



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

Posgrado en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias, UNAM

**Pérdida de energía de un quark en un plasma en
presencia de un campo magnético intenso.**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

Mario Villasante Barahona

DIRECTOR:

Dr. Erick Leonardo Patiño Jaidar
Facultad de Ciencias

COMITÉ TUTORAL:

Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero
Facultad de Ciencias

Dr. Alberto Güijosa Hidalgo
Instituto de Ciencias Nucleares

Ciudad de México, Junio 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

Se estudió la pérdida de energía de un quark inmerso en un plasma térmico en la presencia de un campo magnético. Incorporando el campo magnético en la acción de gravedad de Einstein obtuvimos un fondo gravitacional numérico. Se ha señalado que, bajo la dualidad/norma gravedad, se puede ver a este sistema como una teoría de norma tipo Yang-Mills con un campo magnético externo. Introducir un quark en tal teoría de norma es equivalente a introducir una cuerda en una configuración específica; resolver las ecuaciones de movimiento de la cuerda nos dice la dinámica del quark. Al calcular la dinámica de la cuerda, bajo nuestro fondo sensible al campo magnético, nos dimos cuenta que se modifica significativamente la manera en que el quark pierde energía. Más aún, pudimos ver que la dinámica del quark es confinada en la dirección en la que se encuentra el campo magnético. Tal efecto, de reducción de los grados de libertad, es característico de teorías de norma bajo la influencia de un campo magnético. De esta manera agregamos evidencia nueva a que el modelo gravitacional usado reproduce correctamente la dinámica que se espera de un plasma térmico permeado por campos magnéticos.

Índice general

Introducción	1
1. Elementos básico de cuerdas	5
1.1. Teoría de cuerdas	5
1.1.1. Branas	7
1.2. Supergravedad	9
2. Correspondencia AdS/CFT	11
2.1. Diccionario	14
2.2. Brana Negra y N D3-branas	16
2.3. Límite de Maldacena	17
2.4. ¿Cómo se relacionan las coordenadas de $AdS_5 \times S^5$ con MSYM?	19
2.5. MSYM vs QCD	21
2.5.1. Elevando la temperatura	22
3. Nuestra configuración gravitacional	25
3.1. Configuración del espaciotiempo	25
4. Quarks	33
4.1. Representación de un Quark en AdS/CFT	33
4.2. Una cuerda en movimiento	35
4.2.1. Movimiento perpendicular al campo magnético	39
5. Discusión y Conclusiones	45
Bibliografía	47

ÍNDICE GENERAL

Introducción

La *teoría cuántica de campos* (TCC) es una de las construcciones más exitosas para describir las interacciones fundamentales de nuestro universo. En una TCC el objeto matemático fundamental estudiado, y del cual obtenemos la información física relevante, es el *campo*. El campo es una función matemática suave, definida sobre todo el espacio.

El desarrollo de esta rama de la física, junto con los grandiosos avances tecnológicos del siglo pasado, lograron identificar los constituyentes mínimos del universo y sus interacciones fundamentales. Este conjunto de leyes de interacción y componentes materiales se organiza dentro del marco teórico que ahora llamamos el *Modelo Estándar de partículas elementales*. La piedra angular de dicho modelo es el haber identificado las fluctuaciones de los campos con las partículas que constituyen la materia e interacciones.

En el modelo Estándar se contemplan 3 fuerzas (en este modelo no hay cabida para la gravedad) y 24 partículas fundamentales. Las partículas están divididas en fermiones y bosones, dependiendo del tipo de estadística que cumplen. Éste modelo contiene los grupos de simetrías internas $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. El grupo $SU(3)$ se identifica directamente con la fuerza fuerte (el 3 indica el número de colores posibles para cada quark) y $SU(2) \times U(1)$ es el sector de las interacciones electrodébiles.

En una teoría cuántica de campos generalmente es posible separar la acción del sistema en una parte cuadrática en el campo, identificada con la parte cinética libre \mathcal{L}_{cin} , y una parte interactuante $g\mathcal{L}_{int}$. En este caso a g se le denomina *constante de acoplamiento*; la cual nos da información sobre la magnitud de las interacciones de nuestra teoría con respecto al término cinético. Dependiendo del valor de g la teoría puedes ser *débilmente acoplada* ($g \ll 1$) o *fuertemente acoplada* ($g \gg 1$).

Parte del éxito del modelo estándar se debe a que las interacciones electrodébiles están descritas por una TCC débilmente acoplada. Al ser débilmente acoplada fue posible desarrollar un método matemático perturbativo con el cual se pueden calcular cantidades físicamente relevantes para comparar con los experimentos;

ÍNDICE GENERAL

este método perturbativo se consolida en los diagramas de Feynman.

La teoría que intenta explicar las interacciones fuertes entre gluones y quarks es la *cromodinámica cuántica* (QCD). Es una teoría fuertemente acoplada, por lo cual es imposible describirla por medio de expansiones perturbativas. Sin embargo, se han construido una serie de métodos que permiten obtener información parcial sobre el comportamiento de estos sistemas. Algunos de estos métodos son: la QCD en la red, permitiendo obtener propiedades no dinámicas del sistema. Aún así, el estudio y desarrollo de técnicas matemáticas capaces de analizar sistemas fuertemente acoplados es un problema abierto.

Los experimentos de colisión entre iones pesados, como los realizados en el RIHC ó el LHC, ponen a prueba la *cromodinámica cuántica*. Al colisionar los iones se forma por una fracción de segundo un *plasma de quarks y gluones* (QGP); análisis experimentales y teóricos sugieren que este plasma es un sistema fuertemente acoplado [36, 37]. Estos sistemas quedan fuera del campo de análisis de *teoría de campos cuántica*, enfatizando la necesidad de desarrollar técnicas capaces de describir sistemas acoplados fuertemente.

Un aspecto importante en el QGP es la existencia de campos magnéticos. Cuando las colisiones entre iones no son centrales existen campos magnéticos muy intensos. En [6] se ha podido explicar, usando un fondo magnético desarrollado por [13], la aparente sobre producción de fotones reportada en [2, 41].

En el trabajo presente nos enfocaremos en estudiar un sistemas fuertemente acoplados, y aunque cualquiera de las herramientas desarrolladas para estudiar estos sistemas tienen su mérito por sí mismas, nosotros trabajaremos con la denominada dualidad *norma/gravedad*. Ésta herramienta surge en 1997; después de una serie de publicaciones en las que, Juan Maldacena, estudiaba teorías tipo Yang-Mills conjeturó la equivalencia entre un sistema puramente gravitacional y una teoría de norma.

Durante los últimos 3 lustros no ha aparecido una prueba matemática rigurosa que asegure contundentemente la validez de tal correspondencia, sin embargo, después de más de 18 años, su artículo sobre pasa las 12 000 citas. Gran parte de la comunidad científica, quienes tiene contacto directo con la conjetura propuesta por Maldacena, está convencida de su validez; debido a la gran cantidad de revisiones no triviales, que la correspondencia norma/gravedad, ha superado.

La correspondencia *norma/gravedad* ha tenido gran éxito debido a que relaciona la relatividad con la mecánica cuántica; dos ramas de la física que hasta ahora, desde el marco de trabajo del modelo Estándar, parecían completamente distintas. La equivalencia entre una teoría gravitacional y una teoría cuántica de norma arroja luz sobre lo que se debe esperar de una teoría de gravedad cuántica. Por la forma en que están relacionada los distintos objetos en la teoría es posible

hacer cálculos en un lado de la correspondencia y después interpretar los resultados en la teoría equivalente. Este proceso ha permitido desarrollar intuición sobre lo que debemos esperar en teorías de norma en la región de acoplamiento fuerte. Cabe resaltar que el flujo de información en la correspondencia AdS/CFT es hacia ambos lados, haciendo posible aprender lecciones importantes de ambas teorías.

El objetivo principal del trabajo presente es estudiar la dinámica de un quark, en un plasma de quarks y gluones. Este tema se ha estudiado de manera exhaustiva durante la última década [18, 20]. En el trabajo presente además agregaremos un campo magnético a la acción de Einstein el cual se piensa es dual a una teoría de norma con un campo magnético externo [13]. La semejanza de la dinámica de nuestro quark, modelada a través de la dualidad, con la dinámica de un sistema con un campo magnético intenso, agrega evidencia a favor de que nuestro sistema gravitacional reproduce correctamente a un sistema cuántico en presencia de un campo magnético intenso.

En el primer capítulo expondremos los elementos básicos de teoría de cuerdas necesarios para seguir la discusión. En el capítulo segundo se describe lo que entendemos por dualidad norma/gravedad, terminando con una comparación entre las características de QCD y Yang-Mills máximamente supersimétrica. En el tercer capítulo se explica la generación del fondo gravitacional sensible al campo magnético. Finalmente exponemos lo que entendemos por un Quark en nuestro modelo, resolvemos las ecuaciones de movimiento correspondientes e interpretamos nuestros resultados.

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1

Elementos básico de cuerdas

En el afán de hacer un trabajo medianamente autocontenido daremos una explicación somera para clarificar el proceso que condujo a proponer la equivalencia entre un teoría gravitacional y una teoría de campo cuántica. Con esta idea en mente antes debemos explicar un poco más sobre las estructuras que existen en una teoría de cuerdas.

1.1. Teoría de cuerdas

Durante el siglo pasado, apartir de la incapacidad de la mecánica newtoniana para explicar fenómenos fuera de las escalas macroscópicas que rigen nuestra intuición, se desarrollaron dos de las teorías más exitosas de la física: la teoría cuántica y la relatividad general. Sin embargo, ambas descripciones son incompatibles entre sí; en 4 dimensiones al aplicar las técnicas de cuantización convencionales a una teoría relativista obtenemos que las interacciones gravitacionales se vuelven infinitas, siendo imposible manejarlas a través de procesos perturbativos. Tales efectos sugieren la necesidad de modificar la relatividad general para escalas de longitud pequeñas (o, equivalentemente, energías muy altas). Al intentar crear una teoría de gravedad cuántica consistente surge lo que hoy denominamos como *teoría de cuerdas*.

El punto de partida de la teoría de cuerdas fue postular que los objetos fundamentales de la materia, y todos los campos físicos, son cuerdas; es decir, objetos extendidos unidimensionales [17, 35]. La escala a la que se podrían apreciar la naturaleza cuerdera de nuestro universo coincide con la escala a la cual los efectos cuánticos se vuelven relevantes, ésta escala es denominada la *longitud de Planck* (l_P). En unidades naturales, $\hbar = 1$ y $c = 1$, la constante de Newton es $G_N = l_P^2$ y $l_P \approx 1.6 \times 10^{-33} \text{cm}$.

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICO DE CUERDAS

La dinámica de una cuerda bosónica está regida por la acción de Nambu-Goto [42]:

$$S = -T_0 \int \sqrt{-g} d\tau d\sigma, \quad g_{ab} \equiv G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu ; \quad (1.1)$$

en donde g_{ab} es la métrica inducida sobre la hoja de mundo, debido a la parametrización escogida, T_0 es la tensión de la cuerda y $g = \det g_{ab}$. $G_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio tiempo en la que se encuentra inmersa la cuerda. En nuestro caso, la métrica $G_{\mu\nu}$ será la construida a partir de las soluciones numéricas obtenidas en la sección 4.2.1. Ésta acción cuantifica el área de la hoja de mundo de la cuerda (al cambiar de objetos puntuales a objetos extendidos en una dimensión, la *línea de mundo* de la que se habla en relatividad, pasa a ser un objeto de una dimensión mayor; una hoja de mundo). Las funciones $X^\mu(\tau, \sigma)$ se denominan las *coordenadas de la cuerda* y nos dice como se deforma la cuerda, para cada coordenada existe una hoja de mundo la cual parametrizamos usando las cantidades (τ, σ) . Si bien existen muchas maneras de parametrizar nuestra cuerda nosotros usaremos la denominada *norma estática*. En la que τ se identifica con la coordenada temporal de nuestro espacio y σ con una coordenada espacial.

La cuerda bosónica se denomina así porque los campos, X^μ , que se incluyen en el análisis son puramente bosónicos. Es evidente que una teoría de cuerdas en la que solamente existan fuentes de campos bosónicos está lejos de constituir una descripción fiable de la realidad, sin embargo las ventajas pedagógicas la han revalidado a través del tiempo sirviendo como punto de partida para comenzar a discutir una teoría de cuerdas consistente en sí misma. Al agregar campos fermiónicos, simetrías y restricciones para obtener una teoría físicamente aceptable se llegó a 5 teorías consistentes que viven en 10 dimensiones espacio-temporales. En 1995 [22] se descubrió que éstas 5 teorías están relacionadas por un conjunto de dualidades, o bien como una sola teoría de gravedad 11 dimensional, ver fig. 1.1. El descubrimiento de estas dualidades reavivaron el entusiasmo en la teoría de cuerdas como candidato a ser una teoría de unificación.

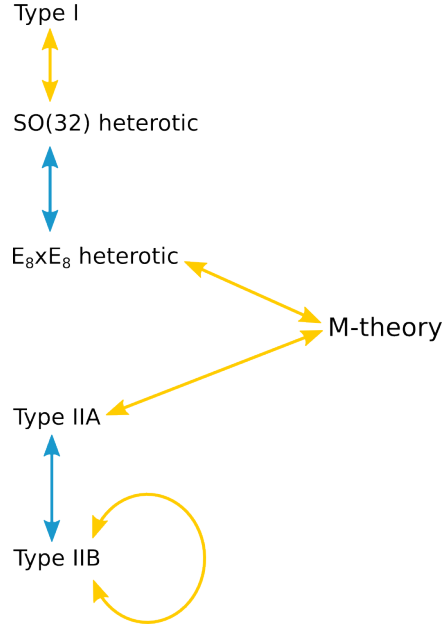


Figura 1.1: Diagrama de los 5 tipos de teoría de cuerdas existentes. Las líneas azules representan la *dualidad S* y las líneas amarillas *dualidad T*. Estas dualidades se pueden combinar para encontrar las equivalencias entre cualquier teoría.

En nuestro caso la teoría que nos interesa es la *tipo IIB*. Las teorías tipo II contienen cuerdas cerradas orientables y tienen supersimetría; es decir, contiene campos tanto bosónicos y fermiónicos que se pueden transformar entre ellos dejando la acción invariante. La diferencia entre una y otra es que la teoría IIA es *no-quiral* y IIB es *quiral*. La quiralidad se observa en los modos de propagación de los cuadros sobre la cuerda. En las teorías II existen campos propagándose en dos direcciones opuestas, se habla de modos derechos e izquierdos, en IIA las transformaciones supersimétricas sobre cada modo solamente difieren por un signo; en IIB cada modo tiene una magnitud diferente.

1.1.1. Branas

Una de las consecuencias del descubrimiento de la dualidad T fue el descubrimiento de lo que hoy conocemos como *D-branas* [12, 21]. Las D-branas son objetos extendidos en los cuales, las cuerdas abiertas tienen sus extremos fijos. En la literatura generalmente se usa el término *Dp-branas*, el cual hace referencia a una D-brana con p dimensiones; es decir, cubre un *volumen de mundo* p+1 dimensional. Las puntas de las cuerdas están fijas en las direcciones normales a la brana (existen $(d - p)$ de estas direcciones, en una teoría gravitacional d+1

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICO DE CUERDAS

dimensional). En las direcciones tangentes las puntas son libres de moverse.

Como ya hemos mencionado, se piensa a las cuerdas como el objeto fundamental tanto de materia, como campos, que existen en el universo. Es fácil entonces pensar que las D_p -branas estarán cargadas con los campos generados por las cuerdas que viven dentro de su volumen de mundo. En específico, se descubrió que las branas poseen un campo de norma (Polchinski demostró que son fuentes de los campos Ramond-Ramond [34]) y, por cada coordenada normal, existe un campo escalar. Los distintos campos que puede sostener una brana depende de las condiciones de frontera que ponemos sobre las puntas de las cuerdas para que el proceso de cuantización de ésta sea consistente. Los campos tipo Ramond-Ramond son todos los campos consistentes con imponer condiciones periódicas sobre las puntas de las cuerdas. Además de la periodicidad se imponen condiciones de Neumann o Dirichlet (punta libre o fija).

Cuando se observan los estados no masivos se encuentran $(p + 1) - 2$ estados que transforman como vectores de Lorentz en la hoja de mundo, por lo tanto no es descabellado asociarlos con estados fotónicos con polarización. En resumen, una D_p -brana siempre tiene un campo de Maxwell viviendo en su volumen de mundo. Los modos de las cuerdas normales a las direcciones de las D_p -branas son campos escalares; son escalares con respecto a transformaciones de Lorentz en el volumen de mundo.

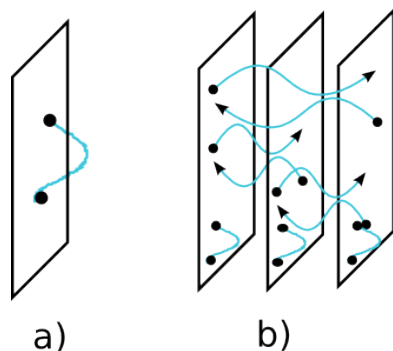


Figura 1.2: Representación esquemática de la forma en que se pueden fijar las cuerdas a un sistema de una (a) y tres (b) D-branas.

Cuando tenemos N branas coincidentes las maneras en que las cuerdas se pueden fijar a las D-branas incrementa a N^2 ; se pueden separar las cuerdas en N^2 sectores para su análisis. Es decir, las excitaciones de las branas son de N^2 tipos distintos (ver 1.2); generalizando el argumento del párrafo anterior, hay un campo de norma por cada sector. Cada campo de norma es etiquetado por dos índices, A_{ab} , los cuales identifican en que brana comienza y en cual termina la

cuerda que describe la excitación del mismo campo. Es importante notar que $A_{ab} \neq A_{ba}$, debido a que las cuerdas tienen una orientación definida, lo cual nos habla de la naturaleza no abeliana del grupo de norma asociado. Estos N^2 campos que interactúan entre sí forman una teoría tipo Yang-Mills con grupo de norma $U(N)$ (geoméricamente se puede interpretar como la equivalencia de cambiar las puntas de las cuerdas entre branas).

Nótese que podemos reescribir nuestro grupo unitario como: $U(N) = SU(N) \times U(1)$. Así es fácil interpretar que el factor $U(1)$ codifica los grados de libertad asociados al centro de masa de las N branas y $SU(N)$ con las excitaciones de las cuerdas relativas al centro de masa. En resumen, los campos se describen con matrices $N \times N$, con un grupo de norma $U(N)$.

Una acción efectiva capaz de describir a una brana y sus excitaciones, a baja energía, resulta coincidir con la acción de Dirac-Born-Infeld [29]:

$$S_{DBI} = -T_p \int d^{p+1} \vec{\sigma} e^{-\phi} \sqrt{-\det(G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} + 2\pi l_c^2 F_{\mu\nu})}, \quad (1.2)$$

con $\vec{\sigma}$ las coordenadas de volumen de mundo, $T_p = 1/((2\pi)^p g_c l_c^{p+2})$ la tensión de la brana, $F^{\mu\nu}$ el tensor electromagnético, ϕ el dilatón y $B_{\mu\nu}$ un campo que aparece en el sector de cuerdas cerradas con condiciones periódicas. Es la longitud característica de una cuerda l_c , cuando decimos que trabajamos en un régimen de baja energía nos referimos específicamente a $E \ll \frac{1}{l_c}$.

La acción efectiva para N Dp-branas es una versión no abeliana de la acción de Born-Infeld [40]. En el límite $l_c \rightarrow 0$ esta acción se simplifica a la de una teoría $\mathcal{N} = 4$ *Super Yang-Mills* (MSYM), si identificamos las constantes de acoplamiento:

$$S_{NDp} \rightarrow S_{MSYM} \iff 2\pi g_c = g_{YM}^2. \quad (1.3)$$

Ahora el término MSYM nos puede abrumar pero lo abordaremos eventualmente abundaremos en sus características más adelante, por ahora es suficiente mantener en la mente que es una teoría de cuántica campos.

1.2. Supergravedad

En la sección anterior esbozamos como los modos no masivos de un conjunto de N Dp-branas coincidentes, bajo cierto límite se puede describir en términos de una teoría de campos, en la que las Dp-branas son fuentes de los campos. Sin embargo, la teoría IIB de cuerdas está constituida por cuerdas cerradas que viven en un espacio 10-dimensional.

CAPÍTULO 1. ELEMENTOS BÁSICO DE CUERDAS

Cuando pensamos en una teoría de cuerdas en la que las fluctuaciones de los campos de la cuerda son pequeñas, nos es más útil usar una acción efectiva. En particular, para la teoría IIB se puede escribir dicha acción en dos partes:

$$S_{IIB,ef} = S_{SUGRA} + S_{l_c}. \quad (1.4)$$

El primer término de (1.4) es dominante en el régimen de baja energía; este término es el que define a la teoría conocida como *supergravedad* (SUGRA) *Tipo IIB en 9+1 dimensiones*:

$$S_{SUGRA} = \frac{1}{(2\pi)^7 g_s^2 l_c^8} \int d^{10} \mathbf{x} \sqrt{-g} e^{-\phi} (R + 4 \nabla_M \phi \nabla^M \phi - \frac{1}{12} H_{MNR} H^{MNR}). \quad (1.5)$$

El término S_{l_c} contiene una serie infinita de correcciones (provenientes de las fluctuaciones de la cuerda y sus interacciones) con derivadas de segundo orden, o superior, de los campos de SUGRA. Por análisis dimensional sabemos que estas vienen acompañadas por potencias de l_c , $S_{l_c} \propto \mathcal{O}(l_c^2)$.

Por otra parte, uno de los puntos que dió origen al descubrimiento de la dualidad norma/gravedad fue la comparación de un sistema de N D3-branas con una *Brana Negra* (ver fig. 2.2). La comparación de entropías, masa y carga explotó la sospecha que una brana negra y una pila de N Dp-branas describían un mismo sistema, pero en regímenes distintos.

La brana negra fue descubierta por Horowitz y Ströminger [24], es una solución para Supergravedad tipo IIB, con campo Ramond-Ramond encendido. El caso particular de una brana negra 3-dimensional tiene una métrica de la forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = H(r)^{-1/2} (-f(r) dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + H(r)^{1/2} \left(\frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_5^2 \right), \quad (1.6)$$

donde

$$H(r) = 1 + \zeta \left(\frac{L}{r} \right)^4, \quad f(r) = 1 - \left(\frac{r_h}{r} \right)^4 \quad (1.7)$$

y con el dilatón determinado por el valor $g_c = e^\varphi$. A ζ se le conoce como parámetro de extremalidad y r_h determina un horizonte de eventos. Se puede pensar a las 3-branas negras como una generalización de un hoyo negro en 3+1 dimensiones. La solución es independiente de las coordenadas (t, \vec{x}) , tiene simetría esférica en la esfera S^5 y se reduce a un espacio tipo Minkowski para $r \gg L, r_h$.

En el capítulo siguiente veremos como se relacionan la brana negra y la pila de N Dp-branas.

Capítulo 2

Correspondencia AdS/CFT

La dualidad de Maldacena ó correspondencia norma/gravedad establece una relación entre los elementos de una teoría de cuerdas tipo IIB inmersa en un fondo que es *asintóticamente* Anti-de-Sitter (AdS) y los elementos de una *Teoría de Campos Conforme* (CFT). Antes que nada explicaremos que significa AdS y veremos que características necesita tener una CFT. Después haremos una revisión de la conjetura, sin demostrarla formalmente, pero presentando los elementos más importantes que intervienen en el modelo. En la última sección de este capítulo puntualizaremos las discrepancias y puntos de encuentro entre la teoría de campo que puede ser modelada vía esta dualidad, MSYM, y las características que posee QCD.

¿Qué es AdS?

Anti-de Sitter es un espacio máximamente simétrico, con grupo de simetría $SO(4, 2)$, y curvatura negativa constante. El término “de Sitter” fue acuñado en honor a William de Sitter (1872-1934). AdS_n es una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa y sin fuentes. La cubierta universal, para la solución $n = 5$, se puede expresar como el hiperboloide

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = -L^2. \quad (2.1)$$

Una de las distintas maneras de parametrizar el hiperboloide es usando las

CAPÍTULO 2. CORRESPONDENCIA ADS/CFT

coordenadas de Poincaré:

$$\begin{aligned} X_{-1} &= \frac{r}{L} \\ X_0 &= \frac{L^2}{2r} \left[1 + \frac{r^2}{L^4} (L^2 + \vec{x}^2 - t^2) \right] \\ \vec{X} &= \frac{r}{L} \vec{x} \\ X_4 &= \frac{L^2}{2r} \left[1 + \frac{r^2}{L^4} (-L^2 + \vec{x}^2 - t^2) \right], \end{aligned}$$

con las coordenadas, t, r y $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, barriendo los valores $0 \leq r < \infty$ y $-\infty < t, \vec{x} < \infty$. En este sistema coordenado la métrica del espacio-tiempo toma la forma

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2} dr^2. \quad (2.2)$$

Las coordenadas de Poincaré solamente cubren una sección del espacio tiempo completo, como se ve en la figura 2.1. Se puede apreciar que, para observadores en el sistema coordenado la hipersuperficie $r = 0$ es un horizonte causal; los eventos que pueden influir causalmente son únicamente los que se encuentran dentro de la cuña de Poincaré. A los puntos que se encuentran en $r = \infty$ se le denomina la frontera de AdS .

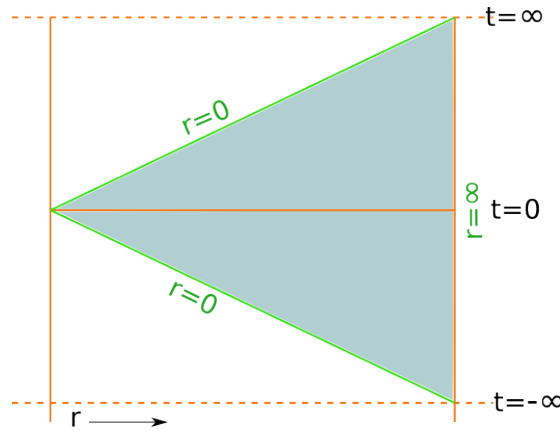


Figura 2.1: Representación esquemática, dos dimensional de la *cuña de Poincaré*. La zona gris delimita el espacio cubierto por el parche de Poincaré.

Dado que la cuña de Poincaré es solamente una porción del espacio AdS completo, en general, las trayectorias tipo tiempo o nulas salen de esta región en

un tiempo propio finito, pero en un tiempo de Poincaré infinito. Más adelante veremos que el tiempo de Poincaré es el que se relaciona directamente con el tiempo de la teoría de norma correspondiente; por lo que la cuña es suficiente para reproducir la física en la CFT.

¿Qué es CFT?

Una teoría de campos conforme es una teoría que no tiene parámetros dimensionales. Una CFT en un espacio 4-dimensional, tipo Minkowski, tiene un conjunto de 15 generados, los cuales cierran un álgebra la cual es denominada *álgebra de Lie conforme*. Los generadores se pueden dividir en 3 grupos conocidos:

- 6 generadores de Lorentz,
- 4 generadores de traslaciones,
- 4 generadores de transformaciones conformes,
- 1 generador de cambio de escalas.

Los generadores de Lorentz son los conocidos grupos de transformaciones (tres rotaciones, tres “empujones” y traslaciones en cada dirección espacio-temporal). Las transformaciones de escala cambian reescalando todas las coordenadas por igual: $x^\mu \rightarrow sx^\mu$. Las transformaciones conformes especiales están identificadas por el parámetro b^μ : $x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b_\nu x^\nu + b^2 x^2}$. Los generadores de todas estas transformaciones se ordenan en un álgebra conocida como *álgebra de Lie conforme*. El grupo conforme en 3+1 dimensiones es isomorfo a $SO(4, 2)$ (ó al grupo $Espín(4, 2) = SO(2, 2)$ si la teoría contiene fermiones).

Yang-Mills máximamente supersimétrica (MSYM) ó también conocido como *Yang-Mills con $\mathcal{N}=4$ supersimetrías* (SYM $\mathcal{N}=4$) es una CFT caracterizada por dos parámetros: N_c y g_{YM} . N_c es el rango del grupo de norma $SU(N_c)$ y g_{YM} regula la intensidad de acoplamiento del campo gluónico.

Esta teoría incluye al campo de norma gluónico (asociado al grupo $SU(N_c)$) y materia *exótica*: 6 campos escalares sin masa y 4 espinores de Weyl sin masa. El término *supersimetría*, proviene del hecho que la teoría es invariante bajo transformaciones que mezclan entre sí a los campos bosónicos y fermiónicos. Al escribir $\mathcal{N} = 4$ debemos entender que nuestra teoría tiene 4 *supercargas*, es decir, existen 4 maneras distintas de combinar los campos bosónicos y fermiónicos. El número máximo de generadores supersimétricos (para una teoría SYM en 3+1 dimensiones) es 4; si queremos mantener globales las supersimetrías.

CAPÍTULO 2. CORRESPONDENCIA ADS/CFT

Es importante destacar que MSYM es una teoría *finita*, es decir, al calcular correladores de los campos no se encuentra divergencia UV alguna. Por esta razón la constante de acoplamiento no depende de la energía con la que se explora; teorías como QED **sí** tienen una dependencia energética en la constante de acoplamiento.

Para incluir las supersimetrías $\mathcal{N} = 4$ en el álgebra conforme, necesitamos agregar nuevos generadores bosónicos y fermiónicos. La simetría cuenta con nuevos generadores fermiónicos $S_{\alpha f}$ y $\bar{S}_{\dot{\alpha} f}$; conocidos como supercargas conformes, y generadores bosónicos R_A ; los cuales consituyen la llamada *simetría R*. La simetría R se caracteriza por ser un grupo de simetría interno que rota las supercargas conformes entre sí; tiene como grupo de norma $SO(6)$. En resumen, el grupo superconforme se puede escribir como $SO(4, 2) \times SO(6)$.

Sin embargo, todavía nos falta identificar el último grupo de simetría de MSYM. Ésta simetría es discreta y relaciona los regímenes de acoplamiento débil y fuerte. Definiendo el parámetro

$$\tau = \frac{4\pi i}{g_{YM}^2} + \frac{\theta_{YM}}{2\pi}, \quad (2.3)$$

en donde θ_{YM} es el ángulo del instantón. Se sabe MSYM es invariante para $\tau \rightarrow \tau + 1$, la conjetura de *Montonen-Olive* [31] afirma que también es invariante bajo $\tau \rightarrow -1/\tau$. La combinación de ambas transformaciones forman el grupo simpléctico $SL(2, \mathbb{Z})$, generado por:

$$\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau - d} \quad \text{con : } ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Este grupo de simetría es justamente el grupo de la *dualidad S* de la teoría de cuerdas, ver fig. 1.1. Cuando $\theta_{YM} = 0$, se puede apreciar claramente que las inversión de τ es una correspondencia entre acoplamiento débil/fuerte.

2.1. Diccionario

El enunciado angular de la dualidad, en su primera formulación [30], se puede expresar como:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{MSYM SU(N)} \\ \text{en Minkowsky } 3+1 \end{array}} \simeq \boxed{\begin{array}{c} \text{Teoría IIB} \\ \text{en asintóticamente } AdS_5 \times S^5 \end{array}}. \quad (2.5)$$

Explicuemos un poco que es lo que entendemos de cada lado de (2.5). En el lado derecho del enunciado anterior debemos entender por **Teoría IIB** como la teoría de cuerdas cerradas que vive en un fondo 10-dimensional **asintóticamente** $AdS_5 \times S^5$. Este fondo es dinámico, es decir, incluye cualquier proceso gravitacional que respete la geometría AdS si nos acercamos a la frontera; desde pequeñas deformaciones en el fondo hasta el colapso de un hoyo negro. Del lado izquierdo entendemos por **MSYM SU(N)** como una teoría maximamente supersimétrica tipo Yang-Mills con grupo de norma $SU(N)$.

La conjetura de Maldacena también nos dice como se relacionan los parámetros que caracterizan cada teoría. Del lado de cuerdas tenemos el acoplamiento entre cuerdas, g_c , y la curvatura de AdS_5 en unidades de longitud de cuerda, L/l_c , (la cual es la misma que la curvatura de la S^5) y en la teoría de norma tenemos el rango del grupo, N , y el acoplamiento de Yang-Mills, g_{YM} , expresado generalmente en términos del acoplamiento de 't Hooft, $\lambda \equiv g_{YM}^2 N$. Estas relaciones están dadas por

$$4\pi g_c = g_{YM}^2 \sim \frac{\lambda}{N} \quad \text{y} \quad \frac{L}{l_c} = (4\pi g_c N)^{1/4} \sim \lambda^{1/4}. \quad (2.6)$$

En el régimen $L/l_c \gg 1$ la acción de la teoría de cuerdas IIB se simplifica al lagrangiano de supergravedad clásica; es decir la longitud característica de las cuerdas, l_c , es despreciable con respecto a la longitud característica de AdS_5 , por lo tanto las cuerdas se pueden tratar como partículas. Por otra parte, para suprimir las correcciones cuánticas, debemos mantener g_c pequeña; todo esto se resume en $N \gg \lambda \gg 1$. En un principio se pensaba que el enunciado (2.5) solamente era válido en este régimen, recientemente se ha comenzado a creer que su validez es más amplia, sin embargo, se carece de las herramientas necesarias para estudiar la teoría de cuerdas de manera no perturbativa (en potencias de $1/N$ y $1/\lambda$) [26].

Cabe resaltar que (2.5) es una dualidad entre dos teorías con acoplamiento fuerte/débil. Cuando la teoría de norma es fuertemente acoplada (y por lo tanto las técnicas perturbativas fallan), podemos obtener información del lado de la teoría de cuerdas, la cual es débilmente acoplada, y viceversa.

A pesar de las grandes diferencias entre ambas teorías, Maldacena nos dice que las teorías son completamente equivalentes; existe una correspondencia 1-1 entre los elementos de cada teoría.

A lo largo del presente capítulo desarrollaremos con más precisión las implicaciones de (2.5). Primeramente explicaremos los elementos que intervienen dentro de esta dualidad, a continuación esbozaremos el proceso que lleva a la equivalencia entre un sistema cuántico y un gravitacional, los cuales a través de la historia se han mostrado disímiles, por decir poco.

2.2. Brana Negra y N D3-branas

Como mencionamos al final del capítulo anterior, la comparación entre una 3-brana negra y un sistema de N D3-branas sirvió como punto de partida para la dualidad. Una pila de N Dp-branas sin excitar tiene exactamente la misma masa y carga que una brana negra [34]. Aunado a lo anterior, el *principio de equivalencia* expuesto en [23], en el que se comparan las entropías de un conjunto de N Dp-branas y la de una **brana negra extremal** ($\zeta = 1$ y $r_h = 0$) cerca del punto de transición ($g_c N = 1$); sugiere que la brana negra extremal no es otra cosa que los campos de supergravedad generados por el conjunto de branas coincidentes.

Para ser más precisos cabe resaltar que la brana negra y el conjunto de N D-branas, si bien son descripciones alternativas del mismo sistema físico, cada una es válida en regímenes mutuamente excluyentes. En el límite en el que la escala espacio-temporal en la que varían los campos de fondo, es lo suficientemente grande al compararla con la escala de cuerdas, $(L/l_c)^4 \propto g_c N \gg 1$, el lagrangiano efectivo de cuerdas coincide con el lagrangiano de SUGRA. Es decir, las cuerdas son tan pequeñas que la deformación del espacio debido a su presencia es despreciable. Precisamente es este el régimen donde la solución encontrada en [24] es válida. También se podría pensar que si agregamos el suficiente número de branas, $N \gg 1$, el peso de las branas poco a poco deforma el espacio tiempo hasta formar una brana negra.

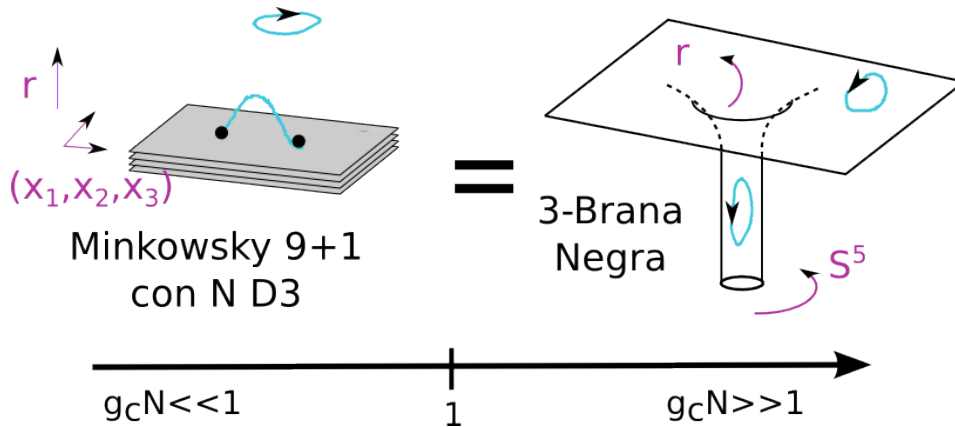


Figura 2.2: Equivalencia entre la brana negra (der.) y un sistema de N D3-branas.

Por otra parte, recalquemos que la descripción de bajas energías, $E \ll 1/l_c$, de N Dp-branas se reduce a MSYM después del límite $l_c \rightarrow 0$.

Si bien la relación entre ambos sistemas está lejos de ser una dualidad de

2.3. LÍMITE DE MALDACENA

manera formal, puesto que hasta ahora se desconoce una prueba rigurosa, los trabajos sobre las amplitudes de dispersión [19] y absorción de cuerdas abiertas [28], cerca del punto de transición ($g_c N \sim 1$), a baja energía; muestran una similitud que es difícil de ignorar. En la siguiente sección analizaremos como se transforman estos sistemas en el *límite de Maldacena*, el cual cada elemento de un sistema tiene su recíproco en el otro sistema.

2.3. Límite de Maldacena

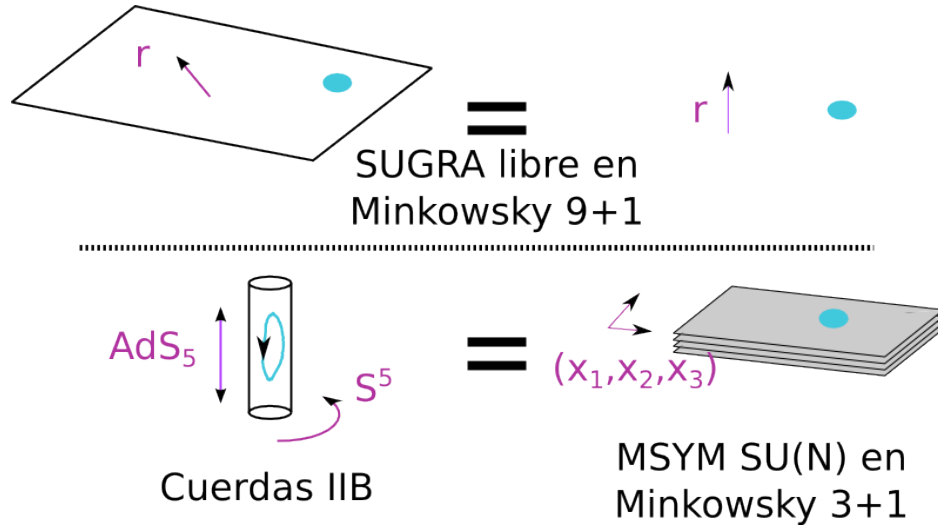


Figura 2.3: Sistemas resultantes al tomar el límite $E \ll \{1/l_c, 1/L\}$. Cada uno de los sistemas se desacopla de los modos no masivo de SUGRA.

Para vislumbrar la dualidad, tal como la planteó Maldacena en un comienzo, debemos tomar un límite más:

$$E \ll \frac{1}{l_c}, \frac{1}{L}. \quad (2.7)$$

Este límite se le conoce como **límite de ultrabaja energía** y, por la relación (2.6), sabemos en realidad se pide un límite al mismo tiempo, dependiendo en qué régimen estamos:

$$E \ll \begin{cases} 1/L & \text{si } g_c N \gg 1 \\ 1/l_c & \text{si } g_c N \ll 1 \end{cases}. \quad (2.8)$$

CAPÍTULO 2. CORRESPONDENCIA ADS/CFT

Una vez tomado este límite es cuando nuestro sistema representado en la figura 2.2 se transforma al sistema 2.3; el cual sí es una dualidad en toda la extensión de la palabra.

Bajo el límite de ultrabaja energía se obtiene un sistema con dos características muy importantes:

- **Los sistemas se desacoplan en dos partes.** Según Klebanov [28], ambos sistemas tiene la misma sección eficaz para absorber modos no masivos de SUGRA : $\sigma \propto (EL)^8$. La brana negra es incapaz de absorber los modos de SUGRA debido a que su tamaño característico, L , es muy pequeño para sostener modos con longitud de onda, $1/E \gg L$. Para la pila de N D3-branas, la sección eficaz de absorción es proporcional a: $\sigma \propto E(g_c N)^{1/4} l_c \ll (g_c N)^{1/4}$, y en el régimen de D3-branas, $g_c N \ll 1$, esta cantidad es despreciable.
- En cada lado de la correspondencia, **las descripciones se simplifican drásticamente.** En el lado de la brana negra, las cuerdas IIB viven en un espacio tipo Anti-de-Sitter. Las cuerdas abiertas ancladas en la pila de branas se reducen a los modos no masivos de la teoría MSYM $U(N)$ en 3+1 dimensiones.

Veámos ahora como es que la brana negra se reduce a la métrica AdS , tras el límite de Maldacena. Para seguir la discusión de [30] tomaremos el caso de la brana negra extremal; en la sección 2.5.1 veremos las consecuencias en la teoría de norma cuando $r_h \neq 0$ y $\zeta \neq 1$. Si observamos la métrica (1.6), en especial la componente temporal g_{tt} , vemos que la energía que medimos, E_{prop} , depende de la posición en que nos encontramos. La energía propia E_{prop} de un objeto, medida a una distancia r , y la energía del mismo objeto, medida por un observador en $r = \infty$ están relacionadas por

$$E_\infty = \sqrt{-g_{tt}} E_{prop} = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/4} E_{prop} \quad (2.9)$$

En la relación (2.7), cuando hablamos de energía E , pensamos en la energía medida por un observador en $r = \infty$, es decir $E = E_\infty$. Nuestra condición a ultra baja energía corresponde a fijar una curvatura arbitrariamente grande o bien hacer física en la zona *cercana al horizonte*.

Cuando estamos en la zona *cercana al horizonte*, $r \ll L$, la métrica se ve exactamente como la de un espacio AdS , ec. (2.2), con una esfera S^5 en cada punto del espacio:

$$ds^2 = \left(\frac{r^2}{L^2} dx_\nu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2} dr^2\right) + L^2 d\Omega_5^2. \quad (2.10)$$

2.4. ¿CÓMO SE RELACIONAN LAS COORDENADAS DE $AdS_5 \times S^5$ CON MSYM?

Desde esta perspectiva, $\frac{r}{L} \ll 1$, la energía propia de los modos en la garganta de la brana negra se puede tomar arbitrariamente grandes debido a que $\frac{r}{L} E_{prop} \sim E$. Sobre este espacio $AdS_5 \times S^5$ se propagan todos los modos de la teoría de cuerdas IIB.

En resumen, empezando con el sistema representado en la figura 2.2 a través del límite de ultrabajas energía hemos regresado al postulado de Maldacena (2.5); a excepción del adjetivo **asintóticamente**.

Para entender el término *asintóticamente* en el enunciado de la dualidad usaremos un argumento intuitivo. Si esperamos que la física completa de MSYM sea dual a la teoría de cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$, debemos considerar también deformaciones arbitrariamente grandes, tanto del fondo gravitacional como de los valores de fondo de los campos. Es por esta razón que el enunciado más preciso de la dualidad incluye un fondo gravitacional **asintóticamente** AdS (*aAdS*), es decir que en la frontera, $r = \infty$, nuestro fondo sea AdS .

2.4. ¿Cómo se relacionan las coordenadas de $AdS_5 \times S^5$ con MSYM?

Si bien gran parte del trabajo, que se ha realizado después del descubrimiento de la dualidad [30], se ha enfocado de en construir el diccionario de AdS/CFT hasta la fecha todavía no se ha finalizado. Una de las maneras más inmediatas de encontrar las relaciones entre ambas teorías es observando las simetrías existentes. Si es cierta la correspondencia, las simetrías contenidas en MSYM deben respetarse en la teoría de cuerdas correspondiente.

Como vimos en la sección anterior, MSYM es una teoría de campos conforme; invariante bajo el grupo conforme en 3+1 dimensiones, $SO(4, 2)$, el cual coincide justamente con el grupo de isometrías de AdS_5 . En la teoría IIB, el grupo de isometrías de S^5 corresponde a $SO(6)$, coincidiendo exactamente con el grupo de la simetría R. La simetría R rota los campos fermiónicos entre sí, y al mismo tiempo, los campos escalares. Por esta razón se piensa que las coordenadas de la esfera cinco dimensional parametrizan el espacio interno de MSYM; los campos con los que trabajaremos deben tener números cuánticos bien definidos bajo $SO(6)$.

La dualidad S en MSYM, ec. (2.4), también tiene su análogo en la teoría de cuerdas IIB. En IIB existe una transformación de simetría que mezcla dilatón con el axión y deja invariante la acción de SUGRA en el marco de Einstein; solamente intercambia las cargas de las cuerdas bajo los campos Ramond-Ramond y Neveu-Schwarz, $B_{MN} \leftrightarrow C_{MN}$. Ésta dualidad relaciona una teoría IIB con acoplamiento $\tau \equiv C + ie^{-\phi}$ con la misma teoría IIB, pero distinta constante de acoplamiento.

CAPÍTULO 2. CORRESPONDENCIA ADS/CFT

En particular, si $C = 0$ $\tau \leftrightarrow 1/\tau$ tenemos una dualidad entre dos teorías de cuerdas tipo IIB; una con acoplamiento fuerte y otra con acoplamiento débil. Dicha transformación forma el grupo $SL(2, \mathcal{Z})$, mismo grupo que la dualidad S.

Como ya dijimos, el grupo $SO(4, 2)$ identifica un espacio 5-dimensional con el espacio en 4-dimensional en el que vive la teoría de norma. Cuatro de las coordenadas de AdS_5 se relacionan naturalmente con las 3+1 coordenadas de nuestra teoría de campo. La clave para relacionar la coordenada sobrante se encuentra en la *conexión IR/UV*.

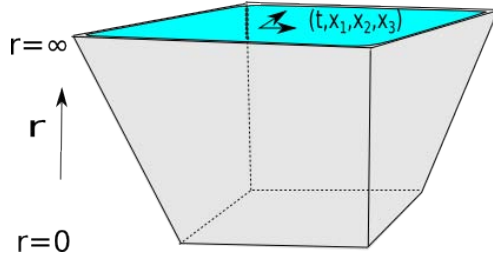


Figura 2.4: Representación esquemática, dos dimensional de la *cuña de Poincaré*. La zona gris delimita el espacio cubierto por el parche de Poincaré.

La conexión IR/UV, explicada por Susskind y Witten en [39], relaciona de manera rigurosa la coordenada radial en nuestra teoría gravitacional y la escala de energía de nuestra teoría de norma. Se puede vislumbrar este punto explotando la invariancia conforme de nuestra teoría de campo. MSYM bajo un reescalamiento de la forma

$$D : (t, \vec{x}) \rightarrow (\Lambda t, \Lambda \vec{x}), \quad (2.11)$$

nuestra teoría de norma debe de ser invariante. Para que del lado gravitacional esta dilatación sea una isometría necesitamos que la coordenada radial transforme como $r \rightarrow r/\Lambda$. Esto significa que cuando exploramos distancias pequeñas en la teoría de norma, exploramos distancias grandes en el bulto, cerca de la frontera de AdS ($r = \infty$). En una teoría cuántica, para trabajar con modos localizados en el sistema necesitamos hacer de energías muy grandes. Es por esto que es natural relacionar a la coordenada radial con la energía de nuestra teoría de campo. El identificar

$$\frac{r}{L^2} \leftrightarrow E \quad (2.12)$$

se le conoce como la **conexión UV/IR**.

2.5. MSYM vs QCD

La pregunta que salta inmediatamente a la cabeza es si MSYM puede usarse para modelar una teoría de norma fuertemente acoplada no supersimétrica, como la Cromodinámica Cuántica. Si bien no se ha encontrado la teoría de gravedad dual que genere una teoría cuántica con el lagrangiano exacto de QCD, algunas de las características centrales, como confinamiento y rompimiento de simetría quiral, se han podido alcanzar. La tabla 2.1 muestra una comparación entre las características más sobresalientes de cada teoría, para $T = 0$.

Una de las características más importantes que queremos incorporar a nuestro modelo es el *confinamiento*. Para saber si una teoría confina o no debemos conocer la manera en que interactúan las partículas, es decir, su potencial. Si L es la separación entre las dos partículas interactuantes, un potencial lineal en L indica confinamiento. El método holográfico, para calcular los potenciales en la teoría MSYM correspondiente $AdS_5 \times S^5$ usa *Lazos de Wilson*. El equivalente de un lazo de Wilson en la teoría de gravitacional corresponde a la superficie con área mínima que tiene como frontera el contorno \mathcal{C} , del lazo mismo [38]. El potencial calculado es tipo Columbiano lo que nos indica que es una teoría desconfiada siempre. Para tener una teoría dual con una fase con confinamiento, debemos agregar un *domain wall* en la región infrarroja $r \ll 1$, como ya veremos más adelante.

En la tabla 2.2 se puede ver que para temperaturas cercanas a $T > \Lambda_{QCD}$ se tienen dos teorías bastante similares, exceptuando el hecho de que en un lado existen quarks y del otro no. Λ_{QCD} es la escala energética característica de QCD; arriba de ésta el sistema se vuelve debilmente acoplado y por debajo el acoplamiento es tan fuerte que solamente existe hadrones [9].

QCD vs MSYM, T=0	
Asintóticamente libre	Teoría conforme
$g_{YM}^2(\omega) \begin{cases} \ll 1 & \text{si } \omega \gg \Lambda_{QCD} \\ \geq 1 & \text{si } \omega \leq \Lambda_{QCD} \end{cases}$	$g_{YM}^2(\omega) = cte$
Confinada a bajas energías	Desconfinada siempre
Con Quarks	Sin Quarks
Potencial quark-antiquark es lineal $V(L) \propto \sigma L$ para $L \gg \Lambda_{QCD}^{-1}$	Potencial quark-antiquark tipo Coulomb $V(L) \propto -1/L; \forall L$
No supersimétrica	Máximamente supersimétrica
Simetría interna: $U(1)_{barionico}$	Simetría interna: $SU(4)_R \simeq SO(6)_R$
Grupo de norma: $SU(3)$	Grupo de norma: $SU(N_c)$

Cuadro 2.1: Comparación entre QCD y MSYM para temperatura T=0

QCD vs MSYM	
Aproximadamente conforme para un rango finito $E \propto T^4 V$ (Según cálculos en la red)	Simetría conforme rota por $T \neq 0$ $E \propto T^4 V$ (Por análisis dimensional)
Desconfinamiento	
Plasma no-abeliano de gluones y quarks fuertemente acoplados	Plasma no-abeliano de gluones y materia exótica puede ser fuertemente acoplado
Potencial quark-antiquark apantallado por el plasma	
No supersimétrica	Supersimetría rota

Cuadro 2.2: Comparación entre QCD y MSYM para temperatura $T \geq \Lambda_{QCD}$

A temperatura finita, MSYM nos sirve como un modelo de prueba para modelar el plasma de quarks y gluones (QGP). Es precisamente en este régimen en donde estudiaremos la dinámica de nuestro quark.

2.5.1. Elevando la temperatura

Como vimos en la sección anterior, la similitud entre MSYM y QCD a temperatura $T \neq 0$, inmediatamente nos induce a pensar en una manera de deformar nuestro espacio $AdS_5 \times S^5$ para obtener una teoría de norma dual a MSYM con $T \neq 0$.

Si consideramos un plasma de gluones; homogéneo e isotrópico, pero no invariante bajo empujones. La forma del tensor de energía momento, correspondiente al plasma, junto con la restricción de ser invariante conforme es suficiente para resolver las ecuaciones de Einstein (con constante cosmológica) y así obtener la forma de la métrica. Ésta métrica es exactamente $(AdS - Schwarzschild)_5 \times S^5$:

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-f dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{L^2}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)}) + L^2 d\Omega_5^2, \quad (2.13)$$

con $f(r) = 1 - (r_h/r)^4$.

Otra manera de obtener esta solución es análoga a la deducción de la dualidad como lo hizo Maldacena. En la sección 2.3, nos restringuimos al caso de la brana negra extremal; el cual resulta ser la brana negra con energía mínima que satura la cota BPS $M = |Q|$. Sin embargo el caso de la brana negra no extremal, $\zeta \neq 1$ y $r_h \neq 0$, es equivalente a excitar la pila de N D3-branas.

La métrica (2.13) coincide con (2.10) para valores grandes de r ; cumpliendo con el requerimiento que sea asintóticamente AdS . Este comportamiento asintóti-

co nos dice que la teoría de norma en el régimen UV no es afectada, no es así en el caso IR. La métrica (2.13) tiene un horizonte de eventos en $r = r_h$. La temperatura de Hawking del hoyo negro se interpreta como la temperatura de la teoría de norma dual; $T = \frac{r_h}{L^2\pi}$.

También se puede construir la métrica (*AdS – Schwarzschild*)₅ usando las propiedades del tensor energía-momento de un plasma térmico de gluones y materia exótica.

En el transcurso de este trabajo se analizará un XGP al cual se introduce, a manera de sonda, materia en la representación fundamental. Bajo esta aproximación trabajaremos con una métrica tipo (2.13).

En ésta sección confrontamos MSYM con QCD encontrando evidentes diferencias entre ambas teorías. Apelando a la existencia de cantidades universales entre ambas teorías, podemos pensar en MSYM como un campo de práctica en el cual podemos ejercitar nuestras habilidades y artilugios matemáticos, en la espera de que estas sean útiles a la hora de enfrentarnos a la realidad. Éstas cantidades universales son características de nuestro sistema, las cuales a través de distintos métodos se han podido comparar y verificar la validez. Entre las demostraciones más importantes se encuentran: densidad de energía del QGP; la razón entre la viscosidad de corte y la entropía del mismo, η/s ; la razón de las masas de los mesones y las constante de estructura, las cuales difieren solamente en un 10 % [5]. Tampoco podemos dejar de lado el hecho de que es posible modelar, vía la dualidad norma/gravedad, un sistema cuántico con un cambio de fase: una fase desconfiada a bajas temperaturas y potencial químico y una fase confinada a altas temperaturas y potencial químico.

CAPÍTULO 2. CORRESPONDENCIA ADS/CFT

Capítulo 3

Nuestra configuración gravitacional

El interés por modelar una teoría de norma con un campo magnético se puede ver en los resultados de los experimentos en RHIC [1, 3] o LHC, donde colisionan iones pesados. Tanto la naturaleza no perturbativa del plasma [36, 37], como la existencia de campos magnéticos intensos en estos experimentos es inegable. El modelo de *Brana magnética* propuesto en [13] ha tenido éxito: se ha analizado sus propiedades termodinámicas [14] y la estructura del álgebra de los campos que sostiene [16], aportando evidencia de que este fondo es dual a una CFT con campo magnético externo. Sin embargo, debido que el diccionario de la dualidad, el cual relaciona la parte gravitacional y cuántica, se mantiene incompleto, se necesitan cotejar otras propiedades características de un sistema con campo magnético. En este trabajo, analizaremos las propiedades dinámicas de un quark que se mueve sobre un campo gravitacional; aportando así evidencia a favor de que nuestra Brana magnética es dual a un campo magnético externo.

3.1. Configuración del espaciotiempo

Para obtener una CFT con campo magnético constante, escogeremos como configuración gravitacional dual la construida en [13]. Así como se hizo en [6], reescribiremos nuestro ansatz de tal manera que nuestras soluciones numéricas estén parametrizadas con un sólo parámetro; obteniendo así un conjunto de soluciones que se interpolan suavemente entre dos configuraciones espaciales que serán de nuestro interés.

Estamos interesados en una métrica con un campo magnético tangente a las direcciones de la frontera, además de ser asintóticamente AdS_5 . Un ansatz general

CAPÍTULO 3. NUESTRA CONFIGURACIÓN GRAVITACIONAL

para la métrica [6], invariante bajo traslaciones y rotaciones en el plano xy , es

$$ds^2 = -U(r)dt^2 + V(r)(dx^2 + dy^2) + W(r)dz^2 + \frac{dr^2}{U(r)}, \quad (3.1)$$

con una intensidad de campo dado por

$$F_{BG} = Bdx \wedge dy. \quad (3.2)$$

Existen dos soluciones conocidas que serán de nuestro interés:

$$U_{BTZ}(r) = 3(r^2 - r_h^2), \quad V_{BTZ}(r) = \frac{B}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad W_{BTZ}(r) = 3r^2; \quad (3.3)$$

y

$$\begin{aligned} U_{BB}(r) &= \left(r + \frac{rh}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{\left(\frac{3}{2}rh\right)^4}{\left(r + \frac{rh}{2}\right)^4}\right), \\ V_{BB}(r) &= \frac{4V_0}{9r_h^2} \left(r + \frac{rh}{2}\right)^2, \\ W_{BB}(r) &= \frac{4}{3} \left(r + \frac{rh}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

En ambos casos r_h delimita el horizonte del hoyo negro.

La primera de las soluciones, ec. (3.3), es el producto directo entre el hoyo negro BTZ [8] y un toro dos dimensional, T^2 . Como en [13], ésta métrica tiene como teoría dual una CFT con temperatura finita, $T = \frac{r_h}{\pi}$, e inmersa en un campo magnético constante en la dirección z .

La otra solución de nuestro interés es la D3-brana negra, ec. (3.4). Al igual que en $BTZ \times T^2$, es dual a una CFT con la misma temperatura; pero con un campo magnético nulo, $B = 0$.

La solución numérica debe comportarse como $aAdS_5$ en el límite $r \rightarrow \infty$, e interpolar entre (3.4) para un campo magnético nulo y como (3.3) cuando se enciende el campo. En general nos conformamos con una versión reescalada de AdS_5 en la frontera de nuestro espacio:

$$ds^2 = r^2[-C_1dt^2 + C_2(dx^2 + dy^2) + C_3dz^2] + \frac{dr^2}{r^2}. \quad (3.5)$$

La métrica reescalada tendrá como efecto una aparente velocidad lumínica menor a la unidad. En especial, fotones moviéndose en la dirección z los veremos moverse a una velocidad $\sqrt{C_1/C_3} < 1$.

3.1. CONFIGURACIÓN DEL ESPACIOTIEMPO

Presentamos aquí (3.4) con la coordenada radial, \tilde{r} , recorrida: $\tilde{r} = \frac{r+r_h}{2}$; en consecuencia se encuentra en $\tilde{r}_h = \frac{3}{2}r_h$. Nótese que la temperatura es $T = \frac{\tilde{r}_h}{\pi} = \frac{3}{2\pi}r_h$. Escribir (3.4) con el horizonte recorrido es un artilugio que nos ayudará a resolver las ecuaciones de campo y así obtener soluciones con la misma temperatura, para cada intensidad de campo B . En este caso, para $r \rightarrow \infty$ también obtenemos una métrica tipo (3.5).

Haciendo una expansión de las funciones métricas de la brana negra D3 alrededor de r_h obtenemos:

$$\begin{aligned}
 U_{BB}(r) &= 6r_h(r - r_h) - 2(r - r_h)^2 + \frac{8}{3r_h}(r - r_h)^3 + \mathcal{O}(r^4) \\
 V_{BB}(r) &= V_0 + \frac{4V_0}{3r_h}(r - r_h) + \frac{4V_0}{9r_h^2}(r - r_h)^2, \\
 W_{BB}(r) &= 3r_h^2 + 4r_h(r - r_h) + \frac{4}{3}(r - r_h)^2;
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde el término $\mathcal{O}(r^4)$ indica que la expresión exacta contiene términos de cuarto o mayor orden, los cuales calcularemos pero no son relevantes para la discusión en turno. Para (3.3) la expresión en series es exacta

$$\begin{aligned}
 U_{BTZ}(r) &= 6r_h(r - r_h) + 3(r - r_h)^2, \\
 V_{BTZ}(r) &= \frac{B}{\sqrt{3}}, \\
 W_{BTZ}(r) &= 3r_h^2 + 6r_h(r - r_h) + 3(r - r_h)^2.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

La métrica (3.1) junto con el campo (3.2) deben satisfacer las ecuaciones de una teoría tipo Einstein-Maxwell con constante cosmológica negativa. Al introducir nuestro ansatz las ecuaciones gravitacionales se reducen a cuatro ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden:

CAPÍTULO 3. NUESTRA CONFIGURACIÓN GRAVITACIONAL

$$\begin{aligned}
& 2W(r)^2 \left[4B^2 + V(r) \left(U'(r)V'(r) + U(r)V''(r) \right) \right] - V(r)W(r) \left[2V(r) \right. \\
& \quad \times \left(U'(r)W'(r) + U(r)W''(r) \right) + U(r)V'(r)W'(r) \left. \right] + U(r)V(r)^2W'(r)^2 = 0, \\
& 4V(r)W(r)^2V''(r) - 2W(r)^2V'(r)^2 - V(r)^2 \left(W'(r)^2 - 2W(r)W''(r) \right) = 0,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
& W(r) \left[-8B^2 + 6V(r)^2 \left(U''(r) - 8 \right) + 6V(r)U'(r)V'(r) \right] + 3V(r)^2U'(r)W'(r) = 0, \\
& W(r) \left(4B^2 + 2V(r)U'(r)V'(r) + U(r)V'(r)^2 - 24V(r)^2 \right) + V(r)W'(r) \\
& \quad \times \left(V(r)U'(r) + 2U(r)V'(r) \right) = 0.
\end{aligned}$$

De estas cuatro ecuaciones, solamente las primeras tres son dinámicas y la última es una constricción que las ecuaciones dinámicas deben cumplir, una vez que se han fijado las condiciones iniciales. Esto tiene como efecto reducir el espacio de soluciones de ser seis dimensional a solamente cuatro dimensiones.

Al requerir una solución que interpole entre BTZ y la D3-brana negra podemos modelar una CFT con temperatura finita y campo magnético arbitrario. Por lo tanto, postulamos que tendrán la forma:

$$\begin{aligned}
U_N(r) &= U_{BTZ} + \sum_{i=2}^{\infty} U_i(r - r_h)^i, \\
V_N(r) &= V_{BTZ} + \sum_{i=0}^{\infty} V_i(r - r_h)^i, \\
W_N(r) &= W_{BTZ} + \sum_{i=1}^{\infty} W_i(r - r_h)^i.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Un análisis a las ecuaciones (3.8), muestra que son homogéneas en B y V_0 ; es decir, bajo reescalamientos simultáneos de ambas constantes, las soluciones para este sistema no son afectadas. Por esta razón vemos que el parámetro relevante, el cual identificará a nuestra familia de soluciones, es B/V_0 . Obligar a que los potenciales $U(r)$, $V(r)$ y $W(r)$ cumplan con las ecuaciones de Einstein implica que estamos tomando en cuenta la deformación de nuestro espacio-tiempo debido a la intensidad de campo magnético en el bulto, B .

3.1. CONFIGURACIÓN DEL ESPACIOTIEMPO

Para recuperar (3.3) de (3.9) debemos fijar $B = \sqrt{3}V_0$, ya que solamente en este caso la serie U_N se mantiene finita. Si quisieramos recuperar (3.4) fijamos $B = 0$; en este caso las ecuaciones de campo determinan una serie exactamente igual a (3.4).

Para cada valor B/V_0 integramos las ecuaciones (3.8), usando como condiciones iniciales de nuestros potenciales U , V y W el valor de (3.9) y sus derivadas evaluadas a una distancia muy cercana al horizonte, $r = r_h + \epsilon$.

Las soluciones obtenidas al integrar numéricamente tienen las propiedades necesarias para construir una CFT con campo magnético arbitrario; cuando $B/V_0 \ll 1$ tenemos soluciones muy parecidas a las de una brana negra sin campo magnético (fig. 3.1), en el caso B/V_0 arbitrariamente grande nuestra solución se parecerá a (3.3) cuando estemos cerca del horizonte (fig. 3.2). Las soluciones numéricas U_N , V_N y W_N interpolarán entre el agujero negro BTZ (3.3) ó la brana negra D3 (3.4), según la magnitud del campo magnético, en la región cercana al horizonte y a (3.5) cuando $r \rightarrow \infty$ (fig. 3.3).

En las secciones siguientes reportaremos nuestros resultados en términos de la intensidad de campo que existe en la CFT. La intensidad de campo en el bulto se debe reescalar, ya que nuestra geometría cerca de la frontera es una versión reescalada de Minkowski. En la definición de nuestro campo, ec. (3.2), se puede ver que este reescalamiento depende del potencial V_N evaluado en el horizonte. Sintentizando, el campo que vive en la CFT tiene intensidad $b \equiv B/V_N(r \rightarrow \infty)$.

CAPÍTULO 3. NUESTRA CONFIGURACIÓN GRAVITACIONAL

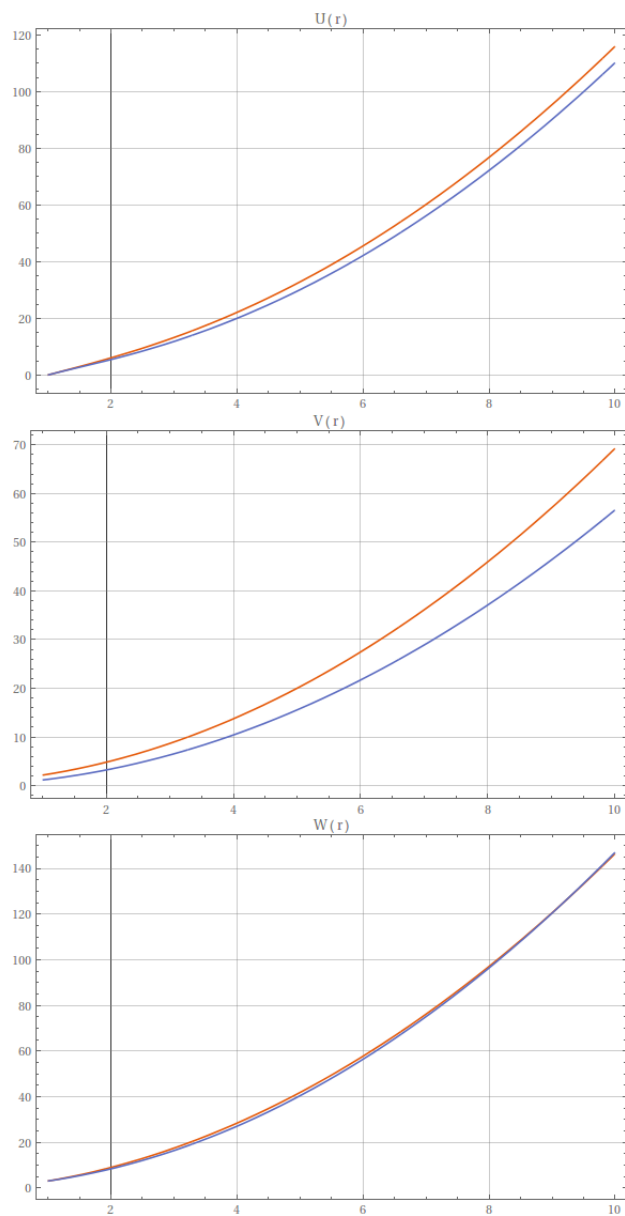


Figura 3.1: Comparación entre la solución de brana negra D3 (azul) y nuestra solución numérica (rojo), para un campo pequeño $B = 1$. El horizonte está normalizado a la unidad, $r_h = 1$.

3.1. CONFIGURACIÓN DEL ESPACIOTIEMPO

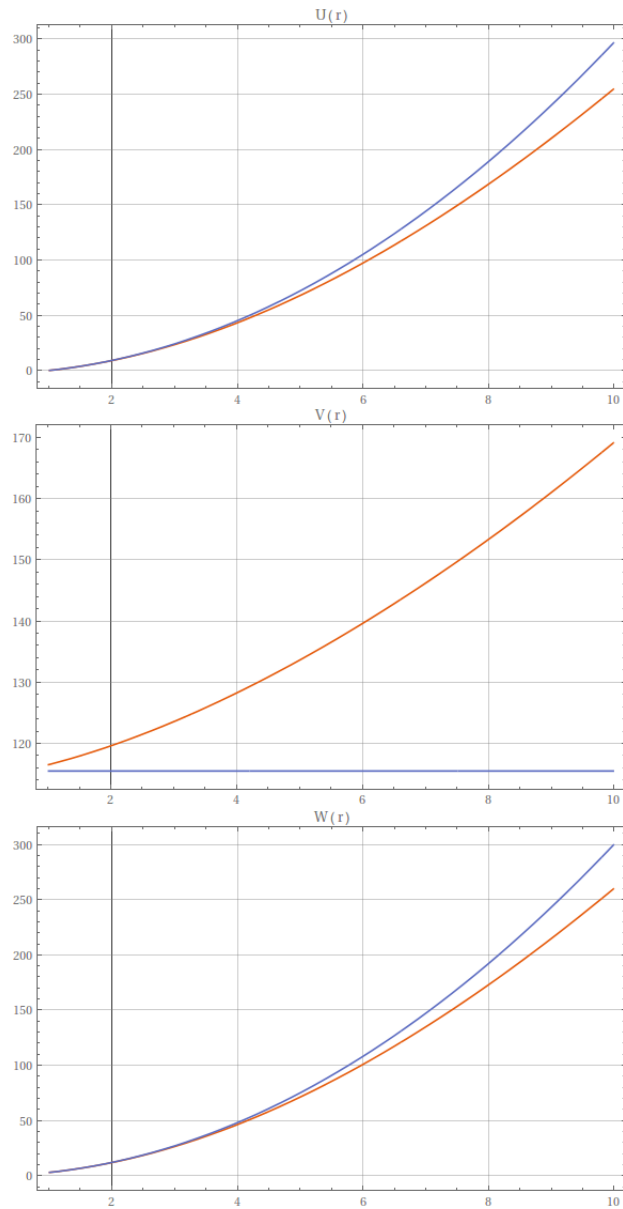


Figura 3.2: Comparación entre la solución BTZ (azul) y nuestra solución numérica (rojo), para un campo arbitrariamente grande $B = 200$. El horizonte está normalizado a la unidad, $r_h = 1$.

CAPÍTULO 3. NUESTRA CONFIGURACIÓN GRAVITACIONAL

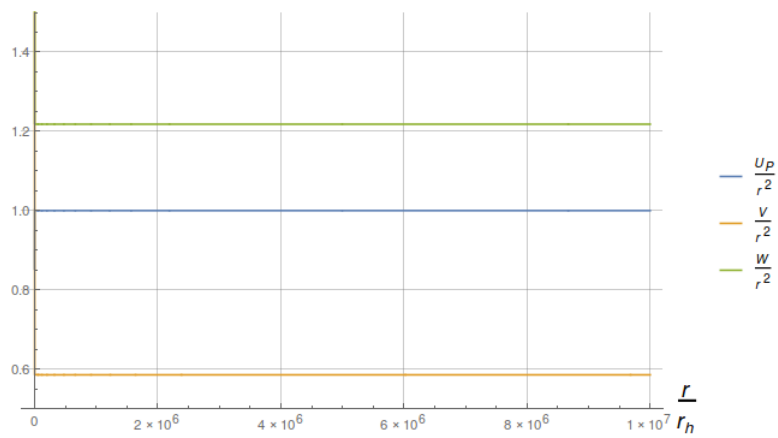


Figura 3.3: Comparación de nuestras soluciones numéricas, para r grandes y un campo magnético arbitrario.

Capítulo 4

Quarks

Ahora que hemos construido un fondo gravitacional sensible a un campo magnético, lo pondremos a prueba analizando la dinámica de un quark. En este capítulo explicaremos brevemente como se incluyen grados de libertad en la representación fundamental, los cuales se identifican con quarks. Acto seguido analizaremos el movimiento de tales quarks en la dirección paralela y perpendicular al campo magnético.

4.1. Representación de un Quark en AdS/CFT

En la tabla 2.2, se destaca una diferencia de gran importancia si queremos llevar a cabo el objetivo de la tesis: estudiar la dinámica de Quarks en un QGP. Una métrica en la que se contenga un hoyo negro tipo (3.4) se obtiene como dual a un plasma de gluones y otros campos, es decir no contiene quarks.

En este trabajo analizaremos la dinámica de quarks “externos” masivos, cuya inclusión no deforma la métrica generada por las N D3-branas bajo el límite de Maldacena. La incorporación de quarks dinámicos se presenta en [25, 27], donde además de tener una pila de N_c D3-branas, se agrega una pila de N_f D7-branas y, al tomar el límite de Maldacena ec. (2.7), se obtiene un conjunto de N_f D7-branas inmersas en un fondo ($AdS - Schwarzschild$) $_5 \times S^5$, ec. (3.4).

Además de la dirección radial, las direcciones en las que las N_f D7-branas se extienden son las 4 espaciales que, tras el límite de Maldacena, corresponden a la parte Anti de Sitter y las tres restantes son direcciones compactas pertenecientes a la S^5 , digamos $\mu = 5, 6, 7$; formando una S^3 . Al enrollar las branas en las direcciones compactas de S^3 evitamos *tadpoles*: para tener D7-branas estables, generalmente necesitamos que estén cargadas bajo los campos de norma Ramond-Ramond, lo cual es un problema para branas que se extiende en un volumen

CAPÍTULO 4. QUARKS

infinito. Para evitar esto confinamos a las corrientes conservadas, correspondientes a estas cargas, a vivir en las dimensiones compactificadas teniendo así un flujo neto nulo y en consecuencia una carga nula en la hoja de mundo 5-dimensional [27, 30].

En el régimen de ultrabajas energías con $g_c N_c \ll 1$, nuestro sistema D3/D7-branas toma una forma similar al bosquejado en (2.2); incluyendo un conjunto extra de N_f D7-branas. Así como en la sección 2.3, bajo este límite se obtienen sectores mutuamente desacoplados. Estos sectores se identifican al ver sobre que Dp-branas terminan cada una de las cuerdas por lo tanto, tenemos tres sectores de cuerdas interactuantes: 3-3, 3-7 y 7-7.

Debido a que la constante de interacción para cuerdas adheridas a Dp-branas escala con la energía como $g_{Dp} \propto E^{p-3}$ [11], para bajas energías solamente las cuerdas adheridas a D3-branas interactúan entre sí y, como vimos en la sección 2.3, las cuerdas 3-3 (adheridas en las D3-branas), a baja energía, conforman el multiplete $\mathcal{N} = 4$ SYM en el adjunto de $SU(N_c)$.

El sector libre consiste en cuerdas cerradas que se propagan en un espacio-tiempo 10-dimensional y cuerdas abiertas 7-7 (adheridas a las D7-branas) propagándose en el volumen de las mismas branas.

Finalmente, se encuentra el sector 3-7 de cuerdas abiertas. Este sector transforma en la representación bifundamental $SU(N_c) \times SU(N_f)$. Como ya dijimos, este sector no es interactuante, pero está acoplado al multiplete $\mathcal{N} = 4$ SYM. Desde el punto de vista del grupo $SU(N_c)$ tenemos N_f multipletes que transforman en la representación fundamental del mismo, a estos multipletes denominaremos quarks.

Para el caso $g_c N_c \gg 1$ debemos tomar en cuenta la deformación de la métrica, debido a la presencia de las D3-branas (3.4), sin embargo pidiendo $N_f \ll N_c$, todavía se puede despreciar el efecto gravitacional de las D7-branas, puesto que la interacción gravitacional es proporcional a $g_c N_f$ y esta puede ser arbitrariamente pequeñas. Como resultado tenemos un fondo $(AdS - Schwarzschild)_5 \times S^5$ en el cual viven las N_f D7-branas (de “prueba”) que se extienden desde la frontera ($r = \infty$) hasta una distancia r_m arbitraria. Una cuerda abierta anclada a las D7-branas se piensa como un meson; la punta de la cuerda en r_m representa un quark (o antiquark) masivo, $M_q = \frac{L}{2\pi\alpha'}$, con L la separación mínima de las D3-branas y las D7-branas. Una cuerda que se extiende desde el horizonte hasta la frontera es infinitamente masivo.

Así como antes, al relacionar los sectores libres para cualquier valor de $g_c N_c$, podemos conjeturar que el sector interactuante describe el mismo sistema físico para distintos regímenes.

4.2. Una cuerda en movimiento

La dinámica de una cuerda está regida por la acción de Nambu-Goto [42],

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int \sqrt{-g} d\tau d\sigma, \quad g_{ab} \equiv G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \quad (4.1)$$

en donde g_{ab} es la métrica inducida sobre la hoja de mundo, debido a la parametrización escogida y $g = \det g_{ab}$. $G_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio tiempo que definiremos usando la configuración espacial construida en la sección anterior:

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -U_N(r) dt^2 + V_N(r) (dx^2 + dy^2) + W_N(r) dz^2 + \frac{dr^2}{U_N(r)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

De ahora en adelante, usaremos la *norma estática*: $\tau \equiv X^0 = t$ y $\sigma \equiv X^4 = r$. Además definimos: $\dot{X} \equiv \partial_\tau X$, $X' \equiv \partial_\sigma X$ y $X \cdot Y \equiv X^\mu Y^\nu G_{\mu\nu}$.

Consideraremos una cuerda moviéndose en una de las direcciones que ocupa la D3-brana: $X(t, r)^\mu = (t, 0, 0, z(t, r), r)$. Ya que estamos interesado en una configuración gravitacional dual a un quark que se mueve con velocidad constante, buscaremos soluciones estacionarias de la forma:

$$z(t, r) = \xi(r) + vt. \quad (4.3)$$

En este caso la función $\xi(r)$ nos dirá como se deforma la cuerda al movernos en la coordenada radial, debido al movimiento constante de las puntas.

La ecuaciones de movimiento, provenientes de la variación de (1.1), respecto a los campos \dot{X} y X' , son las ya conocidas ecuaciones de *Nambu-Goto* [42]:

$$\frac{\partial P_\mu^t}{\partial t} + \frac{\partial P_\mu^r}{\partial r} = 0, \quad (4.4)$$

donde P_μ^t y P_μ^r son componentes de una corriente conservada, la cual vive en la hoja de mundo. Éstas corrientes conservadas se definen como:

$$P_\mu^t = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial \dot{X}^\mu}, \quad (4.5)$$

$$P_\mu^r = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial X'^\mu}. \quad (4.6)$$

CAPÍTULO 4. QUARKS

Debido a la forma de nuestro ansatz, ec. (4.3), al cual restringimos nuestras soluciones, los momentos canónicos toman la forma:

$$\begin{pmatrix} P_t^t \\ P_z^t \\ P_r^t \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\pi\alpha'\sqrt{-g}} \begin{pmatrix} 1 + U_N W_N \xi'(r)^2 \\ -\frac{W_N}{U_N} v \\ \frac{W_N}{U_N} v \xi'(r) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (4.7)$$

$$\begin{pmatrix} P_t^r \\ P_z^r \\ P_r^r \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\pi\alpha'\sqrt{-g}} \begin{pmatrix} W_N U_N \xi'(r) v \\ W_N U_N \xi'(r) \\ 1 - \frac{W_N}{U_N} v^2 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

En [18] Gubser argumentó que el procedimiento que aquí describimos, es completamente equivalente a sustituir el ansatz (4.3) en la acción (1.1) y variarla con respecto a la función $\xi(r)$. Si bien el procedimiento descrito por Gubser puede ser un poco más intuitivo, nosotros nos enfocamos en un desarrollo un poco más clásico: hacemos uso del ansatz solamente al final; después de variar la acción con respecto a los campos \dot{X}_μ y X'_μ .

Debido a la dependencia lineal en el tiempo de nuestro ansatz, el primer término de (4.4) se anula, siendo así posible integrar la ecuación diferencial ordinaria para $\xi(r)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W_N U_N \xi'(r)}{2\pi\alpha'\sqrt{-g}} \right) = 0 \implies \xi'(r) = \pm \frac{2\pi\alpha'\Pi_z}{\sqrt{U_N W_N}} \sqrt{\frac{1 - \frac{W_N}{U_N} v^2}{U_N W_N - 2\pi\alpha'\Pi_z^2}}, \quad (4.9)$$

en la que sustituimos $\sqrt{-g} = \sqrt{1 - \frac{W_N}{U_N} v^2 + U_N W_N \xi'(r)^2}$ y definimos la constante de integración como $\Pi_z \equiv -\frac{W_N U_N \xi'(r)}{2\pi\alpha'\sqrt{-g}}$.

Recordando que P_μ^t se asocia a la densidad de cuádrimomento contenido en cada punto de la cuerda. Es decir, si integramos P_t^t and P_z^t a lo largo de la cuerda obtenemos la energía y momento total de la cuerda:

$$E = \int P_t^t dr, \quad p_z = \int P_z^t dr. \quad (4.10)$$

Haciendo uso de las definiciones (4.10) y las ecuaciones de movimiento, se puede calcular la tasa de flujo de energía y momento por unidad de tiempo, que cede nuestra cuerda al horizonte [18, 20], la cual se puede expresar en términos de Π_z y la velocidad:

$$\frac{dE}{dt} = -P_t^r = \frac{W_N U_N \xi'(r) v}{2\pi\alpha'\sqrt{-g}} = -v \Pi_z \quad (4.11)$$

4.2. UNA CUERDA EN MOVIMIENTO

y

$$\frac{dp_z}{dt} = -P_z^r = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{U_N W_N \xi'(r)}{\sqrt{-g}} = -\Pi_z. \quad (4.12)$$

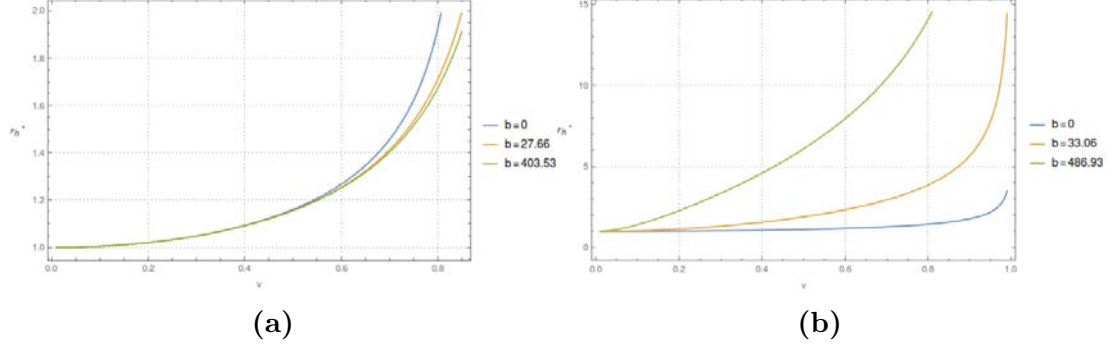


Figura 4.2: (a) Corrimiento del horizonte en la hoja de mundo, r_h^* , en función de la velocidad y para distintos valores del campo magnético. (b) Corrimiento del horizonte para el caso en el que la cuerda se mueve perpendicular al campo magnético.

Al resolver la ecuación (4.9), impondremos ciertas condiciones para garantizar su validez física. Por lo tanto debemos mantener positivo y real el valor de $\xi'(r)$; así tenemos una cuerda que sigue al quark [20] con un perfil real. La única forma de evitar una solución imaginaria en (4.9) es fijar un valor adecuado de Π_z , de tal manera que obligue al numerador y denominador, dentro del radical, a cambiar de signo para el mismo valor de la coordenada radial; a tal valor lo denominaremos r_h^* . Debido a que nuestros potenciales, U_N , V_N y W_N , son soluciones numéricas, nos es imposible dar una expresión analítica para el valor de Π_z . La figura 4.2 muestra que, para diferentes valores de b , siempre podemos fijar un valor adecuado para r_h^* , de tal manera que la expresión (4.9) sea real.

La velocidad de la luz, en la dirección \hat{z} , en nuestra teoría de norma corresponde al valor asintótico de los campos $U_N(r)$ y $W_N(r)$;

$$\frac{1}{C_z^2} = \frac{W_N(r \gg 1)}{U_N(r \gg 1)}. \quad (4.13)$$

En la gráfica 4.3 se muestra comportamiento de la velocidad de la luz en el bulto, respectivamente normalizada por la constante C_z , cuando nos movemos en la dirección \hat{z} . El comportamiento de $\frac{\sqrt{U_N(r)/W_N(r)}}{C_z}$ para valores pequeños de la coordenada radial, nos dice que si el quark se mueve a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, la parte de la cuerda entre $r \in (r_h, r_h^*)$ se propaga más rápido que la velocidad de la luz. A este comportamiento se le ha asociado con

CAPÍTULO 4. QUARKS

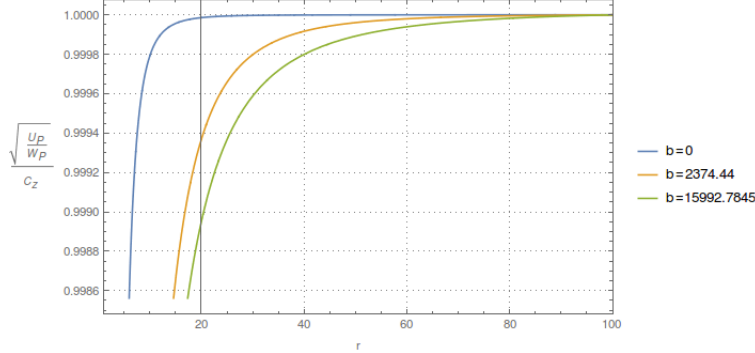


Figura 4.3: Comportamiento del factor $\frac{\sqrt{U_N(r)/W_N(r)}}{C_z}$, para distintos valores del campo magnético. El dominio de los potenciales U_N y W_N se extienden desde el horizonte del hoyo negro, r_h , a la frontera; $U_N(r_h)/W_N(r_h) = 0$.

la existencia de un horizonte aparente en la hoja de mundo de la cuerda [7, 20]. En nuestro caso el horizonte aparente se encuentra en $r = r_h^*$.

La constante de integración Π_z será de gran interés en nuestro trabajo, ya que nos da información fundamental de la dinámica de la cuerda. En la ecuación (4.12) se identifica a Π_z con la cantidad de momento instantáneo que pierde la cuerda, es decir, es la fuerza que imprime el medio sobre el quark ó bien la fuerza que debemos proporcionar al quark, para que mantenga una velocidad constante. Observando (4.9) es fácil notar que Π_z es una función tanto de la velocidad, como de la intensidad de campo magnético b .

La solución analítica obtenida por Gubser en [18] tiene la forma:

$$\Pi_G(v) \propto \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (4.14)$$

observando la figura 4.4 podemos notar que $\Pi_z(v, b = 0) \propto \Pi_G(v)$. Este resultado evidencía la validez de nuestras soluciones numéricas.

Usando la velocidad del encaje, normalizada por la velocidad de la luz en nuestra teoría de campo, analizaremos la dinámica del quark. Estamos interesados en saber como se modifica la pérdida de energía de nuestro quark, con respecto a la solución de Gubser conforme incrementamos el campo magnético. Para lograrlo haremos un ajuste sobre gráficas log-log. En la figura 4.5, se muestran las gráficas $\text{Log}(\Pi_z(v, b)) - vs - \text{Log}(v)$ para distintos valores del campo magnético. En ésta gráfica es más evidente que la solución de Gubser $\Pi_G(v)$ coincide con nuestra solución numérica, para un campo magnético nulo, $\Pi_z(v, b = 0)$.

Reestringiéndonos a efectos no relativistas, la manera más inmediata de ob-

4.2. UNA CUERDA EN MOVIMIENTO

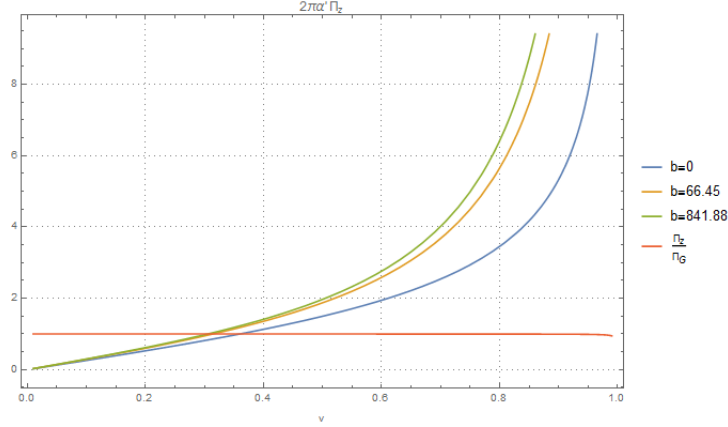


Figura 4.4: Gráfica de Π_z como función de la velocidad para distintas intensidades de B. Nótese que el comportamiento de Π_z para $b = 0$ es consistente con las soluciones presentadas en [18] y [20], $\Pi_G(v) \propto \Pi_z(v, b = 0)$.

tener información de nuestros datos es ajustar rectas a las gráficas de 4.5 para $v < 0.6$. Pensando que la dependencia de nuestra constante de movimiento se puede escribir como $\Pi_z(v, b) \propto f(b)v^{m(b)}$, las pendientes de las rectas ajustadas definirán el valor de m .

Tras extraer la pendiente de cada uno de los ajustes, para distintos valores del campo magnético, obtenemos la gráfica 4.6. Los puntos verdes en la figura 4.6 muestran las pendientes de los ajustes. El valor mínimo es $m(0) = 1.0438$ y la cota asintótica está en $m(b \gg 1) = 1.0882$. Aquí notamos que la dependencia funcional en la velocidad de $\Pi_z(v, b)$ se modifica de manera susceptible cuando hay un campo magnético presente en el bulto.

4.2.1. Movimiento perpendicular al campo magnético

Ahora consideraremos un quark moviéndose en una dirección perpendicular al campo magnético, digamos \hat{x} . Pensando en un quark con una velocidad constante usamos un anzats parecido al anterior, ec. (4.3):

$$x(t, r) = \xi_x(r) + vt. \quad (4.15)$$

Una vez más, haciendo uso de las ecuaciones de Nambu-Goto (4.4), obtenemos una ecuación diferencial para $\xi_x(r)$ muy parecida al caso paralelo:

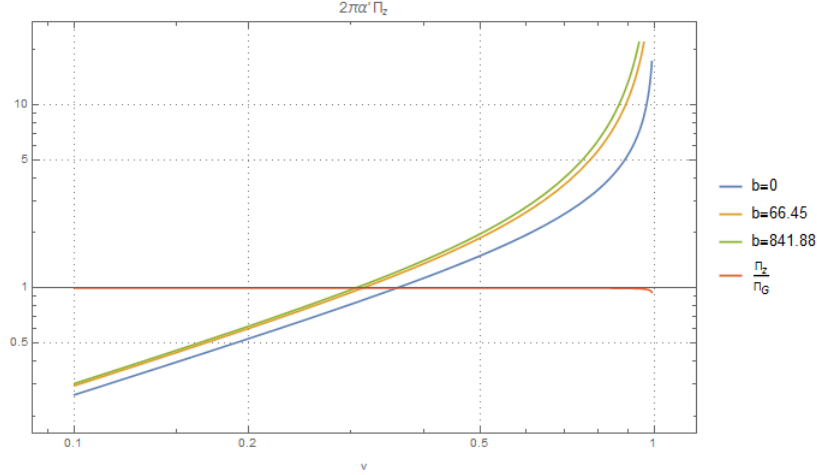


Figura 4.5: Gráfica log-log de $2\pi\alpha'\Pi_z$ como función de la velocidad, para distintos valores de b .

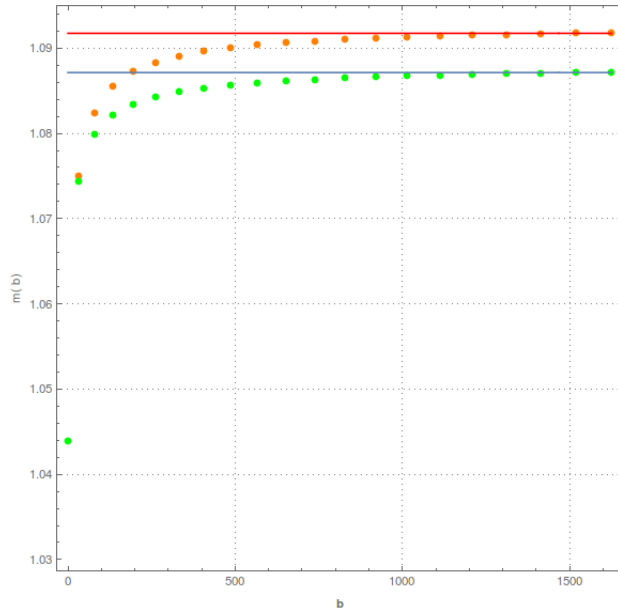


Figura 4.6: Comportamiento de la pendiente m en función del campo b , en un régimen no relativista, es decir $v_q < 0.6$, para distintos valores del campo magnético. La serie de puntos naranjas corresponden al quark moviéndose perpendicular al campo magnético, los puntos verdes al movimiento paralelo. Los valores asintóticos se encuentran en: 1.0872 y 1.0918.

4.2. UNA CUERDA EN MOVIMIENTO

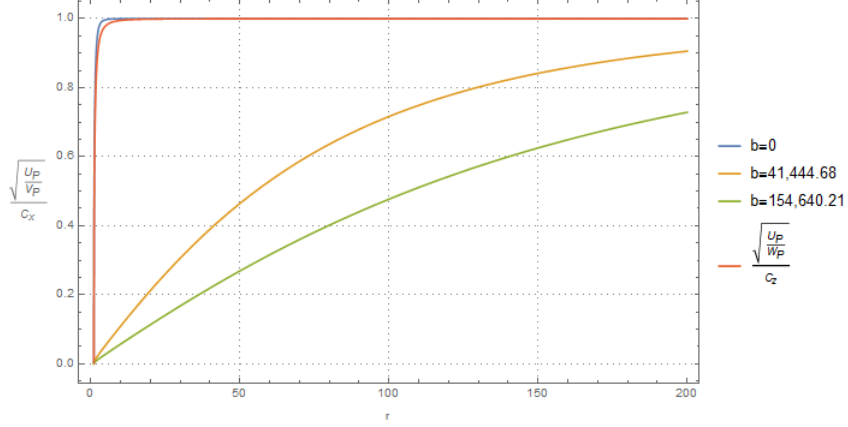


Figura 4.7: Comportamiento del factor $\frac{\sqrt{U_N(r)/V_N(r)}}{C_x}$, para distintos valores del campo magnético. La línea roja nos sirve para vislumbrar la diferencia sustancial con el factor, $\frac{\sqrt{U_N(r)/W_N(r)}}{C_z}$, del caso anterior con $b = 154,640.21$.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_N U_N \xi'_x(r)}{2\pi\alpha' \sqrt{-g}} \right) = 0 \implies \xi'_x(r) = \pm \frac{2\pi\alpha' \Pi_x}{\sqrt{U_N V_N}} \sqrt{\frac{1 - \frac{V_N}{U_N} v^2}{U_N V_N - 2\pi\alpha' \Pi_x^2}}. \quad (4.16)$$

Como en el caso previo, definimos $\sqrt{-g} = \sqrt{1 - \frac{V_N}{U_N} v^2 + U_N V_N \xi'_x(r)^2}$ y la constante de integración como $\Pi_x \equiv -\frac{V_N U_N \xi'_x(r)}{2\pi\alpha' \sqrt{-g}}$.

Si bien la ecuación diferencial para $\xi_x(r)$ es básicamente la misma, existen al menos tres diferencias importantes en los resultados.

Primeramente, el comportamiento de la velocidad de la luz en \hat{x} , $\frac{\sqrt{U_N(r)/V_N(r)}}{C_x}$, es cualitativamente distinto en la dirección \hat{z} ; en las gráficas 4.3 y 4.7 se muestra la diferencia. Al mismo tiempo, el horizonte aparente se aleja más rápidamente de el horizonte del hoyo negro, r_h , ver fig. 4.2. Observando la figura 4.7 nos dice que la sección inferior de la cuerda, que se mueve con velocidad superlumínica, aumenta con el campo magnético.

Así como en el caso anterior, ajustamos pendientes a las gráficas $\text{Log}(\Pi_x(v, b)) - \text{vs} - \text{Log}(v)$ para el régimen no-relativista, $v < 0.6$. Los resultados de este análisis se representa con los puntos naranjas de la figura 4.6. Cuando el campo es nulo las fuerzas de arrastre son simétricas. Sin embargo, el valor máximo de las pendientes es siempre mayor para el caso del movimiento perpendicular, $m(b \gg 1) < m_x(b \gg 1)$. Es decir, la fuerza de arrastre perpendicular crece un poco más rápido en función de la velocidad.

CAPÍTULO 4. QUARKS

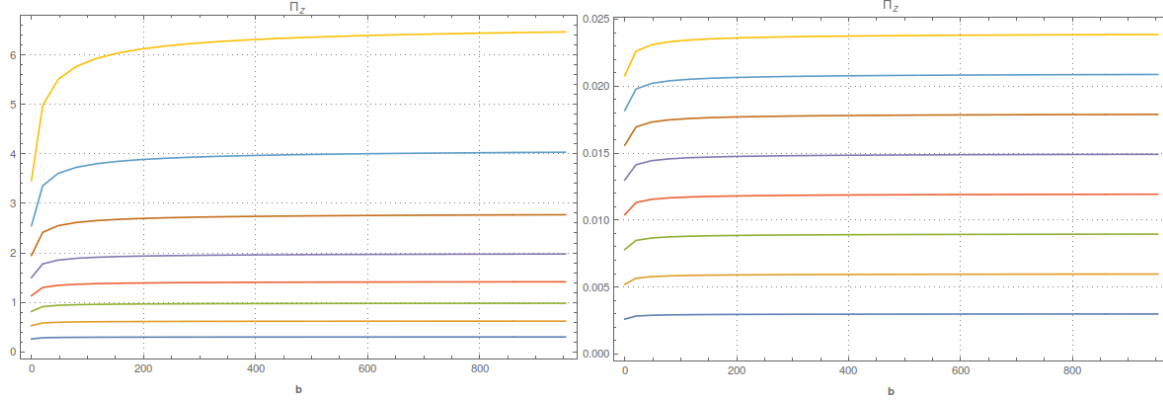


Figura 4.8: Comportamiento de $\Pi_z(v, b)$ en función del campo magnético. Cada línea de color corresponde a una velocidad distinta. En la gráfica del lado izquierdo el rango de velocidades es $v = 0.1 - 0.9$, la velocidad mínima siempre es la línea inferior. En el lado derecho el rango de velocidades es $v = 0.001 - 0.009$.

Por último notamos un comportamiento cualitativamente distinto cuando dibujamos la fuerza de arrastre en función del campo magnético, gráficas 4.8 y 4.9. El comportamiento asintótico y la magnitud de la fuerza que siente el quark marcan una diferencia fundamental en la dinámica del quark.

En la dirección \hat{z} , Π_z siempre alcanza una cota conforme aumentamos el campo; velocidades más grandes implican cotas máximas más altas. Mientras tanto Π_x tiene un comportamiento lineal en b ; aumentar la velocidad se refleja en que las rectas de la fig. 4.9 incrementan su pendiente.

En la gráfica 4.10 se puede ver tanto el comportamiento asintótico de la fuerza de arrastre así como también la diferencia en magnitud en cada dirección. En la dirección perpendicular la fuerza de arrastre es al menos dos órdenes de magnitud mayor. De hecho, cuando aumentamos el campo magnético, no alcanzamos a ver señal alguna indicando que este comportamiento lineal desaparezca.

En resumen, encontramos que la dinámica del quark se modifica al incluir una métrica sensible a la presencia del campo magnético. En ambas direcciones estudiadas, la fuerza de arrastre se vuelve más sensible, $\Pi_i(v, b) \propto v^m$, como función de la velocidad. Por otra parte, la magnitud de Π_z tiene una cota máxima en función del campo b . Contrariamente en la dirección \hat{x} la fuerza crece linealmente con el campo; siempre se cumple $\Pi_z < \Pi_x$. Las consecuencias y el interés por éstas diferencias en la dinámica del quark las analizaremos en el siguiente capítulo.

4.2. UNA CUERDA EN MOVIMIENTO

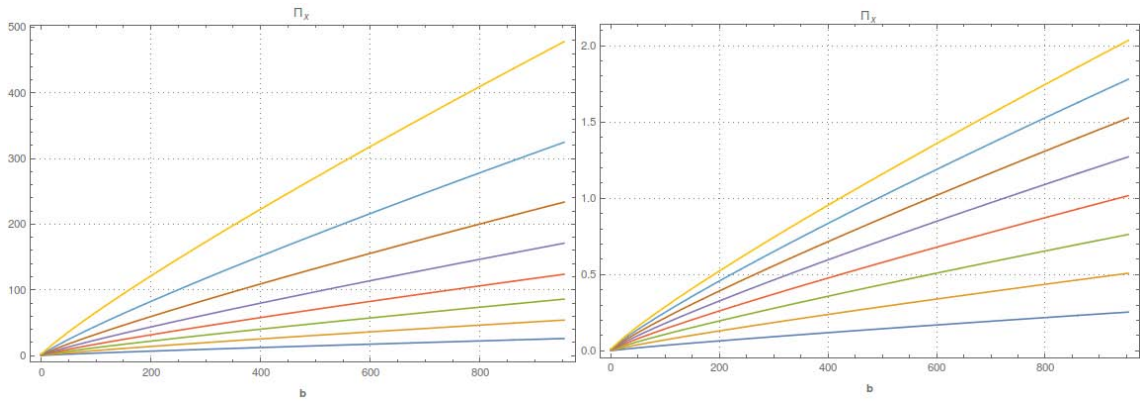


Figura 4.9: Comportamiento de $\Pi_x(v, b)$ en función del campo magnético. Cada línea de color corresponde a una velocidad distinta. En la gráfica del lado izquierdo el rango de velocidades es $v = 0.1 - 0.9$, la velocidad mínima siempre es la línea inferior. En el lado derecho el rango de velocidades es $v = 0.001 - 0.009$.

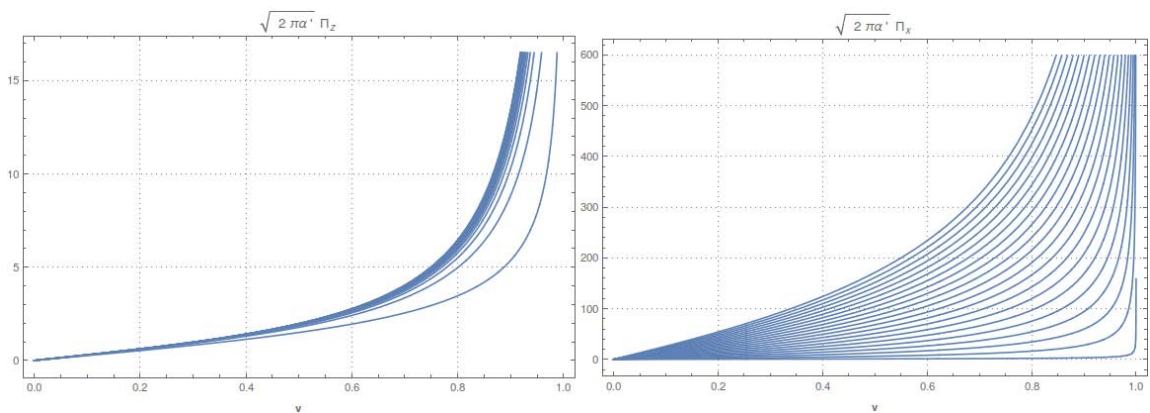


Figura 4.10: Fuerza de arrastre para el caso paralelo (izq.) y el perpendicular (der.). La línea inferior, en ambos casos, representa el caso $b = 0$ y la línea superior $b = 953.1$.

CAPÍTULO 4. QUARKS

Capítulo 5

Discusión y Conclusiones

Haciendo uso de la dualidad norma/gravedad se estudió como se modifica la dinámica de un quark inmerso en un plasma de quarks y gluones, en presencia de un campo magnético. En el segundo capítulo se resolvieron las ecuaciones de Einstein tomando en cuenta la presencia del campo magnético; obteniendo una familia de soluciones parametrizadas con un sólo parámetro, la intensidad del campo magnético. En el capítulo tercero se analizó la fuerza de arrastre, que ejerce el plasma sobre el quark, en las direcciones paralelas y perpendiculares al campo magnético.

La modificación de nuestra métrica, según nuestra prescripción de la dualidad, se debería traducir a la modificación de nuestra teoría de norma; incorporando los efectos del campo magnético sobre el plasma de quarks y gluones. En la dinámica de un quark no acoplado con el campo magnético esperábamos ver indicios de la manera en que se modifica nuestra teoría de norma.

El estudio de sistemas cuánticos en regímenes turbulentos es todavía un problema abierto [33], si bien el hecho de caracterizar un sistema turbulento todavía es tema de discusión, se han acordado distintos criterios para reconocer un régimen turbulento. Uno de estos criterios es la velocidad con que se disipa la energía en el medio, encontrar que una partícula pierda energía de la forma: $\Pi_i = \frac{dp_i}{dt} \propto v^3$, es evidencia de estar en un régimen turbulento [32]. En nuestro caso, si bien la energía se disipa un poco más rápido, todavía está lejos de ser un régimen turbulento.

El comportamiento de Π_x señala la existencia de una dirección preferencial de movimiento. Comparando las fuerzas de arrastre para ambas direcciones, fig. 4.10, se evidencia la reestricción de movimiento de la partícula en las direcciones perpendiculares al campo. Desde un punto de vista semiclásico, las partículas cargadas giran alrededor de las líneas del campo magnético y los modos de energía

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

más bajos corresponden al movimiento a lo largo de la dirección del campo. El aumento en la fuerza de arrastre en la dirección \hat{x} coincide con esta visión semiclásica; cada vez es más difícil moverse en las direcciones perpendiculares. Ejemplos de este confinamiento se ha presentado en sistemas superconductores, en los cuales la extensión del condensado se reduce a una línea conforme el campo magnético se incrementa [4].

Debido a que el caso $BTZ \times T^2$ es dual a una teoría de norma 1+1, mientras que el caso de la 3-brana negra es dual a una teoría 3+1, generalmente se piensa que es la versión geométrica del flujo RG de una CFT 3+1 a una CFT 1+1. Este flujo de renormalización se entiende desde el punto de vista de campos. En [15, 16] se evidencia de una manera más estricta (algebraica) este flujo de renormalización entre una teoría $D = 3 + 1$ para distancias pequeñas y una teoría $D = 1 + 1$ para distancias grandes. Estudiando correladores de dos puntos, de una teoría dual generada por la solución de brana magnética de una teoría gravitacional tipo Einstein-Maxwell, se ha encontrado que la teoría de norma contiene dos álgebras de Virasoro idénticas; una para los modos izquierdos y otra para los derechos [15]. Existe un álgebra análoga para la extensión supersimétrica de la brana magnética [16]. La presencia de este par de álgebras es característica de una CFT 1+1 [10]. Nuestros resultados de la fuerza de arrastre en la dirección perpendicular al campo es una nueva confirmación no trivial de la reducción de grados de libertad de nuestra teoría, debido a la presencia del campo magnético. Por lo tanto es una evidencia indirecta del flujo de renormalización.

En análisis posteriores se podrían mejorar al menos dos aspectos de nuestro trabajo. La primera característica sería considerar un quark con una masa finita, modificando así las ecuaciones de movimiento a resolver; la extensión de nuestra D7-brana ya no es trivial. También podríamos acoplar la punta de la cuerda al campo magnético; sin embargo, ambos casos no son inmediatos. Se necesitaría analizar cuidadosamente el truncamiento dimensional de nuestro espacio 10 dimensional, de tal manera que el campo magnético se encuentre extendido en las direcciones correspondientes para no obtener flujos o campos remanentes divergentes. Una vez confirmado que las cosas están en el lugar correcto proceder a resolver las ecuaciones de movimiento.

Bibliografía

- [1] ADAMS, J., ET AL. Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions. *Nucl. Phys. A757* (2005), 102–183.
- [2] ADARE, A., ET AL. Observation of direct-photon collective flow in $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV Au+Au collisions. *Phys. Rev. Lett. 109* (2012), 122302.
- [3] ADCOX, K., ET AL. Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration. *Nucl. Phys. A757* (2005), 184–283.
- [4] ALBASH, T., AND JOHNSON, C. V. A holographic superconductor in an external magnetic field. *Journal of High Energy Physics 2008*, 09 (2008), 121–121.
- [5] AMMON, M., AND ERDMENGER, J. *Gauge/gravity duality*. Cambridge Univ. Pr., Cambridge, UK, 2015.
- [6] ARCINIEGA, G., NETTEL, F., ORTEGA, P., PATINO, L., AND PATIÑO, L. Brighter branes, enhancement of photon production by strong magnetic fields in the gauge/gravity correspondence. *Journal of High Energy Physics 2014*, 4 (Apr. 2014), 192.
- [7] ARGYRES, P. C., EDALATI, M., AND VAZQUEZ-PORITZ, J. F. No-Drag String Configurations for Steadily Moving Quark-Antiquark Pairs in a Thermal Bath.
- [8] BANADOS, M., TEITELBOIM, C., AND ZANELLI, J. The Black hole in three-dimensional space-time. *Phys. Rev. Lett. 69* (1992), 1849–1851.
- [9] BETHKE, S. α_s at Zinnowitz 2004. *Nucl. Phys. Proc. Suppl. 135* (2004), 345–352. [,345(2004)].

BIBLIOGRAFÍA

- [10] BROWN, J. D., AND HENNEAUX, M. Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: An example from three dimensional gravity. *Communications in Mathematical Physics* 104, 2 (1986), 207–226.
- [11] CASALDERREY-SOLANA, J., LIU, H., MATEOS, D., RAJAGOPAL, K., AND WIEDEMANN, U. A. Gauge/string duality, hot QCD and heavy ion collisions. *arXiv preprint arXiv: ...* (jan 2011), 294.
- [12] DAI, J., LEIGH, R. G., AND POLCHINSKI, J. New Connections Between String Theories. *Mod. Phys. Lett. A4* (1989), 2073–2083.
- [13] D’HOKER, E., AND KRAUS, P. Magnetic brane solutions in AdS. *Journal of High Energy Physics* 2009, 10 (Oct. 2009), 088–088.
- [14] D’HOKER, E., AND KRAUS, P. Charged magnetic brane solutions in AdS 5 and the fate of the third law of thermodynamics. *Journal of High Energy Physics* 2010, 3 (2010).
- [15] D’HOKER, E., KRAUS, P., AND SHAH, A. RG Flow of Magnetic Brane Correlators.
- [16] D’HOKER, E., AND POURHAMZEH, B. Emergent Super-Virasoro on Magnetic Branes.
- [17] GREEN, M., SCHWARZ, J., AND WITTEN, E. *Superstring Theory: Volume 1, Introduction*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1988.
- [18] GUBSER, S. S. Drag force in AdS/CFT. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 74, 12 (May 2006).
- [19] HASHIMOTO, A., AND KLEBANOV, I. R. Scattering of strings from D-branes. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 55B (1997), 118–133.
- [20] HERZOG, C. P., KARCH, A., KOVTUN, P., KOZCAZ, C., AND YAFFE, L. G. Energy loss of a heavy quark moving through N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma. *Journal of High Energy Physics* 2006, 07 (July 2006), 7.
- [21] HORAVA, P. Background Duality of Open String Models. *Phys. Lett. B231* (1989), 251.
- [22] HORAVA, P., AND WITTEN, E. Heterotic and type I string dynamics from eleven-dimensions. *Nucl. Phys. B460* (1996), 506–524.

-
- [23] HOROWITZ, G. T., AND POLCHINSKI, J. A Correspondence principle for black holes and strings. *Phys. Rev. D* **55** (1997), 6189–6197.
- [24] HOROWITZ, G. T., AND STROMINGER, A. Black strings and P-branes. *Nucl. Phys. B* **360** (1991), 197–209.
- [25] HOVDEBO, J. L., KRUCZENSKI, M., MATEOS, D., MYERS, R. C., AND WINTERS, D. J. Holographic Mesons: Adding Flavor To the Ads/Cft Duality. *International Journal of Modern Physics A* **20**, 15 (2005), 3428–3433.
- [26] HUBENY, V. E. The AdS/CFT Correspondence.
- [27] KARCH, A., AND KATZ, E. Adding flavor to AdS/CFT. *Journal of High Energy Physics* **2002**, 06 (2002), 043–043.
- [28] KLEBANOV, I. R. World volume approach to absorption by nondilatonic branes. *Nucl. Phys. B* **496** (1997), 231–242.
- [29] LEIGH, R. G. Dirac-Born-Infeld Action from Dirichlet Sigma Model. *Mod. Phys. Lett. A* **4** (1989), 2767.
- [30] MALDACENA, J. M. The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *International Journal of Theoretical Physics* **2**, 4 (1997), 20.
- [31] MONTONEN, C., AND OLIVE, D. I. Magnetic Monopoles as Gauge Particles? *Phys. Lett. B* **72** (1977), 117–120.
- [32] PAOLETTI, M. S., FISHER, M. E., SREENIVASAN, K. R., AND LATHROP, D. P. Velocity statistics distinguish quantum turbulence from classical turbulence. *Physical Review Letters* **101**, 15 (2008), 1–4.
- [33] PAOLETTI, M. S., AND LATHROP, D. P. Quantum Turbulence. *Annual Review of Condensed Matter Physics* **2**, 1 (mar 2011), 213–234.
- [34] POLCHINSKI, J. Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges. *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995), 4724–4727.
- [35] POLCHINSKI, J. *String Theory: Volume 1, An Introduction to the Bosonic String*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1998.
- [36] SHURYAK, E. Why does the quark gluon plasma at RHIC behave as a nearly ideal fluid? *Prog. Part. Nucl. Phys.* **53** (2004), 273–303.

BIBLIOGRAFÍA

- [37] SHURYAK, E. V. What RHIC experiments and theory tell us about properties of quark-gluon plasma? *Nucl. Phys. A750* (2005), 64–83.
- [38] SONNENSCHN, J., AND LOEWY, A. On the supergravity evaluation of Wilson loop correlators in confining theories. *JHEP 01* (2000), 042.
- [39] SUSSKIND, L., AND WITTEN, E. The Holographic bound in anti-de Sitter space.
- [40] TSEYTLIN, A. A. On nonAbelian generalization of Born-Infeld action in string theory. *Nucl. Phys. B501* (1997), 41–52.
- [41] WILDE, M. Measurement of Direct Photons in pp and Pb-Pb Collisions with ALICE. *Nucl. Phys. A904-905* (2013), 573c–576c.
- [42] ZWIEBACH, B. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2009.