



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

DINÁMICA DEL ENREDAMIENTO DE ESTADOS GAUSSIANOS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

JULIO ALBERTO LÓPEZ SALDÍVAR

TUTOR PRINCIPAL

DR. OCTAVIO CASTAÑOS GARZA  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DRA. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD . FACULTAD DE CIENCIAS

DR. EDUARDO NAHMAD ACHAR . INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MÉXICO, D. F. JUNIO 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos

Este trabajo esta dedicado principalmente a mi familia. Todo el apoyo que he recibido de ellos nunca podré pagarlo completamente.

Quiero también agradecer al Dr. Octavio Castaños por todos los consejos y regaños en beneficio de mi formación. Asimismo a los miembros del comité tutorial Dra. Rocío Jáuregui y Dr. Eduardo Nahmad por las sugerencias y anotaciones a lo largo del curso del doctorado. Al Dr. Jorge R. Soto por el apoyo durante todos estos años. A los miembros del comité de sinodales Dra. Rosario Paredes, Dr. José Recamier, Dr. Victor Velázquez y Dr. Oscar Rosas por sus comentarios y correcciones al presente trabajo. Y al Dr Ramón López Peña por su participación en varios de los proyectos en lo que he tomado parte.

Finalmente quiero agradecer la compañía de mis amigos y a todos los que directa o indirectamente han contribuido a mi formación, en especial a CCN, MPC, MTAT y PAPT.

## Resumen

El propósito de este trabajo de tesis es el estudio del enredamiento de estados Gaussianos bipartitas en Hamiltonianos cuadráticos. Para dicho fin se obtienen los criterios de Duan et al., Simon, las entropías lineal y de von Neumann y la negatividad logarítmica para los sistemas del amplificador paramétrico y el convertidor de frecuencias de forma analítica y numérica. Para realizar el cálculo numérico de dichas cantidades se introduce el procedimiento de discretización de la matriz densidad, dicho procedimiento obtiene una matriz densidad finita a partir de una matriz densidad de variable continua. Por otro lado se propone dos nuevas formas de detección del enredamiento haciendo uso de la descripción tomográfica de los estados Gaussianos bipartitas. Estos métodos son una generalización de las desigualdades de Bell aplicado a la representación tomográfica. Se presenta además el estudio del enredamiento de estados cristalizados.

## Abstract

The purpose of this work is the study of the entanglement between two modes of bipartite Gaussian states whose dynamics are given by quadratic Hamiltonians. For this purpose we present the study of the entanglement measurements defined by Duan et al., the Simon criteria, the linear and von Neumann entropies, and the logarithmic negativity. These measures are calculated for the quadratic Hamiltonians of the parametric amplifier and the frequency converter in both analytically and numerically. To make the numerical calculation of these quantities the procedure of the discretization of the density matrix is introduced, in these procedure one obtains a discrete density matrix from a continuous variable density matrix. Also a two new methods to distinguish entangled states is proposed. This method makes use of the tomographic description of the bipartite Gaussian states and it represents a generalization of the bell inequalities from the tomographic formulation of the quantum mechanics.

# Índice general

<b>Capítulo 1. Introducción</b>	1
<b>Capítulo 2. Métodos teóricos de detección del enredamiento</b>	5
2.1. . Criterio de Duan et al.	6
2.2. . Criterio de Simon	10
2.3. . Entropías lineal y de von Neumann	14
2.3.1. . Estados Gaussianos	16
2.4. . Negatividad logarítmica	16
2.4.1. . Definición estándar	17
2.4.2. . Negatividad logarítmica para sistemas Gaussianos	17
<b>Capítulo 3. Tomografía cuántica</b>	20
3.1. . Representación tomográfica	20
Tomograma en mecánica clásica	21
Tomograma cuántico	22
3.2. . Estudio del enredamiento entre dos modos en el esquema tomográfico	25
3.2.1. . Retrato de qubit	26
3.2.1.1. . Desigualdades de Bell para el retrato de qubit	27
3.3. . Detección y reconstrucción de estados	29
3.3.1. . Detección homodina	29
<b>Capítulo 4. Hamiltonianos cuadráticos</b>	32
4.1. . Hamiltoniano cuadrático	32
4.2. . Invariantes lineales dependientes del tiempo	33
4.3. . Amplificador paramétrico	35
4.3.1. . Bases que portan la representación irreducible del grupo $SU(1,1)$ y sus estados coherentes	38
4.4. . Convertidor de frecuencias	43
4.4.1. . Bases que portan la representación irreducible del grupo $SU(2)$ y sus estados coherentes	45
<b>Capítulo 5. Estados Gaussianos, coherentes y cristalizados</b>	50
5.1. . Definición y propiedades	50
5.2. . Estados Gaussianos de dos modos	52
5.2.1. . Ejemplos	53
5.3. . Estados coherentes multidimensionales	54
5.4. . Estados coherentes de un modo	54
5.5. . Generalización a múltiples modos	55
5.6. . Estados cristalizados	56
5.6.1. . Definición	56
5.6.2. . Grupos cíclicos	59

5.6.3. . Grupos dihédricos . . . . .	60
5.6.4. . Propiedades . . . . .	60
5.7. . Estados cristalizados de dos modos . . . . .	63
5.8. . Enredamiento de estados cristalizados . . . . .	64
<b>Capítulo 6. Resultados . . . . .</b>	<b>67</b>
6.1. . Invariantes dependientes del tiempo para procesos paramétricos . . . . .	67
6.1.1. . Amplificador . . . . .	67
6.1.2. . Convertidor . . . . .	70
6.2. . Operadores invariantes del álgebra $SU(1,1)$ . . . . .	73
6.3. . Operadores invariantes del álgebra $SU(2)$ . . . . .	76
6.4. . Evolución temporal de estados Gaussianos en Hamiltonianos cuadráticos . . . . .	79
6.4.1. . Evolución de estados coherentes . . . . .	81
6.4.2. . Matriz de covarianza . . . . .	82
6.5. . Discretización de la matriz densidad . . . . .	85
6.6. . Enredamiento . . . . .	86
6.6.1. . Parámetros de Duan et al. y Simon . . . . .	87
6.6.2. . Entropías lineal y de von Neumann para estados Gaussianos . . . . .	90
6.6.3. . Negatividad Logarítmica . . . . .	92
6.6.4. . Desigualdades de Bell para el retrato tomográfico . . . . .	95
6.6.5. . Método alternativo . . . . .	102
<b>Capítulo 7. Conclusiones . . . . .</b>	<b>105</b>
<b>Apéndice A. Criterio de Duan et al. . . . .</b>	<b>107</b>
A.1. . Parámetro de Duan . . . . .	107
A.1.1. . Matriz de covarianza . . . . .	108
<b>Apéndice B. Programación . . . . .</b>	<b>112</b>
<b>Bibliografía . . . . .</b>	<b>132</b>

## Capítulo 1

# Introducción

En los últimos años el estudio de las correlaciones cuánticas entre subsistemas, llamada enredamiento, ha sido de vital importancia en la teoría de la Mecánica Cuántica. En específico las aplicaciones de dichas correlaciones ha permitido desarrollos tecnológicos como la implementación de computadoras cuánticas entre otros y además ha puesto las bases para el desarrollo de la teoría de la Información Cuántica. Por ese motivo el enredamiento entre subsistemas puede ser visto como un recurso y de ahí puede observarse la importancia de su caracterización. Por otro lado la mayoría de las aplicaciones experimentales de la teoría de Información Cuántica y de la Mecánica Cuántica en general ha sido desarrollada haciendo uso de los estados llamados Gaussianos. Dentro de los estados Gaussianos encontramos los estados coherentes, de vacío y de vacío comprimido, los cuales son de suma relevancia en aplicaciones teóricas y experimentales.

En específico las correlaciones o enredamiento cuántico es uno de los recursos con el cual la computación cuántica pretende disminuir el tiempo de cálculo de problemas que de forma clásica tomarían un tiempo enorme. Los ejemplos más representativos en los que esta reducción de tiempo es demostrada son los algoritmos de Shor y Grover.

Este trabajo de tesis tiene como objetivo el estudio del enredamiento entre dos modos de estados Gaussianos puros y bipartitas bajo la evolución de Hamiltonianos cuadráticos. Este enredamiento o entrelazamiento es la correlación entre dos partes de un cierto sistema. Cuando existe enredamiento entre dos subsistemas, ninguno de ellos puede ser descrito independientemente del otro. Cuando este enredamiento no existe, cada uno de los subsistemas puede describirse independientemente y por lo tanto al sistema completo se le llama separable. En la presente tesis se realiza el estudio de la dinámica de las correlaciones entre subsistemas a través del formalismo de las constantes de movimiento, las cuales son útiles para la caracterización de problemas dependientes del tiempo. En particular se utilizarán los invariantes lineales dependientes del tiempo de Hamiltonianos cuadráticos en los operadores de posición y momento. Dichos invariantes son operadores cuyo valor esperado es el mismo en todo tiempo. Éstos han sido estudiados en [1–5] y han sido utilizados para la determinación de propagadores<sup>1</sup> en problemas con dependencia temporal.

Existen varios sistemas físicos de interés que son descritos mediante Hamiltonianos cuadráticos, entre ellos están el amplificador y oscilador paramétrico, el convertidor de frecuencias [7, 8] y otros utilizados en electrodinámica de circuitos basados en juntas de Josephson [9–11], los cuales entre otras cosas han permitido el desarrollo de estados comprimidos y de fotones con correlaciones cuánticas.

El estudio del enredamiento en los sistemas Gaussianos se presenta mediante medidas

---

<sup>1</sup> Los propagadores por lo general son obtenidos a través de la llamada integral de trayectoria y constituyen otra formulación de la mecánica cuántica [6]

y criterios estándar como son las medidas entrópicas y otras basadas en los criterios de Peres-Horodecki [12, 13]. Además se presenta una forma de obtener criterios de separabilidad basada en la representación tomográfica.

La representación tomográfica de la mecánica cuántica, la cual fue introducida en 1996 [14] es la generalización del esquema tomográfico óptico<sup>2</sup> aplicado a la mecánica cuántica. En esta nueva formulación, los estados son descritos por probabilidades las cuales pueden ser medidas experimentalmente.

En 1935, Einstein-Podolski y Rosen y también Schrödinger definieron el concepto de enredamiento, el cual desde su punto de vista era extraño e incluso correspondía a un fenómeno no físico [15, 16]. Por ello se pensó que estos fenómenos podrían ser descritos por un sistema de variables aún no introducidas en la teoría (variables ocultas), las cuales eran responsables de este tipo de situaciones. En los años sesenta, Bell [17] y Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) [18] establecieron que las predicciones de la mecánica cuántica no pueden ser descritas por una teoría de variables ocultas locales. En el experimento típico de Bell [19], se ha establecido que para estados separables<sup>3</sup> en un sistema bipartita, el llamado parámetro de Bell tiene como límite superior el valor 2. La corroboración experimental de dicho límite para la desigualdad de Bell-CHSH fue hecha por primera vez en 1981 [20].

A partir de los años noventa el enredamiento de un sistema cuántico ha sido utilizado como un recurso para la implementación de protocolos cuánticos como la criptografía cuántica, la teleportación cuántica y la implementación de la computación cuántica. Este hecho ha derivado en el aumento del interés de la identificación de correlaciones cuánticas y los comportamientos no locales de la física cuántica [19, 21]. El límite 2 de la desigualdad de Bell-CHSH puede ser violado para estados compuestos enredados, los cuales muestran una correlación fuerte de los subsistemas que lo componen. Por otro lado Cirelson [22] probó que existe un límite superior  $2\sqrt{2}$  de la desigualdad CHSH para estados enredados bipartitas. Sin embargo fue descubierto por Popescu y Rohlich [23] que existen correlaciones en sistemas que modelan propiedades de dos qubits las cuales tienen como límite inferior  $2\sqrt{2}$  y como límite superior el valor 4 en la desigualdad de Bell-CHSH, y que dichos fenómenos corresponden a correlaciones más allá de la mecánica cuántica, también llamadas correlaciones supercuánticas.

Una prueba para la no-localidad<sup>4</sup> de estados correlacionados de dos modos de la luz utilizando la representación tomográfica fue propuesto en [24]. Dicha propuesta ha sido implementada experimentalmente en [25] utilizando la detección homodina, encontrándose una clara violación de la desigualdad de Bell. Además el llamado retrato tomográfico de estados de qudit [26], ha permitido la implementación de las desigualdades Bell-CHSH [17, 18, 27] para dos qubits dentro de la representación de probabilidad de la mecánica cuántica [14, 28]. En estos trabajos ha sido propuesto que una condición necesaria para la separabilidad de un estado bipartita de qudit es la separabilidad de su retrato de qubit [26]. Este método del retrato de qubit ha sido extendido para tomogramas en el número de fotones con algunas modificaciones, lo cual es útil para la detección de enredamiento de

<sup>2</sup> Aquel utilizado en medicina y otras áreas

<sup>3</sup> Los cuales no presentan enredamiento

<sup>4</sup> La no-localidad cuántica existe cuando ciertos fenómenos a nivel microscópico violan los preceptos del realismo local. Esto significa que dos o más objetos microscópicos tienen una habilidad aparente de saber el estado entre ellos de forma inmediata cuando existe enredamiento, a pesar de estar separados por una gran distancia.



estados de dos modos de la luz. Por lo que una violación de la desigualdad de Bell-CHSH indica enredamiento en el estado [29].

Los Hamiltonianos modelo para el amplificador paramétrico y el convertidor de frecuencias fueron propuestos en [30]. Dichos sistemas describen la interacción entre dos modos del campo electromagnético, los cuales son llamados modos señal y acompañante con frecuencias  $\omega_a$  y  $\omega_b$  respectivamente. Los Hamiltonianos modelo para el amplificador paramétrico y el convertidor de frecuencias corresponden a dos osciladores los cuales están en interacción con un campo clásico de frecuencia  $\omega$  (el cual es llamado campo de bombeo), la cual puede cumplir o no la condición de resonancia [7, 31, 32], que es,  $\omega = \omega_a + \omega_b$  para el amplificador paramétrico o  $\omega = \omega_a - \omega_b$  para el convertidor de frecuencias.

La descripción física de los elementos del Hamiltoniano [7] que describe los procesos de amplificación y conversión es la de una sustancia dieléctrica no lineal la cual interacciona con un par de modos de una cavidad resonante con paredes reflejantes [30]. En esta cavidad existe un campo de bombeo oscilando con una frecuencia en resonancia igual a la suma de la otras frecuencias en caso del amplificador y a la diferencia en el caso del convertidor y es lo suficientemente intenso para ser representado en términos clásicos. En el caso concreto del amplificador paramétrico de dos modos se ha determinado que exhibe comportamientos como resurgimientos y compresión de la fluctuaciones del campo electromagnético [7], y que estos resurgimientos dependen de una forma muy sensible del estado inicial del sistema. Recientemente, amplificadores paramétricos ópticos han sido desarrollados con una amplificación de 60-70 dB de la señal de entrada [33, 34] y con una eficiencia cada vez más parecida a la de un amplificador ideal [35].

Algunos de los trabajos encontrados en la literatura relacionados con los estados Gaussianos, los que son ampliamente utilizados en el presente trabajo, son: la dinámica del enredamiento de estados Gaussianos en un reservorio el cual ha sido estudiado en [36, 37]. Una nueva técnica para determinar experimentalmente las fluctuaciones de las cuadraturas del campo electromagnético, llamada la matriz de covarianza es presentada en [38–40]. En años recientes los estados Gaussianos han sido utilizados para la implementación de los llamados canales cuánticos. Estos canales son representados por mapeos completamente positivos, los cuales son transformaciones que convierten una matriz densidad en otra matriz densidad manteniendo las propiedades estándar como son la traza, la hermiticidad y la positividad. Dentro de la gran variedad de mapeos positivos y canales cuánticos existen aquellos que transforman estados Gaussianos en estados Gaussianos, llamados por ello canales Gaussianos [41–44].

Las contribuciones originales contenidas dentro de este trabajo son las siguientes:

Se obtienen los invariantes dependientes del tiempo para el amplificador paramétrico y el convertidor de frecuencias. Con ayuda de dichos invariantes se obtiene la evolución temporal de estados bipartitas Gaussianos. La dinámica del enredamiento entre los modos para los procesos paramétricos antes mencionados, son obtenidos a través de las siguientes medidas de enredamiento: los criterios de Duan et al y Simon, las entropías lineal y de von Neumann y la negatividad logarítmica. Para la obtención de algunas de estas cantidades se propone el método de discretización de la matriz densidad. La cual se aplica a los estados Gaussianos bipartitas.

Por otro lado se proponen dos nuevos criterios para establecer la separabilidad de estados de dos modos de variable continua. Ambos criterios están basados en la representación tomográfica de la mecánica cuántica y son análogos a la desigualdad Bell-CHSH para el

llamado tomograma simpléctico. Para ejemplificar estos dos nuevos criterios se utilizan como ejemplos los estados de dos modos de vacío comprimido y coherente.

Finalmente se presenta el estudio del enredamiento de estados bipartitas que portan la representación irreducible de grupos finitos. Para ello se hace uso de estados de un modo que portan la representación de grupos de simetría de rotación del polígono regular de  $n$  lados ( $C_n$ ). En específico se toman los estados bipartitas que portan la representación irreducible de los grupos cíclicos  $C_n$  como ejemplo para el cálculo de las entropías lineal y de von Neumann.

El esquema del presente trabajo es el siguiente:

Se abordan diferentes medidas y criterios de enredamiento conocidos en la literatura especializada en el capítulo 2. Los criterios de Duan et al. y Simon, las entropías lineal y de von Neumann además de la negatividad logarítmica son definidos en este capítulo para su posterior aplicación a los estados Gaussianos.

Posteriormente en el capítulo 3 se analiza la representación tomográfica de los estados. La cual consiste en asociar una distribución clásica de probabilidad a un sistema cuántico y que permite entre otras cosas el estudio del enredamiento en términos de matrices estocásticas.

En el capítulo 4 se analizan los Hamiltonianos cuadráticos con ayuda de los invariantes dependientes del tiempo. En particular se estudian a fondo los Hamiltonianos de dos modos para procesos de amplificación paramétrica y la conversión de frecuencias. También en este capítulo se hace un repaso de los estados que portan la representación irreducible de las álgebras  $SU(1,1)$  y  $SU(2)$  que describen al amplificador y el convertidor respectivamente. Posteriormente se definen los estados coherentes para cada álgebra y se describen algunas de sus propiedades.

Una revisión de los estados Gaussianos es dada en el capítulo 5. En particular se presentan los estados coherentes multipartitas y las superposiciones de éstos que portan la representación irreducible de grupos cristalinos, llamados estados cristalizados.

Los resultados principales de este trabajo son reportados en el capítulo 6, los que se pueden resumir de la siguiente forma:

Se obtuvieron los invariantes dependientes del tiempo para los procesos paramétricos del amplificador y convertidor de frecuencias. Con ellos se obtiene la evolución temporal de un estado Gaussiano puro bipartita general, del cual se analiza el enredamiento entre sus modos. Para ello se estudian los criterios descritos en el capítulo 1. En el caso de las entropías lineal y de von Neumann además de la negatividad logarítmica se presenta una nueva forma numérica para la obtención de estas propiedades. También en este capítulo se proponen dos criterios nuevos de separabilidad del sistema, ambos criterios son basados en la representación tomográfica de la mecánica cuántica. Además se obtienen bases completas que portan la representación irreducible de las álgebras  $SU(1,1)$  y  $SU(2)$  y que también son soluciones de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para los procesos paramétricos antes mencionados. Finalmente se estudia el enredamiento de los estados cristalizados estacionarios.

Por último se dan las conclusiones del trabajo en el capítulo 7, en los apéndices se dan algunas particularidades del criterio de Duan et al y de los programas utilizados para la obtención de los resultados numéricos.

## Capítulo 2

# Métodos teóricos de detección del enredamiento

El enredamiento o entrelazamiento es una de las características más importantes dentro de la Mecánica Cuántica. Dicha propiedad ha llevado a importantes descubrimientos teóricos y avances tecnológicos en la actualidad.

Para explicar este concepto supongamos un sistema compuesto de dos subsistemas los cuales inicialmente están en interacción. Después de un cierto tiempo los subsistemas son separados una distancia muy grande y se hace una medición de alguna de sus propiedades sobre uno de estos subsistemas. La teoría cuántica predice que cuando existe enredamiento entre las dos partes, al ser medido uno de ellos el otro subsistema se ve afectado y su estado cuántico colapsa de acuerdo al valor medido en el primer subsistema.

En este capítulo se abordarán diferentes métodos que sirven para determinar si existe el enredamiento entre dos modos de un sistema bipartita. Estos criterios se pueden clasificar en dos tipos: los criterios que sólo dan información de la presencia del enredamiento y no lo cuantifican, y los métodos que cuantifican dicho enredamiento. Dentro de los primeros se tienen criterios como los establecidos por Duan et al. [45] y Simon [46], los cuales recaen fuertemente en la aplicación del criterio de Peres-Horodecki [12,13](el cual establece una condición necesaria para la existencia de enredamiento) a la matriz de covarianza y dentro del segundo tipo tenemos las medidas de enredamiento como la entropía de von Neumann [47], la entropía lineal (o pureza) y la negatividad logarítmica [48, 49].

Cabe señalar que estos criterios se clasifican también en aquellos que pueden utilizarse en estados puros y los que pueden aplicarse a estados mezcla. Los estados puros son aquellos cuya matriz densidad cumple  $\rho^2 = \rho$  y los estados mezcla son aquellos que no cumplen esta condición.

Los criterios como el de Duan et al, el de Simon y la negatividad logarítmica pueden ser utilizados para estados mezcla, mientras que las entropías lineal y de von Neumann deben aplicarse a las matrices densidades reducidas de estados puros para poder detectar enredamiento.

Cuando un estado puro bipartita es simplemente separable (no hay enredamiento entre sus partes), su operador densidad puede expresarse como el producto directo de dos operadores densidad

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2,$$

donde  $\rho_1$  y  $\rho_2$  se denominan las matrices reducidas de los subsistemas que forman al sistema compuesto. Asimismo cuando un estado mezcla es separable puede expresarse como una suma convexa de operadores densidad

$$\rho = \sum_i \wp_i \rho_{1i} \otimes \rho_{2i},$$

donde  $\wp_i$  es la probabilidad de que cada subsistema sea caracterizado por los operadores densidad reducidos ( $\rho_{1i}$  y  $\rho_{2i}$ ) respectivamente.

La condición de normalización  $\text{Tr}\rho = 1$ , implica que  $\sum_i \wp_i = 1$ . Primero se abordará el criterio de Duan et al.

## 2.1. Criterio de Duan et al.

El criterio de separabilidad de Duan et al. de dos modos [45], está basado en el principio de incertidumbre de Heisenberg de dos operadores hermitianos canónicamente conjugados. Dichos operadores se pueden identificar como posiciones y momentos o dos cuadraturas del campo electromagnético.

Este criterio representa sólo una condición necesaria para la existencia de enredamiento para sistemas arbitrarios y puede transformarse en una condición necesaria y suficiente para estados Gaussianos como se verá más adelante. El criterio de Duan et al. establece que la suma de las dispersiones de dos operadores ( $u, v$ ), los cuales son combinación lineal de las cuadraturas ( $q_1, q_2$ ) y ( $p_1, p_2$ ) respectivamente, está acotada por abajo para estados separables. Dicho límite inferior se tiene necesariamente para los estados separables y por lo tanto una violación de este límite es una condición suficiente para que exista enredamiento.

Para establecer dicho criterio se definen dos operadores de dos modos

$$u = |a| x_1 + \frac{1}{a} x_2, \quad v = |a| p_1 - \frac{1}{a} p_2 \quad (2.1)$$

donde ( $q_1, p_1$ ), ( $q_2, p_2$ ) son los operadores de posición y momento o dos cuadraturas para los modos 1 y 2 respectivamente y  $a$  es una constante real. En general estos operadores no conmutan entre si, dado que  $[u, v] = i\hbar(a^2 - 1/a^2)$ , sólo cuando  $a = \pm 1$  dichos operadores conmutan.

Supongamos un estado separable, cuya matriz densidad puede ser escrita en la forma más general como

$$\rho = \sum_i \wp_i \rho_{1i} \otimes \rho_{2i}, \quad (2.2)$$

donde  $\wp_i$  es la probabilidad de que cada modo sea determinado por las matrices densidad locales  $\rho_{1i}, \rho_{2i}$ , las cuales están normalizadas  $\text{Tr}(\rho_{1i}) = \text{Tr}(\rho_{2i}) = 1$  y son hermitianas, además son operadores positivos semidefinidos, ya que sus eigenvalores están entre cero y uno. La condición de normalización de la matriz total de dos modos ( $\text{Tr}(\rho) = 1$ ), implica  $\sum_i \wp_i = 1$ . Esta matriz densidad describe un estado mixto (no puro) cuando  $\rho^2 \neq \rho$  y un estado puro cuando  $\rho^2 = \rho$ .

El promedio de un operador arbitrario  $\mathcal{O}$  en este sistema está dado por la expresión

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho \mathcal{O}) = \sum_i \wp_i \text{Tr}(\rho_{1i} \otimes \rho_{2i} \mathcal{O}) = \sum_i \wp_i \langle \mathcal{O} \rangle_i$$

donde hacemos la distinción entre el promedio sobre todo el sistema  $\langle \mathcal{O} \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho \mathcal{O})$ , del promedio sobre uno de los subsistemas (por ejemplo el  $i$ -ésimo subsistema)  $\langle \mathcal{O} \rangle_i = \text{Tr}(\rho_i \mathcal{O})$ .

El criterio de Duan establece la siguiente desigualdad

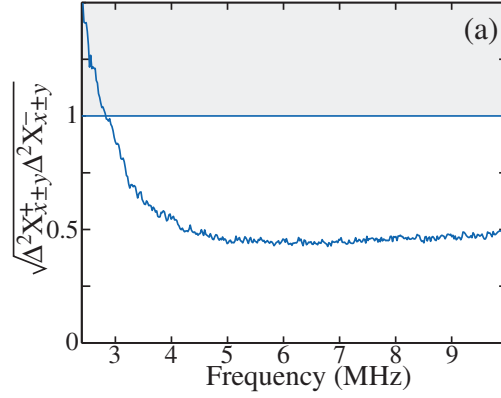


Figura 2.1. Parámetro de Duan et al. el cual muestra experimentalmente el enredamiento para dos estados comprimidos. Las cantidades  $X_{x\pm y}^+$  y  $X_{x\pm y}^-$  son los operadores  $a + a^\dagger$  e  $i(a^\dagger - a)$  para los operadores de cuadraturas de dos modos  $x \pm y$  respectivamente. Los valores de  $\sqrt{\Delta^2 X_{x\pm y}^+ \pm \Delta^2 X_{x\pm y}^-}$  mayores a la unidad significan que el sistema es enredado.

Tomado de [50]

$$(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 \geq a^2 + \frac{1}{a^2}, \quad (2.3)$$

la cual debe de cumplirse para cualquier estado separable. Hacemos énfasis en que la violación de esta desigualdad (2.3) es una condición suficiente para la presencia de enredamiento en un sistema de dos modos. La demostración de este criterio puede verse en el apéndice A.

Este criterio de separabilidad se ha podido medir experimentalmente para varios sistemas. En las figuras 2.1 y 2.2, se muestran dos diferentes observaciones experimentales de este criterio para sistemas bipartitas comprimidos. En ellos podemos ver que existe una violación de la condición (2.3) y por lo tanto enredamiento entre los dos modos.

Las dispersiones  $(\Delta u)^2$  y  $(\Delta v)^2$  pueden obtenerse a través de la matriz de dispersión (o también llamada la matriz de covarianza) de dos modos.

La matriz de covarianza es la matriz que tiene como entradas las dispersiones y correlaciones de un sistema físico, también es llamada matriz de correlación o matriz de ruido. En el caso de estados de dos modos la matriz de covarianza es determinada por una matriz real y simétrica de  $4 \times 4$  entradas, que puede ser expresada como,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son matrices por bloques de dimensión  $2 \times 2$ , las cuales están definidas con las varianzas y correlaciones entre los dos modos.  $\tilde{\mathbf{C}}$  denota la matriz transpuesta de  $\mathbf{C}$ . Las submatrices que definen a la matriz de covarianza son

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sigma_{q_1 q_1} & \sigma_{q_1 p_1} \\ \sigma_{p_1 q_1} & \sigma_{p_1 p_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sigma_{q_2 q_2} & \sigma_{q_2 p_2} \\ \sigma_{p_2 q_2} & \sigma_{p_2 p_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{q_1 q_2} & \sigma_{q_1 p_2} \\ \sigma_{p_1 q_2} & \sigma_{p_1 p_2} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

donde las dispersiones y covarianzas son definidas como

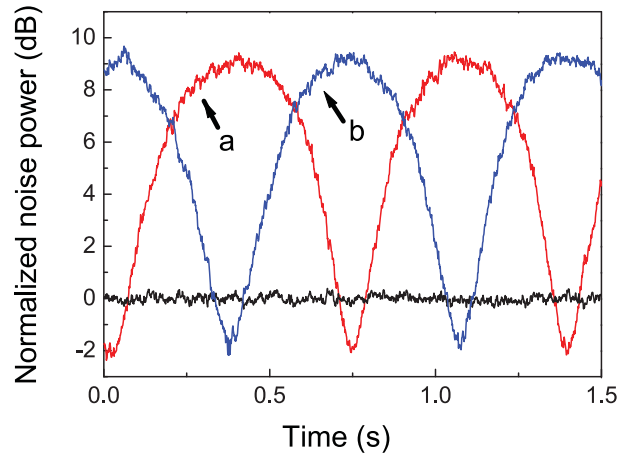


Figura 2.2. Parámetro de Duan et al. el cual muestra experimentalmente el enredamiento para dos trenes pulsados de alta repetición comprimidos. Donde (a) es  $\Delta^2(X_1 - X_2)$  y (b) es  $\Delta^2(Y_1 - Y_2)$ , siendo  $X_j, Y_j$  los operadores de cuadraturas de ambos modos. Tomado de [51]

$$\begin{aligned}\sigma_{q_i q_j} &= \frac{1}{2} \langle \{q_i, q_j\} \rangle - \langle q_i \rangle \langle q_j \rangle, \\ \sigma_{p_i p_j} &= \frac{1}{2} \langle \{p_i, p_j\} \rangle - \langle p_i \rangle \langle p_j \rangle, \\ \sigma_{p_i q_j} &= \frac{1}{2} \langle \{p_i, q_j\} \rangle - \langle p_i \rangle \langle q_j \rangle,\end{aligned}$$

donde  $i, j = 1, 2$ . En el caso  $i = j$ , ocurren dispersiones y en otro caso correlaciones. Es importante destacar que la matriz de covarianza debe ser una matriz positiva semidefinida, es decir sus eigenvalores corresponden a números positivos o cero.

Suponiendo que se tiene un vector compuesto de las cuadraturas de dos modos  $\xi = (q_1, p_1, q_2, p_2)$  y una matriz densidad  $\rho$ , el segundo momento de  $\xi$  dado por  $\text{Tr}(\rho \xi \xi)$  puede escribirse como una parte simétrica y otra antisimétrica

$$\text{Tr}(\rho \xi_i \xi_j) = \text{Tr} \left( \rho \frac{1}{2} (\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i) \right) + \text{Tr} \left( \rho \frac{1}{2} (\xi_i \xi_j - \xi_j \xi_i) \right),$$

donde las entradas de la parte simétrica  $\langle \frac{1}{2} (\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i) \rangle = \sigma_{ij}$ , son las entradas de la matriz de covarianza y las entradas de la parte antisimétrica  $\langle \frac{1}{2} (\xi_i \xi_j - \xi_j \xi_i) \rangle = \frac{1}{2} \langle [\xi_i, \xi_j] \rangle = \frac{i}{2} \Omega_{ij}$ , son los conmutadores entre las diferentes cuadraturas donde la matriz  $\Omega$  es definida como

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que el segundo momento del vector  $\xi$  se escribe como

$$\text{Tr}(\rho \xi_i \xi_j) = (\sigma + \frac{i}{2} \Omega)_{ij}.$$

Este segundo momento de cualquier sistema cuántico debe ser no negativo, es decir

$$\boldsymbol{\sigma} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\Omega} \geq 0,$$

donde la expresión  $\boldsymbol{\sigma} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\Omega} \geq 0$ , es una forma simplificada de decir que la matriz es positiva semidefinida. En particular las matrices positivas semidefinidas cumplen

$$\det(\boldsymbol{\sigma} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\Omega}) \geq 0, \quad (2.6)$$

y además todos los eigenvalores de  $\boldsymbol{\sigma} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\Omega}$  y sus menores principales son números no negativos. En particular puede demostrarse que la matrices de covarianza de cada uno de los modos que la conforman deben ser positivas semidefinidas, ésto es

$$\mathbf{A} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\Sigma} \geq 0, \quad \mathbf{B} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\Sigma} \geq 0,$$

lo cual en particular implica que  $\det \mathbf{A}, \det \mathbf{B} \geq 1/4$ .

Mediante transformaciones locales, como compresiones o rotaciones (las cuales no afectan el enredamiento), es posible llevar a la matriz de covarianza de la Ec. (2.4) a la llamada forma estándar  $I$ :

$$\boldsymbol{\sigma}_I = \begin{pmatrix} n & c & \\ & n & c' \\ c & & m \\ & c' & & m \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

con  $n, m \geq 1$  y  $c, c'$  dos número reales arbitrarios. Los pasos necesarios para llegar a la forma  $\boldsymbol{\sigma}_I$  de la matriz de covarianza están dados en el apéndice A.

Asimismo partiendo de la matriz de covarianza  $\boldsymbol{\sigma}_I$ , uno puede llegar mediante transformaciones locales a la forma

$$\boldsymbol{\sigma}_{II} = \begin{pmatrix} n_1 & & c_1 & \\ & n_2 & & c_2 \\ c_1 & & m_1 & \\ & c_2 & & m_2 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

con las siguientes propiedades

$$\frac{n_1 - 1}{m_1 - 1} = \frac{n_2 - 1}{m_2 - 1}, \quad |c_1| - |c_2| = \sqrt{(n_1 - 1)(m_1 - 1)} - \sqrt{(n_2 - 1)(m_2 - 1)}, \quad (2.9)$$

esta última expresión para la matriz de covarianza es llamada la forma estándar  $II$ , cabe destacar que este es un resultado válido para cualquier sistema sea Gaussiano o no. La prueba se aborda en el apéndice A.

Definiendo los operadores de dos modos

$$u = a_0 x_1 - \frac{c_1}{|c_1| a_0} x_2, \quad v = a_0 p_1 - \frac{c_2}{|c_2| a_0} p_2, \quad (2.10)$$

con  $a_0 = \sqrt{\frac{m_1 - 1}{n_1 - 1}} = \sqrt{\frac{m_2 - 1}{n_2 - 1}}$ , la Ec. (2.3) es una condición necesaria para indicar separabilidad en un sistema bipartita. Dicha condición puede escribirse como

$$a_0^2 \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{m_1 + m_2}{2a_0^2} - |c_1| - |c_2| \geq a_0^2 + \frac{1}{a_0^2}, \quad (2.11)$$

Sin embargo puede demostrarse que un estado Gaussiano es separable si y sólo si los operadores de la Ec. (2.10) cumplen la Ec. (2.3). Por lo tanto la condición (2.3) para  $\sigma_{II}$  es necesaria y suficiente para que dichos estados sean separables y una violación a esta condición es también una condición necesaria y suficiente para que exista enredamiento. La prueba de ello está basada en la propiedad de que todos los estados Gaussianos separables, pueden llevarse mediante transformaciones locales a estados con una matriz de covarianza del tipo  $\sigma_{II}$ .

A continuación se presenta otro criterio de separabilidad basado en las propiedades de la matriz de covarianza.

## 2.2. Criterio de Simon

El criterio de Simon [46] está basado en el criterio de Peres-Horodecki [12, 13] el cual establece que la positividad de la matriz densidad después de ser aplicada la operación transpuesta parcial da información sobre el enredamiento del sistema.

Supongamos un sistema bipartita de variable continua, caracterizado por su matriz densidad

$$\rho(x'_1, x'_2; x_1, x_2) = \langle x'_1, x'_2 | \rho | x_1, x_2 \rangle, \quad (2.12)$$

dicha matriz de densidad como se ha mencionado antes tiene eigenvalores no negativos, es hermitiana y de traza uno.

La operación transpuesta parcial  $\rho_{pt}(x'_1, x'_2; x_1, x_2)$ , se define como el intercambio de las variables de un modo ( $x_i \rightarrow x'_i, x'_i \rightarrow x_i$ ), por ejemplo intercambiando en el segundo modo tenemos

$$\rho_{pt}(x'_1, x'_2; x_1, x_2) = \rho(x'_1, x_2; x_1, x'_2) = \langle x'_1, x_2 | \rho | x_1, x'_2 \rangle, \quad (2.13)$$

la transpuesta parcial de una matriz densidad puede tener eigenvalores negativos, a diferencia de la matriz de densidad original. Los eigenvalores negativos suceden cuando el estado no puede separarse. Para probar ésto supongamos que el operador densidad es separable y por lo tanto puede expresarse como un producto de cada modo

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2,$$

por lo tanto la matriz de densidad puede expresarse como

$$\rho(x'_1, x'_2; x_1, x_2) = \langle x'_1, x'_2 | \rho | x_1, x_2 \rangle = \langle x'_1 | \rho_1 | x_1 \rangle \langle x'_2 | \rho_2 | x_2 \rangle,$$

la transpuesta parcial asociada a esta matriz densidad es entonces

$$\rho_{pt}(x'_1, x'_2; x_1, x_2) = \langle x'_1, x_2 | \rho | x_1, x'_2 \rangle = \langle x'_1 | \rho_1 | x_1 \rangle \langle x_2 | \rho_2 | x'_2 \rangle.$$

Debido a que los operadores densidad en cada modo  $\rho_1, \rho_2$  son operadores no negativos y hermitianos puede verse que la transpuesta parcial corresponde a la matriz densidad original



$$\rho(x'_1, x'_2; x_1, x_2) = \rho(x'_1, x_2; x_1, x'_2),$$

demostrándose así que la transpuesta parcial es no negativa para estados simplemente separables. Esta propiedad puede extenderse a estados separables no puros, dados por la matriz densidad

$$\rho = \sum_i \wp_i \rho_{1i} \otimes \rho_{2i},$$

es decir todo estado separable tiene una transpuesta parcial positiva semidefinida.

Para determinar las implicaciones de esta propiedad para estados separables es necesario estudiar la función de Wigner del sistema [52]. Dicha función es una distribución de cuasi probabilidad, la cual caracteriza al sistema en el espacio fase  $(q, p)$ .

La función de Wigner de un estado unimodal definido por una matriz densidad  $\rho$  se define como

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{i}{\hbar}p\xi} \left\langle q + \frac{1}{2}\xi \left| \rho \right| q - \frac{1}{2}\xi \right\rangle,$$

de lo cual se sigue que la función de Wigner asociada a la transpuesta de la matriz de densidad  $\rho$  es

$$\widetilde{W}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\frac{i}{\hbar}p\xi} \left\langle q - \frac{1}{2}\xi \left| \rho \right| q + \frac{1}{2}\xi \right\rangle,$$

haciendo el cambio de variable  $\xi' = -\xi$  tenemos

$$\widetilde{W}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' e^{\frac{i}{\hbar}p\xi'} \left\langle q + \frac{1}{2}\xi' \left| \rho \right| q - \frac{1}{2}\xi' \right\rangle.$$

Comparando este resultado con la definición de la función de Wigner antes de transponer se obtiene

$$\widetilde{W}(q, p) = W(q, -p).$$

En el caso de dos modos la función de Wigner es definida como

$$\begin{aligned} W(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2 e^{-\frac{i}{\hbar}(p_1\xi_1 + p_2\xi_2)} \\ &\times \left\langle q_1 + \frac{1}{2}\xi_1, q_2 + \frac{1}{2}\xi_2 \left| \rho \right| q_1 - \frac{1}{2}\xi_1, q_2 - \frac{1}{2}\xi_2 \right\rangle, \end{aligned}$$

por lo que se puede inferir que al realizar la transpuesta parcial, la función de Wigner de dos modos  $W(q_1, q_2, p_1, p_2)$  sigue la relación

$$\widetilde{W}(q_1, q_2, p_1, p_2) = W(q_1, q_2, p_1, -p_2),$$

debido a ésto es posible calcular la matriz de covarianza de la matriz transpuesta parcial a través de la matriz de covarianza normal, haciendo el cambio  $p_2 \rightarrow -p_2$ .

Al expresar la matriz  $\sigma + \frac{i}{2}\Omega$  haciendo uso de las Ecs. (2.4) y (2.5), el determinante puede ser calculado<sup>1</sup> [46] y la condición (2.6) es evaluada como

$$\det \mathbf{A} \det \mathbf{B} + \left(\frac{1}{4} - \det \mathbf{C}\right)^2 - \text{Tr}(\mathbf{A}\Sigma\mathbf{C}\Sigma\mathbf{B}\Sigma\tilde{\mathbf{C}}\Sigma) - \frac{1}{4}(\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}) \geq 0. \quad (2.14)$$

La matriz transpuesta parcial  $\sigma_{pt}$  se define como la matriz de covarianza que resulta al suponer que el sistema esta descrito por la matriz densidad transpuesta parcial (2.13) en vez de la matriz densidad normal (2.12). Esto como hemos visto corresponde a calcular la matriz de dispersión con  $p_2 \rightarrow -p_2$ , por lo tanto

$$\sigma_{pt} = \mathbf{\Gamma}\sigma\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_{q_1q_1} & \sigma_{q_1p_1} & \sigma_{q_1q_2} & -\sigma_{q_1p_2} \\ \sigma_{p_1q_1} & \sigma_{p_1p_1} & \sigma_{p_1q_2} & -\sigma_{p_1p_2} \\ \sigma_{q_2q_1} & \sigma_{q_2p_1} & \sigma_{q_2q_2} & -\sigma_{q_2p_2} \\ -\sigma_{p_2q_1} & -\sigma_{p_2p_1} & -\sigma_{p_2q_2} & \sigma_{p_2p_2} \end{pmatrix},$$

donde la matriz diagonal  $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ . Si el sistema es separable la matriz de dispersión transpuesta parcial debe cumplir ser una matriz positiva semidefinida

$$\sigma_{pt} + \frac{i}{2}\Omega \geq 0, \quad (2.15)$$

multiplicando a ambos lados de la expresión por la matriz  $\mathbf{\Gamma}$ , la Ec. (2.15) puede ser reescrita como

$$\sigma + \frac{i}{2}\mathbf{\Gamma}\Omega\mathbf{\Gamma} \geq 0,$$

al calcular el determinante de la matriz  $\sigma + \frac{i}{2}\mathbf{\Gamma}\Omega\mathbf{\Gamma}$ , la condición (2.15) puede ser expresada como

$$\det \mathbf{A} \det \mathbf{B} + \left(\frac{1}{4} + \det \mathbf{C}\right)^2 - \text{Tr}(\mathbf{A}\Sigma\mathbf{C}\Sigma\mathbf{B}\Sigma\tilde{\mathbf{C}}\Sigma) - \frac{1}{4}(\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}) \geq 0, \quad (2.16)$$

esta ecuación presenta un cambio de signo en el  $\det \mathbf{C}$ . Al combinar las ecs. (2.14) y (2.16) se llega a que un sistema separable debe de cumplir la condición necesaria

$$\det \mathbf{A} \det \mathbf{B} + \left(\frac{1}{4} - |\det \mathbf{C}|\right)^2 - \text{Tr}(\mathbf{A}\Sigma\mathbf{C}\Sigma\mathbf{B}\Sigma\tilde{\mathbf{C}}\Sigma) - \frac{1}{4}(\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}) \geq 0, \quad (2.17)$$

dicha condición es conocida como el criterio de Simon para un estado separable.

Para un estado Gaussiano el criterio de Simon es una condición necesaria y suficiente para indicar que el sistema es separable. Por lo que una violación a dicha condición (2.17) es también una condición necesaria y suficiente para indicar enredamiento.

<sup>1</sup> Las cantidades  $\det \mathbf{A}$ ,  $\det \mathbf{B}$ ,  $\det \mathbf{C}$  y  $\text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{B}\mathbf{J}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{J})$  son invariantes ante transformaciones simplécticas locales, es por ello que Simon escribe el determinante de  $\sigma + \frac{i}{2}\Omega$  en términos de estos invariantes.

Para demostrar que en el caso de los estados Gaussianos separables la condición (2.17) debe cumplirse necesariamente, utilizaremos la forma de la matriz de covarianza de la Ec. (2.7). Donde consideramos por simplicidad que  $n \geq m$  y  $c \geq c' > 0$ . Aplicando dos compresiones locales determinadas por las matrices  $S(x) = \text{diag}(x, 1/x, x, 1/x)$  y  $S(y) = \text{diag}(y, 1/y, y, 1/y)$ . Tenemos que la matriz de covarianza puede expresarse como

$$\boldsymbol{\sigma}' = S^\dagger(y)S^\dagger(x)\boldsymbol{\sigma}_I S(x)S(y) = \begin{pmatrix} y^2x^2n & 0 & y^2c & 0 \\ 0 & y^{-2}x^{-2}n & 0 & y^{-2}c' \\ y^2c & 0 & y^2x^{-2}m & 0 \\ 0 & y^{-2}c' & 0 & y^{-2}x^2m \end{pmatrix},$$

se hace notar que la compresiones locales no son transformaciones unitarias, sin embargo dejan invariante el determinante de la matriz total y de los menores principales, por lo que las propiedades de positividad de la matriz no se ven afectadas (tampoco se afecta el enredamiento).

Realizando también una rotación local en ambas cuadraturas, de forma que

$$\begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

se obtiene que las dispersiones y correlaciones pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \sigma_{q'_1q'_1} &= y^2 (x^2n \cos^2 \theta + x^{-2}m \sin^2 \theta + c \sin 2\theta), \\ \sigma_{q'_1q'_2} &= y^2 \left( c \cos 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta (x^{-2}m - x^2n) \right), \\ \sigma_{q'_2q'_2} &= y^2 (x^{-2}m \cos^2 \theta + x^2n \sin^2 \theta - c \sin 2\theta), \\ \sigma_{p'_1p'_1} &= y^{-2} (x^{-2}n \cos^2 \theta + x^2m \sin^2 \theta + c' \sin 2\theta), \\ \sigma_{p'_1p'_2} &= y^{-2} \left( c' \cos 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta (x^2m - x^{-2}n) \right), \\ \sigma_{p'_2p'_2} &= y^{-2} (x^2m \cos^2 \theta + x^{-2}n \sin^2 \theta - c' \sin 2\theta), \end{aligned}$$

además  $\sigma_{q'_ip'_j} = 0$  para  $i, j = 1, 2$ . Puede escogerse el ángulo  $\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2c}{x^2n - x^{-2}m}\right)$  de tal forma que las correlaciones  $\sigma_{q'_1q'_2} = \sigma_{p'_1p'_2} = 0$ , lográndose ésto escogiendo  $x$  tal que la condición  $\frac{c}{x^2n - x^{-2}m} = \frac{c'}{x^{-2}n - x^2m}$  se satisfaga, es decir  $x = \left(\frac{cn + c'm}{c'n + cm}\right)^{1/4}$ . La rotación en ambas cuadraturas es una transformación canónica que deja invariante el determinante de la matriz de covarianza por lo que la positividad de dicho determinante no se ve afectada. Finalmente podemos escribir la matriz de covarianza como la matriz diagonal

$$\boldsymbol{\sigma}'' = \text{diag}(k_+, k'_+, k_-, k'_-),$$

con

$$\begin{aligned} k_\pm &= \frac{1}{2}y^2 \left( x^2n + x^{-2}m \pm \sqrt{(x^2n - x^{-2}m)^2 + 4c^2} \right), \\ k'_\pm &= \frac{1}{2}y^{-2} \left( x^{-2}n + x^2m \pm \sqrt{(x^{-2}n - x^2m)^2 + 4c'^2} \right), \end{aligned}$$

la condición de positividad de la matriz de covarianza

$$\det(\boldsymbol{\sigma}'' + (i/2)\boldsymbol{\Omega}) \geq 0, \quad (2.18)$$

implica

$$\frac{1}{16} (4k_+k'_+ - 1) (4k_-k'_- - 1) \geq 0,$$

y por lo tanto

$$k_+k'_+ \geq \frac{1}{4}, \quad k_-k'_- \geq \frac{1}{4}, \quad (2.19)$$

son las condiciones que debe de cumplir la matriz transpuesta parcial para corresponder a una matriz de covarianza física, lo que es igual a decir que son las condiciones que debe cumplir una matriz de covarianza para determinar un sistema separable. Debido a que  $k_+ \geq k_-$  y  $k'_+ \geq k'_-$ , sólo es necesario evaluar la condición  $k_-k'_- \geq \frac{1}{4}$ . Escogiendo  $y$  de forma que  $k_- = k'_- = 1/2$  entonces se garantiza que la matriz  $\sigma'' - \mathbf{I}/2 \geq 0$  y por lo tanto la matriz de densidad del estado Gaussiano puede ser escrito de forma separable [46] como

$$\rho = \int d^2z_1 d^2z_2 P(z_1, z_2) |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2|.$$

En particular puede demostrarse que

$$\det \mathbf{C} \geq 0, \quad (2.20)$$

es una condición necesaria para que el sistema sea separable, por lo que  $\det \mathbf{C} < 0$  es una condición suficiente para que exista enredamiento. De igual forma la Ec. (2.20) es una condición necesaria y suficiente para estados Gaussianos.

### 2.3. Entropías lineal y de von Neumann

Las medidas entrópicas del enredamiento y en particular la entropía de von Neumann fueron las primeras cantidades en cuantificar las correlaciones no clásicas en un sistema cuántico. Para ello von Neumann y Landau introdujeron el concepto de matriz densidad para caracterizar un subsistema a partir de un sistema compuesto y obtener una forma estadística para describir un sistema cuántico. Esto ante la imposibilidad de hacerlo mediante funciones o vectores de onda. Así fue como el concepto de entropía fue extendida al introducir una forma estadística de trabajar en el esquema cuántico.

La entropía de von Neumann es la entropía de Gibbs aplicada a la mecánica cuántica. Tomando en cuenta la matriz densidad de un sistema, se puede definir la función de partición y con ello la entropía de la misma forma que se hace con una función de probabilidad clásica. La definición de la entropía de von Neumann es

$$S_{VN} = -\text{Tr}(\rho^{(j)} \ln \rho^{(j)}), \quad (2.21)$$

donde  $\rho^{(j)}$  es la matriz densidad reducida del modo  $j$ . Para un sistema bipartita existen dos matrices reducidas definidas como

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}(x'_1, x_1, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \rho(x'_1, x_2, x_1, x_2, t), \\ \rho^{(2)}(x'_2, x_2, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \rho(x_1, x'_2, x_1, x_2, t). \end{aligned}$$

Por otro lado la llamada entropía lineal se define como

$$S_L = 1 - \text{Tr}(\rho^{(j)2}), \quad (2.22)$$

siendo la entropía lineal una aproximación de la de von Neumann. Dichas entropías son medidas de enredamiento que pueden tomar los valores

$$0 \leq S_{VN} \leq \ln N, \quad 0 \leq S_L \leq \frac{1}{N},$$

donde  $N$  es la dimensión del espacio de Hilbert del sistema estudiado. Cabe señalar que las entropías lineal y de von Neumann definidas en las Ecs. (2.21) y (2.22) dan información del enredamiento entre los subsistemas pertenecientes a un sistema puro. En el caso de que los subsistemas no pertenezcan a un sistema total puro las entropías lineal y de von Neumann no miden el enredamiento entre partes.

Ambas entropías cumplen la condición de aditividad

$$S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(\rho_A) + S(\rho_B),$$

donde  $\rho_A$  y  $\rho_B$  son las matrices densidad de los dos subsistemas. Cuando el sistema es puro ( $\rho_{AB}^2 = \rho_{AB}$ ) las entropías tienen la propiedad

$$S(\rho_A) = S(\rho_B),$$

Otra característica de ambas entropías es que son invariantes ante transformaciones locales

$$S(\rho_{AB}) = S(U_1^\dagger \otimes U_2^\dagger \rho_{AB} U_1 \otimes U_2),$$

donde  $U_1$  y  $U_2$  son operaciones unitarias para el subsistema 1 y 2 respectivamente. De forma que transformaciones como rotaciones o compresiones locales no afectan el valor de la entropía ni del enredamiento.

Supongamos que el sistema a estudiar está descrito por la matriz densidad de dos modos

$$\rho(x'_1, x'_2, x_1, x_2, t) = \langle x'_1, x'_2 | \rho(t) | x_1, x_2 \rangle, \quad (2.23)$$

la cual tiene una matriz reducida para el modo uno, definida como

$$\rho^{(1)}(x'_1, x_1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \rho(x'_1, x_2, x_1, x_2, t),$$

La entropía lineal y de von Neumann pueden expresarse en términos de los eigenvalores de dicha matriz densidad  $\{e_k\}$ , los cuales son definidos mediante la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \rho^{(1)}(x'_1, x_1, t) \varphi_k(x'_1) = e_k \varphi_k(x_1),$$

donde  $\varphi_k(x_1)$  es la  $k$ -ésima eigenfunción de la matriz densidad reducida, es decir

$$S_L = 1 - \sum_{k=1}^N e_k^2, \quad S_{VN} = - \sum_{k=1}^N e_k \ln e_k, \quad (2.24)$$

de esta forma puede verse que

$$S_L, S_{VN} \geq 0,$$

dado que  $0 \leq e_k \leq 1$ . Además ambas entropías son invariantes ante la elección de base dado que dicha elección no afecta los eigenvalores.

### 2.3.1. Estados Gaussianos

Como veremos mas adelante, la función de Wigner para un sistema Gaussiano de  $d$  modos es también una función Gaussiana en el espacio fase, dada por la expresión

$$W(\mathbf{Q}) = \frac{1}{\pi^d \sqrt{\det \boldsymbol{\sigma}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{Q}} - \langle \tilde{\mathbf{R}} \rangle) \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\mathbf{Q} - \langle \mathbf{R} \rangle) \right\},$$

donde el vector  $\mathbf{Q} = (p_1, \dots, p_d, q_1, \dots, q_d)$  define las coordenadas del espacio fase y  $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$  es la inversa de la matriz de covarianza. Es posible demostrar [53] de la definición de la función de Wigner en términos de la matriz densidad  $\rho$  que  $\text{Tr} \rho^2$  puede encontrarse a través de la expresión

$$\text{Tr} \rho^2 = \frac{\pi}{2^d} \int W^2(\mathbf{Q}) d^{2d} \mathbf{Q},$$

de tal forma que al realizar la integral de la función Gaussiana  $W^2(\mathbf{Q})$ , se obtiene

$$\text{Tr} \rho^2 = \frac{1}{2^d \sqrt{\det \boldsymbol{\sigma}}},$$

esto para cualquier estado Gaussiano. En particular para estados Gaussianos de un sólo modo que describen un subsistema, lo cual será utilizado posteriormente. Por otro lado se ha demostrado [53] que para estos estados Gaussianos unimodales la relación entre la entropía de von Neumann y la pureza ( $\text{Tr} \rho^2$ ) es la siguiente

$$S_{VN} = \frac{1 - \mu}{2\mu} \ln \left( \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right) - \ln \left( \frac{2\mu}{1 + \mu} \right),$$

donde  $\mu = \text{Tr} \rho^2$ .

Es importante señalar que para que un estado Gaussiano sea puro debe cumplir

$$\det \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{4^d},$$

y los estados mezcla deben cumplir

$$\det \boldsymbol{\sigma} > \frac{1}{4^d}.$$

## 2.4. Negatividad logarítmica

La negatividad logarítmica es una cantidad que mide el enredamiento de un estado bipartita, esta medida hace uso de la matriz densidad completa del sistema bipartita a diferencia de los criterios entrópicos vistos anteriormente, los cuales son definidos por medio

de las matrices reducidas del sistema. Dicha medida está basada en la operación de transposición parcial de la matriz densidad. La matriz densidad al trasponerla parcialmente de un estado separable debe tener las mismas propiedades que una matriz densidad normal. Es decir la traspuesta parcial de un estado separable debe ser una matriz hermitiana, positiva definida con eigenvalores entre cero y uno y de traza uno. En el caso de un estado enredado, la traspuesta parcial puede tener eigenvalores negativos. Estos eigenvalores negativos son los que dirán si un sistema es separable o no

### 2.4.1. Definición estándar

La negatividad logarítmica se define haciendo uso de la operación traspuesta parcial de la matriz densidad  $\rho_{tp}$ . Cuando un sistema bipartita, descrito por la matriz densidad es separable la traspuesta parcial es un operador positivo semi-definido por lo que sus eigenvalores son positivos o cero, debido a la normalización  $\text{Tr}\rho = \text{Tr}\rho_{tp} = 1$  los eigenvalores de la traspuesta parcial deben estar entre cero y uno.

A diferencia de un sistema separable, cuando un sistema está enredado la traspuesta parcial no es un operador positivo definido y por lo tanto puede tener eigenvalores negativos. Contando el valor absoluto de los eigenvalores negativos puede medirse el enredamiento entre los dos modos del sistema. Denotando los eigenvalores negativos de  $\rho_{tp}$  como el conjunto  $\{e_i^-\}$ , la negatividad logarítmica se define como

$$\mathcal{N}(\rho) = \log_2 \left( \frac{\sum_i |e_i^-| - 1}{2} \right), \quad (2.25)$$

esta cantidad no es fácil de calcular en general, por lo que un método para calcular la negatividad logarítmica que utiliza la matriz de covarianza del sistema es descrito en la siguiente sección. Sin embargo como veremos en capítulos posteriores es posible calcular esta cantidad utilizando un procedimiento de discretización de la matriz densidad traspuesta parcial.

La traspuesta parcial de una matriz densidad  $\rho$  en la representación de posiciones está definida por la expresión

$$\rho_{pt}(x'_1, x'_2, x_1, x_2) = \rho(x'_1, x_2, x_1, x'_2),$$

es decir dicha traspuesta es obtenida mediante el intercambio de las variables  $x_2 \leftrightarrow x'_2$ .

### 2.4.2. Negatividad logarítmica para sistemas Gaussianos

Se puede obtener una forma simplificada de la negatividad logarítmica haciendo uso de la matriz de covarianza para estado Gaussianos [49]. Para un estado Gaussiano separable la matriz de covarianza y su traspuesta parcial satisfacen las condiciones

$$\sigma - \frac{\mathbf{I}}{2}, \quad \sigma_{tp} - \frac{\mathbf{I}}{2} \geq 0, \quad (2.26)$$

un estado Gaussiano no cumple estas dos condiciones si y sólo si es un estado no separable. Dichas condiciones son evaluadas entonces para determinar si el estado es separable o no.

La matriz de covarianza y también su traspuesta parcial pueden ser diagonalizadas mediante la operación

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}_d \tilde{\mathbf{S}}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{pt} = \mathbf{S}' \boldsymbol{\sigma}'_d \tilde{\mathbf{S}}', \quad (2.27)$$

donde  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}'$  son matrices simplécticas de dimensión  $4 \times 4^2$  y las matrices diagonales son  $\boldsymbol{\sigma}_d = \text{diag}(k_1, k_1, k_2, k_2)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}'_d = \text{diag}(k'_1, k'_1, k'_2, k'_2)$ , donde  $k_{1,2}$  y  $k'_{1,2}$  son llamados los eigenvalores simplécticos de la matriz de covarianza y de su traspuesta parcial respectivamente. Los eigenvalores simplécticos de la matriz de covarianza pueden ser escritos en términos de los invariantes de dicha matriz como

$$|k_{1,2}| = \frac{1}{2} \left( \sqrt{D_2 + 2\sqrt{D_0}} \mp \sqrt{D_2 - 2\sqrt{D_0}} \right), \quad (2.28)$$

siendo  $D_0$  y  $D_2$  cantidades invariantes bajo la evolución temporal dentro de Hamiltonianos cuadráticos, cuya definición es

$$D_0 = \det \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{16}, \quad D_2 = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} + 2 \det \mathbf{C} = \frac{1}{2}, \quad (2.29)$$

donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  están dadas por la Ec. (2.5).

Para la traspuesta parcial se tienen los siguiente eigenvalores simplécticos

$$|k'_{1,2}| = \frac{1}{2} \left( \sqrt{D'_2 + 2\sqrt{D_0}} \mp \sqrt{D'_2 - 2\sqrt{D_0}} \right), \quad (2.30)$$

donde  $D'_2$  está dada por la expresión

$$D'_2 = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B} - 2 \det \mathbf{C}. \quad (2.31)$$

Si el estado Gaussiano es separable la matriz de covarianza y su traspuesta parcial deben satisfacer la Ec. (2.26), por lo que los eigenvalores simplécticos deben ser  $\geq 1/2$ . Cuando el estado no es separable entonces dichos eigenvalores deben violar la Ec. (2.26) por lo que serán  $< 1/2$ . Por lo tanto se puede definir una función que mide la violación de este criterio como

$$E_N = \sum_{i=1}^2 f(|k'_i|), \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 1/2 \\ -\log_2(2x), & x < 1/2 \end{cases}$$

la cual es llamada negatividad logarítmica. Para limitar el rango de resultados que pueden obtenerse por este criterio, se define la negatividad inversa  $\mathcal{I}$  como

$$\mathcal{I} = 2^{-E_N} - 1. \quad (2.32)$$

Sin embargo sólo uno de los eigenvalores simplécticos de la traspuesta parcial puede ser negativo

$$|k'_1| = \sqrt{D'_2 + 2\sqrt{D_0}} - \sqrt{D'_2 - 2\sqrt{D_0}},$$

por lo que la negatividad inversa puede ser calculada como

<sup>2</sup> Ésto es para sistemas de dos dimensiones espaciales, en general la matriz de covarianza para  $n$  dimensiones espaciales es una matriz de  $2n \times 2n$



$$\mathcal{I} = 2|k'_1| - 1. \quad (2.33)$$

Es importante resaltar que a diferencia de las entropías lineal y de von Neumann, las cuales se tienen que aplicar a las partes de un sistema puro para detectar el enredamiento entre los subsistemas, la negatividad logarítmica puede aplicarse a sistemas bipartitas puros o no dado que esta cantidad puede detectar el enredamiento en cualquier caso.

Los diferentes criterios revisados serán empleados para caracterizar el enredamiento de estados Gaussianos y su dinámica en los siguientes capítulos.

## Capítulo 3

# Tomografía cuántica

En años recientes se ha desarrollado un nuevo formalismo de la mecánica cuántica, en el cual los sistemas cuánticos son representados mediante probabilidades clásicas. Dicho formalismo es llamado tomografía cuántica debido a sus similitudes con los métodos de tomografía de imágenes usados en el área de la salud. Este capítulo contiene una breve descripción de la tomografía cuántica. Además se discute la utilización de dicho formalismo para la detección del enredamiento en estados bipartitas. Para ello se utilizará el retrato tomográfico de qubit el cual es una reducción de la información contenida en el tomograma a probabilidades correspondientes a un sistema de qubits.

### 3.1. Representación tomográfica

A lo largo del tiempo se han hecho varios intentos de representar sistemas cuánticos por medio de probabilidades clásicas, sin embargo todos estos formalismos exhiben alguna propiedad que las distribuciones clásicas de probabilidad no tienen. Esto debido a las características cuánticas del sistema. Por este hecho estas distribuciones han sido llamadas de pseudo-probabilidad o cuasi-probabilidad, ya que no cumplen con todas las características clásicas de la probabilidad. La función de Wigner es una de las formas más conocidas y utilizadas para este fin. Dicha función mencionada anteriormente, se define como la transformada de Fourier del elemento de matriz del operador densidad  $\langle x + \frac{\xi}{2} | \rho | x - \frac{\xi}{2} \rangle$ , de la forma

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p\xi\right) \left\langle x + \frac{\xi}{2} \left| \rho \right| x - \frac{\xi}{2} \right\rangle,$$

donde  $\rho$  es el operador densidad y  $(x, p)$  establecen un punto del espacio fase.

La representación de Wigner permite obtener las distribuciones de probabilidad marginales en el espacio fase donde  $x$  y  $p$  pueden ser posiciones y momentos o cualquier conjunto de variables canónicas conjugadas como cuadraturas de un campo electromagnético. Para sistemas Gaussianos dicha función de Wigner es siempre positiva. Sin embargo para un sistema no Gaussiano la función de Wigner puede tomar valores negativos. Dicha propiedad no corresponde a la de una distribución de probabilidad clásica. Por lo que la presencia de estos valores negativos es utilizado entonces para distinguir un sistema clásico o semi-clásico de uno cuántico.

## Tomograma en mecánica clásica

En mecánica clásica la probabilidad de que una partícula ocupe una posición  $q$  con un momento  $p$ , está determinada por una función de distribución de probabilidad  $f(q, p)$ , la cual es una función no negativa y está normalizada

$$\int f(q, p) dq dp = 1,$$

la probabilidad de encontrar a la partícula con una posición entre  $q$  y  $q + dq$  y que tenga a su vez un momento entre  $p$  y  $p + dp$  está dada por la cantidad

$$f(q, p) dq dp.$$

A partir de esta distribución podemos encontrar la distribución de probabilidad para cada una de las variables  $q, p$  del espacio fase por separado, llamadas distribuciones marginales. Las cuales son definidas como

$$g(q) = \int f(q, p) dp, \quad h(p) = \int f(q, p) dq.$$

Para definir el concepto de tomograma debe estudiarse la distribución de probabilidad marginal de la posición  $X$  en un sistema de referencia rotado por un ángulo  $\theta$

$$X = q \cos \theta + p \sin \theta,$$

se hace notar que para  $\theta = 0$  se tendría la distribución de la posición  $g(q)$  y con  $\theta = \pi/2$  se tendría la marginal para el momento  $h(p)$ . Dicha distribución marginal para la posición  $X$  es dada por la expresión

$$\mathcal{W}(X, \theta) = \langle \delta(X - q \cos \theta - p \sin \theta) \rangle = \int f(q, p) \delta(X - q \cos \theta - p \sin \theta) dq dp, \quad (3.1)$$

el cual es llamado tomograma óptico.

Asimismo podemos realizar además de una rotación un reescalamiento del sistema de coordenadas, donde  $q \rightarrow sq$  y  $p \rightarrow s^{-1}p$  (siendo  $s$  un parámetro real positivo), por lo que la nueva distribución de probabilidad en la posición

$$X = s \cos \theta q + s^{-1} \sin \theta p,$$

puede escribirse como

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu) = \int f(q, p) \delta(X - \mu q - \nu p) dq dp, \quad (3.2)$$

con  $\mu = s \cos \theta$ ,  $\nu = s^{-1} \sin \theta$ . La expresión en la Ec. (3.2) es llamado tomograma simpléctico y la integral realizada es conocida como transformada de Radon, la cual es una función muy utilizada en imagenología médica.

Al realizar la integral sobre el espacio  $X$  del tomograma, uno puede demostrar la propiedad de normalización

$$\int \mathcal{W}(X, \mu, \nu) dX = \int f(q, p) \delta(X - \mu q - \nu p) dq dp dX = \int f(q, p) dq dp = 1,$$

por lo que los tomogramas simpléctico y óptico están normalizados.

La transformada inversa nos da la información de la distribución de probabilidad a partir del tomograma, la expresión inversa puede escribirse como

$$f(q, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int \mathcal{W}(X, \mu, \nu) e^{i(X - \mu q - \nu p)} dX d\mu d\nu, \quad (3.3)$$

para probarlo reemplazamos la función  $\mathcal{W}(X, \mu, \nu)$  de la Ec. (3.2) en la Ec. (3.3), obteniéndose

$$f(q, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{i(X - \mu q - \nu p)} f(q', p') \delta(X - \mu q' - \nu p') dq' dp' dX d\mu d\nu,$$

integrando primero con respecto a  $X$ , se tiene

$$f(q, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{i(\mu(q' - q) + \nu(p' - p))} f(q', p') dq' dp' d\mu d\nu,$$

y haciendo uso de la representación integral de la función delta de Dirac:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk \exp(-ikx),$$

e integrando con respecto a  $\mu$  y  $\nu$ , se llega a

$$f(q, p) = \int f(q', p') \delta(q - q') \delta(p - p') dq' dp',$$

y por lo tanto se llega a la igualdad  $f(q, p) = f(q, p)$ , probándose así la relación inversa.

Los conceptos del tomograma óptico y simpléctico pueden ser extendidos a la mecánica cuántica con ayuda de la función de Wigner como veremos a continuación.

## Tomograma cuántico

En el caso cuántico se utiliza la misma expresión del tomograma que para el caso clásico, reemplazando las variables  $(q, p)$  por operadores  $(\hat{q}, \hat{p})$ . De esta forma el tomograma óptico está dado mediante la misma expresión (3.1), es decir

$$\mathcal{W}(X, \theta) = \langle \delta(X - \hat{q} \cos \theta - \hat{p} \sin \theta) \rangle,$$

sin embargo en el caso cuántico en vez de la distribución de probabilidad clásica  $f(q, p)$ , tendremos el operador densidad  $\hat{\rho}$ , por lo que el tomograma óptico tomará la forma

$$\mathcal{W}(X, \theta) = \text{Tr}(\hat{\rho} \delta(X - \hat{q} \cos \theta - \hat{p} \sin \theta)),$$

dicha definición corresponde a la distribución de probabilidad de que el sistema tenga una posición  $X = q \cos \theta + p \sin \theta$ . Se sabe que la integral sobre un eje en el espacio fase  $(q, p)$  de la función de Wigner es igual a la distribución de probabilidad sobre el eje en

cuestión. Por lo tanto podemos aseverar que el tomograma óptico equivale a la integral de la función de Wigner donde la posición sea  $X = q \cos \theta + p \sin \theta$ , es decir

$$\mathcal{W}(X, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int dq dp W(q, p) \delta(X - q \cos \theta - p \sin \theta),$$

La distribución tomográfica simpléctica corresponde a la probabilidad de una variable  $X$ , la cual es una transformación canónica representada por una rotación y un reescalamiento de las variables del espacio fase  $(q, p)$ , con la definición

$$X = s \cos \theta q + s^{-1} \sin \theta p,$$

y que de acuerdo a [14, 28], dicha distribución de probabilidad puede obtenerse a partir de una función de onda  $\psi(x_1, x_2)$ , y es definida como

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu; t) \equiv \frac{1}{2\pi|\nu|} \left| \int \psi(y; t) \exp\left(\frac{i\mu}{2\nu} y^2 - \frac{iXy}{\nu}\right) dy \right|^2. \quad (3.4)$$

donde  $\mu = s \cos \theta$ ,  $\nu = s^{-1} \sin \theta$ . Esta distribución de probabilidad es no negativa y normalizada, es decir

$$\int \mathcal{W}(X, \mu, \nu; t) dX = 1.$$

El tomograma simpléctico puede ser generalizado a sistemas bipartitas. En este caso el tomograma es la distribución de probabilidad de dos variables de posición  $(X_1, X_2)$  en el espacio fase que corresponde a los rotaciones y reescalamientos

$$X_1 = \mu_1 q_1 + \nu_1 p_1, \quad X_2 = \mu_2 q_2 + \nu_2 p_2,$$

por lo tanto el tomograma bidimensional es igual a

$$\mathcal{W}(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) = \langle \delta(X_1 - \mu_1 \hat{q}_1 - \nu_1 \hat{p}_1) \delta(X_2 - \mu_2 \hat{q}_2 - \nu_2 \hat{p}_2) \rangle,$$

el cual en analogía con el tomograma en una dimensión puede ser expresado en términos de la función de Wigner de dos modos de la forma

$$\mathcal{W}(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int dq_1 dq_2 dp_1 dp_2 W(q_1, q_2, p_1, p_2) \times \delta(X_1 - \mu_1 q_1 - \nu_1 p_1) \delta(X_2 - \mu_2 q_2 - \nu_2 p_2), \quad (3.5)$$

El tomograma óptico para un sistema de dos dimensiones se obtiene cuando no hay un reescalamiento en las variables  $X_1$  y  $X_2$  el cual puede obtenerse a través del tomograma simpléctico como

$$\mathcal{W}_0(X_1, \theta_1, X_2, \theta_2) = \mathcal{W}(X_1, \cos \theta_1, \sin \theta_1, X_2, \cos \theta_2, \sin \theta_2).$$

Esta distribución de probabilidad corresponde a un sistema de referencia donde solamente se realiza la rotación de las cuadraturas.

Toda la información del sistema está contenida en el tomograma óptico o simpléctico. Una de las propiedades más importantes del tomograma óptico es que ha sido reconstruido experimentalmente para varios sistemas [54, 55].

También es posible obtener el tomograma simpléctico a partir del tomograma óptico mediante la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(X_1, \mu_1, \nu_1; X_2, \mu_2, \nu_2) &= [(\mu_1^2 + \nu_1^2)(\mu_2^2 + \nu_2^2)]^{-1/2} \\ &\times \mathcal{W}_0 \left( \frac{X_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \nu_1^2}}, \tan^{-1} \frac{\nu_1}{\mu_1}, \frac{X_2}{\sqrt{\mu_2^2 + \nu_2^2}}, \tan^{-1} \frac{\nu_2}{\mu_2} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $\mathcal{W}_0$  denota al tomograma óptico. Como hemos visto el tomograma es determinado por la matriz densidad, sin embargo la matriz densidad puede ser reconstruida también a través de su correspondiente tomograma de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \rho(q_1, q_2; q'_1, q'_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dX_1 dX_2 d\mu_1 d\mu_2 \mathcal{W}(X_1, \mu_1, q_1 - q'_1; X_2, \mu_2, q_2 - q'_2) \\ &\times \exp(i [X_1 - \mu_1 (q_1 + q'_1) / 2 + X_2 - \mu_2 (q_2 + q'_2) / 2]), \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $\rho(q_1, q_2; q'_1, q'_2) = \langle q_1, q_2 | \hat{\rho} | q'_1, q'_2 \rangle$ .

En este trabajo estamos interesados en describir sistemas Gaussianos bipartitas y su enredamiento por medio de la representación tomográfica. Dicha representación corresponde a una función Gaussiana en el espacio definido por las variables  $X_1$  y  $X_2$ . Es decir para un estado Gaussiano de dos modos, el tomograma simpléctico puede ser escrito como una distribución normal de probabilidad de dos variables

$$\mathcal{W}(X_1, \mu_1, \nu_1; X_2, \mu_2, \nu_2; t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \sigma_{XX}(t)}} \exp \left( -\frac{1}{2} (X'_1, X'_2) \sigma_{XX}^{-1}(t) \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} \right), \quad (3.8)$$

donde

$$X'_1 = X_1 - \langle X_1 \rangle, \quad X'_2 = X_2 - \langle X_2 \rangle .$$

y cada una de las variables  $X_1, X_2$  corresponde a una rotación y reescalamiento de las cuadraturas  $(q_1, p_1)$  y  $(q_2, p_2)$  respectivamente. Asimismo la matriz de dispersión  $\sigma_{XX}(t)$  puede escribirse como

$$\sigma_{XX}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1 X_1}(t) & \sigma_{X_1 X_2}(t) \\ \sigma_{X_2 X_1}(t) & \sigma_{X_2 X_2}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

donde las dispersiones y covarianzas son definidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sigma_{X_1 X_1}(t) &= \mu_1^2 \sigma_{q_1 q_1}(t) + \nu_1^2 \sigma_{p_1 p_1}(t) + 2\mu_1 \nu_1 \sigma_{q_1 p_1}(t), \\ \sigma_{X_2 X_2}(t) &= \mu_2^2 \sigma_{q_2 q_2}(t) + \nu_2^2 \sigma_{p_2 p_2}(t) + 2\mu_2 \nu_2 \sigma_{q_2 p_2}(t), \\ \sigma_{X_1 X_2}(t) &= \mu_1 \mu_2 \sigma_{q_1 q_2}(t) + \nu_1 \nu_2 \sigma_{p_1 p_2}(t) + \mu_1 \nu_2 \sigma_{q_1 p_2}(t) + \mu_2 \nu_1 \sigma_{q_2 p_1}(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Los valores esperados de las variables  $\langle X_1 \rangle$  y  $\langle X_2 \rangle$  son obtenidos en términos de los promedios de las correspondientes cuadraturas

$$\langle X_1 \rangle = \mu_1 \langle \hat{q}_1 \rangle + \nu_1 \langle \hat{p}_1 \rangle, \quad \langle X_2 \rangle = \mu_2 \langle \hat{q}_2 \rangle + \nu_2 \langle \hat{p}_2 \rangle .$$

De esta forma es suficiente conocer la matriz de covarianza y la media de las cuadraturas  $(q_1, p_1)$  y  $(q_2, p_2)$  para encontrar el tomograma de los estados Gaussianos.

### 3.2. Estudio del enredamiento entre dos modos en el esquema tomográfico

A continuación se discutirá el enredamiento desde el punto de vista de los tomogramas bipartitas, para ello se estudiará primero como puede ser definido un sistema sin enredamiento (separable) en términos de la matriz densidad y de la función de Wigner y posteriormente para la representación tomográfica bidimensional.

Cuando el sistema bipartita es separable, la matriz densidad del sistema puede expresarse como la suma convexa de productos directos de dos subsistemas, es decir

$$\hat{\rho} = \sum_k \wp_k \hat{\rho}_{1k} \otimes \hat{\rho}_{2k}, \quad (3.11)$$

donde  $\hat{\rho}_{1k}$  y  $\hat{\rho}_{2k}$  son las matrices densidad para el primer y segundo modos del sistema bipartita, y el sistema tiene una probabilidad  $\wp_k$  de ser descrito por el producto de dichos operadores. Para calcular la función de Wigner de dos modos correspondiente a la matriz densidad, la función de Wigner de dos modos (en un sistema de unidades donde  $\hbar = 1$ ) es definida como

$$W(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2 \left\langle q_1 + \frac{\xi_1}{2}, q_2 + \frac{\xi_2}{2} \left| \hat{\rho} \right| q_1 - \frac{\xi_1}{2}, q_2 - \frac{\xi_2}{2} \right\rangle e^{-i(p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2)}, \quad (3.12)$$

al introducir la expresión de  $\hat{\rho}$  para el sistema separable (3.11) en la función de Wigner de dos modos (3.12), se obtiene

$$W(q_1, q_2, p_1, p_2) = \sum_k \wp_k W_k(q_1, p_1) W_k(q_2, p_2), \quad (3.13)$$

donde  $W_k(q_i, p_i) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_i \left\langle q_i + \frac{\xi_i}{2} \left| \hat{\rho}_{ik} \right| q_i - \frac{\xi_i}{2} \right\rangle e^{-ip_i \xi_i}$ , es la función de Wigner de una dimensión para la matriz reducida  $\hat{\rho}_{ik}$ , con  $i = 1, 2$ . Por lo que si un sistema es separable la función de Wigner puede expresarse como la suma convexa del producto de funciones de Wigner de cada uno de los modos. Por lo cual al sustituir la función de Wigner para el estado separable (3.13) a la definición del tomograma del sistema bipartita (3.5), se tiene

$$\mathcal{W}(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) = \sum_k \wp_k \mathcal{W}_k(X_1, \mu_1, \nu_1) \mathcal{W}_k(X_2, \mu_2, \nu_2),$$

con  $\mathcal{W}_k(X_i, \mu_i, \nu_i) = \frac{1}{2\pi} \int dq_i dp_i W_k(q_i, p_i) \delta(X_i - q_i \mu_i - p_i \nu_i)$ , por lo que el tomograma asociado a un estado separable podrá expresarse como la suma convexa del producto de los tomogramas de un sólo modo. En el caso de que el sistema presente enredamiento el tomograma no podrá ser representado mediante una suma convexa de productos de tomogramas. En el caso de estados puros simplemente separables la matriz de densidad es escrita como el producto directo de dos matrices densidad para cada uno de los subsistemas  $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ , por lo que en este caso el tomograma simpléctico es el producto de los tomogramas reducidos, es decir

$$\mathcal{W}(X_1, \mu_1, \nu_1, X_2, \mu_2, \nu_2) = \mathcal{W}(X_1, \mu_1, \nu_1) \mathcal{W}(X_2, \mu_2, \nu_2),$$

donde los tomogramas reducidos se escriben como

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(X_1, \mu_1, \nu_1; t) &= \int \mathcal{W}(X_1, \mu_1, \nu_1; X_2, \mu_2, \nu_2; t) dX_2, \\ \mathcal{W}(X_2, \mu_2, \nu_2; t) &= \int \mathcal{W}(X_1, \mu_1, \nu_1; X_2, \mu_2, \nu_2; t) dX_1.\end{aligned}$$

Esta propiedad para estados separables se utilizará a continuación para desarrollar un criterio de distinción entre estados separables y estados no separables.

### 3.2.1. Retrato de qubit

En esta sección se hace una revisión de la idea desarrollada para el estudio del enredamiento para tomogramas de espín la cual será extendida en otros capítulos para los tomogramas simplécticos.

Supongamos que existe un espacio con espín total  $j$ . El tomograma de espín de este sistema con proyección  $m$  es definido como

$$w(m, \vec{n}) = \langle j, m | u(\vec{n}) \rho u(\vec{n})^\dagger | j, m \rangle,$$

donde  $\rho$  es la matriz de densidad del sistema y  $u(\vec{n})$  es una matriz unitaria de  $2j + 1$  dimensiones y  $\vec{n}$  es un vector unitario que establece un punto en la esfera de Bloch:  $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ . Los posibles valores de  $m$  son  $-j, -j + 1, \dots, j - 1, j$ . Definimos que el vector con las  $2j + 1$  entradas correspondientes a cada uno de los valores de  $m$  es llamado el tomograma de espín  $\vec{w}(m, \vec{n})$ . Cada entrada al ser una probabilidad es un número positivo y está normalizado, por lo tanto

$$\sum_{m=-j}^j w(m, \vec{n}) = 1.$$

El sistema de espín es caracterizado por el tomograma de espín  $w(m, \vec{n})$  dado que para cada matriz densidad  $\rho$  existe un único vector  $w(m, \vec{n})$  y viceversa.

El retrato de qubit consiste en condensar la información de las  $2j + 1$  componentes del tomograma  $w(m, \vec{n})$  en sólo cuatro, es decir reducir el sistema a un problema de espín  $3/2$  o dos qubits. Esto con el propósito de estudiar el enredamiento haciendo uso de los métodos para dos qubits.

Para hacer la reducción del tomograma se toman cuatro conjuntos de entradas del vector  $w(m, \vec{n})$ , tales que la intersección entre cada conjunto sea nula y que ninguno de ellos corresponda el conjunto vacío. Se define que cada entrada del retrato de qubit es igual a la suma de los elementos de cada conjunto. Para ilustrar este procedimiento se toma  $j = 3$ . Para este sistema se tiene un tomograma con 7 entradas, cada una correspondiente a una proyección de  $m = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ . Se toman cuatro conjuntos de entradas del tomograma, por ejemplo los conjuntos

$$\{w(-2, \vec{n}), w(3, \vec{n})\}, \{w(-1, \vec{n}), w(0, \vec{n})\}, \{w(-3, \vec{n})\}, \{w(2, \vec{n}), w(1, \vec{n})\},$$

entonces el retrato de qubit será el vector



$$(w(-2, \vec{n}) + w(3, \vec{n}), w(-1, \vec{n}) + w(0, \vec{n}), w(-3, \vec{n}), w(2, \vec{n}) + w(1, \vec{n})).$$

Cada entrada del retrato de qubit es denotado como  $\mathcal{P}_i(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2)$ , con  $i = 1, \dots, 4$ .

El retrato de qubit ha sido utilizado para definir desigualdades de Bell las cuales serán exploradas a continuación

### 3.2.1.1. Desigualdades de Bell para el retrato de qubit

Utilizando el retrato de qubit puede estudiarse el enredamiento en un sistema de espín [56]. Para ello se supone que el espín total  $j$  es el resultado de un subsistema separable de espines  $j_1$  y  $j_2$ . En este caso la matriz densidad del sistema total es igual al producto directo de los subsistemas ( $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ ) y lo mismo pasa para la matriz unitaria que define el tomograma simpléctico ( $u = u_1 \otimes u_2$ ). Por lo que el tomograma de espín puede escribirse como

$$w(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \langle j_1, m_1 | u_1(\vec{n}_1) \rho_1 u_1^\dagger(\vec{n}_1) | j_1, m_1 \rangle \otimes \langle j_2, m_2 | u_2(\vec{n}_2) \rho_2 u_2^\dagger(\vec{n}_2) | j_2, m_2 \rangle,$$

por lo tanto el tomograma del sistema total es el producto directo de los tomogramas de los subsistemas, esto es

$$\vec{w}(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \vec{w}(m_1, \vec{n}_1) \otimes \vec{w}(m_2, \vec{n}_2).$$

De la misma forma puede observarse que el retrato de qubit para un estado separable puede escribirse como el producto directo de dos vectores estocásticos

$$\vec{\mathcal{P}}(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \vec{r}(m_1, \vec{n}_1) \otimes \vec{s}(m_2, \vec{n}_2),$$

donde  $\vec{r}$  y  $\vec{s}$  son de la forma

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 1 - x \end{pmatrix}, \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} y \\ 1 - y \end{pmatrix},$$

con  $0 \leq x, y \leq 1$ . Haciendo uso de esta propiedad se definirá una matriz estocástica  $\mathbf{M}$  de la siguiente forma.

Primero se toman cuatro diferentes conjuntos de los vectores  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  como sigue:

$$\vec{n}_1^{(a)}, \vec{n}_2^{(b)}; \vec{n}_1^{(a)}, \vec{n}_2^{(c)}; \vec{n}_1^{(d)}, \vec{n}_2^{(b)}; \vec{n}_1^{(d)}, \vec{n}_2^{(c)},$$

donde cada uno de ellos representa un punto diferente en la esfera de Bloch. Para cada conjunto se realiza el tomograma de espín caracterizado por los vectores

$$\vec{w}(m_1, m_2, \vec{n}_1^{(a)}, \vec{n}_2^{(b)}), \vec{w}(m_1, m_2, \vec{n}_1^{(a)}, \vec{n}_2^{(c)}), \vec{w}(m_1, m_2, \vec{n}_1^{(d)}, \vec{n}_2^{(b)}), \vec{w}(m_1, m_2, \vec{n}_1^{(d)}, \vec{n}_2^{(c)}),$$

y se construye el retrato de espín para cada uno de los tomogramas

$$\begin{aligned} &\vec{\mathcal{P}}^{(a,b)}(m_1, m_2, \vec{n}_1^{(a)}, \vec{n}_2^{(b)}), \vec{\mathcal{P}}^{(a,c)}(m_1, m_2, \vec{n}_1^{(a)}, \vec{n}_2^{(c)}), \\ &\vec{\mathcal{P}}^{(d,b)}(m_1, m_2, \vec{n}_1^{(d)}, \vec{n}_2^{(b)}), \vec{\mathcal{P}}^{(d,c)}(m_1, m_2, \vec{n}_1^{(d)}, \vec{n}_2^{(c)}). \end{aligned}$$

Definimos la matriz  $\mathbf{M}$  tal que cada una de sus columnas corresponde a uno de los retratos de espín, es decir

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1^{(a,b)} & \mathcal{P}_1^{(a,c)} & \mathcal{P}_1^{(d,b)} & \mathcal{P}_1^{(d,c)} \\ \mathcal{P}_2^{(a,b)} & \mathcal{P}_2^{(a,c)} & \mathcal{P}_2^{(d,b)} & \mathcal{P}_2^{(d,c)} \\ \mathcal{P}_3^{(a,b)} & \mathcal{P}_3^{(a,c)} & \mathcal{P}_3^{(d,b)} & \mathcal{P}_3^{(d,c)} \\ \mathcal{P}_4^{(a,b)} & \mathcal{P}_4^{(a,c)} & \mathcal{P}_4^{(d,b)} & \mathcal{P}_4^{(d,c)} \end{pmatrix},$$

en el caso de estados separables dicha matriz es escrita como

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} xz & xt & yz & yt \\ x(1-z) & x(1-t) & y(1-z) & y(1-t) \\ (1-x)z & (1-x)t & (1-y)z & (1-y)t \\ (1-x)(1-z) & (1-x)(1-t) & (1-y)(1-z) & (1-y)(1-t) \end{pmatrix},$$

donde  $0 \leq x, y, z, t \leq 1$ . Por lo tanto la matriz  $\mathbf{M}$  puede escribirse como el producto de las matrices estocásticas

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2,$$

donde las submatrices  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$  se definen como

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} x & y \\ 1-x & 1-y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} z & t \\ 1-z & 1-t \end{pmatrix},$$

para implementar un criterio similar al de la desigualdad de Bell-CHSH se define la siguiente función de las entradas de la matriz  $\mathbf{M}$ :

$$\mathcal{B}(x, y, z, t) = \sum_{i,j=1}^4 \mathbf{M}_{ij} \mathbf{C}_{ji},$$

con la matriz  $\mathbf{C}$  definida como

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

donde la forma de la matriz  $\mathbf{C}$  es una elección un tanto arbitraria. Dado que esta matriz se ha definido de tal forma que en la definición de la función  $\mathcal{B}$  contribuyan dos elementos de cada columna de  $\mathbf{M}$  con un signo negativo y los otros dos elementos con signo positivo. El parámetro  $\mathcal{B}$  tiene una dependencia lineal de cada variable  $x, y, z$  y  $t$ , por lo que cumple con la propiedad

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathcal{B}(x, y, z, t) = 0,$$

lo cual indica que sus valores extremos están en las fronteras de dichas variables. Al evaluar el valor de  $\mathcal{B}$  en las fronteras, puede verse que su valor absoluto cumple

$$0 \leq |\mathcal{B}| \leq 2.$$

Recordando que este resultado es para estados separables, en el caso no separable existe la cota

$$0 \leq |\mathcal{B}| \leq 4,$$

por lo que un parámetro  $|\mathcal{B}| > 2$  indica que el sistema no es separable y que hay enredamiento. En el caso de correlaciones cuánticas se ha demostrado [22] que existe la cota  $0 \leq |\mathcal{B}| \leq 2\sqrt{2}$ .

Uno de los resultados principales de esta tesis es la aplicación de este principio a los tomogramas simplécticos y con esto estudiar el enredamiento en sistemas de variable continua.

Se sabe que los tomogramas ópticos pueden ser medidos experimentalmente por medio de la detección homodina la cual es presentada en la siguiente sección.

### 3.3. Detección y reconstrucción de estados

Uno de los métodos experimentales más utilizados para la reconstrucción de estados cuánticos es la llamada medición homodina. Esta medición permite obtener la probabilidad de encontrar al estado en una superposición de sus cuadraturas. Mediante un conjunto de mediciones es posible reconstruir el tomograma asociado al estado o su matriz de covarianza.

#### 3.3.1. Detección homodina

La detección homodina es aquella en la cual un haz de interés y un haz denominado oscilador local (OL) se hacen incidir en dos caras contiguas de un divisor de haz. Este divisor mezcla ambos haces y al final de él se obtienen dos señales en las dos caras restantes del divisor, las cuales son medidas por fotodetectores. Se calcula la diferencia entre estas dos corrientes y al resultado se le conoce como señal homodina. Ver figura (3.1)

La señal del OL se utiliza para amplificar la señal de interés y por lo general corresponde a un estado coherente.

Los operadores de creación de los haces incidente y del oscilador local (OL) son representados por  $a$  y  $b$  respectivamente. Por otro lado los operadores de creación de los haces de salida del divisor de haz son representados como  $c$  y  $d$ . La relación entre los operadores de entrada y salida del divisor de haz es entonces

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

por lo que los operadores que miden la corriente que se detecta en los fotodetectores serán

$$I_c = \langle c^\dagger c \rangle = \frac{1}{2} \langle (a^\dagger - ib^\dagger)(a + ib) \rangle, \quad I_d = \langle d^\dagger d \rangle = \frac{1}{2} \langle (b^\dagger - ia^\dagger)(b + ia) \rangle,$$

lo cual indica que la señal homodina ( $I_c - I_d$ ), es igual a

$$\delta I = I_c - I_d = i \langle a^\dagger b - ab^\dagger \rangle,$$

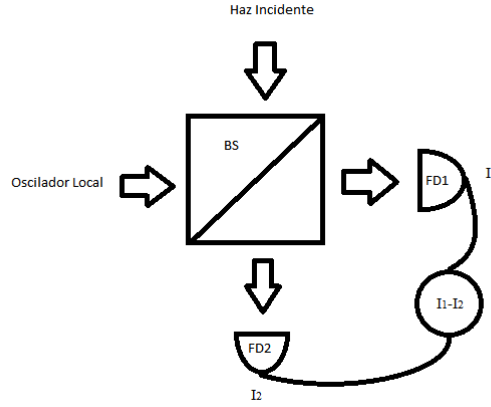


Figura 3.1. Esquema de la detección homodina. Un haz incidente se mezcla a través de un divisor de haz (BS), posteriormente se miden las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  en los puertos de salida del divisor. La medición se hace por medio de fotodetectores (FD1 y FD2) para después ser calculada la diferencia de dichas corrientes

suponiendo que el OL está en el estado coherente  $|\alpha e^{-i\omega t}\rangle$ , con  $\alpha = |\alpha| e^{i\phi}$ , la señal homodina toma la forma

$$\delta I = i \langle a^\dagger \alpha e^{-i\omega t} - a \alpha^* e^{i\omega t} \rangle = i |\alpha| \langle a^\dagger e^{-i\omega t} e^{i\phi} - a e^{i\omega t} e^{-i\phi} \rangle,$$

definiendo la fase  $\theta = \phi + \pi/2$  tenemos entonces

$$\delta I = |\alpha| \langle a^\dagger e^{-i\omega t} e^{i\theta} + a e^{i\omega t} e^{-i\theta} \rangle,$$

suponiendo que el haz de interés tiene la misma frecuencia que el haz de referencia del oscilador local, es decir

$$a = a_0 e^{-i\omega t},$$

se llega a que la señal homodina toma la forma

$$\delta I = |\alpha| \langle a_0^\dagger e^{i\theta} + a_0 e^{-i\theta} \rangle,$$

y por lo tanto el valor de la fluctuación de la señal homodina será

$$(\Delta(\delta I))^2 = |\alpha|^2 (\Delta X(\theta))^2.$$

donde  $X(\theta) = a_0 e^{-i\theta} + a_0^\dagger e^{i\theta}$ . Variando el valor de  $\theta$  es posible obtener información de las fluctuaciones del haz de interés el cual está descrito por los operadores bosónicos  $a_0$  y  $a_0^\dagger$ . Por ejemplo para  $\theta = 0$ ,  $(\Delta(\delta I))^2 = 2|\alpha|^2 (\Delta x)^2$  y para  $\theta = \pi/2$ ,  $(\Delta(\delta I))^2 = 2|\alpha|^2 (\Delta p)^2$  con  $x = (a_0 + a_0^\dagger)/\sqrt{2}$  y  $p = i(a_0^\dagger - a_0)/\sqrt{2}$ .

Para obtener información de haces bipartitas se prepara el haz incidente en varias formas diferentes para obtener las 10 entradas independientes de la matriz de correlación [57].

Supongamos que tenemos dos haces de luz donde  $a_1$  y  $a_2$  son los operadores de creación para los subsistemas que conforman el estado bipartita. Para calcular la diagonal de la

matriz de covarianza se miden las señales homodinas de los haces por separado, con ello se obtienen las entradas  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  y  $\sigma_{44}$  de la matriz de covarianza. Para la medición de las demás entradas se hace uso de 4 operadores auxiliares, definidos como

$$\begin{aligned} a_0^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2), & a_0^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - a_2), \\ a_0^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ia_1 + a_2), & a_0^{(4)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ia_1 - a_2), \end{aligned}$$

de forma que las las entradas de la matriz de covarianza son

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{1}{2} \left( \langle x^{(1)2} \rangle - \langle x^{(2)2} \rangle \right) - \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle, \\ \sigma_{14} &= \frac{1}{2} \left( \langle p^{(3)2} \rangle - \langle p^{(4)2} \rangle \right) - \langle x_1 \rangle \langle p_2 \rangle, \\ \sigma_{23} &= \frac{1}{2} \left( \langle x^{(4)2} \rangle - \langle x^{(3)2} \rangle \right) - \langle p_1 \rangle \langle x_2 \rangle, \\ \sigma_{24} &= \frac{1}{2} \left( \langle p^{(1)2} \rangle - \langle p^{(2)2} \rangle \right) - \langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle, \end{aligned}$$

donde  $p_i = i(a_i^\dagger - a_i)/\sqrt{2}$ ,  $x_i = (a_i + a_i^\dagger)/\sqrt{2}$ ,  $p^{(i)} = i(a_0^{(i)\dagger} - a_0^{(i)})/\sqrt{2}$  y  $x^{(i)} = (a_0^{(i)} + a_0^{(i)\dagger})/\sqrt{2}$ .

Las fluctuaciones restantes son obtenidas mediante los modos auxiliares  $z_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i + p_i)$  y  $t_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i - p_i)$  como

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \frac{1}{2} (\langle z_1^2 \rangle - \langle t_1^2 \rangle) - \langle x_1 \rangle \langle p_1 \rangle, \\ \sigma_{34} &= \frac{1}{2} (\langle z_2^2 \rangle - \langle t_2^2 \rangle) - \langle x_2 \rangle \langle p_2 \rangle. \end{aligned}$$

De ésta forma todas las entradas de la matriz de covarianza pueden ser obtenidas experimentalmente.

## Capítulo 4

# Hamiltonianos cuadráticos

Los Hamiltonianos cuadráticos son de gran importancia en el estudio de la Óptica Cuántica. Ésto debido a que algunas de las interacciones no lineales entre dos haces pueden expresarse como formas cuadráticas de las cuadraturas del campo electromagnético. Por otro lado los estados Gaussianos, de los cuales se hará un estudio más adelante, tienen la propiedad de seguir siendo Gaussianos bajo la evolución de Hamiltonianos cuadráticos por lo que el cálculo de sus propiedades no se complica demasiado con la dinámica dictada por ellos.

Para obtener la evolución de los estados Gaussianos en el tiempo haremos uso de los invariantes dependientes del tiempo. Los operadores invariantes dependientes del tiempo son un conjunto de operadores  $\{\Lambda\}$ , cuya diferencial en el tiempo es nula,  $d\Lambda/dt = 0$ . Esto significa que su promedio  $\langle\Lambda\rangle$  es el mismo para cualquier instante a pesar de que los operadores dependen explícitamente del tiempo. Es sabido que en el caso de Hamiltonianos cuadráticos, estos invariantes son lineales en las variables que definen el Hamiltoniano [59] y que con ellos es posible obtener la función de Green del sistema.

Por estos motivos a continuación se hará un estudio de los Hamiltonianos cuadráticos y sus invariantes dependientes del tiempo.

### 4.1. Hamiltoniano cuadrático

En esta sección se estudian Hamiltonianos cuadráticos que describirán posteriormente sistemas de la luz.

Un Hamiltoniano multidimensional cuadrático es aquel que puede escribirse de la siguiente forma

$$H = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{\Omega} \mathbf{A} + \tilde{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{A}, \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{A}$  es el vector que contiene los operadores bosónicos, y  $\tilde{\mathbf{A}}$  es el vector transpuesto de  $\mathbf{A}$ . El cual es definido como

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left( \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}}^\dagger \right) = \left( a_1, \dots, a_n, a_1^\dagger, \dots, a_n^\dagger \right),$$

es un vector de  $2n$  dimensiones construido con los operadores de creación y aniquilación para cada uno de los modos en los cuales interviene el Hamiltoniano. Los operadores que definen el vector  $\mathbf{A}$  tienen las siguientes reglas de conmutación

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0,$$

es decir los operadores de dos modos diferentes conmutan. Por otro lado la matriz  $\mathbf{\Omega}$  de la Ec. (4.1) se define como

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 & \boldsymbol{\omega}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 & \boldsymbol{\omega}_1^* \end{pmatrix}$$

la cual es una matriz de coeficientes que pueden incluso depender explícitamente del tiempo. La matriz  $\mathbf{\Omega}$  es de dimensión  $2n \times 2n$  y cada uno de sus bloques ( $\boldsymbol{\omega}_i$ ), es de dimensión  $n \times n$ . El vector de de  $2n$  entradas asociado a la parte lineal del Hamiltoniano es  $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}} = (\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1^*)$ , el cual también puede depender del tiempo. Dada la hermiticidad del Hamiltoniano se sigue que la matriz por bloques  $\boldsymbol{\omega}_1$  de  $\mathbf{\Omega}$  tiene la propiedad de ser simétrica, es decir  $\boldsymbol{\omega}_1 = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1$ .

Definiendo las cuadraturas para cada uno de los modos del campo electromagnético como

$$p_j = i\sqrt{\frac{\omega_j}{2}}(a_j^\dagger - a_j), \quad q_j = \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}}(a_j + a_j^\dagger),$$

donde  $\omega_j$  es la frecuencia del modo  $j$ . Entonces el Hamiltoniano puede reescribirse en dichas cuadraturas del campo electromagnético como

$$H = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{B}\mathbf{X} + \tilde{\boldsymbol{\Delta}}\mathbf{X}, \quad (4.2)$$

donde  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}}) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  es el vector de las cuadraturas de  $2n$  entradas y  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \\ \tilde{\mathbf{b}}_2 & \mathbf{b}_4 \end{pmatrix}$  es la matriz de coeficientes que pueden depender del tiempo y cuyas matrices por bloques  $\mathbf{b}_1$  y  $\mathbf{b}_4$  son simétricas debido a la hermiticidad de  $H$ . Además la matriz  $\mathbf{B}$  tiene componentes reales y su dimensión es  $2n \times 2n$ , por lo que cada uno de sus bloques es de dimensión  $n \times n$ , y  $\tilde{\boldsymbol{\Delta}} = (\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\delta}}_2)$  es el vector de coeficientes lineales de  $2n$  dimensiones.

## 4.2. Invariantes lineales dependientes del tiempo

Como se ha mencionado los invariantes dependientes del tiempo [59] son cantidades cuyos valores esperados son los mismos a cualquier instante. En el caso de Hamiltonianos cuadráticos como los de la Ec. (4.2), existen  $2n$  invariantes dependientes del tiempo, los cuales son lineales en los conjuntos de operadores conjugados  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Estos operadores invariantes serán denotados como  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  y es posible escribirlos en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & -\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 & -\mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Las ecuaciones que los invariantes deben de cumplir son las siguientes

$$\frac{d}{dt}P_j = \frac{i}{\hbar}[H, P_j] + \frac{\partial}{\partial t}P_j = 0, \quad \frac{d}{dt}Q_j = \frac{i}{\hbar}[H, Q_j] + \frac{\partial}{\partial t}Q_j = 0. \quad (4.4)$$

con  $j = 1, 2, \dots, n$ . De las Ecs. (4.4) y (4.3) puede verse que debe de cumplirse

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{b}_1\mathbf{u}_i + \mathbf{b}_2\mathbf{v}_i, \\ \dot{\mathbf{u}}_i &= -\mathbf{b}_3\mathbf{u}_i - \mathbf{b}_4\mathbf{v}_i, \\ \dot{\mathbf{w}}_i &= \boldsymbol{\delta}_1\mathbf{u}_i + \boldsymbol{\delta}_2\mathbf{v}_i, \end{aligned} \quad (4.5)$$

éstas igualdades corresponden a las ecuaciones clásicas de movimiento para una función Hamiltoniana descrita por la Ec. (4.2). Las condiciones iniciales que debemos imponer para que los operadores invariantes  $(P_j, Q_j)$  tengan las mismas relaciones de conmutación de las cuadraturas  $(p_j, q_j)$  son:  $\mathbf{v}_1(t=0) = \mathbf{I} = -\mathbf{u}_2(0)$ ,  $\mathbf{v}_2(0) = 0 = -\mathbf{u}_1(0)$ . Ésto implica que la matriz

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & -\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 & -\mathbf{u}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

debe ser una matriz simpléctica. Es decir, deja invariante la norma simpléctica  $\Sigma$ , ésto es  $\tilde{\mathbf{S}}\Sigma\mathbf{S} = \Sigma$ , con

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto último se traduce en que la matriz  $\mathbf{S}$  debe cumplir las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1\tilde{\mathbf{v}}_1 &= \mathbf{v}_1\tilde{\mathbf{u}}_1, \\ \mathbf{u}_2\tilde{\mathbf{v}}_2 &= \mathbf{v}_2\tilde{\mathbf{u}}_2, \\ \mathbf{u}_1\tilde{\mathbf{u}}_2 &= \mathbf{u}_2\tilde{\mathbf{u}}_1, \\ \mathbf{v}_1\tilde{\mathbf{v}}_2 &= \mathbf{v}_2\tilde{\mathbf{v}}_1, \\ \mathbf{v}_2\tilde{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{u}_2\tilde{\mathbf{v}}_1 &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{u}_1\tilde{\mathbf{v}}_2 - \mathbf{v}_1\tilde{\mathbf{u}}_2 &= \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

además de que  $\det \mathbf{S} = 1$ .

También se puede demostrar que si  $\mathbf{S}$  es una matriz simpléctica entonces la transversa  $\tilde{\mathbf{S}}$  también es una matriz simpléctica lo que nos conduce a las relaciones

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_1\mathbf{v}_2 &= \tilde{\mathbf{v}}_2\mathbf{v}_1, \\ \tilde{\mathbf{u}}_2\mathbf{u}_1 &= \tilde{\mathbf{u}}_1\mathbf{u}_2, \\ \tilde{\mathbf{v}}_2\mathbf{u}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_1\mathbf{u}_2 &= \mathbf{I}, \\ \tilde{\mathbf{u}}_1\mathbf{v}_2 - \tilde{\mathbf{u}}_2\mathbf{v}_1 &= \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

la matriz inversa de una matriz simpléctica puede calcularse como  $\mathbf{S}^{-1} = -\Sigma\tilde{\mathbf{S}}\Sigma$ , por lo que realizando las operaciones correspondientes se obtiene que la matriz inversa es

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{u}}_2 & \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ -\tilde{\mathbf{v}}_2 & \tilde{\mathbf{v}}_1 \end{pmatrix}.$$

Asociando operadores de creación y aniquilación a los invariantes dependientes del tiempo de forma que  $P_j = (i\sqrt{\omega_j/2})(A_j^\dagger - A_j)$ ,  $Q_j = (1/\sqrt{2\omega_j})(A_j + A_j^\dagger)$ , se tiene

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 & \boldsymbol{\mu}_2 \\ \boldsymbol{\mu}_2^* & \boldsymbol{\mu}_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\dagger \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\gamma}^* \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

con

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\mu}_1)_{jk} &= \frac{1}{2\sqrt{\omega_j\omega_k}} (\omega_k(\mathbf{v}_1)_{jk} - \omega_j(\mathbf{u}_2)_{jk} - i(\mathbf{u}_1)_{jk} - i\omega_j\omega_k(\mathbf{v}_2)_{jk}), \\ (\boldsymbol{\mu}_2)_{jk} &= \frac{1}{2\sqrt{\omega_j\omega_k}} (-\omega_k(\mathbf{v}_1)_{jk} - \omega_j(\mathbf{u}_2)_{jk} - i(\mathbf{u}_1)_{jk} + i\omega_j\omega_k(\mathbf{v}_2)_{jk}), \\ (\boldsymbol{\gamma})_j &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\omega_j}(\mathbf{w}_2)_j + i(\mathbf{w}_1)_j/\sqrt{\omega_j}). \end{aligned}$$



El operador del invariante lineal  $\mathbf{A}$  también puede ser obtenido mediante el operador de evolución temporal  $U(t)$ . Mediante las relaciones de Mello-Moshinsky [58], de la siguiente forma

$$\mathbf{A} = U(t)\mathbf{a}U^\dagger(t), \quad (4.10)$$

es la expresión de la transformación unitaria asociada a la transformación simpléctica de las cuadraturas en la Ec. (4.3). Donde el operador de evolución temporal es unitario, es decir  $U(t)U^\dagger(t) = U^\dagger(t)U(t) = \mathbf{I}$ , la identidad.

También es útil escribir la relación entre los invariantes del álgebra de Heisenberg-Weyl en términos de las cuadraturas, estos operadores son descritos por siguiente expresión

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_p & \lambda_q \\ \lambda_p^* & \lambda_q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma^* \end{pmatrix},$$

con  $(\lambda_p)_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}}(\omega_j(\mathbf{v}_2)_{jk} + i(\mathbf{v}_1)_{jk})$  y  $(\lambda_q)_{jk} = -\frac{1}{\sqrt{2\omega_j}}(\omega_j(\mathbf{u}_2)_{jk} + i(\mathbf{u}_1)_{jk})$ .

A continuación veremos dos ejemplos de Hamiltonianos cuadráticos de dos modos.

### 4.3. Amplificador paramétrico

Un amplificador paramétrico [30] es un dispositivo óptico en el cual se hace incidir un haz de bombeo de frecuencia  $\omega$  en un medio no lineal junto a otro haz de frecuencia  $\omega_a$ . Al pasar estos dos haces por el medio no lineal (por ejemplo un cristal BBO) se obtiene otra señal con frecuencia  $\omega_b$ . Cuando existe conservación de la energía estos haces deben cumplir  $\omega = \omega_a + \omega_b$  (llamado caso resonante), donde  $\omega_b > \omega_a$ . Cuando las dos frecuencias son iguales  $\omega_a = \omega_b$  se le denomina caso degenerado y caso no degenerado donde estas dos frecuencias son diferentes  $\omega_a \neq \omega_b$ . También existe el caso en el que la suma de las frecuencias no sea igual a la frecuencia de bombeo, en dicho caso se llama amplificador paramétrico no resonante.

El Hamiltoniano para este problema puede ser modelado cuánticamente como

$$H = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b - \hbar k \left( a^\dagger b^\dagger e^{-i\omega t} + a b e^{i\omega t} \right) \quad (4.11)$$

donde los operadores  $a$  y  $b$  son operadores bosónicos de aniquilación de un fotón en el modo de frecuencia  $\omega_a$  y  $\omega_b$  respectivamente. Cada uno cumple con las relaciones de conmutación  $[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1$  y dos operadores de distintos modos conmutan entre si ( $[a, b] = [a^\dagger, b^\dagger] = 0$ ).

El operador de evolución temporal para el Hamiltoniano del amplificador paramétrico de la Ec. (4.11), puede ser calculado [60] haciendo uso del esquema de interacción. Para ello debemos de tomar el Hamiltoniano de tal forma que  $H = H_0 + H_1$ , donde

$$H_0 = \hbar(\omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b), \quad H_1(t) = -\hbar k \left( a^\dagger b^\dagger e^{-i\omega t} + a b e^{i\omega t} \right).$$

Por simplicidad para cálculos posteriores dentro de este trabajo se ha tomado un sistema de unidades en los que  $\hbar = \omega_a = 1$ .

En el esquema de interacción el operador de evolución temporal  $U_I$  debe satisfacer la relación

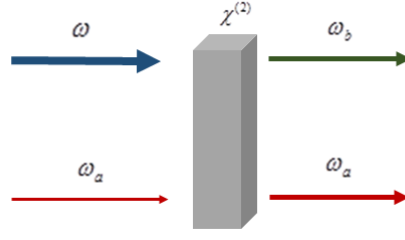


Figura 4.1. Esquema del proceso de amplificación paramétrica. Un haz de bombeo de frecuencia  $\omega$  y un haz a amplificar de frecuencia  $\omega_a$  se hacen incidir en un medio no lineal. A la salida del medio tenemos un haz amplificado con la misma frecuencia de incidencia ( $\omega_a$ ) y mayor intensidad y un haz acompañante de frecuencia  $\omega_b$ .

$$i \frac{d}{dt} U_I = H_{1I} U_I, \quad (4.12)$$

con  $H_{1I} = e^{iH_0 t} H_1 e^{-iH_0 t}$ . La solución de la Ec. (4.12) se propone como

$$U_I = e^{a_+(t)a^\dagger b^\dagger} e^{a_0(t)(a^\dagger a + b^\dagger b + 1)/2} e^{a_-(t)ab}. \quad (4.13)$$

Definiendo los operadores  $K_0$ ,  $K_+$  y  $K_-$  como

$$K_0 = \frac{1}{4}(a^\dagger a + a a^\dagger + b^\dagger b + b b^\dagger), \quad K_+ = a^\dagger b^\dagger, \quad K_- = ab \quad (4.14)$$

los cuales forman con un álgebra  $SU(1,1)$ , definida mediante las siguientes reglas de conmutación

$$[K_+, K_-] = -2K_0, \quad [K_0, K_\pm] = \pm K_\pm \quad (4.15)$$

Sustituyendo la solución propuesta de (4.13) en la Ec. (4.12) y utilizando las relaciones de conmutación (4.15) al desarrollar la derivada temporal, se obtienen tres ecuaciones diferenciales para las funciones  $a_+(t)$ ,  $a_0(t)$  y  $a_-(t)$ :

$$\dot{a}_+ = ik \left( e^{i\Omega t} a_+^2 + e^{-i\Omega t} \right), \quad \dot{a}_0 = 2ike^{i\Omega t} a_+, \quad \dot{a}_- = ike^{i\Omega t} e^{a_0}. \quad (4.16)$$

La ecuación diferencial para  $a_+$  es no lineal, llamada la ecuación diferencial de Riccati. Dicha ecuación puede ser transformada en una ecuación diferencial de segundo orden haciendo de la sustitución  $a_+(t) = -\dot{u}(t)/(ike^{i\Omega t} u(t))$ , obteniéndose

$$\ddot{u}(t) - i\Omega \dot{u}(t) - k^2 u(t) = 0, \quad (4.17)$$

cuya solución tiene la forma

$$u(t) = e^{i\Omega t/2} \left( D_1 e^{i\nu t} + D_2 e^{-i\nu t} \right), \quad (4.18)$$

donde se define  $\nu = \sqrt{\Omega^2/4 - k^2}$ .

El operador de evolución debe satisfacer la condición inicial  $U(0) = \mathbf{I}$ , lo cual da como resultado las condiciones  $a_+(0) = a_-(0) = a_0(0) = 0$ . Haciendo la sustitución de estas

expresiones en la Ec. (4.18), se obtiene  $D_2 = D_1(\nu + \Omega/2)/(\nu - \Omega/2)$ . Haciendo uso de  $a_+(t) = -\dot{u}(t)/(ke^{i\Omega t}u(t))$  se llega al resultado

$$a_+(t) = -\frac{e^{-i\Omega t} \sin \nu t}{\cos(\nu t - \gamma)}, \quad (4.19)$$

con  $\tan \gamma = -i\Omega/2\nu$ . Usando la solución para  $a_+(t)$  en la Ec. (4.16), se obtiene una ecuación para  $a_0$

$$\dot{a}_0 = -\frac{2i \sin \nu t}{\cos(\nu t - \gamma)},$$

la cual debe satisfacer la condición inicial  $a_0(0) = 0$ . Entonces su solución se escribe como

$$a_0(t) = -i\Omega t + 2 \ln \left( \frac{\cos \gamma}{\cos(\nu t - \gamma)} \right). \quad (4.20)$$

Ahora sustituyendo la expresión para  $a_0(t)$  en la Ec. (4.16), se obtiene una ecuación diferencial para  $a_-$ , que puede escribirse como

$$\dot{a}_- = ik \left( \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\nu t + \gamma)} \right)^2,$$

utilizando la condición inicial  $a_-(0) = 0$ , se obtiene como resultado

$$a_-(t) = -\frac{\sin \nu t}{\cos(\nu t - \gamma)}. \quad (4.21)$$

Por lo que el operador de evolución temporal en el esquema de interacción se obtiene de sustituir las Ecs. (4.19, 4.20, 4.21) en la Ec. (4.13). Para obtener el operador en el esquema de Schrödinger  $U(t)$ , es necesario multiplicar por  $U_0(t) = e^{-iH_0 t/\hbar}$ , es decir

$$U(t) = U_0(t)U_I(t) \quad (4.22)$$

dando como resultado el operador de evolución en el esquema de Schrödinger

$$U(t) = e^{-i\omega_a N_a t} e^{-i\omega_b N_b t} e^{a_+(t)a^\dagger b^\dagger} e^{a_0(t)(a^\dagger a + b^\dagger b + 1)/2} e^{a_-(t)ab}. \quad (4.23)$$

con  $N_a = a^\dagger a$  y  $N_b = b^\dagger b$ , siendo los operadores de número de los modos  $a$  y  $b$ , respectivamente.

Podemos observar que el periodo de las funciones  $a_+(t)$ ,  $a_0(t)$  y  $a_-(t)$  es  $2\pi/\nu$ , lo cual implica que el operador de evolución también tendrá el mismo periodo y por lo tanto el estado inicial deberá ser el mismo para múltiplos de  $2\pi/\nu$ , sin importar el estado inicial utilizado. Este comportamiento no aparece al suponer que la frecuencia  $\nu$  es imaginaria, debido a que ahora la forma de las funciones  $a_+(t)$ ,  $a_0(t)$  y  $a_-(t)$  será hiperbólica, en dicho caso el estado inicial nunca se recupera.

Para el caso resonante el operador de evolución se escribe de una forma más sencilla, como

$$U(t) = \frac{1}{\cosh(kt)} e^{-i\omega_a N_a t} e^{-i\omega_b N_b t} e^{i \tanh(kt) a^\dagger b^\dagger} e^{-\ln(\cosh(kt))(N_a + N_b)} e^{i \tanh(kt) ab},$$

el cual corresponde a un sistema no periódico.

A continuación se hará un resumen de la base que porta la representación del grupo  $SU(1,1)$  que servirá como fundamento para la construcción de soluciones a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para el amplificador paramétrico.

#### 4.3.1. Bases que portan la representación irreducible del grupo $SU(1,1)$ y sus estados coherentes

Es posible realizar el estudio del amplificador paramétrico a través de bases que portan la representación irreducible así como de los estados coherentes del grupo  $SU(1,1)$ . Dichos estados nos permiten encontrar la realización en el espacio de Bargmann-Hilbert de los operadores dentro del álgebra. Para ello se hará primero un repaso de la base que porta la representación irreducible del grupo, con ella se definirán los estados coherentes del grupo y posteriormente se encontrará la realización de los generadores  $K_0$ ,  $K_+$  y  $K_-$  en el espacio de funciones analíticas de Bargmann.

Como hemos visto en la sección anterior, el amplificador paramétrico es descrito por los operadores de  $SU(1,1)$  de la Ec. (4.14) entonces el Hamiltoniano puede reescribirse hasta una constante con estos operadores, esto es

$$H = \hbar(\omega - \Omega)K_0 - \hbar k(K_+e^{-i\omega t} + K_-e^{i\omega t}). \quad (4.24)$$

Los estados que portan la representación irreducible del grupo  $SU(1,1)$  es un conjunto de estados que son eigenvectores de los operadores  $K_0$  y  $K^2$  que forman una base ortonormal. Este grupo tiene tres generadores  $K_0$ ,  $K_+$  y  $K_-$  que cumplen con las reglas de conmutación

$$[K_-, K_+] = 2K_0, \quad [K_0, K_\pm] = \pm K_\pm \quad (4.25)$$

y el operador de Casimir  $K^2 = \frac{1}{2}(K_+K_- + K_-K_+) - K_0^2$ . El cual cumple con las siguientes reglas de conmutación

$$[K^2, K_0] = [K^2, K_+] = [K^2, K_-] = 0.$$

Definimos el estado de vacío de la base  $|W\rangle$ , como eigenestado de los operadores  $K_-$  y  $K_0$  con eigenvalores cero y  $W$  respectivamente, esto es

$$K_- |W\rangle = 0, \quad K_0 |W\rangle = W |W\rangle, \quad (4.26)$$

el cual es el estado con menor peso al aplicar  $K_0$ . Los demás estados dentro de la base son denotados por  $|W, n\rangle$  y son obtenidos al actuar el operador de ascenso  $K_+$  al estado vacío  $n$  veces, es decir

$$|W, n\rangle = NK_+^n |W\rangle \quad (4.27)$$

donde  $N$  es una constante de normalización. Dicha constante de normalización se obtiene mediante la condición

$$\langle W, n | W, n \rangle = N^2 \langle W | K_-^n K_+^n | W \rangle = 1. \quad (4.28)$$

Para obtener el valor de  $N$  definimos la cantidad

$$f(n) = \langle W | K_-^n K_+^n | W \rangle = \langle W | K_-^{n-1} (K_- K_+^n) | W \rangle \quad (4.29)$$

y utilizando la propiedad de los conmutadores

$$[A, B^n] = \sum_{r=0}^{n-1} B^{n-r-1} [A, B] B^r, \quad (4.30)$$

puede demostrarse que

$$K_- K_+^n = K_+^n K_- + n K_+^{n-1} (2K_0 + n - 1),$$

por lo que utilizando las Ecs. (4.26,4.29), se obtiene

$$f(n) = n(2W + n - 1)f(n - 1),$$

lo cual nos indica una regla de recurrencia, al realizar recursivamente la sustitución de las funciones  $f(n - 1), f(n - 2), \dots, f(1)$ , la expresión anterior se escribe de la forma

$$f(n) = n! \frac{\Gamma(2W + n)}{\Gamma(2W)},$$

aplicando este resultado a la condición de normalización Ec.(4.28), tenemos que

$$N = \left( \frac{\Gamma(2W)}{n! \Gamma(2W + n)} \right)^{1/2},$$

sustituyendo en la Ec. (4.27) tenemos que los estados que portan la representación del grupo  $SU(1,1)$  está dado por

$$|W, n\rangle = \left( \frac{\Gamma(2W)}{n! \Gamma(2W + n)} \right)^{1/2} K_+^n |W\rangle$$

El estado  $|W, n\rangle$  cumple con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} K_0 |W, n\rangle &= (W + n) |W, n\rangle, \\ K^2 |W, n\rangle &= W(1 - W) |W, n\rangle, \\ K_+ |W, n\rangle &= \sqrt{(n + 1)(2W + n)} |W, n + 1\rangle, \\ K_- |W, n\rangle &= \sqrt{n(2W + n - 1)} |W, n - 1\rangle. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Donde se observa que el parámetro  $W$  nos fija la representación dado que está relacionado con el operador  $K^2$  y  $n$  fija el peso al ser el correspondiente eigenvalor de  $K_0$ .

El conjunto de estados  $|W, n\rangle$  forma una base completa ortonormal, es decir dos elementos de la base son linealmente independientes

$$\langle W, n | W, m \rangle = \delta_{n,m},$$

y la resolución de la identidad es

$$\sum_{n=0}^{\infty} |W, n\rangle \langle W, n| = \mathbb{1}.$$

Posteriormente se define el estado coherente del grupo  $SU(1,1)$  mediante los operadores  $K_+$  y  $K_-$  en la forma<sup>1</sup> [61]

$$|\zeta, W\rangle = \exp(K_+\zeta - K_-\zeta^*) |W\rangle,$$

donde el operador unitario de desplazamiento  $\exp(K_+\zeta - K_-\zeta^*)$  puede ser descompuesto utilizando la fórmula de Zassenhaus,

$$\exp(X + Y) = e^X e^Y e^{-\frac{1}{2}[X,Y]} e^{\frac{1}{6}(2[Y,[X,Y]] + [X,[X,Y]])} \dots,$$

y toma la forma

$$\exp(K_+\xi - K_-\xi^*) = \exp\left(\frac{\xi}{|\xi|} \tanh |\xi| K_+\right) \exp(-2 \ln(\cosh |\xi|) K_0) \exp\left(\frac{\xi^*}{|\xi|} \tanh |\xi| K_-\right), \quad (4.32)$$

por lo que utilizando las expresiones (4.31,4.32) y el estado de vacío  $|W\rangle$ , tenemos que el estado coherente se escribe

$$|\xi, W\rangle = \frac{1}{(\cosh |\xi|)^{2W}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(2W+n)}{n!\Gamma(2W)}\right)^{1/2} \left(\frac{\xi}{|\xi|} \tanh |\xi|\right)^n |W, n\rangle.$$

Dicho estado puede reescribirse como

$$|\xi, W\rangle = (1 - |\mu|^2)^W \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(2W+n)}{n!\Gamma(2W)}\right)^{1/2} \mu^n |W, n\rangle, \quad \mu = \frac{\xi}{|\xi|} \tanh |\xi|,$$

donde  $\mu$  es un parámetro complejo cuya norma cumple  $0 \leq |\mu| \leq 1$ .

También se define el estado coherente no normalizado como

$$|\zeta, W\rangle = \exp(\zeta K_+) |W\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(2W+n)}{n!\Gamma(2W)}\right)^{1/2} \zeta^n |W, n\rangle,$$

donde  $\zeta$  es un parámetro complejo. Cabe señalar que la condición de normalización impone que la norma de  $\zeta$  esta acotada, es decir  $0 \leq |\zeta| \leq 1$ .

La métrica en el espacio de Bargmann-Hilbert que definen estos estados coherentes es la siguiente

$$d\chi(\zeta) = \frac{(2W-1) d^2\zeta}{\pi(1-|\zeta|^2)^{-2W+2}}, \quad (4.33)$$

y por lo tanto toda integración sobre el espacio de Bargmann debe considerar esta métrica.

Utilizando la propiedad  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{n!} x^n = \frac{\Gamma(a)}{(1-x)^a}$  pueden obtenerse los productos internos entre dos estados coherentes con parámetros  $\zeta$  y  $\zeta'$

<sup>1</sup> La definición de los estados coherentes es no única. También es posible definir estados coherentes como eigenvectores del operador de descenso, esto es estados que cumplen  $K_- |\zeta'\rangle = \zeta' |\zeta'\rangle$ . En ese caso los resultados obtenidos serán muy diferentes de los presentados en este trabajo.

$$\begin{aligned} \{\zeta', W | \zeta, W\} &= \frac{1}{(1-\zeta\zeta'^*)^{2W}}, \\ \langle \zeta', W | \zeta, W \rangle &= \frac{(1-|\mu|^2)^W (1-|\mu'|^2)^W}{(1-\mu\mu'^*)^{2W}} = \left( \cosh |\xi| \cosh |\xi'| - \frac{\xi\xi'^*}{|\xi||\xi'|} \sinh |\xi| \sinh |\xi'| \right)^{-2W}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

la resolución del operador identidad para los estados normalizados es

$$\mathbb{1} = (2W - 1) \int \frac{|\xi\rangle \langle \xi|}{\pi(1 - |\xi|^2)^2} d^2\xi,$$

donde la integración se hace sobre el disco de radio 1 ( $0 \leq |\xi| \leq 1$ ). Para los estados no normalizados el operador identidad es

$$\mathbb{1} = (2W - 1) \int \frac{|\zeta\rangle \langle \zeta|}{\pi(1 - |\zeta|^2)^{-2W+2}} d^2\zeta,$$

Aplicando el operador  $K_0$ ,  $K_+$  y  $K_-$  al estado coherente no normalizado, tenemos

$$\langle \psi | K_0 | \zeta, W \rangle = K_0 e^{\zeta K_+} |W\rangle = \langle \psi | e^{\zeta K_+} e^{-\zeta K_+} K_0 e^{\zeta K_+} |W\rangle,$$

utilizando la expresión de Baker-Campbell-Hausdorf

$$e^{aX} Y e^{-aX} = Y + a[X, Y] + \frac{a^2}{2!} [X, [X, Y]] + \dots$$

tenemos que

$$e^{-\zeta K_+} K_0 e^{\zeta K_+} = K_0 + \zeta K_+,$$

utilizando la Ec. (4.31), concluimos

$$\langle \psi | K_0 | \zeta, W \rangle = \langle \psi | e^{\zeta K_+} (K_0 + \zeta K_+) |W\rangle = \left( W + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \langle \psi | \zeta, W \rangle,$$

por lo que la representación diferencial del operador  $K_0$  actuando a la derecha al estado coherente no normalizado  $|\zeta, W\rangle$ , es  $(K_0) \rightarrow W + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}$ . En el caso del operador  $K_-$  tenemos

$$\begin{aligned} \langle \psi | K_- | \zeta, W \rangle &= \langle \psi | K_- e^{\zeta K_+} |W\rangle = \langle \psi | e^{\zeta K_+} e^{-\zeta K_+} K_- e^{\zeta K_+} |W\rangle, \\ e^{-\zeta K_+} K_- e^{\zeta K_+} &= K_- + 2\zeta K_0 + \zeta^2 K_+, \end{aligned} \quad (4.35)$$

por lo que utilizando la Ec. (4.31), tenemos

$$\langle \psi | K_- | \zeta, W \rangle = \left( 2W\zeta + \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \langle \psi | \zeta, W \rangle,$$

obteniéndose la representación diferencial del operador  $(K_-) \rightarrow 2W\zeta + \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}$ . Para el caso del operador  $K_+$

$$\langle \psi | K_+ | \zeta, W \rangle = \langle \psi | K_+ e^{\zeta K_+} |W\rangle = \frac{\partial}{\partial \zeta} \langle \psi | \zeta, W \rangle,$$

de este modo su representación diferencial es  $(K_+) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta}$ . Las representaciones diferenciales actuando a la izquierda sobre un estado arbitrario son entonces

$$(K_0) \rightarrow W + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (K_-) \rightarrow 2W\zeta + \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (K_+) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Esta representación diferencial de los estados nos permite simplificar los cálculos de ciertas propiedades en el espacio de los estados coherentes o espacio de Bargmann-Hilbert que posteriormente será abordado.

Siguiendo un procedimiento similar, puede verse que

$$\begin{aligned} \{\zeta, W | K_0 | \psi\rangle &= \left(W + \zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*}\right) \{\zeta, W | \psi\rangle, \quad \{\zeta, W | K_- | \psi\rangle = \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \{\zeta, W | \psi\rangle, \\ \{\zeta, W | K_+ | \psi\rangle &= \left(2W\zeta^* + \zeta^{*2} \frac{\partial}{\partial \zeta^*}\right) \{\zeta, W | \psi\rangle, \end{aligned}$$

de lo que se infiere que la representación diferencial actuando a la derecha sobre un estado arbitrario es

$$(K_0) \rightarrow W + \zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*}, \quad (K_-) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta^*}, \quad (K_+) \rightarrow 2W\zeta^* + \zeta^{*2} \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \quad (4.36)$$

Los estados de la base  $|W, n\rangle$  pueden ser representados en la base de Fock, donde el estado de mínimo peso cumple con la condición

$$K_- |W\rangle = ab |W\rangle = 0,$$

más general puede ser escrito como  $|n_1, 0\rangle$  ó  $|0, n_2\rangle$ . Al aplicar  $K_0$  a uno de estos posibles estados da como resultado

$$\frac{1}{2}(a^\dagger a + b^\dagger b + 1) |n_1, 0\rangle = \frac{1}{2}(n_1 + 1) |n_1, 0\rangle,$$

por lo que el parámetro  $W = \frac{1}{2}(n_1 + 1)$ , es decir este parámetro sólo puede tomar los valores  $W = 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$

Los demás estados dentro de la base  $|W, n\rangle$  son obtenidos mediante la operación sucesiva del operador  $K_+$  al estado de vacío

$$|W, n\rangle = \left(\frac{\Gamma(2W)}{n! \Gamma(2W + n)}\right)^{1/2} K_+^n |W\rangle = |n_1 + n, n\rangle,$$

y los estados coherentes no normalizados son

$$|\zeta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n_1 + n)!}{n! n_1!}\right)^{1/2} \zeta^n |n_1 + n, n\rangle,$$

mientras los estado normalizados se escriben como

$$|\xi\rangle = (1 - |\xi|^2)^{(n_1+1)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n_1 + n)!}{n! n_1!}\right)^{1/2} \xi^n |n_1 + n, n\rangle.$$

Se hace notar que los estados  $|W, n\rangle$  y los estados coherentes  $|\zeta\rangle, |\xi\rangle$  son eigenestados del operador  $N_a - N_b$  con eigenvalor  $n_1$ . Los parámetros de Mandel para cada modo

$$Q_i = \frac{\sigma_{N_i}}{\langle N_i \rangle},$$



están dados por las siguientes expresiones

$$Q_1 = \frac{(n_1 + 1)}{n_1 + |\xi|^2} \frac{|\xi|^2}{1 - |\xi|^2}, \quad Q_2 = \frac{1}{1 - |\xi|^2},$$

observamos que el primer modo presenta una distribución subpoissoniana para casi cualquier valor de  $n_1$  y  $\xi$ , incluso en el caso donde  $\xi = 0$  y  $\xi \rightarrow \infty$  en donde tenemos  $Q_1 = 0$ . Para  $n_1 = 0$  podemos ver que el parámetro de Mandel puede valer  $Q_1 = 1$  cuando  $\xi = 0$ , cuando esto pasa la estadística de fotones corresponde a una poissoniana. En el caso del segundo modo tenemos una estadística subpoissoniana salvo para  $\xi = 0$  en donde tenemos una estadística poissoniana ( $Q_2 = 1$ ).

#### 4.4. Convertidor de frecuencias

Un convertidor de frecuencias cuántico [30] es un dispositivo que nos permite cambiar la frecuencia de un fotón dentro de un campo electromagnético sin alterar sus propiedades cuánticas de estado. Dichos dispositivos han sido utilizados entre otras cosas para cambiar el color de un haz láser, para transportar estados almacenados en memorias cuánticas (frecuencia de trabajo  $\sim 700$  nm), en fibras ópticas que trabajan en la llamada banda C (1530 nm-1565 nm), del espectro infrarrojo. El primer experimento donde fue lograda la conversión de frecuencias es descrito en [62]. Esta conversión se realizó el cambio de un haz de 1064 nm a 532 nm utilizando un cristal  $\text{KTiOPO}_4$  (también llamado KTP). En años recientes se han desarrollado dispositivos que convierten haces cuánticos de las frecuencias de luz visible (de longitudes de onda  $\sim 500$  nm) a las frecuencias de telecomunicaciones (de longitudes de onda  $\sim 1 \mu\text{m}$ ) [63–68]. Esto debido a que en las frecuencias visibles los haces cuánticos sufren una pérdida de información por la baja transmisión de las fibras ópticas y también a la atmósfera. Tales cosas han sido superadas históricamente haciendo uso de fibras ópticas en las frecuencias de telecomunicaciones.

Para implementar un convertidor de frecuencias óptico se utilizan dos campos electromagnéticos los cuales interactúan entre si en un medio no lineal. El campo inicial tiene una frecuencia  $\omega_a$  y el campo convertido tiene una frecuencia  $\omega_b$ , además el campo de bombeo en el caso que exista conservación de la energía debe tener una frecuencia  $\omega = \omega_a - \omega_b$ , aunque en la práctica esto puede o no cumplirse.

El convertidor de frecuencias puede expresarse como un Hamiltoniano cuadrático de dos modos

$$H = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b + \hbar k (a^\dagger b e^{-i\omega t} + ab^\dagger e^{i\omega t}). \quad (4.37)$$

Utilizando un procedimiento análogo al usado en el caso del amplificador paramétrico se calcula el operador de evolución haciendo uso del esquema de interacción. Primero se separa el Hamiltoniano en dos partes, aquella que nos permite hacer el cambio al sistema de interacción  $H_0 = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b$  y la interacción  $H_1 = \hbar k (a^\dagger b e^{-i\omega t} + ab^\dagger e^{i\omega t})$  por lo que se tiene

$$H_{1I} = e^{iH_0 t/\hbar} H_1 e^{-iH_0 t/\hbar} = \hbar k (a^\dagger b e^{-i\Omega t} + ab^\dagger e^{i\Omega t}),$$

donde para el convertidor de frecuencias se tiene que la frecuencia  $\Omega = \omega - \omega_a + \omega_b$ . De la misma forma que en el amplificador (tomado un sistema de unidades en los que

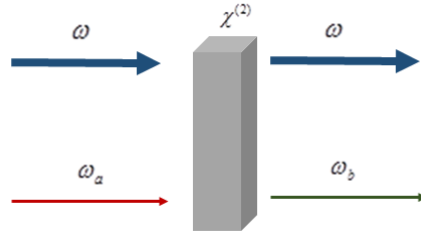


Figura 4.2. Esquema que representa el proceso de conversión de frecuencias. En dicho proceso una señal incidente de frecuencia  $\omega_a$  cambia a una señal de frecuencia  $\omega_b$  al hacerla interactuar con un haz de bombeo de frecuencia  $\omega$  dentro de un cristal no lineal.

$\hbar = \omega_a = 1$ ), el operador de evolución en el esquema de interacción debe cumplir la Ec. (4.12). Proponiendo la solución de dicha ecuación como

$$U_I(t) = e^{-ia_+J_+} e^{-ia_zJ_z} e^{-ia_-J_-}, \quad (4.38)$$

donde se han definido los siguientes operadores

$$J_z = \frac{1}{2} (a^\dagger a - b^\dagger b), \quad J_+ = a^\dagger b, \quad J_- = ab^\dagger, \quad (4.39)$$

los cuales forman un álgebra tipo SU(2) con relaciones de conmutación

$$[J_+, J_-] = 2J_z, \quad [J_z, J_\pm] = \pm J_\pm.$$

Al sustituir la Ec. (4.38) en la Ec. (4.12) se obtienen tres ecuaciones diferenciales para las variables  $a_+$ ,  $a_z$  y  $a_-$ , que se escriben como

$$\dot{a}_+ - ke^{i\Omega t} a_+^2 = ke^{-i\Omega t}, \quad \dot{a}_z - 2ik e^{i\Omega t} a_+ = 0, \quad \dot{a}_- e^{ia_z} = ke^{i\Omega t}, \quad (4.40)$$

para resolver este sistema de ecuaciones primero se obtiene una solución para  $a_+$ . Con ésta se obtiene  $a_z$  y conociendo éstas dos finalmente se resuelve para  $a_-$ . Las funciones deben satisfacer las condiciones iniciales  $a_+(0) = a_z(0) = a_-(0) = 0$  dado que  $U_I(0) = \mathbf{I}$ . La ecuación para  $a_+$  es una ecuación no lineal de Riccati, que tiene una solución

$$a_+(t) = e^{-i\Omega t} \frac{\sin \nu t}{\cos(\nu t - \gamma)},$$

con  $\gamma = -i \arctanh(\Omega/2\nu)$ . Sustituyendo esta solución en la Ec. (4.40), se obtiene la ecuación diferencial para  $a_z$ :

$$\dot{a}_z = \frac{2ik \sin \nu t}{\cos(\nu t - \gamma)},$$

la cual tiene como solución

$$a_z(t) = -2i \ln \left( \frac{\cos(\nu t - \gamma)}{\cos \gamma} \right) + \Omega t.$$

Ingresando esta expresión en la Ec. (4.40), se tiene que  $a_-$  debe cumplir

$$\dot{a}_- = k \frac{\cos^2 \gamma}{\cos^2(\nu t - \gamma)},$$

cuya resultado es

$$a_-(t) = \frac{\sin \nu t}{\cos(\nu t - \gamma)}.$$

Con estas tres funciones del tiempo se obtiene el operador de evolución temporal en el esquema de Schrödinger mediante la ecuación

$$U(t) = U_0(t)U_I(t),$$

con  $U_0(t) = e^{-iH_0 t/\hbar}$ , dando como resultado

$$U(t) = e^{-i\omega_a N_a t} e^{-i\omega_b N_b t} e^{-ia_+ J_+} e^{-ia_z J_z} e^{-ia_- J_-},$$

este operador de evolución puede ser escrito en el caso resonante ( $\omega = \omega_b - \omega_a$ ,  $\Omega = 0$ ), como

$$U(t) = e^{-i\omega_a N_a t} e^{-i\omega_b N_b t} e^{-i \tan(kt) a^\dagger b} e^{-\ln(\cos(kt))(N_a - N_b)} e^{-i \tan(kt) ab^\dagger}.$$

De la misma forma que en el amplificador paramétrico, para el convertidor de frecuencias se tiene un conjunto de estados que portan la representación irreducible del grupo SU(2). Los cuales forman una base ortonormal y que nos permite definir estados coherentes en dicha álgebra. Una vez definidos los estados coherentes de SU(2) es posible trabajar en el espacio complejo de Bargmann-Hilbert.

#### 4.4.1. Bases que portan la representación irreducible del grupo SU(2) y sus estados coherentes

Para obtener los estados coherentes de SU(2) se sigue un procedimiento análogo al del grupo SU(1,1). Los estados que portan la representación irreducible son eigenvectores de los operadores  $J_0$  y  $J^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_0^2$  y forman una base ortonormal

Primero definimos el estado de mínima proyección  $|W\rangle$  como estado propio de los operadores  $J_-$  y  $J_0$ , de la forma

$$J_- |W\rangle = 0, \quad J_0 |W\rangle = -W |W\rangle,$$

los demás elementos de la base  $|W, n\rangle$  pueden obtenerse mediante  $n$  veces la aplicación del operador de ascenso  $J_+$  al estado de mínima proyección, es decir

$$|W, n\rangle = N J_+^n |W\rangle,$$

donde  $N$  es una constante de normalización. Para calcular  $N$ , se evalúa la norma de  $|W, n\rangle$ , dicha norma debe ser la unidad:

$$\langle W, n | W, n \rangle = N^2 \langle W | J_-^n J_+^n | W \rangle = N^2 \langle W | J_-^{n-1} (J_- J_+^n) | W \rangle,$$

utilizando la Ec. (4.30), se obtiene

$$J_- J_+^n = J_+^n J_- - n J_+^{n-1} (2J_0 + n - 1),$$

por lo que si definimos  $f(n) = \langle W | J_-^n J_+^n | W \rangle$ , se tiene que

$$f(n) = n(2W - n + 1)f(n - 1),$$

al calcular recursivamente las funciones  $f(n - 1)$ ,  $f(n - 2)$ ,  $\dots$ ,  $f(1)$  y sustituirlas en la expresión anterior, se tiene

$$f(n) = n! \frac{\Gamma(2W + 1)}{\Gamma(2W - n + 1)},$$

por lo que al imponer la condición  $\langle W, n | W, n \rangle = 1$ , la constante de normalización debe tener la expresión

$$N = \left( \frac{\Gamma(2W - n + 1)}{n! \Gamma(2W + 1)} \right)^{1/2},$$

con lo cual escribimos el estado  $|W, n\rangle$  de la forma

$$|W, n\rangle = \left( \frac{\Gamma(2W - n + 1)}{n! \Gamma(2W + 1)} \right)^{1/2} J_+^n |W\rangle,$$

es posible demostrar que este estado cumple con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} J_0 |W, n\rangle &= (n - W) |W, n\rangle, \\ J^2 |W, n\rangle &= W(W + 1) |W, n\rangle, \\ J_+ |W, n\rangle &= \sqrt{(n + 1)(2W - n)} |W, n + 1\rangle, \\ J_- |W, n\rangle &= \sqrt{n(2W - n + 1)} |W, n - 1\rangle, \end{aligned}$$

debido a nuestro conocimiento del momento angular sabemos que el estado  $|W\rangle$  es igual al estado con menor proyección  $|j, -j\rangle$ , por lo que el parámetro  $W = j$ . Además sabemos que al aplicar el operador de ascenso  $J_+^n$  y después normalizando se obtiene el estado  $|j, -j + n\rangle$ , es decir la proyección en  $J_0$  es  $m = -j + n$ , por lo que  $n = m + j$ . Por otro lado el estado con mayor peso es  $|j, j\rangle$  y no podemos seguir subiendo el peso indefinidamente, dado que  $J_+ |j, j\rangle = 0$ . Por lo que para un momento angular  $j$  fijo existen  $2j + 1$  elementos dentro de la base.

Se define el estado coherente de  $SU(2)$  como<sup>2</sup>

$$|\xi, W\rangle = \exp(\xi J_+ - \xi^* J_-) |W\rangle.$$

Es posible ver que el operador de desplazamiento de  $SU(2)$  puede ser escrito como el producto de exponenciales de los generadores, ésto es

$$\exp(\xi J_+ - \xi^* J_-) = e^{a_1 J_+} e^{a_2 J_0} e^{a_3 J_-},$$

con

<sup>2</sup> De la misma forma que con el grupo  $SU(1,1)$ , la definición de los estados coherentes no es única. Es posible definir estados coherentes que cumplen  $J_- |\xi'\rangle = \xi' |\xi'\rangle$ , los cuales llevan a resultados diferentes que los presentados en este trabajo.

$$a_1 = \frac{\xi}{|\xi|} \tan |\xi|, \quad a_2 = -2 \ln(\cos |\xi|), \quad a_3 = -\frac{\xi^*}{|\xi|} \tan |\xi|,$$

por lo que el estado coherente puede ser expresado como

$$|\xi, W\rangle = (\cos |\xi|)^{2W} \sum_{n=0}^{2W} \left( \frac{\xi}{|\xi|} \tan |\xi| \right)^n \left( \frac{\Gamma(2W+1)}{n! \Gamma(2W-n+1)} \right)^{1/2} |W, n\rangle.$$

Haciendo la sustitución  $\mu = \frac{\xi}{|\xi|} \tan |\xi|$ , el estado coherente puede reescribirse como

$$|\xi, W\rangle = \frac{1}{(1+|\mu|^2)^W} \sum_{n=0}^{2W} \left( \frac{\Gamma(2W+1)}{n! \Gamma(2W-n+1)} \right)^{1/2} \mu^n |W, n\rangle.$$

La métrica en los estados coherentes dados por la expresión anterior es

$$d\chi(\mu) = \frac{(2W+1)d^2\mu}{\pi(1+|\mu|^2)^2},$$

de tal forma que el producto interno entre dos estados coherentes es dado por

$$\langle \xi', W | \xi, W \rangle = \frac{(1 + \mu\mu'^*)^{2W}}{(1 + |\mu|^2)^W (1 + |\mu'|^2)^W},$$

y la resolución del operador identidad puede escribirse como

$$\mathbb{1} = (2W+1) \int \frac{|\xi\rangle \langle \xi|}{\pi(1+|\xi|^2)^2} d^2\xi.$$

En este caso a diferencia del amplificador la integración se hace sobre todo el espacio complejo.

Es posible definir un estado coherente no normalizado, con el operador de ascenso  $J_+$  y el vacío  $|W\rangle$ , de la siguiente forma

$$|\zeta, W\rangle = e^{\zeta J_+} |W\rangle,$$

el cual puede escribirse explícitamente en la base  $|W, n\rangle$  de la siguiente manera

$$|\zeta, W\rangle = \sum_{n=0}^{2W} \left( \frac{\Gamma(2W+1)}{n! \Gamma(2W-n+1)} \right)^{1/2} \zeta^n |W, n\rangle. \quad (4.41)$$

Para obtener la métrica de los estados no normalizados debemos de añadir la norma a la métrica de los estados normalizados, por lo tanto

$$d\chi(\zeta) = \frac{(2W+1)d^2\zeta}{\pi(1+|\zeta|^2)^{2W+2}},$$

de lo cual se infiere que el producto interno entre dos estados no normalizados es

$$\{\zeta', W | \zeta, W\} = (1 + \zeta\zeta'^*)^{2W},$$

y la resolución del operador identidad es

$$\mathbb{1} = (2W + 1) \int \frac{|\zeta\rangle\langle\zeta|}{\pi(1 + |\zeta|^2)^{2W+2}} d^2\zeta.$$

De forma similar a la presentada en el caso del amplificador paramétrico tenemos que en el convertidor de frecuencias la representación diferencial de los operadores en el espacio de los estados coherentes es

$$(J_+) \rightarrow 2\zeta^*W - \zeta^{*2} \frac{\partial}{\partial\zeta^*}, \quad (J_-) \rightarrow \frac{\partial}{\partial\zeta^*}, \quad (J_0) \rightarrow -W + \zeta^* \frac{\partial}{\partial\zeta^*}. \quad (4.42)$$

Esta realización de los operadores nos permite hacer cálculos en el espacio de Bargmann-Hilbert como en el caso del álgebra  $SU(1,1)$ .

Los estados de la base  $|W, n\rangle = |j, -j + n\rangle$ , pueden ser obtenidos en la base de Fock haciendo uso de la correspondencia entre los generadores del grupo y los operadores de ascenso y descenso (4.39). El estado de mínima proyección cumple

$$ab^\dagger |W\rangle = 0,$$

los estados en la base de Fock que cumplen con esta condición son

$$|W\rangle = |0, n_2\rangle,$$

con  $n_2 = 1, 2, \dots$ <sup>3</sup> libre. Al aplicar el operador  $J_0$  al vacío obtenemos

$$\frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b) |0, n_2\rangle = -\frac{1}{2}n_2 |0, n_2\rangle,$$

por lo cual uno puede concluir que el valor  $W = \frac{1}{2}n_2$  y puede tomar los valores  $W = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ , lo cual es de esperarse ya que el momento angular ( $j = W$ ) puede tomar esos valores. Los demás estados de la base  $|W, n\rangle$  son

$$|W, n\rangle = \left( \frac{\Gamma(2W - n + 1)}{n! \Gamma(2W + 1)} \right)^{1/2} J_+^n |W\rangle = \left( \frac{(n_2 - n)!}{n! n_2!} \right)^{1/2} (a^\dagger b)^n |0, n_2\rangle = |n, n_2 - n\rangle,$$

con  $n = 0, 1, \dots, n_2$ , lo cual implica que nuestra base esta acotada por arriba al estado de máximo peso  $|n_2, 0\rangle = |j, j\rangle$ . Cabe hacer notar que todos los estados dentro de la base conservan la suma de los operadores de número  $N_a + N_b$ , ya que son eigenvectores de este operador con eigenvalor  $n_2$ . Asimismo podemos observar que estos estados cumplen con una estadística subpoissoniana en el primer modo para  $0 < n \leq n_2$  y poissononiana para  $n = 0$ . Para el segundo modo es subpoissoniana para  $0 \leq n < n_2$  y poissoniana para  $n = n_2$ .

Los estados coherentes no normalizados entonces pueden ser escritos como

$$|\zeta\rangle = \sum_{n=0}^{n_2} \left( \frac{n_2!}{n!(n_2 - n)!} \right)^{1/2} \zeta^n |n, n_2 - n\rangle,$$

mientras que el estado coherente normalizado es

<sup>3</sup> En este caso excluimos el valor  $n_2 = 0$  dado que correspondería a un momento angular con  $j = 0$

$$|\xi\rangle = \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{n_2/2}} \sum_{n=0}^{n_2} \left( \frac{n_2!}{n!(n_2 - n)!} \right)^{1/2} \xi^n |n, n_2 - n\rangle,$$

podemos ver que estos son también estados propios del operador  $N_1 + N_2$  con eigenvalor  $n_2$ . Es posible calcular los parámetros de Mandel para cada modo, dando como resultado

$$Q_1 = \frac{1}{1 + |\xi|^2}, \quad Q_2 = \frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2},$$

los cuales son siempre menores o iguales a la unidad y por lo tanto presentan una estadística subpoissoniana salvo en el caso de  $\xi = 0$  en donde el primer modo presenta una estadística poissoniana ( $Q_1 = 1$ ) y  $\xi \rightarrow \infty$  en donde el segundo modo presenta una estadística poissoniana ( $Q_2 \rightarrow 1$ ).

## Capítulo 5

# Estados Gaussianos, coherentes y cristalizados

El estudio de los estados Gaussianos ha sido de gran importancia dentro de la mecánica cuántica. Debido principalmente a que estos estados forman la interfaz entre el comportamiento cuántico y clásico ya que contienen varias propiedades clásicas y algunas propiedades cuánticas. El ejemplo más simbólico es el estado coherente bipartita, el cual tiene una distribución clásica de fotones, tiene una función de Wigner no negativa y no existe enredamiento entre sus modos. Sin embargo otros estados Gaussianos, los estados no puros, presentan partes negativas en su función de Wigner. Por otra parte la gran mayoría de los estados generados en el laboratorio son estados Gaussianos.

Los estados Gaussianos son aquellos cuya función de Wigner puede expresarse como una función Gaussiana, es decir podemos tener estados representados por una función de onda o por una matriz densidad y si la función de Wigner es una función Gaussiana entonces lo clasificamos como Gaussiano.

### 5.1. Definición y propiedades

Supongamos un sistema cuántico  $d$ -dimensional con cuadraturas representadas por el vector  $\mathbf{R} = (p_1, \dots, p_d, q_1, \dots, q_d)$ . Las relaciones de conmutación entre dos elementos de este vector cumplen con lo siguiente

$$[R_i, R_j] = -i\Sigma_{ij},$$

donde la matriz  $\Sigma$  es simpléctica de dimensión  $2d \times 2d$  definida como

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}.$$

Mediante los operadores de cuadraturas es posible hacer una descripción completa de un sistema, sin embargo por comodidad muchas veces se utilizan operadores unitarios para describirlo en vez de las cuadraturas. El grupo de operadores unitarios que describen un sistema son llamados operadores de Weyl, los cuales son definidos como

$$W(\mathbf{x}) = \exp(i\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{R}),$$

donde  $\mathbf{x}$  es un vector arbitrario de  $\mathbb{R}^{2d}$ . Se define la función característica del sistema ( $\chi(\mathbf{x})$ ) como el valor esperado del operador de Weyl, es decir

$$\chi(\mathbf{x}) \equiv \text{Tr}(\rho W(\mathbf{x})).$$



donde  $\rho$  es la matriz densidad. La función característica es una cantidad importante debido a que los valores esperados de las observables del vector  $\mathbf{R}$  son obtenidas mediante las derivadas de la función característica

$$\text{Tr}(\rho R_k) = (-i) \frac{\partial}{\partial t} \chi(t\mathbf{e}_k)|_{t \rightarrow 0},$$

donde para obtener el valor esperado del operador  $R_k$ , la componente  $k$ -ésima del vector  $\mathbf{e}_k$  debe tomarse igual a la unidad y sus demás componentes son cero después de realizar la derivación. En general cualquier valor esperado del producto de las observables puede ser calculado mediante la expresión

$$\text{Tr} \left( \rho \prod_{i=1}^n R_{k_i} \right) = (-i)^n \prod_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t_i} \chi(\mathbf{t})|_{\mathbf{t} \rightarrow 0},$$

con el vector  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

Es posible demostrar que la matriz densidad del sistema puede ser obtenida a partir de la función característica de la forma

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \chi(\mathbf{x}) W(-\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Un estado Gaussiano se define como aquel estado que tiene una función característica Gaussiana, esto es

$$\chi(\mathbf{x}) = \exp \left( -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{x} - i \langle \tilde{\mathbf{R}} \rangle \mathbf{x} \right),$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es la matriz de covarianza y  $\langle \mathbf{R} \rangle = \text{Tr}(\rho \mathbf{R})$ , es el vector de valores esperados. Además la función de Wigner a dichos estados Gaussianos puede ser calculada a partir de esta función característica de la siguiente forma

$$W(\mathbf{Q}) = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int d^{2d}x e^{-i\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{x}} \chi(\mathbf{x}),$$

con  $\mathbf{Q} = (p_1, \dots, p_d, q_1, \dots, q_d)$ , es un vector de números en vez de operadores. En el caso de los estados Gaussianos la función de Wigner es dada por la expresión

$$W(\mathbf{Q}) = \frac{1}{\pi^d \sqrt{\det \boldsymbol{\sigma}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{Q}} - \langle \tilde{\mathbf{R}} \rangle) \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\mathbf{Q} - \langle \mathbf{R} \rangle) \right\},$$

la cual es también una función Gaussiana.

Los estados Gaussianos que son físicos (estados normalizados con eigenvalores no negativos y una matriz de covarianza real y simétrica) deben cumplir con las siguientes propiedades

$$\boldsymbol{\sigma} - \frac{i}{2} \boldsymbol{\Sigma} \geq 0, \quad \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\sigma} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^{-1} \geq 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}(\mathbf{D} \oplus \mathbf{D}) \tilde{\mathbf{S}}, \quad \det \boldsymbol{\sigma} \geq \frac{1}{2^{2d}},$$

donde la matriz  $\mathbf{D}$  es diagonal con  $\mathbf{D} - \mathbf{I} \geq 0$  y  $\mathbf{S}$  es una matriz simpléctica, esto es  $\mathbf{S} \boldsymbol{\Sigma} \tilde{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\Sigma}$ . La primera significa la positividad de la matriz de covarianza que implica el principio de incertidumbre de Schödinger-Robertson. La segunda expresión toma en consideración las propiedades de la matriz de covarianza ante la acción de la matriz

simpléctica  $\Sigma$  y finalmente la última es la condición de pureza de los estados Gaussianos, la cual establece que el estado Gaussiano de  $d$  modos es puro si  $\det \sigma = 1/2^{2d}$  o mixto en otro caso [53, 69].

Para el estudio del enredamiento trabajaremos con estados Gaussianos de dimensión  $d = 2$ .

## 5.2. Estados Gaussianos de dos modos

Por simplicidad el estado Gaussiano que se estudiará es de la forma

$$\psi(x_1, x_2) = N \exp\left(-\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{A}_G\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{B}}_G\mathbf{x}\right), \quad (5.1)$$

donde hemos definido los vectores  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_G = (b_1, b_2)$  y la matriz de coeficientes.

$$\mathbf{A}_G = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

con los parámetros  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  y  $a_{12}$  de la parte cuadrática y los de la parte lineal  $b_1$ ,  $b_2$  pueden ser complejos, es decir

$$a_{11} = a_{11R} + ia_{11I}, \quad a_{22} = a_{22R} + ia_{22I}, \quad a_{12} = a_{12R} + ia_{12I},$$

La constante de normalización puede expresarse como

$$N = \frac{(a_{11R}a_{22R} - a_{12R}^2)^{1/4}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{8}(\tilde{\mathbf{B}}_G + \tilde{\mathbf{B}}_G^*)\mathbf{A}'_G{}^{-1}(\mathbf{B}_G + \mathbf{B}_G^*)\right),$$

con la matriz

$$\mathbf{A}'_G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11R} & -a_{12R} \\ -a_{12R} & a_{22R} \end{pmatrix},$$

para este estado las dispersiones y covarianzas de los operadores  $q_1, p_1$  y  $q_2, p_2$  en un sistema de unidades donde  $\omega_a = 1$  son

$$\sigma_{q_1q_1} = \frac{1}{d}a_{22R}, \quad \sigma_{p_1p_1} = \frac{1}{4d}(a_{11I}(a_{11I}a_{22R} - 2a_{12I}a_{12R}) + a_{11R}(a_{11R}a_{22R} + a_{12I}^2 - a_{12R}^2)),$$

$$\sigma_{q_2q_2} = \frac{1}{d}a_{11R}, \quad \sigma_{p_2p_2} = \frac{1}{4d}(a_{22I}(a_{11R}a_{22I} - 2a_{12I}a_{12R}) + a_{22R}(a_{11R}a_{22R} + a_{12I}^2 - a_{12R}^2)),$$

$$\sigma_{q_1q_2} = \frac{1}{d}a_{12R}, \quad \sigma_{p_1q_2} = \frac{1}{2d}(a_{11I}a_{12R} - a_{11R}a_{12I}), \quad \sigma_{p_2q_1} = \frac{1}{2d}(a_{12R}a_{22I} - a_{12I}a_{22R}),$$

$$\sigma_{p_1q_1} = \frac{1}{2d}(a_{11I}a_{22R} - a_{12I}a_{12R}), \quad \sigma_{p_2q_2} = \frac{1}{2d}(a_{11R}a_{22I} - a_{12I}a_{12R}),$$

$$\sigma_{p_1p_2} = \frac{1}{4d}(a_{12R}(a_{12R}^2 + a_{12I}^2) + a_{22I}(a_{11I}a_{12R} - a_{11R}a_{12I}) - a_{22R}(a_{11I}a_{12I} + a_{11R}a_{12R})),$$

con  $d = a_{11R}a_{22R} - a_{12R}^2$ . Estas cantidades conforman las entradas de la matriz de covarianza. Podemos observar que todas estas cantidades son reales, además el determinante de la matriz de covarianza es  $\det \sigma = 1/16$  dado que es un estado puro.

Varios estados importantes en la óptica cuántica pueden ser escritos de esta forma Gaussiana. A continuación enumeraremos algunos ejemplos

### 5.2.1. Ejemplos

(i) El estado coherente de dos modos es un estado Gaussiano que puede escribirse en la representación de posición mediante la fórmula

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{\omega_b^{1/4}}{\pi^{1/2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2} - \frac{\omega_b}{2}x_2^2 + \sqrt{2}\alpha_1 x_1 + \sqrt{2\omega_b}\alpha_2 x_2 - \frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_1^*)^2 - \frac{1}{4}(\alpha_2 + \alpha_2^*)^2\right).$$

por lo que los parámetros de la Ec. (5.1), son

$$\mathbf{A}_G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_G = \sqrt{2} (\alpha_1, \sqrt{\omega_b}\alpha_2).$$

La matriz de covarianza para este estado es la matriz diagonal

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \text{diag}(1, \omega_b, 1, 1/\omega_b),$$

(ii) También se puede expresar el estado de vacío comprimido. Dicho estado resulta de aplicar el operador de compresión de dos modos  $S(\xi) = \exp(\xi a^\dagger b^\dagger - \xi^* ab)$  al estado de vacío  $|0, 0\rangle$

$$|\xi\rangle = e^{\xi^* ab - \xi a^\dagger b^\dagger} |0, 0\rangle,$$

donde  $\xi = r e^{i\phi}$  es el parámetro de compresión. Al aplicar dicho operador se puede demostrar que se obtiene la expresión

$$|\xi\rangle = \sqrt{1 - |\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n |n, n\rangle, \quad 0 \leq |\beta| \leq 1, \quad (5.2)$$

donde se ha definido  $\beta = -e^{i\phi} \tanh r$ , y  $|n, n\rangle$  es el estado de Fock con  $n$  fotones en ambos modos del sistema

Usando la fórmula de Mehler

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} \exp\left(\frac{1}{1 - \beta^2} \left[2\beta xy - \frac{1 + \beta^2}{2}(x^2 + y^2)\right]\right) = \sqrt{1 - \beta^2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \Phi_n(x) \Phi_n(y),$$

donde  $\Phi_n(x)$  es la eigenfunción con  $n$  cuantos de energía de un oscilador armónico unidimensional. Puede demostrarse que para un valor real del parámetro de compresión ( $\phi = 0$ ) el estado de vacío comprimido en la representación de posiciones se puede escribir como

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{\omega_b^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{4}e^{2r}(x_1 + \sqrt{\omega_b}x_2)^2 - \frac{1}{4}e^{-2r}(x_1 - \sqrt{\omega_b}x_2)^2\right\}.$$

Por lo que puede hacerse la identificación con la Ec. (5.1), mediante

$$\mathbf{A}_G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cosh 2r & \sqrt{\omega_b} \sinh 2r \\ \sqrt{\omega_b} \sinh 2r & \omega_b \cosh 2r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_G = 0,$$

la matriz de covarianza para este estado es la siguiente

$$\begin{aligned}\sigma_{pp} &= \frac{1}{2(1-\beta^2)} \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 & -2\beta\sqrt{\omega_b} \\ -2\beta\sqrt{\omega_b} & (1 + \beta^2)\sqrt{\omega_b} \end{pmatrix}, \\ \sigma_{qq} &= \frac{1}{2(1-\beta^2)} \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 & 2\beta/\sqrt{\omega_b} \\ 2\beta/\sqrt{\omega_b} & (1 + \beta^2)\omega_b \end{pmatrix}. \\ \sigma_{pq} &= 0.\end{aligned}$$

Los estados coherentes forman una parte muy importante de la física por lo que en la siguiente sección se detallan algunas de sus propiedades las cuales servirán también para el estudio de superposiciones de estados coherentes.

### 5.3. Estados coherentes multidimensionales

### 5.4. Estados coherentes de un modo

El análisis de los estados coherentes de un modo es importante ya que muchos Hamiltonianos unidimensionales son parte de la literatura cotidiana de óptica cuántica y sirven como punto de partida para estudiar casos más complicados. El estado coherente puede representar estados de la luz como aquellos estados generados en un haz láser.

El estado coherente  $|\alpha\rangle$  de un modo tiene las siguientes definiciones:

1. Es eigenfunción del operador bosónico de aniquilación  $a$ , esto es

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (5.3)$$

donde  $\alpha$  es un número complejo.

2. Este estado también se define como un desplazamiento del estado de vacío,  $|0\rangle$  (que cumple  $a|0\rangle = 0$ ). De la siguiente manera

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle, \quad (5.4)$$

con  $D(\alpha) = \exp(a^\dagger\alpha - a\alpha^*)$ , es llamado el operador de desplazamiento.

3. Por último el estado coherente también puede ser definido como el estado de menor incertidumbre. El principio de incertidumbre de Heisenberg establece que se debe de cumplir la desigualdad de las dispersiones de las cuadraturas siguiente

$$(\Delta q)(\Delta p) \geq \frac{1}{2},$$

para cualquier estado. Se dice que el estado coherente es de mínima incertidumbre debido a que cumple la igualdad en la expresión anterior, donde se ha definido los operadores  $q$ ,  $p$  como

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \quad p = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a) \quad (5.5)$$

denominados operadores de cuadraturas.

Dichos estados coherentes tienen un promedio en los operadores de las cuadraturas que dependen de la parte real e imaginaria del parámetro  $\alpha$ . Esto es

$$\langle q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*), \quad \langle p \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha - \alpha^*),$$

y una dispersión que no depende explícitamente del parámetro  $\alpha$

$$(\Delta q)^2 = (\Delta p)^2 = \frac{1}{2}.$$

Asimismo los estados coherentes pueden escribirse en la base del oscilador armónico como

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

donde  $|n\rangle$  es el estado de  $n$  excitaciones. De esta representación puede obtenerse el promedio del operador de número  $N = a^\dagger a$

$$\langle N \rangle = |\alpha|^2$$

En el caso de estados coherentes de la luz  $N$  es el número de fotones de la luz coherente. La probabilidad de obtener  $n$  fotones en la luz coherente es

$$P_n(\alpha) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!},$$

una distribución poissoniana.

La dispersión del número de fotones para el estado coherente es

$$\sigma_N = |\alpha|^2,$$

por lo que el parámetro de Mandel, el cual mide si una distribución de fotones se aleja de una distribución poissoniana es la unidad, es decir

$$Q_M = \frac{\sigma_N}{\langle N \rangle} = 1,$$

## 5.5. Generalización a múltiples modos

En esta sección se presenta una generalización de la definición de los estados coherentes para un modo. Además se determinan algunas de las propiedades de los estados coherentes de la luz de  $n$  modos ( $|\vec{\alpha}\rangle = |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\rangle$ ). De la misma forma que para un modo el estado coherente tiene varias definiciones equivalentes; una de ellas es como eigenvector del operador de aniquilación del modo  $i$  ( $a_i$ ), es decir

$$a_i |\vec{\alpha}\rangle = \alpha_i |\vec{\alpha}\rangle,$$

donde  $\alpha_i$  es un número complejo.

Se puede obtener también a partir del desplazamiento del estado de cero fotones de la base de Fock  $|0, \dots, 0\rangle$  mediante el operador de desplazamiento

$$D(\vec{\alpha}) = \exp\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i a_i^\dagger - \alpha_i^* a_i)\right),$$

por lo tanto

$$|\vec{\alpha}\rangle = D(\vec{\alpha})|0, \dots, 0\rangle.$$

Y también son los estados con la menor incertidumbre en las cuadraturas  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  definidas mediante los operadores bosónicos como

$$p_j = i\sqrt{\frac{\omega_j}{2}}(a_j^\dagger - a_j), \quad q_j = \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}}(a_j + a_j^\dagger), \quad (5.6)$$

donde las dispersiones en las cuadraturas son

$$\Delta p_j = \Delta q_j = \frac{1}{2},$$

por lo que se dice que son los estados más parecidos a los estados clásicos. Esto es debido a que en un estado clásico la posición y momento (representadas en nuestro caso por  $q$  y  $p$ ), son conocidas con precisión, es decir la dispersión que presentan ambas cuadraturas es cero. El estado coherente es el estado cuántico que tiene la menor dispersión en sus cuadraturas es por ello que es el estado más parecido a un estado clásico.

Los estados coherentes satisfacen la estadística de Poisson en el número de fotones, por lo que la probabilidad de tener un número de fotones  $n$  en el modo  $i$  del estado coherente es

$$P_n(\alpha_i) = \frac{e^{-|\alpha_i|^2} |\alpha_i|^{2n}}{n!},$$

con  $\langle n \rangle_i = |\alpha_i|^2$  el número de fotones promedio. Además este estado no presenta correlación entre dos modos diferentes.

## 5.6. Estados cristalizados

Una vez definidos los estados coherentes es posible definir estados construidos como superposiciones de ellos. Los estados resultantes de la superposición presentan propiedades diferentes a los estados coherentes, algunos de ellos presentan características cuánticas que no existen en los estados coherentes como compresión y funciones de Wigner negativas por lo que su estudio es de interés.

Los estados resultantes de la superposición de sistemas coherentes que se estudiarán corresponden a estados que portan la representación irreducible de grupos puntuales como los grupos cristalinos. Por lo que son llamados estados cristalizados [36].

A continuación se realiza un breve repaso de las propiedades generales de los grupos y en específico de los grupos cíclicos y dihédricos.

### 5.6.1. Definición

Un grupo es un conjunto que satisface las siguientes propiedades: es cerrado ante una operación, es asociativo, tiene un elemento unidad y un inverso para cada elemento. Los grupos pueden ser finitos o infinitos dependiendo del número de elementos que lo conforman, en este trabajo se utilizarán sólo grupos finitos.

Los elementos de un grupo son representados por matrices, las cuales representan transformaciones de simetría. La operación que define nuestros grupos es la multiplicación,

por lo que la propiedad de cerradura nos dice que dos miembros distintos del grupo multiplicados darán como resultado otro miembro del grupo.

Supongamos un grupo de  $n$  elementos  $G : \{g_1, \dots, g_n\}$  con una representación irreducible <sup>1</sup>  $\{D(g_1), \dots, D(g_n)\}$ . Los elementos del grupo pueden dividirse en lo que se conoce como clases de conjugación; decimos que dos elementos  $(a, b)$  son conjugados si existe un elemento  $c$  en el grupo tal que  $cac^{-1} = b$ . Todos los elementos conjugados de  $a$  y  $a$  mismo definen una clase de conjugación. Nombramos  $k$  el número de clases que tiene el grupo  $G$ .

Los caracteres del grupo son dados por la traza de la representación irreducible, por lo que para cada elemento de esta representación irreducible tendremos un caracter dado por

$$\chi(g_s) = \sum_{\mu=1}^l D_{\mu\mu}(g_s),$$

donde  $l$  es la dimensión de la representación irreducible. Estos caracteres cumplen con la relación de ortogonalidad  $\frac{1}{n} \sum_{g_s} \chi^{(\lambda)}(g_s) \chi^{*(\lambda')}(g_s) = \delta_{\lambda\lambda'}$ . Los elementos que forman una clase de conjugación tienen la propiedad de compartir los mismos caracteres. Definidos estos conceptos de los grupos tenemos que los estados cristalizados son definidos como

$$|\psi^{(\lambda)}(\alpha)\rangle = N_\lambda(\alpha) \sum_{s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_s) |\alpha_s\rangle$$

donde  $\lambda$  es la representación irreducible a la cual está asociado el estado,  $\chi^{(\lambda)}(g_s)$  es el caracter perteneciente al elemento  $s$  del grupo y a la representación irreducible  $\lambda$ ,  $\alpha_s$  es un parámetro complejo que es el resultado de la acción del elemento  $g_s$  sobre un parámetro complejo  $\alpha$ , es decir  $\alpha_s = g_s \alpha$ . Asimismo  $N_\lambda^{-2} = \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) \langle \alpha_s | \alpha_r \rangle$ , es la constante de normalización.

Estos estados no son necesariamente ortogonales, ya que su producto interno está dado por

$$\langle \psi^{(\lambda')}(\alpha) | \psi^{(\lambda)}(\alpha) \rangle = N_{\lambda'}(\alpha) N_\lambda(\alpha) \sum_{s,s'} \chi^{(\lambda)}(g_s) \chi^{*(\lambda')}(g_{s'}) E_{s,s'},$$

con  $E_{s,s'} = \langle \alpha_{s'} | \alpha_s \rangle = \exp(-\frac{|\alpha_{s'}|^2}{2} - \frac{|\alpha_s|^2}{2} + \alpha_s \alpha_{s'}^*)$ . En general este término no es cero para todos los grupos y depende de las diferencias de fase entre  $s$  y  $s'$ :  $\Delta\phi = \phi_s - \phi_{s'}$ . Si las diferencias son pequeñas tenemos estados no ortogonales, si estas diferencias son grandes  $E_{s,s'}$  puede considerarse una delta de Kronecker  $\delta_{ss'}$  dando como resultado la simplificación de muchas de las expresiones obtenidas.

La estadística de las cuadraturas del estado coherente  $(q, p)$  nos permiten observar fenómenos como la compresión de los estados cristalizados. Esta compresión ocurre cuando una de las dispersiones de las cuadraturas es menor que aquella del estado coherente (1/2) y la otra dispersión es mayor a la del estado coherente. Esta compresión nos permite distinguir entre un estado con comportamiento cuántico o semiclásico.

Las dispersiones de las cuadraturas son útiles entre otras cosas para ver la localización del estado en el espacio fase generado por ambas cuadraturas y también son utilizadas

<sup>1</sup> Una representación irreducible es aquella representación que no puede expresarse como la suma directa de dos o más componentes

<sup>2</sup> Para ello se representa el parámetro  $\alpha$  como un vector en el espacio complejo ( $\alpha = (\alpha_R, \alpha_I)$ ), con sus partes real e imaginaria como elementos del vector. De esta forma la acción de la matriz de  $2 \times 2$  ( $g_s$ ) sobre  $\alpha$  es el vector  $\alpha_s$ .

para determinar si existe enredamiento en un estado de muchos modos como se verá más adelante.

Las propiedades de las cuadraturas del campo electromagnético pueden obtenerse mediante los promedios de  $q = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$ ,  $p = i(a^\dagger - a)/\sqrt{2}$  y de sus cuadrados [36]

$$\begin{aligned}\langle q \rangle &= \frac{N_\lambda^2}{\sqrt{2}} \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) E_{s,r} \{ \alpha_r + \alpha_s^* \}, \\ \langle p \rangle &= \frac{N_\lambda^2}{\sqrt{2}i} \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) E_{s,r} \{ \alpha_r - \alpha_s^* \}, \\ \langle q^2 \rangle &= N_\lambda^2 \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) E_{s,r} \left\{ \alpha_r \alpha_s^* + \frac{1}{2} (\alpha_r^2 + \alpha_s^{*2}) \right\} + \frac{1}{2}, \\ \langle p^2 \rangle &= N_\lambda^2 \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) E_{s,r} \left\{ \alpha_r \alpha_s^* - \frac{1}{2} (\alpha_r^2 + \alpha_s^{*2}) \right\} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Con estas cantidades pueden calcularse las dispersiones y la correlación de las cuadraturas, obteniéndose

$$\begin{aligned}\sigma_{qq} &= N_\lambda^2 \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) E_{s,r} \left\{ \alpha_r \alpha_s^* + \frac{1}{2} (\alpha_r^2 + \alpha_s^{*2}) \right\} + \frac{1}{2} \\ &\quad - \frac{N_\lambda^4}{2} \left( \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) E_{s,r} \{ \alpha_r + \alpha_s^* \} \right)^2, \\ \sigma_{pp} &= N_\lambda^2 \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) E_{s,r} \left\{ \alpha_r \alpha_s^* - \frac{1}{2} (\alpha_r^2 + \alpha_s^{*2}) \right\} + \frac{1}{2} \\ &\quad + \frac{N_\lambda^4}{2} \left( \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) E_{s,r} \{ \alpha_r - \alpha_s^* \} \right)^2, \\ \sigma_{qp} &= \frac{N_\lambda^2}{2} \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) E_{s,r} (\alpha_r^2 - \alpha_s^{*2}) - \frac{N_\lambda^4}{2} \left( \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) E_{s,r} \alpha_r \right)^2 \\ &\quad + \frac{N_\lambda^4}{2} \left( \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) E_{s,r} \alpha_s^* \right)^2,\end{aligned}$$

donde  $\sigma_{qq} = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2$ ,  $\sigma_{pp} = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$  y  $\sigma_{qp} = \langle \frac{1}{2} (pq + qp) \rangle - \langle p \rangle \langle q \rangle$ , la correlación entre ambas cuadraturas ( $q, p$ ) es en general diferente de cero para estas superposiciones de estados coherentes a diferencia de las que existen en el caso coherente que son iguales a cero.

El estudio de las propiedades estadísticas del número de fotones permite la clasificación de los estados dependiendo de sus propiedades. Una de las propiedades más importantes es el estudio del parámetro de Mandel; el cual se define como el valor de la dispersión del número de fotones comparado con el número promedio de fotones. Si la distribución del número de fotones es muy ancha con respecto al número promedio tenemos que los fotones tienden a estar en paquetes de muchos (estadística superpoissoniana) y si la distribución es pequeña con respecto al promedio los fotones tienden a estar solos (estadística subpoissoniana). Teniendo que la estadística subpoissoniana es una propiedad característica de las fuentes de luz cuánticas.

La distribución del número de fotones tiene la forma



$$\left| \langle n | \psi^{(\lambda)} \rangle \right|^2 = \frac{N_\lambda^2}{n!} \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) \exp\left(-\frac{|\alpha_r|^2}{2} - \frac{|\alpha_s|^2}{2}\right),$$

$$\sigma_n = N_\lambda^2 \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) E_{s,r} \alpha_r \alpha_s^* (\alpha_r \alpha_s^* + 1) - N_\lambda^4 \left( \sum_{r,s=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) \chi^{(\lambda)*}(g_s) E_{s,r} \alpha_r \alpha_s^* \right)^2,$$

puede observarse los estados cristalizados tienen propiedades no clásicas a pesar de ser superposiciones de estados coherentes. En este trabajo se estudian algunas propiedades de estados cristalizados que portan la representación irreducible de grupos cíclicos y dihédricos, los cuales definimos a continuación.

### 5.6.2. Grupos cíclicos

Los grupos cíclicos son grupos abelianos<sup>3</sup> en el que cada uno de los elementos tiene un periodo igual al orden del grupo, es decir  $g_s^n = g_s^0$  para toda  $s$ . Puede demostrarse que este grupo está formado por las simetrías de rotación del polígono regular de  $n$  lados, por lo tanto la representación de este grupo la forman las matrices de rotación  $R_k(\theta_k)$  con  $k = 1, \dots, n$  y  $\theta_k = 2\pi k/n$ . Se hace notar que para  $k = n$  se obtiene la matriz identidad  $I$ , por lo que los elementos del grupo son  $C_n : \{I, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}\}$ . Este grupo tiene un sólo generador  $R_1$  del cual pueden obtenerse todos los demás elementos. Para estos grupos tenemos que los parámetros complejos  $\alpha_s = \mu_n^{s-1} \alpha$  con  $\mu_n = \exp(2\pi i/n)$  y los caracteres del grupo están dados por  $\chi^{(\lambda)}(g_s) = \mu_n^{(\lambda-1)(s-1)}$ . Los estados asociados al grupo  $C_n$  son

$$\left| \psi_n^{(\lambda)}(\alpha) \right\rangle = N_\lambda(\alpha) \sum_{s=1}^n \mu_n^{(\lambda-1)(s-1)} \left| \mu_n^{s-1} \alpha \right\rangle, \quad (5.7)$$

donde cada término de la superposición es un estado coherente,  $\mu_n = \exp(2\pi i/n)$ ,  $\lambda$  es la representación irreducible a la que corresponde el estado y  $N_\lambda$  es la constante de normalización definida como  $N_\lambda^{-2} = \sum_{r,s} \mu_n^{(\lambda-1)(s-1)} \mu_n^{*(\lambda-1)(s-1)} E_{r,s}$ .

Utilizando la serie geométrica pueden demostrarse las igualdades

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \mu_n^{(s-1)(\lambda-\lambda')} &= n \delta_{\lambda,\lambda'} \\ \sum_{\lambda=1}^n \mu_n^{(\lambda-1)(s-s')} &= n \delta_{s,s'}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

las cuales constituyen la propiedad de ortogonalidad de los caracteres del grupo en las representaciones y en las clases, recordando que para estos grupos finitos las clases son unidimensionales. Es posible demostrar que los estados correspondientes a diferentes representaciones son linealmente independientes, es decir  $\langle \psi_n^{(\lambda)} | \psi_n^{(\lambda')} \rangle = \delta_{\lambda,\lambda'}$ , por lo que son estados ortonormales.

Multiplicando la Ec. (5.7) por  $\mu_n^{*(\lambda-1)(s'-1)}/N_\lambda(\alpha)$  y sumando sobre las diferentes representaciones, se tiene

<sup>3</sup> Un grupo abeliano es aquel donde la multiplicación de sus elementos es conmutativa.

$$\sum_{\lambda=1}^n \mu_n^{*(\lambda-1)(s'-1)} \frac{|\psi_n^{(\lambda)}(\alpha)\rangle}{N_\lambda(\alpha)} = \sum_{\lambda=1}^n \sum_{s=1}^n \mu_n^{(\lambda-1)(s-s')} |\mu_n^{s-1}\alpha\rangle, \quad (5.9)$$

intercambiando las sumas del lado derecho de la Ec. (5.9) y utilizando la propiedad de ortogonalidad de los caracteres, se obtiene

$$|\mu_n^{s-1}\alpha\rangle = \frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^n \mu_n^{*(\lambda-1)(s-1)} \frac{|\psi_n^{(\lambda)}(\alpha)\rangle}{N_\lambda(\alpha)}, \quad (5.10)$$

siendo esta la relación entre los estados coherentes con parámetro  $\mu_n^{s-1}\alpha$  y los estados que portan la representación de dichos grupos, los cuales son estados ortonormales para los grupos cíclicos.

### 5.6.3. Grupos dihédricos

Los grupos dihédricos son grupos no abelianos que están representados por las simetrías de rotación e inversión del polígono regular, estas simetrías las conforman las rotaciones  $R_k(\theta_k)$  por un ángulo  $\theta_k = 2\pi k/n$  (para  $k = 1, \dots, n$ ) y las rotaciones de segundo orden  $U_k = R_k U_0$  (una rotación seguida de una inversión) donde  $U_0$  es una inversión en el eje real en el espacio complejo. Por lo cual los elementos de este grupo son  $D_n : \{I, R_1, \dots, R_{n-1}, U_0 I, U_0 R_1, \dots, U_0 R_{n-1}\}$ , es decir  $D_n : \{I, R_1, \dots, R_{n-1}, U_0, U_1, \dots, U_{n-1}\}$ . Estos grupos tienen  $2n$  elementos y en general varias de sus representaciones irreducibles son de dos dimensiones. Los elementos del grupo pueden escribirse en una sola ecuación

$$\begin{pmatrix} \sigma \cos \frac{2\pi k}{n} & -\sigma \sin \frac{2\pi k}{n} \\ \sin \frac{2\pi k}{n} & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} = \begin{cases} R_k & \text{si } \sigma = 1, \\ U_k & \text{si } \sigma = -1. \end{cases}$$

Para el caso de los grupos dihédricos el número de estados cristalizados depende en una forma no trivial del orden del grupo, en específico depende si el orden del grupo dihédrico es par o impar. Para  $n$  par las rotaciones de segundo orden forman dos clases de conjugación diferentes, también se tiene que la rotación por  $\pi$  forma su propia clase; para  $n$  impar las rotaciones de segundo orden sólo forman una clase de conjugación. Por ello la expresión de los estados cristalizados para los grupos dihédricos dependerá de la paridad de  $n$ .

### 5.6.4. Propiedades

Como ejemplo de las propiedades de los estados cristalizados tomaremos los estados asociados a las representaciones irreducibles de los grupos cíclicos  $C_2$  y  $C_4$ . Para el caso del grupo  $C_2$  son los estados llamados par e impar de gato

$$\begin{aligned} |\psi_2^{(1)}(\alpha)\rangle &= N_1(\alpha) (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle), \\ |\psi_2^{(2)}(\alpha)\rangle &= N_2(\alpha) (|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle), \end{aligned}$$

y para el grupo  $C_4$  tenemos cuatro estados

$$\begin{aligned}
 |\psi_4^{(1)}(\alpha)\rangle &= \mathcal{N}_1(\alpha) (|\alpha\rangle + |i\alpha\rangle + |-\alpha\rangle + |-i\alpha\rangle), \\
 |\psi_4^{(2)}(\alpha)\rangle &= \mathcal{N}_2(\alpha) (|\alpha\rangle + i|i\alpha\rangle - |-\alpha\rangle - i|-i\alpha\rangle), \\
 |\psi_4^{(3)}(\alpha)\rangle &= \mathcal{N}_3(\alpha) (|\alpha\rangle - |i\alpha\rangle + |-\alpha\rangle - |-i\alpha\rangle), \\
 |\psi_4^{(4)}(\alpha)\rangle &= \mathcal{N}_4(\alpha) (|\alpha\rangle - i|i\alpha\rangle - |-\alpha\rangle + i|-i\alpha\rangle),
 \end{aligned}$$

donde las constantes de normalización están dadas por

$$\begin{aligned}
 N_1(\alpha) &= \left(2 + 2e^{-2|\alpha|^2}\right)^{-1/2}, \\
 N_2(\alpha) &= \left(2 - 2e^{-2|\alpha|^2}\right)^{-1/2},
 \end{aligned}$$

para el grupo  $C_2$  y para  $C_4$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_1(\alpha) &= \left(8e^{-|\alpha|^2} \left(\cos(|\alpha|^2) + \cosh(|\alpha|^2)\right)\right)^{-1/2}, \\
 \mathcal{N}_2(\alpha) &= \left(-8e^{-|\alpha|^2} \left(\sin(|\alpha|^2) - \sinh(|\alpha|^2)\right)\right)^{-1/2}, \\
 \mathcal{N}_3(\alpha) &= \left(-8e^{-|\alpha|^2} \left(\cos(|\alpha|^2) - \cosh(|\alpha|^2)\right)\right)^{-1/2}, \\
 \mathcal{N}_4(\alpha) &= \left(8e^{-|\alpha|^2} \left(\sin(|\alpha|^2) + \sinh(|\alpha|^2)\right)\right)^{-1/2}.
 \end{aligned}$$

Algunas de las propiedades estadísticas que pueden obtenerse son las siguientes: dispersiones de las cuadraturas del campo electromagnético, coeficientes de compresión, la distribución probabilidad del número de fotones, el número de Mandel, las distribuciones de cuasi probabilidad de Wigner y Husimi y el segundo momento de la distribución de Husimi. A continuación hacemos un recuento de dichas propiedades

La compresión de las cuadraturas se presenta cuando alguna de las dispersiones de los estados es menor a la correspondiente dispersión de un estado coherente ( $(\Delta q)^2 = (\Delta p)^2 = 1/2$ ). Estas cuadraturas representan una distribución circular en el espacio fase para el estado coherente y una distribución elíptica para un estado que presenta compresión.

Para observar la compresión de las cuadraturas del campo electromagnético hacemos uso de los parámetros

$$S_q = 2(\Delta q)^2, \quad S_p = 2(\Delta p)^2,$$

donde definimos las dispersiones como

$$(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2, \quad (\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2.$$

Dichos parámetros de compresión toman valores menores a uno cuando hay compresión.

De la (fig. 5.1) se observa que existe compresión para el grupo  $C_2$ , ésta es debida a que los estados de este grupo son vectores propios de los operadores de creación y aniquilación al cuadrado  $a^2$  y  $a^{\dagger 2}$ . Debido a ello los promedios de las cuadraturas y sus cuadrados son simples en estructura, es fácil observar que los términos involucrados llevan a una compresión en la cuadratura  $p$ . Cuando trabajamos con el grupo  $C_4$  (fig. 5.1) no se tiene dicha propiedad por lo que las estructuras de los promedios y sus cuadrados nos

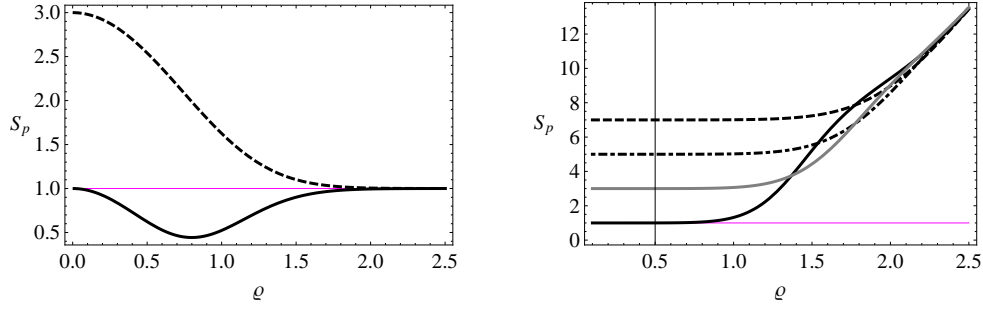


Figura 5.1. Parámetro de compresión  $S_p$  en términos de la norma  $\rho$  para los estados de  $C_2$  (línea: estado par, línea punteada: estado impar) y para los estados del grupo  $C_4$  (línea negra: estado  $|\psi_4^{(1)}\rangle$ , línea punteada: estado  $|\psi_4^{(2)}\rangle$ , puntos y líneas: estado  $|\psi_4^{(3)}\rangle$  y línea gris: estado  $|\psi_4^{(4)}\rangle$ )

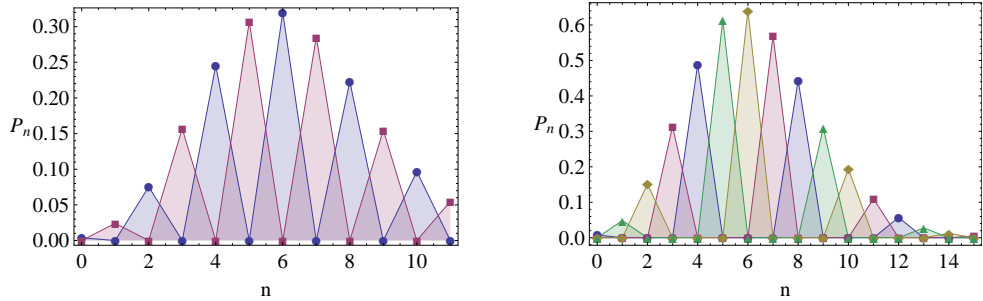


Figura 5.2. Probabilidad del número de fotones para los estados del grupo  $C_2$  (derecha), (cuadrado estado par y círculo estado impar) y  $C_4$  (izquierda), (círculo estado  $|\psi_4^{(1)}\rangle$ , cuadrado estado  $|\psi_4^{(2)}\rangle$ , rombo estado  $|\psi_4^{(3)}\rangle$  y triángulo estado  $|\psi_4^{(4)}\rangle$ ),  $\alpha = 2.5$

llevan a que no existe compresión y en general para los grupos cíclicos con  $n$  mayor a 2 no hay compresión

La distribución de probabilidad del número de fotones está definida como

$$P_n = \left| \langle \psi^{(\lambda)} | n \rangle \right|^2,$$

esta probabilidad para los estados cíclicos presenta un comportamiento oscilatorio. Para el estado par  $|\psi_2^{(1)}(\alpha)\rangle$  sólo contribuyen números de fotones pares y para el estado impar  $|\psi_2^{(2)}(\alpha)\rangle$  sólo números de fotones impares. Esto es debido a que al aplicar el operador  $a$  al estado par tendremos como resultado un estado proporcional al estado impar, de la misma forma si aplicamos  $a$  al estado impar tendremos un estado proporcional al estado par. Por esto las distribuciones de probabilidad tienen este desplazamiento de un fotón

Este comportamiento oscilatorio se repite en el grupo  $C_4$  de la siguiente forma, en este caso cada uno de los estados puede ser obtenido aplicando el operador de aniquilación  $a$  sucesivamente al estado  $|\psi_4^{(1)}(\alpha)\rangle$  de la siguiente forma:  $|\psi_4^{(2)}(\alpha)\rangle \propto a |\psi_4^{(1)}(\alpha)\rangle$ ,  $|\psi_4^{(3)}(\alpha)\rangle \propto a^2 |\psi_4^{(1)}(\alpha)\rangle$  y  $|\psi_4^{(4)}(\alpha)\rangle \propto a^3 |\psi_4^{(1)}(\alpha)\rangle$  de forma que cada uno de ellos son desplazados un fotón con respecto a los otros en la estadística de fotones; además la

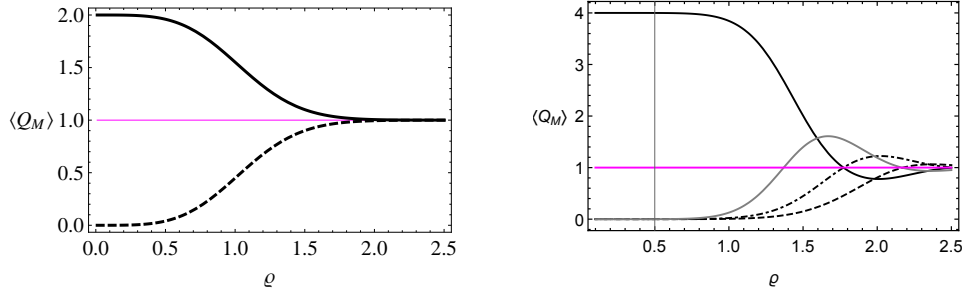


Figura 5.3. Parámetro de Mandel para los estados del grupo  $C_2$  (derecha) y  $C_4$  (izquierda). El código de colores es igual al de la fig.(5.1)

probabilidad tiene valores diferentes de cero para un cierto número de fotones módulo 4, como puede verse en la (fig. 5.2)

En el caso del parámetro de Mandel, el cual se define como  $Q_M = \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle}{\langle n \rangle}$ , con  $(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ . Este parámetro nos da información del tipo de estadística de fotones que se tiene dado que compara la anchura de la distribución del número de fotones con respecto al promedio. Para valores mayores que 1, es decir la anchura es grande con respecto al promedio se tienen estadísticas superpoissonianas donde los fotones tienden a venir en paquetes (bunches), para valores menores que 1, donde la anchura es pequeña con respecto al promedio se tienen estadísticas subpoissonianas donde los fotones tienden a venir de uno en uno (antibunching) y para el valor límite 1 se tiene una estadística poissoniana donde los fotones llegan en paquetes de un número aleatorio de fotones.

Para el estado par  $|\psi_2^{(1)}(\alpha)\rangle$  de  $C_2$  tenemos una estadística superpoissoniana y para el estado impar  $|\psi_2^{(2)}(\alpha)\rangle$  se tiene una estadística subpoissoniana. Esto es debido a que el estado par tiende a un estado de cero fotones cuando  $\rho$  es pequeña y el estado impar se indetermina en este caso. Ambas estadísticas tienden a una poissoniana cuando la norma de  $\alpha = \rho e^{i\phi}$  es grande.

Para el grupo  $C_4$  se tiene una estadística superpoissoniana para el primer estado y una estadística subpoissoniana para los demás estados cuando la norma  $\rho$  es pequeña debido a que el primer estado se vuelve un estado con cero fotones en ese límite y los demás estados se indeterminan. Sin embargo esto cambia para valores más grandes de  $\rho$  en donde el comportamiento oscila entre subpoissoniano y superpoissoniano y finalmente se vuelve poissoniano cuando la norma  $\rho$  es grande.

## 5.7. Estados cristalizados de dos modos

De manera análoga a la de los estados cristalizados de un modo, se pueden definir estados de dos modos  $(\alpha, \beta)$  que porten la representación irreducible de grupos puntuales de la siguiente forma

$$|\Psi^{(\lambda)}(\alpha, \beta)\rangle = N^{(\lambda)}(\alpha, \beta) \sum_{r=1}^n \chi^{(\lambda)}(g_r) |\alpha_r, \beta_r\rangle, \quad (5.11)$$

donde ahora  $\alpha_r, \beta_r$  denotan la acción del elemento del grupo  $g_r$  sobre los parámetros complejos  $\alpha, \beta$  respectivamente.

La forma de definir los estados cristalizados de dos modos que porten las representaciones en la Ec. (5.11), no es la única forma de obtener estados de dos modos con superposiciones de estados coherentes; por lo cual se plantea realizar un estudio a futuro de los tipos de estados de dos modos que pueden definirse y observar la conveniencia de éstos.

Como ejemplo se presentan los estados que portan la representación del grupo cíclico  $C_2$ , los cuales son

$$\begin{aligned} |\Psi_2^{(1)}(\alpha, \beta)\rangle &= N^{(1)}(\alpha, \beta) (|\alpha, \beta\rangle + |-\alpha, -\beta\rangle), \\ |\Psi_2^{(2)}(\alpha, \beta)\rangle &= N^{(2)}(\alpha, \beta) (|\alpha, \beta\rangle - |-\alpha, -\beta\rangle), \end{aligned}$$

que denominaremos como estados par e impar de dos modos. Asimismo para el caso del grupo  $C_4$  los cuatro estados que portan las representaciones irreducibles del grupo pueden ser escritos como

$$\begin{aligned} |\Psi_4^{(1)}(\alpha, \beta)\rangle &= \mathcal{N}^{(1)}(\alpha, \beta) (|\alpha, \beta\rangle + |i\alpha, i\beta\rangle + |-\alpha, -\beta\rangle + |-i\alpha, -i\beta\rangle), \\ |\Psi_4^{(2)}(\alpha, \beta)\rangle &= \mathcal{N}^{(2)}(\alpha, \beta) (|\alpha, \beta\rangle + i|i\alpha, i\beta\rangle - |-\alpha, -\beta\rangle - i|-i\alpha, -i\beta\rangle), \\ |\Psi_4^{(3)}(\alpha, \beta)\rangle &= \mathcal{N}^{(3)}(\alpha, \beta) (|\alpha, \beta\rangle - |i\alpha, i\beta\rangle + |-\alpha, -\beta\rangle - |-i\alpha, -i\beta\rangle), \\ |\Psi_4^{(4)}(\alpha, \beta)\rangle &= \mathcal{N}^{(4)}(\alpha, \beta) (|\alpha, \beta\rangle - i|i\alpha, i\beta\rangle - |-\alpha, -\beta\rangle + i|-i\alpha, -i\beta\rangle). \end{aligned}$$

Este tipo de estados presentan enredamiento el cual será estudiado a continuación.

## 5.8. Enredamiento de estados cristalizados

En esta sección se explora una forma de calcular el enredamiento entre dos modos para los grupos cíclicos. Esta forma de calcular el enredamiento vía la entropía lineal o de von Neumann se basa en la descripción de los estados cíclicos bipartitas por medio de los estados cíclicos unimodales.

Los estados cristalizados como los estados par e impar (lo cuales portan la representación del grupo cíclico  $C_2$ ) y los estados comprimidos tienen características estadísticas diferentes a aquellas de los estados coherentes [70, 71]. Existen varias propuestas para la generación de estos estados. Por ejemplo la evolución de un estado coherente a través de un medio dispersivo [72], otros usan la evolución de un estado coherente en un medio no lineal birrefringente [73, 74] y otros mediante la evolución dinámica de la interacción con un átomo y el campo electromagnético [75–77].

La generalización de los estados cíclicos a dos modos  $(\alpha, \beta)$  para el grupo  $C_n$  puede ser obtenida mediante la siguiente ecuación

$$|\psi^{(\lambda)}(\alpha, \beta)\rangle = \mathcal{N}_\lambda(\alpha, \beta) \sum_{s=1}^n \mu_n^{(\lambda-1)(s-1)} |\mu_n^{s-1}\alpha, \mu_n^{s-1}\beta\rangle, \quad (5.12)$$

como puede observarse se ha utilizado la misma forma del estado para ambos modos, esta definición no es única por lo que existen varias formas de definirlos.

Para calcular el enredamiento primero se reescribirá el estado cíclico bipartita  $|\psi^{(\lambda)}(\alpha, \beta)\rangle$  como una superposición de los estados de un modo  $|\psi^{(\lambda')}(\alpha)\rangle$  y  $|\psi^{(\lambda'')}(\beta)\rangle$ .

Sustituyendo las expresiones para  $\alpha, \beta$  de la Ec. (5.10) en la Ec. (5.12) podemos escribir entonces los estados de dos modos en términos de superposiciones de productos de estados de un modo

$$|\psi^{(\lambda)}(\alpha, \beta)\rangle = \frac{\mathcal{N}_\lambda(\alpha, \beta)}{n^2} \sum_{s=1}^n \sum_{\lambda'=1}^n \sum_{\lambda''=1}^n \mu_n^{(s-1)(\lambda-\lambda'-\lambda''+1)} \frac{|\psi^{(\lambda')}(\alpha)\rangle |\psi^{(\lambda'')}(\beta)\rangle}{N_{\lambda'}(\alpha)N_{\lambda''}(\beta)}, \quad (5.13)$$

la suma  $\sum_{s=1}^n \mu_n^{(s-1)(\lambda-\lambda'-\lambda''+1)}$  puede realizarse mediante la serie geométrica, dando como resultado que sólo es diferente de cero cuando la cantidad  $\lambda - \lambda' - \lambda'' + 1 = 0, -n$ ; por lo que podemos concluir

$$\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \mu_n^{(s-1)(\lambda-\lambda'-\lambda''+1)} = \delta_{\lambda'', (\lambda-\lambda'+n+1) \bmod(n)}$$

utilizando este resultado la Ec. (5.13) puede reescribirse como

$$|\psi^{(\lambda)}(\alpha, \beta)\rangle = \frac{\mathcal{N}_\lambda(\alpha, \beta)}{n} \sum_{\lambda'=1}^n \frac{|\psi^{(\lambda')}(\alpha)\rangle |\psi^{(\lambda'')}(\beta)\rangle}{N_{\lambda'}(\alpha)N_{\lambda''}(\beta)}, \quad \lambda'' = \lambda - \lambda' + n + 1 \bmod(n). \quad (5.14)$$

La matriz densidad asociada al estado de la representación  $\lambda$ , es

$$\rho^{(\lambda)}(\alpha, \beta) = \frac{\mathcal{N}_\lambda^2(\alpha, \beta)}{n^2} \sum_{\lambda'=1}^n \sum_{\tilde{\lambda}'=1}^n \frac{|\psi^{(\lambda')}(\alpha)\rangle |\psi^{(\lambda'')}(\beta)\rangle \langle \psi^{(\tilde{\lambda}')}(\alpha) | \langle \psi^{(\tilde{\lambda}'')}(\beta) |}{N_{\lambda'}(\alpha)N_{\lambda''}(\beta)N_{\tilde{\lambda}'}(\alpha)N_{\tilde{\lambda}''}(\beta)}.$$

Tomando en cuenta que los estados cíclicos de un sólo modo pueden ser tomados como una base completa de estados para caracterizar el sistema bipartita, es posible obtener información sobre el enredamiento. En específico las matrices reducidas de los modos uno y dos se escriben como

$$\rho_1^{(\lambda)}(\alpha, \beta) = \frac{\mathcal{N}_\lambda^2(\alpha, \beta)}{n^2} \sum_{\lambda'=1}^n \frac{|\psi^{(\lambda')}(\alpha)\rangle \langle \psi^{(\lambda')}(\alpha) |}{N_{\lambda'}^2(\alpha)N_{\lambda''}^2(\beta)}, \quad \rho_2^{(\lambda)}(\alpha, \beta) = \frac{\mathcal{N}_\lambda^2(\alpha, \beta)}{n^2} \sum_{\lambda'=1}^n \frac{|\psi^{(\lambda')}(\beta)\rangle \langle \psi^{(\lambda')}(\beta) |}{N_{\lambda'}^2(\beta)N_{\lambda''}^2(\alpha)},$$

donde se ha hecho la traza parcial sobre los estados diferentes estados del segundo modo:  $|\psi^{(\lambda'')}(\beta)\rangle$  en el primer caso y en el segundo se ha hecho la traza parcial sobre los estados  $|\psi^{(\lambda')}(\alpha)\rangle$ . Estas matrices reducidas son diagonales por lo que la entropía de von Neumann y la lineal pueden obtenerse como

$$S_{VN}^{(\lambda)}(\alpha, \beta) = - \sum_{i=1}^n \frac{\mathcal{N}_\lambda^2(\alpha, \beta)}{n^2} \frac{1}{N_i^2(\alpha)N_i^2(\beta)} \ln \left( \frac{\mathcal{N}_\lambda^2(\alpha, \beta)}{n^2} \frac{1}{N_i^2(\alpha)N_i^2(\beta)} \right), \quad (5.15)$$

$$S_L^{(\lambda)}(\alpha, \beta) = 1 - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mathcal{N}_\lambda^2(\alpha, \beta)}{n^2} \frac{1}{N_i^2(\alpha)N_i^2(\beta)} \right)^2,$$

con  $i' = \lambda - i + n + 1 \bmod(n)$ . De esta forma es posible el cálculo de estas entropías para cualquier grupo cíclico.

Como ejemplo se calcula el enredamiento para los estados par e impar de dos modos que portan la representación del grupo  $C_2$

$$|\psi^{(\pm)}(\alpha, \beta)\rangle = \mathcal{N}_{\pm}(\alpha, \beta) (|\alpha, \beta\rangle \pm |-\alpha, -\beta\rangle),$$

con constante de normalización  $\mathcal{N}_{\pm}(\alpha, \beta) = 1/(2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2 - 2|\beta|^2}))$ . Para calcular sus entropías lineal y de von Neumann utilizamos los estados para e impar de un sólo modo,

$$|\psi^{(\pm)}(\alpha)\rangle = N_{\pm}(\alpha) (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle), \quad |\psi^{(\pm)}(\beta)\rangle = N_{\pm}(\beta) (|\beta\rangle \pm |-\beta\rangle),$$

los cuales tienen las siguientes constantes de normalización  $N_{\pm}(\alpha) = 1/(2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2}))$ ,  $N_{\pm}(\beta) = 1/(2(1 \pm e^{-2|\beta|^2}))$ . Al aplicar la Ec. (5.15) tenemos entonces que las entropías pueden escribirse como

$$\begin{aligned} S_{VN}^{(+)}(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \frac{\mathcal{N}_+^2(\alpha, \beta)}{N_i^2(\alpha)N_i^2(\beta)} \ln \left( \frac{\mathcal{N}_+^2(\alpha, \beta)}{4} \frac{1}{N_i^2(\alpha)N_i^2(\beta)} \right), \\ S_{VN}^{(-)}(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \frac{\mathcal{N}_-^2(\alpha, \beta)}{N_i^2(\alpha)N_{i+1}^2(\beta)} \ln \left( \frac{\mathcal{N}_-^2(\alpha, \beta)}{4} \frac{1}{N_i^2(\alpha)N_{i+1}^2(\beta)} \right), \\ S_L^{(\pm)}(\alpha, \beta) &= \frac{(1-e^{2|\alpha|^2})(1-e^{2|\beta|^2})}{2(1 \pm e^{2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2})^2}, \end{aligned}$$

con  $N_1 = N_+$ ,  $N_2 = N_- \text{ mod}(2)$ . Es posible demostrar que los límites cuando los parámetros  $\alpha, \beta$  tienden a infinito son

$$S_{VN}^{(\pm)}(\alpha, \beta)|_{\alpha, \beta \rightarrow \infty} \rightarrow \ln 2, \quad S_L^{(\pm)}(\alpha, \beta)|_{\alpha, \beta \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{2},$$

el cual corresponde a un estado máximamente enredado en un espacio de Hilbert de dos dimensiones. Este comportamiento resulta ser general para los estados cíclicos, es decir los estados que portan la representación del grupo  $C_n$  tienen como límite

$$S_{VN}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)|_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow \infty} \rightarrow \ln n, \quad S_L(\alpha_1, \dots, \alpha_n)|_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{n},$$

independiente de la representación que utilicemos. Por lo tanto tienden a ser estados máximamente enredados.



## Capítulo 6

# Resultados

En este capítulo presentamos los resultados más importantes, los cuales son: el estudio de la evolución de estados Gaussianos bipartitas en Hamiltonianos cuadráticos como el amplificador paramétrico y convertidor de frecuencias, la obtención de la dinámica del enredamiento entre los dos modos de los estados Gaussianos, la obtención de bases que portan la representación irreducible de los grupos  $SU(1,1)$  y  $SU(2)$  y que además son solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo de estos sistemas paramétricos, además de la obtención de dos criterios de separabilidad de estados de variable continua en términos de la representación tomográfica para los sistemas dinámicos antes mencionados.

Para la obtención de la evolución de los estados Gaussianos bipartitas en los procesos paramétricos de amplificación y conversión de frecuencias se calculan los invariantes lineales, los cuales permiten la obtención del propagador del sistema y posteriormente la función de onda al tiempo  $t$ .

### 6.1. Invariantes dependientes del tiempo para procesos paramétricos

Los invariantes dependientes del tiempo para el amplificador paramétrico y el convertidor de frecuencias son obtenidos en esta sección. Estos invariantes son posteriormente utilizados para el cálculo de varias propiedades dinámicas de los estados Gaussianos. Es posible definir invariantes dependientes del tiempo que forman el álgebra  $SU(1,1)$  y  $SU(2)$ , con la ayuda de estos invariantes se obtienen bases que portan la representación de dichos operadores y que además son solución de la ecuación de Schrödinger con dependencia temporal.

#### 6.1.1. Amplificador

En esta sección se determinan los invariantes dependientes del tiempo para el Hamiltoniano del amplificador paramétrico

$$H = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b - \hbar k (a^\dagger b^\dagger e^{-i\omega t} + a b e^{i\omega t}).$$

Los invariantes dependientes del tiempo son operadores  $\Lambda(t)$  que cumplen

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = 0 = \frac{1}{i\hbar}[\Lambda(t), H] + \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(t). \quad (6.1)$$

Para Hamiltonianos hasta cuadráticos, los operadores  $\Lambda(t)$  son lineales en los operadores de creación y aniquilación [2]. Para el amplificador paramétrico, se propone un invariante de la forma

$$\Lambda(t) = \lambda_1(t)a + \lambda_2(t)b + \lambda_3(t)a^\dagger + \lambda_4(t)b^\dagger,$$

el cual sustituyendo en la Ec. (6.1) lleva a un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 - i\lambda_1\omega_a - ik\lambda_4e^{i\omega t} &= 0, & \dot{\lambda}_4 + i\lambda_4\omega_b + ik\lambda_1e^{-i\omega t} &= 0, \\ \dot{\lambda}_2 - i\lambda_2\omega_b - ik\lambda_3e^{i\omega t} &= 0, & \dot{\lambda}_3 + i\lambda_3\omega_a + ik\lambda_2e^{-i\omega t} &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales, se consideran los cambios de variable  $\lambda_1 = e^{i\omega_a t}g_1$  y  $\lambda_4 = e^{-i\omega_b t}g_4$ , junto a  $\lambda_2 = e^{i\omega_b t}g_2$  y  $\lambda_3 = e^{-i\omega_a t}g_3$ . Sustituyéndolas en la Ec. (6.2), se llega a

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= ik e^{i\Omega t} g_4, & \dot{g}_4 &= -ik e^{-i\Omega t} g_1, \\ \dot{g}_2 &= ik e^{i\Omega t} g_3, & \dot{g}_3 &= -ik e^{-i\Omega t} g_2, \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde  $\Omega = \omega - \omega_a - \omega_b$ . Derivando una segunda vez las expresiones en (6.3) se obtiene la siguiente ecuación para  $g_1$

$$\ddot{g}_1 - i\Omega\dot{g}_1 - k^2g_1 = 0,$$

cuya solución, con las condiciones iniciales  $g_1(0) = 1$  y  $g_4(0) = 0$ , es

$$\begin{aligned} g_1(t) &= e^{i\Omega/2t} \left( \cos \nu t - \frac{i\Omega}{2\nu} \sin \nu t \right), \\ g_4(t) &= -\frac{ik}{\nu} e^{-i\Omega t} \sin \nu t, \end{aligned} \quad (6.4)$$

con  $\nu = \sqrt{\Omega^2/4 - k^2}$ . Esta solución se obtiene pensando que  $\nu \in \mathbb{R}$  ( $\Omega^2/4 > k^2$ ), sin embargo uno podría pensar que  $\nu \in \mathbb{I}$  ( $\Omega^2/4 < k^2$ ) y por lo tanto las funciones periódicas de la Ec. (6.4) se vuelven funciones hiperbólicas.

Se hace notar que las ecuaciones diferenciales que deben cumplir  $g_2$  y  $g_3$  son completamente análogas a las que cumplen  $g_1$  y  $g_4$ . La única diferencia son las condiciones iniciales  $g_2(0) = 0$  y  $g_3(0) = 0$ , por lo que la solución para todo tiempo es  $g_2(t) = g_3(t) = 0$ . Estas soluciones sirven para determinar el invariante lineal dependiente del tiempo que cumple  $\Lambda(0) = a$ , al cual llamaremos  $A$ .

Si ahora se consideran las condiciones iniciales  $g_1(0) = 0$ ,  $g_2(0) = 1$ ,  $g_3(0) = 0$ ,  $g_4(0) = 0$ , se tienen las mismas soluciones que en el caso anterior haciendo las sustituciones

$$g_2(t) \rightarrow g_1(t), \quad g_3(t) \rightarrow g_4(t)$$

en la Ec. (6.3). El invariante lineal dependiente del tiempo con estas condiciones iniciales cumple que  $\Lambda(0) = b$ , por lo cual es llamado  $B$

Sustituyendo ambas soluciones se llega a las expresiones

$$\begin{aligned}
A(t) &= e^{i\frac{\Omega}{2}t} e^{i\omega_a t} \left( \cos \nu t - \frac{i\Omega}{2\nu} \sin \nu t \right) a - i e^{-i\frac{\Omega}{2}t} e^{-i\omega_b t} \frac{k}{\nu} \sin \nu t b^\dagger, \\
B(t) &= e^{i\frac{\Omega}{2}t} e^{i\omega_b t} \left( \cos \nu t - \frac{i\Omega}{2\nu} \sin \nu t \right) b - i e^{-i\frac{\Omega}{2}t} e^{-i\omega_a t} \frac{k}{\nu} \sin \nu t a^\dagger,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

con las cantidades  $\Omega = \omega - \omega_a - \omega_b$  y  $\nu = \sqrt{\Omega^2/4 - k^2}$ .

Los operadores invariantes del tiempo de las cuadraturas son definidos como  $P_1 = i(A^\dagger - A)/\sqrt{2}$ ,  $P_2 = i\sqrt{\omega_b/2}(B^\dagger - B)$ ,  $Q_1 = (A + A^\dagger)/\sqrt{2}$  y  $Q_2 = (B + B^\dagger)/\sqrt{2\omega_b}$ , los cuales pueden ser escritos explícitamente.

Para la matriz  $\mathbf{S}$  que define a los invariantes lineales de las Ecs. (4.3) y (4.6) se presentan a continuación cada una de sus matrices por bloques. Para el caso de  $\mathbf{v}_1$  se tiene

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_1)_{11} &= \cos((\Omega/2 + \omega_a)t) \cos \nu t + \frac{\Omega}{2\nu} \sin((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu t, \\
(\mathbf{v}_1)_{12} &= \frac{k}{\nu\sqrt{\omega_b}} \sin((\Omega/2 + \omega_b)t) \sin \nu t, \\
(\mathbf{v}_1)_{21} &= \frac{k\sqrt{\omega_b}}{\nu} \sin((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu t, \\
(\mathbf{v}_1)_{22} &= \cos((\Omega/2 + \omega_b)t) \cos \nu t + \frac{\Omega}{2\nu} \sin((\Omega/2 + \omega_b)t) \sin \nu t.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

La matriz  $\mathbf{u}_1$  puede ser obtenida con

$$\begin{aligned}
-(\mathbf{u}_1)_{11} &= \sin((\Omega/2 + \omega_a)t) \cos \nu t - \frac{\Omega}{2\nu} \cos((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu t, \\
-(\mathbf{u}_1)_{12} &= -\frac{k\sqrt{\omega_b}}{\nu} \cos((\Omega/2 + \omega_b)t) \sin \nu t, \\
-(\mathbf{u}_1)_{21} &= -\frac{k\sqrt{\omega_b}}{\nu} \cos((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu t, \\
-(\mathbf{u}_1)_{22} &= (\sin((\Omega/2 + \omega_b)t) \cos \nu t - \frac{\Omega}{2\nu} \cos((\Omega/2 + \omega_b)t) \sin \nu t) \omega_b.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Asimismo la matriz  $\mathbf{v}_2$  esta definida como

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_2)_{11} &= -\sin((\Omega/2 + \omega_a)t) \cos \nu t + \frac{\Omega}{2\nu} \cos((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu t, \\
(\mathbf{v}_2)_{12} &= -\frac{k}{\nu\sqrt{\omega_b}} \cos((\Omega/2 + \omega_b)t) \sin \nu t, \\
(\mathbf{v}_2)_{21} &= -\frac{k}{\nu\sqrt{\omega_b}} \cos((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu t, \\
(\mathbf{v}_2)_{22} &= (-\sin((\Omega/2 + \omega_b)t) \cos \nu t + \frac{\Omega}{2\nu} \cos((\Omega/2 + \omega_b)t) \sin \nu t) / \omega_b.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

También la matriz  $\mathbf{u}_2$  puede ser descrita por

$$\begin{aligned}
 -(\mathbf{u}_2)_{11} &= \cos((\Omega/2 + \omega_a)t) \cos \nu t + \frac{\Omega}{2\nu} \sin((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu t, \\
 -(\mathbf{u}_2)_{12} &= -\frac{k\sqrt{\omega_b}}{\nu} \sin((\Omega/2 + \omega_b)t) \sin \nu t, \\
 -(\mathbf{u}_2)_{21} &= -\frac{k}{\nu\sqrt{\omega_b}} \sin((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu t, \\
 -(\mathbf{u}_2)_{22} &= \cos((\Omega/2 + \omega_b)t) \cos \nu t + \frac{\Omega}{2\nu} \sin((\Omega/2 + \omega_b)t) \sin \nu t.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

De los invariantes lineales se pueden obtener los operadores de creación y aniquilación en el esquema de Heisenberg, los cuales se escriben como

$$\begin{aligned}
 a(t) &= e^{-i\frac{\Omega}{2}t} e^{-i\omega_a t} \left( a(0) \left( \cos(\nu t) + \frac{i\Omega}{2\nu} \sin(\nu t) \right) + b^\dagger(0) \frac{ik}{\nu} \sin(\nu t) \right), \\
 b(t) &= e^{-i\frac{\Omega}{2}t} e^{-i\omega_b t} \left( b(0) \left( \cos(\nu t) + \frac{i\Omega}{2\nu} \sin(\nu t) \right) + a^\dagger(0) \frac{ik}{\nu} \sin(\nu t) \right).
 \end{aligned}$$

Asimismo los invariantes dependientes del tiempo para el caso resonante ( $\omega = \omega_a + \omega_b$ ,  $\Omega = 0$ ), son

$$A = e^{i\omega_a t} \cosh(kt) a - ie^{-i\omega_b t} \sinh(kt) b^\dagger, \quad B = e^{i\omega_b t} \cosh(kt) b - ie^{-i\omega_a t} \sinh(kt) a^\dagger,$$

Para este mismo caso los operadores en el esquema de Heisenberg están dados por

$$\begin{aligned}
 a(t) &= e^{-i\omega_a t} \left\{ \cosh(kt) a(0) + i \sinh(kt) b^\dagger(0) \right\}, \\
 b(t) &= e^{-i\omega_b t} \left\{ \cosh(kt) b(0) + i \sinh(kt) a^\dagger(0) \right\}
 \end{aligned}$$

Se hace notar que a los tiempos  $t = n\pi/\nu$ , con  $n$  entero, los invariantes ( $P$ ,  $Q$ ) para ambos modos 1 y 2 pueden ser escritos como una rotación de los operadores de cuadraturas  $p$  y  $q$  correspondientes; los ángulos de estas rotaciones son  $((\Omega/2 + \omega_a)n\pi/\nu)$  y  $((\Omega/2 + \omega_b)n\pi/\nu)$ , respectivamente, es decir

$$\begin{pmatrix} P_j \\ Q_j \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} \cos((\Omega/2 + \omega_j)n\pi/\nu) & \omega_j \sin((\Omega/2 + \omega_j)n\pi/\nu) \\ -\omega_j^{-1} \sin((\Omega/2 + \omega_j)n\pi/\nu) & \cos((\Omega/2 + \omega_j)n\pi/\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix},$$

donde  $j = 1, 2$ . Estas expresiones son transformaciones locales de las cuadraturas originales, por lo que es de esperar que el enredamiento en los tiempos  $t = n\pi/\nu$  sea el mismo que al tiempo  $t = 0$ , independientemente del estado inicial.

### 6.1.2. Convertidor

De la misma forma que en el caso del amplificador paramétrico, el convertidor de frecuencias tiene 4 invariantes lineales dependientes del tiempo que son independientes entre si. Se propone que la forma de estos invariantes es

$$\Lambda(t) = \lambda_1(t)a + \lambda_2(t)b + \lambda_3(t)a^\dagger + \lambda_4(t)b^\dagger,$$

al sustituir en la Ec. (6.1), to mando en cuenta al Hamiltoniano de la Ec. (4.37)

$$H = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b + \hbar k \left( a^\dagger b e^{-i\omega t} + a b^\dagger e^{i\omega t} \right),$$

se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= i(\omega_a \lambda_1 + k \lambda_2 e^{-i\omega t}), & \dot{\lambda}_2 &= i(\omega_b \lambda_2 + k \lambda_1 e^{i\omega t}), \\ \dot{\lambda}_3 &= -i(\omega_a \lambda_3 + k \lambda_4 e^{i\omega t}), & \dot{\lambda}_4 &= -i(\omega_b \lambda_4 + k \lambda_3 e^{-i\omega t}), \end{aligned}$$

realizando las sustituciones  $\lambda_1 = g_1 e^{i\omega_a t}$ ,  $\lambda_2 = g_2 e^{i\omega_b t}$ ,  $\lambda_3 = g_3 e^{-i\omega_a t}$  y  $\lambda_4 = g_4 e^{-i\omega_b t}$ , es posible desacoplar las ecuaciones diferenciales como

$$\begin{aligned} \ddot{g}_1 - i\Omega \dot{g}_1 + k^2 g_1 &= 0, & \dot{g}_2 &= ik g_1 e^{-i\Omega t}, \\ \ddot{g}_3 + i\Omega \dot{g}_3 + k^2 g_3 &= 0, & \dot{g}_4 &= ik g_3 e^{i\Omega t}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde en este caso  $\Omega = \omega - \omega_a + \omega_b$ . Si pedimos que al tiempo cero el invariante coincida con el operador  $a$ . Tenemos que imponer las condiciones iniciales:  $g_1(0) = 1$ ,  $g_2(0) = g_3(0) = g_4(0) = 0$ . La solución para dicho caso es

$$\lambda_1 = e^{i\Omega t/2} e^{i\omega_a t} \left( \cos \nu t - \frac{i\Omega}{2\nu} \sin \nu t \right), \quad \lambda_2 = e^{-i\Omega t/2} e^{i\omega_b t} \frac{ik}{\nu} \sin \nu t,$$

con  $\nu = \sqrt{k^2 + \Omega^2/4}$ , y las demás variables  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . Si ahora queremos que al tiempo cero el invariante coincida con  $b$ , entonces se tienen las siguientes soluciones

$$\lambda_1 = e^{i\Omega t/2} e^{i\omega_a t} \frac{ik}{\nu} \sin \nu t, \quad \lambda_2 = e^{-i\Omega t/2} e^{i\omega_b t} \left( \cos \nu t + \frac{i\Omega}{2\nu} \sin \nu t \right),$$

en esta ocasión también  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . Por lo que con estas dos soluciones se definen los invariantes

$$\begin{aligned} A(t) &= e^{i\Omega t/2} e^{i\omega_a t} \left( \cos \nu t - \frac{i\Omega}{2\nu} \sin \nu t \right) a + e^{-i\Omega t/2} e^{i\omega_b t} \frac{ik}{\nu} \sin \nu t b, \\ B(t) &= e^{i\Omega t/2} e^{i\omega_a t} \frac{ik}{\nu} \sin \nu t a + e^{-i\Omega t/2} e^{i\omega_b t} \left( \cos \nu t + \frac{i\Omega}{2\nu} \sin \nu t \right) b. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Podemos ver que para los tiempos  $t = n\pi/\nu$  (con  $n$  entero) los invariantes lineales pueden escribirse como

$$A(n\pi/\nu) = e^{i\Omega n\pi/\nu} e^{i\omega_a n\pi/\nu} (-1)^n a, \quad B(t) = A(n\pi/\nu) = e^{-i\Omega n\pi/\nu} e^{i\omega_b n\pi/\nu} (-1)^n b,$$

es decir a estos tiempos los invariantes lineales son iguales a los operadores originales por una fase y debido a ello se espera que el enredamiento a esos tiempos sea el mismo que aquel a tiempo cero. En los tiempos de que exista la conversión total del modo  $a$  en el modo  $b$ , el enredamiento también será el mismo, dicho comportamiento también se presentará cuando exista una conversión cercana a la completa.

En el caso resonante ( $\Omega = 0$ ), los invariantes se escriben como

$$A = e^{i\omega_a t} \cos(kt) a + i e^{i\omega_b t} \sin(kt) b, \quad B = e^{i\omega_b t} \cos(kt) b + i e^{i\omega_a t} \sin(kt) a. \quad (6.12)$$

Definiendo los operadores de cuadraturas  $P_1 = i(A^\dagger - A)/\sqrt{2}$ ,  $P_2 = i\sqrt{\omega_b/2}(B^\dagger - B)$ ,  $Q_1 = (A + A^\dagger)/\sqrt{2}$  y  $Q_2 = (B + B^\dagger)/\sqrt{2\omega_b}$ , se puede obtener la relación matricial de la Ec. (4.3) para el convertidor de frecuencias con las matrices por bloques:

Para  $\mathbf{v}_1$  se tiene

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_1)_{11} &= \cos((\Omega/2 + \omega_a)t) \cos \nu_c t + \frac{\Omega}{2\nu_c} \sin((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu_c t, \\
(\mathbf{v}_1)_{12} &= \frac{k}{\nu_c \sqrt{\omega_b}} \sin((\Omega/2 - \omega_b)t) \sin \nu_c t, \\
(\mathbf{v}_1)_{21} &= -\frac{\sqrt{\omega_b} k}{\nu_c} \sin((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu_c t, \\
(\mathbf{v}_1)_{22} &= \cos((\Omega/2 - \omega_b)t) \cos \nu_c t + \frac{\Omega}{2\nu_c} \sin((\Omega/2 - \omega_b)t) \sin \nu_c t. \quad (6.13)
\end{aligned}$$

La matriz  $\mathbf{u}_1$  puede escribirse como

$$\begin{aligned}
-(\mathbf{u}_1)_{11} &= \sin((\Omega/2 + \omega_a)t) \cos \nu_c t - \frac{\Omega}{2\nu_c} \cos((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu_c t, \\
-(\mathbf{u}_1)_{12} &= \frac{k\sqrt{\omega_b}}{\nu_c} \cos((\Omega/2 - \omega_b)t) \sin \nu_c t, \\
-(\mathbf{u}_1)_{21} &= \frac{k\sqrt{\omega_b}}{\nu_c} \cos((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu_c t, \\
-(\mathbf{u}_1)_{22} &= (-\sin((\Omega/2 - \omega_b)t) \cos \nu_c t + \frac{\Omega}{2\nu_c} \cos((\Omega/2 - \omega_b)t) \sin \nu_c t) \omega_b. \quad (6.14)
\end{aligned}$$

En el caso de  $\mathbf{v}_2$ , tenemos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_2)_{11} &= -\sin((\Omega/2 + \omega_a)t) \cos \nu_c t + \frac{\Omega}{2\nu_c} \cos((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu_c t, \\
(\mathbf{v}_2)_{12} &= -\frac{k}{\nu_c \sqrt{\omega_b}} \cos((\Omega/2 - \omega_b)t) \sin \nu_c t, \\
(\mathbf{v}_2)_{21} &= -\frac{k}{\nu_c \sqrt{\omega_b}} \cos((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu_c t, \\
(\mathbf{v}_2)_{22} &= (\sin((\Omega/2 - \omega_b)t) \cos \nu_c t - \frac{\Omega}{2\nu_c} \cos((\Omega/2 - \omega_b)t) \sin \nu_c t) / \omega_b. \quad (6.15)
\end{aligned}$$

Finalmente, la matriz  $\mathbf{u}_2$  es

$$\begin{aligned}
-(\mathbf{u}_2)_{11} &= \cos((\Omega/2 + \omega_a)t) \cos \nu_c t + \frac{\Omega}{2\nu_c} \sin((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu_c t, \\
-(\mathbf{u}_2)_{12} &= \frac{k\sqrt{\omega_b}}{\nu_c} \sin((\Omega/2 - \omega_b)t) \sin \nu_c t, \\
-(\mathbf{u}_2)_{21} &= -\frac{k}{\nu_c \sqrt{\omega_b}} \sin((\Omega/2 + \omega_a)t) \sin \nu_c t, \\
-(\mathbf{u}_2)_{22} &= \cos((\Omega/2 - \omega_b)t) \cos \nu_c t + \frac{\Omega}{2\nu_c} \sin((\Omega/2 - \omega_b)t) \sin \nu_c t. \quad (6.16)
\end{aligned}$$

También se puede obtener la evolución de los operadores de aniquilación en el esquema de Heisenberg,

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{-i(\frac{\Omega}{2} + \omega_a)t} \left\{ \left( \cos \nu t + \frac{i\Omega}{2\nu} \sin \nu t \right) a - i \frac{k}{\nu} \sin \nu t b \right\}, \\ b(t) &= e^{-i(\frac{\Omega}{2} - \omega_b)t} \left\{ \left( \cos \nu t - \frac{i\Omega}{2\nu} \sin \nu t \right) b - i \frac{k}{\nu} \sin \nu t a \right\}, \end{aligned}$$

que en el caso resonante se escriben como

$$a(t) = e^{-i\omega_a t} \{ \cos(kt) a(0) - i \sin(kt) b(0) \}, \quad b(t) = e^{-i\omega_b t} \{ \cos(kt) b(0) - i \sin(kt) a(0) \},$$

podemos ver que a un tiempo  $t = \pi/2\nu$ ,  $a(\pi/2\nu) = -ie^{i\phi}b$ ,  $b(\pi/2\nu) = -ie^{i\phi}a$ , se intercambian los operadores de aniquilación de ambos modos. En este tiempo se lleva a cabo la conversión total del modo  $b$  en el modo  $a$

## 6.2. Operadores invariantes del álgebra SU(1,1)

Haciendo uso de los invariantes lineales dependientes del tiempo y de las bases que portan la representación del álgebra SU(1,1), podemos construir soluciones a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para los procesos paramétricos. Para su construcción se sigue el siguiente esquema: se definen operadores invariantes dependientes del tiempo que son generadores del álgebra SU(1,1). Con la ayuda de los estados coherentes de SU(1,1), los cuales definen una representación diferencial de los invariantes en el espacio de Bargman-Hilbert, se obtiene y resuelve la ecuación de Schrödinger para un estado de mínima proyección, los demás elementos de la base son obtenidos mediante la aplicación del operador de ascenso del álgebra.

Podemos definir operadores invariantes del álgebra SU(1,1) en términos de los operadores de creación y aniquilación invariantes ( $A, A^\dagger, B$  y  $B^\dagger$ ), siguiendo la misma estructura de los generadores del álgebra establecidos en el Capítulo 4 de la siguiente forma

$$\mathbb{K}_+ = A^\dagger B^\dagger, \quad \mathbb{K}_- = AB, \quad \mathbb{K}_0 = \frac{1}{2}(A^\dagger A + B^\dagger B + 1),$$

donde dichos operadores cumplen con las relaciones de conmutación de la Ec. (4.25). Estos invariantes son escritos en términos de los operadores del álgebra  $K_+, K_-$  y  $K_0$  de la siguiente forma

$$\mathbb{K}_+ = x_1 K_+ + x_2 K_- + x_3 K_0, \quad \mathbb{K}_- = y_1 K_- + y_2 K_+ + y_3 K_0, \quad \mathbb{K}_0 = z_1 K_0 + z_2 K_+ + z_3 K_-, \quad (6.17)$$

con

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-i\omega t} (2\nu \cos \nu t + i\Omega \sin \nu t)^2 / (4\nu^2), \\ x_2 &= -e^{i\omega t} (k^2 / \nu^2) \sin^2 \nu t, \\ x_3 &= -(k/\nu^2) \sin \nu t (-i\nu \cos \nu t + \Omega \sin \nu t), \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^*, & y_2 &= x_2^*, & y_3 &= x_3^*, \\ z_1 &= 1 + (2k^2/\nu^2) \sin^2 \nu t, & z_2 &= -e^{-i\omega t} x_3/2, & z_3 &= -e^{i\omega t} x_3^*/2, \end{aligned}$$

Para obtener la base que porta la representación de estos operadores invariantes primero se define un estado de mínimo peso  $|\widetilde{W}\rangle$ , el cual cumple con las siguientes propiedades

$$\mathbb{K}_- |\widetilde{W}\rangle = 0, \quad \mathbb{K}_0 |\widetilde{W}\rangle = \widetilde{W} |\widetilde{W}\rangle,$$

para obtener dicho estado se proyecta en los estados coherentes no normalizados  $|\zeta\rangle$  vistos anteriormente, es decir

$$\{\zeta | \mathbb{K}_- |\widetilde{W}\rangle = 0,$$

utilizando la relación de los operadores invariantes en términos de los operadores no invariantes Ec. (6.17) y la representación diferencial de los operadores  $K_+$ ,  $K_-$  y  $K_0$  en el espacio de Bargman-Hilbert Ec. (4.36) entonces se tiene la siguiente ecuación diferencial que debe de cumplir el estado de mínimo peso

$$\left\{ y_1 \frac{\partial}{\partial \zeta^*} + y_2 \left( 2W\zeta^* + \zeta^{*2} \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right) + y_3 \left( W + \zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right) \right\} \{\zeta | \widetilde{W}\rangle = 0,$$

cuya solución es

$$\psi_{\widetilde{W}}(\zeta^*) = N(\gamma + \zeta^*)^{-2W},$$

donde  $N$  es una constante de normalización y  $\gamma = e^{i\omega t} \left( \frac{i\nu}{k} \cot \nu t + \frac{\Omega}{2k} \right)$ . Imponiendo la condición de normalización con la métrica de los estados no normalizados Ec. (4.33):

$$\int \frac{\psi_{\widetilde{W}}(\zeta^*) \psi_{\widetilde{W}}(\zeta)}{(1 - |\zeta|^2)^{-2W+2}} d^2\zeta = 1,$$

se tiene la siguiente integral

$$N^2(2W - 1) \int \frac{(\gamma + \zeta^*)^{-2W} (\gamma^* + \zeta)^{-2W}}{\pi(1 - |\zeta|^2)^{-2W+2}} d^2\zeta,$$

la cual puede escribirse en coordenadas polares con la sustitución  $\zeta = \rho e^{i\phi}$  y mediante la propiedad

$$\frac{1}{(1+x)^y} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(y+m)}{\Gamma(y)m!} x^m,$$

se llega a la relación

$$\frac{N^2(2W-1)}{\pi} \sum_{m,m'=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2W+m)}{\Gamma(2W)m!} \frac{\Gamma(2W+m')}{\Gamma(2W)m'!} \frac{1}{\gamma^m \gamma^{*m'} |\gamma|^{4W}} \times \int_0^1 d\rho \frac{\rho^{m+m'+1}}{(1-\rho^2)^{-2W+2}} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi(m-m')} = 1,$$

la integral sobre la fase  $\phi$  es igual a  $2\pi\delta_{m,m'}$ , dando como resultado

$$2N^2(2W - 1) \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(2W + m)}{\Gamma(2W)m!} \right)^2 \frac{1}{|\gamma|^{2(2W+m)}} \int_0^1 d\rho \frac{\rho^{2m+1}}{(1 - \rho^2)^{-2W+2}} = 1,$$

donde la integración sobre la norma  $\rho$  es  $(2W - 1) \int_0^1 d\rho \frac{\rho^{2m+1}}{(1-\rho^2)^{-2W+2}} = \frac{m!\Gamma(2W)}{2\Gamma(2W+m)}$ , por lo que la condición de normalización puede verse como



$$N^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2W+m)}{\Gamma(2W)m!} \frac{1}{|\gamma|^{2(2W+m)}} = 1,$$

la cual se escribe también como

$$\frac{N^2}{|\gamma|^{4W}} \left( \frac{|\gamma|^2}{|\gamma|^2 - 1} \right)^{2W} = 1,$$

por lo que la constante de normalización es

$$N = (|\gamma|^2 - 1)^W.$$

Tomando en cuenta la constante de normalización, el estado de mínimo peso puede escribirse como

$$\psi_{\tilde{W}}(\zeta^*) = (|\gamma|^2 - 1)^W (\gamma + \zeta^*)^{-2W}.$$

Posteriormente construimos un estado que sea solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo de la siguiente forma

$$\Psi_{\tilde{W}}(\zeta^*, t) = \psi_{\tilde{W}}(\zeta^*)T(t),$$

donde  $T(t)$  es una función solamente del tiempo. Sustituyendo dicha función en la Ec. de Schrödinger dependiente del tiempo

$$H\Psi_{\tilde{W}}(\zeta^*, t) = i\frac{d}{dt}\Psi_{\tilde{W}}(\zeta^*, t),$$

y utilizando la forma del Hamiltoniano de la Ec. (4.24) y la representación diferencial de los operadores de la Ec. (4.36), se obtiene

$$H\psi_{\tilde{W}}(\zeta^*)T(t) = i\left(T(t)\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\tilde{W}}(\zeta^*) + \psi_{\tilde{W}}(\zeta^*)\frac{d}{dt}T(t)\right),$$

al simplificar los términos de la ecuación anterior uno puede notar la propiedad  $H\psi_{\tilde{W}}(\zeta^*) - i\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\tilde{W}}(\zeta^*) = -W\omega\psi_{\tilde{W}}(\zeta^*)$ . Por lo que la Ec. de Schrödinger se reduce a la expresión

$$-W\omega T(t) = i\frac{d}{dt}T(t),$$

la cual tiene como solución

$$T(t) = e^{iW\omega t}.$$

Finalmente la solución para el estado de mínimo peso que porta la representación de  $SU(1,1)$  y que es solución de la ecuación de Schrödinger se expresa como

$$\Psi_{\tilde{W}}(\zeta^*, t) = e^{iW\omega t} (|\gamma|^2 - 1)^W (\gamma + \zeta^*)^{-2W},$$

puede demostrarse que esta es una función propia de los operadores invariantes  $\mathbb{K}_0$  y  $\mathbb{K}^2 = \frac{1}{2}(\mathbb{K}_+\mathbb{K}_- + \mathbb{K}_-\mathbb{K}_+) - \mathbb{K}_0^2$ , es decir

$$\mathbb{K}_0\Psi_{\tilde{W}}(\zeta^*, t) = W\Psi_{\tilde{W}}(\zeta^*, t), \quad \mathbb{K}^2\Psi_{\tilde{W}}(\zeta^*, t) = W(1 - W)\Psi_{\tilde{W}}(\zeta^*, t),$$

demostrando que el peso mínimo es igual a  $W$ , por lo que hacemos la identificación  $\widetilde{W} = W$ .

Una vez definido el estado de mínimo peso podemos obtener los demás estados, mediante la acción de  $\mathbb{K}_+^n$  al estado de mínimo peso

$$\Psi_{W,n}(\zeta^*, t) = \left( \frac{\Gamma(2W)}{n! \Gamma(2W+n)} \right)^{1/2} \mathbb{K}_+^n \Psi_W(\zeta^*, t),$$

al tomar la representación diferencial del operador  $\mathbb{K}_+$ , este estado puede ser escrito como

$$\Psi_{W,n}(\zeta^*, t) = \left( \frac{\Gamma(2W+n)}{n! \Gamma(2W)} \right)^{1/2} (|\gamma|^2 - 1)^W e^{i(W+n)\omega t} (-1)^n (1 + \zeta^* \gamma^*)^n (\zeta^* + \gamma)^{-2W-n},$$

con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_0 \Psi_{W,n}(\zeta^*, t) &= (W+n) \Psi_{W,n}(\zeta^*, t), \\ \mathbb{K}_+ \Psi_{W,n}(\zeta^*, t) &= \sqrt{(n+1)(2W+n)} \Psi_{W,n+1}(\zeta^*, t), \\ \mathbb{K}_- \Psi_{W,n}(\zeta^*, t) &= \sqrt{n(2W+n-1)} \Psi_{W,n-1}(\zeta^*, t), \\ \mathbb{K}^2 \Psi_{W,n}(\zeta^*, t) &= W(1-W) \Psi_{W,n}(\zeta^*, t). \end{aligned}$$

Estos estados forman una base que porta la representación irreducible del grupo  $SU(1,1)$  y además son solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Debido a estas propiedades es posible que sean útiles en el estudio de la evolución de otros estados en el amplificador paramétrico.

### 6.3. Operadores invariantes del álgebra $SU(2)$

De forma análoga al álgebra  $SU(1,1)$ , podemos definir operadores invariantes que cumplan las relaciones de conmutación del álgebra  $SU(2)$  mediante los invariantes  $A, B$  y sus hermíticos conjugados, de la forma

$$\mathbb{J}_0 = \frac{1}{2}(A^\dagger A - B^\dagger B), \quad \mathbb{J}_+ = A^\dagger B, \quad \mathbb{J}_- = AB^\dagger,$$

estos invariantes pueden escribirse en términos de los operadores  $J_+, J_-$  y  $J_0$ , como

$$\mathbb{J}_+ = x_1 J_+ + x_2 J_- + x_3 J_0, \quad \mathbb{J}_- = y_1 J_- + y_2 J_+ + y_3 J_0, \quad \mathbb{J}_0 = z_1 J_0 + z_2 J_+ + z_3 J_-,$$

donde

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-i\omega t} (2\nu \cos \nu t + i\Omega \sin \nu t)^2 / (4\nu^2), \\ x_2 &= e^{i\omega t} (k^2/\nu^2) \sin^2 \nu t, \\ x_3 &= -(k/\nu^2) \sin \nu t (-2i\nu \cos \nu t + \Omega \sin \nu t), \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^*, \quad y_2 = x_2^*, \quad y_3 = x_3^*, \\ z_1 &= 1 - 2(k^2/\nu^2) \sin^2 \nu t, \quad z_2 = e^{-i\omega t} x_3/2, \quad z_3 = e^{i\omega t} x_3^*/2, \end{aligned}$$

Para obtener una base que porte la representación irreducible de estos operadores definimos el estado de mínimo peso  $|\widetilde{W}\rangle$ , el cual cumple

$$\mathbb{J}_- |\widetilde{W}\rangle = 0, \quad \mathbb{J}_0 |\widetilde{W}\rangle = -\widetilde{W} |\widetilde{W}\rangle,$$

proyectando en los estados coherentes no normalizados de SU(2) (4.41) y usando la realización en el espacio de Bargmann-Hilbert (4.42), tenemos que

$$\left\{ y_1 \left( -W + \zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right) + y_2 \left( 2\zeta^* W - \zeta^{*2} \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right) + y_3 \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right\} \{ \zeta | \widetilde{W} \rangle = 0,$$

con  $y_1 = -2i \frac{k}{\nu} \sin \nu t \left( \cos \nu t - \frac{i\Omega}{2\nu} \sin \nu t \right)$ ,  $y_2 = e^{-i\omega t} \left( \cos \nu t + \frac{i\Omega}{2\nu} \sin \nu t \right)^2$  y  $y_3 = e^{i\omega t} \frac{k^2}{\nu^2} \sin^2 \nu t$ . Dicha ecuación diferencial tiene solución

$$\psi_{\widetilde{W}}(\zeta^*) = N \{ \zeta | \widetilde{W} \rangle = N(\zeta^* + \gamma)^{2W},$$

donde  $\gamma = e^{i\omega t} \left( i \frac{\nu}{k} \cot \nu t + \frac{\Omega}{2k} \right)$  y  $N$  es una constante de normalización. El estado normalizado debe cumplir

$$(2W + 1) \int \frac{\psi_{\widetilde{W}}^*(\zeta^*) \psi_{\widetilde{W}}(\zeta^*)}{\pi(1 + |\zeta|^2)^{2W+2}} d^2 \zeta = 1,$$

utilizando el teorema binomial esta expresión puede ser reescrita en coordenadas polares  $\zeta = \rho e^{i\phi}$  como

$$(2W+1)N^2 \sum_{m,m'=0}^{2W} \gamma^{2W-m} (\gamma^*)^{2W-m'} \binom{2W}{m} \binom{2W}{m'} \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^{m+m'+1}}{\pi(1+\rho^2)^{2W+2}} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi(m'-m)} = 1$$

la integral sobre la fase da como resultado  $2\pi\delta_{m,m'}$ , por lo que la integral sobre la norma es

$$2\pi(2W+1) \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^{2m+1}}{\pi(1+\rho^2)^{2W+2}} = \frac{m!\Gamma(2W-m+1)}{\Gamma(2W+1)},$$

de forma que al imponer la condición de normalización expresada como  $N^2(1+|\gamma|^2)^{2W} = 1$ , la constante de normalización queda determinada por

$$N = \frac{1}{(1+|\gamma|^2)^W},$$

mediante esta constante el estado de mínimo peso puede expresarse finalmente como

$$\psi_{\widetilde{W}}(\zeta^*) = \frac{1}{(1+|\gamma|^2)^W} (\zeta^* + \gamma)^{2W}, \quad (6.18)$$

este estado cumple  $\mathbb{J}_0 \psi_{\widetilde{W}}(\zeta^*) = -W \psi_{\widetilde{W}}(\zeta^*)$  por lo que el valor del parámetro  $\widetilde{W} = W$ .

A través del estado de mínimo peso podemos obtener soluciones a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para el convertidor de frecuencias, cuyo Hamiltoniano puede expresarse en términos de los generadores de SU(2) hasta una constante como

$$H = \hbar(\omega - \Omega)J_0 + \hbar k(J_+ e^{-i\omega t} + J_- e^{i\omega t}),$$

proponemos la solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$H\Psi_W(\zeta^*, t) = i\frac{d}{dt}\Psi_W(\zeta^*, t),$$

de la forma

$$\Psi_W(\zeta^*, t) = \psi_W(\zeta^*)T(t),$$

donde  $\psi_W(\zeta^*)$  está dada por la Ec. (6.18) y  $T(t)$  es una función sólo del tiempo. Utilizando la propiedad

$$H\psi_W(\zeta^*) - i\frac{d}{dt}\psi_W(\zeta^*) = \omega W\psi_W(\zeta^*),$$

puede demostrarse que la ecuación diferencial que cumple  $T(t)$  es

$$i\frac{d}{dt}T(t) = \omega WT(t),$$

cuya solución es

$$T(t) = e^{-i\omega Wt},$$

por lo que el estado de mínimo peso que porta la representación para los operadores invariantes y además es solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es

$$\Psi_W(\zeta^*, t) = \frac{1}{(1 + |\gamma|^2)^W} e^{-i\omega Wt} (\zeta^* + \gamma)^{2W}.$$

Los demás estados dentro de la base  $\Psi_{W,n}(\zeta^*, t)$  pueden obtenerse mediante la aplicación del operador de ascenso  $\mathbb{J}_+^n$  al estado de mínimo peso, esto es

$$\Psi_{W,n}(\zeta^*, t) = \left( \frac{\Gamma(2W - n + 1)}{n! \Gamma(2W + 1)} \right)^{1/2} \mathbb{J}_+^n \Psi_W(\zeta^*, t),$$

dando como resultado

$$\Psi_{W,n}(\zeta^*, t) = \left( \frac{\Gamma(2W + 1)}{n! \Gamma(2W - n + 1)} \right)^{1/2} \frac{1}{(1 + |\gamma|^2)^W} e^{-i\omega Wt} e^{i\omega nt} (1 - \zeta^* \gamma^*)^n (\zeta^* + \gamma)^{2W - n}.$$

Empleando la notación de momento angular donde el valor del momento angular es  $j = W$  y la proyección en  $\mathbb{J}_0$  es  $m = -W + n$ , se tiene

$$\Psi_{j,m}(\zeta^*, t) = \left( \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right)^{1/2} \frac{1}{(1 + |\gamma|^2)^j} e^{i\omega mt} (1 - \zeta^* \gamma^*)^{j+m} (\zeta^* + \gamma)^{j-m}.$$

Como puede verse de la expresión anterior el estado no puede tener una proyección mayor a  $m = j$  debido a que el factorial  $(j - m)!$  se haría negativo y la expresión para el estado

sería cero y tampoco podemos tener una proyección menor a  $m = -j$  dado que  $(j + m)!$  se haría negativo y el estado tendería a cero.

Por otro lado este estado cumple con las propiedades

$$\begin{aligned}\mathbb{J}^2\Psi_{j,m}(\zeta^*, t) &= j(j+1)\Psi_{j,m}(\zeta^*, t), \\ \mathbb{J}_0\Psi_{j,m}(\zeta^*, t) &= m\Psi_{j,m}(\zeta^*, t), \\ \mathbb{J}_+\Psi_{j,m}(\zeta^*, t) &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\Psi_{j,m+1}(\zeta^*, t), \\ \mathbb{J}_-\Psi_{j,m}(\zeta^*, t) &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\Psi_{j,m-1}(\zeta^*, t),\end{aligned}$$

con  $\mathbb{J}^2 = \frac{1}{2}(\mathbb{J}_+\mathbb{J}_- + \mathbb{J}_-\mathbb{J}_+) + \mathbb{J}_0^2$ . El estado de máximo peso es aquel que cumple con la ecuación  $\mathbb{J}_+\Psi_{j,j}(\zeta^*, t) = 0$  y tiene la forma explícita

$$\Psi_{j,j}(\zeta^*, t) = \frac{1}{(1 + |\gamma|^2)^j} e^{i\omega j t} (1 - \zeta^* \gamma^*)^{2j}.$$

De igual forma que con el amplificador paramétrico tenemos con los estados  $\Psi_{j,m}(\zeta^*, t)$  una base completa de funciones que portan la representación irreducible del grupo  $SU(2)$ . Su importancia radica en que son solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para el convertidor de frecuencias y por lo tanto el estudio de la dinámica de otros sistemas puede ser realizada mediante esta base.

## 6.4. Evolución temporal de estados Gaussianos en Hamiltonianos cuadráticos

En la presente sección, se estudia la evolución de un paquete Gaussiano bidimensional en un Hamiltoniano cuadrático. Dicha evolución temporal se obtiene mediante la función de Green la está relacionada con los invariantes dependientes del tiempo del sistema [2]. Dicha función de Green puede escribirse como

$$G(\mathbf{y}, \mathbf{x}; t) = \frac{i}{2\pi\sqrt{\det \mathbf{v}_2}} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left( -\tilde{\mathbf{y}} \mathbf{v}_2^{-1} \mathbf{u}_2 \mathbf{y} - 2\tilde{\mathbf{y}} \mathbf{v}_2^{-1} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^{-1} \mathbf{x} \right) \right\}, \quad (6.19)$$

donde  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{x}$  son vectores columna y el vector  $\tilde{\mathbf{x}}$  significa la transposición de  $\mathbf{x}$  (un vector renglón), y las matrices  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son aquellas que relacionan los operadores invariantes con los operadores de cuadraturas de la Ec. (4.3).

La función de Green de los Hamiltonianos cuadráticos es una función Gaussiana de dos coordenadas, lo cual implica que la evolución de un estado Gaussiano será también un estado Gaussiano. El estado general Gaussiano inicial está dado por

$$\psi(\mathbf{x}) = N \exp \left( -\tilde{\mathbf{x}} \mathbf{A}_G \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{B}}_G \mathbf{x} \right), \quad (6.20)$$

donde la constante de normalización es  $N = \sqrt{2/\pi} (\det \mathbf{A}_G)^{1/4} e^{-\frac{1}{16} \tilde{\mathbf{B}}_G \mathbf{A}_G^{-1} \mathbf{B}_G}$  y  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$  es el vector transpuesto de  $\mathbf{x}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_G = (B_1, B_2)$ , y donde hemos tomado la matriz  $\mathbf{A}_G$  como real y simétrica, esto es

$$\mathbf{A}_G = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Usando el propagador de la Ec. (6.19), la evolución temporal de la función de onda Gaussiana (6.20) es calculada en la forma integral

$$\psi(\mathbf{y}, t) = \int d\mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}; t) \psi(\mathbf{x}, 0),$$

dando como resultado que para cualquier Hamiltoniano cuadrático en las componentes de las cuadraturas, el estado al tiempo  $t$  está dado por la expresión

$$\psi(\mathbf{y}; t) = \frac{iN e^{\frac{i}{2}\tilde{\mathbf{y}}\mathbf{v}_2^{-1}\mathbf{u}_2\mathbf{y}} e^{\frac{1}{4}(\tilde{\mathbf{B}}_G + i\tilde{\mathbf{y}}\mathbf{v}_2^{-1})(\mathbf{A}_G + \frac{i}{2}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2^{-1})^{-1}(\mathbf{B}_G + i\mathbf{v}_2^{-1}\mathbf{y})}}{2\sqrt{\det(\mathbf{v}_2)\det(\mathbf{A}_G + \frac{i}{2}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2^{-1})}}; \quad (6.22)$$

con  $\mathbf{v}_j$ ,  $\mathbf{u}_j$  dadas por la expresión (4.3). Cabe señalar que a pesar de iniciar con un estado Gaussiano con una matriz  $\mathbf{A}_G$  real y simétrica, terminamos con una evolución Gaussiana donde el análogo a la matriz  $\mathbf{A}_G$  es compleja y no simétrica, lo cual tiene implicaciones sobre la matriz de covarianza. La expresión anterior será utilizada posteriormente para el cálculo de las entropías lineal y de von Neumann.

Como ejemplos de estados Gaussianos tenemos los estados coherentes de dos dimensiones  $|\alpha_1, \alpha_2\rangle$ , los cuales pueden expresarse como una función Gaussiana (6.20) de la siguiente manera

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + \sqrt{2}\alpha_1 x_1 + \sqrt{2}\alpha_2 x_2 - \frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_1^*)^2 - \frac{1}{4}(\alpha_2 + \alpha_2^*)^2\right),$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son los parámetros complejos coherentes.

Además de los estados coherentes, también se estudian los estados de vacío comprimido de dos modos. Dicho estado puede escribirse en términos del operador de compresión de dos dimensiones aplicado al estado de vacío

$$|\xi\rangle = e^{\xi^*ab - \xi a^\dagger b^\dagger} |0, 0\rangle,$$

donde el parámetro  $\xi = re^{i\phi}$  es el parámetro de compresión. Mediante el procedimiento de descomponer el operador de compresión, el estado de vacío comprimido puede ser reescrito como

$$|\xi\rangle = \sqrt{1 - |\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n |n, n\rangle, \quad 0 \leq |\beta| \leq 1 \quad (6.23)$$

donde hemos definido  $\beta = -e^{i\phi} \tanh r$ , y los estados  $|n, n\rangle$  denotan los estado de Fock de dos modos para los haces señal y acompañante.

Usando la fórmula de Mehler [78]

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} \exp\left(\frac{1}{1 - \beta^2} \left[2\beta xy - \frac{1 + \beta^2}{2}(x^2 + y^2)\right]\right) = \sqrt{1 - \beta^2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \Phi_n(x) \Phi_n(y),$$

donde  $\Phi_n(x)$  es la eigenfunción con  $n$  cuantos de un oscilador armónico unidimensional. Puede ser mostrado que en la representación de posición el estado de vacío comprimido con  $\phi = 0$  está dado por

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} e^{2r} (x_1 + \sqrt{\omega_b} x_2)^2 - \frac{1}{4} e^{-2r} (x_1 - \sqrt{\omega_b} x_2)^2 \right\} .$$

con lo cual podemos observar que dicho estado es Gaussiano.

Un estado Gaussiano como hemos visto con anterioridad queda determinado unívocamente por los valores esperados y su matriz de dispersión. Por esa razón más adelante se hablará sobre el cálculo de la matriz de covarianza en términos de los operadores invariantes dependientes del tiempo.

#### 6.4.1. Evolución de estados coherentes

La evolución de los estados coherentes determinada por los Hamiltonianos cuadráticos se estudia en esta sección. Para ello se utilizará el formalismo de los invariantes lineales.

Sabemos que el estado con cero fotones cumple con la propiedad

$$\mathbf{a} |0\rangle = 0 = U(t) \mathbf{a} U^\dagger(t) U(t) |0\rangle .$$

Mediante esta propiedad, la Ec. (4.10) y con los operadores de creación y aniquilación invariantes dependientes del tiempo ( $\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger$ ), construimos un estado de vacío, el cual cumple con la ecuación

$$\mathbf{A} |\mathbf{0}, t\rangle = 0, \quad (6.24)$$

donde  $|\mathbf{0}, t\rangle = U(t) |0\rangle$ . Es posible definir un operador de desplazamiento mediante los operadores invariantes del tiempo como

$$D(\boldsymbol{\alpha}, t) = \exp \left( \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}^\dagger - \boldsymbol{\alpha}^* \cdot \mathbf{A} \right),$$

el cual cumple con la propiedad,

$$D(\boldsymbol{\alpha}, t) = U(t) \exp \left( \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}^\dagger - \boldsymbol{\alpha}^* \cdot \mathbf{a} \right) U^\dagger(t) = U(t) \bar{D}(\boldsymbol{\alpha}) U^\dagger(t),$$

con  $\bar{D}(\boldsymbol{\alpha}) = \exp \left( \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}^\dagger - \boldsymbol{\alpha}^* \cdot \mathbf{a} \right)$  el operador de desplazamiento estándar. Mediante este operador de desplazamiento construimos el estado coherente dependiente del tiempo

$$|\boldsymbol{\alpha}, t\rangle = U(t) \bar{D}(\boldsymbol{\alpha}) |0\rangle = U(t) \bar{D}(\boldsymbol{\alpha}) U^\dagger(t) U(t) |0\rangle = D(\boldsymbol{\alpha}, t) |\mathbf{0}, t\rangle, \quad (6.25)$$

el cual es eigenvector del operador de aniquilación

$$\mathbf{A} |\boldsymbol{\alpha}, t\rangle = \boldsymbol{\alpha} |\boldsymbol{\alpha}, t\rangle, \quad (6.26)$$

con  $|\boldsymbol{\alpha}, t\rangle = U(t) |\boldsymbol{\alpha}, t=0\rangle$ , donde  $U(t)$  es el operador de evolución del Hamiltoniano de la Ec.(4.1) no depende de los operadores

Debido a que los operadores de aniquilación están dentro del grupo de Heisenberg-Weyl entonces el estado coherente de muchos modos puede expresarse como el resultado de un operador de desplazamiento sobre un estado de vacío, esto es

$$|\boldsymbol{\alpha}, t\rangle = D(\boldsymbol{\alpha}, t) |\mathbf{0}, t\rangle,$$

con el operador de desplazamiento definido como

$$D(\boldsymbol{\alpha}, t) = \exp \left( \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{A}_i^\dagger - \boldsymbol{\alpha}_i^* \mathbf{A}_i) \right), \quad (6.27)$$

y el estado de vacío definido por la Ec. (6.24). Al hacer uso de la transformación inversa de la Ec. (4.9) podemos reescribir el operador de desplazamiento Ec. (6.27) de la forma

$$D(\boldsymbol{\alpha}, t) = \exp \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (\{\boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\mu}_1^*)_{ik} - \boldsymbol{\alpha}_i^*(\boldsymbol{\mu}_2)_{ik}\} \mathbf{a}_k^\dagger - \{\boldsymbol{\alpha}_i^*(\boldsymbol{\mu}_1)_{ik} - \boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\mu}_2^*)_{ik}\} \mathbf{a}_k) \right),$$

por lo que este operador puede expresarse como la multiplicación de operadores de desplazamiento en cada uno de los diferentes modos iniciales

$$D(\boldsymbol{\alpha}, t) = \prod_{k=1}^n \bar{D}(\boldsymbol{\eta}_k),$$

donde

$$\boldsymbol{\eta}_k = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\mu}_1^*)_{ik} - \boldsymbol{\alpha}_i^*(\boldsymbol{\mu}_2)_{ik}), \quad (6.28)$$

y  $\bar{D}(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}^\dagger - \boldsymbol{\alpha}^* \cdot \mathbf{a})$ . Vemos que el estado  $|\boldsymbol{\alpha}, t\rangle$  será un estado separable siempre y cuando el estado vacío  $|\mathbf{0}, t\rangle$  sea un estado separable, debido a que el operador de desplazamiento puede expresarse como una multiplicación en cada uno de los modos. Además se hace notar que si el Hamiltoniano de la Ec. (4.2) no depende de los operadores de creación  $\mathbf{a}_i^\dagger$  o de sus cuadrados entonces tendremos que el estado vacío  $|\mathbf{0}\rangle = |0, \dots, 0\rangle$  será entonces un eigenestado del Hamiltoniano con valor propio igual a cero y de esta forma puede concluirse que el estado vacío no cambiará en el tiempo ( $U(t)|\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$ ).

En ese caso la evolución del estado coherente de muchos modos será

$$|\boldsymbol{\alpha}, t\rangle = D(\boldsymbol{\alpha}, t)|\mathbf{0}, t\rangle = \prod_{k=1}^n D(\boldsymbol{\eta}_k)|\mathbf{0}\rangle = |\boldsymbol{\eta}(t)\rangle, \quad (6.29)$$

es decir el estado coherente se mantendrá coherente en dicho Hamiltoniano. Donde el parámetro  $\boldsymbol{\eta}$  del estado coherente en el tiempo estará dado por la Ec. (6.28).

En el caso del amplificador paramétrico sabemos que los invariantes lineales  $A$  y  $B$  dependen de los operadores de aniquilación  $a^\dagger$  y  $b^\dagger$  por lo que podemos concluir que los estados coherente dejan de ser coherentes al evolucionar en un amplificador paramétrico. Sin embargo, para el convertidor de frecuencias los invariantes no dependen de los operadores de aniquilación y por lo tanto los estados coherentes evolucionarán en un estado coherente con  $\boldsymbol{\eta}(t)$  dado por la expresión (6.28).

### 6.4.2. Matriz de covarianza

En esta sección se analizarán las matrices de covarianza de estados Gaussianos evolucionando en los procesos paramétricos de amplificación y conversión de frecuencias.

Como hemos mencionado todos los estados Gaussianos son determinados por su matriz de covarianza y sus valores esperados. Por lo cual en esta sección se estudiará la evolución de estas propiedades usando las constantes de movimiento del sistema. Utilizaremos para



ello la siguiente notación matricial<sup>1</sup> para las covarianzas y dispersiones en un sistema bidimensional a cualquier tiempo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{pp}(t) &= \begin{pmatrix} \sigma_{p_1 p_1}(t) & \sigma_{p_1 p_2}(t) \\ \sigma_{p_2 p_1}(t) & \sigma_{p_2 p_2}(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{qq}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{q_1 q_1}(t) & \sigma_{q_1 q_2}(t) \\ \sigma_{q_2 q_1}(t) & \sigma_{q_2 q_2}(t) \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\sigma}_{pq}(t) &= \begin{pmatrix} \sigma_{p_1 q_1}(t) & \sigma_{p_1 q_2}(t) \\ \sigma_{p_2 q_1}(t) & \sigma_{p_2 q_2}(t) \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{6.30}$$

con la definición usual  $\sigma_{x,y} = \frac{1}{2}\langle\{x,y\}\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle$ , en términos del anticonmutador  $\{,\}$  de dos operadores.

Específicamente la matriz de covarianza al tiempo cero tiene la forma

$$\boldsymbol{\sigma}(0) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{pp0} & \boldsymbol{\sigma}_{pq0} \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{pq0} & \boldsymbol{\sigma}_{qq0} \end{pmatrix},\tag{6.31}$$

donde hemos definido  $\boldsymbol{\sigma}_{pp0} = \boldsymbol{\sigma}_{pp}(0)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{qq0} = \boldsymbol{\sigma}_{qq}(0)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{pq0} = \boldsymbol{\sigma}_{pq}(0)$  y  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{pq}$  denota la matriz transpuesta de  $\boldsymbol{\sigma}_{pq}$ . Estas matrices son reales y simétricas, es decir:  $\sigma_{q_1 q_2} = \sigma_{q_2 q_1}$ ,  $\sigma_{q_i p_j} = \sigma_{p_j q_i}$  con  $i, j = 1, 2$ , y  $\sigma_{p_1 p_2} = \sigma_{p_2 p_1}$ .

Al expresar las cuadraturas en términos de los invariantes lineales, esto es, la relación inversa de la Ec. (4.3), la matriz de covarianza a cualquier tiempo puede ser evaluada, el resultado es expresado como

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{\sigma}(0) \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1},\tag{6.32}$$

donde  $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$  es una matriz simpléctica (su determinante es igual a la unidad), de esta forma puede demostrarse que  $\det \boldsymbol{\sigma}(t) = \det \boldsymbol{\sigma}(0) = 1/16$  lo cual es una propiedad que deben cumplir todos los estados Gaussianos puros bipartitas. Y debido que la matriz  $\boldsymbol{\Lambda}$  es simpléctica, su inversa está dada por

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{u}}_2 & \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ -\tilde{\mathbf{v}}_2 & \tilde{\mathbf{v}}_1 \end{pmatrix}.\tag{6.33}$$

Mediante el uso de las Ecs. (6.32) y (6.33), la matriz de covarianza en cualquier Hamiltoniano cuadrático tiene elementos dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{pp}(t) &= (\tilde{\mathbf{u}}_2 \boldsymbol{\sigma}_{pp0} - \tilde{\mathbf{u}}_1 \boldsymbol{\sigma}_{pq0}) \mathbf{u}_2 - (\tilde{\mathbf{u}}_2 \boldsymbol{\sigma}_{pq0} - \tilde{\mathbf{u}}_1 \boldsymbol{\sigma}_{qq0}) \mathbf{u}_1, \\ \boldsymbol{\sigma}_{pq}(t) &= (-\tilde{\mathbf{u}}_2 \boldsymbol{\sigma}_{pp0} + \tilde{\mathbf{u}}_1 \boldsymbol{\sigma}_{pq0}) \mathbf{v}_2 + (\tilde{\mathbf{u}}_2 \boldsymbol{\sigma}_{pq0} - \tilde{\mathbf{u}}_1 \boldsymbol{\sigma}_{qq0}) \mathbf{v}_1, \\ \boldsymbol{\sigma}_{qq}(t) &= (\tilde{\mathbf{v}}_2 \boldsymbol{\sigma}_{pp0} - \tilde{\mathbf{v}}_1 \boldsymbol{\sigma}_{pq0}) \mathbf{v}_2 + (-\tilde{\mathbf{v}}_2 \boldsymbol{\sigma}_{pq0} + \tilde{\mathbf{v}}_1 \boldsymbol{\sigma}_{qq0}) \mathbf{v}_1,\end{aligned}\tag{6.34}$$

donde por simplicidad de la notación no agregamos la dependencia temporal a las matrices  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ . En este trabajo se utilizarán las expresiones correspondientes de  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  para el amplificador paramétrico y el convertidor de frecuencias.

Para observar las propiedades de los paquetes Gaussianos bidimensionales tomamos como ejemplo el estado coherente y el estado bidimensional de vacío comprimido. Para el caso del estado de vacío comprimido se tiene

<sup>1</sup> Esta notación es diferente a la utilizada para definir los criterios de Duan et al. y Simon. Sin embargo la transformación que nos lleva de una a otra definición es un reordenamiento de las coordenadas.

$$\mathbf{A}_G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cosh 2r & \sqrt{\omega_b} \sinh 2r \\ \sqrt{\omega_b} \sinh 2r & \omega_b \cosh 2r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_G = 0, \quad (6.35)$$

donde  $r \in \mathbb{R}$  es el parámetro de compresión. Para este estado evolucionando en el amplificador paramétrico se tiene una matriz de covarianza dada por la fórmula

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}(t) &= \frac{1}{2(1 - |\eta(t)|^2)} \begin{pmatrix} 1 + |\eta(t)|^2 & -(\eta(t) + \eta^*(t))\sqrt{\omega_b} \\ -(\eta(t) + \eta^*(t))\sqrt{\omega_b} & (1 + |\eta(t)|^2)\omega_b \end{pmatrix}, \\ \sigma_{qq}(t) &= \frac{1}{2(1 - |\eta(t)|^2)} \begin{pmatrix} 1 + |\eta(t)|^2 & (\eta(t) + \eta^*(t))/\sqrt{\omega_b} \\ (\eta(t) + \eta^*(t))/\sqrt{\omega_b} & (1 + |\eta(t)|^2)/\omega_b \end{pmatrix}, \\ \sigma_{pq}(t) &= \frac{1}{2(1 - |\eta(t)|^2)} \begin{pmatrix} 0 & i(\eta^*(t) - \eta(t))/\sqrt{\omega_b} \\ i(\eta^*(t) - \eta(t))\sqrt{\omega_b} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Dicha matriz de covarianza corresponde al estado de vacío comprimido:

$$|\eta(t)\rangle = \sqrt{1 - |\eta(t)|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n(t) |n, n\rangle,$$

con parámetro de compresión  $\eta(t)$  dado por

$$\eta(t) = \frac{e^{-i\omega t}}{2k} \left( \frac{4k^2 \exp\{-2 \ln(\cos \nu t - i \sin \nu t \tanh \gamma)\}}{\Omega - 2k \coth r + 2i\nu \tan(\nu t + i\gamma)} - 2i\nu \tan(\nu t + i\gamma) - \Omega \right), \quad (6.37)$$

donde  $\gamma = \operatorname{arctanh}(\Omega/2\nu)$ . Se puede mostrar que para  $t = 0$ ,  $\eta(0) = \beta = -\tanh r$ , el cual es el parámetro de compresión inicial. Cabe mencionar que la matriz de covarianza para el vacío comprimido en el convertidor de frecuencias resulta en una expresión complicada, siendo esa la razón por la cual no es dada explícitamente.

Por otro lado el estado coherente de dos modos puede ser obtenido tomando

$$\mathbf{A}_G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_G = \sqrt{2} (\alpha_1, \sqrt{\omega_b} \alpha_2), \quad (6.38)$$

en la Ec. (6.20) donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son números complejos denotando el valor del estado coherente en cada uno de los modos. Con un estado inicial coherente, la matriz de covarianza resultante en el tiempo en el amplificador paramétrico es la siguiente

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\Omega^2 - 4k^2 \cos 2\nu t}{8\nu^2} & f_1(t)\sqrt{\omega_b} \\ f_1(t)\sqrt{\omega_b} & \frac{\Omega^2 - 4k^2 \cos 2\nu t}{8\nu^2} \omega_b \end{pmatrix}, \quad \sigma_{qq}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\Omega^2 - 4k^2 \cos 2\nu t}{8\nu^2} & -f_1(t)/\sqrt{\omega_b} \\ -f_1(t)/\sqrt{\omega_b} & \frac{\Omega^2 - 4k^2 \cos 2\nu t}{8\nu^2} / \omega_b \end{pmatrix}, \\ \sigma_{pq}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & f_2(t)/\sqrt{\omega_b} \\ f_2(t)\sqrt{\omega_b} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

donde se han definido las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{k}{2\nu^2} \left( \Omega \cos \omega t \sin^2 \nu t - \nu \sin \omega t \sin 2\nu t \right), \\ f_2(t) &= \frac{k}{2\nu^2} \left( \Omega \sin \omega t \sin^2 \nu t + \nu \cos \omega t \sin 2\nu t \right), \end{aligned} \quad (6.40)$$

podemos ver que la matriz de covarianza del estado coherente es oscilatoria con periodo  $T = n\pi/\nu$  (con  $n$  entero). Por otro lado la matriz de covarianza en el convertidor de frecuencias se mantiene invariante en el tiempo. Ésto debido a que el estado coherente permanece coherente en todo tiempo.

Estas matrices de covarianza nos permitirán encontrar las expresiones para los tomo-gramas ópticos y simplécticos que serán analizados posteriormente.

## 6.5. Discretización de la matriz densidad

La medición de la propiedades de enredamiento en un sistema bipartita de variable continua son estudiadas en la literatura mediante varias cantidades como las entropías o la negatividad logarítmica descritas en capítulos anteriores. Sin embargo la obtención analítica de estas cantidades es en general complicada. Por este motivo proponemos una forma de calcular estas cantidades numéricamente para su posterior uso en la descripción de las correlaciones cuánticas de estados Gaussianos y su evolución en Hamiltonianos cuadráticos.

En este estudio trabajaremos sólo con estados puros de dos modos, aunque el procedimiento puede generalizarse a estados no puros de múltiples modos. Supongamos que tenemos un sistema bipartita descrito por la matriz densidad hermitiana y de traza uno, correspondiente a un estado puro

$$\rho(x'_1, x'_2, x_1, x_2, t) = \langle x'_1, x'_2 | \rho(t) | x_1, x_2 \rangle = \psi^*(x'_1, x'_2, t) \psi(x_1, x_2, t). \quad (6.41)$$

Para realizar la discretización tomemos cuatro conjuntos de números igualmente espaciados en cada una de las variables que define la matriz densidad, es decir

$$\{x'_{1_1}, x'_{1_2}, \dots, x'_{1_N}\}, \{x'_{2_1}, x'_{2_2}, \dots, x'_{2_N}\}, \{x_{1_1}, x_{1_2}, \dots, x_{1_N}\}, \{x_{2_1}, x_{2_2}, \dots, x_{2_N}\},$$

donde el tamaño de paso es  $\Delta x_1 = x_{1_{r+1}} - x_{1_r}$  y  $\Delta x_2 = x_{2_{r+1}} - x_{2_r}$ . Se hace notar que para definir de forma correcta la matriz transpuesta, las dimensiones de las variables  $x_i$  y  $x'_i$  ( $i = 1, 2$ ) deben ser iguales, por simplicidad asumamos que los límites en los cuales son tomadas ambas variables son iguales y por lo tanto los tamaños de paso cumplen:  $\Delta x'_1 = \Delta x_1$  y  $\Delta x'_2 = \Delta x_2$ . De esta forma reemplazamos la matriz de densidad continua por su contraparte discreta, evaluando en cada punto de la partición

$$\rho_{i,j,k,l}(t) = \rho(x'_{1_i}, x'_{2_j}, x_{1_k}, x_{2_l}, t).$$

Es preciso decir que la elección de la partición debe ser de forma que las propiedades de la matriz densidad sean preservadas. En particular debe de ser tal que la matriz densidad discreta satisface la condición de normalización  $\text{Tr}\rho = 1$ . Dicha condición en la forma discreta es dada por

$$\sum_{i,j=1}^N \rho_{i,j,i,j}(t) \Delta x_1 \Delta x_2 = 1.$$

Por otro lado la condición de hermiticidad nos dice  $\rho^\dagger = \rho$ , que podemos escribir en forma discreta como

$$\rho_{i,j,k,l} = \rho_{k,l,i,j}^*,$$

donde  $\rho^*$  es el conjugado de  $\rho$ . Con esta matriz densidad discreta es posible describir al sistema de forma numérica ya que nos permite la evaluación de propiedades cuyo cálculo puede ser complicado. Uno de los ejemplos del uso de la forma discreta es la obtención de los valores esperados en las cuadraturas  $x$  y  $p$ . Los cuales son escritos por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \langle x_1 \rangle &= \sum_{i,j=1}^N x_{1i} \rho_{i,j,i,j} \Delta x_1 \Delta x_2, & \langle x_2 \rangle &= \sum_{i,j=1}^N x_{2j} \rho_{i,j,i,j} \Delta x_1 \Delta x_2, \\ \langle p_1 \rangle &= -i \sum_{i,j}^N (\rho_{i+1,j,i,j} - \rho_{i,j,i,j}) \Delta x_2, & \langle p_2 \rangle &= -i \sum_{i,j}^N (\rho_{i,j+1,i,j} - \rho_{i,j,i,j}) \Delta x_1, \end{aligned}$$

donde para obtener los valores esperados de las cuadraturas  $p$  se ha utilizado la forma aproximada de la derivada  $df(x)/dx \simeq (f(x + \Delta x) - f(x))/\Delta x$ , para un valor pequeño de  $\Delta x$ . El cálculo de otras observables es posible siempre y cuando antes los operadores correspondientes sean expresados en la representación de las cuadraturas.

Las matrices densidad reducidas necesarias para el estudio del enredamiento también pueden calcularse mediante la discretización, dichas matrices reducidas se expresan de la siguiente manera

$$\rho_{i,k}^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^N \rho_{i,j,k,j}(t) \Delta x_2, \quad \rho_{j,l}^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^N \rho_{i,j,i,l}(t) \Delta x_1.$$

Una de las ventajas de trabajar con la forma discreta de las matrices reducidas es que al obtener los eigenvalores las entropías lineal y de von Neumann queda determinada. Esto es, si denotamos al conjunto  $\{e_k(t)\}$  como los eigenvalores de la matriz  $\rho_{ij}^{(1)}(t) \Delta x_1$ , entonces las entropías lineal y de von Neumann son

$$S_L = 1 - \sum_{k=1}^N e_k^2(t), \quad S_{VN} = - \sum_{k=1}^N e_k(t) \ln(e_k(t)), \quad (6.42)$$

estas cantidades y otras como la negatividad logarítmica son estudiadas más adelante.

## 6.6. Enredamiento

El estudio de la dinámica del enredamiento de estados Gaussianos bipartitas en Hamiltonianos cuadráticos se presenta a continuación. Como ejemplo se toman los estados de vacío comprimido y coherente evolucionando en el amplificador paramétrico y el convertidor de frecuencias.

Los parámetros de Duan et al y Simon son evaluados además de las entropías lineal y de von Neumann, y la negatividad logarítmica. Se ha mostrado que en el amplificador paramétrico existe enredamiento entre los dos modos de entrada. Dicho enredamiento se ha calculado como correlaciones de segundo orden [7, 79], mediante el cálculo del criterio de Duan et al. [80] y un cálculo alternativo de la negatividad logarítmica [49]. El enredamiento entre modos de un estado Gaussiano simétrico ha sido descrito a través de

desigualdades tipo EPR y por medio de la entropía de von Neumann en [81]. Por otra parte el enredamiento presente en el amplificador paramétrico ha sido usado para el desarrollo de protocolos en metrología cuántica [82] e intercambio de enredamiento (entanglement swapping) [83]. Además el enredamiento en otros procesos paramétricos, como la oscilación paramétrica es usado frecuentemente para la generación de luz correlacionada [84–86] y el establecimiento de protocolos de información cuántica [87, 88]. Asimismo el estudio de sistemas Gaussianos abiertos al intercambio de energía se ha estudiado en [89, 90].

### 6.6.1. Parámetros de Duan et al. y Simon

La evaluación de la matriz de covarianza en el tiempo permite el estudio de los criterios de Duan et al y Simon.

Para el estado de vacío comprimido dentro del amplificador paramétrico las matrices necesarias para la evaluación de los parámetros de Duan et al. y Simon pueden obtenerse a través de la matriz de covarianza, dando como resultado

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2(1-|\eta(t)|^2)} \begin{pmatrix} 1 + |\eta(t)|^2 & 0 \\ 0 & 1 + |\eta(t)|^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{2(1-|\eta(t)|^2)} \begin{pmatrix} 1 + |\eta(t)|^2/\omega_b & 0 \\ 0 & (1 + |\eta(t)|^2)\omega_b \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \frac{1}{2(1-|\eta(t)|^2)} \begin{pmatrix} (\eta(t) + \eta^*(t))/\sqrt{\omega_b} & i(\eta^*(t) - \eta(t))/\sqrt{\omega_b} \\ i(\eta^*(t) - \eta(t))/\sqrt{\omega_b} & -(\eta(t) + \eta^*(t))/\sqrt{\omega_b} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado un sistema de unidades tales que la frecuencia del primer haz  $\omega_a = 1$  y por lo tanto la frecuencia del otro haz es medida con respecto al primero. Por medio de la matriz de covarianza es posible definir un parámetro que evalúe el criterio de Duan et al

$$P_D = a^2(\sigma_{q_1q_1} + \sigma_{p_1p_1} - 1) + \frac{1}{a^2}(\sigma_{q_2q_2} + \sigma_{p_2p_2} - 1) + 2(\sigma_{q_1q_2} + \sigma_{p_1p_2}), \quad (6.43)$$

de esta forma al evaluar  $P_D$  los estados separables deben cumplir  $P_D \geq 0$ . Los resultados para los estados de vacío comprimido y coherente son presentados en las figuras 6.1. En la figura 6.1 se grafica el parámetro de Duan et al. de la Ec. (6.43) en función del tiempo para un estado de vacío comprimido con los siguientes parámetros:  $\omega_a = 1$ ,  $\omega_b = 3$ ,  $\Omega = 9$ ,  $k = 2$ ,  $\nu = \sqrt{65}/2$ ,  $\beta = 4/5$  y  $a = 1$ . En dicha gráfica puede observarse que la condición  $P_D \geq 0$  siempre se cumple y por lo tanto no es posible determinar que existe enredamiento entre los dos modos del sistema. En el caso del convertidor de frecuencias los parámetros utilizados son:  $\omega_a = 1$ ,  $\omega_b = 3$ ,  $\Omega = 9$ ,  $k = 2$ ,  $\nu = \sqrt{97}/2$ ,  $\beta = 4/5$  y  $a = 1$ . De igual forma que en el caso del amplificador el parámetro de Duan et al siempre es positivo y por lo tanto no es posible determinar la presencia de enredamiento entre los dos modos del sistema.

En la figura 6.2 es posible observar el parámetro de Duan et al. en términos del tiempo para un estado coherente de dos modos. En el caso de la evolución en el amplificador paramétrico, es posible ver que  $P_D \geq 0$  y por lo tanto no es posible determinar si existe enredamiento, los parámetros usados para la graficación son  $\omega_a = 1$ ,  $\omega_b = 3$ ,  $\Omega = 9$ ,  $k = 2$ ,

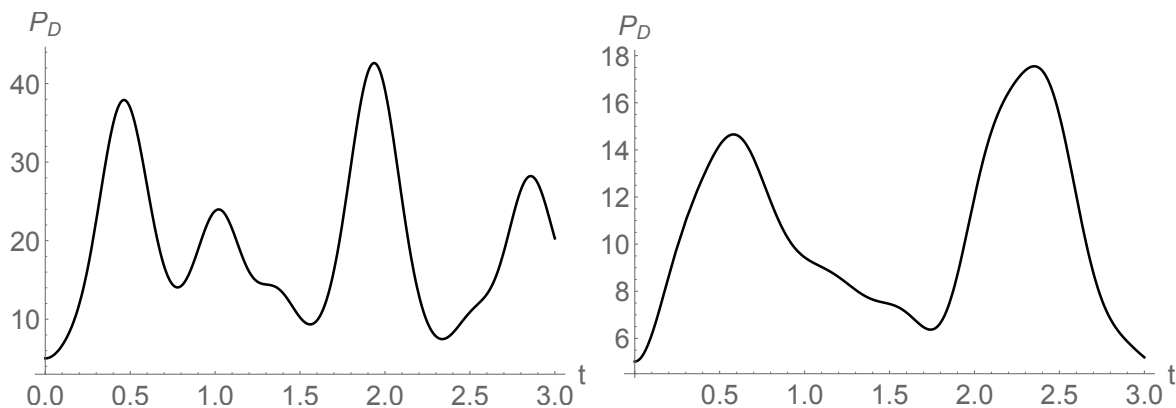


Figura 6.1. Parámetro de Duan et al en función del tiempo para un estado de vacío comprimido evolucionando (derecha) en un amplificador paramétrico e (izquierda) en un convertidor de frecuencias.

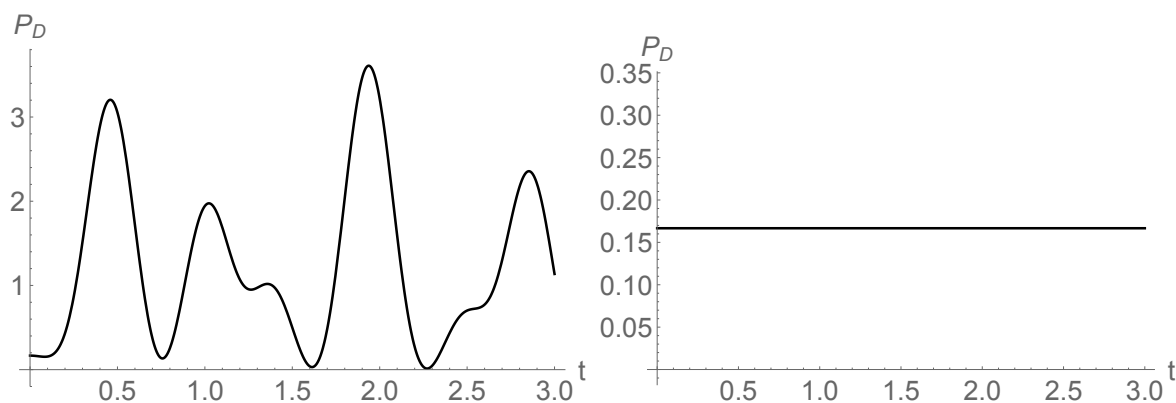


Figura 6.2. Parámetro de Duan et al en función del tiempo para un estado coherente evolucionando (derecha) en un amplificador paramétrico e (izquierda) en un convertidor de frecuencias.

$\nu = \sqrt{65}/2$ ,  $\beta = 4/5$  y  $a = 2$ . En el caso de la evolución en el convertidor de frecuencias, el parámetro de Duan et al. puede escribirse como

$$P_D = \frac{(1 - \omega_b)^2}{2a^2\omega_b},$$

el cual es positivo siempre, por lo tanto podemos aseverar que el dicho parámetro tampoco detecta enredamiento para el estado coherente dentro del convertidor de frecuencias. Los parámetros utilizados para su graficación son  $\omega_a = 1$ ,  $\omega_b = 3$ ,  $\Omega = 9$ ,  $k = 2$ ,  $\nu = \sqrt{97}/2$ ,  $\beta = 4/5$  y  $a = 2$ .

Para el estudio del criterio de Simon se evalúa el determinante  $\det \mathbf{C}$ . En el caso del vacío comprimido evolucionando en el amplificador paramétrico tenemos lo siguiente

$$\det \mathbf{C} = -\frac{|\eta(t)|^2}{2(1 - |\eta(t)|^2)^2},$$

este determinante es una cantidad siempre negativa salvo para el caso donde  $\eta(t) = 0$ . En ese caso el estado de vacío comprimido no presenta compresión dado que corresponde al

estado de vacío estándar  $|0, 0\rangle$  el cual siempre es separable con una matriz de covarianza  $\mathbf{I}/4$ . Por lo tanto el estado de vacío comprimido en el amplificador paramétrico siempre presenta enredamiento salvo en el caso de que el parámetro de compresión inicial sea cero.

En el caso del convertidor de frecuencias la matriz de covarianza para el estado de vacío sigue una forma complicada, sin embargo cuando se evalúa el determinante  $\det \mathbf{C}$  se obtiene

$$\det \mathbf{C} = -\frac{\beta^2(\nu^2 - 2k^2 \sin^2 \nu t)(\sqrt{\omega_b}\nu^2 - k^2(1 + \sqrt{\omega_b}) \sin^2 \nu t)}{\sqrt{\omega_b}\nu^4(1 - \beta^2)^2},$$

la cual es una cantidad negativa excepto para el caso  $\beta = 0$ . Es decir cuando tenemos de nuevo el estado de vacío estándar  $|0, 0\rangle$ . Por lo tanto el criterio de Simon para el estado de vacío comprimido en el convertidor de frecuencias nos dice que siempre tendremos enredamiento a excepción de cuando no hay compresión inicial.

Para el estado coherente de dos modos en el amplificador paramétrico la matriz de covarianza es

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\Omega^2 - 4k^2 \cos 2\nu t}{8\nu^2} \mathbf{I}, \\ \mathbf{B} &= \frac{\Omega^2 - 4k^2 \cos 2\nu t}{8\nu^2} \begin{pmatrix} 1/\omega_b & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} -f_1/\sqrt{\omega_b} & f_2/\sqrt{\omega_b} \\ f_2\sqrt{\omega_b} & f_1\sqrt{\omega_b} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde se definen las funciones

$$\begin{aligned} f_1 &= k(\Omega \cos \omega t \sin^2 \nu t - \nu \sin \omega t \sin 2\nu t)/2\nu^2, \\ f_2 &= k(\Omega \sin \omega t \sin^2 \nu t + \nu \cos \omega t \sin 2\nu t)/2\nu^2. \end{aligned}$$

Por lo que  $\det \mathbf{C}$  toma el valor

$$\det \mathbf{C} = -\frac{k^2}{4\nu^4}(\Omega^2 - 4k^2 \cos^2 \nu t) \sin^2 \nu t,$$

el cual es un número negativo o cero ya que  $\Omega^2 - 4k^2 \cos^2 \nu t > 0$ . Este determinante es cero cuando no existe interacción entre los dos modos ( $k = 0$ ) ó cuando el tiempo es  $t = n\pi/\nu$  (con  $n$  un entero), en esos casos no hay enredamiento entre sus componentes. En el caso hiperbólico ( $\Omega^2 - 4k^2 < 0$ ), es posible obtener el determinante haciendo la sustitución  $\nu \rightarrow i\nu'$  ( $\nu' = \sqrt{k^2 - \Omega^2/4}$ ) en la expresión anterior, de lo cual se obtiene

$$\det \mathbf{C} = \frac{k^2}{4\nu'^4}(\Omega^2 - 4k^2 \cosh^2 \nu' t) \sinh^2 \nu' t,$$

siendo ésta una cantidad negativa a menos que no exista interacción entre los modos ( $k = 0$ ) ó el tiempo es igual a cero, es decir cuando el estado corresponde a  $|\alpha_1, \alpha_2\rangle$ , el cual es separable.

Cuando evaluamos la matriz de covarianza del estado coherente evolucionando en el convertidor de frecuencias, se obtiene la matriz diagonal

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(0) = \frac{1}{4} \text{diag}(1, \omega_b, 1, 1/\omega_b),$$

por lo que podemos concluir que el estado coherente permanece coherente a todo tiempo y que

$$\det \mathbf{C} = 0,$$

por lo que es también un estado separable sin importar el tiempo en el que se evalúe. Calculando el estado explícitamente se encuentra

$$\begin{aligned} |\alpha, \beta, t\rangle &= |\xi_1(t), \xi_2(t)\rangle, \\ \xi_1(t) &= e^{i(\Omega/2+\omega_a)t} \left( \left( \cos \nu t + \frac{i\Omega}{2\nu} \sin \nu t \right) \alpha - i \frac{k}{\nu} \sin \nu t \beta \right), \\ \xi_2(t) &= e^{i(\Omega/2-\omega_b)t} \left( \left( \cos \nu t - \frac{i\Omega}{2\nu} \sin \nu t \right) \beta - i \frac{k}{\nu} \sin \nu t \alpha \right), \end{aligned} \quad (6.44)$$

el cual es un estado separable.

### 6.6.2. Entropías lineal y de von Neumann para estados Gaussianos

Las entropías lineal y de von Neumann fueron calculadas de forma analítica y también a través de la discretización de la matriz densidad. Haciendo uso de los eigenvalores de las matrices densidad reducidas  $\{e_i\}$ , la entropía de von Neumann puede ser escrita como

$$S_{VN} = - \sum_i e_i^{(1)} \ln e_i^{(1)} = - \sum_i e_i^{(2)} \ln e_i^{(2)}, \quad (6.45)$$

de forma similar la entropía lineal tiene la siguiente expresión

$$S_L = 1 - \sum_i e_i^{(1)2} = 1 - \sum_i e_i^{(2)2}. \quad (6.46)$$

La matriz densidad al tiempo  $t$  para el estado de vacío comprimido es la siguiente

$$\rho = (1 - |\eta|^2) \sum_{n,m=0}^{\infty} \eta^n \eta^{*m} |n, n\rangle \langle m, m|$$

realizando la traza parcial sobre el segundo modo se obtiene que la matriz densidad reducida tiene la expresión

$$\rho^{(1)} = (1 - |\eta|^2) \sum_{i=0}^{\infty} |\eta|^{2i} |i\rangle \langle i|,$$

cuyos eigenvalores son dados por

$$e_i^{(1)} = (1 - |\eta|^2) |\eta|^{2i}. \quad (6.47)$$

Usando los eigenvalores de la matriz densidad de la Ec. (6.47) puede probarse que la entropía lineal es

$$S_L(t) = \frac{2 |\eta(t)|^2}{1 + |\eta(t)|^2}, \quad (6.48)$$



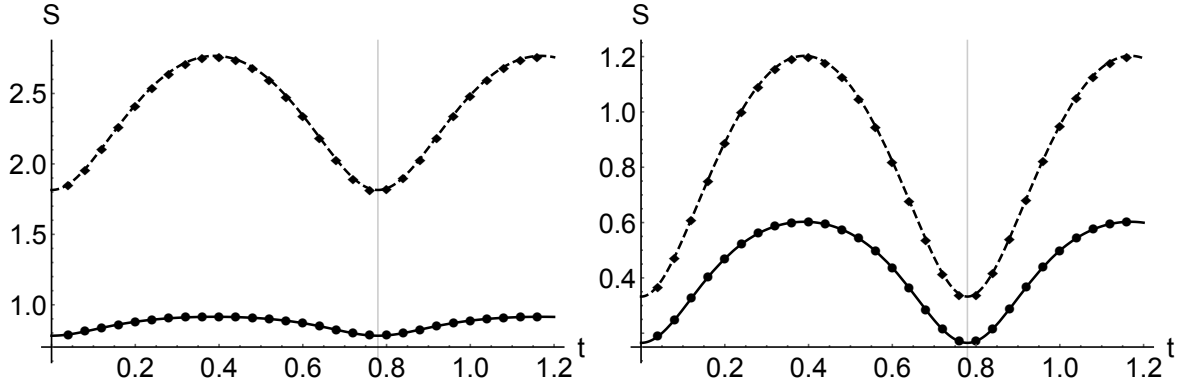


Figura 6.3. Los resultados analíticos para la entropía lineal (negro) y la entropía de von Neumann (negro discontinuo) como funciones del tiempo para el estado de vacío comprimido con parámetro de compresión  $\beta = 4/5$  (izquierda) y  $\beta = 3/10$  (derecha) en el amplificador paramétrico. Los parámetros del Hamiltoniano son  $\Omega = 9$ ,  $k = 2$ ,  $\omega_a = 1$  y  $\omega_b = 3$ . Los resultados numéricos correspondientes son mostrados también en la curva con círculos negro (entropía lineal) y rombos negros (entropía de von Neumann).

con  $\eta$  dado por la Ec. (6.37)

De forma análoga para la entropía de von Neumann se obtiene

$$S_{VN}(t) = -\ln(1 - |\eta(t)|^2) - \frac{|\eta(t)|^2 \ln(|\eta(t)|^2)}{1 - |\eta(t)|^2}. \quad (6.49)$$

En la figura 6.3 podemos ver los resultados para la entropía lineal y de von Neumann para un estado de vacío comprimido en el amplificador paramétrico. Se presentan en esta figura una comparación entre los resultados numéricos (calculados con el método de la discretización de la matriz densidad) y analíticos para dos diferentes valores del parámetro de compresión. En ambos casos la diferencia entre los resultados es menor a  $10^{-6}$  por lo que consideramos que el método de discretización da una muy buena aproximación.

En estas gráficas podemos observar que el comportamiento de las entropías es periódico con periodo igual a  $T = \pi/\nu$ .

En la figura 6.4 se muestran los valores de las entropías lineal y de von Neumann para estados coherentes y un estado Gaussiano particular. Dicha figura muestra el mismo comportamiento periódico de las entropías para el caso del vacío comprimido. Siendo éste un comportamiento general para cualquier estado Gaussiano. Los resultados analíticos para el estado coherente son dados por la expresión

$$S_L = \frac{8k^2 \sin^2 \nu t}{\Omega^2 - 4k^2 \cos(2\nu t)}, \quad S_{VN} = \frac{1-\epsilon}{2\epsilon} \ln\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right) - \ln\left(\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}\right), \\ \epsilon = \frac{4\nu^2}{\Omega^2 - 4k^2 \cos(2\nu t)},$$

Como se ha mencionado previamente los invariantes dependientes del tiempo admiten otro tipo solución para el caso donde  $\nu = \sqrt{k^2 - \Omega^2/4} \in \mathbb{R}$ . En esta solución no existe periodicidad debido al cambio de las funciones trigonométricas de la Ec. (6.5) en funciones hiperbólicas. La correspondiente entropía lineal para los estados coherente y de vacío comprimido son presentadas en la figura 6.5. En esta figura se puede observar que la

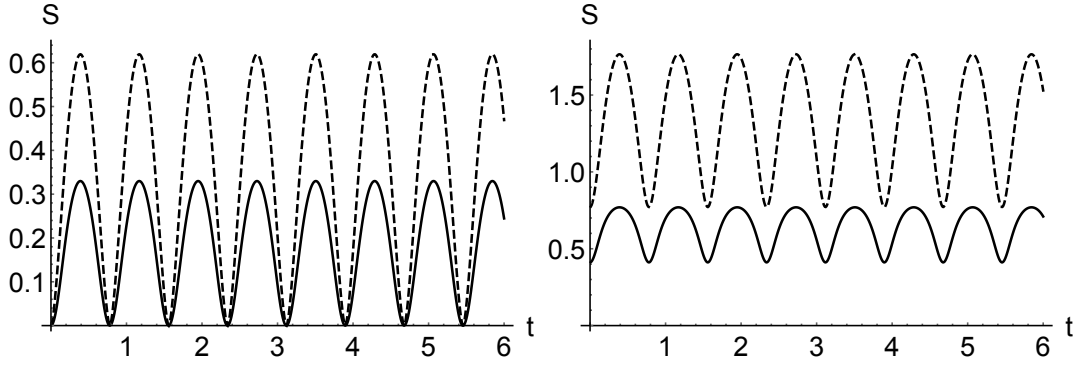


Figura 6.4. Entropía lineal (negro) y la entropía de von Neumann (discontinua) como funciones del tiempo para el estado coherente con parámetros  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 3$  (izquierda) y para un estado Gaussiano particular con  $a_{11} = 1$ ,  $a_{22} = 3$  y  $a_{12} = 1.4$  (derecha). Las constantes del Hamiltoniano son iguales a las de la figura 6.3.

entropía lineal es creciente a medida que el tiempo pasa. Este comportamiento es también general para cualquier estado Gaussiano.

Las entropías para el vacío comprimido en el convertidor de frecuencias se presentan en la figura 6.6. En estas podemos ver un comportamiento periódico del enredamiento con periodo  $t = n\pi/(2\nu)$ , con  $n$  entero. Estos son los tiempos en los cuales los operadores  $a$  y  $b$  se intercambian en la presencia de resonancia ( $\Omega = 0$ ). Podemos ver en dicha figura que incluso cuando no existe resonancia el enredamiento inicial entre ambos modos se recupera a esos tiempos para el estado de vacío comprimido. Este comportamiento oscilatorio, como se ha enunciado antes es esperado cuando hay una conversión de frecuencias cercana a la conversión completa.

### 6.6.3. Negatividad Logarítmica

La negatividad logarítmica es la aplicación del criterio de Peres-Horodecki a la matriz densidad. Este criterio establece que la transposición parcial de la matriz densidad separable  $\rho = \sum_i p_i \rho_i^{(1)} \otimes \rho_i^{(2)}$  satisface los mismos requisitos que la matriz densidad original. Por lo que será positiva semidefinida y hermitiana. En el caso de que la matriz densidad presente enredamiento entre los dos modos la transpuesta parcial presenta eigenvalores negativos. La suma de dichos eigenvalores negativos en valor absoluto se denomina la negatividad del sistema ( $\sum_i |e_i^{(-)}|$ ) la cual crece a medida que el sistema presenta un mayor enredamiento. La negatividad logarítmica se define entonces como

$$LN = \log_2 \left( 2 \sum_i |e_i^{(-)}| + 1 \right), \quad (6.50)$$

donde  $\{e^{(-)}\}$  representa los valores propios negativos de la matriz densidad transpuesta parcial  $\rho_{ijkl}^{(1)pt} = \rho_{kjil}$  o  $\rho_{ijkl}^{(2)pt} = \rho_{ilkj}$

En el caso del amplificador paramétrico la transpuesta parcial de la matriz densidad está dada por la expresión

$$\rho^{(2)pt} = (1 - |\eta(t)|^2) \sum_{n,m=0}^{\infty} \eta^n \eta^{*m} |n, m\rangle \langle m, n|, \quad (6.51)$$

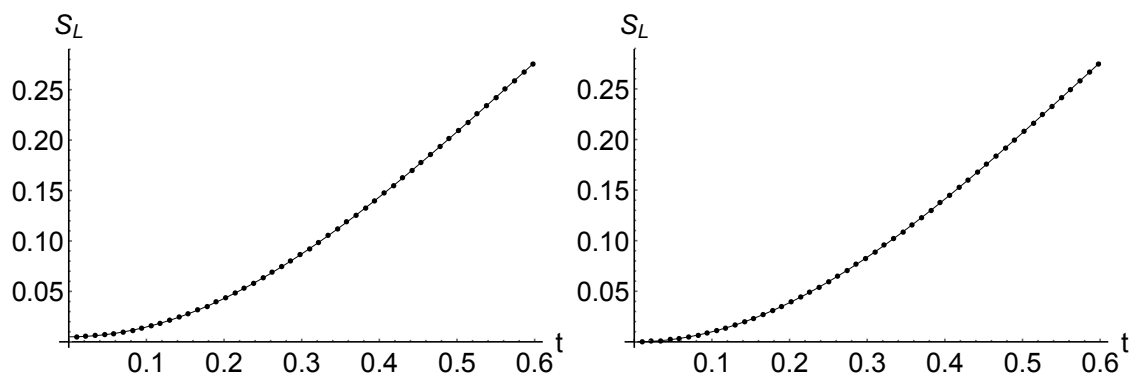


Figura 6.5. Entropía lineal en función del tiempo para las soluciones hiperbólicas de los invariantes en el amplificador paramétrico para un estados de vacío comprimido ( $\beta = 1/20$ ) (izquierda) y un estado coherente ( $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3$ ) (derecha). Los parámetros utilizados del Hamiltoniano son  $\omega_a = 1, \omega_b = 3, \Omega = 1/5, k = 1/\sqrt{2}$ . En ambos casos la línea continua corresponde a la solución analítica y la serie de puntos corresponden a los datos numéricos

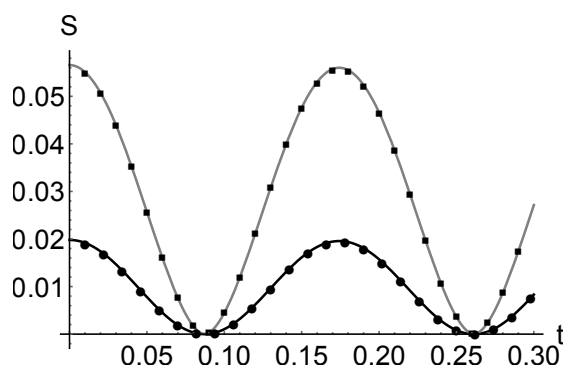


Figura 6.6. Entropía lineal (negro) y de von Neumann (gris) para un estado de vacío comprimido ( $\beta = 1/10$ ) en el convertidor de frecuencias. Los parámetros del Hamiltoniano son  $\omega_a = 1, \omega_b = 1/10, \Omega = 1, k = 9$ . Las líneas continuas corresponden a los resultados analíticos, mientras que los puntos y cuadrados corresponden a los resultados numéricos.

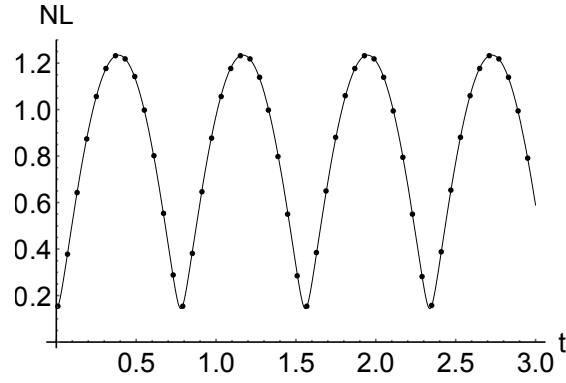


Figura 6.7. Negatividad logarítmica como función del tiempo para el estado de vacío comprimido ( $\beta = 1/20$ ) en el amplificador paramétrico con  $\omega_a = 1$ ,  $\omega_b = 3$ ,  $\Omega = 9$ ,  $k = 2$  y  $\nu = \sqrt{65}/2$ . La línea continua corresponde a la solución analítica y la serie de puntos corresponde a los resultados numéricos.

la cual tiene los siguientes eigenvectores:

$$|\Phi_0\rangle = |r, r\rangle, |\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta^r \eta^{*s} + \eta^s \eta^{*r}}} \{ \sqrt{\eta^r \eta^{*s}} |r, s\rangle \pm \sqrt{\eta^s \eta^{*r}} |s, r\rangle \},$$

con  $r \neq s$ . Con los correspondiente eigenvalores

$$(1 - |\eta|^2)|\eta|^{2r}, \mp(1 - |\eta|^2)|\eta|^{r+s},$$

respectivamente. Por lo tanto la negatividad se escribe como

$$\sum_i |e_i^{(-)}| = \frac{|\eta|(1 - |\eta|^2)}{(1 - |\eta|)^2(1 + |\eta|)},$$

y finalmente la negatividad logarítmica puede expresarse como

$$LN = \log_2 \left( \frac{2|\eta|(1 - |\eta|^2)}{(1 - |\eta|)^2(1 + |\eta|)} + 1 \right). \quad (6.52)$$

En la figura 6.7 podemos ver la gráfica de la negatividad logarítmica como función del tiempo para el estado de vacío comprimido. Dicha gráfica es consistente con los resultados para las entropías lineal y de von Neumann obtenidos previamente para el mismo estado. De igual forma que las entropías, se tiene que la negatividad logarítmica sigue un comportamiento periódico ( $T = \pi/\nu$ ).

Por otro lado la negatividad logarítmica para el vacío comprimido evolucionando en el convertidor de frecuencias (fig. 6.8) presenta el mismo comportamiento periódico que la entropía lineal y de von Neumann para el mismo sistema.

Es necesario comentar que la obtención numérica de la negatividad logarítmica es por lo general mucho más complicada que en el caso de las entropías, esto debido a que la negatividad logarítmica es una medida del enredamiento que hace uso de la matriz densidad completa en vez de sólo trabajar con las matrices reducidas. Sin embargo la negatividad logarítmica a diferencia de las entropías puede aplicarse incluso a estados no puros y por lo tanto su obtención numérica es de suma importancia.

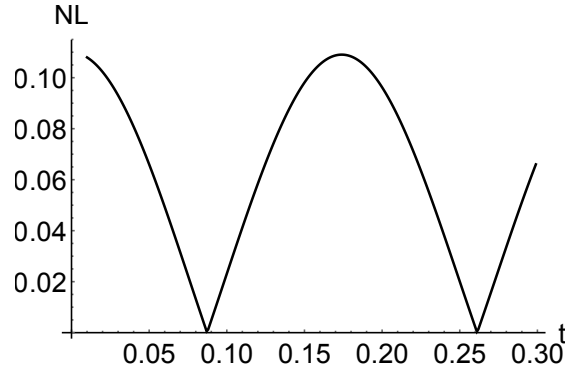


Figura 6.8. Negatividad logarítmica como función del tiempo para el estado de vacío comprimido ( $\beta = 1/10$ ) en el convertidor de frecuencias. Los parámetros del Hamiltoniano son  $\omega_a = 1$ ,  $\omega_b = 1/10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $k = 9$

#### 6.6.4. Desigualdades de Bell para el retrato tomográfico

En esta sección, se define y calcula el retrato de qubit para el tomograma simpléctico, en particular para un estado Gaussiano bipartita en evolución dentro del amplificador paramétrico y el convertidor de frecuencias. El retrato de qubit es la reducción del tomograma simpléctico u óptico, los cuales son una función de variable continua, a un vector de probabilidad de 4 dimensiones, este vector de probabilidad puede escribirse como el producto directo de dos vectores de probabilidad cuando el sistema es separable. Este retrato de qubit puede ser usado para determinar desigualdades de tipo Bell donde la violación del parámetro de Bell  $|\mathcal{B}| \leq 2$  indica que el sistema no es separable y por lo tanto presenta enredamiento. Sin embargo la proposición converso no es siempre válida.

Para definir el retrato tomográfico para un sistema de variable continua se generaliza la idea desarrollada para tomogramas de espín. Para estos estados el retrato de qubit y las desigualdades de Bell han sido propuestas en [26], además el estudio de los tomogramas de espín en Hamiltonianos dependientes del tiempo ha sido construido en [91]. Estos tomogramas han sido también usados para el estudio de qudits en el contexto de información cuántica para estados enredados y separables en [92]. Por otro lado se han encontrado experimentalmente violaciones de las desigualdades de Bell para sistemas de variable continua en la representación de la función de Wigner [25]. Asimismo recientemente violaciones de las desigualdades de Bell para sistemas de qubits en sistemas superconductores han sido encontradas [93, 94].

Los estados de espín pueden ser descritos por una distribución de probabilidad llamada tomograma de espín, la cual es denotada por  $\omega(m, \vec{n})$  el cual es un vector de probabilidades cuyas entradas son la probabilidad de tener una proyección  $m$  en el eje  $z$  después de realizar una rotación sobre el eje  $\vec{n}$  del estado de espín [95]. En general el tomograma de un sistema de qudits de espín en  $d$  dimensiones tiene un tomograma con  $2^d$  componentes, cada una correspondiente a las diferentes proyecciones del operador de momento angular.

El retrato de qubit es definido como la reducción del tomograma de un sistema de qudits a un tomograma para un qubit. Para construir dicho retrato se reduce las  $2^d$  componentes del tomograma a sólo 4. Para ello se construyen 4 conjuntos arbitrarios de las componentes del tomograma para el qudit y se suman, cada suma corresponderá a una entrada del tomograma reducido.

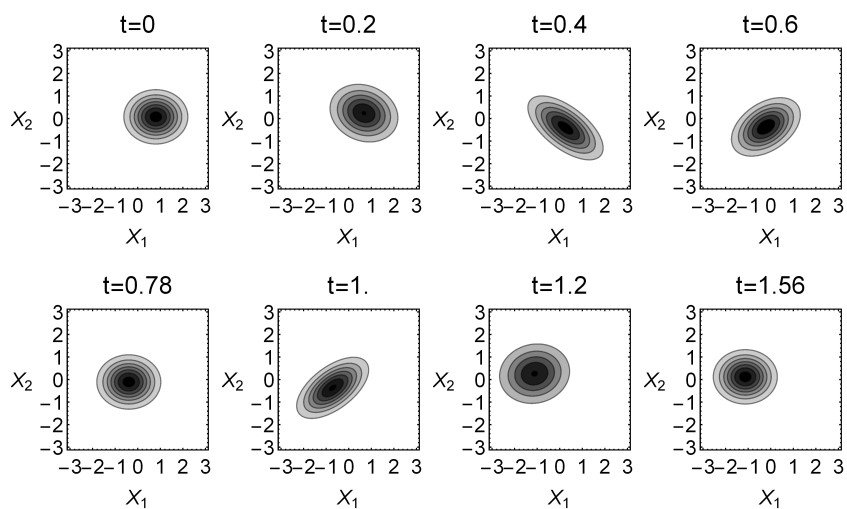


Figura 6.9. Contornos del tomograma para diferentes tiempos para el estado coherente en el amplificador paramétrico.  $\omega_a = 1$ ,  $\omega_b = 3$ ,  $\Omega = 9$ ,  $k = 2$ ,  $\nu = \sqrt{65}/2$

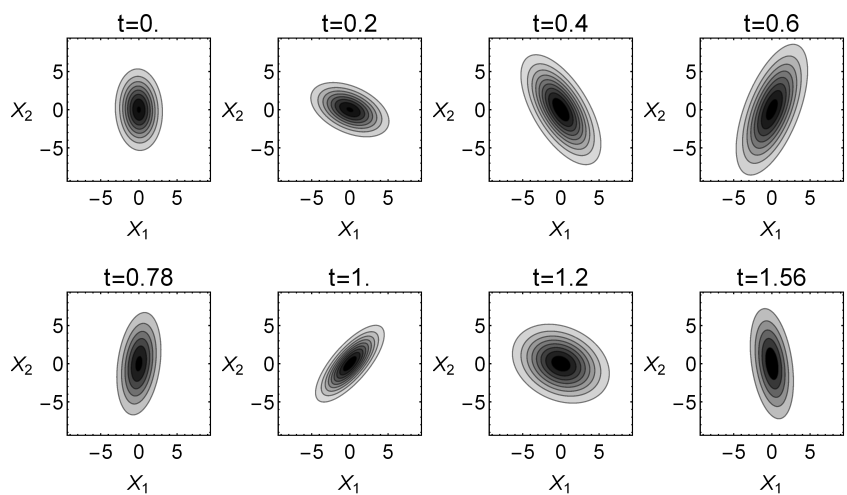


Figura 6.10. Contornos del tomograma para diferentes tiempos para el estado de vacío comprimido en el amplificador paramétrico.  $\omega_a = 1$ ,  $\omega_b = 3$ ,  $\Omega = 9$ ,  $k = 2$ ,  $\nu = \sqrt{65}/2$

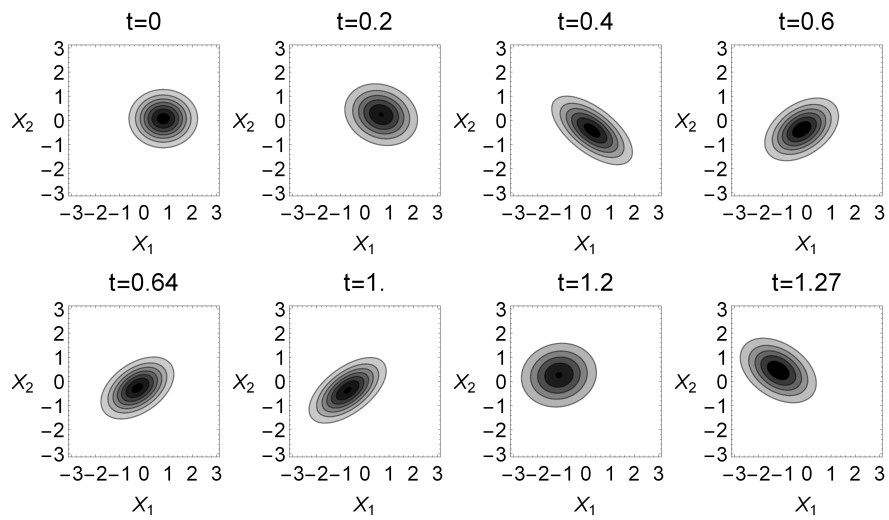


Figura 6.11. Contornos del tomograma para diferentes tiempos para el estado de vacío comprimido en el convertidor de frecuencias. Con  $\omega_a = 1, \omega_b = 3, \Omega = 9, k = 2, \nu = \sqrt{97}/2$

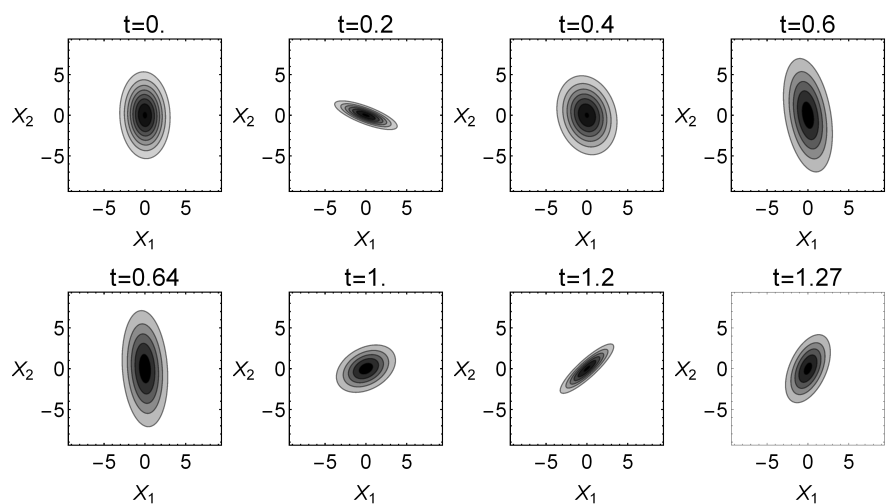


Figura 6.12. Contornos del tomograma para diferentes tiempos para el estado de vacío comprimido en el convertidor de frecuencias. Con  $\omega_a = 1, \omega_b = 3, \Omega = 9, k = 2, \nu = \sqrt{97}/2$

De forma análoga en el caso del tomograma simpléctico se reduce toda la información contenida en el tomograma simpléctico a 4 probabilidades de encontrar las cuadraturas  $X_1$  y  $X_2$  en 4 regiones de integración ( $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4$ ), las cuales no se traslapan  $\mathbb{A}_i \cap \mathbb{A}_j = \emptyset$ ; y cuya unión es igual al espacio bidimensional  $\mathbb{R}^2$ . Cada componente del vector de probabilidad del retrato de qubit se define como

$$P_i(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = \int_{\mathbb{A}_i} \mathcal{W}(X_1, X_2, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2; t) dX_1 dX_2, \quad (6.53)$$

donde  $i = 1, \dots, 4$  y  $\boldsymbol{\mu}_k = (\mu_k, \nu_k)$ . La cantidad  $P_i(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  corresponde a la probabilidad que tienen las cuadraturas  $q_i$  y  $p_i$ , en un sistema rotado y reescalado de estar contenidas en el área  $\mathbb{A}_i$  al tiempo  $t$ . Este sistema de coordenadas es definido por  $\boldsymbol{\mu}_1$  y  $\boldsymbol{\mu}_2$ , dado por las variables  $X_1$  y  $X_2$ .

Definiendo la siguiente matriz estocástica  $\mathbf{M}$ , mediante cuatro diferentes sistemas de coordenadas para  $(q_1, p_1)$  y  $(q_2, p_2)$  de la siguiente forma

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} P_1(\boldsymbol{\mu}_a, \boldsymbol{\mu}_b) & P_1(\boldsymbol{\mu}_a, \boldsymbol{\mu}_c) & P_1(\boldsymbol{\mu}_d, \boldsymbol{\mu}_b) & P_1(\boldsymbol{\mu}_d, \boldsymbol{\mu}_c) \\ P_2(\boldsymbol{\mu}_a, \boldsymbol{\mu}_b) & P_2(\boldsymbol{\mu}_a, \boldsymbol{\mu}_c) & P_2(\boldsymbol{\mu}_d, \boldsymbol{\mu}_b) & P_2(\boldsymbol{\mu}_d, \boldsymbol{\mu}_c) \\ P_3(\boldsymbol{\mu}_a, \boldsymbol{\mu}_b) & P_3(\boldsymbol{\mu}_a, \boldsymbol{\mu}_c) & P_3(\boldsymbol{\mu}_d, \boldsymbol{\mu}_b) & P_3(\boldsymbol{\mu}_d, \boldsymbol{\mu}_c) \\ P_4(\boldsymbol{\mu}_a, \boldsymbol{\mu}_b) & P_4(\boldsymbol{\mu}_a, \boldsymbol{\mu}_c) & P_4(\boldsymbol{\mu}_d, \boldsymbol{\mu}_b) & P_4(\boldsymbol{\mu}_d, \boldsymbol{\mu}_c) \end{pmatrix}, \quad (6.54)$$

donde cada columna especifica uno de los cuatro diferentes sistemas de coordenadas en donde las mediaciones son hechas y se satisface  $\sum_k P_k(\boldsymbol{\mu}_l, \boldsymbol{\mu}_k) = 1$ . Puede ser demostrado que para un estado puro separable, la matriz  $\mathbf{M}$  es el producto directo de dos matrices aleatorias pertenecientes a dos subsistemas cada una. En ese caso, uno puede definir una desigualdad tipo Bell. Para ello consideremos dos matrices estocásticas  $\begin{pmatrix} x & y \\ 1-x & 1-y \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} t & z \\ 1-t & 1-z \end{pmatrix}$ , y su producto tensorial

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1-x & 1-y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} t & z \\ 1-t & 1-z \end{pmatrix}. \quad (6.55)$$

Donde puede verse que cada elemento de matriz  $\widetilde{M}_{jk}(x, y, z, t)$  satisface la ecuación de Laplace

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \widetilde{M}_{jk}(x, y, z, t) = 0.$$

Por lo tanto los valores críticos de la función

$$\mathcal{B}(x, y, z, t) = \sum_{j,k=1}^4 \widetilde{M}_{jk}(x, y, z, t) C_{kj} \quad (6.56)$$

están situados en la frontera de la región donde  $x, y, z, t$  están definidos. En nuestro caso, es el cubo de cuatro dimensiones  $0 \leq x, y, z, t \leq 1$ . En este caso se han tomado los coeficientes  $C_{kj}$  en la siguiente forma

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$



aunque la elección de la matriz  $\mathbf{C}$  no es única, en nuestro caso se tomó de esta forma tal que al definir la función  $\mathcal{B}$  dos de los elementos de cada columna de  $\widetilde{\mathbf{M}}$  tuvieran signo positivo y los dos restantes tuvieran signo negativo. En el caso donde los elementos se cancelan el parámetro  $\mathcal{B}$  debe ser cero y en general uno puede probar que en la frontera el valor máximo de la función es

$$|\mathcal{B}(x, y, z, t)| \leq 2. \quad (6.57)$$

Usando la forma explícita de la matriz  $\mathbf{M}$ , de la Ec. (6.55) y la definición del parámetro de Bell de la Ec. (6.56), tenemos que la condición de separabilidad puede ser escrita como

$$|\mathcal{B}| = |E(a, b) + E(a, c) + E(d, b) - E(d, c)| \leq 2 \quad (6.58)$$

donde  $E(x, y) = P_1(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_y) - P_2(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_y) - P_3(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_y) + P_4(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\mu}_y)$ . Esta desigualdad evalúa si la matriz  $\mathbf{M}$  puede ser expresada como un producto directo de dos subsistemas, todos los sistemas puros separables deben cumplir esta condición. Por lo tanto una violación de esta desigualdad es una condición suficiente para determinar enredamiento en el sistema.

Para establecer de forma apropiada la desigualdad para el tomograma simpléctico, las regiones de integración usadas para la construcción de la matriz  $\mathbf{M}$  deben ser tomadas como el producto directo de dos subregiones de las variables  $X_1$  y  $X_2$ , esto con el fin de preservar la estructura de producto directo que debe tener  $\mathbf{M}$  en el caso separable, esto es

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 \\ \mathbb{A}_2 \\ \mathbb{A}_3 \\ \mathbb{A}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1^{(1)} \\ \mathcal{L}_2^{(1)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1^{(2)} \\ \mathcal{L}_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (6.59)$$

donde  $\sum_{k=1}^4 \mathbb{A}_k = \mathbb{R}^2$  son las cuatro regiones de integración que forman todo el espacio bidimensional y  $\sum_{i=1}^2 \mathcal{L}_i^{(j)} = (-\infty, \infty)$ , con  $j = 1, 2$ , son los elementos de línea en los cuales las variables  $X_1$  y  $X_2$  están definidas. Se hace notar que las probabilidades necesarias para la definición de  $\widetilde{\mathbf{M}}$  en la Ec. (6.54) pueden ser obtenidas en un esquema discreto para el tomograma simpléctico, de forma similar al utilizado para la matriz densidad y la obtención de las entropías. En este esquema las probabilidades son las integrales discretas sobre las diferentes áreas  $\mathbb{A}_1$  a  $\mathbb{A}_4$ . Usando esta forma discreta y el hecho de que el tomograma óptico puede ser observado experimentalmente uno puede esperar que el parámetro de Bell dado anteriormente pueda ser calculado en el laboratorio. En este trabajo se definieron las diferentes áreas a través de la partición de  $X_1$  y  $X_2$  en dos regiones

$$\mathcal{L}_1^{(j)} = (-\infty, 0], \quad \mathcal{L}_2^{(j)} = [0, \infty), \quad \text{con } j = 1, 2. \quad (6.60)$$

Estas regiones son mostradas en la figura 6.13. Mientras que para los ejes coordenados en los cuales los tomogramas son medidos, se usaron varios conjuntos de parámetros, dos de ellos expresados en la Tabla (6.1)

En la Fig. 6.14, la evaluación del parámetro  $\mathcal{B}$  se muestra para el estado de vacío comprimido y para el estado coherente. Hasta el momento no se ha encontrado una violación del límite 2 de la desigualdad de Bell, en ambos casos, el análisis fue hecho para diferentes particiones. Puede verse que para las líneas no continuas en los tiempos alrededor de

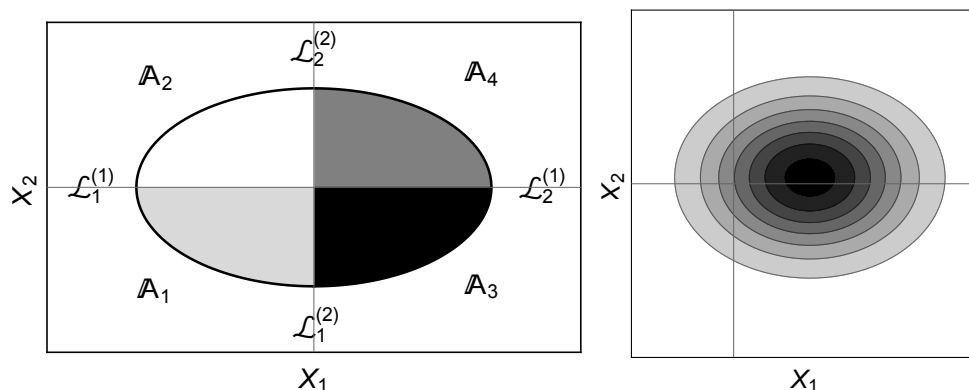


Figura 6.13. (Izquierda) Diferentes regiones de integración  $\mathbb{A}_1$  a  $\mathbb{A}_4$  las cuales son usadas para definir las probabilidades de la matriz  $\mathbf{M}$ , es decir para  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$  fijas. La elipse representa el contorno del tomograma y en diferentes tonos están las áreas correspondientes a cada una de las cuatro componentes de una columna de la matriz  $\mathbf{M}$ . Para el calculo del parámetro de Bell  $\mathcal{B}$  se tienen que calcular las correspondientes áreas para otros tres conjuntos de valores  $(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ . (Derecha) Gráfica de contorno para el tomograma simpléctico donde se muestran las cuatro regiones de integración para un estados coherente.

$\boldsymbol{\mu} = (\mu, \nu)$	$\theta$	$\boldsymbol{\mu} = (\mu, \nu)$	$\theta$
$\boldsymbol{\mu}_a = (-0.39, -0.92)$	4.31 (246.9°)	$\boldsymbol{\mu}_a = (1, 0)$	0
$\boldsymbol{\mu}_b = (-0.60, -0.80)$	4.07 (233.2°)	$\boldsymbol{\mu}_b = (0.92, 0.38)$	$\pi/8$
$\boldsymbol{\mu}_c = (-0.99, -0.01)$	3.15 (180.5°)	$\boldsymbol{\mu}_c = (0.38, 0.92)$	$3\pi/8$
$\boldsymbol{\mu}_d = (0.02, 0.99)$	1.54 (88.2°)	$\boldsymbol{\mu}_d = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$\pi/4$

Cuadro 6.1. Dos diferentes conjuntos de parámetros para los cuales se hace la medición de las probabilidades para el retrato de qubit. Los parámetros están dados por  $(\mu, \nu) = (s \cos \theta, s^{-1} \sin \theta)$  con  $s = 1$ . Los ángulos y factores de escala son indicados, dichos valores cumplen con la restricción  $2|\mu\nu| \leq 1$ .

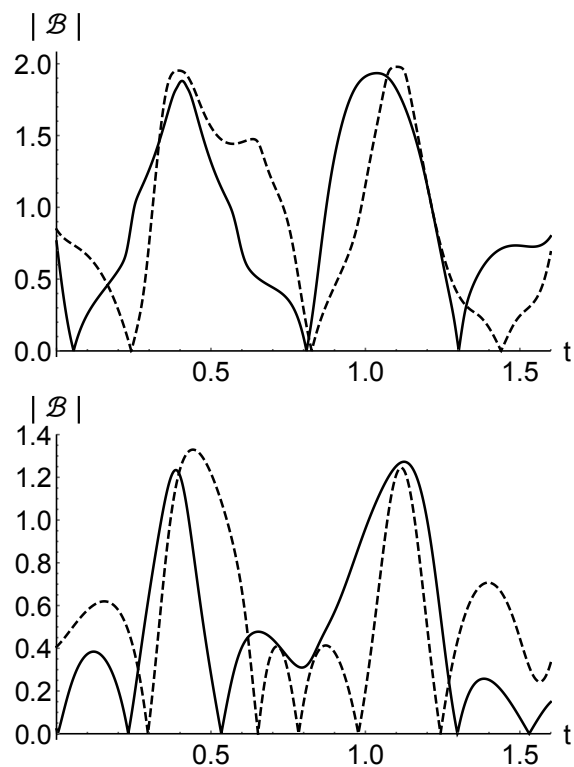


Figura 6.14. El parámetro  $|\mathcal{B}|$  y la entropía lineal  $S_L$  como funciones del tiempo para el estado de vacío comprimido con compresión  $\beta = 4/5$  (arriba) y para el estado coherente con constantes  $\alpha_1 = 4/5$  y  $\alpha_2 = 1/10$  (abajo); los datos utilizados para el amplificador son:  $\omega_a = 1$ ,  $\omega_b = 3$ ,  $\Omega = 9$ ,  $k = 2$ , y  $\nu = \sqrt{65}/2$ . En ambos casos la línea sólida corresponde a un sistema donde  $\mu$  está dado por la parte izquierda de la Tabla 6.1 y en el caso de las líneas punteadas  $\mu$  están dadas por la parte izquierda de la Tabla 6.1.

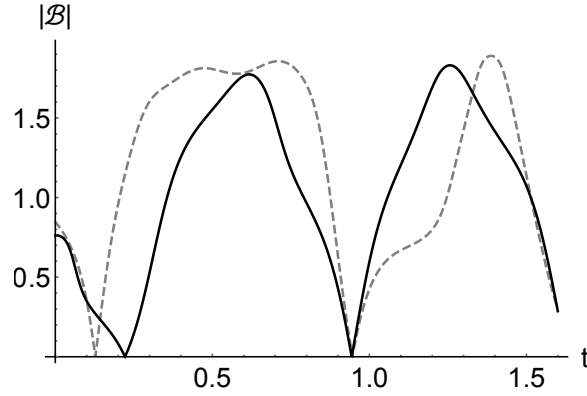


Figura 6.15. Parámetro de Bell para el estado de vacío comprimido en el convertidor de frecuencias con  $\omega_a = 1$ ,  $\omega_b = 3$ ,  $\Omega = 9$ ,  $k = 2$ ,  $\nu = \sqrt{97}/2$ . La línea sólida corresponde a un sistema donde  $\mu$  está dado por la parte izquierda de la Tabla 6.1 y en el caso de las líneas punteadas  $\mu$  están dadas por la parte izquierda de la Tabla 6.1.

$t = 0.3$  y  $t = 1$  el parámetro  $\mathcal{B}$  para el estado de vacío comprimido es casi cero. A esos tiempos, la gráfica del contorno del tomograma de la Fig. 6.10 tiene una varianza muy pequeña en uno de sus ejes principales de simetría. En contraste a los tiempos donde el parámetro de Bell  $\mathcal{B}$  es cercano al valor de  $\sim 2$  (tiempos alrededor 0.5 y 1.2). En estos tiempos el tomograma tiene una distribución más simétrica. Para el estado coherente, el parámetro de Bell muestra oscilaciones más rápidas que para el estado comprimido y los máximos locales son menores. Esto puede ser explicado por el desplazamiento del tomograma, el cual puede ser visto en la figura Fig. 6.9, lo cual implica que el cambio en las propiedades como las varianzas, los valores esperados, y las probabilidades que definen a la matriz  $\mathbf{M}$  están cambiando de una forma más complicada.

Para el caso del convertidor de frecuencias, tampoco se ha obtenido una violación de la desigualdad de Bell como se indica en las figura 6.15

### 6.6.5. Método alternativo

Debido a la falta de violación de la desigualdad de Bell hasta el momento, proponemos una forma alternativa de utilizar el retrato de qubit y el parámetro de Bell para la detección del enredamiento en un sistema puro bipartita. Este método alternativo hace uso de las propiedades del tomograma para estados separables, los cuales son el producto de los tomogramas reducidos de los subsistemas. Por lo tanto la diferencia de las probabilidades  $\int_{\mathbb{A}} \mathcal{W}(1, 2) dX_1 dX_2 - \int_{\mathcal{L}(1)} \mathcal{W}(1) dX_1 \int_{\mathcal{L}(2)} \mathcal{W}(2) dX_2$  es cero en el caso separable. Esto implica que la matriz  $\tilde{\mathbf{M}}$  del producto de los tomogramas reducidos  $\mathcal{W}(1)\mathcal{W}(2)$  es igual al tomograma completo de dos modos  $\mathcal{W}(1, 2)$ . Definiendo la matriz  $\tilde{\mathbf{M}}$  a través del producto de los tomogramas reducidos en la forma de la Ec. (6.55), donde las probabilidades están definidas como

$$\begin{aligned}
 x &= \int_{\mathcal{L}_1^{(1)}} \mathcal{W}_1(X_1, \mu_a, \nu_a) dX_1, & y &= \int_{\mathcal{L}_1^{(1)}} \mathcal{W}_1(X_1, \mu_d, \nu_d) dX_1, \\
 t &= \int_{\mathcal{L}_1^{(2)}} \mathcal{W}_2(X_2, \mu_b, \nu_b) dX_2, & z &= \int_{\mathcal{L}_1^{(2)}} \mathcal{W}_2(X_2, \mu_c, \nu_c) dX_2,
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

entonces podemos asociar un la función  $\tilde{\mathcal{B}}$  que corresponde al parámetro de Bell para la matriz  $\tilde{\mathbf{M}}$ , el cual es definido como

$$\tilde{\mathcal{B}} = \sum_{j,k=1}^4 \tilde{M}_{jk} C_{kj}. \tag{6.62}$$

Para estados puros no enredados la resta de los parámetros del tomograma completo  $\mathcal{B}$  y el parámetro asociado al producto de los tomogramas reducidos  $\tilde{\mathcal{B}}$  debe de satisfacer la igualdad

$$|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}| = 0, \tag{6.63}$$

mientras que para estados enredados se debe de cumplir la desigualdad

$$|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}| > 0. \tag{6.64}$$

La condición (6.64) entonces es utilizada para discriminar los estados enredados de los estados separables, dado que todos los estados separables deben de cumplir la condición  $|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}| = 0$ , sin embargo si tomamos un estado que cumple  $|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}| = 0$ , no necesariamente es separable. Por esto la condición en la Ec. (6.63) es una condición necesaria para que el sistema sea separable y una violación de esta igualdad es una condición suficiente para que exista enredamiento. Se hace notar que la cantidad  $\tilde{\mathcal{B}}$  puede ser obtenida de los datos experimentales de los tomogramas. Mediante un esquema discreto pueden ser usados para determinar las probabilidades necesarias para definir  $\mathbf{M}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , lo cual permitiría el cálculo del valor de  $|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}|$  para estos sistemas.

En la Fig. 6.16, se muestra la gráfica para  $|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}|$  correspondiente al estado de vacío comprimido en el amplificador paramétrico en función del tiempo. Puede verse que para tiempos iguales a los múltiplos de la frecuencia  $\pi/\nu$ , los estados coherentes y también el estado de vacío comprimido son separables como lo indican las entropías lineal y de von Neumann. Se hace notar que para algunos tiempos diferentes a éstos el parámetro  $|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}|$  tiende a cero aún cuando el sistema tiene enredamiento (el cual es indicado por las entropías). Este comportamiento está presente debido a que la Ec. (6.63) no es una condición suficiente para garantizar separabilidad.

En la figura 6.17 se muestra el método alternativo utilizando  $|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}|$  para el estado de vacío comprimido en el convertidor de frecuencias. En todos los puntos donde dicho parámetro es diferente de cero uno puede concluir que el estado es enredado, sin embargo en los puntos donde el parámetro es igual a cero es posible que el estado sea separable. Por ejemplo en el caso de  $t \simeq 0.1$  y  $t \simeq 0.2$  tenemos que  $|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}|$  es igual a cero para un cierto valor de los parámetros  $\boldsymbol{\mu}$  en la definición de la matriz estocástica  $\mathbf{M}$ . Sin embargo para saber si el sistema es separable a estos tiempos, uno tiene que variar  $\boldsymbol{\mu}$ . En el caso de que el sistema sea separable el valor cero de  $|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}|$  no cambiará con la elección de  $\boldsymbol{\mu}$ .

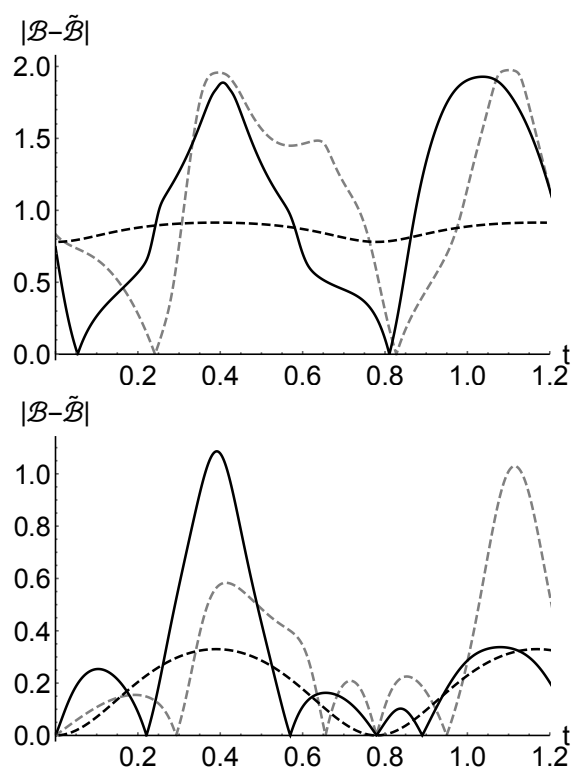


Figura 6.16. El parámetro  $|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}|$  y la entropía lineal  $S_L$  como funciones del tiempo para el estado de vacío comprimido con compresión  $\beta = 4/5$  (arriba) y para el estado coherente con constantes  $\alpha_1 = 4/5$  y  $\alpha_2 = 1/10$  (abajo); los datos utilizados para el amplificador son:  $\omega_a = 1$ ,  $\omega_b = 3$ ,  $\Omega = 9$ ,  $k = 2$ , y  $\nu = \sqrt{65}/2$ . En ambos casos la línea sólida corresponde a un sistema donde  $\mu$  está dado por la parte izquierda de la Tabla 6.1 y en el caso de las líneas punteadas  $\mu$  están dadas por la parte izquierda de la Tabla 6.1.

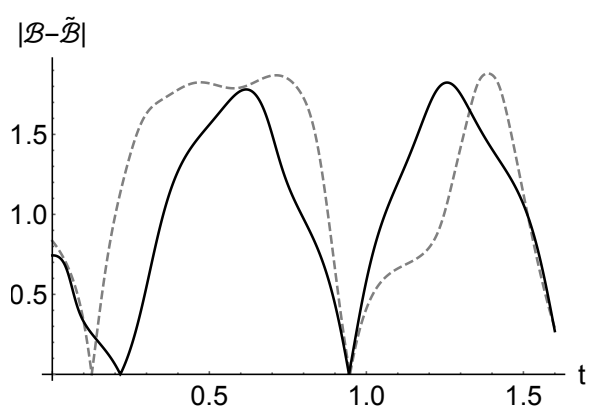


Figura 6.17. Parámetro  $|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}|$  para el estado de vacío comprimido en el convertidor de frecuencias con  $\omega_a = 1$ ,  $\omega_b = 3$ ,  $\Omega = 9$ ,  $k = 2$ ,  $\nu = \sqrt{97}/2$ . La línea sólida corresponde a un sistema donde  $\mu$  está dado por la parte izquierda de la Tabla 6.1 y en el caso de las líneas punteadas  $\mu$  están dadas por la parte izquierda de la Tabla 6.1.

## Capítulo 7

# Conclusiones

En este trabajo se presenta el estudio del enredamiento de estados Gaussianos puro y bipartitas en Hamiltonianos cuadráticos. Para ello se han construido los invariantes dependientes del tiempo para dos procesos paramétricos: el convertidor de frecuencias y el amplificador paramétrico. Dichos invariantes han sido utilizados para determinar la evolución temporal de estados Gaussianos. La dinámica de éstos estados es siempre Gaussiana y por lo tanto es caracterizada por la matriz de covarianza y los valores esperados del sistema. Como ejemplos de dicha evolución se han utilizado los estados coherentes y de vacío comprimido de dos modos llegando a los siguientes resultados. Para el estado coherente dentro del amplificador paramétrico se ha observado una pérdida de coherencia y para el estado de vacío comprimido se ha determinado que sigue siendo un estado de vacío comprimido. En el caso del convertidor de frecuencias se ha determinado que el estado coherente sigue siendo coherente a cualquier tiempo y que el estado de vacío comprimido cambia sus propiedades en el tiempo.

Los parámetros de Duan et al y de Simon fueron calculados junto con su dinámica en los procesos paramétricos antes mencionados. De los resultados obtenidos podemos concluir que el criterio de Duan et al no determina la existencia de enredamiento entre los modos para los sistemas en cuestión, dado que en todos los casos analizados no pudo encontrarse una violación a la Ec. (2.3). El estudio se realizó considerando varios ejemplos de parámetros para los estados iniciales y en ningún caso llegó a manifestarse el enredamiento.

En el caso del criterio de Simon se cuenta con resultados analíticos en todos los casos analizados y se concluye que la evaluación de dicho criterio representa de forma correcta la presencia del enredamiento bipartita. Esta característica del criterio de Simon se debe principalmente a que dicho criterio es necesario y suficiente para estados Gaussianos como los evaluados en este trabajo.

Para determinar numéricamente las otras medidas contenidas en este trabajo se desarrolló la técnica de discretización de la matriz densidad. Esta discretización nos lleva de una matriz densidad de variable continua que en principio tiene dimensión infinita a una matriz densidad finita de  $N \times N$ . Por medio de esta matriz densidad discreta se calcularon las entropías lineal y de von Neumann así como la negatividad logarítmica y posteriormente se compararon con los resultados analíticos.

En el caso del estado de vacío comprimido y el estado coherente en el amplificador paramétrico y el convertidor de frecuencias se tienen resultados analíticos para las entropías y la negatividad logarítmica. Dichas soluciones fueron comparadas con los resultados obtenidos mediante la discretización de la matriz densidad. En todos los casos analizados se tiene una diferencia entre la solución analítica y el método numérico menor a  $10^{-6}$ . Es posible determinar dichas medidas con una precisión mayor, sin embargo esto en detri-

mento del tiempo de cálculo. Dichas entropías presentan un comportamiento periódico con periodo  $T = \pi/\nu$  para el caso del amplificador en su solución trigonométrica y  $T = \pi/(2\nu)$  para el convertidor. Dicho comportamiento periódico se pierde al analizar las soluciones hiperbólicas del amplificador en donde el enredamiento crece continuamente con el tiempo.

Por otra parte se estableció una forma nueva de determinar el enredamiento del sistema basado en el retrato de qubit de un tomograma simpléctico u óptico en un sistema de variable continua. Este retrato hace uso de las propiedades de las matrices estocásticas para definir un parámetro tipo Bell  $\mathcal{B}$ , el cual debe de satisfacer la desigualdad  $\mathcal{B} \leq 2$  para estados separables. Dicho método reduce la probabilidad continua del tomograma simpléctico a una matriz estocástica de  $4 \times 4$ , la cual en el caso separable puede ser reescrita como el producto directo de dos matrices estocásticas. El procedimiento anterior es llevado a cabo mediante la elección de cuatro regiones de integración para las variables continuas  $X_1$  y  $X_2$  que definen el tomograma. Hemos hecho el estudio con diferentes regiones y sin embargo aún no hemos encontrado violación de la desigualdad de Bell.

Como una alternativa al método anterior hemos también propuesto lo siguiente, cuando un sistema es separable la probabilidad conjunta determinada por el tomograma  $:\int_{\mathbb{A}} \mathcal{W}(1, 2) dX_1 dX_2$  es igual al producto de las probabilidades dadas por el tomograma reducido  $\int_{\mathcal{L}^{(1)}} \mathcal{W}(1) dX_1 \int_{\mathcal{L}^{(2)}} \mathcal{W}(2) dX_2$ . Por lo que al definir un retrato de qubit para el sistema separable y con ello un parámetro de Bell  $\tilde{\mathcal{B}}$  para la factorización de los tomogramas, nos lleva a establecer que el sistema separable debe de cumplir  $|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}| = 0$ . Esta es una condición necesaria para que el sistema sea separable y por lo tanto una violación de dicha condición es una condición suficiente para determinar enredamiento. En los casos analizados los resultados de este método alternativo coinciden con aquellos obtenidos con los otros criterios presentados.

Además se presentan bases que portan la representación irreducible de los invariantes dependientes del tiempo de las álgebras  $SU(1,1)$  y  $SU(2)$ . Estas bases también son solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para los sistemas del amplificador y el convertidor respectivamente. Las soluciones son obtenidas en el espacio de Bargmann-Hilbert y su estudio detallado se plantea como trabajo a futuro.

Por último se discute el enredamiento de superposiciones bipartitas de estados coherentes que portan la representación de grupos cristalinos cíclicos. La descripción del enredamiento se hace mediante las entropías lineal y de von Neumann, obtenidas a través del uso de estados cristalizados de un sólo modo. Se llega a la conclusión de que los estados del grupo  $C_n$  tienen una entropía máxima dada por  $S_L = 1/n$  y  $S_{VN} = \ln n$ . Estas entropías son iguales a aquellas obtenidas en estados de máximo enredamiento para sistemas de espín con  $n$  igual al número de proyecciones posibles en la dirección  $z$ . El estudio detallado de las implicaciones de esto y su posible aplicación en la teoría de la información cuántica se abordarán posteriormente.



## Apéndice A

# Criterio de Duan et al.

### A.1. Parámetro de Duan

Dados los operadores

$$u = |a| x_1 + \frac{1}{a} x_2, \quad v = |a| p_1 - \frac{1}{a} p_2,$$

se construyen los valores esperados necesarios para la evaluación de las dispersiones

$$\begin{aligned} \langle u^2 \rangle &= |a|^2 \langle x_1^2 \rangle + 2 \frac{a}{|a|} \langle x_1 x_2 \rangle + \frac{1}{a^2} \langle x_2^2 \rangle, \\ \langle u \rangle^2 &= |a|^2 \langle x_1^2 \rangle + 2 \frac{|a|}{a} \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle + \frac{1}{a^2} \langle x_2^2 \rangle, \end{aligned}$$

de este modo la dispersión del operador  $u$  puede ser escrita como

$$(\Delta u)^2 = |a|^2 (\Delta x_1)^2 + 2 \frac{a}{|a|} (\Delta x_1 x_2) + \frac{1}{a^2} (\Delta x_2)^2,$$

procediendo de la misma forma con el operador  $v$ , obtenemos

$$(\Delta v)^2 = |a|^2 (\Delta p_1)^2 + 2 \frac{a}{|a|} (\Delta p_1 p_2) + \frac{1}{a^2} (\Delta p_2)^2,$$

Debido a que se considera un sistema separable, no hay correlaciones entre los momentos  $p_1, p_2$  y las posiciones  $x_1, x_2$ . Por lo tanto

$$(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 = |a|^2 \left( (\Delta x_1)^2 + (\Delta p_1)^2 \right) + \frac{1}{a^2} \left( (\Delta x_2)^2 + (\Delta p_2)^2 \right), \quad (\text{A.1})$$

utilizando la propiedad

$$(\Delta x_k - \Delta p_k)^2 = (\Delta x_k)^2 + (\Delta p_k)^2 - 2\Delta x_k \Delta p_k \geq 0,$$

con  $k = 1, 2$ ; entonces se llega a

$$(\Delta x_k)^2 + (\Delta p_k)^2 \geq 2\Delta x_k \Delta p_k, \quad (\text{A.2})$$

utilizando las desigualdades de Heisenberg

$$\Delta x_k \Delta p_k \geq \frac{1}{2},$$

en la Ec. (A.2) se tiene

$$(\Delta x_k)^2 + (\Delta p_k)^2 \geq 1,$$

por lo tanto de la Ec. (A.1) se llega a

$$(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 \geq a^2 + \frac{1}{a^2}. \quad (\text{A.3})$$

### A.1.1. Matriz de covarianza

Para probar que se puede llegar a la forma (2.7) tomemos el siguiente procedimiento

1. A la matriz de covarianza (2.5), se realizan dos transformaciones locales de los operadores  $(p_1, q_1)$  y  $(p_2, q_2)$  tales que las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  sean diagonales después de transformar estos operadores. La matriz de covarianza transformada puede escribirse de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \\ & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{V}}_1 & \\ & \widetilde{\mathbf{V}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{C}' \\ \widetilde{\mathbf{C}}' & \mathbf{d}_2 \end{pmatrix},$$

donde  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  son matrices reales que cumplen  $\det(\mathbf{V}_1) = \det(\mathbf{V}_2) = 1$  y son tales que diagonalizan a  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  respectivamente, las matrices  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{V}_1 \mathbf{A} \widetilde{\mathbf{V}}_1$  y  $\mathbf{d}_2 = \mathbf{V}_2 \mathbf{B} \widetilde{\mathbf{V}}_2$ , son matrices diagonales y la matriz  $\mathbf{C}' = \mathbf{V}_1 \mathbf{C} \widetilde{\mathbf{V}}_2$

2. Después se realiza una compresión local de las variables de forma que al transformarse las matrices diagonales se pueden escribir como  $\mathbf{d}_1 \rightarrow n\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{d}_2 \rightarrow m\mathbf{I}$ .

Supóngase que después de la transformación del inciso anterior las matrices de covarianza se escriben como

$$\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} e_1 & \\ & e_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} f_1 & \\ & f_2 \end{pmatrix},$$

donde  $(e_1, e_2)$  y  $(f_1, f_2)$  son los eigenvalores de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  respectivamente.

Una compresión de un modo se caracteriza por que transforma las dispersiones de la forma

$$\sigma_{qq} \rightarrow r\sigma_{qq}, \quad \sigma_{pp} \rightarrow \frac{\sigma_{pp}}{r},$$

donde  $r$  es un número real positivo. Aplicando una compresión para cada uno de los modos simbolizada por los parámetros  $r_1 = \sqrt{e_2/e_1}$  y  $r_2 = \sqrt{f_2/f_1}$  para el modo 1 y 2; la cual está determinada por las matrices de transformación

$$\mathbf{V}'_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{e_2}{e_1}\right)^{1/4} & \\ & \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^{1/4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}'_2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^{1/4} & \\ & \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{1/4} \end{pmatrix},$$

al realizar la operación

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}'_1 & \\ & \mathbf{V}'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{C}' \\ \widetilde{\mathbf{C}}' & \mathbf{d}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{V}}'_1 & \\ & \widetilde{\mathbf{V}}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\mathbf{I} & \mathbf{C}'' \\ \widetilde{\mathbf{C}}'' & m\mathbf{I} \end{pmatrix},$$

donde  $n = \sqrt{e_1 e_2}$ ,  $m = \sqrt{f_1 f_2}$  y la matriz  $\mathbf{C}'' = \mathbf{V}'_1 \mathbf{C}' \widetilde{\mathbf{V}}'_2 = \mathbf{V}'_1 \mathbf{V}_1 \mathbf{C} \widetilde{\mathbf{V}}_2 \widetilde{\mathbf{V}}'_2$

3. Finalmente se realiza una transformación que diagonalice  $\mathbf{C}''$ . Las demás covarianzas y dispersiones no se ven afectadas debido a que ya son múltiplos de la identidad.

Supóngase que la matriz que diagonaliza a  $\mathbf{C}''$  es la matriz unitaria  $\mathbf{V}_3$ , la última transformación que realizamos es

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \\ & \mathbf{V}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\mathbf{I} & \mathbf{C}'' \\ \tilde{\mathbf{C}}'' & m\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_3 & \\ & \tilde{\mathbf{V}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & & c \\ & n & c' \\ c & & m \\ & c' & m \end{pmatrix},$$

llegando así a la forma estándar  $I$

Si además se realiza una compresión extra en cada uno de los modos de la forma

$$\begin{pmatrix} \sqrt{r'_1} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{r'_1}} & & \\ & & \sqrt{r'_2} & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{r'_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & & c \\ & n & c' \\ c & & m \\ & c' & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{r'_1} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{r'_1}} & & \\ & & \sqrt{r'_2} & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{r'_2}} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} nr'_1 & & \sqrt{r'_1 r'_2} c & \\ & \frac{n}{r'_1} & & \frac{c'}{\sqrt{r'_1 r'_2}} \\ \sqrt{r'_1 r'_2} c & & mr'_2 & \\ & \frac{c'}{\sqrt{r'_1 r'_2}} & & \frac{m}{r'_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_{II}$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}_{II}$ , puede escribirse como

$$\boldsymbol{\sigma}_{II} = \begin{pmatrix} n_1 & & c_1 \\ & n_2 & c_2 \\ c_1 & & m_1 \\ & c_2 & m_2 \end{pmatrix},$$

con  $n_1 = nr'_1$ ,  $n_2 = n/r'_1$ ,  $m_1 = mr'_2$ ,  $m_2 = m/r'_2$ ,  $c_1 = \sqrt{r'_1 r'_2} c$  y  $c_2 = c'/\sqrt{r'_1 r'_2}$ . Esta última expresión para la matriz de covarianza es llamada la forma estándar  $II$ .

Es posible obtener una condición necesaria y suficiente que los estado Gaussianos separables deben cumplir, la cual está basada en la propiedad de que todos los estados Gaussianos separables, pueden llevarse mediante transformaciones locales a estados con una matriz de covarianza del tipo  $\boldsymbol{\sigma}_{II}$ , con propiedades que pueden ser utilizadas para distinguirlos de estados que presentan enredamiento.

Supongamos que todos los estados Gaussianos pueden ser transformados de tal forma que su matriz de covarianza sea del tipo  $\boldsymbol{\sigma}_{II}$ , con la propiedad

$$\frac{n_1 - 1}{m_1 - 1} = \frac{n_2 - 1}{m_2 - 1}, \quad |c_1| - |c_2| = \sqrt{(n_1 - 1)(m_1 - 1)} - \sqrt{(n_2 - 1)(m_2 - 1)}.$$

Para demostrar que existen parámetros  $r'_1$  y  $r'_2$  tales que cumplen la expresión anterior independientemente del estado de donde provengan, se analiza lo siguiente. Reescribiendo la Ec. (2.9) en términos de los parámetros de compresión se tiene

$$\frac{nr'_1 - 1}{\frac{n}{r'_1} - 1} = \frac{mr'_2 - 1}{\frac{m}{r'_2} - 1}, \quad \sqrt{r'_1 r'_2} |c| - \frac{|c'|}{\sqrt{r'_1 r'_2}} = \sqrt{(nr'_1 - 1)(mr'_2 - 1)} - \sqrt{\left(\frac{n}{r'_1} - 1\right)\left(\frac{m}{r'_2} - 1\right)}, \quad (\text{A.4})$$

supongamos que la primera igualdad de la Ec. (A.4) es válida siempre, por lo cual podemos obtener  $r'_2$  en términos de  $r'_1$  despejando

$$r'_2 = \frac{\sqrt{4m^2 r'_1 (n - r'_1) (nr'_1 - 1) + n^2 (r'^2_1 - 1)^2 - nr'^2_1 + n}}{2m(n - r'_1)}$$

el cual cumple con los límites

$$r'_2(r'_1 = 1) = 1, \quad r'_2(r'_1 \rightarrow \infty) \rightarrow m.$$

Definiendo la función

$$g(r_1) = |c_1| - |c_2| - \sqrt{(n_1 - 1)(m_1 - 1)} - \sqrt{(n_2 - 1)(m_2 - 1)}.$$

podemos observar que tiene los siguientes límites

$$\begin{aligned} g(r'_1 = 1) &= |c| - |c'| \geq 0, \\ g(r'_1 \rightarrow \infty) &\rightarrow \sqrt{r'_1 m} |c| - \sqrt{nr'_1 (m^2 - 1)} = \sqrt{r'_1 m} \left( |c| - \sqrt{n \left( m - \frac{1}{m} \right)} \right) \leq 0, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

si suponemos que  $|c| \geq |c'|$  y la condición  $|c| \leq \sqrt{n \left( m - \frac{1}{m} \right)}$ . Ésta última condición es satisfecha siempre y puede probarse al aplicar la siguiente desigualdad

$$(\Delta u_0)^2 + (\Delta v_0)^2 \geq |[u_0, v_0]|,$$

a los operadores

$$u_0 = \sqrt{m - \frac{1}{m}} x_1 - \frac{c}{|c|} x_2, \quad v_0 = \frac{\sqrt{n}}{m} p_2,$$

por lo tanto se puede concluir de la Ec. (A.5) que la función  $g(r'_1) = 0$  en al menos un punto de  $r'_1, r'_2 \in [1, \infty)$ , es decir siempre podemos encontrar un conjunto de parámetros de compresión  $r'_1$  y  $r'_2$  de tal forma que se cumplen las Ecs. (A.4). Hemos demostrado entonces que cualquier estado Gaussiano se puede asociar con una matriz de covarianza  $\sigma_{II}$ , cuyos elementos cumplen con la condición (2.9). Definiendo los operadores

$$u = a_0 q_1 - \frac{c_1}{|c_1|} q_2, \quad v = a_0 p_1 - \frac{c_2}{|c_2|} p_2,$$

con  $a_0 = \sqrt{\frac{m_1 - 1}{n_1 - 1}} = \sqrt{\frac{m_2 - 1}{n_2 - 1}}$ .

A continuación se hace una demostración que el criterio de Duan et al. para la forma  $\sigma_{II}$  de la matriz densidad es necesaria y suficiente para establecer la separabilidad de estados Gaussianos. La condición de Duan et al (2.11) debe ser cumplida por todos los estados separables en particular los estados Gaussianos separables. Lo único que hay que demostrar entonces es que los estados que cumplen la condición (2.11) son estados Gaussianos separables

La condición puede ser escrita como

$$a_0^2 \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{m_1 + m_2}{2a_0^2} - |c_1| - |c_2| \geq a_0^2 + \frac{1}{a_0^2},$$

con las condiciones siguientes

$$n_1, n_2, m_1, m_2 \geq 1, \quad \frac{n_1 - 1}{m_1 - 1} = \frac{n_2 - 1}{m_2 - 1}, \quad a_0^2 = \sqrt{\frac{m_1 - 1}{n_1 - 1}} = \sqrt{\frac{m_2 - 1}{n_2 - 1}},$$

además

$$|c_1| - |c_2| \geq \sqrt{(n_1 - 1)(m_1 - 1)} - \sqrt{(n_2 - 1)(m_2 - 1)},$$

de estas desigualdades puede demostrarse que

$$|c_1| \leq \sqrt{(n_1 - 1)(m_1 - 1)}, \quad |c_2| \leq \sqrt{(n_2 - 1)(m_2 - 1)}.$$

Lo cual implica que la matriz  $\sigma_{II} - I$  es positiva semidefinida, en particular el determinante es

$$\det(\sigma_{II} - I) = (c_1^2 - (n_1 - 1)(m_1 - 1))(c_2^2 - (n_2 - 1)(m_2 - 1)),$$

el cual por la desigualdad anterior es siempre un número no negativo, es decir  $\det(\sigma_{II} - I) \geq 0$ . Utilizando esta condición para estados Gaussiano permite escribir la matriz densidad de la forma [45]

$$\rho = \int d^2\alpha d^2\beta P(\alpha, \beta) |\alpha, \beta\rangle \langle \alpha, \beta|,$$

donde  $P(\alpha, \beta)$  es una función Gaussiana positiva y  $|\alpha, \beta\rangle$  es un estado coherente separable. Esta expresión es la forma continua de la Ec. (2.2) para un estado bipartita separable

Por lo tanto se demuestra que si un estado Gaussiano cumple la condición de Duan et al. entonces es un estado Gaussiano separable.

## Apéndice B

# Programación

Los siguientes programas fueron utilizados para la obtención de los resultados principales de este trabajo. primero listamos el programa utilizado para la obtención del parámetro de Bell  $|\mathcal{B}|$

---

```
/*En este programa se realiza la evaluación del parámetro de Bell*/
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<complex.h>
#include<stdlib.h>

#define nr 150
#define nr1 75
#define linx 13.
/*Las frecuencias y la constante de interacion*/
#define wa 1.
#define wb 3.
#define k1 2.
#define Om 9.
#define a1 0.8
#define a2 0.1

#define pi 4.*atan(1.)
#define nu sqrt(Om*Om/4.-k1*k1)

#define f1a(t) ccos((Om/2.+wa)*t)*ccos(nu*t)+(Om/(2.*nu))*csin((Om/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define f1b(t) ccos((Om/2.+wb)*t)*ccos(nu*t)+(Om/(2.*nu))*csin((Om/2.+wb)*t)*csin(nu*t)
#define f2a(t) csin((Om/2.+wa)*t)*ccos(nu*t)-(Om/(2.*nu))*ccos((Om/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define f2b(t) csin((Om/2.+wb)*t)*ccos(nu*t)-(Om/(2.*nu))*ccos((Om/2.+wb)*t)*csin(nu*t)
#define f3a(t) -csin((Om/2.+wa)*t)*ccos(nu*t)+(Om/(2.*nu))*ccos((Om/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define f3b(t) -csin((Om/2.+wb)*t)*ccos(nu*t)+(Om/(2.*nu))*ccos((Om/2.+wb)*t)*csin(nu*t)
#define g1a(t) (k1/nu)*csin((Om/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define g1b(t) (k1/nu)*csin((Om/2.+wb)*t)*csin(nu*t)
#define g2a(t) (k1/nu)*ccos((Om/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define g2b(t) (k1/nu)*ccos((Om/2.+wb)*t)*csin(nu*t)

void mult_mat(double complex x1[4][4],double complex x2[4][4],double complex res[4][4],int dim){
//Esta subrutina multiplica dos matrices complejas de dim x dim
int i1,j1,k11;
for(i1=0;i1<dim;i1++){
for(j1=0;j1<dim;j1++){
res[i1][j1]=0.+0.*I;
}}

for(i1=0;i1<dim;i1++){
for(j1=0;j1<dim;j1++){
```

```

    for(k11=0;k11<dim;k11++){
res[i1][j1]+=x1[i1][k11]*x2[k11][j1];
    }
}
}

void llena_m(double complex l11[2][2],double complex l21[2][2],double complex l31[2][2],double complex l41[2][2],double t1){
//Esta subrutina es para llenar las matrices Lambda de los invariantes

l11[0][0]=f1a(t1);
l11[0][1]=g1b(t1)/sqrt(wb);
l11[1][0]=g1a(t1)*sqrt(wb);
l11[1][1]=f1b(t1);

l21[0][0]=f2a(t1);
l21[0][1]=-g2b(t1)*sqrt(wb);
l21[1][0]=-g2a(t1)*sqrt(wb);
l21[1][1]=f2b(t1)*wb;

l31[0][0]=f3a(t1);
l31[0][1]=-g2b(t1)/sqrt(wb);
l31[1][0]=-g2a(t1)/sqrt(wb);
l31[1][1]=f3b(t1)/wb;

l41[0][0]=f1a(t1);
l41[0][1]=-g1b(t1)*sqrt(wb);
l41[1][0]=-g1a(t1)/sqrt(wb);
l41[1][1]=f1b(t1);
}

void sigmat(double st1[4][4],double t3){
double complex l11[2][2],l12[2][2],l13[2][2],l14[2][2];
llena_m(l11,l12,l13,l14,t3);
double complex lambinv[4][4]={l14[0][0],l14[1][0],-l12[0][0],-l12[1][0]},{l14[0][1],l14[1][1],-l12[0][1],-l12[1][1]},{-l13[0][0],-l13[1][0],l11[0][0],l11[1][0]},{-l13[0][1],-l13[1][1],l11[0][1],l11[1][1]}};

double complex lambinv[4][4]={l14[0][0],l14[0][1],-l13[0][0],-l13[0][1]},{l14[1][0],l14[1][1],-l13[1][0],-l13[1][1]},{-l12[0][0],-l12[0][1],l11[0][0],l11[0][1]},{-l12[1][0],-l12[1][1],l11[1][0],l11[1][1]}};
double be=0.8;

double complex sigma0[4][4]={((1.+be*be)/(2.*(1-be*be)),-2.*be*sqrt(wb)/(2.*(1-be*be)),0.,0.},{-2.*be*sqrt(wb)/(2.*(1-be*be)),(1.+be*be)*wb/(2.*(1-be*be)),0.,0.},{0.,0.,(1.+be*be)/(2.*(1-be*be)),2.*be/(2.*(1-be*be)*sqrt(wb))},{0.,0.,2.*be/(2.*(1-be*be)*sqrt(wb)),(1.+be*be)/(2.*(1-be*be)*wb)}};

double complex sigaux[4][4],st1aux[4][4];

mult_mat(lambinv,sigma0,sigaux,4);
mult_mat(sigaux,lambinv,st1aux,4);
int i90,j90;
for(i90=0;i90<4;i90++){
for(j90=0;j90<4;j90++){
st1[i90][j90]=creal(st1aux[i90][j90]);
}
}
}

```

```

}}

}

double tomo(double y1,double y2,double mu1,double nu1,double mu2,double nu2,double t1){
//Se obtiene el tomograma de dos modos
double sigx1x1[2][2],sigt1[4][4];
sigmat(sigt1,t1);
sigx1x1[0][0]=mu1*mu1*sigt1[2][2]+nu1*nu1*sigt1[0][0]+2.*mu1*nu1*sigt1[0][2];
sigx1x1[1][1]=mu2*mu2*sigt1[3][3]+nu2*nu2*sigt1[1][1]+2.*mu2*nu2*sigt1[1][3];
sigx1x1[0][1]=mu1*mu2*sigt1[2][3]+nu1*nu2*sigt1[0][1]+mu1*nu2*sigt1[2][1]+mu2*nu1*sigt1[3][0];
double detsig=sigx1x1[0][0]*sigx1x1[1][1]-sigx1x1[0][1]*sigx1x1[0][1];
double expon=-(y1*y1*sigx1x1[1][1]+y2*y2*sigx1x1[0][0]-2.*y1*y2*sigx1x1[0][1])/(2.*detsig);
double res=exp(expon)/(2.*pi*sqrt(detsig));
return res;

}

double tomo_mul(int y11,int y21,double tomo_comp[nr][nr]){
//Se obtiene la multiplicacion de los tomogramas reducidos
double tom1=0.,tom2=0.;
int ki9;

for(ki9=0;ki9<nr;ki9++){
tom1+=tomo_comp[y11][ki9];
tom2+=tomo_comp[ki9][y21];
}

return tom1*tom2;

}

void vector(double vecp[4],double tom1[nr][nr]){

int i88,j88;
vecp[0]=0.;
vecp[1]=0.;
vecp[2]=0.;
vecp[3]=0.;
for(i88=0;i88<nr1;i88++){
for(j88=0;j88<nr1;j88++){
vecp[0]+=tom1[i88][j88];
}}
for(i88=0;i88<nr1;i88++){
for(j88=nr1;j88<nr;j88++){
vecp[1]+=tom1[i88][j88];
}}
for(i88=nr1;i88<nr;i88++){
for(j88=0;j88<nr1;j88++){
vecp[2]+=tom1[i88][j88];
}}
for(i88=nr1;i88<nr;i88++){
for(j88=nr1;j88<nr;j88++){
vecp[3]+=tom1[i88][j88];
}}

}

```



```

int main(){
FILE *ar=fopen("bell_vac_solo.txt", "w");
double t,h1,h2,x1,x2;
h1=2.*limx/nr;
h2=h1;
double wij1[nr][nr],wij2[nr][nr],wij3[nr][nr],wij4[nr][nr];
double wiwj1[nr][nr],wiwj2[nr][nr],wiwj3[nr][nr],wiwj4[nr][nr];
double mu1a,mu1b,mu1d,mu1c,mu2a,mu2b,mu2d,mu2c;
double th11,th12,th21,th22;
double v1[4],v2[4],v3[4],v4[4],m1[4][4],bell;
double u1[4],u2[4],u3[4],u4[4];
int i8,j8,r9,p9;
long int i9;
srand(6);
double min=1e6,max=-1e6;
double t11M,t12M,t21M,t22M,t11m,t12m,t21m,t22m;

th11=0.;
th12=pi/4;
th21=pi/8.;
th22=3.*pi/8.;
mu1a=cos(th11);
mu1b=sin(th11);
mu1d=cos(th12);
mu1c=sin(th12);
mu2a=cos(th21);
mu2b=sin(th21);
mu2d=cos(th22);
mu2c=sin(th22);

for(t=0.;t<1.6;t+=0.0001){

for(i8=0;i8<nr;i8++){
for(j8=0;j8<nr;j8++){
x1=-limx+i8*h1;
x2=-limx+j8*h2;
wij1[i8][j8]=h1*h2*tomo(x1,x2,mu1a,mu1b,mu2a,mu2b,t);
wij2[i8][j8]=h1*h2*tomo(x1,x2,mu1a,mu1b,mu2d,mu2c,t);
wij3[i8][j8]=h1*h2*tomo(x1,x2,mu1d,mu1c,mu2a,mu2b,t);
wij4[i8][j8]=h1*h2*tomo(x1,x2,mu1d,mu1c,mu2d,mu2c,t);
}}

vector(v1,wij1);
vector(v2,wij2);
vector(v3,wij3);
vector(v4,wij4);

printf("%lf %lf %lf %lf\n", (v1[0]+v1[1]+v1[2]+v1[3]), (v2[0]+v2[1]+v2[2]+v2[3]), (v3[0]+v3[1]+v3[2]+v3[3]), (v4[0]+v4[1]+v4[2]+v4[3]));

m1[0][0]=v1[0];
m1[1][0]=-v1[1];
m1[2][0]=-v1[2];
m1[3][0]=v1[3];
m1[0][1]=v2[0];

```

```

m1[1][1]=-v2[1];
m1[2][1]=-v2[2];
m1[3][1]=v2[3];
m1[0][2]=v3[0];
m1[1][2]=-v3[1];
m1[2][2]=-v3[2];
m1[3][2]=v3[3];
m1[0][3]=-v4[0];
m1[1][3]=v4[1];
m1[2][3]=v4[2];
m1[3][3]=-v4[3];
bell=0.;

for(i8=0;i8<4;i8++){
for(j8=0;j8<4;j8++){
bell+=m1[i8][j8];
}}

fprintf(ar, "%lf %e\n", t, fabs(bell));

}
fclose(ar);
return 0;
}

```

---

En el siguiente programa se realiza la evaluación del parámetro de Bell  $|\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{B}}|$

---

```

/*El siguiente programa tiene la finalidad del cálculo del parámetro |B-\tilde{B}|*/

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<complex.h>
#include<stdlib.h>

//nr es el número de particiones en las variables X1 y X2
#define nr 100
//nr1 es la mitad de nr debido a que tomaremos los cuatro cuadrantes de X1, X2 como las cuatro regiones de integración
#define nr1 50
//limx es el límite superior de X1 y X2
#define limx 10.
/*Las frecuencias y la constante de interacion*/
#define wa 1.
#define wb 3.
#define k1 2.
#define Om 9.
#define a1 0.8
#define a2 0.1

#define pi 4.*atan(1.)
#define nu sqrt(Om*Om/4.-k1*k1)

#define f1a(t) ccos((Om/2.+wa)*t)*ccos(nu*t)+(Om/(2.*nu))*csin((Om/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define f1b(t) ccos((Om/2.+wb)*t)*ccos(nu*t)+(Om/(2.*nu))*csin((Om/2.+wb)*t)*csin(nu*t)
#define f2a(t) csin((Om/2.+wa)*t)*ccos(nu*t)-(Om/(2.*nu))*ccos((Om/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define f2b(t) csin((Om/2.+wb)*t)*ccos(nu*t)-(Om/(2.*nu))*ccos((Om/2.+wb)*t)*csin(nu*t)

```

```

#define f3a(t) -csin((0m/2.+wa)*t)*ccos(nu*t)+(0m/(2.*nu))*ccos((0m/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define f3b(t) -csin((0m/2.+wb)*t)*ccos(nu*t)+(0m/(2.*nu))*ccos((0m/2.+wb)*t)*csin(nu*t)
#define g1a(t) (k1/nu)*csin((0m/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define g1b(t) (k1/nu)*csin((0m/2.+wb)*t)*csin(nu*t)
#define g2a(t) (k1/nu)*ccos((0m/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define g2b(t) (k1/nu)*ccos((0m/2.+wb)*t)*csin(nu*t)

void mult_mat(double complex x1[4][4],double complex x2[4][4],double complex res[4][4],int dim){
//Esta subrutina multiplica dos matrices complejas de dim x dim
int i1,j1,k11;
for(i1=0;i1<dim;i1++){
    for(j1=0;j1<dim;j1++){
        res[i1][j1]=0.+0.*I;
    }

    for(i1=0;i1<dim;i1++){
        for(j1=0;j1<dim;j1++){
            for(k11=0;k11<dim;k11++){
                res[i1][j1]+=x1[i1][k11]*x2[k11][j1];
            }
        }
    }
}

void llena_m(double complex l11[2][2],double complex l21[2][2],double complex l31[2][2],double complex l41[2][2],double t1){
//Esta subrutina es para llenar las matrices Lambda de los invariantes

l11[0][0]=f1a(t1);
l11[0][1]=g1b(t1)/sqrt(wb);
l11[1][0]=g1a(t1)*sqrt(wb);
l11[1][1]=f1b(t1);

l21[0][0]=f2a(t1);
l21[0][1]=-g2b(t1)*sqrt(wb);
l21[1][0]=-g2a(t1)*sqrt(wb);
l21[1][1]=f2b(t1)*wb;

l31[0][0]=f3a(t1);
l31[0][1]=-g2b(t1)/sqrt(wb);
l31[1][0]=-g2a(t1)/sqrt(wb);
l31[1][1]=f3b(t1)/wb;

l41[0][0]=f1a(t1);
l41[0][1]=-g1b(t1)*sqrt(wb);
l41[1][0]=-g1a(t1)/sqrt(wb);
l41[1][1]=f1b(t1);
}

void sigmat(double st1[4][4],double t3){
// En esta subrutina se obtiene la matriz de covarianza del sistema al tiempo t
double complex l11[2][2],l12[2][2],l13[2][2],l14[2][2];
llena_m(l11,l12,l13,l14,t3);
}

```

```

double complex lambinv[4][4]={114[0][0],114[1][0],-112[0][0],-112[1][0]},114[0][1],114[1][1],-112[0][1],-112[1][1]},{-113
[0][0],-113[1][0],111[0][0],111[1][0]},{-113[0][1],-113[1][1],111[0][1],111[1][1]}};

double complex lambinv[4][4]={114[0][0],114[0][1],-113[0][0],-113[0][1]},114[1][0],114[1][1],-113[1][0],-113[1][1]},{-112
[0][0],-112[0][1],111[0][0],111[0][1]},{-112[1][0],-112[1][1],111[1][0],111[1][1]}};

double complex sigma0[4][4]={0.5,0.,0.,0.},{0.,0.5*wb,0.,0.},{0.,0.,0.5,0.},{0.,0.,0.,0.5/wb}};
double complex sigaux[4][4],st1aux[4][4];

mult_mat(lambinv,sigma0,sigaux,4);
mult_mat(sigaux,lambinv,st1aux,4);
int i90,j90;
for(i90=0;i90<4;i90++){
for(j90=0;j90<4;j90++){
st1[i90][j90]=creal(st1aux[i90][j90]);
}}
}

double tomo(double y1,double y2,double mu1,double nu1,double mu2,double nu2,double t1){
//Aquí se obtiene el tomograma de dos modos
double sigx1x1[2][2],sigt1[4][4];
sigmat(sigt1,t1);
double complex l12[2][2],l22[2][2],l32[2][2],l42[2][2];
llena_m(l12,l22,l32,l42,t1);
double complex p1p,p2p,x1p,x2p;
double complex v11,v22;

p1p=(142[0][0]*I*(conj(a1)-a1)+142[1][0]*I*sqrt(wb)*(conj(a2)-a2)-122[0][0]*(a1+conj(a1))-122[1][0]*(a2+conj(a2))/sqrt(wb))/sqrt
(2.);
p2p=(142[0][1]*I*(conj(a1)-a1)+142[1][1]*I*sqrt(wb)*(conj(a2)-a2)-122[0][1]*(a1+conj(a1))-122[1][1]*(a2+conj(a2))/sqrt(wb))/sqrt
(2.);
x1p=(-132[0][1]*I*(conj(a1)-a1)-132[1][0]*I*sqrt(wb)*(conj(a2)-a2)+112[0][0]*(a1+conj(a1))+112[1][0]*(a2+conj(a2))/sqrt(wb))/sqrt
(2.);
x2p=(-132[0][1]*I*(conj(a1)-a1)-132[1][1]*I*sqrt(wb)*(conj(a2)-a2)+112[0][1]*(a1+conj(a1))+112[1][1]*(a2+conj(a2))/sqrt(wb))/sqrt
(2.);
v11=y1-mu1*x1p-nu1*p1p;
v22=y2-mu2*x2p-nu2*p2p;
sigx1x1[0][0]=mu1*mu1*sigt1[2][2]+nu1*nu1*sigt1[0][0]+2.*mu1*nu1*sigt1[0][2];
sigx1x1[1][1]=mu2*mu2*sigt1[3][3]+nu2*nu2*sigt1[1][1]+2.*mu2*nu2*sigt1[1][3];
sigx1x1[0][1]=mu1*mu2*sigt1[2][3]+nu1*nu2*sigt1[0][1]+mu1*nu2*sigt1[2][1]+mu2*nu1*sigt1[3][0];

double detsig=sigx1x1[0][0]*sigx1x1[1][1]-sigx1x1[0][1]*sigx1x1[1][0];
double expon=-2.*v11*v22*sigx1x1[0][0]-2.*v11*v22*sigx1x1[0][1]/(2.*detsig);

double res=creal(exp(expon)/(2.*pi*sqrt(detsig)));
return res;
}

double tomo_mul(int y11,int y21,double tomo_comp[nr][nr]){
//Se obtiene la multiplicación de los tomogramas reducidos
double tom1=0.,tom2=0.;
int ki9;

for(ki9=0;ki9<nr;ki9++){
tom1+=tomo_comp[y11][ki9];
}
}

```

```

tom2+=tomo_comp[ki9][y21];
}

return tom1*tom2;

}

void vector(double vecp[4],double tom1[nr][nr]){
// Aquí se realizan las cuatro regiones de integración
int i88,j88;
vecp[0]=0.;
vecp[1]=0.;
vecp[2]=0.;
vecp[3]=0.;
for(i88=0;i88<nr1;i88++){
for(j88=0;j88<nr1;j88++){
vecp[0]+=tom1[i88][j88];
}}
for(i88=0;i88<nr1;i88++){
for(j88=nr1;j88<nr;j88++){
vecp[1]+=tom1[i88][j88];
}}
for(i88=nr1;i88<nr;i88++){
for(j88=0;j88<nr1;j88++){
vecp[2]+=tom1[i88][j88];
}}
for(i88=nr1;i88<nr;i88++){
for(j88=nr1;j88<nr;j88++){
vecp[3]+=tom1[i88][j88];
}}

}

int main(){
FILE *ar=fopen("bell_coh1.txt","w");
double t,h1,h2,x1,x2;
h1=2.*limx/nr;
h2=h1;
double wij1[nr][nr],wij2[nr][nr],wij3[nr][nr],wij4[nr][nr];
double wiwj1[nr][nr],wiwj2[nr][nr],wiwj3[nr][nr],wiwj4[nr][nr];
double mu1a,mu1b,mu1d,mu1c,mu2a,mu2b,mu2d,mu2c;
double th11,th12,th21,th22;
double v1[4],v2[4],v3[4],v4[4],m1[4][4],bell;
double u1[4],u2[4],u3[4],u4[4];
int i8,j8,r9,p9;
long int i9;
srand(6);
double min=1e6,max=-1e6;
double t11M,t12M,t21M,t22M,t11m,t12m,t21m,t22m;

th11=4.31;
th12=4.07;
th21=3.15;
th22=1.54;
mu1a=cos(th11);
mu1b=sin(th11);
mu1d=cos(th12);

```

```

nu1c=sin(th12);
mu2a=cos(th21);
nu2b=sin(th21);
mu2d=cos(th22);
nu2c=sin(th22);

for(t=0.;t<1.6;t+=0.0001){
for(i8=0;i8<nr;i8++){
for(j8=0;j8<nr;j8++){
x1=-limx+i8*h1;
x2=-limx+j8*h2;
wij1[i8][j8]=h1*h2*tomo(x1,x2,mu1a,nu1b,mu2a,nu2b,t);
wij2[i8][j8]=h1*h2*tomo(x1,x2,mu1a,nu1b,mu2d,nu2c,t);
wij3[i8][j8]=h1*h2*tomo(x1,x2,mu1d,nu1c,mu2a,nu2b,t);
wij4[i8][j8]=h1*h2*tomo(x1,x2,mu1d,nu1c,mu2d,nu2c,t);
}}

for(r9=0;r9<nr;r9++){
for(p9=0;p9<nr;p9++){
wiwj1[r9][p9]=tomo_mul(r9,p9,wij1);
wiwj2[r9][p9]=tomo_mul(r9,p9,wij2);
wiwj3[r9][p9]=tomo_mul(r9,p9,wij3);
wiwj4[r9][p9]=tomo_mul(r9,p9,wij4);
}}

for(i8=0;i8<nr;i8++){
for(j8=0;j8<nr;j8++){
wij1[i8][j8]=wij1[i8][j8]-wiwj1[i8][j8];
wij2[i8][j8]=wij2[i8][j8]-wiwj2[i8][j8];
wij3[i8][j8]=wij3[i8][j8]-wiwj3[i8][j8];
wij4[i8][j8]=wij4[i8][j8]-wiwj4[i8][j8];
}}

vector(v1,wij1);
vector(v2,wij2);
vector(v3,wij3);
vector(v4,wij4);

vector(u1,wiwj1);
vector(u2,wiwj2);
vector(u3,wiwj3);
vector(u4,wiwj4);

printf("%lf %lf %lf %lf\n", (u1[0]+u1[1]+u1[2]+u1[3]), (u2[0]+u2[1]+u2[2]+u2[3]), (u3[0]+u3[1]+u3[2]+u3[3]), (u4[0]+u4[1]+u4[2]+u4[3]));
m1[0][0]=v1[0];
m1[1][0]=-v1[1];
m1[2][0]=-v1[2];
m1[3][0]=v1[3];
m1[0][1]=v2[0];
m1[1][1]=-v2[1];
m1[2][1]=-v2[2];
m1[3][1]=v2[3];
m1[0][2]=v3[0];

```

```

m1[1][2]=-v3[1];
m1[2][2]=-v3[2];
m1[3][2]=v3[3];
m1[0][3]=-v4[0];
m1[1][3]=v4[1];
m1[2][3]=v4[2];
m1[3][3]=-v4[3];
bell=0.;

for(i8=0;i8<4;i8++){
for(j8=0;j8<4;j8++){
bell+=m1[i8][j8];
}}

fprintf(ar, "%lf %e\n", t, fabs(bell));

}
printf("%lf %lf %lf %lf\n", th11, th12, th21, th22);
fclose(ar);
return 0;
}

```

---

La entropía lineal y de von Neumann fueron calculadas mediante los siguientes programas

---

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<complex.h>
#include<stdlib.h>
#include <gsl/gsl_math.h>
#include <gsl/gsl_eigen.h>
#include <gsl/gsl_complex.h>
#include <gsl/gsl_complex_math.h>
#include <gsl/gsl_matrix.h>
#include <gsl/gsl_linalg.h>
#include <gsl/gsl_cblas.h>

// #define op 32
#define nt 32

double complex rhot[nt][nt];

#define limx 6.
/*Las frecuencias y la constante de interacion*/
#define wa 1.
#define wb 3.
#define k1 2.
#define Om 9.
#define nu csqrt(Om*Om/4.-k1*k1)

#define f1a(t) ccos((Om/2.+wa)*t)*ccos(nu*t)+(Om/(2.*nu))*csin((Om/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define f1b(t) ccos((Om/2.+wb)*t)*ccos(nu*t)+(Om/(2.*nu))*csin((Om/2.+wb)*t)*csin(nu*t)
#define f2a(t) csin((Om/2.+wa)*t)*ccos(nu*t)-(Om/(2.*nu))*ccos((Om/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define f2b(t) csin((Om/2.+wb)*t)*ccos(nu*t)-(Om/(2.*nu))*ccos((Om/2.+wb)*t)*csin(nu*t)

```

```

#define f3a(t) -csin((0m/2.+wa)*t)*ccos(nu*t)+(0m/(2.*nu))*ccos((0m/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define f3b(t) -csin((0m/2.+wb)*t)*ccos(nu*t)+(0m/(2.*nu))*ccos((0m/2.+wb)*t)*csin(nu*t)
#define g1a(t) (k1/nu)*csin((0m/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define g1b(t) (k1/nu)*csin((0m/2.+wb)*t)*csin(nu*t)
#define g2a(t) (k1/nu)*ccos((0m/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define g2b(t) (k1/nu)*ccos((0m/2.+wb)*t)*csin(nu*t)

void mult_mat(double complex x1[2][2],double complex x2[2][2],double complex res[2][2]){
//Esta subrutina multiplica dos matrices complejas de 2x2
int i1,j1,k11;
for(i1=0;i1<2;i1++){
    for(j1=0;j1<2;j1++){
        res[i1][j1]=0.+0.*I;
    }

    for(i1=0;i1<2;i1++){
        for(j1=0;j1<2;j1++){
            for(k11=0;k11<2;k11++){
                res[i1][j1]+=x1[i1][k11]*x2[k11][j1];
            }
        }
    }
}

void inversa(double complex x11[][2],double complex res1[][2]){
//Esta subrutina encuentra la inversa de una matriz compleja
// Define the dimension n of the matrix
// and the signum s (for LU decomposition)
int n = 2;
int s,i2,j2;
double real1,imag1;
double complex res;

// Define all the used matrices
gsl_matrix_complex *m = gsl_matrix_complex_alloc(n, n);
gsl_matrix_complex *inverse = gsl_matrix_complex_alloc(n, n);
gsl_permutation * perm = gsl_permutation_alloc(n);
gsl_complex aux11,aux22;
for(i2=0;i2<n;i2++){
    for(j2=0;j2<n;j2++){
        aux11=gsl_complex_rect(creal(x11[i2][j2]),cimag(x11[i2][j2]));
        gsl_matrix_complex_set(m,i2,j2,aux11);
    }
}

// Make LU decomposition of matrix m
gsl_linalg_complex_LU_decomp (m, perm, &s);

// Invert the matrix m
gsl_linalg_complex_LU_invert (m, perm, inverse);
for(i2=0;i2<n;i2++){
    for(j2=0;j2<n;j2++){

```



```

aux22=gsl_matrix_complex_get(inverse,i2,j2);
real1=gsl_complex_abs(aux22)*cos(gsl_complex_arg(aux22));
imag1=gsl_complex_abs(aux22)*sin(gsl_complex_arg(aux22));
res=real1+I*imag1;
res1[i2][j2]=res;
}
}

//Importante hay que liberar memoria antes de salir de la subrutina
gsl_matrix_complex_free (m);
gsl_matrix_complex_free (inverse);
gsl_permutation_free(perm);

}
void llena_m(double complex l11[2][2],double complex l21[2][2],double complex l31[2][2],double complex l41[2][2],double t1){
//Esta subrutina es para llenar las matrices lambda de los invariantes

l11[0][0]=f1a(t1);
l11[0][1]=g1b(t1);
l11[1][0]=g1a(t1);
l11[1][1]=f1b(t1);

l21[0][0]=f2a(t1);
l21[0][1]=-g2b(t1);
l21[1][0]=-g2a(t1);
l21[1][1]=f2b(t1);

l31[0][0]=f3a(t1);
l31[0][1]=-g2b(t1);
l31[1][0]=-g2a(t1);
l31[1][1]=f3b(t1);

l41[0][0]=f1a(t1);
l41[0][1]=-g1b(t1);
l41[1][0]=-g1a(t1);
l41[1][1]=f1b(t1);

}

double complex mul(double vec[2],double complex mat[2][2]){
//Esta subrutina obtiene el exponente de la funcion de onda completa
double complex res=0.+0.*I;
int i4,j4;
for(i4=0;i4<2;i4++){
    for(j4=0;j4<2;j4++){
        res+=vec[i4]*mat[i4][j4]*vec[j4];
    }
}
return res;
}

double complex rhototal(double y1[2],double y2[2],double t1){
//Se obtiene la rho total aqui y1=(y_1,y_2) y yp=(yp_1,yp_2)

```

```

double r1=0.1,a11=2.*cosh(r1),a22=2.*cosh(r1),a12=-2.*sinh(r1);
double complex l1[2][2],l2[2][2],l3[2][2],l4[2][2];
double complex ag[2][2]={{a11/4.+0.*I,-a12/4.+0.*I},{-a12/4.+0.*I,a22/4.+0.*I}};
double norm=pow((a11*a22-a12*a12),1./4.)/sqrt(2.*M_PI);
double complex expon[2][2],exponente,exponente1;

double complex psit,psitc;
double complex normt;

int i5,j5;
double complex aux[2][2],auxinv[2][2],l3inv[2][2];
double complex l113[2][2],l314[2][2],l3aux[2][2],l3t[2][2],tot[2][2];

llena_m(l1,l2,l3,l4,t1);
inversa(l3,l3inv);

l3t[0][0]=l3inv[0][0];
l3t[0][1]=l3inv[1][0];
l3t[1][0]=l3inv[0][1];
l3t[1][1]=l3inv[1][1];

mult_mat(l1,l3inv,l113);
mult_mat(l3inv,l4,l314);

for(i5=0;i5<2;i5++){
    for(j5=0;j5<2;j5++){
        aux[i5][j5]=ag[i5][j5]+(I/2.)*l113[i5][j5];
    }
}
inversa(aux,auxinv);

normt=-I*norm/(2.*sqrt((l3[0][0]*l3[1][1]-l3[0][1]*l3[1][0])*(aux[0][0]*aux[1][1]-aux[0][1]*aux[1][0])));
mult_mat(l3inv,auxinv,l3aux);
mult_mat(l3aux,l3t,tot);
for(i5=0;i5<2;i5++){
    for(j5=0;j5<2;j5++){
        expon[i5][j5]=(I/2.)*l314[i5][j5]+(1./4.)*tot[i5][j5];
    }
}

exponente=mul(y1,expon);
exponente1=mul(y2,expon);
psit=normt*cexp(-exponente);
psitc=conj(normt)*cexp(-conj(exponente1));
double complex resul;
resul=psit*psitc;

return resul;
}

```

```

int main(){
FILE *ar=fopen("neumann_comp.txt", "w");

gsl_complex aux;
gsl_matrix_complex *rhotc = gsl_matrix_complex_alloc (nt, nt);
gsl_vector *eig_val = gsl_vector_alloc (nt);
gsl_matrix_complex *eig_vec = gsl_matrix_complex_alloc (nt, nt);
gsl_eigen_hermv_workspace *w = gsl_eigen_hermv_alloc (nt);

double h1=2.*limx/nt,h2=2.*limx/nt;
printf("%lf %lf\n",h1,h2);
double t,y[2],yp[2],norma,tsallis,tr;

int i6,j6,k6;
int i7,j7,i8,j8,i9,j9;

for(t=0.01;t<=3.;t+=0.01){

for(i6=0;i6<nt;i6++){
for(j6=0;j6<nt;j6++){
rhot[i6][j6]=0.;
for(k6=0;k6<nt;k6++){

y[0]=-limx+h1*i6;
y[1]=-limx+h2*k6;
yp[0]=-limx+h1*j6;
yp[1]=-limx+h2*k6;

rhot[i6][j6]+=rhototal(y,yp,t)*h1*h2;
}}

for(i6=0;i6<nt;i6++){
for(j6=0;j6<nt;j6++){
aux=gsl_complex_rect(creal(rhot[i6][j6]),cimag(rhot[i6][j6]));
gsl_matrix_complex_set(rhotc, i6, j6, aux);

}}

gsl_eigen_hermv(rhotc, eig_val, eig_vec, w);

norma=0.;
tsallis=0.;
tr=0.;

for(i6=0;i6<nt;i6++){

```

```

tr+=rhot[i6][i6];
}

for(i6=0;i6<nt;i6++){
norma+=gsl_vector_get(eig_val,i6);
if(gsl_vector_get(eig_val,i6)>1.e-10){
tsallis+=-gsl_vector_get(eig_val,i6)*log(gsl_vector_get(eig_val,i6));
//printf("%lf %lf\n",gsl_vector_get(eig_val,i6),pow(gsl_vector_get(eig_val,i6),q1));
}
}

printf("%.10lf %.10lf\n",norma,tr);

fprintf(ar, "%lf %.10lf\n",t,tsallis);

}
fclose(ar);
return 0;
}

```

---

La negatividad logarítmica fue obtenida mediante el siguiente programa

---

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<complex.h>
#include<stdlib.h>
#include <gsl/gsl_math.h>
#include <gsl/gsl_eigen.h>
#include <gsl/gsl_complex.h>
#include <gsl/gsl_complex_math.h>
#include <gsl/gsl_matrix.h>
#include <gsl/gsl_linalg.h>
#include <gsl/gsl_cblas.h>

#define op 32
#define nt op*op

double complex rhot[nt][nt];

#define limx 6.
/*Las frecuencias y la constante de interacion*/
#define wa 1.
#define wb 3.
#define k1 2.
#define Om 9.
#define nu csqrt(Om*Om/4.-k1*k1)

#define f1a(t) ccos((Om/2.+wa)*t)*ccos(nu*t)+(Om/(2.*nu))*csin((Om/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define f1b(t) ccos((Om/2.+wb)*t)*ccos(nu*t)+(Om/(2.*nu))*csin((Om/2.+wb)*t)*csin(nu*t)
#define f2a(t) csin((Om/2.+wa)*t)*ccos(nu*t)-(Om/(2.*nu))*ccos((Om/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define f2b(t) csin((Om/2.+wb)*t)*ccos(nu*t)-(Om/(2.*nu))*ccos((Om/2.+wb)*t)*csin(nu*t)
#define f3a(t) -csin((Om/2.+wa)*t)*ccos(nu*t)+(Om/(2.*nu))*ccos((Om/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define f3b(t) -csin((Om/2.+wb)*t)*ccos(nu*t)+(Om/(2.*nu))*ccos((Om/2.+wb)*t)*csin(nu*t)

```

```

#define g1a(t) (k1/nu)*csin((0m/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define g1b(t) (k1/nu)*csin((0m/2.+wb)*t)*csin(nu*t)
#define g2a(t) (k1/nu)*ccos((0m/2.+wa)*t)*csin(nu*t)
#define g2b(t) (k1/nu)*ccos((0m/2.+wb)*t)*csin(nu*t)

void mult_mat(double complex x1[2][2],double complex x2[2][2],double complex res[2][2]){
//Esta subrutina multiplica dos matrices complejas de 2x2
int i1,j1,k11;
for(i1=0;i1<2;i1++){
    for(j1=0;j1<2;j1++){
        res[i1][j1]=0.+0.*I;
    }

for(i1=0;i1<2;i1++){
    for(j1=0;j1<2;j1++){
        for(k11=0;k11<2;k11++){
            res[i1][j1]+=x1[i1][k11]*x2[k11][j1];
        }
    }
}

}

void inversa(double complex x11[][2],double complex res1[][2]){
//Esta subrutina encuentra la inversa de una matriz compleja
// Define the dimension n of the matrix
// and the signum s (for LU decomposition)
int n = 2;
int s,i2,j2;
double real1,imag1;
double complex res;

// Define all the used matrices
gsl_matrix_complex *m = gsl_matrix_complex_alloc(n, n);
gsl_matrix_complex *inverse = gsl_matrix_complex_alloc(n, n);
gsl_permutation * perm = gsl_permutation_alloc(n);
gsl_complex aux11,aux22;
for(i2=0;i2<n;i2++){
    for(j2=0;j2<n;j2++){
        aux11=gsl_complex_rect(creal(x11[i2][j2]),cimag(x11[i2][j2]));
        gsl_matrix_complex_set(m,i2,j2,aux11);
    }
}

// Make LU decomposition of matrix m
gsl_linalg_complex_LU_decomp (m, perm, &s);

// Invert the matrix m
gsl_linalg_complex_LU_invert (m, perm, inverse);
for(i2=0;i2<n;i2++){
    for(j2=0;j2<n;j2++){

aux22=gsl_matrix_complex_get(inverse,i2,j2);
real1=gsl_complex_abs(aux22)*cos(gsl_complex_arg(aux22));

```

```

imag1=gsl_complex_abs(aux22)*sin(gsl_complex_arg(aux22));
res=real1+I*imag1;
res1[i2][j2]=res;
}
}

//Importante hay que liberar memoria antes de salir de la subrutina
gsl_matrix_complex_free (m);
gsl_matrix_complex_free (inverse);
gsl_permutation_free(perm);

}
void llena_m(double complex l11[2][2],double complex l21[2][2],double complex l31[2][2],double complex l41[2][2],double t1){
//Esta subrutina es para llenar las matrices lambda de los invariantes

l11[0][0]=f1a(t1);
l11[0][1]=g1b(t1);
l11[1][0]=g1a(t1);
l11[1][1]=f1b(t1);

l21[0][0]=f2a(t1);
l21[0][1]=-g2b(t1);
l21[1][0]=-g2a(t1);
l21[1][1]=f2b(t1);

l31[0][0]=f3a(t1);
l31[0][1]=-g2b(t1);
l31[1][0]=-g2a(t1);
l31[1][1]=f3b(t1);

l41[0][0]=f1a(t1);
l41[0][1]=-g1b(t1);
l41[1][0]=-g1a(t1);
l41[1][1]=f1b(t1);

}

double complex mul(double vec[2],double complex mat[2][2]){
//Esta subrutina obtiene el exponente de la funcion de onda completa
double complex res=0.+0.*I;
int i4,j4;
for(i4=0;i4<2;i4++){
    for(j4=0;j4<2;j4++){
res+=vec[i4]*mat[i4][j4]*vec[j4];
    }
}
return res;
}

double complex rhototal(double y1[2],double y2[2],double t1){
//Se obtiene la rho total aqui y1=(y_1,y_2) y yp=(yp_1,yp_2)

double r1=0.1,a11=2.*cosh(r1),a22=2.*cosh(r1),a12=-2.*sinh(r1);

```

```

double complex l1[2][2],l2[2][2],l3[2][2],l4[2][2];
double complex ag[2][2]={a11/4.+0.*I,-a12/4.+0.*I},{-a12/4.+0.*I,a22/4.+0.*I}};
double norm=pow((a11*a22-a12*a12),1./4.)/sqrt(2.*M_PI);
double complex expon[2][2],exponente,exponente1;

double complex psit,psitc;
double complex normt;

int i5,j5;
double complex aux[2][2],auxinv[2][2],l3inv[2][2];
double complex l113[2][2],l314[2][2],l3aux[2][2],l3t[2][2],tot[2][2];

llena_m(l1,l2,l3,l4,t1);
inversa(l3,l3inv);

l3t[0][0]=l3inv[0][0];
l3t[0][1]=l3inv[1][0];
l3t[1][0]=l3inv[0][1];
l3t[1][1]=l3inv[1][1];

mult_mat(l1,l3inv,l113);
mult_mat(l3inv,l4,l314);

for(i5=0;i5<2;i5++){
    for(j5=0;j5<2;j5++){
        aux[i5][j5]=ag[i5][j5]+(I/2.)*l113[i5][j5];
    }
}
inversa(aux,auxinv);

normt=-I*norm/(2.*sqrt((l3[0][0]*l3[1][1]-l3[0][1]*l3[1][0])*(aux[0][0]*aux[1][1]-aux[0][1]*aux[1][0])));
mult_mat(l3inv,auxinv,l3aux);
mult_mat(l3aux,l3t,tot);
for(i5=0;i5<2;i5++){
    for(j5=0;j5<2;j5++){
        expon[i5][j5]=(I/2.)*l314[i5][j5]+(1./4.)*tot[i5][j5];
    }
}

exponente=mul(y1,expon);
exponente1=mul(y2,expon);
psit=normt*cexp(-exponente);
psitc=conj(normt)*cexp(-conj(exponente1));
double complex resul;
resul=psit*psitc;

return resul;
}

```

```

int main(){
FILE *ar=fopen("nega_vacioc.txt","w");

gsl_complex aux1;
gsl_matrix_complex *rhotc = gsl_matrix_complex_alloc (nt, nt);
gsl_vector *eig_val = gsl_vector_alloc (nt);
gsl_matrix_complex *eig_vec = gsl_matrix_complex_alloc (nt, nt);
gsl_eigen_hermv_workspace *w = gsl_eigen_hermv_alloc (nt);

double h1=2.*limx/op,h2=2.*limx/op;
printf("%lf %lf\n",h1,h2);
double t,y[2],yp[2],norma,nega,tr;
double nega1,nega11,nega111;
double tr1,tr11,tr111;
int i6,j6,k6,l6;
int i7,j7,i8,j8,i9,j9;

for(t=0.01;t<=3.;t+=0.01){

for(i6=0;i6<op;i6++){
for(j6=0;j6<op;j6++){
for(k6=0;k6<op;k6++){
for(l6=0;l6<op;l6++){

y[0]=-limx+h1*k6;
y[1]=-limx+h2*j6;
yp[0]=-limx+h1*i6;
yp[1]=-limx+h2*l6;
rhot[i6*op+j6][k6*op+l6]=rhototal(y,yp,t)*h1*h2;
}}}}

for(i6=0;i6<nt;i6++){
for(j6=0;j6<nt;j6++){
aux1=gsl_complex_rect(creal(rhot[i6][j6]),cimag(rhot[i6][j6]));
gsl_matrix_complex_set(rhotc, i6, j6, aux1);
}}

gsl_eigen_hermv(rhotc, eig_val, eig_vec, w);

norma=0.;
nega=0.;
tr=0.;

for(i6=0;i6<nt;i6++){
tr+=rhot[i6][i6];
}

for(i6=0;i6<nt;i6++){
norma+=gsl_vector_get(eig_val,i6);
if(gsl_vector_get(eig_val,i6)<0.) nega+=fabs(gsl_vector_get(eig_val,i6));
}

printf("%.10lf %.10lf\n",norma,tr);

```



```
fprintf(ar, "%1f %101f %101f\n", t, nega, log2(2*nega+1.));  
  
}  
fclose(ar);  
return 0;  
}
```

---

# Bibliografía

- [1] I. A. Malkin, V. I. Man'ko y D. A. Trifonov, Phys. Rev. D, *Coherent States and Transition Probabilities in a Time-Dependent Electromagnetic Field* **2** 1371 (1970).
- [2] V. V. Dodonov y V. I. Man'ko, *Invariants and the evolution of nonstationary quantum systems*, Proceedings of the Lebedev Physical Institute, vol. 183, (Nova Science Publishers, New York, 1989).
- [3] V. V. Dodonov y V. I. Man'ko, (Eds.), *Theory of Nonclassical States of Light* (Taylor-Francis, London, 2003).
- [4] S. K. Suslov, Phys. Scr. *Dynamical invariants for variable quadratic Hamiltonians* **81** 055006 (2010).
- [5] O. Castaños, R. López-Peña, y V. I. Man'ko, J. Phys. A: Math. Gen. *Noether's theorem and time-dependent quantum invariants* **27** 1751 (1994).
- [6] R. P. Feynman, A. R. Hibbs y D. F. Styer, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (Dover publications, New York, 2010).
- [7] P. K. Rekdal y B. K. Skagerstam, Phys. Scr. *Quantum Dynamics of Non-Degenerate Parametric Amplification* **61** 296 (2000).
- [8] D. F. Walls y G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer, Berlin, 1995).
- [9] K. Takashima, N. Hatakenaka, S. Kurihara y A. Zeilinger, J. Phys. A: Math. Theor. *Nonstationary boundary effect for a quantum flux in superconducting nanocircuits* **41** 164036 (2008).
- [10] K. Takashima, S. Matsuo, T. Fujii, N. Hatakenaka, S. Kurihara, y A. Zeilinger, J. Phys.: Conf. Ser. *Squeezing of a quantum flux in a double rf-SQUID system* **150** 052260 (2009).
- [11] T. Fujii, S. Matsuo, N. Hatakenaka, S. Kurihara, y A. Zeilinger, Phys. Rev. B *Quantum circuit analog of the dynamical Casimir effect* **84** 174521 (2011).
- [12] A. Peres, Phys. Rev. Lett. *Separability Criterion for Density Matrices* **77**, 1413 (1996).
- [13] M. Horodecki, P. Horodecki y R. Horodecki, Physics Letters A *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions* **223** 1 (1996).
- [14] S. Mancini, V. I. Man'ko y P. Tombesi, Phys. Lett. A *Symplectic tomography as classical approach to quantum systems* **213** 1 (1996).
- [15] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* **47** 777 (1935).
- [16] E. Schrödinger, Die Naturwissenschaften *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik (The Present Status of Quantum Mechanics)* **23** 807; 823; 844 (1935).
- [17] J. S. Bell, Physics *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox* **1** 195 (1964).
- [18] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony y R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories* **23** 880 (1969).
- [19] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani y S. Wehner, Rev. Mod. Phys. *Bell nonlocality* **86** 419 (2014).
- [20] A. Aspect, P. Grangier y G. Roger, Phys. Rev. Lett. *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem* **47** 460 (1981).
- [21] O. Gühne, G. Tóth, Phys. Reports *Entanglement detection* **474** 1 (2009).

- [22] B. S. Cirelson, Lett. Math. Phys. *Quantum generalizations of Bell's inequality* **4** 93 (1980).
- [23] S. Popescu y D. Rohrlich, Found. Phys. *Quantum nonlocality as an axiom* **24** 379 (1994).
- [24] K. Banaszek y K. Wodkiewicz, Phys. Rev. Lett. *Testing Quantum Nonlocality in Phase Space* **82** 2009 (1999).
- [25] M. D'Angelo, A. Zavatta, V. Parigi y M. Bellini, Phys. Rev. A *Tomographic test of Bell's inequality for a time-delocalized single photon* **74** 052114 (2006).
- [26] V. N. Chernega y V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Res. *Qubit portrait of qudit states and Bell inequalities* **28** 103 (2007).
- [27] M. A. Nielsen, y I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, London, 2010).
- [28] A. Ibort, V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni y F. Ventriglia, Phys. Scr. *An introduction to the tomographic picture of quantum mechanics* **79** 065013 (2009).
- [29] S. N. Fillipov y V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Res. *Qubit portrait of the photon-number tomogram and separability of two-mode light states* **30** 55 (2009).
- [30] W. H. Louisell, A. Yariv y A. E. Siegman, Phys. Rev. *Quantum Fluctuations and Noise in Parametric Processes. I.* **124** 1646 (1961).
- [31] B. R. Mollow y R. J. Glauber, Phys. Rev. *Quantum Theory of Parametric Amplification. I* **160** 1076 (1967).
- [32] B. R. Mollow y R. J. Glauber, Phys. Rev. *Quantum Theory of Parametric Amplification. II* **160** 1097 (1967).
- [33] M. E. Marhic, *Fiber optical parametric amplifiers and related devices*, (Cambridge University Press, London, 2007).
- [34] M. Jamshidifar, A. Vedadi y M. E. Marhic, 2014 *Continuous-Wave Two-pump Fiber Optical Parametric Amplifier with 60 dB Gain*, in CLEO: 2014, OSA Technical Digest (online) (Optical Society of America, 2014), paper JW2A.21.
- [35] J. A. Levenson, I. Abram, Th. Rivera, y Ph. Grangier, J. Opt. Soc. Am. B *Reduction of quantum noise in optical parametric amplification* **10** 2233 (1993).
- [36] O. Castaños, R. López-Peña y V. I. Man'ko, J. Russ. Laser Res. *Crystallized schrödinger cat states* **16** 477 (1995).
- [37] O. Castaños, y J. López, Phys. Conf. Ser. *Dynamics of Schrödinger cat states* **380** 012017 (2012).
- [38] S. Spälter, N. Korolkova, F. König, A. Sizmann, y G. Leuchs, Phys. Rev. Lett. *Observation of Multimode Quantum Correlations in Fiber Optical Solitons* **81** 786 (1998).
- [39] V. Boyer, A. M. Marino, R. C. Pooser, y P. D. Lett, Science *Entangled images from four-wave mixing* **321** 544 (2008).
- [40] F. A. S. Barbosa, A. S. Coelho, K. N. Cassemiro, P. Nussenzeig, C. Fabre, M. Martinelli, y A. S. Villar, Phys. Rev. Lett. *Beyond Spectral Homodyne Detection: Complete Quantum Measurement of Spectral Modes of Light* **111** 200402 (2013).
- [41] A. Serafini, J. Eisert y M. M. Wolf, Phys. Rev. A *Multiplicativity of maximal output purities of Gaussian channels under Gaussian inputs* **71**, 012320 (2005).
- [42] F. Caruso y V. Giovannetti, Phys. Rev. A *Degradability of Bosonic Gaussian channels* **74** 062307 (2006).
- [43] F. Caruso, J. Eisert, V. Giovannetti y A. S. Holevo, New J. of Phys. *Multi-mode bosonic Gaussian channels* **10** 083030 (2008).
- [44] C. Weedbrook, S. Pirandola, R. García-Patrón, N. J. Cerf, T. C. Ralph, J. H. Shapiro y S. Lloyd, Rev. of Mod. Phys. *Gaussian quantum information* **84** (2012).
- [45] L. M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac y P. Zoller, Phys. Rev. Lett. *Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems*, **84** 2722 (2000).

- [46] R. Simon, Phys. Rev. Lett. *Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems*, **84** 2726 (2000).
- [47] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. (Princeton University Press, 1955).
- [48] G. Vidal y R. F. Werner, Phys. Rev. A *Computable measure of entanglement* **65** 032314 (2002).
- [49] A. V. Dodonov, V. V. Dodonov y S. S. Mizrahi, J. Phys. A: Math. Gen. *Separability dynamics of two-mode Gaussian states in parametric conversion and amplification*, **38** 683 (2005).
- [50] W. P. Bowen, R. Schnabel, y P. K. Lam, Phys. Rev. Lett. *Experimental Investigation of Criteria for Continuous Variable Entanglement* **90** 043601 (2003).
- [51] Y. Zhang, R. Okubo, M. Hirano, Y. Eto y T. Hirano, Scient. Rep. *Experimental realization of spatially separated entanglement with continuous variables using laser pulse trains* **5** 13029 (2015).
- [52] E. P. Wigner, Phys. Rev. *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium* **40** 749 (1932).
- [53] A. Serafini, F. Illuminati y S. De Siena, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. *Symplectic invariants, entropic measures and correlations of Gaussian states* **37** L21 (2004).
- [54] K. Vogel y H. Risken, Phys. Rev A *Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase* **40** 2847 (1989).
- [55] M. Bellini, A. S. Coelho, S. N. Filippov, V. I. Man'ko y A. Zavatta, Phys. Rev. A *Towards higher precision and operational use of optical homodyne tomograms* **85** 052129 (2012).
- [56] C. Lupo, V. I. Man'ko y G. Marmo, J. of Phys. A: Math. Gen. *Bell's inequalities in the tomographic representation* **39** 12515 (2006).
- [57] V. D'Auria, S. Fornaro, A. Porzio, S. Solimeno, S. Olivares y M. G. A. Paris, Phys. Rev. Lett *Full Characterization of Gaussian Bipartite Entangled States by a Single Homodyne Detector* **102** 020502 (2009).
- [58] M. Moshinsky y Y. F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Harwood Academic Publishers, Netherlands (1996).
- [59] V. V. Dodonov, I. A. Malkin y V. I. Manko, Int. Jour. of Theor. Phys. *Integrals of the motion, green functions, and coherent states of dynamical systems* **14** 37 (1975).
- [60] J. Wei y E. Norman, J. Math. Phys. *Lie Algebraic Solution of Linear Differential Equations* **4** 575 (1963).
- [61] A. M. Perelomov, Commun. Math. Phys. *Coherent states for arbitrary Lie group* **26** 222 (1972).
- [62] J. Huang y P. Kumar, Phys. Rev. Lett. *Observation of Quantum Frequency Conversion* **68** 2153 (1992).
- [63] R. V. Roussev, C. Langrock, J. R. Kurz y M. M. Fejer, Opt. Lett. *Periodically poled lithium niobate waveguide sum-frequency generator for efficient single-photon detection at communication wavelengths* **29** 1518 (2004).
- [64] M. A. Albota y F. N. C. Wong, Opt. Lett. *Efficient single-photon counting at 1.55  $\mu$ m by means of frequency upconversion* **29** 1449 (2004).
- [65] S. Tanzilli, W. Tittel, M. Halder, O. Alibart, P. Baldi, N. Gisin y H. Zbinden, Nature A *photonic quantum information interface* **437** 116 (2005).
- [66] M. T. Rakher, L. Ma, O. Slattery, X. Tang y K. Srinivasan, Nature photonics *Quantum transduction of telecommunicationsband single photons from a quantum dot by frequency upconversion* **4** 786 (2010).
- [67] J. S. Pelc, L. Ma, C. R. Phillips, Q. Zhang, C. Langrock, O. Slattery, X. Tang y M. M.

- Fejer, *Optics Express Long-wavelength-pumped upconversion single-photon detector at 1550 nm: performance and noise analysis* **19** 21445 (2011).
- [68] S. Ramelow, A. Fedrizzi, A. Poppe, N. K. Langford, y A. Zeilinger, *Phys. Rev. A Polarization-entanglement-conserving frequency conversion of photons* **85** 013845 (2012).
- [69] G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A, Entropy, the Wigner Distribution Function, and the Approach to Equilibrium of a System of Coupled Harmonic Oscillators* **3** 828 (1971).
- [70] V. V. Dodonov, I. A. Malkin y V. I. Man'ko *Physica Even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator* **72** 597 (1974).
- [71] V. V. Dodonov y V. I. Man'ko, *Proceedings of the Lebedev Physical Institute* **183** (Commack, NY: Nova Science) (1989).
- [72] B. Yurke y D. Stoler, *Phys. Rev. Lett. Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion* **57** 13 (1986).
- [73] A. Mecozzi y P. Tombesi, *Phys. Rev. Lett. Distinguishable quantum states generated via nonlinear birefringence* **58** 1055 (1987).
- [74] P. Tombesi y A. Mecozzi, *J. Opt. Soc. Am. B Generation of macroscopically distinguishable quantum states and detection by the squeezed-vacuum technique* **4** 1700 (1987).
- [75] J. Gea-Banacloche, *Phys. Rev. Lett. Collapse and revival of the state vector in the Jaynes-Cummings model: An example of state preparation by a quantum apparatus* **65** 3385 (1990).
- [76] V. Buzek y B. Hladky, *J. Mod. Opt. Macroscopic Superposition States of Light Via Two-photon Resonant Interaction of Atoms with Cavity Field* **40** 1309 (1993).
- [77] J. Gea-Banacloche, *Phys. Rev. A Atom- and field-state evolution in the Jaynes-Cummings model for large initial fields* **44** 5913 (1991).
- [78] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, (John Wiley & sons, Nueva York, 1998).
- [79] P. D. Drummond y M. D. Reid, *Phys. Rev. A Correlations in nondegenerate parametric oscillation. II. Below threshold results* **41** 3930 (1990).
- [80] Y. Fang y J. Jing, *New J. Phys. Quantum squeezing and entanglement from a two-mode phase-sensitive amplifier via four-wave mixing in rubidium vapor* **17** 023027 (2015).
- [81] G. Giedke, M. M. Wolf, O. Krüger, R. F. Werner y J. I. Cirac, *Phys. Rev. Lett. Entanglement of Formation for Symmetric Gaussian States* **91** 107901 (2003).
- [82] F. Hudelist, J. Kong, C. Liu, J. Jing, Z.Y. Ou y W. Zhang, *Nature Comm. Quantum metrology with parametric amplifier-based photon correlation interferometers* **5** 3049 (2014).
- [83] J. Zhang, C. Xie y K. Peng, *Phys. Lett. A Entanglement swapping using nondegenerate optical parametric amplifier* **299** 427 (2002).
- [84] M. D. Reid y P. D. Drummond, *Phys. Rev. Lett. Quantum correlations of phase in nondegenerate parametric oscillation* **60** , 2731 (1988).
- [85] K. N. Cassemiro, A. S. Villar, P. Valente, M. Martinelli y P. Nussenzveig, *J. of Phys.: Conf. Ser. Entanglement and quantum correlations in the optical parametric oscillator above threshold* **84** 012003 (2007).
- [86] A. S. Villar, K. N. Cassemiro, K. Dechoum, A. Z. Khoury, M. Martinelli y P. Nussenzveig, *J. Opt. Soc. Am. B Entanglement in the above-threshold optical parametric oscillator* **24** 249 (2007).
- [87] J. Jing, J. Zhang, Y. Yan, F. Zhao, C. Xie y K. Peng, *Phys. Rev. Lett. Experimental Demonstration of Tripartite Entanglement and Controlled Dense Coding for Continuous Variables* **90** 167903 (2003).
- [88] N. Takei, H. Yonezawa, T. Aoki y A. Furusawa, *Phys. Rev. Lett. High-Fidelity Teleportation beyond the No-Cloning Limit and Entanglement Swapping for Continuous Variables* **94** 220502 (2005).
- [89] A. Isar, *Open Sys. Inf. Dynamics, Quantum Entanglement and Quantum Discord of Two-Mode Gaussian States in a Thermal Environment* **18** 175 (2011).

- [90] A. Isar, Phys. Scr. *Entanglement dynamics of two-mode Gaussian systems in a two-reservoir model* **T160** 014019 (2014).
- [91] O. Castaños, R. López-Peña, M. Man'ko, y V. I. Man'ko, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. *Nonstationary linear spin systems in the probability representation* **5** 227 (2003).
- [92] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan y F. Zaccaria, Phys. Lett. A *Positive maps of density matrix and a tomographic criterion of entanglement* **327** 353 (2004).
- [93] A. O. Niskanen, K. Harrabi, F. Yoshihara, Y. Nakamura, S. Lloyd, y J. S. Tsai, Science *Quantum Coherent Tunable Coupling of Superconducting Qubits* **316** 723 (2007).
- [94] M. Ansmann, H. Wang, R. C. Bialczak, M. Hofheinz, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O'Connell, D. Sank, M. Weides, J. Wenner, A. N. Cleland, y J. M. Martinis, Nature Lett. *Violation of Bell's inequality in Josephson phase qubits* **461** 504 (2009).
- [95] V. V. Dodonov y V. I. Man'ko, Phys. Lett. A *Positive distribution description for spin states* **229** 335 (1997).