



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO**  
Posgrado En Ciencias Físicas  
Instituto De Física

# MECÁNICA ESTADÍSTICA Y DINÁMICA NO LINEAL DE CÚMULOS CRÍTICOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
MAURICIO RIQUELME GALVÁN

TUTOR PRINCIPAL  
DR. ALBERTO ROBLEDO NIETO  
INSTITUTO DE FÍSICA

MIEMBROS DEL CÓMITE TUTOR  
DR. OCTAVIO MIRAMONTES VIDAL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
DRA. JACQUELINE QUINTANA HINOJOSA  
INSTITUTO DE QUÍMICA

CIUDAD DE MÉXICO, JULIO 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Resumen

El objeto de estudio es una fluctuación genérica o cúmulo del parámetro de orden  $\phi$  de un sistema térmico bajo una transición fase de segundo orden. Las propiedades del cúmulo se obtienen mediante la aproximación de punto silla en una acción efectiva o funcional de energía libre de Landau-Ginzburg-Wilson (LGW). Al calcular la primera variación del funcional de energía libre se obtiene una ecuación de Euler-Lagrange (EL) que describe al movimiento de una partícula en la mecánica clásica. A partir de la analogía con la partícula clásica obtendremos los distintos perfiles del parámetro de orden del cúmulo crítico. De manera equivalente al estudio de un fluido confinado en equilibrio, impondremos condiciones a la frontera del cúmulo lo que nos permitirá analizar las fuerzas que los distintos perfiles del parámetro de orden del cúmulo ejercen sobre la frontera. Al calcular la segunda variación del funcional de energía libre se obtiene la ecuación de Schrödinger que describe las propiedades de una partícula cuántica. Las funciones propias de la ecuación de Schrödinger corresponden a las fluctuaciones del perfil del parámetro de orden mientras que los valores propios indican la estabilidad de dichas fluctuaciones. Resolveremos la ecuación de Schrödinger para los distintos perfiles del cúmulo con el objetivo de conocer la estabilidad de las fluctuaciones del perfil del parámetro de orden. Por último veremos que el comportamiento dinámico del cúmulo crítico es descrito por un mapa de punto fijo de grupo de renormalización (GR) fuera de tangencia.



# Abstract

The object of study is a generic fluctuation or cluster of the order parameter  $\phi$  of a thermal system under a second order phase transition. The properties of the cluster are obtained by the saddle-point approximation in an effective action or Landau-Ginzburg-Wilson (LGW) free energy functional. When calculating the first variation of the free energy functional the Euler-Lagrange (EL) equation obtained is analogous to that describing the motion of a particle in classical mechanics. From the analogy we determine different order parameter profiles for the critical cluster. Equivalently to the study of a confined fluid at equilibrium, we impose boundary conditions on the cluster which allowed us to study the force that the different profiles of the order parameter of the cluster exerts on the boundary and determines its growth or shrinkage. When calculating the second variation of free energy functional an equation of the form of an Schrödinger equation for a quantum particle is obtained. The eigenfunctions of the Schrödinger equation correspond to fluctuations of the order parameter profile while the eigenvalues indicate the stability of such fluctuations. We solve the Schrödinger equation for different profiles of the cluster in order to know the stability of fluctuations of the order parameter profile. Finally, we see that the intermittent behavior of the critical cluster is described by a renormalization group (RG) fixed-point map near tangency.



## Agradecimientos

A mi madre Margarita Galván Arciniega por el apoyo constante e incondicional en toda mi vida. A mi director de tesis el Dr. Alberto Robledo Nieto, por su paciencia y apoyo. Por último a todos mis amigos fuera y dentro del Instituto de Física.





# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Antecedentes</b>	<b>3</b>
2.1 Cúmulos críticos . . . . .	3
2.1.1 Método de Landau . . . . .	4
2.1.2 Segunda variación del funcional de energía libre . . . . .	6
2.2 Bifurcación tangente . . . . .	7
2.3 Criticalidad e Intermittencia . . . . .	9
<b>3 Perfiles del parámetro de orden</b>	<b>11</b>
3.1 Retrato de fases y perfiles del parámetro de orden . . . . .	11
3.2 Términos de superficie . . . . .	15
<b>4 Estabilidad del cúmulo</b>	<b>21</b>
4.1 Segunda variación . . . . .	21
4.1.1 Potencial de la ecuación de Schrödinger . . . . .	22
4.1.2 Funciones propias y valores propios . . . . .	25
<b>5 Dinámica no lineal del cúmulo crítico</b>	<b>33</b>
5.1 Mapa del perfil del parámetro de orden . . . . .	33
5.2 Dinámica del cúmulo crítico . . . . .	35
<b>6 Resultados y Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>Apéndice</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Los atractores caóticos de sistemas dinámicos disipativos tienen propiedades de ergodicidad y mezclado lo que permite describirlos mediante la mecánica estadística de Boltzmann y Gibbs (BG) [1]. En la transición al caos en mapas iterados no lineales de baja dimensionalidad las propiedades de ergodicidad y mezclado dejan de cumplirse. Esto posibilita explorar los límites de validez de la estructura de la mecánica estadística de BG. Como resultado se ha hallado que las rutas al caos, duplicación de periodo, cuasiperiodicidad e intermitencia, de mapas no lineales de baja dimensionalidad pueden ser descritas por una estructura generalizada denominada  $q$ -estadística [2, 3, 4, 5]. Dicha estadística es expresada analíticamente en términos de las funciones deformadas  $q$ -logaritmo

$$\ln_q y \equiv (y^{1-q} - 1)/(1 - q)$$

y su inversa  $q$ -exponencial

$$\exp_q(x) \equiv [1 - (q - 1)x]^{-1/(q-1)}.$$

La estructura  $q$ -estadística también se manifiesta en sistemas térmicos en criticidad en los que las propiedades de ergodicidad y mezclado dejan de cumplirse [3, 6, 7, 8, 9]. Un ejemplo en particular que estudiaremos en el presente trabajo es un cúmulo del parámetro de orden  $\phi$  de un sistema térmico bajo una transición de fase de segundo orden [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. El cúmulo es descrito por una acción efectiva o energía libre de Landau-Ginzburg-Wilson (LGW) en la temperatura crítica y campo externo cero [15, 16]. La mecánica estadística del sistema

está determinada a través de una función de partición de grano grueso  $Z$ . Empleando la aproximación de punto silla sobre la función de partición obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange (EL) que determina las configuraciones dominantes del sistema. El perfil del parámetro de orden del cúmulo crítico resulta de resolver la ecuación de EL.

Del promedio térmico del perfil del cúmulo se deducen un par de propiedades: (a) La dimensión fractal de los cúmulos del parámetro de orden en función de los exponentes críticos de la transición de fase [10, 11]. (b) La dinámica del cúmulo crítico está descrita por un mapa no lineal intermitente con características de tangencia [12, 13]. A partir de la relación entre la dinámica del cúmulo y el mapa no lineal intermitente se concluye que un cúmulo de radio fijo  $R$  es una configuración inestable cuya amplitud crece en el tiempo y eventualmente colapsa.

El trabajo se divide de la siguiente manera. En el capítulo 2 daremos las bases necesarias para la descripción del sistema. En el capítulo 3 usaremos como herramienta el espacio de fases que resulta de la ecuación de EL del análogo mecánico clásico para determinar los distintos perfiles del parámetro de orden del cúmulo. De manera equivalente al tratamiento de un fluido confinado en equilibrio, imponemos condiciones a la frontera del cúmulo y analizaremos la fuerza que ejerce el cúmulo sobre la frontera para determinar la estabilidad de los distintos perfiles del parámetro de orden [17, 18, 19, 22]. En el capítulo 4 calcularemos la segunda variación del funcional de energía libre de LGW para estudiar la estabilidad de las fluctuaciones del perfil del parámetro de orden del cúmulo. De la segunda variación obtenemos la ecuación de Schrödinger que describe el comportamiento de una partícula cuántica. Las funciones propias de la ecuación corresponden a las fluctuaciones del perfil del parámetro de orden del cúmulo y los valores propios determinan la estabilidad de dichas fluctuaciones [20, 21]. En el capítulo 5 estableceremos una equivalencia entre los perfiles del parámetro de orden del cúmulo a valores grandes del parámetro de orden y el mapa de punto fijo de GR. La equivalencia antes mencionada la extenderemos a la dinámica del cúmulo crítico donde un mapa de punto fijo de GR perturbado describe la dinámica intermitente del cúmulo crítico [22, 23, 24]. Por último, en el capítulo 6 discutiremos los resultados y conclusiones.

# Capítulo 2

## Antecedentes

Este capítulo se compone de tres secciones. En la primera sección estudiaremos el método empleado para el cálculo del perfil del parámetro de orden del cúmulo crítico y de la función de partición que describe la mecánica estadística del sistema [10, 11]. También mostraremos como se obtienen las fluctuaciones del perfil del parámetro de orden y su estabilidad a partir de la segunda variación del funcional de energía libre de LGW [20, 21]. En la segunda sección estudiaremos el mapa de bifurcación tangente y el mapa de punto fijo de grupo de renormalización [24]. En la tercera sección veremos que la evolución temporal del cúmulo crítico queda descrita por un mapa no lineal con intermitencia [12, 13].

### 2.1 Cúmulos críticos

El objeto de estudio es un cúmulo o subsistema inhomogéneo del parámetro de orden  $\phi$  con volumen  $V$  de un sistema bajo una transición de fase de segundo orden. El cúmulo es descrito por un modelo continuo mediante una acción efectiva o energía libre de Landau-Ginzburg-Wilson (LGW) en la temperatura crítica  $T = T_c$  y campo externo nulo y se expresa como

$$\Gamma_c[\phi] = a \int_V dx^d \left[ \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + b|\phi|^{\delta+1} \right], \quad (2.1)$$

donde  $\delta$  es el exponente isotérmico crítico,  $d$  es la dimensión espacial,  $a$  y  $b$  son acoplamientos adimensionales. Las cantidades  $\phi = \Lambda^{-d}\tilde{\phi}$  y  $x_i = \Lambda\tilde{x}_i$  son adimen-

sionales,  $\Lambda$  es el corte ultravioleta que fija la escala de grano grueso  $R_c = \Lambda^{-1}$ . La cantidad escalar  $\tilde{\phi}$  describe la densidad de una cantidad física extensiva que caracteriza la transición de fase (la densidad de magnetización o la densidad de partículas) y  $\tilde{x}_i$  son las coordenadas de posición espacial.

### 2.1.1 Método de Landau

La función de partición en la aproximación de Landau para el sistema local está dada como

$$Z = \int_{\Omega} \mathcal{D}[\phi] Z_{\phi}, \quad (2.2)$$

donde  $Z_{\phi} = \exp(-\Gamma_c[\phi])$  corresponde a la suma de las configuraciones microscópicas para una forma específica del parámetro de orden  $\phi(\mathbf{r})$ . Ya que estudiaremos un cúmulo sin restricciones en la frontera para el valor de  $\phi$ , la integral de trayectoria se realiza sobre las configuraciones de  $\phi$  definidas en una esfera abierta  $\Omega$  de radio  $R$  y centro  $\bar{\mathbf{x}}$ . Por lo tanto la función de partición es

$$Z = \int_{\Omega} \mathcal{D}[\phi] \exp(-\Gamma_c[\phi]), \quad (2.3)$$

donde  $\Gamma_c[\phi]$  está dado por la Ec. (2.1). Por simplicidad consideraremos un sistema de una dimensión a lo largo de todo el trabajo, pero el análisis puede extenderse a dimensiones superiores con resultados similares [10, 11]. En el caso de un cúmulo unidimensional con centro en  $x = 0$  y tamaño  $2R$  la energía libre de LGW (Ec. 2.1) es

$$\Gamma_c[\phi] = a \int_{-R}^R dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + b|\phi|^{\delta+1} \right]. \quad (2.4)$$

Para evaluar la integral de trayectoria en la Ec. (2.3) usaremos la aproximación de punto silla que requiere la condición  $a \gg 1$ , sustituyendo la integral por una suma sobre los puntos silla de la energía libre. Las configuraciones de punto silla  $\phi(x)$  cumplen con la ecuación de Euler-Lagrange (EL)

$$\delta\Gamma_c[\phi] = a \left\{ \int_{-R}^R \left[ -\frac{\partial U}{\partial \phi} - \frac{d^2\phi}{dx^2} \right] \delta\phi dx + \left[ \frac{d\phi}{dx} \delta\phi \right]_{-R}^R \right\} = 0, \quad (2.5)$$

donde  $U(\phi)$  es el potencial cóncavo  $U(\phi) = -b|\phi|^{\delta+1}$ . Ya que no hay restricciones en la frontera del cúmulo para el valor de  $\phi$ , la variación en la frontera del cúmulo es nula  $\delta\phi(R) = 0$  y la ecuación de EL se simplifica a

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{dU}{d\phi}. \quad (2.6)$$

La ecuación anterior es análoga al problema mecánico clásico de una partícula bajo el potencial  $U(\phi) = -b|\phi|^{\delta+1}$ . La Ec. (2.6) puede separarse en un par ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden

$$\frac{d\phi}{dx} = \dot{\phi}$$

y

$$(2.7)$$

$$\frac{d\dot{\phi}}{dx} = -\frac{dU}{d\phi} = \text{sgn}(\phi)b(\delta+1)|\phi|^\delta$$

Este sistema de ecuaciones nos permitirá en capítulos posteriores obtener soluciones numéricas para los perfiles del parámetro de orden. Al integrar la ecuación de EL (Ec. 2.6) obtenemos

$$C_R = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 - b|\phi|^{\delta+1} \quad (2.8)$$

donde  $C_R$  es una constante de integración identificada con la energía total de la partícula en movimiento. Las configuraciones con constante de integración  $C_R \neq 0$  contribuyen a la función de partición (Ec. 2.3) con un factor  $e^{-bR|C_R|}$  así que las configuraciones dominantes son aquellas soluciones de la Ec. (2.8) para las que  $C_R \approx 0$ . Para un valor nulo de la constante de integración  $C_R = 0$ , el perfil del parámetro de orden  $\phi(x)$  que se obtiene al integrar la Ec. (2.8) es



$$\phi(x) = A|x_0 - x|^{-2/(\delta-1)} \quad (2.9)$$

con

$$A = \left[ \left( \frac{b}{2} \right) (\delta - 1)^2 \right]^{-1/(\delta-1)} \quad \text{y} \quad x_0 = \pm \left[ \sqrt{\frac{b}{2}} (\delta - 1) \right]^{-1} \phi_0^{-(\delta-1)/2}, \quad (2.10)$$

donde  $\phi_0 \equiv \phi(0)$  es el valor del parámetro de orden en  $x = 0$ . Usando la definición de exponencial deformada  $\exp_q(x) \equiv [1 - (q-1)x]^{-1/(q-1)}$  es posible reescribir la expresión del parámetro de orden  $\phi(x)$  (Ec. 2.9) como [8]

$$\phi(x) = \phi_0 \exp_q \left[ \pm \phi_0^{q-1} u x \right], \quad (2.11)$$

donde  $q = (1 + \delta)/2$  y  $u = \sqrt{2b}$ .

## 2.1.2 Segunda variación del funcional de energía libre

La estabilidad de las configuraciones dominantes del perfil del parámetro de orden  $\phi(x)$  del cúmulo crítico será estudiada mediante la segunda variación del funcional de energía libre de LGW (Ec. 2.4), que es [20, 21]

$$\delta^2 \Gamma_c = a \left\{ \int_{-R}^R \left[ - \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi(x)} \delta\phi(x) - \frac{d^2 \delta\phi(x)}{dx^2} \right] \delta\phi(x) dx + \left[ \delta\phi \delta\phi \right]_{-R}^R \right\}, \quad (2.12)$$

donde  $\delta\phi(x)$  es una pequeña variación del perfil del parámetro de orden  $\phi(x)$  (Ec. 2.9). Como vimos en la sección anterior no hay restricciones en la frontera del cúmulo y la variación  $\delta\phi(x)$  se anula  $\delta\phi(\pm R) = 0$ , por lo que la segunda variación se reduce a

$$\delta^2 \Gamma_c = a \int_{-R}^R \left[ - \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi(x)} \delta\phi(x) - \frac{d^2 \delta\phi(x)}{dx^2} \right] \delta\phi(x) dx. \quad (2.13)$$

Sea  $\psi_n(x)$  la función propia de la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2} + V(x)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x), \quad (2.14)$$

donde

$$V(x) = - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_s(x)} \quad (2.15)$$

juega el rol de potencial de una partícula y  $E_n$  es el valor propio. Cualquier fluctuación del parámetro de orden se puede expandir como

$$\delta\phi(x) = \sum_n C_n \psi_n(x) \quad (2.16)$$

y la segunda variación toma la forma

$$\delta^2\Gamma_c[\phi] = \sum_n E_n (C_n \psi_n(x))^2. \quad (2.17)$$

La estabilidad de las configuraciones del parámetro de orden  $\phi(x)$  será estudiada a partir del signo del valor propio  $E_n$ .

## 2.2 Bifurcación tangente

Para estudiar la bifurcación tangente que media en la transición entre un atractor caótico y un atractor de periodo  $n$ , iniciamos con la composición  $f^{(n)}(x)$  de un mapa unidimensional  $f(x)$  en la vecindad inmediata de uno de los  $n$  puntos tangentes a la línea con pendiente unitaria [23, 24]. Cambiando el sistema de coordenadas a este punto obtenemos

$$x' = f^{(n)}(x) = x + ux^z + O(|x|^z), \quad z > 1 \quad \text{y} \quad u > 0, \quad (2.18)$$

donde  $x^z \equiv \text{sign}(x)|x|^z$ . El mapa de punto fijo del grupo de renormalización (RG) es la solución  $f^*(x)$  que al expandirla en series de potencias de  $x$  sus dos primeros términos coinciden con el lado derecho de la Ec. (2.18). Este mapa debe cumplir

$$f^*(f^*(x)) = \lambda^{-1} f^*(\lambda x) \quad (2.19)$$

junto con un valor específico para  $\lambda$ . La solución analítica exacta  $x' = f^*(x)$  se encuentra para  $\lambda = 2^{1/(z-1)}$  [23, 24] y es

$$x'^{1-z} = x^{1-z} + (1-z)u, \quad (2.20)$$

o equivalentemente,

$$x' = x \exp_z [ux^{z-1}]. \quad (2.21)$$

Al iterar  $t$  veces la Ec. (2.20) desde una posición inicial  $x_0$  resulta

$$x_t^{1-z} = x_0^{1-z} + (1-z)ut \quad (2.22)$$

o

$$\ln_z x_t = \ln_z x_0 + ut, \quad (2.23)$$

de modo que la dependencia en el número de iteraciones  $t$  de todas las trayectorias está dada por

$$x_t = x_0 \exp_z [x_0^{z-1} ut]. \quad (2.24)$$

Si ahora añadimos una pequeña perturbación  $\epsilon h_\alpha(x)$  a  $f^*(x)$  la composición de  $f_\epsilon(x) = f^*(x) + \epsilon h_\alpha(x)$  debe cumplir [23]

$$f_\epsilon(f_\epsilon(x)) = \lambda^{-1} f^*(\lambda x) + \epsilon(\alpha/\lambda) h_\alpha(\lambda x) + O(\epsilon^2) \quad (2.25)$$

cuando la función propia  $h_\alpha(x)$  satisface

$$f^{* \prime}(f^*(x))h_\alpha(x) + h_\alpha(f^*(x)) = (\alpha/\lambda)h_\alpha(\lambda x). \quad (2.26)$$

Para un mapa fuera de tangencia obtenemos

$$\begin{aligned} x' &= x \exp_z [ux^{z-1}] \\ &+ \frac{\epsilon}{z-1} x^{-(z-1)} (1 - (z-1)ux^{z-1} - \exp_z [ux^{z-1}]^z) \\ &+ O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (2.27)$$

## 2.3 Criticalidad e Intermitencia

Se ha demostrado que la evolución temporal del parámetro de orden  $\phi$  es equivalente a la dinámica de un mapa no lineal intermitente [12, 13]. Dicha equivalencia fue demostrada de diferentes formas al considerar las propiedades de la magnetización promedio

$$\langle \Phi(R) \rangle = Z^{-1} \int D[\phi] \Phi(R) \exp(-\Gamma_c[\phi]), \quad (2.28)$$

donde

$$\Phi(R) = \int_{-R}^R dx \phi(x)$$

es la ‘magnetización’ total del cúmulo. En la aproximación  $x_0 \gg R$  el perfil (Ec. 2.9) es plano  $\phi(x) \sim \phi_0$  y la energía libre de LGW es

$$\Gamma_c \sim 2abR\phi_0^{\delta+1}, \quad (2.29)$$

por lo que la integral de trayectoria en la Ec. (2.28) se vuelve una integral ordinaria sobre  $0 \leq \phi \leq \phi_0$ , resultando

$$\langle \Phi(R) \rangle \sim \frac{\phi_0 R}{2} \exp(-\nu R \phi_0^{\delta+1}), \quad (2.30)$$

donde  $\nu = 2ab(\delta + 1)/(\delta + 2)(\delta + 3)$ . Un procedimiento para obtener el mapa que permite involucrar las propiedades de escalamiento del sistema crítico consiste en considerar que el valor de la magnetización promedio  $\langle \Phi \rangle$  cambia en un monto fijo  $\mu$  en cada iteración

$$\langle \Phi_{t+1} \rangle = \langle \Phi_t \rangle + \mu \quad (2.31)$$

De la Ec. (2.30) se obtiene [12, 13] para valores pequeños del parámetro de orden  $\phi_t$  el mapa

$$\phi_{t+1} = \epsilon + \phi_t + u\phi_t^{\delta+1}, \quad (2.32)$$

donde el parámetro de desplazamiento es  $\epsilon \sim R^{-1}$  y la amplitud del término no lineal es  $u = \nu\mu$ . De la sección anterior podemos ver que el mapa de bifurcación tangente (Ec. 2.18) es equivalente al mapa (Ec. 2.32) que describe la dinámica del parámetro de orden  $\phi$  y los parámetros del sistema térmico determinan la dinámica del mapa. De la suposición inicial resulta que el promedio de iteraciones en la región laminar es equivalente a la magnetización promedio del cúmulo de radio  $R$ . La forma completa del mapa que resulta de usar el método de Frobenius-Perron inverso [12, 13, 14] muestra una región decreciente ‘superexponencial’ que lleva de vuelta a la iteración cerca del origen en aproximadamente un paso.

# Capítulo 3

## Perfiles del parámetro de orden

En este capítulo estudiaremos los perfiles de parámetro de orden del cúmulo crítico para cualquier valor de la constante de integración  $C_R$ . El estudio se realizará mediante un método gráfico sobre el espacio de fases que genera el problema análogo de una partícula clásica en movimiento. Además añadiremos condiciones de frontera al funcional de energía libre de LGW y analizaremos las fuerzas que se ejercen en las fronteras del cúmulo [17, 18, 19].

### 3.1 Retrato de fases y perfiles del parámetro de orden

Como vimos en el capítulo anterior las configuraciones con constante de integración  $C_R \neq 0$  (Ec. 2.8) contribuyen a la función de partición con un factor  $e^{-bR|C_R|}$ , por lo que únicamente se obtuvo el perfil del parámetro de orden para una constante de integración nula  $C_R = 0$ . Para estudiar los casos con  $C_R \neq 0$  despejamos  $\dot{\phi}$  de la Ec. (2.8) obteniendo

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2(C_R + b|\phi|^{\delta+1})}. \quad (3.1)$$

Mediante la Ec. (3.1) es posible graficar el espacio de fases  $(\phi, \dot{\phi})$  de la partícula clásica, lo que nos permite estudiar los perfiles del parámetro de orden  $\phi$  para los distintos valores de la constante de integración. En la Fig. (3.1) se muestra el

retrato de fases para  $\delta = 3$  y  $b = 1$ . Cada órbita en la figura se genera asignando un valor a la constante de integración  $C_R$ , las curvas continuas corresponden a la separatriz  $C_R = 0$ , las curvas con líneas segmentadas son órbitas del parámetro de orden con  $C_R > 0$  y las curvas punteadas son órbitas del parámetro de orden con  $C_R < 0$ .

Es posible obtener los perfiles para los distintos valores de la constante de integración  $C_R \neq 0$  al despejar  $dx$  en la Ec. (3.1) e integrar [11]

$$x = \text{sign}(\dot{\phi}) \int_{\phi_0}^{\phi(x)} \frac{d\phi}{\sqrt{2(C_R + b|\phi|^{\delta+1})}}, \quad (3.2)$$

donde  $\phi_0 = \phi(0)$ . La solución a la integral anterior se muestra con detalle en el apéndice. A continuación analizaremos las soluciones para los distintos valores de la constante de integración  $C_R$ .

### Perfil para la constante de integración nula $C_R = 0$

Del espacio de fases (Fig. 3.1) podemos ver que para un valor nulo de la constante de integración  $C_R = 0$  existen cuatro ramas de la separatriz ( $\phi_0 > 0$ ,  $\phi_0 < 0$ ) y ( $\dot{\phi}_0 > 0$ ,  $\dot{\phi}_0 < 0$ ), y el perfil para los posibles valores de  $\phi_0$  y  $\dot{\phi}_0$  es

$$\phi(x) = \text{sign}(\phi_0) \left[ \frac{b}{2}(\delta - 1)^2 \right]^{-\frac{1}{\delta-1}} |x_0 - x|^{-\frac{2}{\delta-1}} \quad (3.3)$$

con

$$x_0 = \text{sign}(\dot{\phi}_0) \text{sign}(\phi_0) \left[ \sqrt{\frac{b}{2}}(\delta - 1) \right]^{-1} |\phi_0|^{-\frac{\delta-1}{2}}. \quad (3.4)$$

Usando la exponencial deformada reescribimos la ecuación anterior como

$$\phi(x) = \phi_0 \exp_q \left[ \text{sign}(\phi_0) \text{sign}(\dot{\phi}_0) |\phi_0|^{q-1} ux \right] \quad (3.5)$$

con  $u = \sqrt{2b}$  y  $q = (\delta + 1)/2$ . En la Fig. (3.2) se muestra un perfil del parámetro

de orden para una constante de integración nula  $C_R = 0$  generado a partir de la Ec. (3.3) para los valores  $\phi_0 = .007$ ,  $\dot{\phi}_0 < 0$ ,  $\delta = 3$ ,  $b = 1$  y  $C_R = 0$ .

## Perfil para la constante de integración positiva $C_R > 0$

En el espacio de fases (Fig. 3.1) las órbitas con constante de integración positiva  $C_R > 0$  corresponden a las curvas de líneas segmentadas. En la figura podemos ver que las órbitas intersectan el eje  $\phi = 0$  por lo que fijando el valor del parámetro de orden en el origen  $\phi(0) = 0$  de la Ec. (2.8) obtenemos

$$C_R = \frac{1}{2} \left( \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_0 \right)^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}_0^2, \quad (3.6)$$

con  $\dot{\phi}_0 = \dot{\phi}(0)$ . Definiendo  $\phi_0^* \equiv (\dot{\phi}_0^2/2b)^{1/(\delta+1)}$  la solución a la integral (Ec. 3.2) para la constante de integración positiva  $C_R > 0$  es

$$\phi(x) f_2^{-\frac{2}{\delta-1}} = \text{sign}(x) \text{sign}(\dot{\phi}_0) \left[ \frac{b}{2} (\delta-1)^2 \right]^{-\frac{1}{\delta-1}} (|x_0| f_1 - |x|)^{-\frac{2}{\delta-1}}, \quad (3.7)$$

donde  $f_2 = f_2(\phi, \dot{\phi}_0, \delta)$  es una función hipergeométrica y  $f_1 = f_1(\delta)$  una constante, dadas por las Ec. (A23) y (A24), respectivamente. El valor  $x_0$  es el mismo que para el caso  $C_R = 0$  (Ec. 3.4) pero sustituyendo  $\phi_0^*$  en el lugar de  $\phi_0$ . Usando la exponencial  $q$ -deformada podemos reescribir la ecuación anterior

$$\phi(x) f_2^{-\frac{1}{q-1}} = \text{sgn}(x) \text{sgn}(\dot{\phi}_0) \phi_0^* f_1^{-\frac{1}{q-1}} \exp_q \left[ \left( |\phi_0^*| f_1^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1} u|x| \right]. \quad (3.8)$$

Para valores del parámetro de orden  $\phi \ll \phi_0^*$ , el perfil del parámetro de orden del cúmulo es aproximadamente  $\phi(x) \approx \dot{\phi}_0 x$ . Para valores del parámetro de orden  $\phi \gg \phi_0^*$  obtenemos

$$\phi(x) \approx \text{sgn}(x) \text{sgn}(\dot{\phi}_0) \phi_0^* f_1^{-\frac{1}{q-1}} \exp_q \left[ \left( |\phi_0^*| f_1^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1} u|x| \right]. \quad (3.9)$$



En la Fig. (3.3) se muestra el perfil del parámetro de orden con constante de integración positiva  $C_R > 0$ . Este perfil se obtuvo resolviendo numéricamente el sistema de ecuaciones (Ec. 2.7) que resulta al separar la ecuación de EL. Los valores para generar el perfil son  $C_R = 2.9 \times 10^{-9}$ ,  $\dot{\phi}_0 > 0$ ,  $\delta = 3$  y  $b = 1$ .

## Perfil para la constante de integración negativa $C_R < 0$

En el espacio de fases (Fig. 3.1) las órbitas con constante de integración negativa  $C_R < 0$  corresponden a las curvas con puntos. En la figura podemos ver que las órbitas intersectan al eje  $\dot{\phi} = 0$ , por lo que establecemos que en el origen la pendiente del perfil del parámetro de orden es nula  $\dot{\phi}(0) = 0$ , de la Ec. (2.8) obtenemos

$$C_R = -b|\phi_0|^{\delta+1} \quad (3.10)$$

con  $\phi_0 = \phi(0)$  el valor del parámetro de orden en el origen. La solución a la Ec. (3.2) para una constante de integración negativa  $C_R < 0$  es

$$\phi(x)f_2^{-\frac{2}{\delta-1}} = \text{sign}(\phi_0) \left[ \frac{b}{2}(\delta-1)^2 \right]^{-\frac{1}{\delta-1}} (|x_0|f_1 - |x|)^{-\frac{2}{\delta-1}}, \quad (3.11)$$

donde  $f_2 = f_2(\phi, \phi_0, \delta)$  es una función hipergeométrica y  $f_1 = f_1(\delta)$  una constante dadas por las Ec. (A30) y (A31), respectivamente. El valor  $x_0$  es el mismo que para el caso con constante de integración  $C_R = 0$  (Ec. 3.4) pero  $\phi_0$  está dado por la Ec. (3.10). Usando la exponencial  $q$ -deformada podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\phi(x)f_2^{-\frac{1}{q-1}} = \phi_0 f_1^{-\frac{1}{q-1}} \exp_q \left[ \left( |\phi_0| f_1^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1} u|x| \right]. \quad (3.12)$$

Para un tamaño del cúmulo  $x \ll x_0$  el perfil del parámetro de orden es aproximadamente plano  $\phi(x) \approx \phi_0$ . Para valores del parámetro de orden  $\phi \gg \phi_0$  obtenemos

$$\phi(x) \approx \phi_0 f_1^{-\frac{1}{q-1}} \exp_q \left[ \left( |\phi_0| f_1^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1} u|x| \right]. \quad (3.13)$$

En la Fig. (3.4) se muestra el perfil del parámetro de orden con constante de integración positiva  $C_R < 0$ . Este perfil se obtuvo resolviendo numéricamente el sistema de ecuaciones (Ec. 2.7) que resulta de separar la ecuación de EL. Los valores para generar el perfil son  $C_R = -2.9 \times 10^{-9}$ ,  $\phi_0 > 0$ ,  $\delta = 3$  y  $b = 1$ .

## 3.2 Términos de superficie

En esta sección añadiremos términos de superficie al funcional de energía libre de LGW y estudiaremos el significado de la constante de integración  $C_R$ . Añadiendo términos de frontera al funcional (Ec. 2.4) de LGW resulta [17, 18, 19]

$$\Gamma_c[\phi] = a \int_R \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + b|\phi|^{\delta+1} \right] dx + \Phi(-R) + \Phi(R), \quad (3.14)$$

donde  $\Phi(\pm R)$  son términos en la frontera dados por la función

$$\Phi = \frac{1}{2}g\phi_{\pm}^2, \quad (3.15)$$

donde  $\phi_{\pm} = \phi(\pm R)$  y  $g$  es un parámetro de acoplamiento de superficie.

Al calcular la primera variación del funcional de energía libre de LGW con términos en la frontera (Ec. 3.14) obtenemos la ecuación de EL (Ec. 2.6) junto con las condiciones a la frontera

$$\pm \frac{d\phi}{dx} \Big|_{\pm R} = g\phi_{\pm}. \quad (3.16)$$

El signo mas y menos en la Ec. (3.16) corresponde a las superficies  $R$  y  $-R$  respectivamente. En el espacio de fases (Fig. 3.1) las condiciones a la frontera se muestran como líneas rectas. El perfil del parámetro de orden se obtiene de elegir la intersección de la recta con la órbita  $C_R$  que reproduzca al sistema de tamaño  $2R$ . Sustituyendo las condiciones a la frontera (Ec. 3.16) en la Ec. (2.8) obtenemos la relación entre el tamaño del sistema  $2R$  y el valor de  $C_R$ , lo que está dado por la siguiente ecuación

$$C_R = \frac{1}{2}g^2\phi^2(R) - b|\phi(R)|^{\delta+1}. \quad (3.17)$$

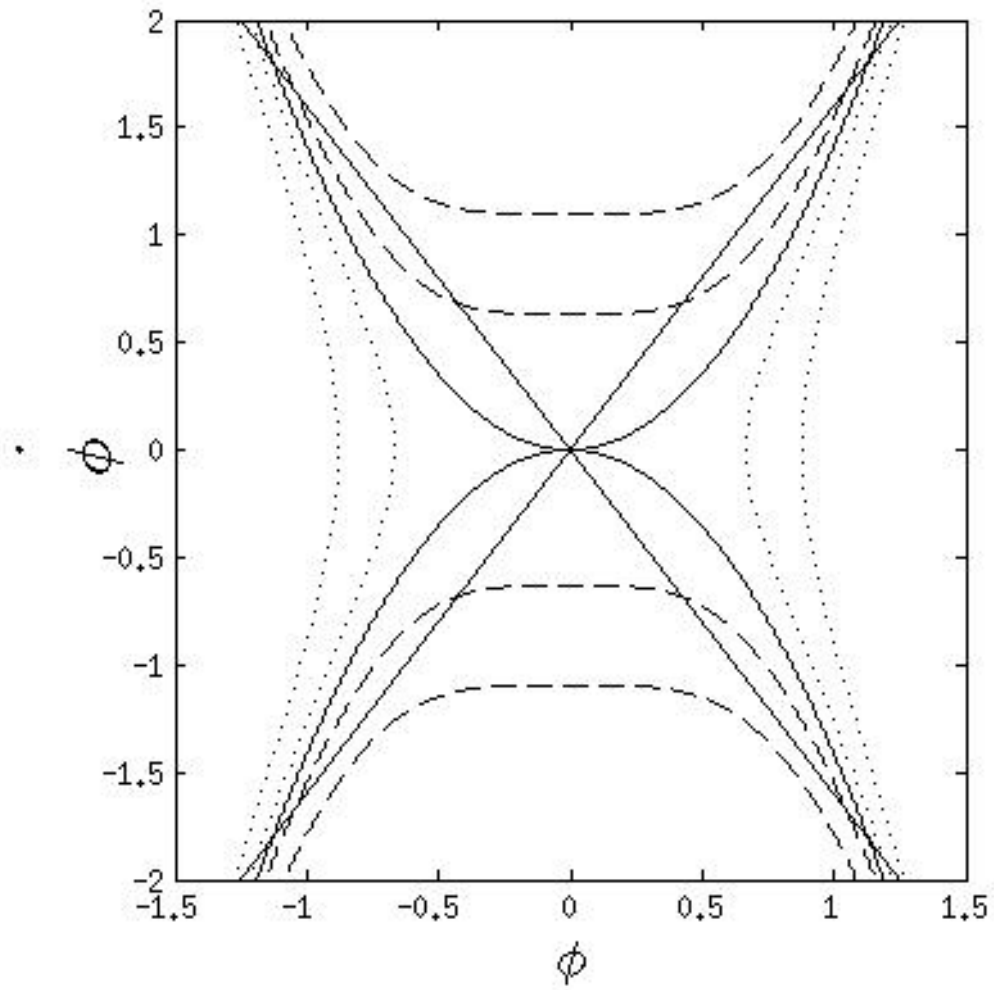
Para  $g > 0$  ocurre una transición ordinaria, para  $g < 0$  se conoce como transición extraordinaria y para  $g = 0$  se conoce como transición especial [18]. En el caso  $g = 0$  las condiciones de frontera son  $d\phi/dx|_{\pm} = 0$  por lo que se obtiene como perfil uniforme el punto fijo  $\phi = \dot{\phi} = 0$ . Al sustituir la Ec. (2.8) en la Ec. (3.14) obtenemos la expresión para la energía libre de perfiles estacionarios

$$\Gamma_c^{(s)} = a \int_{\phi_-}^{\phi_+} \dot{\phi} d\phi - 2aC_R R + \frac{1}{2}g\phi_+^2 + \frac{1}{2}g\phi_-^2, \quad (3.18)$$

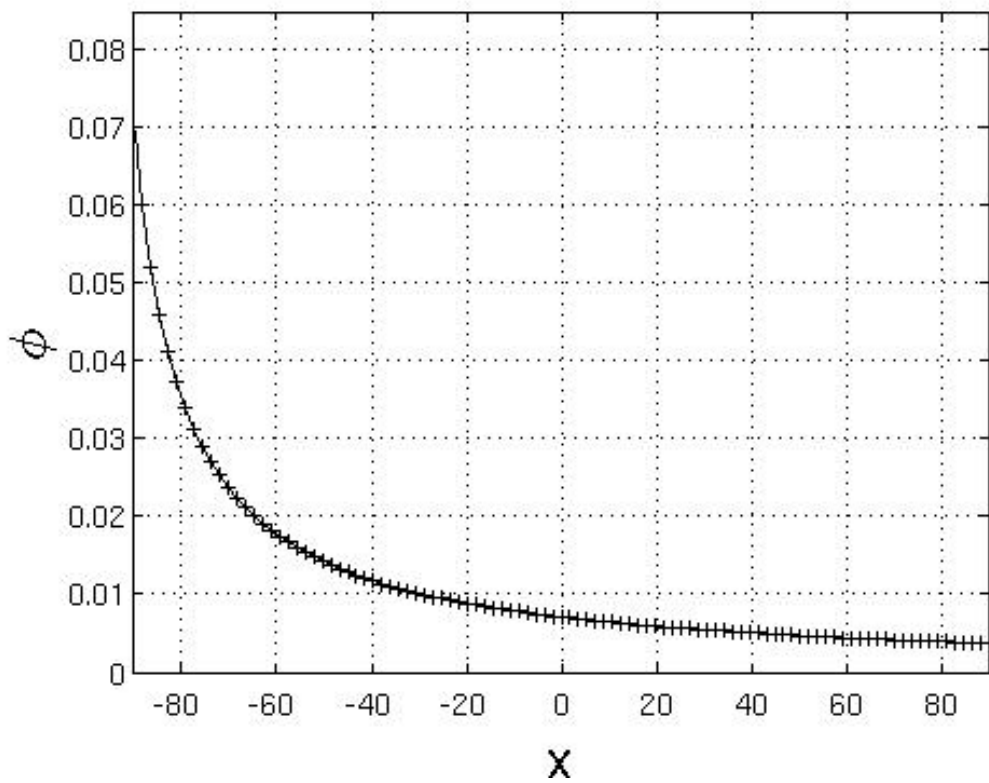
y la derivada de esta con respecto a  $R$  resulta ser

$$C_R = -\frac{1}{2a} \frac{\partial \Gamma_c^{(s)}}{\partial R}. \quad (3.19)$$

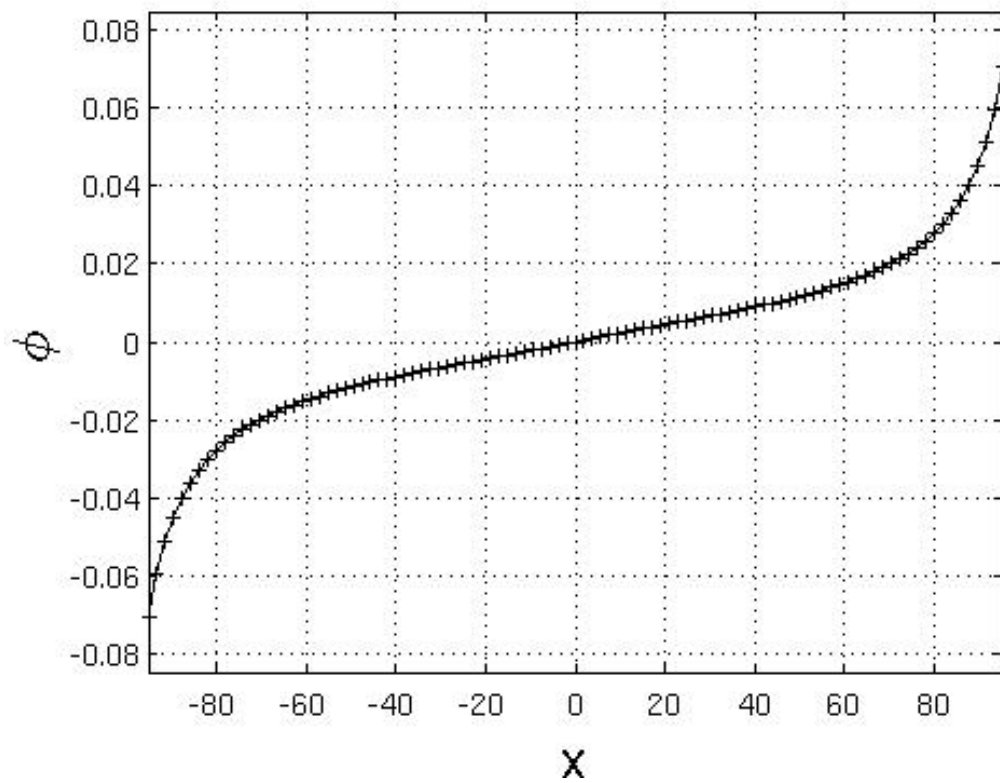
Por tanto  $C_R$  puede ser asociada con la fuerza que se ejerce en las fronteras del cúmulo.



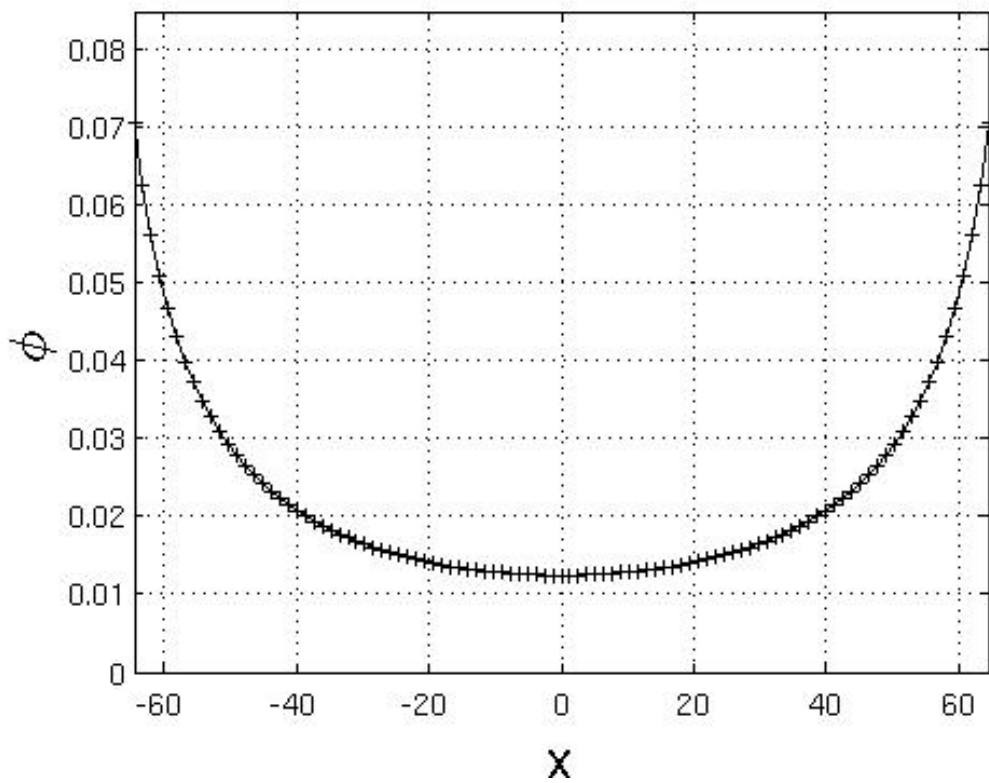
**Figura 3.1:** Retrato de fases para  $\delta = 3$  y  $b = 1$ . La curva continua corresponde a la separatriz  $C_R = 0$ , las curvas con líneas segmentadas son órbitas con  $C_R > 0$  y las curvas punteadas son órbitas con  $C_R < 0$ . Las líneas rectas corresponde a los términos de frontera.



**Figura 3.2:** Perfil del parámetro de orden con una constante de integración nula  $C_R = 0$  (Ec. 3.3) para  $\delta = 3$ ,  $b = 1$  y  $\phi_0 = .007$ .



**Figura 3.3:** Perfil del parámetro de orden con constante de integración positiva  $C_R > 0$  (Ec. 3.7) para  $\delta = 3$ ,  $b = 1$ ,  $C_R = 2.4 \times 10^{-9}$  y  $\phi_0 > 0$ .



**Figura 3.4:** Perfil del parámetro de orden con constante de integración negativa  $C_R < 0$  (Ec. 3.11) para  $\delta = 3$ ,  $b = 1$ ,  $C_R = -2.4 \times 10^{-9}$  y  $\phi_0 > 0$ .

# Capítulo 4

## Estabilidad del cúmulo

En este capítulo estudiaremos las pequeñas fluctuaciones del perfil del parámetro de orden y su estabilidad. El estudio se realizará mediante la matriz de segundas derivadas del funcional de energía libre de LGW con respecto al parámetro de orden en cada punto del cúmulo conocida como matriz de estabilidad. Los vectores propios y valores propios de esta matriz son los modos de las fluctuaciones del cúmulo [20, 21].

### 4.1 Segunda variación

La segunda variación del funcional de energía libre de LGW en un sistema donde la variación del parámetro de orden se anula en las fronteras  $\delta\phi(\pm R) = 0$  está dada por la ecuación de Schrödinger (Ec. 2.14)

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2} + V(x)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

y

$$V(x) = - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right|_{\phi(x)},$$

donde  $U = -b|\phi|^{\delta+1}$  y  $\phi(x)$  es el perfil del cúmulo crítico de tamaño  $2R$  que



se obtiene al resolver la ecuación de EL para un valor dado de la constante de integración  $C_R$ .

### 4.1.1 Potencial de la ecuación de Schrödinger

Ya que la variación del parámetro de orden en las fronteras del cúmulo es nula,  $\delta\phi(\pm R) = 0$ , las funciones propias de la ecuación de Schrödinger se deben anular en las fronteras  $\psi_n(\pm R) = 0$ . Por lo tanto el potencial  $V(x)$  de la ecuación de Schrödinger es un pozo de potencial infinito dado por la función

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x > R \\ \delta(\delta + 1)b|\phi_s(x)|^{\delta-1} & |x| < R \\ \infty & x < -R \end{cases} . \quad (4.1)$$

#### Potencial para la constante de integración $C_R = 0$

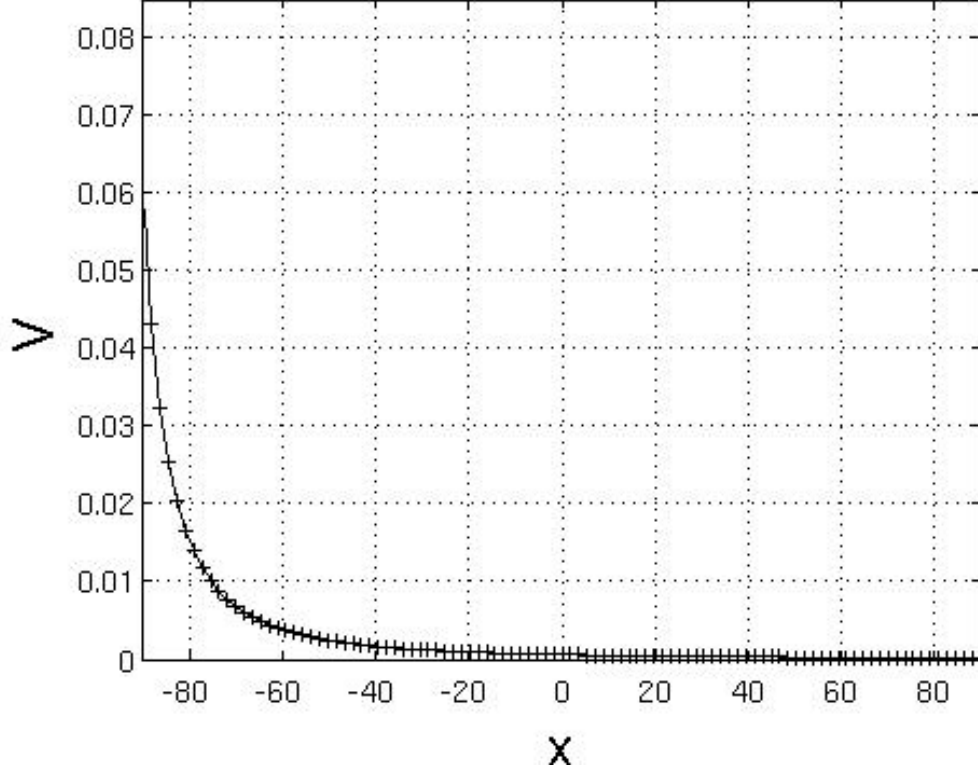
El perfil del parámetro de orden del cúmulo cuando la constante de integración se anula  $C_R = 0$  se expresa mediante la Ec. (3.3), por lo que el potencial de la ecuación de Schrödinger es

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x > R \\ \frac{\delta(\delta+1)}{(\delta-1)^2}(x_0 + x)^{-2} & |x| < R \\ \infty & x < -R \end{cases} . \quad (4.2)$$

Para un cúmulo de tamaño  $R \ll x_0$  el perfil del parámetro de orden es aproximadamente uniforme  $\phi(x) \approx \phi_0$  y el potencial se reduce a

$$V(x) \approx \begin{cases} \infty & x > R \\ \delta(\delta + 1)b|\phi_0|^{\delta-1} & |x| < R \\ \infty & x < -R \end{cases} . \quad (4.3)$$

En la Fig. (4.1) se muestra el potencial de la Ec. (4.2). La figura se genero evaluando en la Ec. (4.1) los puntos del perfil del parámetro de orden que se muestra en la Fig. (3.2) generados con la Ec. (3.3).



**Figura 4.1:** Potencial de la ecuación de Schrödinger para el perfil con constante de integración  $C_R = 0$  que resulta de evaluar los puntos de la Fig. (3.2) en la Ec. (4.1).

### Potencial para la constante de integración positiva $C_R > 0$

Cuando la constante de integración es mayor a cero  $C_R > 0$  el perfil del parámetro de orden del cúmulo se expresa mediante la Ec. (3.7). Para un cúmulo de tamaño  $R \ll |x_0|f_1$  donde la constante  $f_1$  está dada por la Ec. (A24) el perfil del parámetro de orden es aproximadamente  $\phi \approx \dot{\phi}_0 x$ . Por lo tanto el potencial de la ecuación de Schrödinger es

$$V(x) \approx \begin{cases} \infty & x > R \\ \delta(\delta + 1)b|\dot{\phi}_0 x|^{\delta-1} & |x| < R \\ \infty & x < -R \end{cases} . \quad (4.4)$$

Para regiones donde el parámetro de orden cumple con  $\phi(x) \gg \phi_0^*$  el perfil del parámetro de orden se expresa mediante la Ec. (3.9). Por lo tanto el potencial de la ecuación de Schrödinger es

$$V(x) \approx \begin{cases} \infty & x > R \\ \frac{2\delta(\delta+1)}{(\delta-1)^2} (|x_0|f_1 - |x|)^{-2} & |x| < R \\ \infty & x < -R \end{cases} \quad \text{Para } \phi(x) \gg \phi_0^*. \quad (4.5)$$

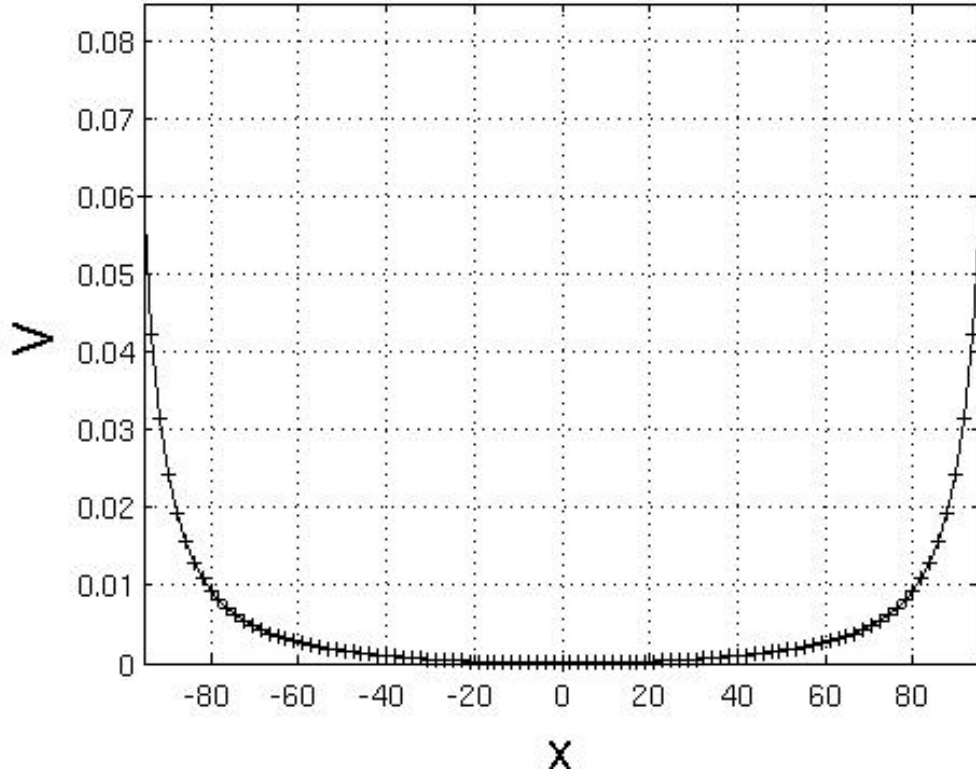
En la Fig. (4.2) se muestra el potencial de la ecuación de Schrödinger para el perfil del parámetro de orden del cúmulo con constante de integración positiva  $C_R = 2.4 \times 10^{-9} > 0$ ,  $\delta = 3$  y  $b = 1$ . La figura se generó evaluando en la Ec. (4.1) los puntos del perfil que se muestra en la Fig. (3.3) que resultan de resolver el sistema de ecuaciones (Ec. 2.7) que resulta de separar la ecuación de EL.

### Potencial para la constante de integración negativa $C_R < 0$

Cuando la constante de integración es negativa  $C_R < 0$  el perfil del parámetro de orden del cúmulo se expresa mediante la Ec. (3.11). Para un cúmulo de tamaño  $R \ll |x_0|f_1$  donde la constante  $f_1$  se expresa mediante la Ec. (A31) el perfil del parámetro de orden del cúmulo es aproximadamente uniforme  $\phi \approx \phi_0$ . Por lo tanto el potencial de la ecuación de Schrödinger está dado por la Ec. (4.3). Para regiones donde el parámetro de orden cumple con  $\phi(x) \gg \phi_0$  el perfil se expresa mediante la Ec. (3.13) y el potencial de la ecuación de Schrödinger es

$$V(x) \approx \begin{cases} \infty & x > R \\ \frac{2\delta(\delta+1)}{(\delta-1)^2} (|x_0|f_1 - |x|)^{-2} & |x| < R \\ \infty & x < -R \end{cases} \quad \text{Para } \phi(x) \gg \phi_0. \quad (4.6)$$

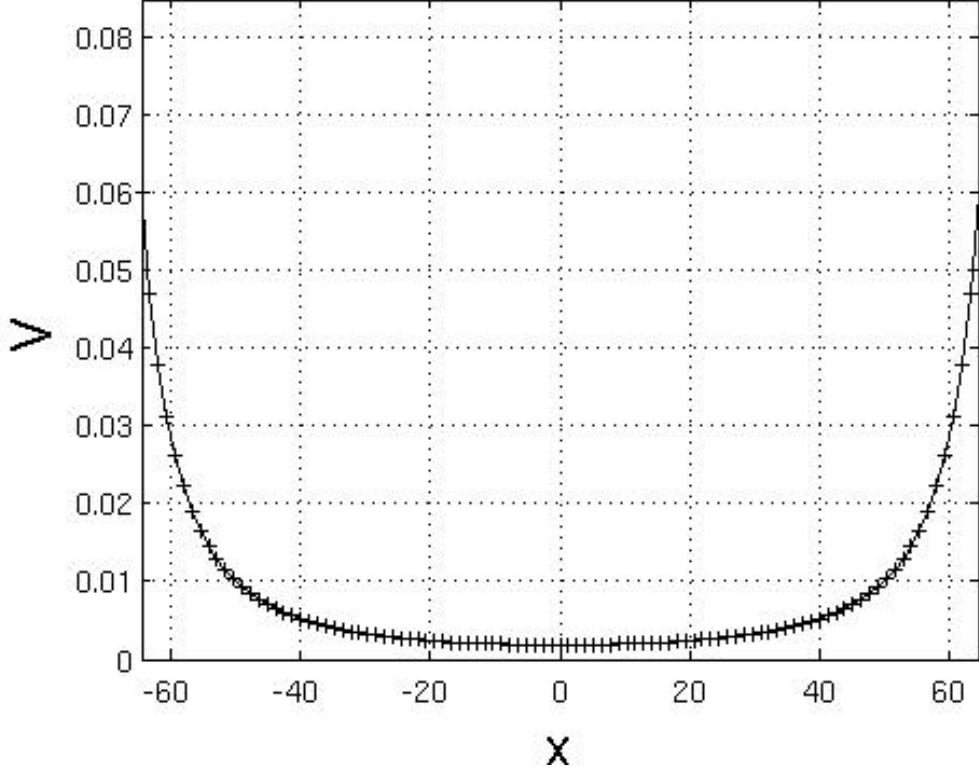
En la Fig. (4.3) se muestra el potencial de la ecuación de Schrödinger para el perfil del parámetro de orden del cúmulo con constante de integración negativa  $C_R = -2.4 \times 10^{-9} < 0$ ,  $\delta = 3$  y  $b = 1$ . La figura se generó evaluando en la Ec. (4.1) los puntos del perfil que se muestra en la Fig. (3.4) que resultan de resolver el sistema de ecuaciones (Ec. 2.7) que resulta de separar la ecuación de EL.



**Figura 4.2:** *Potencial de la ecuación de Schrödinger para el perfil con constante de integración positiva  $C_R > 0$  que resulta de evaluar los puntos de la figura (3.3).*

### 4.1.2 Funciones propias y valores propios

En la sección anterior obtuvimos el potencial de la ecuación de Schrödinger para los distintos valores de la constante de integración  $C_R$ . En esta sección resolveremos la ecuación de Schrödinger para estos potenciales. Primero resolveremos analíticamente la ecuación de Schrödinger para el potencial uniforme de la Ec. (4.3) que se obtiene para tamaños del cúmulo pequeños con un valor nulo o negativo de la constante de integración  $C_R \leq 0$ . Después resolveremos la ecuación de Schrödinger para el potencial de la Ec. (4.2) que corresponde a valores de la constante de integración nulos  $C_R = 0$  independientemente del tamaño  $R < x_0$  del cúmulo. Por último resolveremos numéricamente la ecuación de Schrödinger para potenciales donde los valores de la constante de integración son positivos  $C_R > 0$  o negativos  $C_R < 0$  independientemente del tamaño  $R < x_0 f_1$  del cúmulo.



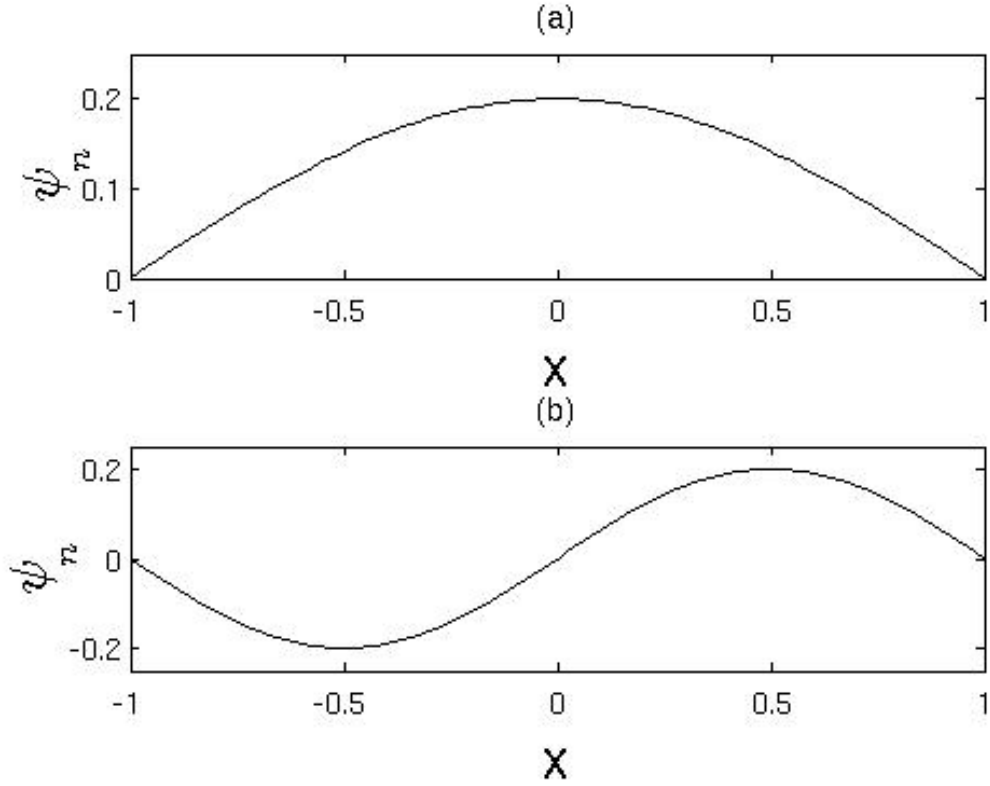
**Figura 4.3:** Potencial de la ecuación de Schrödinger para el perfil con constante de integración negativa  $C_R < 0$  que resulta de evaluar los puntos de la figura (3.4).

Para esto evaluaremos en la Ec. (4.1) los perfiles obtenidos al resolver el sistema de ecuaciones (Ec. 2.7) que resulta de separar la ecuación de EL para un valor específico de la constante de integración con la finalidad de obtener el potencial  $V(x)$ . Con dicho potencial emplearemos el método de Numerov [26] en conjunto con el método de bisección para obtener las funciones propias y valores propios de la ecuación de Schrödinger para valores específicos de  $C_R$ ,  $\delta$ ,  $b$  y  $R$ .

La ecuación de Schrödinger (Ec. 2.14) en la región  $|x| < R$  para el potencial uniforme de la Ec. (4.3) es

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + 2(E_n - \delta(\delta + 1)b\phi_0^{\delta-1})\psi_n = 0. \quad (4.7)$$

Las funciones propias y valores propios de la ecuación anterior son [25]



**Figura 4.4:** Funciones propias de la ecuación de Schrödinger para un perfil del parámetro de orden uniforme  $\phi(x) \approx \phi_0$  ( $C_R \leq 0$ ) con  $\delta = 3$ ,  $\phi_0 = 0.007$ ,  $b = 1$  y  $R = 1$ . (a) La primera función propia, (b) la segunda función propia.

$$\psi_n(x) = B \cos \frac{n\pi x}{2R}, \quad n \text{ impar},$$

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{2R}, \quad n \text{ par} \tag{4.8}$$

y

$$E_n = \frac{\pi^2}{8R^2} n^2 + \delta(\delta + 1)b\phi_0^{\delta-1}.$$

Hay una secuencia infinita de valores propios discretos que corresponden a todos los enteros positivos de  $n$ . En la Fig. (4.4) se muestran las primeras dos funciones propias obtenidas a partir de las Ec. (4.8) para un cúmulo con  $\delta = 3$ ,  $\phi_0 = .007$  y  $R = 1$ .

La ecuación de Schrödinger (Ec. 2.14) en la región  $|x| < R$  para el potencial con constante de integración nula  $C_R = 0$  de la Ec. (4.2) es

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \left( 2E_n - \frac{2\delta(\delta + 1)}{(\delta - 1)^2} (x_0 + x)^{-2} \right) \psi_n = 0.$$

Renombrando  $u(x) = \sqrt{2E_n}(x_0 + x)$  y  $p = (3\delta + 1)/2(\delta - 1)$  las funciones propias son

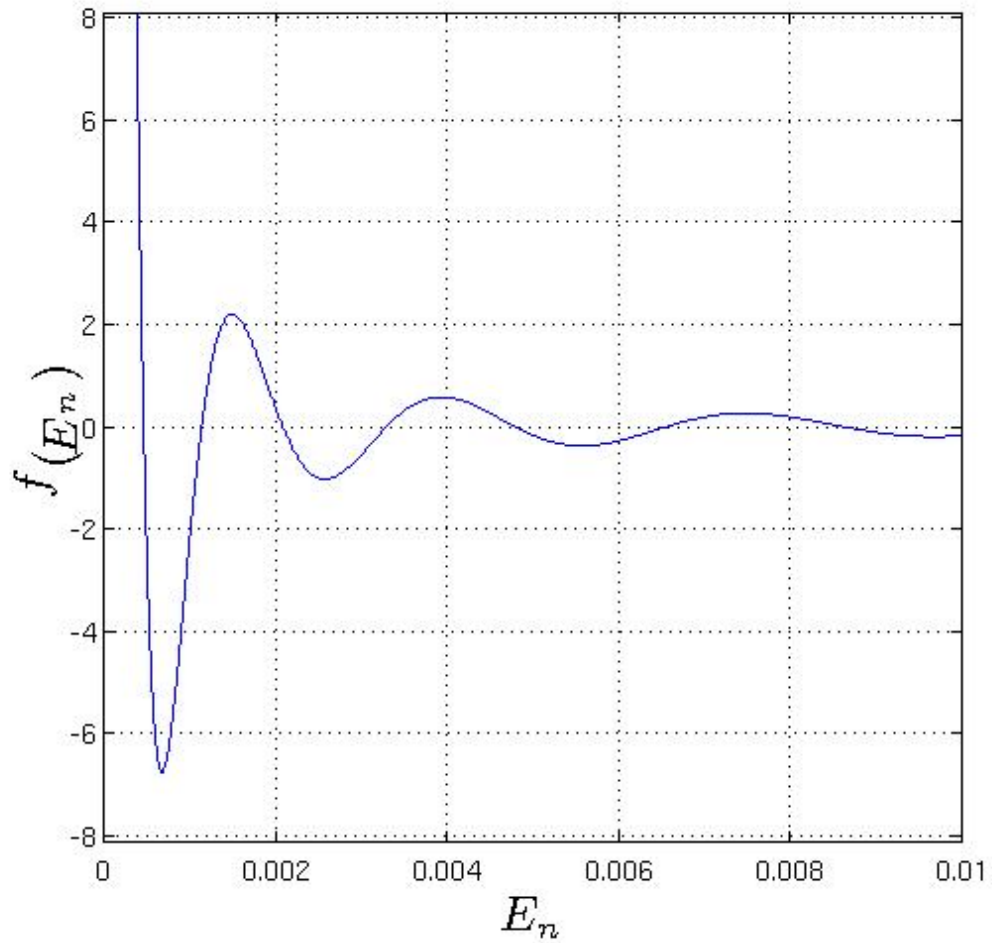
$$\psi_n(x) = A\sqrt{u(x)} \left( J_p[u(x)] - \frac{J_p[u(-R)]}{Y_p[u(-R)]} Y_p[u(x)] \right), \quad (4.9)$$

donde  $J_p(x)$  es la función de Bessel de orden  $p$  y  $Y_p(x)$  es la función de Bessel de segunda clase de orden  $p$ . Los valores propios se obtienen de la ecuación

$$f(E_n) = J_p[u(R)]Y_p[u(-R)] - J_p[u(-R)]Y_p[u(R)] = 0. \quad (4.10)$$

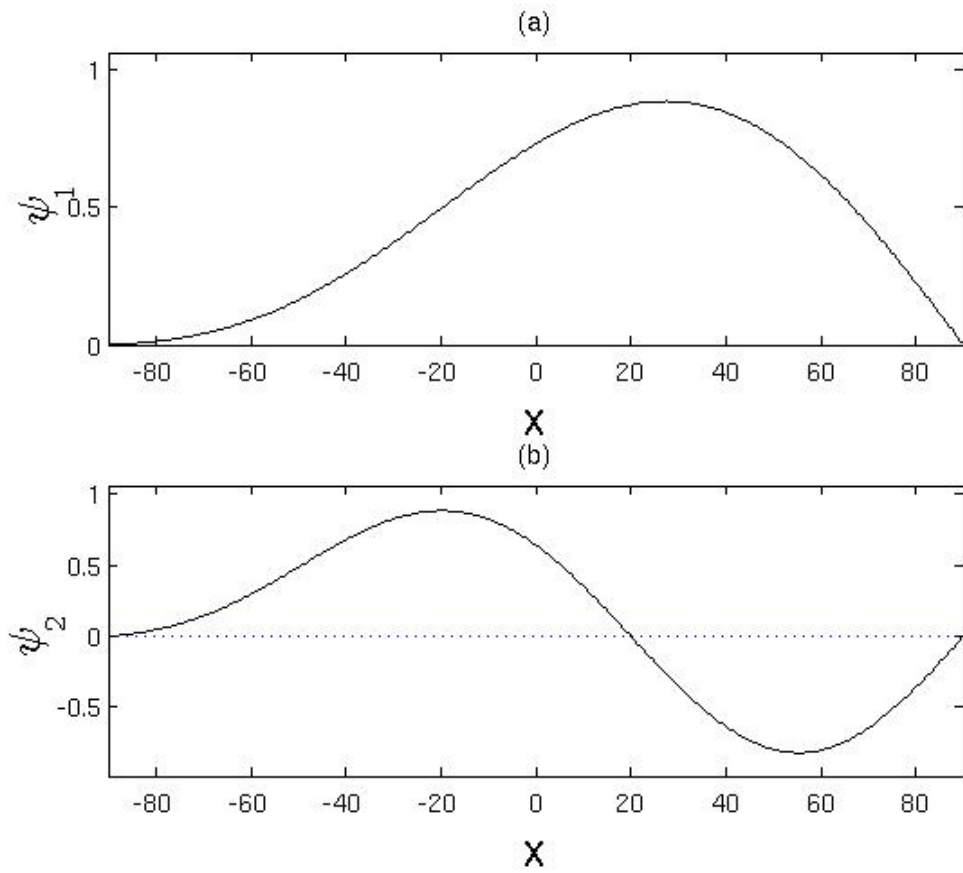
En la Fig. (4.5) se grafico la Ec. (4.10) que nos permite conocer los valores propios cuando la función es cero. En la Fig. (4.6) se muestran las primeras dos funciones propias obtenidas a partir de la Ec. (4.9) para un cúmulo con  $\delta = 3$ ,  $\phi_0 = .007$  y  $R = 1$ .

A partir del sistema de ecuaciones (Ec. 2.7) que resulta de separar la ecuación de EL, generamos numéricamente el perfil del parámetro de orden del cúmulo para valores específicos de  $\delta$ ,  $b$ ,  $C_R$  y  $R$  (Fig. 3.3 y 3.4). El perfil generado numéricamente lo evaluamos en el potencial (Ec. 4.1) de la ecuación de Schrödinger (Fig. 4.2 y 4.3). Usando el método de Numerov [26] en conjunto con el método de bisección obtuvimos las funciones propias y valores propios de la ecuación de Schrödinger para el potencial calculado numéricamente. En la Fig. (4.8) se muestran las primeras dos funciones propias para un perfil del parámetro de orden con constante de integración negativa  $C_R = -2.4 \times 10^{-9}$ ,  $\delta = 3$ ,  $b = 1$  y  $R = 130$ .

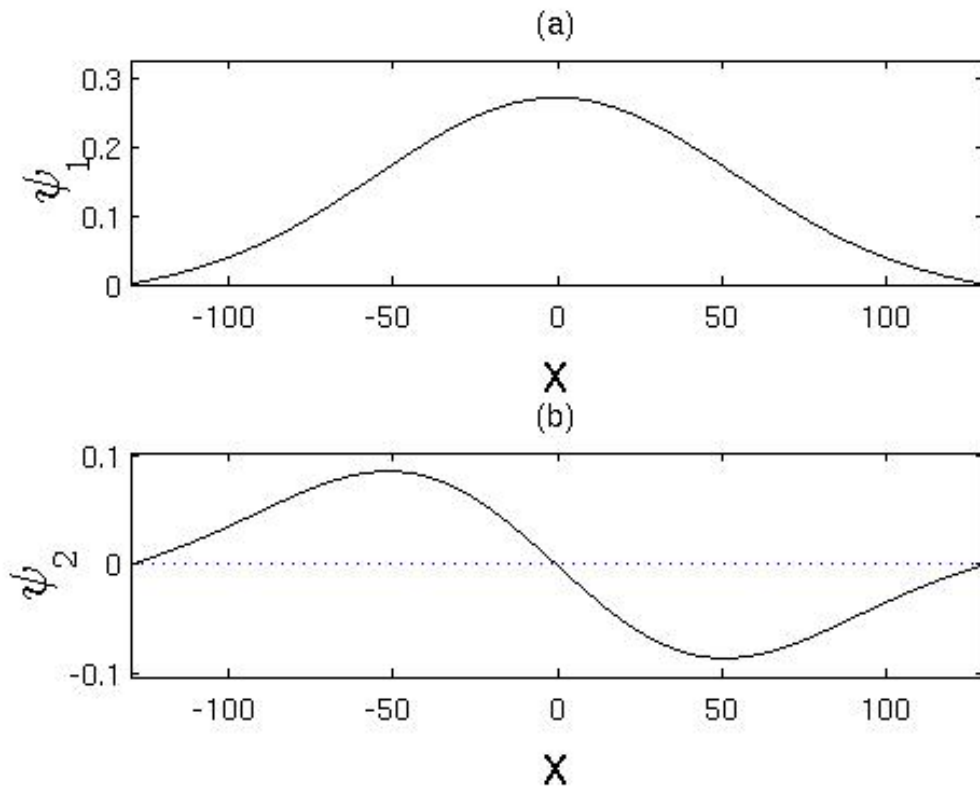


**Figura 4.5:** Ec. (4.10) a partir de la cual se determinan los valores propios ( $f(E_n) = 0$ ) de las soluciones de la ecuación de Schrödinger para el potencial con constante de integración  $C_R = 0$  de la Ec. (4.2) ( $\delta = 3$ ,  $\phi_0 = .007$ ,  $b = 1$  y  $R = 90$ ).

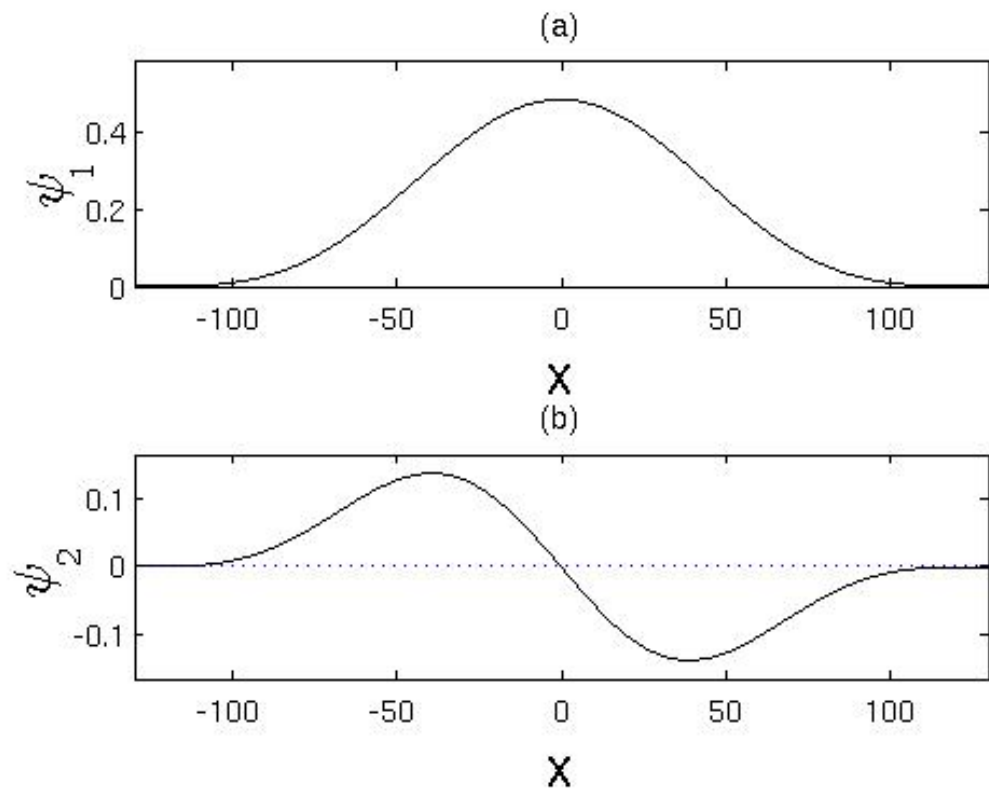




**Figura 4.6:** Funciones propias (Ec. 4.9) de la ecuación de Schrödinger para el potencial con constante de integración  $C_R = 0$  de la Ec. (4.2) con  $\delta = 3$ ,  $\phi_0 = .007$ ,  $b = 1$  y  $R = 90$ . (a) La primera función propia, (b) la segunda función propia.



**Figura 4.7:** Funciones propias de la ecuación de Schrödinger para el potencial con constante de integración positiva  $C_R = 2.4 \times 10^{-9}$ ,  $\delta = 3$ ,  $b = 1$  y  $R = 130$ . Obtenidas a través del método de Numerov. (a) La primera función propia, (b) la segunda función propia.



**Figura 4.8:** Funciones propias de la ecuación de Schrödinger para el potencial con constante de integración negativa  $C_R = -2.4 \times 10^{-9}$ ,  $\delta = 3$ ,  $b = 1$  y  $R = 130$ . Obtenidas a través del método de Numerov. (a) La primera función propia, (b) la segunda función propia.

# Capítulo 5

## Dinámica no lineal del cúmulo crítico

En este capítulo analizaremos la equivalencia entre el perfil del parámetro de orden del cúmulo crítico y el mapa de punto fijo de GR. Extenderemos el mapa de intermitencia que describe la dinámica del perfil del cúmulo a un mapa de punto fijo de GR [7, 8, 9].

### 5.1 Mapa del perfil del parámetro de orden

Como vimos en el capítulo 2 la ecuación de EL puede separarse en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (2.7)

$$\frac{d\phi}{dx} = \dot{\phi}$$

y

$$\frac{d\dot{\phi}}{dx} = -\frac{dU}{d\phi} = \text{sgn}(\phi)b(\delta + 1)|\phi|^\delta,$$

o integrarse para obtener una ecuación diferencial de primer orden (3.1)

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dx} = \pm\sqrt{2(C_R + b|\phi|^{\delta+1})}.$$

Si reemplazamos la derivada  $d\phi/dx$  por la diferencia finita  $(\phi_{n+1} - \phi_n)/\Delta x$  y la derivada  $d\dot{\phi}/dx$  por la diferencia finita  $(\dot{\phi}_{n+1} - \dot{\phi}_n)/\Delta x$ , podemos reescribir el sistema de ecuaciones (2.7) como [22]

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \dot{\phi}_n \Delta x \tag{5.1}$$

y

$$\dot{\phi}_{n+1} = \dot{\phi}_n + \text{sgn}(\phi) b(\delta + 1) |\phi_n|^\delta \Delta x,$$

o reescribir la ecuación análoga a la conservación de la energía (3.1) como

$$\phi_{n+1} = \phi_n \pm \sqrt{2(C_R + b|\phi_n|^{\delta+1})} \Delta x. \tag{5.2}$$

Del mapa de la Ec. (5.2) para una constante de integración nula  $C_R = 0$  y un paso  $\Delta x \rightarrow 1$  obtenemos

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \sqrt{2b} |\phi_n|^{\frac{\delta+1}{2}}. \tag{5.3}$$

El mapa anterior es equivalente a un mapa en la bifurcación tangente de la Ec. (2.18),

$$x' = x + ux^z + O(|x|^z),$$

donde  $u = \sqrt{2b}$  y  $z = (\delta+1)/2$ . El mapa en la bifurcación tangente de la Ec. (5.3) se muestra en la Fig. (5.1) y su trayectoria en la Fig. (5.2). La trayectoria del mapa reproduce cualitativamente al perfil del parámetro de orden con constante de integración nula  $C_R = 0$  (Fig. 3.2).

Al graficar el mapa de la Ec. (5.2) para una constante de integración positiva  $C_R > 0$  obtenemos el mapa de la Fig. (5.3) cuya trayectoria se muestra en la

Fig. (5.4). Como podemos ver, que la constante de integración  $C_R$  sea positiva es equivalente a un mapa fuera de tangencia y como consecuencia de esto se reproduce cualitativamente el perfil del parámetro de orden con constante de integración positiva  $C_R > 0$  (Fig. 3.3).

De las trayectorias del mapa de punto fijo de GR (Ec. 2.24),

$$x_t = x_0 \exp_z [x_0^{z-1} ut], \quad (5.4)$$

y el perfil del parámetro de orden del cúmulo crítico con constante de integración nula  $C_R = 0$  (Ec. 3.5),

$$\phi(x) = \phi_0 \exp_q [\phi_0^{q-1} ux]. \quad (5.5)$$

Podemos establecer una equivalencia al identificar  $z \rightarrow q = (\delta + 1)/2$ ,  $u = \sqrt{2b}$ ,  $x_t \rightarrow \phi(x)$ ,  $x_0 \rightarrow \phi_0$  y  $t \rightarrow x$ . Por lo que el mapa fuera de tangencia (Ec. 2.27) corresponde a los perfiles con  $C_R \neq 0$  de las Ec. (3.7) y (3.11).

## 5.2 Dinámica del cúmulo crítico

Como vimos en el capítulo 2 la evolución temporal del parámetro de orden es equivalente a la dinámica de un mapa intermitente [7, 8, 9, 12, 13] dado por la Ec. (2.32)

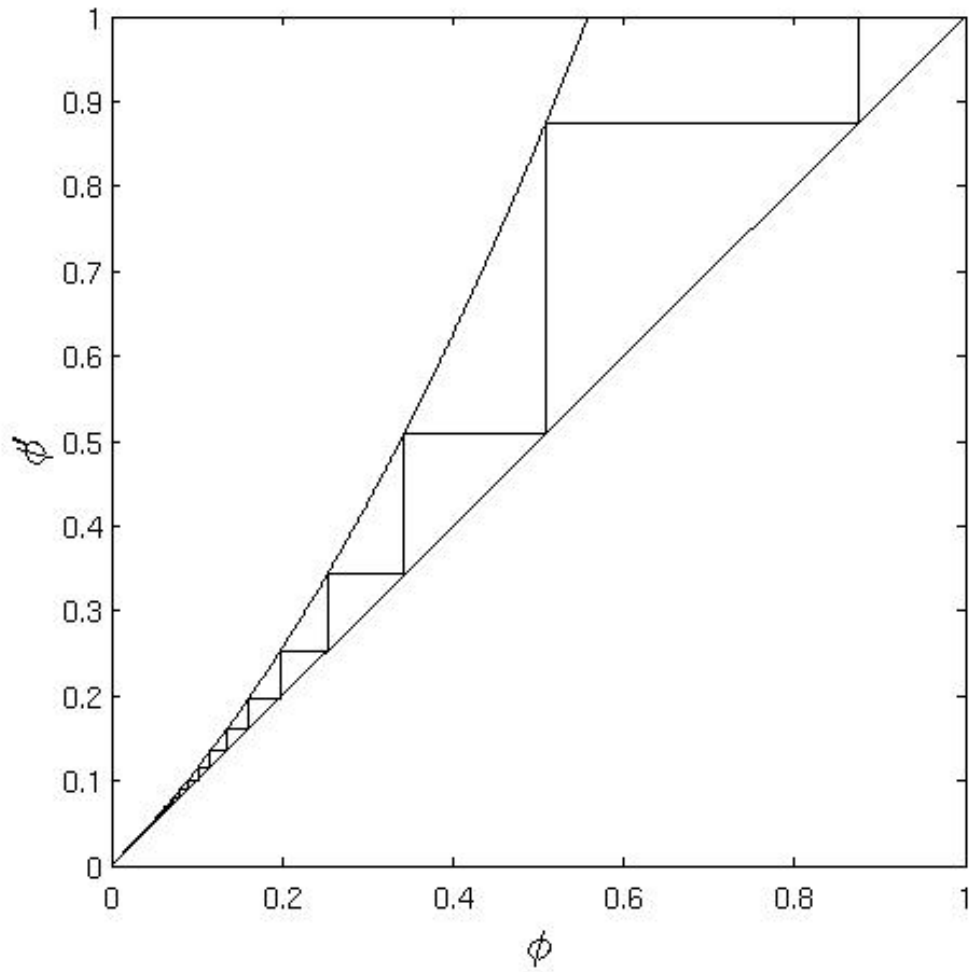
$$\phi_{t+1} = \epsilon + \phi_t + u\phi_t^{\delta+1},$$

donde  $\epsilon \sim R^{-1}$  y  $u = 2ab\mu(\delta + 1)/(\delta + 2)(\delta + 3)$ . De la equivalencia entre los perfiles del parámetro de orden del cúmulo crítico y el mapa de punto fijo de GR estableceremos una equivalencia cualitativa entre la dinámica del perfil del parámetro de orden y el mapa de punto fijo de GR fuera de tangencia (Ec. 2.27), dado por [23]

$$\begin{aligned}
\phi_{t+1} = & \phi_t \exp_z [u\phi_t^{z-1}] \\
& + \frac{\epsilon}{z-1} \phi_t^{-(z-1)} (1 - (z-1)u\phi_t^{z-1} - \exp_z [u\phi_t^{z-1}]^z) \\
& + O(\epsilon^2),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

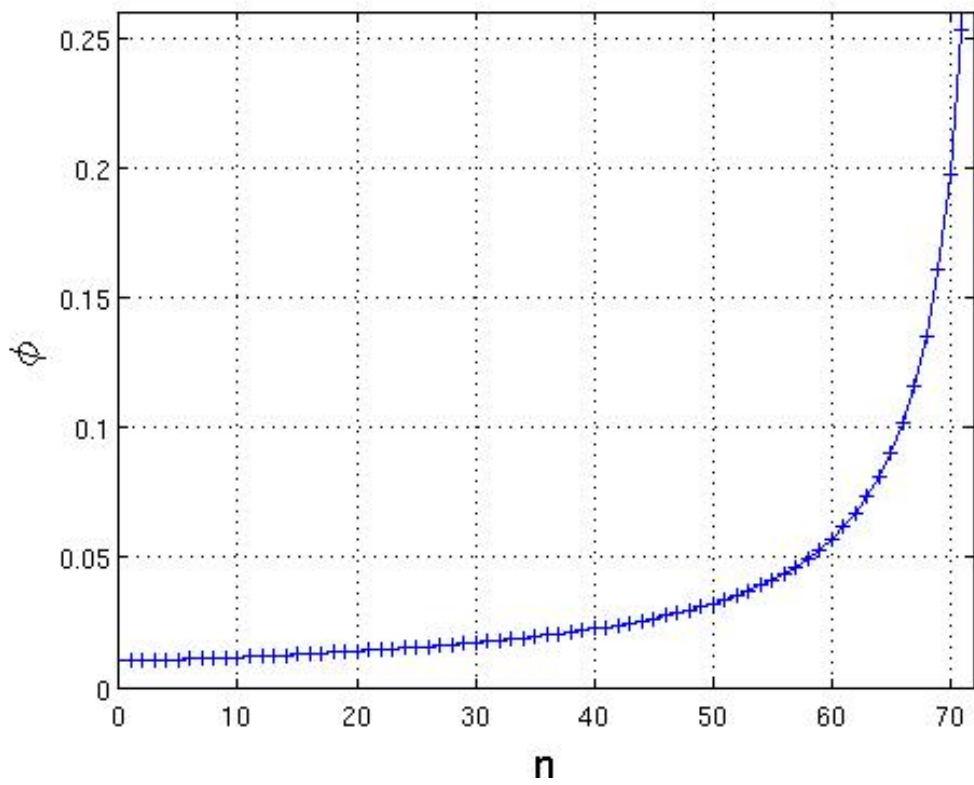
donde  $z = \delta + 1$ ,  $\epsilon \sim -R^{-1}$  y  $u = 2ab\mu(\delta + 1)/(\delta + 2)(\delta + 3)$ . En la Fig. (5.5) se muestra el mapa de la Ec. (5.6) que describe la dinámica del parámetro de orden del cúmulo crítico cuando  $\delta = 3$ ,  $u = 1$  y  $\epsilon = -0.001$ . En la Fig. (5.6) se muestra una trayectoria del parámetro de orden. De las Fig. (5.5) y (5.6) es posible observar que el mapa de la Ec. (5.6) presenta reinyección por lo que es equivalente al mapa que resulta de usar el método de Frobenius-Perron inverso [12, 13, 14].

El parámetro de deformación  $q$  para los perfiles del parámetro de orden del cúmulo crítico es  $q_s = (\delta + 1)/2$  mientras que el parámetro de deformación del mapa intermitente que describe la dinámica del parámetro de orden es  $q_d = \delta + 1$ , por lo que  $q_d = 2q_s$  esto puede relacionarse con el desplazamiento cuadrático medio donde  $\langle x^2 \rangle = 2Dt$ .

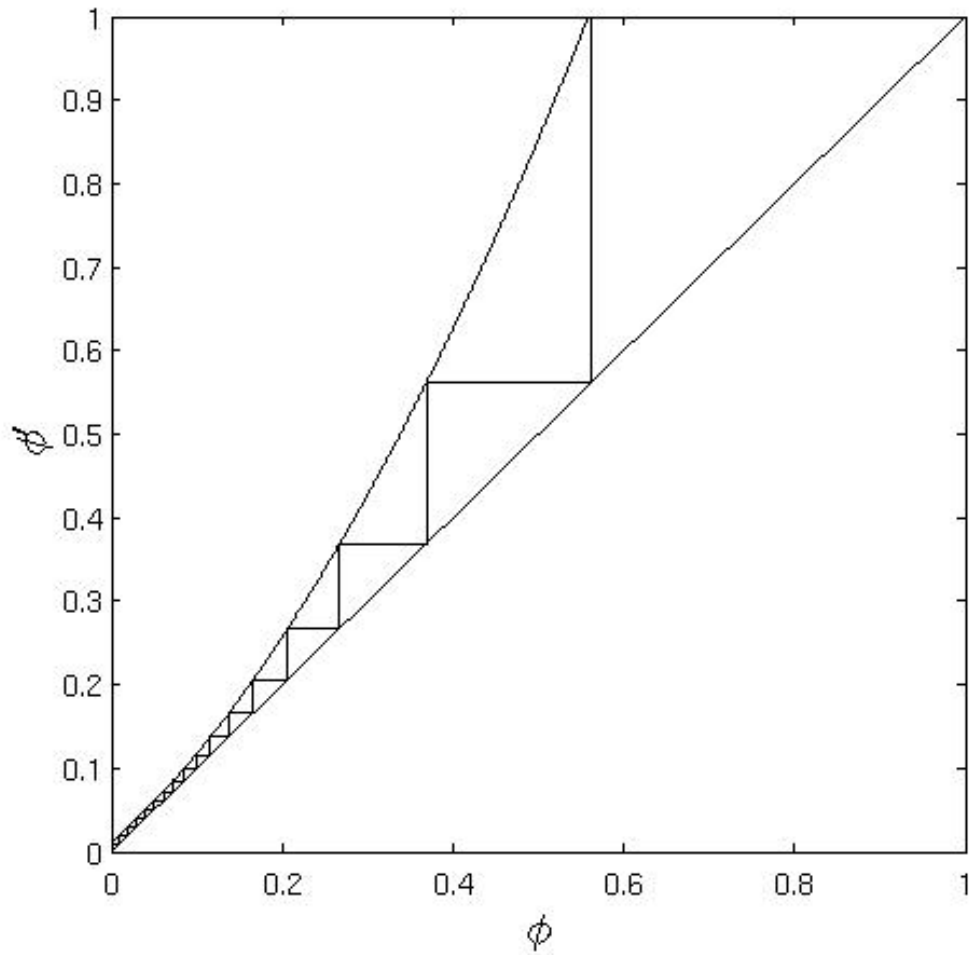


**Figura 5.1:** Mapa de la Ec. (5.3) que describe al perfil con constante de integración nula  $C_R = 0$  con  $\delta = 3$ ,  $b = 1$  y  $\phi_0 = 0.01$ .

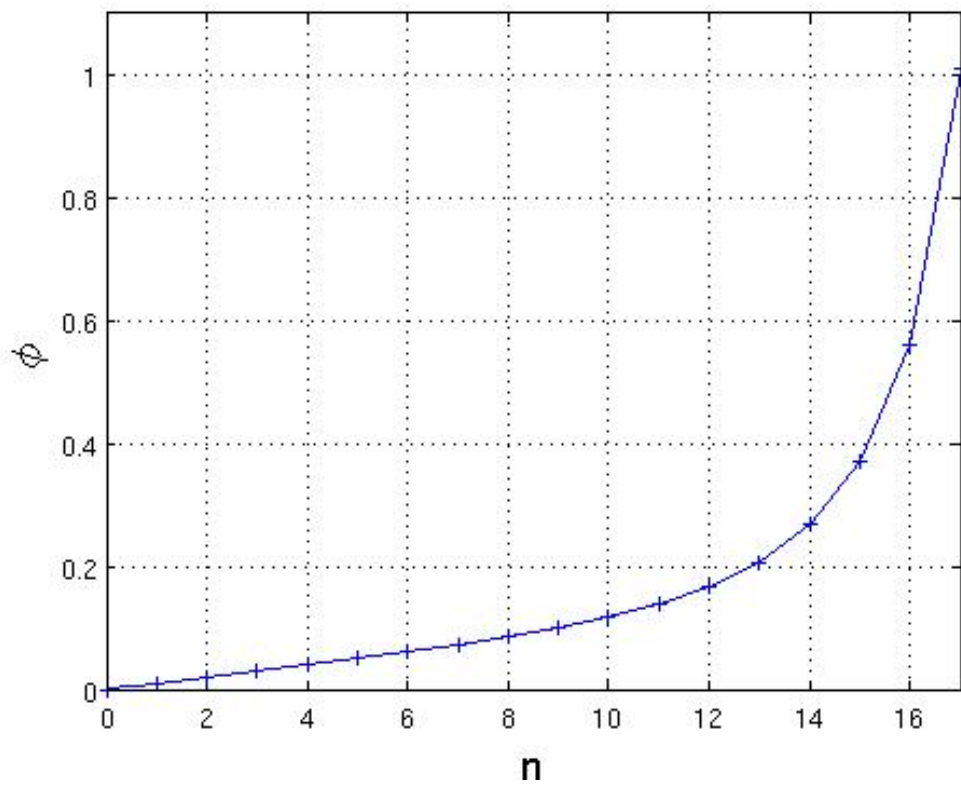




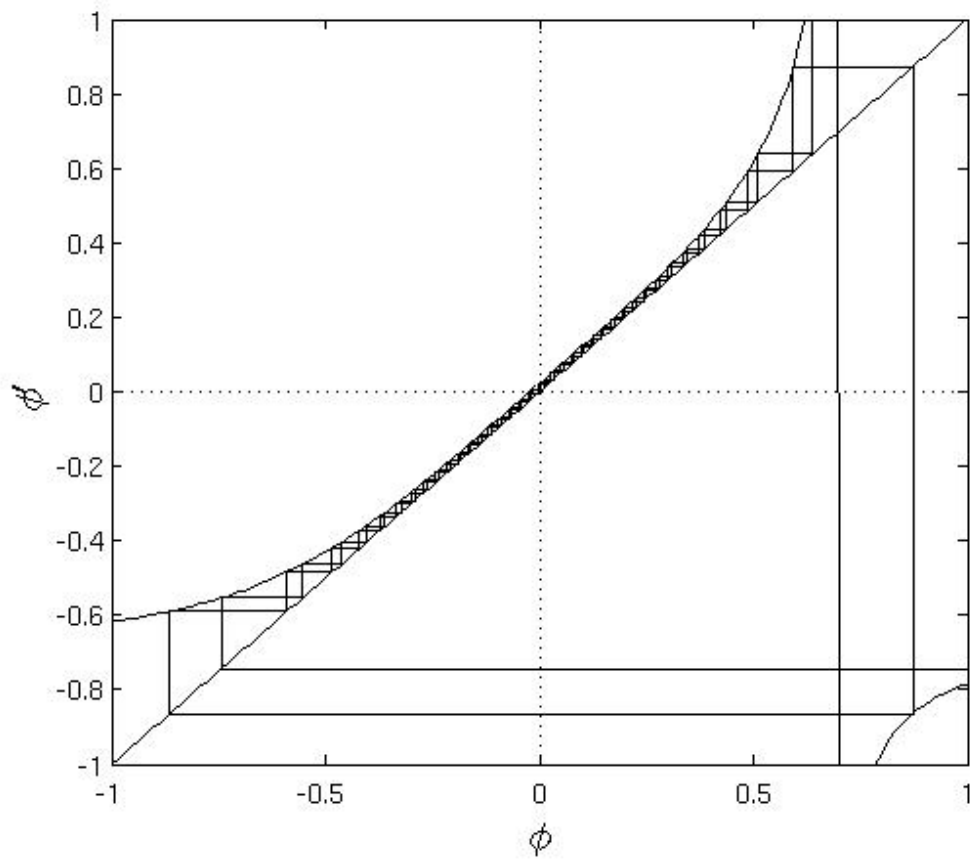
**Figura 5.2:** Perfil del parámetro de orden con constante de integración nula  $C_R = 0$  generado con el mapa de la Ec. (5.3) para  $\delta = 3$ ,  $b = 1$  y  $\phi_0 = 0.01$ .



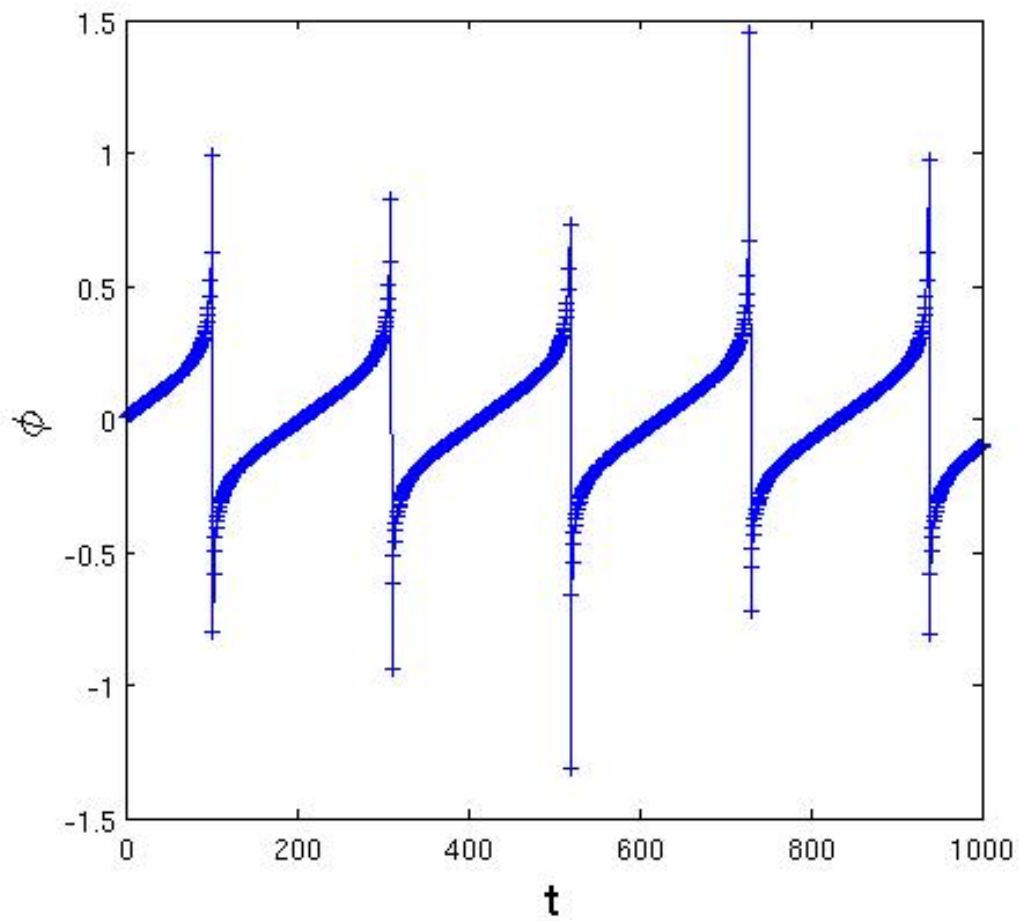
**Figura 5.3:** Mapa de la Ec. (5.2) que describe al perfil con constante de integración positiva  $C_R = 0.00005 > 0$  con  $\delta = 3$  y  $b = 1$ .



**Figura 5.4:** Perfil del parámetro de orden con constante de integración positiva  $C_R = 0.00005 > 0$  generado con el mapa de la Ec. (5.2).



**Figura 5.5:** Mapa de la Ec. (5.6) que describe la dinámica de un cúmulo crítico con  $z = 4$ ,  $u = 1$  y  $\epsilon = -.001$ .



**Figura 5.6:** Dinámica del parámetro de orden del cúmulo generada a partir del mapa de la Ec. (5.6) con  $z = 4$ ,  $u = 1$  y  $\epsilon = -.001$ .

# Capítulo 6

## Resultados y Conclusiones

Al explorar el espacio de fases de la ecuación de EL obtuvimos los perfiles del parámetro de orden del cúmulo crítico para valores de la constante de integración  $C_R \neq 0$ . Para valores grandes del parámetro de control es posible reescribir las expresiones de los perfiles del parámetro de orden del cúmulo (Ec. 3.5, 3.9, 3.13) mediante la función  $q$ -exponencial en función del tamaño  $R$  del cúmulo lo que sugiere la extensividad de una expresión de entropía- $q$ . Al añadir condiciones a la frontera al sistema es posible asociar a la constante de integración  $C_R$  con la fuerza que se ejerce en los bordes del sistema. Por lo tanto en ausencia de condiciones a la frontera la fuerza que el cúmulo ejerce sobre sus bordes para valores de la constante de integración  $C_R \neq 0$  no es contrarrestada y el cúmulo es inestable.

Para estudiar la estabilidad de los perfiles del parámetro de orden del cúmulo calculamos la segunda variación del funcional de energía libre de LGW con lo que obtuvimos la ecuación de Schrödinger. Al no haber restricciones para el parámetro de control  $\phi$  en la frontera del cúmulo su variación en los extremos del cúmulo es nula  $\delta\phi(R) = 0$  por lo que la función de onda de la ecuación de Schrödinger se anula en las fronteras del cúmulo. Esto equivale a un pozo de potencial infinito en el problema mecánico cuántico donde  $V(x) = \infty$  para  $x > |R|$ . Resolvimos la ecuación de Schrödinger para los potenciales dados por los distintos valores de la constante de integración  $C_R$ , obteniendo en cada uno de los casos valores propios positivos lo que indica que las fluctuaciones del perfil del parámetro de orden son estables. Como habíamos visto, en ausencia de condiciones a la frontera el cúmulo es inestable debido a la fuerza  $C_R$  que se ejerce sobre sus fronteras, por lo que esperábamos al menos un valor propio negativo.

Se estableció una equivalencia entre los perfiles del parámetro de orden del cúmulo para valores grandes de  $\phi$  y el mapa de punto fijo de RG en tangencia y fuera de tangencia. Dicha equivalencia la extendimos a la dinámica del cúmulo, esto nos permitió describir el comportamiento intermitente del cúmulo mediante un mapa de punto fijo de GR fuera de tangencia.

# Apendice

Integrando la ecuación diferencial de primer orden (2.8) obtenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} d\xi = \pm \int_{\phi(x_1)}^{\phi(x_2)} \frac{d\phi}{[2(C_R + b\phi^{\delta+1})]^{1/2}}, \quad (\text{A1})$$

de donde se desprende que

$$x_1 - x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2C_R}} \int_{\phi(x_1)}^{\phi(x_2)} \frac{d\phi}{\left[1 + \frac{b}{C_R}\phi^{\delta+1}\right]^{1/2}} \quad (\text{A2})$$

Realizando el siguiente cambio de variable

$$\psi = \frac{b}{C_R}\phi^a$$

y  $a = \delta + 1$  obtenemos

$$x_1 - x_2 = \pm \frac{a^{-1}}{\sqrt{2C_R}} \left(\frac{C_R}{b}\right)^{\frac{1}{a}} I, \quad (\text{A3})$$

donde

$$I = \int_{r_1^a}^{r_2^a} \frac{\psi^{\frac{1}{a}-1}}{(1+\psi)^{1/2}} d\psi$$

con



$$r_{1,2} = \left( \frac{b}{C_R} \right)^{1/a} \phi(x_{1,2}).$$

Reescribiendo la integral  $I$  de la forma

$$I = \int_0^{r_2^a} \frac{\psi^{\frac{1}{a}-1}}{(1+\psi)^{1/2}} d\psi - \int_0^{r_1^a} \frac{\psi^{\frac{1}{a}-1}}{(1+\psi)^{1/2}} d\psi \quad (\text{A4})$$

y realizando el cambio de variable

$$t = \frac{\psi}{r^a} \quad (\text{A5})$$

obtenemos

$$I = r_2 \int_0^1 t^{\frac{1}{a}-1} [1 - t(-r_2^a)]^{-1/2} dt - r_1 \int_0^1 t^{\frac{1}{a}-1} [1 - t(-r_1^a)]^{-1/2} dt. \quad (\text{A6})$$

Usando la formula

$$\int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z) \quad (\text{A7})$$

si

$$\beta = \frac{1}{a}, \quad \gamma = \frac{1}{a} + 1, \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad z = -r^a \quad (\text{A8})$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{r_2^a} \frac{\psi^{\frac{1}{a}-1}}{(1+\psi)^{1/2}} d\psi - \int_0^{r_1^a} \frac{\psi^{\frac{1}{a}-1}}{(1+\psi)^{1/2}} d\psi \\
&= a \left[ r_2 \, {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{a}; 1 + \frac{1}{a}, -r_2^a \right) \right. \\
&\quad \left. - r_1 \, {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{a}; 1 + \frac{1}{a}, -r_1^a \right) \right], \tag{A9}
\end{aligned}$$

donde  ${}_2F_1$  es la función hipergeométrica. Por lo que una primera solución está dada como

$$x_2 - x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2C_R}} [\phi(x_2)f_2(\phi_2, C_R) - \phi(x_1)f_1(\phi_1, C_R)] \tag{A10}$$

con

$$f_{1,2} = {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{\delta+1}; \frac{\delta+2}{\delta+1}, -\frac{b}{C_R} \phi(x_{1,2})^{\delta+1} \right). \tag{A11}$$

Usando la fórmula

$$\begin{aligned}
&{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) \\
&= \frac{\Gamma(\beta - \alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{-\alpha} {}_2F_1 \left( \alpha, \alpha - \gamma + 1; \alpha - \beta + 1; \frac{1}{z} \right) \\
&+ \frac{\Gamma(\alpha - \beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} (-z)^{-\beta} {}_2F_1 \left( \beta, \beta - \gamma + 1; -\alpha + \beta + 1; \frac{1}{z} \right) \tag{A12}
\end{aligned}$$

en la ecuación (A10) obtenemos

$$x_2 - x_1 = -\sqrt{\frac{2}{b}} (\delta - 1)^{-1} \left( \phi(x_2)^{-\frac{\delta-1}{2}} f_2 - \phi(x_1)^{-\frac{\delta-1}{2}} f_1 \right) \tag{A13}$$

con

$$f_{1,2} = {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{\delta - 1}{2(\delta + 1)}, \frac{3\delta + 1}{2(\delta + 1)}, -\frac{C_R}{b} \phi(x_{1,2})^{-(\delta+1)} \right). \quad (\text{A14})$$

## Soluciones para $C_R > 0$

Las órbitas  $C_R > 0$  corresponden a las curvas segmentadas de la figura 3.1. Para un perfil con  $C_R > 0$  simétrico en el eje  $x = 0$  pedimos que  $\phi(0) = 0$  por lo tanto de (2.8) obtenemos

$$C_R = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)_0^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}_0^2, \quad (\text{A15})$$

e integrando de  $x_1 = 0$  con  $\phi(0) = 0$  a  $x_2 = x$  con  $\phi(x)$  la ecuación (A10) resulta

$$x = \frac{1}{\dot{\phi}_0} \phi(x) f(\phi, \dot{\phi}_0) \quad (\text{A16})$$

con

$$f(\phi, \dot{\phi}_0) = {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{\delta + 1}; \frac{\delta + 2}{\delta + 1}, -\frac{2b}{\dot{\phi}_0^2} \phi(x)^{\delta+1} \right). \quad (\text{A17})$$

### Caso $\phi \ll \phi^*$

Renombrando

$$\phi^* = \left( \frac{\dot{\phi}_0^2}{2b} \right)^{\frac{1}{\delta+1}} \quad (\text{A18})$$

reescribimos la solución de la Ec. (A10) como

$$x = \frac{\text{sign}(\dot{\phi}_0)}{\sqrt{2b}} (\phi^*)^{1-\frac{\alpha}{2}} \left( \frac{\phi}{\phi^*} \right) f \left( \frac{\phi}{\phi^*} \right) \quad (\text{A19})$$

con

$$f \left( \frac{\phi}{\phi^*} \right) = {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{\delta+1}; \frac{\delta+2}{\delta+1}, - \left( \frac{\phi}{\phi^*} \right)^{\delta+1} \right). \quad (\text{A20})$$

Si  $\phi \ll \phi^*$  entonces la solución es aproximadamente

$$\phi(x) \approx \dot{\phi}_0 x \quad \text{cuando} \quad x \ll \frac{1}{\sqrt{2b}} \left( \frac{\dot{\phi}_0^2}{2b} \right)^{-\frac{\delta-1}{2(\delta+1)}}. \quad (\text{A21})$$

### Caso $\phi \gg \phi^*$

Usando la fórmula (A12) en la ecuación (A20) obtenemos

$$x = -\text{sgn}(\dot{\phi}_0) \sqrt{\frac{2}{b}} (\delta-1)^{-1} (\phi^*)^{-\frac{\delta-1}{2}} \left[ \left( \frac{\phi}{\phi^*} \right)^{-\frac{\delta-1}{2}} f_2 \left( \frac{\phi}{\phi^*} \right) - \text{sgn}(\phi) f_1 \right] \quad (\text{A22})$$

con

$$f_2 \left( \frac{\phi}{\phi^*} \right) = {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{\delta-1}{2(\delta+1)}, \frac{3\delta+1}{2(\delta+1)}, - \left[ \frac{\phi}{\phi^*} \right]^{-(\delta+1)} \right) \quad (\text{A23})$$

y

$$f_1 = \frac{\Gamma \left( \frac{3\delta+1}{2(\delta+1)} \right) \Gamma \left( \frac{1}{\delta+1} \right)}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{A24})$$

Despejando a  $\phi(x)$  obtenemos

$$\phi(x)f_2^{-\frac{2}{\delta-1}} = \text{sgn}(x)\text{sgn}(\dot{\phi}_0) \left[ \frac{b}{2}(\delta-1)^2 \right]^{-\frac{1}{\delta-1}} (x_1 - |x|)^{-\frac{2}{\delta-1}} \quad (\text{A25})$$

con

$$x_1 = \left[ \sqrt{\frac{b}{2}}(\delta-1) \right]^{-1} (\phi^*)^{-\frac{\delta-1}{2}} f_1. \quad (\text{A26})$$

Si  $\phi \gg \phi^*$ , entonces

$$\phi(x) = \text{sgn}(x)\text{sgn}(\dot{\phi}_0) \left[ \frac{b}{2}(\delta-1)^2 \right]^{-\frac{1}{\delta-1}} (x_1 - |x|)^{-\frac{2}{\delta-1}}. \quad (\text{A27})$$

## Soluciones para $C_R < 0$

Las órbitas  $C_R < 0$  corresponden a las curvas punteadas de la figura 3.1. Para un perfil con  $C_R < 0$  simétrico en el eje  $x = 0$  pedimos que  $\dot{\phi}(0) = 0$  por lo tanto de la Ec. (2.8) obtenemos

$$C_R = -b|\phi_0|^{\delta+1}, \quad (\text{A28})$$

donde  $\phi(0) = \phi_0$ . Integrando de  $x_1 = 0$  con  $\phi_0$  a  $x_2 = x$  con  $\phi(x)$  la ecuación (A13) resulta

$$|x| = -\sqrt{\frac{2}{b}}(\delta-1)^{-1}\phi_0^{-\frac{\delta-1}{2}} \left[ \left( \frac{\phi(x)}{\phi_0} \right)^{-\frac{\delta-1}{2}} f_2 \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right) - f_1 \right], \quad (\text{A29})$$

con

$$f_2 \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right) = {}_2F_1 \left[ 1/2, \frac{\delta-1}{2(\delta+1)}, \frac{3\delta+1}{2(\delta+1)}, \left( \frac{\phi(x)}{\phi_0} \right)^{-(\delta+1)} \right] \quad (\text{A30})$$

y

$$f_1 = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3\delta+1}{2(\delta+1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)} \quad (\text{A31})$$

**Caso**  $\phi \gg \phi_0$

Despejando a  $\phi(x)$  obtenemos

$$\phi(x) f_2^{-\frac{2}{\delta-1}} = \text{sgn}(\phi_0) \left[ \frac{b}{2} (\delta-1)^2 \right]^{-\frac{1}{\delta-1}} (x_1 - |x|)^{-\frac{2}{\delta-1}} \quad (\text{A32})$$

con

$$x_1 = \left[ \sqrt{\frac{b}{2}} (\delta-1) \right]^{-1} \phi_0^{-\frac{\delta-1}{2}} f_1. \quad (\text{A33})$$

Si  $\phi \gg \phi_0$  entonces

$$\phi(x) = \text{sgn}(\phi_0) \left[ \frac{b}{2} (\delta-1)^2 \right]^{-\frac{1}{\delta-1}} (x_1 - |x|)^{-\frac{2}{\delta-1}}. \quad (\text{A34})$$

**Caso**  $\phi \sim \phi_0$

Usando la fórmula

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z) = & \\ & \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1-z) \\ & + \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} {}_2F_1(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1-z) \end{aligned} \quad (\text{A35})$$

en la ecuación (A29) obtenemos

$$|x| = \sqrt{\frac{2}{b}}(\delta + 1)^{-1}\phi_0^{-\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{-\frac{\delta-1}{2}} \left[1 - \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{-(\delta+1)}\right]^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \quad (\text{A36})$$

con

$$f\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) = {}_2F_1\left(\frac{\delta}{\delta+1}, 1, \frac{3}{2}, 1 - \left[\frac{\phi}{\phi_0}\right]^{-(\delta+1)}\right). \quad (\text{A37})$$

Si  $\phi \sim \phi_0$  obtenemos

$$|x| = \sqrt{\frac{2}{b}}(\delta + 1)^{-\frac{1}{2}}\phi_0^{-\frac{\delta-1}{2}} \sqrt{\frac{\phi}{\phi_0} - 1}. \quad (\text{A38})$$

Despejando a  $\phi(x)$  resulta

$$\phi(x) = \frac{b}{2}(\delta + 1)\phi_0^\delta(x_1^2 + x^2) \quad (\text{A39})$$

con

$$x_1 = \left[\sqrt{\frac{b}{2}}(\delta + 1)\right]^{-1} \phi_0^{-\frac{\delta-1}{2}}. \quad (\text{A40})$$

Si  $x \ll x_1$  entonces el perfil toma la forma  $\phi(x) = \phi_0$ .

## Soluciones para $C_R = 0$

Para  $C_R = 0$  e integrando de  $x_1 = 0$  con  $\phi(0) = \phi_0$  y  $x_2 = x$  con  $\phi(x)$  la ecuación (A13) se reescribe como

$$x = -\text{sign}(\dot{\phi}_0)\sqrt{\frac{2}{b}}(\delta - 1)^{-1} \left(\phi(x)^{-\frac{\delta-1}{2}} - \phi_0^{-\frac{\delta-1}{2}}\right). \quad (\text{A41})$$

Despejando a  $\phi(x)$  obtenemos

$$\phi(x) = \text{sign}(\phi_0) \left[ \frac{b}{2}(\delta - 1)^2 \right]^{-\frac{1}{\delta-1}} |x_0 - x|^{-\frac{2}{\delta-1}} \quad (\text{A42})$$

con

$$x_0 = \text{sign}(\dot{\phi}_0) \text{sign}(\phi_0) \left[ \sqrt{\frac{b}{2}}(\delta - 1) \right]^{-1} |\phi_0|^{-\frac{\delta-1}{2}}. \quad (\text{A43})$$





# Bibliografía

- [1] Beck C. Schlogl, F. *Thermodynamics of Chaotic Systems*. Cambridge University Press: Cambridge, UK (1993).
- [2] Yalcin G.C., Velarde C., Robledo A. *Entropies for severely contracted configuration space* Heliyon 1 (2015) e00045.
- [3] Robledo A. *Generalized statistical mechanics at the onset of chaos*. Entropy 15 (12) (2013) 5178–5222.
- [4] C. Tsallis. *Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics*. J. stat. Phys., 52 (1988) 479.
- [5] M. Gell-Mann, C. Tsallis (Eds.) *Nonextensive Entropy- Interdisciplinary Applications*, Oxford University Press, New York (2004); ver <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm> para la bibliografía completa.
- [6] Robledo A. *Laws of Zipf and Benford, intermittency, and critical fluctuations*. Chin. Sci. Bull. 56 (2011) 3643–3648.
- [7] Robledo A. *Critical fluctuations, intermittent dynamics and Tsallis statistics*. Physica A 344 (2004) 631.
- [8] Robledo A. *Unorthodox properties of critical clusters*. Mol. Phys. 103 (2005) 3025-3030.
- [9] Robledo A. *q-statistical properties of large critical clusters*. Int J Mod Phys B 21 (2007) 3947-3953.
- [10] N.G. Antoniou, Y.F. Contoyiannis, F.K. Diakonou, C.G. Papadopoulos. *Fractals at  $T = T_c$  due to Instantonlike Configurations*. Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 4289.

- [11] N.G. Antoniou, Y.F. Contoyiannis, F.K. Diakonou. *Fractal geometry of critical systems*. Phys. Rev. E, 62 (2000) 3125.
- [12] Y.F. Contoyiannis, F.K. Diakonou. *Criticality and intermittency in the order parameter space*. Phys. Lett. A, 268 (2000) 286.
- [13] Y.F. Contoyiannis, F.K. Diakonou, A. Malakis. *Intermittent Dynamics of Critical Fluctuations*. Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 035701.
- [14] F.K. Diakonou, D. Pingel, P. Schmelcher, *A Stochastic Approach to the Construction of One-Dimensional Chaotic Maps with Prescribed Statistical Properties*. Phys. Lett. A, 264 (1999) 162.
- [15] N. Goldenfeld, *Lectures On Phase Transitions And The Renormalization Group* (Frontiers in Physics), Perseus publishing (1992).
- [16] P.M. Chaikin, T.C. Lubensky. *Principles of Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [17] Robledo A., Quintana J. *Landau density functional theory for one-dimensional inhomogeneities*. Physica A 257 (1998) 197.
- [18] Quintana J., Robledo A. *Surface transitions under confinement* J.Phys.:Condens. Matter 14 (2002) 2211-2221
- [19] Binder K. in: C. Domb, J.L. Lebowitz (Eds.), *Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 8, Academic Press, London (1983) p. 1.
- [20] Bukman D.J., Kolomiesky A.B., Widom B. *Fluctuations in the structure of interfaces*. Colloids Surf. A 128 (1997) 119.
- [21] Varea C., Robledo A. *Fluctuations and instabilities of curved interfaces*. Physica A 255 (1998) 269.
- [22] R. Pandit, M. Wortis, *Surfaces and interfaces of lattice models: Mean-field theory as an area-preserving map*. Phys. Rev. B 25 (1982) 3226.
- [23] Hu B., Rudnick J. *Exact Solutions to the Feigenbaum Renormalization-Group Equations for Intermittency*. Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 1645.
- [24] H.G. Schuster, *Deterministic Chaos. An Introduction*, 2nd Revised Edn, VCH Publishers, Weinheim(1988).
- [25] L.I. Schiff *Quantum Mechanics* McGraw-Hill (1968).

- [26] J. L. M. Quiroz González, D. Thompson, *Getting started with Numerov's method* Computers in Physics 11, 514 (1997).