



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**SUMA DE 2-ASAS POR LA FRONTERA
DE 3-VARIEDADES SIMPLES
QUE PRODUCEN TOROS ESENCIALES**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA

M. en C. LUIS CELSO CHAN PALOMO

TUTOR PRINCIPAL

Dr. MARIO EUDAVE MUÑOZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

COMITÉ TUTOR

Dr. FRANCISCO JAVIER GONZÁLEZ ACUÑA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

Dr. VÍCTOR MANUEL NÚÑEZ HERNÁNDEZ
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

México, D. F. a 24 de Mayo de 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

Para mis padres

Silvia del Socorro
Palomo Bolivar

y

Celso
Chan Balán

Resumen

Suma de 2-asas por la frontera de 3-variedades simples que producen toros esenciales

Sea M una 3-variedad compacta, conexa, orientable y sea F una componente en la frontera de M . Tal M se denomina simple si es irreducible, frontera incompresible, no anular y atoroidal, es decir, no contiene esferas, discos, anillos y toros esenciales, respectivamente. Una pendiente α en F es una clase de isotopía de curvas cerradas esenciales simples en F . Denote por $M[\alpha]$ la 3-variedad obtenida de M al pegar una 2-asa a M a lo largo de α y tapar las posibles esferas en la frontera con 3-bolas. Sea $\Delta(\alpha, \beta)$ el mínimo número de intersección geométrica entre todas las curvas que representan las pendientes. En 1998, Gordon demostró que si M es simple, F tiene género 1, $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ son toroidales entonces $\Delta(\alpha, \beta) \leq 8$. En este trabajo demostré que si M es simple, F tiene género al menos 2, α y β son pendientes separantes, $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ son toroidales, no anulares y frontera incompresibles entonces se cumple una de las siguientes afirmaciones: $\Delta(\alpha, \beta) = 18$ y F tiene género al menos 8, $\Delta(\alpha, \beta) = 12$ y F tiene género al menos 4 ó $\Delta(\alpha, \beta) \leq 10$. Como consecuencia, esto implica que si F tiene género 2 o 3 entonces $\Delta(\alpha, \beta) \leq 10$.

Índice general

1. Introducción	11
2. Gráficas con etiquetas	17
2.1. 3-Varietades	17
2.2. Gráficas de Intersección	20
2.3. Propiedades de las Gráficas de Intersección	23
3. Gráficas Reducidas en toros	31
3.1. Gráficas reducidas con a lo más tres vértices	31
3.2. Toro con tres agujeros	35
4. Prueba del Teorema 10	43
4.1. Caso genérico: prueba del Teorema 10 si $p > 3$ y $q > 3$	43
4.2. Caso no-genérico: prueba del Teorema 10 si $p \leq 3$ o $q \leq 3$	48
5. Caso no genérico: $p = 1, 2$ y $q \geq 1$	49
5.1. Caso $p = 1$ y $q \geq 1$	49
5.1.1. Subcaso $p = 1$ y $q \leq 2$	49
5.1.2. Subcaso $p = 1$ y $q \geq 3$	64
5.2. Caso $p = 2$ y $q \geq 2$	67
6. Caso no genérico: $p = 3$ y $q \geq 3$	69
6.1. Subcaso: $p = 3 = q$	69
6.2. Subcaso: $p = 3$ y $q \geq 4$	83
7. Conclusiones y Trabajo Futuro	85
Bibliografía	87

Índice de figuras

1.1.	α -llenado de Dehn $M[\alpha]$	11
1.2.	Notación $M[\alpha]$	13
2.1.	T separante en $M[\alpha]$	19
2.2.	Toro minimal \hat{P} en $M[\alpha]$	19
2.3.	Anillos $D \cup E_1$ y $D \cup E_2$ contenidos en $M[\alpha]$	20
2.4.	Etiquetas de $\partial P \cap \partial Q$ en ∂M	21
2.5.	Aristas paralelas en Γ_P y Γ_Q	22
2.6.	Distancia $\Delta(\alpha, \beta) = 4$ entre pendientes.	23
2.7.	Etiquetas signadas en los vértices $\partial_u P$ y $\partial_v P$	24
2.8.	Etiquetas Tipo A en vértices de signo opuesto.	25
2.9.	Regla de Paridad A.	25
2.10.	Etiquetas Tipo B en vértices de signo opuesto.	26
2.11.	Colecciones de lazos.	26
2.12.	Ciclos virtuales de Scharlemann.	27
2.13.	Espacio lente con un agujero $N(B \cup H_t \cup D)$ en $M[\beta]$	28
2.14.	Superficie de género dos $S_t = Q \cup A_{t,t+1}$	28
3.1.	Gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ con un vértice.	32
3.2.	$\Gamma = H(w_1, w_2, w_3)$	33
3.3.	Gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ con dos vértices.	33
3.4.	$\Gamma = G(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$	34
3.5.	Gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ con tres vértices.	34
3.6.	Dos opciones para la arista e_3 de $\bar{\Gamma}^{ij}$	35
3.7.	$\bar{\Gamma}_P^{ik}$ y $\bar{\Gamma}_P^{jk}$ determinadas de manera única.	35
3.8.	$\Gamma = R(w_1, w_2, \dots, w_9)$	36
3.9.	$\Gamma_Q = R(w_1, \dots, w_9)$	37
3.10.	Colecciones de 9 aristas paralelas entre vértices del mismo signo.	38
3.11.	Discos cara sin esquinas malas.	39
3.12.	n -disco cara rodeado por un ciclo en Γ_P	41
4.1.	$z = \sigma(-1) $, $w = \sigma(1) $ y z no adyacente a w	44
4.2.	$z = \sigma(-1) $, $w = \sigma(1) $ y z adyacente a w	45
4.3.	q ciclos esenciales de longitud 2 paralelos en $\bar{\Gamma}_Q \subset \hat{Q}$	46
4.4.	dos ciclos esenciales de longitud 2 no paralelos en $\bar{\Gamma}_Q \subset \hat{Q}$	46
4.5.	q ciclos esenciales de longitud 2 no paralelos en $\bar{\Gamma}_Q \subset \hat{Q}$	47
4.6.	$E(\bar{\Gamma}_Q) = 12$	47
5.1.	$\Gamma_P = H(3, 3, 3) = \Gamma_Q$	50

5.2.	$A = D_{P_1} \cup D_{Q_2} \cup D_{P_2} \cup D_{Q_1}$ anillo o banda de Mobius.	51
5.3.	Reduciendo la intersección entre ∂P y ∂Q	52
5.4.	Clasificación de fronteras triviales en F de anillos ∂ -incompresibles contenidos en M	52
5.5.	Fronteras de tres anillos con frontera trivial en F_1	53
5.6.	Fronteras de los nueve anillos ∂ -incompresibles en M con frontera trivial en F	53
5.7.	$\Delta = 18$, $p = 1 = q$ y aristas E_4 , E_5 y E_6 en Γ_P no inducidas por D_1 y D_2	55
5.8.	$X = P \cup F_1 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup D_1$	56
5.9.	Anillo $A = N(c_1) \cup T_1 \cup B_3 \cup H_1 \cup D_1 \cup B \cup N(c_2)$	57
5.10.	Anillo $A_2 = D \cup D'$	57
5.11.	Clasificación de fronteras triviales en F del anillo A ∂ -incompresible contenido en M	58
5.12.	Dos posibilidades para las fronteras del anillo A con $\Delta = 12$	59
5.13.	Cuatro posibilidades para Γ_Q que inducen las fronteras triviales en F del anillo A Tipo I.	60
5.14.	Cuatro posibilidades para Γ_Q que inducen las fronteras triviales en F del anillo A Tipo II.	61
5.15.	Fronteras de 18 anillos ∂ -incompresibles en M con frontera trivial en F	62
5.16.	$p = 1$ y $q = 2$ con $\Delta = 12$	63
5.17.	$\Delta = 14$ y $\Gamma_P = H(9, 7, 5)$	66
5.18.	$\Delta = 12$ y $\Gamma_P = H(6, 6, 6)$	67
6.1.	$\bar{\Gamma}_P$ con dos lazos.	71
6.2.	$\Gamma_P = R(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9)$	72
6.3.	$\Gamma_P = R(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, 0, 9, 9)$	73
6.4.	5-colecciones con dos S-ciclos.	74
6.5.	$R(6, 8, 4, 6, 5, 7, 0, 9, 9)$	74
6.6.	$R(6, 8, 4, 6, 5, 7, 0, 9, 9)$	75
6.7.	$\Gamma_P = R(9, 8, 1, 3, 8, 7, 6, 6, 6)$	75
6.8.	$\Gamma_P = R(9, 8, 1, 3, 8, 7, 6, 6, 6)$	75
6.9.	$(9, 8, 1) - (9, 7, 2) - (w_7, w_8, w_9)$	76
6.10.	$(9, 8, 1) - (8, 8, 2) - (w_7, w_8, w_9)$	77
6.11.	$(9, 8, 1) - (8, 7, 3) - (w_7, w_8, w_9)$	78
6.12.	$(9, 8, 1) - (7, 7, 4) - (w_7, w_8, w_9)$	79
6.13.	$(8, 8, 2) - (9, 7, 2) - (w_7, w_8, w_9)$	79
6.14.	$(8, 8, 2) - (8, 8, 2) - (w_7, w_8, w_9)$	80
6.15.	$(8, 8, 2) - (8, 3, 7) - (w_7, w_8, w_9)$	81
6.16.	$(8, 8, 2) - (8, 3, 7) - (w_7, w_8, w_9)$	81
6.17.	$(8, 8, 2) - (8, 3, 7) - (w_7, w_8, w_9)$	82
6.18.	$(8, 8, 2) - (7, 7, 4) - (w_7, w_8, w_9)$	82
6.19.	$\Gamma_P = R(9, 8, 1, 3, 8, 7, 6, 6, 6)$ con S-ciclo $(-1, -2)$ adyacente al triángulo III	83

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este trabajo es obtener una generalización de un resultado bien conocido que descansa en la Teoría de llenados de Dehn de 3-variedad hiperbólicas. Para poner en contexto el resultado que se pretende generalizar recordaremos de manera breve los llenados de Dehn y algunos de los resultados más importantes en esta área que son fundamentales y que motivan el desarrollo del presente trabajo.

Sea M una 3-variedad y sea T una componente en su frontera que es un toro. Una pendiente α en T es una clase de isotopía de una curva simple cerrada en T . Se define el α -llenado de Dehn de M , denotado por $M[\alpha]$, como la 3-variedad obtenida al identificar T y ∂V , donde V es un toro sólido y α acota un disco en V . En otras palabras se considera el espacio cociente $M[\alpha] = M \cup_h V$, donde $V \cong B^2 \times S^1$, $h : \partial V \rightarrow T$ con $h(m) = \alpha$ siendo m la frontera de un meridiano de V (ver Figura 1.1).

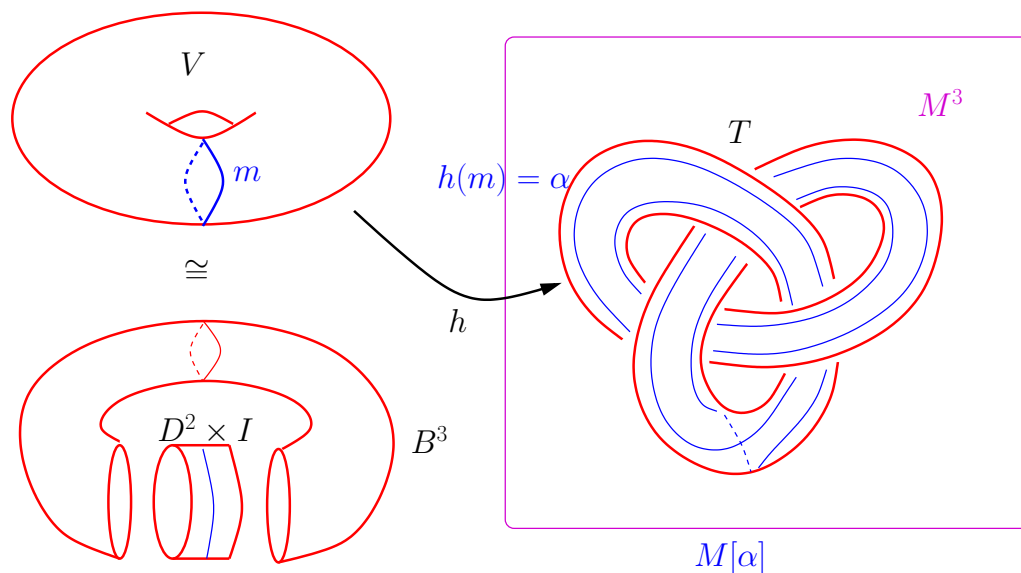


Figura 1.1: α -llenado de Dehn $M[\alpha]$.

Una 3-variedad se denomina hiperbólica si su interior admite una métrica riemanniana de curvatura seccional constante -1 . El siguiente resultado, descubierto por un medallista Fields, es uno de los Teoremas más importantes en la teoría de 3-variedades que ha estimulado una cantidad impresionante de investigación y que se conoce como el Teorema de Cirugía Hiperbólica de Thurston:

Teorema 1 (Thurston-[16]). *Sea M hiperbólica y T un toro en la frontera de M . Entonces el conjunto*

$$S = \{\alpha \subset T : M[\alpha] \text{ no es hiperbólica}\}$$

es finito.

Si M es hiperbólica pero $M[\alpha]$ no lo es entonces α se denomina pendiente degenerada. Una pregunta fundamental que planteó el Teorema de Thurston fué investigar de una manera más explícita qué tan grande podía ser el conjunto de pendientes que degeneraban la estructura hiperbólica. En 1995, Gordon [4] conjeturó que el número de pendientes degeneradas no se pasaba de 10 motivado en parte porque el exterior del nudo ocho tiene exactamente 10 pendientes degeneradas. Mas tarde, en 2008, Lackenby [7], logró probar la conjetura de Gordon.

Ahora bien, antes de la prueba de Lackenby, para estimar el número de pendientes degeneradas se obtuvieron resultados que acotaban $\Delta(\alpha, \beta)$, es decir, el mínimo número de intersección geométrica entre todas las curvas que representan α y β bajo isotopía. Existen dos resultados fundamentales que permitieron dirigir los esfuerzos a acotar este número. El primero, fue otro resultado de Thurston que caracteriza a las 3-variedades hiperbólicas con frontera vía superficies con característica de Euler no negativa.

Teorema 2 (Thurston-[16]). *Sea M una 3-variedad que no es un 3-bola con $\partial M \neq \emptyset$. M es hiperbólica si y sólo si no contiene superficies esenciales y orientables de característica de Euler no negativa.*

Ya que las únicas superficies orientables de característica de Euler no negativa son la esfera (S^2), disco (D^2), anillo (A^2) y toro (T^2) entonces el Teorema 2 implica que si $M[\alpha]$ tiene frontera y no es hiperbólica entonces debe contener alguna de las superficies anteriores. Además, permite reducir el análisis cuando se tienen dos llenados $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ no hiperbólicos al estudio de diez casos dependiendo si cada llenado tiene alguna de las superficies anteriores. También, permite introducir únicamente técnicas topológicas razón por la cual en toda la tesis nunca se hará uso de la estructura hiperbólica de M , es decir, únicamente se aplicará la teoría de superficies esenciales. Esto motiva la siguiente:

Definición 1.0.1. *Una 3-variedad M se denomina simple si no contiene superficies orientables esenciales de característica de Euler no negativa.*

Notar que si M tiene frontera entonces el Teorema 2 implica que M es hiperbólica si y sólo si M es simple. La siguiente tabla [5] resume el análisis de los diez casos comentados anteriormente cuando M es compacta, conexa, orientable y simple. Cada entrada denota cotas superiores para la distancia $\Delta(\alpha, \beta)$ entre las pendientes y las cotas son las óptimas ya que se conocen ejemplos que las realizan.

	Disco	Esfera	Anillo	Toro
Disco	1	0	2	2
Esfera		1	2	3
Anillo			5	5
Toro				8

La cota 8 de la esquina inferior derecha de la tabla anterior codifica el siguiente resultado:

Teorema 3 (Gordon-[3]). *Sea M una 3-variedad simple. Si $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ contienen toros esenciales entonces $\Delta(\alpha, \beta) \leq 8$.*

Ahora se describirá el segundo resultado que resalta la importancia de acotar el número de intersección entre dos curvas $\Delta(\alpha, \beta)$ para poder estimar el número de pendientes degeneradas.

Lema 1.0.1 (Gordon, Litherland-[2]). *Sea n un entero no negativo y sea S una familia de pendientes en un toro T tales que $\Delta(\alpha, \beta) \leq n$ para cada $\alpha, \beta \in S$. Entonces existe una base ordenada para $H_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ tal que S corresponde a un subconjunto de la colección de parejas de primos relativos en la láttice*

$$\{\pm(1, 0)\} \cup \{\pm(p, q) : 0 \leq p \leq q \leq n\}.$$

Usando este resultado es posible estimar la cardinalidad del conjunto de pendientes degeneradas S del Teorema 1 de Thurston. De hecho, aplicando el Lema anterior con $0 \leq n \leq 8$ se obtienen las estimaciones descritas en la siguiente tabla [13]:

$\Delta \leq n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Cota superior para $\#S$	1	3	4	6	6	8	8	10	12

El desarrollo anterior describe de manera breve algunos de los antecedentes respecto de llenados de Dehn que motivan éste trabajo. Ahora bien, dado que la mayoría de los problemas más importantes ya han sido resueltos, como es el caso de las cotas óptimas para $\Delta(\alpha, \beta)$, entonces se procederá a encontrar problemas análogos eligiendo una componente en la frontera de M que ya no sea un toro. El punto de inicio para generalizar los llenados de Dehn es notar que un toro sólido se puede descomponer como la unión de dos 3-bolas. Entonces un llenado de Dehn puede ser reinterpretado de la siguiente manera: pegar una 2-asa y posteriormente pegar un 3-bola (ver Figura 1.1).

Sea M una 3-variedad compacta, conexa, orientable y sea F una componente de la frontera de M de género al menos dos. Una pendiente en F es una clase de isotopía de una curva simple cerrada en F . Se denotará por $M[\alpha]$ a la 3-variedad obtenida pegando a M una 2-asa a lo largo de una curva representando α , es decir, se pega M y el espacio $D^2 \times I$, donde D^2 es un disco, de modo que $\partial D^2 \times I$ se identifica con una vecindad de α en F (ver Figura 1.2).

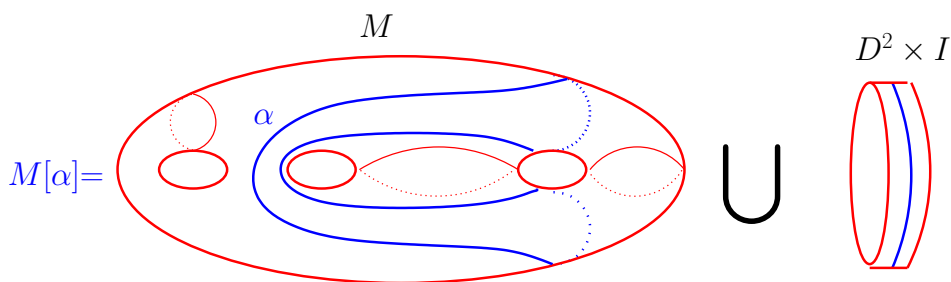


Figura 1.2: Notación $M[\alpha]$.

Teorema 4 (Scharlemann, Wu-[8]). *Sea M una 3-variedad simple y sea F una componente de ∂M con género al menos dos. Si*

$$S = \{\alpha \subset F : \alpha \text{ es separante y } M[\alpha] \text{ no es simple}\}$$

entonces S es finito.

El Teorema anterior puede ser interpretado como una generalización del Teorema de Cirugía hiperbólica de Thurston. Sin embargo, Scharlemann y Wu no dieron una cota explícita para el número de elementos del conjunto S . Por lo tanto un problema fundamental es encontrar cotas

explícitas para éste conjunto. Ahora bien, la experiencia adquirida en llenados de Dehn sugiere que es poco común que una M tenga dos pendientes tales que $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ sean no simples. Por otra parte, resulta que cuando esto sucede entonces la distancia $\Delta(\alpha, \beta)$ es usualmente pequeña y muchos de los resultados toman la forma de cotas superiores para $\Delta(\alpha, \beta)$. Por lo tanto, un problema un poco menos complicado es encontrar la cota superior mínima para la distancia $\Delta(\alpha, \beta)$ entre dos pendientes en S .

Definición 1.0.2. *Una pendiente $\alpha \in F$ se denomina toroidal, reducible, ∂ -reducible o anular dependiendo si $M[\alpha]$ contiene un toro, esfera, disco o anillo esencial, respectivamente.*

Existen algunos resultados conocidos respecto de cotas superiores para la distancia geométrica $\Delta(\alpha, \beta)$ cuando $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ no son simples. A continuación se enlistan los que hasta el momento son del conocimiento del autor previo a este trabajo:

Teorema 5 (Scharlemann, Wu-[8]). *Sea M simple y F una componente de ∂M de género al menos 2. Si $M[\alpha]$ es reducible y $M[\beta]$ es ∂ -reducible con α y β separantes en F entonces $\Delta(\alpha, \beta) = 0$.*

Teorema 6 (Qui, Zhang-[10]). *Sea M simple y F una componente de ∂M de género al menos 2. Si α y β son dos pendientes separantes en F tales que $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ son reducibles entonces $\Delta(\alpha, \beta) \leq 2$.*

El siguiente resultado fue aprendido por el autor en una conferencia impartida por Mingxing Zhang durante el JAMEX V celebrado en Colima en 2010 y que desconoce dónde pudiera estar publicado. Sin embargo, después de un análisis detallado de las técnicas aplicadas en la prueba del Teorema anterior y en otro artículo previo [9], es posible convencerse que el siguiente resultado puede ser demostrado siguiendo las mismas ideas. Esto se debe a que la idea central descansa en esencia en argumentos de más adentro para colecciones de lazos en una esfera esencial con agujeros.

Teorema 7. *Sea M simple y F una componente de ∂M de género al menos 2. Si α y β son dos pendientes separantes en F tales que $M[\alpha]$ es reducible y $M[\beta]$ es irreducible, no anular pero toroidal entonces $\Delta(\alpha, \beta) \leq 4$.*

Los resultados anteriores son para superficies en la frontera de género al menos 2. Sin embargo, para el caso cuando la componente en la frontera tiene género dos se conoce lo siguiente:

Teorema 8 (Qui, Zhang-[10]). *Sea M simple y sea F una componente de ∂M de género dos. Si α y β son dos pendientes separantes en F tales que $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ es ya sea reducible o ∂ -reducible. Entonces $\alpha = \beta$ y $\Delta(\alpha, \beta) = 0$.*

Teorema 9 (Taylor-[14]). *Sea M simple, sea F una componente de ∂M de género dos y sean α y β dos pendientes separantes en F tales que $\Delta(\alpha, \beta) \neq 0$. Si $M[\alpha]$ es reducible y $M[\beta]$ no es simple entonces $\Delta(\alpha, \beta) = 4$.*

El problema que se pretende resolver en esta tesis es encontrar una cota para $\Delta(\alpha, \beta)$ cuando $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ contienen toros esenciales asumiendo que M es simple. Es así, que el resultado a demostrar en este trabajo es el siguiente:

Teorema 10. *Sea M simple y F una componente de ∂M de género al menos dos. Si α y β son dos pendientes separantes en F tales que $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ son toroidales, ∂ -irreducibles y no anulares entonces:*

- (1) $\Delta(\alpha, \beta) = 18$, $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ contienen cada uno un toro esencial el cual intersecta la 2-asa una sola vez y F tiene género al menos 8, o
- (2) $\Delta(\alpha, \beta) = 12$, $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ contienen cada uno un toro esencial el cual intersecta la 2-asa una sola vez y F tiene género al menos 4, o
- (3) $\Delta(\alpha, \beta) \leq 10$.

El Teorema 10 tiene un Corolario inmediato:

Corolario 1.0.2. *Sea M simple y F una componente de ∂M de género dos o tres. Si α y β son dos pendientes separantes en F tales que $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ son toroidales, ∂ -irreducibles y no anulares entonces $\Delta(\alpha, \beta) \leq 10$.*

El Corolario 1.0.2 se puede interpretar como un resultado que sigue el mismo espíritu del Teorema 3 de Gordon. Sin embargo, una diferencia substancial es que en el Teorema de Gordon la cota establecida es la óptima en el sentido que existen ejemplos que la realizan como es el caso de dos llenados de Dehn en el complemento del nudo ocho que están a distancia 8. Mientras que en el Corolario 1.0.2, la cota propuesta es muy probable que no sea la óptima aunque debe ser par ya que las pendientes son separantes. También, vale la pena destacar que las hipótesis sobre $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ de que sean ∂ -irreducibles y no anulares no son restrictivas. Esto se debe a que si $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ no son simples entonces su análisis se puede dividir en varios casos como se comentó anteriormente.

La idea de la prueba del Teorema 10 consiste en estudiar de manera detallada la intersección de dos toros esenciales con agujeros que provienen de intersectar M con cada uno de los correspondientes toros esenciales en $M[\alpha]$ y $M[\beta]$, respectivamente, que minimizan su intersección con el corazón de las 2-asa respectivas que se pegan a M . Esta intersección de toros con agujeros define dos gráficas en los toros esenciales de $M[\alpha]$ y $M[\beta]$, respectivamente, al considerar los arcos de intersección. Resulta que los vértices de estas gráficas tienen la misma valencia y esta depende de $\Delta(\alpha, \beta)$. Posteriormente, se encuentra una cota superior preliminar para $\Delta(\alpha, \beta)$ ya que cuando esta crece la valencia de los vértices también lo hace. Esto implica que el número de aristas paralelas en ambas gráficas crece y existen argumentos estandar para pegar caras de dos lados y construir un anillo esencial en M que contradirá la hipótesis que M es simple. Posteriormente se refina el análisis combinatorio y topológico de la intersección de los toros con agujeros hasta conseguir la cota del Teorema 10. Finalmente, se comenta de manera breve la organización de esta tesis y los contenidos de cada capítulo.

- **Capítulo 2:** este capítulo contiene las definiciones, notaciones y resultados más elementales respecto de superficies esenciales en 3-variedades. Posteriormente, se define de manera detallada las gráficas de intersección y se describe cómo codificarán la información importante que proviene de intersectar dos toros esenciales con agujeros. Finalmente, se enlistan y demuestran las propiedades más fundamentales de estas gráficas que serán de utilidad para la demostración del resultado principal de esta tesis.
- **Capítulo 3:** se definen las gráficas reducidas en toros. En particular se repasan las clasificaciones de gráficas reducidas para toros esenciales con uno y dos agujeros. También, se clasifica la gráfica reducida para un toro esencial con tres agujeros con ciertas hipótesis adicionales que será de utilidad para demostrar algunos de los casos en los que es necesario dividir la prueba del Teorema 10. Finalmente, se desarrolla la técnica de los ciclos de Scharlemann los cuáles juegan un papel fundamental para el estudio de toros esenciales con tres agujeros. De hecho, como prueba de ello se obtiene un resultado que muestra que

para acotar la distancia $\Delta(\alpha, \beta)$ será necesario acotar el número de ciclos de Scharlemann y en otros casos contar cuántos de ellos existen en las gráficas.

- Capítulo 4: se establece cómo se dividirá la prueba del Teorema 10. De hecho se dividirá en cuatro casos. Se prueba con todo detalle el primer caso que es el caso genérico, es decir, cuando los dos toros con agujeros esenciales que provienen de intersectar M con cada uno de los toros esenciales minimales de $M[\alpha]$ y $M[\beta]$, respectivamente, tienen al menos cuatro agujeros. Finalmente, se procede a probar el Teorema 10 dejando los detalles técnicos de los tres casos restantes para los siguientes dos capítulos posteriores, respectivamente. Se puede considerar este capítulo como el más importante de toda la tesis ya que sobre éste descansa la coherencia del desarrollo de todo el trabajo.
- Capítulo 5: se procede a probar el segundo caso, es decir, cuando se tiene un toro esencial con un agujero y el otro toro esencial no tiene restricción sobre el número de sus agujeros. Este caso, se divide en cuatro subcasos dependiendo del número de agujeros del segundo toro: tiene un solo agujero, tiene dos agujeros, tiene tres agujeros o tiene más de tres agujeros. Vale la pena resaltar que el primer subcaso, es decir, cuando ambos toros tienen un solo agujero, es el caso más difícil de la prueba del Teorema 10. De hecho es sólo en este subcaso donde se usa la hipótesis de género entre dos y tres para poder probar el Corolario 1.0.2 y la razón por la cual la conclusión del Teorema 10 está dividido en tres partes (ver Lema 5.1.4). Finalmente, se prueba el tercer caso, es decir, cuando se tiene un toro esencial con dos agujeros y el otro toro esencial tiene al menos dos agujeros.
- Capítulo 6: se prueba el cuarto y último caso, es decir, cuando se tiene un toro esencial con tres agujeros y el otro toro esencial posee al menos tres agujeros. Este caso, se divide en dos subcasos dependiendo del número de agujeros del segundo toro: tiene tres agujeros o tiene al menos cuatro agujeros. El subcaso uno resulta el más delicado, es decir, cuando ambos toros esenciales tienen exactamente tres agujeros. Sin embargo, la idea clave es probar que ambas gráficas contienen exactamente 15 S-ciclos y el género de F debe ser dos si $\Delta(\alpha, \beta) = 12$. Esto permite, después de un análisis intenso de las posibles configuraciones de gráficas, concluir que solo existen dos posibles configuraciones. Finalmente, se prueba que no son compatibles obteniendo una contradicción.
- Capítulo 7: se comenta de manera breve las implicaciones de este trabajo, los problemas abiertos y las áreas de oportunidad de trabajo futuro.

Capítulo 2

Gráficas con etiquetas

Se describe uno de los métodos más útiles para investigar la comparación de dos pegados de 2-asas diferentes por la frontera de 3-variedades. Este método tiene sus orígenes cuando se comparan dos llenados de Dehn y se denomina Gráficas de intersección con etiquetas. El método consiste en esencia en estudiar de manera detallada la intersección de dos superficies con ciertas propiedades. En particular, en este capítulo se aplica para estudiar la intersección de dos toros con agujeros y esta intersección es codificada por una gráfica en cada toro.

2.1. 3-Variedades

Todas las 3-variedades M en éste trabajo se asumirán compactas, conexas y orientables. También, se asumirá que todas las subvariedades propias S se intersecan en posición transversal. La notación ∂M denotará la frontera, $\text{int}M$ denotará su interior y $N(S)$ denotará una vecindad regular de S en M . Las superficies siempre serán compactas y conexas. El objetivo de esta sección es probar el Lema 2.1.5 el cual será fundamental para definir las gráficas de intersección.

Definición 2.1.1. *Una superficie $F \subset M$ se denomina propiamente encajada si $F \cap \partial M = \partial F$.*

Definición 2.1.2. *Una superficie $F \subset M$ propiamente encajada se denomina paralela a la frontera si existe un encaje $F' \times [0, 1] \subset M$ tal que $F' \times \{0\} \subset \partial M$ y $F = F' \times \{1\} \cup \partial F' \times [0, 1]$.*

Cada 3-variedad contiene infinitas superficies. Sin embargo, no todas son útiles para obtener información global de la 3-variedad. Las superficies que tienen la siguientes propiedades son importantes para deducir propiedades globales y su importancia fue por primera vez descubierta por Haken.

Definición 2.1.3. *Una superficie $F \subset M$ se denomina compresible si existe un disco $D \subset M$ tal que $D \cap F = \partial D$ es una curva esencial en F , es decir, no acota un disco en F . Tal disco D se denomina disco de compresión para F . De no existir discos de compresión, F se denomina incompresible.*

Definición 2.1.4. *Una superficie $F \subset M$ se denomina ∂ -incompresible si para cada disco $D \subset M$ tal que ∂D es la unión de dos arcos c_1 y c_2 tales que $D \cap F = c_1$ y $D \cap \partial M = c_2$ existe otro disco $D' \subset F$ tal que $c_1 \subset \partial D'$ y $\partial D' - c_1 \subset \partial M$. En caso contrario F se denomina ∂ -compresible y tal disco D se denomina disco de ∂ -compresión para F .*

Definición 2.1.5. *Una superficie F propiamente encajada en M y no paralela a la frontera se denomina esencial si:*

- $F \cong S^2$ (esfera) y F no acota una B^3 en M ;
- $F \cong D^2$ (disco) y ∂F es esencial en ∂M ;
- $F \not\cong S^2$ o D^2 y es incompresible y ∂ -incompresible.

Ahora se listan tres resultados muy conocidos respecto de 3-variedades cuyas demostraciones pueden ser consultadas en [1] y que serán útiles más adelante.

Lema 2.1.1. *Sea $B^2 \subset \partial M$ y sea N la 3-variedad obtenida de pegar a M una 3-bola B^3 vía una identificación de una bola $B^2 \subset \partial B^3$ con la bola $B^2 \subset \partial M$. Entonces M y N son homeomorfas.*

Definición 2.1.6. *Una 3-variedad compacta, conexa y orientable M se denomina irreducible si no contiene esferas esenciales y se denomina ∂ -irreducible si no contiene discos esenciales, es decir, si ∂M es incompresible.*

Lema 2.1.2. *Sea M irreducible. Si T es un toro no separante en M entonces T es esencial en M .*

Lema 2.1.3. *Sea A un anillo propiamente encajado en M . Si M es irreducible y ∂ -irreducible entonces A no es paralelo a la frontera si y sólo si A es ∂ -incompresible.*

Definición 2.1.7. *Sean T y A contenidos en $M[\alpha]$ con T toro y A anillo. Supóngase que $\partial A = \gamma_1 \cup \gamma_2$ donde $\gamma_1 \subset T$ y $\gamma_2 \subset \partial M[\alpha]$, γ_1 y γ_2 esenciales en T y $\partial M[\alpha]$, respectivamente y $\text{Int } A \cap T = \emptyset$. Si \hat{A} se obtiene de T cortando por A se dice que el anillo \hat{A} se obtuvo por A -reducción.*

Lema 2.1.4 ([6]). *Sea T un toro esencial en $M[\alpha]$ y sea \hat{A} un anillo obtenido de T por A -reducción. Si $M[\alpha]$ es irreducible y ∂ -irreducible entonces \hat{A} es esencial en $M[\alpha]$.*

Demostración. Claramente \hat{A} es incompresible, pues un disco de compresión para \hat{A} induce un disco de compresión para T . Ahora bien, se pueden presentar dos casos. Caso uno: T es no separante. Entonces \hat{A} es no separante y por lo tanto no paralelo a la frontera. Luego el Lema 2.1.3 implica \hat{A} esencial. Caso dos: T es separante. Si \hat{A} es ∂ -compresible sea D un disco de ∂ -compresión, es decir, $\partial D = c_1 \cup c_2$, $\partial c_1 = \partial c_2$, $c_1 \subset \partial M$, $c_2 \subset \hat{A}$ y tal que c_2 no corta un disco en \hat{A} . Ya que \hat{A} separa sean M_1 y M_2 las dos componentes de $M[\alpha] - \hat{A}$ (ver Figura 2.1). Ahora bien, ya que \hat{A} induce dos curvas paralelas en $\partial M[\alpha]$ entonces induce un anillo \hat{A}_0 en $\partial M[\alpha]$. Sin pérdida de generalidad supóngase que $\hat{A}_0 \subset M_1$. Subcaso uno: $D \subset M_1$. Entonces al cortar \hat{A} por D se obtiene un disco de compresión para $\partial M[\alpha]$. Luego ya que $\partial M[\alpha]$ es incompresible y $M[\alpha]$ es irreducible entonces $\hat{A} \cup \hat{A}_0$ acota un toro sólido. Esto implica que T también acota un toro sólido lo cual contradice que T es esencial. Subcaso dos: $D \subset M_2$. Entonces el Lema 2.1.3 implica que \hat{A} es paralelo a la frontera. Esto implica que la componente en la frontera de $M[\alpha]$ que contiene una de las componentes de A es un toro. Luego T es paralelo a la frontera lo cual contradice que T es esencial. Por lo tanto en cualquier caso el anillo \hat{A} es esencial. \square

El siguiente resultado será fundamental para poder definir las gráficas con etiquetas que será la técnica sobre la cual descansará la prueba del resultado principal de este trabajo.

Lema 2.1.5. *Sea M simple y α separante en F de género al menos dos con $M[\alpha]$ toroidal. Si $M[\alpha]$ es ∂ -irreducible, irreducible y no anular entonces M contiene un toro agujerado esencial P con todas sus componentes en la frontera paralelas a α .*

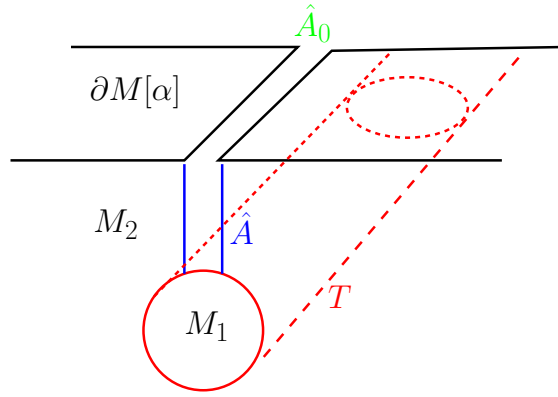


Figura 2.1: T separante en $M[\alpha]$.

Demostración. Sea $H_\alpha = D_\alpha^2 \times [0, 1]$ la 2-asa que se pega a M para obtener $M[\alpha]$ y denote por τ_α al corazón de H_α . Así, τ_α es un arco en $M[\alpha]$ con extremos en $\partial M[\alpha]$. Elegir un toro esencial \hat{P} en $M[\alpha]$ tal que la intersección en posición general $\hat{P} \cap \tau_\alpha$ sea mínima entre todos los toros esenciales en $M[\alpha]$. Nótese que esto implica que τ_α y \hat{P} se intersecan en un número finito de puntos y que $\hat{P} \cap N(\tau_\alpha)$ consiste de una colección disjunta de discos. Ahora bien, considere el toro con agujeros $P = \hat{P} \cap M$ y denote las componentes de ∂P por $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ consecutivamente sobre ∂M (ver Figura 2.2). Entonces ya que n es mínima P es incompresible. Además, las componentes de ∂P acotan discos en $M[\alpha]$ por construcción lo cual implica que cada componente de ∂P es paralela a α .

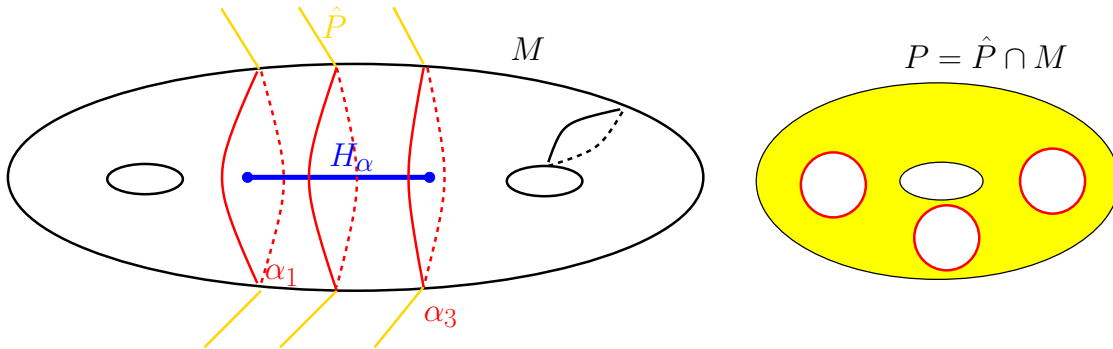


Figura 2.2: Toro minimal \hat{P} en $M[\alpha]$.

Ahora bien, si P es ∂ -compresible en M entonces sea D un disco de ∂ -compresión, es decir, $\partial D = c_1 \cup c_2$, $\partial c_1 = \partial c_2$, $c_1 \subset \partial M$, $c_2 \subset P$ y tal que c_2 no corta un disco en P . Si c_1 corta un disco D' en $\partial M - \partial P$ entonces $D \cup_{c_1} D'$ es un disco de compresión para P lo cual implica que c_2 corta un disco en P lo cual contradice la suposición. Por lo tanto el arco c_1 es esencial en $\partial M - \partial P$. Si un extremo de c_1 está en α_i y el otro extremo está en α_{i+1} al empujar la superficie P a lo largo de D se obtiene una nueva superficie que contradice la minimalidad de n . Por lo tanto, ya que α es separante se puede asumir que ambos extremos de c_1 están en α_1 o α_n . Sin pérdida de generalidad, asumir que los extremos de c_1 están en α_1 . Ahora bien, existen dos posibilidades para el arco c_2 en P .

Caso uno: c_2 es separante en P . Entonces c_2 corta un disco con agujeros D'' de P tal que $\partial D'' = c_2 \cup \alpha'_1$ donde α'_1 es un arco de α_1 . Luego $D \cup_{c_2} D''$ es un disco con agujeros en M con una componente en la frontera $c_1 \cup \alpha'_1$ no trivial en ∂M ya que c_1 es esencial en $\partial M - \partial P$. Al pegar la 2-asa H_α se tapan los agujeros del disco anterior lo cual implica que $M[\alpha]$ es ∂ -compresible

lo cual es una contradicción.

Caso dos: c_2 es no separante en P . La 2-asa H_α induce dos curvas $\delta_1 = \partial D_\alpha^2 \times \{0\}$ y $\delta_n = \partial D_\alpha^2 \times \{1\}$ en F que son paralelas a α_1 y α_n , respectivamente. Entonces δ_1 y α_1 acotan un anillo en F con interior disjunto de cada α_i . Luego el arco c_1 divide este anillo en dos rectángulos E_1 y E_2 (ver Figura 2.3). Sea A el anillo formado por la unión de D con alguno de estos dos rectángulos. Notar que una componente de ∂A está en \hat{P} y es una curva esencial ya que c_2 es no separante. También, la otra componente de ∂A es una curva esencial en $\partial M[\alpha]$. Al cortar \hat{P} a lo largo de A , se obtiene otro anillo \hat{A} en $M[\alpha]$ el cual es esencial por el Lema 2.1.4. Esto contradice que $M[\alpha]$ no es anular.

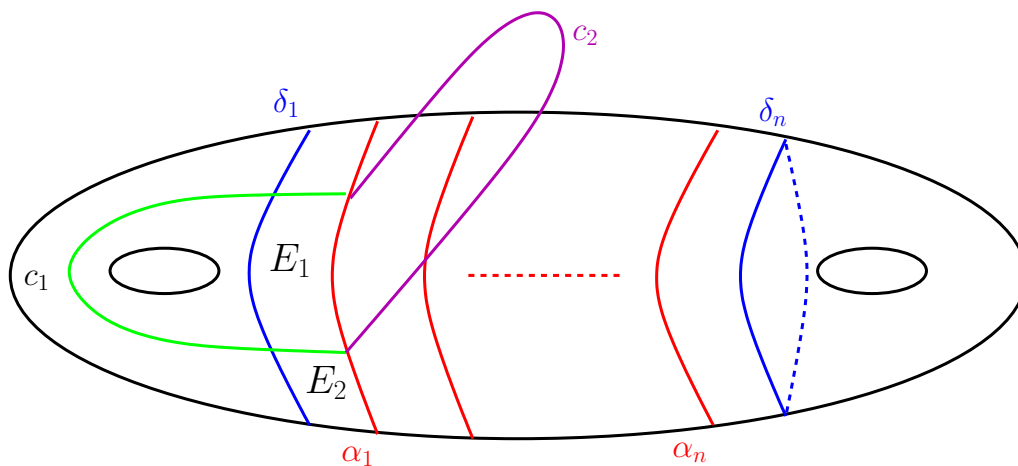


Figura 2.3: Anillos $D \cup E_1$ y $D \cup E_2$ contenidos en $M[\alpha]$.

Por lo tanto ninguno de los dos casos anteriores sucede, es decir, P es ∂ -incompresible. Finalmente, si P es paralelo a la frontera implica que P es ∂ -compresible. Por lo tanto, P es esencial en M . \square

2.2. Gráficas de Intersección

Las gráficas de intersección pueden ser definidas para cualquier par de superficies $\hat{P} \subset M[\alpha]$ y $\hat{Q} \subset M[\beta]$. Sin embargo, para que las gráficas codifiquen información interesante es necesario que las superficies elegidas tengan tanto propiedades importantes como intersección interesante. El objetivo de esta sección es definir las gráficas de intersección y probar dos de sus propiedades más importantes (ver Lema 2.2.2).

Sea M una 3-variedad simple y sea F una componente de ∂M de género al menos dos. Supóngase que α y β son dos pendientes separantes toroidales en F . Elegir \hat{P} (respec. \hat{Q}) toro esencial en $M[\alpha]$ (respec. $M[\beta]$) tal que minimiza su intersección con el corazón τ_α de la 2-asa H_α . Entonces el Lema 2.1.5 implica que el toro con agujeros $P = \hat{P} \cap M$ es esencial y que ∂P tiene componentes $\partial_1 P, \dots, \partial_u P, \dots, \partial_p P$, $p \geq 1$ tales que $\partial_u P$ y $\partial_{u+1} P$ acotan anillos en F con interior disjunto de P (ver Figura 2.4). Análogamente, \hat{Q} induce un toro con agujeros $Q = \hat{Q} \cap M$ cuyas componentes en la frontera se pueden numerar $\partial_1 Q, \dots, \partial_i Q, \dots, \partial_q Q$, $q \geq 1$. Ahora bien, aplicando isotopías de ser necesario, es posible suponer que ∂P y ∂Q tienen intersección mínima y que $P \cap Q$ es una colección de arcos y círculos que son esenciales tanto en P como en Q . Esta intersección permite definir gráficas con etiquetas Γ_P en \hat{P} y Γ_Q en \hat{Q} de la siguiente manera:

Definición 2.2.1. *Los vértices de las gráficas Γ_P y Γ_Q corresponderán a las componentes en la frontera $\partial_u P \subset \partial P$ y $\partial_i Q \subset \partial Q$, respectivamente. Las aristas de cada gráfica corresponderán*

a los arcos de intersección de $P \cap Q$.

Nótese que los posibles círculos de intersección de $P \cap Q$ se ignoran y que las aristas de ambas gráficas se corresponden de manera biyectiva. Ahora bien, con el objetivo de codificar de manera ordenada los extremos de los arcos de intersección que provienen de $\partial P \cap \partial Q$ se asignarán etiquetas en los extremos de las aristas. Sea e una arista de Γ_P y Γ_Q con extremo x tal que $x \in \partial_u P \cap \partial_i Q$ entonces x es etiquetado con i en Γ_P mientras que x es etiquetado con u en Γ_Q . De hecho, el etiquetado en tal extremo se denotará por la pareja (u, i) como se ilustra en la Figura 2.4.

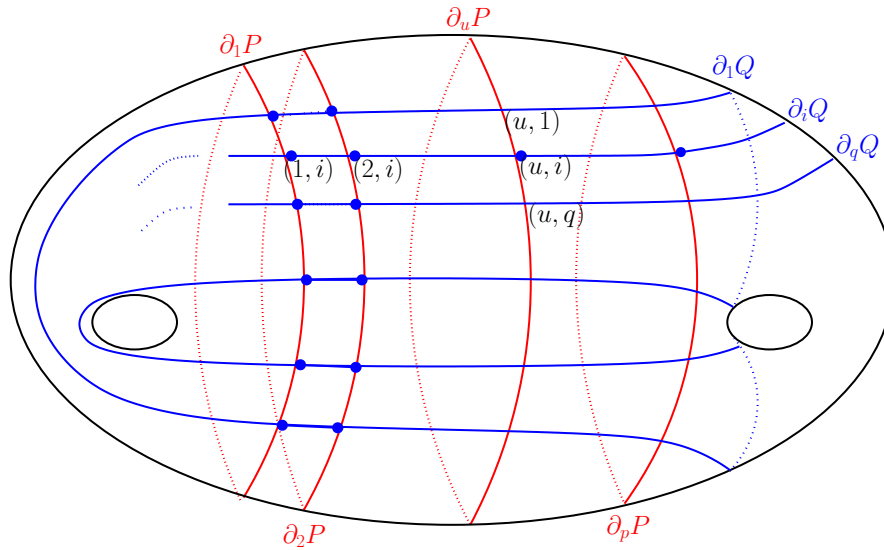


Figura 2.4: Etiquetas de $\partial P \cap \partial Q$ en ∂M .

Definición 2.2.2. Dos aristas e_1 y e_2 en Γ_P se denominan paralelas si acotan un disco D en P tal que $\text{Int } D$ no contiene vértices de Γ_P .

Lema 2.2.1 ([8]). Sea M una 3-variedad irreducible y ∂ -irreducible. Sean P y Q superficies esenciales propiamente encajadas en M isotopadas de modo que están en posición de intersección mínima. Si existen arcos e_1 y e_2 en $P \cap Q$ paralelos en Γ_P y Γ_Q entonces M contiene un anillo esencial.

Demostración. Sean D_1 y D_2 los discos (rectángulos) que realizan el paralelismo de los arcos e_1 y e_2 en P y Q , respectivamente. Al elegir discos de más adentro de ser necesario se puede suponer que $D_1 \cap D_2 = e_1 \cup e_2$. Por lo tanto existen dos posibilidades de pegar los discos $A = D_1 \cup D_2$ a lo largo de los arcos que inducen una superficie propiamente encajada que es un anillo o una banda de Mobius (ver Figura 2.5).

Caso uno: A es una banda de Mobius. De ser así, sea $N(A)$ una vecindad regular de A . Entonces $M = N(A) \cup (M - N(A))$ y $A_1 = N(A) \cap (M - N(A))$ es un anillo. Ahora bien, $N(A)$ es un toro sólido y como el anillo A_1 corre dos veces a lo largo de la longitud del toro entonces A_1 es incompresible y ∂ -incompresible. Se afirma que A_1 también es incompresible y ∂ -incompresible en $M - N(A)$. Si A_1 es compresible en $M - N(A)$ sea D un disco de compresión. Luego $N(A) \cup N(D)$, donde $N(D)$ denota una vecindad regular de D , es el espacio lente $L(2, 1)$ menos el interior de una 3-bola. Ya que M es irreducible esto implica $M = L(2, 1)$ lo cual contradice que M tiene frontera. Por lo tanto A_1 es incompresible en $M - N(A)$. Si A_1 es ∂ -compresible en $M - N(A)$ sea D un disco de ∂ -compresión. Al cortar A_1 con D se obtiene

un disco que divide a M en dos componentes una de las cuales es un toro sólido por el Lema 2.1.1. Esto implica que M no es ∂ -irreducible lo cual es una contradicción. Por lo tanto A_1 es ∂ -incompresible en $M - N(A)$. Finalmente, ya que A_1 es incompresible y ∂ -incompresible en $N(A)$ y $M - N(A)$ esto implica que A_1 también lo es en M . Luego el Lema 2.1.3 implica que A_1 es esencial en M .

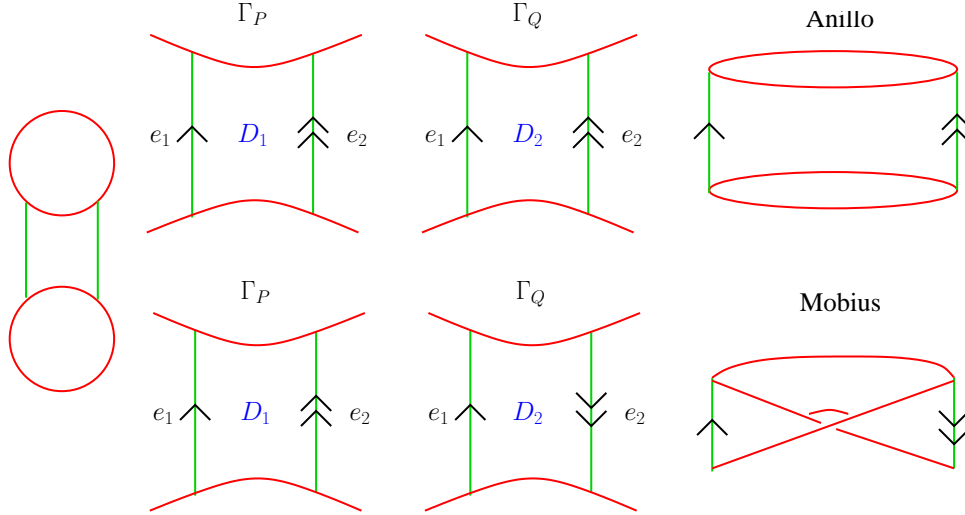


Figura 2.5: Aristas paralelas en Γ_P y Γ_Q .

Caso dos: A es un anillo. Sea c una componente de la frontera de A . Entonces existen dos arcos γ_1 y γ_2 tales que $c = \gamma_1 \cup \gamma_2$, $\gamma_1 \subset P$ y $\gamma_2 \subset Q$. Si A es compresible entonces c acota un disco en M . Luego ya que M es ∂ -irreducible entonces c acota un disco en ∂M . Entonces al usar este disco en la frontera y aplicar isotopías sobre γ_1 y γ_2 se puede reducir el número de puntos de intersección entre ∂P y ∂Q lo cual es una contradicción. Por lo tanto A es incompresible. Ahora bien, si A es ∂ -compresible sea D un disco de ∂ -compresión. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que el arco $c_1 = D \cap A$ está contenido en D_1 y que es paralelo a e_1 . Así, el arco c_1 es esencial en P . Si $\text{int}D \cap P \neq \emptyset$ aplicando argumentos de círculos de más adentro o de arcos de más afuera implica que P es compresible o ∂ -compresible, respectivamente. Esto contradice que P es esencial. Por lo tanto el anillo A es esencial en M . \square

Se finaliza esta sección con dos de las propiedades más importantes que las gráficas de intersección Γ_P y Γ_Q poseen y que serán de fundamental importancia para la prueba del Teorema 10. Vale la pena destacar que por los Teoremas 6 y 7 se puede suponer que $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ son irreducibles en el siguiente resultado.

Lema 2.2.2. *Sea M simple y F una componente de ∂M de género al menos dos. Si α y β son dos pendientes separantes en F tales que $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ son toroidales, ∂ -irreducibles y no anulares entonces:*

- (1) Γ_P y Γ_Q no tiene discos cara de un lado.
- (2) Γ_P y Γ_Q no tienen aristas paralelas comunes.

Demostración. (1) Cada arco componente de $P \cap Q$ es esencial en P y Q por construcción. Entonces el resultado es inmediato del hecho que estas superficies se eligen esenciales al usar el Lema 2.1.5.

(2) Si ambas gráficas tienen aristas paralelas comunes entonces el Lema 2.2.1 implica que M tiene un anillo esencial lo cual contradice que M es simple.

□

2.3. Propiedades de las Gráficas de Intersección

Esta sección tiene por objetivo aplicar la hipótesis que las curvas α y β son separantes combinado con el hecho de que M y las superficies agujeradas P y Q son orientables para encontrar restricciones adicionales a las dadas por el Lema 2.2.2 sobre las gráficas Γ_P y Γ_Q (ver Lema 2.3.3). En esencia, toda la sección descansa en las ideas desarrolladas en [9] y [10]. Cabe destacar que la mayoría de los resultados que se desarrollan son válidos para cualesquiera par de superficies orientables en M y no necesariamente para toros con agujeros.

Definición 2.3.1. Sean α y β dos pendientes (clase de isotopía de curvas simples cerradas) en una componente F de ∂M . Se define la distancia entre α y β , denotada por $\Delta(\alpha, \beta)$, como el mínimo número de intersección geométrica entre todas las curvas que representan α y β bajo isotopía (ver Figura 2.6).

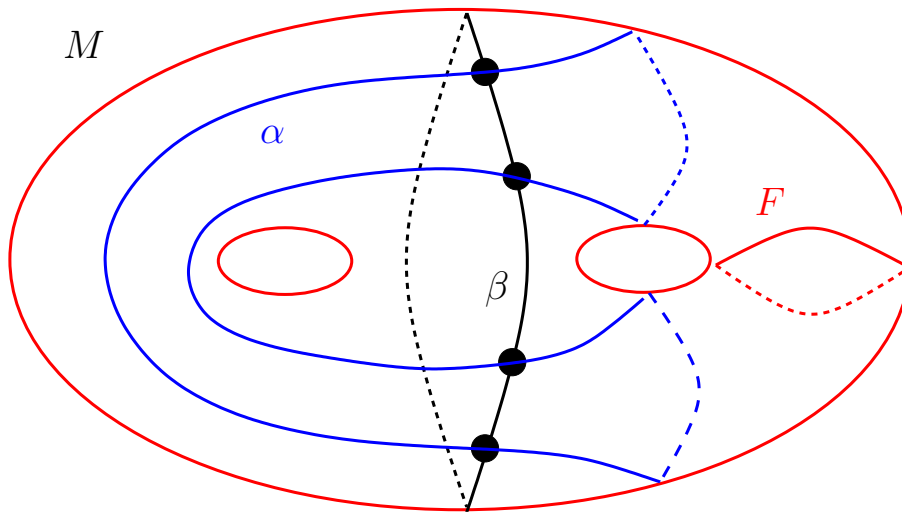


Figura 2.6: Distancia $\Delta(\alpha, \beta) = 4$ entre pendientes.

Se comienza signando las etiquetas y posteriormente los vértices para encontrar un análogo de la regla de paridad la cual será una de las restricciones buscadas para las configuraciones posibles de Γ_P y Γ_Q . Dicha regla de paridad tiene sus orígenes en llenados de Dehn, sin embargo, para el caso de género mayor a uno resultará un poco más delicada. Lo anterior se debe a que dos curvas esenciales orientadas en un toro se intersecan de la misma manera pero esto no ocurre en género mayor a uno.

Elegir orientaciones fijas para α y β . Posteriormente cada punto de $\alpha \cap \beta$ se signa " + " o " - " dependiendo si la regla de la mano derecha de α a β señala al exterior de M o al interior de M , respectivamente. Nótar que el Lema 2.1.5 implica que cada componente de la frontera de P es paralela a α en F y que por lo tanto tiene sentido la siguiente:

Definición 2.3.2. Oriente cada componente de ∂P de acuerdo con la orientación inducida por α y signe cada $x \in \partial P \cap \partial Q$ con la regla de la mano derecha. Tal signado se denotará por $c(x)$.

Nótese que debido a que las curvas son separantes los signos alternan y por lo tanto en cada vértice $\partial_u P$ las etiquetas con signos aparecen como:

$$+1, +2, \dots, +q, -q, \dots, -2, -1$$

repetidas $\Delta(\alpha, \beta)/2$ veces (ver Figura 2.7).

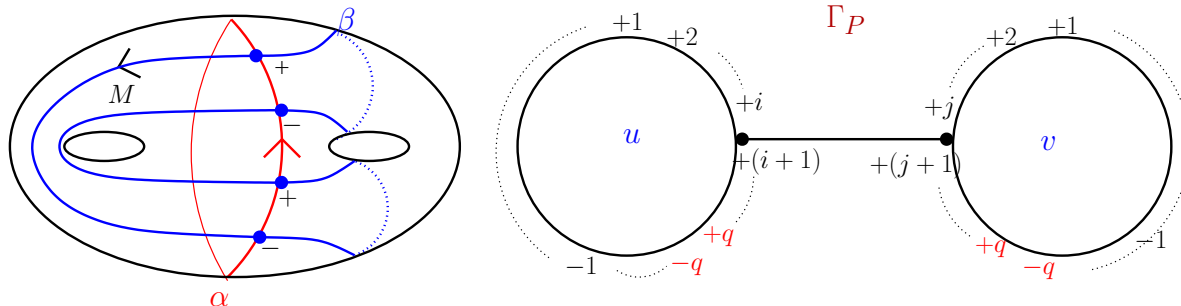


Figura 2.7: Etiquetas signadas en los vértices $\partial_u P$ y $\partial_v P$.

Ahora se signan los vértices de Γ_P . Sea $P \times [0, 1]$ una vecindad regular de P en M y sean $P^+ = P \times \{1\}$ y $P^- = P \times \{0\}$ que se eligen al fijar alguna de las dos elecciones posibles. Para cada u y j tales que $1 \leq u \leq p$ y $1 \leq j \leq q$ sea c una componente de $\partial_u P \times [0, 1] \cap \partial_j Q$ con la orientación inducida por $\partial_j Q$.

Definición 2.3.3. Con la notación anterior se define el signo del vértice $\partial_u P$, denotado por $s(u)$, de la siguiente manera:

- (1) Si c intersecta $\partial_u P$ en un punto " + " entonces $s(u) = +$ (respec. $s(u) = -$) si la dirección de c va de P^+ a P^- (resp. de P^- a P^+).
- (2) Si c intersecta $\partial_u P$ en un punto " - " entonces $s(u) = +$ (respec. $s(u) = -$) si la dirección de c va de P^- a P^+ (resp. de P^+ a P^-).

Nótese que la definición anterior es independiente de las elecciones de c y j ya que cada componente de ∂Q tiene la misma dirección que β sobre F . Además, de manera análoga se pueden signar los vértices $\partial_j Q$ en Γ_Q .

Por otra parte ya que M es orientable entonces $\partial_u P$ y $\partial_v P$ tienen la misma dirección en P cuando $\partial_u P$ y $\partial_v P$ tienen el mismo signo. Esto significa que las etiquetas

$$+1, +2, \dots, +q, -q, \dots, -2, -1$$

en $\partial_u P$ y $\partial_v P$ aparecen en la misma dirección en Γ_P . De la misma forma las etiquetas $+1, +2, \dots, +q, -q, \dots, -2, -1$ aparecen en direcciones opuestas cuando $\partial_u P$ y $\partial_v P$ tienen diferente signado (ver Figura 2.8).

Definición 2.3.4. Las etiquetas en los extremos de las aristas de Γ_P con los signos definidos anteriormente $c(x)_i$ se denominan etiquetas Tipo A.

El signado anterior de etiquetas y vértices induce la siguiente restricción sobre las gráficas Γ_P y Γ_Q (ver Figura 2.9):

Lema 2.3.1 (Regla de paridad A-[9]). Sea e una arista de Γ_P con extremos $\partial e = x \cup y$. Si los extremos tienen etiquetas (u, i) y (v, j) , respectivamente, entonces se tiene la siguiente igualdad de signos:

$$s(i)s(j)s(u)s(v)c(x)c(y) = -.$$

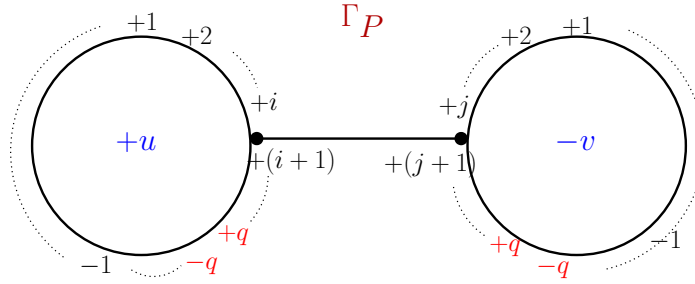


Figura 2.8: Etiquetas Tipo A en vértices de signo opuesto.

Demostración. Recuerde que el signo de intersección de un punto entre las componentes de las fronteras de P y Q está descrito vía vectores normales. Luego no es difícil convencerse que el signo de intersección del punto x y del punto y están descritos de manera equivalente por los productos $-c(x)s(u)s(i)$ y $-c(y)s(v)s(j)$, respectivamente. Por lo tanto el resultado se deduce del hecho que los extremos de un arco de intersección deben unir puntos de intersección con signo opuesto. \square

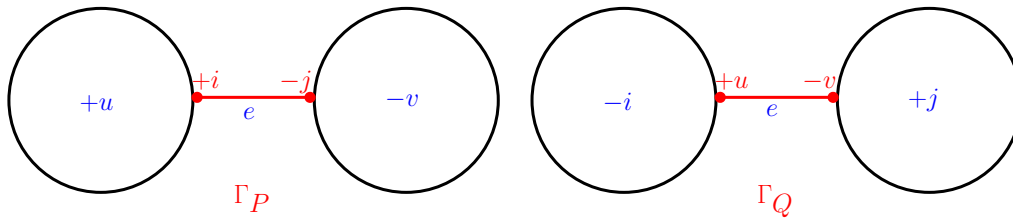


Figura 2.9: Regla de Paridad A.

Ahora, se define un nuevo tipo de etiquetas sobre los vértices de Γ_P con el objetivo de simplificar un poco la notación del Lema 2.3.1 y sin perder demasiada información para que las etiquetas $+1, +2, \dots, +q, -q, \dots, -1$ aparezcan en la misma dirección en todos los vértices de Γ_P :

Definición 2.3.5. Sea e una arista de Γ_P con extremos $\partial e = x \cup y$ donde x está etiquetado con (u, i) . Se define la etiqueta Tipo B de x mediante $g(x)i$ donde $g(x) = c(x) \times s(u) \in \{\pm\}$.

De esta manera en los vértices positivos de Γ_P las etiquetas permanecen invariantes y en los vértices negativos a todas las etiquetas se les cambia de signo. Esto implica que con etiquetas Tipo B en todos los vértices de Γ_P las etiquetas se verán igual al leerlas en la misma dirección (ver Figura 2.10). Sin pérdida de generalidad, se acordará la siguiente convención a lo largo de toda la tesis:

Convención 1. Las etiquetas $+1, +2, \dots, +q, -q, \dots, -2, -1$ Tipo B aparecen en el sentido de las manecillas del reloj en cada vértice de Γ_P .

Un resultado que se obtiene como consecuencia de las etiquetas Tipo B, que no es válido para etiquetas Tipo A, y que será usado más adelante para detectar colecciones de lazos en Γ_Q es el siguiente:

Lema 2.3.2. Sea $n > 1$ y sea $S = \{e_i : i = 1, \dots, n\}$ una colección de aristas paralelas en Γ_P . Si una de las aristas de S tiene etiquetas Tipo B que sólo difieren en signo en sus dos extremos, es decir, existe $e_j \in S$ tal que $\partial e_j = (+k) \sqcup (-k)$, entonces cada arista de S tiene la misma propiedad y por tanto representan lazos en Γ_Q .

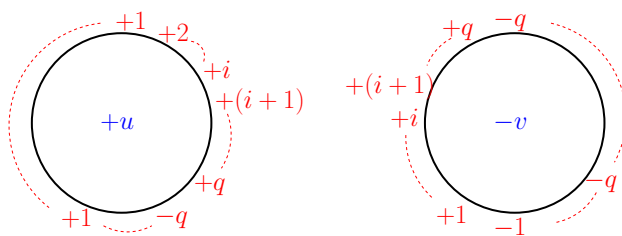


Figura 2.10: Etiquetas Tipo B en vértices de signo opuesto.

Demostración. Es inmediato de la definición de las etiquetas Tipo B y de la convención 1 (ver Figura 2.11).

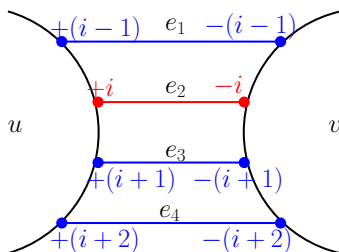


Figura 2.11: Colecciones de lazos.

□

En la prueba del Teorema principal de este trabajo, es decir, del Teorema 10, usualmente se usará etiquetas Tipo *B* en una de las gráficas Γ_P o Γ_Q . Posteriormente se notará que debido a que los argumentos son simétricos en ambas gráficas ya que dependerán de su número de agujeros entonces usualmente será Γ_P la cual tenga etiquetas Tipo *B*. Si bien el Lema 2.3.2 será útil en capítulos posteriores para detectar colecciones de lazos en Γ_Q , más adelante las etiquetas Tipo *B* serán útiles para detectar colecciones de ciclos esenciales de longitud dos en Γ_Q (ver Lema 4.1.1).

Ahora se utilizan las etiquetas Tipo *B* para introducir un concepto que será de suma importancia cuando alguno de los toros con agujeros, P o Q , tengan exactamente tres agujeros. Supóngase que las etiquetas en los extremos de las aristas de Γ_P son de Tipo *B*. Una arista de Γ_P se denomina x -arista si tiene etiqueta x en uno de sus extremos. Denotar por Γ_P^x a la subgráfica de Γ_P inducida por todas las x -aristas.

Definición 2.3.6. *Un ciclo en Γ_P^x se denomina ciclo virtual de Scharlemann si acota un disco cara en Γ_P .*

Nótese que la convención 1 implica que cada arista de un ciclo virtual de Scharlemann tiene el mismo par de etiquetas Tipo *B*. Este par de etiquetas sin considerar signos se denomina el par de etiquetas del ciclo virtual de Scharlemann.

Definición 2.3.7. *Un ciclo virtual de Scharlemann σ con par de etiquetas (x, y) se denomina ciclo de Scharlemann si $x \neq y$. El número de aristas de un ciclo de Scharlemann σ se denomina la longitud de σ . Un ciclo de Scharlemann de longitud dos se denomina *S-ciclo*.*

Nótese que un ciclo virtual de Scharlemann es un ciclo de Scharlemann o tiene par de etiquetas $(1, 1)$ o (q, q) (ver Figura 2.12).

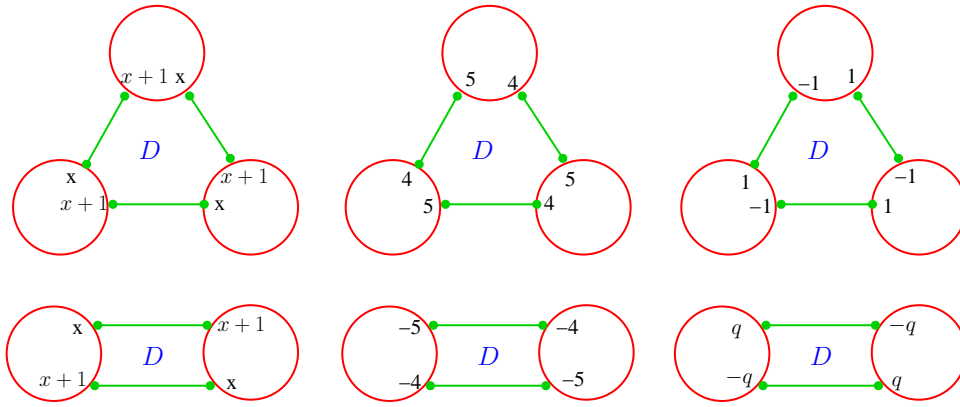


Figura 2.12: Ciclos virtuales de Scharlemann.

Se finaliza la sección con la lista de las restricciones o propiedades más importantes que satisfacen las gráficas Γ_P y Γ_Q , adicionales a las ya descritas en el Lema 2.2.2, que constituyen la base de la técnica de las gráficas de intersección con etiquetas:

Lema 2.3.3 ([9], [10]). *Sea M simple y F una componente de ∂M de género al menos dos. Si α y β son dos pendientes separantes en F tales que $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ son toroidales, ∂ -irreducibles y no anulares entonces:*

- (1) *Si e es una arista de Γ_P con extremos $\partial e = x \cup y$ tal que los extremos tienen etiquetas (u, i) y (v, j) , respectivamente, entonces se cumple la siguiente igualdad de signos:*

$$s(i)s(j)g(x)g(y) = -1.$$

- (2) *Cada arista de Γ_P tiene diferentes etiquetas Tipo B en sus dos extremos.*
- (3) *Si D es un disco cara de un ciclo de Scharlemann σ en Γ_P entonces ∂D induce una curva esencial en Γ_Q .*
- (4) *Si Γ_P contiene un ciclo de Scharlemann entonces Q es separante.*
- (5) *Si $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una colección de aristas paralelas en Γ_P con $n > q$ entonces S contiene un S -ciclo o induce una colección de n lazos en Γ_Q .*

Demostración. (1) Es inmediato del Lema 2.3.1 y de la definición de etiquetas Tipo B.

(2) Es inmediato de (1) ya que si e es una arista de Γ_P con extremos x e y que tienen etiquetas (u, i) y (v, i) , respectivamente, entonces $s(i)s(i)g(x)g(y) = -1$. Por lo tanto $g(x) \neq g(y)$.

(3) Supóngase que ∂D no induce una curva esencial en Γ_Q . Entonces existe un disco $B \subset \hat{Q}$ que la contiene. Supóngase que σ tiene par de etiquetas $(t, t+1)$ y sea H_t la parte de la 2-asa $D_\alpha \times [0, 1]$ limitada por los vértices t y $t+1$. Entonces una vecindad regular de $B \cup H_t \cup D$ en $M[\beta]$ es un espacio lente menos una 3-bola (ver Figura 2.13). Luego ya que $M[\beta]$ es irreducible implica que $M[\beta]$ es un espacio lente lo cual contradice que $M[\beta]$ tiene frontera.

(4) Supóngase que Q es no separante y sea σ un ciclo de Scharlemann de Γ_P con par de etiquetas $(t, t+1)$. Sea D el disco cara acotado por σ y sea $A_{t,t+1}$ el anillo acotado en F por las componentes consecutivas $\partial_t Q$ y $\partial_{t+1} Q$ de ∂Q . Luego $S_t = Q \cup A_{t,t+1}$ es una superficie de género 2 no separante en M tal que $\text{int}(D) \cap S_t$ es vacía y $\partial D \subset S_t$ (ver Figura 2.14). Al cortar S_t con D se obtiene un nuevo toro con agujeros T el cuál tiene dos componentes en la frontera

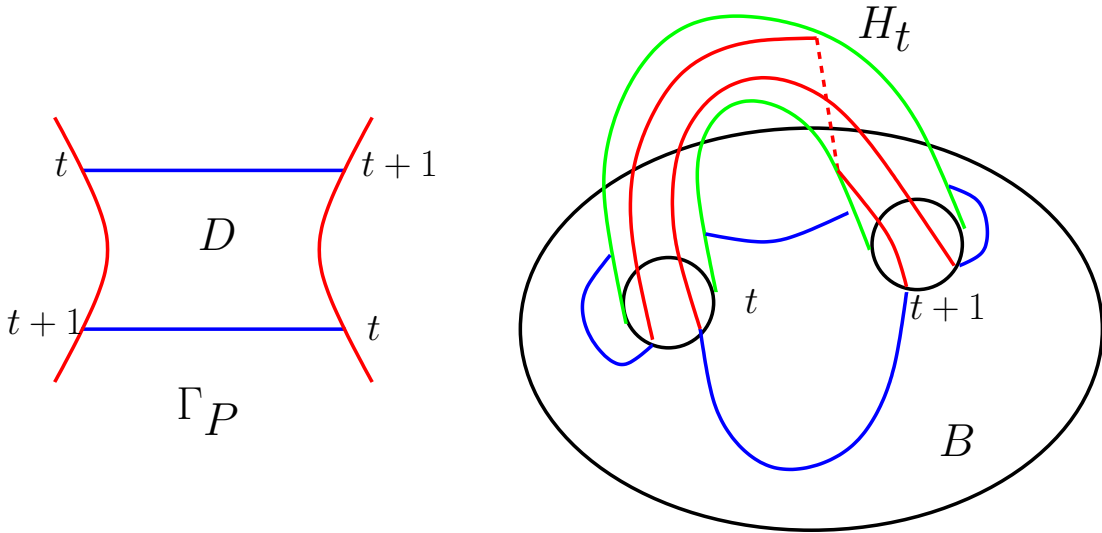


Figura 2.13: Espacio lente con un agujero $N(B \cup H_t \cup D)$ en $M[\beta]$.

menos que Q . Posteriormente al rellenar los agujeros de T en $M[\beta]$ se obtiene un toro \hat{T} no separante el cual es esencial por el Lema 2.1.2. Esto contradice la minimalidad del número de agujeros de Q .

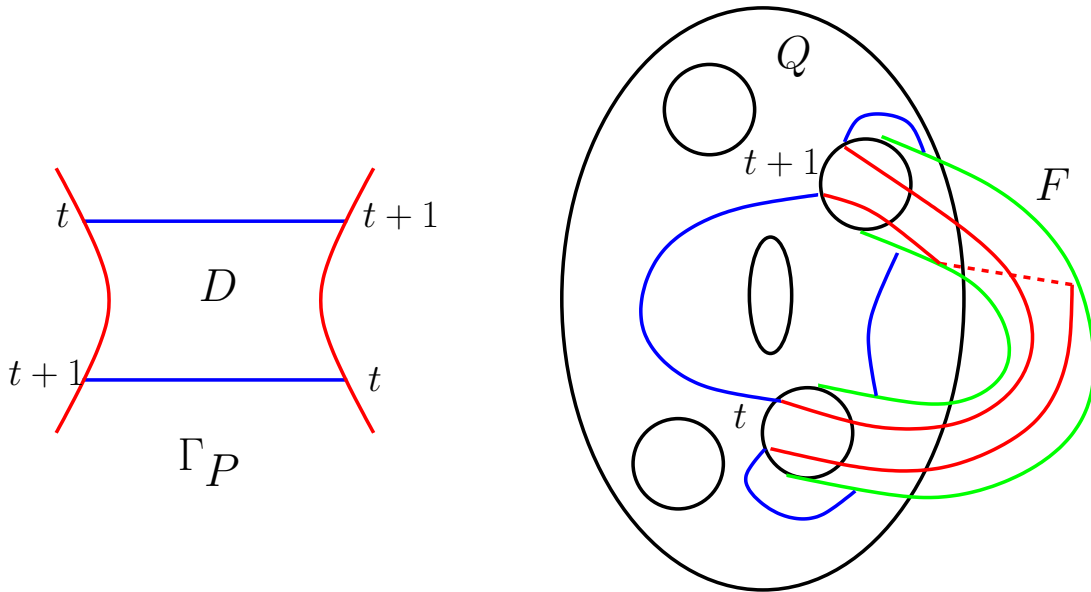


Figura 2.14: Superficie de género dos $S_t = Q \cup A_{t,t+1}$.

(5) Supóngase que cada arista e_i tiene etiquetas en sus extremos $\partial e_i = x_i \sqcup y_i$ tal que x_i corresponde al vértice $\partial_u P$ y y_i corresponde al vértice $\partial_v P$. Ya que $n > q$ entonces existe $x_a = y_b$ para algunos a y b tales que $1 \leq a \leq n$ y $1 \leq b \leq n$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $a \leq b$. Nótese que (2) implica $a < b$. También, la Convención 1 implica $x_{a+j} = y_{b-j}$. Ahora bien, se pueden presentar dos casos. Caso uno: $b - a$ es par. Ya que $a + (b - a)/2 = (a + b)/2 = b - (b - a)/2$ entonces $j = (b - a)/2$ implica $x_{a+j} = y_{b-j}$, es decir, la arista $e_{(a+b)/2}$ tiene las mismas etiquetas en sus extremos lo cual contradice (2). Por lo tanto este caso no sucede. Caso dos: $b - a$ es impar. Entonces las igualdades $(a + b - 1)/2 = a + (b - a - 1)/2$,

$(a + b + 1)/2 = a + (b - a + 1)/2$ y la Convención 1 implican que $x_{(a+b-1)/2} = y_{(a+b+1)/2}$ y $x_{(a+b+1)/2} = y_{(a+b-1)/2}$. Por lo tanto las aristas $e_{(a+b+1)/2}$ y $e_{(a+b-1)/2}$ acotan un ciclo virtual de Scharlemann σ . Finalmente, aplicar el Lema 2.3.2 en caso que el par de etiquetas de σ sea $(1, 1)$ o (q, q) .

□

Capítulo 3

Gráficas Reducidas en toros

Este Capítulo clasifica gráficas reducidas en los casos cuando los toros con agujeros $P = \hat{P} \cap M$ y $Q = \hat{Q} \cap M$ tienen una, dos o tres componentes en la frontera. Esta clasificación se aplicará en los Capítulos 4, 5 y 6 para probar las cotas propuestas del Teorema 10 con las hipótesis anteriores respecto del número de agujeros. También, se desarrolla la técnica de los ciclos de Scharlemann los cuáles serán de fundamental importancia cuando uno de los toros anteriores tenga exactamente tres agujeros. Lo anterior se debe a que bajo ciertas hipótesis es posible acotar Δ en términos del número de ciclos de Scharlemann (ver Lema 3.2.4). Finalmente, como una aplicación se prueba el Teorema 10 cuando la frontera F de la 3-variedad simple M tiene género al menos 3 y uno de los toros anteriores tiene 3 agujeros (ver Corolario 3.2.5). Para una gráfica Γ se denotará por V , E y F el número de vértices, número de aristas y número de discos cara, respectivamente.

3.1. Gráficas reducidas con a lo más tres vértices

En esta sección se repasan las muy conocidas clasificaciones de gráficas reducidas en toros con uno y dos agujeros. Posteriormente, se clasifica una de estas gráficas reducidas para toros con tres agujeros con ciertas hipótesis adicionales que será útil más adelante.

Definición 3.1.1. *Dos gráficas Γ_1 y Γ_2 en un toro T se denominan equivalentes, denotado por $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$, si existe un homeomorfismo $f : T \rightarrow T$ tal que $f(\Gamma_1) = \Gamma_2$.*

Definición 3.1.2. *Sea Γ una gráfica en un toro T . Se define la gráfica reducida de Γ , denotada por $\bar{\Gamma}$, como la gráfica obtenida al identificar cada colección de aristas paralelas de Γ a una única arista.*

El siguiente resultado será útil tanto para estimar el número de aristas como la valencia que pueden tener los vértices de una gráfica reducida en un toro:

Lema 3.1.1. *Sea Γ una gráfica encajada en un toro T con V vértices y E aristas. Si Γ no contiene discos cara de un lado y dos lados entonces $E \leq 3V$. Además, si la igualdad se cumple entonces cada cara es un disco de longitud 3.*

Demostración. Sea F el número de discos cara de Γ en el toro. Ya que cada disco cara tiene al menos 3 aristas entonces $3F \leq 2E$. Entonces tomando la suma sobre las caras C de Γ se tiene que:

$$0 = \chi(T) = V - E + \sum \chi(C) \leq V - E + F \leq V - E + 2E/3 = V - E/3.$$

donde la primera desigualdad es estricta si hay caras que no son discos. Finalmente, si $E = 3V$ entonces las desigualdades previas son igualdades y por lo tanto $3F = 2E$. Esto implica que cada cara es un disco de longitud 3. \square

El siguiente resultado será usado varias veces a lo largo de la tesis para acotar la distancia $\Delta(\alpha, \beta)$ ya que cada vértice de Γ_P tiene valencia Δq .

Lema 3.1.2 ([3]). *Sea Γ una gráfica en un toro tal que Γ no tiene discos cara de un lado. Si existe un entero positivo n tal que la valencia de cada vértice de Γ es mayor que $6n$ entonces Γ tiene una colección de $n + 1$ aristas paralelas.*

Demostración. Sean V , E y F el número de vértices, aristas y discos cara de Γ en el toro, respectivamente. Considere primero el caso $n = 1$ y supóngase que Γ no tiene aristas paralelas. Entonces cada disco cara tiene al menos 3 aristas de donde $3F \leq 2E$. Ya que cada vértice tiene valencia mayor a 6 entonces $6V < 2E$. Luego tomando la suma sobre las caras C de Γ se tiene que:

$$0 = \chi(T) = V - E + \sum \chi(C) \leq V - E + F < E/3 - E + 2E/3 = 0,$$

lo cual es una contradicción.

Para el caso general si Γ no tiene una colección de $n + 1$ aristas paralelas entonces considere la gráfica reducida $\bar{\Gamma}$. Cada vértice de $\bar{\Gamma}$ tiene valencia $> 6n/n = 6$. Entonces por el caso anterior $\bar{\Gamma}$ tiene aristas paralelas lo cual es una contradicción. \square

Los siguientes dos Lemas son resultados bien conocidos para gráficas reducidas en toros con una y dos componentes en la frontera razón por la cual únicamente se bosquejan de manera breve sus demostraciones.

Lema 3.1.3 ([3]). *Si P tiene una sola componente en la frontera entonces la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ es una subgráfica de la gráfica de la Figura 3.1.*

Demostración. El Lema 2.2.2 (1) y el Lema 3.1.1 implican $E(\bar{\Gamma}_P) \leq 3$. Cortando por una de las curvas esenciales la cual es un lazo se obtiene un anillo de donde el resultado es claro. \square

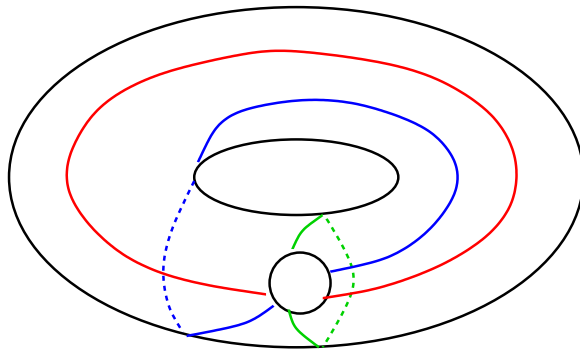


Figura 3.1: Gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ con un vértice.

A continuación se introduce algo de notación. Si Γ es una subgráfica en un toro tal que $\bar{\Gamma}$ es una subgráfica de la gráfica de la Figura 3.1 entonces Γ está totalmente determinada por la terna (w_1, w_2, w_3) de enteros no negativos que describen el número de aristas en cada clase de paralelismo. Así, $\Gamma = H(w_1, w_2, w_3)$ como se describe en la Figura 3.2. Nótese que $H(w_1, w_2, w_3)$ es invariante bajo permutaciones de las w_i .

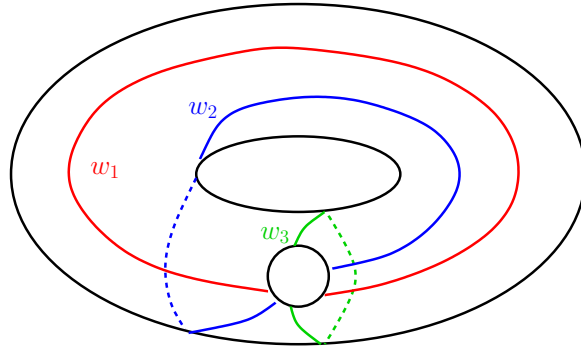


Figura 3.2: $\Gamma = H(w_1, w_2, w_3)$.

Lema 3.1.4 ([3]). *Si P tiene exactamente dos componentes en la frontera entonces la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ es una subgráfica de la gráfica de la Figura 3.3.*

Demostración. Sean i y j los dos vértices de Γ_P . Nótese que como los vértices i y j tienen la misma valencia Δq entonces el número de lazos en i coincide con el número de lazos en j . También, el Lema 2.2.2 (1) implica que si $\bar{\Gamma}_P$ tiene lazos entonces tiene un lazo en cada vértice. Por lo tanto la prueba se puede dividir en dos casos. Caso uno: $\bar{\Gamma}_P$ tiene lazos. Cortando por uno de los lazos en \hat{P} se obtiene un anillo. Caso dos: $\bar{\Gamma}_P$ no tiene lazos. Cortando por dos aristas de $\bar{\Gamma}_P$ si es que existen también se obtiene un anillo. Finalmente, al considerar las aristas que pueden anexarse a cualquiera de los anillos anteriores se obtiene el resultado. □

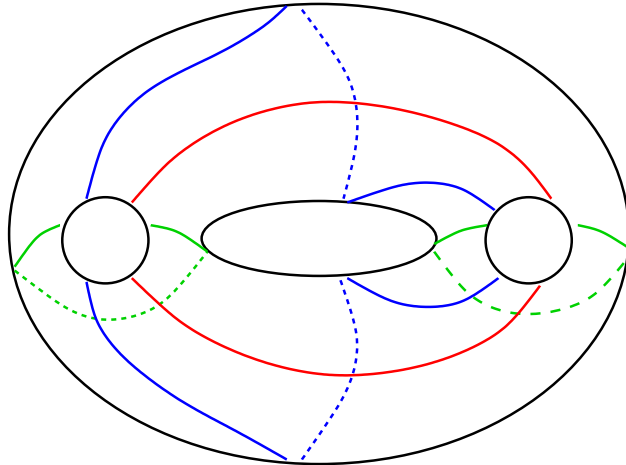


Figura 3.3: Gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ con dos vértices.

Similarmente, si $\bar{\Gamma}$ es una subgráfica de la gráfica de la Figura 3.3 entonces Γ está totalmente determinada por la quintupla $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ de enteros no negativos que describen el número de aristas en cada clase de paralelismo como en la Figura 3.4. Por lo tanto se usará la notación $\Gamma = G(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$. Vale la pena destacar, que solo se usarán cinco parámetros para codificar la gráfica anterior pues las gráficas con las que se trabajan siempre tienen la misma valencia en cada vértice. También, nótese que $G(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) \cong G(w_3, w_4, w_1, w_2, w_5) \cong G(w_4, w_3, w_2, w_1, w_5) \cong G(w_2, w_1, w_4, w_3, w_5)$.

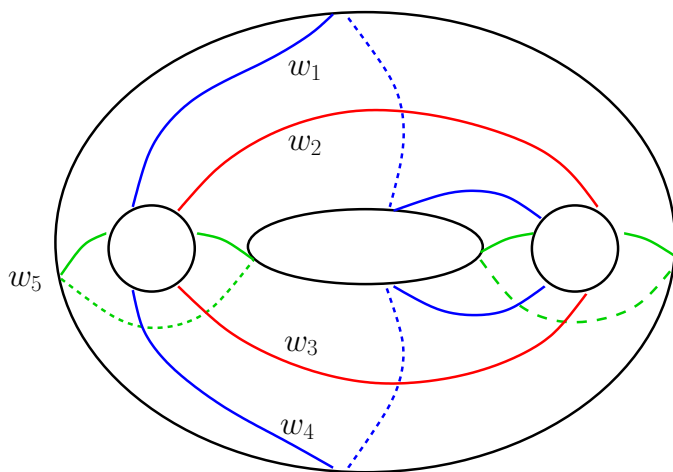


Figura 3.4: $\Gamma = G(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$.

Lema 3.1.5. *Supóngase que P tiene exactamente tres componentes en la frontera. Si su gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ no tiene discos cara de un lado, no tiene lazos y cada vértice tiene valencia 6 entonces $\bar{\Gamma}_P$ es la gráfica ilustrada en la Figura 3.5.*

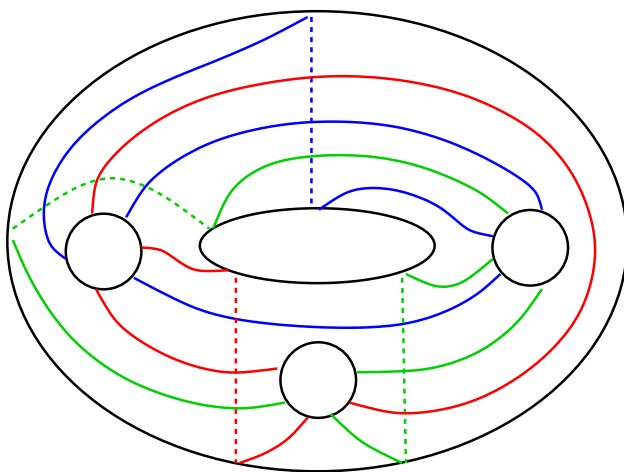


Figura 3.5: Gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ con tres vértices.

Demostración. Supóngase que V y E denotan el número de vertices y aristas de $\bar{\Gamma}_P$. Ya que cada vértice tiene valencia 6 entonces $2E = 18$ de donde $E = 9$. Sean $\{e_1, \dots, e_9\}$ las aristas de la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ y sean $\{i, j, k\}$ sus tres vértices. Denótese por $\bar{\Gamma}_P^{ij}$ la subgráfica inducida por los vértices i y j . Entonces ya que cada vértice tiene valencia 6 y $\bar{\Gamma}_P$ no tiene lazos entonces $E(\bar{\Gamma}_P^{ij}) = 3$. Sean e_1, e_2 y e_3 las aristas de $\bar{\Gamma}_P^{ij}$. Luego como $\bar{\Gamma}_P$ no tiene aristas paralelas entonces $e_1 \cup e_2$ induce una curva esencial en el toro \hat{P} . Cortando el toro por dicha curva esencial se obtiene un anillo con el vértice k en su interior y de nuevo ya que $\bar{\Gamma}_P$ no tiene aristas paralelas la arista e_3 tiene dos opciones las cuales se muestran en la Figura 3.6.

Sin embargo, dado que las gráficas de la Figura 3.6 son equivalentes bastará analizar la primera configuración de la Figura 3.6. Ahora bien, también se tiene que $E(\bar{\Gamma}_P^{ik}) = 3$ y si e_4, e_5 y e_6 denotan las aristas de $\bar{\Gamma}_P^{ik}$ entonces ya que $\bar{\Gamma}_P$ no tiene aristas paralelas la subgráfica $\bar{\Gamma}_P^{ik}$ queda determinada de manera única como en la Figura 3.7. Análogamente, $E(\bar{\Gamma}_P^{jk}) = 3$ y si e_7, e_8 y e_9 denotan las aristas de $\bar{\Gamma}_P^{jk}$ entonces $\bar{\Gamma}_P^{jk}$ queda determinada de manera única como en

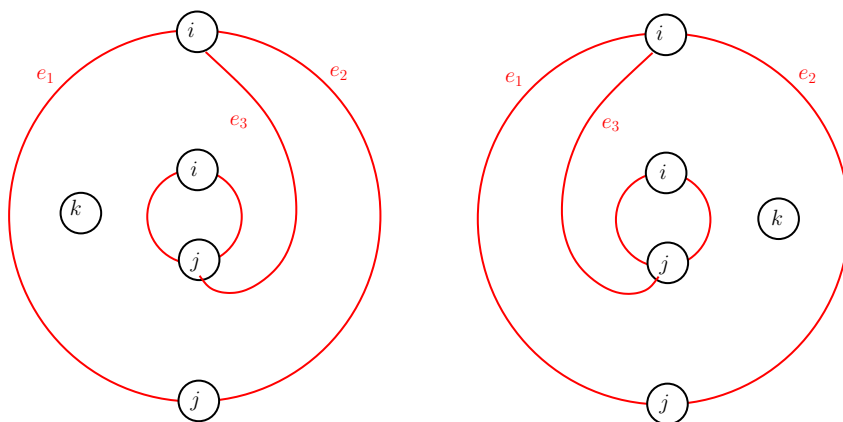


Figura 3.6: Dos opciones para la arista e_3 de $\bar{\Gamma}^{ij}$.

la Figura 3.7.

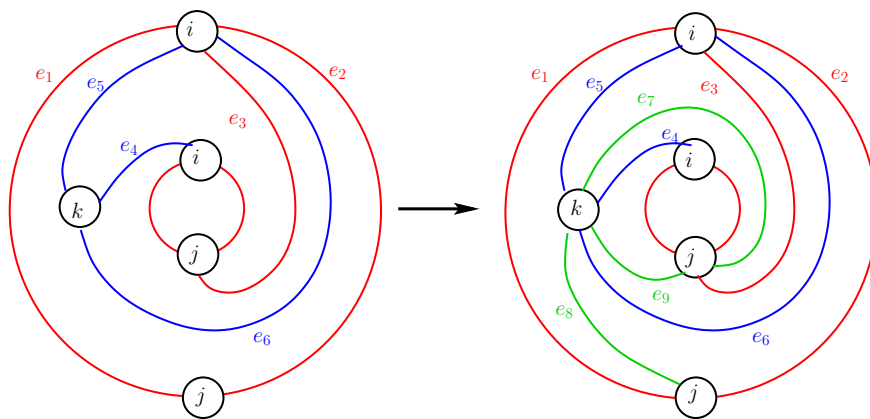


Figura 3.7: $\bar{\Gamma}_P^{ik}$ y $\bar{\Gamma}_P^{jk}$ determinadas de manera única.

□

De nuevo, si $\bar{\Gamma}$ es una subgráfica de la gráfica de la Figura 3.5 entonces Γ está determinada por la sucesión (w_1, w_2, \dots, w_9) de enteros positivos que describen el número de aristas en cada clase de paralelismo como en la Figura 3.8. En este caso se usará la notación $\Gamma = R(w_1, \dots, w_9)$.

3.2. Toro con tres agujeros

En esta sección se desarrolla la técnica de los ciclos de Scharlemann que resultará muy útil cuando un toro tenga exactamente tres agujeros. Por lo tanto supóngase que el toro esencial $Q = M \cap \hat{Q}$ tiene tres agujeros. Sea σ un ciclo de Scharlemann en Γ_P con par de etiquetas $(t, t+1)$. Denótese por $A_{t,t+1}$ el anillo en F acotado entre las componentes consecutivas $\partial_t Q$ y $\partial_{t+1} Q$ de ∂Q . Entonces $S_t = Q \cup A_{t,t+1}$ es una superficie de género dos con un único agujero para cada $t = 1, 2$. Nótese que $q = 3$ implica que el par de etiquetas de σ es $(1, 2)$ o $(2, 3)$ y que la convención 1 implica que las etiquetas:

$$+1, +2, +3, -3, -2, -1$$

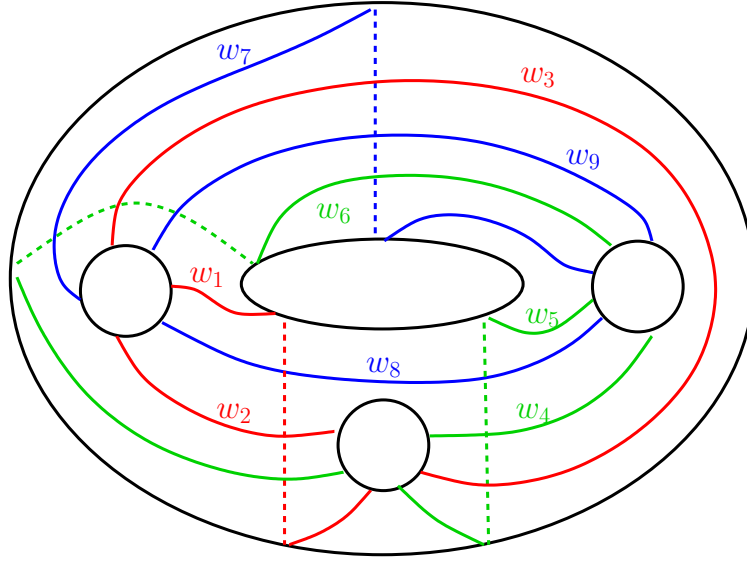


Figura 3.8: $\Gamma = R(w_1, w_2, \dots, w_9)$.

aparecen en sentido horario. Los siguientes resultados exploran las consecuencias de que la gráfica Γ_P tenga ciclos de Scharlemann con mismo par y distinto par de etiquetas, respectivamente.

Lema 3.2.1. *Sea $q = 3$ y supóngase que Γ_P contiene dos ciclos de Scharlemann σ_1 y σ_2 con el mismo par de etiquetas $(t, t + 1)$. Entonces:*

- (1) *Si D_1 y D_2 son los discos cara acotados por σ_1 y σ_2 , respectivamente, entonces ∂D_1 y ∂D_2 son curvas paralelas en $S_t = Q \cup A_{t,t+1}$;*
- (2) *σ_1 y σ_2 tienen la misma longitud.*

Demostración. (1) Nótese que ∂D_1 y ∂D_2 intersecan al corazón del anillo $A_{t,t+1}$ en la misma dirección. Por lo tanto, ∂D_1 y ∂D_2 son curvas no separantes y disjuntas en la superficie de género dos con un agujero $S_t = Q \cup A_{t,t+1}$. Si ∂D_1 y ∂D_2 no son curvas paralelas en S_t entonces no son homotópicas en S_t . Si T es la superficie obtenida a partir de S_t después de hacer cirugía usando D_1 entonces T es un toro en M con una sola componente en la frontera paralela a β . Ahora bien, se pueden presentar dos casos. Caso uno: ∂D_2 es no separante en T . Al aplicar cirugía a T usando D_2 se obtiene un disco esencial en M . Caso dos: ∂D_2 es separante en T . Ya que no es paralela a ∂D_1 entonces ∂D_2 no es trivial en T . Luego al aplicar cirugía a T usando D_2 se obtienen dos componentes, una de las cuáles es de nuevo un disco esencial en M . Por lo tanto, en ambos casos se contradice que M es simple.

(2) Es consecuencia inmediata de (1) ya que si no tienen la misma longitud entonces ∂D_1 y ∂D_2 no son curvas paralelas en S_t . \square

Lema 3.2.2. *Sea $q = 3$ y supóngase que Γ_P contiene dos ciclos de Scharlemann σ_1 y σ_2 con distinto par de etiquetas. Entonces:*

- (1) *F tiene género dos;*
- (2) *si σ_1 y σ_2 son S -ciclos entonces todos los ciclos de Scharlemann de Γ_P son S -ciclos;*

(3) si σ_1 y σ_2 son S-ciclos y $\Gamma_Q = R(w_1, \dots, w_9)$ (ver Figura 3.8) entonces las 4 aristas de los dos S-ciclos de la colección se identifican con aristas de 4 colecciones de aristas paralelas consecutivas alrededor del vértice 2 de Γ_Q .

Demostración. (1) Supóngase que Γ_P tiene dos ciclos de Scharlemann σ_1 y σ_2 con par de etiquetas (1, 2) y (2, 3), respectivamente. Sean D_1 y D_2 los discos cara que acotan σ_1 y σ_2 , respectivamente. El Lema 2.3.3 (4) implica que \hat{Q} separa $M[\beta]$ en dos componentes irreducibles M_1 y M_2 con frontera. Supóngse que $D_1 \subset M_1$ y $D_2 \subset M_2$. Si T_1 es la superficie obtenida a partir de $S_1 = Q \cup A_{1,2}$ después de hacer cirugía usando D_1 entonces T_1 es un toro en M con una sola componente en la frontera paralela a β . Sea \hat{T}_1 el toro inducido por T_1 al tapar ∂T_1 con un disco en $M[\beta]$. Ya que \hat{T}_1 no es esencial entonces \hat{T}_1 es compresible o paralelo a la frontera en $M[\beta]$. Si \hat{T}_1 es compresible en M_1 entonces acota un toro sólido ya que M_1 es irreducible. Sin embargo, esto contradice que $M[\beta]$ tiene frontera. Por lo tanto, \hat{T}_1 es paralelo a la frontera. Análogamente, al cortar $S_2 = Q \cup A_{2,3}$ por el disco D_2 se obtiene un toro incompresible \hat{T}_2 en $M[\beta]$ paralelo a la frontera. Finalmente, si F tiene género al menos tres entonces al menos uno de los dos toros anteriores no es paralelo a la frontera lo cual es una contradicción. Así, F tiene género dos.

(2) Si σ es un ciclo de Scharlemann de Γ_P entonces $q = 3$ y el Lema 3.2.1 (2) implican que σ es un S-ciclo.

(3) Supóngase que las aristas de los S-ciclos no se identifican con aristas de 4 colecciones de aristas paralelas consecutivas alrededor del vértice 2 en Γ_Q . Sin pérdida de generalidad, supóngase que estas colecciones de aristas paralelas están representadas por w_1, w_2, w_4 y w_5 en Γ_Q como se ilustra en la Figura 3.9. Ya que F tiene género 2, entonces (1) implica que los toros incompresibles \hat{T}_1 y \hat{T}_2 son paralelos a la frontera. Esto implica que la curva esencial γ en \hat{Q} ilustrada en la Figura 3.9 es paralela a curvas γ_1 y γ_2 en cada una de las dos correspondientes componentes toroidales de la frontera de $M[\beta]$. Sea A el anillo inducido en $M[\beta]$ que conecta las dos curvas γ_1 y γ_2 . Entonces A es incompresible ya que los toros \hat{T}_1 y \hat{T}_2 son incompresibles. También, A es ∂ -incompresible ya que γ_1 y γ_2 están en dos componentes toroidales distintas de $M[\beta]$. Por lo tanto el Lema 2.1.3 implica que A es esencial en $M[\beta]$, lo cual contradice que es no anular. Así, las aristas de los S-ciclos se identifican con aristas de 4 colecciones de aristas paralelas consecutivas alrededor del vértice 2 en Γ_Q .

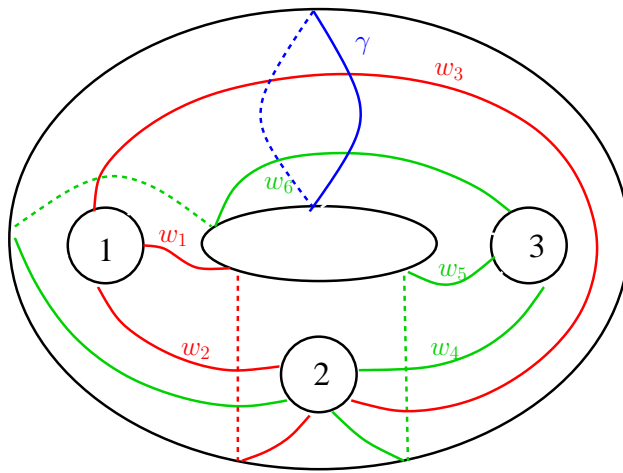


Figura 3.9: $\Gamma_Q = R(w_1, \dots, w_9)$.

□

Corolario 3.2.3. *Si $q = 3$ entonces se cumple lo siguiente:*

- (1) *cada colección de aristas paralelas de Γ_P contiene a lo más dos S-ciclos y si contiene dos son de distinto par de etiquetas;*
- (2) *si Γ_P tiene al menos 7 aristas paralelas entonces Γ_P tiene dos S-ciclos con distinto par de etiquetas y F tiene género dos;*
- (3) *si Γ_P tiene una colección de 9 aristas paralelas entonces es alguna de las dos colecciones ilustradas en la Figura 3.10. En particular, cada colección de 8 aristas paralelas de Γ_P se puede obtener de alguna de las colecciones ilustradas en la Figura 3.10 al eliminar alguna de las aristas de más afuera;*

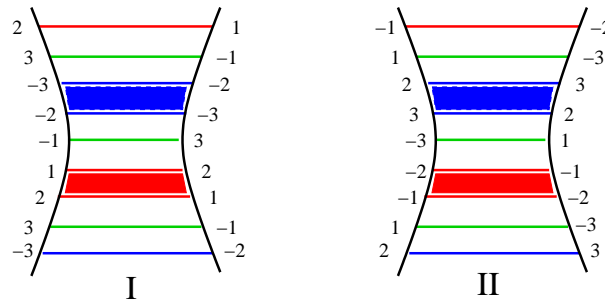


Figura 3.10: Colecciones de 9 aristas paralelas entre vértices del mismo signo.

- (4) *si Γ_P tiene una colección de 9 aristas paralelas entonces $\Gamma_Q = R(w_1, \dots, w_9)$.*

Demostración. (1) Supóngase que existe una colección de aristas paralelas que contiene tres S-ciclos. Ya que $q = 3$ entonces existen dos S-ciclos con el mismo par de etiquetas. Entonces esto implica que el Lema 2.2.2 (2) y el Lema 3.2.1 (1) se contradicen.

(2) Sea $C = \{e_1, \dots, e_7\}$ una colección de 7 aristas paralelas en Γ_P . El Lema 2.2.2 (2) y el Lema 2.3.2 implica que ninguna arista de C induce lazos en Γ_Q . Entonces el Lema 2.3.3 (5) y $q = 3$ implican que cada colección de 4 aristas paralelas consecutivas contiene un S-ciclo entonces las colecciones $C_1 = \{e_1, \dots, e_4\}$ y $C_2 = \{e_4, \dots, e_7\}$ contienen cada una un S-ciclo. Finalmente el resultado se obtiene de (1) y del Lema 3.2.2 (1).

(3) Sea $C = \{e_1, \dots, e_9\}$ la colección de 9 aristas paralelas. Entonces (2) implica que C contiene dos S-ciclos con distinto par de etiquetas. También, si e_i es arista de algún S-ciclo con $i \neq \{3, 4, 6, 7\}$ entonces C tendrá tres S-ciclos lo cual contradice (1). Esto implica que $\{e_3, e_4\}$ y $\{e_6, e_7\}$ acotan S-ciclos de donde se obtiene la clasificación ilustrada en la Figura 3.10. Ahora bien, si C es una colección de 8 aristas paralelas se puede repetir el argumento anterior para determinar la posición exacta de las aristas de los dos S-ciclos que contiene.

- (4) Es inmediato de (3) y el Lema 3.1.5.

□

La siguiente definición será útil en capítulos posteriores para buscar ciclos de Scharlemann y posteriormente estimar cuántos existen.

Definición 3.2.1. *Sea $\partial_u P$ un vértice de Γ_P y sea c una componente de*

$$\partial_u P - \{\text{extremos de aristas de } \Gamma_P\}.$$

La cerradura de c en $\partial_u P$ se denomina una esquina de $\partial_u P$. Una esquina de un disco cara con etiquetas $(+1, -1)$ o $(+q, -q)$ se denomina esquina mala del disco cara.

Lema 3.2.4. *Sea $q = 3$ y Γ_P con etiquetas Tipo B. Si Γ_Q no tiene lazos y Q es separante entonces se cumple lo siguiente:*

- (1) cada disco cara D de Γ_P acota un ciclo de Scharlemann o contiene esquinas malas.
- (2) cada disco cara de longitud a lo más 3 contiene a lo más una esquina mala,
- (3) si N denota el número de ciclos de Scharlemann en Γ_P entonces

$$\Delta p \leq 2N + 2p,$$

- (4) si todas las caras de Γ_P son discos de longitud a lo más 3 entonces $p\Delta = 2N + 2p$.

Demostración. (1) Sean B y W los dos lados de Q en M al ser separante. Entonces cada cara D de Γ_P puede ser coloreada en negro o blanco dependiendo si D está en B o W , respectivamente. Supóngase que se tienen las siguientes contenciones de anillos $A_{1,2} \subset B$, $A_{2,3} \subset W$ y $D \subset B$. Luego $q = 3$ implica que cada esquina de D tiene etiquetas $(+1, +2)$, $(-1, -2)$ o $(+3, -3)$. Ahora bien, si D no contiene esquinas malas ya que Γ_P tiene etiquetas Tipo B y Γ_Q no contiene lazos es sencillo convencerse que D tiene en todas sus esquinas el mismo par de etiquetas $(+1, +2)$ o $(-1, -2)$ (ver Figura 3.11). Por lo tanto, D acota un ciclo de Scharlemann.

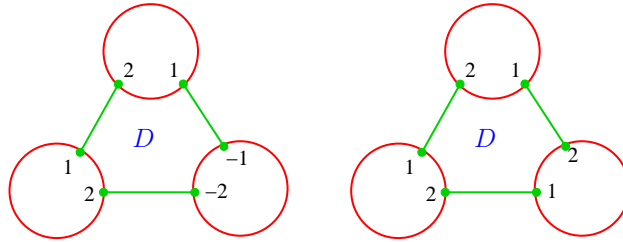


Figura 3.11: Discos cara sin esquinas malas.

(2) Si D es un disco con longitud a lo más 3, ya que Γ_Q no tiene lazos, entonces D contiene a lo más una esquina mala.

(3) Sean V , E y F el número de vértices, aristas y discos cara de Γ_P . Al tomar la suma sobre todas las caras C de Γ_P se tiene que:

$$0 = \chi(\hat{P}) = V - E + \sum \chi(C) \leq V - E + F \implies E - V \leq F.$$

donde la desigualdad es estricta si hay caras que no son discos. También, se tiene que $V = p$, $E = 3\Delta p/2$ y por (1) $F \leq N + p\Delta$ ya que el número de esquinas malas en cada vértice de Γ_P es Δ . Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{p(3\Delta - 2)}{2} = 3\Delta p/2 - p = E - V \leq F &\leq N + p\Delta \\ p(3\Delta - 2) &\leq 2N + 2p\Delta \\ p\Delta &\leq 2N + 2p \end{aligned}$$

(4) Es inmediato de (2) y (3) ya que las desigualdades anteriores son igualdades. □

Definición 3.2.2. *Los discos cara de dos y tres lados en Γ_P se denominan bigonos y trígonos, respectivamente.*

El siguiente resultado prueba el Teorema 10 cuando uno de los toros esenciales con agujeros de la 3-variedad simple M contiene exactamente 3 agujeros y la frontera F donde se pegan las 2-asas es de género al menos 3:

Corolario 3.2.5. *Sea $q = 3$. Entonces:*

- (1) *Si $\Delta \geq 12$ entonces Γ_P tiene dos ciclos de Scharlemann con distinto par de etiquetas.*
- (2) *Si F tiene género al menos 3 entonces $\Delta \leq 10$.*

Demostración. (1) Supóngase que Γ_P no tiene dos ciclos de Scharlemann con distinto par de etiquetas. El Corolario 3.2.3 (2) implica que cada arista de la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ tienen peso a lo más 6. Luego, ya que cada vértice de Γ_P tiene valencia $3\Delta \geq 36$ entonces cada vértice de $\bar{\Gamma}_P$ tiene valencia al menos 6. Entonces el Lema 3.1.1 implica que cada vértice de $\bar{\Gamma}_P$ tiene valencia 6, $E(\bar{\Gamma}_P) = 3p$, todas las caras de Γ_P son discos de longitud a lo más 3, todas las aristas de $\bar{\Gamma}_P$ representan colecciones de 6 aristas paralelas y $\Delta = 12$. Ya que todas las aristas de $\bar{\Gamma}_P$ tienen peso 6 entonces Γ_Q no tiene lazos y el Lema 2.3.3 (5) implica que Γ_P tiene exactamente $3p$ S-ciclos con el mismo par de etiquetas. Luego el Lema 2.3.3 (4) y el Lema 3.2.4 (4) implican $\Delta p = 2N + 2p$ de donde $N = 5p$. Por lo tanto cada uno de los $2p$ triángulos acota un ciclo de Scharlemann. Además, el Lema 3.2.1 (2) implica que el par de etiquetas de estos ciclos de Scharlemann de longitud 3 es diferente al de los S-ciclos. Por lo tanto Γ_P tiene dos ciclos de Scharlemann con distinto par de etiquetas.

- (2) Supóngase $\Delta \geq 12$. Entonces (1) y el Lema 3.2.2 (1) implican que F tiene género dos. □

El siguiente resultado establece condiciones suficientes para encontrar una cota preliminar para Δ si $q = 3$ y la frontera F donde se pegan las 2-asas es de género al menos 2:

Lema 3.2.6. *Sea $q = 3$ y supóngase que Γ_Q no tiene lazos. Entonces se cumple que:*

- (1) *Cada disco cara D de longitud n rodeado inmediatamente por un ciclo en Γ_P que no contiene esquinas malas acota un ciclo de Scharlemann de longitud n .*
- (2) *Si $\Delta \geq 6$ entonces Γ_P tiene un ciclo de Scharlemann y $p\Delta \leq 2N + 2p$ donde N denota el número de ciclos de Scharlemann en Γ_P . Además, si todas las caras de Γ_P son discos de longitud a lo más 3 entonces $p\Delta = 2N + 2p$.*
- (3) *Si Γ_P tiene dos S-ciclos con distinto par de etiquetas entonces $\Delta \leq 14$ y F tiene género 2.*

Demostración. (1) Sean e_1, \dots, e_n las aristas en la frontera del disco cara D de longitud n en Γ_P y sean $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ las aristas tales que \hat{e}_i es adyacente a e_i . Ya que $q = 3$ y D no contiene esquinas malas entonces cada esquina tiene una etiqueta $+2$ o -2 . Se afirma que todas las esquinas tienen etiqueta $+2$ o todas las esquinas tienen etiqueta -2 . De lo contrario, existen aristas e_i y e_{i+1} con etiquetas en sus extremos como se ilustra en la Figura 3.12 ya que Γ_Q no tiene lazos. Sin embargo, ya que Γ_P tiene etiquetas Tipo B , los vértices tienen el mismo signo lo cual implica que alguna de las aristas \hat{e}_i o \hat{e}_{i+1} induzca un lazo en Γ_Q , lo cual es una contradicción.

(2) Supóngase que Γ_P no tiene ciclos de Scharlemann. Entonces el Lema 2.3.3 (5) implica que cada arista de $\bar{\Gamma}_P$ tienen peso a lo más 3. Luego, ya que cada vértice de Γ_P tiene valencia $3\Delta \geq 18$ entonces cada vértice de $\bar{\Gamma}_P$ tiene valencia al menos 6. El Lema 3.1.1 implica que cada vértice de $\bar{\Gamma}_P$ tiene valencia 6, $E(\bar{\Gamma}_P) = 3p$, todas las caras de Γ_P son discos de longitud a lo más 3, todas las aristas de $\bar{\Gamma}_P$ representan colecciones de 3 aristas paralelas y $\Delta = 6$.

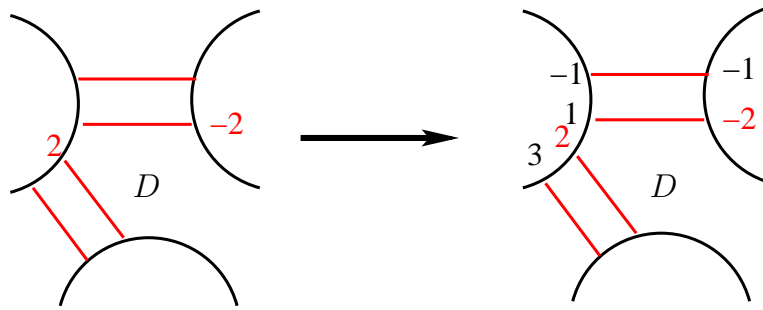


Figura 3.12: n -disco cara rodeado por un ciclo en Γ_P .

Luego, si V , E y F denotan el número de vértices, aristas y discos cara de $\bar{\Gamma}_P$ se tiene que $0 = V - E + F = p - 3p + F$. Entonces $F = 2p$ y además Γ_P tiene $\Delta p = 6p$ esquinas malas. Ahora bien, ya que Γ_Q no tiene lazos entonces cada bígono tiene exactamente un esquina mala. Así, ya que Γ_P tiene $6p$ bígono entonces los triángulos no tienen esquinas malas. Entonces (1) implica que cada triángulo acota un ciclo de Scharlemann de longitud 3. Por lo tanto Γ_P tiene un ciclo de Scharlemann y el Lema 2.3.3 (4) implica Q separante. Finalmente aplicar el Lema 3.2.4 (3)-(4).

(3) El Lema 2.3.3 (4) implica Q separante. También, el Lema 3.2.2 (2), Corolario 3.2.3 (1) y el Lema 3.1.1 implican $N \leq 2(3p)$. Entonces, el Lema 3.2.4 (3) implica:

$$\Delta \leq \frac{2N + 2p}{p} \leq \frac{2(6p) + 2p}{p} = 14.$$

Finalmente, el Lema 3.2.2 (1) implica que F tiene género 2. □

Capítulo 4

Prueba del Teorema 10

Este capítulo representa el corazón de todo el trabajo. La razón es que en éste se establece cual será la estrategia que se seguirá a lo largo de toda la tesis para conseguir la prueba del Teorema 10 y de hecho se muestra la prueba completa al final del capítulo. La prueba se divide esencialmente en dos casos. El primer caso es el caso genérico, es decir, cuando la 3-variedad simple M contiene dos toros esenciales con al menos tres agujeros. El segundo caso es cuando alguno de los toros anteriores con agujeros tiene a lo más tres agujeros.

4.1. Caso genérico: prueba del Teorema 10 si $p > 3$ y $q > 3$

El objetivo de esta sección es probar el caso genérico. Recuerde que \hat{Q} es el toro esencial contenido en $M[\beta]$ tal que su intersección con la 2-asa H_β es mínima y que $\partial_1 Q, \dots, \partial_q Q$ son las componentes en la frontera del toro esencial con agujeros $Q = \hat{Q} \cap M$. Análogamente, considerando la 2-asa H_α que se pega a M para obtener $M[\alpha]$ se obtiene otro toro esencial con agujeros $P = \hat{P} \cap M$ y $\partial_1 P, \dots, \partial_p P$ denotan sus componentes en la frontera. La intersección $P \cap Q$ define dos gráficas con etiquetas, Γ_P sobre \hat{P} y Γ_Q sobre \hat{Q} . En este capítulo será conveniente asumir que los extremos de las aristas en Γ_P tienen etiquetas Tipo B .

Lema 4.1.1. *Supóngase que Γ_P tiene etiquetas Tipo B y que $q > 1$. Si Γ_P contiene $2q$ aristas paralelas entonces esta colección se identifica en Γ_Q con q ciclos esenciales de longitud 2 en el toro \hat{Q} .*

Demostración. Denótese por e_1, \dots, e_{2q} la colección de $2q$ -aristas paralelas consecutivas entre los vértices $\partial_u P$ y $\partial_v P$ en Γ_P , donde cada arista tiene etiquetas en sus extremos $\partial e_i = x_i \sqcup y_i$. Por comodidad será conveniente cambiar las etiquetas $+1, \dots, +q, -q, \dots, -1$ por las nuevas etiquetas $+1, \dots, +q, +(q+1), +(q+2), \dots, +(2q)$, respectivamente. Así, solamente se re-etiquetan las últimas q etiquetas para que todas seas positivas. Esto implica que la colección de $2q$ -aristas paralelas induce una permutación σ sobre el conjunto $\{1, 2, \dots, 2q\}$ definida mediante $\sigma(x) = y$ si (x, y) es un par de etiquetas para los extremos de la arista e_i . Por lo tanto existe alguna constante k tal que $\sigma(x) = -x + k \pmod{2q}$ para cada $x \in \{1, 2, \dots, 2q\}$. Luego $\sigma(x) + x = k \pmod{2q}$ y $\sigma^2(x) + \sigma(x) = k \pmod{2q}$ implican $\sigma(x) + x = \sigma^2(x) + \sigma(x) \pmod{2q}$. Por lo tanto $\sigma^2(x) = x$ para cada $x \in \{1, 2, \dots, 2q\}$. Entonces de existir una arista e_i con pareja de etiquetas en los extremos $(x, \sigma(x))$ existe otra arista con pareja de etiquetas en los extremos $(\sigma(x), x)$. Por otra parte, el Lema 2.3.3 (2) implica $\sigma(x) \neq x$. También, el Lema 2.3.2 y el Lema 2.2.2 (2) implican $\sigma(x) \neq -x$ ya que $q > 1$. Entonces $\sigma(x) \neq \pm x$ y ninguna arista de la $2q$ -colección induce lazos en la gráfica Γ_Q . Por lo tanto, la colección de $2q$ -aristas paralelas puede ser dividida en q parejas de aristas con las mismas etiquetas en los extremos. Nótese que

cada una de estas q parejas de aristas induce un ciclo de longitud 2 en el toro \hat{Q} . Finalmente, si alguno de estos ciclos no es esencial en \hat{Q} al aplicar argumentos de más adentro se contradice el Lema 2.2.2 (2). □

Sea Γ una gráfica en un toro y sean x, y vértices de Γ . Se usará $E(x, y)$ para denotar el número de aristas en la gráfica reducida $\bar{\Gamma}$ que unen x e y . El siguiente resultado investiga el número más grande de aristas paralelas que las gráficas Γ_P y Γ_Q pueden poseer para que no aparezcan anillos esenciales en la 3-variedad simple M .

Lema 4.1.2. *Supóngase que Γ_P contiene $2q + 1$ aristas paralelas. Entonces $q = 1$ o $q = 3$.*

Demostración. Supóngase que Γ_P contiene $2q + 1$ aristas paralelas. Sin pérdida de generalidad, asumir que las etiquetas en uno de los extremos de la colección de aristas paralelas está dado por $+1, +2, \dots, +q, -q, \dots, -2, -1, +1$. Si $q > 1$, el Lema 4.1.1 implica que la correspondiente permutación σ , que proviene de las primeras $2q$ aristas paralelas, se divide en órbitas de longitud dos que inducen ciclos esenciales de longitud dos en el otro toro \hat{Q} y además $\sigma(x) \neq \pm x$ para todos los vértices x de Γ_Q , es decir, no inducen lazos en Γ_Q . El Lema 2.2.2 (2) implica $E(x, \sigma(x)) \geq 2$ para cada vértice x de Γ_Q y $E(1, \sigma(1)) \geq 3$. Si $q = 2$ se contradice el Lema 2.2.2 (2) al aplicar el Lema 3.1.4. Por lo tanto se puede suponer $q \geq 4$. Cortando el toro \hat{Q} esencial de $M[\beta]$, que minimiza su intersección con la 2-asa H_β , a lo largo de dos aristas de Γ_α que unen los vértices 1 y $|\sigma(1)|$ se obtiene un anillo A con vértice $z = |\sigma(-1)|$ en su interior (ver Figura 4.1). Ahora bien, ya que cada vértice está en dos órbitas entonces el vértice z es adyacente al menos dos vértices. Se pueden presentar dos casos. Caso 1: el vértice z es adyacente a un vértice x distinto de 1 y $|\sigma(1)|$ (ver Figura 4.1). Caso dos: el vértice z es adyacente a $|\sigma(1)|$ (ver Figura 4.2). En cualquier caso, ya que $q \geq 4$, existe un vértice x diferente de los vértices 1, $|\sigma(1)|$ y $|\sigma(-1)|$. Esto implica que el vértice x está en un ciclo de longitud dos que acota un disco. Finalmente, aplicando argumentos de más adentro, en caso de ser necesario, es posible encontrar un ciclo de longitud dos que acota un disco cuyo interior no contiene vértices de Γ_Q lo cual contradice el Lema 2.2.2 (2).

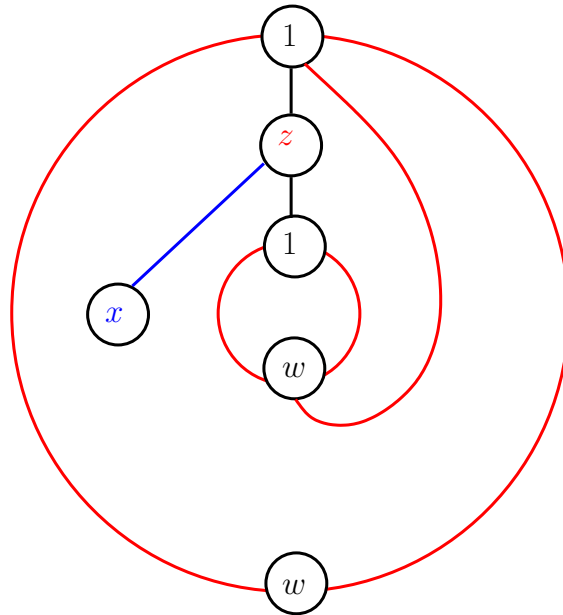


Figura 4.1: $z = |\sigma(-1)|$, $w = |\sigma(1)|$ y z no adyacente a w .

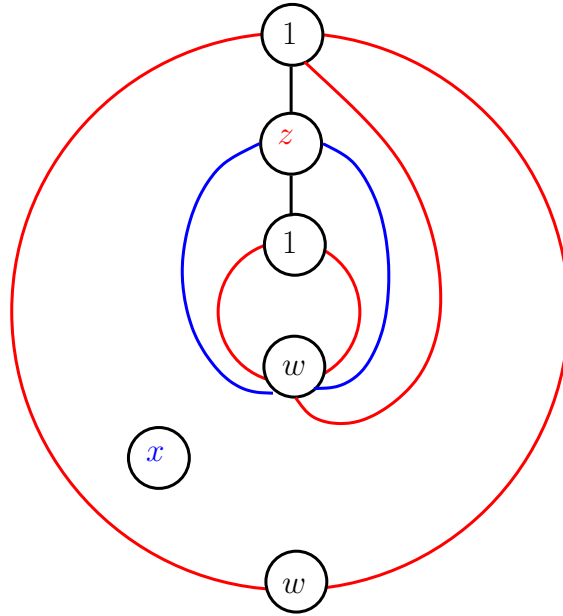


Figura 4.2: $z = |\sigma(-1)|$, $w = |\sigma(1)|$ y z adyacente a w .

□

Proposición 4.1.3. *Asumiendo las hipótesis del Teorema 10 se tiene que $p > 3$ y $q > 3$ implican $\Delta(\alpha, \beta) \leq 10$.*

Demostración. Se procede por contradicción. Si $\Delta > 12$, entonces ya que cada vértice de Γ_P tiene la misma valencia Δq , aplicando el Lema 3.1.2 con $n = 2q$ a la gráfica Γ_P , se deduce que Γ_P tiene $2q + 1$ aristas paralelas lo cual contradice el Lema 4.1.2. Por lo tanto se puede suponer $\Delta = 12$. Ya que $q > 3$, el Lema 3.1.1 y el Lema 4.1.2 implican que cada colección de aristas paralelas en Γ_P tiene exactamente $2q$ -aristas paralelas. Esto implica que cada vértice de la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ tiene valencia 6 y el Lema 3.1.1 implica $E(\bar{\Gamma}_P) = 3p$. Ahora bien, ya que el razonamiento anterior también se puede aplicar a la gráfica Γ_Q , procediendo de manera análoga se puede concluir que $E(\bar{\Gamma}_Q) = 3q$.

Ahora bien, el Lema 4.1.1 implica que cada colección de $2q$ -aristas paralelas en Γ_P se identifica con q ciclos esenciales de longitud dos en el toro esencial \hat{Q} . Se pueden presentar dos casos para cada una de estas colecciones de $2q$ -aristas paralelas. Caso uno: los q ciclos esenciales de longitud dos son paralelos en $\bar{\Gamma}_Q$. Entonces inducen la subgráfica ilustrada en la Figura 4.3. Caso dos: los q ciclos esenciales de longitud dos no son paralelos en $\bar{\Gamma}_Q$. Entonces existe un vértice, digamos 1, que se encuentra en dos ciclos esenciales no paralelos de longitud dos. Cortando el toro \hat{Q} por estos dos ciclos esenciales se obtiene un disco con los restantes vértices en su interior (ver Figura 4.4). Ya que $q > 3$ entonces el vértice 4 debe ser adyacente a los vértices 2 y 3 por el Lema 4.1.1 ya que de lo contrario se contradice el Lema 2.2.2 (2). Esto implica que $q = 4$ y que la subgráfica inducida es la ilustrada en la Figura 4.5. Por lo tanto, en cualquier caso, cada una de estas colecciones de $2q$ -aristas paralelas induce en la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_Q$ la subgráfica ilustrada en la Figura 4.3 o la subgráfica ilustrada en la Figure 4.5 con $q = 4$, donde las aristas del anillo se identifican para obtener el toro de la manera usual.

A continuación se divide la prueba en dos casos: $q > 4$ y $q = 4$. Caso 1: $q > 4$. Entonces cada colección de $2q$ -aristas paralelas se identifica con q ciclos esenciales de longitud 2 que son paralelos en $\bar{\Gamma}_Q$. El Lema 3.1.1 implica que todos los ciclos de longitud 2 deben ser paralelos

en $\bar{\Gamma}_Q$ y que por lo tanto la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_Q$ es la gráfica ilustrada en la Figura 4.3. Esto implica que el número de aristas de $\bar{\Gamma}_Q$ es $2q$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto este caso no ocurre.

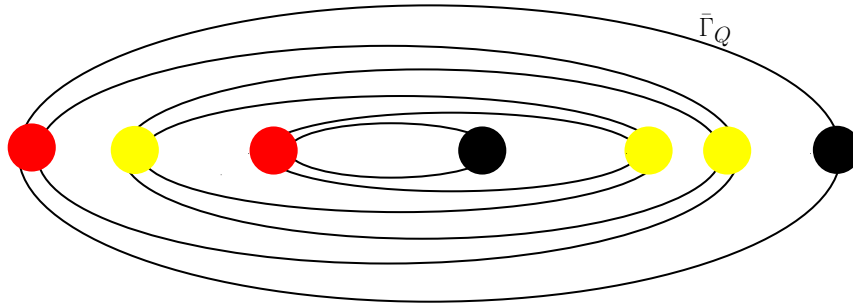


Figura 4.3: q ciclos esenciales de longitud 2 paralelos en $\bar{\Gamma}_Q \subset \hat{Q}$.

Caso 2: $q = 4$. Si $p > 4$ entonces se puede repetir la idea del caso (1) para obtener contradicción. Por lo tanto se puede suponer que $p = 4$. Aplicando el Lema 4.1.1, sea σ la permutación inducida por la colección de 8 aristas paralelas en Γ_P que unen vértices del mismo signo. Ya que esta colección se identifica con 4 ciclos esenciales de longitud dos en Γ_Q entonces es sencillo ver que únicamente existen dos posibles permutaciones: $\sigma_1 = (1, 2)(3, -1)(4, -2)(-3, -4)$ y $\sigma_2 = (-1, -2)(-3, 1)(-4, 2)(3, 4)$. Nótese que en ambas permutaciones los vértices 2 y 3 no son adyacentes y que lo mismo ocurre con los vértices 1 y 4. Esto implica que el número de aristas de $\bar{\Gamma}_Q$ es 8. Pero esto contradice que $\bar{\Gamma}_Q$ debe tener 12 aristas y ser la gráfica ilustrada en la Figura 4.6.

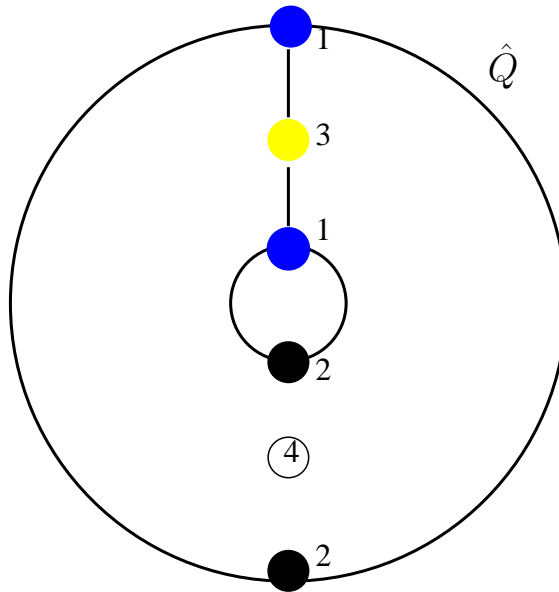


Figura 4.4: dos ciclos esenciales de longitud 2 no paralelos en $\bar{\Gamma}_Q \subset \hat{Q}$.

□

Se concluye esta capítulo con el siguiente resultado que es consecuencia directa de la prueba de la Proposición 4.1.3 y que será de utilidad en los siguientes capítulos para obtener contradicciones en los casos que hacen falta probar del Teorema 10.

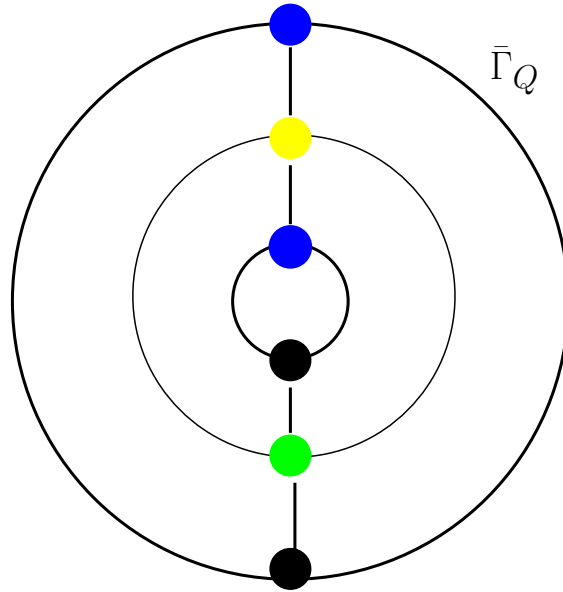


Figura 4.5: q ciclos esenciales de longitud 2 no paralelas en $\bar{\Gamma}_Q \subset \hat{Q}$.

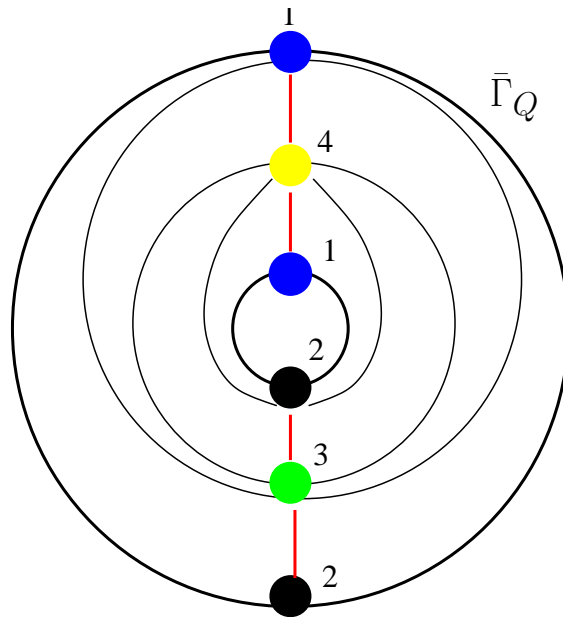


Figura 4.6: $E(\bar{\Gamma}_Q) = 12$.

Lema 4.1.4. *Si $q > 3$ y $\Delta(\alpha, \beta) = 12$ entonces la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_Q$ es la gráfica ilustrada en la Figura 4.3 o la gráfica ilustrada en la Figura 4.5. En particular, la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_Q$ tiene $2q$ aristas.*

4.2. Caso no-genérico: prueba del Teorema 10 si $p \leq 3$ o $q \leq 3$

En esta sección se describe la prueba completa del Teorema 10 dejando los detalles de los tres casos en que se divide el análisis del caso no genérico para cada uno de los siguientes tres capítulos posteriores. La Proposición 4.1.3 permite organizar lo que resta de la prueba del Teorema 10 en los siguientes tres casos:

- $p = 1$ y $q \geq 1$,
- $p = 2$ y $q \geq 2$,
- $p = 3$ y $q \geq 3$.

Como posteriormente se mostrará, resulta ser que el caso más delicado de analizar será el caso $p = 1 = q$ con $\Delta(\alpha, \beta) = 18$ o 12 . Aunque éstos casos serán combinatoriamente posibles en el capítulo siguiente se probará que los dos casos anteriores no suceden bajo las hipótesis adicionales $2 \leq g(F) \leq 7$ y $2 \leq g(F) \leq 3$, respectivamente, donde $g(F)$ denota el género de F . De hecho será el único caso en toda la tesis donde será necesario utilizar la hipótesis anterior respecto del género en la frontera F para poder probar el Corolario 1.0.2. Esto se debe a que en los otros casos el análisis se puede hacer independiente del género de la frontera. Se concluye este capítulo con la prueba del Teorema principal de este trabajo

Demostración del Teorema 10.

Demostración. El Teorema 6 y el Teorema 7 implican que se puede suponer $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ irreducibles. Sea H_α la 2-asa que se pega a M para obtener $M[\alpha]$ y denote por τ_α al corazón de H_α . Elegir un toro esencial \hat{P} en $M[\alpha]$ tal que la intersección en posición general $\hat{P} \cap \tau_\alpha$ sea mínima entre todos los toros esenciales en $M[\alpha]$. El Lema 2.1.5 implica que el toro con agujeros $P = \hat{P} \cap M$ es esencial y denote las componentes de ∂P por $\partial_1 P, \dots, \partial_p P$, $p \geq 1$ consecutivamente sobre ∂M . Análogamente, considerando la 2-asa H_β que se pega a M para obtener $M[\beta]$ se obtiene otro toro esencial con agujeros $Q = \hat{Q} \cap M$ y denote las componentes de ∂Q por $\partial_1 Q, \dots, \partial_q Q$, $q \geq 1$. Ahora isotope P y Q de modo que ∂P y ∂Q tengan intersección mínima y $P \cap Q$ consista únicamente de arcos y círculos esenciales en P y Q . La intersección $P \cap Q$ define dos gráficas con etiquetas, Γ_P sobre \hat{P} y Γ_Q sobre \hat{Q} , donde no se consideran los círculos, es decir, solo los arcos.

Ahora bien se pueden presentar cuatro casos.

1. Caso 1: $p > 3$ y $q > 3$. Se sigue de la Proposición 4.1.3.
2. Caso 2: $p = 1$ y $q \geq 1$ (Capítulo 5). Este caso se divide en dos subcasos.
 - Subcaso 1: $p = 1 = q$. Se sigue del Lema 5.1.4.
 - Subcaso 2: $p = 1$ y $q \geq 2$. Se sigue de la Proposición 5.1.9.
3. Caso 3: $p = 2$ y $q \geq 2$ (Capítulo 5). Se sigue del Lema 5.2.1.
4. Caso 4: $p = 3$ y $q \geq 3$ (Capítulo 6). Se sigue de la Proposición 6.2.2.

□

Capítulo 5

Caso no genérico: $p = 1, 2$ y $q \geq 1$

En este capítulo se estudia el caso $p = 1$ y $q \geq 1$ y posteriormente el caso $p = 2$ y $q \geq 2$. Recuerde que p y q denotan el número de componentes en la frontera de los toros esenciales con agujeros $P = \hat{P} \cap M$ y $Q = \hat{Q} \cap M$ inducidos por los toros con intersección mínima $\hat{P} \subset M[\alpha]$ y $\hat{Q} \subset M[\beta]$, respectivamente. Dado que $p = 1$ o $p = 2$ entonces el Lema 3.1.3 y el Lema 3.1.4 implican que $\Gamma_P = H(w_1, w_2, w_3)$ o $\Gamma_P = G(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$, respectivamente. La notación $g(F)$ se usará para denotar el género de F .

5.1. Caso $p = 1$ y $q \geq 1$

En toda la sección se asumirá que $p = 1$. Esto implica que las etiquetas $+1$ y -1 alternan en los vértices de Γ_Q . Sin embargo, para simplificar la notación, solo se escribirán los signos. Nótese que el Lema 3.1.3 implica que $\Gamma_P = H(w_1, w_2, w_3)$, es decir, la gráfica ilustrada en la Figura 3.2 con un único vértice y tres colecciones de aristas paralelas. El análisis de este caso se subdivide de manera natural en cuatro subcasos: $q = 1$, $q = 2$, $q = 3$ y $q \geq 4$. Vale la pena destacar que el subcaso $p = 1 = q$ será el más delicado y el único donde será necesario utilizar la hipótesis $2 \leq g(F) \leq 7$ para eliminar distancia 18 y posteriormente usar la hipótesis $2 \leq g(F) \leq 3$ para eliminar distancia 12 (ver Lema 5.1.4). Esta es la razón clave por la cual la conclusión del Teorema 10 está dividido en tres partes.

Si e es una arista de Γ_P con etiquetas en los extremos x e y , denótese por e^x y e^y estos extremos, respectivamente. También, denótese por $(e^x e^y)_\alpha$ al arco en la única componente de ∂P que va de e^x a e^y respecto de alguna orientación y denótese por $\sharp(e^x e^y) = |(e^x e^y)_\alpha \cap \partial Q| - 2$ al número de etiquetas sobre el arco $(e^x e^y)_\alpha - 2$ (dependiendo de la orientación elegida).

Lema 5.1.1. *Sea $p = 1$, $q \geq 1$, $\Gamma_P = H(w_1, w_2, w_3)$ y e una arista de Γ_P con etiquetas en sus extremos x e y . Entonces $x = y$ si y sólo si $\sharp(e^x e^y) = 2qn - 1$ para algún entero positivo n .*

Demostración. Alrededor del vértice de $\Gamma_P = H(w_1, w_2, w_3)$ las etiquetas con signos

$$+1, +2, \dots, +q, -q, \dots, -2, -1$$

se repiten $\Delta/2$ veces. Por lo tanto, entre cualesquiera par de etiquetas iguales existen exactamente $2q - 1 + 2qm = 2q(m + 1) - 1$ etiquetas para algún m no negativo y viceversa. \square

5.1.1. Subcaso $p = 1$ y $q \leq 2$

Se iniciará con el estudio del subcaso $p = 1 = q$. Entonces el Lema 3.1.3 implica que ambas gráficas, Γ_P y Γ_Q , son de la forma $H(w_1, w_2, w_3)$. Además, el Lema 2.3.3 (2) implica que las etiquetas en los extremos de cada arista de las gráficas tienen diferente signo.

Lema 5.1.2. Sea $p = 1 = q$ y sea $\Gamma_P = H(w_1, w_2, w_3)$. Entonces

- (1) $w_i \leq 3$, $i = 1, 2, 3$;
- (2) $\Delta \geq 8$ implica $w_1 \equiv w_2 \equiv w_3 \pmod{2}$.

Demostración. (1) Es inmediato del Lema 2.2.2 (2) y del hecho que hay a lo más tres colecciones de aristas paralelas en Γ_Q .

(2) Sea $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Nótese que $w_i \neq 0$ implica $w_j + w_k$ par, pues de lo contrario al aplicar el Lema 5.1.1 las aristas de la colección w_i tendrían las mismas etiquetas en sus extremos y esto contradice el Lema 2.3.3 (2). También, se tiene que $w_1 + w_2 + w_3 = \Delta/2 \geq 4$ de donde a lo más un w_i es zero por (1). Caso uno: $w_i = 0$ para algún $i = 1, 2, 3$. Entonces $w_j \neq 0$ implica $w_i + w_k = w_k$ par y $w_k \neq 0$ implica $w_i + w_j = w_j$ par. Caso dos: $w_i \neq 0$ para cada $i = 1, 2, 3$. Entonces $w_1 + w_2$, $w_2 + w_3$ y $w_1 + w_3$ son pares y por lo tanto tienen la misma paridad. \square

En el siguiente resultado es necesario notar que la gráfica $H(3, 3, 3)$ tiene dos triángulos.

Lema 5.1.3. Sea $p = 1 = q$, M simple y F una componente en la frontera de M de género al menos 2. Si $\Delta = 18$ entonces $\Gamma_P = H(3, 3, 3) = \Gamma_Q$ y las aristas que vienen de los triángulos en P son paralelas en Γ_Q .

Demostración. Sea $\Gamma_P = H(w_1, w_2, w_3)$. Ya que $2(w_1 + w_2 + w_3) = \Delta q$, el Lema 5.1.2 (1) implica $\Gamma_P = H(3, 3, 3)$. De manera análoga se prueba que $\Gamma_Q = H(3, 3, 3)$. Denótese por E_1, E_2, \dots, E_9 las aristas de Γ_P enumeradas cíclicamente alrededor del único vértice como se ilustra en la Figura 5.1. El Lema 2.2.2 (2) implica que cada una de las tres colecciones de aristas paralelas $X = \{E_1, E_2, E_3\}$, $Y = \{E_4, E_5, E_6\}$ y $Z = \{E_7, E_8, E_9\}$ determinan tres aristas en la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_Q$.

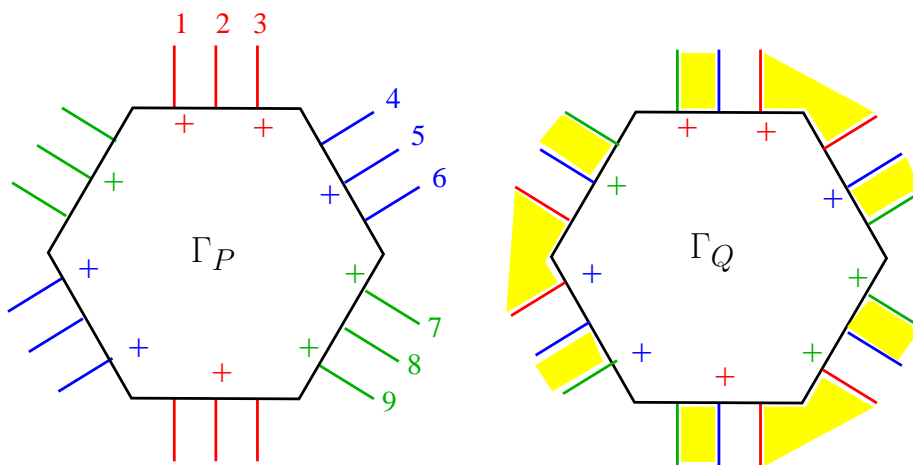


Figura 5.1: $\Gamma_P = H(3, 3, 3) = \Gamma_Q$.

Elegir dos colecciones fijas X y Y . Supóngase que $\{E_{x_1}, E_{y_1}\}$ y $\{E_{x_2}, E_{y_2}\}$ son dos colecciones de aristas paralelas en Γ_Q donde $\{E_{x_1}, E_{x_2}\} \subset X$ y $\{E_{y_1}, E_{y_2}\} \subset Y$. Sean D_{P_1} y D_{P_2} discos (rectángulos) que realizan el paralelismo de las colecciones de aristas $\{E_{x_1}, E_{x_2}\}$ y $\{E_{y_1}, E_{y_2}\}$ en P , respectivamente. Similarmente, sean D_{Q_1} y D_{Q_2} discos (rectángulos) que realizan el paralelismo de las colecciones $\{E_{x_1}, E_{y_1}\}$ y $\{E_{x_2}, E_{y_2}\}$ en Q , respectivamente. Entonces, $A = D_{P_1} \cup D_{Q_2} \cup D_{P_2} \cup D_{Q_1}$ es un anillo o una banda de Mobius propiamente encajado en M (ver Figura 5.2). Si A es una banda de Mobius entonces sea $N(A)$ una vecindad regular de A y

considere $M = N(A) \cup (M - N(A))$ y $A_1 = N(A) \cap (M - N(A))$. Repitiendo las ideas del caso uno del Lema 2.2.1 se concluye que A_1 es un anillo ∂ -compresible en $M - N(A)$. Al usar un disco ∂ -compresión para A_1 el Lema 2.1.3 implica que A_1 es paralelo a un anillo en la frontera A_3 . Luego ya que $N(A)$ es un toro sólido, nótese que A_3 y el anillo $A_2 = \partial N(A) - \text{int} A_1 \subset F$ tienen la misma frontera. Esto implica que $F = A_2 \cup A_3$ es un toro lo cual es una contradicción. Por lo tanto A es un anillo y ya que M es simple entonces A no es esencial.

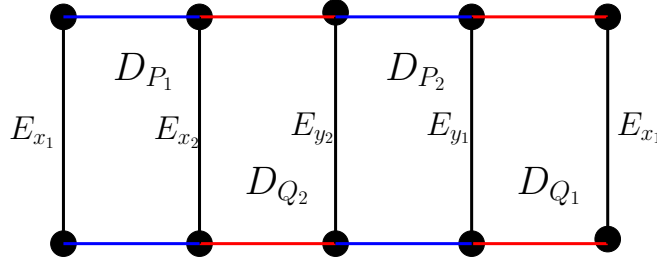


Figura 5.2: $A = D_{P_1} \cup D_{Q_2} \cup D_{P_2} \cup D_{Q_1}$ anillo o banda de Möbius.

Si A es ∂ -compresible sea D un disco de ∂ -compresión. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que el arco $c_1 = D \cap A$ está contenido en alguno de los discos D_{P_1} , D_{P_2} , D_{Q_1} o D_{Q_2} . Esto implica que alguno de los toros esenciales con agujeros P o Q es ∂ -compresible lo cual es una contradicción. Por lo tanto A es ∂ -incompresible y el Lema 2.1.3 implica que no es paralelo a la frontera. Por lo tanto A es compresible y sus fronteras son curvas triviales en F ya que M tiene frontera incompresible.

Recuerde que ∂P separa F en dos componentes F_1 y F_2 . Esto implica que ambas esquinas de cada bígono en Q están en F_1 o F_2 . Nótese que cada una de las componentes de la frontera de A es la unión de dos arcos en ∂P y dos arcos en ∂Q por construcción. También, cada uno de estos arcos en ∂Q contiene 1 o 2 esquinas dependiendo si D_{Q_i} es un bígono o la unión de dos bígono en Q . Por lo tanto, los arcos inducidos desde ∂Q esencialmente tienen dos posibilidades dependiendo si contienen una esquina o dos esquinas. Luego, es sencillo convencerse que los dos arcos inducidos desde ∂Q contienen el mismo número de esquinas, son paralelos y en caso de contener una única esquina están en la misma componente F_1 o F_2 . Pues en caso contrario al aplicar isotopías se puede reducir el número de puntos de intersección entre ∂P y ∂Q al usar el disco en F que cada componente de ∂A acota (ver Figura 5.3). Por lo tanto esencialmente existen únicamente dos posibilidades (salvo reflexiones) para las componentes en la frontera del anillo A como se ilustra en la Figura 5.4. Ahora bien, ya que cada una de las dos esquinas de cada bígono en Q está en diferente componente de ∂A por construcción pero en la misma componente F_1 o F_2 , entonces ambas fronteras de A son de Tipo I o ambas son de Tipo II, donde los dos Tipos son como se definen en la Figura 5.4.

De manera totalmente análoga es posible encontrar otros dos anillos usando X y Y con otros pares de aristas paralelas en Γ_Q . Nótese que cada pareja de estos tres anillos tiene un disco en común de Q por construcción lo cual implica que sus fronteras tienen al menos un arco en común inducido por ∂Q . Un argumento totalmente similar puede ser aplicado a las parejas de conjuntos Y , Z y Z , X , respectivamente. Esto implica la existencia de otros seis anillos en M con las mismas propiedades. Por lo tanto M contiene nueve anillos compresibles y ∂ -incompresibles.

Ahora, colorear cada disco cara en Q de manera alternada en blanco y negro como se ilustra en la Figura 5.1 y suponer que las esquinas blancas están en F_1 . Ya que existen exactamente tres bígono blancos en Q entonces existen a lo más tres anillos con frontera trivial Tipo I contenida en F_1 (ver Figura 5.5). Análogamente, ya que existen exactamente tres bígono negros en Q

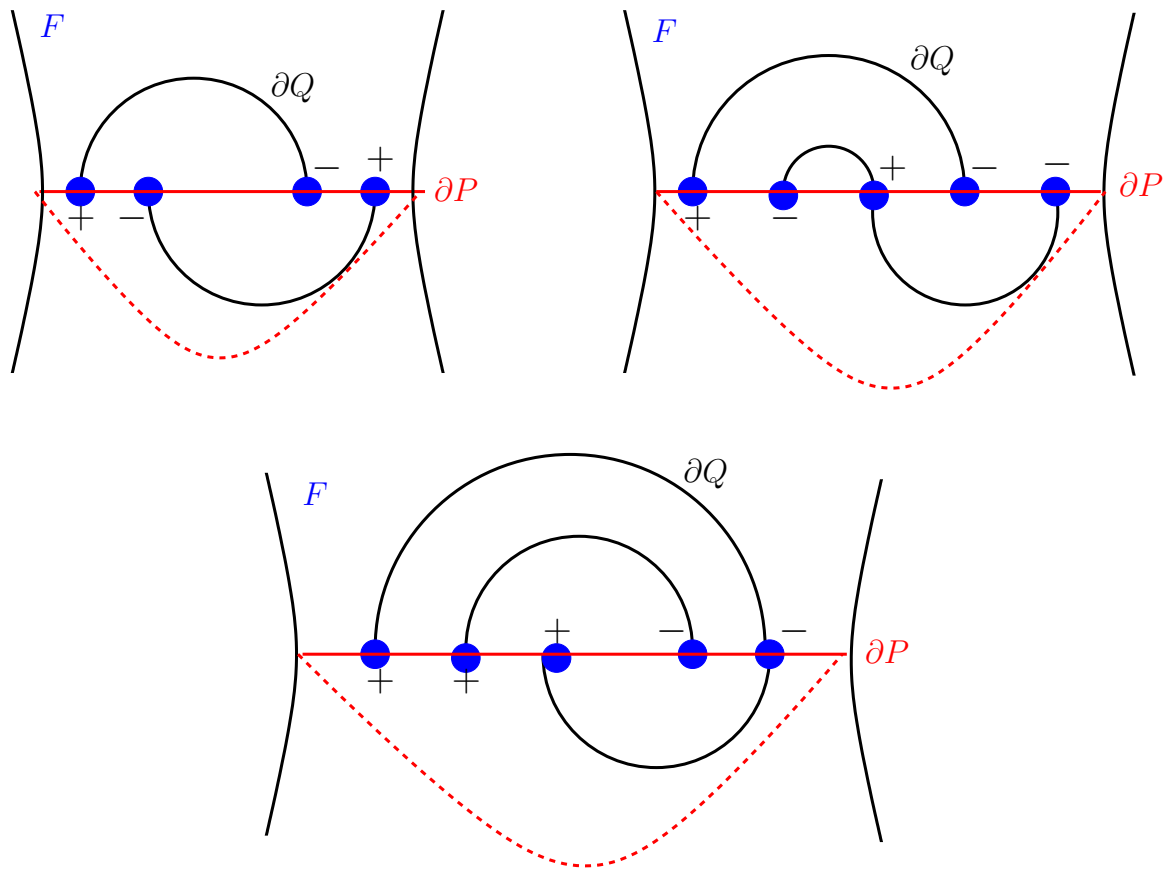


Figura 5.3: Reduciendo la intersección entre ∂P y ∂Q .

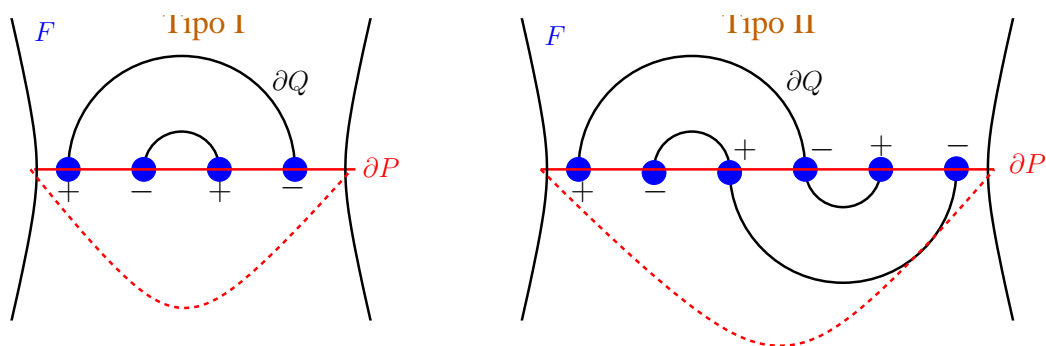


Figura 5.4: Clasificación de fronteras triviales en F de anillos ∂ -incompresibles contenidos en M .

entonces existen a lo más tres anillos con frontera trivial Tipo I contenida en F_2 . También, ya que Q contiene exactamente tres rectángulos que vienen de unir dos bígono con distinta coloración de manera consecutiva entonces existen a lo más tres anillos con frontera trivial Tipo II. Esto implica que estos nueve anillos son los nueve anillos compresibles y ∂ -incompresibles previamente contruidos.

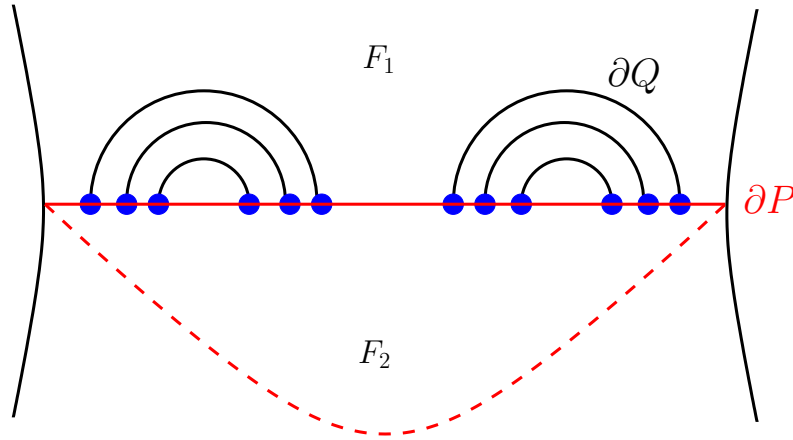


Figura 5.5: Fronteras de tres anillos con frontera trivial en F_1 .

Por lo tanto, al dibujar las fronteras de los nueve anillos anteriores en F sus fronteras tienen que estar acomodadas como se ilustra en la Figura 5.6. Nótese que cada esquina en Q tiene signo opuesto en sus extremos. Finalmente, los arcos inducidos desde ∂Q que contienen dos esquinas consecutivas determinan las colecciones de aristas que son paralelas en Γ_Q pues estas esquinas vienen de bígono adyacentes en Q . Por lo tanto, ya que en la Figura 5.6 están denotados los 18 puntos de intersección entre ∂P y ∂Q , es sencillo convencerse que las colecciones $\{E_1, E_6, E_7\}$, $\{E_2, E_5, E_8\}$ y $\{E_3, E_4, E_9\}$ son paralelas en Γ_Q de donde se obtiene el resultado ya que dos de las colecciones anteriores vienen de triángono en P .

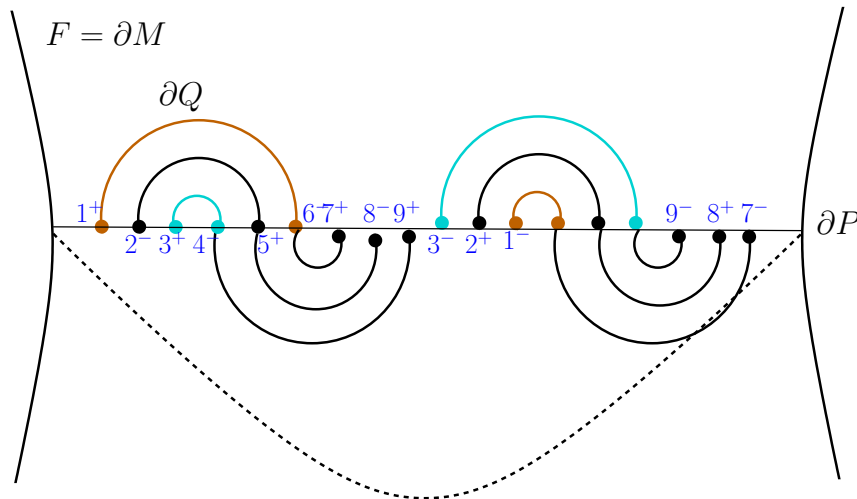


Figura 5.6: Fronteras de los nueve anillos ∂ -incompresibles en M con frontera trivial en F .

□

Nótese que la Figura 5.6 obtenida a partir del Lema 5.1.3 está determinando cómo debe

estar acomodada la pendiente β en la frontera F de la 3-variedad simple M para el caso $p = 1 = q$ con $\Delta = 18$. Lo anterior se debe a que los arcos de la figura anterior son parte de β .

Lema 5.1.4. *Sea $p = 1 = q$, M simple y F una componente en la frontera de M de género al menos 2. Entonces $\Delta(\alpha, \beta) = 18$, $\Delta(\alpha, \beta) = 12$ o $\Delta(\alpha, \beta) \leq 10$. Además:*

(1) *si $2 \leq g(F) \leq 7$ entonces $\Delta(\alpha, \beta) \neq 18$,*

(2) *si $2 \leq g(F) \leq 3$ entonces $\Delta(\alpha, \beta) \neq 12$*

(3) *si $2 \leq g(F) \leq 3$ entonces $\Delta(\alpha, \beta) \leq 10$*

Demostración. Sea $\Gamma_P = H(w_1, w_2, w_3)$. Entonces $2(w_1 + w_2 + w_3) = \Delta$ y el Lema 5.1.2 (1) implica $w_i \leq 3$. Por lo tanto $\Delta \leq 18$. Así, únicamente resta eliminar los casos $\Delta = 16$ y $\Delta = 14$.

$\Delta = 16$ es imposible. Ya que $w_1 + w_2 + w_3 = 8$, el Lema 2.2.2 (2) implica que la única posibilidad es $\Gamma_P = H(2, 3, 3)$ (módulo permutaciones de las w_i). Sin embargo, esto contradice el Lema 5.1.2 (2).

$\Delta = 14$ es imposible. Ya que $w_1 + w_2 + w_3 = 7$, el Lema 2.2.2 (2) implica que las únicas posibilidades para Γ_P son $H(2, 2, 3)$ y $H(1, 3, 3)$. Nótese que $\Gamma_P = H(1, 3, 3)$ implica $\Gamma_Q = H(2, 2, 3)$. Por lo tanto, en cualquier caso, se contradice el Lema 5.1.2 (2).

(1) $\Delta = 18$ es imposible si $2 \leq g(F) \leq 7$. El Lema 5.1.3 implica $\Gamma_P = H(3, 3, 3) = \Gamma_Q$ y si E_1, E_2, \dots, E_9 denotan las aristas de Γ_P como se ilustra en la Figura 5.7 entonces las únicas colecciones de aristas paralelas en Γ_Q son $\{E_1, E_6, E_7\}$, $\{E_2, E_5, E_8\}$ y $\{E_3, E_4, E_9\}$. Análogamente, propiedades similares son satisfechas por las aristas de los triángulos D_1 y D_2 en Q . Entonces dos de las tres colecciones de aristas paralelas en Γ_P se identifican con las aristas de estos dos triángulos en Q . Sin pérdida de generalidad, asumir que las aristas E_4, E_5 y E_6 no se identifican con las aristas de los triángulos D_1 y D_2 en Q . Ahora bien, se tienen dos posibilidades, que las aristas E_1, E_2 y E_3 se identifiquen con las aristas del triángulo D_1 o con las aristas del triángulo D_2 en Q . Ya que el argumento es el mismo en cada caso, supóngase que estas aristas se identifican con las aristas de D_2 como se ilustra en la Figura 5.7. Nótese que esto induce una única posibilidad para las identificaciones entre las aristas de Γ_P y Γ_Q .

Ahora bien, ya que α es separante en F , sea $F - \alpha = F_1 \sqcup F_2$ y colorear cada disco cara en Q de manera alternada en blanco y negro. Supóngase que D_1 es blanco y sean B_1, B_2, B_3 los otros discos cara blancos en Q . Denótese por e^+ y e^- los extremos de cada arista E con etiquetas $+$ y $-$, respectivamente. Nótese que las esquinas 3^+4^- , 7^+8^- , 1^-6^+ y 9^-8^+ en Γ_Q inducen arcos esenciales en F_1 . Análogamente, las esquinas 2^-3^+ , 6^-7^+ , 2^+1^- y 4^+9^- en Γ_Q inducen arcos esenciales en F_2 . Esto implica que la superficie F tiene género al menos 4.

Ahora, considere las caras H_1 y H_2 contenidas en F_1 y las caras H_3 y H_4 contenidas en F_2 como se ilustra en la Figura 5.7. Ya que F es una superficie de género a lo más 7 y las curvas α y β son separantes entonces al menos una de las caras H_i acota un disco. Sin pérdida de generalidad, supóngase que H_1 acota un disco en F_1 . Entonces defina $X = P \cup F_1 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup D_1$ y sea $N(X)$ una vecindad regular de X . Nótese que $\partial B_1, \partial B_2$ y ∂B_3 son curvas paralelas en $P \cup F_1$ (ver Figura 5.8). Esto implica que al pegar los bígono B_1, B_2 y B_3 a $N(X)$ se obtiene que $\partial N(X)$ contiene dos esferas. Luego ya que M es irreducible, entonces estas esferas acotan 3-bolas y tiene sentido considerar $W = N(X) \cup 3\text{-bola} \cup 3\text{-bola}$. Considere los dos círculos c_1 y c_2 en $\partial N(X)$ que se ilustran en la Figura 5.8. Entonces, ya que H_1 es un disco esto implica que $A = N(c_1) \cup T_1 \cup B_3 \cup H_1 \cup D_1 \cup B \cup N(c_2)$ es un anillo donde $N(c_i)$ es un ϵ -collar de c_i (ver Figura 5.9). Al empujar ligeramente A en W , es posible asumir que $A \subset \partial W$ y $\partial A = c_1 \cup c_2$. Ya que las esquinas 3^+4^- y 7^+8^- en Γ_Q son arcos esenciales en F_1 entonces c_1 y c_2 son curvas esenciales en F_1 . Esto implica que A es incompresible.

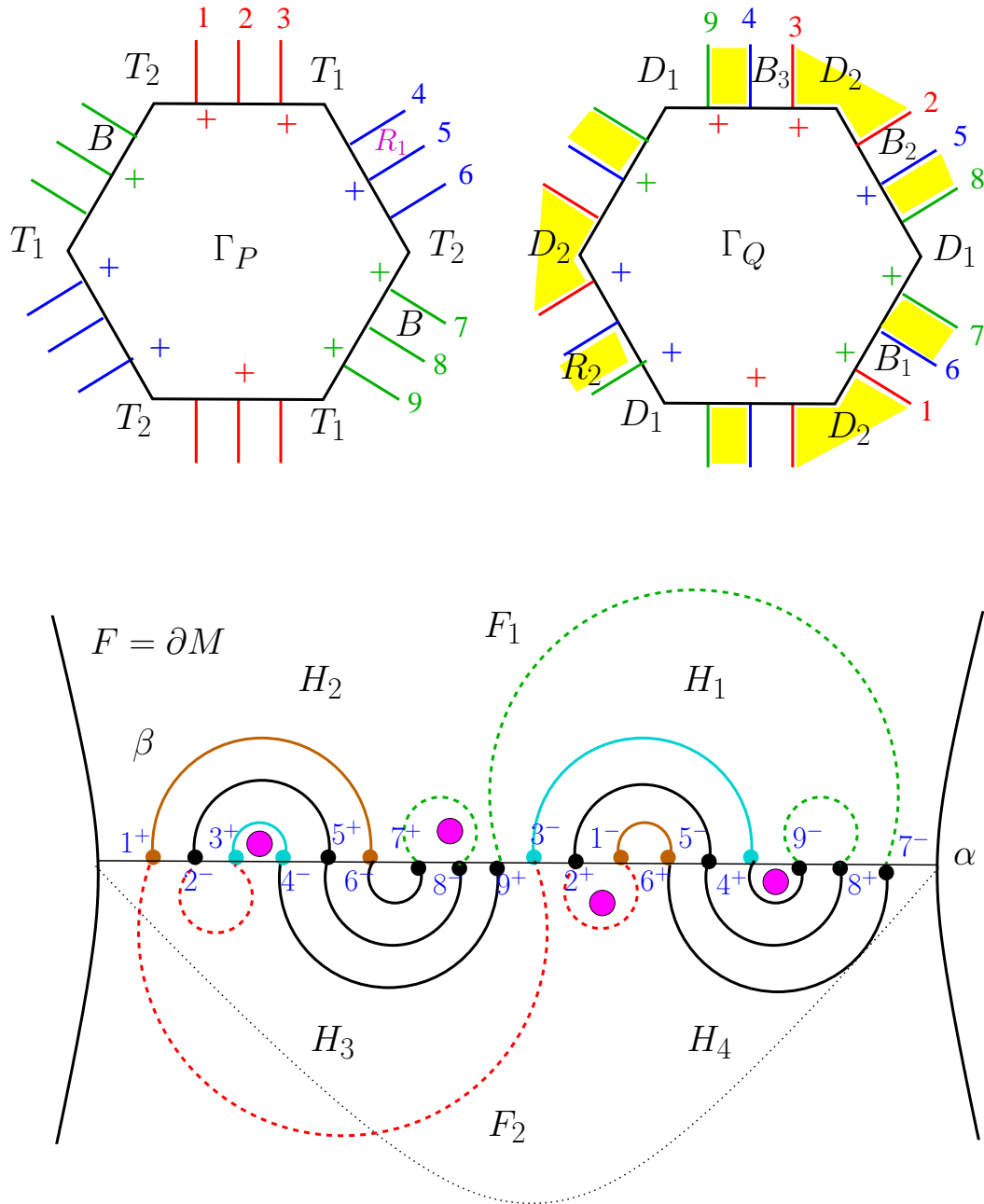


Figura 5.7: $\Delta = 18$, $p = 1 = q$ y aristas E_4, E_5 y E_6 en Γ_P no inducidas por D_1 y D_2 .

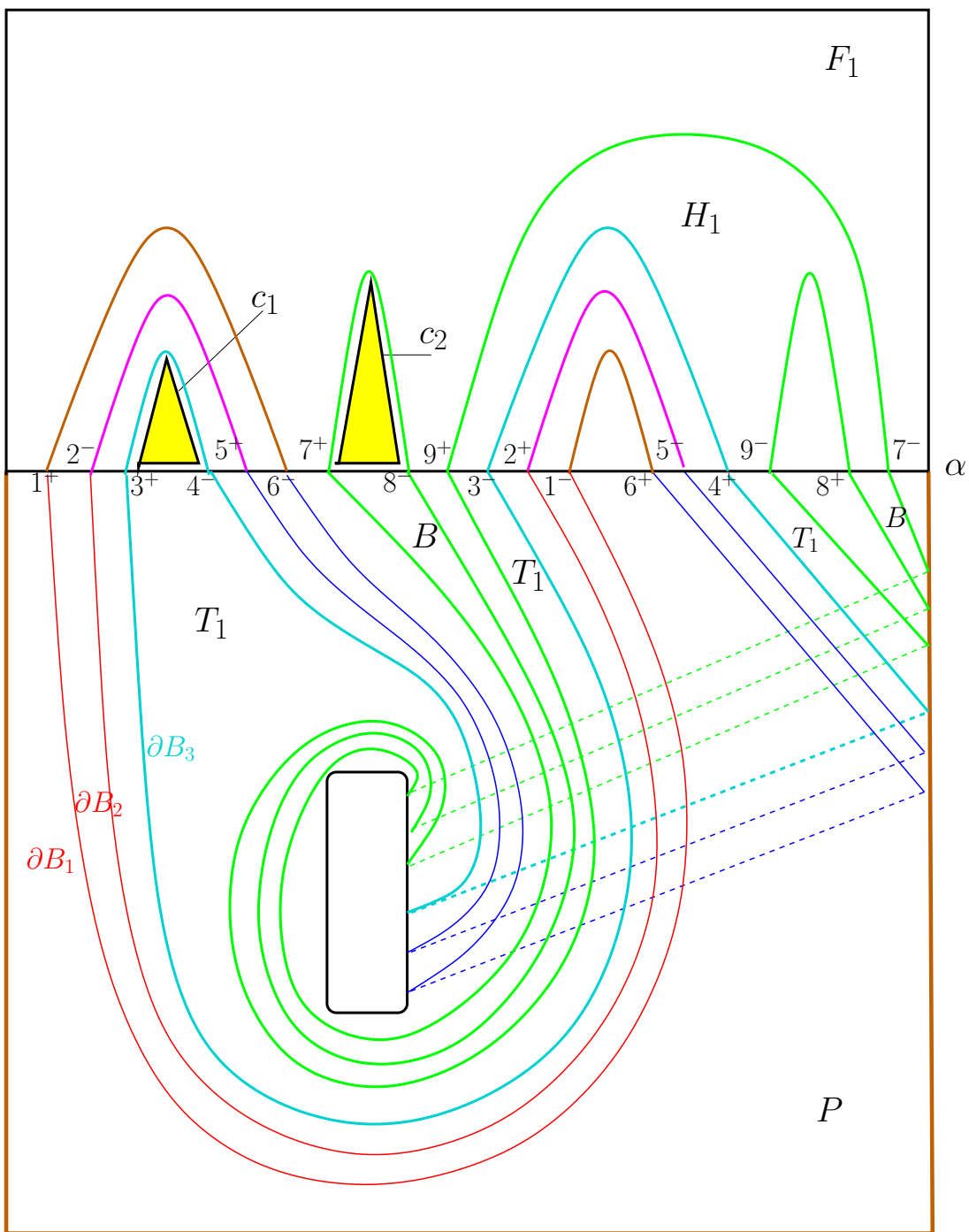


Figura 5.8: $X = P \cup F_1 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup D_1$.

Supóngase que A es frontera paralelo a un anillo A_1 contenido en F_1 . Entonces c_1 y c_2 son curvas paralelas en F_1 . Las aristas E_4 y E_5 acotan un bígono R_1 en P y las aristas E_5 y E_8 acotan un bígono R_2 en Q (ver Figura 5.7). Ahora, defina $D = R_1 \cup R_2$. Nótese que $\partial D \cap (T_1 \cup B) = E_4 \sqcup E_8$. Luego considere el siguiente arco en A que une sus dos componentes frontera c_1 y c_2 definido por:

$$\gamma_1 = k_1 \cup E_4 \cup k_3 \cup E_8 \cup k_2$$

donde k_1 es un arco dentro del ϵ -collar $N(c_1)$ que une c_1 con el extremo negativo de E_4 , k_2 es un arco dentro del ϵ -collar $N(c_2)$ que une c_2 con el extremo negativo de E_8 y k_3 es un arco dentro de H_1 que une los extremos positivos de E_4 y E_8 (ver Figura 5.9). Ya que A es paralelo a A_1 existe un disco D' tal que $\partial D' = \gamma_1 \cup \gamma_2$ donde γ_2 es un arco contenido en A_1 que une sus componentes en la frontera. Finalmente, considere el anillo $A_2 = D \cup D'$ (ver Figura 5.10). Nótese que $\partial A_2 \subset F$. Ya que una de las componentes de ∂A_2 intersecta c_1 en un punto por construcción entonces esta componente es una curva no separante esencial en F y A_2 es un anillo esencial. Por lo tanto se puede concluir que A es un anillo esencial lo cual contradice que M es simple.

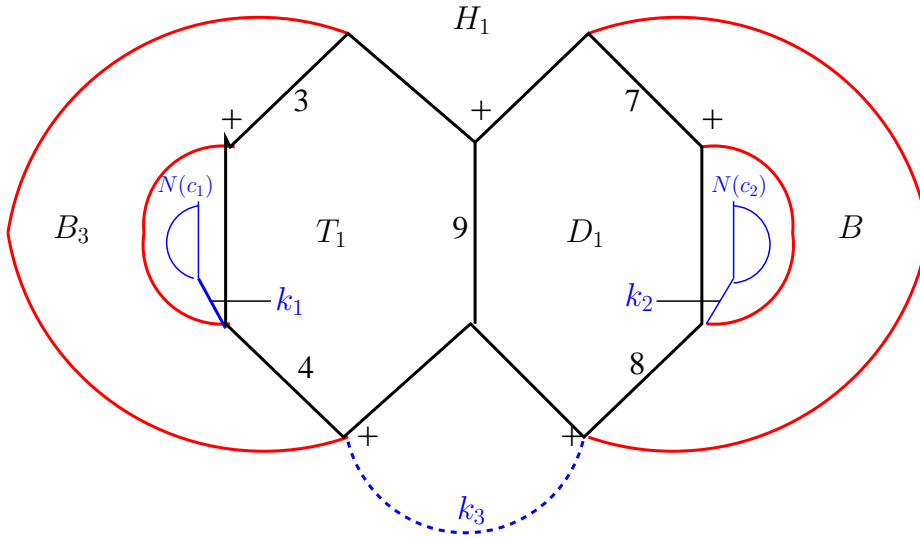


Figura 5.9: Anillo $A = N(c_1) \cup T_1 \cup B_3 \cup H_1 \cup D_1 \cup B \cup N(c_2)$.

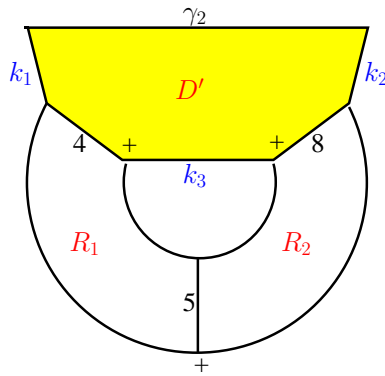


Figura 5.10: Anillo $A_2 = D \cup D'$.

(2) $\Delta = 12$ es imposible si $2 \leq g(F) \leq 3$. Ya que $w_1 + w_2 + w_3 = 6$, el Lema 5.1.2 (2) implica $\Gamma_P = H(2, 2, 2) = \Gamma_Q$. Ahora bien, cada gráfica induce tres bígono y el Lema 2.2.2 (2)

implica que al pegar los seis bígono por sus aristas inducen un anillo A propiamente encajado en M . Si A es ∂ -compresible implica que alguno de los toros esenciales con agujeros P o Q es ∂ -compresible lo cual contradice que M es simple. Por lo tanto A es ∂ -incompresible y el Lema 2.1.3 implica que no es paralelo a la frontera. Así, A es compresible y sus fronteras son curvas triviales en F ya que M es simple. Nótese que cada una de las 6 esquinas de los bígono en Q están en la misma componente de $F - \partial P = F_1 \sqcup F_2$ ya que α separa. También, por construcción cada componente de la frontera A es la unión de 3 arcos en ∂P y tres arcos en ∂Q . Por lo tanto, esencialmente existen únicamente dos posibilidades para que las componentes de la frontera de A sean triviales en F como se ilustra en la Figura 5.11

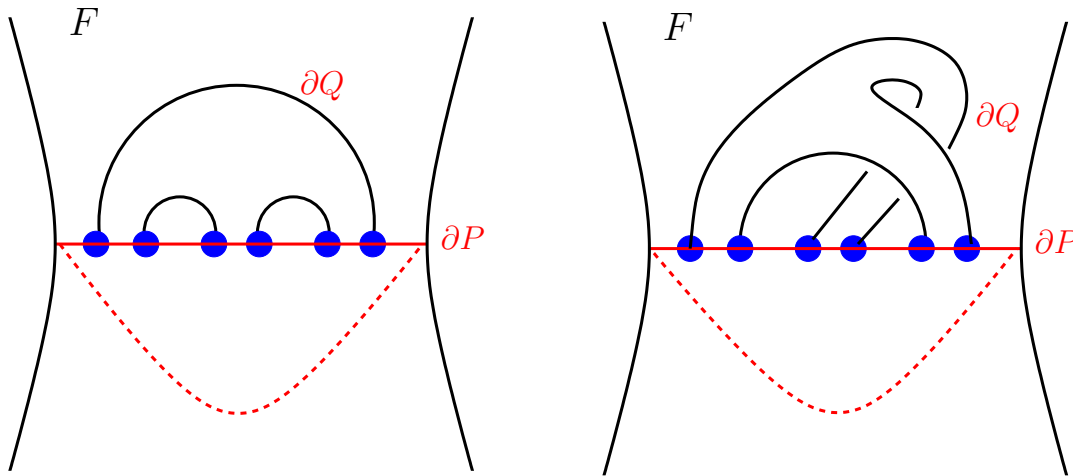


Figura 5.11: Clasificación de fronteras triviales en F del anillo A ∂ -incompresible contenido en M .

Sean E_1, E_2, \dots, E_6 las aristas de Γ_P como se ilustra en la Figura 5.12. Cada arco en ∂Q debe tener signos opuestos en sus extremos. Esto implica que el número de etiquetas entre los extremos del arco debe ser par. Además, los tres arcos en ∂Q que están en cada componente frontera de A deben tener etiquetas de las seis aristas de Γ_P . Por lo tanto, salvo traslaciones por dos puntos de intersección entre ∂P y ∂Q , esencialmente solo existen dos opciones para las fronteras del anillo A que se ilustran en la Figura 5.12. Nótese que esto implica que el género de F_1 es al menos dos.

Las fronteras del anillo A no determinan Γ_Q . Sin embargo, determinan las parejas de aristas paralelas en Γ_Q . Sin pérdida de generalidad suponer que las parejas de aristas paralelas en Γ_Q son $\{E_1, E_6\}$, $\{E_2, E_3\}$ y $\{E_4, E_5\}$. Entonces para cada una de las dos posibilidades del anillo A existen en principio 2^3 gráficas posibles para Γ_Q que vienen de intercambiar las aristas de parejas de paralelas. Sin embargo, ya que al intercambiar las aristas de tres parejas todas las esquinas permanecen invariantes salvo signos entonces basta considerar solo 4 casos. Cada uno de estos 4 casos se ilustran en las Figuras 5.13 y 5.14. Finalmente, en cada una de estas posibilidades para Γ_Q es sencillo ver que se pueden realizar cuando el género de F_2 es al menos dos (por ejemplo el caso (1) se realiza si el género de F_2 es dos). Pero no se pueden realizar si el género de F_2 es uno pues existen más de tres arcos no paralelos. Por lo tanto el género de F es al menos cuatro.

(3) Es inmediato de (1) y (2).

□

Lema 5.1.5. Si $p = 1$ y $q = 2$ entonces $\Delta \leq 10$.

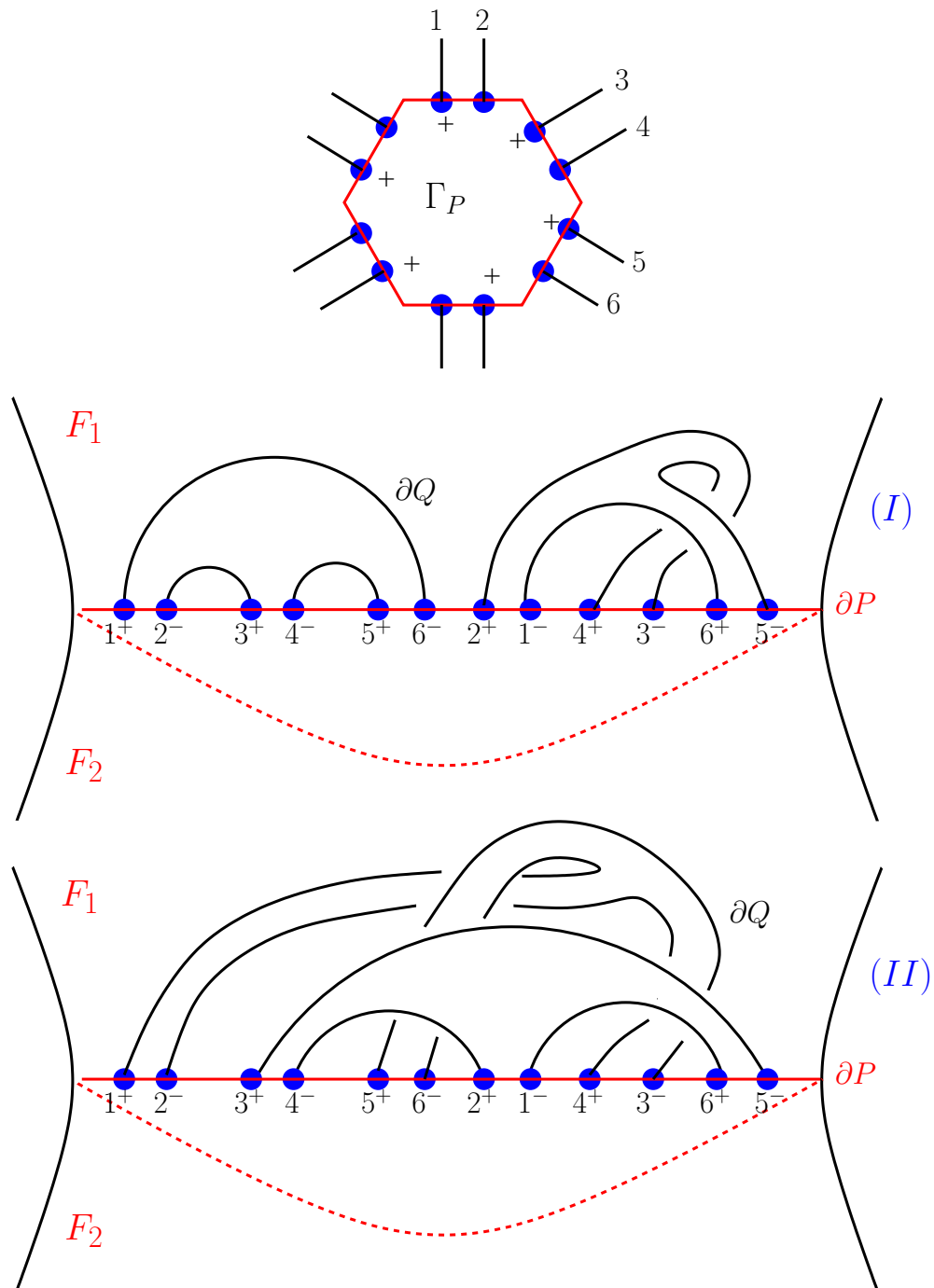


Figura 5.12: Dos posibilidades para las fronteras del anillo A con $\Delta = 12$.

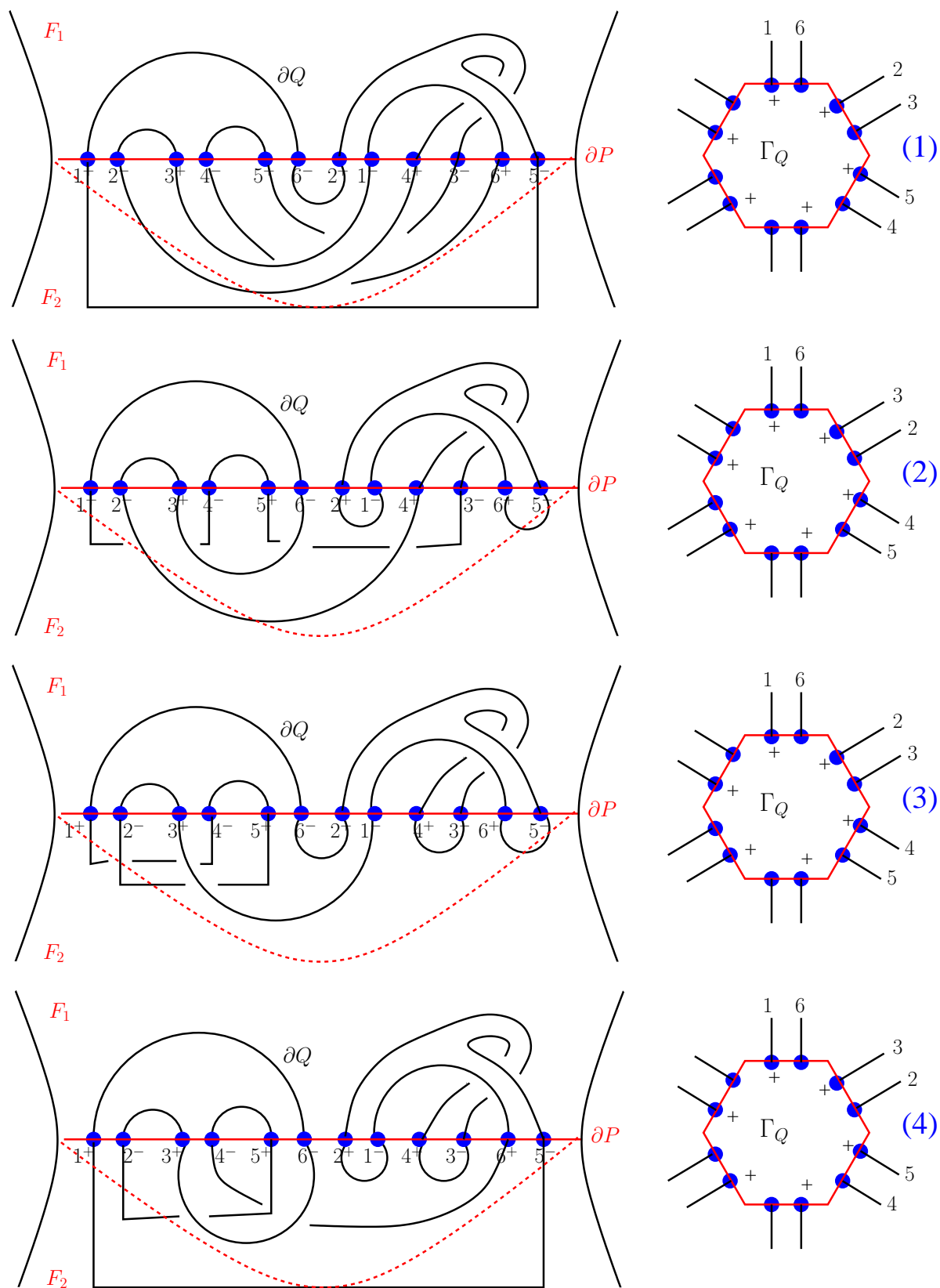


Figura 5.13: Cuatro posibilidades para Γ_Q que inducen las fronteras triviales en F del anillo A Tipo I.

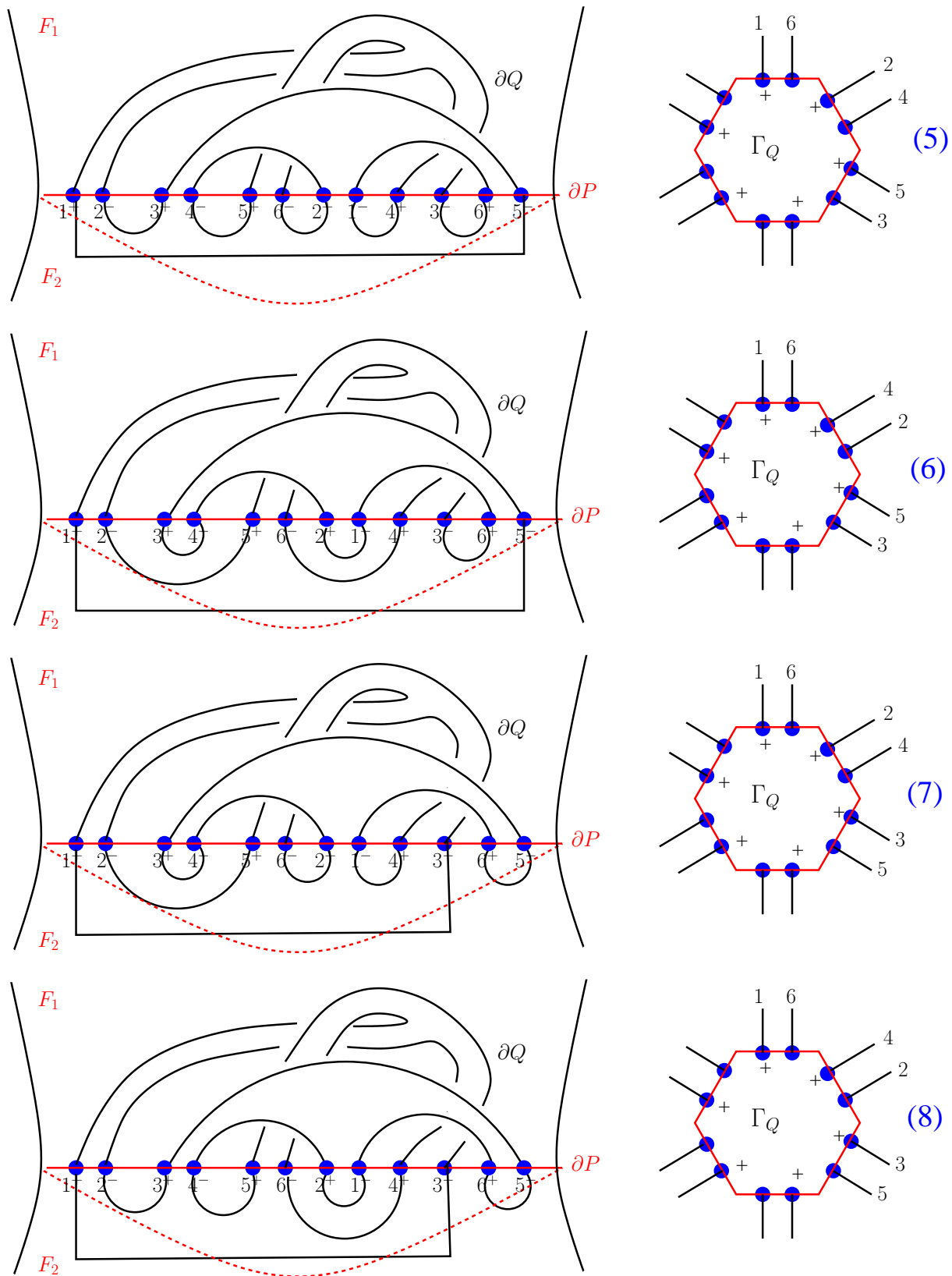


Figura 5.14: Cuatro posibilidades para Γ_Q que inducen las fronteras triviales en F del anillo A Tipo II.

Demostración. Ya que $q = 2$ entonces en $\Gamma_P = H(w_1, w_2, w_3)$ se cumple $w_1 + w_2 + w_3 = \Delta$ y el Lema 3.1.4 implica $\Gamma_Q = G(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ como se ilustra en la Figura 3.4. El Lema 2.3.2 implica que cada colección de aristas paralelas en Γ_P se identifica con una colección de lazos en Γ_Q o con una colección de aristas que unen los dos vértices de Γ_Q . Luego el Lema 2.2.2 (2) implica $w_i \leq 4$. Por lo tanto $\Delta \leq 12$.

Supóngase que $\Delta = 12$. Entonces $\Gamma_P = H(4, 4, 4)$ y el Lema 2.2.2 (2) implica $\Gamma_Q = G(3, 3, 3, 3, 0)$. Ahora, ya que cada arista de la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_Q$ tiene peso 3 repetir el argumento que se aplicó en el Lema 5.1.3 para construir 18 anillos ∂ -incompresibles en M con frontera trivial en F que se obtienen de pegar cuatro rectángulos donde cada rectángulo es inducido por parejas de aristas paralelas en Γ_P y Γ_Q (ver Figura 5.2). De nuevo, ambas fronteras de estos anillos se ven en F como alguna de las curvas ilustradas en la Figura 5.4.

Ahora bién, ya que α es separante en F , sea $F - \alpha = F_1 \sqcup F_2$. Esto implica que ambas esquinas de cada bígono en Q están en F_1 o F_2 . Colorear cada disco cara en Q de manera alternada en blanco y negro y suponer que las esquinas blancas están en F_1 . Ya que existen exactamente 4 bígono blancos en Q entonces existen a lo más 6 anillos con frontera trivial Tipo I contenida en F_1 (ver Figura 5.5). Análogamente, ya que existen exactamente 4 bígono negros en Q entonces existen a lo más 6 anillos con frontera trivial Tipo I contenida en F_2 . También, ya que Q contiene exactamente 4 rectángulos que vienen de unir dos bígono con distinta coloración de manera consecutiva entonces existen a lo más 6 anillos con frontera trivial Tipo II. Esto implica que estos 18 anillos son los 18 anillos compresibles y ∂ -incompresibles previamente contruidos. Por lo tanto, al dibujar las fronteras de los 18 anillos anteriores en F sus fronteras tienen que estar acomodadas como se ilustra en la Figura 5.15.

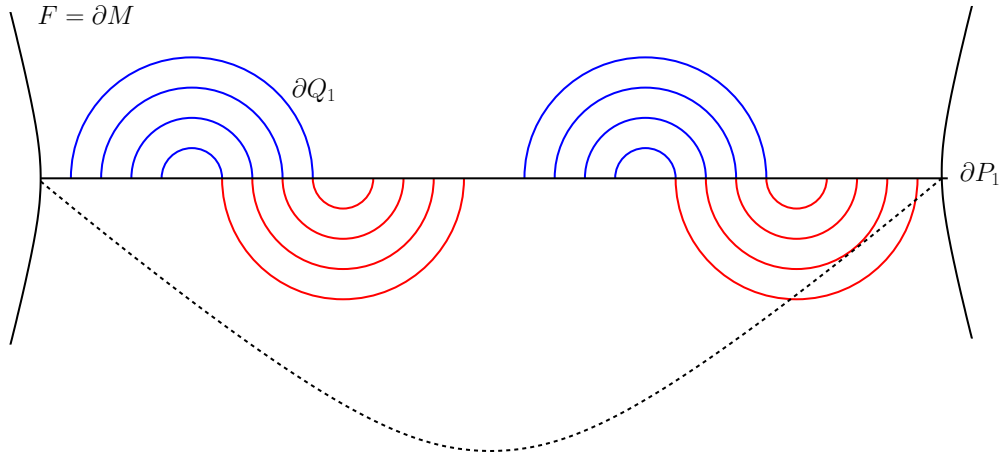


Figura 5.15: Fronteras de 18 anillos ∂ -incompresibles en M con frontera trivial en F .

Sean $\{e_1, \dots, e_4\}$ alguna de las colecciones de cuatro aristas paralelas de Γ_P . Ya que $q = 2$ implica que las aristas e_1 y e_4 tienen una etiqueta en común en sus extremos. Esto implica que $\{e_2, e_3\}$ acota un S-ciclo σ . Sin pérdida de generalidad, supóngase que el par de etiquetas de σ es el que se ilustra en la Figura 5.16 (a). Esto implica que las esquinas de los bígono en Γ_Q unen puntos de intersección con el mismo signo en F (ver Figura 5.16 (b)). Por otra parte, Γ_Q tiene 4 colecciones distintas de aristas paralelas y será más conveniente considerar la versión ilustrada en la Figura 5.16 (c) donde las rectas horizontales representan cada uno de los dos vértices. Ya que $p = 1$ los signos alrededor de cada vértice alternan lo cual implica que cada esquina de los bígono en Q une puntos de intersección con distinto signo en F lo cual es una contradicción.

□

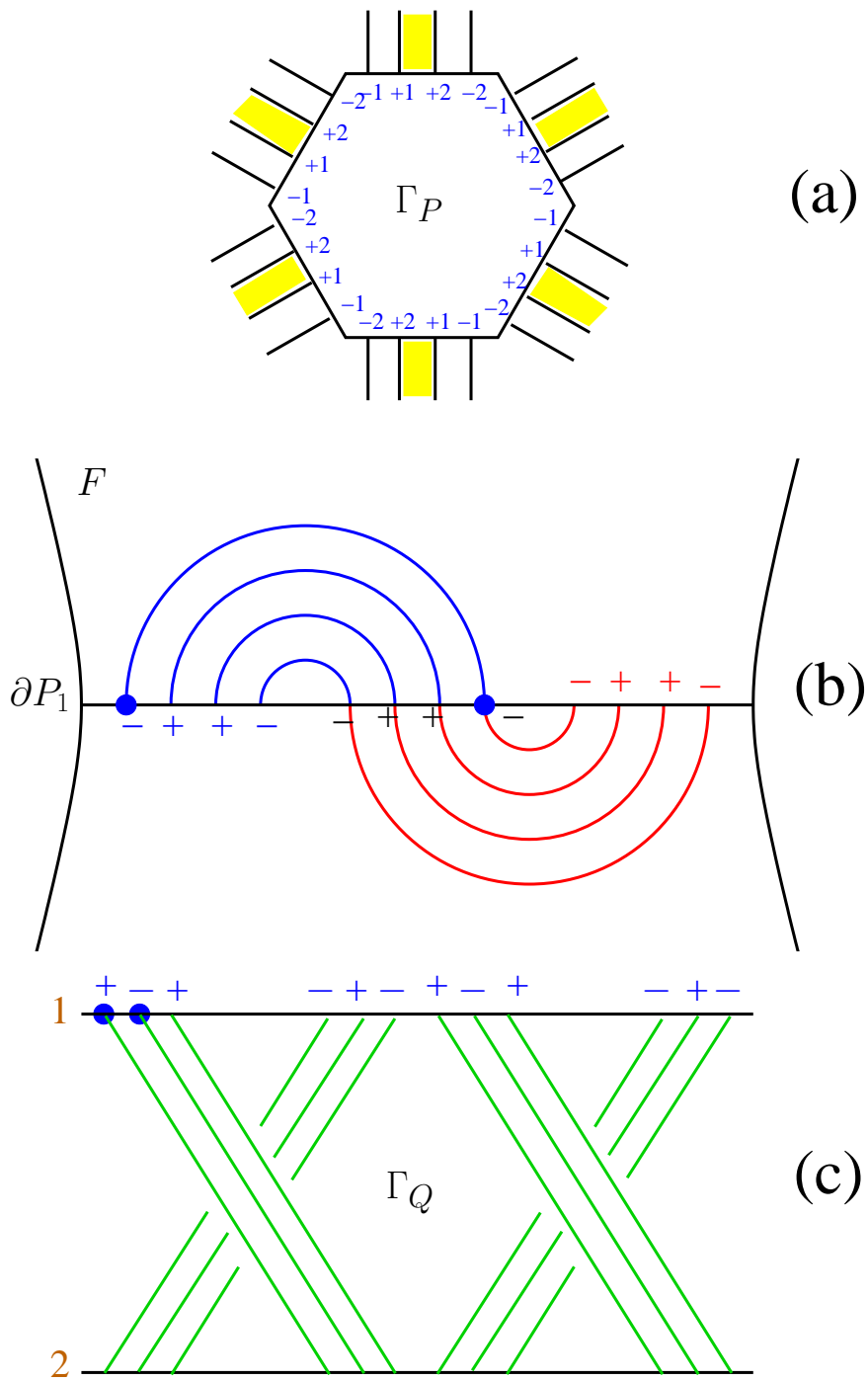


Figura 5.16: $p = 1$ y $q = 2$ con $\Delta = 12$.

5.1.2. Subcaso $p = 1$ y $q \geq 3$

En esta sección se estudia el subcaso cuando $p = 1$ y $q \geq 3$. El análisis se divide en $q = 3$ y $q \geq 4$. El objetivo de esta sección es demostrar la Proposition 5.1.9 después de haber alcanzado el Lema 5.1.5. Recuerde que el Lema 3.1.3 implica $\Gamma_P = H(w_1, w_2, w_3)$ (ver Figura 3.2) y nótese que si $q = 3$ entonces Γ_P únicamente puede tener ciclos de Scharlemann con par de etiquetas $(1, 2)$ o $(2, 3)$. También, la convención 1 implica que las etiquetas:

$$+1, +2, +3, -3, -2, -1$$

aparecen en sentido horario.

El siguiente resultado establece restricciones preliminares para la terna (w_1, w_2, w_3) de Γ_P en la misma línea que lo hizo el Lema 5.1.2.

Lema 5.1.6. *Sean $p = 1$, $q = 3$ y $\Gamma_P = H(w_1, w_2, w_3)$. Entonces:*

(1) $\Delta = 14$ implica $w_i \equiv 1 \pmod{2}$ para cada $i = 1, 2, 3$ y

(2) $\Delta = 12$ implica $w_i \equiv 0 \pmod{2}$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Demostración. (1) Supóngase que $\Delta = 14$ con w_i par para algún $i = 1, 2, 3$. Se tiene que:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 3\Delta/2 = 21.$$

Entonces $w_j + w_k$ es impar. El Lema 3.1.1 implica $3 \leq w_l \leq 9$ para cada $l = 1, 2, 3$ y por lo tanto:

$$w_j + w_k \in \{13, 15, 17\}.$$

En cualquiera de los 3 casos implica que existe una arista e en la colección w_i tal que $\sharp(e^x e^y) = 6n - 1$ con $n = 3$. Entonces el Lema 5.1.1 implica que la arista e tiene las mismas etiquetas en sus extremos y esto contradice el Lema 2.3.3 (2).

(2) Supóngase que $\Delta = 12$ con w_i impar para algún $i = 1, 2, 3$. Se tiene que:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 3\Delta/2 = 18.$$

Entonces $w_j + w_k$ es impar. El Lema 3.1.1 implica $w_l \leq 9$ para cada $l = 1, 2, 3$ y por lo tanto:

$$w_j + w_k \in \{9, 11, 13, 15, 17\}.$$

En cualquiera de los cinco casos implica que existe una arista e en la colección w_i tal que $\sharp(e^x e^y) = 6n - 1$ con $n = 3$. De nuevo, el Lema 5.1.1 implica que la arista e tiene las mismas etiquetas en sus extremos y esto contradice el Lema 2.3.3 (2). □

Lema 5.1.7. *Si $p = 1$ y $q = 3$ entonces $\Delta \leq 10$.*

Demostración. Si $\Delta \geq 16$ entonces $w_1 + w_2 + w_3 = 3\Delta/2 \geq 24$. El Lema 3.1.1 implica $6 \leq w_i \leq 9$ para cada $i = 1, 2, 3$ y por lo tanto Γ_Q no tiene lazos. También, existe $w_j \geq 8$ para algún $j = 1, 2, 3$ y el Corolario 3.2.3 (2) implica que Γ_P tiene S-ciclos con distinto par de etiquetas. Luego el Lema 3.2.6 (3) implica $\Delta \leq 14$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\Delta \leq 14$.

$\Delta = 14$ es imposible. Ya que $w_1 + w_2 + w_3 = 21$ el Lema 3.1.1 y el Lema 5.1.6 (1) implican $w_i \in \{3, 5, 7, 9\}$ para cada $i = 1, 2, 3$. Entonces las únicas posibilidades para Γ_P son:

$$H(9, 7, 5), H(9, 9, 3) \text{ y } H(7, 7, 7).$$

Esto implica que Γ_Q no tiene lazos y el Corolario 3.2.3 (2) implica que Γ_P tiene S-ciclos con distinto par de etiquetas. Luego el Lema 2.3.3 (4) y el Lema 3.2.4 (4) implican $N = 6$. El Lema 3.2.2 (2) implica que $\Gamma_P = H(9, 9, 3)$ satisface $N \leq 5$ y por lo tanto esta configuración no puede ocurrir. Ahora se analizan los dos casos restantes para Γ_P .

Caso 1: $\Gamma_P = H(7, 7, 7)$. Sea $\{e_1, \dots, e_7\}$ alguna de las 3 colecciones de 7 aristas paralelas de Γ_P y supóngase que cada arista tiene etiquetas en sus extremos $\partial e_i = x_i \sqcup y_i$. Ya que el número de etiquetas entre x_2 y y_3 es 17 respecto de alguna orientación entonces el Lema 5.1.1 implica $x_2 = y_3$ y por tanto $\{e_2, e_3\}$ acota un ciclo virtual de Scharlemann. De la misma manera se puede probar que $\{e_5, e_6\}$ acota un ciclo virtual de Scharlemann. El Corolario 3.2.3 (2) implica que $\{e_2, e_3\}$ y $\{e_5, e_6\}$ acotan S-ciclos. Ahora bien, es sencillo verificar que al intentar contruir la gráfica Γ_P con la posición anterior de los S-ciclos implica que alguna de las colecciones de 7 aristas paralelas tiene ciclos virtuales de Scharlemann con par de etiquetas (1, 1). Luego el Lema 2.3.2 implica que Γ_Q tiene lazos lo cual es una contradicción.

Caso 2: $\Gamma_P = H(9, 7, 5)$. Sin pérdida de generalidad, el Corolario 3.2.3 (3)-(4) implica que se puede suponer que las etiquetas en Γ_P son como las que se ilustran en la Figura 5.17 (a) y $\Gamma_Q = R(w_1, \dots, w_9)$. Entonces Γ_P tiene tres S-ciclos con par de etiquetas (1, 2) y tres S-ciclos con par de etiquetas (2, 3). Luego el Lema 3.2.2 (3) implica que alrededor del vértice 2 de Γ_Q hay 4 colecciones consecutivas de 3 aristas paralelas que provienen de las aristas de los S-ciclos. También, el Lema 3.1.5 implica que las aristas de las subgráficas reducidas $\bar{\Gamma}_Q^{12}$ y $\bar{\Gamma}_Q^{23}$ alternan alrededor del vértice 2. Esto implica que las aristas 1 y 6, con la notación de la Figura 5.17 (a), son adyacentes en Γ_Q y por lo tanto los signos alrededor del vértice 2 se ven como se ilustra en la Figura 5.17 (b). Sin embargo, los signos alrededor del vértice 2 en Γ_Q no alternan lo cual es una contradicción.

$\Delta = 12$ es imposible. Ya que $w_1 + w_2 + w_3 = 18$ el Lema 3.1.1 y el Lema 5.1.6 (2) implican $w_i \in \{2, 4, 6, 8\}$ para cada $i = 1, 2, 3$. Entonces las únicas posibilidades para Γ_P son:

$$H(8, 6, 4), H(8, 8, 2) \text{ y } H(6, 6, 6).$$

Caso 1: $\Gamma_P = H(8, 6, 4)$ o $H(8, 8, 2)$. Sea $\{e_1, \dots, e_8\}$ una colección de 8 aristas paralelas en Γ_P y supóngase que cada arista tiene etiquetas en sus extremos $\partial e_i = x_i \sqcup y_i$. Luego como el número de etiquetas entre x_1 y y_2 es 11 respecto de alguna orientación entonces el Lema 5.1.1 implica $x_1 = y_2$ y por tanto $\{e_1, e_2\}$ acota un S-ciclo. Análogamente, se puede probar que $\{e_7, e_8\}$ acota un S-ciclo. Sin embargo, $q = 3$ implica que los dos S-ciclos anteriores tienen el mismo par de etiquetas lo cual contradice el Corolario 3.2.3 (1).

Caso 2: $\Gamma_P = H(6, 6, 6)$. Sea $\{e_1, \dots, e_6\}$ alguna de las 3 colecciones de 6 aristas paralelas de Γ_P . Ya que $q = 3$ entonces $\{e_3, e_4\}$ acota un S-ciclo. Además, Γ_P tiene 3 S-ciclos con el mismo par de etiquetas con signos. Sin pérdida de generalidad, supóngase que el par de etiquetas de los S-ciclos es como se ilustra en la Figure 5.18. Entonces el Lema 3.2.1 (1) implica que Γ_Q tiene dos colecciones de 3 aristas paralelas entre el vértice 2 y 3. Ya que las 6 aristas de los S-ciclos tienen signos negativos en sus extremos esto implica que los signos alrededor de esos dos vértices en Γ_Q no alternan lo cual es una contradicción.

□

Lema 5.1.8. *Si $p = 1$ y $q \geq 4$ entonces $\Delta \leq 10$.*

Demostración. Se procede por contradicción. Si $\Delta > 12$, entonces ya que el único vértice de Γ_P tiene valencia Δq , aplicando el Lema 3.1.2 con $n = 2q$ a la gráfica Γ_P , se deduce que Γ_P tiene $2q + 1$ aristas paralelas lo cual contradice el Lema 4.1.2. Por lo tanto se puede suponer $\Delta = 12$. Esto implica que cada una de las 3 colecciones de aristas paralelas en Γ_P tiene exactamente $2q$ aristas y por lo tanto $\Gamma_P = H(2q, 2q, 2q)$. Ahora bien, el Lema 4.1.1 implica que cada

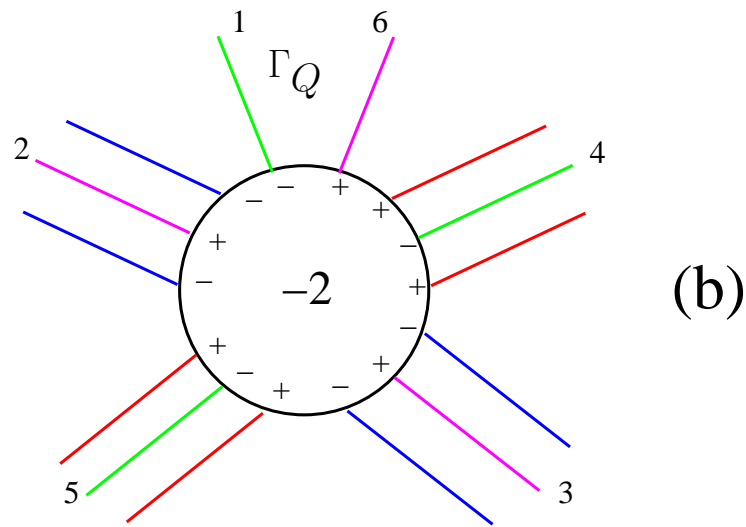
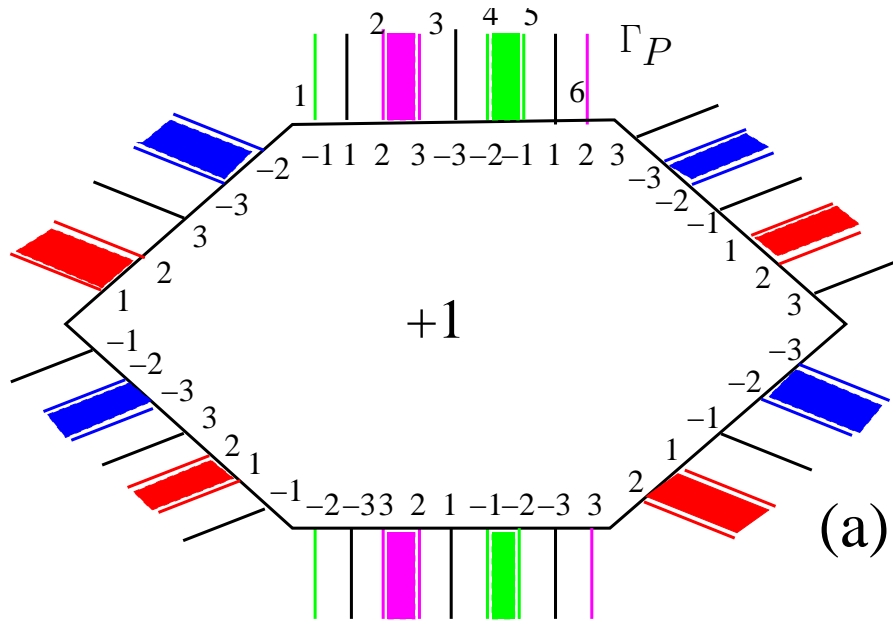


Figura 5.17: $\Delta = 14$ y $\Gamma_P = H(9, 7, 5)$.

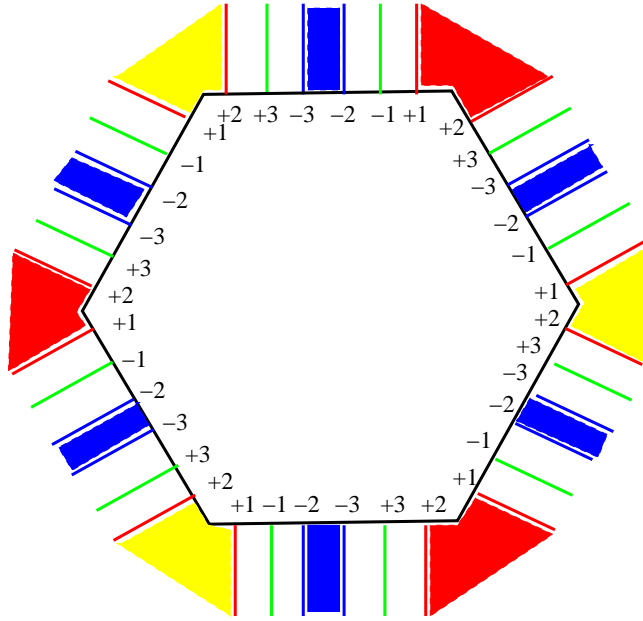


Figura 5.18: $\Delta = 12$ y $\Gamma_P = H(6, 6, 6)$.

una de estas familias de aristas paralelas define una permutación σ que se descompone en q órbitas de longitud 2 las cuales inducen curvas esenciales en el toro \hat{Q} . Además, nótese que las 3 colecciones de aristas paralelas definen la misma permutación σ , es decir, si una arista tiene etiqueta x en un extremo entonces su etiqueta en el otro extremo es $\sigma(x)$.

Sea $S = \{e_1, \dots, e_{2q}\}$ una de las 3 colecciones de $2q$ aristas paralelas de Γ_P y supóngase que cada arista tiene etiquetas en sus extremos $\partial e_i = x_i \sqcup y_i$. Ya que el número de etiquetas entre x_q y y_{q+1} es $6q - 1$ respecto de alguna orientación entonces el Lema 5.1.1 implica $x_q = y_{q+1}$ y por tanto $\{e_q, e_{q+1}\}$ acota un S-ciclo. Esto implica que Γ_P tiene 3 S-ciclos con el mismo par de etiquetas con signos. Sin pérdida de generalidad, asumir que los 3 S-ciclos tienen par de etiquetas con signos $(+1, +2)$. Nótese que las 6 aristas inducidas por los S-ciclos conectan los vértices 1 y 2 en Γ_Q . Ahora bien, el Lema 4.1.4 implica que la valencia de cada vértice en la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_Q$ es 4 y que únicamente existen dos colecciones de aristas paralelas que unen los vértices 1 y 2. Entonces $\Delta = 12$ y el Lema 2.2.2 (2) implican que alrededor del vértice 1 en Γ_Q existen 12 aristas divididas en 4 colecciones de 3 aristas paralelas. Ya que 2 de estas 4 colecciones se identifican con las 6 aristas de los S-ciclos y estas tienen los mismos signos positivos entonces en el vértice 1 de Γ_Q aparecen 3 etiquetas $+1$ consecutivas. Esto contradice que las etiquetas $+1$ y -1 deben alternar en cada vértice de Γ_Q . □

Proposición 5.1.9. *Asumiendo las hipótesis del Teorema 10 se tiene que $p = 1$ y $q \geq 2$ implican $\Delta \leq 10$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Lema 5.1.5, Lema 5.1.7 y Lema 5.1.8. □

5.2. Caso $p = 2$ y $q \geq 2$

En esta sección se demuestra el penúltimo caso pendiente para completar la prueba del Teorema 10. Por lo tanto el caso que se demostrará es cuando $p = 2$ y $q \geq 2$. Nótese que el Lema 3.1.4 implica $\Gamma_P = G(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ (ver Figura 3.4).

Lema 5.2.1. *Asumiendo las hipótesis del Teorema 10 se tiene que $p = 2$ y $q \geq 2$ implican $\Delta \leq 10$.*

Demostración. Se procede por contradicción. Si $\Delta > 12$, entonces ya que cada vértice de Γ_Q tiene la misma valencia Δp , aplicando el Lema 3.1.2 con $n = 2p$ a la gráfica Γ_Q , se deduce que Γ_Q tiene $2p + 1$ aristas paralelas lo cual contradice el Lema 4.1.2. Por lo tanto se puede suponer $\Delta = 12$. Luego, ya que $p = 2$, el Lema 3.1.1 y el Lema 4.1.2 implican que cada vértice de la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_Q$ tiene valencia 6 y por tanto $E(\bar{\Gamma}_Q) = 3q$. Esto implica que cada colección de aristas paralelas en Γ_Q tiene exactamente 4 aristas paralelas. El Lema 2.2.2 (2) y el Lema 2.3.2 implican que cada colección de 4 aristas paralelas no induce lazos en Γ_P . Entonces $\Gamma_P = G(3q, 3q, 3q, 3q, 0)$. Luego el Lema 4.1.2 implica $q = 3$. Ahora, asigne etiquetas Tipo B a la gráfica Γ_P . El Lema 2.3.3 (4) y el Lema 3.2.4 (3) implican $12(2) \leq 2N + 4$ de donde $10 \leq N$. Por otra parte, el Corolario 3.2.3 (3) y el Lema 3.2.2 (2) implican que todos los ciclos de Scharlemann de Γ_P son S-ciclos. Entonces el Corolario 3.2.3 (1) implica $N \leq 8$. Ya que esto es una contradicción, entonces $\Delta \leq 10$. □

Capítulo 6

Caso no genérico: $p = 3$ y $q \geq 3$

En este capítulo se demuestra el último caso pendiente para completar la prueba del Teorema 10. Recuerde que M contiene los toros esenciales agujerados $P = \hat{P} \cap M$ y $Q = \hat{P} \cap M$ con número de agujeros p y q , respectivamente. Por lo tanto el caso que se demostrará es cuando $p = 3$ y $q \geq 3$. Así, siempre se asumirá que se tiene un toro esencial con tres agujeros en M y entonces se podrán aplicar los resultados desarrollados en la segunda sección 2 del capítulo 3. El análisis de este último caso se subdivide de manera natural en dos subcasos: $q = 3$ y $q \geq 4$. El subcaso $p = 3 = q$ será el más delicado de analizar.

En este capítulo se adoptará la convención que $\{i, j, k\}$ denotarán los tres vértices de Γ_P . Además, Γ_P^{ij} representará la subgráfica de Γ_P inducida por los vértices i y j con $i \neq j$, $E(\Gamma_P^{ij})$ su número de aristas y $\bar{\Gamma}_P^{ij}$ representará la subgráfica reducida inducida.

6.1. Subcaso: $p = 3 = q$

En esta sección se analiza el caso cuando ambos toros con agujeros P y Q en M tienen exactamente tres agujeros. Notar que el Lema 2.2.2 (1) y el Lema 3.1.1 implican que ambas gráficas reducidas $\bar{\Gamma}_P$ y $\bar{\Gamma}_Q$ tienen a lo más 9 aristas. Por lo tanto ambas gráficas tienen a lo más colecciones de 9 aristas paralelas. El objetivo de la sección es demostrar el Lema 6.1.6.

Lema 6.1.1. *Sea $p = 3 = q$. Entonces se cumple lo siguiente:*

(1) *si Γ_Q no tiene lazos entonces $E(\Gamma_Q^{ij}) = \Delta p/2$ para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$,*

(2) *si $\Gamma_Q = R(w_1, \dots, w_9)$ es la gráfica ilustrada en la Figura 3.8 entonces*

$$w_1 + w_2 + w_3 = w_4 + w_5 + w_6 = w_7 + w_8 + w_9 = \Delta p/2,$$

(3) *si $\Delta = 14$ entonces Γ_P y Γ_Q son las gráficas $R(w_1, \dots, w_9)$ ilustradas en la Figura 3.8.*

Demostración. (1) Sean $x = E(\Gamma_Q^{12})$, $y = E(\Gamma_Q^{23})$ y $z = E(\Gamma_Q^{13})$. Recuerde que cada vértice de Γ_Q tiene valencia Δp . Entonces ya que Γ_Q no tiene lazos al contar el número de etiquetas alrededor de cada vértice se tiene que:

$$x + y = y + z = z + x = \Delta p.$$

Esto implica $x = y = z = \Delta p/2$ al resolver el sistema de ecuaciones.

(2) Se deduce de (1) y del Lema 3.1.5.

(3) Si $\Delta = 14$ ya que cada vértice de Γ_P tiene valencia $3\Delta = 42 > 36$ entonces el Lema 3.1.1 implica que cada vértice de $\bar{\Gamma}_P$ tiene valencia al menos 5. Se afirma que cada vértice de la

gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ tiene valencia exactamente 6. De lo contrario existe un vértice de valencia 5 en $\bar{\Gamma}_P$. Esto implica que Γ_P tiene una colección de 9 aristas paralelas y el Corolario 3.2.3 (3) implica que $\Gamma_Q = R(w_1, \dots, w_9)$. Luego, (2) y el Corolario 3.2.3 (3) implican $5 \leq w_l \leq 8$ para cada $l = 1, 2, 3$. Esto implica que Γ_P no tiene lazos y de (1) se tiene que $E(\Gamma_P^{ij}) = 21$ para cada $i \neq j$. Entonces ya que Γ_P tiene a lo más colecciones de 9 aristas paralelas entonces en la subgráfica reducida inducida se tiene que $E(\bar{\Gamma}_P^{ij}) \geq 3$, es decir, cada vértice en esta subgráfica tiene valencia al menos 3. Ya que esto se cumple para cada $i \neq j$ entonces los vértices de $\bar{\Gamma}_P$ tiene valencia al menos 6, lo cual contradice existe un vértice de valencia 5. Análogamente, se demuestra de la misma manera que los 3 vértices de $\bar{\Gamma}_Q$ tienen valencia 6.

Ahora bien, el Lema 2.3.2 implica que una familia de aristas paralelas en Γ_P se identifica con una colección de lazos en Γ_Q o con una colección de aristas en Γ_Q tal que ninguna es un lazo. Sin embargo, si se corresponde con una colección de lazos entonces el Lema 2.2.2 (2) implica que el número de aristas paralelas es a lo más es 3. Suponer que Γ_Q tiene al menos un lazo. Entonces existe una colección C_1 de aristas paralelas en Γ_P que contiene una arista que se identifica con uno de estos lazos. Sea j algún vértice de Γ_P adyacente a la colección C_1 y sean C_2, \dots, C_6 las otras colecciones de aristas paralelas adyacentes al mismo vértice. Denotar por p_i los pesos de las colecciones C_i , respectivamente. Si todas las colecciones C_i inducen lazos en Γ_Q entonces $p_i \leq 3$ implica que j tiene valencia a lo más 18 lo cual contradice que debe ser 42. Por lo tanto existe una colección que no induce lazos en Γ_Q . Sin pérdida de generalidad suponer que es C_2 . Entonces $p_1 + p_2 \leq 9$ y $p_3, p_4, p_5, p_6 \leq 8$. Esto implica que el vértice j tiene valencia a lo más 41 y de nuevo es una contradicción. Por lo tanto, Γ_Q no tiene lazos y análogamente se demuestra que Γ_P no tiene lazos. Finalmente, el enunciado se obtiene al aplicar el Lema 3.1.5.

□

Lema 6.1.2. *Si $p = 3 = q$ entonces $\Delta \leq 12$.*

Demostración. Asigne etiquetas Tipo B a la gráfica Γ_P y supóngase que $\Delta \geq 16$. Ya que cada vértice de Γ_P tiene valencia $3\Delta \geq 48$ entonces cada vértice de la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ tiene valencia al menos 6 y el Lema 3.1.1 implica que cada vértice de $\bar{\Gamma}_P$ tiene valencia 6. Esto implica que la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_P$ tiene una arista con peso 9 o todas sus aristas tienen peso 8. Por lo tanto Γ_Q no tiene lazos y el Corolario 3.2.3 (2) implica que Γ_P tiene dos S-ciclos con distinto par de etiquetas. Entonces el Lema 3.2.6 (3) implica $\Delta \leq 14$.

Ahora supóngase que $\Delta = 14$. El Lema 6.1.1 (2)-(3) implica que Γ_P tiene una colección de 7 aristas paralelas. Entonces el Lema 3.2.2 (2) y el Corolario 3.2.3 (2) implican que todos los ciclos de Scharlemann de Γ_P son S-ciclos. Además, el Lema 6.1.1 (3) y el Lema 3.2.6 (2) implican $3\Delta = 2N + 2(3)$. Por lo tanto Γ_P tiene $N = 18$ S-ciclos. De hecho, ya que $E(\bar{\Gamma}_P) = 9$ entonces Γ_P tiene 9 S-ciclos con par de etiquetas (1, 2) y 9 S-ciclos con par de etiquetas (2, 3). De manera análoga, al asignar etiquetas Tipo B a Γ_Q se prueba que Γ_Q también tiene 18 S-ciclos. El Lema 6.1.1 (2) implica que en Γ_Q existen 21 aristas entre los vértices 1 y 2 divididos en 3 colecciones de aristas paralelas y lo mismo sucede entre los vértices 2 y 3. Sin embargo, el Lema 3.2.2 (3) implica que alrededor del vértice 2 de Γ_Q llegan 4 colecciones de 9 aristas paralelas y 2 colecciones de 3 aristas paralelas. Ya que las colecciones de 3 aristas paralelas contienen a lo más un S-ciclo esto implica que Γ_Q tiene a lo más 16 S-ciclos lo cual es una contradicción.

□

Lema 6.1.3. *Sea $p = 3 = q$ y $\Delta = 12$. Entonces se cumple lo siguiente:*

- (1) *Los toros con 3 agujeros P y Q son separantes.*

(2) Γ_P y Γ_Q no tienen lazos.

(3) Γ_P (Γ_Q) tiene al menos 15 ciclos de Scharlemann y si todas las caras de Γ_P (Γ_Q) son discos de longitud a lo más 3 entonces Γ_P (Γ_Q) tiene 15 ciclos de Scharlemann.

(4) Γ_P y Γ_Q no tienen ciclos de Scharlemann de longitud ≥ 3 .

Demostración. (1) Asigne etiquetas Tipo B a Γ_P . Entonces el Lema 2.3.3 (4) y el Corolario 3.2.5 (1) implica que Q separa. Análogamente se prueba que P separa al asignar etiquetas Tipo B a Γ_Q .

(2) La demostración se divide en tres casos dependiendo del número posible de lazos. Caso uno: $\bar{\Gamma}_P$ tiene un único lazo en el vértice k . Al cortar el toro \hat{P} por el único lazo se obtiene un anillo con los otros dos vértices i y j en su interior lo cual implica $E(\bar{\Gamma}_P^{ij}) \leq 2$. Entonces el Lema 3.1.1 implica $E(\Gamma_P^{ij}) \leq 18$. Luego, ya que cada vértice tiene valencia 3Δ y el vértice k tiene un lazo entonces $E(\Gamma_P^{ik}) = E(\Gamma_P^{jk}) \leq 17$. Esto implica que los vértices i y j tienen valencia a lo más $17 + 18$. Ya que este número es menor que 3Δ implica contradicción.

Caso dos: $\bar{\Gamma}_P$ tiene dos lazos. Claramente no pueden haber dos lazos en un mismo vértice pues de lo contrario al cortar el toro \hat{P} por los lazos se obtiene un disco donde se puede contradecir el Lema 2.2.2 (2). Entonces supóngase que los lazos se encuentran en los vértices i y j . Al cortar el toro \hat{P} por el lazo en i implica que $E(\bar{\Gamma}_P^{jk}) \leq 2$ y al cortar el toro \hat{P} por el lazo en j implica que $E(\bar{\Gamma}_P^{ik}) \leq 2$. Ya que $\Delta = 12$ entonces el vértice k tiene valencia 4 y las aristas que salen de este vértice tienen peso 9. Luego el Corolario 3.2.3 (3)-(4) implica que Γ_Q no tiene lazos y el Lema 3.2.2 (2) implica que Γ_P solo tiene S-ciclos. Sin embargo, el vértice k está en al menos dos triángulos (ver Figura 6.1). Entonces el Corolario 3.2.3 (3) implica que estos triángulos no tienen esquinas malas y el Lema 3.2.4 (1) implican que Γ_P tiene ciclos de Scharlemann de longitud 3 lo cual es una contradicción.

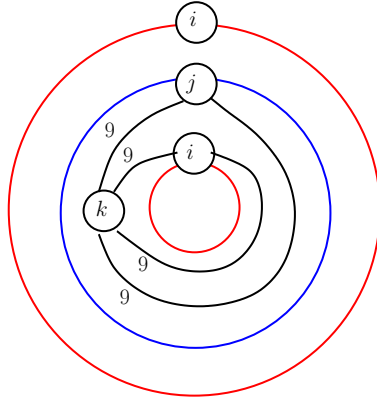


Figura 6.1: $\bar{\Gamma}_P$ con dos lazos.

Caso tres: $\bar{\Gamma}_P$ tiene tres lazos. Nótese que $E(\Gamma_Q) = 9\Delta/2 = 54$. Ahora bién el Lema 3.1.1 implica que $\bar{\Gamma}_P$ tiene a lo más seis aristas que no son lazos. Entonces el Lema 2.3.2 implica que una familia de aristas paralelas en Γ_Q se identifica con una colección de lazos en Γ_P o con una colección de aristas en Γ_Q tal que ninguna es un lazo. Por lo tanto, cada arista en $\bar{\Gamma}_Q$ tiene peso a lo más 6 y existe al menos una arista de peso a lo más 3 la cual induce lazos. Esto implica que $E(\Gamma_Q) \leq 3 + 8(6) = 51$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto Γ_P no tiene lazos y de manera análoga se demuestra que Γ_Q no tiene lazos.

(3) Es inmediato de (1)-(2) y del Lema 3.2.4 (3)-(4).

(4) Supóngase que Γ_P contiene un ciclo de Scharlemann σ de longitud ≥ 3 . El Corolario 3.2.3 (2) implica que cada arista de $\bar{\Gamma}_P$ tiene peso a lo más 6. Luego ya que cada vértice de

Γ_P tiene valencia $3\Delta = 36$ entonces cada vértice de $\bar{\Gamma}_P$ tiene valencia al menos 6. Entonces el Lema 3.1.1 implica que todos los vértices de $\bar{\Gamma}_P$ tiene valencia 6, $E(\bar{\Gamma}_P) = 9$, todas sus aristas tienen peso 6 y las 6 caras de $\bar{\Gamma}_P$ son triángonos. Sea $C = \{e_1, \dots, e_6\}$ una de las colecciones de 6 aristas paralelas en Γ_P . El Lema 3.2.1 (2) implica que las aristas e_3 y e_4 acotan un S-ciclo con par de etiquetas diferentes a las de σ . Esto implica que cada triángono no tiene esquinas malas y el Lema 3.2.4 (1) implica que cada triángono acota un ciclo de Scharlemann. Supóngase que Γ_P tiene 6 ciclos de Scharlemann de longitud 3 con par de etiquetas $(2, 3)$ y 9 S-ciclos con par de etiquetas $(1, 2)$. Los 9 S-ciclos y el Lema 3.2.1 (1) implican que $\bar{\Gamma}_Q$ tiene dos aristas con peso 9. Entonces el Corolario 3.2.3 (2)-(4) implica que Γ_Q contiene únicamente S-ciclos y $\Gamma_P = R(6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6)$. Sin embargo, esto y el Lema 3.2.1 (1) implican que Γ_Q tiene a lo más 12 S-ciclos lo cual contradice (3). Por lo tanto, Γ_P solo tiene S-ciclos y análogamente se prueba que Γ_Q únicamente tiene S-ciclos. \square

En lo que resta de la sección, será conveniente considerar una versión esquemática, Figura 6.2, de la gráfica descrita en el Lema 3.1.5.

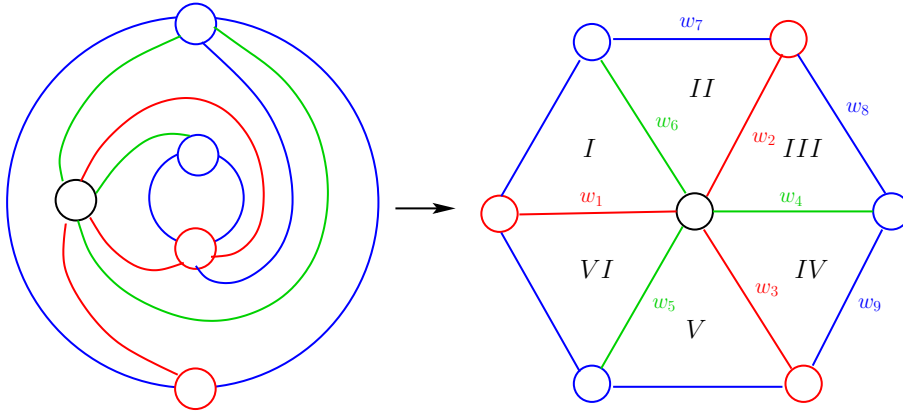


Figura 6.2: $\Gamma_P = R(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9)$.

Lema 6.1.4. *Sea $p = 3 = q$ y sea $\Delta = 12$. Entonces Γ_P y Γ_Q son las gráficas $R(w_1, \dots, w_9)$ ilustradas en la Figura 3.8 o en la Figura 6.2 y cada una contiene 15 S-ciclos. Además, cada gráfica no contiene 9 S-ciclos con el mismo par de etiquetas.*

Demostración. El Lema 6.1.3 (3)-(4) implica que Γ_P y Γ_Q únicamente tienen S-ciclos y sus gráficas reducidas son tales que $8 \leq E(\bar{\Gamma}_P), E(\bar{\Gamma}_Q) \leq 9$. También, Lema 6.1.1(1) y Lema 6.1.3 (2) implican $E(\bar{\Gamma}_P^{ij}) = 18$ para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Se afirma que: $E(\bar{\Gamma}_P) = 9 = E(\bar{\Gamma}_Q)$.

Procediendo por contradicción, supóngase $E(\bar{\Gamma}_P) = 8$. Se demostrará primero que esto implica que $\bar{\Gamma}_P$ es la gráfica de la Figura 6.3 (2) donde x denota una esquina mala.

Asigne etiquetas Tipo B a la gráfica Γ_P . Si $\bar{\Gamma}_P$ tiene un vértice i de valencia 4 entonces $\Delta = 12$ implica que las aristas que salen de ese vértice tienen peso 9. Entonces el Lema 6.1.3 (2) y el Lema 3.1.1 implican que $E(\bar{\Gamma}_P^{ij}) = 2$, $E(\bar{\Gamma}_P^{ik}) = 2$ y $E(\bar{\Gamma}_P^{jk}) = 4$ ya que $E(\bar{\Gamma}_P) = 8$. Al cortar el toro \hat{P} por dos aristas de $\bar{\Gamma}_P^{jk}$ se obtiene un anillo donde es sencillo ver que i está en 4 triángonos. Entonces el Corolario 3.2.3 (3) implica que estos triángonos no tienen esquinas malas. Luego el Lema 6.1.3 (1)-(2) y el Lema 3.2.4 (2) implican que Γ_P tiene ciclos de Scharlemann de longitud 3 lo cual contradice el Lema 6.1.3 (4). Por lo tanto cada vértice de $\bar{\Gamma}_P$ tiene valencia al menos 5 lo cual implica $E(\bar{\Gamma}_P^{ij}) = 3 = E(\bar{\Gamma}_P^{jk})$ y $E(\bar{\Gamma}_P^{jk}) = 2$. Repitiendo las mismas ideas de la prueba del Lema 3.1.5 se deduce que $\bar{\Gamma}_P$ es la gráfica de la Figura 6.3 (1). También, $E(\bar{\Gamma}_P^{jk}) = 2$ implica que las aristas que unen los vértices j y k tienen peso 9. Finalmente, el Corolario 3.2.3

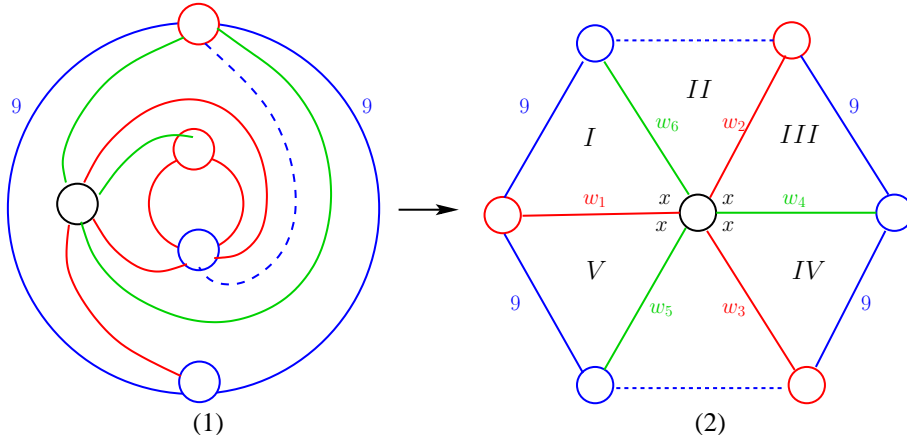


Figura 6.3: $\Gamma_P = R(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, 0, 9, 9)$.

(3) y el Lema 3.2.4 (1)-(2) implican que $\bar{\Gamma}_P$ tiene exactamente dos pesos 9 y que los triángulos I , III , IV y V tienen una esquina mala x como en la Figura 6.3 (2).

Ahora bien, $q = 3$ implica que las esquinas malas se repiten en múltiplos de 3 alrededor de cada vértice de donde $w_1, w_4 \in \{3, 6\}$, $w_2 + w_6 \equiv 0 \pmod{3}$ y $w_3 + w_5 \equiv 0 \pmod{3}$. Además, ya que una colección de 3 aristas paralelas contiene a lo más un S-ciclo entonces el Lema 6.1.3 (3) implica $\{w_1, w_4\} = \{3, 6\}$ o $\{w_1, w_4\} = \{6\}$. Por lo tanto las ternas (w_1, w_2, w_3) y (w_4, w_5, w_6) están en el conjunto:

$$\{(3, 8, 7), (3, 7, 8), (6, 8, 4), (6, 4, 8), (6, 7, 5), (6, 5, 7), (6, 6, 6)\}.$$

También, el Lema 6.1.3 (1) implica que los triángulos I y IV tienen distinta coloración. Entonces w_2 y w_5 tienen distinta paridad ya que son adyacentes a la cara II . Análogamente, w_3 y w_6 tienen distinta paridad. Por lo tanto, las restricciones anteriores sobre los pesos de las aristas de $\bar{\Gamma}_P$ implican que las únicas opciones permitidas son:

$$\Gamma_P = R(6, 8, 4, 6, 5, 7, 0, 9, 9)$$

$$\Gamma_P = R(6, 5, 7, 6, 8, 4, 0, 9, 9)$$

$$\Gamma_P = R(6, 4, 8, 6, 7, 5, 0, 9, 9)$$

$$\Gamma_P = R(6, 7, 5, 6, 4, 8, 0, 9, 9)$$

Las cuatro gráficas anteriores son isomorfas de modo que sin pérdida de generalidad se asume que $\Gamma_P = R(6, 8, 4, 6, 5, 7, 0, 9, 9)$. Nótese que esta gráfica contiene una colección de 4 aristas paralelas y esta colección contiene un único S-ciclo por el Lema 2.3.3 (5). Entonces el Lema 6.1.3 (3) implica que Γ_P tiene exactamente 15 S-ciclos y todos los pesos distintos a 4 contienen dos S-ciclos por el Corolario 3.2.3 (1). Esto implica que la arista de peso 5 está representada por alguna de las colecciones de la Figura 6.4. También, ya que Γ_P tiene 46 bígonos, de los cuáles 15 son S-ciclos, y 3Δ esquinas malas entonces el Lema 3.2.4 (1)-(2) implica que la cara II contiene exactamente una esquina mala y debe ser adyacente a la arista de peso 5 como se ilustra en la Figura 6.5.

La esquina mala del triángulo IV implica que el bígono adyacente a la cara II inducido por la arista de peso 4 tiene una esquina mala. También, la posición de la esquina mala en la cara II implica que hay una esquina mala entre la segunda y tercera arista de la colección de 4 aristas paralelas. Por lo tanto el S-ciclo inducido por la arista de peso 4 es adyacente al triángulo IV . Sin pérdida de generalidad se puede suponer que este S-ciclo tiene etiquetas $(+1, +2)$

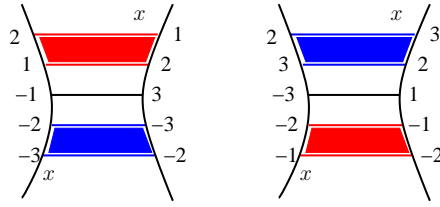
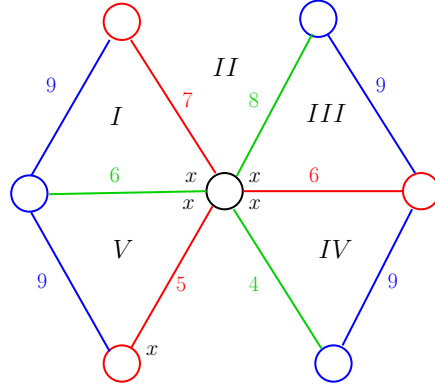


Figura 6.4: 5-colecciones con dos S-ciclos.

Figura 6.5: $R(6, 8, 4, 6, 5, 7, 0, 9, 9)$.

Tipo B ya que en los otros casos se puede proceder de manera análoga. Esto y el Corolario 3.2.3 (3) determinan las etiquetas de la colección de 9 aristas paralelas adyacente al triángulo IV como se ilustra en la Figura 6.6. Sin embargo, esto implica que la colección de 5 aristas paralelas contiene un único S-ciclo y por lo tanto Γ_P contiene 14 S-ciclos. Ya que esto es una contradicción entonces $\Gamma_P = R(6, 8, 4, 6, 5, 7, 0, 9, 9)$ no es realizable. Por lo tanto $E(\bar{\Gamma}_P) = 9$ y de la misma manera se prueba que $E(\bar{\Gamma}_Q) = 9$.

Ahora se probará que los vértices de $\bar{\Gamma}_P$ y $\bar{\Gamma}_Q$ tienen valencia 6. Nótese que el Lema 6.1.1 (1) implica $E(\Gamma_P^{ij}) = 18$ para cada $i, j = 1, 2, 3$ de donde $E(\bar{\Gamma}_P^{ij}) \geq 2$. Procediendo por contradicción, supóngase que $\bar{\Gamma}_P$ tiene un vértice de valencia 4 o 5. Caso uno: $\bar{\Gamma}_P$ tiene un vértice k de valencia 4. Entonces $E(\bar{\Gamma}_P) = 9$ y el Lema 6.1.3 (2) implican $E(\bar{\Gamma}_P^{ij}) = 5$, $E(\bar{\Gamma}_P^{ik}) = 2 = E(\bar{\Gamma}_P^{jk})$. Caso dos: $\bar{\Gamma}_P$ tiene un vértice k de valencia 5. Entonces $E(\bar{\Gamma}_P) = 9$ y el Lema 6.1.3 (2) implican $E(\bar{\Gamma}_P^{ij}) = 4$, $E(\bar{\Gamma}_P^{ik}) = 2$ y $E(\bar{\Gamma}_P^{jk}) = 3$. En cualesquiera de los dos casos al cortar el toro \hat{P} por las dos aristas de $\bar{\Gamma}_P^{ik}$ se obtiene un anillo con el vértice j en su interior donde es fácil ver que se contradice el Lema 2.2.2 (2). Por lo tanto $\bar{\Gamma}_P$ tiene todos sus vértices de valencia 6 y el Lema 3.1.5 implica que $\Gamma_P = R(w_1, \dots, w_9)$. Análogamente, se prueba que Γ_Q tiene las mismas propiedades. Luego el Lema 6.1.3 (3) implica que Γ_P y Γ_Q tienen 15 S-ciclos. Finalmente, si Γ_Q tiene 9 S-ciclos con el mismo par de etiquetas entonces el Lema 3.2.1 (1) implica que $E(\bar{\Gamma}_P^{12}) = 2$ o $E(\bar{\Gamma}_P^{23}) = 2$ y por lo tanto $E(\bar{\Gamma}_P) < 9$. Análogamente, Γ_P no tiene 9 S-ciclos con el mismo par de etiquetas. \square

Lema 6.1.5. *Supóngase $p = 3 = q$, F de género 2 y $\Delta = 12$ entonces:*

- (1) *Si Γ_Q tiene 8 S-ciclos con par de etiquetas (1, 2) y 7 S-ciclos con par de etiquetas (2, 3) entonces Γ_P es la gráfica de la Figura 6.7 donde las etiquetas x denotan esquinas malas.*
- (2) *Si Γ_Q tiene 8 S-ciclos con par de etiquetas (2, 3) y 7 S-ciclos con par de etiquetas (1, 2) entonces Γ_P es la gráfica de la Figura 6.8 donde las etiquetas x denotan esquinas malas.*

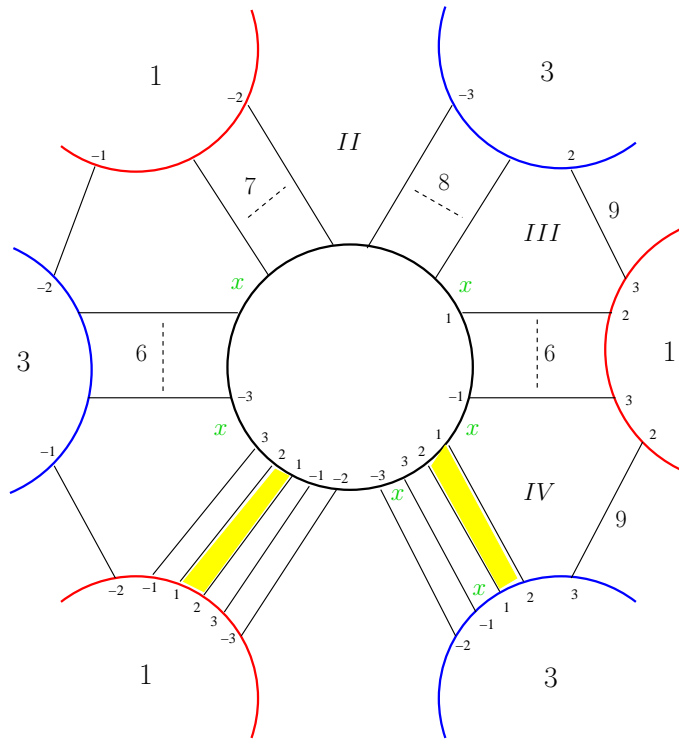


Figura 6.6: $R(6, 8, 4, 6, 5, 7, 0, 9, 9)$.

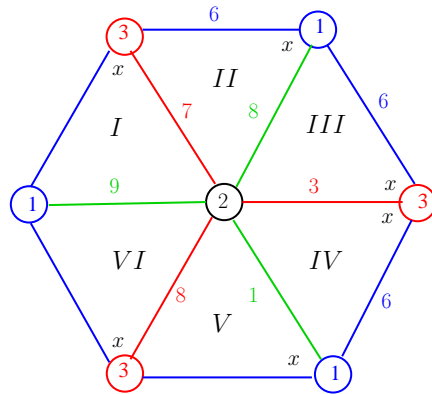


Figura 6.7: $\Gamma_P = R(9, 8, 1, 3, 8, 7, 6, 6, 6)$.

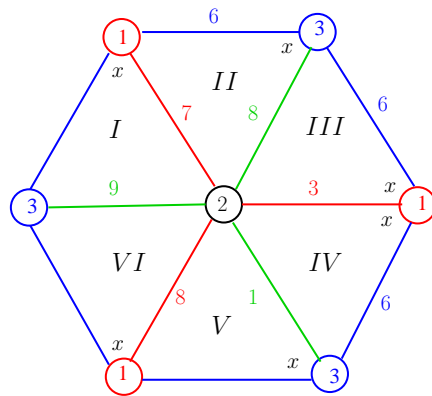


Figura 6.8: $\Gamma_P = R(9, 8, 1, 3, 8, 7, 6, 6, 6)$.

Demostración. El Lema 6.1.4 implica que $\Gamma_P = R(w_1, \dots, w_9)$, la gráfica ilustrada en la Figura 6.2, y el Lema 6.1.1 (2) implica $w_1 + w_2 + w_3 = w_4 + w_5 + w_6 = w_7 + w_8 + w_9 = 18$. También, el Lema 6.1.3 (1)-(2) y el Lema 3.2.4 (2) implican que cada triángulo tiene una esquina mala.

Afirmación 1: con la notación de la Figura 6.2 se tiene que:

$$\begin{aligned} w_1 + w_5 + w_6 &\equiv w_7 \pmod{2}, \\ w_1 + w_2 + w_6 &\equiv w_8 \pmod{2}, \\ w_1 + w_3 + w_5 &\equiv w_9 \pmod{2}. \end{aligned}$$

La primera congruencia es consecuencia del Lema 6.1.3 (1) y que los triángulos II y V tienen la misma o distinta coloración. Análogamente las otras congruencias.

Afirmación 2: una arista de peso 9 de $\bar{\Gamma}_P$ no es adyacente a esquinas malas y una arista de peso 8 es adyacente a exactamente una esquina mala. Ambos enunciados son consecuencia del Corolario 3.2.3 (3).

(1) Supóngase que Γ_Q tiene 8 S-ciclos con par de etiquetas (1, 2) y 7 S-ciclos con par de etiquetas (2, 3). Los 8 S-ciclos (1, 2) y el Lema 3.2.1 (1) implican que la subgráfica $\bar{\Gamma}_P^{12}$ tiene dos aristas con peso al menos 8. Así, las únicas posibilidades (módulo permutaciones) para (w_1, w_2, w_3) son: (9, 8, 1) o (8, 8, 2) por el Lema 6.1.1 (2). Análogamente, la subgráfica $\bar{\Gamma}_P^{23}$ tiene dos aristas con pesos al menos 7 lo cual implica que las únicas posibilidades (módulo permutaciones) para (w_4, w_5, w_6) son: (9, 8, 1), (9, 7, 2), (8, 8, 2), (8, 7, 3) o (7, 7, 4). Ahora bien, ya que Γ_P tiene 15 S-ciclos entonces no tiene dos aristas de peso 1. Por lo tanto será conveniente organizar el resto de la demostración en los siguientes ocho casos que dependen de las posibilidades de las ternas (w_1, w_2, w_3) y (w_4, w_5, w_6) . De hecho, se demostrará que la única posibilidad para Γ_P es sólo una gráfica en el caso (III).

(I) $(9, 8, 1) - (9, 7, 2) - (w_7, w_8, w_9)$ módulo permutaciones en cada terna. La afirmación 2 implica que las aristas de peso 9 no son adyacentes ya que de lo contrario el triángulo inducido no tendría esquina mala. Esto y el Lema 3.2.2 (3) implican que solo existe una configuración para Γ_P la cual se ilustra en la Figura 6.9. También, la afirmación 2 determina la esquina mala en los triángulos I, III, IV y VI . Luego la arista de peso 8 determina la esquina mala del triángulo II . Esto implica que la arista de peso 7 es adyacente a dos esquinas malas en un mismo vértice lo cual es una contradicción ya que entre dos esquinas malas existe un peso múltiplo de 3. Por lo tanto este caso no sucede.

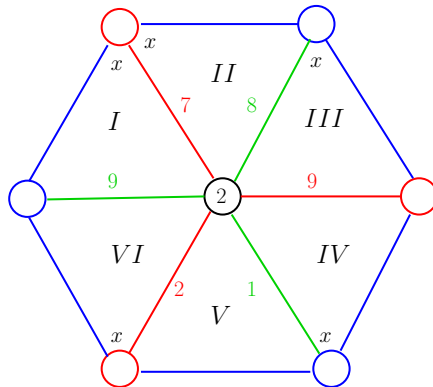


Figura 6.9: $(9, 8, 1) - (9, 7, 2) - (w_7, w_8, w_9)$.

(II) $(9, 8, 1) - (8, 8, 2) - (w_7, w_8, w_9)$ módulo permutaciones en cada terna. El Lema 3.2.2 (3) implica que solo existen dos posibilidades para Γ_P ilustradas en la Figura 6.10. La afirmación 1 implica w_8 impar y ya que Γ_P tiene 15 S-ciclos entonces $w_i \geq 5$ para cada $i = 7, 8, 9$. Así,

(w_7, w_8, w_9) es alguna de las ternas $(8, 5, 5)$, $(7, 6, 5)$ o $(6, 6, 6)$ módulo permutaciones. Por lo tanto $w_8 \in \{5, 7\}$. La afirmación 2 determina la posición de las esquinas malas en los triángulos I, II, III y VI . Esto implica que la arista w_8 es adyacente a dos esquinas malas en un vértice y por lo tanto debe ser múltiplo de 3. Ya que esto es una contradicción entonces este caso no sucede.

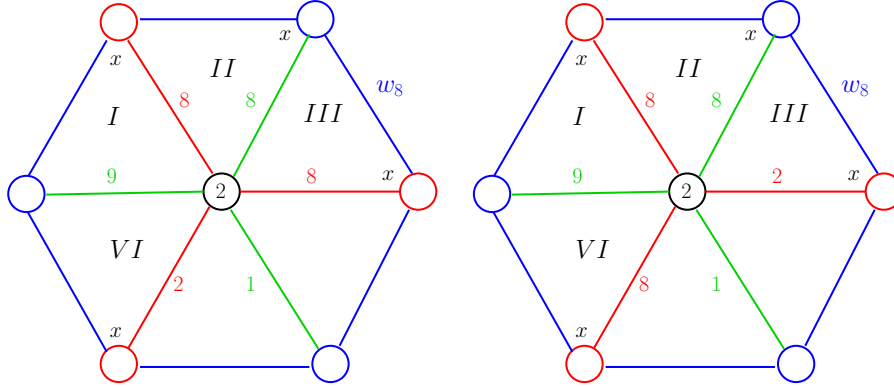


Figura 6.10: $(9, 8, 1) - (8, 8, 2) - (w_7, w_8, w_9)$.

(III) $(9, 8, 1) - (8, 7, 3) - (w_7, w_8, w_9)$ módulo permutaciones en cada terna. El Lema 3.2.2 (3) implica que existen 4 posibilidades para Γ_P ilustradas en la Figura 6.11. Luego ya que Γ_P tiene 15 S-ciclos entonces $w_i \geq 5$ para cada $i = 7, 8, 9$. Así, (w_7, w_8, w_9) es alguna de las ternas $(8, 5, 5)$, $(7, 6, 5)$ o $(6, 6, 6)$ módulo permutaciones. Nótese que la afirmación 2 determina las posiciones de las esquinas malas en los triángulos I y VI en los 4 casos. Ahora bien, en los subcasos (2) y (4) ilustrados en la Figura 6.11, también la afirmación 2 determina las esquinas malas en los triángulos II y III al usar las aristas de peso 8. Por otra parte, la afirmación 1 implica w_8 impar y como es adyacente a dos esquinas malas entonces $w_8 \in \{3, 9\}$ lo cual no puede ser. Por lo tanto estos subcasos no suceden.

En el subcaso (1), se tiene que la esquina mala en los triángulos I y V implican $7 + w_7 \equiv 0 \pmod{3}$. Ya que w_7 es impar por la afirmación 1 entonces $w_7 = 5$. Además, ya que Γ_P tiene 15 S-ciclos entonces w_7 contiene 2 S-ciclos y esto determina la posición de la esquina mala en el triángulo II (ver Figura 6.4). De nuevo, la afirmación 2 y las aristas de peso 8 determinan las esquinas malas en los triángulos III y IV . También, ya que la arista de peso 3 tiene un S-ciclo entonces se pueden presentar dos casos. Caso uno: la arista de peso 3 tiene S-ciclo adyacente al triángulo VI . Esto implica que el triángulo II tenga una esquina mala en el vértice 2 lo cual no puede ser. Caso dos: la arista de peso 3 tiene S-ciclo adyacente al triángulo V . Esto implica que el triángulo IV tiene una esquina mala en el vértice 2 lo cual es imposible. Por lo tanto la configuración (1) tampoco sucede.

Finalmente, en el subcaso (3), la afirmación 1 implica w_7, w_8 y w_9 pares de donde $w_7 = w_8 = w_9 = 6$. Luego la afirmación 2 determina las esquinas malas en los restantes triángulos y esta configuración si puede existir y de hecho es la que se ilustra en la Figura 6.7.

(IV) $(9, 8, 1) - (7, 7, 4) - (w_7, w_8, w_9)$ módulo permutaciones en cada terna. El Lema 3.2.2 (3) implica que existen 2 posibilidades para Γ_P ilustradas en la Figura 6.12. Luego ya que Γ_P tiene 15 S-ciclos entonces $w_i \geq 5$ para cada $i = 7, 8, 9$. Así, (w_7, w_8, w_9) es alguna de las ternas $(8, 5, 5)$, $(7, 6, 5)$ o $(6, 6, 6)$ módulo permutaciones. La afirmación 2 determina las esquinas malas en los triángulos I y VI . En el subcaso (1), se tiene que $7 + w_7 + 4 \equiv 0 \pmod{3}$. Sin embargo, la afirmación 1 implica $w_7 \in \{6, 8\}$ lo cual es una contradicción. En el subcaso (2), la afirmación 1 implica $w_7 \in \{5, 7\}$. Análogamente, $7 + w_7 + 7 \equiv 0 \pmod{3}$ lo cual implica $w_7 = 7$. Luego la afirmación 1 implica $w_9 = 5$. Ya que w_9 tiene dos S-ciclos esto determina la esquina mala

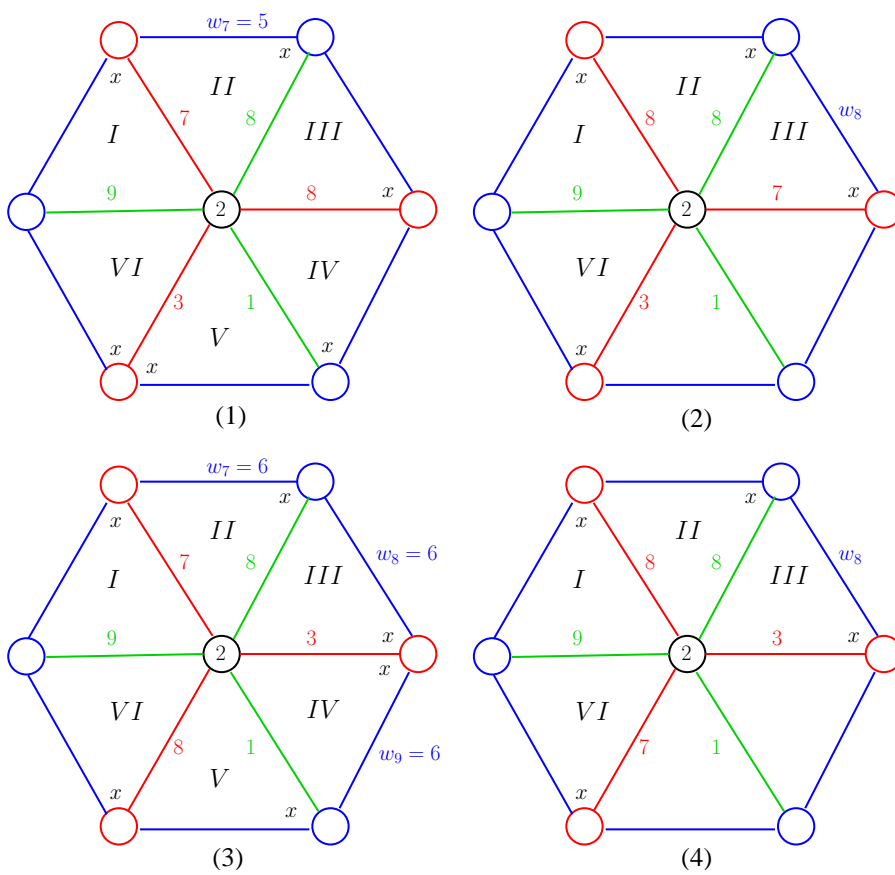


Figura 6.11: $(9, 8, 1) - (8, 7, 3) - (w_7, w_8, w_9)$.

en el triángulo IV (ver Figura 6.4 (2)). Ahora bien, las esquinas malas en los triángulos I y IV junto con que $7 \not\equiv 0 \not\equiv w_7 + 1 \pmod{3}$ implican que el triángulo II tiene una esquina mala en el vértice 2. Finalmente, ya que $8 + 4 \equiv 0 \pmod{3}$ implica que el triángulo IV tiene dos esquinas malas lo cual es imposible. Por lo tanto este caso no sucede.

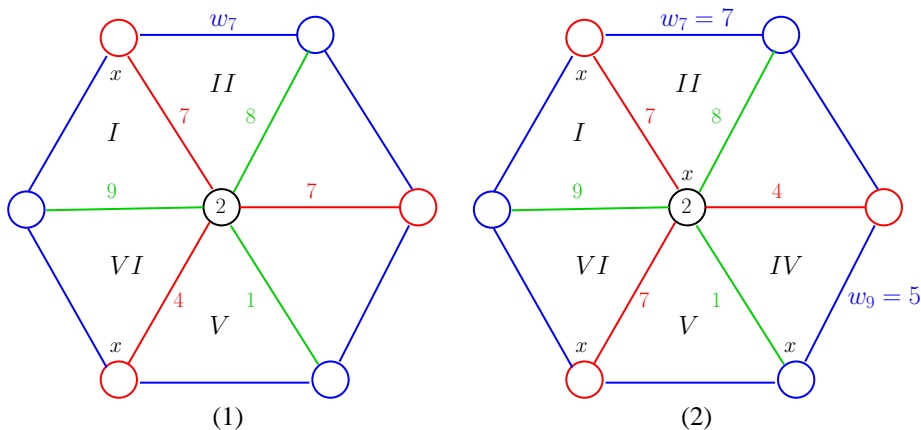


Figura 6.12: $(9, 8, 1) - (7, 7, 4) - (w_7, w_8, w_9)$.

(V) $(8, 8, 2) - (9, 7, 2) - (w_7, w_8, w_9)$ módulo permutaciones en cada terna. El Lema 3.2.2 (3) implica que existen 2 posibilidades para Γ_P , salvo isomorfismo, ilustradas en la Figura 6.13. En el subcaso (1), la afirmación 2 determina las esquinas malas en los triángulos I , II , III y VI . Las esquinas malas en los triángulos I y II implican $8 + w_8 + 8 \equiv 0 \pmod{3}$. Entonces la afirmación 1 implica w_8 impar de donde $w_8 = 5$. Luego, ya que w_8 es adyacente a dos esquinas malas alrededor de un vértice entonces $w_8 \equiv 0 \pmod{3}$, lo cual es una contradicción. En el subcaso (2), la afirmación 2 determina las esquinas malas en los triángulos II , III y IV . La esquina mala en los triángulos III y IV implica $2 + w_7 + 8 \equiv 0 \pmod{3}$. Entonces la afirmación 1 implica $w_7 = 5$. Luego el triángulo V tiene una esquina mala en el vértice 2 lo cual implica que el triángulo VI tiene una esquina mala en el vértice 1. Ya que w_8 es adyacente a dos esquinas malas alrededor de un vértice entonces $w_8 = 3$ por la afirmación 1. Esto implica $w_9 = 10$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto este caso no sucede.

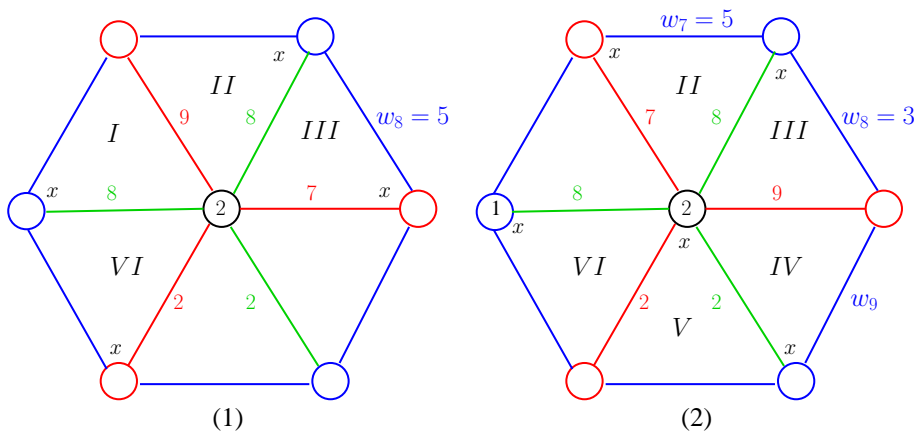


Figura 6.13: $(8, 8, 2) - (9, 7, 2) - (w_7, w_8, w_9)$.

(VI) $(8, 8, 2) - (8, 8, 2) - (w_7, w_8, w_9)$ módulo permutaciones en cada terna. El Lema 3.2.2 (3) implica que solo existe una posibilidad para Γ_P . Esto implica que las aristas de peso 2 son adyacentes en el vértice 2 y cada arista de peso 2 induce 3 esquinas consecutivas en el vértice

2. Ya que en tres esquinas consecutivas hay una esquina mala entonces algunos de los bígono inducidos por estas aristas de peso 2 tiene una esquina mala en el vértice 2 o el triángulo V tiene una esquina mala en el vértice 2. Supóngase que el bígono que une el vértice 2 con el 3 tiene una esquina mala en el vértice 2 (ver Figura 6.14 (1)). Esto implica que los triángulos I y IV tengan esquina mala en el vértice 2 y la afirmación 2 determina la esquina mala en los triángulos II y III . Luego existe una arista de peso 8 con dos esquinas malas de ambos lados lo cual contradice la afirmación 2. De la misma manera se puede probar que el bígono que une los vértices 1 y 2 no tiene esquina mala en el vértice 2. Por lo tanto el triángulo V tiene una esquina mala en el vértice 2. Esto implica que el triángulo II tiene esquina mala en el vértice 2 y la afirmación 2 determina la esquina mala en los restantes triángulos (ver Figura 6.14 (2)). Entonces el Lema 6.1.3 (1) implica que la esquina mala en los triángulos IV , V y VI es la misma de donde las aristas de peso 2 acotan S-ciclos con el mismo par de etiquetas. Luego es fácil convencerse que la arista w_7 induce lazos en Γ_Q lo cual contradice el Lema 6.1.3 (2). Por lo tanto este caso no sucede.

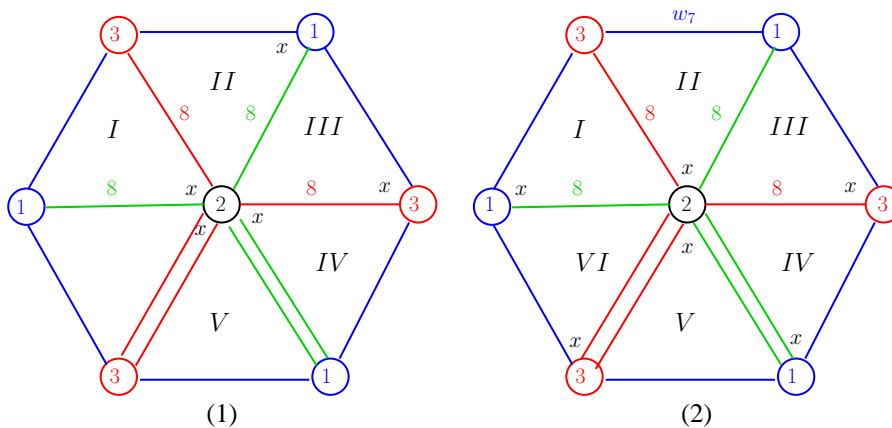


Figura 6.14: $(8, 8, 2) - (8, 8, 2) - (w_7, w_8, w_9)$.

(VII) $(8, 8, 2) - (8, 7, 3) - (w_7, w_8, w_9)$ módulo permutaciones en cada terna. El Lema 3.2.2 (3) implica que existen 2 posibilidades para Γ_P , salvo isomorfismo, ilustradas en la Figura 6.15. Sea D el bígono entre el vértice 1 y 2. Ya que en tres esquinas consecutivas existe una esquina mala entonces el bígono D , el triángulo IV o el triángulo V tiene una esquina mala en el vértice 2. Caso 1: Γ_P es la gráfica ilustrada en la Figura 6.15 (1). Si D tiene esquina mala en el vértice 2 entonces la afirmación 2 determina la esquina mala en todos los triángulos como se ilustra en la Figura 6.16 (1). Ya que Γ_P tiene 15 S-ciclos, la afirmación 1 implica $w_7 = 6$, $w_8 = 5$ o $w_9 = 5$ donde cada uno de estos tres pesos contiene dos S-ciclos. Sin embargo, esto contradice que la arista de peso 5 debe ser adyacente a dos esquinas malas (ver Figura 6.4).

Si el triángulo IV tiene esquina mala en el vértice 2 entonces la afirmación 2 determina la esquina mala en todos los triángulos y D como se ilustra en la Figura 6.16 (2). Luego ya que Γ_P tiene 15 S-ciclos, la afirmación 1 implica $w_7 = 6$, $w_8 = 5$ y $w_9 = 7$. Sin embargo, la esquina mala en los triángulos I y III implica $5 + 8 \equiv 0 \pmod{3}$, lo cual es una contradicción.

Si el triángulo V tiene una esquina mala en el vértice 2 la afirmación 2 determina la esquina mala en los triángulos y es sencillo verificar que únicamente existen dos posibilidades para Γ_P ilustradas en la Figura 6.17. En el subcaso (1), la esquina mala en los triángulos II y V implica que $w_7 = 4$ contiene un bígono con dos esquinas malas lo cual contradice el Lema 3.2.4 (2). En el subcaso (2), la esquina mala en el triángulo II implica que $w_7 = 6$ contiene un único S-ciclo. Luego como Γ_P tiene 15 S-ciclos entonces $w_8 = 5$ contiene dos S-ciclos. Sin embargo, esto contradice que dicha colección debe ser adyacente a dos esquinas malas (ver Figura 6.4).

Por lo tanto el caso 1 no sucede.

Caso 2: Γ_P es la gráfica ilustrada en la Figura 6.15 (2). Se demuestra de manera análoga y tampoco este caso sucede.

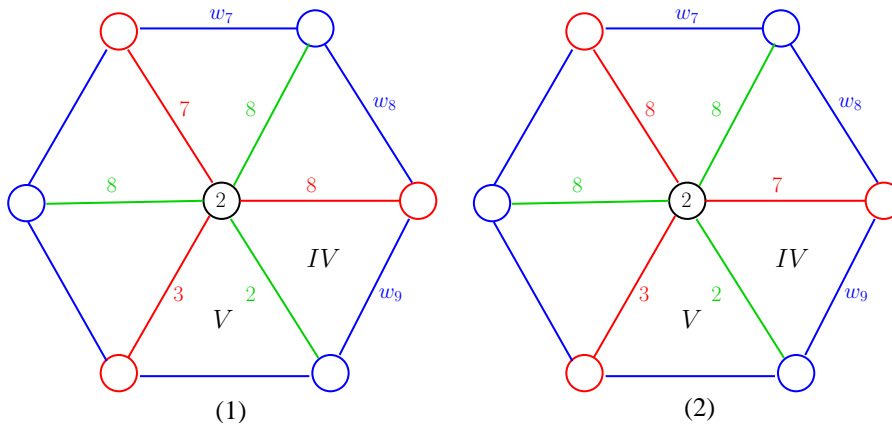


Figura 6.15: $(8, 8, 2) - (8, 3, 7) - (w_7, w_8, w_9)$.

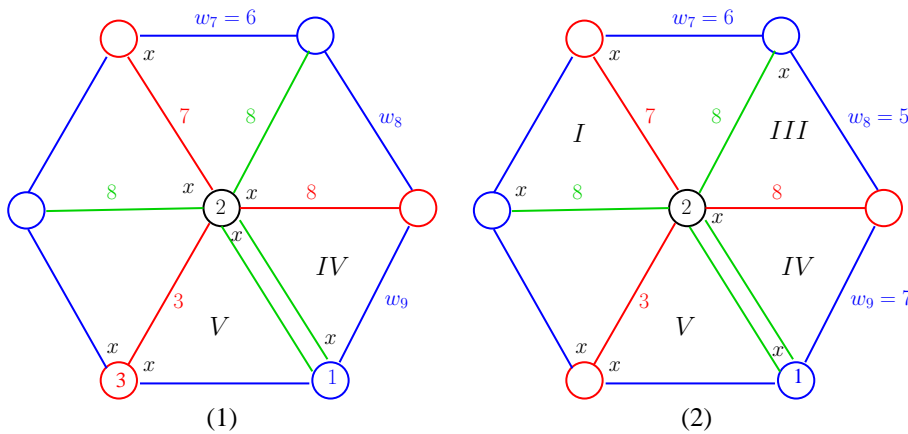


Figura 6.16: $(8, 8, 2) - (8, 3, 7) - (w_7, w_8, w_9)$.

(VIII) $(8, 8, 2) - (7, 7, 4) - (w_7, w_8, w_9)$ módulo permutaciones en cada terna. El Lema 3.2.2 (3) implica que solo existe una posibilidad para Γ_P , salvo isomorfismo de gráficas. Ahora bien, se pueden presentar dos subcasos. Subcaso uno: la arista de peso 2 entre los vértices 1 y 2 no contiene S-ciclo. Entonces el bígono que induce tiene una esquina mala y supongamos que se encuentra en el vértice 2 ya que si se encuentra en el vértice 1 la prueba es análoga. Luego ya que en tres esquinas consecutivas hay una esquina mala entonces el triángulo IV o el V tiene esquina mala en el vértice 1. Supóngase que el triángulo IV tiene esquina mala en el vértice 1. Esto implica que el triángulo V tiene esquina mala en el vértice 3 lo cual determina las esquinas mala en los restantes triángulos por la afirmación 2 (ver Figura 6.18 (1)). Luego ya que Γ_P tiene 15 S-ciclos, la afirmación 1 implica $w_9 \in \{6, 8\}$. Si $w_9 = 6$ el triángulo I tiene dos esquinas malas y si $w_9 = 8$ se contradice la afirmación 2. Por lo tanto esta gráfica no sucede y de manera análoga se puede probar que si el triángulo V tiene esquina mala en el vértice 1 también habrá contradicción.

Subcaso dos: la arista de peso 2 entre los vértices 1 y 2 contiene S-ciclo. Entonces adyacente al S-ciclo hay dos esquinas malas, una en cada vértice. Sin pérdida de generalidad supóngase que el triángulo IV tiene esquina mala en el vértice 2 y que el triángulo V tiene esquina mala en

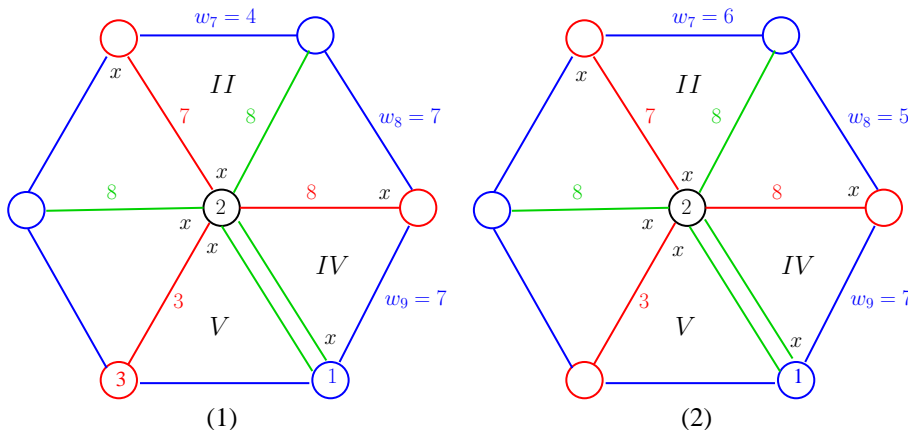


Figura 6.17: $(8, 8, 2) - (8, 3, 7) - (w_7, w_8, w_9)$.

el vértice 1. La afirmación 2 determina la esquina mala de los restantes triángulos (ver Figura 6.18 (2)). Ya que Γ_P tiene 15 S-ciclos, la afirmación 1 implica $w_7, w_8 \in \{5, 7\}$ y $w_9 \in \{4, 8\}$. Además, $7 + w_9 \equiv 0 \pmod{3}$ implica $w_9 = 8$ y por tanto $w_7 = 5 = w_8$. Sin embargo, esto implica que las aristas de peso 5 no contienen dos S-ciclos (ver Figura 6.4) y entonces Γ_P tiene a lo más 14 S-ciclos lo cual contradice las hipótesis.

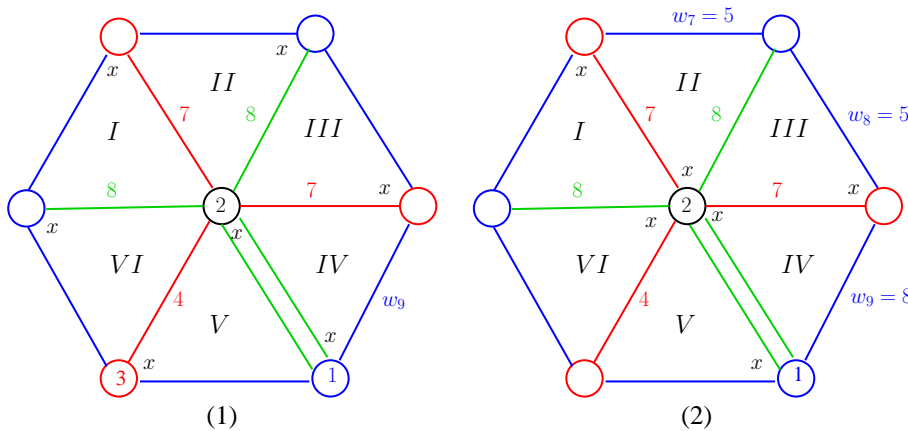


Figura 6.18: $(8, 8, 2) - (7, 7, 4) - (w_7, w_8, w_9)$.

(2) Supóngase que Γ_Q tiene 8 S-ciclos con par de etiquetas $(2, 3)$ y 7 S-ciclos con par de etiquetas $(1, 2)$. El argumento es el mismo que en (1). □

Lema 6.1.6. Si $p = 3 = q$ entonces $\Delta \leq 10$.

Demostración. El Lema 6.1.2 y el Corolario 3.2.5 (2) implican que se puede suponer que F tiene género dos y $\Delta = 12$. Ahora bien, el Lema 6.1.4 implica que se pueden presentar dos casos.

Caso uno: Γ_Q tiene 8 S-ciclos con par de etiquetas $(1, 2)$ y 7 S-ciclos con par de etiquetas $(2, 3)$. El Lema 6.1.5 (1) implica $\Gamma_P = R(9, 8, 1, 3, 8, 7, 6, 6, 6)$ (ver Figura 6.7) y el Lema 6.1.4 implica que la arista de peso 3 tiene un S-ciclo σ . Si σ es adyacente al triángulo IV entonces el triángulo V tendría dos esquinas malas lo cual contradice el Lema 3.2.4 (2). Por lo tanto, σ es adyacente al triángulo III . Sin pérdida de generalidad, supóngase que dicho S-ciclo tiene etiquetas $(-1, -2)$ Tipo B (ver Figura 6.19). Ahora bien, nótese que la colección de 9 aristas paralelas en Γ_P tiene un S-ciclo con par de etiquetas $(1, 2)$. Las dos aristas de este S-ciclo y la

arista del triángulo I que une los vértices 1 y 2 tienen las mismas etiquetas. Entonces el Lema 3.2.1 (1) implica que la arista del triángulo I que une los vértices 1 y 2 de Γ_P se identifica con la arista de peso 1 en Γ_Q . Esto implica que la arista de peso 1 en Γ_Q tenga etiqueta 1 en el vértice 2. Sin embargo, esto implica que alguno de los triángulos IV o V en Γ_Q tenga una esquina mala en el vértice 2 lo cual contradice las clasificaciones de las gráficas para Γ_Q descritas en el Lema 6.1.5.

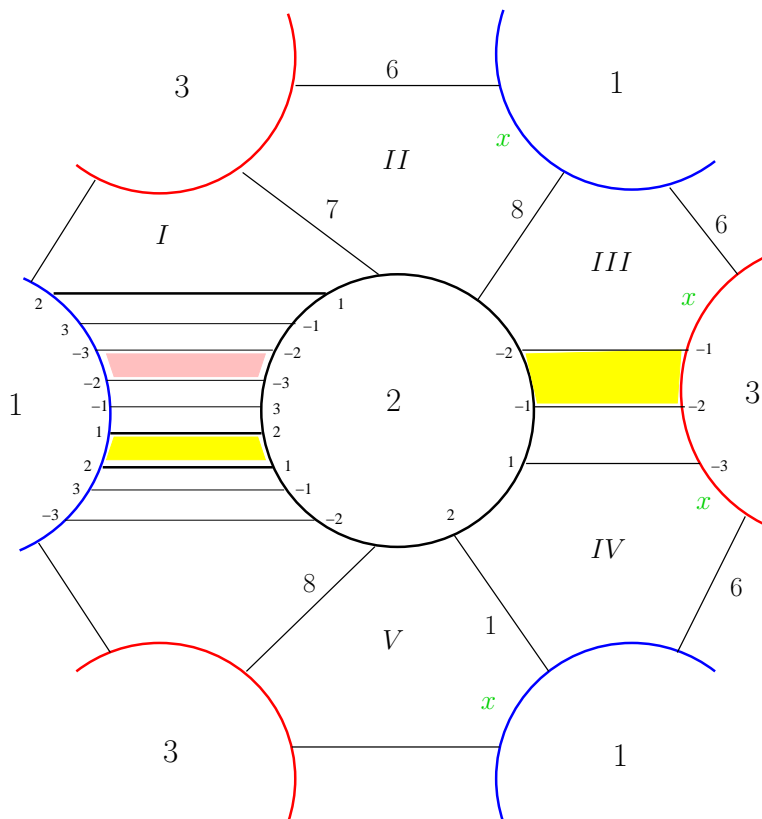


Figura 6.19: $\Gamma_P = R(9, 8, 1, 3, 8, 7, 6, 6, 6)$ con S-ciclo $(-1, -2)$ adyacente al triángulo III .

Caso dos: Γ_Q tiene 7 S-ciclos con par de etiquetas $(1, 2)$ y 8 S-ciclos con par de etiquetas $(2, 3)$. La prueba es análoga al caso 1 al aplicar el Lema 6.1.5 (2) con $\Gamma_P = R(9, 8, 1, 3, 8, 7, 6, 6, 6)$ (ver Figura 6.8). \square

6.2. Subcaso: $p = 3$ y $q \geq 4$

Lema 6.2.1. Si $p = 3$ y $q \geq 4$ entonces $\Delta \leq 10$.

Demostración. Se procede por contradicción. Si $\Delta > 12$, entonces ya que cada vértice de Γ_P tiene la misma valencia Δq , aplicando el Lema 3.1.2 con $n = 2q$ a la gráfica Γ_P , se deduce que Γ_P tiene $2q + 1$ aristas paralelas lo cual contradice el Lema 4.1.2. Por lo tanto se puede suponer $\Delta = 12$. Entonces el Lema 4.1.4 implica $E(\bar{\Gamma}_Q) = 2q$ y de hecho se conoce la gráfica reducida $\bar{\Gamma}_Q$. Luego ya que todos los vértices de $\bar{\Gamma}_Q$ tienen valencia 4 entonces todas las aristas de $\bar{\Gamma}_Q$ tienen peso 9. Entonces el Corolario 3.2.3 (3) implican que Γ_P no tiene lazos. Por lo tanto el Lema 3.2.6 (2) implica $\Delta q \leq 2N + 2q$ donde N denota el número de ciclos de Scharlemann de Γ_Q . Así, se tiene que $5q \leq N$. Por otra parte, el Lema 3.2.2 (2) y el Corolario 3.2.3 (2) implican

que todos los ciclos de Scharlemann de Γ_Q son S-ciclos. Luego ya que $E(\bar{\Gamma}_Q) = 2q$ entonces $N \leq 4q$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\Delta \leq 10$. □

Proposición 6.2.2. *Asumiendo las hipótesis del Teorema 10 se tiene que $p = 3$ y $q \geq 3$ implican $\Delta \leq 10$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Lema 6.1.6 y Lema 6.2.1. □

Capítulo 7

Conclusiones y Trabajo Futuro

En este último capítulo se concluye el trabajo de la tesis con algunos problemas que quedan pendientes de resolver y algunas áreas de oportunidad para trabajos posteriores.

Respecto del Teorema 10 se sospecha que debiera ser posible probar que la distancia $\Delta(\alpha, \beta)$ está acotada por 10 cuando la componente en la frontera F que contiene las pendientes α y β es de género al menos 2, es decir, que la primera y segunda conclusión del Teorema 10 quizá puedan ser eliminadas. Sin embargo, todavía no está claro qué hacer para poder eliminar estas dos conclusiones. No obstante, del trabajo realizado nótese que para eliminar $\Delta(\alpha, \beta) = 18$ basta demostrar que las configuraciones de gráficas de la Figura 5.7 no son realizables para géneros de al menos ocho. Esto se debe a que en el argumento de la demostración del Teorema 10 nunca se usó el género de F excepto en el caso cuando ambos toros esenciales P y Q tienen un agujero y la distancia es 18 o 12.

Por otra parte, la cota $\Delta(\alpha, \beta) \leq 10$ del Corolario 1.0.2 no se sabe si es la óptima, es decir, si 10 es la mínima cota superior para la distancia. Por lo tanto es interesante intentar encontrar ejemplos de 3-variedades M que satisfagan las hipótesis del Corolario 1.0.2 y que realicen alguna distancia. De hecho, hasta la fecha el autor desconoce que se haya descubierto una 3-variedad simple M con dos pegados de 2-asas H_α y H_β donde cada una induzca un toro esencial pero es razonable pensar que han de existir aunque su búsqueda quizá no sea sencilla. Este trabajo en algún sentido sugiere donde intentar buscar los primeros ejemplos como pudiera ser intentar la búsqueda en alguno de los casos no genéricos. Por ejemplo sería interesante intentar una realización de Δ cuando el toro P tiene un único agujero y el otro toro Q tiene 1, 2 o 3 agujeros. Esto se debe a que en los casos anteriores no se tienen tantas aristas y la técnica de intersección transversal para las gráficas con etiquetas describen una especie de esqueleto donde al tomar vecindades regulares (ver Figura 5.8) se puede intentar reconstruir la variedad total M para luego intentar probar si se obtuvo una M simple.

Finalmente, un par de trabajos un poco más lejanos que pudieran intentar resolverse a futuro son los siguientes:

- investigar los casos cuando $M[\alpha]$ y $M[\beta]$ contienen anillos esenciales, o cuando una contiene un anillo esencial y la otra un toro esencial, o cuando una contiene un disco esencial y la otra un toro esencial, etc. (ver Teorema 2) que son casos en que todavía se desconoce una cota para la distancia. Nótese que si \hat{P} (respec. \hat{Q}) es la superficie esencial de característica de Euler no negativa en $M[\alpha]$ (respec. $M[\beta]$) entonces $\partial\hat{P}$ puede intersectar F si \hat{P} es anillo o disco. Esto implica que la intersección transversal de $P \cap Q$ puede ser más delicada de codificar con las gráficas Γ_P y Γ_Q .
- Investigar el caso cuando las pendientes α y β no son necesariamente separantes en F . Nótese que en este caso el control del signado de las etiquetas es más delicado ya que la

intersección entre las pendientes no necesariamente alterna entre $+$ y $-$ en la componente de la frontera F como en el caso separante.

Bibliografía

- [1] A. Hatcher, *Basic Topology of 3-Manifolds*. Disponible en <http://www.math.cornell.edu/hatcher>
- [2] C. McA. Gordon, R. A. Litherland, *Incompressible planar surfaces in 3-manifolds*, Topology Appl. **18** (1984), 121-144.
- [3] C. McA. Gordon, *Boundary slopes of punctured tori in 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 1713-1790.
- [4] C. McA. Gordon, *Dehn filling a survey*, Knot theory (Warsaw), Polish Acad. Sci., (1998), 129-144.
- [5] C. McA. Gordon, Y.Q. Wu, *Annular and boundary reducing Dehn fillings*, Topology **39** (2000), 531-548.
- [6] Eudave-Munõz, *On Nonsimple 3-manifolds and 2-handle addition*, Topology Appl. **55** (1994), 131-152.
- [7] M. Lackenby, R. Meyerhoff, *The maximal number of exceptional Dehn surgeries*, Invent. Math. **191** (2013), 341-382.
- [8] M. Scharlemann, Y.Q. Wu, *Hyperbolic 3-manifolds and degenerating handle additions*, J. Aust. Math. Soc. (Series A) **55** (1993), 72-89.
- [9] M. Zhang, R. Qui, Y. Li, *The distance between two separating reducing slopes is at most 4*, Math. Z. **257** (2007), 799-810.
- [10] M. Zhang, R. Qui, *Reducible and ∂ -reducible handle additions*, Trans. Amer. Math. Soc. Math. **361** (2009), 1867-1884.
- [11] M. Zhang; R. Qui and Y. Li, *Boundary reducible handle additions on Simple 3-manifolds*, Acta Math. **25** (2009), 235-244.
- [12] S. Boyer, X. Zhang, *Reducing Dehn filling and toroidal Dehn filling*, Topology Appl. **68** (1996), 285-303.
- [13] S. Boyer, *Dehn surgery on knots*, Handbook of geometric topology, North-Holland, Amsterdam (2002), 165-218.
- [14] S. Taylor, *Comparing 2-handle to a genus two boundary component*, Trans. Amer. Math. Soc., **366** (2014), 3747-3769.
- [15] Y.Q. Wu, *The reducibility of surgered 3-manifolds*, Topology Appl. **43** (1992), 213-218.
- [16] W. Thurston, *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc **6** (1982), 357-381.