text{ fm},$$

$$K_{us} = 0.1058 \text{ GeV}; \quad K_{uc} = 0.2459 \text{ GeV}; \quad K_{ub} = 0.3108 \text{ GeV},$$

m_1	m_2	E_{λ_0}	$\langle r_M^2 \rangle_{\lambda_0}$	Masa experimental [MeV]	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{\text{exp}}$ [fm]
$m_u = 1$	$m_u = 1$	2.3472	1.50255	139.57018	0.672
$m_u = 1$	$m_s = 1.44643$	2.2197	1.38885	493.677	0.560
$m_u = 1$	$m_c = 4.6131$	1.9889	1.52605	1869.61	0.428 [61]
$m_u = 1$	$m_b = 14.0774$	1.90615	1.73656	5279.26	0.614 [61]

Cuadro C.1: Valores óptimos de radios al cuadrado.

Apéndice D

Correlación de dos cuerpos para N partículas

La correlación entre dos cuerpos está definida por

$$\rho_2(\vec{r}) = \frac{1}{N_p} \left\langle \sum_{i < j=1}^N \delta(\vec{r} - (\vec{r}_i - \vec{r}_j)) \right\rangle, \quad (\text{D.1})$$
$$N_p = \frac{N(N-1)}{2}; \quad \vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j.$$

y corresponde a la probabilidad de encontrar 2 partículas i y j a una distancia relativa \vec{r} . Aquí, $\rho_2(\vec{r})$ satisface la ecuación de normalización

$$\int \rho_2(\vec{r}) d\vec{r} = \frac{1}{N_p} \left\langle \sum_{i < j=1}^N \int d\vec{r} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{ij}) \right\rangle = \frac{N_p}{N_p} = 1. \quad (\text{D.2})$$

Como observación tenemos que $\int \delta(\vec{r} - \vec{r}_{ij}) d\vec{r}$ puede ponerse como una integral en una dimensión después de integrar la parte angular.

$$\int \delta(\vec{r} - \vec{r}_{ij}) d\vec{r} = \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_{ij}) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi dr,$$
$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_{ij}) = \delta(x - x_{ij}) \delta(y - y_{ij}) \delta(z - z_{ij})$$

con $z = r \cos(\theta)$; $x = r \sin(\theta) \cos(\phi)$; $y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$.

Para transformar a coordenadas esféricas, se necesita al jacobiano $J = r^2 \sin(\theta)$.

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_{ij}) = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \delta(r - r_{ij}) \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi'),$$
$$= \frac{1}{r^2} \delta(r - r_{ij}) \delta(\cos(\theta) - \cos(\theta')) \delta(\phi - \phi').$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \delta(r - r_{ij}) d\vec{r} &= \int \frac{1}{r^2} \delta(\cos(\theta) - \cos(\theta')) \delta(\phi - \phi') r^2 dr d\cos\theta d\phi, \\ &= \int \delta(r - r_{ij}) dr. \end{aligned}$$

i. e., cuando no se tiene una dependencia angular, se puede tomar una integral en una sola dimensión en $r = |\vec{r}|$. Una definición más estándar para la función de correlación es

$$g(r) \equiv \frac{V}{4\pi r^2} \rho_2(r), \quad (\text{D.3})$$

con normalización

$$\int \frac{g(r)}{V} d\vec{r} = \int \frac{g(r)}{V} r^2 dr d\Omega = \int \frac{4\pi r^2}{V} \left(\frac{V \rho_2(r)}{4\pi r^2} \right) = \int \rho_2(r) dr = 1. \quad (\text{D.4})$$

D.1. Función de distribución radial

Las funciones de distribución radiales son esencialmente histogramas de distancia entre dos partículas. El procedimiento que utilizamos para calcularlas es el siguiente:

- Tomar una partícula i de referencia, con posición \vec{r}_i .
- Dibujar una capa esférica de radio r y grosor Δr con centro en \vec{r}_i .
- Una partícula j en esta capa tiene una distancia $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$, donde $r - \Delta r \leq r_{ij} < r$.

Se determina el número de partículas en la capa, llamando a este número $n_i(r, \Delta r)$.

- Se divide por el volumen de la capa y se realiza un promedio sobre el número de partículas de referencia

$$\frac{1}{N} \sum_i^N \frac{n_i(r, \Delta r)}{4\pi r^2 \Delta r}.$$

- Se normaliza con respecto a la densidad de partículas $\rho = N/V$ y se obtiene

$$g(r) = \frac{V}{4\pi r^2 \Delta r N^2} \sum_i^N n_i(r, \Delta r).$$

Bibliografía

- [1] *Particle Physics* B. R. Martin, G. Shaw, Wiley 1992.
- [2] Tesis de Doctorado de Davide Gerbaudo *Search for a Standard Model Higgs Boson with a Dilepton and Missing Energy Signature* (2011)
- [3] K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014).
- [4] *A Modern Introduction to Particle Physics* Fayyazuddin, Riazuddin, World Scientific, Segunda Edición (2000)
- [5] *Introduction to Elementary Particles* David Griffiths, John Wiley and Sons. 1987.
- [6] Gell-Mann, M.A. *Schematic model of baryons and mesons*. Phys. Lett. 1964, 8, 214215.
- [7] G. Zweig, Cern-reports TH-401, TH-412 (1964)
- [8] J.J., Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley, revised edition (1994)
- [9] F. Stancu, *Group theory in subnuclear physics*, Oxford Stud. Nucl. Phys, **19**, 1 (1996)
- [10] *The Physics of the Standard Model and Beyond* T. Morii, C. S. Lim, World Scientific, 2004.
- [11] *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* F. Halzen, A. D. Martin, John Wiley and Sons. 1984.
- [12] *QCD as a Theory of Hadrons: From Partons to Confinement* Stephan Narison (2004)
- [13] PDG96, R.M. Barnett et al., Phys. Rev. D 54 (1996) 1; PDG97, L. Montanet et al., Phys. Rev. D 54 (1997) 1; PDG98, C. Caso et al., Eur. Phys. J. C 3 (1998) 1; PDG2000, D.E. Groom et al., Eur. Phys. J. C 15 (2000) 1.

-
- [14] G.S. Bali, Phys. Rev. 343, 1 (2001).
- [15] E. Eichten, K. Gottfried, T. Konoshita, K.D. Lane, and T.-M. Yan, Phys. Rev. D17, 3090 (1978); D21, 203 (1980).
- [16] *Quark-Antiquark Potentials from QCD and Quarkonium Spectroscopy*, Tesis de Alexander Laschka
- [17] T. Kawanai and S. Sasaki, *Charmonium potential from full lattice QCD*, Phys. Rev. D85 (2012) 091503(R).
- [18] G. Toledo Sánchez and J. Piekarewicz Phys. Rev. C 65, 045208 (2001)
- [19] G. Toledo Sánchez and J. Piekarewicz Phys. Rev. C 70, 035206 (2004)
- [20] A. Ayala, M. Martínez, G. Paić, G. Toledo, Phys. Rev. C 77, 044901 (2008)
- [21] Sabyasachi Roy, N. S. Bordoloi, D. K. Choudhury, *Isgur-Wise Function Within a Qcd Quark Model with Airy's Function as the Wave Function of Heavy-Light Mesons*, arXiv:1209.6121v1 [hep-ph].
- [22] A. Martin, Phy Lett. B 93, 338(1980).
- [23] H. D. Richardson, Phy. Lett. B 82,272(1979).
- [24] C. Quigg and J. L. Rosuer, Phy. Lett. B 71,153(1977).
- [25] Choudhury, D K et al., *Constrains on treating linear part as perturbation in a QCD Potential Model* arXiv:1304.7074 [hep-ph]
- [26] Aitchison I J R and Dudek J J 2002 Eur. J. Phys. 23 605
- [27] Sinisa R. Ignjatovic and Vesna Borika Jovanovic, *On some models of the exotic hadron states*, Physics, Chemistry and Technology Vol. 12, No2, Special Issue, 2014, pp. 151158
- [28] Jaffe, R.L. *Multiquark hadrons* Phys. Rev. D 1977, 15, 267280,281289.
- [29] Jaffe, R. L. : *Ordinary and extraordinary hadrons*. Progr. Theor. Phys. Suppl. 168 (2007) 127142.
- [30] J. Vijande and A. Valcarce, *Tetraquark Spectroscopy: A Symmetry Analysis*, Symmetry, vol. 1, pp. 155179, 2009.
- [31] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn and V. F. Weisskopf, Phys. Rev. D 9, 3471 (1974)

- [32] P. Bicudo, M. Cardoso, *Tetraquark bound states and resonances in the unitary and microscopic triple string flip-flop quark model, the light-light-antiheavy-antiheavy $qq\bar{Q}\bar{Q}$ case study*, arXiv:1509.04943.
- [33] Fumiko Okiharu, Hideo Suganuma, Toru T. Takahashi, *Physical Review D* 72, 014505 (2005) (y sus referencias)
- [34] Yu. M. Shabelski and M. G. Ryskin, *Tetraquarks and Pentaquarks in string models*, arXiv:hep-ph/0609222v1
- [35] Chengrong Deng et. al., *PhysRev D* 86, 114035, (2012).
- [36] M. Ablikim et al. (BESIII Collaboration), *Phys.Rev.Lett.* 110, 252001 (2013).
- [37] Z. Liu et al. (Belle Collaboration), *Phys.Rev.Lett.* 110, 252002 (2013).
- [38] R. Aaij et al. [LHCb Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* 112, 222002 (2014) [arXiv:1404.1903 [hep-ex]]
- [39] S.K. Choi et al. [Belle Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* 91, 262001 (2003) [hep-ex/0309032].
- [40] Wei Chen, T. G. Steele, $Z_c(4200)^+$ *decay width as a charmonium-like tetraquark state* arXiv:1501.03863v1 [hep-ph] y sus referencias.
- [41] K. Chilikin et al. (Belle Collaboration), *Phys.Rev.* D90, 112009 (2014).
- [42] Fl. Stancu, *ON the existence of heavy tetraquarks*, arXiv:hep-ph/0607077v2.
- [43] J. Vijande, A. Valcarce, J. M. Richard, *Phys. Rev. D* 76, 114013 (2007)
- [44] Marek Karliner, Shmuel Nussinov, *The doubly heavies: $\bar{Q}Q\bar{q}q$ and $QQ\bar{q}\bar{q}$ tetraquarks and QQq baryons*, arXiv:1304.0345v2 [hep-ph] y sus referencias.
- [45] Javier Vijande, Alfredo Valcarce, Jean-Marc Richard, *Adiabaticity and color mixing in tetraquark spectroscopy* *Phys. Rev. D* 87 (2013) 034040
- [46] Marco Cardoso, Pedro Bicudo, *An unitarized model for tetraquarks with a color flip-flip potential* arXiv:1412.8613
- [47] Chengrong Deng et al, *Interpreting $Z_c(3900)$ and $Z_c(4025)/Z_c(4020)$ as charged tetraquark states*, *Phys. Rev. D* 90, 054009 (2014)
- [48] *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*, Nouredine Zettili, Chichester, U.K.: Wiley, 2009.

-
- [49] Hans-Christian Pauli, *A linear potential in a light cone QCD inspired model*, arXiv:hep-ph/0312299v1
- [50] J. I. Casaubon and J. P. Cosentino Turk J Phys. 31 (2007), 117-121
- [51] F. K. Hwang, D. S. Richards, P. Winter, *The Steiner Tree Problem*, 1992.
- [52] de la Peña, Luis, *Introducción a la Mecánica Cuántica*. Fondo de Cultura Económica, 2006.
- [53] Steven E. Koonin, *Computational Physics*, (Benjamin Cummings, Menlo Park, 1986)
- [54] Philip R. Bevington, D. Keith Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw Hill, 2003.
- [55] John W. Negele, Henri Orland, *Quantum Many Particle Systems*, Westview, 1998.
- [56] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, E. Teller, J. Chem. Phys. 21, 1087 (1953)
- [57] A. L. Fetter, J. D. Walecka *Quantum Theory of Many Particle Systems* (McGraw Hill, New York, 1971)
- [58] M. H. Kalos and P. A. Whitlock. *Monte Carlo Methods*. A Wiley- Interscience Publication, 1986.
- [59] G. Abbiendi et al. (OPAL Collaboration), Eur. Phys. J. C 45, 307 (2006).
- [60] T. Sjöstrand and V. A. Khoze, Z. Phys. C 62, 281 (1994); Phys. Rev. Lett. 72, 28 (1994).
- [61] C.-W. Hwang, Eur. Phys. J. C 23, 585590 (2002)

