UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTADISTICA I PARA LA LICENCIATURA DE ACTUARIA EN LÍNEA (SEGUNDA PARTE: INTERVALOS DE CONFIANZA Y PRUEBAS DE HIPÓTESIS)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A :

NOELIA RAMOS CASARRUBIAS

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. MARIA DEL PILAR ALONSO REYES

2016

Ciudad Universitaria, CDMX

AGRADECIMIENTOS

Primero que nada quiero darles las gracias a mis padres Josefina Casarrubias Ramírez y Noel Ramos Jiménez, gracias por todo, no tengo palabras que basten. Por toda su comprensión apoyo y cariño incondicional por siempre. Chopis muchas gracias por apoyarme en todo, creer en mi, tenerme tanta paciencia, motivarme a siempre superarme, y saber que todo es posible . Papá muchas gracias por mostrarme este maravilloso mundo de las matemáticas, por tus consejos y enseñanzas, por todo una vida de constante aprendizaje, por el motivarme al querer saber más, por tu fortaleza no solo inculcada si no mostrada. Gracias a ustedes soy lo que soy. Aún falta camino, pero lo importante es no dejar de avanzar.

Marysol gracias por apoyarme y ser mi amiga, sin tu presión que hubiera hecho jaja. Fuiste un ejemplo para ponerle muchas ganas y no darme por vencida, te admiro y quiero mucho hermanita.

Nardis, gracias por entenderme, apoyarme y estar conmigo, motivarme y ser una inspiración para superarme.

Mama Mary muchas gracias por enseñarnos que siempre hay que seguir adelante, pase lo que pase, seguir luchando y no darse por vencido tan fácilmente.

A mis tíos, primas, sobrina, por apoyarnos en todo y siempre pasar buenos momentos juntos.

Muchas gracias a mi tutora Dra. María del Pilar Alonso Reyes por toda su paciencia y apoyo para la realización de esta tesis, por el tiempo dedicado y consejos.

A mis amigos y amigas que siempre me entendieron y echaron porras para terminarla: Nardis, Nelliux, Lau, Ken, Kari, Cinthya, Eli, Memis, Rodris, Rafita. Quique esto va por los dos.

Gracias a todos por estar siempre conmigo los quiero inmensamente.

INDICE

Figuras

ESTADISTICA I PARA LA LICENCIATURA DE ACTUARIA EN LINEA

Introducción

El mundo experimenta cambios en diversos contextos, políticos, económicos y sociales. Es por ello que resulta indispensable ofrecer innovaciones en los programas educativos para poder enfrentar las nuevas necesidades pedagógicas, que proporcionen nuevas tecnologías, formas de interacción, culturas de aprendizaje, capaces de otorgar calidad educativa, complementando a los sistemas ya existentes y abarcando mayores sectores de la población. En la actualidad resulta insuficiente la cobertura por parte de los sistemas tradicionales de educación (entendiéndose por éstos aquellos en los cuales la enseñanza es realizada de manera presencial), particularmente en este trabajo se hace referencia a la educación superior, es el caso de universidades públicas, en donde existe una gran demanda de ingreso que ocasiona que muchos jóvenes queden fuera o bien que los profesores enfrenten grupos masivos logrando un detrimento en la calidad de la enseñanza. Así explorar nuevas formas de educación, tales como la educación abierta y educación a distancia constituyen una opción para los estudiantes.

A través del presente trabajo se pretende proporcionar un material de apoyo a los estudiantes de la carrera de actuaría en línea que será impartida a través del sistema universidad abierta y educación a distancia (SUAyED) incorporada a la UNAM. Dicho material consta de dos partes, la primera correspondiente a estadística descriptiva y estimación puntual, y la segunda concerniente a intervalos de confianza y pruebas de hipótesis, misma que será expuesta en el presente trabajo.

Una herramienta que contribuye para poder hacer frente a las necesidades educativas son las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC`s), dentro de las cuales se encuentran: correo electrónico, disco compacto, enseñanza asistida por computadora, audio conferencias, video conferencias, acceso a internet principalmente. A partir de dichas TIC`s es posible generar nuevos programas que complementen la educación a un nivel particular revolucionando los métodos de enseñanza-aprendizaje es decir, haciendo uso del creciente avance tecnológico y canalizándolo se podrá llevar la educación a un mayor número de estudiantes con diferentes condiciones, capaz de adaptarlo a las necesidades que cada uno de éstos pudiera llegar a tener.

CAPÍTULO I: Breve génesis histórica de la educación en México.

Introducción

Tanto la educación en línea como a distancia son dos vías mediante las cuales se puede llevar la formación escolar a una mayor cantidad de la población. El continuo desarrollo de los medios tecnológicos hacen posible dicha función, permitiendo que los problemas que enfrenta la enseñanza tradicional, tales como la amplia diferencia que existe entre la oferta-demanda respecto al acceso al sistema educativo, así como la falta de recursos económicos por parte de las universidades para ampliar la cobertura, jóvenes-adultos que estudian y trabajan al mismo tiempo, resultando complicado adecuarse a un horario establecido, amas de casa que al igual que los jóvenes-adultos que trabajan no cuentan con la posibilidad de asistir a una aula de clases, debido a las labores que tienen en el hogar, contando con tiempos mixtos para poder estudiar. Otro sector son las personas que viven en áreas rurales, las cuales la distancia en que se encuentran sus hogares de la instalación donde se imparten las clases resulta poco accesible, dificultando la asistencia a cursos presenciales por el tiempo de traslado de los estudiantes hacia la institución, aquellos poblados que cuentan con pocos centros de enseñanza.

Es a partir de estas dificultades que surgen nuevas modalidades como son la educación en línea y a distancia, las cuales buscan al igual que la enseñanza tradicional, calidad y eficiencia.

1.1. Educación

La educación representa una columna importante para el desarrollo de la sociedad, ya que es a través de ella que se ven reflejados los cambios políticos, económicos y sociales que afectan o contribuyen al bienestar de una comunidad.

La educación ha estado siempre presente en México, desde la época prehispánica en donde existían escuelas para los infantes, en las cuales había una marcada diferencia de clases, los plebeyos acudían a escuelas llamadas telpochcalli donde recibían entrenamiento militar para ser los futuros guerreros; mientras que los nobles asistían al calmecac donde se les preparaba para ocupar los más altos cargos del gobierno. Por su parte las mujeres generalmente eran educadas en el hogar. Algunas civilizaciones como la maya, designaba cargos públicos a ellas.

Durante la época de la conquista, por intereses políticos y de gobierno, un objetivo en cuestión de educación fue la enseñanza del cristianismo, del cual se encargaba la iglesia. Los evangelizadores usaron como recurso de enseñanza imágenes, que en ocasiones iban acompañadas de texto en lengua indígena para una mayor comprensión.

Un segundo paso fue la castellanización de la población indígena[1], para ello se establecieron colegios donde se enseñaba a leer y a escribir así como la implementación en algunos talleres para artes y oficios, sin embargo, el surgimiento de los artesanos prospero con la enseñanza de los artesanos procedentes de los reinos de castilla a indígenas y mestizos en diferentes artes y oficios, lo que trajo como consecuencia la preparación de zapateros, boneteros, veleros, herreros, carpinteros, talabarteros entre otros.

En el México colonial la organización de los estudios fue de lo complejo a lo básico, es decir, se comenzó con la universidad, dejando al final la reglamentación de la educación elemental. En las principales ciudades del virreinato los jesuitas tenían numerosos colegios y había maestros que enseñaban a leer y escribir, los cuales provenían de España asentándose en tierras mexicanas. La llegada de españoles a América generó una apertura con España, y ante la alta demanda de estudiantes en los colegios, éstos iniciaron las clases privadas a cambio de una pequeña cantidad de dinero.

Las universidades fueron las primeras instituciones reglamentadas en México, se comenzó con la enseñanza de las humanidades y las artes. Con el paso del tiempo llegaron nuevas formas de enseñanza en estudios de matemáticas, dibujo, lenguas modernas, griego, física, medicina, química, historia y geografía, que acompañado del periodo de la ilustración, la enseñanza fue considerada como una manera de promover el progreso en las virtudes, las ciencias y las artes, haciéndolas más accesibles para la población en general.

En el siglo XVII es cuando inician una serie de modificaciones de alto impacto en materia educativa, tal como la separación de la iglesia a través del artículo 3º (Constitución de 1857), se establece la Escuela Nacional Preparatoria, escuelas mixtas. En esta etapa hay un mayor crecimiento económico y poblacional, lo cual hace insuficiente la cantidad de escuelas establecidas en el territorio. El país empieza a utilizar técnicas pedagógicas de otros naciones, tales como el positivismo cuyo lema principal era libertad, orden y progreso, traída por Gabino Barreda el cual había escuchado en una conferencia en París, otro ejemplo proviene del suizo Enrique Rebsamen, quien promovió que en proceso de enseñanza se clasificaran a los alumnos por edades, sin embargo fue hasta 1888 a través de la Ley de Instrucción Obligatoria la cual establecía las edades de enseñanza elemental entre los 6 y los 12 años de edad[2].

En los primeros años de Independencia, una meta a lograr era la alfabetización de todos los jóvenes, es por eso que incrementa la apertura de escuelas y de universidades, así como equipamiento de éstas con bibliotecas y laboratorios, sin embargo dichas medidas no fueron

[1] La castellanización inicialmente estaba dirigida sólo para hombres, sin embargo a partir del siglo XVIII se considera conveniente que las mujeres fueron acreedoras también de determinados conocimientos.

[2] Tank de Estrada Dorothy. Historia Mínima de la Educación en México. México D.F. Colmex, págs. 136-137.

realizadas como se pretendía. Otro objetivo era el aumentar la matrícula de maestros mejor capacitados, por lo que se crearon nuevas escuelas normales, a pesar de las dificultades que la guerra tuvo para el país, debido a los destrozos y de la utilización de instalaciones para la guerra entre otros.

Durante el Porfiriato se trató de impulsar la modernidad del país, promoviendo nuevas carreras y profesiones, siendo en su mayoría técnicas. Este período dejó entre sus legados la búsqueda de métodos liberadores, de una educación laica, gratuita y obligatoria que sirvió de punto de partida de los gobiernos revolucionarios para poner en marcha un programa educativo universal y unificador[3]. Durante este periodo el número de escuelas privadas se incrementó en casi el doble, también hubo un aumento en el número de preparatorias alrededor de la república.

Después de la Revolución la población se duplicó creándose una explosión demográfica, lo cual acentúo las deficiencias en todos los campos, faltaba planeación, dirección y programas adaptados al auge industrial. Se tuvo que aumentar los servicios educativos a todos los niveles y estratos sociales.

En el siglo XX son consolidadas muchas de las instituciones que rigen en la actualidad, tales como la Secretaría de Educación Pública cuyo surgimiento fue en 1921, la secundaria surge en 1925. La educación a través del artículo 3º constitucional quedó establecida como laica y gratuita, mientras que por el artículo 31 la establece obligatoria.

La Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y el Instituto Politécnico Nacional (IPN) fueron los pilares de la educación superior, la UNAM tiene sus antecedentes con la Real y Pontificia Universidad de México, que posteriormente se convirtió en la Universidad Nacional de México el 22 de septiembre de 1910, la cual adquiere se autonomía después de una huelga estudiantil que duró del 6 de mayo al 10 de junio de 1929, es desde entonces que su nombre oficial es Universidad Nacional Autónoma de México. Por ese tiempo el crecimiento de la población había obligado al gobierno a mantener los servicios educativos en expansión y crear la telesecundaria, así como escuelas técnicas. La creación del IPN fue fundado en 1936 durante el gobierno de Lázaro Cárdenas brindando alternativas educativas para la población de estudiantes en México, e impulsar y cubrir las necesidades del país creando carreras en las diferentes ramas de la ingeniería que tanto requería el país para apoyar el proyecto de industrialización.

En 1970 se nombra como responsable de la Secretaria de Educación Pública (SEP) al ingeniero Bravo Ahuja. Una de sus primeras modificaciones fue la organización de la SEP en cuatro subsecretarías:

- Enseñanza primaria y normal

[3] Tank de Estrada Dorothy. <u>Historia Mínima de la Educación en México</u>. México D.F. Colmex, pág. 153

- Media técnica y superior
- Cultura popular y educación extraescolar
- Coordinación educativa

También promovió el reconocimiento de la educación a distancia promovida e impartida por la UNAM, posteriormente ante la creciente demanda de educación media y superior fundaron el Colegio de Ciencias y Humanidades, el cual fue aprobado por el Consejo Universitario de la UNAM el 26 de enero de 1971, durante el rectorado de Pablo González Casanova, quien lo consideró como: la creación de un motor permanente de innovación de la enseñanza universitaria y nacional

Durante el sexenio del presidente Ernesto Zedillo se anunció que la educación básica obligatoria comprendería preescolar, primaria y secundaria. Esta última adquiere obligatoriedad por mandato constitucional en julio de 1993, y el bachillerato en el 2012.

Para favorecer las zonas marginadas se iniciaron programas de enseñanza a distancia (telebachillerato) y se ampliaron las becas al bachillerato e incluyeron un servicio de transporte[4].

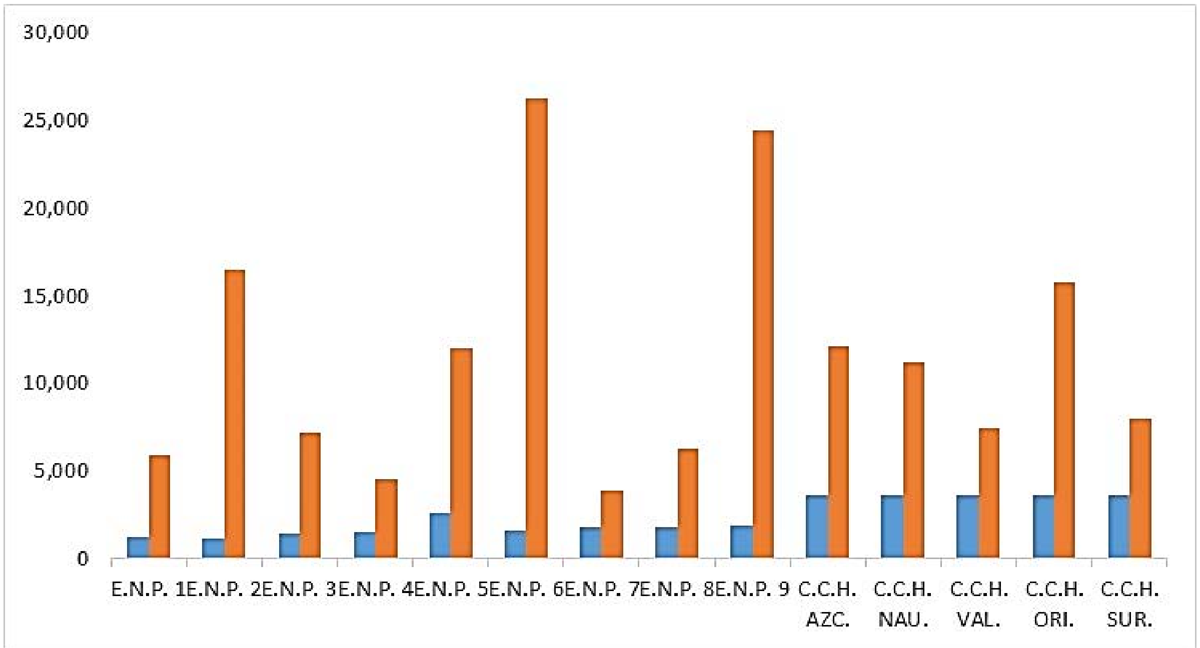
Sin embargo, en los últimos años la demanda de estudiantes supera la oferta educativa disponible en el país notando una prevaleciente desigualdad existente para el acceso a la educación. Dicha brecha aumenta a medida que incrementa el nivel educativo (tan solo a nivel universitario 3 o 4 jóvenes de cada 10 ingresan a la universidad[5]).

En la gráfica siguiente se aprecia el número de lugares disponibles para ingresar a nivel preparatoria (barras azules), así como el número de aspirantes que concursaron por cada lugar disponible en la licenciatura en la UNAM (barras rojas). Para el caso del ingreso a la licenciatura se toman en cuenta únicamente las carreras impartidas en ciudad universitaria con mayor número de aspirantes que concursaron por cada lugar disponible).

[4] Tank de Estrada Dorothy. Historia Mínima de la Educación en México. México D.F. Colmex, pág. 236

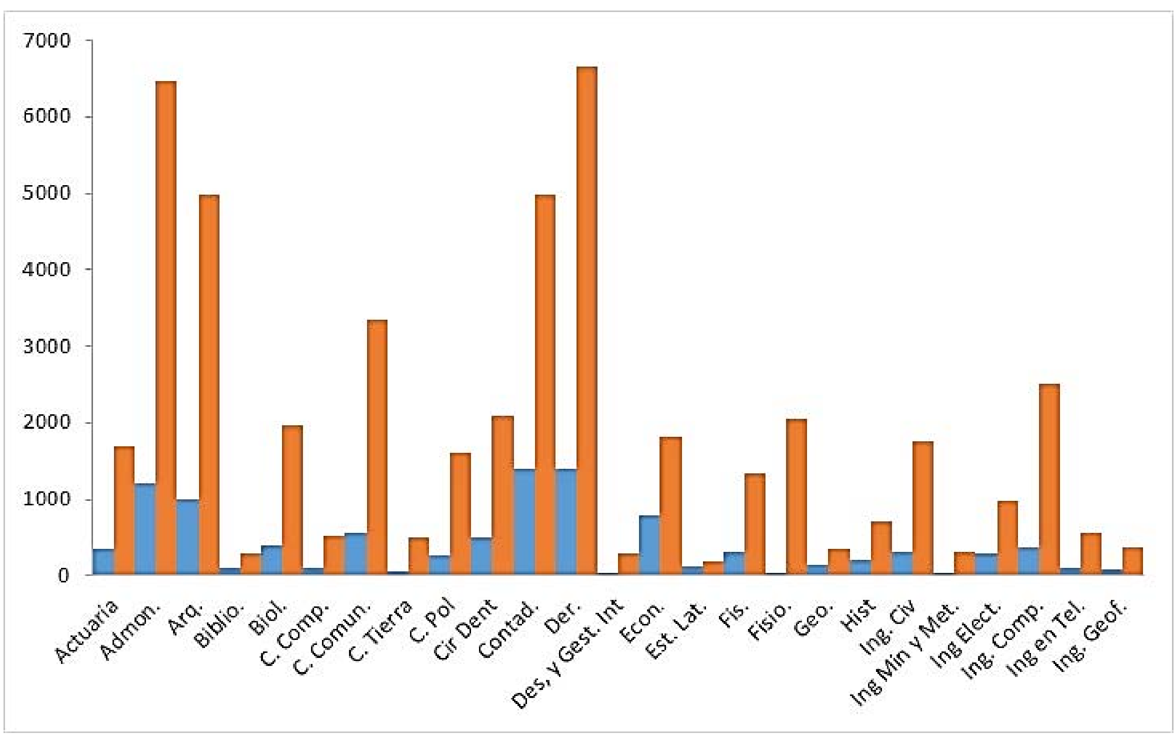
[5] Periódico La Jornada 11 de agosto del 2014, "Las universidades deben ampliar cobertura y calidad" Emir Olivares Alonso, Política, pág 10.

Figura 1. Resultados de concurso de selecciòn para ingreso a Bachillerato 2014 UNAM.



Elaboración propia a partir de DGAE UNAM. "Como ingresar a la UNAM". Ejemplar 2014

Figura 2. Carreras con mayor número de estudiantes que concursaron por los lugares disponibles en la UNAM.



Elaboración propia a partir de DGAE UNAM. "Como ingresar a la UNAM". Ejemplar 2014

Como se observa la demanda supera por mucho la oferta, quedando un gran número de estudiantes sin la oportunidad de cursar alguna carrera impartida por la UNAM. Es por eso que resulta necesario ampliar la gama de posibilidades existentes para un mayor acceso a la educación, sea cual fuese el grado.

Hoy en día se cuentan con diversas formas educativas tales como la educación tradicional, aquella en la que se da el intercambio de conocimientos entre alumnos y maestros de manera presencial en un aula de aprendizaje en la cual son utilizados diferentes mecanismos de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, se ve que la educación ha experimentado modificaciones en sus versiones como respuesta a los cambios y necesidades presentadas a través del tiempo.

1.2. Educación abierta y a distancia

Como se ha referido, la educación convencional presenta una serie de dificultades para los estudiantes, tales son los casos como la distancia, debido a que se encuentran en zonas rurales o muy alejadas del lugar donde se imparten las clases, al igual que aquellos adultos o adolescentes que por motivos de trabajo o cuestiones familiares o económicas no cuentan con disponibilidad de horario, es por eso que una de las alternativas que se propone para ampliar las oportunidades educativas es la educación abierta, a distancia o en línea. El objetivo de la formación a distancia es superar las barreras existentes entre el alumno y el maestro utilizando los medios alternos, tales como el uso de tecnologías, que puedan ayudar a combatir dichas necesidades.

Bates (1999)[6] define a la formación abierta y a distancia de la siguiente manera: La enseñanza abierta es principalmente una meta, o una política educativa: la provisión de enseñanza de una manera flexible, construida alrededor de las limitaciones geográficas, sociales y de tiempo de cada estudiante, en lugar de aquéllas de una institución educativa. La educación a distancia es un medio para ese propósito: es una forma mediante la cual los estudiantes pueden aprender de manera flexible, lejos del autor, del material pedagógico, pueden estudiar según su tiempo disponible, en el lugar de su elección (casa, trabajo o centro de aprendizaje) y sin contacto personal con el profesor.

La enseñanza abierta puede incluir a la educación a distancia, o depender de otras formas flexibles de enseñanza.

Una de las características de la modalidad abierta y a distancia es que requiere el estudio independiente por parte del estudiante, que no asiste de manera constante a las instalaciones. Requiriendo de actualizaciones tanto del material didáctico como del personal docente a su

[6] Bates, A.W. México, La tecnología en la enseñanza abierta y la educación a distancia Trillas, 1999

cargo. Otra parte fundamental en la educación abierta es la relación asesor-tutor-guía, en la cual se buscan mejores opciones para el buen desempeño académico.

El sistema de aprendizaje abierto y a distancia se compone principalmente por:

- Misión y objetivo de un sistema particular
- Programas de estudio
- Técnicas y estrategias de aprendizaje y enseñanza
- Material educativo y de referencia
- Comunicación e interacción
- Sistemas de apoyo y estrategias de información
- Alumnos, tutores, docentes y otros expertos
- Equipamiento e infraestructura
- Evaluación
- Personal de dirección y administración

Dichos componentes deben de funcionar en conjunto para poder ofrecer las herramientas y materiales que puedan satisfacer las necesidades de los estudiantes. El alumno, tutor, docentes y demás deben compartir responsabilidades asumiendo cada uno su papel.

En esta modalidad se han presentado diferentes avances y opciones existentes para los estudiantes, principalmente al desarrollo de diferentes tecnologías que hacen posible el diverso material. Su evolución es notoria, y ha ido desde el uso de correspondencia como forma de educación, hasta el uso del internet, que permite una comunicación entre el alumno y el profesor sin necesidad de estar en el mismo lugar

En la educación abierta se tiene la opción de que el alumno reciba asesoría programada, ya sea por medio de las tecnologías o de manera presencial en las instalaciones, mientras que en el sistema a distancia se prevé el diseño de materiales que faciliten el estudio

Así como la instrucción abierta puede incluir a la formación a distancia, también se encuentra la educación en línea que será abarcada en el siguiente subtema.

1.3. Educación en línea

La educación en línea hace referencia al desarrollo de programas de información cuya base es la Tecnología de la Información y la Comunicación (TIC). Con ayuda de dichas tecnologías se pretende proporcionar el aprendizaje de una manera más flexible, apoyándose en materiales multimedia, internet, plataformas virtuales, audio conferencias, libros en línea, entre otros. Esta modalidad permite la opción de que el aprendizaje sea asistido o apoyado por medios electrónicos, es decir que la formación sea totalmente a través de medios electrónicos o se tenga la alternativa de acudir esporádicamente a las instalaciones, y el material electrónico complemente la formación, siendo más flexible que la educación tradicional.

Dentro de las ventajas se encuentran que el alumno puede definir sus horarios, eliminando las limitantes de tiempo y espacio.

De acuerdo a McIsaac y Gunawardena[7] (1996) los principales factores que se tienen que considerar para la adopción y uso de tecnologías orientadas a la educación en línea son:

a) transmisión y acceso
b) control
c) interacción
d) características simbólicas del medio
e) presencia social creada a través del medio
f) la interfaz entre el usuario y la máquina.

Si bien es cierto, este tipo de educación requiere de un aprendizaje autónomo por parte del estudiante, también resulta necesaria otro tipo de relaciones o interacciones que resulte fundamentales y complementen el proceso de aprendizaje, se señalan 4 tipos de interacción:

1) *Interacción estudiante-profesor,* la misma proporciona motivación, retroalimentación, diálogo y orientación personalizada al estudiante.
2) *Interacción estudiante-contenido,* la cual permite el acceso a los contenidos instruccionales, a la materia de estudio.
3) I*nteracción estudiante-estudiante*, donde se facilita el intercambio de información, ideas, aspectos de motivación, ayuda no jerarquizada.
4) Finalmente, la *interacción estudiante-tecnología,* interfaz comunicativa, referida a la comunicación entre los participantes del proceso formativo y el acceso de éstos a información relevante a través de la tecnología computacional.

La relación que genera un mayor impacto es estudiante-interfaz ya que a través de ésta es posible llevar a cabo la educación en línea. Junto con la combinación del contenido son los que dan la pauta para la aceptación de la modalidad. A diferencia de la educación tradicional donde la percepción del curso es a través de la interacción personal, en la educación en línea el grado de percepción depende del funcionamiento global ofrecido por el sistema. Factores importantes para la educación en línea son los programas de cómputo y el equipo de sistema.

---

[7] Dra. Marina Stock McIsaac es profesor de medios de computación y comunicación educativa en la Universidad Estatal de Arizona. Ella ha sido dos veces galardonada con el premio Fulbright Senior Scholar.
Dr. Charlotte Nirmalani Gunawardena es investigador para trabajar en la educación a distancia en la Universidad de Anadoulu , Turquía. Es profesor asociado de programas innovadores de la Universidades de Nuevo México donde se especializa en la educación a distancia.

Dentro de las herramientas que son más utilizadas para la educación en línea se encuentran los sistemas de administración de aprendizaje o LMS, por sus siglas en inglés (learning management system). El LMS un software utilizado para administrar, distribuir y controlar las actividades de formación no presencial. Dicho programa provee módulos para el proceso administrativo y de seguimiento que son requeridos para un sistema de enseñanza, simplificando el control. Los módulos administrativos permiten, por ejemplo, configurar cursos a un alumno llevar informes de progresos y calificaciones, facilitan el aprendizaje distribuido y colaborativo a partir de actividades y contenidos pre elaborados, de forma síncrona y asíncrona, y utilizando los servicios de comunicación de internet como el correo, los foros, las videoconferencias o el chat[8]. Lo que permite un seguimiento de las lecciones, actividades, tareas y demás ejercicios realizados por el estudiante, así como la comunicación con el profesor y con otros alumnos.

1.4. Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia (SUAyED)

Como parte de los proyectos de sistemas de universidad abierta surge el Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia (SUAyED) creado e impartido por la UNAM, el cual busca beneficiar y apoyar a facultades y escuelas mediante la incorporación de tecnologías de la información y comunicación a través de las diferentes licenciaturas, cursos, posgrados, especializaciones entre otros que son impartidas en este portal extendiendo la educación a mayores sectores de la población. Dicho sistema ofrece la oportunidad de cursar el bachillerato, 19 licenciaturas, 2 especializaciones y 2 maestrías en la modalidad a distancia.

El SUAyED viene a disminuir la brecha existente por las limitaciones geográficas, por edad, sexo, entre otras, ya que con ella se ofrece una oportunidad alternativa para que las personas que tenían limitaciones para poder optar por un título universitario ahora puedan cubrir los requisitos. “el Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia de la UNAM está destinado a extender la educación media superior y superior hacia grandes sectores de la población, por medio de métodos teórico-prácticos de transmisión y evaluación de conocimientos y de la creación de grupos de aprendizaje que trabajan dentro o fuera de los planteles universitarios e impulsar la integración de las tecnologías de la información y comunicación a los procesos educativos”[9].

Las modalidades que son ofrecidas son Educación abierta y educación a distancia. La educación abierta permite una flexibilidad en el sentido que combina la educación tradicional con la distancia, es decir, requiere determinadas clases presenciales (escenarios diversos), mientras que la educación a distancia permite interacción mediante un medio electrónico.

8

9 http://suayed.unam.mx/que_es.php.

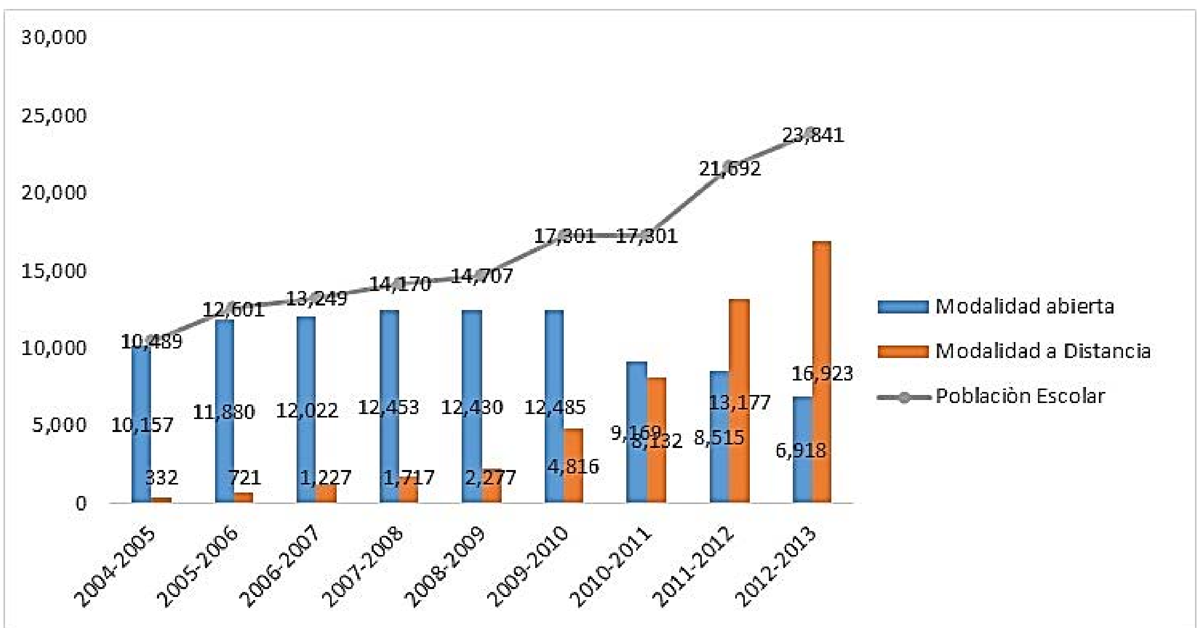
En el SUAyED se incorpora a los profesores en el uso de tic a través de una estrategia de apropiación tecnológica, donde son los profesores los que generan contenidos y operan las herramientas de cómputo.

El SUAyED es un sistema flexible, que permite a los estudiantes la opción de apoyo con asesorías presenciales o a distancia, según el plan de estudios que se trate. Otro aspecto a considerar es el desarrollo de materiales didácticos, los cuales tienen como objetivo el fomentar el aprendizaje, siendo un apoyo técnico para el alumno. Dichos materiales pueden ser impresos o electrónicos, y son complementados con otros medios, como correo electrónico, videoconferencias, entre otros, buscando que la enseñanza no esté en función de una sola variable, y así el estudiante tenga una lista de posibilidades para adquirir conocimiento, eligiendo la opción que mas se adecue a sus necesidades

En la modalidad abierta se ofrecen 22 licenciaturas en ocho facultades y una escuela, así como cuatro especializaciones en una facultad. En la modalidad a distancia se ofertan un bachillerato, 20 licenciaturas y cuatro doctorados.

En la siguiente gráfica se muestra cómo ha ido incrementando la población estudiantil del 2004 al 2013, representando un acierto para la modalidad, generando esperanza y ayudando a ampliar la cobertura de la población que tiene acceso a la educación.

Figura 3. Trayectoria de la matrícula en el SUAyED



Fuente: SUAyED

Siendo el SAUyED una nueva modalidad de aprendizaje, combinando la educación tradicional con la educación abierta y a distancia; generando educación de vanguardia, adaptándose a las nuevas tecnologías con el fin de proporcionar educación de calidad que pueda satisfacer las crecientes necesidades de la población estudiantil, tomando como base los siguientes principios: flexibilidad, adaptabilidad, innovación, interacción e interactividad, docencia distribuida, corresponsabilidad, evaluación continua, humanismo y sostenibilidad; que llevado a cabo de manera conjunta podrán cumplir con los objetivos establecidos.

Una tendencia reciente en educación superior es crear y proporcionar acceso en línea a los materiales de los cursos, como un mecanismo para mejorar el desempeño del estudiante adscrito a una universidad convencional o presencial (Concannon, Flynn y Campbell, 2005); fortaleciendo el proceso de aprendizaje, brindando una opción alternativa y hasta complementaria a los estudiantes de diversas áreas, facilitando el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por lo que con el presente trabajo se pretende brindar a los estudiantes que cursan la educación en línea de la carrera de Actuaría particularmente en la asignatura de estadística una herramienta que sirva

Un desafío particular para la educación en línea son las matemáticas, en particular se enfatizará en la estadística, las cual es un conjunto de conocimientos en evolución continua, que si bien no resultan de fácil comprensión, hay un interés constante para la optimización de la captura de dicho conocimiento por parte de los estudiantes. En el presente trabajo se proporciona un apoyo para el aprendizaje de la estadística en línea, particularmente en la parte de intervalos de confianza y pruebas de hipótesis, que serán explicados en los siguientes capítulos.

Capítulo II.-Intervalos de Confianza y Probabilidad

Introducción

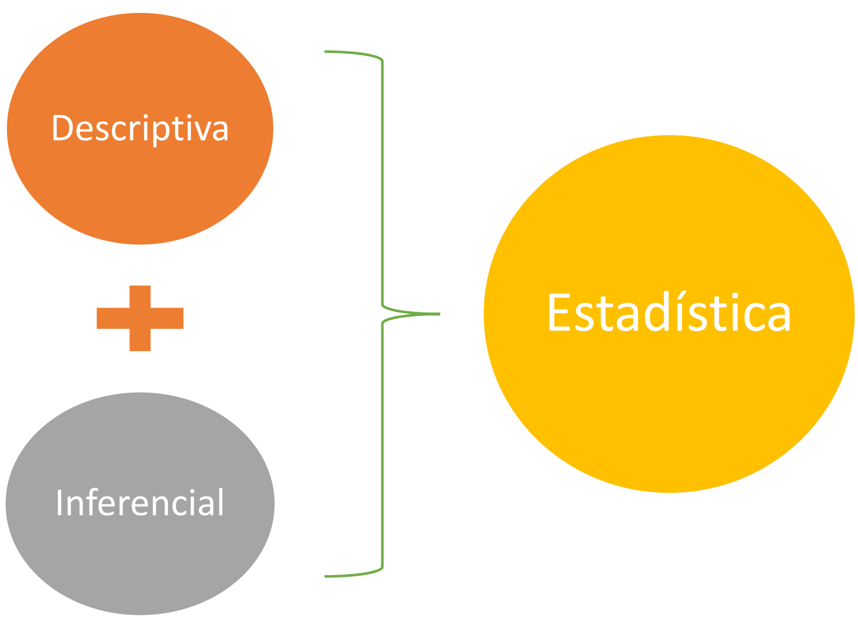
Una pregunta que resulta básica para empezar el tema es: ¿qué es la estadística? Siendo ésta la base para el desarrollo de los futuros temas. Para ello, se enunciarán algunas definiciones:

- "La estadística está ligada con los métodos científicos en la toma, organización, recopilación, presentación y análisis de datos, tanto para la deducción de conclusiones como para tomar decisiones razonables de acuerdo con tales análisis[10]"
- "La ciencia de la estadística trata de la toma de decisiones basada en datos observados en presencia de incertidumbre"[11]

Así la estadística hace referencia a números que pueden ser datos, variables, poblaciones y demás de los cuales se pretende obtener información a través de su análisis; sin embargo suele ser poco palpable el manejo de éstos, debido a la gran cantidad de ellos, siendo la estadística el principal medio para su manejo, interpretación que ayuden a poder tomar decisiones que sean consideradas más viables.

La estadística se divide principalmente en dos ramas, como se señala en la figura 4:

Figura 4. Principales ramas de la estadística



Fuente: Elaboración propia

[10] Murray R. Spiegel. (1987). Teoría y problemas de estadística. México, D.F. Mc Graw Hill. Página 1.
[11] Bowker Albert, & Lieberman Gerald. (1980). Estadística para ingenieros. México, D.F. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. Página 1

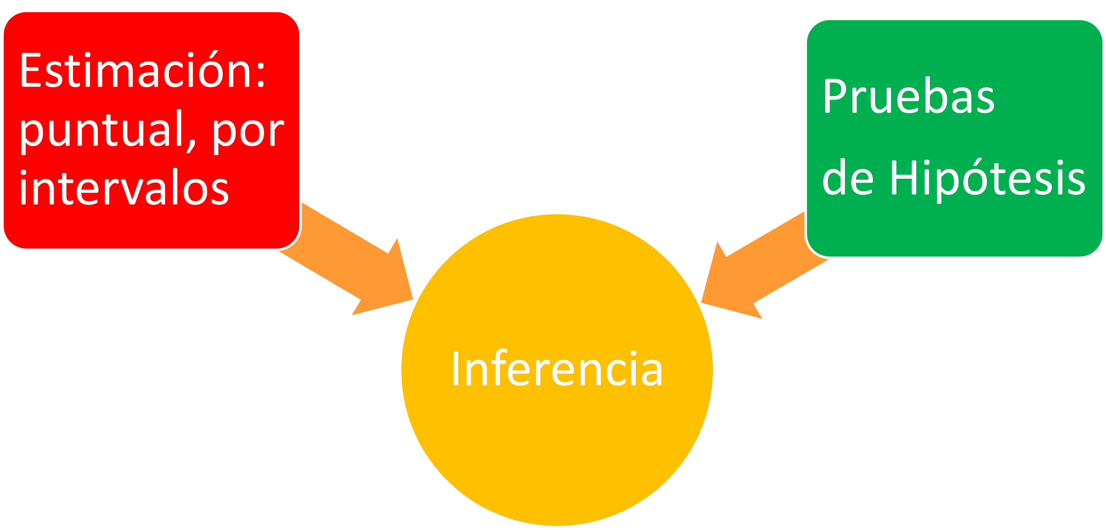
La estadística descriptiva reduce grandes masas de números en cifras más tangibles, o ilustraciones (gráficas, diagramas, etcétera) para poder describir a los objetos de estudio; mientras que la inferencial, consiste en el análisis de datos que se tienen acerca de una población u objeto de estudio con el fin de poder tomar decisiones. Uno de los problemas ineludibles de la vida real al discernir patrones numéricos en los que entra en juego el comportamiento de múltiples variables o datos, es que muy raras veces se pueden incluir a todo el conjunto, por lo general sólo se toma una fracción o porción, que será llamada muestra, la cual tendrá que ser aleatoria, y de preferencia representativa, para que pueda proporcionar la oportunidad de deducir determinadas características del grupo.

2.1. Inferencia estadística

Uno de los principales asuntos de la estadística es poder obtener información acerca de una población, sin embargo, debido al tamaño puede ser difícil. Es por eso, que resulta más práctico inferir acerca de ésta tomando muestras que la representen de manera significativa.

Los medios por los cuales es posible realizar inferencias acerca de la población son los siguientes indicados por la figura 5:

Figura 5. Maneras de realizar inferencia estadística



Fuente: Elaboración propia

Se comenzará describiendo lo referente a la estimación puntual la cual ayuda a determinar o estimar el valor del parámetro desconocido; para esto es seleccionada una muestra aleatoria, de n observaciones $X_1,....,X_n$ de una población con $f(x;\theta)$. A partir de este muestreo con la ayuda de diferentes métodos se llega a obtener un estimador de la población, representado por $\hat{\theta}$.

Definición 1. Un estimador es una función de los valores muestrales independientes $\hat{\theta} = g\left(X_1,\ldots,X_n\right)$, es decir, es una estadística que no tiene involucrados parámetros desconocidos y que se construye para calcular un parámetro desconocido. Dicho estimador debe estar lo mas cercano posible al valor verdadero del parámetro.

Existen diferentes propiedades para ellos y son: insesgabilidad, suficiencia, eficiencia y consistencia principalmente. Un estimador es insesgado si su esperanza coincide o es idéntica con la del parámetro estimado; es consistente si la probabilidad del estimador de aproximarse al parámetro que se estima es igual a 1, a medida que n se aproxima a infinito. Un término que está a considerar es el error cuadrático medio (ECM), el cual representa una medida de precisión para comparar dos estimadores y es definido de la siguiente manera:

Error cuadrático medio $\left(\hat{\theta}\right) =$ ECM$\left(\hat{\theta}\right)$

$$\text{ECM}\left(\hat{\theta}\right) = E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right]$$

Donde sumando y restando $E\left(\hat{\theta}\right)$:

$$\text{ECM}\left(\hat{\theta}\right) = E\left[\left(\hat{\theta}-E\left(\hat{\theta}\right)+E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2\right]$$

Desarrollando el binomio al cuadrado

$$= E\left[\left[\left(\hat{\theta}-E\left(\hat{\theta}\right)\right)+\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)\right]^2\right]$$

$$= E\left[\left(\left(\hat{\theta}-E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2+2\left(\hat{\theta}-E\left(\hat{\theta}\right)\right)\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)+\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2\right)\right]$$

$$= E\left[\hat{\theta}-E\left(\hat{\theta}\right)\right]^2+\left[E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right]^2+2\left(E\left[\hat{\theta}-E\left(\hat{\theta}\right)\right]\right)\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)$$

$$= Var\left(\hat{\theta}\right)+\left[E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right]^2+2\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)\left(E\left(\hat{\theta}\right)-E\left(\hat{\theta}\right)\right)$$

$$= Var\left(\hat{\theta}\right)+\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2$$

$$= Var\left(\hat{\theta}\right)+\left(Sesgo\left(\hat{\theta}\right)\right)^2$$

Donde $Sesgo\left(\hat{\theta}\right) = E\left(\hat{\theta}\right)-\theta$. Si el Sesgo$\left(\hat{\theta}\right)=0$, entonces es insesgado, es decir, lo que representa es que en promedio, se comporta como el valor del parámetro, ya que $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$.

Si se tienen dos estimadores para comparar, sean θ_1 y θ_2, se dice que un $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que otro cuando: $ECM\left(\hat{\theta}_1\right) \leq ECM\left(\hat{\theta}_2\right)$.

En el caso en que ambos sean insesgados, el estimador que será considerado el más eficiente, será aquel que tenga varianza mínima

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_1\right) \leq \mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_2\right)$$

Por último, un estimador será suficiente si asegura que toda la información que una muestra puede brindar respecto a la estimación de un parámetro sea utilizada.

2.2. Intervalos aleatorios

Se comenzará por señalar que son los intervalos aleatorios, los cuales dan el preámbulo para los de confianza.

Definición 2. Un intervalo es el conjunto de puntos que comprende la distancia de un punto a otro sobre la recta real denotado como $|a-b|$, cuyos extremos son a y b.

Ahora bien, un intervalo es considerado aleatorio cuando al menos uno de sus extremos es una variable aleatoria o una función de éstas o si sus dos extremos son variables aleatorias. Dicho intervalo es utilizado para conocer el valor de algún parámetro a estimar. A continuación se expondrán algunos ejemplos de intervalos aleatorios para aclarar este concepto.

Ejemplo 1. Sea X una variable aleatoria que se distribuye $\chi^2_{(16)}$. ¿Cuál es la probabilidad de que el intervalo $(2X, 9.9X)$ contenga al punto $X = 57.60$?

Planteando el problema se tiene la siguiente expresión:

$P(2X < 57.60 < 9.9X)$; siendo un intervalo aleatorio dado que sus dos extremos son variables aleatorias, las cuales poseen una distribución conocida.

Por un lado

$(2X < 57.60) \Rightarrow X < 28.80$ y por otro $57.60 < 9.9X$

$$X > 5.81$$

Así la variable aleatoria será:

$$P(5.81 < X < 28.80) = P(X \leq 28.80) - P(X \leq 5.81)$$
$$= 0.975 - .01$$
$$= 0.965$$

Ejemplo 2. Sea X una variable aleatoria que se distribuye binomial X ~ $\text{Bin}\left(10, \frac{8}{10}\right)$, ¿cuál es la probabilidad de que el intervalo $(3X, 7X)$ contenga al punto 10?

Es decir lo que se busca es

$P(3X < 10 < 7X)$; por un lado $3X < 10 \Rightarrow X < 3.3$ y por otro $10 < 7X \Rightarrow 1.42 < X$

Así el intervalo queda de la forma

$$P(1.42 < X < 3.3) = P(2 \leq X \leq 3)$$

$$= \sum_{i=2}^{3} \binom{10}{i} \left(\frac{8}{10}\right)^{i} \left(\frac{2}{10}\right)^{10-i}$$
$$= \binom{10}{2} \left(\frac{8}{10}\right)^{2} \left(\frac{2}{10}\right)^{8} + \binom{10}{3} \left(\frac{8}{10}\right)^{3} \left(\frac{2}{10}\right)^{7}$$
$$= 45 \left(\frac{8}{10}\right)^{2} \left(\frac{2}{10}\right)^{8} + (120) \left(\frac{8}{10}\right)^{3} \left(\frac{2}{10}\right)^{7}$$
$$= 0.00086016$$

Ejemplo 3. Sea X una variable aleatoria con función de distribución de probabilidad exponencial con parámetro $\lambda = 1$. Calcule la probabilidad de que el intervalo $(2X, 8X)$ contenga al punto $X = 4.4$.

Es decir, se buscará encontrar $\text{P}(2X < 4.4 < 8X)$. Por lo cual primero se encontrará un intervalo cuyos extremos no sean variables aleatorias.

Por un lado se tiene que

$\Rightarrow 2X < 4.4 \Rightarrow X < 2.2;$ mientras que por otro $4.4 < 8X \;\Rightarrow\;$ 0.55< X

$$\Rightarrow \text{P}(\ 0.55 < \text{X} < 2.2) = \int_{0.55}^{2.2} e^{-x} dx$$

$$= -\left(e^{-x}\Big|_{0.55}^{2.2}\right) = -e^{-2.2} + e^{-0.55}$$

$$= 0.466$$

2.3. Intervalos de confianza

Definición 3. Sea $X_1,....,X_n$ muestra aleatoria de $f(X,\theta)$. Sea $T_1 = t_1(X_1,....,X_n)$ y $T_2 = t_2(X_1,....,X_n)$ dos estadísticas que satisfacen $T_1 < T_2$, para lo cual $P\left[T_1 < \tau(\theta) < T_2\right] = 1-\alpha$, α no depende de θ. Entonces (T_1, T_2) es llamado intervalo al $(1-\alpha)$*100% de confianza para $\tau(\theta)$ y T_1 y T_2 son los límites, del intervalo

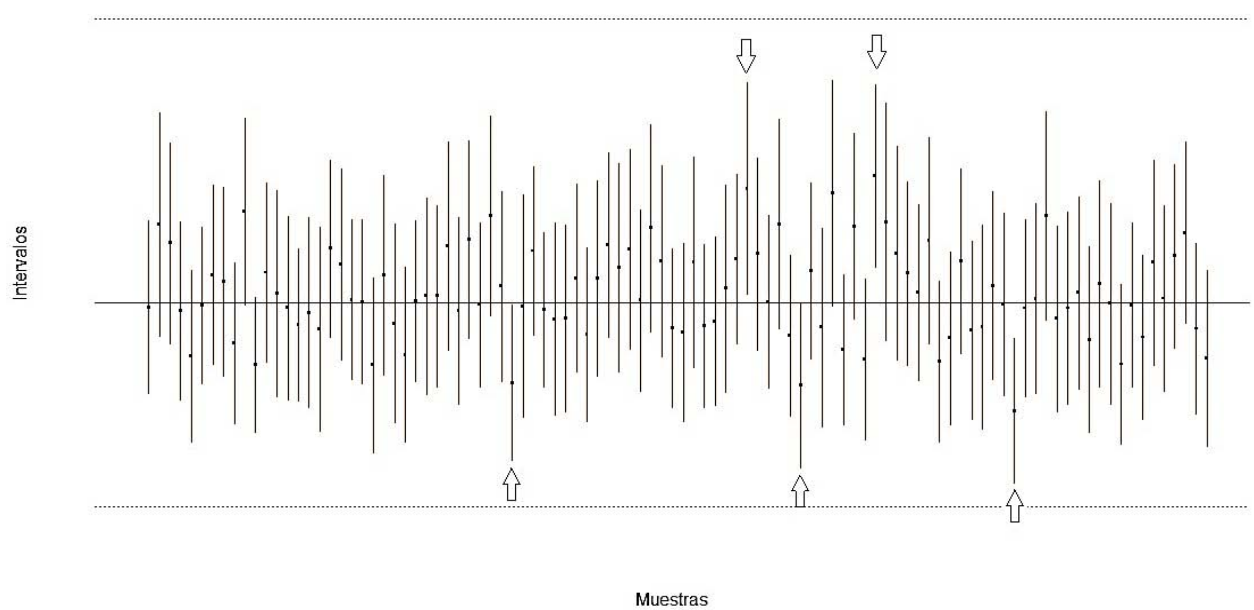
Si T_1 y T_2 son funciones de variables aleatorias y θ fijo entonces $P\left[T_1 < \theta < T_2\right] = 1-\alpha$, representa la probabilidad de que el intervalo cubra al parámetro θ desconocido. Una vez observada la muestra recibe el nombre de intervalo al $1-\alpha$*100% de confianza para θ, que como su nombre lo indica representa la confiabilidad de que θ se encuentre dentro del intervalo.

Es deseable que el parámetro a estimar sea muy cercano al verdadero, por lo que la distancia entre ellos deberá ser preferentemente pequeña.

La certeza de que dicho intervalo contenga al estimador buscado se le denomina coeficiente de confianza, así entre mayor sea el coeficiente de confianza, mayor será la certeza de que el intervalo de confianza construido a partir de una sola muestra contendrá al valor del parámetro.

Se buscará dejar con mayor claridad la definición de intervalos de confianza por medio de la siguiente gráfica, en la cual se representa a un intervalo de confianza del 95%:

Figura 6. Intervalo de confianza al 95% para 100 muestras



Fuente: Elaboración propia

En ésta gráfica, la línea horizontal que se encuentra en el centro representa el verdadero valor del parámetro, las demás líneas verticales que la cortan son las muestras tomadas de la población a las cuales se construyeron sus respectivos intervalos de confianza. Es decir, si se desea estimar un parámetro por medio de intervalos al 95% de confianza, lo que representa es que si se tomaran varias muestras (en este caso 100), se tiene una confianza de que en 95 de estos casos contendrán al verdadero parámetro, mientras que sólo 5 de ellos (los señalados con flechas) no lo incluirán.

2.4. Valor crítico

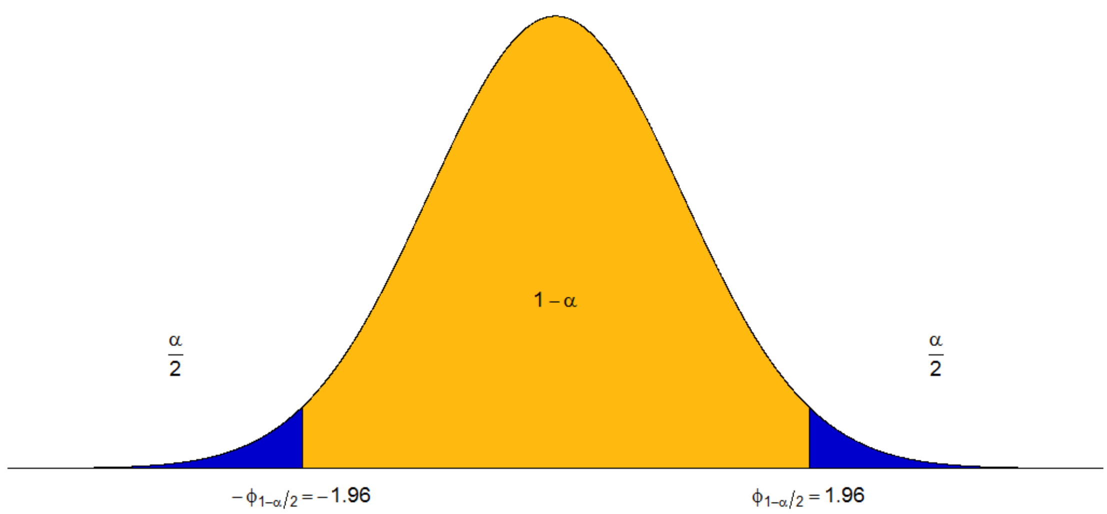
Definición 4. Sea p un número real cualquiera en el intervalo unitario $(0,1)$. Se le llama cuantil de orden p de una variable aleatoria X o de su distribución, a cualquier número x_p que cumpla las condiciones

$$P\left(X \le x_p\right) \ge p \text{ y } P\left(X \ge x_p\right) \ge 1-p$$

Es decir el cuantil de orden p es aquel número que acumula a su izquierda una probabilidad mayor o igual a p.

En dicho caso X_p representan los valores críticos cuyas cifras representan el área acumulada hasta dicho punto con una determinada probabilidad bajo una distribución. Para ejemplificarlo se hará uso de la distribución normal donde $-\varphi_{1-\alpha/2}$ y $\varphi_{1-\alpha/2}$ son los valores críticos, los cuales representan aquellos valores tales que el área acumulada hasta dicho punto es la correspondiente $1-\alpha/2$.

Figura 7. Distribución normal con cuantiles



Fuente: Elaboración propia

Sea $\alpha = 0.05$En este ejemplo el área bajo la curva es de 0.025 a la frontera establecida por el valor crítico $-\varphi_{1-\alpha/2} = -1.96$, mientras que para el área acumulada hasta el cuantil $1-\alpha/2 = 0.975$ el valor crítico $\varphi_{1-\alpha/2} = 1.96$. Dichos puntos poseen la propiedad de separar a la gráfica en dos áreas, la primera que es el nivel de confianza, y la otra que representa la probabilidad de error en la estimación.

2.5. Método pivotal para intervalos de confianza

Para comenzar se dará la siguiente definición:

Definición 5. Una cantidad pivotal es un función de la muestra $X_1,...,X_n$ cuya distribución de probabilidad (f.d.p.) $f(X_1,\ldots,X_n;\theta)$ es conocida y no depende de parámetros desconocidos. Se denotará como $\mathbb{Q} = q\left(x_1,...,\mathrm{x}_n;\theta\right)$.

Método: Sea $\mathbb{Q}$ una cantidad pivotal con f.d.p. entonces para algún $0<1-\alpha<1$ existen q_1 y q_2 que dependen de $1-\alpha$ tal que $P\left[q_1<\mathbb{Q}<q_2\right]=1-\alpha$. Ahora si para cada posible valor

de la muestra $(x_1,....,x_n)$, $q_1 < q(x_1,...,x_n;\theta) < q_2$ si y solo si $t_1(x_1,...,x_n) < \tau(\theta) < t_2(x_1,...,x_n)$ para funciones t_1 y t_2 que no dependen de θ, entonces (T_1,T_2) con $T_1 = t_1(x_1,....,x_n)$ y $T_2 = t_2(x_1,....,x_n)$ es un $(1-\alpha)$*100% intervalo de confianza para $\tau(\theta)$.

2.6. Intervalo de confianza para la media (μ) en una distribución normal, con parámetros (μ , σ^2)

A continuación se construirán los intervalos de confianza para la media (μ) en una distribución $N(\mu,\sigma^2)$, en donde primero se tomará el caso cuando es σ^2 es conocida, y después cuando no lo es. Posteriormente se abordará con algunos ejemplos para una mayor comprensión.

2.6.1. Varianza (o^2) conocida

Dado que el único parámetro desconocido es la media (μ), primero se necesitará una cantidad pivotal para su construcción, utilizando lo siguiente:

$\hat{\mu} = \bar{X} \sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$. Para lo cual se hará uso de lo siguiente:

- Sea $X_1,...,X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu,\sigma^2)$, la media muestral $\bar{X}$ es una variable $N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$……………………………………..……………(1)

Demostración:

Se comenzará usando la función generadora de momentos de ésta distribución con sus respectivos parámetros

Sea $W = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n}X_i$, siendo la función generadora de momentos:

$$M_W(t) = E\left(e^{tW}\right) = E\left(e^{t\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{t\left(\frac{1}{n}X_i\right)}\right)$$

Y debido a que son variables aleatorias independientes

$$=\prod_{i=1}^{n} E\left(e^{t\left(\frac{1}{n}X_i\right)}\right)=\prod_{i=1}^{n} E\left(e^{\left(t\frac{1}{n}\right)X_i}\right)=\left[E\left(e^{\left(t\frac{1}{n}\right)X_i}\right)\right]^n$$. Sea $t'=\mathrm{t}\dfrac{1}{n}$, entonces sustituyendo es igual a $\left[E\left(e^{t`X_i}\right)\right]^n$; donde X_i tiene distribución normal con parámetros $\left(\mu,\sigma^2\right)$ y $E\left(e^{t'X_i}\right)=M_{X_i}\left(t'\right)$ cuya f.g.m. está dada por:

$$M_{x_i}\left(t'\right)=e^{\mu t'+\left(\sigma^2 t'^2\right)/2} \qquad \mathrm{i}=1,2,...,n$$

Así que sustituyendo los valores se obtiene lo siguiente:

$$\left[E\left(e^{\left(t'\frac{1}{n}\right)X_i}\right)\right]^n=\left[M_{X_i}\left(t'\right)\right]^n=\left[e^{\mu t'+\left(\sigma^2 t`^2\right)/2}\right]^n$$ . Sustituyendo el valor de t\`

$$\left[e^{\mu\left(t\frac{1}{n}\right)+\left(\sigma^2\left(t\frac{1}{n}\right)^2\right)/2}\right]^n=e^{\mu n\left(t\frac{1}{n}\right)+\left(\sigma^2 n\left(t^2\frac{1}{2n^2}\right)\right)}=e^{\mu t+\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2n}\right)}$$

Siendo esta última la f.g.m. de una densidad normal con media μ y varianza $\dfrac{\sigma^2}{n}$. Y usando el siguiente enunciado:

- Sean X e Y dos variables aleatorias continuas o discretas, con funciones de densidad $f\left(x\right)$ y $g\left(y\right)$, respectivamente. Suponga que existen las funciones generadoras de momentos (f.g.m.) de X e Y y que ambas son iguales para todo t del intervalo $-h^2<t<h^2$. Entonces las dos funciones de densidad son iguales”…………………………………………………….…………………...(2)

Así al calcular la f.g.m. de $\bar{\mathrm{X}}$ se obtuvo que tiene la misma f.g.m. de una distribución normal con media μ y varianza $\dfrac{\sigma^2}{n}$, por lo que se puede concluir que $\bar{\mathrm{X}}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

Si la variable aleatoria $\bar{\mathrm{X}}$ se distribuye normal con media μ y varianza $\dfrac{\sigma^2}{n}$ y $\sigma^2>0$, entonces la variable aleatoria

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3)}$$

Para probar este resultado se calculará la f.g.m. de Z, la cual será igual a la f.g.m. de una distribución normal con media 0 y varianza 1, que de acuerdo con el resultado (2) si ambas variables poseen la misma f.g.m. entonces su distribución es la misma.

Demostración:

Sea $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, entonces su f.g.m. será:

$$M_Z(t)=E\left(e^{tZ}\right)=E\left(e^{t\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)}\right)=E\left(e^{\frac{t\bar{X}-t\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}\right)$$

$=E\left(e^{\frac{t}{\sigma/\sqrt{n}}\bar{X}-\frac{t}{\sigma/\sqrt{n}}\mu}\right)$. Sea $t'=\frac{t}{\sigma/\sqrt{n}}$, sustituyendo se obtiene que

$E\left(e^{t'\bar{X}-t'\mu}\right)=E\left(e^{t'\bar{X}}e^{-t'\mu}\right)=e^{-t'\mu}E\left(e^{t'\bar{X}}\right)=e^{-t'\mu}M_{\bar{X}}(t')$ donde

$\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$, por lo que su f.g.m. es $M_{\bar{X}}(t')=e^{\mu t'+\frac{\sigma^2 t'^2}{2n}}$, así

$e^{-t'\mu}M_{\bar{X}}(t')=e^{-t'\mu}\left(e^{t'\mu+\frac{\sigma^2 t'^2}{2n}}\right)=e^{-t'\mu+t'\mu+\frac{\sigma^2 t'^2}{2n}}=e^{\frac{\sigma^2 t'^2}{2n}}$ y remplazando el valor de t\`

$=e^{\frac{\sigma^2\left(\frac{t}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}{2n}}=e^{\frac{\sigma^2\left(\frac{t^2}{\sigma^2/n}\right)}{2n}}=e^{\frac{\frac{t^2}{n}}{2n}}=e^{\frac{t^2}{2}}$ que recordando es la f.g.m. de una distribución $N(0,1)$.

El resultado anterior (3) será útil para la construcción del intervalo de confianza, tomando como cantidad pivotal a Z cuya distribución no depende del parámetro. Planteando el intervalo queda de la siguiente manera:

$$P\left(a<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<b\right)=1-\alpha$$

donde es necesario conocer las constantes a y b cuyos valores no son únicos, por lo que la idea es encontrar a y b tales que con un nivel de confianza dado hagan mínima la longitud del intervalo, sin embargo, al tener Z una distribución simétrica si se escogen dos constantes alrededor de la media se puede escoger un intervalo de longitud mínima, por lo que resulta conveniente tomar los cuantiles.

Los extremos del intervalo serán denotados por $-\varphi_{1-\alpha/2}$ y $\varphi_{1-\alpha/2}$, siendo la normal una distribución simétrica$\left(\text{es decir, que } \varphi^{1-\alpha/2} = -\varphi^{1-\alpha/2}\right)$. Con un nivel de confianza 1-α se construirá el intervalo de confianza.

$$P\left[-\varphi_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \varphi_{1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left[-\varphi_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < \varphi_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left[\varphi_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > -\bar{X}+\mu > -\varphi_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left[-\varphi_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\bar{X}+\mu < \varphi_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\bar{X}-\varphi_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}+\varphi_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza para la media (μ)

$$\left(\bar{X}-\varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),\ \bar{X}+\varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right) \text{ con varianza } \left(\sigma^2\right) \text{ conocida}$$

Ejemplo 4 . Sea $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ que se distribuye $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, ¿cuál es la probabilidad de que el intervalo aleatorio $\left(\bar{X}-\frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+\frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ contenga al punto μ ?

Por resultado anterior se sabe que el intervalo de confianza para la media es:

$$P\left[\bar{X}-\varphi_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+\varphi_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=1-\alpha$$

Y por otra parte:

$$P\left(\bar{X}-\frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+\frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Así que igualando los términos:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \bar{X}-\frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}=\bar{X}-\varphi_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow Z_{1-\alpha/2}=1.645\Rightarrow P\left(\bar{X}-\frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+\frac{1.645\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\ =N(1.645)-N(-1.645)\\ =0.9\end{aligned}$$

2.6.2. Relaciones: error de estimación (EE), tamaño de la muestra, valor crítico y nivel de confianza

- Error de estimación (EE)

El error de estimación ayuda al investigador a determinar qué tan preciso es el intervalo de confianza. Representa la distancia entre un estimador y su parámetro objetivo.

En el caso particular cuando μ es desconocida y σ^2 conocida está dado de la forma:

$$EE=\varphi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Notando que a medida que n es mayor, el error de estimación será más pequeño, es decir, incrementando el tamaño de la muestra, se garantizará una mayor precisión al disminuir el error.

De esta misma fórmula, si se despeja n, se obtiene:

$$EE=\varphi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\Leftrightarrow\sqrt{n}=\frac{\varphi(\sigma)}{EE}\Leftrightarrow n=\left(\frac{\varphi(\sigma)}{EE}\right)^2$$

La importancia de ésta fórmula radica en la relación existente entre las variables involucradas, es decir si se quiere ver de qué tamaño tiene que ser la muestra bajo un determinado EE, esta fórmula resulta de gran utilidad.

- Nivel de confianza y valor crítico

Ambos poseen una relación directa, ya que a medida que disminuye el valor crítico, también el nivel de confianza y viceversa. Otro vínculo existente es la confiabilidad y el tamaño del intervalo, siendo que para niveles de confianza grandes, la amplitud del intervalo aumentará y al revés. Para esclarecer éstas relaciones se procederá con algunos ejemplos.

Ejemplo 5. De una muestra de 1000 observaciones de una población con μ desconocida, y $\sigma = 13$; se tiene una $\bar{X} = 60$. Encontrar:

a) Un intervalo con un nivel de confianza de 90%
b) Un intervalo con un nivel de confianza de 95%
c) El error de estimación para ambos intervalos
d) Si se deseara un error de estimación del 0.30, ¿de qué tamaño debería de ser la muestra?

Se empezará calculando para un nivel de confianza del 90%. La fórmula a utilizar es:

$$\left(\bar{X} - \varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),\ \bar{X} + \varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right) \text{ con varianza } \left(\sigma^2\right) \text{ conocida}$$

Note que el EE está implícito en el cálculo del intervalo, cuya expresión es:

$$\varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Por lo que

$$EE = 1.645\left(\frac{13}{\sqrt{1000}}\right) = 0.676 \Rightarrow EE_{0.90} = 0.676$$

Si se deseara un error de estimación de 0.30, el tamaño de la muestra sería:

$$n = \left(\frac{1.645(13)}{0.30}\right)^2 = \left(71.28\right)^2 \approx 5,081 \Rightarrow n = 5,081$$

Por último, el intervalo de confianza se calcula como:

$\left(60 - 0.676,\ 60 + 0.676\right) = \left(59.32,\ 60.676\right)$ con un nivel de confianza del 90% para μ con σ^2 conocida.

Ahora para un nivel de confianza del 95%

$$EE = 1.960\left(\frac{13}{\sqrt{1000}}\right) = 0.806 \Rightarrow EE_{0.95} = 0.806$$

El tamaño de la muestra para un error de estimación determinado es:

$$n = \left(\frac{1.960(13)}{0.30}\right)^2 = (84.93)^2 \approx 7,214 \Rightarrow n = 7,214$$

El intervalo de confianza para μ con σ^2 conocida es:

$$(60 - 0.806,\ 60 + 0.806) = (59.194,\ 60.806)$$

Observe que el nivel de confianza influye en la longitud del intervalo, ya que a medida que uno se incrementa el otro también, es decir, existe una relación directa entre ellos, al igual que con los valores críticos.

Ejemplo 6. La glucemia es una medida de concentración de glucosa en la sangre. Su medición se realiza en las personas cuando se encuentran en ayunas. Se consideran niveles normales en sangre de 70 mg/dL. Se toma una muestra aleatoria de 200 pacientes que presentan alguna alteración en los niveles de glucemia, ya sea que estén por arriba del parámetro normal (Hiperglucemia) o por debajo (Hipoglucemia). Se encontró que el nivel medio de glucemia en esta muestra presenta distribución normal con media 90 mg/dl y con una desviación estándar $\sigma = 15$. Encuentre un intervalo de confianza del 95% y del 90% con los datos proporcionados.

a) Primero se realizarán los cálculos para un nivel de confianza del 95%. La fórmula a utilizar para la construcción del intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{X} - \varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),\ \bar{X} + \varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right) \text{ con varianza } \left(\sigma^2\right) \text{ conocida}$$

Sustituyendo los valores:

$$\Rightarrow \left(90 - (1.96)\left(\frac{15}{\sqrt{200}}\right),\ 90 + (1.96)\left(\frac{15}{\sqrt{200}}\right)\right) = (90 - 2.079,\ 90 + 2.079)$$
$$= (87.92,\ 92.08)$$

b) Ahora se realizará el cálculo para un nivel de confianza del 90%

$$Sea\ \varphi_{1-\alpha/2} = 1.645 \Rightarrow \left(90 - (1.645)\left(\frac{15}{\sqrt{200}}\right),\ 90 + (1.645)\left(\frac{15}{\sqrt{200}}\right)\right)$$

$$=(90-1.74,\ 90+1.74)$$

El intervalo de confianza al 90% para μ es : $(88.26,\ 91.74)$

Del ejercicio anterior se realizó el cálculo para diferentes niveles de confianza, quedando los intervalos de la siguiente manera:

(88.26, 91.74).......................90%

(87.92, 92.08)..............................95%

A simple vista no resulta obvio, pero la longitud del primer intervalo es 3.48 (90%) mientras que para el segundo su amplitud es 4.16 (95%), notando que entre mayor sea el nivel de confianza, mas grande será la amplitud del intervalo. Otro punto a referir es el EE:

Error de estimación para un nivel de confianza del 90%	Error de estimación para un nivel de confianza del 95%
$(1.645)\left(\frac{15}{\sqrt{200}}\right)=1.74$	$(1.96)\left(\frac{15}{\sqrt{200}}\right)=2.079$

Notando que el error de estimación incrementa cuando el nivel de confianza es mayor y viceversa. Pero ¿existirá alguna relación entre el EE y el tamaño de la muestra? La respuesta es ¡por supuesto que si!, para ejemplificar esto se hará la siguiente pregunta: ¿De qué tamaño deberá de ser la muestra si se desea una precisión del ±1.5 con una confianza del 95%?

Por un lado se sabe que el error de estimación está dado por:

$$\varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=EE$$

Despejando la fórmula se obtiene:

$$\varphi_{1-\alpha/2}(\sigma)=(EE)(\sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(\varphi_{1-\alpha/2})(\sigma)}{EE}=\sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad n=\left(\frac{(\varphi_{1-\alpha/2})(\sigma)}{EE}\right)^2$$

Así que:

$$n=\left(\frac{(1.96)(15)}{1.5}\right)^2\approx 384$$

Por lo tanto el tamaño de la muestra es $n = 384$, esto que para tener un error de estimación de 1.5 con una confianza del 95% se necesitará una muestra aleatoria de tamaño 384.

Ejemplo 7. Si $\bar{X}$ se distribuye $\mathrm{N}(\mu, 16)$. Encontrar el tamaño de muestra n tal que $P(\bar{X} - 2 < \mu < \bar{X} + 2)$ tenga un nivel de confianza del 95%.

El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(\bar{X} - \varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),\ \bar{X} + \varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \right) \text{ con varianza } (\sigma^2) \text{ conocida}$$

Si se compara con el intervalo $(\bar{X} - 2,\ \bar{X} + 2)$

Se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow 1.960\left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right) = 2$$

$$n \approx 15$$

Por lo que para un nivel de confianza del 95%, y para el intervalo $(\bar{X} - 2,\ \bar{X} + 2)$, el tamaño de la muestra debe de ser 15 aproximadamente.

2.6.3. Varianza (σ^2) desconocida

En el inciso anterior se determinó el intervalo de confianza para la media (μ) cuando la varianza (σ^2) es conocida, pero ¿qué pasa cuando es desconocida? La situación cambia y no es posible usar el mismo resultado. Para la construcción del intervalo se hará uso del siguiente teorema:

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n con distribución $N(\mu, \sigma^2)$. La variable aleatoria

$$Y = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \text{ tiene una distribución } \chi^2_{(n)} \text{ .... (4)}$$

Siendo que $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}$ ~ $\chi^2_{(n-1)}$ ya que al ser $\bar{X}$ un estimador de μ disminuye en un grado de libertad.

Por otra parte dado que son dos parámetros los desconocidos, para poder construir el intervalo de confianza se hará uso de la distribución t-Student como cantidad pivotal, ya que de esta manera no dependerá de parámetros desconocidos.

Sean X y Y variables aleatorias independientes con las siguientes distribuciones respectivamente $X \sim N(0,1)$ y Y ~ $\chi^2_{(n)}$, entonces

$$B=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_{(n)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Haciendo uso del enunciado anterior, la cantidad pivotal quedará definida de la siguiente manera:

$$P\left(a<\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2(n-1)}}}<b\right)=1-\alpha \quad \text{donde} \quad \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2\left(n-1\right)}}} \sim t_{(n-1)}$$

Donde a y b deben de minimizar la longitud del intervalo, pero al ser la distribución t simétrica si se escogen dos constantes alrededor de la media, se puede escoger un intervalo de longitud mínima, así que se usarán los cuantiles denotados por $-\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}$ y $\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}$, quedando el intervalo de la siguiente manera:

$$P\left(-\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}<\frac{\left(\bar{X}-\mu\right)\sigma\left(\sqrt{(n-1)}\right)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\right)}<\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

Simplificando algebraicamente:

$$P\left(-\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\right)\right)<\left(\bar{X}-\mu\right)\left(\sqrt{n-1}\right)<\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\right)\right)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}\left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)<\left(\bar{X}-\mu\right)<\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}\left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-\bar{X}-\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}\left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)<-\mu<-\bar{X}+\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}\left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}-\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}\left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)<\mu<\bar{X}+\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}\left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)\right)=1-\alpha$$

Por lo tanto el intervalo de confianza para la media (μ) con varianza (σ^2) desconocida es:

$$\left(\bar{X}-\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}\left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right),\ \bar{X}+\tau_{n-1}^{1-\alpha/2}\left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)\right) \text{ con } (1-\alpha)*100\% \text{ de confianza}$$

Es interesante indicar que cuando n es suficientemente grande, la función de distribución t, se aproxima a la distribución normal, con media 0 y varianza 1.

Ejemplo 8. Se toma una muestra aleatoria con distribución $N(\mu,\sigma^2)$ de tamaño 41 donde $\bar{X}=38$ y $S^2=4$. Determine un intervalo de confianza para μ del 90% de confianza.

Calcular la misma confiabilidad, pero ahora con un tamaño de muestra mayor. En ambos casos calcular el error de estimación.

Los datos que se tienen son:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X} = 38 \text{ y } \quad S^2=4 \Rightarrow S=2 \quad \text{ y } \tau_{40}^{0.95} = 1.684$$

Sustituyendo:

$$\left(38 - 1.684\left(\frac{2}{\sqrt{41}}\right),\ 38 + 1.684\left(\frac{2}{\sqrt{41}}\right)\right) = (37.47,\ 38.53)$$

Ahora, se harán los mismos supuestos, cambiando únicamente el tamaño de la muestra a 61

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X} = 38 \text{ y } \quad S^2=4 \Rightarrow S=2 \quad \text{ y } \tau_{60}^{0.95} = 1.671$$

$$\left(38 - 1.671\left(\frac{2}{\sqrt{61}}\right),\ 38 + 1.671\left(\frac{2}{\sqrt{61}}\right)\right) = (37.57,\ 38.43)$$

A manera de resumen los resultados fueron:

Tamaño de la muestra	Porcentaje de confianza	Intervalo resultante
41	90%	$(37.47, 38.53)$
61	90%	$(37.57, 38.43)$

Ejemplo 9. En un ensayo clínico se ha suministrado un medicamento para la disminución de colesterol en la sangre en 31 pacientes que poseen niveles elevados. Si de la muestra se obtuvieron las estimaciones de $\bar{x} = 250mg/dL$ y $S = 13$. Encuentre un intervalo de 95% de confianza para μ.

Sea el intervalo para μ con σ^2 desconocida

$$\left(\bar{X} - \tau_{n-1}^{1-\alpha/2}\left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right),\ \bar{X} + \tau_{n-1}^{1-\alpha/2}\left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right)\right)$$

con $S=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}{\sqrt{(n-1)}}$. Quedando para cada caso el intervalo de 95% de confianza para μ

$S=13,\ \bar{X}=250,\ \tau_{29}^{0.975}=2.045$

$$=\left(250-(2.042)\left(\frac{13}{\sqrt{31}}\right),\ 250+(2.042)\left(\frac{13}{\sqrt{31}}\right)\right)=(250-4.77,\ 250+4.77)$$

$$=(245.23,\ 254.77)$$

Por lo que con una confiabilidad del 95% el intervalo $(245.23, 254.77)$ contendría al valor del parámetro (μ).

Ejemplo 10. Una prueba realizada a 40 alumnos de cuarto año de primaria en la materia de matemáticas arrojó los siguientes resultados:

20, 21, 21, 27, 27, 27, 29, 29, 29, 29, 29, 33, 33, 33, 33, 33, 40, 40, 40, 40, 40,40, 42,
42, 42, 42, 42, 45, 45, 45, 45, 50, 50, 50, 50, 53, 53, 53, 56, 56, 59

Suponiendo normalidad en la distribución, calcular un intervalo de confianza del 90%.

Primero será calculado:

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=\frac{1,612}{41}=39.32\ ;\ S=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}}{\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{4,322.88}}{\sqrt{40}}=10.40\ \text{ y }\ \tau_{40}^{0.95}=1.684$$

Por lo que sustituyendo los valores se obtiene:

$$\left(39.32-1.684\left(\frac{10.40}{\sqrt{41}}\right),\ 39.32+1.684\left(\frac{10.40}{\sqrt{41}}\right)\right)=(36.58,\ 42.06)$$

Siendo que con una confianza del 90% de confianza, el intervalo $(36.58,\ 42.06)$ incluiría al valor del parámetro.

Ejemplo 11. Sea $X_1,.....,X_n,X_{n+1}$ una muestra aleatoria de tamaño $n+1$, con $n>1$, de una población con f.d.p. $\mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$. Sean $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ y $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$. Encontrar la constante c tal que la estadística $\frac{c\left(\bar{X}-X_{n+1}\right)}{S}$ tenga distribución t. Si $n=8$, obtener una k tal que: $P\left[\bar{X}-kS<X_9<\bar{X}+kS\right]=0.80$. **(Hogg[12])**

Primero es necesario conocer como se distribuye $\left(\bar{X}-X_{n+1}\right)$, para después determinar la distribución de la estadística.

Por un lado, se tiene que $\bar{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ y $X_{n+1} \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

$$\Rightarrow \bar{X}-X_{n+1} \sim \mathrm{N}\left(0,\sigma^2\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)$$

$\Leftrightarrow \bar{X}-X_{n+1} \sim \mathrm{N}\left(0,\sigma^2\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$. Por lo que :

$$\frac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sigma\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)} \sim \mathrm{N}(0,1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Por otro lado se tiene: $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ ………………………………….. (7)

Con (6) y (7) se puede construir una distribución $\frac{W}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \sim t_{(n)}$ donde $W \sim N(0,1)$ y

$V \sim \chi^2_{(n)}$. Así que sustituyendo (6) y (7):

[12] Hogg Robert V, Craig Allen T. "Introduction to mathematical statistics". Collier MacMillan International Editions, página 198.

$$\frac{\dfrac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sigma\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right)}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}}{n-1}}} \sim \mathrm{t}_{(n-1)} \text{ es la cantidad pivotal}$$

Desarrollando algebraicamente:

$$\frac{\dfrac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sigma\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right)}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)}{n-1}}} \Leftrightarrow \frac{\dfrac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sigma\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right)}}{\dfrac{1}{\sigma}\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}}$$

$$\frac{\dfrac{\bar{X}-X_{n+1}}{\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right)}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}} \Leftrightarrow \frac{\dfrac{\bar{X}-X_{n+1}}{\left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)}}{\dfrac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}{\sqrt{n-1}}}$$

$$\frac{\dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-X_{n+1}\right)}{\sqrt{n+1}}}{\dfrac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}{\sqrt{n-1}}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-X_{n+1}\right)\sqrt{n-1}}{\left(\sqrt{n+1}\right)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}$$

$$\frac{\left(\bar{X}-X_{n+1}\right)\sqrt{n-1}}{\left(\sqrt{n+1}\right)\dfrac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}}{\sqrt{n}}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}}}\right)$$

$$\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}}}\right) \sim \ \mathrm{t}_{(n-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Del inciso (8) se obtiene una cantidad pivotal con f.d.p. conocida, que si es igualada con la estadística $\frac{c\left(\bar{X}-X_{n+1}\right)}{S}$ se tiene lo siguiente:

$$\frac{c\left(\bar{X}-X_{n+1}\right)}{S}=\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}}}\right)$$

Siendo S=$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}}$, por lo que sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{c\left(\bar{X}-X_{n+1}\right)}{S}=\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{\bar{X}-X_{n+1}}{S}\right)$$

Por lo que $c=\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}}$

$$\text{Si } n=8 \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{7}{9}}\left(\bar{X}-X_9\right)}{S} \sim \mathrm{t}_{(7)} \quad \Rightarrow \mathrm{P}\left[-t_{(7)}^{1-\alpha/2}<\frac{\sqrt{\frac{7}{9}}\left(\bar{X}-X_9\right)}{S}<t_{(7)}^{1-\alpha/2}\right]=0.80$$

$$\Leftrightarrow P\left[-1.415<\frac{\sqrt{\frac{7}{9}}\left(\bar{X}-X_9\right)}{S}<1.415\right]=0.80$$

$$\Leftrightarrow P\left[-1.415(S)<\sqrt{\frac{7}{9}}\left(\bar{X}-X_9\right)<1.415(S)\right]=0.80$$

$$\Leftrightarrow P\left[-1.415(S)\left(\sqrt{\frac{9}{7}}\right)<\left(\bar{X}-X_9\right)<1.415(S)\left(\sqrt{\frac{9}{7}}\right)\right]=0.80$$

$$\Leftrightarrow P\left[\bar{X}-1.415(S)\left(\sqrt{\frac{9}{7}}\right)<X_9<\bar{X}+1.415(S)\left(\sqrt{\frac{9}{7}}\right)\right]=0.80$$

Cuya estructura coincide con: $P\left[\bar{X}-kS<X_9<\bar{X}+kS\right]$. Lo anterior sucede si y sólo si

$$k=1.415\left(\sqrt{\frac{9}{7}}\right)$$
$$k=1.604$$

2.7. Intervalo de confianza para la varianza en una distribución $N\left(\mu,\sigma^2\right)$

En las secciones anteriores, se han construido intervalos de confianza para la media μ, teniendo dos casos, cuando la varianza $\left(\sigma^2\right)$ es conocida, y cuando no lo es. Ahora se comenzará con el caso en el cual σ^2 es desconocida y al igual que en los casos pasados, se tendrán dos casos: uno cuando la media es una conocida y otro en el cual no lo es.

2.7.1. Intervalo de confianza para la varianza cuando la media es conocida

Para este caso se tomará en cuenta para la construcción del intervalo que $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n)}$ siendo la Ji- cuadrada una distribución no simétrica.

Es decir, dado que la media es conocida, y la varianza es el parámetro a estimar, el enunciado anterior es útil para la construcción del intervalo de confianza, donde la cantidad pivotal queda de la siguiente manera:

$$P\left(a<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}<b\right)=1-\alpha$$

Despejando a σ^2 se obtiene lo siguiente:

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{a} > \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2} > \frac{1}{b}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{b} < \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2} < \frac{1}{a}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{b} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{a}\right) = 1-\alpha$$

Donde a y b se eligen de manera que cumplan con el nivel de confianza y que obtengan la longitud mínima del intervalo, sin embargo a diferencia de las secciones anteriores la distribución no es simétrica y además no concede una solución algebraica para a y b, por lo que el resultado se obtiene por métodos numéricos. Así que siguiendo la bibliografía se opta por usar los cuantiles de la distribución ji- cuadrara como se muestra a continuación:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\zeta_n^{1-\alpha/2}}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\zeta_n^{\alpha/2}}\right)$$

Donde $a=\zeta_n^{\alpha/2}$ y $b=\zeta_n^{1-\alpha/2}$. Cabe señalar que este intervalo no necesariamente genera al óptimo (de longitud menor), sin embargo es el más práctico para fines didácticos.

Ejemplo 12.-Un estudio realizado a un grupo de personas mostró el número de horas que las personas se exponían a la televisión diariamente. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

$(3, 5, 7, 8, 9, 9.5, 10, 9.5, 9, 6, 5, 4.2, 4, 3.5, 3, 2)$. Suponga que $\mu = 4.45$. Calcular un intervalo de confianza del 95% y del 98%.

La fórmula de construcción del intervalo de confianza es el siguiente:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\zeta_n^{1-\alpha/2}}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\zeta_n^{\alpha/2}}\right), \text{ donde}$$

$\mu = 4.45$; Para un nivel de confianza del 95% $\Rightarrow \zeta_{16}^{0.975} = 28.8$; $\zeta_{16}^{0.025} = 6.91$;
mientras que para un nivel de confianza del 98% $\Rightarrow \zeta_{16}^{0.99} = 32$; $\zeta_{16}^{0.01} = 5.81$.

a) Para un intervalo con una confianza del 95% sustituyendo los valores proporcionados en el intervalo

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)^2}{28.8}, \frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)^2}{6.91} \right) = \left(\frac{(3-4.45)^2+.....+(2-4.45)^2}{28.8}, \frac{(3-4.45)^2+.....+(2-4.45)^2}{6.91} \right)$$

$$= \left(\frac{156.70}{28.8}, \frac{156.70}{6.91} \right)$$

$$= (5.44,\ 22.68)$$

Para un nivel de confianza del 98%, el intervalo de confianza se calcula de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)^2}{32}, \frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)^2}{5.81} \right) = \left(\frac{(3-4.45)^2+.....+(2-4.45)^2}{32}, \frac{(3-4.45)^2+.....+(2-4.45)^2}{5.81} \right)$$

$$= \left(\frac{156.70}{32}, \frac{156.70}{5.81} \right)$$

$$= (4.9,\ 26.97)$$

Por un lado con un 95% de confianza el intervalo resultante es $(5.44,\ 22.68)$ cuya longitud es de 17.24. Para el segundo caso (98%) se obtuvo $(4.9,\ 26.97)$ con un largo de 22.07; notando que la longitud del primero es menor a la del segundo, es decir, a mayor nivel de confianza, mayor será la amplitud del intervalo.

Ejemplo 13. Si 24, 36, 47, 28, 31, 42, 36, 28, 55, 31, 24, 31, 36, 28, 36, 47, 42, 47, 55, 31, 36, 55, 58, 42, 36, 28, 42, 31 42, 47, son los valores observados de una muestra aleatoria de tamaño 30 con una distribución $N(36,\sigma^2)$. Construye un intervalo de confianza del 90% para la varianza (σ^2).

Aquí la media es conocida y los cuantiles correspondientes son: $\xi_n^{1-\alpha/2} = 43.8$ y $\xi_n^{\alpha/2} = 18.5$

Sustituyendo los valores:

$$=\left(\frac{(24-36)^2+............+(47-36)^2}{43.8},\ \frac{(24-36)^2+............+(47-36)^2}{18.5}\right)$$

$$=\left(\frac{2,900}{43.8},\ \frac{2,900}{18.5}\right)=(66.21,\ 156.76)$$

Por lo que el intervalo de confianza para la varianza con media conocida es $(66.21,\ 156.76)$.

2.7.2. Intervalo de confianza para la varianza cuando la media es desconocida

Para su construcción se usará como estimador de la media a $\bar{X}$ y considerando la siguiente cantidad pivotal:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

La cantidad pivotal queda de la siguiente manera:

$$P\left(a<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}<b\right)=1-\alpha$$

Donde a y b son cantidades que con un nivel de confianza definido deben tener longitud mínima con el intervalo como ya se ha escrito. Así que para fines prácticos los cuantiles a considerar son: $a=\xi_{n-1}^{\alpha/2}$ y $b=\xi_{n-1}^{1-\alpha/2}$, que corresponden a una distribución ji-cuadrada.

$$P\left(\xi_{n-1}^{\alpha/2}<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}<\xi_{n-1}^{1-\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

Así que despejando a σ^2:

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{\zeta_{n-1}^{1-\alpha/2}}<\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}<\frac{1}{\zeta_{n-1}^{\alpha/2}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\zeta_{n-1}^{1-\alpha/2}}<\sigma^2<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\zeta_{n-1}^{\alpha/2}}\right)=1-\alpha$$

Por lo tanto el intervalo de confianza para la varianza $\left(\sigma^2\right)$ con media (μ) conocida es:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\zeta_{n-1}^{1-\alpha/2}},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\zeta_{n-1}^{\alpha/2}}\right)$$ con (1-α)*100% de confianza.

Ejemplo 14. Tomando los datos del problema anterior, construir un intervalo de confianza del 90% para σ^2.

Sea

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n}=\bar{X}=\frac{24+36+......+42+47}{30}=38;\ \zeta_{n-1}^{1-\alpha/2}=42.6\ \text{ y }\ \zeta_{n-1}^{\alpha/2}=17.7$$

Así que sustituyendo en la fórmula para la construcción del intervalo se obtiene que:

$$\left(\frac{(24-38)^2+......+(47-38)^2}{42.6},\ \frac{(24-38)^2+......+(47-38)^2}{17.7}\right)=\left(\frac{2,900}{42.6},\ \frac{2,900}{17.7}\right)$$

$$=(68.08,\ 163.84)$$

Por lo que con un nivel de confianza del 90%, la varianza podría estar contenida en el intervalo $(68.08,\ 163.84)$.

Ejemplo 15. El sobrepeso es uno de los padecimientos prevalecientes en México y constituyen un problema grave de salud, ya que desencadenan diversas enfermedades, como diabetes, hipertensión, problemas del corazón, entre otras. Se toma una muestra de hombres que poseen la misma estatura y que tiene sobrepeso, los resultados son los siguientes:

$$(81, 94, 87, 84, 98, 81, 103, 94, 100, 94, 87,103, 84, 94, 98, 100, 87, 98, 94, 100, 84, 98, 94)$$

Suponga que la muestra se distribuye normal, calcular un intervalo de confianza para la varianza σ^2 con un nivel de confianza al 95%.

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\zeta_{n-1}^{1-\alpha/2}},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\zeta_{n-1}^{\alpha/2}} \right)$$, donde $\zeta_{22}^{0.975}=36.8$ y $\zeta_{22}^{0.025}=11$

$\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n}=\bar{X}=\frac{81+94+......+98+94}{23}=92.91$. Así que sustituyendo los datos se tiene que:

$$=\left(\frac{(81-92.91)^2+......+(98-92.91)^2}{36.8},\ \frac{(81-92.91)^2+......+(98-92.91)^2}{11} \right)$$

$$=\left(\frac{1,091.83}{36.8},\ \frac{1,091.83}{11} \right)=(29.67,\ 99.24)$$

Así con una confianza del 95%, la media de los pesos registrados estaría en el intervalo $(29.67,\ 99.24)$.

Ejemplo 16. Sea $X_1,\dots,X_6$ una muestra aleatoria de tamaño 6 de una población con función de distribución de probabilidad gamma con parámetros $\alpha=1$ y $\beta>0$ desconocida. Construya un intervalo de confianza del 98% para β. ¿Cuál es la distribución de $\frac{2\sum_{i=1}^{6}X_i}{\beta}$? (Hogg[13]).

Primero se verá como es la distribución de $\frac{2\sum_{i=1}^{6}X_i}{\beta}$

Sea Y=$\frac{2X}{\beta}\Rightarrow F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(\frac{2X}{\beta}\le y\right)=P\left(X\le\frac{\beta y}{2}\right)$

$$=\int_0^{\frac{\beta y}{2}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

Pero para poder solucionar la integral se usará que $g_y(y)=G_y{}'(y)$ y evaluando el límite superior e inferior se obtiene que

[13] Hogg Robert V, Craig Allen T. "Introduction to mathematical statistics". Collier MacMillan International Editions, página 206.

$$F_Y'(y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\left(\frac{\beta y}{2}\right)^{\alpha-1}e^{\frac{-\frac{\beta y}{2}}{\beta}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\left(\frac{\beta y}{2}\right)^{\alpha-1}e^{-\frac{y}{2}}$$

Sea $\alpha=\frac{r}{2}$ con r un entero positivo $\Rightarrow \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\beta^{\frac{r}{2}}}\left(\frac{\beta y}{2}\right)^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}$ que es una f.d.p. ji cuadrada con parámetro r.

Sea $Y=\frac{2X}{\beta}\sim\chi^2_{(2)}$ donde $\alpha=1\rightarrow\alpha=\frac{2}{2}=\frac{r}{2}\Rightarrow r=2$

Por lo que $2\frac{\sum_{i=1}^{6}X_i}{\beta}\sim\chi^2_{(12)}$

Así que se construirá la cantidad pivotal de la siguiente manera:

$$P\left(a_{\alpha/2}<\frac{2\sum_{i=1}^{6}X_i}{\beta}<b_{1-\alpha/2}\right)=P\left[a_{0.01}<\frac{2\sum_{i=1}^{6}X_i}{\beta}<b_{0.99}\right]=P\left[3.57<\frac{2\sum_{i=1}^{6}X_i}{\beta}<26.2\right]$$

$$=P\left[\frac{1}{26.2}<\frac{\beta}{2\sum_{i=1}^{6}X_i}<\frac{1}{3.57}\right]=P\left[\frac{2\sum_{i=1}^{6}X_i}{26.2}<\beta<\frac{2\sum_{i=1}^{6}X_i}{3.57}\right]$$

Así el intervalo del 98% de confianza para β es

$$\left(\frac{2\sum_{i=1}^{6}X_i}{26.2},\ \frac{2\sum_{i=1}^{6}X_i}{3.57}\right)$$

2.8. Intervalo para proporciones

Sea $X_1,..,X_n$ muestra aleatoria con f.d.p bernoulli (p), entonces

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = Y \sim \text{binomial}(n,p).$$

Teorema central del límite (t.c.l.): Sea $X_1,...X_n$ una muestra aleatoria con $f(x)$ una densidad con media μ y varianza finita σ^2, y sea $\bar{X}_n$ la media de una muestra aleatoria de tamaño n. Se define a la variable aleatoria K por:

$$K_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Donde la distribución de K se aproxima a la normal con media 0 y varianza 1 cuando n crece indefinidamente, es decir

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Por lo que haciendo uso del t.c.l. la cantidad pivotal es de la forma:

$$\frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

Sin embargo aún resulta complicado el despeje de p, para la construcción del intervalo, por lo que se procederá a usar lo siguiente:

Sea $\frac{Y}{n} \to p$, por lo que $1 - \frac{Y}{n} \to 1 - p$, así se tiene que $\frac{Y}{n}\left(1 - \frac{Y}{n}\right) \to p(1-p)$

Por otro lado:

$$\frac{\frac{Y}{n}\left(1-\frac{Y}{n}\right)}{p(1-p)} \to 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\frac{Y}{n}\left(1-\frac{Y}{n}\right)}{p(1-p)}} \to \sqrt{1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Así usando (9) y (10) de la siguiente forma:

$$\frac{\dfrac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}}}{\sqrt{1}}=\frac{\dfrac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}}}{\dfrac{\sqrt{\dfrac{Y}{n}\left(1-\dfrac{Y}{n}\right)}}{\sqrt{p(1-p)}}}\sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{Y}{n}-p}{\dfrac{\sqrt{\dfrac{Y}{n}\left(1-\dfrac{Y}{n}\right)}}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$$

Sea $\hat{p}=\frac{Y}{n}$ el estimador máximo verosímil de p $\Rightarrow \dfrac{\hat{p}-p}{\dfrac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$, la cual será usada como cantidad pivotal.

El intervalo de confianza queda definido de la siguiente manera:

$$P\left(-\varphi^{1-\alpha/2}<\frac{(\hat{p}-p)}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}<\varphi^{1-\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)<\hat{p}-p<\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\hat{p}-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)<p<\hat{p}+\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)\right)=1-\alpha$$

Por lo tanto el intervalo para p es :

$\left(\hat{p}-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right),\ \hat{p}+\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)\right)$ con $(1-\alpha)$*100% de confianza.

Otra manera de llegar a la construcción de este intervalo es a través de una segunda aproximación asintótica a la distribución normal que será abarcado posteriormente concluyendo el mismo resultado

Ejemplo 17. Calcular los intervalos de confianza del 90% con un tamaño de muestra $n = 100$ correspondientes para las siguientes proporciones:

a) 0.10 c) 0.50 d) 0.80

a) Intervalo de confianza para una proporción con $p = 0.10$ con un nivel de confianza del 90%

Los datos proporcionados son: $\hat{\mathrm{p}} = 0.10;\ \hat{\mathrm{q}} = 0.9;\quad \varphi^{1-\alpha/2} = 1.645;\ \mathrm{n} = 100$.

Así que sustituyendo

$$\left(0.1 - 1.645\left(\sqrt{\frac{(0.1)(0.9)}{100}}\right),\ 0.1 + 1.645\left(\sqrt{\frac{(0.1)(0.9)}{100}}\right)\right) = \left(0.1 - 1.645(0.03),\ 0.1 + 1.645(0.03)\right)$$

$$= (0.2 - 0.05,\ 0.2 + 0.05)$$

$$= (0.15,\ 0.25).$$

b) Intervalo de confianza para una proporción con $p = 0.50$ con un nivel de confianza del 90%

Los datos proporcionados son: $\hat{\mathrm{p}} = 0.50;\ \hat{\mathrm{q}} = 0.5;\quad \varphi^{1-\alpha/2} = 1.645;\ \mathrm{n} = 100$. Sustituyendo

$$\left(0.5 - 1.645\left(\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{100}}\right),\ 0.5 + 1.645\left(\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{100}}\right)\right) = \left(0.5 - 1.645(0.05),\ 0.5 + 1.645(0.05)\right)$$

$$= (0.5 - 0.082,\ 0.5 + 0.082)$$

$$= (0.418,\ 0.582).$$

c) Intervalo de confianza para una proporción con $p = 0.80$ con un nivel de confianza del 90%

Los datos proporcionados son: $\hat{\mathrm{p}} = 0.80;\ \hat{\mathrm{q}} = 0.2;\quad \varphi^{1-\alpha/2} = 1.645;\ \mathrm{n} = 100$.

$$\left(0.8-1.645\left(\sqrt{\frac{(0.8)(0.2)}{100}}\right),\ 0.8+1.645\left(\sqrt{\frac{(0.8)(0.2)}{100}}\right)\right)=\left(0.8-1.645(0.04),\ 0.8+1.645(0.04)\right)$$
$$=\left(0.8-0.0658,\ 0.8+0.0658\right)$$
$$=\left(0.7342,\ 0.8658\right).$$

Ejemplo 18. El tamiz neonatal es un estudio que contribuye a detectar la existencia de una enfermedad o deficiencia congénita antes de que se manifieste a niños recién nacidos, lo cual ayuda a prevenir alguna discapacidad física, mental e incluso la muerte, con procedimientos más sencillos, tales como la alimentación o la administración de medicamentos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 300, resultando que la cobertura de niños recién nacidos a los que se les aplica el tamiz neonatal es de 80%. Calcular un intervalo de confianza del 90% para la proporción de recién nacidos a los que se les aplica la prueba.

Para la construcción del intervalo:

$$\left(\hat{p}-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right),\ \hat{p}+\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)\right) \text{ donde } \hat{p}=0.8;\ \hat{q}=0.2;\ \varphi^{0.95}=1.645;\ \text{n=300}$$

$$\left(0.8-1.645\left(\sqrt{\frac{(0.8)(0.2)}{300}}\right),\ 0.8+1.645\left(\sqrt{\frac{(0.8)(0.2)}{300}}\right)\right)=\left(0.8-0.038,\ 0.8+0.038\right)$$
$$=\left(0.762,\ 0.838\right).$$

Por lo que con una confianza del 90% el intervalo $\left(0.762,\ 0.838\right)$ contendría a la proporción de recién nacidos a los que se les aplico la prueba de tamiz neonatal.

Ejemplo 19. Se pregunta a personas seleccionadas al azar si realizan actividad física por lo menos 20 minutos al día. Se tiene el dato de que el 45% de las ellas si realiza actividad física. Se desea calcular un intervalo de confianza del 96% para las personas que realizan actividad física. ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se tolerará un error de estimación de 0.05?

Como se quiere determinar el tamaño de la muestra y se tiene un error de estimación predeterminado, se procederá de la siguiente manera:

$$EE=\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)\Leftrightarrow\frac{EE}{\varphi^{1-\alpha/2}}=\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{EE}{\varphi^{1-\alpha/2}}\right)^2=\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}\Leftrightarrow n=\frac{\hat{p}\hat{q}}{\left(\frac{EE}{\varphi^{1-\alpha/2}}\right)^2}$$

Sustituyendo:

$$n=\frac{(0.45)(0.55)}{\left(\frac{0.05}{2.05}\right)^2}=\frac{0.2475}{0.000595}$$

$$n\approx 416$$

Si se deseara un error de estimación de 0.05, con una confianza de 96%, el número de personas seleccionadas sería 416.

Ejemplo 20. De un estudio publicado por la CONSAR se sabe que el 55% de los trabajadores que cambiaron su AFORE empeoran sus rendimientos. Hallar los límites de confianza del 95% y del 90% para la proporción de los trabajadores que empeoraron su rendimiento con el cambio de AFORE. Si se toma una muestra de 1000 trabajadores que cambiaron su AFORE.

$$\hat{p}=0.55;\ \hat{q}=0.45;\ \text{ n}=1{,}000;\ \varphi^{1-\alpha/2}=1.96;\ \text{ y al } 90\%\ \ \varphi^{1-\alpha/2}=1.645$$

a) Para un nivel de confianza del 95% se calculará el intervalo de confianza para proporciones.

$$\left(0.55-(1.96)\left(\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{1{,}000}}\right),\ 0.55+(1.96)\left(\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{1{,}000}}\right)\right)=(0.519,\ 0.581).$$

Por lo tanto con una confianza del 95% la proporción de trabajadores que cambiaron su AFORE y empeoraron sus rendimientos se encuentra en el intervalo (0.519 , 0.581).

b) Para un nivel de confianza del 90% se calculará el intervalo de confianza para proporciones.

$$\left(0.55-(1.645)\left(\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{1{,}000}}\right),\ 0.55+(1.645)\left(\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{1{,}000}}\right)\right)=(0.55-0.026,\ 0.55+0.026)$$

$$=(0.524,\ 0.576).$$

Donde es de notar que la longitud del primer intervalo es de 0.062, mientras que del segundo es de 0.052, existiendo una mayor amplitud con un nivel de confianza mayor.

2.9. Intervalo de confianza para la diferencia de medias (comparación de dos poblaciones)

Este intervalo consiste básicamente en la comparación entre dos poblaciones, es decir, se podrá estimar la diferencia entre dos medias $\mu_1 - \mu_2$, si se toman muestras separadas e independientes de cada una de las poblaciones.

2.9.1. Cuando las varianzas son conocidas

Como en los casos anteriores, primero será construido un intervalo cuando sus varianzas sean conocidas, para esto se hará uso de lo siguiente:

Sea $\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ y $\bar{Y} \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ $\Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n_x} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right)$

Se definirá la cantidad pivotal de la siguiente manera:

$$\frac{\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - \left(\mu_X - \mu_Y\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \sim \mathrm{N}\ (0,\ 1)$$

Y como se ha realizado en los casos anteriores se buscarán las constantes a y b que minimicen la longitud del intervalo, sin embargo al ser una distribución simétrica se considerarán los cuantiles correspondientes a una distribución normal como se indica a continuación:

$$\Rightarrow P\left(-\varphi^{1-\alpha/2} < \frac{\left(\bar{X} - \bar{Y}\right)\left(\mu_X - \mu_Y\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} < \varphi^{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Y despejando a $\mu_X - \mu_Y$

$$\Leftrightarrow P\left(\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - \varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right) < \mu_X - \mu_Y < \left(\bar{X} - \bar{Y}\right) + \varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right) < \left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - \left(\mu_X - \mu_Y\right) < \varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)\right) = 1 - \alpha$$

Por lo tanto el intervalo de confianza para la diferencia de medias con varianzas conocidas es:

$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right),\ \left(\bar{X}-\bar{Y}\right)+\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)\right) \text{ con } (1-\alpha)*100\% \text{ de confianza}$$

Para ejemplificar el uso de éste intervalo, se darán algunos ejemplos:

Ejercicio 21. En un centro de investigación se realiza un estudio en pacientes que padecen migraña. Se toman dos grupos con características similares para ver el tiempo que tarda en hacer efecto el medicamento, tomando como variable el tiempo. Con mismas dosis de diferentes medicamentos los resultados en minutos fueron los siguientes:

Medicamento X	$\bar{X}=34.6$	$\sigma_X=2.5$	$n_1=4{,}800$
Medicamento Y	$\bar{Y}=23.5$	$\sigma_Y=3.5$	$n_2=5{,}500$

Si se desea estimar la diferencia entre el tiempo de reacción de estos medicamentos, calcular un intervalo de confianza del 96% y otro del 90%. Si se pretende un error de estimación menor al obtenido, de que tamaño tendría que ser la muestra.

El intervalo de confianza para la diferencia de medias se calcula de la siguiente manera:

$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right),\ \left(\bar{X}-\bar{Y}\right)+\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)\right)$$

a) Para un nivel de confianza del 96% se tiene que $\varphi^{0.98}=2.05$. Así que sustituyendo los valores:

$$\left(\left(34.6-23.5\right)-2.05\left(\sqrt{\frac{2.5^2}{4{,}800}+\frac{3.5^2}{5{,}500}}\right),\ \left(34.6-23.5\right)+2.05\left(\sqrt{\frac{2.5^2}{4{,}800}+\frac{3.5^2}{5{,}500}}\right)\right)$$

$$=\left(11.1-2.05\left(0.059\right),\ 11.1+2.05\left(0.059\right)\right)=\left(11.1-0.122,\ 11.1+0.122\right)=\left(10.98,\ 11.22\right)$$

b) Para un nivel de confianza del 90% $\Rightarrow \varphi^{0.95}=1.645$.

Sustituyendo los valores:

$$\left((34.6-23.5)-1.645\left(\sqrt{\frac{2.5^2}{4,800}+\frac{3.5^2}{5,500}}\right),\ (34.6-23.5)+1.645\left(\sqrt{\frac{2.5^2}{4,800}+\frac{3.5^2}{5,500}}\right)\right)$$

$$=\left(11.1-1.645(0.059),\ 11.1+1.645(0.059)\right)=\left(11.1-0.098,\ 11.1+0.098\right)$$

$$=\left(11.00,\ 11.198\right)$$

Para el intervalo de confianza del 96% se tiene una longitud de 0.24, mientras que para el segundo la amplitud es de 0.198; es decir, a mayor confiabilidad incrementa también la longitud en el intervalo.

Donde se espera que con una confianza del 96% y 90% el valor de la diferencia entre los tiempos de reacción de estos medicamentos se encuentren en los intervalos $(10.98,\ 11.22)$ y $(11,11.198)$ respectivamente.

Ejercicio 22. En el 2011 el número de nacimientos para Baja California Sur fue de 9,800. Se subdividieron a los recién nacidos en dos grupos, y se midió en promedio el porcentaje de aquellos cuyos padres contaban con seguridad social por grupo. Para el Grupo A y el grupo B se obtuvieron los siguientes resultados:

Grupo A	$\bar{X}=0.64$	$\sigma_X=0.34$	$n_1=6,300$
Grupo B	$\bar{Y}=0.50$	$\sigma_Y=0.20$	$n_2=3,500$

Suponga que las observaciones provienen de una población $N(\mu,\sigma^2)$. Hallar un intervalo de confianza del 96% para la diferencia de medias.

El intervalo se calculará con la siguiente fórmula:

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right),\ (\bar{X}-\bar{Y})+\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)\right)$$ con (1-α)*100% de confianza

Sustituyendo

$$\left[(0.64-0.50)-2.05\left(\sqrt{\frac{(0.34)^2}{6,300}+\frac{(0.20)^2}{3,500}}\right),\ (0.64-0.50)-2.05\left(\sqrt{\frac{(0.34)^2}{6,300}+\frac{(0.20)^2}{3,500}}\right)\right]$$

$$=(0.14-0.01119,\ 0.14+0.01119)=(0.1288,\ 0.1511).$$

Así la diferencia del porcentaje promedio de niños recién nacidos que cuentan con seguridad social con una confianza del 96% se encuentran en el intervalo (0.1288, 0.1511).

Ejercicio 23. Suponga que se tienen dos muestras que se distribuyen de la siguiente manera: $N(\mu_X,\sigma_X^2)$ y $N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$ independientes. Sean $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ las medias de estas dos muestras aleatorias. ¿De qué tamaño debe de ser n? para que satisfaga lo siguiente:

$P\left(\bar{X}-\bar{Y}-\frac{\sigma}{6}<\mu_X-\mu_Y<\bar{X}-\bar{Y}-\frac{\sigma}{6}\right)=0.96$. La varianza es desconocida

Se sabe que

$$\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)=\frac{\sigma}{6}$$

Además sean $\sigma_X=\sigma_Y$ y $\mathrm{n}_X=n_Y \Rightarrow \varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)=\frac{\sigma}{6}$

$$\Leftrightarrow \varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{n}}\right)=\frac{\sigma}{6}$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}\right)=\frac{\sigma}{6}$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{1-\alpha/2}\left(\sigma\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)\right)=\frac{\sigma}{6}\Leftrightarrow \varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)=\frac{1}{6}$$

Sea $\varphi^{0.98}=2.05 \Rightarrow 2.05\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)=\frac{1}{6}\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{n}}=\frac{1}{(6)(2.05)}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{n}=\left(\frac{1}{(6)(2.05)}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{2}{\left(\dfrac{1}{(6)(2.05)}\right)^2}$$

$$n \approx 302$$

Por lo que para $n \approx 302$ se satisface $P\left(\bar{X} - \bar{Y} - \dfrac{\sigma}{6} < \mu_X - \mu_Y < \bar{X} - \bar{Y} - \dfrac{\sigma}{6}\right) = 0.96$

2.9.2. Cuando las varianzas son desconocidas.

Se supondrá que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$. Esto debido a que cuando son distintas no existe una cantidad pivotal que se pueda utilizar[14]. Así que:

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left((\mu_X - \mu_Y),\ \sigma^2\left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}\right)\right) \Leftrightarrow \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\dfrac{n_X + n_Y}{n_X n_Y}}} \sim N(0,1) \ldots\ldots\ldots(9)$$

Sin embargo tanto las diferencias de medias como la varianzas son desconocidas, por lo que no podría ser considerada aun una cantidad pivotal, por lo que será tomado en cuenta lo siguiente:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_X - 1)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i - \bar{Y})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_Y - 1)}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i - \bar{Y})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_X + n_Y - 2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Por lo que para la cantidad pivotal se tomará en cuenta lo siguiente:

Si W ~ $N(0,1)$ y V ~ $\chi^2_{(n)} \Rightarrow \dfrac{W}{\sqrt{\dfrac{V}{n}}} \sim t_{(n)}$; así que haciendo uso de (9) y (10) se tiene que:

[14] Por lo general en este caso, para la construcción de la cantidad pivotal se utilizan los estimadores de σ^2 correspondientes a cada población.

$$\frac{\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_X-\mu_Y\right)}{\sigma\sqrt{\dfrac{n_X+n_Y}{n_Xn_Y}}}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{\sigma^2\left(n_X+n_Y-2\right)}}}\sim t_{(n_X+n_Y-2)}$$

$$\frac{\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_X-\mu_Y\right)}{\sqrt{\dfrac{n_x+n_Y}{n_xn_Y}}}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{\left(n_x+n_Y-2\right)}}}\sim t_{(n_x+n_Y-2)}$$

De esta manera para la construcción del intervalo de confianza, se hará uso de la cantidad pivotal anterior, siendo $\tau_{(n_x+n_Y-2)}^{1-\alpha/2}$ el cuantil correspondiente a una f.d.p. t- Student.

$$P\left(-\tau_{(n_x+n_Y-2)}^{1-\alpha/2}<\frac{\dfrac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_X-\mu_Y\right)}{\sqrt{\dfrac{n_x+n_Y}{n_xn_Y}}}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{\left(n_x+n_Y-2\right)}}}<\tau_{(n_x+n_Y-2)}^{1-\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-\tau_{(n_x+n_Y-2)}^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{\left(n_X+n_Y-2\right)}}\right)<\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_X-\mu_Y\right)}{\sqrt{\dfrac{n_X+n_Y}{n_Xn_Y}}}<\tau_{(n_x+n_Y-2)}^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{\left(n_X+n_Y-2\right)}}\right)\right)$$

$$P\left(-\tau_{(n_X+n_X-2)}^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{\left(n_X+n_Y-2\right)}}\right)\sqrt{\frac{n_X+n_Y}{n_Xn_Y}}<\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_X-\mu_Y\right)<\tau_{(n_X+n_X-2)}^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{\left(n_X+n_Y-2\right)}}\right)\sqrt{\frac{n_X+n_Y}{n_Xn_Y}}\right)$$

Por lo tanto el intervalo de confianza para la diferencia de medias con σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas es:

$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right) - \tau_{(n_X+n_Y-2)}^{1-\alpha/2} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{(n_X+n_Y-2)}} \right) \sqrt{\frac{n_X+n_Y}{n_X n_Y}},\ \left(\bar{X}-\bar{Y}\right) + \tau_{(n_X+n_Y-2)}^{1-\alpha/2} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{(n_X+n_Y-2)}} \right) \sqrt{\frac{n_X+n_Y}{n_X n_Y}} \right)$$

con (1-α)*100% de confianza, el cual puede ser escrito de la siguiente forma:

$$P\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right) - \tau_{(n_X+n_Y-2)}^{1-\alpha/2} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{(n_X+n_Y-2)}} \right) \sqrt{\frac{n_X+n_Y}{n_X n_Y}} < \mu_X-\mu_Y < \left(\bar{X}-\bar{Y}\right) + \tau_{(n_X+n_Y-2)}^{1-\alpha/2} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{(n_X+n_Y-2)}} \right) \sqrt{\frac{n_X+n_Y}{n_X n_Y}} \right)$$

$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right) \pm \tau_{(n_X+n_Y-2)}^{1-\alpha/2} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{(n_X+n_Y-2)}} \right) \sqrt{\frac{n_X+n_Y}{n_X n_Y}} \right)$$

Ejemplo 24. Se desea hacer un estudio acerca de la concentración de etanol en la sangre. Para lo cual se tomaron muestras en dos diferentes ciudades las cuales poseen el mayor número de accidentes de tránsito en el país. Los resultados fueron los siguientes:

$\bar{y}=0.076$	$S_2=0.015$	$n_2=56$
$\bar{x}=0.09$	$S_1=0.02$	$n_2=46$

Construya un intervalo de confianza del 90% para la diferencia de medias de las dos muestras.

$\tau_{56+46-2}^{0.95}=1.660$

El intervalo de confianza a usar es:

$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right) \pm \tau_{(n_X+n_Y-2)}^{1-\alpha/2} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{(n_X+n_Y-2)}} \right) \sqrt{\frac{n_X+n_Y}{n_X n_Y}} \right)$$

Sustituyendo los valores:

$$\left\lfloor (0.09-0.076)\pm 1.660\left(\sqrt{\frac{(46-1)(0.02)^2+(56-1)(0.015)^2}{46+56-2}}\right)\left(\sqrt{\frac{46+56}{46*56}}\right)\right\rfloor$$

$$=\big((0.014)-(1.660)(0.0174)(0.199),\ (0.014)+(1.660)(0.0174)(0.199)\big)$$

$$=\big((0.014)-0.00575,\ (0.014)+0.00575\big)$$

$$=(0.00825,\ 0.01975)$$

De esta forma con una confianza del 90% la diferencia de etanol en sangre de estas ciudades se encontraría en el intervalo $(0.00825,\ 0.01975)$. Es decir que no existe una marcada diferencia de concentración de etanol en la sangre en las ciudades que poseen el mayor número de accidentes de tránsito en el país.

Ejemplo 25. Una empresa naturista está ofreciendo un tratamiento muy efectivo que reduce 2 cm el abdomen en un periodo de 3 semanas. Para probar la efectividad de los resultados, la competencia manda a un grupo de mujeres para que prueben dicho tratamiento y ver los cambios, los resultados son los siguientes:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Medida antes	82	78.5	102	79.9	81.9	93.5	79.3	76.5	75	87.8	74.3	78	89.5	81	86	94
Medida Despues	76	72	96	75	77	90.8	74.8	73.50	72	83.9	71.8	75.2	86.7	77	80.5	89.2

Calcular un intervalo de confianza del 80% para la diferencia de medias de la población. ¿Qué se puede decir con respecto al tratamiento para la reducción del abdomen?

Para la diferencia de medias, el intervalo de confianza a construir es de la forma:

$$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\ \pm\ \tau_{(n_X+n_Y-2)}^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{(n_X+n_Y-2)}}\right)\sqrt{\frac{n_X+n_Y}{n_Xn_Y}}\right)$$

Los datos a usar son los siguientes: $\tau_{30}^{0.90}=1.31;\ \bar{X}=83.70;\ \bar{Y}=79.46$.

$$\left\lfloor (83.70-79.46)\pm 1.31\left(\sqrt{\frac{\left((82-83.70)^2+...+(94-83.70)^2\right)+\left((76-79.46)^2+...+(89.20-79.46)^2\right)}{30}}\right)\left(\sqrt{\frac{16+16}{(16)(16)}}\right)\right\rfloor$$

$$=\left((4.24)-1.31\left(\sqrt{\frac{915.40+859.58}{30}}\right)\left(\sqrt{\frac{32}{256}}\right),\ (4.24)+1.31\left(\sqrt{\frac{915.40+859.58}{30}}\right)\left(\sqrt{\frac{32}{256}}\right)\right)$$

$$=\left((4.24)-1.31\left(\sqrt{\frac{1,774.98}{30}}\right)\left(\sqrt{0.125}\right),\ (4.24)+1.31\left(\sqrt{\frac{1,774.98}{30}}\right)\left(\sqrt{0.125}\right)\right)$$

$$=\left(4.24-1.31\left(\sqrt{59.17}\right)(0.35),\ 4.24+1.31\left(\sqrt{59.17}\right)(0.35)\right)$$

$$=(4.24-3.56,\ 4.24+3.56)$$

$$=(0.67,\ 7.80)$$

Se puede decir que con un nivel de confianza del 80%, la diferencia de medias de las medidas de abdomen antes y después, el promedio se encontrará en el intervalo $(0.67,\ 7.80)$. Por lo que se nota que todos los pacientes tuvieron una reducción en las medidas del abdomen después del tratamiento.

Ejemplo 26. En un hospital un grupo de pacientes que se encuentran en recuperación serán sometidos a un periodo de prueba para verificar si el medicamento suministrado durante este tiempo, influye en el periodo de recuperación. Para esto a un primer grupo le será suministrado el medicamento A, el cual es el que siempre se ha suministrado en el hospital; mientras que para un segundo grupo, le será suministrado un nuevo medicamento B, para comprobar si éste ayuda a disminuir el periodo de recuperación. A continuación se presenta una tabla con los resultados obtenidos

Medicamento X	Medicamento Y
$n_A = 40$ $\bar{X} = 7.3$ $\sum_{i=1}^{n_X}(X_i - \bar{X})^2 = 109.2$	$n_B = 42$ $\bar{X}_B = 6$ $\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i - \bar{Y})^2 = 94.3$

Siendo los datos anteriores correspondientes a cada grupo, donde $\bar{X}$ representa el promedio de tiempo (días) de recuperación del grupo respectivo. Calcular un intervalo de confianza del 96% para la diferencia de $\mu_x - \mu_y$. ¿Si hay una mejora en el periodo de recuperación?

El intervalo de confianza será calculado de la siguiente manera:

$$\left(\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) \ \pm \ \tau_{(n_X + n_Y - 2)}^{1-\alpha/2} \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i - \bar{Y})^2}{\left(n_X + n_Y - 2\right)}} \right) \sqrt{\frac{n_X + n_Y}{n_X n_Y}} \right)$$

con $\tau_{40}^{0.98} = 2.123$; sustituyendo:

$$\left(\left(7.3 - 6.5\right) \pm 2.123 \left(\sqrt{\left(\frac{109.2 + 94.3}{40 + 42 - 2}\right)\left(\frac{40 + 42}{(40)(42)}\right)} \right) \right)$$

$$= \left(1.3 - 2.123 \left(\sqrt{\left(\frac{203.5}{80}\right)\left(\frac{82}{1,680}\right)} \right),\ 1.3 + 2.123 \left(\sqrt{\left(\frac{203.5}{80}\right)\left(\frac{82}{1,680}\right)} \right) \right)$$

$$= \left(1.3 - 2.123 \left(\sqrt{\frac{16,687}{134,400}} \right),\ 1.3 + 2.123 \left(\sqrt{\frac{16,687}{134,400}} \right) \right)$$

$$= \left(1.3 - 0.748,\ 1.3 + 0.748\right)$$

$$= \left(0.552,\ 2.048\right)$$

El resultado de este intervalo indica que con un nivel del 96% de confianza, si se repitiera este experimento, la diferencia del tiempo de recuperación de antes y después del medicamento es positiva, es decir, que si hay una mejora en el tiempo de recuperación usando el medicamento B, el cual ayuda a que los pacientes se recuperen más rápidamente en un periodo menor de tiempo.

2.10. Intervalo de confianza para diferencia de proporciones

Sea $X_1,\ldots,X_n \sim$ Bernoulli (p_1), $Y_1,\ldots,Y_n$ $\sim$ Bernoulli (p_2), con $X \perp Y$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i = X \sim \; Bin(n, p_1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} Y_i = Y \sim Bin(\text{m}, p_2)$$

Siendo $X \perp Y$

Primero se calculará la esperanza y la varianza de la diferencia de medias:

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)= \text{ np}_1 - mp_2 \therefore E(X-Y)= \text{ np}_1 - mp_2$$

$$Var(X-Y)=E\left((X-Y)^2\right)-\left[E(X-Y)\right]^2 = E(X^2)-2E(XY)+E\left(Y^2\right)-\left[E(X)-E(Y)\right]^2$$

$$=E\left(X^2\right)-2E(XY)+E\left(Y^2\right)-\left[E^2(X)-2E(XY)+E^2(Y)\right]$$

$$=E\left(\bar{X}^2\right)-2E\left(\bar{X}\bar{Y}\right)+E\left(\bar{Y}^2\right)-E^2\left(\bar{X}\right)+2E\left(\bar{X}\bar{Y}\right)-E^2\left(\bar{Y}\right)=E\left(\bar{X}^2\right)-E^2\left(\bar{X}\right)+E\left(\bar{Y}^2\right)-E^2\left(\bar{Y}\right)$$

$$\therefore Var\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)=Var\left(\bar{X}\right)+Var\left(\bar{Y}\right)=np_1q_1+mp_2q_2$$

Para la construcción del intervalo de confianza para diferencia de proporciones, se hará uso de la siguiente cantidad pivotal a través del t.c.l. se tiene que:

$$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n}\right), \text{ y } \hat{p}_2 \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{p}_1-\hat{p}_2 \sim N\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2, \; \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}\right)$$

Para la construcción de la cantidad pivotal se realizará de manera análoga en el caso de intervalos de proporciones:

$$\frac{X}{n} \to p_1 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{X}{n} \to 1-p_1 \text{ al igual que } \frac{Y}{m} \to p_2 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{Y}{m} \to 1-p_2$$

$$\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right) \to p_1(1-p_1), \text{ lo mismo } \frac{Y}{m}\left(1-\frac{Y}{m}\right) \to p_2(1-p_2)$$

$$\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)+\frac{Y}{m}\left(1-\frac{Y}{m}\right)\to p_1\left(1-p_1\right)+p_2\left(1-p_2\right).$$

$$\sqrt{\frac{\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}{n}+\frac{\frac{Y}{m}\left(1-\frac{Y}{m}\right)}{m}}\to\sqrt{\frac{p_1\left(1-p_1\right)}{n}+\frac{p_2\left(1-p_2\right)}{m}}$$

Así

$$\frac{\frac{X}{n}-\frac{Y}{m}-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1\left(1-p_1\right)}{n}+\frac{p_2\left(1-p_2\right)}{m}}}\div\frac{\sqrt{\frac{\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}{n}+\frac{\frac{Y}{m}\left(1-\frac{Y}{m}\right)}{m}}}{\sqrt{\frac{p_1\left(1-p_1\right)}{n}+\frac{p_2\left(1-p_2\right)}{m}}}=\frac{\left(\frac{X}{n}-\frac{Y}{m}-(p_1-p_2)\right)\sqrt{\frac{p_1\left(1-p_1\right)}{n}+\frac{p_2\left(1-p_2\right)}{m}}}{\sqrt{\frac{p_1\left(1-p_1\right)}{n}+\frac{p_2\left(1-p_2\right)}{m}}\sqrt{\frac{\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}{n}+\frac{\frac{Y}{m}\left(1-\frac{Y}{m}\right)}{m}}}$$

$=\dfrac{\left(\frac{X}{n}-\frac{Y}{m}-(p_1-p_2)\right)}{\sqrt{\frac{\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}{n}+\frac{\frac{Y}{m}\left(1-\frac{Y}{m}\right)}{m}}}$. Llamando $\hat{p}_1=\dfrac{X}{n}$ y $\hat{p}_2=\dfrac{Y}{m}$, la cantidad pivotal queda de la forma:

$$\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}}\sim N\left(0,1\right)$$

Aplicando para la construcción del intervalo de confianza:

$$P\left[-\varphi^{1-\alpha/2}<\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}}<\varphi^{1-\alpha/2}\right]$$

$$P\left(-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right)<\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)-\left(p_1-p_2\right)<\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right)<-\left(p_1-p_2\right)<-\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)+\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)+\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right)>\left(p_1-p_2\right)>\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right)\right)=1-\alpha$$

$$P\left[\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right)<p_1-p_2<\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)+\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right)\right]$$

Quedando el intervalo de confianza al $\left(1-\alpha\right)\%$ para p_1-p_2 de la forma:

$$\left[\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right),\ \left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)+\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right)\right]$$

Ejercicio 27. Se realiza un estudio a dos principales universidades, con el objetivo de determinar la diferencia entre la proporción de estudiantes que realiza sus estudios en el extranjero, particularmente en Holanda, y además concluyen su período exitosamente. El objetivo es que se quiere promover una campaña para la realización de estudios en este país tomando como base la comparación entre las principales universidades. En la primera universidad se sabe que del total de alumnos que se va a realizar estudios a Holanda, un 75% concluye exitosamente. El número de alumnos total que realiza sus estudios en ese país es 1,800. Para la segunda universidad la proporción es de 82% de un total de 1,300. Calcular un intervalo de confianza del 92% para la diferencia de proporciones. ¿De qué tamaño es el error de estimación?

Para el cálculo del intervalo de confianza se usará la siguiente fórmula:

$$\left[\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right),\ \left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)+\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right)\right]$$

Los datos son los siguientes: $\hat{p}_1 = 0.82;\ \hat{p}_2 = 0.75;\ n = 1,300;\ m = 1,800;\ \varphi^{0.96} = 1.75$.

$$\left((0.82-0.75)-1.75\left(\sqrt{\frac{(0.82)(0.18)}{1,300}+\frac{(0.75)(0.25)}{1,800}} \right),\ (0.82-0.75)+1.75\left(\sqrt{\frac{(0.82)(0.18)}{1,300}+\frac{(0.75)(0.25)}{1,800}} \right) \right)$$

$$= \left(0.07-1.75\left(\sqrt{\frac{0.1476}{1300}+\frac{0.1875}{1,800}} \right),\ 0.07+1.75\left(\sqrt{\frac{0.1476}{1300}+\frac{0.1875}{1,800}} \right) \right)$$

$$= (0.07-1.75(0.0148),\ 0.07+1.75(0.0148))$$

$$= (0.07-0.0258,\ 0.07+0.0258) = (0.0442,\ 0.0958).$$

Así que se espera que el promedio de alumnos que realiza sus estudios en Holanda y además concluye su período exitosamente se encontrará en el intervalo $(0.0442,\ 0.0958)$ con un nivel de confianza del 92%, con un error de estimación de ± 0.0258. Siendo la diferencia entre estas universidades muy pequeña, muy cercana al cero, lo cual indica que la proporción de alumnos que termina sus estudios exitosamente es muy parecido en ambas universidades

Ejercicio 28. Casara es una empresa de joyería que está tratando de implementar nuevas políticas para mejora en la atención al cliente en sus sucursales. Para esto quiere ver en que sucursal se encuentra su personal mas efectivo y éstos puedan brindar asesoría a los de las demás sucursales. Se tomó como base dos sucursales las cuales presentan un mayor número de clientes y se hizo una encuesta en donde se les preguntaba si estaban satisfechos con la atención recibida. En la sucursal A una muestra aleatoria de 600 clientes demostró que 450 salían satisfechos, mientras que en la sucursal B una muestra aleatoria de 680, 430 estaban satisfechos. Para estar seguros de no subestimar el porcentaje de compradores que están satisfechos desean calcular un intervalo del 95%:

$$\left\lfloor (\hat{p}_1-\hat{p}_2)-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}} \right),\ (\hat{p}_1-\hat{p}_2)+\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}} \right) \right\rfloor$$

Sustituyendo los valores:

$$\left((0.75-0.63)-(1.96)\left(\sqrt{\frac{(0.75)(0.25)}{600}+\frac{(0.63)(0.37)}{680}} \right),\ (0.75-0.63)+(1.96)\left(\sqrt{\frac{(0.75)(0.25)}{600}+\frac{(0.63)(0.37)}{680}} \right) \right)$$

$$=\left(0.12-0.050,\ 0.12+0.050\right)=\left(0.07,\ 0.17\right)$$

El intervalo obtenido fue de $(0.07, 0.17)$ cuya longitud es de 0.1, es decir la proporción de clientes satisfechos en las diferentes sucursales de Casara son muy similares, por lo que podrían considerar que su atención al cliente es parecida en sus diferentes locales.

Ejercicio 29. La recaudación de cuotas obrero patronales es una de las principales funciones que realizan los institutos de seguridad social de una determinada zona. Se desea comparar el porcentaje de patrones que no paga oportunamente sus cuotas obrero patronal de las dos principales recaudadoras, tomando como base la diferencia de medias. Se desea estimar el número de trabajadores contratados para llevar a cabo la recaudación de éstas cuotas en el siguiente mes. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Zona A	Zona B
$\hat{p}_2=0.55$ $n=7,500$ $\varphi^{0.95}=1.645$	$\hat{p}_1=0.68$ $n=9,000$ $\varphi^{0.95}=1.645$

Calcular un intervalo de confianza del 90% para la proporción de cuotas recabadas efectivamente en diferentes zonas geográficas.

La fórmula a usar es la siguiente:

$$\left\lfloor\left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)-\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right),\ \left(\hat{p}_1-\hat{p}_2\right)+\varphi^{1-\alpha/2}\left(\sqrt{\frac{\hat{p}_1\left(1-\hat{p}_1\right)}{n}+\frac{\hat{p}_2\left(1-\hat{p}_2\right)}{m}}\right)\right\rfloor$$

Desarrollando se obtiene:

$$\left(\left(0.68-0.55\right)-1.645\left(\sqrt{\frac{(0.68)(0.32)}{9,000}+\frac{(0.55)(0.45)}{7,500}}\right),\ \left(0.68-0.55\right)+1.645\left(\sqrt{\frac{(0.68)(0.32)}{9,000}+\frac{(0.55)(0.45)}{7,500}}\right)\right)$$

$$= \left(0.13 - 1.645\left(\sqrt{\frac{0.2176}{9,000} + \frac{0.2475}{7,500}} \right),\ 0.13 + 1.645\left(\sqrt{\frac{0.2176}{9,000} + \frac{0.2475}{7,500}} \right) \right)$$

$$= \left(0.13 - 0.0124,\ 0.13 + 0.0124\right) = \left(0.1176,\ 0.1424\right)$$

La diferencia de proporciones de las dos principales instituciones recaudadoras es muy pequeña, casi cercana a cero, por lo que el número de trabajadores que serán contratados para llevar a cabo la recaudación de los pagos deberá ser igual en ambas.

2.11. Intervalo de confianza para el cociente de varianzas

El intervalo de confianza para el cociente de varianzas es utilizado para comparar las varianzas de dos poblaciones σ_X^2 y σ_Y^2 utilizando el cociente o razón de dos varianzas muestrales $\frac{S_X^2}{S_Y^2}$. Si dicho cociente es casi o igual a uno, no se podrá afirmar que las varianzas no son iguales, sin embargo, un valor muy pequeño o muy grande podrá proporcionar evidencia de que existe una diferencia en las varianzas de las poblaciones. A continuación se construirá el intervalo de confianza para el cociente de varianzas. Por un lado la distribución F tiene forma no simétrica y dependerá de los grados de libertad asociados a S_X^2 y S_Y^2.

$$F_{(n,m)} \sim \frac{\frac{\chi_n^2}{n}}{\frac{\chi_m^2}{m}} \text{.......................................} (11)$$

Por otro lado, $\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$; $\frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi_{(m-1)}^2$

Así que sustituyendo en (11), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\frac{\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2}}{n-1}}{\frac{\frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2}}{m-1}} \sim F_{(n-1,m-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{(n-1)S_X^2}{(\sigma_X^2)(n-1)}}{\dfrac{(m-1)S_Y^2}{(\sigma_Y^2)(m-1)}} = \frac{\dfrac{S_X^2}{(\sigma_X^2)}}{\dfrac{S_Y^2}{(\sigma_Y^2)}} = \frac{(S_X^2)(\sigma_Y^2)}{(S_Y^2)(\sigma_X^2)} \sim F_{(n-1,m-1)}$$

Así que para construir el intervalo de confianza, se hará uso de la cantidad pivotal

$$\left(F_{(n-1,m-1)}^{\alpha/2} < \frac{(S_X^2)(\sigma_Y^2)}{(S_Y^2)(\sigma_X^2)} < F_{(n-1,m-1)}^{1-\alpha/2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(F_{(n-1,m-1)}^{\alpha/2}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2}\right) < \frac{(\sigma_Y^2)}{(\sigma_X^2)} < F_{(n-1,m-1)}^{1-\alpha/2}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2}\right) \right)$$

Por lo tanto el intervalo de confianza del (1-α)*100% de confianza para $\dfrac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}$ es:

$$\Leftrightarrow \left(F_{(n-1,m-1)}^{\alpha/2}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2}\right) < \frac{(\sigma_Y^2)}{(\sigma_X^2)} < F_{(n-1,m-1)}^{1-\alpha/2}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2}\right) \right)$$

Ejemplo 30. Se tienen 2 muestras de 13 y 11 mediciones cuyas varianzas muestrales son:

$S_X^2 = 8.21$ y $S_Y^2 = 4.56$.

Calcular un intervalo de confianza del 90% para el cociente de varianzas. Suponiendo que son muestras aleatorias independientes con distribución normal.

Para obtener el intervalo de confianza se utilizará:

$$\left(F_{(n-1,m-1)}^{\alpha/2}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2}\right) < \frac{(\sigma_Y^2)}{(\sigma_X^2)} < F_{(n-1,m-1)}^{1-\alpha/2}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2}\right) \right)$$

Donde

$S_X^2 = 8.21$ $\qquad\qquad$ $S_Y^2 = 4.56$

$n-1=12$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{m}-1=10$

$$F_{(n-1,m-1)}^{\alpha/2} = \frac{1}{F_{(m-1,n-1)}^{1-\alpha/2}} = \frac{1}{F_{(11-1,13-1)}^{0.95}} = \frac{1}{2.75}$$

$$F_{(n-1,m-1)}^{1-\alpha/2} = F_{(12,10)}^{0.95} = 2.91$$

Así que desarrollando y sustituyendo los datos:

$$\left(\left(\frac{1}{2.75}\right)\left(\frac{4.56}{8.21}\right),\ (2.91)\left(\frac{4.56}{8.21}\right)\right)$$

$$=(0.202,\ 1.616)$$

Por lo que el intervalo de confianza es $(0.202,\ 1.616)$ con un nivel de confianza del 90%. Al estar el uno contenido en el intervalo, indica que las varianzas pueden ser iguales en las muestras.

Ejemplo 31. En una industria farmacéutica se analizan los residuos que se encuentran en las materias primas provenientes de dos proveedores durante un tiempo de 10 días. Calcular un intervalo de 95% de confianza, si se tienen los siguientes datos:

Proveedor/Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0.052	0.043	0.061	0.057	0.046	0.049	0.063	0.056	0.036	0.043
B	0.076	0.041	0.083	0.069	0.081	0.069	0.043	0.073	0.064	0.083

Suponiendo que las muestras son aleatorias y se distribuyen normal.

Para el cálculo del intervalo de confianza del 95%

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{0.052+.....+0.043}{10}$$

$$\overline{X} = 0.0506$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{m} = \frac{0.076+.....+0.083}{10}$$

$$\overline{Y} = 0.076$$

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)}{n-1} \qquad S_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{m-1}$$

$$S_X^2 = \frac{\left(0.052-0.0506\right)^2 + \ldots\ldots. + \left(0.043-0.0506\right)}{10-1} \qquad S_Y^2 = \frac{\left(0.076-0.0682\right)^2 + \ldots\ldots\ldots + \left(0.083-0.0682\right)^2}{10-1}$$

$$S_X^2 = \frac{0.0006864}{9} \qquad S_Y^2 = \frac{0.0020796}{9}$$

$$S_X^2 = 0.0000763 \qquad S_Y^2 = 0.00023107$$

$$F_{(n-1,m-1)}^{\alpha/2} = \frac{1}{F_{(m-1,n-1)}^{1-\alpha/2}}$$

$$= \frac{1}{F_{(9,9)}^{0.975}} = \frac{1}{4.03}$$

Por lo que si se sustituyen los datos anteriores en

$$\left(F_{(n-1,m-1)}^{\alpha/2}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2}\right),\ F_{(n-1,m-1)}^{1-\alpha/2}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2}\right)\right)$$

$$= \left(\left(\frac{1}{4.03}\right)\left(\frac{0.00023107}{0.0000763}\right),\ \left(4.03\right)\left(\frac{0.00023107}{0.0000763}\right)\right)$$

$$= (0.75179,\ 12.2097)$$

Así, si se tomaran muestras aleatorias, el promedio del cociente de varianzas se encontraría en el intervalo $\left(0.75179,\ 12.2097\right)$ con una confianza del 95%. Esto indica que la diferencia de varianza de los residuos entre los proveedores a estudiar es positiva.

Ejemplo 31. Una manera de comprobar que los riñones tienen un buen funcionamiento es a través de la medición de creatinina, por lo que será medida en sangre a dos grupo de hombres, el primer grupo lo conforman aquellos que empiezan a presentar mal funcionamiento de los riñones, siendo un total de 16 pacientes, mientras que el grupo II, conformado por 13 pacientes que tienen un daño mayor en los riñones. Las varianzas de cada grupo fueron $S_X^2 = 1.7$ y $S_Y^2 = 4.3$ respectivamente. Determinar un intervalo de confianza del 90%.

Los datos proporcionados son los siguientes:

$$S_X^2 = 1.7 \qquad S_Y^2 = 4.3$$

$n-1=15$ m-1=12

$$\mathrm{F}_{(n-1,m-1)}^{\alpha/2}=\frac{1}{\mathrm{F}_{(m-1,n-1)}^{1-\alpha/2}}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{F}_{(12,15)}^{0.95}}=\frac{1}{2.48}$$

$$\mathrm{F}_{(n-1,m-1)}^{1-\alpha/2}=\mathrm{F}_{(15,12)}^{0.95}$$

$$\mathrm{F}_{(15,12)}^{0.95}=2.62$$

Sustituyendo:

$$\left(F_{(n-1,m-1)}^{\alpha/2}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2}\right),\ F_{(n-1,m-1)}^{1-\alpha/2}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2}\right)\right)$$

$$=\left(\left(\frac{1}{2.48}\right)\left(\frac{4.3}{1.7}\right),\ (2.62)\left(\frac{4.3}{1.7}\right)\right)$$

$$=(1.02,\ 6.63)$$

Por lo que el intervalo de confianza del 90% para el cociente de varianzas $\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}$ para la medición de creatinina en sangre es $(1.02,\ 6.63)$. Siendo este cociente positivo y mayor a uno lo que implica que existe una diferencia de varianzas respecto a los grupos de pacientes.

2.12. Intervalos de confianza para poblaciones no normales

Hasta ahora se han revisado intervalos en donde la búsqueda de la cantidad pivotal es el principal factor para su construcción, sin embargo resulta que algunas veces no es tan sencillo el determinar dicha cantidad pivotal tal es el caso cuando se busca una función de un parámetro determinado o en el caso del querer hallar un intervalo en familias distintas a la normal. Es por eso que en esta sección se recurrirá a aproximaciones que serán de uso para la construcción del intervalo de confianza de dichos casos.

Una manera de construir un intervalo de confianza es basándose en los estimadores máximo verosímiles mediante la siguiente aproximación:

$$\hat{\theta}\sim N\left(\theta,\frac{1}{nI(\theta)}\right)\Rightarrow\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\frac{1}{nI(\theta)}}}\sim N(0,1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(12)$$

donde $I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right] = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)\right)^2\right]$

Siendo (12) una primera aproximación, la cual es usada como cantidad pivotal para la construcción del intervalo de confianza. Sin embargo en algunos casos no es posible despejar al parámetro deseado por lo que se requiere de una segunda aproximación que se muestra a continuación:

$$\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta})}}} \sim N(0,1)$$

De donde se puede partir de forma más directa para la construcción del intervalo como se muestra a continuación, haciendo uso de la simetría de la distribución normal

$$P\left[-\varphi_{1-\alpha/2} \leq \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta})}}} \leq \varphi_{1-\alpha/2}\right]$$

Así que despejando θ:

$$P\left[-\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta})}} \leq \hat{\theta}-\theta \leq \varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta})}}\right] = P\left[\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta})}} \geq -\hat{\theta}+\theta \geq -\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta})}}\right]$$

$$P\left[\hat{\theta}+\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta})}} \geq \theta \geq \hat{\theta}-\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta})}}\right] = P\left[\hat{\theta}-\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta})}} \leq \theta \leq \hat{\theta}+\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta})}}\right]$$

Así el intervalo de confianza del $(1-\alpha)*100\%$ de confianza es de la forma

$$\left(\hat{\theta}-\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta})}},\ \hat{\theta}+\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\theta})}}\right)$$

Ejemplo 32. Sea $X_1,...,X_n$ una muestra aleatoria con f.d.p Bernoulli(θ), se procederá a calcular un intervalo de confianza utilizando la primera y la segunda aproximación

Se comenzará calculando $I(\theta)$ para la f.d.p. Bernoulli:

$$\text{Sea } f(x;\theta)=\theta^{x}(1-\theta)^{1-x}$$

$$\ln f(x;\theta)=x\ln(\theta)+(1-x)\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)=\frac{x}{\theta}-\frac{(1-x)}{(1-\theta)}$$

$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x;\theta)=-\frac{x}{\theta^2}-\frac{(1-x)}{(1-\theta)^2}$. Así que calculando su esperanza

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\mathrm{X};\theta)\right)=E\left(-\frac{X}{\theta^2}-\frac{(1-X)}{(1-\theta)^2}\right)=-\frac{1}{\theta^2}E(X)-\frac{1}{(1-\theta)^2}E(1-X)$$

$$=-\frac{1}{\theta^2}E(X)-\frac{1-E(X)}{(1-\theta)^2}=-\frac{\theta}{\theta^2}-\frac{(1-\theta)}{(1-\theta)^2}=-\frac{1}{\theta}-\frac{1}{(1-\theta)}$$

$$=\frac{1-\theta+\theta}{\theta(1-\theta)}=\frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

Por lo que $I(\theta)=\frac{1}{\theta(1-\theta)}$. El estimador máximo verosímil es $\hat{\theta}=\bar{X}$, si se sustituye:

$\frac{\bar{X}-\theta}{\sqrt{\frac{\frac{1}{n}}{\theta(1-\theta)}}}\sim N(0,1)\Rightarrow\frac{\bar{X}-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}}\sim N(0,1)$. Así para la construcción del intervalo

$$P\left[-\varphi_{1-\alpha/2}\le\frac{\bar{X}-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}}\le\varphi_{1-\alpha/2}\right]=P\left[\left|\frac{\bar{X}-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}}\right|\le\varphi_{1-\alpha/2}\right]=1-\alpha$$

$$P\left[\frac{\left(\bar{X}-\theta\right)^2}{\frac{\theta\left(1-\theta\right)}{n}}\le\varphi^2_{1-\alpha/2}\right]=P\left[\left(\bar{X}-\theta\right)^2\le\varphi^2_{1-\alpha/2}\left(\frac{\theta\left(1-\theta\right)}{n}\right)\right]$$

$$P\left[\left(\bar{X}-\theta\right)^2\le\varphi^2_{1-\alpha/2}\left(\frac{\theta\left(1-\theta\right)}{n}\right)\right]=P\left[\bar{X}^2-2\bar{X}\theta+\theta^2\le\varphi^2_{1-\alpha/2}\left(\frac{\theta\left(1-\theta\right)}{n}\right)\right]$$

$P\left[\bar{X}^2-2\bar{X}\theta+\theta^2\le\frac{\varphi^2_{1-\alpha/2}\left(\theta\right)}{n}-\frac{\varphi^2_{1-\alpha/2}\left(\theta^2\right)}{n}\right]$, y dado que se busca entre que valores se encuentra θ para que la desigualdad sea válida se debe dar solución a la ecuación de segundo grado:

$$=P\left[\bar{X}^2-2\bar{X}\theta+\theta^2-\frac{\varphi^2_{1-\alpha/2}\left(\theta\right)}{n}+\frac{\varphi^2_{1-\alpha/2}\left(\theta^2\right)}{n}\right]=P\left[\theta^2\left(1+\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)+\theta\left(-2\bar{X}-\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)+\bar{X}^2\right]$$

$$\theta_{1,2}=\frac{-\left(-2\bar{X}-\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)\pm\sqrt{\left(-2\bar{X}-\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)^2-4\left(1+\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)\left(\bar{X}^2\right)}}{2\left(1+\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)}$$

Por lo que el intervalo quedará de la forma:

$P\left[\theta_1\le\theta\le\theta_2\right]=1-\alpha$, donde otra forma de expresarlo es $\left(\theta_1,\theta_2\right)$, así que sustituyendo los valores de θ_1 y θ_2 el intervalo aproximado al $\left(1-\alpha\right)$*100% de confianza para θ es:

$$\left(\frac{-\left(-2\bar{X}-\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)-\sqrt{\left(-2\bar{X}-\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)^2-4\left(1+\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)\left(\bar{X}^2\right)}}{2\left(1+\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)},\frac{-\left(-2\bar{X}-\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)+\sqrt{\left(-2\bar{X}-\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)^2-4\left(1+\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)\left(\bar{X}^2\right)}}{2\left(1+\frac{1}{n}\varphi^2_{1-\alpha/2}\right)}\right)$$

Ahora se calculará el intervalo de confianza para θ usando la segunda aproximación que es de la forma:

$$\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\frac{1}{nI\left(\hat{\theta}\right)}}} \sim N\left(0,1\right) \text{ , sustituyendo}$$

$$P\left[-\varphi_{1-\alpha/2} \le \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\frac{1}{nI\left(\hat{\theta}\right)}}} \le \varphi_{1-\alpha/2}\right] = P\left[-\varphi_{1-\alpha/2} \le \frac{\bar{X}-\theta}{\sqrt{\frac{\bar{X}\left(1-\bar{X}\right)}{n}}} \le \varphi_{1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left[-\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}\left(1-\bar{X}\right)}{n}} \le \bar{X}-\theta \le \varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}\left(1-\bar{X}\right)}{n}}\right] = P\left[\bar{X}-\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}\left(1-\bar{X}\right)}{n}} \le \theta \le \bar{X}+\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}\left(1-\bar{X}\right)}{n}}\right]$$

Por lo tanto el intervalo al $\left(1-\alpha\right)*100\%$ de confianza para θ es:

$$\left(\bar{X}-\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}\left(1-\bar{X}\right)}{n}},\ \bar{X}+\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}\left(1-\bar{X}\right)}{n}}\right)$$

Intervalo de confianza para la transformación de un parámetro

Para el caso en que se desee construir un intervalo de confianza para alguna transformación $f\left(\theta\right)$ se usará la siguiente transformación:

$$f\left(\hat{\theta}\right) \sim N\left(f\left(\theta\right), \frac{\left[f'(\theta)\right]^2}{nI\left(\theta\right)}\right) \Rightarrow \frac{f\left(\hat{\theta}\right)-f\left(\theta\right)}{\sqrt{\frac{\left[f'(\theta)\right]^2}{nI\left(\theta\right)}}} \sim N\left(0,1\right)$$

Donde $\hat{\theta}$ corresponde al estimador máximo verosímil y $f'\left(\theta\right)$ a la derivada de la función.

Como en la sección anterior se precisó en ocasiones resulta complicado obtener un despeje para $f\left(\theta\right)$, se recurre a una segunda aproximación de la forma:

$$\frac{f\left(\hat{\theta}\right)-f\left(\theta\right)}{\sqrt{\frac{\left[f'\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{nI\left(\hat{\theta}\right)}}} \sim N\left(0,1\right)$$

La cual será usada como cantidad pivotal para la construcción del intervalo de confianza:

$$P\left[-\varphi_{1-\alpha/2} \leq \frac{f\left(\hat{\theta}\right)-f\left(\theta\right)}{\sqrt{\frac{\left[f'\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{nI\left(\hat{\theta}\right)}}} \leq \varphi_{1-\alpha/2}\right]=1-\alpha$$

$$P\left[-\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\left[f'\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{nI\left(\hat{\theta}\right)}} \leq f\left(\hat{\theta}\right)-f\left(\theta\right) \leq \varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\left[f'\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{nI\left(\hat{\theta}\right)}}\right]=1-\alpha$$

$$P\left[\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\left[f'\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{nI\left(\hat{\theta}\right)}} \geq -f\left(\hat{\theta}\right)+f\left(\theta\right) \geq -\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\left[f'\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{nI\left(\hat{\theta}\right)}}\right]=1-\alpha$$

$$P\left[f\left(\hat{\theta}\right)-\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\left[f'\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{nI\left(\hat{\theta}\right)}} \leq f\left(\theta\right) \leq f\left(\hat{\theta}\right)+\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\left[f'\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{nI\left(\hat{\theta}\right)}}\right]=1-\alpha$$

Siendo el intervalo al $\left(1-\alpha\right)*100\%$ de confianza para $f\left(\theta\right)$ es:

$$\left(f\left(\hat{\theta}\right)-\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\left[f'\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{nI\left(\hat{\theta}\right)}},\ f\left(\hat{\theta}\right)+\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\left[f'\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{nI\left(\hat{\theta}\right)}}\right)$$

Ejemplo 33. Encontrar $P\left(X=1\right)$ para una f.d.p. exponencial con $\lambda > 0$. Obtener un intervalo al $\left(1-\alpha\right)\%$ de confianza a través de la segunda aproximación

Se tiene que $P\left(X=1\right)=\lambda e^{-\lambda}$. Y se hará uso de lo siguiente para obtener una cantidad pivotal:

$$\frac{f\left(\hat{\theta}\right)-f\left(\theta\right)}{\sqrt{\frac{\left[f'\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{nI\left(\hat{\theta}\right)}}} \sim N\left(0,1\right)$$

Cuyo intervalo es de la forma:

$$P\left(f\left(\hat{\theta}\right)-\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\left[f'\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{nI\left(\hat{\theta}\right)}} \le f\left(\theta\right) \le f\left(\hat{\theta}\right)+\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\left[f'\left(\hat{\theta}\right)\right]^2}{nI\left(\hat{\theta}\right)}} \right)=1-\alpha$$

Donde: $f\left(\hat{\lambda}\right)=\bar{X}e^{-\bar{X}}$; $f\left(\lambda\right)=\lambda e^{-\lambda}$; $f'\left(\lambda\right)=-\lambda e^{-\lambda}+e^{-\lambda}$; $f'\left(\hat{\lambda}\right)=-\bar{X}e^{-\bar{X}}+e^{-\bar{X}}$; $\hat{\lambda}=\bar{X}$; $I\left(\hat{\lambda}\right)=\frac{1}{\bar{X}}$. Así que sustituyendo los valores:

$$P\left(\bar{X}e^{-\bar{X}}-\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\left[-\bar{X}e^{-\bar{X}}+e^{-\bar{X}}\right]^2}{n\left(\frac{1}{\bar{X}}\right)}} \le f\left(\lambda\right) \le \bar{X}e^{-\bar{X}}+\varphi_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\left[-\bar{X}e^{-\bar{X}}+e^{-\bar{X}}\right]^2}{n\left(\frac{1}{\bar{X}}\right)}} \right)=1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}e^{-\bar{X}}-\varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\left|-\bar{X}e^{-\bar{X}}+e^{-\bar{X}}\right|}{\sqrt{\frac{n}{\bar{X}}}}\right) \le f\left(\lambda\right) \le \bar{X}e^{-\bar{X}}+\varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\left|-\bar{X}e^{-\bar{X}}+e^{-\bar{X}}\right|}{\sqrt{\frac{n}{\bar{X}}}}\right) \right)=1-\alpha$$

Siendo el intervalo aproximado al $\left(1-\alpha\right)*100\%$ de confianza para $f\left(\lambda\right)$ es

$$\left(\bar{X}e^{-\bar{X}}-\varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\left|-\bar{X}e^{-\bar{X}}+e^{-\bar{X}}\right|}{\sqrt{\frac{n}{\bar{X}}}}\right),\ \bar{X}e^{-\bar{X}}+\varphi_{1-\alpha/2}\left(\frac{\left|-\bar{X}e^{-\bar{X}}+e^{-\bar{X}}\right|}{\sqrt{\frac{n}{\bar{X}}}}\right) \right)$$

Ejercicios recomendados

- Lectura recomendada. Intervalo de confianza: La estadística en cómic, Gonick L. y Smith W.
- Consultar el portal www.math.usu.edu/schneit/ctis/. En el cual se seleccionará el ícono correspondiente a intervalos de confianza. En él, seleccione un tamaño de muestra, y pruebe con los diferentes niveles de confianza para construir los intervalos e interprete.

Intervalos aleatorios

- Sea $X_1,\ldots,X_{10}$ muestra aleatorio de $N\left(\mu,\sigma^2\right)$. Sea $Y=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$. ¿Cuál es la probabilidad de que el intervalo $\left(\frac{Y}{20.5},\ \frac{Y}{3.5}\right)$ incluya al punto σ^2?
- Sea X variable aleatoria con

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & 0<x<\infty \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que el intervalo aleatorio $\left(X,\ 3X\right)$ incluya al punto 3. ¿Cuál es el tamaño esperado del intervalo?

- Si X se distribuye $N\left(0,\sigma^2\right)$, con $\sigma^2>0$. ¿Cuál es la probabilidad de que el intervalo aleatorio $\left(|X|,\ |10X|\right)$ incluya al punto σ? Y ¿cuál es el valor esperado de la longitud de este intervalo aleatorio? [15]

Intervalo de confianza para μ con σ^2 conocida

- (Sheldon M. Ross) Suponga que si la señal tiene intensidad μ originada en la locación A, entonces la intensidad recorrida a la locación B se distribuye normal con media μ y desviación estándar 13. Esto es, debido al ruido, la intensidad recorrida difiere de la intensidad actual de la señal por una cantidad que es normal con media 0 y desviación estándar 3. Para reducir el error la misma señal es independientemente recorrida 10 veces. Si los valores sucesivos recorridos son:

17, 21, 20, 18, 19, 22, 20, 21, 16, 19

[15] Hogg Robert V, Craig Allen T. *Introduction to mathematical statistcs*. 3ª ed. New York. Collier acmillab international editions 1970.

Construir un intervalo de confianza del 95%, 90% y 99% para μ .[16]

Tamaño de muestra

- Si la desviación estándar de la población es $\sigma = 2$ el 95% y se quiere un intervalo de confianza para estimar la media μ , ¿de qué tamaño se necesita la muestra para tener un error de estimación del 0.01?[17]

- La concentración de bifenilos policlorados de un pescado capturado en el lago se midió mediante una técnica que se conoce para dar lugar a un error de medición que se distribuye normalmente con una desviación estándar 0.08 partes por millón. Si los resultados de 10 medidas independientes del pescado fueron:
  11.2, 12.4, 10.8, 11.6, 12.5, 10.1, 11.0, 12.2, 12.4, 10.6
  Dar un intervalo del 95% de confianza[18]

- La agencia de protección ambiental está preocupada acerca de las cantidades de bifenilo policlorado, un químico tóxico en la leche de las madres lactantes. En una muestra de 20 mujeres, las cantidades (en partes por millón) de bifenilo policlorado fueron las siguientes:
  16, 0, 0, 2, 3, 6, 8, 2, 5, 0, 12, 10, 5, 7, 2, 3, 8, 17, 9, 1.
  Use los datos para obtener

a) Un intervalo de confianza del 95%
b) Un intervalo de confianza del 99%
De la cantidad promedio de bifenilo policorado en la leche de las madres lactantes.[19]

- Se considera que las primeras víctimas de ataques cardíacos tiempo son particularmente vulnerables a los ataques cardíacos adicionales durante el año siguiente al primer ataque. Para estimar la proporción de víctimas que sufren un ataque adicional dentro de 1 año, una muestra aleatoria de 300 últimos pacientes de ataque cardiaco fue rastreado durante 1 año.

a) Si 46 de ellos sufrieron un ataque de un ataque dentro de este año, dar una estimación del intervalo de confianza del 95 por ciento de la proporción deseada.
b) Repita la parte a) suponiendo que 92 sufrieron un ataque en el año.[20]

Intervalo para la media con σ desconocida

- Según el Environment News (septiembre de 1975) la lluvia ácida causada por la reacción de ciertos contaminantes en el aire con el agua de la lluvia parece ser un problema creciente en la parte noroeste de Estados Unidos. (La lluvia ácida afecta el

[16] Ross Sheldon M. *Introductory statistics*. 3ª edición Elsevier Ltd, Oxford 2010
[17] Ross Sheldon M. *Introductory statistics*. 3ª edición Elsevier Ltd, Oxford 2010
[18] Ross Sheldon M. *Introductory statistics*. 3ª edición Elsevier Ltd, Oxford 2010
[19] Ross Sheldon M. *Introductory statistics*. 3ª edición Elsevier Ltd, Oxford 2010
[20] Ross Sheldon M. *Introductory statistics*. 3ª edición Elsevier Ltd, Oxford 2010

suelo y corroe las superficies metálicas expuestas.) La lluvia pura que se precipita a través del aire limpio tiene un ph de 5.7 (el ph es una medida para la acidez; 0 es ácido, 14 es alcalino). Supóngase que se analizan muestras de agua de 40 lluvias con respecto a su ph y que $\overline{X}$ y S son iguales a 3.7 y 0.5, respectivamente. Determinar un intervalo de confianza de 99% para la media de los ph en las lluvias e interpretar el intervalo.[21]

Intervalo de confianza para diferencia de medias

Con desviación estándar conocida

- Se administraron dos nuevos medicamentos a pacientes con un padecimiento cardíaco. El primer medicamento bajó la presión sanguínea de 16 pacientes en un promedio de 11 puntos con una desviación estándar de 6 puntos. El segundo medicamento bajó la presión sanguínea de otros 20 pacientes en un promedio de 12 puntos, con una desviación estándar de 8 puntos. Determinar un intervalo de confianza para la diferencia en la reducción media de la presión sanguínea, al suponer que las mediciones tienen distribuciones normales con las varianzas iguales.[22]

Con desviación estándar desconocida

- El cobre sólido, producido por sinterización (calentamiento sin fundir) de un polvo en condiciones ambientales especificadas, se mide a continuación para ver su porosidad (en fracción de volumen debido a huecos) en un laboratorio. Una muestra de $n_1 = 4$ mediciones independientes de porosidad tienen una medida de $\overline{y}_1 = 0.22$ y varianza de $S_1^2 = 0.0010$. Un segundo laboratorio repite el mismo proceso en cobre sólido formado de un polvo idéntico y obtiene $n_2 = 5$ mediciones independientes de porosidad con $\overline{y}_1 = 0.17$ y $S_1^2 = 0.0020$.Calcule la diferencia entre las medias poblacionales $(\mu_1 - \mu_2)$ para estos dos laboratorios , con una confianza de 0.95.[23]

Intervalos de diferencia de medias con σ conocida

- En un proceso químico dos catalizadores están siendo comparados por su efecto en el resultado de la reacción del proceso. Se preparó una muestra de 12 lotes utilizando el catalizador 1 y una muestra de 10 lotes utilizando el catalizador 2. Los 12 lotes en los cuales se usó el catalizador 1 dieron un rendimiento medio de 85 con una

[21] Wackerly Dennis D. et al. Estadística matemática con aplicaciones, Séptima edición Cengage Learning 2010.
[22] Wackerly Dennis D. et al. Estadística matemática con aplicaciones, Séptima edición Cengage Learning 2010.
[23] Wackerly Dennis D. et al. Estadística matemática con aplicaciones, Séptima edición Cengage Learning 2010.

desviación estándar de 4, en tanto que el rendimiento para la segunda muestra fue de 81 con una desviación estándar de 5. Obtenga un intervalo de confianza de 90% para la diferencia entre las medias poblacionales, suponiendo que éstas están distribuidas de forma aproximadamente normal.[24]

Intervalos de diferencia de medias con σ desconocida

- Los siguientes datos expresados en días, representan el tiempo de recuperación de pacientes tratados al azar con uno de los medicamentos, para atacar infecciones graves en la vejiga:

Medicamento 1	Medicamento 2
$n_1 = 14$	$n_2 = 16$
$\bar{X}_1 = 17$	$\bar{X}_2 = 19$
$S_1^2 = 1.5$	$S_2^2 = 1.8$

Obtenga un intervalo de confianza del 99% para la diferencia de $(\mu_1 - \mu_2)$ en el tiempo medio de recuperación para los dos fármacos, suponiendo poblaciones normales con varianzas iguales.[25]

Intervalos de proporciones

- Se realizará en cierta ciudad un estudio para estimar el porcentaje de ciudadanos a quienes favorece tener agua fluorizada. ¿De qué tamaño se necesita una muestra, si se quiere por lo menos una confianza 95% de que la estimación esté dentro del 1% del porcentaje verdadero?[26]

Intervalos de diferencia de proporciones

- Un genetista está interesado en la proporción de hombres y mujeres existentes en una población que tiene una cierta irregularidad menor en la sangre. En una muestra

[24] Walpole Ronald, Myers Raymond. *Probabilidad y Estadística para ingenieros.* 3ª edición México. Interamericana 1987.
[25] Walpole Ronald, Myers Raymond. *Probabilidad y Estadística para ingenieros.* 3ª edición México. Interamericana 1987.
[26] Walpole Ronald, Myers Raymond. *Probabilidad y Estadística para ingenieros.* 3ª edición México. Interamericana 1987.

aleatoria de 1000 varones, se halla que 250 están afectados, en tanto que 275 de 1000 mujeres examinadas manifestaron esta irregularidad. Calcule el intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre la proporción de hombres y mujeres que presenten la irregularidad hemática.[27]

- Se realizó un ensayo clínico para determinar si cierto tipo de inoculación tiene algún efecto en la incidencia de determinada enfermedad. Una muestra de 1000 ratas se mantuvo en un ambiente controlado durante un período de 1 año; a 500 ratas se les aplicó la inoculación. En el grupo al que no se le proporcionó la sustancia hubo 120 incidencias de la enfermedad, en tanto que 98 de las del grupo inoculado lo contrajeron. Si se llama p_1 a la probabilidad de incidencia del padecimiento en ratas no inoculadas y p_2 a la probabilidad de incidencia después de haber sido inoculadas, calcule un intervalo de confianza del 90% para $p_1 - p_2$.[28]

Intervalo de cociente de varianzas

- Una muestra aleatoria de 20 estudiantes obtuvo una calificación media de $\bar{X} = 72$, con una varianza de $S^2 = 16$, en una prueba de matemáticas realizada en una universidad. Suponiendo que las calificaciones se distribuyen normalmente, encuentra un intervalo de confianza del 98%, 90% y 95% para σ^2.[29]

Intervalo de proporciones

- La American Sociological Review publicó un estudio sobre el efecto que tiene en las personas el enriquecimiento repentino sobre sus deseos de trabajar. Se preguntó a cada uno de un grupo de 393 hombres: “Si por suerte, heredara usted suficiente dinero para vivir cómodamente sin trabajar, piensa que trabajaría de todas maneras, o que no” El estudio reveló que 314 de los hombres contestaron “seguiría trabajando”. Sobre esta base calcular el intervalo de confianza del 95% para la fracción verdadera de todos los que darían esa respuesta.[30]

Intervalo de confianza para la media cuando la varianza es conocida

- En 1951-1952 se llevó a cabo un estudio de los beneficiarios de seguros de la Oficina del Seguro Social para pensionados (BOASI). Se tomó una muestra de

---

[27]Walpole Ronald, Myers Raymond. *Probabilidad y Estadística para ingenieros.* 3ª edición México. Interamericana 1987.
[28] Walpole Ronald, Myers Raymond. *Probabilidad y Estadística para ingenieros.* 3ª edición México. Iteramericana 1987.
[29] Walpole Ronald, Myers Raymond. *Probabilidad y Estadística para ingenieros.* 3ª edición México. Iteramericana 1987.
[30] Hoel Paul, Jessen Raymond. *Estadística básica para negocios y economía*. 1ª ed. México D.F. Compañía editorial continental, S.A. de C.V. 1983.

2,533 viudas de edad avanzada que constituía aproximadamente el 1% de la población estudiada. Se entrevistó personalmente a estas aseguradoras y se encontró una media de 804 dólares del ingreso en dinero de todas las fuentes con una desviación de 589 dólares.

a. Calcule los límites al 99% de confianza para μ , media de la población.
b. Se encontró que el 15.3% de estas viudas habían recibido 1,200 dólares o más. Calcule los límites de confianza de 99% para p, la fracción de la población con ingreso de 1,200 o mayor.[31]

- Sean $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ las medias de dos muestras aleatorias independientes, cada una de tamaño n, con sus respectivas distribuciones $N\left(\mu_1,\sigma^2\right)$ y $N\left(\mu_2,\sigma^2\right)$, con varianzas iguales y conocidas.

  Encontrar *n* tal que $P\left(\bar{X}-\bar{Y}-\frac{\sigma}{5}<\mu_1-\mu_2<\bar{X}-\bar{Y}+\frac{\sigma}{5}\right)=0.90$.[32]

Tamaño de muestra:

- La gerencia de la empresa exige al laboratorio que dé resultados con una precisión de ± 0.005 y con una confianza del 95%. ¿De cuántas observaciones tienen que constar las muestras si se sabe que $\sigma = 0.0068$

[31] Hoel Paul, Jessen Raymond. *Estadística básica para negocios y economía*. 1ª ed. México D.F. Compañía editorial continental, S.A. de C.V. 1983.
[32] Hogg Robert V, Craig Allen T. *Introduction to mathematical statistcs*. 3ª ed. New York. Collier acmillab international editions 1970

CAPÍTULO III: PRUEBAS DE HIPÓTESIS

En el capítulo anterior se trató de estimar un parámetro poblacional proponiendo una serie de valores (intervalo) sobre las cuales estaría localizado el verdadero parámetro con determinada probabilidad. En el presente capítulo se continuará abordando uno de los principales temas de estudio de la inferencia estadística que es el de las pruebas de hipótesis o también conocido como contraste de hipótesis. A diferencia de los intervalos de confianza, las pruebas de hipótesis toman como base una declaración referente a un parámetro poblacional.

Las pruebas de hipótesis son utilizadas para el control de calidad, por ejemplo, para verificar o controlar ciertas características en materiales que serán usados por una industria, ver que materiales son más resistentes, comparación de pureza de sustancias, la calidad técnica de un ensamblaje, por ejemplo si el administrador de un hospital puede suponer el promedio de permanencia de los pacientes internados en el hospital es de determinados días, un médico puede suponer que cierto medicamento será eficaz en un 90% de los casos en que se utilice, o para comparar la efectividad de dos medicamentos que son muy similares cuyo costo es distinto.

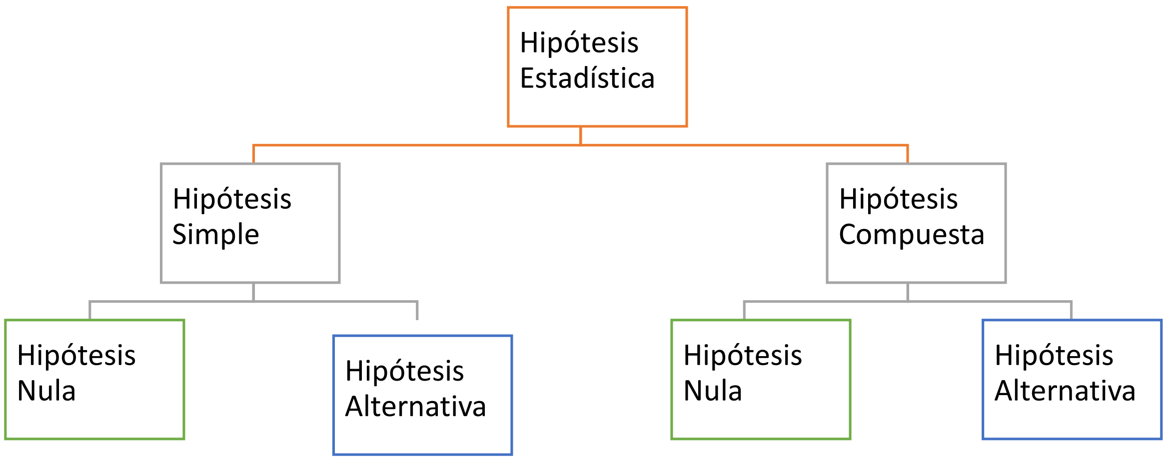
3.1 Tipos de hipótesis

Definición 6. Una hipótesis estadística es una aseveración o afirmación acerca del comportamiento distribucional de ciertas poblaciones de interés, la cual puede ser verificada mediante métodos estadísticos con el propósito de tomar una decisión.

Dentro de estas hipótesis estadísticas se encuentran: la hipótesis simple y la hipótesis compuesta. La primera se denomina así debido a que está especificada completamente su distribución, mientras que en la compuesta no.

Cada una de éstas se pueden sub agrupar como hipótesis nula e hipótesis alternativa, siendo esta última usualmente la hipótesis del investigador.

Figura 8. Tipos de hipótesis



La hipótesis nula consiste en una afirmación que se hace sobre un parámetro poblacional, por lo que un objetivo primordial será el rechazar o no dicha afirmación. La hipótesis alternativa será la afirmación considerada en el caso de que la hipótesis nula sea rechazada. Se denotarán como

$$H_0 : \text{Hipótesis nula}$$
$$\text{Vs.}$$
$$H_1 : \text{ Hipótesis alternativa}$$

El parámetro sobre el cual se realizarán hipótesis toma valores en un espacio paramétrico que será denotado por Θ, es decir $\theta \in \Theta$. Dicho espacio estará subdividido en dos subconjuntos, el primero que será aquel que cumple con lo establecido en la hipótesis nula que será Θ_0 y aquel subconjunto que cumple con los supuestos de la hipótesis alternativa Θ_1; siendo $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$, esto es que ambos espacios son independientes, donde

$$\theta_0 = \{\theta \in \Theta | H_0\} \qquad\qquad \theta_1 = \{\theta \in \Theta | H_1\}$$

Ejemplo 34. Sea $X_1,....,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$, con σ^2 conocida:

$H_0 : \mu = 0$ (hipótesis nula simple) vs. $H_1 : \mu > 0$ (hipótesis alternativa compuesta)

Ejemplo 35. Si se lanza una moneda, y se desea probar que no está bien calibrada, hipótesis nula y alternativa quedará de la siguiente manera:

$$H_0 : p = 0.5 \text{ vs. } H_1 : p \neq 0.5$$

Ejemplo 36. Para una investigación acerca del número de estudiantes que terminan dentro del periodo establecido la carrera de actuaría, se desea probar que la mayor parte de ellos la termina en un período mayor (un año); por lo que las hipótesis quedan de la siguiente manera:

$$H_0 : p = 4 \text{ años vs. } H_1 : p = 5 \text{ años}$$

Ejemplo 37. Se desea introducir un nuevo fármaco para la migraña, sin embargo su precio es muy parecido a los fármacos existentes, por lo que para poder insertarlo en el mercado es necesario comprobar que el tiempo de efectividad de éste, es menor a los demás. El promedio de tiempo para los fármacos en existencia es de 30 minutos.

$$H_0 : \theta = 30 \text{ Hipótesis Nula Simple vs } H_1 : \theta < 30 \text{ Hipótesis alternativa compuesta.}$$

3.2.- Región crítica

Definición 7. Sea $X_1,..,X_n$ una muestra aleatoria con f.d.p. $f_X(\mathrm{x},\theta)$. El espacio muestral es el conjunto de valores posibles que la muestra puede tomar y será denotado por Ω.

Definición 8. La región crítica o de rechazo es el conjunto de valores bajo los cuales la hipótesis que se desea probar es rechazada y será denotada por C, donde C es un subconjunto de Ω.

$$C = \left\{X_1,...,X_n \in \Omega \middle| \text{Rechazar H}\right\} \text{ y } C^* = \left\{X_1,...,X_n \in \Omega \middle| \text{No rechazar H}\right\}$$

Para ver un poco más a detalle se ejemplificara:

Ejemplo 38. Suponga que se desea probar la siguiente hipótesis estadística:

$$H_0 : p = \frac{1}{2} \text{ vs } H_a : p \neq \frac{1}{2}$$

Se rechaza H_0 si y solo si $\bar{X} \geq 7$, por lo que la región de rechazo es de la forma $C = \left\{X_1,.....,X_{10} : \bar{X} \geq 7\right\}$.

Ejemplo 39. Sea $X_1,...,X_n$ una muestra aleatoria con una distribución $N\left(\mu,\sigma^2\right)$. Se desea contrastar las siguientes hipótesis $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_a : \mu > \mu_0$. Será rechazada la prueba si $\bar{X} \geq k$, así $C = \left\{X_1,...,X_n \middle| \bar{X} \geq k\right\}$.

Ejemplo 40. Los resultados de las puntuaciones en los exámenes de estadística de un determinado colegio presentan una distribución normal con los siguientes parámetros: $N(100,18)$. Se desea regularizar a los estudiantes para observar una mejora en la media de las puntuaciones, por lo que se realiza nuevamente una prueba similar a una muestra de 200 alumnos, esperando observar mejoras en los resultados.

Las hipótesis estadísticas son de la forma: $H_0 : \mu = 100$ contra $H_a : \mu > 100$. Y la región crítica es de la forma: $C = \left\{ X_1, \ldots\ldots, X_{200} \,\middle|\, \frac{\sum_{i=1}^{200} X_i}{200} > 100 \right\}$.

Figura 9. Región de rechazo para las pruebas de hipótesis

Fuente: Elaboración propia

3.3.- Tipos de errores en una decisión estadística

Cuando se plantea una hipótesis hay dos posibles resultados: rechazarla o no, y en cualquiera de los dos casos existe una probabilidad de cometer un error.

Para ver los posibles resultados de la decisión que tomará, se usará el cuadro de decisión estadístico.

Figura 10. Cuadro de decisión estadística

	H_0 es cierta	H_0 es falsa
Rechazar H_0	Error Tipo I	Acierto
No Rechazar H_0	Acierto	Error Tipo II

Donde se observa que el problema surge cuando se comete algún tipo de error. Serán definidos dos tipos de errores:

- Error tipo I: Cuando la hipótesis nula es rechazada siendo ésta cierta
- Error tipo II: Cuando la hipótesis nula no es rechazada, siendo falsa

Estos tipos de errores poseen una probabilidad, para el error tipo I es conocida como significancia de la prueba o nivel de significancia y serán presentadas de la siguiente forma:

$$\alpha = P\left[\text{Error tipo I}\right] = P\left[\text{Rechazar } H_0 \middle| H_0\right]$$
$$\beta = P\left[\text{Error tipo II}\right] = P\left[\text{No Rechazar } H_0 \middle| H_a\right] = P\left[\text{Escoger } H_0 \middle| H_a\right]$$

Es importante referir otros términos que están relacionados con estos tipos de errores como lo son tamaño de la prueba y potencia de la prueba.

Definición 9. Una prueba de hipótesis (simple vs. simple) con C^* como su región de rechazo, se define el *tamaño de la prueba* denotado por α como:

$$P\left[\left(X_1,\ldots,X_n\right) \in C^* \middle| H_0\right] = \alpha$$

En el caso de que el contraste sea compuesta vs. compuesta, es decir, sea

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Se define el tamaño de la prueba de la siguiente manera:

$$\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\, P\left[\left(X_1,\ldots,X_n\right) \in C^* \middle| \Theta\right] = \alpha$$

Es decir, la máxima probabilidad de cometer el error tipo I sea α.

Definición 10. Cuando las hipótesis a contrastar son ambas simples, se le conoce como *potencia de la prueba* a la probabilidad de rechazar H_0 cuando esta es falsa. Otra forma de obtenerla es a partir de β de la siguiente manera: $1-\beta$.

El objetivo consiste en dado un α encontrar la región crítica con mayor potencia.

A continuación se muestran algunos ejemplos en los cuales se busca calcular las probabilidades de error.

Ejemplo 41. Si $X_1,...,X_{10}$ se distribuye Poisson con media λ. Se tiene la hipótesis nula simple H_o : λ=1 y la hipótesis alternativa compuesta H_a : $\lambda = 3$. Sea la muestra aleatoria de tamaño $n = 10$. Donde la región de rechazo está dada por: $C = \left\{ \left(X_1,....,X_{10} \right) \middle| \sum_{i=1}^{10} X_i \geq 16 \right\}$. Calcular los dos tipos de errores.

a) Error tipo I

$$\alpha = \mathrm{P}\left[\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \middle| \mathrm{H}_0 \text{ es cierta} \right]$$

$$\alpha = P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 16 \middle| H_0 : \lambda = 1 \right) \text{ donde la f.d.p. de una Poisson es } \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Además $X_1,.......,X_{10}$ ~ Poisson (10λ), y dado que $H_0 : \lambda = 1 \Rightarrow X_1,\ldots,X_{10} \sim \text{Poisson}(10)$.

$$\alpha = \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 16 \right] = 1 - \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{10} X_i < 16 \right] = 1 - \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 15 \right]$$
$$= 1 - \sum_{i=1}^{15} \frac{(4)^i \left(e^{-4} \right)}{i!} = 0.0487404$$

b) Error tipo II

$$\beta = P\left[\text{No Rechazar } \mathrm{H}_0 \middle| \mathrm{H}_a \text{ es cierta} \right]$$

Para éste caso se tomará $\lambda = 3 \Rightarrow X_1,\ldots,X_{10} \sim$ Poisson (30).

$$\beta = \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{10} X_i < 16 \middle| \mathrm{H}_a : \lambda = 3 \right]$$

$$= \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{10} X_i < 16 \right] = \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 15 \right]$$

$$=\sum_{i=0}^{15}\frac{(8)^i\left(e^{-8}\right)}{i!}=0.00194748$$

Conociendo el valor de β es posible calcular la potencia de la prueba de la siguiente manera:

$$Potencia=1-\beta=0.9980525$$

Ejemplo 42. Si X tiene una distribución Normal con parámetros $N(\mu,16)$. Las hipótesis a probar son $H_0:\mu=50$ y la hipótesis alternativa $H_a:\mu=55$. Siendo la región crítica la siguiente para una muestra de tamaño 40 : $C=\left\{X_1,\ldots..,X_{40}\left|\frac{\sum_{i=1}^{40}X_i}{40}>50\right.\right\}$. Calcular los dos tipos de errores.

a) Error tipo I

$$\alpha=\mathrm{P}\left[\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \middle| \mathrm{H}_0 \text{ es cierta}\right]=\mathrm{P}\left[X_1,\ldots,X_{40}:\frac{\sum_{i=1}^{40}X_i}{40}>50 \middle| \mathrm{H}_0:\ \mu=50\right]$$

$$\begin{aligned}\alpha=\mathrm{P}\left[\bar{X}>50\right]&=P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{16}}>\frac{50-\mu}{\sqrt{16}}\right]\\&=P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{4}>\frac{50-50}{4}\right]\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

b) Error tipo II

$$\beta=\mathrm{P}\left[\text{No Rechazar } \mathrm{H}_0 \middle| \mathrm{H}_a \text{ es cierta}\right]$$

Para este caso se tomará el valor de $\mu=55$.

$$
\begin{aligned}
\beta &= P\left(X_1,\ldots,X_{40} \middle| \bar{X} \le 50\right)_{|H_a} \\
&= P\left(\bar{X} \le 50\right) = P\left(\frac{\bar{X}-55}{4} \le \frac{50-55}{4}\right) \\
&= 1-\varphi(1.25) = 1-0.894 \\
&= 0.106
\end{aligned}
$$

Siendo $\beta = 0.106 \Rightarrow 1-\beta = 0.894$ que corresponde a la potencia de la prueba.

Ejemplo 43. Sea $X_1,....,X_8$ una muestra aleatoria con f.d.p. bernoulli, se desea contrastar las siguientes hipótesis $H_0 : \mathrm{p} = 0.2$ contra $H_a : p = 0.7$, donde la región crítica está dada de la siguiente forma $C = \left\{ \left(X_1,...,X_{15}\right) : \sum_{i=1}^{15} X_i > 2 \right\}$.

a) Error tipo I

$$\alpha = \mathrm{P}\left[\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \middle| \mathrm{H}_0 \text{ es cierta}\right] = \mathrm{P}\left[X_1,...,X_{15} : \sum_{i=1}^{15} X_i > 2 \middle| \mathrm{H}_0 : \mathrm{p}{=}0.2\right]$$

$$= P\left[\sum_{i=1}^{15} X_i > 2 \middle| X_i \sim Ber(0.2)\right] = 0.6019768$$

b) Error tipo II

$$\beta = \mathrm{P}\left[\text{No rechazar } \mathrm{H}_0 \middle| \mathrm{H}_a \text{ es cierta}\right] = \mathrm{P}\left[X_1,...,X_{15} : \sum_{i=1}^{15} X_i \le 2 \middle| \mathrm{H}_a : \mathrm{p}{=}0.7\right]$$

$$= P\left[\sum_{i=1}^{15} X_i \le 2 \middle| X_i \sim Ber(0.7)\right] = 8.719352e-06$$

Por lo que la potencia de la prueba es $1-\beta = 0.9999913$

3.4.- Función potencia

En la sección anterior se revisaron los dos tipos de errores que hay para las hipótesis simples que son:

$$\alpha = P[\text{Error tipo I}] = P\left[\text{Rechazar } H_0 \middle| H_0\right]$$

$$\beta = P[\text{Error tipo II}] = P\left[\text{No Rechazar } H_0 \middle| H_1\right] = P\left[\text{Escoger } H_0 \middle| H_1\right]$$

Sin embargo, existe otra probabilidad definida de la siguiente manera:

$P\left(\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \left|H_1\right.\right) = P\left(\text{Escoger } \mathrm{H}_1 \left|H_1\right.\right) = 1-\beta$

Es decir la probabilidad de acierto. En el caso de hipótesis simples es conocida como potencia de contraste, mientras que en hipótesis compuestas se le conoce como función potencia.

La función potencia es una función del parámetro, la cual representa la probabilidad de que los resultados muestrales entren en la región crítica bajo la hipótesis a consideración[33]. Así que a partir de una hipótesis nula, una alternativa y un nivel de significación dado, la función potencia, es una función que representa la probabilidad de rechazar la hipótesis nula. Para esto también se evalúan los diferentes valores que puede tomar el parámetro dada una determinada hipótesis nula, una alternativa y un nivel de significancia deseado.

Una función potencia es aquella que muestra la relación que existe entre la probabilidad de rechazar una H_0 y los diferentes valores que puede asumir el parámetro, dadas H_0, H_1 , un nivel de significancia deseado y C^* una región de rechazo de la prueba, entonces se define a la función potencia como:

$$\pi_{C^*}(\theta) = \left[\text{Rechazar } H_i \left|\theta\right.\right]$$

Esto es si le son asignadas diferentes valores al parámetro bajo los cuales se obtendrán distintas probabilidades de que la hipótesis sea rechazada.

La función potencia puede ser expresada con base a las hipótesis nula y alternativa:

$$\pi_{C^*}(\theta = \theta_0) = P\left[\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \left|H_0\right.\right] = \alpha$$
$$\pi_{C^*}(\theta = \theta_1) = P\left[\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \left|H_1\right.\right] = 1-\beta$$

A continuación se darán algunos ejemplos de la función potencia:

Ejemplo 44. Sea X una f.d.p. binomial, de tamaño $n = 14$. Se desea probar la hipótesis simple $\mathrm{H}_o:\ \mathrm{p} = \frac{1}{5}$ con la hipótesis alternativa compuesta $\mathrm{H}_1\!: \mathrm{p} < \frac{1}{5}$. La hipótesis nula será rechazada si los elementos de la muestra se encuentran en la región crítica

$C = \left\{ (X_1, \ldots., X_{14}) : \sum_{i=1}^{14} X_i \leq 4 \right\}$. Encontrar la función potencia de la prueba.

[33] Ya-Lun Chou."Análisis Estadístico". Editorial Interamericana, página 328.

La función potencia está definida de la siguiente manera:

$$\pi_{C^*}(\theta) = \left[\text{Rechazar } H_o \middle| \theta = \theta_0\right]$$

Así para poder rechazar la hipótesis nula, se debe de encontrar en la zona de rechazo, y se sustituirá el valor del parámetro de la hipótesis nula.

$$\pi_{C^*}(p) = P\left[\sum_{i=1}^{14} X_i \leq 4 \middle| p = \frac{1}{5}\right]$$

$$=\text{P}\left[X=0\middle|p=\frac{1}{5}\right]+\text{P}\left[X=1\middle|p=\frac{1}{5}\right]+\text{P}\left[X=2\middle|p=\frac{1}{5}\right]+\text{P}\left[X=3\middle|p=\frac{1}{5}\right]+\text{P}\left[X=4\middle|p=\frac{1}{5}\right]$$

$$=\binom{14}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{15-0}+\binom{14}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^{15-1}+\binom{14}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^{15-2}+\binom{14}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^{15-3}+\binom{14}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^{15-4}$$

$$=(1)(1)\left(\frac{4}{5}\right)^{15}+(14)\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^{14}+(91)\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^{13}+(364)\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^{12}+(1{,}001)\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^{11}$$

$$=0.0352+0.1231+0.2001+0.2001+0.1376$$

$$\therefore \pi_{C^*}(p) = 0.6961$$

Ejemplo 45. Si X se distribuye Poisson con media λ. Se tiene la hipótesis nula simple $\text{H}_o:\ \lambda = \frac{1}{3}$ y la hipótesis alternativa compuesta $\text{H}_1:\ \lambda < \frac{1}{3}$. Sea la muestra aleatoria de tamaño $n = 12$. Donde la región de rechazo está dada por: $C = \left\{(X_1, ..., X_{12}) \middle| \sum_{i=1}^{12} X_i \leq 3\right\}$.

Encontrar la función potencia $\pi_{C^*}(\lambda)$ evaluada con los siguientes parámetros: $\lambda = \frac{1}{3};\ \lambda = \frac{1}{4};\ \lambda = \frac{1}{6};\ \lambda = \frac{1}{12}$.

Se pide evaluar la función potencia para diferentes valores del parámetro

$$\pi_{C^*}(\lambda) = \left[\text{Rechazar } H_o \middle| \lambda = \lambda_0\right]$$

Por un lado

$$X_1 + X_2 + ... + X_{12} \sim \text{Poisson } (12\lambda)$$

Así la función potencia

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{3}\right)=P\left[\left(X_1,....,X_{12}\right):\sum_{i=1}^{12}X_i\leq 3\middle|\lambda=\frac{12}{3}\right]$$

$$=P\left[\left(X_1,....,X_{12}\right):\sum_{i=1}^{12}X_i\leq 3\middle|\lambda=4\right]$$

Una variable aleatoria Poisson es de la forma $\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$. Así que sustituyendo

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{(4)^0 e^{-4}}{0!}+\frac{(4)^1 e^{-4}}{1!}+\frac{(4)^2 e^{-4}}{2!}+\frac{(4)^3 e^{-4}}{3!}$$

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{3}\right)=0.0183+0.0733+0.1465+0.1954$$

$$\therefore \pi_{C^*}\left(\frac{1}{3}\right)=0.4335$$

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{4}\right)=P\left[\left(X_1,....,X_{12}\right):\sum_{i=1}^{12}X_i\leq 3\middle|\lambda=\frac{12}{4}\right]$$

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{4}\right)=P\left[\left(X_1,....,X_{12}\right):\sum_{i=1}^{12}X_i\leq 3\middle|\lambda=3\right]$$

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{(3)^0 e^{-3}}{0!}+\frac{(3)^1 e^{-3}}{1!}+\frac{(3)^2 e^{-3}}{2!}+\frac{(3)^3 e^{-3}}{3!}$$

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{4}\right)=0.0498+0.1494+0.2240+0.2240$$

$$\therefore \pi_{C^*}\left(\frac{1}{4}\right)=0.6472$$

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{6}\right)=P\left[\left(X_1,....,X_{12}\right):\sum_{i=1}^{12}X_i\leq 3\middle|\lambda=\frac{12}{6}\right]$$

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{6}\right)=P\left[\left(X_1,....,X_{12}\right):\sum_{i=1}^{12}X_i\leq 3\middle|\lambda=2\right]$$

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{(2)^0 e^{-2}}{0!}+\frac{(2)^1 e^{-2}}{1!}+\frac{(2)^2 e^{-2}}{2!}+\frac{(2)^3 e^{-2}}{3!}$$

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{6}\right)=0.1353+0.2707+0.2707+0.1804$$

$$\therefore \pi_{C^*}\left(\frac{1}{6}\right)=0.8571$$

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{12}\right)=P\left[\left(X_1,....,X_{12}\right):\sum_{i=1}^{12} X_i \leq 3 \middle| \lambda=\frac{12}{12}\right]$$

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{12}\right)=P\left[\left(X_1,....,X_{12}\right):\sum_{i=1}^{12} X_i \leq 3 | \lambda=1\right]$$

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{12}\right)=\frac{(1)^0 e^{-1}}{0!}+\frac{(1)^1 e^{-1}}{1!}+\frac{(1)^2 e^{-1}}{2!}+\frac{(1)^3 e^{-1}}{3!}$$

$$\pi_{C^*}\left(\frac{1}{12}\right)=0.3679+0.3679+0.1839+0.0613$$

$$\therefore \pi_{C^*}\left(\frac{1}{12}\right)=0.9810\,.$$

3.5.- Tipos de contrastes de hipótesis

I. Simple vs. Simple
II. Simple vs. Compuesta
III. Compuesta vs. Compuesta

En una prueba de hipótesis simple contra simple, las hipótesis estadísticas, tanto nula como alternativa deben estar completamente especificadas, como en los ejemplos siguientes:

a) $H_0: \mathrm{p}=0.5$ vs. $H_a: p=0.2$
b) $H_0: \lambda=4$ vs. $H_a: \lambda=7$
c) $H_0: \mu=50$ vs. $H_a: \mu=75$

Antes de entrar de lleno al teorema de Neyman-Pearson se enunciarán algunas definiciones:

Prueba de razón de verosimilitud simple

Sea $X_1,....,X_n$ una muestra aleatoria de $f_0(x)$ y de $f_1(x)$. Una prueba γ de $H_0 : X_i \sim f_0(x)$ vs. $H_a : X_i \sim f_1(x)$. Se define al cociente simple de verosimilitud si γ es definida por:

Rechazar H_0, si $\lambda < k$

Aceptar H_0, si $\lambda > k$

Si $\lambda = k$ puede aceptar H_0, rechazar H_0 o aleatorizar.

Donde $\lambda = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} f_0(x_i)}{\prod_{i=1}^{n} f_1(x_i)} = \dfrac{L_0(x_1,....,x_n)}{L_1(x_1,....,x_n)} = \dfrac{L_0}{L_1}$

Siendo k una constante no negativa y $L_j = L_j(x_1,.....,x_n)$ es la función de verosimilitud.

Mejor región crítica (ò región de rechazo)

Para el caso en que se desean comparar dos hipótesis simples $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_a : \theta = \theta_1$, una región crítica es mejor si para todo subconjunto A del espacio muestral para el cual

$P\left[(x_1,....,x_n) \in A \middle| H_0\right] = \alpha$ se cumple:

i) $P\left[(X_1,.....,X_n) \in C \middle| H_0\right] = \alpha$

ii) $P\left[(X_1,.....,X_n) \in C \middle| H_a\right] \geq P\left[(X_1,.....,X_n) \in A \middle| H_a\right]$

Entonces C será una mejor región crítica.

Prueba uniformemente más potente

Una prueba de hipótesis de $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$ es definido como la prueba más potente de tamaño α si y sólo si:

i) $\pi_C(\theta_0) = \alpha$ esto es $P\left[(X_1,....,X_n) \in C \middle| H_0\right] = \alpha$

ii) $\pi_{C^*}(\theta_1) \geq \pi_C(\theta_1)$ para alguna otra prueba para la cual $\pi_C(\theta_0) \leq \alpha$

3.5.1. Teorema de Neyman-Pearson

El Teorema de Neyman-Pearson sirve para encontrar la región de rechazo mas potente dado un α fijo y conocido para el caso de hipótesis simple contra simple.

Teorema: Sea $X_1,....,X_n$ una muestra aleatoria de una población con f.d.p. $f\left(X,\theta_0\right)$ y $f\left(X,\theta_1\right)$, siendo θ_0 y θ_1 dos valores distintas de θ con k un número positivo y C la región crítica tal que:

1) $\dfrac{\prod_{i=1}^{n} f\left(X_i,\theta_0\right)}{\prod_{i=1}^{n} f\left(X_i,\theta_1\right)} = \dfrac{L\left(X_1,....,X_n;\theta_0\right)}{L\left(X_1,....,X_n;\theta_1\right)} \leq k$ para cada punto $X_1,...,X_n \in C$ es decir, se rechaza H_0.

2) $\dfrac{\prod_{i=1}^{n} f\left(X_i,\theta_0\right)}{\prod_{i=1}^{n} f\left(X_i,\theta_1\right)} = \dfrac{L\left(X_1,....,X_n;\theta_0\right)}{L\left(X_1,....,X_n;\theta_1\right)} > k$ para cada punto $X_1,...,X_n \in C^c$ es decir, se acepta H_0.

3) $\mathrm{P}\left[\left(X_1,.....,X_n\right) \in C \middle| H_0\right] = \alpha$

Entonces C es una mejor región critica o de rechazo de tamaño α al probar dos hipótesis simples con $\theta_0 \neq \theta_1$ y $0 < \alpha < 1$

Demostración:

Se tiene que probar que:

i) $P\left[\left(X_1,.....,X_n\right) \in C \middle| H_0\right] = \alpha$

ii) $P\left[\left(X_1,.....,X_n\right) \in C \middle| H_a\right] \geq P\left[\left(X_1,.....,X_n\right) \in A \middle| H_a\right]$; siendo A cualquier subconjunto del espacio muestral

Por lo que se tiene que C es la región crítica de tamaño α, así que basta probar el segundo inciso, es decir hay que probar que :

$\int_C L\left(\theta_1\right) \geq \int_A L\left(\theta_1\right) \Rightarrow \int_C L\left(\theta_1\right) - \int_A L\left(\theta_1\right) \geq 0$. Para lo cual se hará uso de la siguiente ayuda: $C = \left(C \cap A\right) \cup \left(C \cap A^c\right)$ y que $A = \left(A \cap C\right) \cup \left(A \cap C^c\right)$.

$$\int_C L(\theta_1)-\int_A L(\theta_1)=\int_{C\cap A} L(\theta_1)+\int_{C\cap A^c} L(\theta_1)-\left[\int_{A\cap C} L(\theta_1)+\int_{A\cap C^c} L(\theta_1)\right]$$

$$=\int_{C\cap A} L(\theta_1)+\int_{C\cap A^c} L(\theta_1)-\int_{A\cap C} L(\theta_1)-\int_{A\cap C^c} L(\theta_1)$$

$$=\int_{C\cap A^c} L(\theta_1)-\int_{A\cap C^c} L(\theta_1);$$

De acuerdo a los incisos a y b del teorema

a) $\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)}\le k;\ (x_1,....,\mathrm{x}_n)\in C \Leftrightarrow L(\theta_0)\le kL(\theta_1)\Leftrightarrow \frac{1}{k}L(\theta_0)\le L(\theta_1)$

$\frac{1}{k}L(\theta_0)\le L(\theta_1)$; $(x_1,....,\mathrm{x}_n)\in C\cap A^c$, debido a que $C\cap A^c\subset C$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}\int_{C\cap A^c} L(\theta_0)\le \int_{C\cap A^c} L(\theta_1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

b) $\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)}>k,\ \ (x_1,...,x_n)\in C^c$

$\Leftrightarrow L(\theta_0)>kL(\theta_1)\Leftrightarrow \frac{1}{k}L(\theta_0)>L(\theta_1)$ con $(x_1,...,x_n)\in C^c$ y esto también es cierto para cualquier subconjunto de la región

$$\Rightarrow \frac{1}{k}L(\theta_0)>L(\theta_0):\quad (x_1,x_2,....,x_n)\in A\cap C^c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k}\int_{A\cap C^c} L(\theta_0)>\int_{A\cap C^c} L(\theta_1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

Retomando el resultado (11) y (12)

$\frac{1}{k}\int_{C\cap A^c} L(\theta_0)\le \int_{C\cap A^c} L(\theta_1)$ y que $\frac{1}{k}\int_{A\cap C^c} L(\theta_0)>\int_{A\cap C^c} L(\theta_1)\Leftrightarrow -\frac{1}{k}\int_{A\cap C^c} L(\theta_0)\le -\int_{A\cap C^c} L(\theta_1)$

Sumando estas desigualdades se obtiene que:

$$\frac{1}{k}\int_{C\cap A^c} L(\theta_0)-\frac{1}{k}\int_{A\cap C^c} L(\theta_0)\le \int_{C\cap A^c} L(\theta_1)-\int_{A\cap C^c} L(\theta_1)$$

$$\frac{1}{k}\left[\underbrace{\int_{C\cap A^c} L(\theta_0)-\int_{A\cap C^c} L(\theta_0)}_{*}\right]\leq \int_{C\cap A^c} L(\theta_1)-\int_{A\cap C^c} L(\theta_1)\text{..........................}(13)$$

Otra forma de poder escribir lo denominado en la ecuación anterior es:

$$\int_{C\cap A^c} L(\theta_0)-\int_{A\cap C^c} L(\theta_0)=\int_{C\cap A^c} L(\theta_0)-\int_{A\cap C^c} L(\theta_0)+\int_{C\cap A} L(\theta_0)-\int_{C\cap A} L(\theta_0)$$

$$=\int_{C\cap A^c} L(\theta_0)+\int_{C\cap A} L(\theta_0)-\left[\int_{A\cap C^c} L(\theta_0)+\int_{C\cap A} L(\theta_0)\right]$$

$$=\int_{C} L(\theta_0)-\int_{A} L(\theta_0)=\alpha-\alpha=0$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (13)

$\Rightarrow \frac{1}{k}(0)\leq \int_{C\cap A^c} L(\theta_1)-\int_{A\cap C^c} L(\theta_1)\Leftrightarrow \int_{C\cap A^c} L(\theta_1)-\int_{A\cap C^c} L(\theta_1)\geq 0$. Sumando un cero de la forma:

$\int_{C\cap A^c} L(\theta_1)-\int_{A\cap C^c} L(\theta_1)+\int_{C\cap A} L(\theta_1)-\int_{C\cap A} L(\theta_1)$. Agrupando se obtiene que

$$\int_{C\cap A^c} L(\theta_1)+\int_{C\cap A} L(\theta_1)-\left[\int_{A\cap C^c} L(\theta_1)+\int_{C\cap A} L(\theta_1)\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{C} L(\theta_1)-\int_{A} L(\theta_1)\geq 0$$

Ejemplo 47. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una población con f.d.p. normal con parámetros $N(\mu,1)$. Se desea probar la siguiente hipótesis $H_0:\mu=1$ vs. $H_a:\mu=4$.

Usando el Teorema de Neyman-Pearson

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta_1)}=\frac{L(X_1,\ldots.,X_n;\theta_0)}{L(X_1,\ldots.,X_n;\theta_1)}\leq k$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f\left(X_i,\theta_0\right)}{\prod_{i=1}^{n} f\left(X_i,\theta_1\right)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-1\right)^2\right)\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-4\right)^2\right)\right)} \le k$$

$$\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-1\right)^2\right)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-4\right)^2\right)\right)} \le k$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-1\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-4\right)^2\right)\right) \le k$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} X_i + 1\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 8\sum_{i=1}^{n} X_i + 16\right)\right)\right) \le k$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} X_i + 1 - \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 8\sum_{i=1}^{n} X_i - 16\right)\right) \le k$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(6\sum_{i=1}^{n} X_i - 15\right)\right) \le k$$

$$\exp\left(\left(-3\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{15}{2}\right)\right) \le k$$

$$\ln\left(\exp\left(\left(-3\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{15}{2}\right)\right)\right) \le \ln\left(k\right)$$

$$-3\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{15}{2} \le \ln\left(k\right)$$

$$-3\sum_{i=1}^{n} X_i \le \ln\left(k\right) - \frac{15}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \ge \frac{\ln\left(k\right) - \frac{15}{2}}{-3}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \geq \frac{\frac{\ln(k) - \frac{15}{2}}{-3}}{n}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \geq \frac{\frac{5}{2} - \frac{\ln(k)}{3}}{n}$$

$$\bar{X} \geq c$$

Por lo que la mejor región crítica $C = \{(X_1, \ldots, X_n) | \bar{X} \geq c\}$ donde c es una constante con un determinado nivel de significancia α. Si para este caso se decidiera $\alpha = 0.05$:

$$\mathrm{P}\left[(X_1, \ldots, X_n) \in C | H_0\right] = 0.05$$

$$P\left[\bar{X} \geq c | \mu = 1\right] = 0.05$$
$$\Leftrightarrow P\left[\bar{X} - 1 \geq c - 1\right] = 0.05$$

Donde $P\left[\bar{X} - 1 \geq c - 1\right] = 1 - P\left[\bar{X} - 1 \leq c - 1\right]$ así que sustituyendo:

$$1 - P\left[\bar{X} - 1 \leq c - 1\right] = 1 - 0.05$$
$$\Rightarrow P\left[\bar{X} - 1 \leq c - 1\right] = 0.95$$
$$\Rightarrow c - 1 = 1.645 \Rightarrow c = 2.645$$

Así que para un nivel de significancia de 0.05, *c* determinaría el tamaño de la zona de rechazo, siendo ésta la región crítica.

Ejemplo 48. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población que se distribuye como f.d.p. $N(0, \theta)$. Se desea contrastar $H_0 : \theta = 5$ contra $H_a : \theta = 10$. Sea $n = 20$ y $\alpha = 0.05$. Encontrar la prueba uniformemente más potente.

Sea $L(X_1, \ldots, X_n; \theta) = \prod_{i=1}^{20} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\right) e^{-\frac{(x_i)^2}{2\theta}} = \left(\frac{1}{2\pi\theta}\right)^{20/2} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{20}(x_i)^2}{2\theta}} = \left(\frac{1}{2\pi\theta}\right)^{10} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{20}(x_i)^2}{2\theta}}$. Usando el Lema de Neyman-Pearson.

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f\left(X_i,\theta_0\right)}{\prod_{i=1}^{n} f\left(X_i,\theta_1\right)} = \frac{L\left(X_1,....,X_n;\theta_0\right)}{L\left(X_1,....,X_n;\theta_1\right)} \le k$$

Sustituyendo los datos que se tiene:

$$= \frac{\left(\frac{1}{2\pi*5}\right)^{10} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{20}(x_i)^2}{2*5}}}{\left(\frac{1}{2\pi*10}\right)^{10} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{20}(x_i)^2}{2*10}}} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi*5}\right)^{10} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{20}(x_i)^2}{10}}}{\left(\frac{1}{2\pi*10}\right)^{10} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{20}(x_i)^2}{20}}} = \left(\frac{10}{5}\right)^{10} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{20}(x_i)^2}{10}+\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i)^2}{20}} \le k$$

$$\left(2\right)^{10} e^{-\sum_{i=1}^{20}(x_i)^2\left[\frac{1}{10}-\frac{1}{20}\right]} \le k \Leftrightarrow \ln\left(2\right)^{10} e^{-\sum_{i=1}^{20}(x_i)^2\left[\frac{1}{10}-\frac{1}{20}\right]} \le \ln k \Leftrightarrow \ln\left(2\right)^{10} + \ln e^{-\sum_{i=1}^{20}(x_i)^2\left[\frac{1}{10}-\frac{1}{20}\right]} \le \ln k$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{20}\left(x_i\right)^2\left[\frac{1}{10}-\frac{1}{20}\right] \le \ln k - \ln\left(2\right)^{10} \Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{20}\left(x_i\right)^2 \le \frac{\ln k - \ln\left(2\right)^{10}}{\frac{1}{10}-\frac{1}{20}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{20}\left(x_i\right)^2 \ge \underbrace{-\frac{\ln k - \ln\left(2\right)^{10}}{\frac{1}{10}-\frac{1}{20}}}_{k^*}$$

Así la región crítica es de la forma: $\sum_{i=1}^{20}\left(x_i\right)^2 > k^* \Rightarrow C = \left\{\left(x_1,...,x_n\right); \sum_{i=1}^{20}\left(x_i\right)^2 \ge c\right\}$. Ahora resta determinar que c tal que la región crítica tiene el tamaño α deseado. Retomando que:

$$X_i^2 \sim \chi^2_{(1)} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

$\alpha = P\left[\left(X_1,.....,X_n\right) \in C \middle| H_0\right] = P\left[\sum_{i=1}^{20}\left(x_i\right)^2 \ge c \middle| H_0\right]$, y estandarizando

$P\left[\frac{\sum_{i=1}^{20}\left(x_i\right)^2}{5} \ge \frac{c}{5}\right]$ donde $\frac{\sum_{i=1}^{20}\left(x_i\right)^2}{5} \sim \chi^2_{(20)} \Rightarrow P\left[\frac{\sum_{i=1}^{20}\left(x_i\right)^2}{5} \ge \frac{c}{5}\right] = 0.05$

$$\Rightarrow 1-P\left[\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i)^2}{5} \le \frac{c}{5}\right] = 1-0.05 = 0.95$$

$$\Rightarrow \frac{c}{5} = 31.4 \Leftrightarrow c = 157\,.$$

Así $C = \left\{(x_1,...,x_n);\sum_{i=1}^{20}(x_i)^2 \ge 157\right\}$ es una región crítica uniformemente más potente.

Ejemplo 49. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria cuya f.d.p. es de la forma

$$f(X;\theta) = \begin{cases} \theta X^{\theta-1}, & 0< \text{X} < 1 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

Mostrar que la mejor región crítica de ésta prueba $H_0:\theta=1$ contra $H_a:\theta=2$ es $C = \left\{(X_1,\ldots,X_n)\middle|\prod_{i=1}^{n} X_i \ge c\right\}$.

(Hogg[34])

Usando el Teorema de Neymann:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta=1)}{\prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta=2)} = \frac{L(X_1,....,X_n;\theta_0)}{L(X_1,....,X_n;\theta_1)} \le k$$

$$\frac{X_1^0\cdot X_2^0\cdot X_3^0\cdot......\cdot X_n^0}{2X_1\cdot 2X_2\cdot...........2X_n} \le k$$

$$\frac{1}{2\prod_{i=1}^{n} X_i} \le k$$

[34] Hogg Robert V, Craig Allen T. "Introduction to mathematical statistics". Collier MacMillan International Editions, página 279

$$\frac{1}{2k} \le \prod_{i=1}^{n} X_i$$

$$\therefore \prod_{i=1}^{n} X_i \ge c$$

Por lo que la mejor región critica para ésta prueba es $C = \left\{ \left(X_1, ..., X_n \middle| \prod_{i=1}^{n} X_i \ge c \right) \right\}$

Ejemplo 50. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una población con f.d.p. bernoulli

$$f(X,p) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & \text{x} = 0,1 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

Encontrar la mejor región crítica para probar la hipótesis $H_0 : p = 0.25$ vs $H_a : p = 0.5$.

Usando el Teorema de Neyman-Pearson

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta_1)} = \frac{L(X_1, ..., X_n; \theta_0)}{L(X_1, ..., X_n; \theta_1)} \le k$$

$$\frac{(0.25)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} (0.75)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i}}{(0.5)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} (0.5)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i}} \le k$$

$$(0.5)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} (1.5)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i} \le k$$

$$In\left((0.5)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} (1.5)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i} \right) \le ln(k)$$

$$In\left((0.5)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \right) + In\left((1.5)^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i} \right) \le ln(k)$$

Ahora se desarrollará la fórmula usando las propiedades de ln

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) ln(0.5) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) ln(1.5) \le ln(k)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(ln(0.5)\right) + (n)\left(ln(1.5)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(ln(1.5)\right) \le ln(k)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left[ln(0.5) - ln(1.5)\right] + (n)\left(ln(1.5)\right) \le ln(k)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left[ln(0.5) - ln(1.5)\right] \le ln(k) - (n)\left(ln(1.5)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \le \frac{ln(k) - (n)\left(ln(1.5)\right)}{ln(0.5) - ln(1.5)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \le c$$

Por lo que la mejor región critica para ésta prueba es $C = \left\{ \left(X_1, \ldots, X_n \middle| \sum_{i=1}^{n} X_i \le c \right) \right\}$

Si el valor de la constante fuera 30.55 y el tamaño de la muestra es 100 ¿cuál es el nivel de significancia?

El nivel de significancia está definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left[\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \middle| \mathrm{H}_0\right] \\ &= P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \le c \middle| p = 0.25\right] \end{aligned}$$

Haciendo uso del teorema del límite central

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{N}\left(np, np(1-p)\right) \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1)$$

Una vez conociendo la distribución, se sustituye en el nivel de significancia

$$P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{c-np}{\sqrt{npq}}\right] = P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 100(0.25)}{\sqrt{100(0.25)(0.75)}} \le \frac{c-100(0.25)}{\sqrt{100(0.25)(0.75)}}\right]$$

$$= P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 25}{4.33} \le \frac{c-25}{4.33}\right]$$

Y dado que c= 30.55

$$= P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 25}{4.33} \le \frac{30.55-25}{4.33}\right]$$

$$= P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 25}{4.33} \le 1.282\right]$$

$$\alpha = 0.90$$

Por lo que el nivel de significancia es 0.90

En el caso anterior era usado el método Neyman dado que se realizaba el contraste de dos hipótesis simples, pero ¿qué pasa cuando se tiene que probar una hipótesis simple contra una compuesta?

Para empezar, el problema cambia, al tener que ocuparse de una hipótesis compuesta, ya que se tendrá que encontrar una mejor región crítica que satisfaga un conjunto de valores de parámetros.

Retomando los datos del ejemplo 47 se contrastarán las siguientes hipótesis $H_0 : \mu = 1$ contra $H_a : \mu > 1$.

Se procederá tomando algunos valores particulares, es decir, tomando diferentes valores de $\mu > 1$, para poder probar hipótesis simples usando Neyman.

En el ejemplo realizado se probó la siguiente hipótesis $H_0 : \mu = 1$ contra $H_a : \mu = 4$. Y la región crítica obtenida a través de Neyman era $C = \left\{ (X_1, ..., X_n) \middle| \overline{X} \geq c \right\}$. Ahora se hará el cálculo para otros ejemplos particulares usando Neyman.

- $H_0 : \mu = 1$ contra $H_a : \mu = 10$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta_1)} = \frac{L(X_1, ..., X_n; \theta_0)}{L(X_1, ..., X_n; \theta_1)} \leq k$$

$$\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - 1)^2\right)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - 10)^2\right)\right)} \leq k$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - 1)^2 - \sum_{i=1}^{n} (X_i - 10)^2\right)\right) \leq k$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} X_i + 1\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 20\sum_{i=1}^{n} X_i + 100\right)\right)\right) \leq k$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} X_i + 1 - \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 20\sum_{i=1}^{n} X_i - 100\right)\right) \leq k$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(18\sum_{i=1}^{n} X_i - 99\right)\right) \leq k$$

$$\exp\left(\left(-9\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{99}{2}\right)\right) \leq k$$

$$\ln\left(\exp\left(\left(-9\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{99}{2}\right)\right)\right) \leq \ln(k)$$

$$-9\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{99}{2} \leq \ln(k)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \geq \frac{\frac{11}{2} - \frac{\ln(k)}{9}}{n}$$

$$\bar{X} \geq c$$

Siendo la misma región crítica obtenida en el caso pasado, lo que dará pauta para definir una prueba uniformemente más potente, la cual será definida en términos de la función potencia y tamaño de la prueba.

3.5.2. Prueba uniformemente mas potente

Definición 11. Una prueba de hipótesis de $H_0 : \theta = \Theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \Theta_1$ es definido como la prueba uniformemente más potente de tamaño α si y sólo si:

i) $\underset{\theta \in \Theta_0}{Sup}\, \pi_{C^*}(\theta) = \alpha \ \pi_C(\theta_0) = \alpha$.

ii) $\pi_{C^*}(\theta) \geq \pi_C(\theta)$ para toda $\theta \in \Theta - \Theta_0$ y para cualquier prueba $\pi_C(\theta_0) \leq \alpha$.

Cuando se desea probar una hipótesis simple H_0 contra una hipótesis alternativa compuesta H_a a un nivel de significancia α y la región crítica C es la mejor región de rechazo contra cada hipótesis en H_a, entonces C es una prueba uniformemente más potente para probar la hipótesis simple contra la alternativa compuesta.

En el ejemplo anterior, se mostró que la región crítica no depende del valor particular elegido en la hipótesis alternativa, por lo que la región $C = \{(X_1, ..., X_n) | \bar{X} \geq c\}$ es la prueba uniformemente más potente.

Sin embargo, existe un problema, ya que ésta no siempre existe, pero, en el caso de que exista, el teorema de Neyman proporciona una técnica para encontrarla. A continuación se muestra un ejemplo en el que no existe.

Ejemplo 51. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una población con f.d.p. Normal con parámetros $N(\mu, 1)$. Se desea contrastar las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \mu = \mu_* \ \text{ contra } \ H_a : \mu \neq \mu_*$$

Para éste caso se puede fraccionar la hipótesis alternativa en dos casos:

Caso 1: Cuando se desea contrastar la hipótesis $H_0 : \mu = \mu_*$ contra $H_a : \mu > \mu_*$.

Para el ejercicio anterior, se puede usar el teorema de Neyman-Pearson, para cualquier caso particular, la región crítica será uniformemente más potente. En este caso se tomará $H_0 : \mu = \mu_*$ contra $H_a : \mu = \mu_1$, donde $\mu_1 > \mu_*$. Usando Neyman-Pearson:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta_1)} = \frac{L(X_1, ..., X_n; \theta_0)}{L(X_1, ..., X_n; \theta_1)} \leq k$$

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_*)^2\right)\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_1)^2\right)\right)} \leq k$$

$$\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_*)^2\right)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_1)^2\right)\right)} \leq k$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_*)^2 + \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_1)^2\right)\right) \leq k$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2(\mu_*)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) + (\mu_*)^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2(\mu_1)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) + (\mu_1)^2\right)\right)\right) \leq k$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2(\mu_*)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) + (\mu_*)^2 - \sum_{i=1}^{n}X_i^2 + 2(\mu_1)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) - (\mu_1)^2\right)\right) \leq k$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left((-2\mu_* + 2\mu_1)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right) + (\mu_*)^2 - (\mu_1)^2\right)\right) \leq k$$

$$\exp\left((\mu_* - \mu_1)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) - \frac{(\mu_*)^2}{2} + \frac{(\mu_1)^2}{2}\right) \leq k$$

$$\ln\left(\exp\left((\mu_* - \mu_1)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \frac{(\mu_*)^2}{2} + \frac{(\mu_1)^2}{2}\right)\right) \leq \ln(k)$$

$$(\mu_* - \mu_1)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \frac{(\mu_*)^2}{2} + \frac{(\mu_1)^2}{2} \leq \ln(k)$$

Es importante recordar que $\mu_1 > \mu_*$, por lo que $(\mu_* - \mu_1)$, es de signo negativo, así que toda la desigualdad se multiplicará por (-1).

$$(\mu_1 - \mu_*)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \geq -\ln(k) - \frac{(\mu_*)^2}{2} + \frac{(\mu_1)^2}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{-\ln(k) - \frac{(\mu_*)^2}{2} + \frac{(\mu_1)^2}{2}}{(\mu_1 - \mu_*)}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \geq \left(\frac{-\ln(k) - \frac{(\mu_*)^2}{2} + \frac{(\mu_1)^2}{2}}{(\mu_1 - \mu_*)}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\bar{X} \geq c$$

Así la región crítica más potente es: $C = \left\{(X_1, ..., X_n) \middle| \bar{X} \geq c\right\}$

Siendo que la prueba debe ser de tamaño α :

$$P\left[(X_1, ..., X_n) : \bar{X} \geq c \middle| H_0 : \mu = \mu_*\right] = \alpha$$

Por lo que :

$$P\left[\bar{X} \geq c\right] = \alpha$$

$$P\left[\frac{\bar{X}-\mu_*}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \geq \frac{c-\mu_*}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right] = \alpha$$

$$\Rightarrow P\left[\varphi \geq \frac{c-\mu_*}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right] = \alpha$$

$$\Rightarrow P\left[\varphi \geq \frac{c-\mu_*}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right] = 1 - P\left[\varphi \leq \frac{c-\mu_*}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right] = \alpha$$

$$\Rightarrow P\left[\varphi \leq \frac{c-\mu_*}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right] = 1-\alpha$$

$$\frac{\varphi_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} + \mu_* = c$$

Así que la región crítica de tamaño α para ésta prueba es:

$$C = \left\{ \left(X_1, ..., X_n \right) \middle| \bar{X} \geq \frac{\varphi_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} + \mu_* \right\}$$

Caso 2: Cuando se desea contrastar la hipótesis $H_0 : \mu = \mu_*$ contra $H_a : \mu < \mu_*$. Pasa similar en el caso anterior, en lo que se refiere a la región crítica, por lo que se encontrara una región crítica más potente, para la cual se tomará un caso particular. Se probará la siguiente hipótesis: $H_0 : \mu = \mu_*$ contra $H_a : \mu = \mu_0$; donde $\mu_0 < \mu$. Así que realizando un procedimiento análogo al anterior se obtiene que la región uniformemente más potente es:

$$C = \left\{ \left(X_1, ..., X_n \right) \middle| \bar{X} \leq c \right\}$$

Con un nivel de significancia α, la región crítica es :

$$C=\left\{\left(X_1,....,X_n\right)\middle|\bar{X}\le\mu_*-\frac{\varphi_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right\}$$

Por lo que es de notarse que no existe una región crítica uniformemente mas potente, al no existir una diferencia en la región para poder dividir los valores, en aquellos en los que $\mu>\mu_*$, y los que $\mu<\mu_*$.

3.5.3. Prueba de razón de verosimilitudes (generalizado)

Esta prueba se usa cuando se desea contrastar dos hipótesis compuestas (tanto la hipótesis nula, como la hipótesis alternativa), o bien, una hipótesis nula simple con una hipótesis alternativa compuesta pero no existe una prueba uniformemente más potente para ésta.

Se asume que se tiene una muestra aleatoria de $f(x;\theta)$, $\theta\in\Theta$ y se quiere probar $H_0:\theta\in\Theta_0$ vs $H_1:\theta\in\Theta_1$ donde $\Theta_0\subset\Theta$, $\Theta_1\subset\Theta$ y $\Theta_0\cap\Theta_1=\varnothing$

Prueba de razón de verosimilitudes generalizado

Para una muestra aleatoria $X_1,.....,X_n$ de $f(X,\theta)$, $\theta\in\Theta$ y se quiere probar $H_0:\theta\in\Theta_0$ contra $H_a:\theta\in\Theta_1=\Theta-\Theta_0$. Se toma $L(\theta;X_1,.....,X_n)$ como la función de verosimilitud de la muestra, el cociente de verosimilitudes generalizado es:

$$\lambda(X_1,...,X_n)=\frac{\underset{\theta\in\Theta_0}{Sup}\ \mathrm{L}(\theta;X_1,...,X_n)}{\underset{\theta\in\Theta}{Sup}\ \mathrm{L}(\theta;X_1,...,X_n)};\qquad \lambda\in[0,1]$$

H_0 es rechazada si y solo si $\lambda\le\lambda_0$ (constante fija). En caso contrario no se rechaza H_0

Para visualizar éste procedimiento se procederá con un ejemplo

Sea $X_1,....,X_n$ una muestra aleatoria de una población con f.d.p. normal con parámetros $N(\mu,1)$. Se desea contrastar las siguientes hipótesis:

$H_0:\mu=\mu_*$ contra $H_a:\mu\ne\mu_*$

La verosimilitud de la prueba es

$$\sup L(\Theta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right)$$

Por lo que:

$$\lambda = \frac{\sup L(\Theta_1) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu_*\right)^2\right)}{\sup L(\Theta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right)}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu_*\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right)\right) < k$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\mu_*\sum_{i=1}^{n} X_i + n\mu_*^2 - \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n} X_i - n\bar{X}^2\right)\right] < k$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(-2\mu_*\left(\frac{n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} X_i + n\mu_*^2 + 2\bar{X}\left(\frac{n}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} X_i - n\bar{X}^2\right)\right] < k$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(-2\mu_* n\bar{X} + n\mu_*^2 + 2n\bar{X}\bar{X} - n\bar{X}^2\right)\right] < k$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(-2\mu_* n\bar{X} + n\mu_*^2 + n\bar{X}^2\right)\right] < k$$

$$\exp\left[-\frac{n}{2}\left(-2\mu_*\bar{X} + \mu_*^2 + \bar{X}^2\right)\right] < k$$

$$\exp\left[-\frac{n}{2}\left(\bar{X} - \mu_*\right)^2\right] < k$$

$$\ln\left(\exp\left[-\frac{n}{2}\left(\bar{X} - \mu_*\right)^2\right]\right) < \ln(k)$$

$$-\frac{n}{2}\left(\bar{X} - \mu_*\right)^2 < \ln(k) = k_1$$

Así $\left(\bar{X} - \mu_*\right)^2 > k_2$

$$\Rightarrow \left|\bar{X} - \mu_*\right| > k_3$$

Lo cual nos proporcionará las siguientes regiones críticas:

Si $\bar{X} > \mu_* \Rightarrow C = \left\{ \left(X_1, ..., X_n \right); \bar{X} - \mu_* > k_4 \right\}$

Si $\bar{X} < \mu_* \Rightarrow C = \left\{ \left(X_1, ..., X_n \right); \bar{X} - \mu_* < k_5 \right\}$

Ejercicios recomendados

- Se recomienda verificar la demostración del teorema de Neyman-Pearson en el libro de Hogg, página 274

- Sea X una variable aleatoria que tiene función de distribución de probabilidad de la forma

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-10} & 0<x<1 \\ 0 & \text{c.o.c}\end{cases} \qquad \text{donde } \theta\in\{\theta;\theta=1,2\}$$

  Para probar la hipótesis nula simple $H_0:\theta=1$ contra la hipótesis alternativa simple $H_1:\theta=2$ use una muestra aleatoria X_1,X_2 de tamaño $n=2$ y defina la región crítica $C=\left\{(x_1,x_2):\dfrac{3}{4x_1}\leq x_2\right\}$. Encontrar la función potencia de la prueba.[35]

- Se asume que la vida de un neumático en millas, representado por la variable aleatoria X se distribuye normal con media θ y desviación estándar 5,000. La experiencia pasada indica que $\theta=30,000$. El fabricante afirma que los neumáticos fueron hechos por un nuevo proceso que tiene $\theta>30,000$, y es muy posible que $\theta=35,000$. Se verificará su afirmación probando $H_0:\theta\leq 30,000$ contra $H_1:\theta>30,000$. Observando los valores de n independientes a X, $x_1,x_2,.....,x_n$, y se rechazará H_0 si y sòlo si $\bar{X}\geq C$. Determinar n y c tal que la función potencia $\pi_{C^*}(\theta)$ de la prueba tiene los valores $\pi_{C^*}(30,000)=0.01$ y $\pi_{C^*}(35,000)=0.98.$

- Definir los siguientes conceptos:
  -Hipótesis nula e hipótesis alternativa
  -Tipos de error
  -Región Crítica

- Suponga que un médico desea probar la hipótesis de que al menos un 30% del público es alérgico a algunos quesos. Explicar como dicho médico podría cometer [36]

a) Error tipo I
b) Error tipo II

- Un fabricante ha desarrollado un nuevo hilo para pescar, de cual afirma que tiene un coeficiente de ruptura de 15 kg con una desviación estándar de 0.5 kilógramos. Para

---

[35] Hogg Robert V, Craig Allen T. *Introduction to mathematical statistcs*. 3ª ed. New York. Collier acmillab international editions 1970, página 271.

[36] Walpole Ronald, Myers Raymond. *Probabilidad y Estadística para ingenieros.* 3ª edición México. Interamericana 1987, página 305.

probar la hipótesis de que $\mu = 15$ kg con una desviación estándar de 0.5 kg. Para probar la hipótesis de que $\mu = 15$ kg en contra de la alternativa $\mu < 15$ kg, se probará una muestra aleatoria de 50 hilos. La región crítica se define como $\bar{X} < 14.9$

a) Encontrar la probabilidad de cometer el error tipo I cuando H_0 es verdadera.
b) Calcular β para las alterativas $\mu = 14.8$ y $\mu = 14.9$ kg.[37]

- Establecer la hipótesis nula y alterna a utilizar en las siguientes afirmaciones:[38]

a) Cuando mucho, el 20% de la producción de cereales del año próximo será exportado a la Unión Soviética.
b) En promedio las amas de casa estadounidenses beben tres tazas de café al día
c) La población de titulados en Actuaría que éste año se especializó en estadística es al menos de 10%.
d) El promedio de donación a la asociación American Lung no es mayor de $100.
e) Los residentes del suburbio Richmond recorren, en promedio, 15 kilómetros para llegar a su lugar de trabajo.

- Sea $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{10}$ una muestra aleatoria de tamaño 10 con una distribución normal $N\left(0, \sigma^2\right)$. Encontrar la mejor región crítica de tamaño $\alpha = 0.05$ para probar $H_0 : \sigma^2 = 1$ contra $H_1 : \sigma^2 = 2$. ¿Es ésta una mejor región crítica de tamaño 0.05 para probar $H_0 : \sigma^2 = 1$ contra $H_1 : \sigma^2 = 4$? contra $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 > 1$?[39]

- Sea $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{10}$ una muestra aleatoria de tamaño 10 con una distribución Poisson con media θ. Mostrar que la región crítica C definida por $\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 3$ es la mejor región crítica para probar $H_0 : \theta = 0.1$ contra $H_1 : \theta = 0.5$. Determine para ésta prueba el nivel de significancia α de la prueba en $\theta = 0.5$.

---

[37] Walpole Ronald, Myers Raymond. *Probabilidad y Estadística para ingenieros.* 3ª edición México. Interamericana 1987, página 307.
[38] Walpole Ronald, Myers Raymond. *Probabilidad y Estadística para ingenieros.* 3ª edición México. Interamericana 1987, página 308.
[39] Hogg Robert V, Craig Allen T. *Introduction to mathematical statistcs*. 3ª ed. New York. Collier acmillab international editions 1970, página 279.

- Sea $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{25}$ una muestra aleatoria de tamaño 25 de una distribución normal $N(\theta, 100)$. Encontrar la región crítica uniformemente más potente de tamaño $\alpha = 0.10$ al probar $H_0 : \theta = 75$ contra $H_1 : \theta > 75$.[40]

[40] Hogg Robert V, Craig Allen T. *Introduction to mathematical statistcs*. 3ª ed. New York. Collier acmillab international editions 1970, página 284.

Conclusiones

Con el presente trabajo se busca brindar un apoyo al aprendizaje de los alumnos, principalmente a los estudiantes de la licenciatura de Actuaría en línea que cursan Estadística I en la parte correspondiente a los intervalos de confianza y pruebas de hipótesis, es decir, se pretende la formulación de apoyos pedagógicos, creando nuevas opciones para el aprendizaje, por medio de ejemplos resueltos y propuestos para que el alumno pueda reforzar sus conocimientos.

Para la realización del presenta trabajo se hizo una búsqueda entre diferentes libros de texto, así como apuntes con el objetivo de seleccionar ejercicios que fueran útiles para el estudiante, de manera que el alumno practique con problemas cuya resolución no resulte tan compleja y así poder aplicar los conocimientos adquiridos que le sirvan como base o reforzamiento de lo ya aprendido. Se trata de explicar de la manera más accesible los conceptos que comprenden los temas de intervalos de confianza y pruebas de hipótesis, es decir, brindar al estudiante una base para la materia, así como fomentar que los estudiantes sean autodidactas y brindarles mas opciones para consulta.

Como se ha explicado la educación atraviesa por bastantes cambios, no solo en la manera en que se imparten las clases o se refuerzan los aprendizajes, si no en que se busca que un mayor sector de la población pueda tener acceso a ella haciendo uso de las distintas herramientas que tiene como lo son el internet. Es por eso que la educación en línea busca complementar e incluso llegar a lugares donde no es tan fácil el acceso a la educación tradicional, debido a las diferentes barreras como lo son la distancia que existe para llegar a las escuelas, la falta de flexibilidad de horarios debido a que existen estudiantes que trabajan al mismo tiempo que estudian, o incluso existen otro tipo de responsabilidades, tales son los casos de las amas de casa que realizan las actividades de un hogar. Otro problema que se enfrenta es el que la demanda de estudiantes supera por mucho a la oferta disponible, quedando muchos sin opción para continuar sus estudios, es por eso que la educación en línea se considera una opción para ampliar la oferta educativa, generando distintos ambientes de aprendizaje, con la ayuda de tecnologías como en este caso es el internet, ampliando el conocimiento a través de este. La educación en línea será en los próximos años la opción y proyecto institucional que pueda dar una posible respuesta a los desafíos que implica el desarrollo tecnológico y además a dar solución a problemas que enfrenta la sociedad mexicana, con herramientas tan valiosas como es la estadística.

Bibliografía

- Hogg Robert V, Craig Allen T. *Introduction to mathematical statistcs*. 3ª ed. New York. Collier acmillab international editions 1970.
- Periódico La Jornada 11 de agosto del 2014, "Las universidades deben ampliar cobertura y calidad" Emir Olivares Alonso, Política.
- Tank de Estrada Dorothy. *Historia Mínima de la Educación en México*. México D.F. Colmex
- Hoel Paul, Jessen Raymond. *Estadística básica para negocios y economía*. 1ª ed. México D.F. Compañía editorial continental, S.A. de C.V. 1983.
- Harnett Donald, Murphy James. *Introducción al análisis estadístico*. E.U.A. Addison-Wesley Iberoamericana. 1987.
- Walpole Ronald, Myers Raymond. *Probabilidad y Estadística para ingenieros.* 3ª edición México. Interamericana 1987.
- Ross Sheldon M. *Introductory statistics*. 3ª edición Elsevier Ltd, Oxford 2010.
- Moore David S. *Estadística Aplicada Básica* 2ª edición Antoni Bosch editors S.A. 2005.
- Gonick. L. y Smith W. La estadística en cómic fecha de consulta 02 de agosto del 2014 https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/dfaraco/docencia/Bases/Intervalos%20de%20confianza.pdf
- http://www.ugr.es/~batanero/
- www.math.usu.edu/schneit/ctis/
- http://suayed.unam.mx/que_es.php.
- http://www.ugr.es/~batanero/
- Batanero, Carmen. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada, España: Grupo de Investigación en Educación Estadística del Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Batanero, Carmen. (2003). *Presente y futuro de la Educación Estadística*.
- Concannon, Fiona, Flynn, Antoinette y Campbell, Mark. (2005). What campus-based students think about the quality and benefits of e-learning. *British Journal of Educational Technology*, 36, 3: 501-512.
- McIsaac , M. S. Y Gunawardena , C.N. (1996) . Educación a distancia. En D. H. Jonassen , ed . Manual de investigación para las comunicaciones y la tecnología de la educación : un proyecto de la Asociación de Comunicaciones y Tecnología de la Educación. Nueva York : Simon & Schuster Macmillan
- Bowker Albert, Lieberman Gerald. *Estadística para ingenieros*. México, D.F. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. (1980).

- Murray R. Spiegel. Teoría y problemas de estadística. México, D.F. Mc Graw Hill. (1987).
- Wackerly Dennis D. et al. Estadística matemática con aplicaciones, Séptima edición Cengage Learning 2010.
- Bates, A.W. México, La tecnología en la enseñanza abierta y la educación a distancia Trillas, 1999. Pp. 37-51 / 53-85/ 291-316. http://www.facmed.unam.mx/emc/computo/infoedu/modulos/modulo2/material2a.pdf
- http://www.um.es/ead/red/M6/dorrego.pdf
- http://www.web.facpya.uanl.mx/rev_in/Revistas/6.2/A5.pdf