



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**  
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

**ASPECTOS COMPUTACIONALES DE LA CONJETURA DE FARRELL-JONES.**

**TESIS**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA:

**LUIS JORGE SÁNCHEZ SALDAÑA**

TUTOR DE LA TESINA: DR. DANIEL JUAN PINEDA  
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

MORELIA, MICHOACAN.

JUNIO, 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Índice general

INTRODUCCIÓN	v
1. Teoría K y topología	v
2. La conjetura de Farrell-Jones: historia y motivación	vi
3. Cómo se estructura esta tesis	x
Capítulo 1. La conjetura de Farrell-Jones	1
1. Espacios clasificantes para familias de subgrupos	1
2. Espacios sobre la categoría de órbitas	5
3. $G$ -Teorías de homología	8
4. Teorías de homología equivariantes	11
5. La conjetura de Farrell-Jones	13
6. La sucesión espectral de $p$ -cadenas	15
7. La sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch	21
Capítulo 2. Teoría K algebraica racional de algunos grupos de dimensión baja	25
1. Rangos de grupos de teoría K algebraica	26
2. Ejemplos de cálculos explícitos	29
Capítulo 3. Espacios clasificantes, dimensión cohomológica y dimensión geométrica	43
1. La dimensión geométrica respecto a la familia de subgrupos finitos por cíclico	43
Capítulo 4. Los grupos de Whitehead de algunos subgrupos de $PSL_2(\mathbb{R})$ y $SL_2(\mathbb{R})$	49
1. Introducción	49
2. Preliminares	51
3. Las Propiedades (M) y (NM)	52
4. Algunos subgrupos de $PSL_2(\mathbb{R})$ que satisfacen (M) y (NM)	55
5. Demostraciones de los resultados principales	57







# INTRODUCCIÓN

## 1. Teoría K y topología

A riesgo de sonar redundante se puede definir a la topología como el área de la matemática que se dedica a estudiar los espacios topológicos. También podría decirse que se encarga de estudiar *la forma de los espacios geométricos* desde un punto de vista continuo, es decir, que dos espacios son equivalentes si uno se ve como el otro salvo una deformación que no implique ponchaduras o cortaduras. Es bien conocido que para un topólogo una taza y una dona son iguales.

La topología algebraica se encarga de *traducir* problemas topológicos en problemas algebraicos a través de objetos llamados funtores, que sirven como diccionarios. Usualmente funciona como sigue: tenemos un problema topológico T y lo traducimos en un problema algebraico A, entonces si A no tiene solución se sigue que T no tiene solución.

Veamos un ejemplo concreto. Sea  $D$  el disco cerrado de dimensión dos, el Teorema del punto fijo de Brouwer nos dice que toda función continua  $f : D \rightarrow D$  tiene un punto fijo. Podemos hacer un bosquejo de la demostración. Supongamos que existe  $f : D \rightarrow D$  sin puntos fijos, entonces podemos construirnos una función  $g : D \rightarrow S^1$  que es una retracción, es decir que la composición  $S^1 \hookrightarrow D \rightarrow S^1$ , donde la segunda flecha es  $g$ , es la identidad; aquí es donde usamos el funtor de homología para traducir a un problema algebraico, al final, la traducción nos dice que existirían funciones  $\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que su composición es la identidad, pero esto es claramente absurdo. Por lo tanto no puede existir tal  $f$  y terminamos.

Una de las primeras motivaciones en topología para estudiar teoría K algebraica fue la de proveer de un hogar adecuado a ciertas obstrucciones en problemas clásicos. Los más populares son la obstrucción de finitud de Wall y el teorema del s-cobordismo (ver por ejemplo [Ros05]).

Recordemos primero la obstrucción de finitud de Wall. Se dice que un espacio  $X$  es finitamente dominado si existen un complejo CW finito  $Y$  y funciones  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $g \circ f$  es homotópica a la identidad  $1_X$  en  $X$ . El problema en cuestión es averiguar si  $X$  finitamente dominado implica que  $X$  es homotópicamente equivalente a un complejo CW finito que no necesariamente sea  $Y$ . La obstrucción de Wall, nos dice *grosso modo* que a este problema le podemos asociar un elemento  $\chi(X)$  en el grupo  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}\pi_1(X))$  (al que llamaremos  $Wh_0(\pi_1(X))$  en este trabajo), y que el problema tiene una solución afirmativa si y sólo si  $\chi(X)$  es cero. En particular si  $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}\pi_1(X))$  es cero, entonces el problema siempre tiene respuesta positiva.

Ahora, recordemos brevemente de qué se trata el teorema del s-cobordismo. Consideremos  $M$  y  $M'$   $n$ -variedades suaves, cerradas y conexas, una  $(n + 1)$ -variedad con frontera  $W$  se dice que es un cobordismo entre  $M$  y  $M'$  si  $\partial W = M \amalg M'$ . Decimos que  $W$  es un  $h$ -cobordismo si las inclusiones  $M \hookrightarrow W$  y  $M' \hookrightarrow W$  son equivalencias homotópicas, en particular, el llamado cobordismo trivial  $M \times [0, 1]$  es un  $h$ -cobordismo de  $M$  en sí misma. El teorema de s-cobordismo nos da una biyección entre el conjunto de clases de difeomorfismo de  $h$ -cobordismos sobre  $M$  está en biyección con el grupo de Whitehead  $Wh_1(\pi_1(M))$ .

Es particularmente interesante el caso cuando  $\pi_1(M) = \{1\}$  porque es bien sabido que  $Wh_1(\{1\}) = \{1\}$ . Esto quiere decir que el único  $h$ -cobordismo hasta difeomorfismo que existe sobre una variedad simplemente conexa fija  $M$  de dimensión al menos 5, es el  $h$ -cobordismo trivial. Este caso particular es conocido como el teorema del  $h$ -cobordismo y fue originalmente demostrado por Smale. De este resultado se desprende la demostración de la conjetura generalizada de Poincaré para dimensión al menos 5.

Estos dos ejemplos nos dan alguna idea de por qué la teoría K y los grupos de Whitehead son relevantes en topología algebraica y en topología geométrica.

## 2. La conjetura de Farrell-Jones: historia y motivación

Los años 50's y 60's son conocidos como la época dorada de la topología algebraica. Por mencionar algunos de los grandes resultados obtenidos en el área se encuentran: el teorema de Serre acerca de la finitud de los grupos de homotopía estables de las esferas; la teoría de cobordismo de Thom; el descubrimiento y la calificación de las esferas exóticas de Milnor y Milnor-Kervaire



respectivamente; la invarianza topológica de las clases racionales de Pontryagin demostrada por Novikov; el teorema del h-cobordismo y la conjetura (generalizada) de Poincaré en dimensiones altas por Smale; los fundamentos de la teoría de cirugía por Browder, Novikov, Wall y Sullivan y un largo etc.

En 1968, Mostow demostró su famoso teorema de rigidez el cual enunciamos a continuación.

**TEOREMA 0.1.** *Supongamos que  $M$  y  $N$  son variedades cerradas, completas e hiperbólicas de dimensión al menos 3. Si existe un isomorfismo  $f : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ , entonces es inducido por una isometría entre  $M$  y  $N$ .*

Notemos que toda variedad hiperbólica es asférica, es decir, su cubriente universal es contractible, entonces el teorema de rigidez de Mostow establece que las variedades hiperbólicas (con las hipótesis mencionadas) son isométricamente rígidas.

Basado en este último resultado, Borel conjeturó que toda variedad asférica es topológicamente rígida, de manera concreta tenemos la siguiente conjetura.

**CONJETURA 0.2.** *Sean  $M$  y  $N$  variedades asféricas cerradas. Supongamos que  $f : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$  es un isomorfismo, en particular,  $M$  y  $N$  son homotópicamente equivalentes. Entonces,  $f$  es inducido por un homeomorfismo entre  $M$  y  $N$ .*

Cabe mencionar que la hipótesis de la asfericidad es necesaria. Hay ejemplos de variedades no asféricas homotópicamente equivalentes pero no homeomorfas, por ejemplo, los espacios lente  $L(7; 1, 1)$  y  $L(7; 2, 1)$ .

Una gran cantidad de trabajo ha sido realizado motivado por la Conjetura de Borel. Para un panorama mucho más amplio se recomienda ver [KL05]. Uno de los programas más exitosos para demostrar casos particulares de la conjetura de Borel fue el desarrollado por Farrell y Jones. Ellos desarrollaron una combinación de álgebra, topología y dinámica que eventualmente derivaría en la ahora conocida Conjetura de Farrell-Jones [FJ93].

La conjetura de Farrell-Jones, en sus versiones de teoría K y teoría L, predice que las siguientes funciones de ensamble son isomorfismos

$$A_{\mathcal{V}cyc, \mathcal{A}ll} : H_n^G(\underline{EG}; \mathbb{K}_R) \rightarrow H_n^G(pt; \mathbb{K}_R) \cong K_n(RG).$$

$$A_{\mathcal{V}cyc, \mathcal{A}ll} : H_n^G(\underline{EG}; \mathbb{L}^{\langle -\infty \rangle}) \rightarrow H_n^G(pt; \mathbb{L}^{\langle -\infty \rangle}) \cong L_n^{\langle -\infty \rangle}(RG).$$

No es de sorprender que ambos isomorfismos implican la veracidad de la Conjetura de Borel si  $G$  es el grupo fundamental de una variedad asférica. Sin embargo la conjetura de Farrell-Jones en sus versiones de teoría K y teoría L también implica otras conjeturas como la conjetura de Novikov, la conjetura de Bass, la conjetura de Kaplansky, etc. Ver [BLR08b].

En los últimos años se han hechos grandes progresos en la verificación de la conjetura de Farrell-Jones. Por mencionar algunas familias de grupos que la satisfacen están los grupos hiperbólicos en el sentido de Gromov, grupos  $CAT(0)$ , grupos S-aritméticas, lattices arbitrarias en grupos de Lie virtualmente conexos, etc. Ver final de la sección 1.

También, recientemente, Davis, Quinn Khan, Ranicki y Reich demostraron que uno puede sustituir el espacio clasificante  $\underline{EG}$  por el espacio clasificante  $E_{\mathcal{F}bc}G$ , donde  $\mathcal{F}bc$  es la familia de subgrupos del tipo finito por cíclico. En el Capítulo 3 exploramos la dimensión mínima, conocida como dimensión geométrica respecto de la familia  $\mathcal{F}bc$  que puede tener este clasificante y obtuvimos el teorema que se menciona abajo, el cual reduce el estudio de dicha dimensión geométrica al estudio de la dimensión geométrica respecto de la familia de subgrupos virtualmente cíclicos.

**TEOREMA.** *Sea  $G$  un grupo discreto. Supongamos que tenemos una inclusión estricta de familias  $\mathcal{F}bc \subsetneq \mathcal{V}cyc$ . Entonces todo modelo para  $E_{\mathcal{F}bc}G$  tiene dimensión infinita, y en consecuencia,  $gd_{\mathcal{F}bc}(G) = \infty$ .*

Además de las aplicaciones antes mencionadas, la conjetura de Farrell-Jones también puede ser utilizada como herramienta computacional. Es decir, puede ser utilizada para calcular la teoría K y la teoría L de un anillo de grupo  $R[G]$ . Para ser más concretos, la conjetura de Farrell-Jones predice que la teoría K algebraica de  $R[G]$  está determinada por la teoría K de  $R[V]$ , donde  $V$  corre sobre los subgrupos virtualmente cíclicos (finitos e infinitos) de  $G$ . Por ejemplo, si  $G$  es libre de torsión y  $R = \mathbb{Z}$ , entonces tendríamos que la teoría K de  $\mathbb{Z}[G]$  está determinada por la teoría K de  $\mathbb{Z}$

y de  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ , finalmente usando la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch se puede demostrar que  $Wh_1(G) = \{1\}$ . Esto apunta a la siguiente conjetura.

CONJETURA 0.3. *Sea  $G$  un grupo libre de torsión. Entonces  $Wh_1(G)$  es trivial.*

En el presente trabajo exploraremos el aspecto computacional de la conjetura de Farrel-Jones en el caso de teoría K. La estrategia a utilizar es calcular el lado izquierdo de la función de ensamble, el cual es un grupo de homología con coeficientes en el espectro no conectivo de teoría K de R. Así pues, uno puede intentar calcular este grupo de homología utilizando una sucesión espectral. En este tenor, algunos de los resultados obtenidos en este trabajo son:

TEOREMA. *Sea  $G$  un grupo que satisface la conjetura de Farrell-Jones y tal que existe un modelo finito para  $\underline{EG}$ . Entonces  $\text{rank}(K_n(\mathbb{Z}[G]))$  es finito para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .*

TEOREMA. *Sea  $G$  el grupo modular de Hilbert  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$ . Entonces para todo  $q$ ,*

$$Wh_q(G) \cong \bigoplus_{(M)} Wh_q(M)$$

donde la suma corre sobre las clases de conjugación de subgrupos finitos maximales de  $G$ .

TEOREMA. *Para todo  $q \leq 1$ , se cumple que*

$$Wh_q(PSL_2(\mathcal{O}_k)) \cong K_q(\mathbb{Z}PSL_2(\mathcal{O}_k)).$$

COROLARIO 0.4. *Sean  $G = PSL_2(\mathcal{O}_k)$  y  $H = SL_2(\mathcal{O}_k)$  la proyección al cociente, entonces*

$$Wh_1(H) \simeq Wh_1(G) \oplus G^{ab} \oplus \mathbb{Z}_2,$$

donde  $G^{ab}$  es la abelianización de  $G$ . También

$$Wh_0(H) \simeq Wh_0(G) \oplus \mathbb{Z};$$

y

$$Wh_{-1}(H) \simeq \bigoplus_{(M)} K_{-1}(\mathbb{Z}[M]).$$

donde la suma corre sobre las clases de conjugación de subgrupos finitos maximales de  $G$ .

### 3. Cómo se estructura esta tesis

La presente tesis está estructurada como sigue.

El Capítulo 1 contiene principalmente definiciones y algunos resultados importantes que son enunciados sin demostración pero con las referencias pertinentes. Son dadas la definición de  $G$ -CW-complejo, espacios clasificantes para familias de subgrupos, espacios sobre una categoría y teorías de homología equivariantes. Todo el material en este capítulo está orientado a enunciar la conjetura de Farrell-Jones, la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch y la sucesión espectral de  $p$ -cadenas. Éstas últimas son las herramientas principales en los cálculos que se desarrollarán en los capítulos 2 y 4. Todo el material del Capítulo 1 es bien conocido en el área y no tiene contenido original del autor.

El Capítulo 2 está basado en el contenido del artículo [JPSS14] del autor en co-autoría con Daniel Juan Pineda. En este capítulo se demuestra que los grupos de teoría  $K$  de  $\mathbb{Z}[G]$  tienen rango finito siempre que exista un modelo finito para el espacio clasificante  $\underline{E}G$  y la conjetura de Farrell-Jones sea cierta para  $G$ ; luego se dan ejemplos de grupos que cumplen esta condición. En seguida, se dan cálculos concretos cuando  $G$  es alguno de los siguientes grupos: un grupo libre finitamente generado, un producto libre de dos grupos finitos,  $PSL_2(\mathbb{Z})$ , el grupo fundamental de una superficie esférica,  $F_n \rtimes S_n$  y un grupo libre abeliano finitamente generado. Para realizar dichos cálculos se utilizan la conjetura de Farrell-Jones, la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch y resultados acerca de la teoría  $K$  racional para grupos finitos.

En el capítulo 3 se explora la dimensión geométrica respecto de la familia  $\mathcal{F}bc$  de subgrupos del tipo finito por cíclico. Por definición la familia  $\mathcal{F}bc$  está contenida en la familia  $\mathcal{V}cyc$  de subgrupos virtualmente cíclicos. El resultado principal de este capítulo nos dice que dado un grupo discreto  $G$ , si la inclusión  $\mathcal{F}bc \subset \mathcal{V}cyc$  es estricta entonces todo modelo para  $E_{\mathcal{F}bc}G$  debe tener dimensión infinita. El contenido de este capítulo es trabajo del autor aún sin publicar.

Finalmente en el Capítulo 4 se dan cálculos explícitos de los grupos de Whitehead para el grupo modular de Hilbert. Concretamente, consideremos  $k$  una extensión finita y totalmente real de  $\mathbb{Q}$ , y denotemos por  $\mathcal{O}_k$  a su anillo de enteros algebraicos. El grupo modular de Hilbert es por definición  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$ . En uno de los resultados principales se demuestra que  $Wh_n(PSL_2(\mathcal{O}_k))$  está determinado

por los grupos de Whitehead de los subgrupos finitos maximales de  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$ . También se estudia la estructura de  $Wh_n(SL_2(\mathcal{O}_k))$  para  $n \leq 1$  y se dan expresiones explícitas para la teoría K racional de  $\mathbb{Z}[PSL_2(\mathcal{O}_k)]$ . Este capítulo está basado en el artículo [BSS] del autor en co-autoría con Mauricio Bustamante.



## La conjetura de Farrell-Jones

En este capítulo definiremos los preliminares necesarios para poder enunciar la Conjetura de Farrell-Jones para el funtor de teoría  $K$  algebraica. Después de enunciar la conjetura dedicaremos un par de secciones a enunciar la sucesión espectral de  $p$ -cadenas y la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch. Dichas sucesiones espectrales serán una de las herramientas que utilizaremos en los cálculos de los capítulos posteriores. Nada de este capítulo es material original del autor, así que en cada sección se procura dar las referencias pertinentes.

### 1. Espacios clasificantes para familias de subgrupos

DEFINICIÓN 1.1. [Lüc05, Definition 1.1] Sea  $G$  un grupo discreto. **Una  $G$ -célula** de dimensión  $n$  es un espacio de la forma  $G/H \times D^n$ , donde  $H$  es un subgrupo de  $G$ ,  $G/H$  es el conjunto de clases laterales izquierdas y  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  es un disco cerrado de dimensión  $n$ ; notemos que  $G$  actúa en dicha  $G$ -célula por traslación izquierda en la primera coordenada. **Un  $G$ -CW-complejo**  $X$  es un espacio topológico construido de manera inductiva adjuntando  $G$ -células. De manera explícita  $X$  es un  $G$ -espacio (un espacio topológico donde  $G$  actúa) que tiene una filtración  $G$ -invariante

$$(1.1) \quad X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{n \geq 0} X^n = X$$

y existen  $G$ -pushouts (uno para cada  $n$ )

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I} (G/H \times S^n) & \longrightarrow & X^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i \in I} (G/H \times D^n) & \longrightarrow & X^{n+1} \end{array}$$

de manera que  $X$  tiene la topología débil o topología colímite respecto a la filtración. A  $X^n$  se le conoce como el  $n$ -esqueleto de  $X$ .

- DEFINICIÓN 1.2. ■ Decimos que un  **$G$ -CW-complejo es propio** si todos sus grupos de isotropía son finitos.
- Decimos que un  **$G$ -CW-complejo  $X$  es finito** si solamente tiene un número finito de  $G$ -células, i.e. **el espacio de órbitas  $X/G$**  es compacto.
  - Decimos que un  **$G$ -CW-complejo es de tipo finito** si solamente tiene un número finito de  $G$ -células de dimensión  $n$  para cada  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Notemos que  $X$  tiene una estructura natural de CW-complejo que proviene de ignorar la acción de  $G$  tanto en la filtración como en los pushouts. Cabe resaltar que para cada  $g \in G$  y para cada célula  $e$  de  $X$  tales que  $ge \cap e \neq \emptyset$  se tiene que la acción de  $g$  en  $e$  es trivial ya que  $G$  actúa en la  $G$ -célula  $G/H \times D^n$  en el factor izquierdo.

DEFINICIÓN 1.3. Una **familia de subgrupos  $\mathcal{F}$**  de un grupo  $G$  es una colección no vacía de subgrupos que es cerrada bajo conjugación y es cerrada bajo tomar subgrupos, i.e. se cumplen las siguientes dos condiciones:

- Si  $H$  pertenece a  $\mathcal{F}$  y  $g$  es un elemento de  $G$  entonces  $gHg^{-1}$  pertenece a  $\mathcal{F}$ ;
- Si  $H_1$  pertenece a  $\mathcal{F}$  y  $H_2$  es un subgrupo de  $H_1$  entonces  $H_2$  pertenece a  $\mathcal{F}$ .

Notemos, en particular, que toda familia  $\mathcal{F}$  de subgrupos de  $G$  contiene al subgrupo trivial.

DEFINICIÓN 1.4. Sea  $G$  un grupo y  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos. Un **espacio clasificante  $E_{\mathcal{F}}G$**  o un modelo para  $E_{\mathcal{F}}G$  es un  $G$ -CW-complejo  $X$  que cumple lo siguiente:

1. Todos sus subgrupos de isotropía pertenecen a  $\mathcal{F}$ .
2. Si  $H \in \mathcal{F}$  entonces  $X^H$ , el subespacio que consta de los puntos fijos por los elementos de  $H$ , es contraíble y por lo tanto no vacío.

Denotamos por  $B_{\mathcal{F}}G$  al espacio de órbitas  $(E_{\mathcal{F}}G)/G$ .

Decimos que un  $G$ -CW-complejo  $X$  es un  **$G$ - $\mathcal{F}$ -CW-complejo** si todos sus grupos de isotropía pertenecen a  $\mathcal{F}$ .



Notemos, en particular, que para toda familia  $\mathcal{F}$  de subgrupos de  $G$  cualquier modelo  $X$  para  $E_{\mathcal{F}}G$  es contraíble. Cuando hablamos de un espacio clasificante, es usual denotar también por  $E_{\mathcal{F}}G$  al  $G$ - $\mathcal{F}$ -CW-complejo subyacente mediante un abuso de notación.

**TEOREMA 1.5.** [Lüc05, Theorem 1.9] *Sean  $G$  un grupo y  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos de  $G$ . Entonces, siempre existe un modelo para  $E_{\mathcal{F}}G$ .*

**TEOREMA 1.6.** [Lüc05, Theorem 1.9] *Sean  $G$  un grupo,  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos de  $G$  y  $E_{\mathcal{F}}G$  un espacio clasificante para  $\mathcal{F}$ . Si  $Y$  es un  $G$ -CW-complejo tal que todos sus grupos de isotropía pertenecen a  $\mathcal{F}$  entonces existe una  $G$ -función  $f : Y \rightarrow E_{\mathcal{F}}G$  única hasta  $G$ -homotopía. En particular  $E_{\mathcal{F}}G$  es único hasta  $G$ -homotopía.*

En el presente trabajo estamos particularmente interesados en las siguientes familias de subgrupos de  $G$  por su relación con la conjetura de Farrell-Jones :

1.  $\mathcal{T}r$  la familia que consiste del subgrupo trivial. En este caso  $E_{\mathcal{T}r}G$  es el espacio total del  $G$ -haz principal universal usualmente denotado por  $EG$ .
2.  $\mathcal{F}in$  la familia de subgrupos finitos. En este caso  $E_{\mathcal{F}in}G$  usualmente se denota por  $\underline{EG}$ .
3.  $\mathcal{F}bc$  la familia que consta de los subgrupos finitos y de los subgrupos del tipo finito por cíclico, donde un **subgrupo** se dice del tipo **finito por cíclico** si es de la forma  $F \rtimes \mathbb{Z}$  con  $F$  finito.
4.  $\mathcal{V}cyc$  la familia que consta de los subgrupos virtualmente cíclicos, donde un **subgrupo** se dice que es **virtualmente cíclico** si contiene un subgrupo cíclico de índice finito. En este caso  $E_{\mathcal{V}cyc}G$  se denota por  $\underline{\underline{EG}}$ .
5.  $\mathcal{A}ll$  la familia de todos los subgrupos de  $G$ . En este caso el espacio de un punto  $G/G$  siempre es un modelo para  $E_{\mathcal{A}ll}G$ .

Notemos que siempre tenemos una cadena de inclusiones de familias  $\mathcal{T}r \subset \mathcal{F}in \subset \mathcal{F}bc \subset \mathcal{V}cyc \subset \mathcal{A}ll$ .

En la literatura se pueden encontrar una importante cantidad de ejemplos de modelos para  $\underline{EG}$  y  $EG$ . A continuación damos algunos ejemplos:

**EJEMPLO 1.7.** Algunos modelos de  $EG$  son los siguientes:

1.  $E\mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n$ , donde  $\mathbb{Z}^n$  actúa en  $\mathbb{R}^n$  por traslación.
2.  $EF_n = \text{Cay}(F_n, S)$ , donde  $F_n$  es el grupo libre en  $n$  generadores,  $S$  es un conjunto libre de generadores y  $\text{Cay}(F_n, S)$  es su gráfica de Cayley, es decir, un árbol localmente finito.
3. Definimos la esfera infinita  $S^\infty$  como  $\cup_{n \geq 0} S^n$  y la dotamos de la topología débil, donde  $S^n$  se encaja en  $S^{n+1}$  en el ecuador.  $E(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = S^\infty$ , donde  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  actúa de manera antipodal.
4. Sea  $M$  una variedad cerrada y aesférica, i.e. el cubriente universal  $\tilde{M}$  es contraíble, entonces  $\tilde{M}$  es un modelo para  $E\pi_1(M)$ .
5. Si  $G$  es un grupo que tiene un elemento de orden finito entonces todo modelo para  $EG$  tiene dimensión infinita. Este es un resultado clásico en cohomología de grupos.

EJEMPLO 1.8. Algunos ejemplos de modelos para  $\underline{EG}$  son los siguientes:

1. Si  $G$  es un grupo  $n$ -cristalográfico, es decir, un subgrupo discreto de isometrías de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\mathbb{R}^n$  es un modelo para  $\underline{EG}$ .
2. Sea  $G = F_1 *_H F_2$  una amalgama de grupos finitos. Entonces podemos construir un modelo para  $\underline{EG}$  de dimensión 1, es decir, un árbol. Este modelo es tal que el espacio de órbitas  $\underline{BG}$  es un intervalo cerrado (ver [Ser03, Theorem 6]).
3. Sea  $L$  un grupo de Lie con un número finito de componentes conexas. Si  $G \subset L$  es un subgrupo discreto, entonces  $L/K$ , donde  $K$  es un subgrupo compacto maximal, es un modelo para  $\underline{EG}$  (ver [Abe78]).
4. Sea  $G$  un grupo hiperbólico en el sentido de Gromov. Un modelo para  $\underline{EG}$  viene dado por el complejo de Rips  $P_d(G, S)$ , donde  $d$  es un número real suficientemente grande y  $S$  es un conjunto finito de generadores (ver [MS02]). Cabe mencionar que éste es un modelo finito para  $\underline{EG}$ .

EJEMPLO 1.9. A continuación se damos algunos ejemplos para los que se han dado construcciones explícitas de modelos para  $\underline{\underline{EG}}$ :

1. Si  $G$  es un grupo hiperbólico (ver [JPL06]);
2. Si  $G$  es un grupo cristalográfico (ver [AO06] y [CFH]);
3. Si  $G$  es un grupo virtualmente poly- $\mathbb{Z}$  (ver [LW12]);
4. Si  $G$  es un subgrupo discreto de  $GL_n(\mathbb{R})$  (ver [DKP15]);

5. Si  $G$  actúa propia, cocompactamente y por isometrías en espacio  $CAT(0)$  (ver [Lüc09] y [Far10]).

La siguiente conjetura predice el alto grado de complejidad de un espacio clasificante respecto a la familia subgrupos virtualmente cíclicos.

CONJETURA 1.10. [JPL06] (*Juan-Pineda, Leary*) Si  $G$  es un grupo para el cual existe un modelo finito para  $\underline{EG}$ , entonces  $G$  es virtualmente cíclico.

Para la familia  $\mathcal{F}bc$  los únicos ejemplos que se encuentran en la literatura son aquéllos dados por Farley en [Far10] cuando  $G$  es un grupo que actúa de manera adecuada en un espacio  $CAT(0)$ . En el Teorema 3.5 estudiamos un poco a la estructura de los espacios clasificantes para la familia  $\mathcal{F}bc$ .

## 2. Espacios sobre la categoría de órbitas

DEFINICIÓN 1.11. Sean  $G$  un grupo y  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos. Definimos la **categoría restringida de órbitas** denotada por  $Or(G, \mathcal{F})$  como la categoría cuyos objetos son las órbitas  $G/H$  con  $H \in \mathcal{F}$  y cuyos morfismos son las  $G$ -funciones entre ellas.

Denotaremos simplemente por  $Or(G)$  a  $Or(G, \mathcal{All})$ .

Notemos que dados dos subgrupos  $H$  y  $K$  de  $G$ , una  $G$ -función  $f : G/H \rightarrow G/K$  está completamente determinada por el valor que toma en la clase lateral  $H$ . Supongamos por ejemplo que  $f(H) = aK$ , entonces tendremos que  $f(gH) = gf(H) = gaK$ . Así que cualquier  $G$ -función entre las órbitas  $G/H$  y  $G/K$  es de la forma  $r_a(gH) := gaK$ . Por otra parte, para que  $r_a : G/H \rightarrow G/K$  esté bien definida debemos de tener que para todo  $h \in H$   $r_a(gH) = r_a(ghH)$  ya que las clases laterales  $gH$  y  $ghH$  son iguales. Así que  $gaK = ghaK$  y  $a^{-1}haK = K$  y así concluimos que  $a^{-1}ha \in K$  para todo  $h \in H$ . Entonces para que  $r_a$  esté bien definida necesariamente se tiene que cumplir que  $a^{-1}Ha \subseteq K$ . Y finalmente  $r_a = r_b$  si y sólo si  $ab^{-1} \in K$ . Éstas observaciones nos dan información acerca de la estructura de la categoría de órbitas.

DEFINICIÓN 1.12. Sean  $G$  un grupo y  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos.

1. Un  $Or(G, \mathcal{F})$ -**espacio covariante** (resp. **contravariante**)  $X$  es un funtor covariante (resp. contravariante)  $X : Or(G, \mathcal{F}) \rightarrow SPACES$ , donde  $SPACES$  es la categoría de espacios topológicos compactamente generados. Análogamente definimos  $Or(G, \mathcal{F})$ -**espacio punteado** reemplazando  $SPACES$  por  $SPACES^+$  la categoría de espacios punteados compactamente generados.
2. Un  $Or(G, \mathcal{F})$ -**espectro covariante** (resp. **contravariante**)  $\mathbf{E}$  es un funtor  $\mathbf{E} : Or(G, \mathcal{F}) \rightarrow SPECTRA$  covariante (resp. contravariante), donde  $SPECTRA$  es la categoría de espectros y funciones fuertes de espectros, ver [DL98, p. 207].
3. Una **función**  $f : X \rightarrow Y$  **entre**  $Or(G, \mathcal{F})$ -**espacios** de la misma varianza es una transformación natural de funtores. De manera similar podemos definir **funciones entre**  $Or(G, \mathcal{F})$ -**espectros**, haciendo las funciones entre los espacios subyacentes compatibles con las funciones estructurales, ver [DL98, pp. 207-208].
4. Una función  $f : X \rightarrow Y$  entre  $Or(G, \mathcal{F})$ -**espacios** de la misma varianza es una **equivalencia homotópica débil** si  $f(G/H) : X(G/H) \rightarrow Y(G/H)$  es una equivalencia homotópica débil para todo  $H \in \mathcal{F}$ .
5. Dado un  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacio contravariante  $X$  y un  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacio covariante  $Y$ , definimos el espacio topológico  $X \otimes_{Or(G, \mathcal{F})} Y$  como

$$X \otimes_{Or(G, \mathcal{F})} Y = \bigsqcup_{H \in \mathcal{F}} X(G/H) \times Y(G/H) / \sim$$

donde la relación de equivalencia es dada por  $(X(r_a)(x), y) \sim (x, Y(r_a)(y))$  para todo  $r_a : G/H \rightarrow G/K$ ,  $gH \mapsto ga^{-1}K$ , y para todo  $x \in X(G/K)$ ,  $y \in Y(G/H)$ .

Esta construcción se puede hacer en la categoría de espacios punteados reemplazando el producto directo  $\times$  por el producto smash  $\wedge$  y la unión disjunta  $\sqcup$  por la cuña  $\vee$ , así el resultado final es un espacio punteado. Un  $Or(G, \mathcal{F})$ -espectro se puede ver como una colección de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios junto con sus respectivas funciones estructurales. Entonces, uno puede definir de manera natural el espectro  $X \otimes_{Or(G, \mathcal{F})} \mathbf{E}$  para  $X$  un  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacio contravariante punteado y  $\mathbf{E}$  un  $Or(G, \mathcal{F})$ -espectro covariante haciendo la construcción anterior espacio a espacio. El único detalle es la construcción de las funciones estructurales, véase [DL98, pp. 207-208].

6. Denotaremos por  $*_{\mathcal{F}}$  a el  $Or(G)$ -espacio definido por

$$*_{\mathcal{F}}(G/H) = \begin{cases} \text{pt} & \text{si } H \in \mathcal{F} \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde  $\text{pt}$  es el espacio que consiste de un único punto.

OBSERVACIÓN 1.13. Notemos que todo lo que definimos arriba tiene sentido si reemplazamos la categoría de órbitas  $Or(G, \mathcal{F})$  por cualquier categoría pequeña  $C$ .

OBSERVACIÓN 1.14. Un  $Or(G, \mathcal{T}r)$ -espacio covariante es lo mismo que un  $G$ -espacio izquierdo, mientras que un  $Or(G, \mathcal{T}r)$ -espacio contravariante es lo mismo que un  $G$ -espacio derecho. En efecto, la categoría de  $Or(G, \mathcal{T}r)$ -espacios covariantes es isomorfa a la categoría de  $G$ -espacios izquierdo y la categoría de  $Or(G, \mathcal{T}r)$ -espacios contravariantes es isomorfa a la categoría de  $G$ -espacios derechos.

Dado un  $G$ - $\mathcal{F}$ -CW-complejo  $Y$  uno puede asociarle un  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacio contravariante

$$\text{map}_G(-, Y) : Or(G, \mathcal{F}) \rightarrow SPACES, G/H \mapsto \text{map}_G(G/H, Y) = Y^H.$$

Claramente si  $Y$  es punteado, entonces  $\text{map}_G(-, Y)$  toma valores en  $SPACES^+$  porque el punto marcado siempre se considera entre los puntos fijos bajo la acción de  $G$ .

DEFINICIÓN 1.15. Decimos que un  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacio  $X$  es un  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-complejo si es el  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacio asociado a un  $G$ -CW-complejo  $Y$  con isotropía en la familia  $\mathcal{F}$ , i.e.  $X = \text{map}_G(-, Y)$ .

OBSERVACIÓN 1.16. Esta definición es diferente a la definición de  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-complejo dada en [DL98, Definition 3.2] (la cual es mucho más general), pero es equivalente a nuestra definición en virtud del Teorema 7.4(3) en [DL98].

OBSERVACIÓN 1.17. Consideremos  $\mathcal{F} = \mathcal{T}r$ . Entonces un  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-complejo no es lo mismo que un  $G$ -CW-complejo. Un  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-complejo es el  $Or(G, \mathcal{F})$  asociado a un  $G$ -CW-complejo con isotropía en la familia trivial, es decir, un  $G$ -CW-complejo con una acción libre de  $G$ .

### 3. $G$ -Teorías de homología

Sea  $G$  un grupo discreto y  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos. Sea  $\mathfrak{G}_{\mathcal{F}}^2$  la categoría de parejas  $(K, L)$ , con  $K$  un  $G$ - $\mathcal{F}$ -CW-complejo y  $L \subseteq K$  un  $G$ -subcomplejo (en particular  $L$  es un  $G$ - $\mathcal{F}$ -CW-complejo también).

DEFINICIÓN 1.18. Una  $G$ - $\mathcal{F}$ -teoría de homología generalizada es una colección de funtores covariantes

$$(3.1) \quad H_n^G : \mathfrak{G}_{\mathcal{F}}^2 \rightarrow \mathcal{A}b$$

con  $n \in \mathbb{Z}$  y  $\mathcal{A}b$  la categoría de grupos abelianos, junto con homomorfismos naturales

$$(3.2) \quad \partial_n : H_n^G(K, L) \rightarrow H_{n-1}^G(L, \emptyset)$$

que cumplen los siguientes axiomas:

1. (Invarianza homotópica) Si  $f_0, f_1 : (K, L) \rightarrow (K', L')$  son  $G$ -funciones  $G$ -homotópicas entonces  $H_n^G(f_0) = H_n^G(f_1)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .
2. (Escisión) La inclusión de parejas  $(K, K \cap L) \subset (K \cup L, L)$  induce un isomorfismo

$$H_n^G(K, K \cap L) \xrightarrow{\cong} H_n^G(K \cup L, L)$$

para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

3. (Sucesión exacta larga de la pareja) Si  $(K, L) \in \mathfrak{G}_{\mathcal{F}}^2$ , existen transformaciones naturales  $\partial_n : H_n^G(K, L) \rightarrow H_{n-1}^G(L, \emptyset)$  tales que la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_n^G(L, \emptyset) \xrightarrow{i_*} H_n^G(K, \emptyset) \xrightarrow{j_*} H_n^G(K, L) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}^G(L, \emptyset) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}^G(K, \emptyset) \xrightarrow{j_*} \cdots$$

donde  $i_*$  y  $j_*$  son las funciones inducidas por las inclusiones  $i : (L, \emptyset) \rightarrow (K, \emptyset)$  y  $j : (K, \emptyset) \rightarrow (K, L)$ , es exacta.

4. (Unión disjunta) Si  $\{X_i | i \in I\}$  es una familia de  $G$ - $\mathcal{F}$ -CW-complejos, entonces las proyecciones  $\coprod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$  inducen un isomorfismo

$$H_n^G \left( \coprod_{i \in I} X_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} H_n^G(X_i).$$

A continuación vamos a describir un método para poder construir  $G\mathcal{F}$ -teorías de homología generalizadas.

LEMA 1.19. [KL05, Lemma 20.12] *Sea  $\mathbf{E}$  un  $Or(G, \mathcal{F})$ -espectro covariante. Entonces  $\mathbf{E}$  define una  $G\mathcal{F}$ -teoría de homología  $H_*^G(-, -; \mathbf{E})$  dada por*

$$H_*^G(X, A; \mathbf{E}) = \pi_n(\text{map}_G(-, X_+ \cup \text{cono}(A_+)) \otimes_{Or(G)} \mathbf{E})$$

donde el cono de un  $Or(G, \mathcal{F})$  espacio se define haciendo el cono usual en cada término. En particular

$$H_n^G(G/H; \mathbf{E}) = \pi_n(E(G/H))$$

para todo  $H \in \mathcal{F}$ .

OBSERVACIÓN 1.20. Notemos que la  $G\mathcal{F}$ -teoría de homología asociada a un  $Or(G, \mathcal{F})$ -espectro  $\mathbf{E}$ , en realidad define una teoría de homología generalizada en la categoría de parejas de  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-complejos. A esta teoría de homología la denotamos como  $H_*^{Or(G, \mathcal{F})}(-, -; \mathbf{E})$ .

Nos gustaría extender la teoría de homología  $H_*^{Or(G, \mathcal{F})}(-, -; \mathbf{E})$  de la categoría de parejas de  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-complejos a la categoría de parejas de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios. Para tal fin, definiremos lo que es una aproximación CW y daremos algunos resultados adicionales.

DEFINICIÓN 1.21. [DL98, Definition 3.6] *Sea  $(X, A)$  una pareja de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios. Una  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-aproximación*

$$(u, v) : (X', A') \rightarrow (X, A)$$

consiste de una pareja de  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-complejos  $(X', A')$  junto con una pareja de funciones  $(u, v)$  tales que tanto  $u$  como  $v$  son equivalencias homotópicas débiles de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios. Una  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-aproximación de un espacio  $X$  es una  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-aproximación de la pareja  $(X, \emptyset)$ .

TEOREMA 1.22. [DL98] *Sea  $(X, A)$  una pareja de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios. Entonces:*

1. *Existe una  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-aproximación de  $(X, A)$ ;*

2. Dada una pareja de funciones  $(f, g) : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios y dadas  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-aproximaciones  $(u, v) : (X', A') \rightarrow (X, A)$  y  $(a, b) : (Y', B') \rightarrow (Y, B)$ , entonces existe una pareja de funciones  $(f', g') : (X', A') \rightarrow (Y', B')$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X', A') & \xrightarrow{(u,v)} & (X, A) \\ (f', g') \downarrow & & \downarrow (f,g) \\ (Y', B') & \xrightarrow{(a,b)} & (Y, B) \end{array}$$

conmuta hasta homotopía. Más aún  $(f', g')$  es única hasta homotopía.

EJEMPLO 1.23. Sea  $G$  un grupo y  $\mathcal{F}$  una familia que no es igual a  $\mathcal{A}ll$ . Recordemos de la Definición 1.12 (6) el  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacio  $*_{\mathcal{F}}$ . Es claro que  $*_{\mathcal{F}}$  no es un  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-complejo, en efecto, si lo fuera entonces existiría un  $G$ - $\mathcal{F}$ -CW-complejo  $Y$  tal que el conjunto de puntos fijos por el subgrupo trivial  $Y^1 = Y = pt$ , pero entonces  $G$  actuaría de manera trivial en  $Y$  y entonces la familia de subgrupos de isotropía sería igual a  $\mathcal{A}ll$ . Sin embargo, si consideramos  $Y$  un modelo para  $E_{\mathcal{F}}G$  entonces  $Y$  es un  $G$ - $\mathcal{F}$ -CW-complejo de manera que su  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-complejo asociado es una aproximación CW de  $*_{\mathcal{F}}$  usando las dos condiciones descritas en la Definición 1.4.

A continuación daremos la extensión de la teoría de homología que ya teníamos definida sobre la categoría de parejas de  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-complejos a la categoría de parejas de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios. Haremos un pequeño abuso de notación utilizando la misma notación para ambas teorías de homología.

DEFINICIÓN 1.24. Sean  $(X, A)$  un pareja de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios contravariantes y  $\mathbf{E}$  un  $Or(G, \mathcal{F})$ -espectro covariante. Sea  $(u, v) : (X', A') \rightarrow (X, A)$  una  $Or(G, \mathcal{F})$ -CW-aproximación. Definimos la homología de  $(X, A)$  con coeficientes en  $\mathbf{E}$  como

$$H_p^{Or(G, \mathcal{F})}(X, A; \mathbf{E}) = \pi_p(X'_+ \cup \text{cono}(A'_+) \otimes_{Or(G, \mathcal{F})} \mathbf{E})$$

donde  $X'_+$  es el  $Or(G, \mathcal{F})$  espacio que se obtiene de hacer unión disjunta de  $X'$  con el  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacio constante de un punto.

OBSERVACIÓN 1.25. La principal característica de la teoría de homología en la definición anterior es que cumple el Axioma de Equivalencia Homotópica Débil (WHE por sus siglas en inglés). Esto



es, que si tenemos una equivalencia homotópica débil  $(f, g) : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  entonces induce un isomorfismo  $H_*^{Or(G, \mathcal{F})}(X, A; \mathbf{E}) \rightarrow H_*^{Or(G, \mathcal{F})}(Y, B; \mathbf{E})$ . Esto será crucial al momento de construir la sucesión espectral de  $p$ -cadenas (ver [DL03, Section 1]).

#### 4. Teorías de homología equivariantes

Sea  $\alpha : H \rightarrow G$  un homomorfismo de grupos. Dado un  $H$ -espacio  $X$ , definimos la inducción  $ind_\alpha X$  de  $X$  con  $\alpha$  como el  $G$ -espacio obtenido por el cociente de  $G \times X$  por la acción  $(g, x) \cdot h = (g\alpha(h), h^{-1}x)$  para  $h \in H$  y  $(g, x) \in G \times X$ .

DEFINICIÓN 1.26. [KL05, Definition 20.6] Una **teoría de homología equivariante**  $H_*^?$  consiste de una  $G$ -teoría de homología  $H_*^G$  para cada grupo  $G$  junto con la siguiente estructura inductiva: Dado un homomorfismo de grupos  $\alpha : H \rightarrow G$  y una pareja de  $H$ -CW-complejos  $(X, A)$  tal que  $ker(\alpha)$  actúa libremente en  $X$ , existen para cada  $n \in \mathbb{Z}$  isomorfismos naturales

$$ind_\alpha : H_n^H(X, A) \rightarrow H_n^G(ind_\alpha(X, A))$$

que satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $\partial_n^G \circ ind_\alpha = ind_\alpha \circ \partial_n^H$ .
2. Sea  $\beta : G \rightarrow K$  otro homomorfismo de grupos tal que  $ker(\beta \circ \alpha)$  actúa libremente en  $X$ .  
Entonces para  $n \in \mathbb{Z}$

$$ind_{\beta \circ \alpha} = H_n^K(f_1) \circ ind_\beta \circ ind_\alpha : H_n^H(X, A) \rightarrow H_n^K(ind_{\beta \circ \alpha}(X, A))$$

donde  $f_1 : ind_\beta ind_\alpha(X, A) \rightarrow ind_{\beta \circ \alpha}(X, A)$ , es el homeomorfismo natural.

3. Para  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $g \in G$  y  $(X, A)$  un  $G$ -CW par, el homomorfismo

$$ind_{c(g):G \rightarrow G} : H_n^G(X, A) \rightarrow H_n^G(ind_{c(g):G \rightarrow G}(X, A))$$

coincide con  $H_n^G(f_2)$ , donde el  $G$ -homeomorfismo

$$f_2 : (X, A) \rightarrow ind_{c(g):G \rightarrow G}(X, A)$$

manda  $x$  a  $(1, g^{-1}x)$  y  $c(g) : G \rightarrow G$  manda  $g'$  a  $gg'g^{-1}$ .

El siguiente objetivo es crear funtores  $\mathbf{E} : Or(G) \rightarrow SPECTRA$  para cada grupo  $G$  de manera que obtengamos una teoría de homología equivariante, en el sentido de la definición anterior, tal que  $H_*^G(pt; \mathbf{E}) = \pi_*(\mathbf{E}(G/G))$ .

Recordemos que un **grupoide** es una categoría pequeña en la que todo morfismo es un isomorfismo; un morfismo entre grupoides es funtor entre las categorías subyacentes. Denotemos por *GRUPOIDS* la categoría de grupoides.

A cada órbita  $G/H$  de  $G$  le podemos asociar un grupoide cuyos objetos son los elementos de  $G/H$  y dadas dos clases laterales  $x$  y  $y$  en  $G/H$  un morfismo  $x \rightarrow y$  es un elemento  $g \in G$  tal que  $gx = y$ . A este grupoide se le llama el **grupoide de transportación de  $G/H$** . De esta manera tenemos un funtor

$$\mathcal{G}^G : Or(G) \rightarrow GRUPOIDS$$

para cualquier grupo  $G$ .

Haremos uso del siguiente resultado.

LEMA 1.27. [KL05, Lemma 20.14] *Consideremos un  $GRUPOIDS$ -espectro*

$$\mathbf{E} : GRUPOIDS \rightarrow SPECTRA.$$

*Supongamos que  $\mathbf{E}$  respeta equivalencias, i.e., manda una equivalencia de grupoides en una equivalencia de espectros. Entonces  $\mathbf{E}$  define una teoría de homología equivariante  $H_*^G(-, -; \mathbf{E})$ , cuya  $G$ -teoría de homología subyacente para cada grupo  $G$  es dada por aquella asociada al  $Or(G)$ -espectro  $\mathbf{E} \circ \mathcal{G}^G : Or(G) \rightarrow SPECTRA$ .*

*En particular tenemos que*

$$H_n^G(G/H; \mathbf{E}) \cong H_n^H(pt; \mathbf{E}) \cong \pi_n(\mathbf{E}(H/H)).$$

Dado cualquier anillo asociativo  $R$  con elemento unitario, en [PW85] es construido un funtor  $K_R : Groups \rightarrow SPECTRA$  que a cada grupo  $G$  le asocia el espectro no conectivo de  $K$ -teoría algebraica del anillo de grupo  $RG$ . Cada grupo puede ser considerado como un grupoide con un solo elemento cuyo grupo de automorfismos es  $G$ . En [DL98] el funtor  $K$  es extendido a un funtor

$$\mathbb{K}_R : GRUPOIDS \rightarrow SPECTRA.$$

Usando el Lemma 1.27 obtenemos una teoría de homología equivariante tal que  $H_n^G(pt; \mathbb{K}_R) \cong K_n(RG)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  y para todo grupo  $G$ . La  $G$ -teoría de homología subyacente a esta teoría de homología equivariante es la que usaremos en la formulación de la conjetura de Farrell-Jones para  $K$ -teoría.

## 5. La conjetura de Farrell-Jones

Originalmente T. Farrell y L. Jones plantearon su conjetura para los funtores de  $K$ -teoría,  $L$ -teoría, Pseudoisotopía y Pseudoisotopía diferenciable. Como en este trabajo estamos especialmente interesados en el funtor de  $K$ -teoría, plantaremos la conjetura para este caso particular. Usaremos la notación desarrollada en las secciones anteriores.

CONJETURA 1.28. (**Farrell-Jones**) *Sea  $G$  un grupo discreto y  $R$  un anillo asociativo con elemento unitario. Entonces para todo  $n \in \mathbb{Z}$  la función de ensamble*

$$(5.1) \quad A_{\mathcal{V}_{cyc}, \mathcal{A}ll} : H_n^G(\underline{EG}; \mathbb{K}_R) \rightarrow H_n^G(pt; \mathbb{K}_R) \cong K_n(RG)$$

*que es inducida por la proyección  $\underline{EG} \rightarrow pt$  es un isomorfismo.*

CONJETURA 1.29. (**Farrell-Jones**) *Sea  $G$  un grupo discreto y  $R$  un anillo asociativo con elemento unitario. Entonces para todo  $n \in \mathbb{Z}$  la función de ensamble*

$$(5.2) \quad A_{\mathcal{V}_{cyc}, \mathcal{A}ll} : H_n^{Or(G)}(*_{\mathcal{V}_{cyc}}; \mathbb{K}_R) \rightarrow H_n^{Or(G)}(*_{\mathcal{A}ll}; \mathbb{K}_R) \cong K_n(RG)$$

*que es inducida por la inclusión de  $Or(G)$ -espacios  $*_{\mathcal{V}_{cyc}} \rightarrow *_{\mathcal{A}ll}$  es un isomorfismo.*

Que ambas conjeturas son equivalentes se sigue del Lema 1.19, la Observación 1.20, la Definición 1.24 y el Ejemplo 1.23.

La conjetura de Farrell-Jones nos provee de una poderosa y útil herramienta para realizar cálculos de grupos de teoría  $K$  de anillos de grupo, los cuales son en extremo difíciles de calcular. Sin embargo, bajo el isomorfismo dado por la función de ensamble  $A_{\mathcal{V}_{cyc}, \mathcal{A}ll}$  podemos identificar los grupos de  $K$ -teoría de  $RG$  con los grupos de homología (con coeficientes en  $\mathbb{K}_R$ ) del espacio clasificante  $\underline{EG}$ . Estos grupos de homología son potencialmente mas sencillos de calcular usando

sucesiones espectrales del tipo Atiyah-Hirzebruch o la sucesión espectral de  $p$ -cadenas, las cuales analizaremos en las siguientes secciones.

A continuación definiremos una versión más general de la Conjetura de Farrell-Jones conocida como **la Conjetura Fibrada de Farrell-Jones** (ver [BLR08b, Section 1.1]).

Dado un homomorfismo de grupos  $\phi : K \rightarrow G$  y una familia de subgrupos  $\mathcal{F}$  de subgrupos de  $G$ , definimos la familia  $\phi^*\mathcal{F}$  de subgrupos de  $K$  como

$$\phi^*\mathcal{F} = \{H \leq K \mid \phi(H) \in \mathcal{F}\}.$$

DEFINICIÓN 1.30. Decimos que  $G$  satisface la Conjetura Fibrada de Farrell-Jones si para todo homomorfismo de grupos  $\phi : K \rightarrow G$  la función de ensamble

$$(5.3) \quad A_{\phi^*\mathcal{F}, \mathcal{A}ll} : H_n^K(E_{\phi^*\mathcal{F}}K; \mathbb{K}_R) \rightarrow H_n^K(pt; \mathbb{K}_R)$$

es un isomorfismo para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

OBSERVACIÓN 1.31. Notemos que si  $G$  satisface la Conjetura Fibrada de Farrell-Jones, considerando  $\phi$  igual a la identidad en  $G$ , se sigue que  $G$  satisface la conjetura de Farrell-Jones.

Una de las ventajas de esta generalización es que la versión fibrada de la conjetura de Farrell-Jones tiene mejores propiedades hereditarias por ejemplo:

- Si  $G$  satisface la conjetura fibrada de Farrell-Jones, entonces cualquier subgrupo de  $G$  también la satisface.
- Sea  $f : H \rightarrow G$  es un homomorfismo suprayectivo de grupos. Supongamos que  $G$  y  $f^{-1}(V)$  satisfacen la conjetura fibrada de Farrell-Jones para cualquier subgrupo virtualmente cíclico  $V$  de  $G$ . Entonces  $H$  satisface la conjetura fibrada de Farrell-Jones.

Estas dos propiedades pueden ser utilizadas para demostrar la conjetura de Farrell-Jones a partir de casos ya conocidos, por ejemplo en [JPSS], en trabajo conjunto con Daniel Juan-Pineda demostramos la conjetura para los grupos de trenzas puras y completas sobre cualquier superficie compacta (posiblemente con frontera no vacía).

## 6. La sucesión espectral de $p$ -cadenas

En esta sección revisaremos la construcción de la **Sucesión espectral de  $p$ -cadenas** y haremos las modificaciones que son necesarias para desarrollar una versión relativa para parejas de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios contravariantes. Así pues, nuestro objetivo es calcular  $H_*^{Or(G, \mathcal{F})}(X, A; \mathbf{E})$  (ver Definición 1.24).

El material de esta sección está basado en la sección 2 de [DL03], para más detalles (y más generalidad) se recomienda consultar este artículo.

DEFINICIÓN 1.32. Para cualquier entero no negativo  $p$  definimos la categoría  $[p]$  cuyos objetos son los elementos del conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, p\}$  con exactamente un morfismo de  $i$  a  $j$  si  $i \leq j$  y ningún morfismo en otro caso. Sea  $\Delta$  la categoría que tiene por objetos las categorías  $[0], [1], \dots$  y por morfismos los funtores entre ellas. Un **conjunto simplicial** es un  $\Delta$ -conjunto contravariante. Sea  $\Delta_\bullet$  el  $\Delta$ -conjunto covariante que manda a cada  $[p]$  al  $p$ -simplejo estándar y a cada morfismo  $[p] \rightarrow [q]$  a la inclusión de caras usual. Entonces definimos la **realización geométrica** del conjunto simplicial  $X_\bullet$  como el espacio  $|X_\bullet| = X_\bullet \otimes_\Delta \Delta_\bullet$ , la definición de este último producto tensorial es completamente análoga a la del producto tensorial sobre la categoría de órbitas.

Consideremos  $C$  una categoría pequeña. Usualmente la categoría que tendremos en mente es la categoría de órbitas  $Or(G, \mathcal{F})$ .

DEFINICIÓN 1.33. Denotemos por  $[[p], C]$  el conjunto de clases de equivalencia de funtores de  $[p]$  a  $C$ , donde dos funtores son equivalentes si están relacionados por una transformación natural cuya evaluación en cualquier objeto es un isomorfismo.

Definimos el conjunto simplicial  $\widetilde{N}_\bullet C$  como  $\widetilde{N}_p C := [[p], C]$  y definimos  $\widetilde{B}C$  como su realización geométrica.

Por ejemplo, si  $C = Or(G, \mathcal{F})$ , un objeto en  $[[p], Or(G, \mathcal{F})]$  está dado por un diagrama de la forma

$$G/H_0 \xrightarrow{f_0} G/H_1 \xrightarrow{f_1} G/H_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{p-1}} G/H_p$$

y dos de estos diagramas están relacionados si existe un diagrama conmutativo de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccccccc} G/H_0 & \xrightarrow{f_0} & G/H_1 & \xrightarrow{f_1} & \cdots & \xrightarrow{f_{p-1}} & G/H_p \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & & & \cong \downarrow \\ G/H'_0 & \xrightarrow{f'_0} & G/H'_1 & \xrightarrow{f'_1} & \cdots & \xrightarrow{f'_{p-1}} & G/H'_p \end{array}$$

DEFINICIÓN 1.34. Dados dos objetos  $?$  y  $??$  en  $Or(G, \mathcal{F})$ , definimos la categoría  $? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??$  como sigue:

- Un objeto es un diagrama  $? \xrightarrow{\alpha} G/H \xrightarrow{\beta} ??$  en  $Or(G, \mathcal{F})$ .
- Un morfismo de  $? \xrightarrow{\alpha} G/H \xrightarrow{\beta} ??$  a  $? \xrightarrow{\alpha'} G/H' \xrightarrow{\beta'} ??$  es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} ? & \xrightarrow{\alpha} & G/H & \xrightarrow{\beta} & ?? \\ \parallel & & \downarrow \phi & & \parallel \\ ? & \xrightarrow{\alpha'} & G/H' & \xrightarrow{\beta'} & ?? \end{array}$$

Sea  $\widetilde{B}_p(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$  el  $p$ -esqueleto de  $\widetilde{B}(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$ . Notemos que  $\widetilde{B}(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$  es un  $Or(G, \mathcal{F}) \times Or(G, \mathcal{F})^{op}$ -espacio contravariante. Así pues tenemos una filtración de  $\widetilde{B}(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$  por los subespacios  $\widetilde{B}_p(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$  de manera que

$$\widetilde{B}(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??) = \text{colim } \widetilde{B}_p(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??).$$

Sea  $X$  un  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacio contravariante. Obtenemos el  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacio contravariante (en la variable  $?$ )  $\hat{X} := X(??) \otimes_{Or(G, \mathcal{F})} \widetilde{B}(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$ . Entonces  $\hat{X}$  se puede filtrar usando los subespacios  $\hat{X}_p := X(??) \otimes_{Or(G, \mathcal{F})} \widetilde{B}_p(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$ , es decir, filtramos de manera esquelética el factor derecho del producto tensorial. Notemos que esta no es una filtración del espacio  $X$ . Tenemos

$$\emptyset \subset \hat{X}_0 \subset \hat{X}_1 \subset \hat{X}_2 \subset \cdots \subset \hat{X}.$$

Consideremos ahora la pareja  $(X, A)$  de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios. De manera análoga definimos el  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacio (en la coordenada  $?$ ) como  $\hat{A} := A(??) \otimes_{Or(G, \mathcal{F})} \widetilde{B}(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$  y obtenemos la siguiente filtración de  $\hat{X}$

$$(6.1) \quad \hat{A} \subset \hat{X}_0 \cup \hat{A} \subset \hat{X}_1 \cup \hat{A} \subset \hat{X}_2 \cup \hat{A} \subset \cdots \subset \hat{X}$$

Sea  $n.d.\tilde{N}_p(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$  el conjunto de  $p$  simplejos no degenerados de  $n.d.\tilde{N}_*(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$ . Así pues, un elemento en  $n.d.\tilde{N}_p(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$  viene dado por clases de diagramas

$$? \xrightarrow{\alpha} G/H_0 \xrightarrow{f_0} G/H_1 \xrightarrow{f_1} G/H_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{p-1}} G/H_p \xrightarrow{\beta} ??$$

donde ninguno de los  $f_i$  es un isomorfismo. No es difícil ver que la estructura celular de  $\tilde{B}(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$  es tal que hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de  $p$ -células y  $n.d.\tilde{N}_p(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$ .

El siguiente es una generalización inmediata del Lemma 2.3 en [DL03].

LEMA 1.35. *Son ciertas las siguientes afirmaciones.*

1.  $\hat{X} = \text{colim} (\hat{X}_p \cup \hat{A})$ .
2. *Existe un push-out de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios contravariantes cuyas flechas verticales son cofibraciones  $(p-1)$ -conexas:*

$$\begin{array}{ccc} ((X \setminus A) \otimes_{Or(G, \mathcal{F})} n.d.\tilde{N}_p(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)) \times S^{p-1} & \longrightarrow & \hat{X}_{p-1} \cup \hat{A} \\ id \otimes inc \downarrow & & \downarrow \\ ((X \setminus A) \otimes_{Or(G, \mathcal{F})} n.d.\tilde{N}_p(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)) \times D^p & \longrightarrow & \hat{X}_p \cup \hat{A} \end{array}$$

donde  $(X \setminus A)$  denota la diferencia de  $X$  y  $A$  definida componente a componente.

3.  $(\hat{X}, \hat{A})$  es débilmente homotópicamente equivalente a  $(X, A)$ . En particular tenemos que  $H_*^{Or(G, \mathcal{F})}(X, A; \mathbf{E}) \cong H_*^{Or(G, \mathcal{F})}(\hat{X}, \hat{A}; \mathbf{E})$  para cualquier  $Or(G, \mathcal{F})$ -espectro covariante  $\mathbf{E}$ .

Lo que se expone a continuación es material estándar, es uno de los enfoques usuales para deducir sucesiones espectrales (ver [Whi78, Theorem III.3.2.]).

Hagamos una pausa para resumir lo que queremos hacer y lo que hemos hecho hasta el momento. Nuestro objetivo es, dado una pareja de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios  $(X, A)$ , calcular los grupos de

homología  $H_n^{Or(G, \mathcal{F})}(X, A; \mathbf{E})$ . De momento lo que hemos hecho es concentrarnos en la categoría  $Or(G, \mathcal{F})$  y en la pareja  $(X, A)$ , recapitulando:

- Definimos la categoría  $? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??$  y le asociamos una variante del espacio clasificante al que llamamos  $\widetilde{B}(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$ .
- A  $\widetilde{B}(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??)$  lo filtramos de manera esquelética.
- Luego consideramos la pareja de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios  $(\hat{X}, \hat{A})$  con  $\hat{X} := X \otimes_{Or(G, \mathcal{F})} ? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??$  y  $\hat{A} := A \otimes_{Or(G, \mathcal{F})} ? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??$ .
- Vimos que la pareja  $(\hat{X}, \hat{A})$  es débilmente homotópicamente equivalente a la pareja  $(X, A)$ .

Lo que queremos hacer a continuación es lo siguiente:

- Como la teoría de homología  $H_*^{Or(G, \mathcal{F})}(-, -; \mathbf{E})$  cumple el axioma de equivalencia débil (ver Observación 1.25), podemos reemplazar la pareja  $(X, A)$  por la pareja  $(\hat{X}, \hat{A})$ .
- Dado que  $(\hat{X}, \hat{A})$  viene con la filtración 6.1, podemos aplicar la maquinaria usual para obtener una sucesión espectral. Dicha sucesión espectral es la sucesión espectral de  $p$ -cadenas.

Usando la filtración (6.1), podemos construir la filtración de  $H_n^{Or(G, \mathcal{F})}(X, A; \mathbf{E})$  dada por

$$F_p H_n^{Or(G, \mathcal{F})}(X, A; \mathbf{E}) = \text{Im}(H_n^{Or(G, \mathcal{F})}(\hat{X}_p \cup \hat{A}, \hat{A}; \mathbf{E}) \rightarrow H_n^{Or(G, \mathcal{F})}(\hat{X}, \hat{A}; \mathbf{E}))$$

donde la flecha de arriba es la función inducida en homología por la inclusión de parejas. Luego nos fijamos en los cocientes sucesivos de esta filtración, es decir, los grupos

$$F_p H_n^{Or(G, \mathcal{F})}(\hat{X}, \hat{A}; \mathbf{E}) / F_{p-1} H_n^{Or(G, \mathcal{F})}(\hat{X}, \hat{A}; \mathbf{E}).$$

Estos cocientes son los que podremos recuperar de la sucesión espectral. Los pondremos en un arreglo bidimensional, pensado en los puntos con coordenadas enteras de  $\mathbb{R}^2$ , definimos

$$E_{p,q}^\infty := F_p H_{p+q}^{Or(G, \mathcal{F})}(\hat{X}, \hat{A}; \mathbf{E}) / F_{p-1} H_{p+q}^{Or(G, \mathcal{F})}(\hat{X}, \hat{A}; \mathbf{E}).$$

Notemos que los cocientes asociados al grupo  $H_n^{Or(G, \mathcal{F})}(\hat{X}, \hat{A}; \mathbf{E})$ , con  $n$  fijo están localizados en la diagonal donde las coordenadas son tales que suman  $n$ . En la columna  $p$ -ésima están los niveles  $p$ -ésimos de la filtración divididos entre el nivel anterior. Esto lo pensaremos como si fuera



la página de un libro, de hecho, la última página y la que contiene la información más cercana a tener calculado  $H_n^{Or(G, \mathcal{F})}(\hat{X}, \hat{A}; \mathbf{E})$  y por lo tanto  $H_n^{Or(G, \mathcal{F})}(X, A; \mathbf{E})$ .

En seguida construiremos la primer página de nuestro libro, la forma en la que lo haremos será una especie de generalización de la sucesión exacta para la pareja. Consideramos los grupos de homología relativos  $H_n^{Or(G, \mathcal{F})}(\hat{X}_p \cup \hat{A}, \hat{X}_{p-1} \cup \hat{A}; \mathbf{E})$ , los cuales también pondremos en un arreglo bidimensional como sigue:

$$E_{p,q}^1 := H_{p+q}^{Or(G, \mathcal{F})}(\hat{X}_p \cup \hat{A}, \hat{X}_{p-1} \cup \hat{A}; \mathbf{E}).$$

Ya que tenemos una primera página y una última página para nuestra sucesión espectral queremos construir las páginas intermedias.

Podemos hacer uso de la maquinaria de parejas derivadas en el sentido de Massey para obtener el siguiente Teorema:

**TEOREMA 1.36.** [DL98, Theorem 4.7] *Sea  $(X, A)$  una pareja de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios contravariantes con una filtración*

$$A = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X$$

*tal que  $X = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} X_n$ . Sea  $\mathbf{E}$  un  $Or(G, \mathcal{F})$ -espectro covariante. Entonces existe una sucesión espectral  $(E_{p,q}^r, d_{p,q}^r)$  cuyo término  $E^1$  está dado por:*

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}^{Or(G, \mathcal{F})}(X_p, X_{p-1}; \mathbf{E})$$

*y la primera diferencial es la composición de las funciones*

$$H_{p+q}^{Or(G, \mathcal{F})}(X_p, X_{p-1}; \mathbf{E}) \rightarrow H_{p+q-1}^{Or(G, \mathcal{F})}(X_{p-1}; \mathbf{E})$$

y

$$H_{p+q-1}^{Or(G, \mathcal{F})}(X_{p-1}; \mathbf{E}) \rightarrow H_{p+q-1}^{Or(G, \mathcal{F})}(X_{p-1}, X_{p-2}; \mathbf{E})$$

*donde la primer función es el operador frontera y el segundo es el inducido por la inclusión de parejas. Esta sucesión espectral converge a  $H_{p+q}^{Or(G, \mathcal{F})}(X, A; \mathbf{E})$ .*

Ahora podemos deducir el siguiente Teorema que es una modificación inmediata del Teorema 2.5 (a) en [DL03].

**TEOREMA 1.37.** *Sea  $(X, A)$  una pareja de  $Or(G, \mathcal{F})$ -espacios contravariantes y  $\mathbf{E}$  un  $Or(G, \mathcal{F})$ -espectro covariante. Sea  $H_p^{Or(G, \mathcal{F})}(X, A; \mathbf{E})$  su teoría de homología asociada que satisface el axioma de equivalencia débil.*

*Entonces existe una sucesión espectral  $(E_{p,q}^r, d_{p,q}^r)$  cuyo término  $E^1$  está dado por*

$$E_{p,q}^1 = H_q^{Or(G, \mathcal{F})}((X(??) \setminus A(??)) \otimes_{Or(G, \mathcal{F})} n.d.\tilde{N}(? \downarrow Or(G, \mathcal{F}) \downarrow ??); \mathbf{E}).$$

*Esta sucesión espectral converge a  $H_{p+q}^{Or(G, \mathcal{F})}(X, A; \mathbf{E})$ .*

Lo que sigue es dar expresiones más sencillas, o más manejables, del término  $E^1$  de la sucesión espectral de  $p$ -cadenas. De ahora en adelante supondremos que  $\mathcal{F}$  es una subfamilia de la familia de subgrupos finitos. Dada una órbita  $G/H$  en  $Or(G, \mathcal{F})$ , denotaremos su clase de isomorfismo por  $\overline{G/H}$ . En este caso tendremos un orden parcial en el conjunto  $Is(Or(G, \mathcal{F}))$  de clases de isomorfismo de  $Or(G, \mathcal{F})$  dado por

$$\overline{G/H} \leq \overline{G/K} \iff H \text{ es subconjugado de } K$$

o dicho de otra forma, existe un morfismo de  $G/H$  en  $G/K$ . Escribimos  $\overline{G/H} < \overline{G/K}$  si  $\overline{G/H} \leq \overline{G/K}$  pero  $\overline{G/H} \neq \overline{G/K}$ .

**OBSERVACIÓN 1.38.** La propiedad que es útil de la subfamilias de la familia de subgrupos finitos es que la categoría de órbitas  $Or(G, \mathcal{F})$  es una EI-categoría, es decir, todo endomorfismo es un isomorfismo (ver [DL03, Remark 2.13]).

**DEFINICIÓN 1.39.** Sea  $G$  un grupo y  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos de  $G$ . Una sucesión de clases de isomorfismo de objetos  $c := \{\overline{G/H_0}, \overline{G/H_1}, \dots, \overline{G/H_p}\}$  en  $Or(G, \mathcal{F})$  se dice que es una  $p$ -cadena si

$$\overline{G/H_0} < \overline{G/H_1} < \dots < \overline{G/H_p}.$$

Asociado a una  $p$ -cadena  $c = \{\overline{G/H_0}, \overline{G/H_1}, \dots, \overline{G/H_p}\}$  definimos los siguientes  $Aut(G/H_p)$ - $Aut(G/H_0)$ -espacios (discretos)  $S(c)$  como

$$S(c) = \begin{cases} Aut(G/H_0) & \text{si } p = 0 \\ mor_G(G/H_0, G/H_1) & \text{si } p = 1 \\ mor_G(G/H_{p-1}, G/H_p) \times_{Aut(G/H_{p-1})} \cdots \times_{Aut(G/H_1)} mor_G(G/H_0, G/H_1) & \text{si } p \geq 2 \end{cases}$$

El siguiente resultado es la versión para parejas de un caso particular de [DL98, Lemma 2.11 y Remark 2.13]

**TEOREMA 1.40.** *Sea  $G$  un grupo y sea  $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$  en cualquier subfamilia de la familia de subgrupos finitos de  $G$ . Consideremos  $(X, A)$  una pareja de  $Or(G, \mathcal{J})$ -espacios. Entonces el término  $E^1$  de la sucesión espectral de  $p$ -cadenas, que converge a  $H_{p+q}^{Or(G, \mathcal{J})}(X, A; \mathbf{E})$ , se puede expresar como sigue*

$$E_{p,q}^1 = \bigoplus_{\substack{p\text{-cadenas } c \\ \text{en } Or(G, \mathcal{J})}} H_q^{Aut(G/H_0)}((X(G/H_p) \setminus A(G/H_p)) \times_{Aut(G/H_p)} S(c); \mathbf{E}(G/H_0))$$

donde  $(X(G/H_p) \setminus A(G/H_p)) \times_{Aut(G/H_p)} S(c)$  significa  $X(G/H_0) \setminus A(G/H_0)$  para  $p = 0$ .

**OBSERVACIÓN 1.41.** Esta sucesión espectral es muy manejable cuando uno puede controlar la longitud de las  $p$ -cadenas. En nuestro caso, cuando  $G$  actúa en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  con isotropía finita, veremos que podemos trabajar en una familia de subgrupos en la cual la longitud de las  $p$ -cadenas es a lo más 2 en la categoría restringida de órbitas. Esto hará que nuestra sucesión espectral colapse rápidamente y así nuestro cálculo se seguirá.

## 7. La sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch

En esta sección vamos a enunciar, lo que nosotros llamaremos, **la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch**. Lo haremos de manera *ad-hoc*, de manera que la podamos utilizar en los cálculos del siguiente capítulo. Esta sucesión ha sido utilizada frecuentemente en el cálculo de grupos de teoría  $K$  en conjunto con la conjetura de Farrell-Jones, por ejemplo en [JPLMVP11], [FO14], [JPML10], [LO09a], [BFJPP00].

Nuestro objetivo será calcular el grupo de  $G$ -homología  $H_*^G(\underline{EG}; \mathbb{K})$ . Para esto usaremos la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch. Sea  $C_n$  el conjunto de  $n$ -células del espacio  $\underline{BG} = \underline{EG}/G$ , entonces la primera página de nuestra sucesión espectral viene dada por

$$\begin{array}{c|cccccc}
 q & 0 & \longleftarrow \bigoplus_{\sigma^0 \in C_0} K_q(\mathbb{Z}[G_{\sigma^0}]) & \longleftarrow \bigoplus_{\sigma^1 \in C_1} K_q(\mathbb{Z}[G_{\sigma^1}]) & \longleftarrow \cdots & \longleftarrow \bigoplus_{\sigma^p \in C_p} K_q(\mathbb{Z}[G_{\sigma^p}]) & \longleftarrow \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\
 1 & 0 & \longleftarrow \bigoplus_{\sigma^0 \in C_0} K_1(\mathbb{Z}[G_{\sigma^0}]) & \longleftarrow \bigoplus_{\sigma^1 \in C_1} K_1(\mathbb{Z}[G_{\sigma^1}]) & \longleftarrow \cdots & \longleftarrow \bigoplus_{\sigma^p \in C_p} K_1(\mathbb{Z}[G_{\sigma^p}]) & \longleftarrow \cdots \\
 0 & 0 & \longleftarrow \bigoplus_{\sigma^0 \in C_0} K_0(\mathbb{Z}[G_{\sigma^0}]) & \longleftarrow \bigoplus_{\sigma^1 \in C_1} K_0(\mathbb{Z}[G_{\sigma^1}]) & \longleftarrow \cdots & \longleftarrow \bigoplus_{\sigma^p \in C_p} K_0(\mathbb{Z}[G_{\sigma^p}]) & \longleftarrow \cdots \\
 -1 & 0 & \longleftarrow \bigoplus_{\sigma^0 \in C_0} K_{-1}(\mathbb{Z}[G_{\sigma^0}]) & \longleftarrow \bigoplus_{\sigma^1 \in C_1} K_{-1}(\mathbb{Z}[G_{\sigma^1}]) & \longleftarrow \cdots & \longleftarrow \bigoplus_{\sigma^p \in C_p} K_{-1}(\mathbb{Z}[G_{\sigma^p}]) & \longleftarrow \cdots \\
 -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
 \hline
 & -1 & 0 & 1 & \cdots & p & 
 \end{array}$$

donde  $G_\sigma$  denota el estabilizador de la pre-imagen  $\sigma' \in \underline{EG}$  de  $\sigma \in \underline{BG}$ , y los homomorfismos en el complejo de cadenas son inducidos por las inclusiones naturales (hasta conjugación). Podemos identificar la segunda página de la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch como sigue

$$E_{p,q}^2 = H_p^G(\underline{BG}; \{K_q(\mathbb{Z}[G_\sigma])\}),$$

donde la homología de arriba es una teoría de homología con coeficientes locales dados por los grupos de teoría  $K$  algebraica  $\mathbb{Z}[G_\sigma]$  para todos los subgrupos de isotropía finitos  $G_\sigma$  (ver [JPLMVP11]).

**TEOREMA 1.42.** *Sea  $G$  un grupo. Entonces la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch cuya primer página viene dada por el diagrama de arriba converge a  $H_*^G(\underline{EG}; \mathbb{K})$ . En particular, tensorizando con  $\mathbb{Q}$ , tenemos una sucesión espectral que converge a  $H_*^G(\underline{EG}; \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  cuya primer*

*página viene dada por*

$$(7.1) \quad E_{p,q}^1 = \bigoplus_{\sigma^p \in C_p} K_q(\mathbb{Z}[G_{\sigma^p}]) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

.

Notemos que  $G_{\sigma}$  siempre es un grupo finito, así que podemos aplicar el Teorema 2.3 a todos los grupos que aparecen en nuestra sucesión espectral. El término 7.1 es altamente calculable usando el Teorema 2.3. En efecto, como es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}$  de dimensión finita con dimensión igual a la suma de los rangos de los sumandos en 7.1. Estas son las dos herramientas esenciales en nuestros cálculos. Aún así, la sucesión espectral *racional* de Atiyah-Hirzebruch podría complicarse dado que no hay una expresión explícita para las diferenciales. Por eso solamente seremos capaces de dar algunos ejemplos concretos donde estas complicaciones no tienen lugar.



## Capítulo 2

### Teoría K algebraica racional de algunos grupos de dimensión baja

En este capítulo usaremos la conjetura de Farrell-Jones en su versión de teoría K junto con la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch para dar información de la teoría K módulo torsión de un anillo de grupo  $\mathbb{Z}[G]$  que tenga un modelo finito para  $\underline{EG}$  (ver Teorema 2.4). Luego daremos algunos cálculos explícitos para grupos  $G$  con modelos para  $\underline{EG}$  muy concretos. El contenido de este capítulo está basado en el artículo [JPSS14].

El objetivo es, dado un grupo  $G$ , calcular la dimensión del  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial  $K_n(\mathbb{Z}[G]) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Dado un grupo abeliano  $A$ , definimos

$$\text{rank}(A) := \dim_{\mathbb{Q}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$$

Por ejemplo, si  $K_n(\mathbb{Z}[G])$  resulta finitamente generado para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces estaríamos calculando los grupos de teoría K algebraica módulo torsión. Cabe mencionar que calcular la parte de torsión de  $K_n(\mathbb{Z}[G])$  es un problema en extremo difícil. Por ejemplo  $K_n(\mathbb{Z})$  no se conoce en su totalidad para  $n$  grande. Para calcular  $\text{rank}(K_n(\mathbb{Z}[G]))$  haremos uso de la conjetura de Farrell-Jones y de la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch en su versión racional.

Si suponemos que la conjetura de Farrell-Jones es cierta para  $G$  entonces se tiene que

$$\text{rank}(K_n(\mathbb{Z}[G])) = \dim_{\mathbb{Q}}(H_n^G(\underline{EG}; \mathbb{K}) \otimes \mathbb{Q}).$$

Dado que los espacios clasificantes para la familia de subgrupos virtualmente cíclicos suelen ser bastante complicados siempre es conveniente pasar a la familia de subgrupos finitos donde las cosas funcionan mejor, o al menos, han sido más estudiadas. De ahí la importancia del siguiente lema. En lugar de  $\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}$  escribiremos simplemente  $\mathbb{K}$ .

LEMA 2.1. [**Gru08**, Theorem 5.11] *Sea  $G$  un grupo. Entonces para todo  $n \in \mathbb{Z}$  la función de ensamble relativa racionalizada*

$$H_n^G(\underline{EG}; \mathbb{K}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_n^G(\underline{\underline{EG}}; \mathbb{K}) \otimes \mathbb{Q}$$

*es un isomorfismo para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . En particular, si  $G$  satisface la conjetura de Farrell-Jones, entonces*

$$K_n(\mathbb{Z}[G]) \otimes \mathbb{Q} \cong H_n^G(\underline{EG}; \mathbb{K}) \otimes \mathbb{Q}$$

*y por lo tanto*

$$\text{rank}(K_n(\mathbb{Z}[G])) = \text{rank}(H_n^G(\underline{EG}; \mathbb{K})).$$

Haciendo uso de este lema ahora tenemos que concentrarnos en calcular el rango del lado derecho de la última igualdad. Eso lo haremos con la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch (racional).

EJEMPLO 2.2. Sea  $G$  es un grupo hiperbólico en el sentido de Gromov. En [**JPL06**] Juan-Pineda y Leary demostraron lo siguiente:

$$(0.1) \quad H_n^G(\underline{\underline{EG}}; \mathbb{K}) \cong H_n^G(\underline{EG}; \mathbb{K}) \oplus \bigoplus_{(V)} \text{cok}_n(V),$$

donde  $(V)$  corre sobre las clases de conjugación de subgrupos virtualmente cíclicos maximales de  $G$  y  $\text{cok}_n(V)$  es el conúcleo del homomorfismo  $H_n^V(\underline{EV} \rightarrow pt; \mathbb{K})$ , el cual se puede identificar con ciertos grupos Nil de Bass-Farrell y de Waldhausen (ver [**LO09b**, Remark 2]). En [**Gru08**, Thm. 5.9 and page 4.] se demuestra que estos términos son grupos de torsión, de manera que después de hacer producto tensorial con  $\mathbb{Q}$  se vuelven cero.

## 1. Rangos de grupos de teoría K algebraica

En vista del Lema 2.1, el rango de los grupos de teoría  $K$  algebraica de  $\mathbb{Z}[G]$  son determinados por los rangos de la teoría  $K$  algebraica de los subgrupos finitos de  $G$  y de la estructura celular de



un modelo del espacio clasificante  $\underline{EG}$ .

Para un grupo finito  $F$ :

- $r(F)$  denota el número de representaciones reales irreducibles distintas de  $F$ ,
- $c(F)$  denota el número de representaciones reales de tipo complejo distintas de  $F$ ,
- $q(F)$  denota el número de representaciones racionales distintas de  $F$ ,
- $k_p(F)$  denota el número de representaciones irreducibles distintas de  $F$  sobre el campo  $\mathbb{Q}_p$  de los números  $p$ -ádicos y
- $r_p(F)$  denota el número de representaciones irreducibles distintas de  $F$  sobre el campo  $\mathbb{F}_p$  con  $p$  elementos.

Los rangos de los grupos de teoría  $K$  algebraica de grupos finitos vienen dados de manera explícita por el siguiente Teorema.

TEOREMA 2.3. ([Jah09], [Bas65], [Car80a], [Car80b]) *Sea  $F$  un grupo finito, entonces*

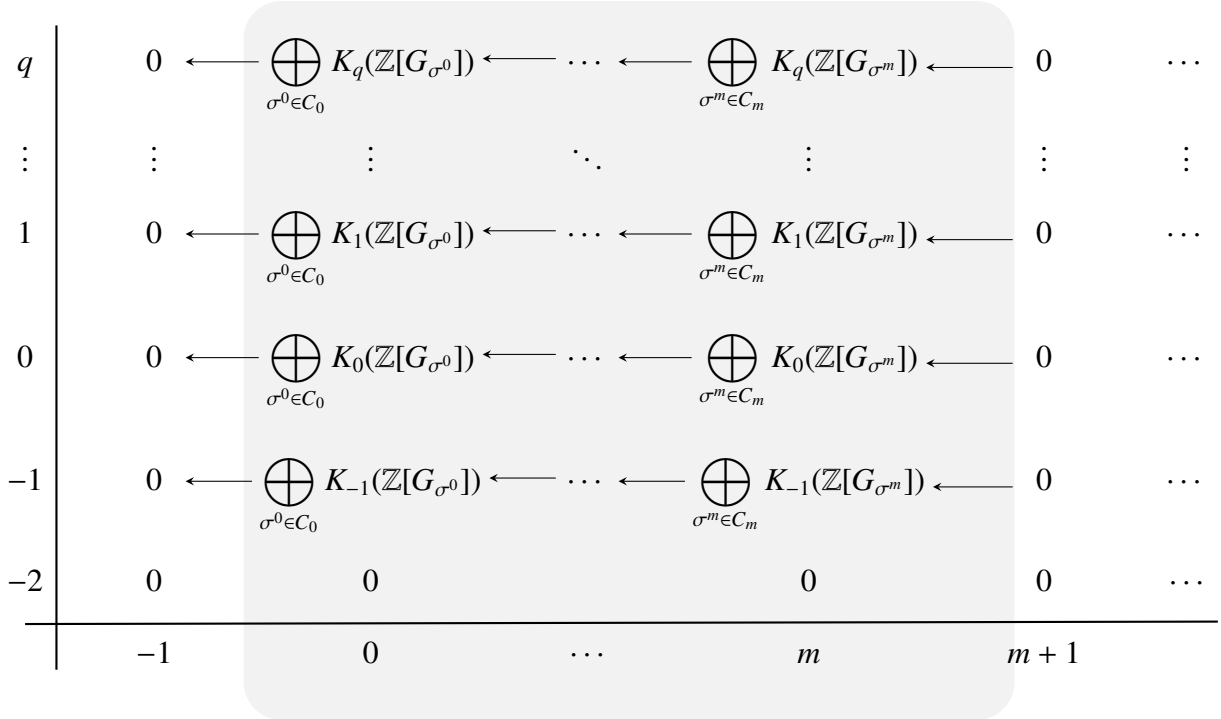
$$rk(K_q(\mathbb{Z}[M])) = \begin{cases} r(M) & \text{si } q > 1 \text{ y } q \equiv 1 \pmod{4} \\ c(M) & \text{si } q > 1 \text{ y } q \equiv 3 \pmod{4} \\ r(M) - q(M) & \text{si } q = 1 \\ 1 & \text{si } q = 0 \\ 1 - q(M) + \sum_{p|M} (k_p(M) - r_p(M)) & \text{si } q = -1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que

- $r(F)$  es igual al número de clases de conjugación reales de  $F$ , es decir, clases de la forma  $C(h) = \{ghg^{-1}, gh^{-1}g^{-1} | g \in H\}$ ;
- $c(F)$  es igual al número de clases de conjugación reales tales que  $C(h) \neq \{hgh^{-1} | h \in H\}$ ;
- y  $q(F)$  es igual al número de clases de conjugación de subgrupos cíclicos de  $F$  (ver [Ser03]).

TEOREMA 2.4. *Sea  $G$  un grupo que satisface la conjetura de Farrell-Jones y tal que existe un modelo finito para  $\underline{EG}$ . Entonces  $rank(K_n(\mathbb{Z}[G]))$  es finito para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un modelo finito  $X$  para el espacio clasificante  $\underline{EG}$ . Entonces los únicos términos que posiblemente no sean cero en la  $n$ -ésima página de nuestra sucesión espectral  $E_{p,q}^n$  son aquellos términos con  $0 \leq p \leq m$ ,  $m = \dim \underline{BG}$ , o sea, aquéllos que están contenidos en una franja vertical para todo  $n \in \{1, 2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ . Por ejemplo para la página  $E_{p,q}^1$  tenemos que los términos que posiblemente no son cero están en el área sombreada de la siguiente figura:



Ahora, como  $E_{p,q}^\infty$  tiene rango finito porque es el cociente de un subgrupo del grupo abeliano  $E_{p,q}^1$  y

$$\text{rank}(K_n(\mathbb{Z}[G])) = \sum_{p+q=n} \text{rank}(E_{p,q}^\infty)$$

la demostración se sigue del Teorema 2.3 y de la compacidad de  $\underline{BG}$ .  $\square$

Entre algunos de los grupos que satisfacen las hipótesis del teorema anterior tenemos los siguientes:

- Grupos hiperbólicos en el sentido de Gromov. La conjetura de Farrell-Jones está demostrada en [BLR08a] y un modelo finito para  $\underline{EG}$  viene dado por el complejo de Rips descrito en [MS02].

- Amalgamas de grupos finitos. Al ser virtualmente libres en particular son hiperbólicos y la conjetura es cierta para estos últimos, finalmente de la teoría de Bass-Serre obtenemos un modelo finito de dimensión 1 para  $\underline{EG}$ .
- El grupo fundamental de una variedad cerrada con curvatura seccional negativa. La conjetura de Farrell-Jones está demostrada en [BR07] y un modelo para  $\underline{EG}$  está dado por la variedad misma.
- Grupos  $S$ -aritméticos. La conjetura de Farrell-Jones está demostrada en [Rüp] y un modelo finito para  $\underline{EG}$  está dado por la compactificación de Borel-Serre del *espacio simétrico* asociado (ver [Ji09, Proposition 5.7]).
- Grupos cristalográficos. Como los grupos cristalográficos son *retículas* cocompactas en un grupo de Lie virtualmente conexo entonces la conjetura de Farrell-Jones es un caso particular del teorema principal en [BFL14]. Un modelo finito para  $\underline{EG}$  está dado por  $\mathbb{R}^n$ .
- Cualquier grupo Baumslag-Solitar. La conjetura de Farrell-Jones es demostrada en [FW15], no es difícil construir modelos finitos para  $\underline{EG}$ .
- El grupo fundamental de una gráfica de grupos, con grupos libres abelianos finitamente generados en los vértices. La conjetura de Farrell-Jones está demostrada en [GMR] y el modelo finito para  $\underline{EG}$  se puede construir mediante un procedimiento estándar (ver [Hat02, Demostración de Theorem 1B.11]).

Otros grupos notables con modelos finitos para  $\underline{EG}$  pero para los que la conjetura de Farrell-Jones aún es un problema abierto son:

- Los Mapping Class Groups. El modelo finito para  $\underline{EG}$  está dado por la compactificación del espacio de Teichmüller usando el complejo de curvas (ver [Ji09, Theorem 8.1]).
- $Out(F_n)$  (ver [Lüc05, Section 4.9]).

## 2. Ejemplos de cálculos explícitos

En esta sección daremos algunos cálculos explícitos para  $rank(K_n(\mathbb{Z}[G]))$ .

**2.1. Grupos libres finitamente generados.** Sea  $F_n$  el grupo libre en  $n$  generadores. Como  $F_n$  es libre de torsión  $\underline{EG} = EG$ , por otra parte sabemos que la gráfica de Cayley de  $G$  (respecto a

un conjunto libre de generadores) es un modelo para  $EG$ , y  $BG$  con este modelo es una cuña de  $n$  círculos. Así pues tenemos una 0-célula y  $n$  1-células. Más aún,  $G_\sigma = 1$  para todas las células, por lo tanto

$$E_{pq}^2 = H_p(\vee_n S^1; \{K_q\}) = H_p(\vee_n S^1; K_q(\mathbb{Z})).$$

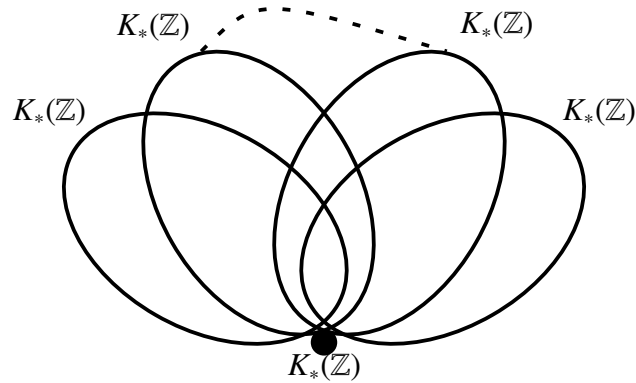
Después de sustituir nuestros datos en la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch obtenemos la siguiente primera página:

$$\begin{array}{c|cccc}
 q & 0 & \longleftarrow K_q(\mathbb{Z}) & \longleftarrow K_q(\mathbb{Z}) \oplus K_q(\mathbb{Z}) & \longleftarrow 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 2 & 0 & \longleftarrow K_2(\mathbb{Z}) & \longleftarrow K_2(\mathbb{Z}) \oplus K_2(\mathbb{Z}) & \longleftarrow 0 \\
 1 & 0 & \longleftarrow K_1(\mathbb{Z}) & \longleftarrow K_1(\mathbb{Z}) \oplus K_1(\mathbb{Z}) & \longleftarrow 0 \\
 0 & 0 & \longleftarrow K_0(\mathbb{Z}) & \longleftarrow K_0(\mathbb{Z}) \oplus K_0(\mathbb{Z}) & \longleftarrow 0 \\
 \hline
 & -1 & 0 & 1 & 2
 \end{array}$$

Dado que todas las diferenciales son cero porque en el renglón  $q$ -ésimo tenemos el complejo de cadenas celular con coeficientes en  $K_q(\mathbb{Z})$  de  $\underline{EG}$ , obtenemos lo siguiente:

$$H_p(\underline{BG}; K_q(\mathbb{Z})) = \begin{cases} K_q(\mathbb{Z}) & \text{si } p = 0, \\ \oplus_n(K_q(\mathbb{Z})) & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{si } p > 1 \text{ o } q \leq -1. \end{cases}$$

La gráfica asociada al grupo libre en  $n$  generadores, las etiquetas son los coeficientes de las células correspondientes, todas las células tienen isotropía trivial.



Notemos que todas las diferenciales se hacen cero, entonces la sucesión espectral colapsa en la primer página dando como resultado

$$\text{rank}(K_n(\mathbb{Z}[F_n])) = \text{rank}(K_n(\mathbb{Z})) + n \cdot \text{rank}(K_{n-1}(\mathbb{Z})).$$

Aplicando el Teorema 2.3 al grupo trivial recuperamos el siguiente resultado, que originalmente es debido a Borel:

$$\text{rank}(K_n(\mathbb{Z})) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \text{ y } n > 1, \text{ o } n = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

se sigue que

$$\text{rank}(K_n(\mathbb{Z}[F_n])) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \text{ y } n > 1, \text{ o } n = 0, \\ n & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ y } n > 2, \text{ o } n = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En este caso la primer página (y en realidad todas) de la sucesión espectral racional de Atiyah-Hirzebruch queda como sigue:

$$\begin{array}{cccc}
 4k+1 & 0 & \longleftarrow \mathbb{Q} & \longleftarrow \mathbb{Q}^n & \longleftarrow 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 5 & 0 & \longleftarrow \mathbb{Q} & \longleftarrow \mathbb{Q}^n & \longleftarrow 0 \\
 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \longleftarrow \mathbb{Q} & \longleftarrow \mathbb{Q}^n & \longleftarrow 0 \\
 \hline
 & -1 & 0 & 1 & 2
 \end{array}$$

**2.2. Productos libres de grupos finitos.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  grupos finitos, y sea  $G = G_1 * G_2$  su producto libre. Podemos encontrar un modelo de dimensión uno para  $\underline{EG}$  tal que  $\underline{BG}$  es un intervalo cerrado con isotropía trivial en la única 1-célula e isotropía  $G_1$  y  $G_2$  en las 0-células de los extremos (ver [Ser03]):

$$K_*(\mathbb{Z}[G_1]) \bullet \text{---} K_*(\mathbb{Z}) \text{---} \bullet K_*(\mathbb{Z}[G_2])$$

La primera página de nuestra sucesión espectral queda como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc}
 q & & 0 & \longleftarrow & K_q(\mathbb{Z}[G_1]) \oplus K_q(\mathbb{Z}[G_2]) & \longleftarrow & K_q(\mathbb{Z}) \longleftarrow 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 1 & & 0 & \longleftarrow & K_1(\mathbb{Z}[G_1]) \oplus K_1(\mathbb{Z}[G_2]) & \longleftarrow & K_1(\mathbb{Z}) \longleftarrow 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & & 0 & \longleftarrow & K_0(\mathbb{Z}[G_1]) \oplus K_0(\mathbb{Z}[G_2]) & \longleftarrow & K_0(\mathbb{Z}) \longleftarrow 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 -1 & & 0 & \longleftarrow & K_{-1}(\mathbb{Z}[G_1]) \oplus K_{-1}(\mathbb{Z}[G_2]) & \longleftarrow & K_{-1}(\mathbb{Z}) \longleftarrow 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Las diferenciales en esta página son todas inyectivas, por lo tanto, nuestra sucesión espectral colapsa en la segunda página obteniendo

$$rank(K_n(\mathbb{Z}[G])) = rank(K_n(\mathbb{Z}[G_1])) + rank(K_n(\mathbb{Z}[G_2])) - rank(K_{n-1}(\mathbb{Z}))$$

y

$$rank(K_n(\mathbb{Z}[G])) = \begin{cases} \sum_i \left( 1 - q(G_i) + \sum_{p|M_i} (k_p(G_i) - r_p(G_i)) \right) & n = -1 \\ 1 & n = 0, \\ r_1 + r_2 - q_1 - q_2 & i = 1, \\ r_1 + r_2 - 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4}, n > 1, \\ c_1 + c_2 & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}, n > 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde  $r_i$  es el número de representaciones irreducibles reales de  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $c_i$  es el número de representaciones reales irreducibles del tipo complejo de  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ ; y  $q_i$  es el número de representaciones racionales irreducibles de  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ .

La primera página de la sucesión racionalizada queda como sigue:

$$\begin{array}{cccc}
4k+3 & 0 & \longleftarrow \mathbb{Q}^{c(G_1)} \oplus \mathbb{Q}^{c(G_2)} & \longleftarrow 0 & \longleftarrow 0 \\
4k+2 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
4k+1 & 0 & \longleftarrow \mathbb{Q}^{r(G_1)} \oplus \mathbb{Q}^{r(G_2)} & \longleftarrow \mathbb{Q} & \longleftarrow 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
5 & 0 & \longleftarrow \mathbb{Q}^{r(G_1)} \oplus \mathbb{Q}^{r(G_2)} & \longleftarrow \mathbb{Q} & \longleftarrow 0 \\
4 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
3 & 0 & \longleftarrow \mathbb{Q}^{c(G_1)} \oplus \mathbb{Q}^{c(G_2)} & \longleftarrow 0 & \longleftarrow 0 \\
2 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
1 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
0 & 0 & \longleftarrow \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & \longleftarrow \mathbb{Q} & \longleftarrow 0 \\
-1 & 0 & \longleftarrow \mathbb{Q}^* & \longleftarrow 0 & \longleftarrow 0 \\
\hline
& & -1 & & 0 & & 1 & & 2
\end{array}$$

donde  $*$  =  $\sum_i \left( 1 - q(G_i) + \sum_{p \parallel M} (k_p(G_i) - r_p(G_i)) \right)$  y todas las flechas son inyectivas.

**2.3. El grupo modular  $PSL_2(\mathbb{Z})$ .** Este es un caso particular del ejemplo anterior dado que  $PSL_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$ . Usando la notación del ejemplo anterior, escribimos  $G_1 = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]$  y  $G_2 =$



$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/3]$ , entonces  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 2$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ,  $q_1 = 2$ ,  $q_2 = 2$  y

$$\text{rank}(K_n(\mathbb{Z}[PSL_2(\mathbb{Z})])) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = -1, \\ 1 & n = 0, \\ 0 & n = 1, \\ 3 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4}, n > 1, \\ 1 & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}, n > 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

#### 2.4. El grupo fundamental de una superficie orientable cerrada de género al menos 2.

Sea  $S_g$  la superficie cerrada, orientable de género  $g > 1$ . Como el cubriente universal de  $S_g$  es contractible tenemos que  $S_g$  es un modelo para  $B\pi_1(S_g)$ . Más aún,  $S_g$  es un modelo para  $\underline{B}\pi_1(S_g)$ . También se puede concluir que estos grupos son hiperbólicos porque  $S_g$  admite una métrica hiperbólica de curvatura constante  $-1$ . Usando la construcción de  $S_g$  como el cociente de un  $4g$ -ágono podemos darle a  $S_g$  una estructura CW que consiste de una 0-célula,  $2g$  1-células, y una 2-célula y todas ellas tienen isotropía trivial. Así que la primera página de nuestra sucesión espectral tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 0 & \longleftarrow & K_2(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & \bigoplus_{2g} K_2(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & K_2(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & \longleftarrow & K_1(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & \bigoplus_{2g} K_1(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & K_1(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & 0 \\
0 & 0 & \longleftarrow & K_0(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & \bigoplus_{2g} K_0(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & K_0(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & 0 \\
-1 & 0 & \longleftarrow & K_{-1}(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & \bigoplus_{2g} K_{-1}(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & K_{-1}(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & 0 \\
-2 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\hline
& & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 & & 3
\end{array}$$

Sabemos que

$$H_p(S_g; K_q(\mathbb{Z})) = \begin{cases} K_q(\mathbb{Z}) & \text{si } p = 0, \\ \bigoplus_{2g} K_q(\mathbb{Z}) & \text{si } p = 1, \\ K_q(\mathbb{Z}) & \text{si } p = 2, \\ 0 & \text{si } p > 1 \text{ o } q < 0. \end{cases}$$

Entonces podemos concluir que

$$K_q(\mathbb{Z}[\pi_1(S_g)]) = K_q(\mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{2g} K_{q-1}(\mathbb{Z}) \oplus K_{q-2}(\mathbb{Z})$$

Una vez más las diferenciales son triviales y nuestra sucesión espectral colapsa. Y obtenemos

$$\text{rank}(K_n(\mathbb{Z}[\pi_1(S_g)])) = \begin{cases} 1 & n = 0, 2 \text{ o } n \equiv 1, 3 \pmod{4} \text{ } n > 1, \\ 2g & \text{si } n = 1 \text{ o } n \equiv 2 \pmod{4}, \text{ } n > 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La sucesión espectral racionalizada se muestra a continuación:

$$\begin{array}{cccccc}
 4k + 1 & 0 & \longleftarrow & \mathbb{Q} & \longleftarrow & \bigoplus_{2g} \mathbb{Q} & \longleftarrow & \mathbb{Q} & \longleftarrow & 0 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 5 & 0 & \longleftarrow & \mathbb{Q} & \longleftarrow & \bigoplus_{2g} \mathbb{Q} & \longleftarrow & \mathbb{Q} & \longleftarrow & 0 \\
 4 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 3 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 2 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 1 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 0 & 0 & \longleftarrow & \mathbb{Q} & \longleftarrow & \bigoplus_{2g} \mathbb{Q} & \longleftarrow & \mathbb{Q} & \longleftarrow & 0 \\
 \hline
 & & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & 
 \end{array}$$

**2.5. Grupos virtualmente libres finitamente generados.** Sea  $G$  un grupo virtualmente libre finitamente generado, esto es,  $G$  tiene un subgrupo libre finitamente generado de índice finito. Como los grupos libres finitamente generados son hiperbólicos y un grupo con un subgrupo hiperbólico de índice finito es hiperbólico, se sigue que  $G$  es hiperbólico también. De la teoría de Bass-Serre [Ser03] y de [JPLMVP11], podemos encontrar un árbol  $T$  en el que  $G$  actúa con estabilizadores finitos, esto es  $T$  es un modelo para  $\underline{EG}$ . Sean  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{V}$  el conjunto de aristas y vértices de la gráfica de grupos de  $G$  determinada por  $T$ , esta parte es desarrollada en [JPLMVP11, section 2.2]. Para calcular la segunda página de la sucesión espectral observemos que  $T$  tiene solamente

células de dimensión 0 y 1 así que nuestra segunda página es

$$E_{p,q}^2 = \begin{cases} \operatorname{coker} \left( \bigoplus_{e \in \mathbf{E}} K_q(\mathbb{Z}[G_e]) \rightarrow \bigoplus_{v \in \mathbf{V}} K_q(\mathbb{Z}[G_v]) \right), & \text{si } p = 0, \\ \operatorname{ker} \left( \bigoplus_{e \in \mathbf{E}} K_q(\mathbb{Z}[G_e]) \rightarrow \bigoplus_{v \in \mathbf{V}} K_q(\mathbb{Z}[G_v]) \right), & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se sigue que las diferenciales se hacen cero y nuestra sucesión espectral colapsa en esta página, luego

$$H_n^G(\underline{EG}; \{\mathcal{K}_q\}) = \operatorname{coker} \left( \bigoplus_{e \in \mathbf{E}} K_n(\mathbb{Z}[G_e]) \rightarrow \bigoplus_{v \in \mathbf{V}} K_n(\mathbb{Z}[G_v]) \right) \oplus \operatorname{ker} \left( \bigoplus_{e \in \mathbf{E}} K_{n-1}(\mathbb{Z}[G_e]) \rightarrow \bigoplus_{v \in \mathbf{V}} K_{n-1}(\mathbb{Z}[G_v]) \right).$$

Para simplificar la notación, definamos

$$\begin{aligned} E_n &= \bigoplus_{e \in \mathbf{E}} K_n(\mathbb{Z}[G_e]), \\ V_n &= \bigoplus_{v \in \mathbf{V}} K_n(\mathbb{Z}[G_v]), \\ \operatorname{Ker}_n &= \operatorname{ker}(E_n \rightarrow V_n) \text{ and} \\ \operatorname{Cok}_n &= \operatorname{coker}(E_n \rightarrow V_n). \end{aligned}$$

De esta manera tenemos

$$H_n^G(\underline{EG}; \{\mathcal{K}_q\}) = \operatorname{Cok}_n \oplus \operatorname{Ker}_{n-1}.$$

Estos últimos grupos dependen de la estructura de gráfica de nuestro árbol con los estabilizadores de la acción, los cuales son todos finitos.

**2.6.**  $G = F_n \rtimes S_n$ . Este ejemplo es trabajado en detalle en [JPLMVP11, Section 3] para otros propósitos. Sea  $G = F_n \rtimes S_n$  donde  $S_n$  es el grupo simétrico en  $n$  letras, el cual actúa en el grupo libre en  $n$  letras permutando los generadores. La gráfica de grupos es un solo lazo con isotropía  $S_{n-1}$  en el vértice y  $S_n$  como isotropía en la arista. En este caso los homomorfismos

$$E_i \rightarrow V_i$$

son todos cero. Se sigue que

$$H_i^G(\underline{EG}; \{\mathcal{K}_q\}) = K_i(\mathbb{Z}[S_n]) \oplus K_{i-1}(\mathbb{Z}[S_{n-1}]).$$

A continuación se muestra la primera página de la sucesión espectral en cuestión:

$$\begin{array}{c|cccc}
 q & 0 & \longleftarrow K_q(\mathbb{Z}[S_n]) & \longleftarrow K_q(\mathbb{Z}[S_{n-1}]) & \longleftarrow 0 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 2 & 0 & \longleftarrow K_2(\mathbb{Z}[S_n]) & \longleftarrow K_2(\mathbb{Z}[S_{n-1}]) & \longleftarrow 0 \\
 1 & 0 & \longleftarrow K_1(\mathbb{Z}[S_n]) & \longleftarrow K_1(\mathbb{Z}[S_{n-1}]) & \longleftarrow 0 \\
 0 & 0 & \longleftarrow K_0(\mathbb{Z}[S_n]) & \longleftarrow K_0(\mathbb{Z}[S_{n-1}]) & \longleftarrow 0 \\
 \hline
 & -1 & 0 & 1 & 2
 \end{array}$$

Es bien sabido que la clase de conjugación de un elemento  $x \in S_n$  es determinado por su descomposición cíclica, como  $x$  y  $x^{-1}$  tienen la misma descomposición cíclica tenemos que pertenecen a la misma clase de conjugación. Luego, el número de clases de conjugación reales de  $S_n$  es igual a  $p(n)$ , el número de particiones de  $n$ , y el número de clases de conjugación reales de tipo complejo es cero. Finalmente si dos elementos en  $S_n$  determinan el mismo subgrupo cíclico entonces son conjugados, esto implica que el número de clases de conjugación de subgrupos cíclicos de  $S_n$  es igual a  $p(n)$ .

$$\text{rank}(K_i(\mathbb{Z}[S_n])) = \begin{cases} p(n) & \text{si } i \equiv 1 \pmod{4}, i > 1, \\ 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$\text{rank}(K_i(\mathbb{Z}G)) = \begin{cases} p(n) & \text{si } i \equiv 1 \pmod{4}, i > 1, \\ p(n-1) & \text{si } i \equiv 2 \pmod{4}, i > 1, \\ 1 & \text{si } i = 0, 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

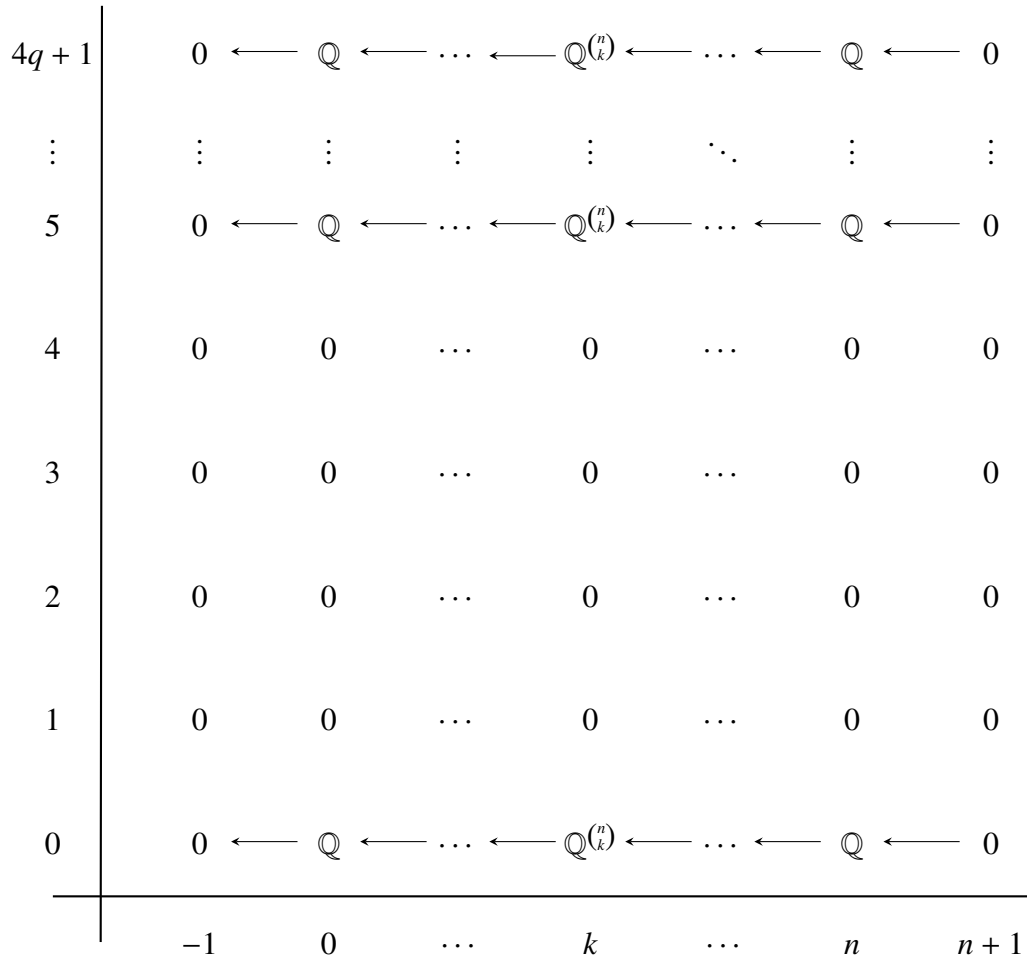
**2.7. Grupos libres abelianos finitamente generados.** En esta sección condiseraremos el caso de grupos abelianos libres finitamente generados, es decir,  $G = \oplus_n \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$ . Como  $\mathbb{Z}^n$  es libre de torsión entonces un modelo para  $\underline{EG}$  es lo mismo que un modelo para  $EG$ . Ahora bien, un modelo para  $EG$  está dado por el  $n$ -toro  $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ . Fijaremos la estructura celular de  $n$ -toro como la obtenida de *cuadrangular*  $\mathbb{R}^n$  y después hacer cociente con la acción de  $\mathbb{Z}^n$  por traslación. Entonces en la primera página de nuestra sucesión espectral obtendremos en el renglón  $q$ -ésimo el complejo de cadenas celular del toro con coeficientes en  $K_q(\mathbb{Z})$ , notemos que todos estos complejos tienen diferencial igual a cero, es decir, que la sucesión espectral colapsa desde la primera página:

$$\begin{array}{c|cccccccc} q & 0 & \longleftarrow & K_q(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & K_q(\mathbb{Z})^{\binom{n}{k}} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & K_q(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 2 & 0 & \longleftarrow & K_2(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & K_2(\mathbb{Z})^{\binom{n}{k}} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & K_2(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & 0 \\ 1 & 0 & \longleftarrow & K_1(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & K_1(\mathbb{Z})^{\binom{n}{k}} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & K_1(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & 0 \\ 0 & 0 & \longleftarrow & K_0(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & K_0(\mathbb{Z})^{\binom{n}{k}} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & K_0(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & 0 \\ \hline & -1 & & 0 & & \cdots & & k & & \cdots & & n & & n+1 \end{array}$$

Como las diferenciales en la sucesión espectral de arriba son cero obtenemos lo siguiente:

$$K_i(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n]) = \bigoplus_{j=0}^n K_{i-j}(\mathbb{Z})^{\binom{n}{j}}.$$

A partir de la expresión anterior es posible encontrar el rango de  $K_q(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n])$  utilizando el siguiente diagrama que representa a todas las páginas de la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch racionalizada:







## Espacios clasificantes, dimensión cohomológica y dimensión geométrica

En este capítulo estudiaremos brevemente la dimensión geométrica de un grupo  $G$  respecto de la familia  $\mathcal{F}bc$  de subgrupos del tipo finito por cíclico. Para esto introduciremos la definición de cohomología de Bredon y un par de resultados que nos serán útiles para nuestros propósitos. El resultado principal de este capítulo es trabajo original del autor aún sin publicar.

### 1. La dimensión geométrica respecto a la familia de subgrupos finitos por cíclico

Sea  $G$  un grupo discreto y sea  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos de  $G$ . Un  $Or(G, \mathcal{F})$ -módulo o un **módulo de Bredon** es un funtor contravariante  $M : Or(G, \mathcal{F}) \rightarrow Ab$ , donde  $Ab$  es la categoría de grupos abelianos. Un morfismo  $\varphi : M \rightarrow N$  entre módulos de Bredon es una transformación natural entre los funtores subyacentes. La categoría de  $Or(G, \mathcal{F})$ -módulos y sus morfismos la denotaremos por  $Mod - Or(G, \mathcal{F})$ . La categoría  $Mod - Or(G, \mathcal{F})$  es una categoría abeliana y contiene suficientes proyectivos e inyectivos, así que podemos hablar de funtores derivados y hacer álgebra homológica.

Consideremos el módulo de bredón  $\underline{\mathbb{Z}}$ , el cual asigna a cualquier órbita el grupo abeliano  $\mathbb{Z}$  y a toda flecha le asigna la función identidad. El  $n$ -ésimo grupo de cohomología de Bredon de  $G$  respecto a la familia  $\mathcal{F}$  con coeficientes en el módulo de Bredon  $M$  es por definición

$$H_{\mathcal{F}}^n(G; M) := Ext_{Or(G, \mathcal{F})}^n(\underline{\mathbb{Z}}, M)$$

Definimos la **dimensión cohomológica de Bredon de  $G$  para la familia  $\mathcal{F}$** , denotada como  $cd_{\mathcal{F}}(G)$ , como sigue

$$cd_{\mathcal{F}}(G) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \exists M \in Mod - Or(G, \mathcal{F}) : H_{\mathcal{F}}^n(G; M) \neq 0\}$$

Por otro lado, la **dimensión geométrica de  $G$  respecto a la familia  $\mathcal{F}$** , denotada por  $gd_{\mathcal{F}}(G)$ , es igual al número  $\inf\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Existe un modelo para } E_{\mathcal{F}}G \text{ de dimensión } n\}$ .

Estas dos nociones de dimensión están relacionadas por el siguiente resultado:

**TEOREMA 3.1.** ([LM00], *Luck-Meintrup Theorem 0.1*) *Sea  $G$  un grupo y  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos. Entonces*

$$cd_{\mathcal{F}}(G) \leq gd_{\mathcal{F}}(G) \leq \max\{3, cd_{\mathcal{F}}(G)\}$$

En particular el enunciado anterior nos dice que la cohomología de Bredon es la teoría de cohomología adecuada para estudiar la dimensión minimal en la que aparecen los espacios clasificantes de  $G$  respecto a  $\mathcal{F}$ .

Notemos que el Teorema anterior nos da algo muy cercano a la igualdad entre la dimensión geométrica y la dimensión cohomológica de Bredon. La igualdad entre estas dos dimensiones es lo que se conoce como la conjetura de Eilenberg-Ganea para cohomología de Bredon:

**CONJETURA 3.2.** *Sea  $G$  un grupo y  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos. Entonces  $cd_{\mathcal{F}}(G) = gd_{\mathcal{F}}(G)$ .*

Para nuestros propósitos necesitamos los siguientes resultados (ver [Flu] Theorem 4.2 y Corollary 4.3)

**TEOREMA 3.3.** *Sea  $G$  un grupo y  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos. Entonces para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  tenemos un isomorfismo*

$$H_{\mathcal{F}}^n(G; \mathbb{Z}) \cong H_n(B_{\mathcal{F}}G).$$

**COROLARIO 3.4.** *Si  $H^m(B_{\mathcal{F}}G) \neq 0$ , entonces  $cd_{\mathcal{F}}(G) \geq m$ .*

Denotamos por  $\mathcal{F}bc$  a la familia de subgrupos del tipo finito por cíclico de  $G$ , la cual consiste de:

- todos los subgrupos finitos de  $G$ ,

- todos los subgrupos de la forma  $F \rtimes \mathbb{Z}$ , donde  $F$  es finito.

Claramente tenemos inclusiones de familias  $\mathcal{F}in \subset \mathcal{F}bc \subset \mathcal{V}cyc$ .

Davis, Ranicki, Quinn, Reich, and Khan demostraron en ([DQR11],[DKR11]) que es posible sustituir la familia  $\mathcal{V}cyc$  en el enunciado de la conjetura de Farrell-Jones por la familia  $\mathcal{F}bc$ . De esta forma se justifica nuestro interés en espacios clasificantes de  $G$  respecto a la familia  $\mathcal{F}bc$ . En [Far10] Farley da una construcción para  $E_{\mathcal{F}bc}G$  con  $G$  un grupo que actúa en un espacio  $CAT(0)$  de manera adecuada, vale la pena notar que los modelos dados por Farley son de dimensión infinita. En esta sección demostraremos que éste es un fenómeno más general. Concretamente demostraremos el siguiente Teorema:

**TEOREMA 3.5.** *Sea  $G$  un grupo discreto. Supongamos que tenemos una inclusión estricta de familias  $\mathcal{F}bc \subsetneq \mathcal{V}cyc$ . Entonces todo modelo para  $E_{\mathcal{F}bc}G$  tiene dimensión infinita, y en consecuencia,  $gd_{\mathcal{F}bc}(G) = \infty$ .*

Antes de demostrar el Teorema 3.5, vamos a considerar el caso en que  $G$  es el grupo dihédrico infinito. Lo denotamos por  $D_\infty$ , podemos pensar que  $D_\infty$  es el grupo más sencillo que no es del tipo finito por cíclico. Este grupo es comúnmente presentado como el producto semidirecto  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2$ , donde  $\mathbb{Z}/2$  actúa en  $\mathbb{Z}$  por multiplicación por  $-1$ . También tiene la presentación dada por el producto libre  $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ . Se puede ver de la primera descripción que todo elemento de  $D_\infty$  tiene orden 2 u orden infinito, y que el conjunto de elementos de orden infinito forman un subgrupo cíclico de índice 2. Así pues, la familia  $\mathcal{F}bc$  consiste de todos los subgrupos propios de  $D_\infty$ .

**LEMA 3.6.** *Sea  $D_\infty$  el grupo dihédrico infinito. Entonces un modelo para  $E_{\mathcal{F}bc}D_\infty$  viene dado por  $S^\infty * \mathbb{R}$ , más aún  $B_{\mathcal{F}bc}D_\infty = \Sigma \mathbb{R}P^\infty$ , donde  $\Sigma X$  es la suspensión de  $X$ . En particular,  $gd_{\mathcal{F}bc}D_\infty = \infty$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Tenemos una acción natural de  $D_\infty$  en  $\mathbb{R}$  por isometrías. Por otro lado tenemos una acción de  $D_\infty$  en  $S^\infty$  vía la suprayección  $D_\infty \rightarrow \mathbb{Z}/2$  (con núcleo  $\mathbb{Z}$ ) y la función antipodal. Así tenemos una acción en la junta  $X = S^\infty * \mathbb{R}$ . Para cualquier subgrupo  $H$  de  $D_\infty$  tenemos  $X^H = (S^\infty)^H * \mathbb{R}^H$ . De las observaciones previas es fácil verificar que  $X$  satisface todas las condiciones para ser un espacio clasificante respecto a la familia  $\mathcal{F}bc$  (ver [DQR11][Example 1.3]).

Afirmamos que  $X/D_\infty$  es la suspensión del espacio proyectivo infinito  $\Sigma\mathbb{R}P^\infty$ . Para ver esto construiremos un dominio fundamental para la acción de  $D_\infty$  en  $X$ . Sea  $\mathbb{R}$  con la estructura de  $D_\infty$ -CW complejo que consiste de dos 0-células dadas por  $\mathbb{Z}$  y  $1/2 + \mathbb{Z}$ , y una 1-célula (Ver Figura 1). Usando el hecho de que  $\mathbb{Z} \leq D_\infty$  actúa trivialmente en  $S^\infty$  podemos ver que todo punto en  $X$  está relacionado con uno en el subespacio  $Y = [0, 1] * S^\infty$  (Ver Figura 2), notemos que la línea (en  $Y$ ) que une a un punto  $x \in S^\infty$  con  $1 \in \mathbb{R}$  está relacionada con la línea que une a  $x$  y 0. Luego, como la acción de  $D_\infty$  en  $\mathbb{R}$  es dada ya sea por translaciones o por reflexiones a través de una 0-célula, podemos deducir que un dominio fundamental de la acción de  $D_\infty$  en  $X$  es dada por la junta  $Z = [0, 1/2] * S^\infty$ , aquí la línea (en  $Z$ ) que une un punto  $x$  con 0 está relacionada con la línea que une a  $-x$  con 0, y cada línea que une a  $x$  con  $1/2$  está relacionada con la línea que une a  $-x$  con  $1/2$  (ver Figura 3). Ahora podemos ver que  $X/D_\infty$  es homeomorfo a la suspensión de  $\mathbb{R}P^\infty$ . Dado que  $X/D_\infty$  tiene cohomología no trivial en dimensiones arbitrariamente grandes, usando el Corolario 3.4, tenemos que  $gd_{\mathcal{F}bc}D_\infty = \infty$ .  $\square$

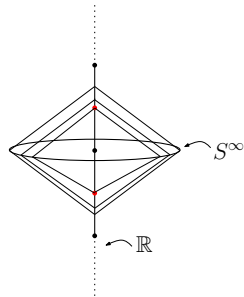


Figura 1

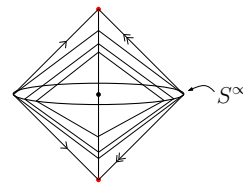


Figura 2

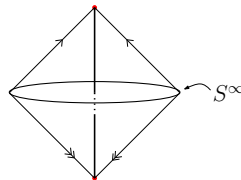


Figura 3

**COROLARIO 3.7.** *Sea  $V$  un grupo virtualmente cíclico que se encaja en una sucesión exacta corta*

$$1 \rightarrow F \rightarrow V \rightarrow D_\infty \rightarrow 1$$

donde  $F$  es un grupo finito. Entonces un modelo para  $E_{\mathcal{F}bc}V$  es dado por  $S^\infty * \mathbb{R}$ , donde la acción es dada vía la proyección  $V \rightarrow D_\infty$  que aparece en la sucesión exacta corta. Más aún  $B_{\mathcal{F}bc}V = \Sigma \mathbb{R}P^\infty$ . En particular,  $gd_{\mathcal{F}bc}V = \infty$ .

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.5. Sea  $G$  un grupo discreto. Como estamos suponiendo que la inclusión  $\mathcal{F}bc \subset \mathcal{V}cyc$  es estricta, tenemos un subgrupo virtualmente cíclico  $V$  que no es del tipo finito por cíclico, así pues  $V$  se suprayecta a  $D_\infty$  con núcleo finito. Por otro lado si consideramos  $Y$  un modelo para  $E_{\mathcal{F}bc}G$ , entonces restringiendo la acción de  $G$  en  $Y$  a  $V$  tenemos que  $Y$  es también un modelo para  $E_{\mathcal{F}bc}V$ . Finalmente por el Corolario 4.17  $Y$  tiene dimensión infinita.  $\square$

En [Laf08] Lafont pregunta si  $gd_{\mathcal{F}in}(G) < \infty$  implica  $gd_{\mathcal{V}cyc}(G) < \infty$ . Así que es natural preguntarse si  $gd_{\mathcal{F}in}(G) < \infty$  implica  $gd_{\mathcal{F}bc}(G) < \infty$ . El Lema 3.6 da una respuesta negativa a esta última pregunta. Más aún, el Teorema 3.5 muestra que la respuesta es no, siempre que  $G$  contiene un subgrupo virtualmente cíclico que no es del tipo finito por cíclico. De cualquier forma podemos conjeturar lo siguiente:

CONJETURA 3.8. *Suponga que  $G$  tiene un modelo de tipo finito para  $E_{\mathcal{F}in}G$ . Entonces podemos encontrar un modelo de tipo finito para  $E_{\mathcal{F}bc}G$ .*

CONJETURA 3.9. *Suponga que  $G$  tiene un modelo de tipo finito para  $E_{\mathcal{F}bc}G$ . Entonces podemos encontrar un modelo de tipo finito para  $E_{\mathcal{V}cyc}G$ .*

Cabe mencionar que los recíprocos de las conjeturas anteriores son ciertas en vista del siguiente teorema y considerando las inclusiones  $\mathcal{F}in \subset \mathcal{F}bc$  y  $\mathcal{F}bc \subset \mathcal{V}cyc$ . Recordemos que si  $\mathcal{F}$  es una familia de subgrupos de  $G$  y  $H$  es un subgrupo de  $G$ , entonces definimos la familia  $\mathcal{F} \cap H$  como la familia de subgrupos de  $H$  que consta de los elementos de  $\mathcal{F}$  que están en  $H$ .

TEOREMA 3.10. [LW12, Theorem 5.1] *Sean  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  familias de subgrupos de  $G$ . Supongamos que existe un modelo finito para  $E_{\mathcal{F} \cap H}H$  para todo  $H \in \mathcal{G}$  y un modelo finito para  $E_{\mathcal{G}}G$ . Entonces existe un modelo finito para  $E_{\mathcal{F}}G$ . Lo mismo es cierto si reemplazamos la palabra *finito* por las palabras *tipo finito*.*



## Capítulo 4

# Los grupos de Whitehead de algunos subgrupos de $PSL_2(\mathbb{R})$ y $SL_2(\mathbb{R})$

### 1. Introducción

En este capítulo estudiaremos los **grupos de Whitehead** de subgrupos de  $PSL_2(\mathbb{R})$  que actúan en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}$  con isotropía finita y sus versiones *no* proyectivas. Entre los grupos notables que están en esta familia se encuentran el grupo modular de Hilbert y los grupos fuchsianos. Los ingredientes principales en nuestro trabajo son la conjetura de Farrell-Jones y la sucesión espectral de  $p$ -cadenas. Todo el material de este capítulo está basado en el artículo [BSS]. A continuación están los enunciados de los resultados obtenidos al respecto.

**DEFINICIÓN 4.1.** Denotamos por  $\mathcal{P}$  a la familia de subgrupos de  $PSL_2(\mathbb{R})$  que actúan en  $\mathbb{H}$  con isotropía finita y que además satisfaga la versión fibrada de la conjetura de Farrell-Jones (ver Definición 1.30). También denotamos por  $\mathcal{S}$  a la familia de subgrupos de  $SL_2(\mathbb{R})$  que son preimagen de algún grupo en  $\mathcal{P}$  bajo la proyección canónica  $p : SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$ .

**LEMA 4.2.** *Sea  $G$  en  $\mathcal{P}$ . Entonces  $p^{-1}(G)$  también satisface la conjetura de Farrell-Jones, por lo tanto todos los grupos en  $\mathcal{S}$  satisfacen la versión fibrada de la conjetura de Farrell-Jones.*

**DEMOSTRACIÓN.** Notemos que tenemos una sucesión exacta corta  $1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow p^{-1}(G) \rightarrow G \rightarrow 1$ . Como  $G$  satisface la versión fibrada de la conjetura de Farrell-Jones y  $\{\pm 1\}$  es un grupo finito, en particular es virtualmente cíclico, el enunciado se sigue de [BLR08b, Lemma 2.4].  $\square$

**TEOREMA 4.3.** *Sea  $G$  en  $\mathcal{P}$ . Entonces para todo  $q$ ,*

$$Wh_q(G) \cong \bigoplus_{(M)} Wh_q(M)$$

*donde la suma corre sobre las clases de conjugación de subgrupos finitos maximales de  $G$ .*

Dado un grupo  $G$  en la familia  $\mathcal{S}$  encontramos que sus grupos de Whitehead están determinados por  $K_q(\mathbb{Z}[p(G)])$  (al menos en rango bajo). De manera más precisa, tenemos lo siguiente:

TEOREMA 4.4. Sean  $G$  en  $\mathcal{S}$  y  $p : SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$  la proyección canónica. Entonces

$$Wh_q(G) \cong K_q(\mathbb{Z}[p(G)])$$

para  $q \leq 1$ .

Aunque la teoría  $K$  algebraica superior de  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$  se vislumbra más difícil de calcular, se puede decir bastante acerca de su teoría  $K$  algebraica superior racional usando las técnicas desarrolladas en el capítulo 2.

TEOREMA 4.5. Si  $G$  pertenece a  $\mathcal{P}$ , entonces

$$\text{rank}(K_q(\mathbb{Z}[G])) - \text{rank}(H_q(BG; \mathcal{K}(\mathbb{Z}))) = \begin{cases} \sum_{(M)} r(M) - m & \text{si } q > 2 \text{ y } q \equiv 1 \pmod{4}, \\ \sum_{(M)} c(M) & \text{si } q > 2 \text{ y } q \equiv 3 \pmod{4}, \\ \sum_{(M)} (r(M) - q(M)) & \text{si } q = 1, \\ m - \sum_{(M)} \left[ \sum_{p||M} q(M) - (k_p(M) - r_p(M)) \right] & \text{si } q = -1, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $m$  es el número de clases de conjugación de subgrupos finitos maximales en  $G$ , la suma corre sobre las clases de conjugación de subgrupos finitos maximales de  $G$  y  $H_q(BG; \mathcal{K}(\mathbb{Z}))$  denota el  $q$ -ésimo grupo de homología de  $BG$  con coeficientes en el espectro no conectivo  $\mathcal{K}(\mathbb{Z})$  de teoría  $K$  de  $\mathbb{Z}$ .

Usando la demostración del Teorema 4.5 junto con el Teorema 4.4 podemos encontrar expresiones para el grupo de Whitehead, así como para la teoría  $K$  baja reducida de  $p^{-1}(G)$  con  $G \in \mathcal{P}$ .

COROLARIO 4.6. Sean  $G \in \mathcal{P}$  y  $p : SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$  la proyección al cociente, entonces

$$Wh_1(p^{-1}(G)) \simeq Wh_1(G) \oplus G^{ab} \oplus \mathbb{Z}_2,$$



donde  $G^{ab}$  es la abelianización de  $G$ . También

$$Wh_0(p^{-1}(G)) \simeq Wh_0(G) \oplus \mathbb{Z};$$

y

$$Wh_{-1}(p^{-1}(G)) \simeq \bigoplus_{(M)} K_{-1}(\mathbb{Z}[M]).$$

donde la suma corre sobre las clases de conjugación de subgrupos finitos maximales de  $G$ .

## 2. Preliminares

Vamos a introducir los grupos de Whitehead  $Wh_n(G)$  de  $G$  se introducen usando el siguiente resultado:

**PROPOSICIÓN 4.7.** [Wal78, Prop. 15.7] *Sea  $G$  un grupo. Entonces definimos  $Wh_n(G) \cong H_n^{Or(G)}(*_{\mathcal{A}ll}, *_{Tr}; \mathbb{K})$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . En efecto, los grupos de Whitehead se encajan en una sucesión exacta larga*

$$\cdots \rightarrow H_n(BG; \mathbb{K}(G/1)) \rightarrow K_n(\mathbb{Z}G) \rightarrow Wh_n(G) \rightarrow H_{n-1}(BG; \mathbb{K}(G/1)) \rightarrow \cdots$$

donde  $H_n(BG; \mathbb{K}(G/1))$  es la teoría de homología generalizada con coeficientes en el espectro  $\mathbb{K}(G/1)$  que tiene como grupos de homotopía la teoría  $K$  algebraica del anillo de grupo  $\mathbb{Z}G$ .

Cuando la conjetura de Farrell-Jones se cumple para un grupo  $G$  obtenemos:

**COROLARIO 4.8.** *Sea  $G$  un grupo. Supongamos que la conjetura de Farrell-Jones se cumple para  $G$ , entonces  $Wh_n(G)$  es isomorfo a  $H_n^{Or(G)}(*_{\mathcal{V}cyc}, *_{Tr}; \mathbb{K})$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .*

Uno usualmente se pregunta cuándo se puede reemplazar la familia  $\mathcal{V}cyc$  por una más pequeña para poder calcular los grupos de Whitehead o la teoría  $K$  de un anillo de grupo. Los siguientes Teoremas nos dan algunas respuestas al respecto.

**TEOREMA 4.9.** [FJ93, A.10] *Sea  $G$  un grupo. Supongamos que para cualquier subgrupo finito por cíclico  $V$  de  $G$ , la función de ensamble*

$$A_{\mathcal{F}in, \mathcal{A}ll} : H_n^{Or(V)}(*_{\mathcal{F}in}; \mathbb{K}) \rightarrow H_n^{Or(V)}(*_{\mathcal{A}ll}; \mathbb{K}) \cong K_n(\mathbb{Z}V)$$

es un isomorfismo. Entonces  $H_n^{Or(G)}(*_{\mathcal{F}in}; \mathbb{K}) \cong H_n^{Or(G)}(*_{\mathcal{F}bc}; \mathbb{K})$ .

OBSERVACIÓN 4.10. La obstrucción para que  $A_{\mathcal{F}in, \mathcal{A}ll}$  sea un isomorfismo son los llamados grupos Nil. Si éstos se vuelven cero entonces podemos restringirnos en nuestros cálculos a la familia de subgrupos finitos. Así pues, bajo las hipótesis del Teorema 4.9 y usando resultados de [DKR11], [DQR11], uno puede calcular los grupos de Whitehead de un grupo  $G$  considerando solamente la familia de subgrupos finitos. En otras palabras, si  $G$  satisface la conjetura de Farrell-Jones entonces

$$\begin{aligned} Wh_n(G) &\cong H_n^{Or(G)}(*_{\mathcal{A}ll}, *_{Tr}; \mathbb{K}) \\ &\cong H_n^{Or(G)}(*_{\mathcal{V}cyc}, *_{Tr}; \mathbb{K}) \\ &\cong H_n^{Or(G)}(*_{\mathcal{F}bc}, *_{Tr}; \mathbb{K}) \\ &\cong H_n^{Or(G)}(*_{\mathcal{F}in}, *_{Tr}; \mathbb{K}). \end{aligned}$$

A continuación diremos cómo reemplazar la familia de subgrupos finitos por una familia incluso más pequeña.

TEOREMA 4.11. [DL03, Corollary 3.9] *Sea  $\mathcal{F}$  una familia de subgrupos de  $G$ . Denotemos por  $M\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$  la subfamilia de subgrupos que consiste de: todos los elementos maximales de  $\mathcal{F}$ , los grupos de  $\mathcal{F}$  que están contenidos en más de un elemento maximal de  $\mathcal{F}$  y los elementos de  $\mathcal{F}$  que no están contenidos en ningún elemento maximal de  $\mathcal{F}$ . Entonces para todo  $n$*

$$H_n^{Or(G)}(*_{\mathcal{F}}; \mathbb{K}) \cong H_n^{Or(G)}(*_{M\mathcal{F}}; \mathbb{K}).$$

### 3. Las Propiedades (M) y (NM)

Dado un grupo  $G$  consideremos las siguientes dos propiedades:

(M) Todo subgrupo finito de  $G$  está contenido en un único subgrupo finito maximal.

(NM) Si  $M$  es un subgrupo finito maximal de  $G$  entonces  $N(M) = M$ , donde  $N(M)$  denota el normalizador de  $M$  en  $G$ .

Nosotros estamos particularmente interesados en subgrupos de  $PSL_2(\mathbb{R})$ . Recordemos que el semiplano superior  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}$  se puede equipar con la métrica (Riemanniana) hiperbólica dada por

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

A  $\mathbb{H}$  con esta métrica se le conoce como el plano hiperbólico o plano de Lobachevsky.

Es bien conocido que el grupo  $SL_2(\mathbb{R})$  actúa en  $\mathbb{H}$  por isometrías vía transformaciones de Möbius. Es decir, si  $z$  es un punto en  $\mathbb{H}$  y  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  es una matriz en  $SL_2(\mathbb{R})$ , entonces definimos

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Denotemos por  $I$  a la matriz identidad. Es fácil ver que  $-I$  actúa de manera trivial en  $\mathbb{H}$ , así que también tenemos una acción de  $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$  en  $\mathbb{H}$  por isometrías.

LEMA 4.12. *El grupo de isometrías de  $\mathbb{H}$  que preservan orientación es isomorfo a  $PSL_2(\mathbb{R})$ .*

LEMA 4.13. *Sea  $h \in PSL_2(\mathbb{R})$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  *$h$  es una matriz elíptica, i.e. su traza satisface*

$$[Tr h]^2 - 4 < 0.$$

2.  *$h$  tiene un único punto fijo.*

*Más aún, el estabilizador  $PSL_2(\mathbb{R})_z$  de cualquier punto  $z \in \mathbb{H}$  en  $PSL_2(\mathbb{R})$  es un grupo isomorfo a  $S^1$ .*

LEMA 4.14. *Sea  $h \in PSL_2(\mathbb{R})$ . Si  $h$  tiene orden finito y no es la identidad, entonces tiene un único punto fijo en  $\mathbb{H}$ . Más aún, si  $F$  es un subgrupo finito no trivial de  $PSL_2(\mathbb{R})$ , entonces tiene un único punto fijo en  $\mathbb{H}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de [Kat92, Theorem 2.4.1] y de [Kat92, Corollary 2.4.2].  $\square$

En el siguiente Teorema damos condiciones suficientes para que un subgrupo de  $PSL_2(\mathbb{R})$  satisfaga (M) y (NM).

**TEOREMA 4.15.** *Sea  $G$  un subgrupo de  $PSL_2(\mathbb{R})$  que tal que actúa en  $\mathbb{H}$  con estabilizadores finitos. Entonces  $G$  satisface (M) y (NM).*

**DEMOSTRACIÓN.** Notemos que por el lema anterior si  $H$  es un subgrupo finito de  $G$  entonces  $H$  está contenido en el estabilizador  $G_z$  de un punto  $z \in \mathbb{H}$ .  $G_z$  es un subgrupo finito maximal de  $G$ . En efecto, si  $F$  es un subgrupo finito de  $G$  que contiene a  $G_z$ , entonces existe  $y \in \mathbb{H}$  tal que  $f \cdot y = y$  para todo  $f \in F$ . En particular, todo elemento de  $G_z$  va a fijar  $y$  y por unicidad del punto fijo,  $y = z$ , es decir,  $f \in G_z$ . Esto demuestra que  $G$  satisface la propiedad (M).

Sea  $M$  un subgrupo maximal finito de  $G$ . Entonces por el párrafo anterior,  $M = G_z$ , donde  $G_z$  es el estabilizador de algún punto  $z \in \mathbb{H}$ . Ahora sea  $g \in N(M)$ , entonces  $gfg^{-1} \in M$  para todo  $f \in M = G_z$ . Luego  $gfg^{-1}z = z$  lo que implica que  $fg^{-1}z = g^{-1}z$ , y por la unicidad del punto fijo  $g^{-1}z = z$ , i.e.  $g \in M$ . Esto demuestra que  $G$  satisface la propiedad (NM).  $\square$

**OBSERVACIÓN 4.16.** Las condiciones (M) y (NM) pueden ser interpretadas de manera geométrica como sigue: Sea  $\mathcal{J}$  la familia que consta de aquellos grupos  $G$  para los cuales existe un modelo de  $\underline{EG}$  con la propiedad de que cualquier conjunto de puntos fijos por un subgrupo finito de  $G$  consta exactamente de un punto. Es claro que si  $G \in \mathcal{J}$ , entonces  $G$  satisface (M) and (NM). Vale la pena notar que dicha familia  $\mathcal{J}$  es cerrada bajo productos libres.

Si un grupo  $G$  satisface las propiedades (M) y (NM) las clases de isomorfismo de subgrupos virtualmente cíclicos son muy limitadas (Compare con [DL03, p.100]).

**LEMA 4.17.** *Sea  $G$  un grupo que satisface las propiedades (M) y (NM), entonces todo subgrupo virtualmente cíclico infinito de  $G$  es isomorfo ya sea a  $\mathbb{Z}$  o a  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Todo subgrupo virtualmente cíclico infinito  $V$  de  $G$  encaja en una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow F \rightarrow V \rightarrow \Gamma \rightarrow 1$$

donde  $\Gamma$  es  $\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  y  $F$  es finito. Como  $F$  es normal en  $V$  entonces  $V \subset N(F)$  donde  $N(F)$  es el normalizador de  $F$  en  $G$ . Supongamos que  $F$  es no trivial y sea  $M$  el único subgrupo finito maximal de  $G$  que contiene a  $F$ . Es claro que  $F \subset gMg^{-1}$  si  $g \in N(F)$ . Entonces, por unicidad,  $g \in M$ . Esto

demuestra que  $N(F) \subset M$  el cual es finito, contradiciendo que  $V \subset N(F)$ . Así pues  $F$  es trivial y la conclusión del lema se sigue.  $\square$

#### 4. Algunos subgrupos de $PSL_2(\mathbb{R})$ que satisfacen (M) y (NM)

**4.1. Grupos Fuchsianos.** En esta sección revisaremos la definición y algunas propiedades de los grupos Fuchsianos. Para más información acerca de estos grupos se puede consultar [Kat92], [Bea83].

DEFINICIÓN 4.18. Un grupo Fuchsiano es un subgrupo discreto de  $PSL_2(\mathbb{R})$ .

Quizás el ejemplo más famoso de un grupo Fuchsiano sea el grupo modular  $PSL_2(\mathbb{Z})$ . Dado que  $PSL_2(\mathbb{R})$  actúa por isometrías en  $\mathbb{H}$  tenemos que todo grupo Fuchsiano actúa propiamente, discontinuamente y por isometrías en  $\mathbb{H}$ . Esta acción nos da una gran cantidad de información acerca de la estructura algebraica de los grupos Fuchsianos tal como lo veremos en el siguiente Teorema.

TEOREMA 4.19. Sean  $G$  un grupo Fuchsiano. Las siguientes afirmaciones son ciertas

1. Si  $g$  es un elemento en  $G$ , entonces  $g$  es elíptico si y sólo si tiene orden finito.
2. Para todo  $z \in \mathbb{H}$  el estabilizador  $G_z$  es un grupo finito. Más aún, hay una biyección entre el conjunto de subgrupos finitos maximales de  $G$  y puntos en  $\mathbb{H}$  con isotropía no trivial. En particular, todo subgrupo finito de  $G$  es cíclico.
3. El conjunto de puntos en  $\mathbb{H}$  con isotropía no trivial es  $G$ -finito. En particular, solamente hay un número finito de clases de conjugación de subgrupos finitos maximales en  $G$ .

A cada grupo Fuchsiano cocompacto  $G$  se le puede asociar su **signatura** como sigue: sea  $g$  el género del espacio de órbitas  $\mathbb{H}/G$  (el cual está bien definido porque el espacio de órbitas es, en efecto, una superficie orientable de género al menos 2), supongamos que  $G$  tiene  $k$  clases de conjugación de subgrupos finitos maximales cuyos ordenes son  $m_1 \leq \dots \leq m_k$ . La signatura de  $G$  es el siguiente vector  $(g; m_1, \dots, m_k)$ . Usando el siguiente resultado podemos ver lo variados que pueden ser los subgrupos finitos maximales de un grupo Fuchsiano.

**TEOREMA 4.20.** *Sea  $G$  un grupo Fuchsiano. Entonces  $G$  es determinado por su signatura  $(g; m_1, \dots, m_k)$ , es decir, que si  $\Gamma$  es otro grupo Fuchsiano con la misma signatura, entonces  $G$  y  $\Gamma$  son isomorfos. Más aún, si dada cualquier colección de números  $(g; m_1, \dots, m_k)$  con  $2 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k$  y  $2g - 2 + \sum(1 - 1/m_i)$  se puede realizar como la signatura de un grupo Fuchsiano.*

**OBSERVACIÓN 4.21.** Notemos que el Teorema 4.3, en el caso cuando  $G$  es Fuchsiano, fue demostrado originalmente en [BJPP01], [BJPP02] y [DL03].

**4.2. El grupo Modular de Hilbert.** En esta sección revisamos la definición y algunas propiedades básicas del grupo modular de Hilbert. Los resultados que son escritos sin demostración en esta sección pueden ser encontrados en [Fre90]. Para más información acerca del grupo modular de Hilbert el lector puede además consultar [Hir73], [vdG88].

Un campo de números totalmente real  $k$  es una extensión algebraica de  $\mathbb{Q}$  tal que todos sus encajes  $\sigma_i : k \rightarrow \mathbb{C}$  tienen su imagen contenida en  $\mathbb{R}$ . Denotaremos por  $k$  a un campo de números totalmente real de grado  $n$  y  $\mathcal{O}_k$  su anillo de enteros algebraicos. El **grupo modular de Hilbert**  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$  se define como el cociente del grupo especial lineal de matrices  $2 \times 2$ ,  $SL_2(\mathcal{O}_k)$ , con entradas en  $\mathcal{O}_k$  por el subgrupo  $\{I, -I\}$ , donde  $I$  denota la matriz identidad; en otras palabras

$$PSL_2(\mathcal{O}_k) = SL_2(\mathcal{O}_k)/\{I, -I\}.$$

Note que si  $k = \mathbb{Q}$ , entonces  $PSL_2(\mathcal{O}_k) = PSL_2(\mathbb{Z})$  no es sino el grupo modular clásico. En cualquier caso  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$  no es un subgrupo discreto de  $PSL_2(\mathbb{R})$  si  $n \geq 2$ . Sin embargo, actúa propiamente y discontinuamente en el producto iterado  $n$  veces  $\mathbb{H}^n = \mathbb{H} \times \dots \times \mathbb{H}$  de semiplanos superiores, via transformaciones de Möbius en cada uno de los  $n$  factores, usando los  $n$  diferentes encajes de  $k$  en  $\mathbb{R}$ . Entonces el grupo modular de Hilbert es un subgrupo discreto del producto  $n$  veces iterado  $PSL_2(\mathbb{R})^n = PSL_2(\mathbb{R}) \times \dots \times PSL_2(\mathbb{R})$ . Por ejemplo, si  $d$  es un entero positivo libre de cuadrados y  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , entonces hay dos encajes de  $k$  en  $\mathbb{R}$ , a saber

$$\sigma_1 : s + t\sqrt{d} \mapsto s + t\sqrt{d} \quad \text{y} \quad \sigma_2 : s + t\sqrt{d} \mapsto s - t\sqrt{d},$$

para  $s, t \in \mathbb{Q}$ . En este caso, una matriz  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathcal{O}_k)$  actúa en  $(z_1, z_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$  como

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} (z_1, z_2) = \left( \frac{\sigma_1(\alpha)z_1 + \sigma_1(\beta)}{\sigma_1(\gamma)z_1 + \sigma_1(\delta)}, \frac{\sigma_2(\alpha)z_2 + \sigma_2(\beta)}{\sigma_2(\gamma)z_2 + \sigma_2(\delta)} \right).$$

La acción de  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$  en  $\mathbb{H}^n$  no es libre. Se pueden detectar puntos con isotropía no trivial.

Por ejemplo la matriz  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  es un elemento elíptico de  $PSL_2(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})})$  de orden 4 que fija el punto  $\frac{\sqrt{2}}{2}((1+i), (-1+i)) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ .

**OBSERVACIÓN 4.22.**  $\mathbb{H}^n$  resulta ser un modelo para el espacio clasificante para acciones propias del grupo modular de Hilbert  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$ , donde el conjunto de puntos fijos por la acción de un subgrupo finito no sólo es contraíble sino que consiste exactamente de un punto. Esta propiedad simplificará nuestros cálculos de los grupos de teoría  $K$  algebraica de manera sustancial.

**LEMA 4.23.** *Sea  $h \in PSL_2(\mathcal{O}_k)$ . Entonces  $h$  es una matriz elíptica si y sólo si tiene orden finito.*

**PROPOSICIÓN 4.24.** *El grupo modular de Hilbert  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$  satisface las propiedades (M) y (NM).*

**DEMOSTRACIÓN.** Por el lema anterior se sigue que  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$  actúa en  $\mathbb{H}$  con estabilizadores finitos, entonces la afirmación se sigue del Teorema 4.15.  $\square$

## 5. Demostraciones de los resultados principales

En esta sección se darán demostraciones de los Teoremas 4.3, 4.4 y 4.5.

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.3.** Sea  $G$  en  $\mathcal{P}$ . Recordemos que  $Wh_q(G) \simeq H_q^{Or(G)}(*_{\mathcal{A}ll}, *_{Tr}; \mathbb{K})$ .

Dado que  $G$  satisface la conjetura de Farrell-Jones tenemos el siguiente isomorfismo

$$Wh_q(G) \simeq H_q^{Or(G)}(*_{\mathcal{V}cyc}, *_{Tr}; \mathbb{K})$$

El siguiente paso es tratar de reducir la familia de subgrupos tanto como sea posible. En efecto, por el Lema 4.17 y el hecho de que los grupos Nil del anillo integral de grupo de  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  son cero

[LS00, Lemma 2.5], tenemos que la función de ensamble

$$A_{\mathcal{F}in, \mathcal{A}ll} : H_q^{Or(V)}(*_{\mathcal{F}in}; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{Or(V)}(*_{\mathcal{A}ll}; \mathbb{K})$$

es un isomorfismo. Entonces  $Wh_q(G)$  puede ser calculado usando solamente la familia de subgrupos finitos de  $G$ . Es decir,

$$Wh_q(G) \simeq H_q^{Or(G)}(*_{\mathcal{F}in}, *_{Tr}; \mathbb{K})$$

Más aún, combinando el Lema 4.15 (propiedad (M)) y el Teorema 4.11, vemos que la familia de subgrupos a ser considerada puede ser reducida a la subfamilia  $M\mathcal{F}in$ , donde  $M\mathcal{F}in$  denota la familia de subgrupos finitos maximales de  $G$  unión la familia trivial, tal como se definió en el Teorema 4.11. Así

$$Wh_q(G) \cong H_q^{Or(G)}(*_{M\mathcal{F}in}, *_{Tr}; \mathbb{K}).$$

Ahora que ya hemos reemplazado la familia  $\mathcal{V}cyc$  por  $M\mathcal{F}in$ , analizamos la estructura de las  $p$ -cadenas en la categoría de órbitas  $Or(G, M\mathcal{F}in)$ .

**0-cadenas.:** Éstas son cadenas de la forma  $\{\overline{G/H}\}$ , donde  $H \in M\mathcal{F}in$ .

**1-cadenas.:** Aquí solamente tenemos cadenas de la forma  $\{\overline{G/1}, \overline{G/H}\}$ . Notemos que no hay 1-cadenas de la forma  $\{\overline{G/H}, \overline{G/K}\}$ , para  $H, K \in M\mathcal{F}in$ ,  $H \neq 1$ , porque todo morfismo  $G/H \rightarrow G/K$  necesariamente tiene que ser un isomorfismo.

**$p$ -cadenas,  $p \geq 2$ .:** No existe ninguna porque todo morfismo  $G/H \rightarrow G/K$ ,  $H \neq 1$ , es un isomorfismo.

También nótese que al considerar la pareja  $(*_{M\mathcal{F}in}, *_{Tr})$  estamos ignorando todos los términos que provienen de 0-cadenas  $\{G/1\}$  en la página  $E^1$  de la sucesión espectral de  $p$ -cadenas para parejas. En particular, ninguna 1-cadena tiene que ser considerada en el cálculo de los grupos de Whitehead. De manera que la sucesión espectral solamente tendrá contribuciones provenientes de las clases de isomorfismo de órbitas de la forma  $G/H$  con  $H \in M\mathcal{F}in$ ,  $H \neq 1$ . Ahora recordemos que  $Aut(G/H) = N(H)/H = \{e\}$ , donde  $N(H)$  es el normalizador de  $H$  en  $G$  y la igualdad anteriormente mencionada se sigue del Lema 4.15 (propiedad (NM)). También hay una correspondencia entre 0-cadenas en  $Or(G, M\mathcal{F}in)$  y clases de conjugación de subgrupos finitos maximales en  $G$ . Al final terminamos con el siguiente término  $E^1$  de nuestra sucesión espectral. Así nuestra sucesión espectral colapsa en la página  $E^1$  y el resultado se sigue.  $\square$



$$\begin{array}{c|ccc}
2 & \bigoplus_{(M)} Wh_2(M) & 0 & 0 \\
1 & \bigoplus_{(M)} Wh_1(M) & 0 & 0 \\
0 & \bigoplus_{(M)} Wh_0(M) & 0 & 0 \\
-1 & \bigoplus_{(M)} Wh_{-1}(M) & 0 & 0 \\
\hline
& 0 & 1 & 2
\end{array}$$

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.4.** Seguimos la misma estrategia implementada en la demostración del Teorema 4.3. Sea  $G \in \mathcal{S}$  (ver Definición 4.1), por el Lema 4.2 tenemos que  $G$  satisface Farrell-Jones. Entonces podemos garantizar que

$$H_q^{Or(G)}(*_{\mathcal{V}cyc}; \mathbb{K}) \cong K_q(\mathbb{Z}[G])$$

para todo  $q \in \mathbb{Z}$ . Ahora, la idea es reducir la familia de subgrupos, y así poder calcular el lado izquierdo de esta última ecuación. Recordemos que por [DKR11], [DQR11] siempre es posible reducir la familia de  $\mathcal{V}cyc$  a  $\mathcal{F}bc$  (veáse también la Observación 4.10). Entonces si uno quiere reemplazar la familia  $\mathcal{V}cyc$  por  $\mathcal{F}in$  es suficiente demostrar que para cualquier subgrupo de  $G$  de la forma  $F \rtimes \mathbb{Z}$  con  $F$  finito, la función de ensamble  $f : H_q^{Or(F \rtimes \mathbb{Z})}(*_{\mathcal{F}in}; \mathbb{K}) \rightarrow K_q(\mathbb{Z}[F \rtimes \mathbb{Z}])$  es un isomorfismo. Para ver esto último, note que  $F \times \mathbb{Z} < F \rtimes \mathbb{Z}$  y que el único elemento no trivial de orden finito que conmuta con algún elemento de orden infinito es  $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , entonces todo grupo en la familia  $\mathcal{F}bc$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ . Por [LS00, Lemma 2.5]  $f$  es un isomorfismo para  $q \leq 1$  cuando  $F$  es el grupo trivial o  $F \cong \mathbb{Z}_2$ . Así que

$$H_q^{Or(G)}(*_{\mathcal{V}cyc}; \mathbb{K}) \cong H_q^{Or(G)}(*_{\mathcal{F}bc}; \mathbb{K}) \cong H_q^{Or(G)}(*_{\mathcal{F}in}; \mathbb{K}),$$

siempre que  $q \leq 1$ .

De hecho, podemos trabajar con una familia de subgrupos más pequeña. Primero, notemos que por el mismo razonamiento de la demostración del Lema 4.15, todo subgrupo finito maximal de  $G$  es de la forma  $G_z$ ,  $z \in \mathbb{H}$ , el plano hiperbólico. Entonces todo subgrupo diferente de  $\{\pm I\}$  está contenido en un único subgrupo finito maximal. Sea  $M\mathcal{F}in$  tal como se definió en el Teorema 4.11, notemos que todo elemento en  $M\mathcal{F}in$  es un subgrupo finito maximal, o el subgrupo trivial o el subgrupo

$\{I, -I\}$ . Por el Teorema 4.11 tenemos

$$H_q^{Or(G)}(*_{\mathcal{F}in}; \mathbb{K}) \cong H_q^{Or(G)}(*_{M\mathcal{F}in}; \mathbb{K}).$$

Ahora, usando el Lema del Cinco y las previas reducciones de la familia de subgrupos, es inmediato mostrar que, para  $q \leq 1$

$$Wh_q(G) \cong H_q^{Or(G)}(*_{All}, *_{Tr}; \mathbb{K}) \cong H_q^{Or(G)}(*_{M\mathcal{F}in}, *_{Tr}; \mathbb{K}).$$

Ahora procedemos a analizar las  $p$ -cadenas que aparecen en la categoría de órbitas  $Or(G, M\mathcal{F}in)$

**0-cadenas.:** Éstas son cadenas de la forma  $\{\overline{G/1}\}$ ,  $\{\overline{G/\{\pm I\}}\}$  y  $\{\overline{G/H}\}$ , donde  $H$  es un subgrupo finito maximal.

**1-cadenas.:** Tenemos cadenas de la forma  $\{\overline{G/1}, \overline{G/\{\pm I\}}\}$ ,  $\{\overline{G/1}, \overline{G/H}\}$  y  $\{\overline{G/\{\pm I\}}, \overline{G/H}\}$ , con  $H$  un subgrupo finito maximal.

**2-cadenas.:** Las únicas 2-cadena que tenemos son de la forma  $\{\overline{G/1}, \overline{G/\{\pm I\}}, \overline{G/H}\}$ , con  $H$  un subgrupo finito maximal.

**$p$ -cadenas,  $p \geq 3$ .:** No hay ninguna porque para todo  $H, K$  maximal todo morfismo  $G/H \rightarrow G/K$  tiene que ser un isomorfismo.

También notemos que al considerar el par  $(*_{M\mathcal{F}in}, *_{Tr})$  estamos ignorando los terminos que provienen de  $p$ -cadenas cuyo primer término es la 0-cadena  $\{\overline{G/1}\}$ . En particular, ninguna 2-cadena tiene que ser considerada. Entonces el término  $E^1$  de la sucesión espectral de  $p$ -cadenas para parejas solamente tendrá contribuciones de órbitas en  $Or(G, M\mathcal{F}in^0)$ , donde  $M\mathcal{F}in^0 := M\mathcal{F}in - Tr$ .

Es claro que  $Or(G, M\mathcal{F}in^0)$  es equivalente a  $Or(p(G), M\mathcal{F}in)$  donde  $p : SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$  es la proyección al cociente. Entonces el término  $E^1$  de la sucesión espectral las  $p$ -cadenas (para parejas) en  $Or(G, M\mathcal{F}in)$  es isomorfo al término  $E^1$  de la sucesión espectral de  $p$ -cadenas en  $Or(p(G), M\mathcal{F}in)$ . Dado que la primera converge a  $Wh_*(G)$  y la segunda converge a  $K_*(\mathbb{Z}[PSL_2(\mathcal{O}_k)])$  el resultado se sigue.  $\square$

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.5.** Sea  $G \in \mathcal{P}$  (ver Definición 4.1). Recordemos del Teorema 4.11 que  $M\mathcal{F}in$  es la familia de subgrupos de  $G$  que consiste de todos los subgrupos finitos maximales

junto con el subgrupo trivial. En [Gru08, Theorem 5.6], se demuestra que para cualquier grupo  $\Gamma$  que satisfice la conjetura de Farrell-Jones

$$H_*^{Or(\Gamma)}(*_{\mathcal{F}in}; \mathbb{K}) \otimes \mathbb{Q} \cong H_*^{Or(\Gamma)}(*_{\mathcal{V}cyc}; \mathbb{K}) \otimes \mathbb{Q} \cong K_*(\mathbb{Z}[\Gamma]) \otimes \mathbb{Q}.$$

Ahora usemos el Teorema 4.11 para reducir la familia de  $\mathcal{F}in$  a  $M\mathcal{F}in$ . Comencemos por analizar las  $p$ -cadenas que aparecen en  $Or(G, M\mathcal{F}in)$ . Esto ha sido hecho en la demostración del Teorema 4.3. Notemos que esta vez no estamos calculando la homología de una pareja, así que ahora sí necesitamos considerar las 0-cadenas y las 1-cadenas (no hay  $p$ -cadenas en esta categoría para  $p \geq 2$ .) La primera página de la sucesión espectral de  $p$ -cadenas está dada (después de algunas simplificaciones, ver [BJPP01, Proposition 12]) por

$$E_{0q}^1 = H_q(BG; \mathcal{K}(\mathbb{Z})) \oplus \bigoplus_{(M)} K_q(\mathbb{Z}[M])$$

$$E_{1q}^1 = \bigoplus_{(M)} H_q(BM; \mathcal{K}(\mathbb{Z}))$$

$$E_{pq}^1 = 0 \text{ para } p \neq 0, 1,$$

donde  $H_q(-; \mathcal{K}(\mathbb{Z}))$  se refiere a la teoría de homología generalizada con coeficientes en el espectro de teoría  $K$  definido por Pedersen-Weibel y la suma corre sobre las clases de conjugación de subgrupos maximales finitos. Entonces la sucesión espectral de  $p$ -cadenas en este caso se ve como sigue:

$$\begin{array}{c}
 E^1 \\
 \begin{array}{c}
 2 \\
 1 \\
 0 \\
 -1
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{ccc}
 E_{02}^1 & \longleftarrow & E_{12}^1 & 0 \\
 E_{01}^1 & \longleftarrow & E_{11}^1 & 0 \\
 E_{00}^1 & \longleftarrow & E_{10}^1 & 0 \\
 E_{0-1}^1 & \longleftarrow & E_{1-1}^1 & 0
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

Las diferenciales  $d^1 : E_{1q}^1 \rightarrow E_{0q}^1$  son todas inducidas por dos tipos de funciones entre  $p$ -cadenas: Aquéllas que provienen de  $\{\overline{G/1}, \overline{G/M}\} \mapsto \{\overline{G/1}\}$  y aquéllas que provienen de  $\{\overline{G/1}, \overline{G/M}\} \mapsto \{\overline{G/M}\}$ . Está demostrado en [Pea98, Lemma 3.10] que en el primer caso la función inducida en homología es una inclusión mientras que en el segundo caso induce la función de ensamble clásica

$H_q(BM; \mathcal{K}(\mathbb{Z})) \rightarrow K_q(\mathbb{Z}[M])$  que en nuestra notación es

$$A_{Tr, All} : H_q^{Or(M)}(*_{Tr}; \mathbb{K}) \rightarrow H_q^{Or(M)}(*_{All}; \mathbb{K}).$$

En nuestro caso dicha función de ensamble se sabe que es racionalmente inyectiva para todo  $q$  (ver [BHM93]). Así pues, al menos racionalmente las diferenciales  $d^1$  son inyectivas y la sucesión espectral (racionalmente) colapsa en la página  $E^2$ . Entonces

$$\text{rk}(K_q(\mathbb{Z}[G])) = \text{rk}(E_{0q}^\infty) = \text{rk}(E_{0q}^2)$$

Notemos que  $E_{0q}^2$  se encaja en una sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow E_{1q}^1 \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{d^1 \otimes id_{\mathbb{Q}}} E_{0q}^1 \otimes \mathbb{Q} \rightarrow E_{0q}^2 \otimes \mathbb{Q} \rightarrow 0.$$

Finalmente, tomando en cuenta que todo subgrupo finito de  $G$  es cíclico por estar contenido en  $S^1$ , un cálculo con la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch muestra que

$$\text{rk}(H_q(BM; \mathcal{K}(\mathbb{Z}))) = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0 \text{ ó } q \equiv 1 \pmod{4}, q > 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así que,

$$\begin{aligned} \text{rk}(K_q(\mathbb{Z}[G])) &= \text{rk}(E_{0q}^2) \\ &= \text{rk}(E_{0q}^1) - \text{rk}(E_{1q}^1) \\ &= \sum_{(M)} \text{rk}(K_q(\mathbb{Z}[M])) + \text{rk}(H_q(BG; \mathcal{K}(\mathbb{Z}))) - \sum_{(M)} \text{rk}(H_q(BM; \mathcal{K}(\mathbb{Z}))). \end{aligned}$$

Y entonces tenemos que

(\*\*)

$$\text{rk}(K_q(\mathbb{Z}[G])) - \text{rk}(H_q(BG; \mathcal{K}(\mathbb{Z}))) = \begin{cases} \sum_{(M)} \text{rk}(K_q(\mathbb{Z}[M])) - m & \text{si } q = 0 \text{ ó } q \equiv 1 \pmod{4}, q > 2 \\ \sum_{(M)} \text{rk}(K_q(\mathbb{Z}[M])) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $m$  denota el número de clases de conjugación de subgrupos finitos maximales de  $G$ . Por resultados de Bass [Bas65], Carter [Car80b] y Jahren [Jah09] acerca de la teoría  $K$  de grupos

finitos (ver Teorema 2.3), tenemos las siguientes igualdades:

$$\text{rk}(K_q(\mathbb{Z}[M])) = \begin{cases} r(M) & \text{si } q > 2 \text{ y } q \equiv 1 \pmod{4} \\ c(M) & \text{si } q > 2 \text{ y } q \equiv 3 \pmod{4} \\ r(M) - q(M) & \text{si } q = 1 \\ 1 & \text{si } q = 0 \\ 1 - q(M) + \sum_{p \parallel M} (k_p(M) - r_p(M)) & \text{si } q = -1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El siguiente resultado se sigue por sustitución en la ecuación (\*\*).  $\square$

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO 4.6. Recordemos que por el Teorema 4.4  $Wh_1(p^{-1}(G)) \simeq K_1(\mathbb{Z}[G])$ . Ahora notemos que la diferencial de la sucesión espectral que aparece en la demostración del Teorema 4.5, es inyectiva para  $q \leq 1$ , ver [BJPP01, Demostración de Proposition 14]. Esto implica que  $K_1(\mathbb{Z}[G]) = E_{01}^\infty = E_{01}^2$  y entonces obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow E_{11}^1 \xrightarrow{d^1} E_{01}^1 \rightarrow K_1(\mathbb{Z}[G]) \rightarrow 0.$$

Siguiendo [BJPP01, Demostración de la Proposition 14] es inmediato verificar que

$$E_{01}^1 = G^{ab} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{(M)} K_1(\mathbb{Z}[M])$$

y también

$$E_{11}^1 = \bigoplus_{(M)} (M \oplus \mathbb{Z}_2).$$

Como  $M$  es abeliano,  $K_1(\mathbb{Z}[M]) \simeq M \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus Wh_1(M)$  y la imagen de la función de ensamble  $H_1(BM; \mathcal{K}(\mathbb{Z})) \simeq M \oplus \mathbb{Z}_2 \rightarrow K_1(\mathbb{Z}[M])$  se escinde para cada  $M$ . Esto nos da la fórmula deseada para el grupo de Whitehead clásico:

$$Wh_1(p^{-1}(G)) \simeq Wh_1(G) \oplus G^{ab} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Similarmente obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow E_{10}^1 \xrightarrow{d^1} E_{00}^1 \rightarrow K_0(\mathbb{Z}[G]) \rightarrow 0,$$

donde

$$E_{10}^1 = \bigoplus_{(M)} H_0(BM; \mathcal{K}(\mathbb{Z})) \simeq \bigoplus_{(M)} \mathbb{Z}$$

y

$$E_{00}^1 \simeq \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{(M)} K_0(\mathbb{Z}[M]).$$

Notemos que  $K_0(\mathbb{Z}[M]) \simeq \mathbb{Z} \oplus Wh_0(M)$  y  $Wh_0(M)$  es finito porque  $M$  es finito. El resultado entonces se sigue de notar que la función de ensamble  $H_0(BM; \mathcal{K}(\mathbb{Z})) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow K_0(\mathbb{Z}[M]) \simeq \mathbb{Z} \oplus Wh_0(M)$  es inyectiva y se escinde para cada  $M$ .

El mismo análisis hecho para el caso  $-1$  nos arroja que  $Wh_{-1}(p^{-1}(G)) \simeq \bigoplus K_{-1}(\mathbb{Z}[M])$ . Esto completa la demostración del corolario.  $\square$

Concluimos ésta sección desarrollando un ejemplo concreto. Sea  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  la extensión cuadrática de los racionales que se obtiene adjuntando  $\sqrt{5}$  a  $\mathbb{Q}$ . En este caso,  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$  actúa en  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$  via los encajes inducidas por  $\sigma_1 : \sqrt{5} \mapsto \sqrt{5}$  y  $\sigma_2 : \sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$ . Por el Teorema 4.3, los grupos de Whitehead de  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$  están determinados por sus subgrupos finitos maximales. Entonces nuestro problema se reduce a encontrar todas las clases de conjugación de subgrupos finitos maximales. Por el Lema 4.15, todo subgrupo finito maximal de  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$  aparece como el estabilizador de algún punto en  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ . Decimos que dos puntos fijos en  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$  son inequivalentes si sus grupos de isotropía no son conjugados. Así que tenemos una biyección entre clases de conjugación de subgrupos finitos maximales de  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$  y puntos fijos inequivalent en  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ . El problema de encontrar el número de puntos fijos de la acción del grupo modular de Hilbert de una extensión cuadrática ha sido tratado en [Pre68]. Haremos aquí un bosquejo de la forma en que hay que proceder: como sólo los elementos elípticos de  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$  pueden tener puntos fijos, entonces la traza de tal elemento debe satisfacer

$$[Tr \sigma_i(h)]^2 - 4 < 0, \quad i = 1, 2.$$

También, toda matriz elíptica es conjugada (en  $PSL_2(\mathbb{C})$ ) a una de la forma  $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix}$  donde  $\omega$  es una raíz primitiva de la unidad. Así, en nuestro caso, cada una de estas trazas debe ser un entero algebraico de  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ , i.e. un elemento de  $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ . Las únicas posibilidades son:  $0, \pm 1$  y  $\pm \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , correspondientes a una raíz cuarta, sexta y décima de la unidad respectivamente. Esto dice que en

$PSL_2(\mathcal{O}_k)$  solamente tendremos elementos elípticos de orden 2, 3 y 5, en consecuencia los únicos subgrupos finitos que pueden aparecer son isomorfos a  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_3$  and  $\mathbb{Z}_5$ . El número de clases de conjugación de subgrupos finitos maximales es calculado en [Pre68]: cada uno de estos grupos tiene exactamente dos clases de conjugación en  $PSL_2(\mathcal{O}_k)$ . Por lo tanto, por el Teorema 4.3 tenemos

$$Wh_q(PSL_2(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})) = Wh_q(\mathbb{Z}_2)^2 \oplus Wh_q(\mathbb{Z}_3)^2 \oplus Wh_q(\mathbb{Z}_5)^2.$$

En el caso particular del grupo clásico de Whithead , i.e.  $q = 1$ , se sabe que (ver [Oli88]) que  $Wh(\mathbb{Z}_2) \simeq Wh(\mathbb{Z}_3) \simeq 0$  y  $Wh(\mathbb{Z}_5) \simeq \mathbb{Z}$ . Así pues

$$Wh(PSL_2(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

También, por el Corolario 4.6 tenemos

$$Wh(SL_2(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2,$$

dado que  $PSL_2(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})$  es un grupo perfecto.

Finalmente para la teoría  $K$  superior obtenemos (aquí  $G = PSL_2(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})})$ ):

$$\begin{aligned} \text{rk } K_q(\mathbb{Z}[G]) - \text{rk } H_q(BG; \mathcal{K}(\mathbb{Z})) &= \begin{cases} 2r(\mathbb{Z}_2) + 2r(\mathbb{Z}_3) + 2r(\mathbb{Z}_5) & \text{si } q > 2 \text{ y } q \equiv 1 \pmod{4} \\ 2c(\mathbb{Z}_2) + 2c(\mathbb{Z}_3) + 2c(\mathbb{Z}_5) & \text{si } q > 2 \text{ y } q \equiv 3 \pmod{4} \\ 2(r(\mathbb{Z}_2) - q(\mathbb{Z}_2)) + 2(r(\mathbb{Z}_3) - q(\mathbb{Z}_3)) \\ + 2(r(\mathbb{Z}_5) - q(\mathbb{Z}_5)) & \text{si } q = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4 + 4 + 6 & \text{si } q > 2 \text{ y } q \equiv 1 \pmod{4} \\ 0 + 2 + 4 & \text{si } q > 2 \text{ y } q \equiv 3 \pmod{4} \\ 0 + 0 + 2 & \text{si } q = 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 14 & \text{si } q > 2 \text{ y } q \equiv 1 \pmod{4} \\ 6 & \text{si } q > 2 \text{ y } q \equiv 3 \pmod{4} \\ 2 & \text{si } q = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 4.25. Vale la pena notar que la fórmula del Corolario 4.6 también nos proporciona una forma de calcular el grupo de Whitehead de  $SL_2(\mathbb{Z})$ :

$$\begin{aligned} Wh_1(SL_2(\mathbb{Z})) &\simeq Wh_1(PSL_2(\mathbb{Z})) \oplus PSL_2(\mathbb{Z})^{ab} \oplus \mathbb{Z}_2 \\ &\simeq Wh_1(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3) \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2 \\ &\simeq \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2, \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que  $Wh_1(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3) \simeq Wh_1(\mathbb{Z}_2) \oplus Wh_1(\mathbb{Z}_3) \simeq 0$ .



## Bibliografía

- [Abe78] Herbert Abels. A universal proper  $G$ -space. *Math. Z.*, 159(2):143–158, 1978.
- [AO06] A. Alves and P. Ontaneda. A formula for the Whitehead group of a three-dimensional crystallographic group. *Topology*, 45(1):1–25, 2006.
- [Bas65] Hyman Bass. The Dirichlet unit theorem, induced characters, and Whitehead groups of finite groups. *Topology*, 4:391–410, 1965.
- [Bea83] Alan F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [BFJPP00] E. Berkove, F. T. Farrell, D. Juan-Pineda, and K. Pearson. The Farrell-Jones isomorphism conjecture for finite covolume hyperbolic actions and the algebraic  $K$ -theory of Bianchi groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(12):5689–5702, 2000.
- [BFL14] A. Bartels, F. T. Farrell, and W. Lück. The Farrell-Jones conjecture for cocompact lattices in virtually connected Lie groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 27(2):339–388, 2014.
- [BHM93] M. Bökstedt, W. C. Hsiang, and I. Madsen. The cyclotomic trace and algebraic  $K$ -theory of spaces. *Invent. Math.*, 111(3):465–539, 1993.
- [BJPP01] Ethan Berkove, Daniel Juan-Pineda, and Kimberly Pearson. The lower algebraic  $K$ -theory of Fuchsian groups. *Comment. Math. Helv.*, 76(2):339–352, 2001.
- [BJPP02] E. Berkove, D. Juan-Pineda, and K. Pearson. A geometric approach to the lower algebraic  $K$ -theory of Fuchsian groups. *Topology Appl.*, 119(3):269–277, 2002.
- [BLR08a] Arthur Bartels, Wolfgang Lück, and Holger Reich. The  $K$ -theoretic Farrell-Jones conjecture for hyperbolic groups. *Invent. Math.*, 172(1):29–70, 2008.
- [BLR08b] Arthur Bartels, Wolfgang Lück, and Holger Reich. On the Farrell-Jones conjecture and its applications. *J. Topol.*, 1(1):57–86, 2008.
- [BR07] Arthur Bartels and Holger Reich. Coefficients for the Farrell-Jones conjecture. *Adv. Math.*, 209(1):337–362, 2007.
- [BSS] Mauricio Bustamante and Luis Jorge Sánchez Saldaña. On the algebraic  $K$ -theory of the hilbert modular group. *to appear in Algebr. Geom. Topol.*
- [Car80a] David W. Carter. Localization in lower algebraic  $K$ -theory. *Comm. Algebra*, 8(7):603–622, 1980.
- [Car80b] David W. Carter. Lower  $K$ -theory of finite groups. *Comm. Algebra*, 8(20):1927–1937, 1980.

- [CFH] Frank Conolly, Benjamin Fehrman, and Michael Hartglass. On the dimension of the virtually cyclic classifying space of a crystallographic group. *arXiv:math/0610387*.
- [DKP15] D. Degrijse, R. Köhl, and N. Petrosyan. Classifying spaces with virtually cyclic stabilizers for linear groups. *Transform. Groups*, 20(2):381–394, 2015.
- [DKR11] James F. Davis, Qayum Khan, and Andrew Ranicki. Algebraic  $K$ -theory over the infinite dihedral group: an algebraic approach. *Algebr. Geom. Topol.*, 11(4):2391–2436, 2011.
- [DL98] James F. Davis and Wolfgang Lück. Spaces over a category and assembly maps in isomorphism conjectures in  $K$ - and  $L$ -theory. *K-Theory*, 15(3):201–252, 1998.
- [DL03] James F. Davis and Wolfgang Lück. The  $p$ -chain spectral sequence. *K-Theory*, 30(1):71–104, 2003. Special issue in honor of Hyman Bass on his seventieth birthday. Part I.
- [DQR11] James F. Davis, Frank Quinn, and Holger Reich. Algebraic  $K$ -theory over the infinite dihedral group: a controlled topology approach. *J. Topol.*, 4(3):505–528, 2011.
- [Far10] Daniel Farley. Constructions of  $E_{VC}$  and  $E_{FBC}$  for groups acting on CAT(0) spaces. *Algebr. Geom. Topol.*, 10(4):2229–2250, 2010.
- [FJ93] F. T. Farrell and L. E. Jones. Isomorphism conjectures in algebraic  $K$ -theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 6(2):249–297, 1993.
- [Flu] M. Fluch. On bredon (co-)homological dimensions of groups. *Ph.D. Thesis*, arXiv:1009.4633.
- [FO14] Daniel Scott Farley and Ivonne Johanna Ortiz. *Algebraic K-theory of crystallographic groups. The three-dimensional splitting case*, volume 2113 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2014.
- [Fre90] Eberhard Freitag. *Hilbert modular forms*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [FW15] F. Thomas Farrell and Xiaolei Wu. Isomorphism conjecture for Baumslag-Solitar groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(8):3401–3406, 2015.
- [GMR] Giovanni Gandini, Sebastian Meinert, and Henrik Rüping. The farrell-jones conjecture for fundamental groups of graphs of abelian groups. *arXiv:1309.6909*.
- [Gru08] Joachim Grunewald. The behavior of Nil-groups under localization and the relative assembly map. *Topology*, 47(3):160–202, 2008.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Hir73] Friedrich E. P. Hirzebruch. Hilbert modular surfaces. *Enseignement Math. (2)*, 19:183–281, 1973.
- [Jah09] Bjørn Jahren. Involutions on the rational  $K$ -theory of group rings of finite groups. In *Alpine perspectives on algebraic topology*, volume 504 of *Contemp. Math.*, pages 189–202. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [Ji09] Lizhen Ji. From symmetric spaces to buildings, curve complexes and outer spaces. *Innov. Incidence Geom.*, 10:33–80, 2009.

- [JPL06] Daniel Juan-Pineda and Ian J. Leary. On classifying spaces for the family of virtually cyclic subgroups. In *Recent developments in algebraic topology*, volume 407 of *Contemp. Math.*, pages 135–145. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [JPLMVP11] D. Juan-Pineda, J.-F. Lafont, S. Millan-Vossler, and S. Pallekonda. Algebraic  $K$ -theory of virtually free groups. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 141(6):1295–1316, 2011.
- [JPML10] Daniel Juan-Pineda and Silvia Millan-López. The Whitehead group and the lower algebraic  $K$ -theory of braid groups on  $\mathbb{S}^2$  and  $\mathbb{RP}^2$ . *Algebr. Geom. Topol.*, 10(4):1887–1903, 2010.
- [JPSS] Daniel Juan-Pineda and Luis Jorge Sánchez Saldaña. The  $K$ - and  $L$ -theoretic farrell-jones isomorphism conjecture for braid groups. *To appear in OSU proceedings*.
- [JPSS14] Daniel Juan-Pineda and Luis Jorge Sánchez Saldaña. On the ranks of the algebraic  $K$ -theory of hyperbolic groups. *Bol. Soc. Mat. Mex. (3)*, 20(2):277–285, 2014.
- [Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian groups*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.
- [KL05] Matthias Kreck and Wolfgang Lück. *The Novikov conjecture*, volume 33 of *Oberwolfach Seminars*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. Geometry and algebra.
- [Laf08] J. F. Lafont. Construction of classifying spaces with isotropy in prescribed families of subgroups. *L'Enseign. Math.*, 54(2):127–130, 2008.
- [LM00] Wolfgang Lück and David Meintrup. On the universal space for group actions with compact isotropy. In *Geometry and topology: Aarhus (1998)*, volume 258 of *Contemp. Math.*, pages 293–305. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [LO09a] Jean-François Lafont and Ivonne J. Ortiz. Lower algebraic  $K$ -theory of hyperbolic 3-simplex reflection groups. *Comment. Math. Helv.*, 84(2):297–337, 2009.
- [LO09b] Jean-François Lafont and Ivonne J. Ortiz. Splitting formulas for certain Waldhausen Nil-groups. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 79(2):309–322, 2009.
- [LS00] Wolfgang Lück and Roland Stamm. Computations of  $K$ - and  $L$ -theory of cocompact planar groups. *K-Theory*, 21(3):249–292, 2000.
- [Lüc05] Wolfgang Lück. Survey on classifying spaces for families of subgroups. In *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects*, volume 248 of *Progr. Math.*, pages 269–322. Birkhäuser, Basel, 2005.
- [Lüc09] Wolfgang Lück. On the classifying space of the family of virtually cyclic subgroups for  $\text{CAT}(0)$ -groups. *Münster J. Math.*, 2:201–214, 2009.
- [LW12] Wolfgang Lück and Michael Weiermann. On the classifying space of the family of virtually cyclic subgroups. *Pure Appl. Math. Q.*, 8(2):497–555, 2012.
- [MS02] David Meintrup and Thomas Schick. A model for the universal space for proper actions of a hyperbolic group. *New York J. Math.*, 8:1–7 (electronic), 2002.

- [Oli88] Robert Oliver. *Whitehead groups of finite groups*, volume 132 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [Pea98] Kimberly Pearson. Algebraic  $K$ -theory of two-dimensional crystallographic groups. *K-Theory*, 14(3):265–280, 1998.
- [Pre68] Alexander Prestel. Die elliptischen Fixpunkte der Hilbertschen Modulgruppen. *Math. Ann.*, 177:181–209, 1968.
- [PW85] Erik K. Pedersen and Charles A. Weibel. A nonconnective delooping of algebraic  $K$ -theory. In *Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J., 1983)*, volume 1126 of *Lecture Notes in Math.*, pages 166–181. Springer, Berlin, 1985.
- [Ros05] Jonathan Rosenberg.  $K$ -theory and geometric topology. In *Handbook of K-theory. Vol. 1, 2*, pages 577–610. Springer, Berlin, 2005.
- [Rüp] Henrik Rüping. The farrell-jones conjecture for  $s$ -arithmetic groups. *arXiv:1309.7236*.
- [Ser03] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation.
- [vdG88] Gerard van der Geer. *Hilbert modular surfaces*, volume 16 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [Wal78] Friedhelm Waldhausen. Algebraic  $K$ -theory of generalized free products. I, II. *Ann. of Math. (2)*, 108(1):135–204, 1978.
- [Whi78] George W. Whitehead. *Elements of homotopy theory*, volume 61 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.