



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

*Análisis y Simulación del Modelo de  
Riesgo Modulado de Markov con  
Difusiones*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADA EN ACTUARÍA

PRESENTA:  
ANA CRISTINA GÓMEZ UGARTE VALERIO

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. FERNANDO BALTAZAR LARIOS



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## 1. Datos del alumno

Apellido paterno	Gómez Ugarte
Apellido materno	Valerio
Nombre(s)	Ana Cristina
Teléfono	55 3275 8034
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Actuaría
Número de cuenta	412001734

## 2. Datos del tutor

Grado	Dr.
Nombre(s)	Fernando
Apellido paterno	Baltazar
Apellido materno	Larios

## 3. Datos del sinodal 1

Grado	Dr.
Nombre(s)	Yuri
Apellido paterno	Salazar
Apellido materno	Flores

## 4. Datos del sinodal 2

Grado	Dr.
Nombre(s)	Ramsés Humberto
Apellido paterno	Mena
Apellido materno	Chávez

## 5. Datos del trabajo escrito.

Título	Análisis y Simulación del Modelo de Riesgo Modulado de Markov con Difusiones
Número de páginas	66
Año	2016

# Índice general

<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>IX</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>XI</b>
<b>1. Modelo de riesgo de Cramér-Lundberg</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos preliminares . . . . .	1
1.2. Proceso Poisson . . . . .	2
1.2.1. Proceso Poisson homogéneo . . . . .	2
1.2.2. Proceso Poisson compuesto . . . . .	3
1.3. Modelo clásico de riesgo . . . . .	6
1.4. Probabilidad de ruina . . . . .	7
1.4.1. Condición de ganancia neta . . . . .	10
1.4.2. Coeficiente de ajuste . . . . .	11
<b>2. Procesos estocásticos a tiempo continuo</b>	<b>15</b>
2.1. Cadenas de Markov a tiempo continuo . . . . .	15
2.2. Difusiones . . . . .	20
2.2.1. Movimiento browniano . . . . .	20
2.2.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas . . . . .	22
2.2.3. Integral de Itô . . . . .	23
<b>3. Probabilidad de ruina del modelo modulado de Markov con difusiones</b>	<b>25</b>
3.1. Modelo de riesgo modulado de Markov con difusiones . . . . .	25
3.1.1. Modulado de Markov . . . . .	25
3.1.2. Difusión . . . . .	28
3.2. Probabilidad de ruina . . . . .	29
3.2.1. Condición de ganancia neta . . . . .	30

3.2.2. Coeficiente de ajuste . . . . .	32
3.2.3. Sistema de ecuaciones diferenciales . . . . .	35
<b>4. Simulación</b>	<b>43</b>
4.1. Resultados comparativos . . . . .	43
4.1.1. Ajuste del modelo . . . . .	49
<b>A. Código en R</b>	<b>57</b>

# Índice de figuras

1.1.	Trayectoria de un proceso Poisson homogéneo con $\lambda = 0.5$ . . .	4
1.2.	Trayectoria de un proceso Poisson compuesto de parámetro $\lambda = 0.5$ y $Y_i \sim \text{exp}(5)$ . . . . .	6
1.3.	Trayectoria utilizando el modelo de Cramér-Lundberg parámetros $\lambda = 0.5, Y_i \sim \text{exp}(1), u = 0, c = 1$ . . . . .	8
2.1.	Trayectoria de la cadena de Markov a tiempo continuo definida en el Ejemplo 2.1.1 . . . . .	17
2.2.	Trayectoria de un movimiento browniano estándar. . . . .	21
3.1.	Trayectoria de un proceso de riesgo modulado de Markov para parámetros definidos en el Ejemplo 3.1.1 . . . . .	27
4.1.	Trayectoria de un proceso de riesgo modulado de Markov con los parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1 con estado inicial $J_0 = 1$ . . . . .	45
4.2.	Trayectorias de un proceso de riesgo modulado de Markov con difusiones utilizando los parámetros del Ejemplo 4.1.1 y cambiando el estado inicial. . . . .	48



# Índice de tablas

1.1. Resultados de la simulación de un PPH con $\lambda = 0.5$ , $T = 25$ donde $T$ representa al horizonte de tiempo de la simulación. . . . .	4
1.2. Resultados de la simulación de un PPC con $\lambda = 0.5$ , $T=25$ y $Y_i \sim exp(5)$ . . . . .	6
1.3. Resultados de la simulación de la probabilidad de ruina del modelo clásico de riesgo con parámetros $\lambda = 0.5$ , $Y_i \sim exp(1)$ , $u = 0$ , $c = 1$ y $T = 100$ , Ejemplo 1.4.1. . . . .	10
4.1. Definición de parámetros para el caso base. . . . .	44
4.2. Resultados de la simulación de la probabilidad de ruina para un proceso de riesgo con difusiones con $T=25$ y parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1. . . . .	46
4.3. Resultados de la simulación de la probabilidad de ruina para un proceso de riesgo con difusiones con $T=25$ , parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1 y la matriz de saltos anterior. . . . .	47
4.4. Resultados obtenidos de la simulación de la probabilidad de ruina de un proceso de riesgo modulado de Markov con difusiones de parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1 y $T=25$ realizando 1000 iteraciones. . . . .	49
4.5. Resultados obtenidos de la simulación de la probabilidad de ruina de un proceso de riesgo con difusiones de parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1 y $T=25$ . . . . .	50
4.6. Resultados comparativos de la simulación de la probabilidad de ruina de un proceso modulado de Markov con difusión vs. uno sin difusión utilizando los parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1 para $T=25$ . . . . .	51

4.7. Resultados comparativos de la simulación de la probabilidad de ruina de un proceso modulado de Markov bajo distintas varianzas de la difusión y utilizando los parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1 para $T=25$ . . . . .	52
4.8. Parámetros promedio del Ejemplo 4.1.1. . . . .	53
4.9. Resultados de la simulación de la probabilidad de ruina para un proceso de riesgo con difusiones utilizando los parámetros promedio presentados en la Tabla 4.8 para $T=25$ . . . . .	53
4.10. Resultados de la simulación de la probabilidad de arruinarse en el $i$ -ésimo estado para un proceso de riesgo modulado de Markov con $T = 25$ utilizando los parámetros del Ejemplo 4.1.1.	54

# AGRADECIMIENTOS

A mis papás, ya que este trabajo representa el cierre de un gran ciclo en el cual han estado presentes desde el primer día hasta hoy. Y si bien, éste es un gran logro es personal; el mérito es compartido.

A Fernando y mis sinodales por sus valiosas observaciones y comentarios que hicieron de éste, un mejor y más completo trabajo.

Finalmente a Pro, por estar desde mate fin hasta volverse mi señorita de ventanillas.



# INTRODUCCIÓN

La principal actividad de las compañías aseguradoras consiste en brindar protección a los asegurados contra algún riesgo al que estos estén expuestos. Por medio de una póliza, la aseguradora se compromete a resarcir los daños (generalmente económicos) que sufra el asegurado como consecuencia de un siniestro, éste a su vez debe pagar cierta cantidad de dinero a la compañía de seguros por concepto de prima. Contar con los recursos suficientes para hacer frente a todas las posibles obligaciones que le puedan surgir en el futuro con sus asegurados es fundamental para el óptimo funcionamiento de las compañías aseguradoras.

Cuando las reservas no son suficientes para responder a todas las reclamaciones que se le presentan, se dice que la compañía aseguradora está en ruina. La teoría del riesgo estudia el impacto que tienen el capital inicial, las reclamaciones y las primas, entre otros factores en los movimientos de las reservas de una compañía aseguradora para estimar la probabilidad de que se arruine.

Al ser eventos inciertos los que se aseguran, se necesitan utilizar herramientas que permitan cuantificar y medir los riesgos; es aquí donde aparecen los procesos estocásticos. Se utilizan dentro de los modelos de riesgo para representar la ocurrencia y evolución de los siniestros a través del tiempo. Filip Lundberg y posteriormente Harald Cramér, asumiendo que las reclamaciones siguen un proceso Poisson, fueron los primeros en aplicar los procesos estocásticos con esta finalidad.

Tomando como base el modelo de riesgo de Cramér-Lundberg se han desarrollado diversos modelos que buscan acercarse más a la realidad permitiendo que éstos incluyan supuestos más específicos a la situación que se quiera modelar. En particular nos interesa un modelo que se pueda adaptar a diferentes escenarios externos que impacten a los parámetros del modelo y que además considere una cierta volatilidad a la que pueden estar sujetos los

flujos de capital de la aseguradora, el modelo con estos elementos se llama modulado de Markov con difusiones.

En el primer capítulo se utiliza el modelo clásico de riesgo de Cramér-Lundberg para presentar los conceptos principales dentro de la teoría de ruina.

En el segundo capítulo se describen los procesos estocásticos a tiempo continuo, así como sus propiedades, que servirán para modelar los supuestos adicionales que se tomarán en cuenta para formar el modelo de riesgo modulado de Markov con difusiones.

Para el tercer capítulo se introduce formalmente el modelo modulado de Markov con difusiones. Tomando como referencia el trabajo de Gu, Li y Zhou [3] se obtiene la ecuación fundamental de Lundberg a partir de la cual se obtiene el coeficiente de ajuste. Además, siguiendo el procedimiento de Li y Ma [7] obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas cuya solución es la probabilidad de ruina.

Por último, en el cuarto capítulo se exponen las probabilidades de ruina obtenidas al simular el proceso de riesgo modulado de Markov utilizando el software R. Con estos resultados se evalúa cual es el impacto de cada uno de los componentes del modelo en el flujo del capital de manera que las compañías aseguradoras puedan determinar que aspectos cambiar para aumentar su solvencia.

# Capítulo 1

## Modelo de riesgo de Cramér-Lundberg

### 1.1. Conceptos preliminares

Comenzaremos presentando los conceptos de la teoría de probabilidad, procesos estocásticos y teoría del riesgo que serán utilizados en el presente documento.

Todas las variables aleatorias que se mencionen estarán definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . En donde  $\Omega$  es el espacio muestral,  $\mathfrak{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  y  $P$  es la medida de probabilidad. Comenzaremos por definir un tipo de convergencia que será utilizado más adelante.

**Definición 1.1.** Sea  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid), se dice que  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge en media cuadrática cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n - X|^2] = 0.$$

Los procesos estocásticos son utilizados para estudiar el comportamiento de fenómenos aleatorios a lo largo del tiempo, por medio de una serie de variables aleatorias que representen el estado del sistema en cada instante.

**Definición 1.2.** Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias  $X = \{X_t\}_{t \in T}$ , parametrizadas en un conjunto  $T$  llamado espacio parametral.

Interpretaremos  $T$  como un conjunto de tiempos con valores en  $[0, \infty)$ . De manera precisa, podemos ver a un proceso estocástico como una función  $X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  donde la función  $\omega \rightarrow X_t(\omega)$  es una variable aleatoria para cada  $t \in T$ . Adicionalmente si tomamos  $\omega \in \Omega$  fijo, se dice que  $t \rightarrow X_t(\omega)$  es una trayectoria del proceso.

**Definición 1.3.** Una familia  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  de  $\sigma$ -álgebras es una **filtración** si para  $0 \leq s \leq t$  se cumple  $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$ .

Se dice que un proceso  $X$  es **adaptado** a la filtración cuando es  $\mathfrak{F}_t$ -medible para cualquier  $t \geq 0$ . Además todo proceso determina una filtración, dada por  $\mathfrak{F}_t = \sigma\{X_s | 0 \leq s \leq t\}$ , llamada filtración natural.

**Definición 1.4.** Sea  $\tau$  una función  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que para cada  $t \geq 0$ ,  $(\tau \leq t) \in \mathfrak{F}_t$ , se dice que  $\tau$  es un **tiempo de paro**.

En otras palabras, como la  $\sigma$ -álgebra  $\{\mathfrak{F}_t\}$  es la historia del proceso hasta el tiempo  $t$ , un tiempo de paro es una variable aleatoria para la cuál la ocurrencia del evento  $(\tau \leq t)$  se puede determinar utilizando únicamente la información que se tiene hasta el tiempo  $t$ .

En la próxima sección se describirá uno de los procesos estocásticos más utilizados en la teoría de riesgo.

## 1.2. Proceso Poisson

### 1.2.1. Proceso Poisson homogéneo

**Definición 1.5.** Sea  $T_1, T_2, \dots$  una sucesión de variables aleatorias iid con distribución exponencial( $\lambda$ ),  $\lambda > 0$ . Definamos

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i \quad \text{con} \quad S_0 = 0. \quad (1.1)$$

Si tomamos  $N_t = \text{máx}\{n \geq 0 | S_n \leq t\}$ , entonces  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso Poisson homogéneo (PPH) de parámetro o intensidad  $\lambda$ .

**Definición 1.6.** Un proceso estocástico  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  es llamado proceso de conteo si:

1.  $P[N_0 = 0] = 1$ ,

2.  $N_t \geq N_s$  para todo  $t \geq s$  y,
3.  $N_t \in \mathbb{N}$  para todo  $t \in (0, \infty)$ .

Notemos que el proceso Poisson es un proceso de conteo con tiempos de arribo  $S_n$  y tiempos de interarribo  $T_i$ . El número de llegadas en el intervalo  $[s, t]$  es  $N_t - N_s$ .

**Proposición 1.2.1.** *Para cada  $t \geq 0$ , la variable aleatoria  $N_t$  se distribuye Poisson de parámetro  $\lambda t$ . Es decir,*

$$P[N_t = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

La demostración se puede encontrar en [10].

Los procesos estocásticos son utilizados dentro de la teoría del riesgo para representar a cada uno de los elementos que influyen en el capital de las compañías aseguradoras, ya sea la frecuencia con la que se presentan las reclamaciones o el tamaño de éstas, entre un sinnúmero de factores. El ejemplo que se presenta a continuación relaciona de manera directa a los procesos estocásticos con la probabilidad de ruina.

### Ejemplo 1.2.1. Número de reclamaciones

Frecuentemente el proceso Poisson es utilizado para modelar el número de reclamaciones que recibe una compañía aseguradora. Supongamos que la intensidad con la que se presentan las reclamaciones es  $\lambda = 0.5$ . La Figura 1.1 muestra una posible trayectoria del proceso para un horizonte de tiempo igual a 10.

Los resultados obtenidos de la simulación del Proceso Poisson Homogéneo del Ejemplo 1.2.1 están contenidos en la Tabla 1.2.1. Podemos observar que al aumentar el número de iteraciones la aproximación se acerca cada vez más al valor real de  $\lambda t$ .

### 1.2.2. Proceso Poisson compuesto

Por sí solo, el número de reclamaciones que se le presentan a una compañía aseguradora no proporciona suficiente información para estimar el monto total de obligaciones a las que se tendrán que hacer frente. El proceso compuesto de Poisson permite que al Modelo (1.1) se le agregue una variable

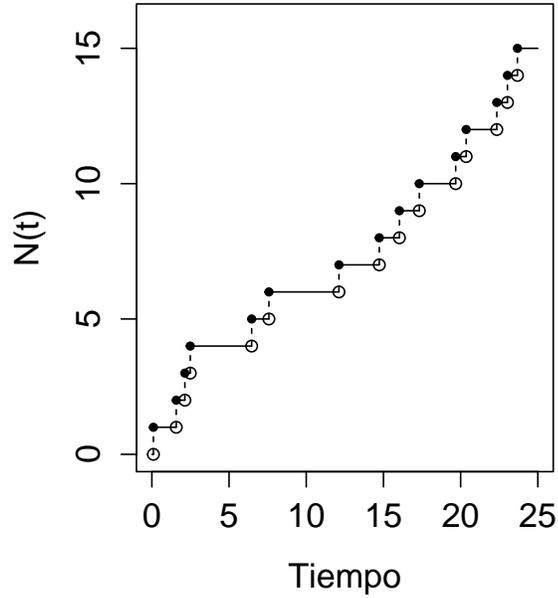


Figura 1.1: Trayectoria de un proceso Poisson homogéneo con  $\lambda = 0.5$

Iteraciones	$\lambda t$	
	Real	Aproximación
10	12.5	11.5
100	12.5	12.12
1000	12.5	12.518

Tabla 1.1: Resultados de la simulación de un PPH con  $\lambda = 0.5$ ,  $T = 25$  donde  $T$  representa al horizonte de tiempo de la simulación.

que modele los montos de las reclamaciones de manera que la información obtenida con el nuevo modelo sea más completa.

**Definición 1.7.** Sea  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  un proceso Poisson y sea  $\{Y_i\}_{i \geq 0}$  una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que  $P[Y_i > 0] = 1$ . Adicionalmente supongamos que  $Y_i$  y  $N_t$  son independientes.

Definimos al Proceso de Poisson Compuesto como

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0. \quad (1.2)$$

Cuando  $Y_i$  representa al monto de la  $i$ -ésima reclamación y  $N_t$  al número de reclamaciones que se tuvieron en el intervalo de tiempo  $[0, t]$ , a  $X_t$  se le llama proceso agregado de siniestros y representa al monto total de las reclamaciones hasta el tiempo  $t$ . El modelo Poisson compuesto que fue presentado en 1903 por Filip Lundberg<sup>1</sup> sentó las bases de la teoría del riesgo.

**Proposición 1.2.2.** *El proceso Poisson compuesto  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  tiene las siguientes propiedades:*

1. *Tiene incrementos independientes y estacionarios.*
2.  $\mathbb{E}(X_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y)$ .
3.  $\text{Var}(X_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y^2)$ .
4.  $\text{Cov}(X_t, X_s) = \lambda \mathbb{E}(Y^2) \min\{s, t\}$ .
5. *La función generadora de momentos de  $X_t$  está dada por:*

$$M_{X_t}(u) = (e^{\lambda t (M_Y(u) - 1)}).$$

Las particularidades de este resultado se pueden consultar en [10].

**Ejemplo 1.2.2.** Consideremos un proceso Poisson compuesto de parámetro  $\lambda = 0.5$  y donde  $Y_i \sim \text{exp}(5)$ . (Figura 1.2)

Tomando  $T=25$  y utilizando (2.) de la Propiedad 1.2.2, obtenemos que  $\mathbb{E}(X_t) = (0.5)(25)(0.2) = 2.5$ .

De manera análoga al caso homogéneo, en la Tabla 1.2.2 se muestra como la esperanza del proceso tiende al valor real conforme aumenta el número de simulaciones del Ejemplo 1.2.2.

---

<sup>1</sup>[9]

Iteraciones	$\lambda t E(Y)$	
	Real	Aproximación
10	2.5	2.727687
100	2.5	2.658923
1000	2.5	2.538584

Tabla 1.2: Resultados de la simulación de un PPC con  $\lambda = 0.5$ ,  $T=25$  y  $Y_i \sim \exp(5)$ .

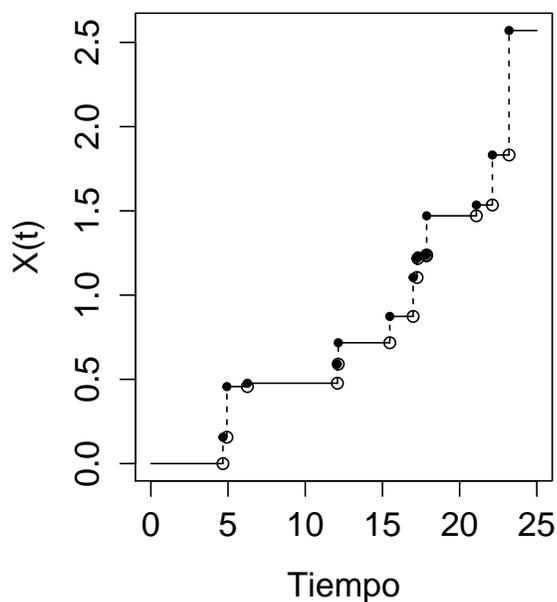


Figura 1.2: Trayectoria de un proceso Poisson compuesto de parámetro  $\lambda = 0.5$  y  $Y_i \sim \exp(5)$ .

### 1.3. Modelo clásico de riesgo

El monto esperado de las reclamaciones es analizado por las aseguradoras con la finalidad de estimar los recursos que se necesitarán para poder hacer frente a las obligaciones que se les puedan presentar. El modelo de Cramér-Lundberg considera el capital inicial, los ingresos por primas y los pagos por reclamaciones para estimar el capital de una compañía aseguradora al tiempo

t.

Sea  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  un proceso Poisson homogéneo, entonces definimos al proceso de riesgo  $R_t$  como

$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad (1.3)$$

donde,

- $u$  es el capital inicial,
- $c$  es la prima por unidad de tiempo que pagan los asegurados,
- $N_t$  es el proceso Poisson de parámetro  $\lambda$  que modela la intensidad con la que se presentan las reclamaciones,
- $Y_i$  son variables aleatorias iid que modelan los montos de las reclamaciones con esperanza  $\mu$ .

En la Figura 1.3 se ve como la trayectoria que inicia en  $u$  crece con una pendiente  $c$  hasta el tiempo en el que se presenta la primera reclamación. En ese momento el proceso da un salto de tamaño correspondiente al monto de la reclamación para luego seguir creciendo hasta el tiempo de la segunda reclamación y así sucesivamente.

## 1.4. Probabilidad de ruina

En principio para que el negocio de una aseguradora sea rentable, la cantidad obtenida de sumar los ingresos que recibe por concepto de primas al capital inicial debería alcanzar para cubrir el costo de las reclamaciones que se le puedan presentar. En el modelo de Cramér-Lundberg esta condición equivale a que  $R_t > 0$  para todo  $t \geq 0$ . Cuando lo anterior no se cumple, se dice que la compañía aseguradora está en ruina. Evidentemente el principal interés es disminuir el riesgo de incurrir en ruina por lo que se vuelve fundamental calcular la probabilidad de ocurrencia de ésta.

**Definición 1.8.** Consideremos el tiempo de ruina

$$\tau = \inf\{t > 0 : R_t < 0\} \quad (1.4)$$

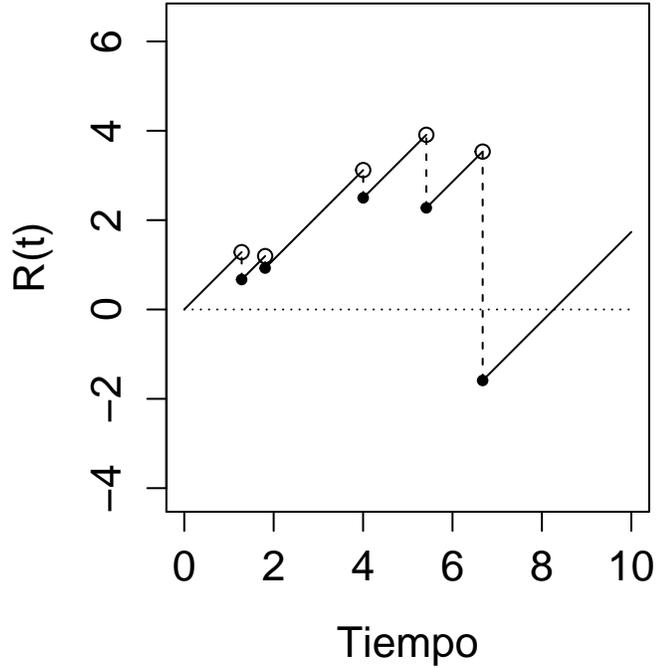


Figura 1.3: Trayectoria utilizando el modelo de Cramér-Lundberg parámetros  $\lambda = 0.5$ ,  $Y_i \sim \text{exp}(1)$ ,  $u = 0$ ,  $c = 1$ .

donde  $\inf\{\emptyset\} = \infty$ . Entonces dado un intervalo de tiempo  $(0, t]$ , decimos que la probabilidad de ruina en dicho intervalo es

$$\psi(u, t) = P[\tau < t : R_0 = u]. \quad (1.5)$$

Y la probabilidad eventual de ruina es

$$\psi(u) = P[\tau < \infty : R_0 = u]. \quad (1.6)$$

Denotaremos la probabilidad de no ruina como

$$\phi(u) = 1 - \psi(u). \quad (1.7)$$

Para encontrar una ecuación para la probabilidad eventual de ruina se realiza un análisis del primer paso condicionando sobre el monto y el momento

de ocurrencia de la primer reclamación, a partir de el cual se obtiene una ecuación recurrente. El siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [9], presenta dichas ecuaciones.

**Teorema 1.4.1.** *Sea  $\phi(u)$  la probabilidad de no ruina y supongamos que la distribución de las reclamaciones es absolutamente continua con función de densidad  $g(y)$ . Entonces*

1.  $\frac{d}{du}\phi(u) = \frac{\lambda}{c}[\phi(u) - \int_0^u \phi(u-y)g(y)dy]$ .
2.  $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$ .
3.  $\psi(u) = \frac{\lambda}{c}[\int_u^\infty [1-G(y)]dy + \int_0^u \psi(u-y)[1-G(y)]dy]$ .

Debido a la complejidad de los cálculos que se derivan de las ecuaciones anteriores, en la realidad son pocos los casos en los que se puede obtener una expresión explícita para la probabilidad eventual de ruina. El más sencillo es cuando los montos de las reclamaciones se distribuyen exponencialmente.

**Ejemplo 1.4.1.** Supongamos que las reclamaciones  $Y_i$  se distribuyen exponencial con media  $1/\beta$ , entonces la expresión (1.) del Teorema 1.4.1 se convierte en

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}[\phi(u) - e^{-\beta u} \int_0^u \phi(u-y)\beta e^{\beta y} dy].$$

Diferenciando,

$$\phi''(u) = \frac{\lambda}{c}[\phi(u) + \beta e^{-\beta u} \int_0^u \phi(u-y)\beta e^{\beta y} dy - \beta\phi(u)] = [\frac{\lambda}{c} - \beta]\phi'(u).$$

Cuya solución es de la forma  $\phi(u) = A + Be^{-(\beta-\frac{\lambda}{c})u}$ . Como  $\phi(u) \rightarrow 1$  cuando  $u \rightarrow \infty$ , tenemos que  $A = 1$ . Y utilizando el inciso (2.) del Teorema 1.4.1, tenemos que  $\phi(0) = 1 - \frac{\lambda}{\beta c}$ . De donde encontramos que  $B = -\frac{\lambda}{\beta c}$ . Por lo tanto

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\beta c} e^{-(\beta-\frac{\lambda}{c})u}. \quad (1.8)$$

Si tomamos los valores  $\lambda = 0.5$ ,  $Y_i \sim \exp(1)$ ,  $u = 0$ ,  $c = 1$  y los sustituimos en (1.8), obtenemos

$$\psi(0) = 0.5e^{-(1-0.5)0} = 0.5$$

Iteraciones	$\psi(0)$	
	Real	Aproximación
10	0.5	0.6
100	0.5	0.52
1000	0.5	0.488
10000	0.5	0.4989

Tabla 1.3: Resultados de la simulación de la probabilidad de ruina del modelo clásico de riesgo con parámetros  $\lambda = 0.5$ ,  $Y_i \sim \exp(1)$ ,  $u = 0$ ,  $c = 1$  y  $T = 100$ , Ejemplo 1.4.1.

Utilizando el programa CL, incluido en los Anexos, para simular trayectorias del Ejemplo 1.4.1 se obtuvieron distintas aproximaciones para  $\psi(u)$ . Los resultados se muestran en la Tabla 1.3. Es importante mencionar que las probabilidades simuladas son dado un horizonte de tiempo finito,  $T = 100$ , a partir de cual las simulaciones reflejan un comportamiento parecido a la probabilidad eventual de ruina.

### 1.4.1. Condición de ganancia neta

Aún cuando no es posible encontrar de manera explícita la probabilidad de ruina, las compañías aseguradoras deben contar con parámetros que les permitan controlar el riesgo al que están expuestos. La condición de ganancia neta es una herramienta que asegura la solvencia de la empresa limitando los parámetros del modelo.

Tomemos  $T_1, T_2, \dots$  los tiempos en los que se presentan las reclamaciones. Al estar modelados por un proceso Poisson con intensidad  $\lambda$ , sabemos que  $T_k - T_{k-1}$  se distribuye exponencial ( $\lambda$ ). Consideremos el modelo de Cramér-Lundberg al tiempo  $k$  entre dos reclamaciones

$$X_k = c(T_k - T_{k-1}) - Y_k.$$

Si tomamos el proceso en el tiempo de las reclamaciones

$$C_{T_k} = u + \sum_{i=1}^k X_i,$$

tenemos una caminata aleatoria. Y por propiedades de éstas, se tiene que la ruina ocurre casi seguramente si  $\mathbb{E}[X_k] \leq 0$ . Por lo que buscamos asegurar

que  $\mathbb{E}[X_k] > 0$ . Si  $\mathbb{E}[Y_i] = \mu$ , se tiene

$$\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}[c(T_k - T_{k-1}) - Y_k] = \frac{c}{\lambda} - \mu > 0.$$

De donde se obtiene la condición de ganancia neta,

$$c > \lambda\mu. \quad (1.9)$$

Cuando no se cumple con la condición de ganancia neta, entonces la probabilidad de que la compañía caiga en ruina es de uno.

### 1.4.2. Coeficiente de ajuste

Cuando no existe una expresión para la probabilidad de ruina se buscan aproximaciones o cotas que faciliten la estimación de la ruina. El exponente de Lundberg es una importante herramienta para lograr estos objetivos. Consideremos la función

$$h(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr$$

en donde  $M_Y(r)$  es la función generadora de  $Y$  y  $\lambda, c$  son los parámetros del modelo de Cramér Lundberg (1.3). Notemos que  $h(r)$  está bien definida para valores de  $r$  en donde  $M_Y(r)$  existe.

**Definición 1.9.** Llamaremos coeficiente de ajuste o exponente de Lundberg a la posible solución  $R > 0$  de la ecuación

$$h(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr = 0. \quad (1.10)$$

**Ejemplo 1.4.2.** Continuando con el Ejemplo 1.4.1, sabemos que

$$M_Y(r) = \frac{\beta}{\beta - r}.$$

Entonces sustituyendo en (1.10) tenemos que

$$h(r) = h \frac{r}{\beta - r} - cr.$$

De donde  $h(r) = 0$  cuando  $r = 0$  o  $r = \beta - \frac{\lambda}{c}$ . Como  $R$  debe ser mayor a 0, el exponente de Lundberg es

$$R = \beta - \frac{\lambda}{c}$$

que equivale a  $\beta > \frac{\lambda}{c}$ , la condición de ganancia neta (1.9) cuando  $\mu = \frac{1}{\beta}$ .

Una forma equivalente de encontrar al coeficiente de ajuste y que retomaremos más adelante es la solución positiva de la ecuación

$$E[e^{-R(c\theta_1 - Y_1)}] = 1 \quad (1.11)$$

donde  $\theta_k$ ,  $k \geq 1$  es el tiempo entre reclamaciones y  $Y_k$  es el monto de la  $k$ -ésima reclamación.

Como las reclamaciones llegan de acuerdo a un proceso Poisson,  $\theta_k$  se distribuye exponencial de parámetro  $\lambda$ , así que

$$\begin{aligned} E[e^{-R(c\theta_1 - Y_1)}] &= \int_0^\infty e^{-Rct} \lambda e^{-\lambda t} dt \int_0^\infty e^{Ry} dG(y) \\ &= \frac{\lambda}{Rc + \lambda} \hat{g}(-R) = 1. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Donde  $\hat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} dG(y)$  es la transformada de Laplace de la función de distribución  $G$ . Por lo tanto  $-R$  es la solución de la ecuación

$$\lambda \hat{g}(s) = \lambda - cs. \quad (1.13)$$

Para asegurar la existencia del coeficiente se necesita que la cola de la distribución de la variable  $Y$  decrezca al menos exponencialmente rápido cerca del cero. A las distribuciones que cumplen con este criterio se les llama distribuciones de cola ligera.

**Definición 1.10.** Sea  $X$  una variable aleatoria con función de distribución  $F_X$ , se dice que su distribución es de cola ligera si para algún  $t > 0$ ,

$$M_X(t) - 1 < \infty$$

donde  $M_X(t)$  es la función generadora de momentos de  $X$ . Es decir, la función generadora debe ser finita cerca del cero.

El coeficiente de ajuste por sí sólo parece no tener relevancia en el problema de encontrar la probabilidad de ruina, sin embargo es indispensable para el siguiente resultado que nos proporciona una cota para la probabilidad de ruina. Resultado que a su vez es fundamental para los casos en los que no es posible encontrar de forma explícita la probabilidad de ruina.

**Teorema 1.4.2. Desigualdad de Lundberg**

*Si existe el coeficiente de ajuste  $R > 0$ , entonces*

$$\psi(u) < e^{-Ru}.$$

La demostración, que hace uso del concepto de martingala y de tiempos de paro, se puede consultar en [10].

**Ejemplo 1.4.3.** Para el Ejemplo 1.4.1 tenemos que el coeficiente de ajuste es

$$R = 1 - 0.5 = 0.5$$

Para ilustrar la importancia de la cota de Lundberg, tomemos distintos valores para el capital inicial  $u$

$$\begin{aligned}\psi(0) &< e^0 = 1 \\ \psi(1) &< e^{-0.5} = 0.6065 \\ \psi(2) &< e^{-1} = 0.3679\end{aligned}$$

y notemos como conforme aumenta  $u$  la cota disminuye. Lo que confirma nuestra intuición de que entre mayor sea el capital inicial menor será la probabilidad de ruina.

La ventaja de este ejemplo es que al conocer la probabilidad exacta de ruina podemos analizar que tanto se aproximan las cotas de Lundberg a la probabilidad real. En este caso tenemos que,

$$\begin{aligned}\psi(0) &= 0.5 \\ \psi(1) &= 0.3033 \\ \psi(2) &= 0.1839\end{aligned}$$

reflejando una diferencia importante con la cota de Lundberg. Lo cual indica que la cota es un límite superior muy por encima del valor real.



# Capítulo 2

## Procesos estocásticos a tiempo continuo

### 2.1. Cadenas de Markov a tiempo continuo

Consideremos un proceso de Markov  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  con espacio de estados finito  $E = \{1, 2, \dots\}$ . La propiedad de Markov establece que la distribución futura de un proceso depende del pasado únicamente a través del estado más reciente. De forma precisa, decimos que el proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  cumple con la propiedad de Markov si para cualesquiera tiempos  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots$  se cumple

$$P[X_{t_{n+1}} = x_{t_{n+1}} : X_{t_n} = x_{t_n}, \dots, X_{t_1} = x_{t_1}] = P[X_{t_{n+1}} = x_{t_{n+1}} : X_{t_n} = x_{t_n}] \quad (2.1)$$

donde  $x_{t_{n+1}}, x_{t_n}, \dots, x_{t_1} \in E$ .

**Definición 2.1.** Llamamos matriz de transición asociada al proceso de Markov a la matriz  $P(t) = \{p_{ij}(t)\}_{i,j \in E}$ . Sus entradas son las probabilidades de que la cadena llegue al estado  $j$  después de un tiempo  $t$  dado que inicialmente se encontraba en el estado  $i$ . Veamos que existen una infinidad de matrices de transición ya que a cada tiempo  $t$  le corresponde una matriz diferente.

**Definición 2.2.** Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  una cadena de Markov, decimos que es homogénea si cumple

$$P[X_{t+s} = j : X_s = i] = P[X_t = j : X_0 = i].$$

De aquí en adelante supondremos homogeneidad en todas las cadenas con las que trabajemos.

**Definición 2.3.** Sea  $\{P(t)\}_{t \geq 0}$  una colección de matrices, decimos que es un semigrupo si cumple con las siguientes propiedades:

1.  $P(0) = I$ ,
2.  $P(t)$  es una matriz estocástica,
3.  $P(t + s) = P(t)P(s)$  para cualesquiera  $t, s \geq 0$ .

**Teorema 2.1.1.** *La familia de matrices de transición de procesos de Markov  $\{P(t)\}_{t \geq 0}$  satisface las propiedades de semigrupo. En particular (3) de la Definición 2.3 es la versión continua de la ecuación de Chapman Kolmogorov.*

Al ser un proceso a tiempo continuo, nos interesa estudiar su comportamiento de la cadena en intervalos de tiempo muy pequeños. Tomemos una matriz  $Q = \{q_{ij}\}_{i,j \in E}$  que cumpla con:

- $P[X_{t+h} = j : X_t = i] = q_{ij}h + o(h)$  y
- $P[X_{t+h} = i : X_t = i] = 1 + q_{ii}h + o(h)$ .

**Definición 2.4.** Definimos al generador infinitesimal de  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  como  $Q = \{q_{ij}\}_{i,j \in E}$  tal que:

1.  $q_{ii} \leq 0 \quad \forall i \in S$ ,
2.  $q_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in S$ ,
3.  $\sum_{j \in S} q_{ij} = 0 \quad \forall i \in S$ .

Adicionalmente, el generador infinitesimal cumple con la ecuación

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q = QP(t) \quad (2.2)$$

(Ecuación de Kolmogorov) que junto con las propiedades de semigrupo de las matrices de transición, tiene como solución a la matriz

$$P(t) = e^{tQ}. \quad (2.3)$$

El detalle y la demostración de las Ecuaciones (2.2) y (2.3) se puede consultar en [11].



comportamiento hasta un tiempo  $T$ . Definamos formalmente cada uno de los momentos de interés en las trayectorias que sigue el proceso.

Sean

$$J_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq X_0\} \quad y \quad J_n = \inf\{t \geq J_{n-1} : X_t \neq X_{J_{n-1}}\}$$

los instantes cuando la cadena cambia de estado.

**Teorema 2.1.2.** *Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso homogéneo de Markov con espacio de estados discreto  $E$ . Definamos a*

$$S_t = \inf\{s > t : X_t \neq X_s\}. \quad (2.4)$$

Entonces existe  $\lambda_i > 0$  tal que

$$P[S_t > t : X_s = i] = e^{-\lambda_i t} \quad para \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

El teorema anterior nos indica que los tiempos de estancia en cada estado se distribuyen exponencialmente con un parámetro que depende del estado en el que se encuentre la cadena.

Diremos que un estado es absorbente si  $P[S_i = \infty] = 1$  y que es no absorbente cuando  $P[S_i < \infty] = 1$ . En este documento consideraremos únicamente estados no absorbentes.

Por último consideremos al proceso a tiempo discreto

$$Y_n = X_{J_n}.$$

Se dice que  $\{Y_n\}$  es la cadena de saltos instantáneos asociada al proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ . Con  $P = \{p_{ij}\}_{i,j \in E}$  la matriz de transición de  $\{Y_n\}$  dada por

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Para impedir que la cadena salte de un estado en sí mismo, supondremos que  $p_{ii} = 0 \quad \forall i \in E$ .

Dado  $Y_n = i$ , el siguiente tiempo de permanencia  $S_{n+1}$  se distribuye exponencial( $\lambda_i$ ) independientemente de  $Y_1, \dots, Y_{n-1}$  y de  $S_1, \dots, S_n$ .

Utilizando todos los conceptos anteriores obtenemos la siguiente igualdad para obtener las entradas del generador infinitesimal a partir del proceso de saltos instantáneos y los tiempos de estancia como

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i p_{ij} & \text{si } i \neq j \\ -\lambda_i & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (2.6)$$

De ésta manera, la matriz  $Q$  contiene toda la información de la cadena de Markov a tiempo continuo.

**Ejemplo 2.1.2. Proceso Poisson** El generador infinitesimal de un Proceso Poisson Homogéneo es

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ \dots & & & \end{pmatrix},$$

de donde se puede mostrar que el tiempo de permanencia en el estado  $i$  antes de saltar a  $i + 1$  se distribuye  $\exp(\lambda)$ .

Y los elementos de la matriz de saltos  $P$  correspondientes a la cadena asociada al Proceso Poisson Homogéneo son

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{si e.o.c.} \end{cases}$$

**Ejemplo 2.1.3.** Continuando con el Ejemplo 2.1.1, supongamos que su matriz de saltos instantáneos es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a la matriz anterior, la secuencia de estados más probable de ocurrir es 1-2-3-1-2-3-... y así sucesivamente. Si adicionalmente suponemos que el tiempo medio de permanencia en cada uno de los estados es de 2 unidades de tiempo, o sea  $\lambda_i = 0.5$  para  $i \in 1, 2, 3$  y utilizamos la Ecuación (2.6), obtenemos el generador infinitesimal presentado en el Ejemplo 2.1.1.

Para finalizar ésta sección, presentaremos el concepto de estacionariedad de una cadena de Markov a tiempo continuo.

**Definición 2.5.** Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  una Cadena de Markov continua, decimos que es irreducible si la cadena discreta  $\{Y_n\}$  asociada a proceso es irreducible.

**Definición 2.6.** Las probabilidades estacionarias  $\pi_0, \pi_1, \dots$  de una Cadena de Markov a tiempo continuo cumplen

$$\pi_j = \frac{r_j/\lambda_j}{\sum_k r_k/\lambda_k}. \quad (2.7)$$

Donde  $\{r_j\}$  es la distribución estacionaria de la cadena de Markov asociada. En caso de que exista,  $\pi$  debe cumplir:

1.  $\pi Q = 0$ ,
2.  $\sum_j \pi_j = 1$ .

**Teorema 2.1.3.** *Sea  $X_t$  la cadena de Markov recurrente positiva asociada al proceso y sea  $\{r_j\}$  su distribución estacionaria. Tomemos  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  una cadena de Markov continua e irreducible, entonces si  $\sum_k r_k / \lambda_k < \infty$  la solución  $\pi_i$  de (2.7) es única.*

**Ejemplo 2.1.4.** Para concluir el Ejemplo 2.1.1, obtengamos su distribución estacionaria. Sabemos que debe cumplir las igualdades de la Definición 2.6 donde  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  es el vector de la distribución estacionaria. Realizando los cálculos correspondientes obtenemos que  $\pi = (\frac{82}{251}, \frac{76}{251}, \frac{93}{251})$ , que se interpreta como el porcentaje de tiempo que la cadena permanecerá en cada uno de los estados. Notemos que son muy similares entre ellos, lo cual se debe en parte a que fijamos la misma  $\lambda$  para todos los estados.

## 2.2. Difusiones

### 2.2.1. Movimiento browniano

El movimiento browniano es un proceso estocástico a tiempo continuo utilizado en la actualidad para modelar el comportamiento aleatorio de distintos fenómenos a través del tiempo. Su popularidad se debe a la distribución normal de sus incrementos y a su relación con las caminatas aleatorias a tiempo discreto.

**Definición 2.7.** El proceso estocástico  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano con varianza  $\sigma^2$  si cumple:

1.  $B_0 = 0$ ,
2. tiene incrementos independientes,
3. para todo  $0 \leq s < t$ ,  $B_t - B_s \sim N(0, \sigma^2((t - s)))$ ,
4. las trayectorias del proceso  $t \rightarrow B_t$  son funciones continuas.

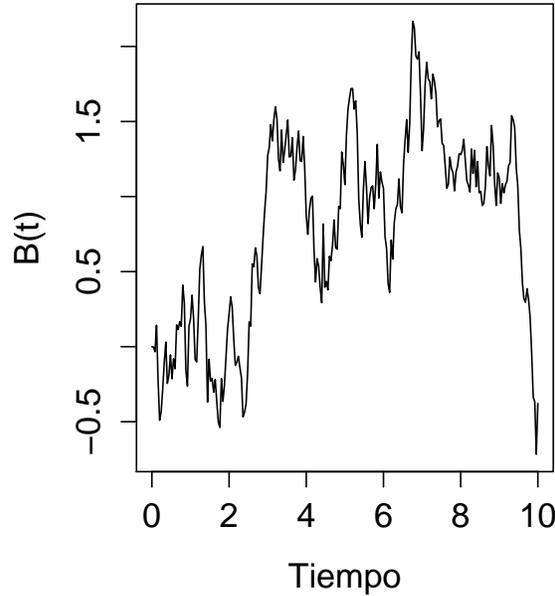


Figura 2.2: Trayectoria de un movimiento browniano estándar.

Cuando  $\sigma = 1$  se le llama movimiento browniano estándar.

**Proposición 2.2.1.** *Sea  $\{B_t\}$  una trayectoria de un movimiento browniano observada en el intervalo  $[0, T]$  con una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  y tomemos  $\Delta t = \max \{|t_{i+1} - t_i| : i = 0, 1, \dots, n-1\}$ . Entonces se tiene las siguientes propiedades:*

1. *Con probabilidad 1,  $\{B_t\}$  es no diferenciable en todo  $t \geq 0$ .*
2. *Tiene variación infinita*

$$\limsup_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| = \infty, \quad \text{c.s.} \quad (2.8)$$

3. *En el intervalo  $[0, T]$  tiene variación cuadrática igual a la longitud del intervalo*

$$\limsup_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2 = T$$

en la distancia  $L^2(P)$ .

La prueba de la Proposición 2.2.1 se puede consultar en [10].

Notemos que por el inciso (2.) las trayectorias generadas por un movimiento browniano no se pueden integrar por el método de Riemann, lo que nos lleva a buscar otro método de integración para éste tipo de procesos.

### 2.2.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Las ecuaciones diferenciales se utilizan para estudiar la evolución de sistemas a través del tiempo como función de otras variables. En la realidad no siempre se conoce con exactitud el comportamiento del sistema es decir, se tiene una parte aleatoria. Consecuentemente, agregamos un variable que represente a dicha aleatoriedad y le llamamos ruido blanco. Como se verá a continuación, usualmente el ruido blanco es representado por un movimiento browniano.

**Definición 2.8.** Sean  $\mu(t, X_t)$  y  $\sigma(t, X_t)$  funciones continuas en  $t$  y  $x$ . Definimos a una ecuación diferencial estocástica con respecto a un movimiento browniano estándar como

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0. \quad (2.9)$$

Dado que  $B_t$  es un proceso estocástico, entonces la solución  $X_t$  de (2.9) también lo será. Además, por la aleatoriedad del sistema, dicha solución no será una única función como en el caso determinista, sino que será una familia de funciones.

**Definición 2.9.** Se le llama proceso de difusión a la solución de la Ecuación (2.9). A la función  $\mu(t, X_t)$  se le conoce como la deriva y a  $\sigma(t, X_t)$  como la difusión.

**Ejemplo 2.2.1.** Si  $\mu(t, X_t) = 0$ ,  $\sigma(t, X_t) = 1$  y  $x_0 = 0$  entonces  $X_t = B_t$ . Es decir, el movimiento browniano estándar es el proceso de difusión más simple que existe.

### 2.2.3. Integral de Itô

Otra forma de ver a la Ecuación (2.9) es

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(t, X_t)dt + \int_0^t \sigma(t, X_t)dB_t. \quad (2.10)$$

La primera de las integrales se puede expresar como una integral de Riemann pero la segunda no tendría sentido ya que por (2.8) no es posible acotar la variación que tiene  $B_t$ . Es para éste tipo de problemas que se utiliza el cálculo estocástico introducido por Itô.

Para los fines de éste trabajo únicamente daremos la idea detrás de la construcción de la integral de Itô, omitiendo la demostración formal.

Tomemos la integral estocástica

$$I(f(t, X_t)) = \int_0^t f(s, X_s)dB_s. \quad (2.11)$$

De manera similar a las sumas de Riemann, consideremos la suma

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(t'_i)[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]$$

sobre una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  de  $[0, T]$  con  $t'_i \in [t_i, t_{i+1}]$ . Nos interesa el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  con  $\Delta t = \max\{|t_{i+1} - t_i| : i = 0, 1, \dots, n-1\}$ . Una de las características de la integral de Ito es que se busca la convergencia en media cuadrática. Además el punto  $t'_i$  en el que se evalúa cada intervalo  $[t_i, t_{i+1})$  debe ser específicamente  $t_i$ .

**Definición 2.10.** Sea  $X_t$  un proceso adaptado a la filtración generado por  $B_t$  y sea  $f(t, x)$  un función continua tal que

$$\int_0^t E[f^2(s, X_s)]ds < \infty.$$

Entonces la integral de Ito está definida como

$$\int_0^t f(s, X_s)dB_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]. \quad (2.12)$$

Todos los conceptos presentados serán aplicados en el próximo capítulo para construir el modelo de riesgo modulado de Markov con difusiones y saltos.



# Capítulo 3

## Probabilidad de ruina del modelo modulado de Markov con difusiones

### 3.1. Modelo de riesgo modulado de Markov con difusiones

#### 3.1.1. Modulado de Markov

En la teoría de riesgo, el modelo clásico de Cramér-Lundberg es de gran importancia ya que funge como base para todo análisis dentro de dicho campo. En este capítulo presentaremos un modelo de riesgo que se deriva del modelo de Cramér-Lundberg y que considera dos fuentes de aleatoriedad adicionales, un proceso ambiental y la volatilidad.

El proceso ambiental generalmente es utilizado para modelar las condiciones económicas a través del tiempo, éste es representado por una cadena de Markov externa de la cual dependerán los parámetros del modelo de riesgo.

Tomemos una cadena de Markov a tiempo continuo  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  irreducible con espacio de estados finitos  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  y generador infinitesimal  $Q = \{q_{ij}\}_{i,j \in E}$ . Al ser un proceso modelando el ambiente general de la economía, entonces influirá en cada uno de los parámetros del modelo. Es decir, las primas, el monto y la frecuencia con la que se presentan las reclamaciones dependerán del estado en el que se encuentre la cadena de Markov  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  de la siguiente forma:

- las primas que recibe la compañía aseguradora al tiempo  $t$  son  $c_{X_t}$ ,
- las reclamaciones son modeladas por un proceso Poisson de intensidad  $\lambda_{X_t}$ ,
- las reclamaciones  $Y_k$  tienen distribución  $G_{X_t}$  con  $\mathbb{E}[Y_i] = \mu_i$ .

En particular, como  $\lambda_{X_t}$  depende de la cadena de Markov, se dice que el número de reclamaciones  $N = \{N_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso Poisson modulado de Markov. Notemos también que mientras  $X_t = i$ , las primas generan un flujo lineal de ingresos  $c_i$  para la aseguradora. Además que los tamaños de las reclamaciones son independientes de  $N_t$ .

Considerando todas las características mencionadas anteriormente, el modelo de riesgo modulado de Markov está dado por la ecuación

$$R_t = u + \int_0^t c_{X_s} ds + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k. \quad (3.1)$$

El espacio de estados no forzosamente tiene que influir en todos los parámetros del modelo sino que es posible mantener ciertos parámetros constantes para todos los estados de manera que no dependan de la cadena de Markov. Por ejemplo, para que la prima sea constante bajo cualquier escenario, simplemente se tiene que hacer  $c = c_i$  para todo  $i \in E$ . El modelo puede incluir tantas combinaciones de parámetros como estados se agreguen al espacio de estados  $E$ .

Para entender mejor los beneficios de agregarle un proceso ambiental a nuestro modelo, veamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.1.1.** En el ramo de seguro de automóviles se sabe que la ocurrencia de accidentes automovilísticos es más probable los días que llueve por lo que la compañía aseguradora decide separar la distribución de las reclamaciones según las condiciones climatológicas, los días que llueve y los días que no. Supongamos una cadena de Markov con dos estados  $E = \{1, 2\}$  y con generador infinitesimal

$$Q = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

que representa las transiciones entre los periodos lluviosos (estado 1) y los periodos con condiciones normales (estado 2).

En el estado 1 las condiciones climatológicas son muy malas por lo que las reclamaciones son muy frecuentes, además que los montos que se tienen que resarcir a los asegurados son muy altos. Digamos que  $\lambda_1 = 4$  y  $\mu_1 = 5$ . Por el contrario, en el estado 2 que las condiciones son normales, los parámetros son  $\lambda_2 = 1$  y  $\mu_2 = 1$ . En este caso, las primas no se ven afectadas por las condiciones meteorológicas por lo que será  $c=5$  constante para ambos estados. Con todas las consideraciones mencionadas, construyamos un proceso de riesgo y simulemos una trayectoria.

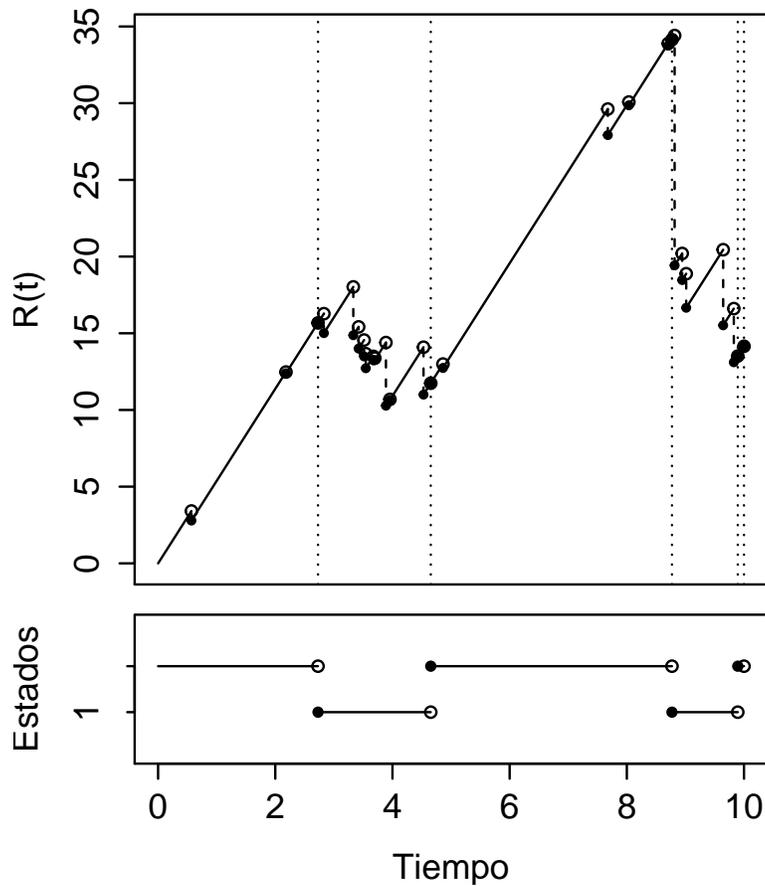


Figura 3.1: Trayectoria de un proceso de riesgo modulado de Markov para parámetros definidos en el Ejemplo 3.1.1

Observemos en la Figura 3.1 como en el estado 1 (condiciones climatológicas adversas), la frecuencia de reclamaciones y el tamaño de éstas es mucho mayor que en el otro estado. Esto implica que la compañía aseguradora está más propensa a incurrir en ruina mientras se encuentre en el estado 1 por lo que debe tomar medidas para disminuir la frecuencia de reclamaciones en dichos periodos o bien aumentar el monto de las primas.

### 3.1.2. Difusión

En la realidad, el capital que se mueve dentro de una compañía aseguradora no se comporta de manera lineal sino que esta sujeto a diversos factores como la inflación, cambios en el número de asegurados y variaciones en el número de reclamaciones que generan una aleatoriedad adicional. Para representar todas estas fluctuaciones, conocidas como volatilidad y que aumentan la incerteza dentro del modelo de riesgo, añadiremos un variable aleatoria modelada por un proceso de difusión. Al ser un conjunto de pequeños factores que no se conocen explícitamente, asumiremos que las perturbaciones generadas por cada uno de los factores se anulan entre ellas, por lo que utilizaremos un proceso que tenga deriva cero. Específicamente, un movimiento browniano estándar.

Al igual que los demás elementos del modelo, la volatilidad de la difusión también dependerá del estado en el que se encuentre la cadena de Markov a través de la constante  $\sigma_{X_t}$ . Por lo tanto la volatilidad hasta el tiempo  $t$  estará dada por el proceso de difusión

$$\int_0^t \sigma_{X_s} dB_s$$

donde  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar.

Por la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial y la independencia de los incrementos del movimiento browniano, el proceso puede ser visto como una secuencia de procesos de Cramér-Lundberg en donde el capital inicial es el valor final del proceso anterior y los parámetros de cada uno de esos procesos depende directamente del estado en el que se encuentre la cadena externa de Markov.

Considerando todas las características mencionadas anteriormente, el mo-

delo de riesgo modulado de Markov con difusiones y saltos está dado por:

$$R_t = u + \int_0^t c_{X_s} ds + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k + \int_0^t \sigma_{X_s} dB_s. \quad (3.2)$$

A pesar de añadir supuestos al modelo de riesgo, nuestro principal interés sigue siendo estimar la probabilidad de ruina de la compañía. A continuación se extienden conceptos que ya mencionamos para el modelo clásico de riesgo como condición de ganancia neta, coeficiente de ajuste, probabilidad de ruina, etc. para el modelo con modulado de Markov y difusiones.

## 3.2. Probabilidad de ruina

Para el modelo modulado de Markov, dado el estado inicial  $i$  definamos a la probabilidad de ruina como

$$\psi_i(u) = P[\tau < \infty : R_0 = u, X_0 = i] \quad (3.3)$$

y a la probabilidad de no ruina para el mismo estado inicial como

$$\phi_i(u) = 1 - \psi_i(u). \quad (3.4)$$

Consecuentemente, la probabilidad de ruina es la suma ponderada de las probabilidades de ruina dado el  $i$ -ésimo estado inicial por el porcentaje promedio de tiempo de permanencia de la cadena externa de Markov en el correspondiente estado

$$\psi(u) = \sum_{i \in E} \psi_i(u) \pi_i. \quad (3.5)$$

Antes de agregarle la difusión al modelo, recordemos que el proceso únicamente decrece por causa de una reclamación, sin embargo, con la difusión el capital de la compañía aseguradora también puede disminuir por la oscilación del movimiento browniano. Esto implica que para  $R_t$  definido en (3.2) la ruina puede ser causada por dos distintas fuentes: por una reclamación o bien por la oscilación de la difusión. Sea

$$\tau_s = \inf\{t : R_t < 0, R_h > 0, 0 < h < t\}$$

el tiempo en el que sucede la ruina por causa de una reclamación, con  $\tau_s = \infty$  si  $R_t > 0$  para todo  $t \geq 0$ . Y sea

$$\tau_d = \inf\{t : R_t = 0, R_h > 0, 0 < h < t\}$$

donde,  $\tau_d = \infty$  si  $R_t > 0$  para todo  $t \geq 0$  el tiempo de ruina causada por el proceso de difusión. Entonces el tiempo absoluto de ruina del proceso es

$$\tau = \min\{\tau_s, \tau_d\}.$$

Con lo anterior, las probabilidades de ruina correspondientes a cada una de las causas, reclamación o proceso de difusión, serán

$$\psi_s(u) = P[\tau_s < \infty : R_0 = u,] \quad (3.6)$$

y,

$$\psi_d(u) = P[\tau_d < \infty : R_0 = u]. \quad (3.7)$$

De donde, para  $u \geq 0$ , la probabilidad de ruina para (3.2) es

$$\psi(u) = \psi_s(u) + \psi_d(u). \quad (3.8)$$

Notemos que ambas probabilidades de ruina son eventos disjuntos ya que para un determinado instante de tiempo únicamente se puede presentar uno de los dos eventos. Y como la  $\psi(u)$  considera a ambos, entonces es la suma de tales probabilidades.

Además dado que sucede la ruina, la probabilidad de que haya sido consecuencia de una reclamación es  $\frac{\psi_s(u)}{\psi(u)}$  y  $\frac{\psi_d(u)}{\psi(u)}$  de que haya sucedido por la oscilación.

### 3.2.1. Condición de ganancia neta

Para lo que sigue, recordemos que por definición  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es irreducible y tiene espacio de estados finito, por lo que existe su distribución estacionaria  $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$  indicando el tiempo promedio que la cadena permanece en cada uno de los estados. Para que una compañía sea rentable se busca que a lo largo del tiempo, el capital promedio de la aseguradora se mantenga por encima de un cierto valor. Generalmente representa un límite inferior que en caso de ser alcanzado señala que ciertas medidas deben de ser tomadas para

mantener la solvencia de la empresa. Sin pérdida de generalidad tomaremos este valor como cero, entonces se busca que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} R_t > 0.$$

En otras palabras, se desea que el dinero recibido por concepto de primas sea suficiente para cumplir con todas las obligaciones que puedan surgir con los asegurados, lo cual implica que el promedio de las primas recibidas sea mayor al promedio de los pagos por concepto de reclamación,

$$\sum_{i=1}^n \pi_i c_i > \sum_{i=1}^n \mu_i \pi_i \lambda_i. \quad (3.9)$$

La razón por la que ningún término correspondiente a la difusión aparece en la condición (3.9) es que para calcularla se utilizan los valores esperados de cada una de las variables aleatorias que figuran en el modelo de riesgo y al ser  $E[B_t] = 0$ , ésta se anula.

Es un resultado conocido en la teoría de riesgo que si no se cumple con la condición de ganancia neta se tiene que  $\psi(u) = 1$  para todo  $u \geq 0$ . En tal caso la compañía incurrirá en ruina sin importar cuál sea capital inicial. Por lo tanto para que los resultados siguientes tengan sentido, asumiremos que se cumple con la condición de ganancia neta dada por la Ecuación (3.9).

Para encontrar el coeficiente de ajuste y la probabilidad de ruina debemos definir la filtración sobre la cual nuestro proceso se desarrollará. Tomemos  $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_t\}_{t \geq 0}$  definida como  $\mathfrak{S}_t = \mathfrak{S}_t^R \vee \mathfrak{S}_\infty^X$  donde  $\{\mathfrak{S}_t^R\}_{t \geq 0}$  y  $\{\mathfrak{S}_t^X\}_{t \geq 0}$  son las filtraciones naturales de  $\{R_t\}_{t \geq 0}$  y de  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  respectivamente. Observemos que  $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}_\infty^X$  ya que  $X_t$  es  $\mathfrak{S}_0$ -medible.

Sin pérdida de generalidad y para facilitar los cálculos, a menos que se indique lo contrario, de aquí en adelante asumiremos que las primas son unitarias y constantes en el tiempo. Para esto aplicaremos el cambio de variable  $V_t := V_{T(t)}$  donde  $T(t) = \int_0^t \frac{1}{c_{X_s}} ds$ , con lo cual tendremos que  $c = 1$  constante para cualquier estado de  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ . El modelo simplificado quedará como

$$R_t = u + t + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k + \int_0^t \sigma_{X_s} dB_s. \quad (3.10)$$

### 3.2.2. Coeficiente de ajuste

Anteriormente encontramos que el coeficiente de ajuste para el modelo clásico de Cramér-Lundberg es el único  $R > 0$  tal que

$$E[e^{-R(c\theta_1 - Y_1)}] = 1$$

donde  $\theta_i$  es el tiempo antes de la primera reclamación. Esto se interpreta como que las primas que se acumulan en el intervalo de tiempo entre reclamaciones sean suficientes para cubrir el monto de la siguiente reclamación.

Antes de continuar, es importante mencionar que en este apartado obtendremos el coeficiente de ajuste únicamente para mostrar su relación con el coeficiente del modelo clásico. Sin embargo, en [2] se puede consultar su uso como cota para la probabilidad de ruina.

Cuando la difusión es agregada al modelo, el coeficiente de ajuste es el único  $R > 0$  que satisface

$$E[e^{-R(c\theta_1 - Y_1 + \sigma W\theta_1)}] = 1. \quad (3.11)$$

Utilizando la ecuación (1.12), tenemos que

$$E[e^{-R(c\theta_1 - Y_1 + \sigma W\theta_1)}] = \frac{\lambda}{\lambda + cR} \hat{g}(-R) \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-R\sigma y} \frac{e^{-\frac{y^2}{2t}}}{\sqrt{(2\pi t)}} \lambda e^{-\lambda t} dy dt.$$

Desarrollando la integral,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^\infty e^{-R\sigma y} \frac{e^{-\frac{y^2}{2t}}}{\sqrt{(2\pi t)}} dy dt \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{\frac{\sigma^2 R^2 t}{2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)}} e^{-\frac{(y + \sigma R t)^2}{2t}} dy dt \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{\frac{\sigma^2 R^2}{2} - \lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda - \frac{\sigma^2 R^2}{2}} \end{aligned}$$

Para que la última integral exista se necesita que  $\frac{\sigma^2 R^2}{2} < \lambda$ . En tal caso se tiene

$$\frac{\lambda}{\lambda + cR} \hat{g}(-R) \frac{\lambda}{\lambda - \frac{\sigma^2 R^2}{2}} = 1,$$

de donde se obtiene la ecuación fundamental de Lundberg para el modelo de riesgo perturbado por una difusión

$$\lambda^2 \hat{g}(s) = (\lambda - cs) \left( \lambda - \frac{\sigma^2 s^2}{2} \right), \quad (3.12)$$

cuya solución es  $-R$ . Observemos que si  $\sigma = 0$ , se obtiene la ecuación fundamental de Lundberg (1.13) para el caso sin difusión.

Siguiendo la misma idea para el caso con modulado de Markov y difusiones, el coeficiente de ajuste es la solución  $R > 0$  de la ecuación

$$E[e^{-R(R\theta_1 - u)} | \mathfrak{S}_\infty^J] = E[e^{-R(\theta_1 - Y_1 + \int_0^{\theta_1} \sigma_{J_s} dW_s)} | \mathfrak{S}_\infty^X] = 1. \quad (3.13)$$

Utilizando el hecho que los elementos son independientes dado  $\mathfrak{S}_\infty^X$ , tenemos que

$$E[e^{-R(R\theta_1 - u)} | \mathfrak{S}_\infty^J] = E[e^{-R\theta_1} | \mathfrak{S}_\infty^J] E[e^{RY_1} | \mathfrak{S}_\infty^J] E[e^{-R \int_0^{\theta_1} \sigma_{J_s} dW_s} | \mathfrak{S}_\infty^X].$$

Recordemos que dado que la cadena de Markov se encuentre en el  $i$ -ésimo estado, la intensidad de las reclamaciones es modelada por un proceso Poisson de parámetro  $\lambda_i$ , y consecuentemente el tiempo entre reclamaciones de distribuye exponencial de parámetro  $\lambda_i$ .

Considerando que  $X_0 = i$ , se puede desarrollar el primer término de la ecuación anterior de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} E[e^{-R\theta_1} | \mathfrak{S}_\infty^X] &= \int_0^\infty e^{-Rt} \lambda_{X_t} e^{-\lambda_{X_t} t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-Rt} q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \lambda_j e^{-q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \lambda_j t} \\ &= \frac{q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \lambda_j}{q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \lambda_j + R}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

El segundo como,

$$\begin{aligned}
E[e^{RY_i} | \mathfrak{S}_\infty^X] &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{Ry} dG_{X_t}(y) dt \\
&= \int_0^\infty e^{Ry} q_i \sum_{j \in E} p_{ij} dG_j(y) \\
&= q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \int_0^\infty e^{Ry} dG_j(y) \\
&= q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \hat{g}_j(-R),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

donde  $\hat{g}_j(-R)$  es la transformada de Laplace de  $g_j$ .

Y por último,

$$\begin{aligned}
E[e^{-R \int_0^{\theta_1} \sigma_{X_s} dW_s} | \mathfrak{S}_\infty^X] &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-R\sigma_{X_t} y} \frac{e^{-\frac{y^2}{2t}}}{\sqrt{(2\pi t)}} \lambda_{X_t} e^{-\lambda_{X_t} t} dy dt \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{y^2}{2t}}}{\sqrt{(2\pi t)}} q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \lambda_j e^{-q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \lambda_j t} e^{-q_i \sum_{j \in E} p_{ij} R \sigma_j y} dy dt \\
&= \int_0^\infty q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \lambda_j e^{[-q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \lambda_j - (q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \sigma_j)^2 \frac{R^2}{2}] t} \\
&= \frac{q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \lambda_j}{q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \lambda_j - (q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \sigma_j)^2 \frac{R^2}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

La única condición para la existencia de las integrales anteriores es que el numerador de (3.16) sea mayor a cero. Finalmente juntando (3.14), (3.15) y (3.16), tenemos que el coeficiente de ajuste está dado por la ecuación

$$\begin{aligned}
&[q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \lambda_j - (q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \sigma_j)^2 \frac{R^2}{2}][q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \lambda_j + R] \\
&= q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \hat{g}_j(-R)[q_i \sum_{j \in E} p_{ij} \lambda_j]^2.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

**Ejemplo 3.2.1.** Consideremos un cadena de Markov con espacio de estados  $E = \{1, 2\}$ . Sean  $Q = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$  su generador infinitesimal y  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  su matriz de saltos. Supongamos que la distribución de las reclamaciones es exponencial con el mismo parámetro para todos los estados, es decir  $E[Y] = \mu$ . Entonces su ecuación fundamental de Lundberg está dada por

$$\begin{aligned} & \mu(q_1 + q_2)(q_1\lambda_2 + q_2\lambda_1)^2(\mu - R)^{-1} \\ &= (q_1\lambda_2 + q_2\lambda_1 + R)(q_1\lambda_2 + q_2\lambda_1 - [(q_1\sigma_2)^2 + (q_1\sigma_2)^2]\frac{R^2}{2}). \end{aligned}$$

Notemos que si  $\sigma = 0$  se tiene la ecuación fundamental de Lundberg

$$\mu(q_1 + q_2)(q_1\lambda_2 + q_2\lambda_1) = (\mu - R)(q_1\lambda_2 + q_2\lambda_1 + R)$$

correspondiente al caso sin difusión.

La importancia del coeficiente de ajuste reside en su funcionalidad como cota para la probabilidad de ruina en los casos en los que no se pueda encontrar una fórmula explícita para ésta. Además es utilizado cuando se aproximan los modelos de riesgo a través de modelos con difusiones al demostrar la convergencia de las ecuaciones fundamentales de Lundberg.

### 3.2.3. Sistema de ecuaciones diferenciales

Como vimos en el capítulo anterior, encontrar una expresión exacta para la probabilidad de ruina no siempre es posible. Cuando esto sucede la mejor alternativa es buscar un método numérico que nos permita aproximar los valores exactos. Este procedimiento ha sido explorado en varios artículos, por un lado Li y Ma [7] supusieron la distribución del tamaño de las reclamaciones constante para todos los estados de la cadena de Markov con lo cual definieron un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas para encontrar la probabilidad de ruina. Por otro lado, Gu, Li y Zhou [3] encontraron un sistema equivalente eliminando el supuesto de la distribución constante. En la presente sección presentaremos la forma de obtener dichas ecuaciones diferenciales.

La idea es escribir la probabilidad de no ruina bajo los posibles comportamientos del proceso Poisson que modela las reclamaciones y diversificar

el proceso subyacente, o sea la cadena de Markov. Para empezar, consideremos el comportamiento de  $R_t$  para un intervalo infinitesimal de tiempo  $(0, h], h > 0$ . Supongamos que  $X_0 = i$ , entonces dentro del intervalo anterior, podemos considerar las siguientes posibilidades:

1. No hay reclamaciones ni cambios de estado.
2. No se presenta ninguna reclamación, sin embargo la cadena cambia de estado.
3. Hay una reclamación, que no causa ruina, y la cadena permanece en el mismo estado.
4. Hay al menos una reclamación y un cambio de estado.
5. Hay más de una reclamación y/o cambio de estado.

Recordando que por la construcción del generador infinitesimal de la cadena externa de Markov, la probabilidad que la cadena salte de estado en un tiempo infinitesimal está dada por  $q_{ij}h + o(h)$ , tenemos que las probabilidades de ocurrencia para cada uno de los casos anteriores son:

1.  $(1 - q_ih + o(h))(1 - \lambda_ih + o(h))$ ,
2.  $(q_ih + o(h))(1 - \lambda_ih + o(h))$ ,
3.  $(1 - q_ih + o(h))(\lambda_ih + o(h))$ ,
4.  $(q_ih + o(h))(\lambda_ih + o(h))$ ,
5.  $o(h)$ .

Considerando las dos listas anteriores y ponderando el comportamiento esperado del proceso en cada uno de los casos por su correspondiente probabilidad de ocurrencia, obtenemos la siguiente descomposición para la

probabilidad de no ruina:

$$\begin{aligned}
\phi_i(u) = & (1 - q_i h + o(h))(1 - \lambda_i h + o(h))E[\phi_i(u + h + \sigma_i W_h)] \\
& + (q_i h + o(h))(1 - \lambda_i h + o(h))E\left[\sum_{j \neq i} p_{ij} \phi_j(u + h + \sigma_j W_h)\right] \\
& + (1 - q_i h + o(h))(\lambda_i h + o(h)) \\
& \int_0^{u+h+\sigma_i W_h} \phi_i(u + h + \sigma_i W_h - y) dG_i(y) \\
& + (q_i h + o(h))(\lambda_i h + o(h)) \sum_{j \neq i} p_{ij} \\
& \int_0^{u+h+\sigma_j W_h} \phi_j(u + h + \sigma_j W_h - y) dG_j(y) + o(h). \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Para simplificar (3.18), veamos que eligiendo  $\rho_i(u, h) = u + h + \sigma_i W_h$ , una expresión polinomial de un movimiento Browniano, tenemos que

$$d\rho_i(u, h) = 1 + \sigma_i dW_h.$$

Así que utilizando la fórmula de Itô tenemos,

$$\phi_i(\rho_i(u, h)) = \phi_i(u) + \int_0^h [\phi_i'(u) + \frac{1}{2} \sigma_i^2 \phi_i''(u)] ds + \int_0^h \sigma_i \phi_i'(u) dW_s.$$

Lo cual implica que,

$$E[\phi_i(\rho_i(u, h))] = \phi_i(u) + \phi_i'(u)h + \frac{1}{2} \sigma_i^2 \phi_i''(u)h + o(h).$$

Sustituyendo en (3.18) y dividiendo entre  $h$ ,

$$\begin{aligned}
\phi_i(u) \frac{1}{h} &= \frac{1}{h} (1 - q_i h + o(h))(1 - \lambda_i h + o(h)) \\
&\quad [\phi_i(u) + \phi'_i(u)h + \frac{1}{2}\sigma_i^2 \phi''_i(u)h + o(h)] \\
&\quad + \frac{1}{h} (q_i h + o(h))(1 - \lambda_i h + o(h)) E\left[\sum_{j \neq i} p_{ij} \phi_j(u + h + \sigma_j W_h)\right] \\
&\quad + \frac{1}{h} (1 - q_i h + o(h))(\lambda_i h + o(h)) \\
&\quad \int_0^{u+h+\sigma_i W_h} \phi_i(u + h + \sigma_i W_h - y) dG_i(y) \\
&\quad + \frac{1}{h} (q_i h + o(h))(\lambda_i h + o(h)) \sum_{j \neq i} p_{ij} \\
&\quad \int_0^{u+h+\sigma_j W_h} \phi_j(u + h + \sigma_j W_h - y) dG_j(y) + \frac{o(h)}{h}.
\end{aligned}$$

De donde al tomar el límite cuando  $h$  tiende a 0 por arriba se obtiene,

$$\begin{aligned}
\phi'_i(u) + \frac{1}{2}\sigma_i^2 \phi''_i(u) &= (\lambda_i + q_i)\phi_i(u) - q_i \sum_{j \neq i} p_{ij} \phi_j(u) \\
&\quad - \lambda_i \int_0^u \phi_i(u - y) dG_j(y).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Integrando (3.19) en el intervalo  $[0, t]$  encontramos el sistema de ecuaciones diferenciales para la probabilidad de no ruina

$$\begin{aligned}
\phi_i(t) - \phi_i(0) + \frac{1}{2}\sigma_i^2 (\phi'_i(t) - \phi'_i(0)) &= (\lambda_i + q_i) \int_0^t \phi_i(u) du \\
&\quad - q_i \sum_{j \neq i} p_{ij} \int_0^t \phi_j(u) du \\
&\quad - \lambda_i \int_0^t \int_0^u \phi_i(u - y) dG_i(y) du.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Para encontrar la equivalencia de la expresión anterior para la probabili-

dad de ruina, sustituycamos  $\phi_i(u) = 1 - \psi_i(u)$  en (3.20),

$$\begin{aligned}
\psi_i(t) - \psi_i(0) + \frac{1}{2}\sigma_i^2(\psi_i'(t) - \psi_i'(0)) \\
&= -(\lambda_i + q_i) \int_0^t [1 - \psi_i(u)] du + q_i \sum_{j \neq i} p_{ij} \int_0^t [1 - \psi_j(u)] du \\
&\quad + \lambda_i \int_0^t \int_0^u [1 - \psi_i(u - y)] dG_i(y) du \\
&= \lambda_i \int_0^t \psi_i(t - y) [1 - G_i(y)] dy + q_i \int_0^t [\psi_i(u) - \sum_{j \neq i} p_{ij} \psi_j(u)] du \\
&\quad - \lambda_i \int_0^t [1 - G_i(u)] du. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se da ya que

$$\begin{aligned}
\lambda_i \int_0^t \int_0^u [1 - \psi_i(u - y)] dG_i(y) du = \lambda_i \int_0^t [1 - \psi_i(u)] du \\
+ \lambda_i \int_0^t [1 - \psi_i(t - y)] [1 - G_i(y)] dy.
\end{aligned}$$

Si tomamos el límite cuando  $t$  tiende a infinito en (3.21) obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales para la probabilidad de ruina

$$\begin{aligned}
\psi_i'(0) = \frac{2}{\sigma_i^2} (1 - \psi_i(0) - q_i \int_0^\infty [\psi_i(u) - \sum_{j \neq i} p_{ij} \psi_j(u)] du \\
+ \lambda_i \int_0^\infty [1 - G_i] dy). \tag{3.22}
\end{aligned}$$

### Transformada de Laplace

Ya que tenemos el sistema de ecuaciones, hay que buscar un método para resolverlo, para esto Gu y Li [4] aplican la transformada de Laplace. En seguida mostraremos el procedimiento seguido por ellos. Definamos a las transformadas de Laplace para  $G_i$  y  $\psi_i(u)$  como  $\hat{g}_i = \int_0^\infty e^{-su} G_i(u) du$  y  $\hat{\psi}_i(u) = \int_0^\infty e^{-su} \psi_i(u) du$  respectivamente. Aplicando la transformada de

Laplace en (3.21) se obtiene,

$$\begin{aligned} s\hat{\psi}_i(s) - \psi_i(0) + \frac{1}{2}\sigma_i^2[s^2\hat{\psi}_i(s) - \psi_i'(0) - s\psi(0)] \\ = (\lambda_i + q_i)\hat{\psi}_i(s) - q_i \sum_{j \neq i} p_{ij}\hat{\psi}_i(s) - \lambda_i\hat{\psi}_i(s) - \frac{\lambda_i}{s} + \frac{\lambda_i}{s}\hat{g}_i(s). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Que es equivalente a,

$$\begin{aligned} [s + \frac{1}{2}\sigma_i^2 - (\lambda_i + q_i) + \lambda_i s\hat{g}_i(s)]\hat{\psi}_i(s) + q_i \sum_{j \neq i} p_{ij}\hat{g}_j(s) \\ = \psi_i(0)[\frac{s}{2}\sigma_i^2 + 1] + \frac{1}{2}\sigma_i^2\psi_i'(0) - \frac{\lambda_i}{s} + \frac{\lambda_i}{s}\hat{g}_i(s). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Definamos a

$$f_i(s) = s + \frac{1}{2}\sigma_i^2 s^2 - (\lambda_i + q_i) + \lambda_i\hat{g}_i(s), \quad (3.25)$$

$$h_i(s) = (1 + \frac{1}{2}\sigma_i^2 s)\psi_i(0) + \frac{1}{2}\sigma_i^2\psi_i'(0) - \frac{\lambda_i}{s} + \frac{\lambda_i}{s}\hat{g}_i(s) \quad (3.26)$$

de manera que podamos expresar a la Ecuación (3.24) como,

$$\begin{cases} f_1(s)\hat{\psi}_1(s) + q_{12}\hat{\psi}_2(s) + \dots + q_{1d}\hat{\psi}_d(s) = h_1(s) \\ q_{21}(s)\hat{\psi}_1(s) + f_2(s)\hat{\psi}_2(s) + \dots + q_{2d}\hat{\psi}_d(s) = h_2(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{d1}(s)\hat{\psi}_1(s) + q_{d2}\hat{\psi}_2(s) + \dots + f_d(s)\hat{\psi}_d(s) = h_d(s). \end{cases} \quad (3.27)$$

De forma matricial (3.27) se escribe como  $A(s)\hat{\psi}(s) = \mathbf{g}(s)$ . Donde

$$A(s) = \begin{pmatrix} f_1(s) & q_{12} & \dots & q_{1d} \\ q_{21} & f_2(s) & \dots & q_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{d1} & q_{d2} & \dots & f_d(s) \end{pmatrix},$$

$$\hat{\psi}(s) = (\hat{\psi}_1(s), \hat{\psi}_2(s), \dots, \hat{\psi}_d(s))^T \text{ y } \mathbf{h}(s) = (h_1(s), h_2(s), \dots, h_d(s))^T.$$

**Probabilidad de ruina**  $\psi(u)$ 

Los sistemas de ecuaciones (3.21) y (3.22) definen a las probabilidades de ruina dado el  $i$ -ésimo estado inicial. Ahora para encontrar  $\psi(u) = \sum_{i \in E} \pi_i \psi_i(u)$  ponderamos la expresión (3.21) por la distribución estacionaria  $\pi_i$  del proceso ambiental, de manera que obtenemos

$$\begin{aligned}
& \psi(t) - \psi(0) + \frac{1}{2} \sum_{i \in E} \pi_i \sigma_i^2 (\psi'_i(t) - \psi'_i(0)) \\
&= \sum_{i \in E} \pi_i \lambda_i \int_0^t \psi_i(t-y) [1 - G_i(y)] dy \\
&\quad + \sum_{i \in E} \pi_i q_i \int_0^t [\psi_i(u) - \sum_{j \neq i} p_{ij} \psi_j(u)] du - \sum_{i \in E} \pi_i \lambda_i \int_0^t [1 - G_i(y)] dy \\
&= \sum_{i \in E} \pi_i \lambda_i \int_0^t \psi_i(t-y) [1 - G_i(y)] dy - \sum_{i \in E} \pi_i \lambda_i \int_0^t [1 - G_i(y)] dy. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Y nuevamente tomando el límite cuando  $t$  crece a infinito,

$$\psi(0) + \frac{1}{2} \sum_{i \in E} \pi_i \sigma_i^2 \psi'_i(0) = \sum_{i \in E} \pi_i \lambda_i \int_0^\infty [1 - G_i] dy. \quad (3.29)$$

De manera que la probabilidad de ruina absoluta esta dada por las ecuaciones (3.28) y (3.29).

**Ejemplo 3.2.2.** Para concluir esta sección trabajemos con un ejemplo sencillo. Consideremos un cadena de Markov con espacio de estados  $E = \{1, 2\}$ . Sean  $Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_1 \\ q_2 & -q_2 \end{pmatrix}$  su generador infinitesimal y  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  su matriz de saltos. Supongamos que la distribución de las reclamaciones es exponencial con parámetro  $\theta_i$ . Entonces su distribución estacionaria es  $\pi = (\frac{q_2}{q_1+q_2}, \frac{q_1}{q_1+q_2})$ .

Adicionalmente veamos que  $\hat{g}_i = \frac{\theta_i}{\theta_i + s}$ , así que el sistema de ecuaciones para la probabilidad de ruina queda como

$$\begin{aligned}
& [s + \frac{1}{2}\sigma_1^2 s^2 - (\lambda_1 + q_1) + \lambda_1 \frac{\theta_1}{\theta_1 + s}] \hat{\psi}_1(u) + q_1 \psi_2(u) \\
& \quad = (1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 s) \psi_1(0) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \psi_1'(0) - \frac{\lambda_1}{s} + \frac{\lambda_1}{s} \frac{\theta_1}{\theta_1 + s} \\
& [s + \frac{1}{2}\sigma_2^2 s^2 - (\lambda_2 + q_2) + \lambda_2 \frac{\theta_2}{\theta_2 + s}] \hat{\psi}_2(u) + q_2 \psi_1(u) \\
& \quad = (1 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 s) \psi_2(0) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \psi_2'(0) - \frac{\lambda_2}{s} + \frac{\lambda_2}{s} \frac{\theta_2}{\theta_2 + s}.
\end{aligned}$$

En la presente sección nos encontramos con la dificultad de encontrar soluciones exactas de las probabilidades de ruina a pesar de contar con sistemas de ecuaciones diferenciales, así que en el siguiente capítulo exploraremos otra alternativa para aproximar estas soluciones.

# Capítulo 4

## Simulación

Al no contar con expresiones explícitas para obtener la probabilidad de ruina más que para un número limitado de casos del Modelo (3.2), recurrimos a la simulación utilizando el software R. Con esta herramienta analizamos el comportamiento del modelo de riesgo bajo diversos supuestos con la finalidad de compararlos y determinar que tanto impactan cada una de las modificaciones al comportamiento del capital de la compañía aseguradora y evaluar si es importante considerarlas.

Una de las limitantes de la simulación es la imposibilidad de calcular las probabilidades de ruina para un horizonte infinito de tiempo por lo que generalmente se busca un tiempo  $T$  a partir del cual se comienzan a estabilizar los resultados y consecuentemente se empiezan a ver comportamientos parecidos a los del tiempo límite. Particularmente para la función RuinaMMD la elección del tiempo límite también dependió del tiempo de ejecución del programa ya que para una  $T$  muy grande la lentitud del programa limitaba el número de iteraciones a realizar. Es importante mencionar que a pesar de que la  $T$  elegida puede no ser la óptima, fue constante bajo los distintos supuestos de manera que la comparación de resultados no se viera afectada por la variación de ésta.

### 4.1. Resultados comparativos

Los resultados que se presentan a continuación se obtuvieron con los programas incluidos en los Anexos. Para poder comparar los resultados obtenidos, todas las simulaciones son modificaciones del caso "base" que se presen-

tará enseguida.

#### Ejemplo 4.1.1. (Ejemplo base)

El modelo modulado de Markov con difusiones y saltos con el que trabajamos en este documento fue pensado con el objetivo de representar al capital de una compañía aseguradora a través del tiempo, nuestro ejemplo seguirá la misma dirección.

Supongamos que la compañía aseguradora supone tres posibles escenarios entre los cuales puede cambiar aleatoriamente en distintos momentos del tiempo. El escenario 1 es el más negativo, los siniestros son muy frecuentes, las reclamaciones muy grandes y las primas que recibe por parte de los asegurados son mínimas, además existe mucha incertidumbre sobre factores externos que puedan afectar directamente a la compañía. En contraste, en el escenario 3 las condiciones son óptimas, es decir, las reclamaciones son pequeñas y poco frecuentes, no hay muchos factores desconocidos que impactan al capital y las primas recibidas son grandes. El escenario 2 es un escenario con condiciones intermedias entre los otros dos. Cada uno de los escenarios, jugará el papel de un estado en el espacio de estados  $E = \{1, 2, 3\}$  de la cadena externa de Markov, la cual tendrá al generador infinitesimal presentado en el Ejemplo 2.1.1,

$$Q = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.35 & 0.15 \\ 0.05 & -0.5 & 0.45 \\ 0.4 & 0.1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

con su correspondiente distribución estacionaria

$$\pi = (82/251, 76/251, 93/251).$$

Con lo anterior en cuenta, y suponiendo que los tamaños de las reclamaciones tienen una distribución exponencial de parámetro  $\mu_i$ , el ejemplo base tendrá los siguientes parámetros:

Estado	$\lambda_i$	$\mu_i$	$c_1$	$\sigma_i$
1	1.5	0.75	2.5	4
2	1	0.5	3	1
3	0.8	0.4	3.5	0.5

Tabla 4.1: Definición de parámetros para el caso base.

En la realidad, es poco probable que haya únicamente tres escenarios y más aún, que las diferencias entre las condiciones en cada uno de estos estén tan marcadas, sin embargo se eligieron de esta manera para que los resultados fueran más ilustrativos sobre el impacto de cada uno de los parámetros sobre el capital de la compañía.

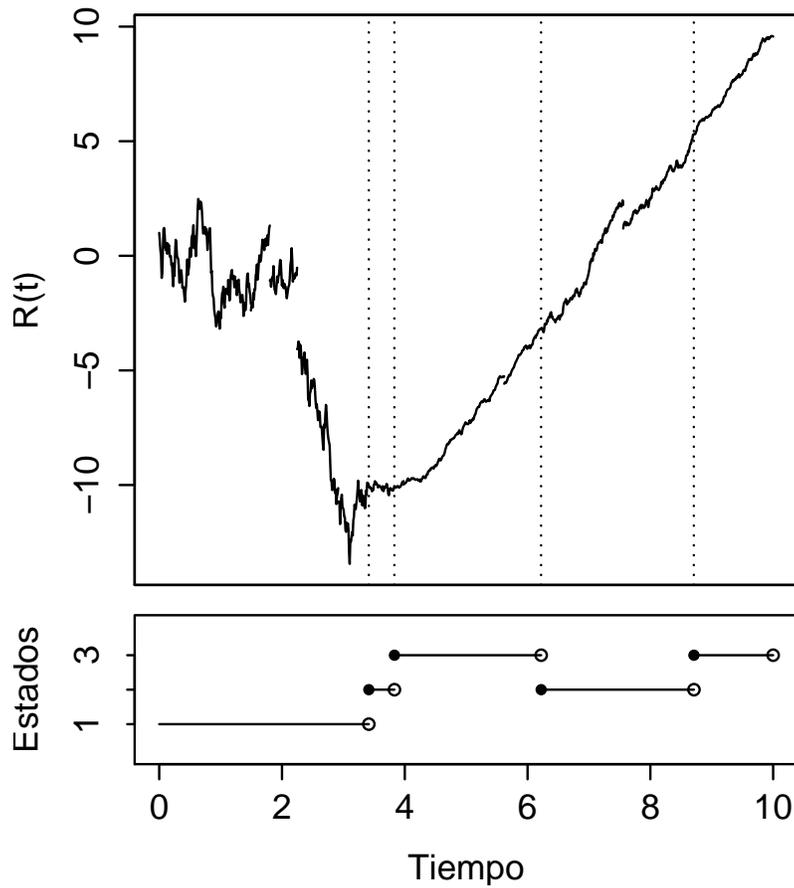


Figura 4.1: Trayectoria de un proceso de riesgo modulado de Markov con los parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1 con estado inicial  $J_0 = 1$ .

### Condición de ganancia neta

Antes de comenzar con cualquier cálculo, verifiquemos que para los parámetros dados en la Tabla 4.1 en efecto se cumple la condición de ganancia neta (1.9), ya que en caso contrario no tendría sentido hacer ningún tipo de análisis de la probabilidad de ruina. Con los valores dados anteriormente, tenemos que

$$c = \sum_{i \in E} \pi_i c_i = 2.94 \quad \text{y} \quad \lambda\mu = \sum_{i \in E} \pi_i \lambda_i \mu_i = 2.22.$$

Por lo tanto,

$$c > \lambda\mu.$$

### Probabilidad de ruina dado el estado inicial

Recordemos que la probabilidad de ruina  $\psi(u)$  es un promedio ponderado de las probabilidades de ruina  $\psi_i(u)$ , lo que hace fundamental su análisis de manera individual. En este apartado, utilizando los resultados obtenidos de la simulación de la probabilidad de ruina del Ejemplo 4.1.1 veremos la dependencia que tiene la probabilidad de ruina del estado inicial. La última columna de la Tabla 4.2 se obtuvo considerando a la distribución estacionaria obtenida en el Ejemplo 4.1.1 y utilizando la fórmula (3.5).

Iteraciones	$\psi_1(1)$	$\psi_2(1)$	$\psi_3(1)$	$\psi(1)$
10	0.7	0.2	0.2	0.3633
50	0.68	0.18	0.24	0.3656
100	0.67	0.14	0.2	0.3354
500	0.648	0.162	0.236	0.3482
1000	0.664	0.145	0.214	0.3428

Tabla 4.2: Resultados de la simulación de la probabilidad de ruina para un proceso de riesgo con difusiones con  $T=25$  y parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1.

En la Tabla 4.1 encontramos que  $\psi_2(1) < \psi_3(1) < \psi_1(1)$ . Curiosamente se tiene que a pesar de que los parámetros del modelo para el estado 2 son

"peores", por ejemplo reclamaciones más frecuentes y con montos promedios mayores, que para el estado 2 la ruina dado éste último como estado inicial es más probable. Dicho comportamiento puede ser atribuido a que la probabilidad de transición  $p_{31}$  es muy alta, lo cual ocasiona que las trayectorias comenzadas en el estado 3 rápidamente pasen al estado 1 en el cual la probabilidad de ruina es mayor.

Para comprobar lo anterior, se simuló el mismo proceso de riesgo bajo distintas probabilidades de salto para el estado 3 disminuyendo la probabilidad  $p_{13}$ . La matriz de saltos que se utilizó fue

$$P = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.35 & 0.15 \\ 0.05 & -0.5 & 0.45 \\ 0.3 & 0.7 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Los resultados obtenidos, que se muestran en la Tabla 4.3, ilustran la relevancia que tienen las probabilidades de transición en la probabilidad de ruina, ya que en este caso se tiene  $\psi_3(1) < \psi_2(1) < \psi_1(1)$ .

Iteraciones	$\psi_1(1)$	$\psi_2(1)$	$\psi_3(1)$	$\psi(1)$
10	0.5	0.1	0.1	0.1669
50	0.7	0.09	0.06	0.1795
100	0.6	0.14	0.1	0.1415
500	0.662	0.106	0.098	0.1957
1000	0.665	0.113	0.086	0.1941

Tabla 4.3: Resultados de la simulación de la probabilidad de ruina para un proceso de riesgo con difusiones con  $T=25$ , parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1 y la matriz de saltos anterior.

La Figura 4.2 ilustra el comportamiento de las trayectorias del modelo bajo los distintos estados iniciales de manera que se refleje el impacto que tiene el estado inicial en el comportamiento de la trayectoria completa.

Para concluir el análisis del Ejemplo 4.1.1, profundicemos un poco más en el análisis de los parámetros para cada uno de los estados.

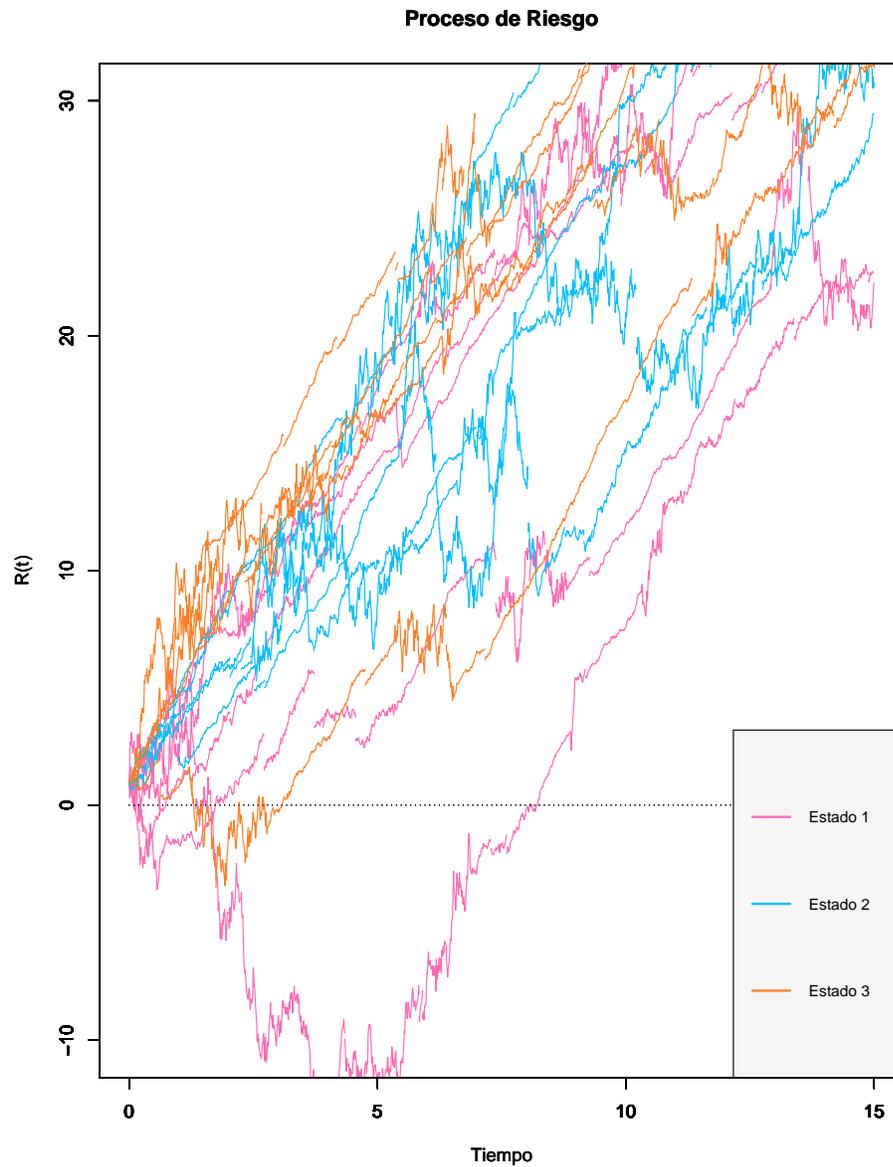


Figura 4.2: Trayectorias de un proceso de riesgo modulado de Markov con difusiones utilizando los parámetros del Ejemplo 4.1.1 y cambiando el estado inicial.

### 4.1.1. Ajuste del modelo

Antes de continuar explotando el código para la simulación del modelo de riesgo modulado de Markov con difusiones, es importante verificar el ajuste de éste.

Aún cuando no se conoce el valor exacto del resultado arrojado por la simulación, en este caso la probabilidad de ruina, es importante evaluar el comportamiento del proceso con el fin de asegurarnos que al menos arroje resultados consistentes entre ellos.

Para esto generamos una muestra de probabilidades de ruina, para 100 iteraciones, a partir de la cual se genera un intervalo de confianza. La media muestral y la varianza fueron de

$$\mu = 0.3429 \quad \sigma = 0.0005.$$

Con lo cual se obtiene el intervalo para el 95 % de confianza

$$(0.3359, 0.3500).$$

Veamos como a pesar de haber utilizado un número reducido de iteraciones el intervalo obtenido es de tamaño relativamente corto, lo cual apoya el buen ajuste del modelo. Y adicionalmente se sustenta por la baja desviación que hay dentro de la muestra.

Por último para verificar que el intervalo en efecto es adecuado, se realizaron 5 simulaciones con 1000 iteraciones (Tabla 4.4) y se comprobó que en efecto caen dentro del intervalo encontrado.

	1	2	3	4	5
$\psi(1)$	0.3375	0.3428	0.3425	0.3366	0.3501

Tabla 4.4: Resultados obtenidos de la simulación de la probabilidad de ruina de un proceso de riesgo modulado de Markov con difusiones de parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1 y  $T=25$  realizando 1000 iteraciones.

Como ya vimos la elección de 100 iteraciones no es óptima, sin embargo se eligió así por rapidez computacional. Es importante mencionar que todos los demás resultados incluidos en la presente sección se obtuvieron bajo 1000 iteraciones.

### Impacto de los parámetros en el comportamiento del modelo

Ahora, para tener una referencia de las diferentes condiciones en cada uno de los estados, simulamos tres procesos de riesgo independientes entre si y sin modulado de Markov, o sea sin posible cambio de estado. Para cada uno de estos se tomaron los parámetros correspondientes al  $i$ -ésimo estado del Ejemplo 4.1.1. Denotemos con  $\psi^i(u)$  a las correspondientes probabilidades de ruina, en la Tabla 4.5 aparecen los resultados de simular dichos procesos para un capital inicial  $u = 1$  y un tiempo límite  $T = 25$ .

Iteraciones	$\psi^1(1)$	$\psi^2(1)$	$\psi^3(1)$
10	0.9	0	0
50	0.78	0.02	0.01
100	0.81	0.04	0
500	0.816	0.038	0.014
1000	0.811	0.061	0.006

Tabla 4.5: Resultados obtenidos de la simulación de la probabilidad de ruina de un proceso de riesgo con difusiones de parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1 y  $T=25$ .

Los resultados contenidos en la Tabla 4.1.1 muestran que la probabilidad de ruina es mayor para el estado 1 que para los otros dos estados, confirmando la intuición de que a mayor frecuencia de reclamaciones, mayores montos promedios de éstas, menores primas y mayor difusión es más alto el riesgo de arruinarse. Además al comparar estos resultados con las probabilidades de ruina dado el estado inicial (Tabla 4.2) y ver que se invierte el orden de las probabilidades para los estados 2 y 3, resalta la relevancia del impacto que tienen las probabilidades de saltos de un estado a otro sobre el comportamiento del proceso de riesgo gobernado por una cadena de Markov.

Una vez analizada la influencia del modulado de Markov sobre el proceso de riesgo, veamos como las difusiones lo alteran.

### Modelo con difusión vs. modelo sin difusión

La primera inquietud que surge al agregarle difusiones al modelo es entender que tan fuerte es el impacto de la volatilidad en la probabilidad de

ruina. Tomando en cuenta que  $\phi(u) = \phi_s(u) + \phi_d(u)$ , utilizando los mismos parámetros simulamos una serie de procesos con y sin difusión. En la Tabla 4.6 se presentan los resultados obtenidos.

Iteraciones	$\psi(1)$		$\psi_d(1)$
	Sin difusión	Con difusión	
10	0.1327	0.3633	0.2306
50	0.0718	0.3656	0.2938
100	0.0841	0.3354	0.2513
500	0.0725	0.3482	0.2757
1000	0.0656	0.3375	0.2719

Tabla 4.6: Resultados comparativos de la simulación de la probabilidad de ruina de un proceso modulado de Markov con difusión vs. uno sin difusión utilizando los parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1 para  $T=25$ .

Veamos como en el modelo con difusiones la probabilidad de ruina aumenta considerablemente en relación a los resultados para el caso sin difusión. Esto concuerda con la intuición de que al agregarle un proceso que refleje un conjunto de efectos desconocidos que impacten a nuestro proceso, aumenta la incertidumbre del comportamiento del modelo y por lo tanto aumenta la probabilidad de que el capital de la compañía disminuya sin motivo aparente. En el proceso sin difusiones las reclamaciones son las únicas posibles causantes de ruina, por lo tanto para el modelo con difusiones, la diferencia entre la probabilidad de ruina del modelo completo menos la probabilidad de ruina del modelo sin difusiones será la probabilidad de que la ruina sea causada por la oscilación del proceso. Ésta se presenta en la última columna de la Tabla 4.6.

## Incrementando la volatilidad de la difusión

En [2], Bauerle y Kotter encontraron que en el modelo clásico con difusión la probabilidad de ruina aumenta conforme aumenta la volatilidad. Es decir, suponiendo que  $\sigma \leq \sigma'$ , entonces  $\psi(u) \leq \psi(u)'$  donde  $\psi(u)$  es la probabilidad de ruina de  $R_t$  en el modelo (3.2). Como complemento a dicho resultado, veamos en la Tabla 4.7 que la misma desigualdad se sigue cumpliendo aún

cuando  $d \geq 1$ . Los encabezados del primer renglón se refieren a las modificaciones que se realizaron sobre el caso base. Por ejemplo, los resultados en la segunda columna corresponden a la simulación del proceso usando los parámetros del caso base con la única modificación sobre la varianza de la difusión en el estado 1 cambiándola de  $\sigma_1 = 4$  a  $\sigma_1 = 6$ .

Iteraciones	$\psi(0)$				
	Caso base	$\sigma_1 = 6$	$\sigma_2 = 2$	$\sigma_3 = 1$	$\sigma_1 = 6, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 1$
$\psi_1(1)$	0.3375	0.4525	0.3995	0.3471	0.5016
$\psi_2(1)$	0.683	0.8	0.686	0.669	0.798
$\psi_3(1)$	0.133	0.252	0.321	0.159	0.365
$\psi(1)$	0.2	0.31	0.211	0.217	0.352

Tabla 4.7: Resultados comparativos de la simulación de la probabilidad de ruina de un proceso modulado de Markov bajo distintas varianzas de la difusión y utilizando los parámetros definidos en el Ejemplo 4.1.1 para  $T=25$ .

## Modelo con parámetros promedio

Además del análisis comparativo de la probabilidad de ruina incrementando la volatilidad de la difusión, Bauerle y Kotter [2] compararon las probabilidades de ruina del proceso con modulado de Markov y difusiones contra las de un proceso conformado por el promedio de los parámetros. Es decir, toman  $\lambda^* = \sum_{i=1}^d \pi_i \lambda_i$  como la intensidad de el proceso poisson  $N^* = \{N_t\}_{t \geq 0}$ . Y suponen que las reclamaciones  $Y_1^*, Y_2^* \dots$  son independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $G^* = \sum_{i=1}^d \frac{\pi_i \lambda_i}{\lambda^*} G_i$  y la volatilidad promediada es  $\sigma^{*2} = \sum_{i=1}^d \pi_i \sigma_i^2$  para obtener el proceso

$$R_t^* = u + t - \sum_{k=1}^{N_t^*} Y_k^* + \sigma^* W_t. \quad (4.1)$$

En [2] concluyen que

$$\psi^*(u) \leq \psi(u)$$

para todo  $u$ . Donde  $\psi^*(u)$  es la probabilidad de ruina del modelo (4.1).

Para verificar este resultado, se simularon ambos procesos y se compararon las probabilidades de ruina. Los parámetros que se obtuvieron promediando con la probabilidad estacionaria son

$\lambda^*$	$\mu^*$	$c^*$	$\mu^*$
1.0892	0.5446	3.0219	2.3712

Tabla 4.8: Parámetros promedio del Ejemplo 4.1.1.

Observando los resultados presentados en la Tabla 4.9 se ve como en efecto cumple con la condición anterior para  $u = 1$ .

Iteraciones	$\psi(1)$	
	Ejemplo Base	Promedio
10	0.3633	0.5
50	0.3656	0.4
100	0.3354	0.34
500	0.3482	0.43
1000	0.3375	0.407

Tabla 4.9: Resultados de la simulación de la probabilidad de ruina para un proceso de riesgo con difusiones utilizando los parámetros promedio presentados en la Tabla 4.8 para  $T=25$ .

## Estado en el que sucede la ruina

Una vez que se identifica el riesgo de incurrir en ruina al que esta expuesto una compañía, a esta le interesa conocer en que momento se encuentra más vulnerable. Uno de los beneficios de utilizar un modelo modulado de Markov, es que al particionar el proceso en distintos escenarios, consecuentemente se particiona la probabilidad de ruina. De manera que es posible determinar en cual de los estados es más probable que suceda la ruina. En la tabla que aparece a continuación se incluyen los resultados de la simulación del proceso con los parámetros del Ejemplo 4.1.1.

Veamos que para todos los estados la ruina es más probable que ocurra en el estado inicial que en cualquiera de los otros. Una de las causas puede

Iteraciones		$J_0 = 1$	$J_0 = 2$	$J_0 = 3$	$\psi(1)$
10	$\psi_i(1)$	0.7	0.2	0.2	0.3633
	$J_\tau = 1$	1	0.5	1	
	$J_\tau = 2$	0	0	0	
	$J_\tau = 3$	0	0.5	0	
50	$\psi_i(1)$	0.68	0.18	0.24	0.3656
	$J_\tau = 1$	0.9796	0.6667	1	
	$J_\tau = 2$	0.0294	0.3333	0	
	$J_\tau = 3$	0	0	0	
100	$\psi_i(1)$	0.67	0.14	0.2	0.3354
	$J_\tau = 1$	1	0.43	0.9	
	$J_\tau = 2$	0	0.57	0.05	
	$J_\tau = 3$	0	0	0.05	
500	$\psi_i(1)$	0.648	0.162	0.236	0.3482
	$J_\tau = 1$	0.99	0.7284	0.9676	
	$J_\tau = 2$	0.1	0.2716	0.0169	
	$J_\tau = 3$	0	0	0.0255	
1000	$\psi_i(1)$	0.683	0.133	0.2	0.3375
	$J_\tau = 1$	0.9898	0.609	0.91	
	$J_\tau = 2$	0.0102	0.3835	0.02	
	$J_\tau = 3$	0	0.0075	0.07	

Tabla 4.10: Resultados de la simulación de la probabilidad de arruinarse en el  $i$ -ésimo estado para un proceso de riesgo modulado de Markov con  $T = 25$  utilizando los parámetros del Ejemplo 4.1.1.

ser que el capital inicial del proceso es muy cercano al límite de la ruina y como en los primeros instantes no se ha incrementado lo suficiente, cualquier reclamación en esos momentos genera una ruina.

# Conclusiones

Partiendo del modelo de clásico de riesgo de Cramer-Lundberg se presentaron todos los conceptos relacionados con la teoría de ruina. Posteriormente se agregaron los supuestos de un proceso modelando el ambiente en el que se desarrolla el proceso así como un proceso de difusión modelando la volatilidad con la finalidad de tener un modelo que se asemeje más a la realidad.

Además se desarrollo un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas para expresar a la probabilidad de ruina, que se puede expresar de forma matricial tras aplicarle la transformada de Laplace.

Al no encontrar ninguna solución explícita utilizando las ecuaciones, se procedió a buscar soluciones numéricas para la probabilidad de ruina por medio de la simulación del proceso de riesgo. Analizando los resultados obtenidos se encontró que la volatilidad incrementa el riesgo de insolvencia y que agregar el proceso ambiental permite de cierta manera particionar el modelo en distintos escenarios y evaluar el comportamiento del modelo bajo distintas combinaciones de parámetros.

Queda como proyecto futuro realizar una evaluación profunda del alcance del modelo en reflejar la realidad tomando datos históricos de alguna aseguradora y midiendo el ajuste del modelo. Además de buscar una solución explícita para el sistema de ecuaciones diferenciales que pueda ser utilizada para calibrar el modelo, en lugar de la solución del modelo clásico que fue usada.



# Apéndice A

## Código en R

Los primeros dos códigos muestran la simulación del Proceso Poisson Homogeneo y del Proceso Poisson Compuesto.

```
# Funcion para generar un Proceso Poisson  
# Homogeneo donde lambda es la intensidad del  
# proceso y T es # el horizonte de tiempo que  
# se desea simular.
```

```
PPH<-function(lambda,T){  
  n=0  
  t=-log(runif(1))/lambda  
  while (t<T){  
    n<-n+1  
    t<- t-log(runif(1))/lambda  
  }  
  return (n)  
}
```

```
# Funcion para generar un Proceso Poisson  
# Compuesto con intensidad lambda, donde las  
# v.a. Yi se distribuyen Exponencial de  
# parametro lambdaExp.
```

```
PPC<-function(lambda,T, lambdaExp){  
  n=0  
  t=-log(runif(1))/lambda  
  while (t<T){  
    n<-n+1
```

```

    t<- t-log(runif(1))/lambda
  }
  X<-sum(rexp(n,lambdaExp))
  return (X)
}

```

El Modelo de Cramer-Lundberg se simuló utilizando el siguiente código.

```

# Funcion para generar un modelo de Cramer
# Lundberg suponiendo que las reclamaciones se
# distribuyen exponencialmente con parametro
# lambdaExp.

```

```

CL<-function(lambda,T, lambdaExp){
  n=0
  t=-log(runif(1))/lambda
  while (t<T){
    n<-n+1
    t<- t-log(runif(1))/lambda
  }
  X<-sum(rexp(n,lambdaExp))
  return (X)
}

```

El siguiente código fue el que se utilizó para generar el proceso de saltos de Markov.

```

# Funcion para generartiempos de salto de una
# cadena de Markov Continua donde d es la
# distribucion inicial, Q es el generador
# infinitesimal y T es el horizonte de tiempo.

```

```

CMC<-function(d,Q,T){
  n<-0 # numero de saltos
  t<-c(0) # tiempo de los saltos
  y<-c(0) # proceso de saltos discreto
  l<-ncol(Q) # numero de estados
  J<-c(0) # tiempo del i-esimo salto
  i<-sample(1:l, size=1, prob=d, replace=T)
  y[1]<-i

```

```

t=log(runif(1))/(Q[i,i])
while(t<T){
  n<-n+1
  J[n]<-t
  r<-runif(1)
  p<-0
  j<-0
  while(p<r){
    j<-j+1
    if(i!=j){
      p<-p+Q[i,j]/(-Q[i,i])
    }
  }
  i<-j
  y[n+1]<-j
  t<-t+log(runif(1))/(Q[i,i])
}
return(list(J,y))
}

```

El último código es una función para simular el proceso de riesgo modulado de Markov con difusiones y saltos dentro de el cual se hace uso del proceso de saltos de Markov presentado arriba. Para simular la difusión se utilizó el paquete "sde" así como la función con el mismo nombre. En la función RiesgoMMD se supone que la distribución del tamaño de las reclamaciones es exponencial, sin embargo es posible cambiarla por alguna otra distribución. También es posible modificar el número de estado de la cadena de Markov, cuidando de mantener el número correcto de parámetros.

```

# Funcion para simular la probabilidad de ruina
# de un proceso de riesgo modulado de Markov con
# difusiones y saltos para 2 o 3 estados. En
# este caso hay 3 valores para cada parametro
# ya que cada uno corresponde a un estado
# distinto de la cadena externa de Markov. sg
# es la varianza de la difusion.

```

```

library(zoo)
library(sde)

```

```
RuinaMMD<-function(lambdaPP1 , lambdaPP2 ,
lambdaPP3 , tiempo , lambdaExp1 , lambdaExp2 ,
lambdaExp3 , u , c1 , c2 , c3 , sg1 , sg2 , sg3 , d1 , Q , m){
  p=0
  er<-c()
  tr<-c()
  for(j1 in 1:m){
    pa<-p
    g<-CMC(d1 , Q , tiempo)
    J<-g[[1]]
    y<-g[[2]]
    N<-length(y)
    R<-c()
    S<-list()
    X<-list()
    Y<-list()
    D<-zoo()
    E<-zoo()
    A<-c()
    t<-0
    U<-c()
    if(y[1]==1){
      lambdaPP<-lambdaPP1
      c<-c1
      lambdaExp<-lambdaExp1
      sg<-sg1
    }
    if(y[1]==2){
      lambdaPP<-lambdaPP2
      c<-c2
      lambdaExp<-lambdaExp2
      sg<-sg2
    }
    if(y[1]==3){
      lambdaPP<-lambdaPP3
      c<-c3
      lambdaExp<-lambdaExp3
    }
  }
}
```

---

```
    sg<-sg3
  }
  t=(-log(runif(1))/lambdaPP)
  n=0
  y1<-c()
  s<-c()
  x<-c()
  while(t<J[1]){
    n<-n+1
    s[n]<-t
    t<-t-log(runif(1))/lambdaPP
  }
  S[[1]]<-s
  s[n+1]<-J[1]
  if(length(s)==1){
    y1<-c(0)
    x<-c(0)
  } else{
    y1<-rexp(n, lambdaExp)
    x<-cumsum(y1)}
  t1<-0
  d1<-u
  error<-0
  x<-c(0,x)
  for(k1 in 1:length(s)){
    if((s[k1]-t1)<.01){s[k1]=.01+t1+error}
    else{s[k1]=s[k1]+error}
    d<-sde.sim(t0=t1,X0=d1,delta=.01,
              N=(s[k1]-t1)*100,
              drift=expression(0),
              sigma=as.expression(sg))
    td<-time(d)
    t1<-td[length(td)]
    error<-s[k1]-t1
    e<-d+c*td-x[k1]
    d1<-d[length(d)]
    if(all (e>=0)){p=p}
    else{p=p+1
```

```

        er[p]=y[1]
        for(i in 1:length(e)){
            if(e[i]<0){tr[p]=td[i]}
        }
        break}
D<-merge(D,zoo(d))
E<-merge(E,zoo(e))
R<-c(R,as.numeric(e))
}
if(pa<p){next}
Ud<-c(u,d1)
Uc<-c(u,e[length(e)]-d1)
Y[[1]]<-y1
if(N>1){
    for(k in 2:N){
        T1<-td[length(td)]
        if(y[k]==1){
            lambdaPP<-lambdaPP1
            c<-c1
            lambdaExp<-lambdaExp1
            sg<-sg1
        }
        if(y[k]==2){
            lambdaPP<-lambdaPP2
            c<-c2
            lambdaExp<-lambdaExp2
            sg<-sg2
        }
        if(y[k]==3){
            lambdaPP<-lambdaPP3
            c<-c3
            lambdaExp<-lambdaExp3
            sg<-sg3
        }
        if(k==N){J[N]<-tiempo}
        t=(-log(runif(1))/lambdaPP)+T1
        n=0
        y1<-c()
    }
}

```

---

```

s<-c()
x<-c()
while(t<J[k]){
  n<-n+1
  s[n]<-t
  t<-t-log(runif(1))/lambdaPP
}
S[[k]]<-s
s[n+1]<-J[k]
if(length(s)==1){
  y1<-c(0)
  x<-c(0)
} else{
  y1<-rexp(n,lambdaExp)
  x<-cumsum(y1)}
x<-c(0,x)
for(k2 in 1:length(s)){
  if((s[k2]-t1)<.01){s[k2]=.01+t1+error}
  else{s[k2]=s[k2]+error}
  d<-sde.sim(t0=t1,X0=d1,delta=.01,
             N=(s[k2]-t1)*100,
             drift=expression(0),
             sigma=as.expression(sg))
  td<-time(d)
  t1<-td[length(td)]
  error<-s[k2]-t1
  e<-d+c*(td-T1)-x[k2]+(Uc[length(Uc)])
  d1<-d[length(d)]
  if(all(e>=0)){p=p}
  else{p=p+1
       er[p]=y[k]
       for(i in 1:length(e)){
         if(e[i]<0){tr[p]=td[i]}
       }
       break}
  D<-merge(D,zoo(d))
  E<-merge(E,zoo(e))
  R<-c(R,as.numeric(e))

```

```

    }
    if (p>pa){break}
    Ud<-c(Ud,d1)
    Uc<-c(Uc,e[length(e)]-d1)
    Y[[k]]<-y1
  }
}
}
r1=0
r2=0
r3=0
if(length(er>0)){
for(j in 1:p){
  if(er[j]==1){r1=r1+1}
  if(er[j]==2){r2=r2+1}
  if(er[j]==3){r3=r3+1}
}}
return(list(p/m,r1/p,r2/p,r3/p,tr))
}

```

La función RuinaMMD regresa la probabilidad de ruina dado un determinado número de iteraciones  $m$ , un horizonte de tiempo  $T$  y un estado inicial  $d1$ . Adicionalmente calcula las probabilidades de que la ruina suceda en cada uno de los estados.

# Bibliografía

- [1] Asmussen, S. & Albrecher, H. (2010). *Ruin Probabilities Vol 14 of Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability*. Singapur, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [2] Bauerle, N. & Kotter, M. (2007). Markov modulated diffusion risk models. *Scandinavian Actuarial Journal*, 34-55.
- [3] Gu, C., Li, S. & Zhou, B. (2009). Ruin probabilities for Markov-modulated jump-diffusion risk model. Proceeding of International Conference on Engineering Management and Service Sciences, 2009.
- [4] Gu, C. & Li, S. (2015). Ruin probabilities for Markov-modulated jump-diffusion risk model. *Acta Mathematicatae Applicatae Sinica* **38**, 775-786.
- [5] Iacus, S.M. (2008). *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations with R Examples*. Springer, New York.
- [6] Kijima, M. (2003). *Stochastic Processes with Applications to Finance*. Estados Unidos, Chapman & Hall/CRC.
- [7] Li, J. & Ma, S. (2008). Some probability applications to the risk analysis in insurance theory. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa* **24**, 20-24.
- [8] Lu, Y. & Li, S. (200r). On the probability of ruin in a Markov-modulated risk model. *Insurance: Mathematics and Economics* **37**, 522-532.
- [9] Rincón, L. (2011). *Introducción a la Teoría de Riesgo*. México D.F. , Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM.
- [10] Rincón, L. (2012). *Introducción a los Procesos Estocásticos*. México D.F. , Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM.

- [11] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V. y Teugels J.(1999).*Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Inglaterra, John Wiley and Sons.