



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Solución de ecuaciones diferenciales no lineales usando  
los métodos espectral de Fourier y semi-implícito de  
Adams-Bashforth: el caso de la convección de  
Rayleigh-Bénard

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

NORMA YANET SÁNCHEZ TORRES

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ERICK JAVIER LÓPEZ SÁNCHEZ



2016

Ciudad Universitaria, CDMX



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.





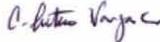
FACULTAD DE CIENCIAS  
Secretaría General  
División de Estudios Profesionales  
Votos Aprobatorios

DR. ISIDRO ÁVILA MARTÍNEZ  
Director General  
Dirección General de Administración Escolar  
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

**Solución de ecuaciones diferenciales no lineales usando los métodos espectral de Fourier y semi-implícito de Adams-Bashforth: el caso de la convección de Rayleigh-Bénard**

realizado por SÁNCHEZ TORRES NORMA YANET con número de cuenta 0-9455795-6 quien ha decidido titularse mediante la opción de tesis en la licenciatura en Matemáticas. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dr. Carlos Arturo Vargas Guadarrama 

Propietario Dr. Gerardo Ruíz Chavarría 

Propietario Tutor Dr. Erick Javier López Sánchez 

Suplente Dra. Catherine García Reimbert 

Suplente Dr. José Lino Samaniego Mendoza 

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
Ciudad Universitaria, D. F., a 13 de febrero de 2015  
EL JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

MAG/MGM/mdm 

*Ésta tercera era para ti.*

*A mi hermano José Luis†.*



# Agradecimientos

A mis sinodales, Dr. Carlos Arturo Vargas por sus comentarios y sugerencias en cuanto a la mejoría de éste trabajo y porque gracias a su curso decidí dedicarme a la biología matemática; Dr. Gerardo Ruíz Chavarría por facilitarme el taller de fluidos y sus computadoras para realizar las simulaciones numéricas, así como por su ayuda con el código numérico y sus claras y oportunas explicaciones; Dra. Catherine García por sus comentarios en la revisión de ésta tesis y por enseñarme lo útil que son las matemáticas aplicadas; Dr. José Lino Samaniego por la revisión detallada de este trabajo y por porque gracias a él aprendí a conocer el maravilloso mundo de las matemáticas.

A mi director de tesis, el Dr. Erick López por la sugerencia del tema, por las tantas horas de regaños y por aquellos días en que ya no quería trabajar y me jalaba las orejas para continuar, pero finalmente valio la pena. Es la segunda ..., pero no la última.

Al M. en C. Sergio Hernández Zapata por su ayuda con el código numérico y por brindarme su valiosa amistad. Al Dr. Pablo de la Mora por proporcionarme un pequeño espacio para trabajar dentro de su laboratorio de Estado Sólido Computacional.

A José Antonio y Alejandro por compartir conmigo esta última etapa de la tesis y por hacer más divertidos los seminarios (aún recuerdo el movimiento pendular y cuando las lentes estuvieron a punto de colisionar).

A todos aquellos con los que compartí materias a lo largo de la carrera, Fátima, Ernesto, Jorge, Alicia, Diana, Hérica, etc.

Al proyecto IN116312 “Vorticidad y ondas no lineales en fluidos” de DGAPA-UNAM.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. Generalidades</b>	<b>11</b>
1.1. La convección de Rayleigh-Bénard . . . . .	11
1.2. Planteamiento de las ecuaciones . . . . .	13
1.2.1. Aproximación de Boussinesq . . . . .	13
1.2.2. Sistema de ecuaciones . . . . .	14
1.2.3. Formulación del problema . . . . .	15
1.3. Métodos de discretización . . . . .	16
1.3.1. Método de diferencias finitas . . . . .	16
1.3.2. Métodos multipasos . . . . .	20
1.3.3. Métodos espectrales . . . . .	21
1.3.4. Métodos iterativos . . . . .	23
1.3.5. Método de proyección . . . . .	25
1.4. La estabilidad de los métodos . . . . .	26
1.5. Condiciones iniciales y de frontera . . . . .	27
<b>2. Implementación del programa</b>	<b>29</b>
2.1. Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	30
2.2. Métodos de diferencias finitas . . . . .	31
2.3. Método de Adams-Bashforth . . . . .	31
<b>3. La simulación</b>	<b>35</b>
3.1. Debajo del valor crítico . . . . .	36

3.2. Por encima del valor crítico . . . . .	37
3.2.1. Caso $R_a = 2000$ . . . . .	39
3.2.2. Caso $R_a = 4000$ . . . . .	43
3.3. Comparación de resultados . . . . .	45
3.4. Comentarios finales y trabajo a futuro . . . . .	52
3.5. Conclusiones . . . . .	54
<b>A. La adimensionalización</b>	<b>57</b>
<b>B. C. cilíndricas</b>	<b>61</b>
B.1. Ec. Continuidad . . . . .	62
B.2. Ecs. N-S . . . . .	62
B.3. Ec. energía . . . . .	66

# Introducción

Generalmente los modelos matemáticos de fenómenos físicos y sociales son de carácter no lineal. Muchos sistemas de ecuaciones resultantes contienen ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que, aunado a la no linealidad del fenómeno resulta muy complicado de resolver analíticamente. Una herramienta que resulta de mucha utilidad cuando no se pueden resolver los problemas en forma analítica, es usar los métodos numéricos, con los cuales se pueden generar soluciones aproximadas del sistema (Solís y Castro, 2003).

Las ecuaciones de Navier-Stokes son usadas en física para modelar muchos fenómenos en la dinámica de fluidos. Dichas ecuaciones no lineales en derivadas parciales resultan de mucho interés, ya que después de realizar algún procedimiento de linealización, se puede encontrar una solución analítica y se logra estimar su comportamiento. Hasta ahora no se conoce un procedimiento para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma general con el que se obtengan soluciones analíticas y éste sigue siendo un problema abierto.

En este trabajo se usan métodos numéricos para resolver un sistema de ecuaciones que modelan un fenómeno físico en tres dimensiones espaciales y una temporal en dinámica de fluidos: la convección de Rayleigh-Bénard en un contenedor cilíndrico.

El problema ya ha sido atacado experimentalmente y numéricamente en tres dimensiones. En algunos casos el contenedor fue una caja rectangular (Valencia, 2005), y en otros casos sólo realizan un estudio de estabilidad, por lo que el problema se reduce a dos dimensiones (Molina, 2010). Para trabajar el problema en forma completa, es decir, resolviendo el sistema de cinco ecuaciones, tres provenientes de las ecuaciones de Navier-

Stokes, la ecuación de continuidad y la ecuación de la energía.

El problema en tres dimensiones espaciales y una temporal tiene simetría cilíndrica, la propuesta de solución se realizará usando el método de diferencias finitas (Burden y Faires, 2002; Matthews y Fink, 2007) para las coordenadas radial y axial, método espectral de Fourier para la coordenada angular y un esquema semi-implícito de Adams-Bashforth (Peyret) de diferencias regresivas de segundo orden para la coordenada temporal.

Como se está trabajando un problema físico se tiene que las incógnitas son la velocidad con tres componentes, la presión y la temperatura. Para el caso de la presión se utiliza el método de proyección, que consiste en obtener una velocidad ficticia suponiendo inicialmente un campo de presiones constante.

El objetivo de esta tesis es comparar resultados numéricos semejantes a algunos resultados experimentales u observados en la naturaleza, para diversos valores del número de Rayleigh, incluyendo los casos del valor umbral en el que ocurre la inestabilidad, con el propósito de encontrar las inestabilidades y servir como apoyo a la parte experimental, reduciendo así los tiempos de experimentación.

La tesis se organiza en tres capítulos. En el primero se muestra el fenómeno de la convección de Rayleigh-Bénard, se plantea el dominio en dónde se estudia el problema y se presentan los métodos numéricos que se utilizaron dentro del programa. En el capítulo 2 se presenta la metodología empleada para la generación del programa y la aplicación de los métodos numéricos dentro del código generado para resolver el sistema de cinco ecuaciones presentadas en el capítulo 1. Finalmente en el capítulo 3 se muestran los resultados numéricos y se presenta un análisis sobre los resultados obtenidos y las inestabilidades del sistema.

# Capítulo 1

## Generalidades

### 1.1. La convección de Rayleigh-Bénard

La convección natural es generada normalmente en fluidos en presencia de un campo gravitatorio, la densidad cambia debido a las diferencias de temperatura o de concentración en el fluido. El movimiento de fluidos debido a este fenómeno se puede encontrar tanto en la naturaleza como en procesos industriales. En la naturaleza se presenta por las diferencias de temperaturas que enfrentan las nubes gaseosas en su interior y los vientos geostroficados generados en la atmósfera terrestre, en el proceso de mezclado de las aguas oceánicas y se estudia a fondo su relación con la dinámica de los materiales del manto y su influencia en el movimiento de las placas tectónicas en la corteza terrestre.

En la industria las aplicaciones son numerosas. Dentro de los equipos electrónicos un factor importante es el aprovechamiento de la convección natural para la disipación de calor y en la ventilación, calefacción y aislamiento de edificios, ventanas y todo tipo de espacios cerrados dispuestos a ser acondicionados a temperaturas constantes (Valencia, 2005).

Los primeros experimentos que existen sobre la convección fueron realizados por Henri Bénard alrededor de 1900, su experimento consistió en derretir cera sobre una placa de metal, al principio no encontró ningún cambio, pero se dió cuenta que al calentar la cera



Figura 1.1: Movimiento de convección.

se formaban una serie de patrones hexágonoales, debido a ese descubrimiento Bénard pudo deducir la existencia de celdas de convección (Drazin y Reid, 1981).

El fenómeno de convección ocurre cuando el aire caliente asciende (por ser menos denso que el aire frío) y el aire frío desciende por ser menos denso que el aire caliente. Cuando el aire caliente llega arriba éste se enfría y entonces baja. De esa forma se produce un movimiento circular del aire al que se le conoce como celda convectiva (ver figura 1.1).

La parte teórica la realizó Rayleigh tomando en cuenta los descubrimientos experimentales realizados por Bénard. Para su tratamiento consideró un fluido confinado entre dos planos de extensión infinita encontrando que la estabilidad de la solución de conducción depende de un parámetro que hoy en día se conoce como número de Rayleigh y se expresa como

$$R = \frac{g\alpha\beta d^4}{\kappa\nu}$$

en donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $d$  es el espesor de la capa del fluido,  $\beta$  es la diferencia de temperatura entre la frontera inferior y la superior,  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación,  $\kappa$  es el coeficiente de difusividad térmica y  $\nu$  es el coeficiente de viscosidad

(Drazin y Reid, 1981). En la naturaleza es posible observar la convección de Rayleigh-Bénard en los fenómenos meteorológicos, por ejemplo en las formas de las nubes, o bien en la formación de manchas en algunos animales, cuyo fenómeno se modela con las ecuaciones de difusión (Murray, 2002).

## 1.2. Planteamiento de las ecuaciones

Los modelos matemáticos son usados para simular fenómenos reales. Generalmente para realizar un modelo se empieza por un modelo simple. Si se requiere que dicho modelo se aproxime cada vez más a la realidad, entonces dicho modelo debe volverse cada vez más complejo. Un modelo simplificado de la convección de Rayleigh-Bénard se construye utilizando los supuestos propuestos por Joseph Valentin Boussinesq (Molina, 2010).

### 1.2.1. Aproximación de Boussinesq

La ecuación de la energía deducida en Chandrasekhar (1961) (ec. 39) es

$$\rho \frac{\partial(c_V T)}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)(c_V T) = \nabla(k \nabla T) - p \nabla \cdot u + \Phi$$

Los supuestos que se consideran son los siguientes:

1. La densidad  $\rho$  se considera constante excepto en el término correspondiente a la fuerza externa.
2. Para la fuerza externa se considera la densidad del fluido  $\rho$  como una función lineal de la temperatura  $T$ , tomando la siguiente forma:

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \alpha (T - T_0) \Rightarrow \rho = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)] \quad (1.1)$$

con  $\rho_0$  la densidad elegida adecuadamente para alguna temperatura media elegida y  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica, con  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

Otra manera de ver esta ecuación es expandir  $\rho$  como una serie de Taylor alrededor de  $T_0$  y conservar únicamente la parte lineal.

3. Se considera un fluido incompresible, es decir,  $\nabla \cdot u = 0$ .
4. No se pierde energía debido a fuerzas viscosas, es decir,  $\Phi = 0$  (Chandrasekhar, 1961).
5. Las constantes físicas no cambian con el tiempo, la posición o los cambios de temperatura;  $\nu, k \in \mathbb{R}$ . Además, se define  $\kappa = k/\rho_0 c_v$  como el coeficiente de conductividad termométrica (Chandrasekhar, 1961).

### 1.2.2. Sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones se compone por la ecuación de continuidad, las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de difusión (Chandrasekhar, 1961).

La variación de la densidad en el fluido es pequeña comparado con el gradiente de velocidades, por lo tanto

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} &= -[1 - \alpha(T - T_0)]g\hat{k} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}T &= \kappa\nabla^2T\end{aligned}$$

Una forma práctica de tratar las ecuaciones es adimensionalizandolas. La adimensionalización que se hace es la usual, en la que la distancia característica es la altura del cilindro. En el apéndice A se muestran los detalles de esta adimensionalización. Las ecuaciones quedan como:

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^* = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*)\vec{u}^* = -[g^* - R_a P_r (T^* - T_0^*)]\hat{k} - \vec{\nabla}^* p^* + P_r \nabla^{*2} \vec{u}^* \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* T^* = \nabla^{*2} T^* \tag{1.4}$$

donde los asteriscos denotan variables y operadores adimensionales y los parámetros adimensionales son el número de Prandtl y de Rayleigh, definidos como:

$$P_r = \frac{\nu}{\kappa} \tag{1.5}$$

$$R_a = \frac{g\alpha\beta}{\kappa\nu}d^4 \tag{1.6}$$

### 1.2.3. Formulación del problema

Se considera un cilindro de altura  $h$  que consta de dos tapas, la primera tiene una temperatura inicial  $T_0$  y la segunda tiene una temperatura  $T$ , con  $T_0 > T$ . Dentro del cilindro se tiene un fluido con Densidad  $\rho_0$  y viscosidad  $\nu$ . El dominio en donde se define el fluido es  $\Omega : 0 < r, 0 < z < h, 0 < \theta < 2\pi$ . Para el caso de  $r$  se dividió en  $0 < r < r_{ext}$  y en un dominio anular ( $r_{int} < r < r_{ext}$ ).

De aquí en adelante las ecuaciones son adimensionales, así que por simplicidad se quitan los asteriscos que denotan adimensionalidad de las variables. Como se desea conocer el comportamiento de dichas ecuaciones no lineales en su forma completa, para facilitar los cálculos se realiza el tratamiento en coordenadas cilíndricas, lo que implica que se tendrá una ecuación de continuidad, una ecuación radial, una angular, una vertical y la ecuación de la energía, es decir:

La ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad r, \theta, z \in \Omega \quad (1.7)$$

La ecuación radial

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \\ + P_r \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \quad r, \theta, z \in \Omega \end{aligned} \quad (1.8)$$

La ecuación angular

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{u_\theta u_r}{r} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ + P_r \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \quad r, \theta, z \in \Omega \end{aligned} \quad (1.9)$$

La ecuación axial o vertical

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = - \left[ g \frac{d^3}{\kappa^2} - R_a P_r (T - T_0) \right] - \frac{\partial p}{\partial z} \\ + P_r \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \quad r, \theta, z \in \Omega \end{aligned} \quad (1.10)$$

La ecuación de la energía

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad r, \theta, z \in \Omega \quad (1.11)$$

La deducción de las ecuaciones se presenta con detalle en el apéndice B.

### 1.3. Métodos de discretización

Los métodos numéricos son una herramienta importante para el modelado de sistemas físicos, biológicos, etc., en donde muchas veces el modelo que representa dicho sistema tiene una gran cantidad de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, o bien la solución analítica resulta muy compleja de resolver (Botello, 2007).

Un ejemplo de la aplicación de los métodos numéricos en la ingeniería civil, es en el modelado de las estructuras, en donde se utilizan técnicas de elementos finitos. En general las ecuaciones que se plantean se resuelven por distintos métodos, por ejemplo diferencias finitas, métodos espectrales, aproximaciones de Fourier, Adams-Bashforth, etc. La aplicación de los diferentes métodos, depende del modelo que se trate y de las condiciones en las que se quiera tratar el sistema (Botello, 2007).

Los métodos de discretización que existen son numerosos. En esta tesis sólo se presentan los que fueron utilizados para el desarrollo de la solución numérica del sistema de ecuaciones. A continuación se describen brevemente.

#### 1.3.1. Método de diferencias finitas

En éste método las derivadas parciales que aparecen en las ecuaciones son transformadas en diferencias finitas mediante el truncamiento de desarrollos en serie de Taylor, con el objetivo de crear un conjunto de ecuaciones que se pueden resolver de forma iterativa (Pérez, 2003), es decir, pasar de un problema continuo a un problema discreto. En el modelo que se plantea resolver se define una malla de puntos a lo largo de todo el dominio.

El objetivo es calcular los valores de la solución en los puntos de dicha malla. Para tal efecto es necesario contar con los valores iniciales de las funciones incógnitas en cada uno de los puntos de la malla (Cordero, 2004), así como con las condiciones de contorno en los puntos en las fronteras.

Del teorema de Taylor que establece que si  $u$  es una función de una variable  $x \in \mathbb{R}$  con derivadas finitas y continuas  $\forall \Delta x$ , entonces se puede obtener

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x u'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} u''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} u'''(x) + o(\Delta x^4) \quad (1.12)$$

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x u'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} u''(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} u'''(x) + o(\Delta x^4) \quad (1.13)$$

donde  $o(\Delta x^4)$  denota términos de orden superior.

#### 1.3.1.1. Diferencias Progresivas

Considerando la ecuación (1.12) hasta la segunda derivada, se tiene (Carrillo y Mendoza, 2015) que:

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x u'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} u''(x)$$

Se puede reescribir como:

$$u'(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} u''(x)$$

como es de primer orden, significa que  $o(\Delta x) = \frac{\Delta x}{2!} u''(x)$ , por lo que se puede escribir como:

$$u'(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - o(\Delta x)$$

o en forma simplificada como:

$$u'(x) \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (1.14)$$

#### 1.3.1.2. Diferencias regresivas

Considerando la ecuación (1.13) hasta la segunda derivada, se tiene (Carrillo y Mendoza, 2015) que

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x u'(x) - \frac{\Delta x^2}{2!} u''(x)$$

la ecuación anterior puede ser reescrita como:

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2!} u''(x)$$

como es de primer orden, significa que  $o(\Delta x) = \frac{\Delta x}{2!} u''(x)$ , por lo que se puede escribir como:

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

y en forma más simplificada se tiene:

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.15)$$

Para obtener la expresión de las diferencias regresivas a segundo orden (que es la que se ocupará en este caso) se realiza también una expansión en serie de Taylor, de tal forma que:

$$u(x - 2\Delta x) = u(x) - 2\Delta x u'(x) + \frac{4\Delta x^2}{2!} u''(x) - \frac{8\Delta x^3}{3!} u'''(x) + o(\Delta x^4) \quad (1.16)$$

Para la fórmula de las diferencias regresivas a segundo orden se aproxima la derivada como se muestra a continuación y se utiliza la ecuación (1.13), entonces:

$$u'(x) \approx a u(x) + b u(x - \Delta x) + c u(x - 2\Delta x) \quad (1.17)$$

y se encuentran los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Así que sustituyendo (1.13) y (1.16) en (1.17) se tiene:

$$\begin{aligned} u'(x) \approx & a u(x) + b \left[ u(x) - \Delta x u'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} u''(x) + o(\Delta x^3) \right] \\ & + c \left[ u(x) - 2\Delta x u'(x) + \frac{4\Delta x^2}{2!} u''(x) + o(\Delta x^3) \right] \end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$u'(x) \approx (a + b + c)u(x) - (b\Delta x + 2\Delta x c)u'(x) + \left( \frac{b\Delta x^2}{2!} + \frac{4c\Delta x^2}{2!} \right) u''(x) + o(\Delta x^3)$$

Despreciando  $o(\Delta x^3)$  se tiene un sistema de ecuaciones lineales de  $3 \times 3$ :

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ -b\Delta x - 2\Delta x c &= 1 \\ \frac{b\Delta x^2}{2!} + \frac{4\Delta x^2 c}{2!} &= 0 \end{aligned}$$

Eso significa que

$$b = -\frac{2}{\Delta x}; \quad c = \frac{1}{2\Delta x}; \quad a = \frac{3}{2\Delta x}$$

Por lo tanto sustituyendo valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  en (1.17) se tiene que:

$$u'(x) \approx \frac{3u(x) - 4u(x - \Delta x) + u(x - 2\Delta x)}{2\Delta x} \quad (1.18)$$

### 1.3.1.3. Diferencias Centradas

Del desarrollo en serie de Taylor (1.13) restando las ecuaciones de la expansión de Taylor con términos  $o(\Delta x^3)$  es decir:

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x) &= u(x) + \Delta x u'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} u''(x) + o(\Delta x^3) \\ u(x - \Delta x) &= u(x) - \Delta x u'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} u''(x) + o(\Delta x^3) \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x) = 2\Delta x u'(x) + o(\Delta x^3) \quad (1.19)$$

Si los términos de orden superior son pequeños, se tiene:

$$u'(x) \simeq \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (1.20)$$

La ecuación (1.20) se conoce como aproximación por diferencia central a segundo orden.

### 1.3.1.4. Aproximación de segundo orden para las segundas derivadas

Utilizando el desarrollo en serie de Taylor de las ecuaciones (1.12) y (1.13), restándolas se tiene que

$$u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x) = 2u(x) + \Delta x^2 u''(x) + o(\Delta x^4) \quad (1.21)$$

Si se asume que los términos de orden superior son pequeños, entonces la aproximación será

$$u''(x) \simeq \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (1.22)$$

### 1.3.2. Métodos multipasos

Un método multipasos se define como aquel cuya aproximación  $u_{i+1}$  puede representarse (Velásquez, 2007) de la forma

$$u_{i+1} = \alpha_{m-1}u_i + \alpha_{m-2}u_{i-1} + \cdots + \alpha_0u_{i+1-m} + h[\beta_m f(t_{i+1}, u_{i+1}) + \beta_{m-1}f(t_i, u_i) + \cdots + \beta_0 f(t_{i+1-n}, u_{i+1-n})] \quad (1.23)$$

con  $m > 1$ ,  $i = m - 1, m, \dots, n - 1$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $\alpha_0, \alpha_i, \dots, \alpha_{m-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$  valores constantes y  $u_i = \alpha_i$ , con  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ .

Si  $\beta_m = 0$ , se dice que el método multipasos es explícito, y si  $\beta_m \neq 0$ , se le llama implícito.

#### 1.3.2.1. Esquema semi-implícito

Son métodos lineales multipasos que se publicaron en 1885. Para problemas dependientes del tiempo se utilizan los esquemas de Adams-Bashforth. Si se tiene una ecuación del tipo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = H(f) \quad (1.24)$$

donde  $H(f)$  es una función de  $f$  con un término lineal  $\ell(f)$  y un término no lineal  $\aleph(f)$ .

El esquema semi-implícito de orden  $k$  que se puede aplicar a la ecuación (1.24) tiene la forma

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^{k-1} a_j f^{n+1-j} = \sum_{j=0}^{k-1} b_j \aleph(f^{n-j}) + \ell(f^{n+1}) \quad (1.25)$$

donde  $a_j$  y  $b_j$  son los coeficientes del esquema Adams-Bashforth que se utilicen. Dichos coeficientes se muestran en la tabla 4.4 de Peyret (2002). Estos esquemas tienen la ventaja de que se resuelve una ecuación no lineal aproximándola por un procedimiento lineal. La ecuación (1.25) corresponde a un esquema semi-implícito, porque el término lineal  $\ell(f)$  depende implícitamente del tiempo, así que es considerado implícito, y el término no lineal,  $\aleph(f)$ , explícito, de modo que el operador discreto resultante es independiente del tiempo y puede ser invertido o diagonalizado en una etapa anterior a la integración temporal. Otra

ventaja de este método es que del término lineal sólo es necesario conocerlo al tiempo  $n+1$ .

### 1.3.3. Métodos espectrales

Los métodos espectrales (ME) son una herramienta fundamental para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Los ME tienen la ventaja de que las soluciones que se obtienen, tienen mayor precisión que aquellas que se generan con otros métodos (Matos, 2009). Además de que los ME proporciona una gran precisión en los resultados, también minimizan el uso de la memoria, otra ventaja es que se pueden adaptar a condiciones de frontera poco usuales.

La idea fundamental de los ME es aproximar la solución de una ecuación diferencial parcial como una combinación lineal finita en términos de una base ortogonal de funciones infinitamente diferenciables  $\{\phi(x)\}_{j=1}^{\infty}$ ; es decir, suponer que la incógnita  $u(x)$  puede ser aproximada mediante una suma de  $N$  funciones ortogonales  $\phi(x)$  tal que (Boyd, 2000)

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x) \quad (1.26)$$

con  $a_k$  conocido como coeficiente espectral de  $u$  con respecto a la base  $\{\phi_k\}$ . Si se consideran funciones periódicas en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , entonces la base estará formada funciones senoidales  $\{\cos kx, \sin kx\}_{k=0}^{\infty}$ , que en su forma compleja se expresarían como  $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ , conocida como aproximación espectral de Fourier. Bajo ciertas condiciones puede expresarse a  $u(x)$  (Costa, 2007) como

$$u(x) = u_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n e^{ikx} \quad (1.27)$$

#### 1.3.3.1. Aproximación con series de Fourier

Todas las funciones que aparecen en una serie de Fourier son periódicas con periodo  $p = 2L$ , donde  $L$  es el desarrollo en series de Fourier es muy útil, ya que se pueden expresar funciones como combinación y superposición de armónicos simples. También permite desarrollar una función definida en un cierto intervalo en términos de serie de Fourier de

senos o de cosenos, lo cual permite extender la función en forma par o impar para su posible utilización en problemas diferentes (Acero y López, 2007).

Debido a que la coordenada angular es periódica con periodo  $2\pi$ , se pueden aproximar las variables como una serie compleja de Fourier de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &\approx \sum_{k=1}^m \hat{u}_{r_k}(r, z, t) e^{ik\theta} \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &\approx \sum_{k=1}^m \hat{u}_{\theta_k}(r, z, t) e^{ik\theta} \\ u_z(r, \theta, z, t) &\approx \sum_{k=1}^m \hat{u}_{z_k}(r, z, t) e^{ik\theta} \\ T(r, \theta, z, t) &\approx \sum_{k=1}^m \hat{T}_k(r, z, t) e^{ik\theta} \\ p(r, \theta, z, t) &\approx \sum_{k=1}^m \hat{p}_k(r, z, t) e^{ik\theta} \end{aligned}$$

En este caso la igualdad ocurre cuando  $m \rightarrow \infty$ . Para la aproximación numérica,  $m$  tomará valores de una potencia de 2, porque se usará un algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) que se elaboró tomando en cuenta potencias de 2 para  $m$ .

La función  $u_r$  dependerá de  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  y  $t$ , y al derivarla respecto a las distintas variables de las que depende se obtendrá

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &\approx \frac{u_r(r + \Delta r, z, t) - u_r(r - \Delta r, z, t)}{2\Delta r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial \theta} &\approx \sum_{k=1}^m ik \hat{u}_{r_k}(r, z, t) e^{ik\theta} \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} &\approx \frac{3u_r(r, z, t + \Delta t) - 4u_r(r, z, t) + u_r(r, z, t - \Delta t)}{2\Delta t} \\ &= \aleph(u_r^{t, t-\Delta t}) + \ell(u_r^{t+\Delta t}) \quad (\text{ver sección 1.3.2.1}) \end{aligned}$$

### 1.3.4. Métodos iterativos

Con el esquema semi-implícito de Adams-Bashforth se resuelve una ecuación no lineal, suponiendo que la parte no lineal de la ecuación es conocida a tiempos anteriores, lo que en cierta forma la linealiza.

En este sentido se tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales de gran tamaño (el tamaño depende del número de puntos de la malla que determina el dominio de integración de las ecuaciones).

En este caso se tendrá una matriz cuyas entradas son mayoritariamente ceros. Estas matrices son conocidas como matrices *dispersas* o *ralas* (Tewarson, 1973), y no es conveniente utilizar los métodos comunes para resolver sistemas del tipo  $Ax = b$  con  $x, b \in \mathcal{M}_{nx1}(\mathbb{R})$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  como la eliminación gaussiana. Para esto se utilizan los métodos iterativos, que consisten en comenzar con una aproximación inicial  $x^{(0)}$  de la solución  $x$  y genera una sucesión de vectores  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  que converge a  $x$ .

Se parte de un  $x^{(0)}$  arbitrario y los siguientes se construyen de la forma recursiva  $x^{k+1} = F(x^k)$ , con  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , en este caso los métodos iterativos contienen un proceso que convierte el sistema  $Ax = b$  en otro equivalente de la forma  $x = Tx + c$  para alguna matriz fija  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y un vector  $c \in \mathbb{R}^n$ . Luego de seleccionar el vector inicial  $x^{(0)}$  la sucesión de vectores de la solución aproximada se genera calculando

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$$

para cada  $k = 1, 2, 3, \dots$  (Burden y Faires, 2002).

Algunos de los métodos iterativos conocidos son el método de Jacobi, que se explicará con mayor detalle en la siguiente subsección.

#### 1.3.4.1. Método de Jacobi

Un sistema de ecuaciones se puede escribir de la forma  $Ax = b$ , siendo  $A$  la matriz de coeficientes y  $x$  el vector de incógnitas y  $b$  la matriz de términos independientes. La

matriz  $A$  se puede escribir (Aledo, 2009) de la forma

$$A = D + R$$

en dónde  $D$  es la matriz diagonal y  $R$  respresenta la matriz que contiene ceros en la diagonal y en el resto los elementos coinciden con los de  $A$ , entonces el sistema  $Ax = b$ , se puede escribir como  $(D + R)x = b$ . Se puede reescribir la ecuación anterior como

$$Dx = b - Rx$$

multiplicando la ecuación anterior por la matriz inversa  $D^{-1}$

$$D^{-1}Dx = D^{-1}(b - Rx)$$

entonces

$$x = D^{-1}(b - Rx)$$

es posible escribir la ecuación precedente en forma recursiva, de tal forma que

$$x^{k+1} = D^{-1}(b - Rx^k) \quad (1.28)$$

con  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , siendo  $x^k$  la solución inicial y  $x^{k+1}$  la solución posterior. Como  $D$  representa una matriz de cero menos en la diagonal, entonces  $D^{-1}$  tendrá valores de la forma  $\frac{1}{a_{ii}}$ , entonces se tendrá que al aplicar el método, las soluciones tendrán la forma

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}x_j^k}{a_{ii}}$$

#### 1.3.4.2. Método SOR

El método SOR mejora la convergencia usando la relajación, es un método simple y muy utilizado (Butt, 2010). Se define por el esquema iterativo

$$x_i^{x+1} = (1 - w)x_i^k + \frac{w}{a_{ii}} \left[ b_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right]$$

con  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $k = 1, 2, \dots$ . La forma de la matriz en el método SOR puede representarse como

$$x^{k+1} = (D + wL)^{-1}[(1 - w)D + wU]x^k + w(D - wL)^{-1}b \quad (1.29)$$

en donde  $L$  representa una matriz diagonal superior y  $U$  una matriz diagonal inferior. Es posible escribir la ecuación 1.29 como

$$x^{k+1} = T_w x^k + C$$

con  $T_w = (D + wL)^{-1}[(1 - w)D + wU]$  y  $C = w(D - wL)^{-1}b$ ,  $T_w$  se conoce como matriz de iteración.

Si el factor de relajación  $w$  se considera entre  $0 < w < 2$  se le conoce como SOR sobrerrelajado. Si  $w = 1$  se considera el método de Gauss-Seidel. Si  $0 < w < 1$  se trata del método SOR de subrelajación, se utiliza para sistemas que no convergen por el método de Gauss-Seidel.

### 1.3.5. Método de proyección

El método es llamado de “proyección” porque el campo de velocidades se calcula en dos pasos. El primer paso consiste en resolver las ecuaciones de Navier-Stokes suponiendo un campo de presiones constante, así el gradiente de la presión vale cero. En un segundo paso este campo de velocidad “ficticio” (es decir, el que se calculó suponiendo la presión constante) es proyectado en un espacio de divergencia cero y que satisface las condiciones de frontera adecuadas (Fuentes y Carbajal, 2005).

Entonces se supone un campo de presiones uniforme y se aproxima la derivada temporal con diferencias finitas regresivas de segundo orden. Esto lleva a la siguiente ecuación

$$\frac{3\vec{u}^* - 4\vec{u}^n + \vec{u}^{n-1}}{2\Delta t} + \aleph(\vec{u}_r^{n,n-1}) + \left[ g \frac{d^3}{\kappa^2} - R_a P_r (T - T_0) \right] \hat{k} + P_r \nabla^2 \vec{u}^* = 0 \quad (1.30)$$

donde  $\vec{u}^*$  es el campo de velocidades ficticio y  $\aleph(\vec{u}_r^{n,n-1})$  es la parte no lineal de acuerdo al esquema semi-implícito de Adams-Bashforth. El término  $\aleph(\vec{u}_r^{n,n-1})$  requiere del conocimiento del campo de velocidades a dos tiempos anteriores  $n$  y  $n - 1$  ( $n + 1$  representa el tiempo actual).

Por otro lado, la ecuación para el campo de velocidades verdadero es:

$$\frac{3\vec{u}^{n+1} - 4\vec{u}^n + \vec{u}^{n-1}}{2\Delta t} + \aleph(\vec{u}_r^{n,n-1}) + \left[ g \frac{d^3}{\kappa^2} - R_a P_r (T - T_0) \right] \hat{k} + \vec{\nabla} p^{n+1} + P_r \nabla^2 \vec{u}^{n+1} = 0 \quad (1.31)$$

Restando la ecuación (1.31) de la ecuación (1.30) se obtiene:

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^* - \frac{2\Delta t}{3} \left[ \vec{\nabla} p^{n+1} + P_r \nabla^2 (\vec{u}^* - \vec{u}^{n+1}) \right] \quad (1.32)$$

Tomando la divergencia de la ecuación (1.32) y usando el hecho de que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{n+1} = 0$  se obtiene la ecuación para la presión:

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{3}{2\Delta t} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^* - P_r \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{u}^*) \quad (1.33)$$

## 1.4. La estabilidad de los métodos

La malla se generó en tres dimensiones, en el contenedor cilíndrico. Se hicieron pruebas poniendo diferentes cantidades de puntos, con el fin de probar la estabilidad del método. Se inició con 12,800 puntos aproximadamente y se terminó con 204,800 puntos, ya que los resultados con este número de puntos y el caso previo (115,200 puntos) fueron muy similares.

Otra forma de evaluar la convergencia del método es utilizando la condición CFL (Courant-Friedrich-Levy). Se usa un parámetro adimensional llamado número de Courant que es una relación entre la velocidad actual del fluido  $U$ , el paso del tiempo  $\Delta t$  y el tamaño del elemento  $\Delta x$ , en 1D se define (Costarelli, 2011) como :

$$Co = \frac{U_q \Delta t}{\Delta q} \quad (1.34)$$

$U_q$  es la componente de velocidad en la dirección  $q$ ,  $\Delta t$  es el paso temporal y  $\Delta q$  el paso espacial en la dirección  $q$ . El número  $Co$  debe ser en todo momento menor o igual que 1, de otra forma la partícula del fluido escapará (numéricamente hablando) del dominio y entonces se tendrán divergencias. En ocasiones,  $Co$  puede ser un poco mayor que 1,

cuando se esta llegando a una etapa en la que los gradientes son muy fuertes, pero pasando esta etapa el número  $Co$  puede disminuir. Este hecho no representa una divergencia en el cálculo. Sin embargo, sí existen divergencias, se debe disminuir el tamaño del paso temporal  $\Delta t$  y continuar con la simulación.

En este caso solo se tomó el criterio de aumentar el número de puntos en la malla y verificar que los resultados tendían a parecerse cada vez más. En futuras modificaciones y mejoras al programa se implementará el número de Courant para verificar la estabilidad del método.

## 1.5. Condiciones iniciales y de frontera

Como condición inicial se considera una distribución de temperatura con un gradiente constante  $\Delta T/d$ , la presión es la hidrostática y el fluido está inicialmente en reposo. Se requieren los valores para las variables a dos tiempos anteriores, así que se imponen esos valores de la siguiente forma: Se asigna un valor de cero para la presión y la velocidad (parte del reposo) y un gradiente lineal de temperatura en la dirección  $z$ ; y para el siguiente tiempo se asigna el mismo valor más una pequeña perturbación aleatoria del orden de  $10^{-7}$ .

En las condiciones de frontera se impone una condición de no deslizamiento en las paredes sólidas (es decir,  $u = 0$ ), mientras que para la temperatura tiene valores fijos y diferentes en las paredes inferior y superior, y en las paredes laterales se conserva el gradiente lineal.

Para las variables y fronteras restantes (incluyendo la velocidad en  $r = 0$ ) se imponen condiciones de Neumann y/o Dirichlet. Como condiciones de Neumann se toma que la derivada normal de la variable en cuestión se hace cero en esas fronteras, y las condiciones de Dirichlet implican que la variable se hace cero en  $r = 0$ .



# Capítulo 2

## Implementación del programa

Los pasos a seguir al implementar el programa son los siguientes:

1. Como se requieren los valores para las variables a dos tiempos anteriores, se imponen esos valores como se mencionó en la sección 1.5, y para el siguiente tiempo se asigna el mismo valor más una pequeña perturbación aleatoria del orden de  $10^{-7}$ .
2. Con esos valores se calcula el término no lineal a tiempos anteriores como se describe en la sección 1.3.2.1.
3. Teniendo el término no lineal a tiempos anteriores, se construye el término conocido despejando todos los términos al tiempo actual, según el método de Adams-Bashforth.
4. Se calcula la FFT para obtener los coeficientes del desarrollo en serie compleja de Fourier del término conocido.
5. Con esos coeficientes se resuelve el sistema de ecuaciones de  $4 \times 4$  (N-S y energía) suponiendo un campo de presiones constante para obtener los coeficientes en desarrollo de serie compleja de Fourier del campo de velocidades ficticio  $\vec{u}^*$  y de la temperatura  $T$ . Para eso se usa el método iterativo de sobrerelajación 1.3.4. En este paso se requiere imponer las condiciones de frontera adecuadas para los coeficientes de las variables.

6. Con los coeficientes obtenidos al resolver el sistema, se reconstruyen los campos de temperatura y de velocidades ficticio. Una vez que se tienen los valores del campo de velocidades ficticio se resuelve la ecuación (1.33), que es una ecuación de Poisson donde el término independiente es conocido. Para eso en la que se deben calcular la divergencia  $\nabla \cdot \vec{u}^*$  y  $\nabla^2(\nabla \cdot \vec{u}^*)$ , los cuales se pueden calcular sin ningún problema al tener el valor de  $\vec{u}^*$ .
7. Al resolver la ecuación de Poisson para la presión (ecuación 1.33), se repite el procedimiento de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes pero ahora para obtener el campo de velocidades verdadero  $\vec{u}$ , teniendo ya el campo de presiones (sistema de ecuaciones de  $3 \times 3$ ). .

## 2.1. Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

Para resolver el sistema de 5 ecuaciones (tres ecuaciones de Navier-Stokes, correspondientes a cada una de las componentes de la velocidad en coordenadas cilíndricas, la ecuación de continuidad y la ecuación de la energía) con 5 indeterminadas (las tres componentes de la velocidad,  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_z$ , la presión  $P$  y la temperatura  $T$ ). Se procede de la siguiente manera:

- Se usa el método de proyección para desacoplar la presión y la temperatura (sección 1.3.5). Para esto se obtiene la divergencia de la ecuación vectorial de Navier-Stokes, con la cual se tiene una ecuación de segundo orden para la presión.
- Para tratar la no linealidad del problema se usa el esquema semi-implícito de Adams-Bashforth (sección 1.3.2.1), que supone conocida a tiempos anteriores la parte no lineal y resuelve la parte lineal en el tiempo actual.

Dentro de dicho esquema, se usan los métodos de diferencias finitas (sección 1.3.1) para las coordenadas axial y radial, y el método espectral de Fourier para la coordenada angular (sección 1.3.3.1), aprovechando la periodicidad de dicha variable, así

que se pueden aproximar la velocidad, presión y temperatura (representadas por  $\phi$ ) como una serie compleja de Fourier

- La condición inicial es que el fluido parte del reposo, es decir,  $u = 0$ , se supone un gradiente de temperaturas lineal y la condición inicial de la presión es la hidrostática. Las condiciones de frontera son diversas dependiendo de la variable, por ejemplo se usa la condición de no deslizamiento para la velocidad en las fronteras sólidas y las condiciones de Neumann (Asmar, 2005), consistentes en anular la derivada normal de la variable en la frontera.

En la figura 2.1 se puede observar el mallado en el cilindro y cómo se aplican los métodos que se trataron en el capítulo 1.

## 2.2. Métodos de diferencias finitas

Dentro del programa se utilizan los métodos de diferencias finitas dependiendo del punto donde se desee obtener la derivada, por ejemplo en la figura 2.2, se puede observar que si se quiere encontrar  $\frac{\partial u_r}{\partial r}$  en el punto  $(x_i, y_j)$  se tendrá que utilizar el esquema de diferencias centradas (ver sección 1.3.1.3 del capítulo 1)  $\frac{\partial u_r}{\partial r} \approx \frac{u_r(i+1,j) - u_r(i-1,j)}{2\Delta r}$ . Si el punto en donde se desea conocer la derivada es en el  $(x_1, y_j)$  se utiliza el esquema de diferencias regresivas hacia adelante (ecuación 1.18), entonces se tendría que  $\frac{\partial u_r}{\partial r} \approx \frac{-3u_r(i,j) + 4u_r(2,j) - u_r(3,j)}{2\Delta r}$

## 2.3. Método de Adams-Bashforth

Como se mencionó anteriormente, el método de Adams-Bashforth (sección 1.3.2.1) se utiliza para tratar la no linealidad de las ecuaciones. Se puede observar de la ecuación (1.3) que:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -[g - R_a P_r (T - T_0)] \hat{k} - \vec{\nabla} p + P_r \nabla^2 \vec{u}$$

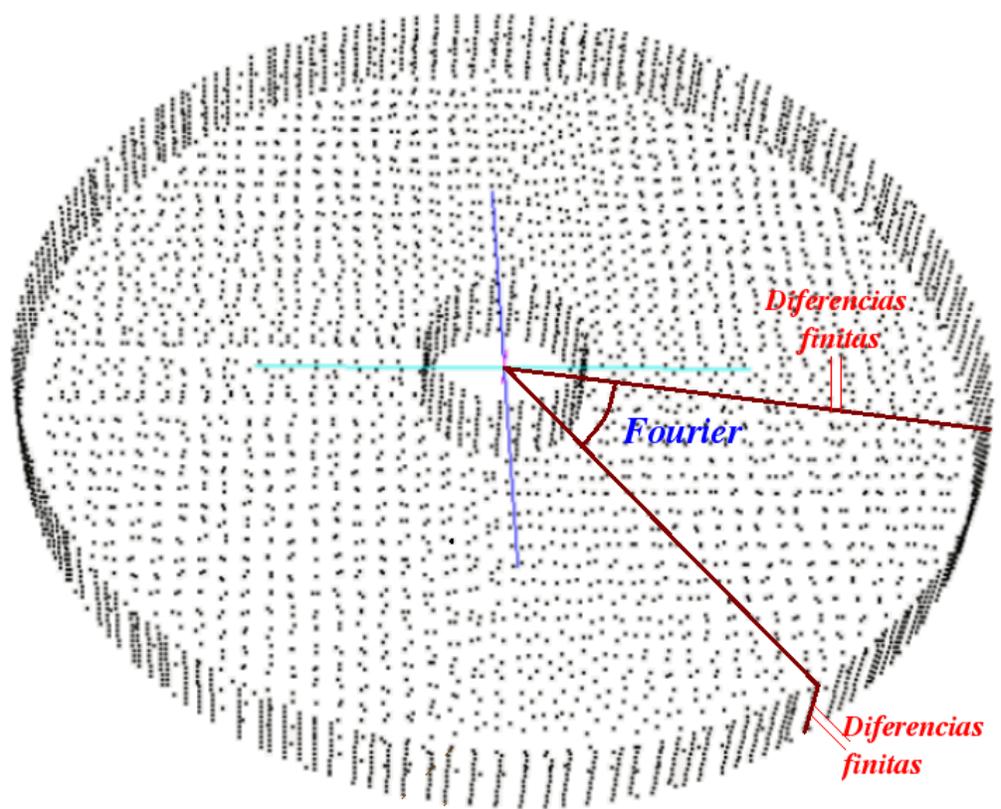


Figura 2.1: Discretización del cilindro para poder resolver el sistema.

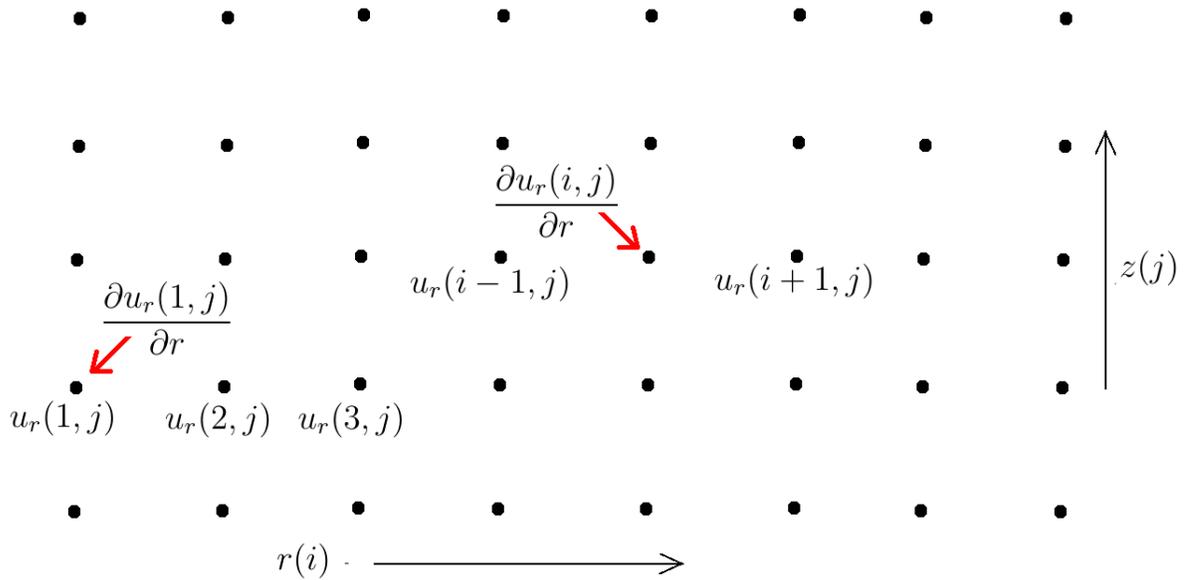


Figura 2.2: Cálculo de las derivadas en el punto señalado.

Reacomodando términos:

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\text{término temporal}} = - \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}}_{\text{término no lineal}} - \underbrace{[g - R_a P_r (T - T_0)] \hat{k} - \vec{\nabla} p + P_r \nabla^2 \vec{u}}_{\text{término lineal}} \quad (2.1)$$

la cual puede resolverse usando (1.25).

Para un esquema de segundo orden, la ecuación (2.1) puede aproximarse como:

$$\frac{3\vec{u}^{n+1} - 4\vec{u}^n + \vec{u}^{n-1}}{2\Delta t} = 2\aleph(\vec{u}^n) - \aleph(\vec{u}^{n-1}) + \ell(\vec{u}^{n+1}) \quad (2.2)$$

Con esto se obtiene un sistema de ecuaciones para los puntos que definen el dominio y en el cual, el término no lineal debe ser evaluado a los tiempos  $n$  y  $n - 1$ .



# Capítulo 3

## La simulación

En este capítulo se presentan resultados de la simulación obtenidos al resolver el sistema de ecuaciones para diferentes valores del número de Rayleigh, por debajo y por encima del valor crítico ( $Ra = 1708$ ). Las simulaciones numéricas se llevaron a cabo con un valor constante del número de Prandtl ( $Pr = 0.71$ ) el cual corresponde a fluidos usuales (?), y algunos números de Rayleigh alrededor del crítico. Como ya se mencionó en la sección 1.2.3, la geometría usada fue en un contenedor cilíndrico, y en un dominio anular, aunque en este caso solo se presentan las celdas convectivas en un plano horizontal. El paso temporal fue de  $\Delta t = 0.25$ .

Siguiendo la metodología descrita en la sección 2.3 se generó un programa. Se realizaron diversas pruebas para valores por debajo del número de Rayleigh crítico (1600, 1650 y 1700), para el número de Rayleigh crítico (1708) y para valores por encima de éste número (1750, 1800, 1850, 2000, 2500, 4000 y 5000). Solo se presentan algunos resultados que se dividen en dos secciones, la primera de ellas corresponde al caso por debajo del valor crítico en donde se tienen valores de Rayleigh de 1600 y la segunda de ellas corresponde a valores de Rayleigh de 2000, 2500, 4000 y 5000.

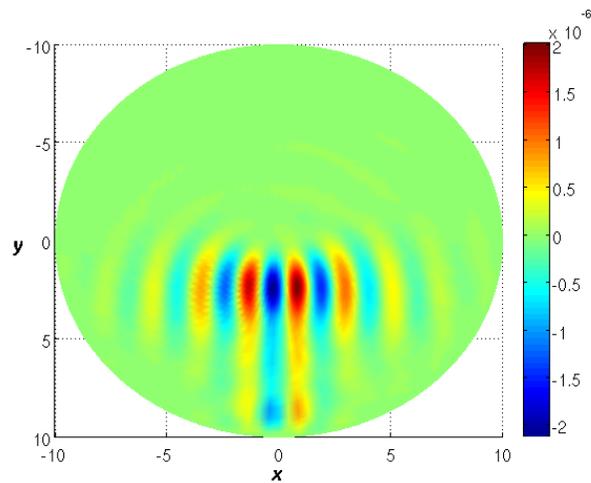


Figura 3.1: Caso  $R_a = 1600$ . Componente  $z$  de la velocidad al tiempo  $t = 999\Delta t$ .

### 3.1. Debajo del valor crítico

La figura 3.1 muestra la componente vertical del campo de velocidades en el plano horizontal medio del contenedor cilíndrico al tiempo  $t = 999\Delta t$ . Los valores de esta variable (velocidad) son en promedio cercanos a cero a ese tiempo, por lo que no se presentó ninguna inestabilidad. Las manchas azules y rojas que se presentan en la figura se deben a errores numéricos, pero no crecen más allá de  $10^{-6}$  en todo el tiempo de integración de las ecuaciones, por lo que se pueden considerar como cero.

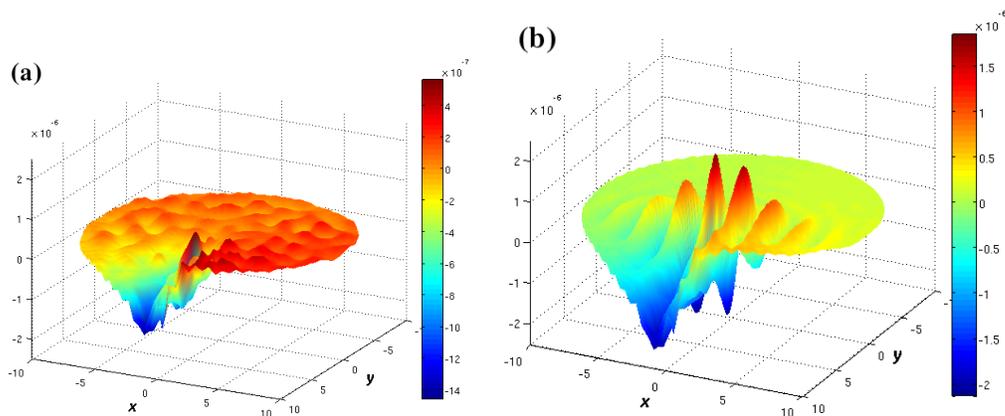


Figura 3.2: Presión en el plano horizontal medio,  $R_a = 1600$ . (a) Al tiempo  $t = 4\Delta t$  (b) Al tiempo  $t = 299\Delta t$ .

La figura 3.2 muestra la presión en el plano horizontal medio del contenedor cilíndrico a dos tiempos distintos. Al tiempo  $t = 4\Delta t$  sólo se observan las perturbaciones impuestas en la condición inicial y un tiempo después, y se observan máximos y mínimos en la vecindad de la región  $x = 0, y \in (0, 10]$ ; estos máximos y mínimos continúan y crecen conforme pasa el tiempo, sin embargo, no son lo suficientemente grandes como para producir la inestabilidad.

### 3.2. Por encima del valor crítico

La figura 3.3 muestra la componente vertical de la velocidad en el plano horizontal medio del contenedor. Cada región roja corresponde a la velocidad vertical positiva, mientras que las regiones azules representan a la velocidad vertical negativa. Con esto se puede establecer empíricamente que el número de círculos es el doble de regiones rojas (o azules) (?).

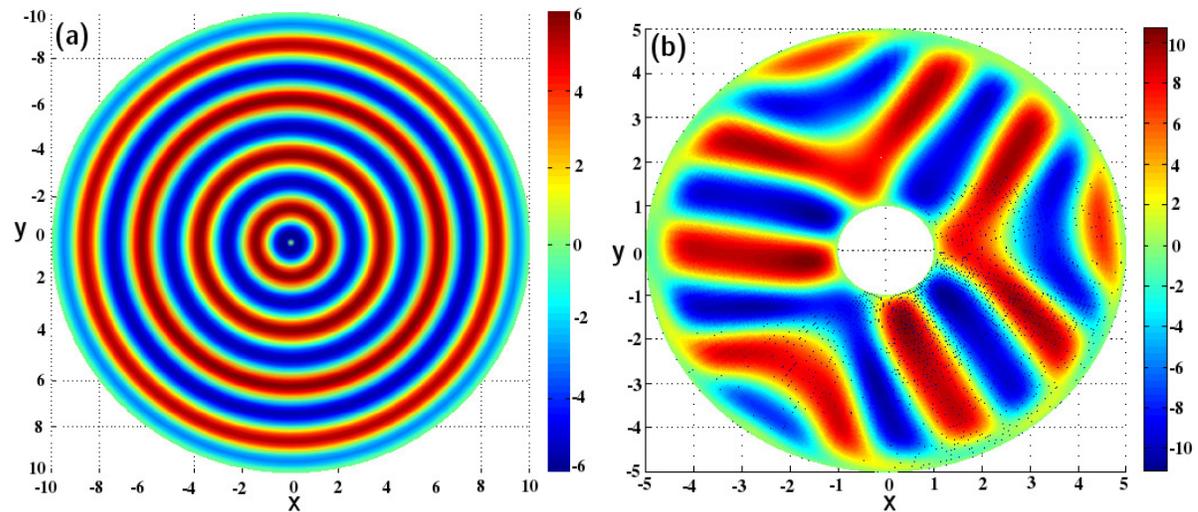


Figura 3.3:  $u_z$  en el plano medio horizontal del cilindro. (a) Estado estacionario para  $R_a = 2000$ . Los rollos son círculos concéntricos, como en Charru (2007). (b) Estado estacionario para el caso anular  $R_a = 2500$ .

La figura 3.3 (a) corresponde al estado estacionario para  $R_a = 2000$  y  $r_{ext} = 10$ . Se pueden observar ocho círculos concéntricos. Esta figura es similar al resultado experimen-

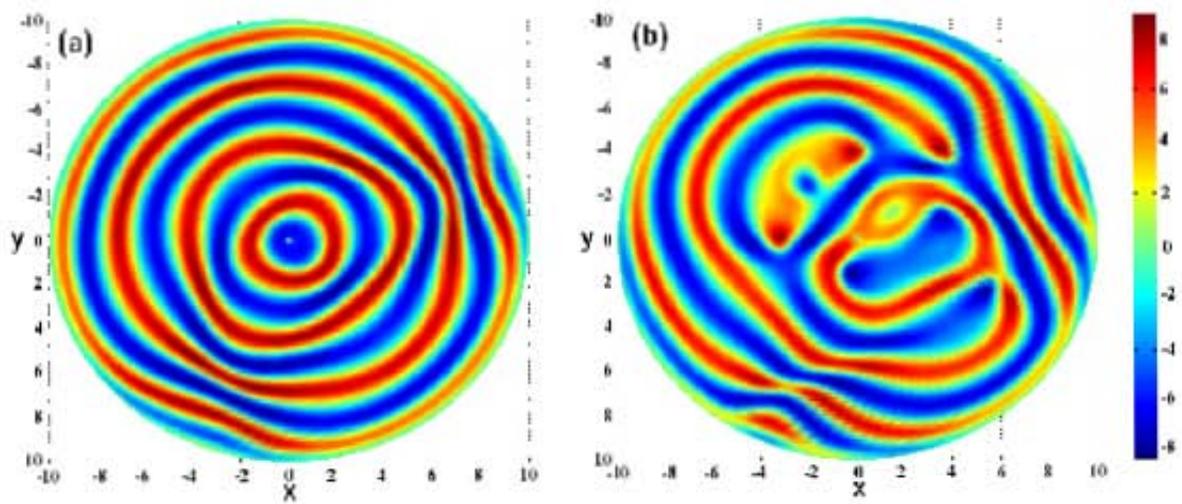


Figura 3.4: Caso  $R_a = 2500$ . (a) Al principio aparece el patrón de círculos concéntricos. Después de un tiempo los círculos comienzan a ondular. (b) El patrón de círculos concéntricos está totalmente destruido.

tal reportado por Charru (2007). La figura 3.3(b) corresponde al estado estacionario para  $R_a = 2500$  en un dominio anular, con  $r_{int} = 1$  y  $r_{ext} = 5$ . Se pueden contar catorce círculos convectivos, sin embargo estos no son concéntricos como en el primer caso.

La figura 3.4 muestra los resultados de las simulaciones para  $R_a = 2500$  en un contenedor cilíndrico con  $r_{ext} = 10$  a dos diferentes tiempos. En un principio el patrón siempre es de círculos concéntricos (ver Fig. 3.4(a) imagen a  $t = 13.8$ ). Después de cierto tiempo los círculos concéntricos comienzan a deformarse. En la Fig. 3.4(b), correspondiente a  $t = 28$ , el patrón inicial se pierde por completo. Es importante notar que la figura 3.4(b) tiende a una forma similar a los resultados reportados por Chandrasekhar (1961).

La figura 3.5 muestra la velocidad vertical en el plano horizontal medio del contenedor para  $R_a = 5000$  en (a)  $t = 3.8$  y (b)  $t = 4.2$ . Se puede observar que los patrones cambian rápidamente y no se llega a un estado estacionario en este intervalo de tiempo.

Desafortunadamente para casos de números de Rayleigh por debajo del crítico la simulación numérica también presentaba inestabilidad, por lo que nuevamente se revisó el

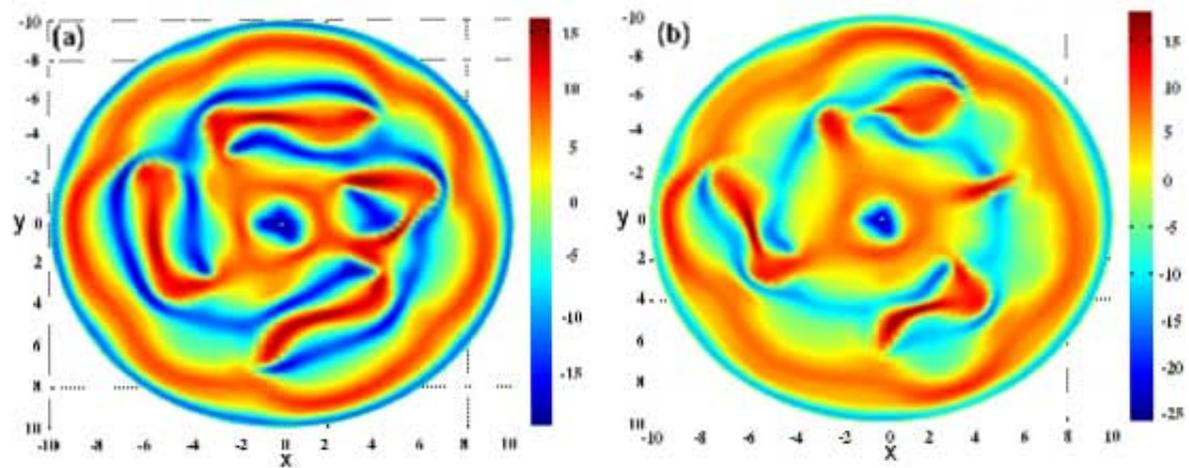


Figura 3.5: Caso  $R_a = 5000$ . Inicia formando un patrón de círculos concéntricos y cambia rápidamente. (a) Patrones al tiempo  $t = 3.8$  (b) al tiempo  $t = 4.2$ .

procedimiento numérico. La forma de resolver ese problema fue el actualizar el valor del campo de temperaturas, es decir, que en el punto 7 de los pasos a seguir para implementar el programa, mencionada en el capítulo 2, en lugar de resolver un sistema de  $3 \times 3$  para obtener sólo el campo de velocidades, se resuelve nuevamente un sistema de  $4 \times 4$  incluyendo la ecuación de la energía. Esto mejoró el comportamiento al no presentar inestabilidad para casos de números de Rayleigh menores que el valor crítico. Sin embargo, el patrón de círculos concéntricos ya no se formó más, como se muestra en las siguientes secciones.

### 3.2.1. Caso $R_a = 2000$

La figura 3.6 muestra una secuencia temporal del desarrollo de la inestabilidad para  $R_a = 2000$ .

En la figura 3.6(a) se puede ver un estado inicial del sistema en el cual comienza a formarse la inestabilidad. En las gráficas de la figura 3.6(b), (c) y (d) se muestra como la inestabilidad se va desarrollando formando los círculos. En la gráfica de la figura 3.6(e), a un tiempo de  $t = 250$  se observa que la inestabilidad va tomando la forma de los círculos concéntricos mostrados en la figura 3.3(a). Para eso es necesario dejar más tiempo el programa en ejecución y esperar a que llegue al estado estacionario. A partir de eso,

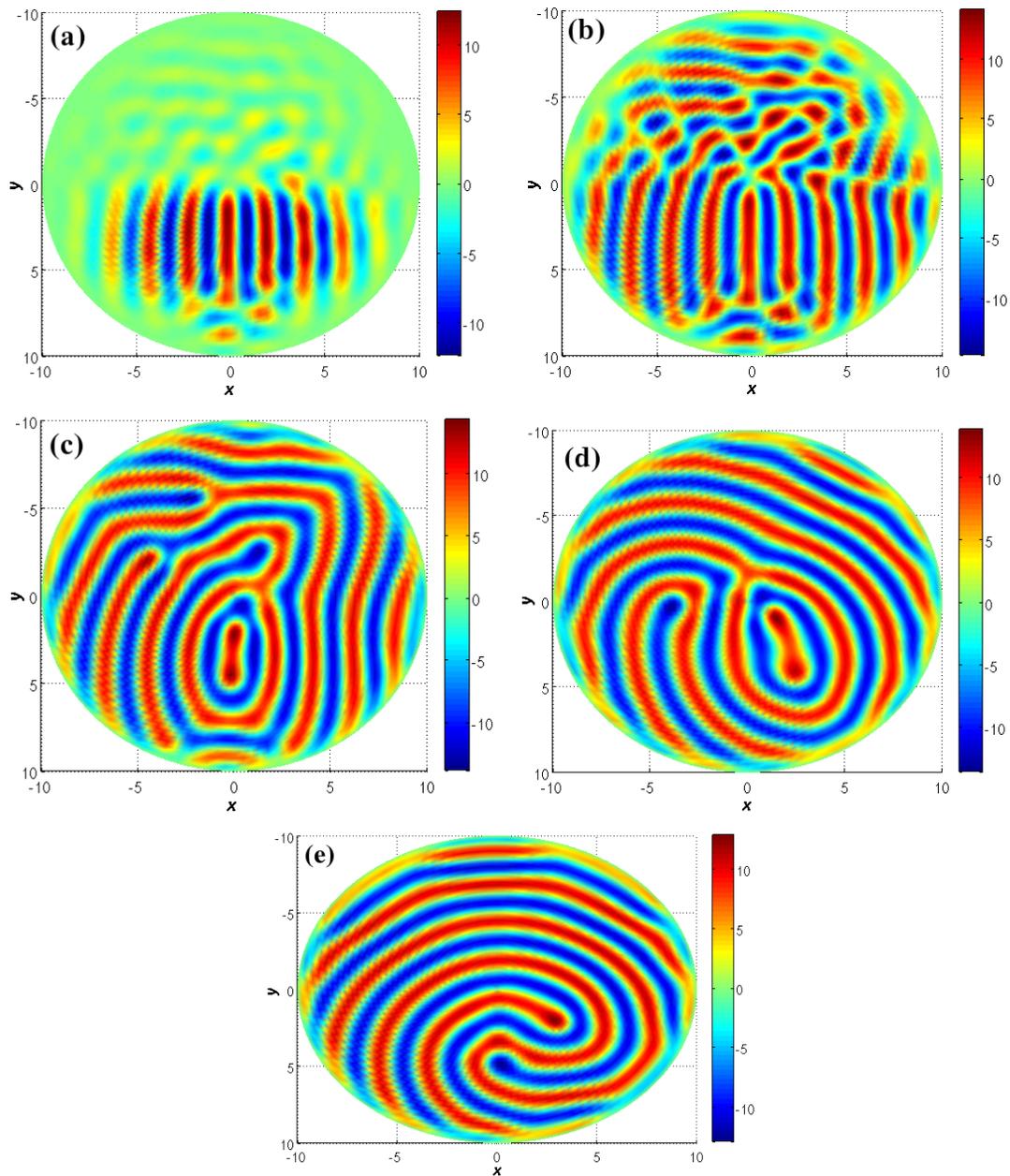


Figura 3.6: Velocidad vertical  $u_z$  en el plano horizontal medio,  $R_a = 2000$ . (a) Al tiempo  $t = 6\Delta t$ , cuando aparece la inestabilidad. (b)  $t = 7\Delta t$ . (c)  $t = 20\Delta t$ . (d)  $t = 500\Delta t$ . (e)  $t = 999\Delta t$ . En esta sucesión de imágenes no aparecen los rollos con forma de círculos concéntricos.

surgen dos preguntas:

1. Si el estado estacionario de este caso ( $R_a = 2000$ ) son los círculos concéntricos, ¿no es suficiente tomar el programa sin actualizar la temperatura, mismo que llegó al patrón de círculos concéntricos mucho más rápido? O
2. Si el estado estacionario no es el de círculos concéntricos, seguramente tendrá la forma de los resultados experimentales mostrados en Chandrasekhar (1961). Así que ¿Es necesario que el programa continúe ejecutándose por más tiempo?

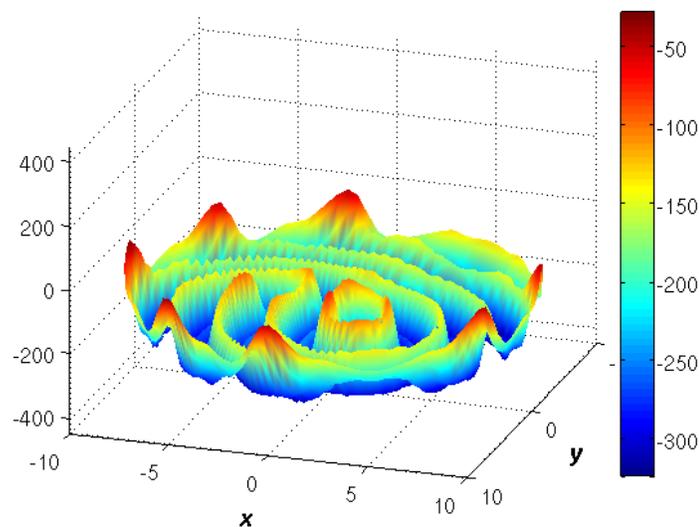


Figura 3.7: Presión en el plano horizontal medio al tiempo  $t = 500$ ,  $R_a = 2000$ .

La figura 3.7 muestra la presión en el plano horizontal medio al tiempo  $t = 500$ . Los valores son mucho mayores que en el caso de  $R_a = 1600$ , pero conforme pasa el tiempo no aumentan mucho más que los mostrados en esta figura.

En la figura 3.8 se puede observar el comportamiento de la temperatura en función del tiempo para cuatro diferentes radios, en el plano medio horizontal  $z = 0.5$  y a un ángulo  $\theta = 109.4^\circ$ . Se puede ver que conforme aumenta el tiempo, hay un punto en dónde se estabiliza la temperatura. Cabe mencionar que es un comportamiento parecido al de la presión. En la figura 3.9 se muestran las componentes  $r$  y  $z$  de la velocidad en los mismos cuatro radios que se usaron para mostrar el desarrollo de la temperatura de la

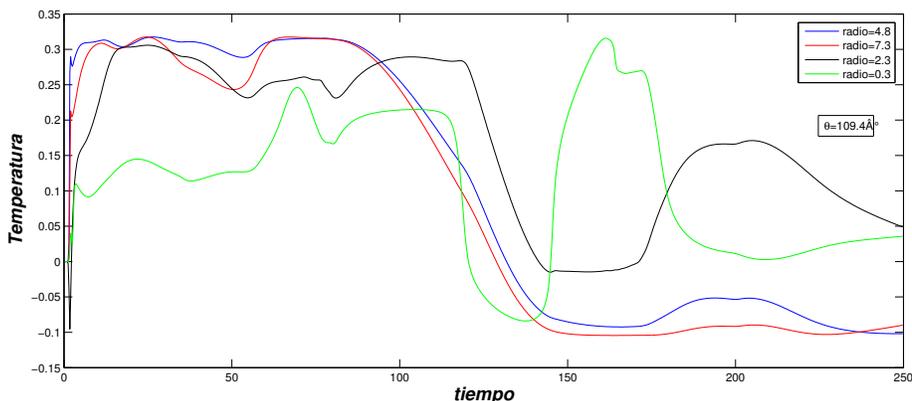


Figura 3.8: La temperatura en función del tiempo, para diferentes radios (0.3, 2.3, 4.8 y 7.3) a un ángulo de  $109.4^\circ$

figura 3.8. La componente  $u_z$  tiene un comportamiento parecido al de la temperatura (figura 3.9(b)). No sucede lo mismo con la componente  $u_r$ . Esto sucede porque en las ecuaciones de Navier-Stokes (1.2.2) la temperatura solamente aparece en la componente  $z$ . En dos puntos ( $r = 0.3$  y  $r = 2.3$ ) la componente  $u_r$  tiende a un valor constante. Pero los otros dos radios no ocurre ese comportamiento. Sin embargo para los otros dos radios, la componente  $u_r$  se comporta de manera similar.

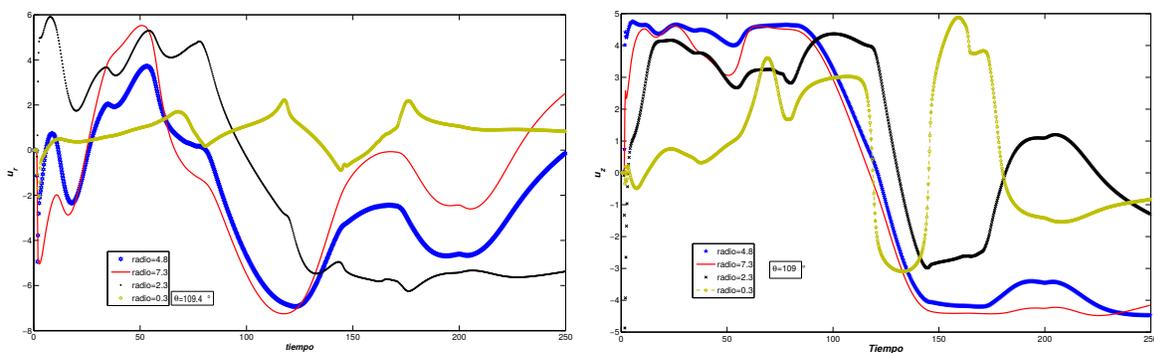


Figura 3.9: (a) La velocidad en  $r$  en función del tiempo y (b) La velocidad en  $z$  para diferentes radios (0.3, 2.3, 4.8 y 7.3) a un ángulo de  $109.4^\circ$ .

En la figura 3.10 se muestra la vorticidad  $\omega_\theta$  en el plano  $rz$  y se superpone el campo de velocidades. Aquí se observan las celdas convectivas. El campo de velocidades define

la dirección en el que el fluido caliente sube y el frío baja. Si trazamos una solución en el campo de velocidades se observa que dicha solución es tipo centro, cuyo giro va en sentido contrario a las manecillas del reloj (azul) o en sentido de las manecillas del reloj (rojo).

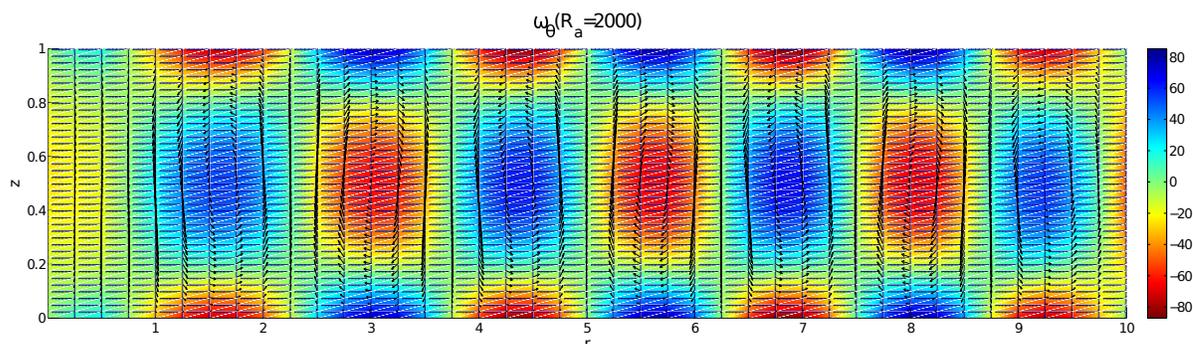


Figura 3.10: Vorticidad y campo de velocidades en el plano  $rz$  a  $\theta = 109.4^\circ$  para  $R_a = 2000$

En la figura 3.11 se presenta el plano fase para la vorticidad  $\omega_\theta$  y diferentes componentes del campo de velocidades. Se observan tres gráficas, una línea inclinada que corresponde a la vorticidad  $\omega_\theta$  con la velocidad  $u_r$ , un círculo que corresponde a vorticidad con la velocidad  $u_z$  y una parábola que corresponde vorticidad con la magnitud de la velocidad  $u_{rz}$ , todos parten del origen pero no vuelven a pasar por dicho punto, sino que siguen las trayectorias antes mencionadas, pero no pasan por los mismos puntos.

### 3.2.2. Caso $R_a = 4000$

La figura 3.12 muestra una secuencia temporal del desarrollo de la inestabilidad para  $R_a = 4000$ .

En la figura 3.12 se presentan solo dos gráficas a dos diferentes tiempos  $t = 150\Delta t$  y  $t = 406\Delta t$ , como se puede observar no se alcanzan a formar los círculos concéntricos.

La figura 3.13 muestra la presión en el plano horizontal medio al tiempo  $t = 500\Delta t$ . Los valores son mucho mayores que en el caso de  $R_a = 1600$ , pero conforme pasa el tiempo no aumentan mucho más que los mostrados en la figura.

En la figura 3.14 se presenta la velocidad  $u_r$  y la velocidad  $u_z$ , para cuatro radios diferentes, en donde se puede notar que conforme aumenta el tiempo para todos los radios, la

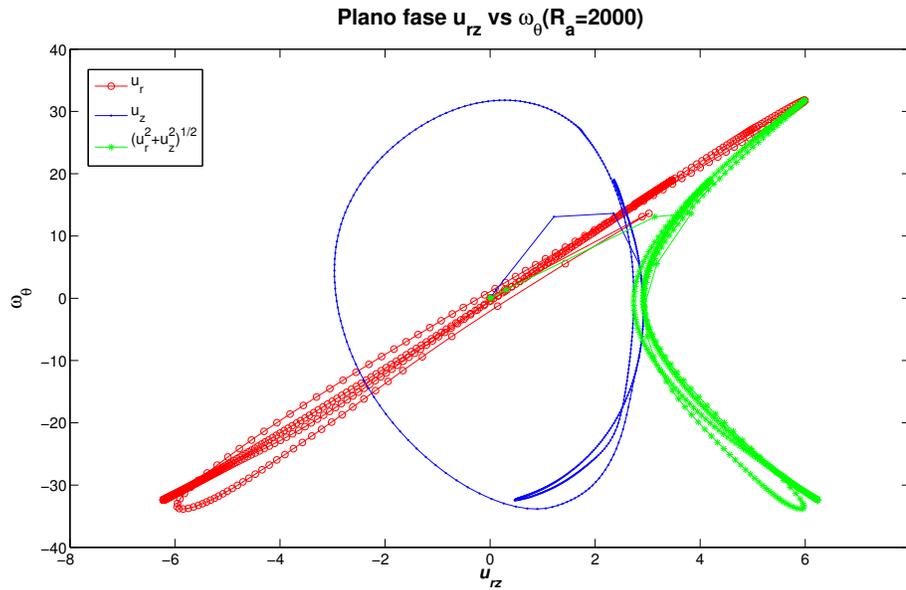


Figura 3.11: Plano fase de la vorticidad  $\omega_\theta$  y las componentes de velocidad  $u_r$ ,  $u_z$  y la magnitud de la velocidad  $u_{rz} = \sqrt{u_r^2 + u_z^2}$  para  $R_a = 2000$

velocidad  $u_r$  se encuentra oscilando al rededor del cero, pero para el caso de la velocidad  $u_z$ , no se observa un comportamiento estacionario como el anterior, ya que se encuentra oscilando al rededor de  $-15$  y  $15$  y no se observa ninguna estabilidad en algún punto.

Para el caso de la vorticidad y el campo de vectores, se muestra en la figura 3.15 el campo de vectores y la vorticidad en el plano  $rz$ , se presentan soluciones tipo centro (Blanchard, 1998), en donde los giros pueden ser en sentido de las manecillas del reloj (rojos) y contrario a las manecillas del reloj (azul).

En la figura 3.16 se presenta el espacio fase de la vorticidad  $\omega_\theta$  y la velocidad  $u_r$ , en donde se observa que la trayectoria parte del origen y después se forman una especie de elipses, pero no existe ningún comportamiento específico que pueda decir que esta sucediendo, es decir las soluciones al igual que en  $R_a = 2000$  no toman los mismos puntos. El caso de la vorticidad y la velocidad  $u_z$ , las trayectorias que se forman también parten del origen y se centran al rededor de este, pero tampoco se tiene un comportamiento específico. Finalmente se tiene la vorticidad y la magnitud de la velocidad  $u_{rz}$  en dicho

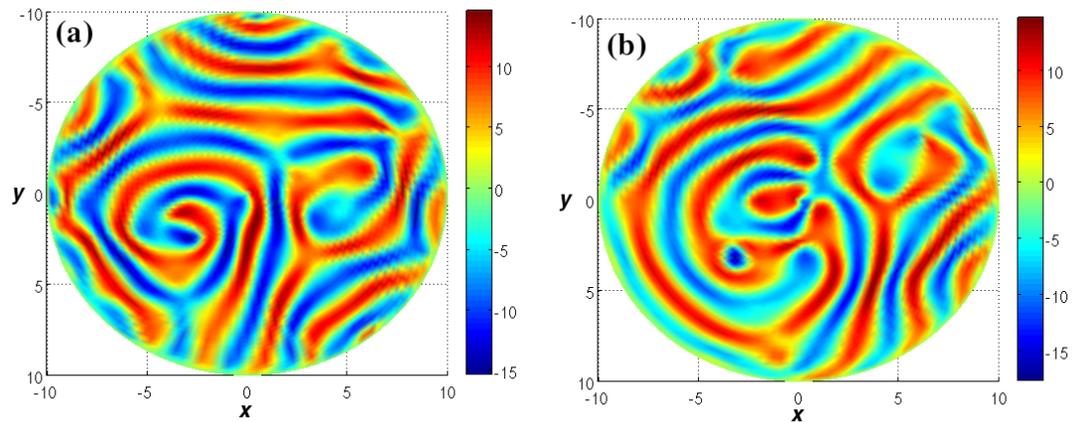


Figura 3.12: Velocidad vertical  $u_z$  en el plano horizontal medio,  $Ra = 4000$ . (a) Al tiempo  $t = 150$ . (b)  $t = 406$ . No aparecen los rollos con forma de círculos concéntricos.

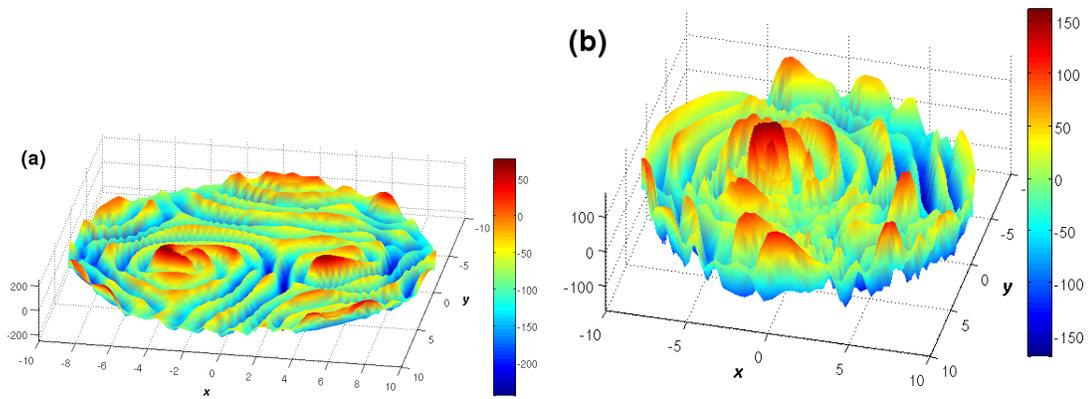


Figura 3.13: Presión en el plano horizontal medio al tiempo  $t = 500\Delta$ ,  $Ra = 2000$ .

espacio se forman una especie de alas de mariposa, parecido a un movimiento caótico.

### 3.3. Comparación de resultados

La dependencia de la tasa de crecimiento de la inestabilidad con el número de Rayleigh ya ha sido bien estudiada (Charru, 2007). Cuando el número de Rayleigh coincide con el valor crítico  $Ra_c = 1708$  la tasa de crecimiento es cero (estado de estabilidad neutral). Dicha tasa de crecimiento se vuelve positiva cuando el número de Rayleigh es mayor que  $Ra_c$  (Drazin y Reid, 1981). Este es un criterio muy importante para poner a prueba las simulaciones. Se desarrollaron dos cálculos, el primero para determinar los

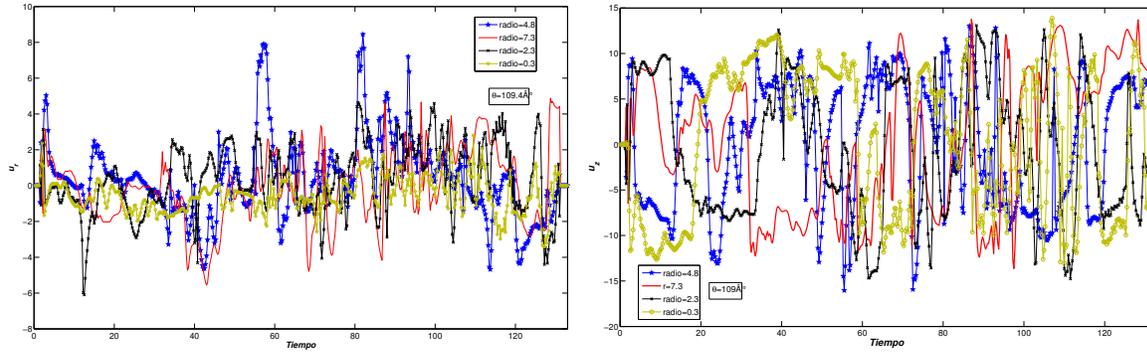


Figura 3.14: (a) La velocidad  $u_r$  en función del tiempo y (b) La velocidad  $u_z$  en función del tiempo para diferentes radios (0.3, 2.3, 4.8 y 7.3) a un ángulo de  $\theta = 109.4^\circ$ .

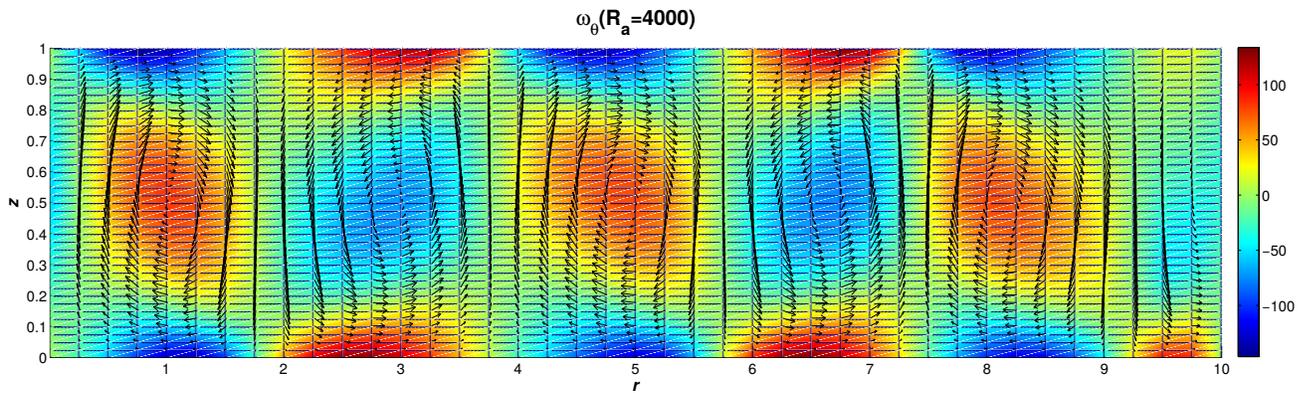


Figura 3.15: Vorticidad y campo de vectores en el plano  $rz$  al tiempo  $t = 706\Delta t$ ,  $R_a = 4000$ .

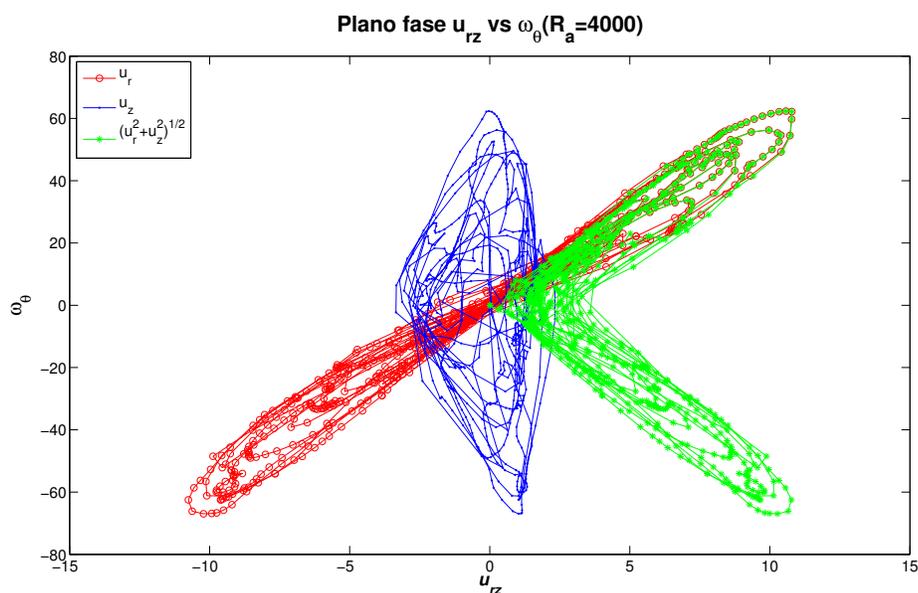


Figura 3.16: Plano fase de la vorticidad  $\omega_\theta$  y la velocidad  $u_r$ , vorticidad y la velocidad  $u_z$  y la vorticidad y la magnitud de la velocidad  $u_{rz}$  para  $R_a = 4000$ .

tiempos de aparición de inestabilidad (sólo se toman los resultados de ese cálculo en dos dimensiones). Estos tiempos deben ser una función decreciente del número de Rayleigh. El segundo es para observar la formación de patrones (el cálculo en tres dimensiones, realizado como objeto de ésta tesis). Ambas simulaciones satisfacen el criterio antes mencionado.

El cálculo para medir los tiempos consisten en lo siguiente: en el caso de la aparición de la inestabilidad se toma el tiempo desde cero hasta que la velocidad en cualquier punto toma un valor diferente de cero. Este tiempo esta representado en la figura 3.17(a). En el segundo caso se tomó el tiempo desde cero hasta que la variación de la velocidad en cualquier punto del espacio es menor que un cierto valor  $\epsilon$  muy pequeño (cercano a cero, ver figura 3.17(b)). En ambas figuras se observa que el tiempo es una función decreciente del número de Rayleigh.

En la figura 3.16 se observaron las alas de mariposa, muy parecido al comportamiento caótico generado en la ecuación de Lorentz. Versteeg (2007) menciona que si se presenta una cierta periodicidad, es posible hablar de caos, por lo que se graficó la magnitud de

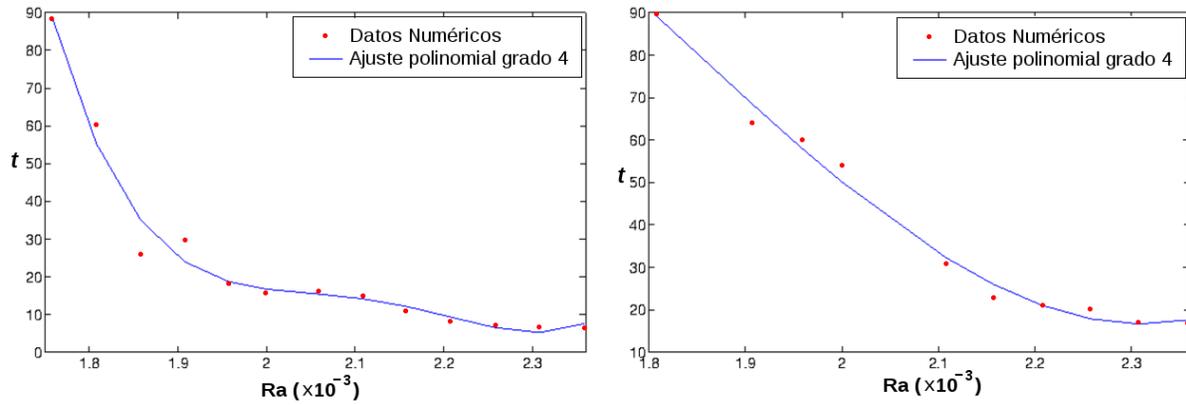


Figura 3.17: (a) Tiempo como función del número de Rayleigh al cual aparece la inestabilidad. (b) Tiempo como función del número de Rayleigh en el que alcanza el estado estacionario. En ambos casos se presenta un ajuste polinómico de cuarto grado (?).

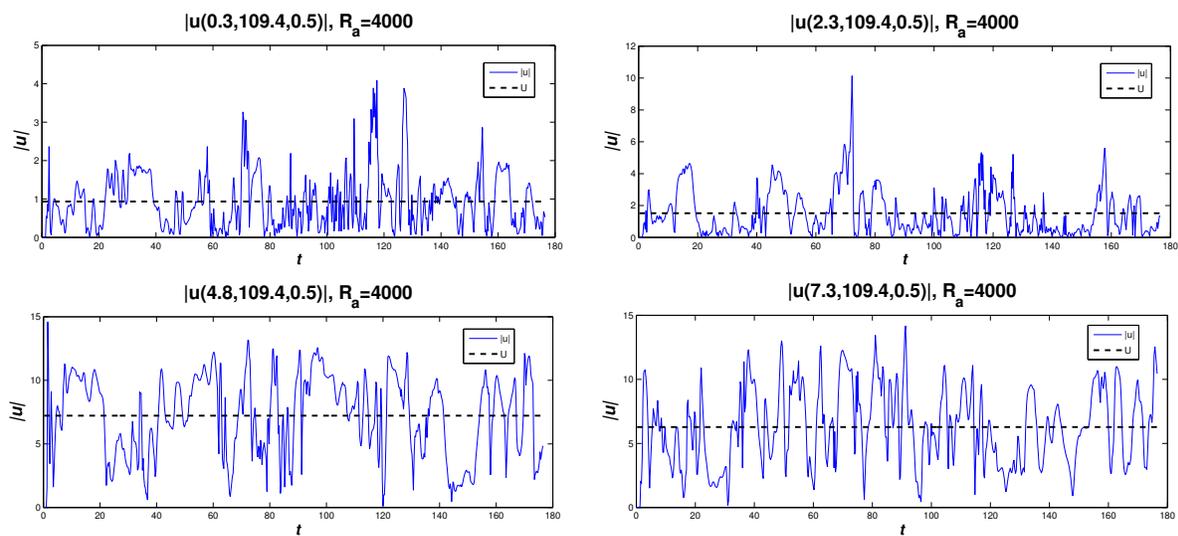


Figura 3.18: Se presenta la magnitud de la velocidad, para diferentes radios 0.3, 2.3, 4.8 y 7.3 a un  $z = 0.5$ .

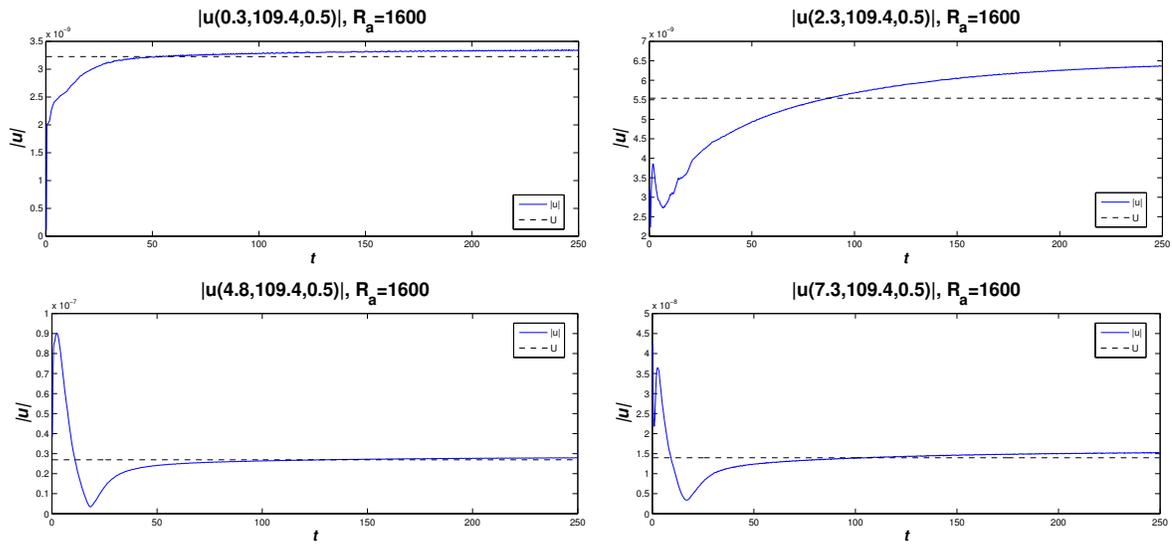


Figura 3.19: Magnitud de la velocidad, para diferentes radios 0.3, 2.3, 4.8 y 7.3 a un  $z = 0.5$  y  $R_a = 1600$ .

la velocidad  $u_{rz}$  a través del tiempo, así como la velocidad promedio, ver figura 3.18, en donde se muestra que efectivamente se presenta una periodicidad.

Como en la figura 3.11, no se observa tan marcado el comportamiento caótico como en la figura 3.16, se graficaron también la magnitud de la velocidad a lo largo del tiempo para  $R_a = 1600$ ,  $R_a = 1708$ ,  $R_a = 1800$  y  $R_a = 2000$ .

Para el caso de  $R_a = 1600$  (figura 3.19) se observa que no se presenta periodicidad, ya que conforme aumenta el tiempo, la velocidad tiende a un punto de equilibrio, que es el de la velocidad promedio.

Se puede observar que entre más pequeño es el número de Rayleigh (por arriba del valor crítico), la periodicidad es menor, por ejemplo para  $R_a = 1708$  (figura 3.20), en los primeros tres radios ( $r = 0.3$ ,  $r = 2.3$  y  $r = 4.8$ ) aparecen de una a dos oscilaciones, a lo largo de la velocidad promedio  $U$ , representada con la línea punteada, pero para el radio de 7.3, se presentan tres oscilaciones.

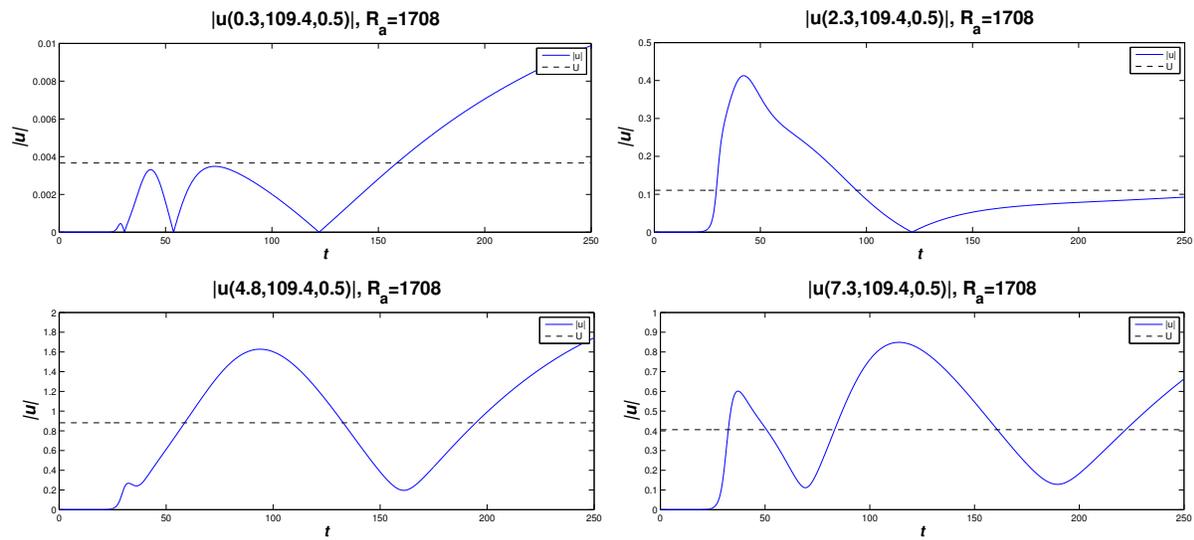


Figura 3.20: Magnitud de la velocidad, para diferentes radios 0.3, 2.3, 4.8 y 7.3 a un  $z = 0.5$  y  $Ra = 1708$ .

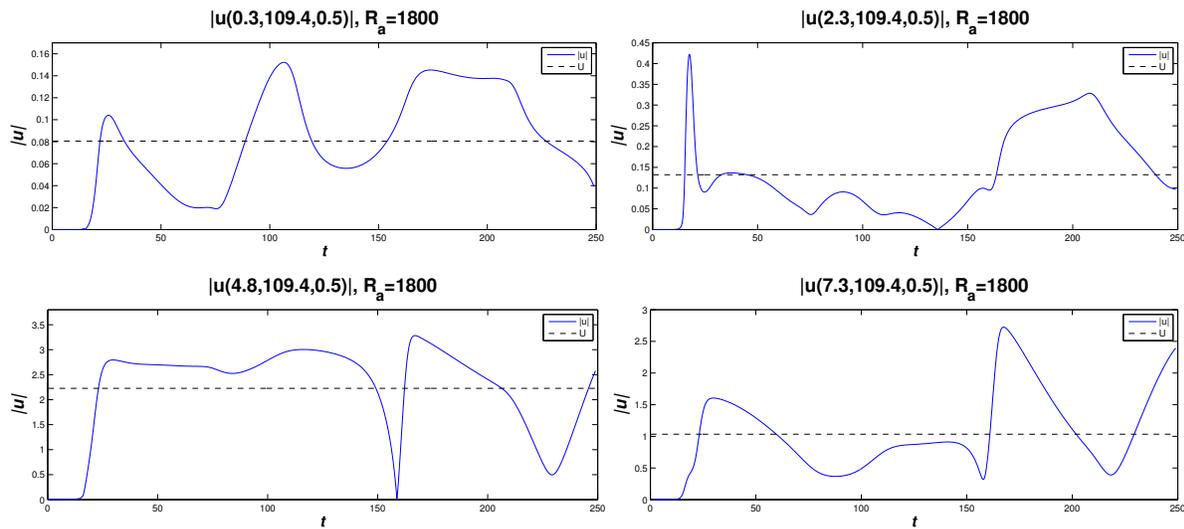


Figura 3.21: Magnitud de la velocidad, para diferentes radios 0.3, 2.3, 4.8 y 7.3 a un  $z = 0.5$  y  $Ra = 1800$ .

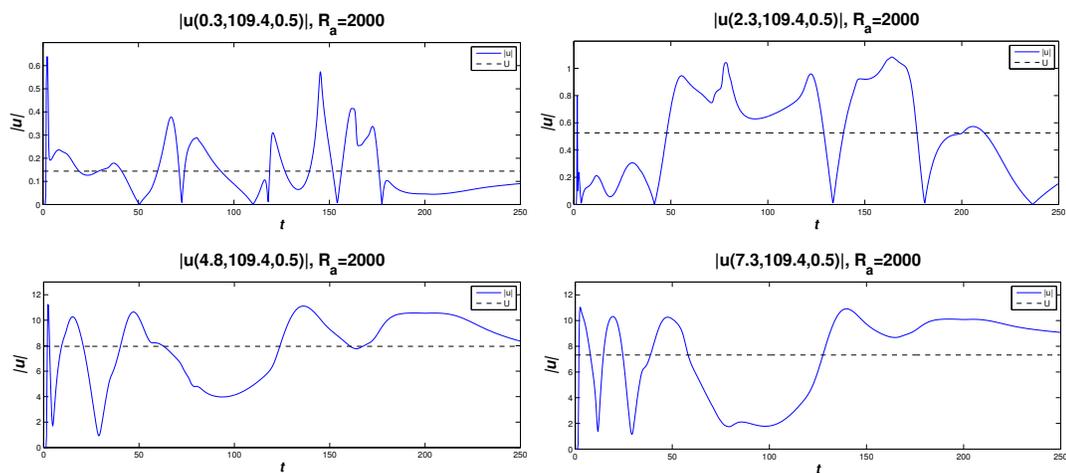


Figura 3.22: Magnitud de la velocidad, para diferentes radios 0.3, 2.3, 4.8 y 7.3 a un  $z = 0.5$  y  $R_a = 2000$ .

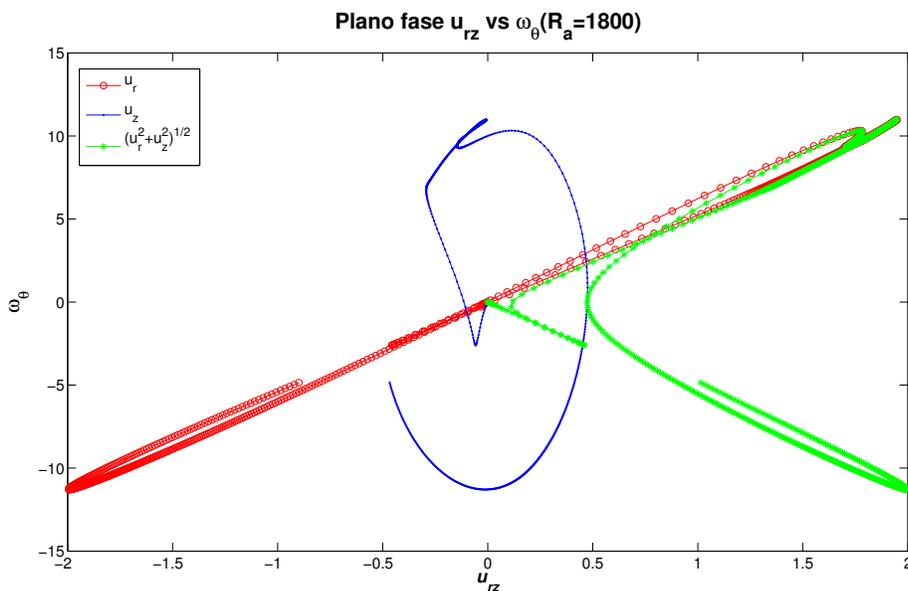


Figura 3.23: Plano fase de la vorticidad  $\omega_\theta$  y la velocidad  $u_r$ , vorticidad y la velocidad  $u_z$  y la vorticidad y la magnitud de la velocidad  $u_{rz}$  para  $R_a = 1800$ .

En la figura 3.21 la periodicidad empieza a crecer, comparada con el  $R_a = 1708$ , en éste, los periodos oscilan al rededor de la  $U$  promedio, presentando entre 2 o 3 periodos dependiendo del radio que se tenga, pero ya no se observa el comportamiento que se tenía para números menores que el valor crítico.

Para  $R_a = 2000$  los espacios fase de la vorticidad con la velocidad, ya eran más parecidos al  $R_a = 4000$ , comparando con  $R_a = 1800$  (ver figura 3.23), empieza a observarse un comportamiento caótico, pero aún no es posible asegurarlo. En la figura 3.22 se tiene un número mayor de oscilaciones comparado con  $Ra = 1708$  y  $R_a = 1800$  y se ven todavía más para  $R_a = 4000$ .

Finalmente, para asegurar que las simulaciones que se hicieron son las correctas, se comparan cualitativamente los resultados numéricos con un experimento (ver figura 3.24), realizado en el taller de fluidos de la Facultad de Ciencias,

### 3.4. Comentarios finales y trabajo a futuro

Se resolvieron las ecuaciones de Navier-Stokes, continuidad y energía utilizando métodos numéricos. La primera corrección que se realizó fue la de actualizar la temperatura, ya que las inestabilidades ocurrían a números menores que el Rayleigh crítico. Esta corrección consistió en recalcular las soluciones incluyendo la ecuación de la energía en el sistema de ecuaciones. Esto mejoró los resultados al obtener inestabilidades en números mayores que  $R_a = 1708$ . Sin embargo se perdieron los patrones de círculos concéntricos a tiempos cortos.

Las metodologías numéricas utilizadas están limitadas a ofrecer buenos resultados con números de Rayleigh bajos ( $R_a < 4000$ ). Para aumentar el número de Rayleigh con estas metodologías es necesario disminuir el paso temporal y aumentar el número de puntos en la malla; pero esto repercute en una ineficiencia en los métodos porque se requieren de muchos recursos informáticos, como espacio en memoria RAM, en disco duro y el tiempo

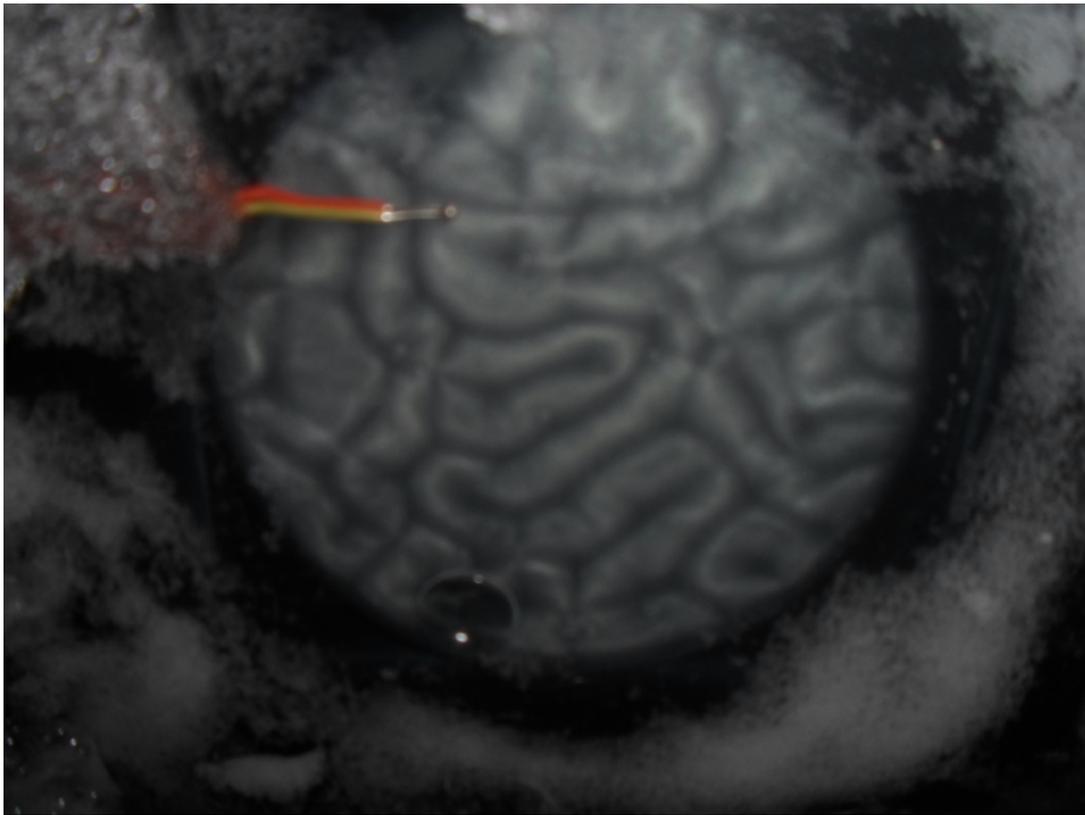


Figura 3.24: Fotografía otorgada por Valentin Valdés (2015)

de ejecución se incrementa. Para mejorar esto existen varias soluciones:

1. Paralelizar el programa reducirá el tiempo de cálculo.
2. Cambiar la metodología utilizando esquemas tipo flujo turbulento, métodos de perturbaciones, LES, etc.
3. Una solución más rápida puede ser modificar el método de proyección.

### 3.5. Conclusiones

Se hicieron corridas para números de Rayleigh mayores a 1600 y menores que el crítico ( $R_a = 1650$  y  $1700$ ) y los resultados fueron muy similares al caso  $R_a = 1600$ . Con esto se puede decir que el método numérico mejoró respecto a la versión en la que no se actualiza la temperatura.

Es necesario ejecutar por más tiempo el programa ya que la figura 3.6 (e) muestra una tendencia a obtener el patrón de círculos concéntricos.

En las simulaciones numéricas se recuperaron algunos de los patrones observados experimentalmente. Si el número de Rayleigh no es mucho mayor que el valor crítico, en el de estado estacionario se presenta una colección de cilindros concéntricos.

A medida que el número de Rayleigh aumenta, el tiempo para alcanzar el estado de equilibrio disminuye por lo que el patrón de formar círculos concéntricos se hace inestable, tal como se mostró para  $R_a = 2500$ . Para el caso de  $R_a = 5000$  la simulación no exhibe un estado estacionario durante el tiempo de integración.

Se ha mostrado un resultado en un dominio anular, en donde el estado estacionario no consiste de un patrón de círculos concéntricos. En cualquier caso, se observa igual número de círculos azules que rojos. Los resultados de la simulación numérica se pueden comparar cualitativamente con los resultados experimentales que se reportan en la literatura.

De acuerdo a lo comparado con la literatura, es posible observar la presencia de caos en la simulación, por lo que es posible decir que se está presentando un comportamiento caótico para  $R_a > R_c$ , en donde existen inestabilidades.



# Apéndice A

## La adimensionalización

Se define el gradiente de temperatura adverso como

$$\beta = \left| \frac{dT}{dz} \right|$$

El coeficiente de conductividad térmica

$$\kappa = \frac{k}{\rho_0 c_v}$$

en donde  $c_v$  es el calor específico a volumen constante y  $k$  coeficiente de conducción de calor. Una vez definido lo anterior, se procede a adimensionalizar las ecuaciones (1.2.2), (1.2.2) y (1.2.2).

Se adimensionalizan respecto al espesor  $d$ , se considera lo siguiente, la adimensionalización es la que comunmente se utiliza, en cada uno de los casos se despeja la variable que será sustituida en las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned}
x^* = \frac{x}{d} &\Rightarrow x = dx^* \\
\vec{u}^* = \vec{u} \frac{d}{\kappa} &\Rightarrow \vec{u} = \vec{u}^* \frac{\kappa}{d} \\
t^* = t \frac{\kappa}{d^2} &\Rightarrow t = t^* \frac{d^2}{\kappa} \\
T^* = T \frac{1}{\beta d} &\Rightarrow T = \beta T^* d \\
p^* = p \frac{d^2}{\rho \kappa^2} &\Rightarrow p = p^* \frac{\rho \kappa^2}{d^2} \\
g &= g^* \frac{\kappa^2}{d^3}
\end{aligned}$$

De la ecuación 1.2.2 se tiene que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{d} \nabla^* \cdot \frac{\kappa}{d^2} \vec{u}^* = \frac{\kappa}{d^2} \nabla^* \cdot \vec{u}^* = 0 \quad \therefore \quad \nabla^* \cdot \vec{u}^* = 0 \quad (\text{A.1})$$

De la ecuación 1.2.2 sustituyendo  $t$  y  $\vec{u}$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{u}^* \frac{\kappa}{d}}{\partial \left( \frac{d^2}{\kappa} t^* \right)} + \left( \vec{u}^* \frac{\kappa}{d} \cdot \frac{1}{d} \vec{\nabla}^* \right) \vec{u}^* \frac{\kappa}{d} = -[1 - \alpha(\beta T^* d - \beta T_0^* d)] g^* \frac{\kappa^2}{d^3} - \frac{1}{\rho} \frac{1}{d} \vec{\nabla}^* p^* \frac{\rho \kappa^2}{d^2} + \nu \frac{1}{d^2} \nabla^{*2} \vec{u}^* \frac{\kappa}{d} \\
\Rightarrow &\frac{\partial \vec{u}^* \frac{\kappa}{d}}{\partial \left( \frac{d^2}{\kappa} t^* \right)} + \frac{\kappa}{d} \frac{1}{d} \frac{\kappa}{d} (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{u}^* = -[1 - \alpha \beta d (T^* - T_0^*)] g^* \frac{\kappa^2}{d^3} - \frac{1}{\rho} \frac{1}{k} \frac{\rho \kappa^2}{d^2} \vec{\nabla}^* p^* + \frac{\nu}{d^2} \frac{\kappa}{d} \nabla^{*2} \vec{u}^* \\
\Rightarrow &\frac{\kappa^2}{d^3} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\kappa^2}{d^3} (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{u}^* = -[1 - \alpha \beta d (T^* - T_0^*)] g^* \frac{\kappa^2}{d^3} - \frac{\kappa^2}{d^3} \vec{\nabla}^* p^* + \frac{\nu}{\kappa} \frac{\kappa^2}{d^3} \nabla^{*2} \vec{u}^*
\end{aligned}$$

Como en ambos lados tenemos  $\frac{\kappa^2}{d^3}$ , se llega a

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{u}^* = -[1 - \alpha \beta d (T^* - T_0^*)] g^* - \vec{\nabla}^* p^* + \frac{\nu}{\kappa} \nabla^{*2} \vec{u}^* \quad (\text{A.2})$$

Para recuperar los números adimensionales representativos, se debe regresar al término dimensional de la gravedad

$$g^* = \frac{g}{d} \left( \frac{d^4}{\kappa^2} \right) = g \frac{d^3}{\kappa^2} \quad (\text{A.3})$$

Entonces de la ecuación A.2, A.3 y de la definición del número de Prandtl

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{u}^* = -[1 - \alpha \beta d (T^* - T_0^*)] g \frac{d^3}{\kappa^2} \hat{k} - \vec{\nabla}^* p^* + P_r \nabla^{*2} \vec{u}^*$$

se multiplica por  $\frac{\nu}{\nu}$  con el propósito de obtener el número de Rayleigh

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{u}^* &= - \left[ 1 - \alpha \beta d \frac{\nu}{\nu} (T^* - T_0^*) \right] g \frac{d^3}{\kappa^2} \hat{k} - \vec{\nabla}^* p^* + P_r \nabla^{*2} \vec{u}^* \\ \Rightarrow \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{u}^* &= - \left[ \frac{gd^3}{\kappa^2} - \frac{\alpha \beta g d^4 \nu}{\kappa^2 \nu} (T^* - T_0^*) \right] \hat{k} - \vec{\nabla}^* p^* + P_r \nabla^{*2} \vec{u}^* \end{aligned}$$

Así se tiene que

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{u}^* = - [g^* - R_a P_r (T^* - T_0^*)] \hat{k} - \vec{\nabla}^* p^* + P_r \nabla^{*2} \vec{u}^* \quad (\text{A.4})$$

De la ecuación 1.2.2 se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\beta T^* d)}{\partial \left( t^* \frac{d^2}{\kappa} \right)} + \frac{\kappa}{d} \vec{u}^* \cdot \frac{1}{d} \vec{\nabla}^* \beta d T^* &= \kappa \frac{1}{d} \nabla^{*2} \beta T^* d \\ \Rightarrow \frac{\beta \kappa}{d} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\beta \kappa}{d} \vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* T^* &= \frac{\kappa \beta}{d} \nabla^{*2} T^* d \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* T^* = \nabla^{*2} T^* d \quad (\text{A.5})$$



# Apéndice B

## Coordenadas cilíndricas

Las ecuaciones a utilizar son las adimensionalizadas en el apéndice anterior.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = - [g - Ra Pr (T - T_0)] \hat{k} - \nabla p + Pr \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (\text{B.3})$$

Se utiliza la definición de nábla en coordenadas cilíndricas y del laplaciano, de tal forma que se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \nabla &= \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{u} &= u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

**Definición.** Sea  $\mathbf{r} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$  y  $\boldsymbol{\theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$

Entonces se tiene que:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \boldsymbol{\theta} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} = -\mathbf{r} \quad (\text{B.5})$$

## B.1. Ecuación de continuidad

De la ecuación B.1, se ocupa el teorema 4 de que dice

**Teorema B.1.** *Las siguientes fórmulas se cumplen en coordenadas cilíndricas*

i)

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} e_z$$

ii)

$$\nabla \cdot f = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(rf_r) + \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(rf_z) \right]$$

Usando el teorema B.1, se tiene entonces que de la ecuación B.1

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(ru_z) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{1}{r} r \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \left( u_r + r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Finalmente se tiene que

$$\frac{1}{r} \left( u_r + r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.6})$$

## B.2. Ecuaciones de Navier-Stokes

Para convertir la ecuación B.2 a coordenadas cilíndricas, se realizará por partes, primero se calculará el término  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla &= (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_z \mathbf{k}) \cdot \left( \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Así se tiene que

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{B.7})$$

Usando B.7

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \left( u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_z \mathbf{k}) \\ &= u_r \frac{\partial}{\partial r} (u_r \mathbf{r}) + u_r \frac{\partial}{\partial r} (u_\theta \boldsymbol{\theta}) + u_r \frac{\partial}{\partial r} (u_z \mathbf{k}) \\ &+ \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r \mathbf{r}) + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \boldsymbol{\theta}) + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_z \mathbf{k}) \\ &+ u_z \frac{\partial}{\partial z} (u_r \mathbf{r}) + u_z \frac{\partial}{\partial z} (u_\theta \boldsymbol{\theta}) + u_z \frac{\partial}{\partial z} (u_z \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_r \frac{\partial}{\partial r} (u_r \mathbf{r}) + u_r \frac{\partial}{\partial r} (u_\theta \boldsymbol{\theta}) + u_r \frac{\partial}{\partial r} (u_z \mathbf{k}) &= u_r^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{r} + u_r u_\theta \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial r} + u_r \boldsymbol{\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ &+ u_r u_z \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial r} + u_r \mathbf{k} \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ &= u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{r} + u_r \boldsymbol{\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_r \mathbf{k} \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r \mathbf{r}) + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \boldsymbol{\theta}) + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_z \mathbf{k}) &= \frac{u_\theta}{r} u_r \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \mathbf{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} u_\theta \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_\theta \boldsymbol{\theta}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ &+ \frac{u_\theta}{r} u_z \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \mathbf{k} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ &= \frac{u_\theta}{r} u_r \boldsymbol{\theta} + \frac{u_\theta}{r} \mathbf{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} u_\theta \mathbf{r} + \frac{u_\theta \boldsymbol{\theta}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \mathbf{k} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_z \frac{\partial}{\partial z} (u_r \mathbf{r}) + u_z \frac{\partial}{\partial z} (u_\theta \boldsymbol{\theta}) + u_z \frac{\partial}{\partial z} (u_z \mathbf{k}) &= u_z u_r \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} + u_z \mathbf{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + u_z u_\theta \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial z} + u_z \boldsymbol{\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ &+ u_z^2 \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial z} + u_z \mathbf{k} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= u_z \mathbf{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + u_z \boldsymbol{\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + u_z \mathbf{k} \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) \mathbf{r} \\
&+ \left( u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} u_r + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \boldsymbol{\theta} \\
&+ \left( u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \mathbf{k}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Para calcular el término  $\nabla^2 \mathbf{u}$  en coordenadas cilíndricas se usa la definición de laplaciano

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{u} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_z \mathbf{k}) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (u_r \mathbf{r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (u_r \mathbf{r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (u_r \mathbf{r}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u_r \mathbf{r}) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (u_\theta \boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (u_\theta \boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (u_\theta \boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u_\theta \boldsymbol{\theta}) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (u_z \mathbf{k}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (u_z \mathbf{k}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (u_z \mathbf{k}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u_z \mathbf{k})
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Para evitar saturar la ecuación, se resuelve por partes, primero para la componente  $r$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2} (u_r \mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (u_r \mathbf{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( u_r \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \mathbf{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \mathbf{r} \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (u_r \mathbf{r}) &= \frac{u_r}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{r} \\
\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (u_r \mathbf{r}) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r \mathbf{r}) \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( u_r \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} + \mathbf{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( u_r \boldsymbol{\theta} + \mathbf{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} + u_r \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \mathbf{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} - u_r \mathbf{r} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \mathbf{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - u_r \right) \mathbf{r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \boldsymbol{\theta} \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2} (u_r \mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} (u_r \mathbf{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( u_r \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} + \mathbf{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \mathbf{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Ahora para la componente  $\theta$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2}(u_\theta \boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(u_\theta \boldsymbol{\theta}) \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( u_\theta \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \boldsymbol{\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \boldsymbol{\theta} \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(u_\theta \boldsymbol{\theta}) &= \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \boldsymbol{\theta} \\
\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta}(u_\theta \boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta \boldsymbol{\theta}) \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( u_\theta \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} - u_\theta \mathbf{r} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{r} - u_\theta \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \boldsymbol{\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{r} - u_\theta \boldsymbol{\theta} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \boldsymbol{\theta} - 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{r} - u_\theta \boldsymbol{\theta} \right) = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - u_\theta \right) \boldsymbol{\theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{r} \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u_\theta \boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z}(u_\theta \boldsymbol{\theta}) \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( u_\theta \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial z} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = \boldsymbol{\theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Para la componente  $z$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2}(u_z \mathbf{k}) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(u_z \mathbf{k}) \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( u_z \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \mathbf{k} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} \mathbf{k} \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(u_z \mathbf{k}) &= \frac{u_z}{r} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \mathbf{k} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \mathbf{k} \\
\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta}(u_z \mathbf{k}) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta}(u_z \mathbf{k}) \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( u_z \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \theta} + \mathbf{k} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \mathbf{k} \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u_z \mathbf{k}) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z}(u_z \mathbf{k}) \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( u_z \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial z} + \mathbf{k} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \mathbf{k} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Entonces regresando a la ecuación B.9

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{u} &= \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \mathbf{r} \\
&+ \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \boldsymbol{\theta} \\
&+ \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{k} \tag{B.10}
\end{aligned}$$

Entonces usando B.2, B.8 y B.10, la ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas queda como

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \\
P_r & \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} u_r + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\
P_r & \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = - \left[ g \frac{d^3}{\kappa^2} - R_a P_r (T - T_0) \right] \\
& - \frac{\partial p}{\partial z} + P_r \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \tag{B.13}$$

### B.3. La ecuación de la energía

Usando la ecuación B.3

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_z \mathbf{k}) \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Finalmente se tiene que la ecuación de la energía en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{B.14}$$

# Bibliografía

- Acero, I. y López, M. (2007) Ecuaciones diferenciales. Teoría y problemas; *Editorial Tebar*, 2da. edición; Madrid.
- Aledo, J. A., Penabad J., Valverde, J. C. y Villaverde, J. J. (2009) Álgebra y matemáticas discreta. *Ediciones de la Universidad de Castilla la Manche* España.
- Asmar, N. H. (2005) Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems. *2nd ed Pearson Prentice Hall*. USA.
- Bénard, H. (1900) Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Gén. Sci. Pur. Appl.* **11**, 1261–1271 and 1309–1328.
- Blanchard, P., Devaney, R., Hall, Glen. (1998) Ecuaciones diferenciales. *International Thomson Editores*, México.
- Bodenschatz, E., Pesch, W. y Ahlers, G. (2000) Recent Developments In Rayleigh-Benard Convection. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**:709–778.
- Botello, S. (2007) Ejemplos de Aplicación de los Métodos Numéricos a Problemas de ingeniería *Notas de Modelación y Métodos Numéricos I, Memorias del Taller de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas*. Ed. CIMAT-CIMNE, ISBN: 978-84-96736-15-3.
- Boyd, J. P. (2000) Chebyshev and Fourier Spectral Methods; *Dover*, New York.
- Burden, R. y Faires, J. (2002) Análisis numérico; *Thomson learning; séptima edición*; México, D. F.

- Butt, R. (2010) Introduction to Numerical Analysis Using Matlab *Jones and Barllett Publishers*, Estados Unidos de América.
- Chandrasekhar, S. (1961) Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. *Dover*, Oxford University Press. New York.
- Charru, F. (2007) Instabilités Hydrodynamiques. *EDP Sciences CNRS Éditions*. Paris.
- Costa, B. (2004) Spectral Methods for Partial Differential Equations (2004) *Tesina de bioinformática* Universidad Nacional del Litoral.
- Costarelli, S. (2011) Resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes usando CUDA *A Mathematical Journal* **Vol. 6, No. 4** (1-32)
- Cordero, A., Hueso, J. L. y Torregrosa, J. R. (2004) Cálculo numérico. Teoría y Problemas; *Universidad Politécnica de Valencia*.
- Drazin, P. G. y Reid, W. (1981) H. Hydrodynamic Stability. *Cambridge University Press*. Cambridge.
- Friedrich, J., Lee, Y.-S., Fischer, B., Kupfer, C., Vizman, D., and Müller, G. (1999) Experimental and numerical study of Rayleigh-Bénard convection affected by a rotating magnetic field; *Physics of Fluids* **11**, 853; doi: 10.1063/1.869957.
- Fuentes, R. y Carvajal, L. F.(2005) Método de diferencias finitas en mallas irregulares con soluciones analíticas parciales aplicado al flujo hidrodinámico; *Rev. Int. Met. Num. Calc. Dis. Ing.* Vol. 21 **3** 263-272 .
- Getling, A.V. y Brausch, O. (2003) Cellular flow patterns and their evolutionary scenarios in three-dimensional Rayleigh-Bénard convection; *Phys. Rev. E* **67**, 046313.
- Guyon, E., Hulin, J.-P. y Petit, L. (2001) Hydrodynamique physique. Savoirs Actuels. *EDP Sciences/CNRS Éditions*.
- Carrillo, A., Mendoza, O. (2015) Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional <http://www.mmc.geofisica.unam.mx/acl/Textos/>

- Li, Y.R, Ouyang, Y. Q., Peng, L. y Wu, S. Y. (2012) Direct numerical simulation of Rayleigh-Bénard convection in a cylindrical container of aspect ratio 1 for moderate Prandtl number fluid; *Phys. Fluids* **24**, 074103; doi: 10.1063/1.4731296.
- Matos, T., Rodríguez-Meza, M., Suárez-Cansino, J. (2009) Métodos numéricos en astrofísica; *Instituto avanzado de cosmología*; México.
- Mattews, J. H. y Fink, K. D. (2007) Métodos numéricos con Matlab. *3ra Ed. Pearson-Prentice Hall*. España.
- Molina Fructuoso, M. (2010) El problema de Rayleigh-Bénard en un contenedor cilíndrico; *Tesis de Licenciatura en Matemáticas*, Facultad de Ciencias, UNAM; México.
- Murray, J.D. (2002) Mathematical Biology. I. An introduction; *Third Edition*; *Springer*.
- Paul, M.R., Chiam, K.-H., Cross, M.C., Fischer, P.F. and Greenside, H.S. (2003) Pattern formation and dynamics in Rayleigh-Bénard convection: numerical simulations of experimentally realistic geometries; *Physica D* **184**; 114–126.
- Pérez, J. A. (2007) Un método de diferencias finitas para el análisis de la propagación de ondas. Aplicación al modelado de la respuesta sísmica de estructuras geológicas en entornos de computación en paralelo; Tesis Doctoral.
- Peyret, R. (2002) Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow. *Springer-Verlag*. USA .
- Rayleigh, L. (1916) On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Phil. Mag.* (6) **32**, 529–46.
- Sánchez-Torres, N. Y., López-Sánchez, E. J., Hernández-Zapata, S. y Ruiz-Chavarría, G. (2015) 3D Numerical Simulation of Rayleigh-Bénard Convection in a Cylindrical Container. En: Selected Topics of Computational and Experimental Fluid Mechanics. Jaime Klapp, Gerardo Ruíz Chavarría, Abraham Medina Ovando, Abel López Villa Leonardo y Di G. Sigalotti Editores. *Springer-Verlag*. Suiza. 367-374
- Solís, F. y Castro, G.(2003) Discretización de ecuaciones diferenciales no lineales unimodales *Rev. Int. Met. Num. Cál. Dis. Ind.* **19** **2**, 197-210.

- Tagawa, T., Ujihara, A., Ozoe, H. (2003) Numerical computation for Rayleigh-Bénard convection of water in a magnetic field; *Int. J. Heat and Mass Transfer* **46** 4097-4104.
- Gayen, B., Hughes, G.O., and Griffiths, R. W. (2013) Completing the Mechanical Energy Pathways in Turbulent Rayleigh-Bénard Convection; *Phys. Rev. Lett.* **111**, 124301.
- Ternik, P., Rudolf, R. y Zunic, Z. (2013) Numerical study of Rayleigh-Bénard natural-convection heat-transfer characteristics of water-based au nanofluids. *Materials and technology* **47** **2**, 211-215 .
- Tewarson, R. P. (1973) Sparse Matrices. *Academic Press Inc. Elsevier*. USA.
- Valdés, V. (2015) Un dispositivo para estudiar la inestabilidad de Rayleigh-Bénard. *Tesis de licenciatura en física* Facultad de Ciencias, UNAM.
- Valencia M. L. (2005) Estudio Numérico y Experimental de Flujo Rayleigh-Bénard en Cavidades Cúbicas para Régimen Transitorio y Turbulento. PhD Thesis. Universitat Rovira I Virgili. ISBN: 978-84-690-8297-3 / D.L: T. 1482-2006.
- Velásquez J. y Obeso, Virgilio (2007) Análisis numérico (notas de clase). *Ediciones Uninorte* Barranquilla-Colombia.
- Versteeg, H.K y Malasekera, W. (2007) An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume Method. Second edition. *Pearson* United Kingdom.
- Villatoro F., García, J. y Ramos, J. (2007) Análisis numérico (notas). *Ediciones Uninorte* Cap. 5