



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CENTROS ORGANIZADORES EN SISTEMAS
CON DOS ESCALAS TEMPORALES: UN
ENFOQUE SINGULAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

SARA RUT CASTIBLANCO MONGUI

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. ALESSIO FRANCI

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MEXICO

2016





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del jurado

1. Datos del alumno

Castiblanco

Mongui

Sara Rut

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

407490448

2. Datos del tutor

Dr.

Alessio

Franci

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Pablo

Padilla

Longoria

4. Datos del sinodal 2

M. en C.

Miguel

Lara

Aparicio

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Marco
Arieli
Herrera
Valdez

6. Datos del sinodal 4

Dra.
Maria de Lourdes
Esteva
Peralta

7. Datos del trabajo escrito.

Centros organizadores en sistemas con dos escalas temporales:
Un enfoque singular.
79 p
2016

Resumen

Motivados por el modelado de comportamientos dinámicos con múltiples escalas temporales, típicos de sistemas biológicos, integraremos dos teorías clásicas (la teoría de singularidades y la teoría geométrica de perturbaciones singulares) para estudiar el comportamiento global de una clase de sistemas de ecuaciones diferenciales con múltiples escalas temporales y que poseen una singularidad dada como centro organizador.

Índice general

Datos del jurado	I
1. Introducción	1
1.1. Fenómenos dinámicos con múltiples escalas temporales	1
1.2. Objetivos y resultados del trabajo	6
1.3. Organización del contenido	7
2. Sistemas Dinámicos	15
2.1. Generalidades	15
2.2. Sistemas unidimensionales	18
2.3. Sistemas bidimensionales	22
3. Bifurcaciones escalares	29
3.1. Problemas de bifurcación elementales	30
3.1.1. Bifurcación <i>fold</i> o silla-nodo	31
3.1.2. Bifurcación transcítica	33
3.1.3. Bifurcación <i>pitchfork</i> o tridente	34
3.2. Problema del reconocimiento para bifurcaciones	35
3.3. Despliegue universal	39
3.4. Problema del reconocimiento para despliegues universales	42
3.5. Diagramas de bifurcación persistentes	43
3.6. Clasificación por codimensión	47
4. Teoría de las perturbaciones singulares	53
4.1. Introducción a sistemas rápido-lento	54
4.2. Variedades invariantes	56
4.2.1. Primer teorema de Fenichel	57
4.2.2. Segundo teorema de Fenichel	58

4.2.3.	Tercer teorema de Fenichel	59
4.2.4.	Teoría de Fenichel cerca de las singularidades	60
5.	Sistemas dinámicos con dos escalas temporales organizados por una singularidad	61
5.1.	Una singularidad como centro organizador	61
5.1.1.	Centros organizadores en problemas de bifurcación escalar	61
5.1.2.	Ideas para encontrar centros organizadores en sistemas dinámicos	64
5.2.	Singularidad histéresis y las oscilaciones de relajación	65
5.3.	Singularidad <i>winged-cusp</i> y la existencia de biestabilidad entre un punto fijo y ciclo límite	69
6.	Conclusiones	75

Capítulo 1

Introducción

Aunque de naturaleza teórica, este trabajo está motivado por el modelado de una clase de fenómenos y comportamientos característicos de sistemas biológicos. Haremos un breve recorrido por estos fenómenos y en seguida formularemos los objetivos de este trabajo. Concluiremos esta introducción con una presentación detallada del contenido.

1.1. Fenómenos dinámicos con múltiples escalas temporales en la naturaleza y en modelos matemáticos

La naturaleza muestra una gran variedad de fenómenos dinámicos, es decir, que dependen del tiempo, tanto en sistemas inertes como en sistemas biológicos. Entender esos fenómenos es una pregunta científica fundamental. La teoría de sistemas dinámicos y en particular la teoría de las ecuaciones diferenciales juegan un papel muy importante en el desarrollo de modelos para responder a esta pregunta.

Muchos de los fenómenos dinámicos que observamos en la naturaleza, en particular en biología, muestran escalas temporales características muy diferentes. Esto es normal, debido a que varios fenómenos dinámicos surgen de la interacción de niveles biofísicos muy distintos: genético, molecular, eléctrico, y hasta cuántico. Ilustramos este hecho con una serie de ejemplos:

- **Estallido neuronal:** La Figura 1.1, tomada de [25], muestra la actividad eléctrica de las neuronas del tálamo y de la corteza cerebral. Lo que

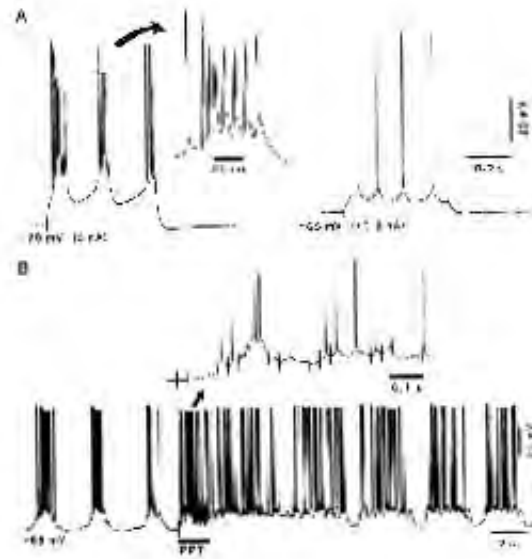


Figura 1.1: Estallido neuronal: Actividad eléctrica de las neuronas de la corteza cerebral

. Tomada de [25].

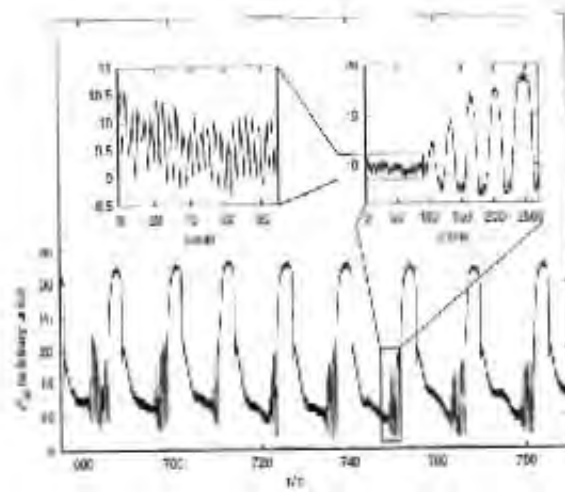


Figura 1.2: Relojes biológicos: Curso temporal de la concentración de oxígeno disuelto en la levadura *saccharomyces cerevisiae*, tomada de [1].

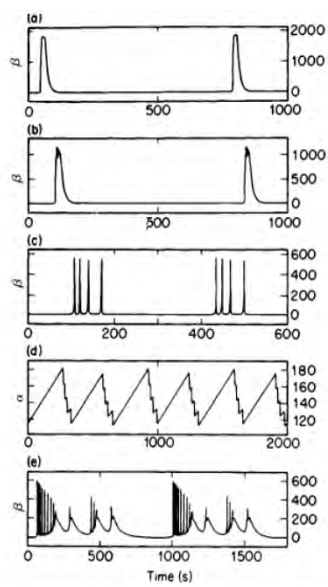


Figura 1.3: Redes bioquímicas: Comportamiento temporal de un modelo de tres variables que consiste en el acoplamiento en serie de dos reacciones enzimáticas autocatalíticas. Tomada de [6]

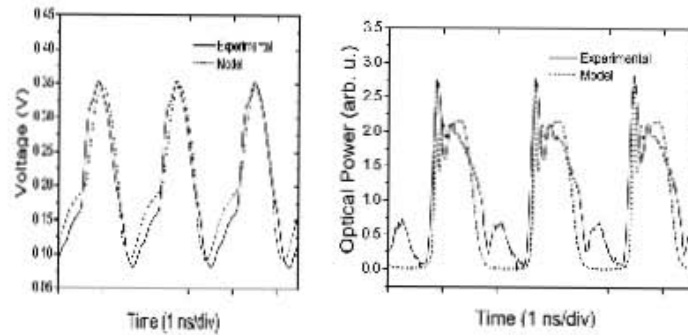


Figura 1.4: Electrónica: Comportamiento temporal de un circuito integrado optoelectrónico. Tomada de [24].

se muestra es la variación temporal del potencial eléctrico de la membrana celular debida al flujo de distintos iones (sodio, potasio y calcio, principalmente) a través de la membrana.

Sin entrar en los detalles biológicos, podemos reconocer propiedades dinámicas características de la actividad eléctrica neuronal. En primer lugar, reconocemos “picos” de potencial eléctrico llamados “potenciales de acción”. El potencial de acción es la unidad fundamental para la comunicación interneuronal [4]. Se caracteriza por una subida y una bajada muy rápidas que determinan la primera escala temporal característica de la actividad neuronal, la escala temporal rápida ($\sim 1\text{ms}$). El primer modelo de potencial de acción es el modelo de Hodgkin y Huxley [14], uno de los modelos más importantes de la biología matemática. En segundo lugar, los potenciales de acción están agrupados en estallidos (bursts) que forman el segundo nivel de organización temporal para la comunicación neuronal, en los que podemos distinguir una segunda y tercera escalas temporales características de la actividad neuronal. La escala lenta ($\sim 5\text{ms}$) está determinada por el período de reposo entre un potencial de acción y otro. La escala temporal ultra-lenta (decenas de milisegundos) está determinada por el período de de reposo entre un

estallido y otro. A nivel cualitativo, esto nos dice que el estallido neuronal es un fenómeno dinámico a tres escalas temporales, modelado de forma natural por ecuaciones diferenciales con tres variables dinámicas [10] [13] [23].

- **Relojes biológicos:** La Figura 1.2 muestra un ejemplo muy claro de la existencia de múltiples escalas temporales en los relojes biológicos. Estos relojes proporcionan una coordinación temporal entre los diferentes procesos celulares y entre los procesos celulares y las fases solares y lunares. El sistema estudiado en la Figura 1.2, tomado de [1] muestra el curso temporal de las concentraciones de oxígeno disuelto en la levadura *saccharomyces cerevisiae*. Un examen detallado de la figura muestra ritmos con períodos muy distintos. La oscilación lenta tiene un período de aproximadamente 13 h. Superpuestas a este ritmo se detectan oscilaciones rápidas con período de aproximadamente 40 min y oscilaciones ultra-rápidas con período de aproximadamente 4 min. Un modelo de reloj biológico que reproduce la co-existencia de múltiples ritmos se encuentra en [3].
- **Redes bioquímicas:** En la Figura 1.3 se presenta el comportamiento temporal de un modelo de tres variables que consiste en el acoplamiento en serie de dos reacciones enzimáticas autocatalíticas [6]. Podemos observar un comportamiento periódico en forma de estallido, cualitativamente idéntico al estallido neuronal. Como en el caso neuronal, tenemos tres escalas temporales características: una escala rápida para la subida y la bajada de los picos de concentración, una escala lenta para el período de quietud entre dos picos, y una escala ultra-lenta para el período de quietud entre dos estallidos.
- **Electrónica:** La Figura 1.4 extraída de [24] muestra el comportamiento temporal de un circuito integrado optoelectrónico, que acopla los niveles cuántico, óptico y electrónico. En el cuadro derecho se observa claramente la presencia de por lo menos dos escalas temporales. Una escala rápida para la subida y la bajada de los picos de potencia óptica y una escala lenta para los períodos de reposo entre dos picos. Un análisis más detallado podría revelar la presencia de otras escalas temporales, por ejemplo, en las oscilaciones de amplitud más pequeña superpuesta a los máximos de los picos. Este comportamiento temporal se puede

reproducir por la ecuación de Liénard [30],

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0,$$

que es una generalización del oscilador de Van der Pol [27]. Este oscilador ha sido ampliamente estudiado y aplicado [12] [16]. Fue también la base para el desarrollo del modelo FitzHugh-Nagumo para el potencial de acción de las neuronas, que simplifica el modelo Hodgkin-Huxley [9] [14] [21]

A pesar del hecho de que los ejemplos mencionados son tomados de sistemas biofísicos muy diferentes, todos muestran la presencia de escalas temporales características muy distintas. Cada uno de estos sistemas se puede modelar a través de ecuaciones diferenciales apropiadas que podemos integrar numéricamente o estudiar a través de métodos de ecuaciones diferenciales [20] [22] .

1.2. Objetivos y resultados del trabajo

Motivados por el modelado de la clase de sistemas introducida en la sección anterior, estamos interesados en desarrollar nuevos métodos matemáticos para el estudio del comportamiento global (en el espacio fase y en el espacio de los parámetros) de una clase de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales con múltiples escalas temporales. En este tipo de sistema cada variable está caracterizada por una constante de tiempo que determina la rapidez de su evolución temporal y las constantes de tiempo asociadas a distintas variables son fuertemente separadas. Inspirados por las ideas de René Thom [26], estudiaremos sistemas con múltiples escalas temporales organizados por una singularidad, o centro organizador. Dichos sistemas surgen naturalmente como formas normales de modelos biofísicos. Por ejemplo, el modelo de FitzHugh-Nagumo es un modelo a dos escalas temporales organizado por la singularidad *histéresis* [10] [23] . Así también se ha mostrado que el estallido neuronal es un proceso a tres escalas temporales organizado por la singularidad *winged -cusp*¹ [10].

¹En la literatura en español, se hace un uso exteso de los nombres en ingles de las bifurcaciones elementales, *fold* (doblez), *winged-cusp* (alas-cúspide), *pitchfork* (tridente, tenedor, horquilla). Con el fin de facilitar la lectura del texto decidimos seguir esta tendencia.

Integraremos dos teorías clásicas, la teoría de las singularidades aplicada a las bifurcaciones [11] y la teoría geométrica de las perturbaciones singulares [7] [17], para predecir y clasificar todos los retratos fase globales de la clase de sistemas mencionada. Los métodos que desarrollaremos extienden los ya existentes [5] [12] [20] [22] [29]. La principal novedad de los métodos propuestos en este trabajo con respecto a métodos más clásicos es que son al mismo tiempo globales y constructivos. Por ejemplo, la teoría clásica nos dice cómo se rompe globalmente una órbita homoclínica [29], pero no es constructiva, en el sentido que no nos da condiciones para demostrar que dicha órbita homoclínica existe. Al revés, la teoría de Hopf nos da condiciones constructivas para determinar de qué forma una(s) familia(s) de ciclos límites nace alrededor de un centro no lineal, pero sus predicciones son locales, en el sentido de permitir conocer lo que ocurre cerca de un punto de equilibrio que [12].

La aplicación conjunta de la teoría de las singularidades aplicada a problemas de bifurcación y la teoría geométrica de perturbaciones singulares, a la clase de sistemas que vamos a estudiar, nos permite predecir de forma constructiva el retrato fase global del sistema, y además determinar cómo cambia el retrato fase en función de los parámetros del sistema. La presencia de un centro organizador y de múltiples escalas temporales es fundamental para nuestro enfoque. De un lado, la presencia de múltiples escalas temporales nos permite diseccionar el sistema en subsistemas de dimensión más baja, cada uno en una escala temporal característica, y de juntar de forma rigurosa la información obtenida en cada subsistema para obtener información global sobre el sistema completo. Por otro lado, la presencia de un centro organizador nos permite predecir de forma rigurosa cómo cambia el retrato fase global en función de los parámetros.

1.3. Organización del contenido

En el capítulo 2 “Sistemas dinámicos”, presentamos conceptos básicos sobre sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, que usaremos a lo largo de este trabajo: Campo vectorial, flujo del campo vectorial, puntos de equilibrio, trayectorias, estabilidad de los puntos de equilibrio, variedades estable e inestable de puntos fijos, órbitas homoclínicas y heteroclínicas, y ciclos límites. Algunos conceptos más sobre el flujo en sistemas unidimensionales se muestra en la Sección 2.2 “Sistemas unidimensionales”, donde

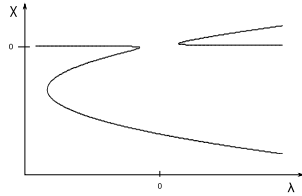


Figura 1.5: Diagrama de bifurcación de $x^3 + 6x^2 - \lambda x + 1/10 = 0$.

también presentamos un ejemplo sencillo de dinámica neuronal, en el que se muestra cómo depende la forma del retrato fase del sistema, de los valores que toma un parámetro. En la Sección 2.3 “Sistemas bidimensionales”, presentamos un ejemplo con el modelo FitzHugh-Nagumo, en el que describimos el campo vectorial para diferentes valores de un parámetro.

La teoría de las bifurcaciones escalares es presentada en el capítulo 3, “Bifurcaciones: un enfoque desde la teoría de las singularidades”. [Capítulos I-IV de [11]]. Se le denomina *bifurcación* al cambio en el número de soluciones x de una ecuación de la forma $g(x, \lambda) = 0$, cuando el parámetro λ varía. A la gráfica sobre el plano (x, λ) , donde se muestra cómo cambian las soluciones x con respecto a λ , se le llama *diagrama de bifurcación*. Por ejemplo, el diagrama de bifurcación de la ecuación

$$x^3 + 6x^2 - \lambda x + \frac{1}{10} = 0,$$

se muestra en la Figura 1.5. Decimos que la ecuación $g(x, \lambda) = 0$ es un *problema de bifurcación*.

La teoría de las singularidades aplicada a la teoría de las bifurcaciones [11] nos da las herramientas para decidir si un problema de bifurcación dado tiene una singularidad de cierto tipo y de esta manera poder enumerar todas las posibles perturbaciones de un problema de bifurcación dado que sean cualitativamente diferentes. Hay once singularidades de codimensión ≤ 3 .

Las proposiciones presentadas en la Sección 3.2 “Problema del reconocimiento para bifurcaciones” establecen los criterios para decidir si una función $g(x, \lambda)$ es equivalente a alguna de las formas normales de singularidades de codimensión ≤ 3 . En la Sección 3.3 “Despliegue universal” se clasifican todos los diagramas de bifurcación perturbados de un problema de bifurcación dado $g(x, \lambda) = 0$. Estas perturbaciones son descritas por familias paramétricas

$G(x, \lambda; \alpha)$ con parámetros auxiliares $\alpha \in \mathbb{R}^k$. En la Sección 3.4 “Problema del reconocimiento para despliegues universales” definimos la codimensión de g como el número de parámetros auxiliares del despliegue universal y establecemos cuándo una función $F(x, \lambda; \alpha)$ es despliegue universal de una singularidad dada. En la Sección 3.5 “Diagramas de bifurcación no persistentes” se clasifican los diagramas de bifurcación que son persistentes en un despliegue universal de una singularidad de codimensión ≤ 3 , esto por medio de la variedad de transición del mismo despliegue.

La utilidad de la teoría de las singularidades en la modelación matemática de fenómenos naturales es la siguiente:

En sistemas dinámicos de la forma

$$\dot{x} = g(x, \lambda), \tag{1.1}$$

conocer cómo los puntos de equilibrio (o puntos críticos) del sistema (1.1) $\{(x, \lambda) : g(x, \lambda) = 0\}$ dependen del parámetro de bifurcación λ , implica conocer las posibles configuraciones del retrato fase del sistema en función de λ , si además de esto, podemos clasificar los diagramas de bifurcación que surgen bajo pequeñas perturbaciones de g es decir,

$$g(x, \lambda) + \mu p(x, \lambda) \quad \text{con } 0 < \mu \ll 1,$$

estaríamos ante todos las posibles retratos fase cualitativamente diferentes que quizá puedan observarse para algún sistema real modelado por (1.1). Lo cual es muy útil, por ejemplo, para la clasificación de los posibles fenómenos predichos por un mismo modelo, o para detectar cuándo un fenómeno observado experimentalmente puede ser reproducido por un modelo dado.

En la Sección 3.6 “Clasificación por codimensión”, se concretan los resultados de este capítulo para singularidades de codimensión ≤ 3 . Presentamos las formas normales y las condiciones de equivalencia para conocer cuándo una función suave de codimensión ≤ 3 es equivalente a alguna de estas formas. Mostramos un despliegue universal para cada forma normal, junto con sus diagramas de bifurcación no perturbados y la matriz de condiciones, que determinan cuándo un despliegue es equivalente a un despliegue universal de alguna forma normal. Una tabla de las variedades de transición y de todos los diagramas de bifurcación persistentes para cada forma normal de codimensión ≤ 3 se encuentra en el Capítulo IV, Sección 4 de [11].

En el capítulo 4 “Teoría geométrica de las perturbaciones singulares”, presentamos la teoría sobre sistemas perturbados singularmente, es decir con

una separación de escalas temporales casi infinita entre sus variedades. La herramienta fundamental son los teoremas de Fenichel sobre variedades invariantes. Este capítulo está basado en las notas de lectura [17].

Nos enfocaremos en sistemas dinámicos de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon),\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $0 < \varepsilon \ll 1$ y f y g son suaves. Se dice que tales sistemas tienen un campo vectorial rápido-lento, x es la variable rápida, y es la variable lenta y ε es la razón entre las escalas de tiempo de estas variables. Sobre la Sección 4.1 “Introducción a sistemas rápido-lento”, a través del cambio de escala temporal $\tau = \varepsilon t$, obtenemos un sistema equivalente a (1.2). Tomando el límite singular $\varepsilon = 0$ en estos dos sistemas obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, 0), & f(x, y, 0) &= 0, \\ \frac{dy}{dt} &= 0, & \frac{dy}{d\tau} &= g(x, y, 0),\end{aligned}$$

conocidos como *sistema capa* y *sistema reducido*, respectivamente, que nos permiten simplificar el análisis cualitativo del campo vectorial del sistema principal (1.2), a través de la descomposición del flujo global en flujo lento y flujo rápido. Dado que el sistema capa describe la evolución de la variable rápida x , el término “capa” hace referencia a la idea de que para cada y fijo, tenemos una franja del flujo rápido. La evolución de la variable lenta y está restringida al conjunto $\{(x, y) : f(x, y, 0) = 0\}$, descrita por el sistema reducido.

En la Sección 4.2 “Variedades invariantes”, se considera la variedad crítica $\mathcal{M}_0 \subset \{(x, y) : f(x, y, 0) = 0\}$. El flujo lento está restringido a ésta y el flujo rápido describe el comportamiento normal a ésta.

El primer teorema de Fenichel, establece la existencia de una variedad lenta \mathcal{M}_ε difeomorfa a \mathcal{M}_0 , para $0 < \varepsilon \ll 1$, que es invariante bajo el flujo del sistema (1.2), siempre que la variedad \mathcal{M}_0 sea compacta y normalmente hiperbólica. Es decir que asegura la existencia de \mathcal{M}_ε con $\varepsilon \neq 0$ como una perturbación de \mathcal{M}_0 . El segundo teorema de Fenichel refuerza la estructura de \mathcal{M}_ε , al establecer que las mismas conclusiones del primer teorema para la variedad crítica \mathcal{M}_0 se mantienen localmente para sus variedades estable e inestable. Ahora, las variedades estable e inestable de un punto $p \in \mathcal{M}_0$,

$W_{loc}^s(p)$ y $W_{loc}^u(p)$ son perturbadas en objetos análogos $W_{loc}^s(p_\varepsilon)$ y $W_{loc}^u(p_\varepsilon)$ con $p_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon$, sin embargo las variedades no perturbadas son invariantes bajo el flujo de (1.2) y sus homólogos no lo son, así el tercer teorema de Fenichel establece un sentido en el que las familias

$$\{W_{loc}^s(p_\varepsilon) | p_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon\}$$

y

$$\{W_{loc}^u(p_\varepsilon) | p_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon\}$$

son invariantes.

Por medio de los métodos “blow-up” se puede extender los teoremas de Fenichel a los puntos no hiperbólicos de la variedad crítica del sistema (6.1) [19], es decir puntos donde f tiene una singularidad. Estos puntos son importantes porque, de forma natural a nivel cualitativo, son un punto de transición entre el flujo lento y el flujo rápido. Los métodos “blow-up” no los desarrollamos en este trabajo.

En el capítulo 5 “Sistemas dinámicos con dos escalas temporales organizados por una singularidad”, introducimos los métodos de este trabajo. En pocas palabras las ideas atrás de estos métodos son las siguientes. Notemos que en el sistema rápido, dado que la variable y toma valores constantes, puede ser considerada como un parámetro, y si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces a $f(x, y, 0) = 0$ lo podemos ver como un problema de bifurcación. Así, en el límite singular, por la teoría expuesta en el capítulo 3, podemos conocer todos los diagramas de bifurcación persistentes en el despliegue universal de la forma normal de la singularidad equivalente a $f(x, y, 0) = 0$. Lo cual implica conocer todas las formas persistentes de la variedad crítica del sistema (1.2), que junto con los teoremas de Fenichel hacen realizable el objetivo de conocer la dinámica global de sistemas de la forma (1.2). Ilustraremos estas ideas sobre el estudio de la estructura global del plano fase de una clase de sistemas dinámicos bidimensionales con dos escalas temporales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= G_{sing}(x, \lambda + y; \alpha), \\ \dot{y} &= \varepsilon(x - y), \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde G_{sing} es el despliegue universal de una singularidad dada y $0 < \varepsilon \ll 1$. A modo de ejemplo presentamos la dinámica global de dos sistemas organi-

zados por singularidades de codimensión 1 y 3,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= G_{hy}(x, \lambda + y; \beta), & \dot{x} &= G_{wccusp}(x, \lambda + y; \alpha, \beta, \gamma), \\ &= -x^3 - (\lambda + y) + \beta x, & &= -x^3 + \beta x - (\lambda + y)^2 - \gamma(\lambda + y)x - \alpha, \\ \dot{y} &= \varepsilon(x - y), & \dot{y} &= \varepsilon(x - y), \end{aligned}$$

donde G_{hy} y G_{wccusp} son despliegues universales de las singularidades histéresis y winged-cusp, respectivamente, y $0 < \varepsilon \ll 1$. Usamos la teoría del despliegue universal y los teoremas de Fenichel para clasificar todos los posibles atractores y retratos fase de estos sistemas. En la Sección 5.1.1 “Centros organizadores en problemas de bifurcación escalar” retomamos para estos dos sistemas el concepto de variedad de transición, como la unión de los diagramas de bifurcación no persistentes de codimensión 1, y resaltamos el hecho de que el despliegue universal de la singularidad winged-cusp contiene la singularidad histéresis.

La intersección de los diagramas de bifurcación no persistentes de codimensión 1 es el diagrama de bifurcación no perturbado. Decimos que un diagrama de bifurcación no perturbado es un *centro organizador* de los diagramas de bifurcación persistentes, pues bajo pequeñas perturbaciones de éste es posible generarlos todos. La idea de centro organizador es fundamental por dos aspectos.

- Permite clasificar y predecir todos los diagramas de bifurcación de un problema de bifurcación organizado por una singularidad dada.
- Permite reconocer el centro organizador de un sistema real a partir de datos experimentales, pues si observamos experimentalmente diagramas de bifurcación (necesariamente persistentes) que pertenecen al despliegue universal de una singularidad dada, podemos formular muy razonablemente la hipótesis de que el sistema que estamos estudiando está organizado por dicha singularidad.

Sin embargo, en su formulación clásica, el concepto de centro organizador se aplica solamente a problemas de bifurcaciones escalares. Una clase de sistemas más amplia en las que se puede aplicar estas ideas son justamente los de la forma (1.3), es decir, sistemas bidimensionales con dos escalas temporales en los cuales la ceroquina de x está organizada por una singularidad dada.

Usaremos el conocimiento de la estructura global del despliegue universal de la singularidad organizadora de la ceroclina de x , $\{(x, y) : \dot{x} = 0\}$, para construir de forma geométrica, a través de los sistemas capa y reducido, los posibles planos fase singulares correspondientes a distintos diagramas de bifurcación persistentes. Por los teoremas de Fenichel, los planos fases singulares determinan los planos fases globales (en particular los atractores) del sistema a dos escalas temporales, para ε suficientemente pequeño.

En la Sección 5.3 “Singularidad winged-cusp y la existencia de biestabilidad” construimos el retrato fase de un sistema particular, bidimensional con dos escalas temporales organizado por la singularidad winged-cusp. Mostramos que dicha singularidad organiza la biestabilidad entre un punto fijo atractor y un ciclo límite de relajación. Este tipo de biestabilidad se obtiene al perturbar una variedad de transición transcítica en el despliegue universal de la winged-cusp.

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos

El objetivo de la teoría de los sistemas dinámicos que trataremos aquí, es entender cómo el comportamiento temporal de un sistema depende de las condiciones iniciales y de los parámetros del mismo. En este primer capítulo revisamos conceptos y algunas propiedades generales para los sistemas dinámicos.

2.1. Generalidades

Iniciaremos presentando el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo

$$\dot{x} = g(x), \tag{2.1}$$

donde x es la **variable de estado** del sistema, cuya derivada con respecto al tiempo es $\dot{x} = dx/dt$. Si $x(t) \in \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$ diremos que el sistema (2.1) es de dimensión n .

La función suave $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ define un **campo vectorial** sobre el **espacio fase** \mathbb{R}^n . Para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ el vector $g(x)$ indica el cambio en la dirección de la variable de estado x ; es posible representar el campo vectorial de forma geométrica, lo que hacemos es dibujar el vector $g(x)$ con punto inicial x .

Diremos que el sistema (2.1) es **lineal** si la variable de estado x aparece de forma lineal en g y es **no lineal** si aparecen productos, potencias o funciones no lineales de x . Además, si g depende explícitamente del tiempo, es decir $g = g(t, x)$, diremos que es un sistema **no autónomo**, si no diremos que

es **autónomo**. Los sistemas que trataremos en este escrito son no lineales y autónomos.

Una solución del sistema (2.1) sobre un intervalo de tiempo $I \subseteq \mathbb{R}$ es una función $x(t)$ diferenciable en el intervalo I tal que $\dot{x}(t) = g(x(t))$. Cuando g es una función suficientemente suave ¹ el siguiente teorema garantiza la existencia de una solución del sistema (2.1).

Teorema 1 (Existencia y unicidad) *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, tal que $x_0 \in E$ y supongamos que g es suave sobre E . Entonces existe un $a > 0$ en \mathbb{R} tal que el problema con condición inicial*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

tiene una única solución $x(t)$ sobre el intervalo de tiempo $[-a, a]$ alrededor de $t = 0$.

Una demostración de este teorema se encuentra en la Sección 2.2. de [22].

El flujo del campo vectorial, o movimiento en función del tiempo, definido por el sistema (2.1) es la función

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

tal que para cada $x_0 \in E \subset \mathbb{R}^n$ y para todo $t \in I \subset \mathbb{R}$, se tiene que $\phi(0, x_0) = x_0$ y $\phi_t(x_0)$ es solución del sistema (2.1). Para x_0 fijo, el mapeo $\phi_t(x_0)$ es una **trayectoria** o curva solución del sistema (2.1).

El **retrato fase** es la representación gráfica de la evolución en el tiempo de la variable de estado x , donde se muestra como ésta depende del estado inicial x_0 . En un sentido práctico, el retrato fase es una herramienta para visualizar trayectorias que son especiales, que determinan el comportamiento topológico de todas las demás trayectorias en el espacio fase, por ejemplo: trayectorias de equilibrio, separatrices, ciclos límite.

Si x_0 es un **punto de equilibrio** del sistema (2.1), es decir que $g(x_0) = 0$, entonces x_0 es un punto fijo de ϕ , pues si $\phi(t, x_0)$ es la trayectoria que pasa por x_0 , la derivada con respecto a t es cero para toda t , luego $\phi(t, x_0) = x_0$ para toda t .

¹Decimos que una función es suficientemente suave siempre que sus derivadas hasta un orden k , con k suficientemente grande, existen y son continuas.

Un punto de equilibrio x_0 es **estable** si cada solución que está suficientemente cerca de x_0 , permanece cerca de éste con el tiempo, es decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda x en una vecindad δ de x_0 , si $|x - x_0| < \delta$ tenemos que $|\phi_t(x) - x_0| < \varepsilon$ cuando $t \geq 0$. Y diremos que x_0 es **inestable** si no es estable.

Si x_0 además de ser estable, tiene la propiedad de que para toda x en una vecindad $\delta > 0$ de x_0

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0,$$

diremos que x_0 es **asintóticamente estable**.

Un resultado importante de la teoría de sistemas no lineales es el teorema **Hartman-Grobman** ([22], Sección 2.8). Este establece que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico los sistemas no lineal (2.1) y lineal

$$\dot{x} = \mathbf{D}g(x_0)x, \tag{2.3}$$

tienen la misma estructura cualitativa. Donde $\mathbf{D}g(x_0)$ es la matriz constante de derivadas parciales de primer orden de g , conocida como la matriz jacobiana. Un punto de equilibrio x_0 se dice que es **hiperbólico** si ningún valor propio de la matriz $\mathbf{D}g(x_0)$ tiene parte real cero. Un punto hiperbólico será **atractor** si todos los valores propios tienen parte real negativa, **repulsor** si todos tienen parte real positiva y **silla** si tiene al menos un valor propio positivo y uno negativo.

Las trayectorias que convergen a un punto de equilibrio x_0 cuando $t \rightarrow \infty$, forman la **variedad estable** $W_{loc}^s(x_0)$ del punto, así también las trayectorias que cuando $t \rightarrow -\infty$ convergen a x_0 forman la **variedad inestable** $W_{loc}^u(x_0)$.

Dos tipos de órbitas importantes que pueden presentarse en la dinámica de un sistema son las órbitas **homoclínicas** y órbitas **heteroclínicas**. Una órbita homoclínica Γ es una trayectoria que converge a un mismo punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ es decir que, $\Gamma \subset W_{loc}^u(x_0) \cap W_{loc}^s(x_0)$. En un sistema dinámico con dos o más puntos de equilibrio, una órbita heteroclínica Γ es una trayectoria que converge a un punto de equilibrio x_1 cuando $t \rightarrow \infty$ y converge a un punto de equilibrio x_0 , distinto de x_1 , cuando $t \rightarrow -\infty$ es decir que, $\Gamma \subset W_{loc}^u(x_0) \cap W_{loc}^s(x_1)$.

Una de las características de los sistemas de dimensión ≥ 2 es la presencia de **órbitas periódicas** o **ciclos**, es decir cualquier curva solución cerrada que no es un punto de equilibrio del sistema. Diremos que una órbita periódica Γ es **asintóticamente estable** o **atractora**, si cualquier trayectoria $\phi(t, x)$ en alguna

vecindad de Γ se aproxima a Γ cuando $t \rightarrow \infty$, es decir que para cada x en una vecindad de Γ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), \Gamma) = 0.$$

Se dice que es un ciclo **inestable** si para alguna vecindad de Γ , cualquier trayectoria se aproxima a Γ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Un **ciclo límite** es una órbita periódica aislada para la cual una trayectoria que pasa por cualquier punto x_0 suficientemente cerca del ciclo, converge a él cuando $t \rightarrow \infty$ (estable) o $t \rightarrow -\infty$.

Las órbitas periódicas Γ , al igual que los puntos de equilibrio hiperbólico, tienen variedades estables e inestables. Sea N una vecindad de Γ . Las variedades locales estable W_{loc}^s e inestable W_{loc}^u de Γ están dadas por

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(\Gamma) &= \{x \in N \mid d(\phi(t, x), \Gamma) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}, \\ W_{loc}^u(\Gamma) &= \{x \in N \mid d(\phi(t, x), \Gamma) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

entonces las variedades globales estable W^s e inestable W^u de Γ están definidas por

$$\begin{aligned} W^s(\Gamma) &= \bigcup_{t \leq 0} \phi(t, W_{loc}^s(\Gamma)), \\ W^u(\Gamma) &= \bigcup_{t \geq 0} \phi(t, W_{loc}^u(\Gamma)), \end{aligned} \quad (2.5)$$

El teorema de la **variedad estable** es otro resultado importante, junto con el teorema Hartman-Grobman, que relaciona las soluciones de (2.1) y (2.3). Establece que las variedades estables e inestable de un punto hiperbólico x_0 en el sistema no lineal (2.1) son tangentes a los subespacios estable e inestable del sistema linealizado (2.3) en x_0 .

2.2. Sistemas unidimensionales

Esta sección es una presentación del análisis geométrico de los sistemas dinámicos unidimensionales, es decir sistemas con una variable, de la forma

$$\dot{x} = g(x), \quad (2.6)$$

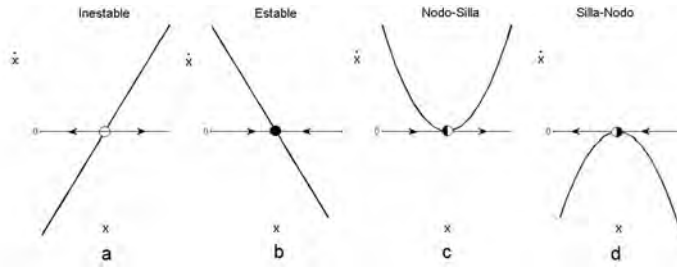


Figura 2.1: Estabilidad de los puntos de equilibrio

donde la variable $x(t)$ es una función escalar, su derivada con respecto al tiempo es $\dot{x} = dx/dt$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave, el espacio fase es la recta real \mathbb{R} , también llamada *línea fase*.

La gráfica de g en el plano (x, \dot{x}) nos da información sobre lo que ocurre con las soluciones o trayectorias en la línea fase. Las condiciones iniciales están en la recta real, luego el **flujo del campo vectorial** en cada punto sólo tiene dos opciones ir a la izquierda o a la derecha, lo cual representaremos con flechas, como en la Figura 2.1. Si una condición inicial para el sistema (2.6) es exactamente un punto de equilibrio, entonces $\dot{x} = g(x) = 0$, por tanto la variable permanece constante.

Para describir el comportamiento local cerca de los puntos de equilibrio del sistema (2.6), usamos el **sistema linealizado** en el punto de equilibrio. Veamos, sean x_0 un punto de equilibrio del sistema (2.6) y $\eta(t) = x(t) - x_0$ una pequeña perturbación de x_0 con $|\eta| \ll 1$ entonces $\dot{\eta} = \dot{x} = g(x) = g(\eta + x_0)$. Supongamos que $dg/dx = g'(x_0) \neq 0$ y usamos el desarrollo en series de Taylor de g cerca de x_0

$$g(\eta + x_0) = g(x_0) + \eta g'(x_0) + \frac{1}{2} \eta^2 g''(x_0) + \frac{1}{3!} \eta^3 g'''(x_0) + \dots$$

Sabemos que $g(x_0) = 0$ ya que x_0 es un punto de equilibrio. Si $g'(x_0) \neq 0$ entonces

$$g(\eta + x_0) = \eta g'(x_0) + O(|\eta|^2),$$

para $|\eta| \ll 1$ los términos $O(|\eta|^2)$ pueden ser ignorados y llegamos al sistema linealizado

$$\dot{\eta} = \eta g'(x_0). \quad (2.7)$$

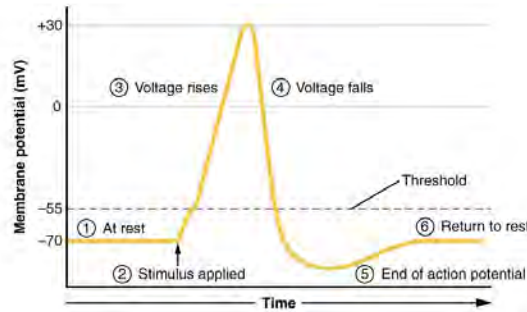


Figura 2.2: Potencial de acción

Por OpenStax College [CC BY 3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>)], via Wikimedia Commons

La ecuación lineal (2.7) es llamada la **linealización** del sistema (2.6) cerca de x_0 . Por tanto la estabilidad del sistema en el punto de equilibrio x_0 depende de $g'(x_0)$ de la siguiente forma, si $g'(x_0) > 0$, η tendrá un crecimiento exponencial, entonces x_0 es un punto de equilibrio inestable, Figura 2.1-a, y si $g'(x_0) < 0$ entonces η decae exponencialmente, luego x_0 es un punto de equilibrio estable, Figura 2.1-b. En las Figuras 2.1-c y d, se muestran la estabilidad de dos puntos que no son ni atractores, ni repulsores, pues $g' = 0$ y la linealización no aplica, son llamados **nodo-silla** y **silla-nodo**, respectivamente.

Una característica de los sistemas unidimensionales es que no hay soluciones periódicas, todas las trayectorias del campo vectorial sobre la línea fase crecen o decrecen monótonamente, o permanecen constantes.

Ejemplo: Modelo del sodio persistente

La actividad eléctrica en las neuronas permanece y se propaga gracias al intercambio iónico a través de su membrana. Algunas características importantes de tal actividad son la excitabilidad, la generación de potenciales de acción (transmisión del impulso eléctrico) y la existencia de un umbral para la generación de potencial de acción.

En el mecanismo de la generación del potencial de acción en la Figura 2.2, la corriente iónica de sodio comienza su labor produciendo un aumento rápido (3) en el **potencial de la membrana** que es seguido por un descenso del potencial también rápido (4) debido a los iones de potasio, para luego volver al estado de reposo (6). El modelo de sodio persistente (ver [15], Sección

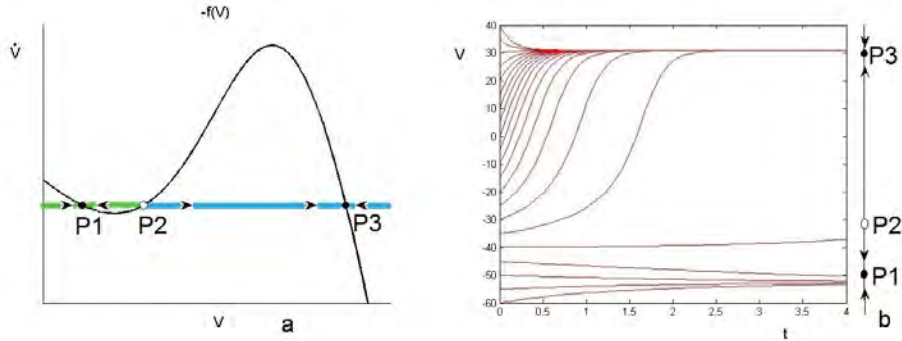


Figura 2.3: Modelo del sodio persistente para $I = 0\text{pA}$. Sistema (2.8). Donde se exhibe la coexistencia de biestabilidad (estados de reposo, puntos P_1 y P_3 , y estados de excitación, punto P_2), para un sistema unidimensional.

3.1.2) dado por el sistema

$$C\dot{V} = I - f(V), \quad (2.8)$$

$$\text{donde } f(V) = g_L(V - E_L) + \frac{g_{Na}(V - E_{Na})}{(1 + e^{(V_{1/2} - V)/\kappa})},$$

aproxima la dinámica de crecimiento del potencial de acción en las neuronas piramidales de la capa 5 en la corteza visual de una rata. Donde el potencial de la membrana $V(t)$ es una variable escalar que depende del tiempo y $f(V)$ es una función escalar que determina la evolución del sistema, la conductancia C , la corriente inyectada I y demás parámetros (g_L , E_L , g_{Na} , $V_{1/2}$, κ y E_{Na}) son constantes obtenidas experimentalmente

$$\begin{aligned} C &= 10\mu\text{F}, & I &= 0\text{pA}, & g_L &= 19\text{mS}, & E_L &= -67\text{mV}, \\ g_{Na} &= 74\text{mS}, & V_{1/2} &= 1,5\text{mV}, & \kappa &= 16\text{mV}, & E_{Na} &= 60\text{mV}. \end{aligned}$$

El sistema dinámico no lineal (2.8) puede ser interpretado como un campo vectorial sobre la recta real. Como se muestra en la Figura 2.3-a, sus puntos de equilibrio se encuentran en la intersección de las gráficas de $\dot{V} = -f(V)$ y de la recta $\dot{V} = 0$. En la dinámica del potencial de membrana, cada uno de estos puntos representa un balance de las corrientes de entrada y de salida, así que la corriente transmembrana neta es cero y el voltaje de la membrana no cambia. La estabilidad de los puntos de equilibrio, como se indica en la Figura 2.1, depende de la pendiente de la función $-f(V)$ cuando toca la recta

$\dot{V} = 0$. En la Figura 2.3-a, los puntos $P1$ y $P3$ son estables pues la pendiente es negativa y el punto $P2$ es inestable porque la pendiente es positiva.

La gráfica en la Figura 2.3-a, sobre el plano (V, \dot{V}) exhibe **biestabilidad** es decir, la coexistencia de estados de reposo y de excitación. Dependiendo de la condición inicial la trayectoria del potencial de membrana V irá a un estado de equilibrio estable, de excitabilidad ($P3$) o de reposo ($P1$), como se puede ver en el retrato fase del sistema en la Figura 2.3-b.

El **dominio de atracción** de un punto de equilibrio estable es el conjunto de todas las condiciones iniciales cuyas trayectorias convergen a dicho punto. En el punto $P2$ de la Figura 2.3 hay un equilibrio inestable, que corresponde al balance de la corriente que va hacia el exterior y la corriente que va hacia el interior, en este punto una pequeña perturbación es suficiente para que la variable de estado sea atraída por $P1$ o por $P3$. El punto de equilibrio inestable es importante en la dinámica del sistema pues separa los dominios de atracción de cada uno de los puntos de equilibrio estable.

Cuando hacemos variar I y se mantienen constantes los valores de los demás parámetros, el retrato fase del sistema (2.8) puede presentar un cambio sustancial en su dinámica. Por ejemplo, en la Figura 2.4, partiendo de $I = 0\text{pA}$ hacia $I = 16\text{pA}$ el sistema pasa de tres puntos de equilibrio a dos, un nodo-silla (atractor por la izquierda y repulsor por la derecha) y un atractor; para $I = 60\text{pA}$ desaparece el estado de reposo y cualquier condición inicial lleva al sistema a un único estado de excitabilidad. A este fenómeno de cambio en el número de puntos de equilibrio, se le denomina **bifurcación**. En el capítulo 3 trataremos las bifurcaciones para sistemas unidimensionales.

2.3. Sistemas bidimensionales

En esta sección introducimos algunas propiedades y conceptos generales del análisis geométrico de los sistemas dinámicos bidimensionales no lineales.

Consideremos el sistema dinámico no lineal **autónomo**

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{2.9}$$

donde las funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que describen la evolución de la variable de estado (x, y) , son suaves y no dependen explícitamente de la variable independiente t .

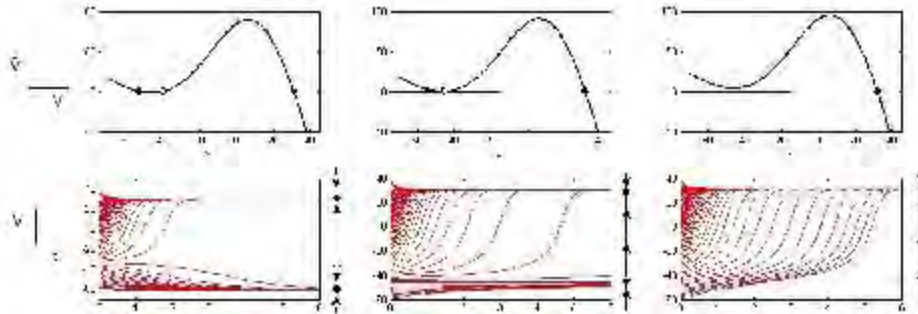


Figura 2.4: Modelo del sodio persistente para $I = 0\text{pA}$, $I = 16\text{pA}$, $I = 60\text{pA}$

El sistema (2.9) define un **campo vectorial** sobre el plano fase (x, y) , en el que a cada punto (x_0, y_0) le corresponde un vector $(f(x_0, y_0), g(x_0, y_0))$ que indica el cambio de dirección de la variable de estado, de forma que las soluciones del sistema son curvas sobre el plano fase tangentes al campo vectorial. El campo vectorial para este tipo de sistemas ofrece información acerca de la dinámica que puede no ser obvia de la forma de las funciones f y g . A diferencia de los sistemas unidimensionales, una característica importante de los sistemas bidimensionales es la existencia de ciclos límite y órbitas homoclínicas.

Denotemos por $\phi(t, (x_0, y_0))$ a la solución, o **trayectoria** u **órbita**, que pasa por $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, definida para todo $t \in I_{x_0, y_0} \subset \mathbb{R}$. Al conjunto de mapeos definidos por $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le llamamos el **flujo** del sistema (2.9).

Algunos puntos caracterizan el comportamiento de las trayectorias en el plano fase. Al conjunto de puntos

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\},$$

le llamamos **ceroclina de x** . Notemos que las trayectorias en un sistema (2.9) atraviesan la ceroclina de x de forma vertical. Análogamente, el conjunto de puntos

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\},$$

le llamamos **ceroclina de y** . Notemos que las trayectorias cruzan de forma horizontal la ceroclina de y .

Un punto (x_0, y_0) es llamado un **punto de equilibrio** o punto crítico del sistema (2.9), si $(f, g)(x_0, y_0) = (0, 0)$. Luego, por definición un punto es de

equilibrio si y sólo si es un punto de intersección de la ceroclina de x y la ceroclina de y .

Los puntos de **equilibrio hiperbólico** del sistema (2.9) son aquellos puntos de equilibrio para los cuales todos los valores propios de la matriz jacobiana (2.10) no tienen parte real cero.

$$\mathbf{J}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

donde f_x indica la derivada parcial de f con respecto a x , de forma similar para los demás términos de la **matriz jacobiana** \mathbf{J} . Estos puntos son importantes en el análisis de sistemas dinámicos porque el comportamiento local del sistema, cerca de los puntos de equilibrio hiperbólico (x_0, y_0) , está determinado cualitativamente por el comportamiento del sistema lineal (2.11) (Teorema Hartman-Grobman, [22] Sección 2.8)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Gracias a la linealización dada por el sistema (2.11) es posible hacer una clasificación general de la estabilidad de los puntos de equilibrio hiperbólicos de (2.9) en relación con los valores propios de la matriz jacobiana \mathbf{J} en dichos puntos (ver [22], sección 2). Si ambos valores propios tienen parte real negativa decimos que es un **sumidero** o **nodo estable**, si ambos valores propios tienen parte real positiva decimos que es una **fuentes** o **nodo inestable**, y si tiene uno con parte real positiva y otro con parte real negativa decimos que es una **silla**. Así entonces, cualquier punto de equilibrio hiperbólico asintóticamente estable (sumidero) o asintóticamente inestable (fuente o silla).

Además de los puntos de equilibrio otra fuente de información sobre el comportamiento de un sistema como (2.9) son las trayectorias cerradas u órbitas periódicas. Las trayectorias cercanas a una órbita periódica Γ pueden comportarse como espirales, que tienden o se alejan de Γ , o son en sí mismas órbitas periódicas (Teorema Poincaré-Bendixson). En el caso de que se comporten como espirales, la órbita periódica aislada es un ciclo límite estable, inestable o semi-estable, dependiendo respectivamente de si las órbitas en espiral se acercan, se alejan, o si por un lado se acercan y por otro se alejan de Γ .

Así un elemento importante en el estudio de sistemas bidimensionales no lineales es establecer la existencia y el número de ciclos límites de un sistema,

aunque hay avances en este sentido en \mathbb{R}^n aún representa una dificultad teórica, hasta para sistemas donde f y g son polinomios sencillos [22]. Por ejemplo, dos conclusiones importantes en la literatura son:

- Un resultado sobre el número de ciclos límite dado por A. Lienard establece que bajo ciertas condiciones el sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - F(x), \\ \dot{y} &= -g(x),\end{aligned}\tag{2.12}$$

tiene exactamente un ciclo límite y este es estable [22].

En este tipo de sistemas se encuentra la famosa ecuación de Van der Pol [28]

$$\ddot{x} - \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

cuyo sistema equivalente es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \mu\left(-\frac{x^3}{3} + x\right), \\ \dot{y} &= -x,\end{aligned}$$

el cual tiene una sola órbita periódica estable.

- El teorema conocido como el criterio de Bendixson establece que para un sistema como (2.9), sobre una región E “sin agujeros” de \mathbb{R}^2 , si la expresión

$$f_x + g_y,$$

es siempre positiva o siempre negativa en dicha región entonces el sistema 2.9 no tiene órbitas cerradas en el interior de E .

El gran interés en los ciclos límites se ve justificado porque su presencia en los modelos está relacionada con el hecho de que el sistema exhibe comportamientos periódicos.

Ejemplo: Modelo FitzHugh-Nagumo

R. FitzHugh fue el primero en analizar el modelo Hodgkin-Huxley [8] [14], el modelo con mayor influencia en el desarrollo del estudio de sistemas dinámicos para modelar la actividad neuronal. FitzHugh introduce en [9] el modelo

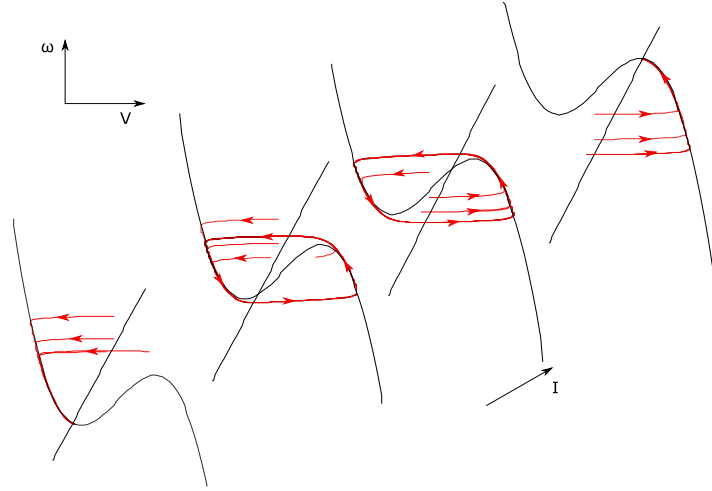


Figura 2.5: Modelo FitzHugh-Nagumo 2.13, ciclo límite y ceroclina. Con parámetros a, b, c fijos y variando los valores para I . En cada caso se muestran las trayectorías para diferentes valores iniciales (V, ω) .

simplificado de éste y en [21] J. Nagumo y otros construyen el circuito equivalente que describe el sistema excitable de una neurona, planteado así el modelo llamado el oscilador FitzHugh-Nagumo que presentamos a continuación.

Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned}\dot{V} &= V(a - V)(V - 1) - \omega + I, \\ \dot{\omega} &= bV - c\omega,\end{aligned}\tag{2.13}$$

donde $V \in \mathbb{R}$ es el potencial de membrana (diferencia de voltaje entre el interior y el exterior de la célula), ω es una variable real conocida como variable de activación e I es la magnitud de la corriente inyectada [15].

La gráfica 2.5 presenta diferentes comportamientos del sistema (2.13) sobre el plano (V, ω) cuando hacemos variar I y dejamos fijo los parámetros a, b, c . Mostramos las trayectorias para varias condiciones iniciales (V_0, ω_0) , en cada caso. Las ceroclinas del sistema están dadas por la curva cúbica

$$\text{ceroclina de } V = \{(V, \omega) : \omega = V(a - V)(V - 1) + I\},\tag{2.14}$$

y la recta

$$\text{ceroclina de } \omega = \{(V, \omega) : \omega = \frac{b}{c}V\}, \quad (2.15)$$

Las ceroclina están formadas por los puntos donde el campo vectorial tiene un crecimiento nulo en alguna dirección, así por ejemplo la ceroclina de V divide al espacio fase en dos regiones donde las trayectorias se mueven en dirección opuesta izquierda-derecha, y la ceroclina de ω lo divide también en dos regiones con direcciones opuestas arriba-abajo. Esta división del espacio fase nos permite identificar los puntos atractores, repulsores, puntos silla y hacer un estimado de la forma de las trayectorias solución.

Encontrar una solución analítica explícita con frecuencia es muy complicado o imposible, entonces se puede recurrir a métodos numéricos para la aproximación a la solución analítica o, como es nuestro caso, al análisis geométrico para aproximarnos al comportamiento cualitativo de las soluciones, llegar a caracterizar además cómo dependen las soluciones de su estado inicial x_0 y de los parámetros que puedan haber.

La intersección de las ceroclinas nos indica los punto de equilibrio

$$V(a - V)(V - 1) + I = \frac{b}{c}V.$$

En este caso los diferentes valores de los parámetros determinan qué tan pronunciada es la gráfica de la cúbica y la pendiente de la recta. Así que para $a = -0,8$, $b = 0,03$, $c = 0,02$ tenemos un único punto de equilibrio en (V_0, ω_0) que depende del valor de I . Cuya estabilidad podemos determinar a través de los valores propios de la matriz jacobiana en este punto.

Llamemos rama superior, central e inferior a las tres secciones que componen la curva cúbica (las ramas son localmente estable, inestable y estable respectivamente). Como se aprecia en la Figura 2.5, si la intersección de las ceroclinas ocurre en la rama superior o en la rama inferior, vemos que hay un punto de equilibrio atractor, y si la intersección ocurre en la rama central hay un punto de equilibrio inestable.

La Figura 2.5 exhibe, para valores de I que van aumentando, un atractor o un único ciclo límite. Cuando incrementamos I podemos observar una transición entre un estado de reposo (atractor) a una dinámica de picos periódica (ciclo límite atractor).

Capítulo 3

Bifurcaciones escalares: Un enfoque desde la teoría de las singularidades

En general los sistemas dinámicos pueden depender de parámetros internos o externos. En este capítulo presentamos un enfoque a la cuestión sobre la dependencia de los parámetros en un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Cuando hacemos variar un parámetro dentro de un sistema, el comportamiento del sistema puede cambiar drásticamente. La teoría de las bifurcaciones escalares estudia el cambio del número y la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema en función de un parámetro de control ([11], Capítulos I-IV). Aplicando los métodos de la teoría de las singularidades a la teoría de las bifurcaciones, en particular haciendo uso de las teorías del despliegue y de la clasificación, mostramos una manera de abordar problemas de bifurcación de la forma $g(x, \lambda) = 0$, donde g es una función escalar suave y $x, y \in \mathbb{R}$. Tratamos tres temas centrales que se refieren a cómo reconocer problemas de bifurcación equivalentes, la enumeración de todas las posibles perturbaciones cualitativamente diferentes de un problema de bifurcación dado y la clasificación de todos los problemas de bifurcación cualitativamente diferentes que puedan ocurrir hasta cierto “grado”.

3.1. Problemas de bifurcación elementales

En esta sección veremos cómo cambia la dinámica del sistema

$$\dot{x} = g(x),$$

cuando introducimos un parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ y lo hacemos variar.

Hemos visto, por ejemplo, en la Sección 2.2 con el modelo del sodio persistente con parámetro I , un ejemplo del cambio en la dinámica de un sistema cuando un parámetro toma diferentes valores, se puede observar que para $I = 0\text{pA}$ hay tres puntos de equilibrio, para $I = 16\text{pA}$ hay dos y para $I = 60\text{pA}$ hay un único punto de equilibrio.

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = g(x, \lambda), \tag{3.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es suave. El análisis geométrico cualitativo de un sistema dinámico (3.1) se centra en el estudio de los puntos de equilibrio del campo vectorial

$$g(x, \lambda) = 0, \tag{3.2}$$

en función de λ . A la ecuación (3.2) se le denomina **problema de bifurcación**, donde x es la variable de estado y λ el **parámetro de bifurcación**. Usamos g_x y g_λ para representar la derivada de g con respecto a x y la derivada de g con respecto a λ . Llamamos **diagrama de bifurcación** al conjunto solución

$$\{(x, \lambda) : g(x, \lambda) = 0\}. \tag{3.3}$$

Estamos interesados en el comportamiento cualitativo del diagrama (3.3). Para cada λ definimos $n(\lambda)$ como el número de x para los que (x, λ) es solución del problema de bifurcación (3.2), es decir

$$n(\lambda) = \#\{x : g(x, \lambda) = 0\}.$$

Sea $g(x_0, \lambda_0) = 0$, diremos que el punto (x_0, λ_0) es un **punto de bifurcación** si para cualquiera vecindad de λ_0 existe un λ tal que $n(\lambda_0) \neq n(\lambda)$, en otras palabras, un punto de bifurcación separa dos comportamientos cualitativos diferentes.

Si (x_0, λ_0) es un punto de bifurcación del problema (3.2) entonces sucede que $g_x(x_0, \lambda_0) = 0$. Veamos, el teorema de la función implícita ([2], Capítulo 13) aplicado a (3.2), dice que si la derivada con respecto a x en un punto de equilibrio (x_0, λ_0) es distinta de cero, $g_x(x_0, \lambda_0) \neq 0$, entonces existe una función suave $X(\lambda)$ definida sobre una vecindad de λ_0 , tal que para cada λ la ecuación (3.2) tiene una única solución $x = X(\lambda)$ en una vecindad de x_0 , $g(X(\lambda), \lambda) = 0$. Por tanto, una condición necesaria para que haya un cambio en el número de soluciones para λ cerca de λ_0 , es que $g_x(x_0, \lambda_0) = 0$. Pero como mostraremos, esta condición no es suficiente para que haya una bifurcación en un punto de equilibrio dado.

Llamaremos **puntos singulares** a aquellos puntos (x_0, λ_0) que satisfagan

$$g(x_0, \lambda_0) = g_x(x_0, \lambda_0) = 0. \quad (3.4)$$

Un ejemplo de singularidad sin bifurcación es el siguiente

$$g(x, \lambda) = x^3 + \lambda^2 = 0, \quad (3.5)$$

aquí la derivada con respecto a x es $g_x(x_0, \lambda_0) = 3x_0^2$, luego hay una singularidad en $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$. Por otro lado, esta ecuación tiene solución exacta $x = -\lambda^{2/3}$, así que no es bifurcación. Sin embargo esta situación es “frágil” y puede bifurcar bajo perturbaciones arbitrariamente pequeñas, como veremos más adelante. Con un pequeño abuso de terminología, hablaremos de bifurcación o de singularidad de forma intercambiable cada vez que nos encontremos en la situación (3.4).

Presentamos ahora tres tipos de bifurcaciones que pueden ocurrir en puntos de equilibrio de un sistema dinámico unidimensional de la forma

$$\dot{x} = g(x, \lambda), \quad \text{donde } x \in \mathbb{R} \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Es fácil ver que en los tres casos el punto $(0, 0)$ es un punto singular, es decir que $g(0, 0) = g_x(0, 0) = 0$.

3.1.1. Bifurcación *fold* o silla-nodo

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = g(x, \lambda) = x^2 + \lambda, \quad (3.6)$$

Su diagrama de bifurcación se muestra en la parte inferior de la Figura 3.1.

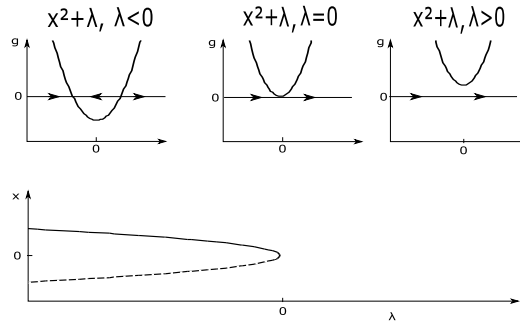


Figura 3.1: Bifurcación *fold* o Silla-Nodo. En la parte superior, en el plano (g, x) y para diferentes valores de λ , representamos los puntos de equilibrio del sistema (3.6) y su estabilidad. En la parte inferior, se muestra sobre el plano (x, λ) el diagrama de bifurcación para el mismo sistema, vemos en $(0, 0)$ un punto de bifurcación (Línea continua simboliza estabilidad estable y línea punteada inestable).

En este sistema cuando variamos $\lambda \in \mathbb{R}$, dos puntos de equilibrio, uno estable y otro inestable se van acercando y se funden en un punto silla-nodo, que luego desaparece.

Para $\lambda < 0$, Figura 3.1 superior izquierda, existen dos puntos de equilibrio en $x = \pm\sqrt{-\lambda}$, uno es estable y el otro inestable. Cuando $\lambda = 0$ el sistema tiene un único punto de equilibrio en $x = 0$ de tipo nodo-silla, atractor por la izquierda, repulsor por la derecha. Para $\lambda > 0$, la ecuación $g(x, \lambda) = 0$ no tiene solución real y por tanto no hay puntos de equilibrio. Luego los campos vectoriales que resultan ser cualitativamente diferentes están separados por el valor $\lambda = 0$, así que éste es un valor de bifurcación.

El diagrama de bifurcación del sistema, Figura 3.1, en el plano (λ, x) muestra los valores de los puntos de equilibrio x y su estabilidad para λ variando de forma continua, los puntos inestables son representados con una línea punteada y los puntos estables con una línea continua.

El sistema $\dot{x} = -x^2 + \lambda$ presenta un diagrama de bifurcación invertido es decir, para $\lambda < 0$ el sistema no tiene puntos de equilibrio, en $\lambda = 0$ aparece un punto de equilibrio silla-nodo, que se divide en dos puntos de equilibrio, uno inestable y otro estable. En ambos casos decimos que hay una bifurcación *fold*.

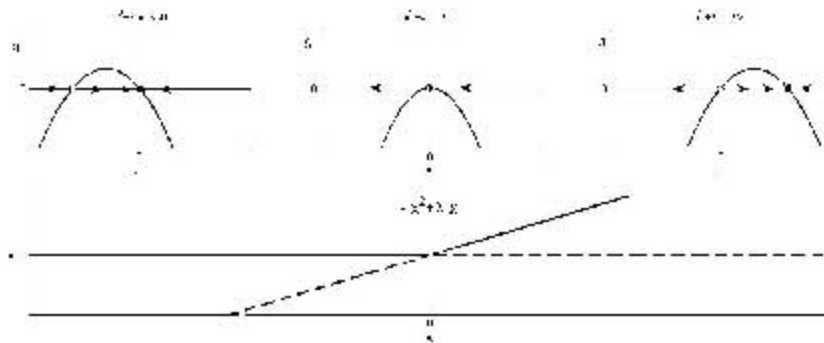


Figura 3.2: Bifurcación Transcrítica. En la parte superior, en el plano (g, x) y para diferentes valores de λ , representamos los puntos de equilibrio del sistema (3.7) y su estabilidad. En la parte inferior, se muestra sobre el plano (x, λ) el diagrama de bifurcación para el mismo sistema, vemos en $(0, 0)$ un punto de bifurcación (Línea continua simboliza estabilidad estable y línea punteada inestable).

3.1.2. Bifurcación transcritical

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = -x^2 + \lambda x. \quad (3.7)$$

El diagrama de bifurcación del sistema (3.7) se muestra en la parte inferior de la Figura 3.2. Esta bifurcación se caracteriza por la permanencia de uno de sus puntos de equilibrio y porque éste cambia de estabilidad dependiendo el signo de λ .

Vemos que $x = 0$ es siempre punto de equilibrio en el sistema, independiente de los valores que pueda tomar el parámetro de bifurcación λ y $x = \lambda$ es el otro punto de equilibrio, inestable para $\lambda < 0$ y estable para $\lambda > 0$. Para $\lambda = 0$ hay sólo un punto de equilibrio con estabilidad silla-nodo.

Mientras λ varia, en el diagrama de bifurcación, Figura 3.2 parte inferior, se puede ver como los dos puntos de equilibrio se van acercando hasta fundirse en $\lambda = 0$, y apartir de ése valor cambia la estabilidad de $x = 0$ y de $x = \lambda$. Luego $\lambda = 0$ es un valor de bifurcación. Los puntos de equilibrio intercambian sus estabildades al encontrarse en $\lambda = 0$.

Observamos que a través del cambio de variables $\hat{x} = x + \lambda$ y $\hat{\lambda} = -2\lambda$, la bifurcación transcritical se puede reescribir como $\dot{x} = x^2 - \lambda^2$

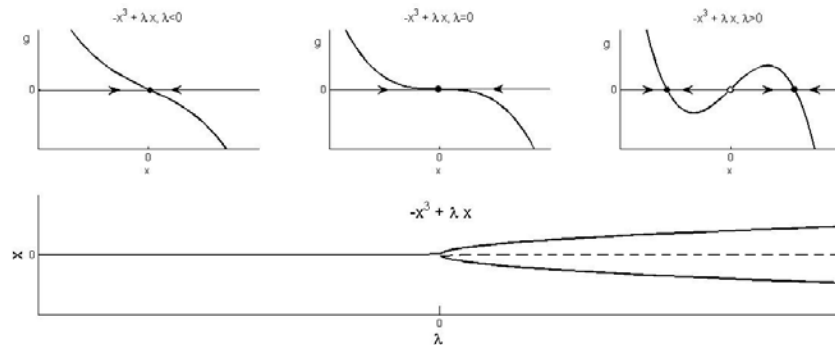


Figura 3.3: Bifurcación *pitchfork* supercrítica. En la parte superior, en el plano (g, x) y para diferentes valores de λ , representamos los puntos de equilibrio del sistema (3.8) y su estabilidad. En la parte inferior, se muestra sobre el plano (x, λ) el diagrama de bifurcación para el mismo sistema, vemos en $(0, 0)$ un punto de bifurcación (Línea continua simboliza estabilidad estable y línea punteada inestable).

3.1.3. Bifurcación *pitchfork* o tridente

La bifurcación *pitchfork* se caracteriza por ser simétrica, los puntos de equilibrio aparecen o desaparecen en pares simétricos. Hay dos tipos de bifurcación *pitchfork*, la supercrítica y la subcrítica.

Bifurcación *pitchfork* supercrítica

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = -x^3 + \lambda x, \quad (3.8)$$

cuyo diagrama de bifurcación aparece en la Figura 3.3. En esta bifurcación se pasa de una solución de equilibrio estable a dos nuevas soluciones de equilibrio estables y la solución inicial no desaparece pero si cambia su estabilidad. Para $\lambda \leq 0$ el sistema tiene un único punto de equilibrio en $x = 0$ estable y para $\lambda > 0$ hay puntos de equilibrio en $x = 0$ inestable y en $x = \pm\sqrt{\lambda}$ estables. Así $\lambda = 0$ es el valor de bifurcación para el sistema 3.8.

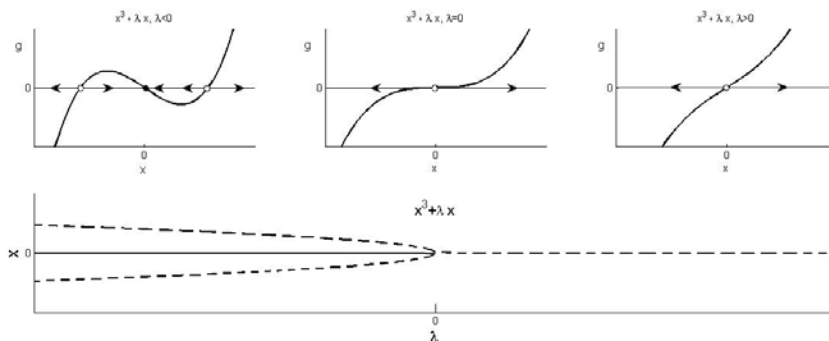


Figura 3.4: Bifurcación *pitchfork* subcrítica. En la parte superior, en el plano (g, x) y para diferentes valores de λ , representamos los puntos de equilibrio del sistema (3.9) y su estabilidad. En la parte inferior, se muestra sobre el plano (x, λ) el diagrama de bifurcación para el mismo sistema, vemos en $(0, 0)$ un punto de bifurcación (Línea continua simboliza estabilidad estable y línea punteada inestable).

Bifurcación *pitchfork* subcrítica

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = x^3 + \lambda x, \quad (3.9)$$

el diagrama de bifurcación de este sistema se encuentra en la parte inferior de la Figura 3.4. Antes de la bifurcación *pitchfork* subcrítico $\lambda = 0$ el sistema tiene una solución de equilibrio estable en $x = 0$ y dos inestables en $x = \pm\sqrt{-\lambda}$. Cuando $\lambda > 0$ desaparecen los puntos de equilibrio inestables y en $x = 0$ cambia de estabilidad.

3.2. Problema del reconocimiento para bifurcaciones

Localmente cualquier sistema que tenga un punto de bifurcación *fold*, o transcritical, o *pitchfork* en $(0, 0)$ está dado por las ecuaciones (3.6), o (3.7), o (3.8), respectivamente, en este sentido las bifurcaciones presentadas son llamadas formas normales. Sin embargo surge una pregunta de forma natural. Dado un problema de bifurcación $g(x, \lambda) = 0$ con punto singular en

(x_0, λ_0) ¿Cuál tipo de bifurcación es?. Una manera de abordar este tema es conocer cuáles son las formas normales existentes y poder caracterizar todos los problemas de bifurcación que son equivalentes a cada forma normal h . Equivalentes en el sentido de que las soluciones de g difieran de las de h sólo por un difeomorfismo. A este planteamiento se le denomina **Problema del reconocimiento para bifurcaciones**

En general, sean $g, h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones suaves definidas en una vecindad suficientemente pequeña del origen. Diremos que g es **fuertemente equivalente** a h , notación $g \approx h$, si existe un difeomorfismo local $X(x, \lambda)$ y una función $S(x, \lambda)$ con:

$$X(0, 0) = 0, \quad X_x(x, \lambda) > 0, \quad S(x, \lambda) > 0,$$

tales que

$$h(x, \lambda) = S(x, \lambda)g(X(x, \lambda), \lambda), \quad (3.10)$$

cerca del origen. Esta Sección y las próximas de este capítulo, están basadas en los primeros cuatro capítulos del libro de Golubitsky [11].

Las condiciones sobre X y S tienen el proposito de preservar la orientación de x y λ y la información acerca del número y la estabilidad de las soluciones; si g y h son fuertemente equivalentes, entonces g_x y h_x tienen el mismo signo cuando g y h se anulan. Consideramos la ecuación (3.10) y la derivamos con respecto a x

$$h_x = S_x \cdot g(X, \lambda) + S \cdot g_x(X, \lambda) \cdot X_x.$$

Cuando $g(x, \lambda) = 0$ tenemos que $h_x = Sg_x(X, \lambda)X_x$ donde $S > 0$, $X_x > 0$, por tanto g_x y h_x tienen el mismo signo.

Resolver el problema de reconocimiento para una función suave h definida cerca de $(0, 0)$ es caracterizar explícitamente a las funciones g que son fuertemente equivalentes a h . Entonces, la idea es conocer los posibles comportamientos de una función g “complicada”, a través de su equivalencia con h “simple”, donde h es una función dada. Si $g(x, \lambda) = 0$ es un problema de bifurcación y h una forma normal tal que $g \approx h$ diremos que h es la **forma normal para el problema de bifurcación**.

Algebraicamente dos problemas de bifurcación pueden ser similares y sin embargo tener diagramas de bifurcación muy diferentes, un ejemplo sencillo de esto son las formas normales $h(x, \lambda) = \varepsilon(x^2 + \delta\lambda^2)$, donde ε y δ son ± 1 .

Para $\delta = -1$ el diagrama de bifurcación consta de dos rectas que se cruzan entre sí (singularidad transcítica), y para $\delta = 1$ el diagrama de bifurcación es un único punto $(x, \lambda) = (0, 0)$, (singularidad centro aislado).

En la equivalencia fuerte de g y h , ecuación (3.10), el difeomorfismo (X, λ) puede mover el conjunto solución del problema $g(x, \lambda) = 0$, con $g(0, 0) = 0$ pero no cambia su naturaleza cualitativa. Notemos que la coordenada λ del difeomorfismo no depende de x , ya que x caracteriza el estado del sistema, mientras que λ es un parámetro externo. Para cada valor elegido λ el sistema tiene un estado de equilibrio que satisface el problema y que se conserva bajo la fuerte equivalencia con h , es decir cuando $h = S.g(X, \lambda)$. En particular si $g \approx h$ entonces

$$n_g(\lambda) = n_h(\lambda),$$

donde n_g y n_h son la cantidad de x para las cuales $g(x, \lambda) = 0$ y $h(x, \lambda) = 0$ respectivamente.

En las siguientes proposiciones enunciamos la solución al problema del reconocimiento para las siguientes formas normales:

- (a) $\varepsilon x^k + \delta \lambda$, $k \geq 2$,
 - (b) $\varepsilon x^k + \delta \lambda x$, $k \geq 3$,
 - (c) $\varepsilon(x^2 + \delta \lambda^2)$,
 - (d) $\varepsilon x^3 + \delta \lambda^2$,
- donde ε y δ son ± 1 .

Por ejemplo las funciones $g \approx h$ donde h es la bifurcación *fold*

$$h(x, \lambda) = x^2 + \lambda,$$

en la Sección 3.1.1, se caracterizan por

$$g(0, 0) = g_x(0, 0) = 0 \quad \text{y} \quad g_{xx}(0, 0) > 0, \quad g_\lambda(0, 0) > 0,$$

o las funciones $g \approx h$ donde h es la bifurcación *pitchfork* subcrítica

$$h(x, \lambda) = x^3 + \lambda x,$$

en la Sección 3.1.1, se caracterizan por

$$g(0, 0) = g_x(0, 0) = g_{xx} = g_\lambda = 0 \quad \text{y} \quad g_{xxx}(0, 0) > 0, \quad g_{\lambda x}(0, 0) > 0,$$

La idea de las siguientes cuatro proposiciones es que cualquier función $g(x, \lambda)$ que satisface ciertas condiciones sobre sus derivadas puede ser transformada, por un cambio de coordenadas apropiado, en la forma normal $h(x, \lambda)$ dada, es decir que existen X y S tales que $g \approx h$. Lo cual hace posible de una manera sencilla obtener una forma normal apropiada para un problema de bifurcación $g(x, \lambda) = 0$, observando que derivadas de g se anulan en el punto de bifurcación.

Dos observaciones para las cuatro proposiciones, vamos a suponer que $g(x, \lambda)$ es una función suave definida sobre alguna vecindad suficientemente pequeña del origen, y la notación $\text{sgn}(A)$ requiere que $A \neq 0$.

Proposición 1 Para $k \geq 2$, $g \approx \varepsilon x^k + \delta \lambda$ si y sólo si en $(x, \lambda) = (0, 0)$

$$g = \frac{\partial g}{\partial x} = \dots = \frac{\partial^{k-1} g}{\partial x^{k-1}} = 0, \quad (3.11)$$

y

$$\varepsilon = \text{sgn} \left(\frac{\partial^k g}{\partial x^k} \right), \quad \delta = \text{sgn} \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda} \right). \quad (3.12)$$

En la proposición 1, para $k = 2$, $\varepsilon = 1$ y $\delta = 1$ tenemos el caso de la bifurcación *fold* (3.6).

Proposición 2 Para $k \geq 3$, $g \approx \varepsilon x^k + \delta \lambda x$ si y sólo si en $x = \lambda = 0$

$$g = \frac{\partial g}{\partial x} = \dots = \frac{\partial^{k-1} g}{\partial x^{k-1}} = \frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0, \quad (3.13)$$

y

$$\varepsilon = \text{sgn} \left(\frac{\partial^k g}{\partial x^k} \right), \quad \delta = \text{sgn} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial x} \right). \quad (3.14)$$

En la proposición 2, para $k = 3$, $\varepsilon = \pm 1$ y $\delta = 1$ tenemos el caso de la bifurcación *pitchfork* (3.9)(3.8).

Haciendo un cambio en la notación, $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}$ y $g_\lambda = \frac{\partial g}{\partial \lambda}$, de igual forma para las demás derivadas de parciales de ordenes mayores.

Proposición 3 $g \approx \varepsilon x^2 + \delta \lambda^2$ si y sólo si en $x = \lambda = 0$

$$g = g_x = g_\lambda = 0, \quad (3.15)$$

y

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(g_{xx}), \quad \delta = \operatorname{sgn}(\det d^2g), \quad (3.16)$$

donde d^2g es la matriz hessiana de las segundas derivadas de g ,

$$d^2g = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{\lambda x} \\ g_{\lambda x} & g_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}.$$

Proposición 4 *La forma normal winged-cusp. $g \approx \varepsilon x^3 + \delta \lambda^2$ si y sólo si en $x = \lambda = 0$*

$$g = g_x = g_\lambda = g_{xx} = g_{\lambda x} = 0, \quad (3.17)$$

y

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(g_{xxx}), \quad \delta = \operatorname{sgn}(g_{\lambda\lambda}). \quad (3.18)$$

3.3. Despliegue universal

Cuando se introducen pequeñas perturbaciones al problema de bifurcación se presentan cambios drásticos en la forma de los diagramas de bifurcación. Por ejemplo $-x^3 + \lambda x \pm \varepsilon = 0$ deja de poseer una bifurcación *pitchfork* para cualquier $\varepsilon \neq 0$ (En la Figura 3.6 se presentan los diferentes diagramas de bifurcación perturbados que se pueden obtener en esta situación para la bifurcación *pitchfork*, $0 < \varepsilon \ll 1$). La idea en esta sección es usar la *teoría del despliegue universal* para clasificar todos diagramas de bifurcación perturbados de un problema de bifurcación dado $g(x, \lambda) = 0$; estas perturbaciones pueden ser descritas por parámetros auxiliares $\alpha \in \mathbb{R}^k$ en el problema de bifurcación.

La clasificación de todos los posibles comportamientos que pueden ocurrir en presencia de parámetros, se logra en dos pasos:

i) La construcción de una familia con k parámetros, o despliegue universal $G(x, \lambda, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}^k$, que describe todas las perturbaciones del problema de bifurcación $g(x, \lambda) = 0$.

ii) La exploración del espacio, haciendo variar α , con el objetivo de enumerar, módulo la equivalencia, los diferentes diagramas de bifurcación

$$\{(x, \lambda) : G(x, \lambda, \alpha) = 0, \alpha \in \mathbb{R}^k\}. \quad (3.19)$$

Para empezar sean g y G funciones suaves definidas sobre una vecindad suficientemente pequeña del origen. Le llamaremos a $G(x, \lambda, \alpha)$ donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$, un **despliegue con k parámetros** de g , si para $\alpha = 0$

$$G(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda), \quad (3.20)$$

Otra forma de decirlo es que un despliegue G es una familia paramétrica de perturbaciones de g . Con el objetivo de definir lo que es un despliegue universal de g , establecemos la equivalencia entre despliegues, por medio de la relación “factorizada por”, como sigue: Sean $G(x, \lambda, \alpha)$ donde $\alpha \in \mathbb{R}^k$ y $H(x, \lambda, \beta)$ donde $\beta \in \mathbb{R}^l$ despliegues de g , diremos que H es **factorizada** por medio de G , si existen mapeos suaves S , X , Λ y A tales que

$$H(x, \lambda, \beta) = S(x, \lambda, \beta)G(X(x, \lambda, \beta), \Lambda(\lambda, \beta), A(\beta)), \quad (3.21)$$

Esperamos que para $\beta = 0$ suceda que $H(x, \lambda, 0) = G(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda)$, por tanto las condiciones sobre las funciones son

$$S(x, \lambda, 0) \equiv 1, \quad X(x, \lambda, 0) \equiv x, \quad \Lambda(\lambda, 0) \equiv \lambda, \quad \text{y} \quad A(0) \equiv 0. \quad (3.22)$$

De esta manera, sí existen S , X , Λ y A tales que satisfacen (3.21) y cumplen las condiciones (3.22) escribimos

$$H(\cdot, \cdot, \beta) \approx G(\cdot, \cdot, A(\beta)).$$

Un despliegue H puede ser factorizado por medio de otro despliegue G que contenga menos parámetros. Por ejemplo consideremos el despliegue uniparamétrico de la *pitchfork*

$$H(x, \lambda, \beta) = x^3 - \lambda x + \beta x, \quad (3.23)$$

y el despliegue (sin parámetros) de la *pitchfork*

$$G(x, \lambda) = x^3 - \lambda x, \quad (3.24)$$

las funciones $S(x, \lambda, \beta) \equiv 1$, $X(x, \lambda, \beta) = x$, $\Lambda(\lambda, \beta) = \lambda - \beta$ y $A(\beta) = 0$ luego

$$H(x, \lambda, \beta) = G(x, \lambda - \beta). \quad (3.25)$$

Algunos despliegues importantes son los que contiene todas las perturbaciones de g , es decir son despliegues G tal que cada despliegue H de g pueda ser factorizado por medio de G , a este tipo de despliegues se le llama **versal**. Y si además no tienen redundancia en los parámetros, es decir depende del mínimo número de parámetros posible, le damos el nombre de **despliegue universal**. Un ejemplo de parámetro redundante, es el término βx en la ecuación (3.23), ya que es un término que puede ser “absorbido” por un cambio de variable $\lambda' = \lambda + \beta$. Al número mínimo de parámetros le llamamos **codimensión de g** . Si g no posee un despliegue versal diremos que g tiene **codimensión infinita**.

La siguiente proposición nos da el número de parámetros de despliegue necesarios para capturar todos los comportamientos perturbados posibles de g .

Proposición 5 (Corolario III.2.6 de [11]) *Si $g(x, \lambda)$ es una función suave de codimensión finita definida en una vecindad suficientemente pequeña cerca del origen, entonces la codimensión de g es igual al número de condiciones para la definición de g menos 2.*

En la proposición 5 “número de condiciones para la definición de g ” es el número de condiciones sobre las derivadas parciales de g que hacen a g fuertemente equivalente a su forma normal. Dado que toda singularidad satisface por definición que $g = g_x = 0$, podemos fijarnos en las condiciones adicionales a éstas, por eso el “menos 2”.

Ejemplos de despliegues universales para el problema de bifurcación *pitchfork* $h(x, \lambda) = x^3 - \lambda x$

$$\begin{aligned} (a) \quad & G(x, \lambda, \alpha, \beta) = x^3 - \lambda x + \alpha + \beta x^2, \\ (b) \quad & G(x, \lambda, \alpha, \beta) = x^3 - \lambda x + \alpha + \beta \lambda, \end{aligned}$$

El problema de reconocimiento para h es resuelto por las siguientes condiciones:

$$g = g_x = g_\lambda = g_{xx} = 0; \quad g_{xxx} > 0, \quad g_{\lambda x} > 0.$$

Entonces la codimensión de h es 2.

3.4. Problema del reconocimiento para despliegues universales

Sea $G(x, \lambda, \alpha)$ un despliegue de g . Supongamos que g es fuertemente equivalente a alguna forma normal h . El problema de reconocimiento para los despliegues universales se refiere a las condiciones sobre un despliegue G de g para ser un despliegue universal de g . Los siguientes resultados muestran que G es un despliegue universal si y sólo si un cierto determinante $m \times m$, que depende de las derivadas parciales de g y de G , es distinto de cero.

Proposición 6 (Puntos histéresis) *Supongamos que g es equivalente a $h(x, \lambda) = \pm x^3 \pm \lambda$, y sea G un despliegue uniparamétrico de g . Entonces G es un despliegue universal de g si y sólo si*

$$\det \begin{pmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (3.26)$$

en $x = \lambda = \alpha = 0$

Proposición 7 (Pitchfork) *Supongamos que g es equivalente a $h(x, \lambda) = \pm x^3 \pm \lambda x$, y sea $G(x, \lambda, \alpha, \beta)$ un despliegue biparamétrico de g . Entonces G es un despliegue universal de g si y sólo si*

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\lambda} & g_{xxx} \\ 0 & g_{\lambda x} & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (3.27)$$

en $x = \lambda = \alpha = \beta = 0$

Proposición 8 (Winged cusp) *Supongamos que g es equivalente a $h(x, \lambda) = \pm x^3 \pm \lambda^2$, y sea $G(x, \lambda, \alpha, \beta, \gamma)$ un despliegue triparamétrico de g . Entonces G es un despliegue universal de g si y sólo si*

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xxx} & g_{xx\lambda} \\ 0 & 0 & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} & g_{\lambda x\lambda} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha x\lambda} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta x\lambda} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma x\lambda} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (3.28)$$

en $x = \lambda = \alpha = \beta = \gamma = 0$

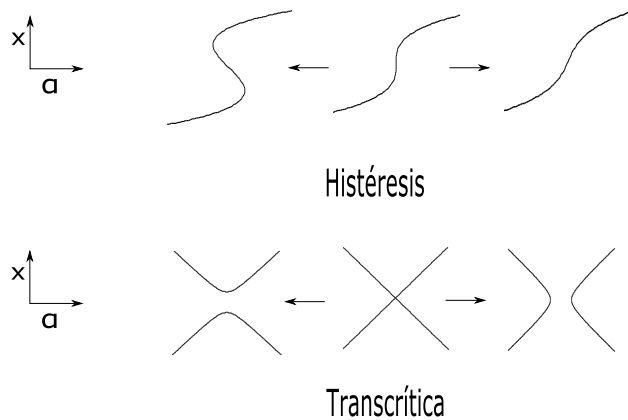


Figura 3.5: Despliegue de los diagramas de bifurcación no persistentes de codimensión uno, bifurcaciones histéresis y transcritical.

En el Cuadro 3.4 de la Sección 3.6 presentamos la solución al problema de reconocimiento para despliegues universales de las bifurcaciones elementales de codimensión ≤ 3 [11]

3.5. Diagramas de bifurcación persistentes

Con el objetivo enumerar los diagramas de bifurcación perturbados cualitativamente diferentes en un despliegue universal, definimos los **diagramas de bifurcación persistentes** como los diagramas de bifurcación perturbados en el despliegue universal que permanecen cualitativamente sin cambio cuando se adiciona una pequeña perturbación. En otro caso serán diagramas de bifurcación no persistentes.

Como veremos, el conjunto de valores de parámetros en \mathbb{R}^k para los cuales se tiene la no persistencia es la unión finita de hipersuperficies algebraicas en \mathbb{R}^k ([11], Sección III.5). dichas hipersuperficies seccionan el espacio paramétrico y las distintas clases de diagramas persistentes están separados por comportamientos no persistente.

Los comportamientos no persistentes de codimensión más baja son los de codimensión 1, la histéresis y la transcritical y el comportamiento doble silla nodo, Figura 3.5

La unión de todos los puntos del espacio de despliegue donde se encuen-

tran la histéresis, la transcítica o doble silla nodo, es el conjunto de transición entre distintos diagramas de bifurcación persistentes. (Una tabla con la gráfica del conjunto de transición y los diagramas de bifurcación perturbados persistentes de las bifurcaciones elementales de codimensión ≤ 3 , está dada en el capítulo IV, Sección 4 de [11])

Definición 1 (Conjunto de transición) Sea $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ un despliegue universal de una función $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave y definida en una vecindad suficientemente pequeña del origen. Separamos los fenomenos *no persistentes* en las siguientes definiciones

$$(a) \mathcal{B} = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \exists(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } G = G_x = G_\lambda = 0 \text{ en } (x, \lambda, \alpha)\}.$$

$$(a) \mathcal{H} = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \exists(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } G = G_x = G_{xx} = 0 \text{ en } (x, \lambda, \alpha)\}.$$

$$(a) \mathcal{D} = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \exists(x_1, x_2, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \text{ tal que } \\ G = G_x = 0 \text{ en } (x_i, \lambda, \alpha), i = 1, 2\}.$$

$$(a) \Sigma = \mathcal{B} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{D} = \text{conjunto de transición}.$$

Veamos por ejemplo el conjunto de transición para la pichfork (3.29) en la Figura 3.6. Tenemos que

$$G = x^3 + \beta x^2 - \lambda x + \alpha, \quad (3.29)$$

$$G_x = 3x^2 + 2\beta x - \alpha,$$

$$G_\lambda = -x,$$

$$G_{xx} = 6x + 2\beta.$$

Para calcular \mathcal{B} buscamos los (α, β) tales que $G = G_x = G_\lambda = 0$. Si $G_\lambda = 0$ entonces $x = 0$, reemplazando en $G = 0$ o en $G_x = 0$ tenemos que $\alpha = 0$ para todo β . Así $\mathcal{B} = \{(\alpha, \beta) : \alpha = 0\}$.

El conjunto \mathcal{H} está dado por $G = G_x = G_{xx} = 0$. De $G_{xx} = 0$ tenemos que $x = -\beta/3$, reemplazando en $G_x = 0$ llegamos a que $\lambda = -(\beta^2/3)$ y al sustituir los valores de x y λ en $G = 0$ concluimos que $\mathcal{H} = \{(\alpha, \beta) : \alpha = \beta^3/27\}$.

Para calcular \mathcal{D} necesitamos de la siguiente proposición,

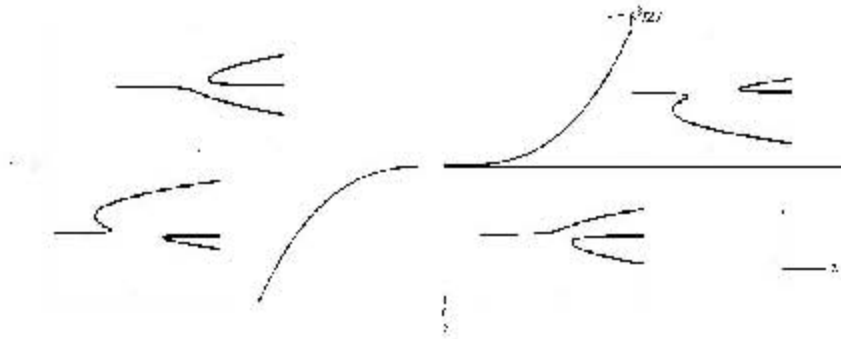


Figura 3.6: Conjunto de transición Σ de la *pitchfork* (3.29) y sus diagramas de bifurcación persistentes en las regiones que forman \mathbb{R}^2 .

Proposición 9 ([11] capítulo III, Lema 7.1) Si $h(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que 3 tal que $h = h_x = 0$ en dos puntos distintos x_1 y x_2 , entonces $h \equiv 0$.

Demostración: Por medio de una traslación de ejes $x \rightarrow x - x_1$ podemos suponer que $x_1 = 0$, entonces $h(0) = h_x(0) = 0$. Lo que implica que si igualamos $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ donde $h_x(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ en $x = 0$ las constantes d y c son cero, luego $h(x)$ tiene la forma $h(x) = ax^3 + bx^2$ para algunos coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$. Si escribimos las dos ecuaciones $h(x) = h_x(x) = 0$ como un producto de matrices

$$\begin{pmatrix} x^3 & x^2 \\ 3x^2 & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

cuyo determinante resulta ser $-x^4 \neq 0$, lo que implica que $a = b = 0$ entonces $h \equiv 0$.

Continuando con nuestro ejemplo, desde la proposición 9 tenemos que para el despliegue universal de la *pitchfork* $\mathcal{D} = \emptyset$. Luego $\Sigma = \mathcal{B} \cup \mathcal{H} = \{\alpha \in \mathbb{R}^k : \exists(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } G = G_x = G_{xx} = G_\lambda = 0 \text{ en } (x, \lambda, \alpha)\}$. El teorema que enunciaremos más adelante, muestra que los diagramas de bifurcación perturbados pueden ser enumerados por ciertas regiones abiertas en el espacio de despliegue.

Supongamos que $g(x, \lambda)$ es una función suave de codimensión finita, definida sobre una vecindad suficientemente pequeña del origen, con despliegue

universal $G(x, \lambda, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^k$. Sea Σ el conjunto de transición. Sea W una vecindad apropiada de cero en \mathbb{R}^k .

El resultado principal de esta sección dice que si α_1, α_2 pertenecen a la misma componente conexa de $W \sim \Sigma$, entonces $G(\cdot, \cdot, \alpha_1)$ y $G(\cdot, \cdot, \alpha_2)$ son equivalentes el uno al otro. En otras palabras, para cada pareja α_1, α_2 en una componente dada de $W \sim \Sigma$

$$G(\cdot, \cdot, \alpha_1) \approx G(\cdot, \cdot, \alpha_2).$$

Para mostrar esto, se construye una vecindad V del origen en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y entonces se prueba la equivalencia entre $G(\cdot, \cdot, \alpha_1)$ y $G(\cdot, \cdot, \alpha_2)$ sobre V (Para α_1 y $\alpha_2 \in W$). Como se consideran difeomorfismos (X, Λ) , donde Λ no depende de x , es más conveniente considerar a V como un rectángulo vecindad de $(0, 0)$; es decir, una vecindad de la forma $V = U \times L$ donde U y L son intervalos cerrados.

Consideremos $g(x, \lambda)$ con una singularidad de codimensión finita en el origen. Primero elegiremos una vecindad apropiada del origen sobre la cual formularemos el resultado principal. Específicamente $U \times L$ debe ser tal que:

- (a) g y g_x no se anulan simultáneamente sobre la frontera de la vecindad, $\partial(U \times L)$.
- (b) g no se anula sobre $(\partial U) \times L$ (Las caras superior e inferior).

Sea $G(x, \lambda, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}^k$ es un despliegue universal de g . Ahora, $G(\cdot, \cdot, 0) = g$, satisface las condiciones anteriores. Por continuidad elegimos una vecindad de cero $W \subset \mathbb{R}^k$ tal que para cualquier $\alpha \in W$:

- (a) G y G_x no se anulan simultáneamente sobre $\partial(U \times L)$.
- (b) G no se anula sobre $(\partial U) \times L$.

Teorema 2 (*[11], Teorema III.6.1*) Sean g, G, U, L, W y Σ como hemos dicho en el párrafo anterior. Si α_1, α_2 pertenecen a la misma componente conexa de $W \sim \Sigma$, entonces existe un difeomorfismo $(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda))$ que mapea $U \times L$ en sí mismo, y una función $S(x, \lambda)$ tal que

$$G(x, \lambda, \alpha_2) = S(x, \lambda)G(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda), \alpha_1).$$

Los difeomorfismos mapean cada borde de $U \times L$ en sí mismo.

3.6. Clasificación por codimensión

El objetivo de esta sección es la clasificación de todos los problemas de bifurcación $g(x, \lambda) = 0$ con una variable de estado $x \in \mathbb{R}$, de codimensión menor o igual a 3. Existen once singularidades con estas características, son conocidas como **Problemas de bifurcación elementales**. Hemos puesto en cuadros la información tratada en este capítulo para estas once singularidades en:

El Cuadro 3.1: Formas Normales para singularidades de codimensión ≤ 3 , Sección 3.1.

El Cuadro 3.2: Solución del problema de reconocimiento para singularidades de codimensión ≤ 3 . Sección 3.2.

El Cuadro 3.3: Despliegue universal de las bifurcaciones elementales en el Cuadro 3.1, con sus diagramas de bifurcación no perturbados. Sección 3.3

El Cuadro 3.4: Solución al problema de reconocimiento para despliegues universales de las bifurcaciones elementales con codimensión ≤ 3 , Sección 3.4.

El siguiente teorema nos dice que en presencia de 3 o menos parámetros auxiliares, genericamente podemos observar sólo un número finito de diagramas de bifurcación persistentes. Esto nos da una forma de predecir cuál es el diagrama de bifurcación de un sistema del cual conocemos la singularidad organizadora y viceversa, de deducir cuál es a singularidad organizadora observando los diagramas de bifurcación persistentes.

Teorema 3 (Teorema de la clasificación) *Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave, definida en una vecindad suficientemente pequeña del origen, tal que $g = g_x = 0$ en $(x, \lambda) = (0, 0)$. Si $\text{codim } g \leq 3$, entonces g es equivalente a uno de los problemas de bifurcación listados en la Cuadro 3.1.*

Las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3 del capítulo IV, Sección 4 de [11] presentan todas las gráficas de las variedades de transición, junto con las gráficas de los diagramas de bifurcación persistentes de las singularidades de codimensión ≤ 3 .

	Forma Normal	Codimensión	Nomenclatura
(1)	$\varepsilon x^2 + \delta \lambda$	0	Punto límite
(2)	$\varepsilon(x^2 - \lambda^2)$	1	Transcrítica
(3)	$\varepsilon(x^2 + \lambda^2)$	1	Centro aislado
(4)	$\varepsilon x^3 + \delta \lambda$	1	Histéresis
(5)	$\varepsilon x^2 + \delta \lambda^3$	2	Cúspide asimétrica
(6)	$\varepsilon x^3 + \delta \lambda x$	2	<i>pitchfork</i>
(7)	$\varepsilon x^4 + \delta \lambda$	2	Pliegue cuártico
(8)	$\varepsilon x^2 + \delta \lambda^4$	3	
(9)	$\varepsilon x^3 + \delta \lambda^2$	3	<i>winged-cusp</i>
(10)	$\varepsilon x^4 + \delta \lambda x$	3	
(11)	$\varepsilon x^5 + \delta \lambda$	3	

Donde ε y δ son $+1$ o -1

Cuadro 3.1: Formas Normales para singularidades de codimensión ≤ 3 . Sección 3.1.

	Forma Normal	Condiciones	No degenerancia
(1,4, 7,11)	$\varepsilon x^k + \delta \lambda (k \geq 2)$	$g_{xx} = \dots = \frac{\partial^{k-1} g}{\partial x^{k-1}} = 0$	$\varepsilon = \text{sgn}\left(\frac{\partial^k g}{\partial x^k}\right), \delta = \text{sgn}(g_\lambda)$
(6,10)	$\varepsilon x^k + \delta \lambda x (k \geq 3)$	$g_{xx} = \dots = \frac{\partial^{k-1} g}{\partial x^{k-1}} = 0$ $g_\lambda = 0$	$\varepsilon = \text{sgn}\left(\frac{\partial^k g}{\partial x^k}\right), \delta = \text{sgn}(g_{x\lambda})$
(2,3)	$\varepsilon(x^2 + \delta \lambda^2)$	$g_\lambda = 0$	$\varepsilon = \text{sgn}(g_{xx}), \delta = \text{sgn}(\det d^2 g)$
(5)	$\varepsilon x^2 + \delta \lambda^3$	$g_\lambda = \det(d^2 g) = 0$ es- cogiendo $\nu \neq 0$ tal que $g_{\nu\nu} = 0$	$\varepsilon = \text{sgn}(g_{xx}), \delta = \text{sgn}(g_{\nu\nu\nu})$
(8)	$\varepsilon x^2 + \delta \lambda^4$	$g_\lambda = \det(d^2 g) = g_{\nu\nu\nu} = 0$ es- cogiendo $\nu \neq 0$ tal que $g_{\nu\nu} = 0$	$\varepsilon = \text{sgn}(g_{xx}), \delta = \text{sgn}(q)$ don- de $q = q_{\nu\nu\nu\nu} \cdot g_{xx} - 3g_{\nu\nu\nu}^2$
(9)	$\varepsilon x^3 + \delta \lambda^2$	$g_\lambda = g_{xx} = g_{x\lambda} = 0$	$\varepsilon = \text{sgn}(g_{xxx}), \delta = \text{sgn}(g_{\lambda\lambda})$

Cuadro 3.2: Solución al problema de reconocimiento para singularidades de codimensión ≤ 3 . Las condiciones incluyen el hecho de que $g = g_x = 0$. La igualdad $\delta = \text{sgn}(g_\lambda)$ significa que $g_\lambda \neq 0$ y que δ es igual al signo de g_λ . Sección 3.2.

	Despliegue universal	Diagramas no perturbados	
		$\delta = -1$	$\delta = 1$
(1)	$\varepsilon x^2 + \delta \lambda$		
(2,3)	$\varepsilon(x^2 + \lambda^2 + \alpha)$		
(4)	$\varepsilon x^3 + \delta \lambda + \alpha x$		
(5)	$\varepsilon x^2 + \delta \lambda^3 + \alpha + \beta \lambda$		
(6)	$\varepsilon x^3 + \delta \lambda x + \alpha + \beta x^2$		
(7)	$\varepsilon x^4 + \delta \lambda + \alpha x + \beta x^2$		
(8)	$\varepsilon x^2 + \delta \lambda^4 + \alpha + \beta \lambda + \gamma \lambda^2$		
(9)	$\varepsilon x^3 + \delta \lambda^2 + \alpha + \beta x + \gamma \lambda x$		
(10)	$\varepsilon x^4 + \delta \lambda x + \alpha + \beta \lambda + \gamma x^2$		
(11)	$\varepsilon x^5 + \delta \lambda + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$		

Cuadro 3.3: Despliegue universal de las bifurcaciones elementales en el Cuadro 3.1, con sus diagramas de bifurcación no perturbados ($\alpha = \beta = \gamma = 0$). Sección 3.3.

	Forma Normal	Matriz
(1)	$\varepsilon x^2 + \delta \lambda$	—
(2,3)	$\varepsilon(x^2 - \lambda^2)$	G
(4)	$\varepsilon x^3 + \delta \lambda$	$\begin{pmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} \end{pmatrix}$
(5)	$\varepsilon x^2 + \delta \lambda^3$	$\begin{pmatrix} 0 & g_{xx} & g_{x\lambda} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} \end{pmatrix}$
(6)	$\varepsilon x^3 + \delta \lambda x$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\lambda} & g_{xxx} \\ 0 & g_{\lambda x} & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} \end{pmatrix}$
(7)	$\varepsilon x^4 + \delta \lambda$	$\begin{pmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} & g_{\lambda xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta xx} \end{pmatrix}$
(8)	$\varepsilon x^2 + \delta \lambda^4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xx} & g_{x\lambda} & g_{xxx} \\ 0 & g_{xx} & g_{x\lambda} & g_{xxx} & g_{xx\lambda} & g_{x\lambda\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{xx} & g_{x\lambda} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha x\lambda} & G_{\alpha\lambda\lambda} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta x\lambda} & G_{\beta\lambda\lambda} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma x\lambda} & G_{\alpha\lambda\lambda} \end{pmatrix}$
(9)	$\varepsilon x^3 + \delta \lambda^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\lambda} & g_{xxx} \\ 0 & g_{\lambda x} & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} \end{pmatrix}$
(10)	$\varepsilon x^4 + \delta \lambda x$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\lambda} & 0 & g_{xxxx} \\ 0 & g_{\alpha x} & g_{\lambda\lambda} & g_{\lambda xx} & g_{\lambda xxx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\lambda} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha xxx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\lambda} & G_{\beta xx} & G_{\beta xxx} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\lambda} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma xxx} \end{pmatrix}$
(11)	$\varepsilon x^5 + \delta \lambda$	$\begin{pmatrix} g_\lambda & g_{\lambda x} & g_{\lambda xx} & g_{\lambda xxx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha xxx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta xx} & G_{\beta xxx} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma xxx} \end{pmatrix}$

Cuadro 3.4: Solución al problema de reconocimiento para despliegues universales de las bifurcaciones elementales de codimensión ≤ 3 , Sección 3.4

Capítulo 4

Teoría geométrica de las perturbaciones singulares

En este capítulo introducimos un método para analizar geoméricamente sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias perturbados singularmente, es decir, sistemas que se caracterizan por tener una separación de escalas temporales entre sus variedades. Esta exposición está basada en las notas de lectura [17], con fundamento en los teoremas sobre variedades invariantes de Fenichel [7].

Los **problemas de perturbación singular** son sistemas dinámicos que constan de un parámetro para el cual las soluciones en el valor límite del parámetro difieren sustancialmente, en número o en forma, de las soluciones del problema principal. Tomemos como ejemplo el siguiente sistema, conocido como la ecuación de Van der Pol, con parámetro de perturbación singular $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - \frac{x^3}{3} + x, \\ \dot{y} &= -x.\end{aligned}$$

Este sistema, para $0 < \varepsilon \ll 1$ tiene un ciclo límite en el plano, mientras que en el límite singular $\varepsilon = 0$ las trayectorias están restringidas al conjunto $y = \frac{x^3}{3} - x$.

Una característica de los problemas de perturbación singular es que sus soluciones se desarrollan en varias escalas de tiempo. En la ecuación de Van der Pol, la variable y se mueve en una escala de tiempo característica de $O(1)$, mientras que la variable x en una escala de tiempo característica de $O(1/\varepsilon)$. La teoría geométrica de las perturbaciones singulares toma ventaja

de esta separación de escalas temporales y del límite singular, para obtener problemas reducidos que son más simples que el problema completo y construir, a partir de las soluciones de estos, una aproximación a la solución del problema original.

4.1. Introducción a sistemas rápido-lento

Consideremos el sistema dinámico rápido-lento (4.1),

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x' = f(x, y, \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= y' = \varepsilon g(x, y, \varepsilon),\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde la variable $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ($m, n=1$ o 2) y el parámetro $0 < \varepsilon \ll 1$. Supongamos que las funciones $f : \mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son suficientemente suaves. En el cual la variable x tiene una escala de tiempo mucho mayor que la escala de la variable y , así la variable x es llamada **variable rápida** y la variable y es llamada **variable lenta**. A través del cambio de escala temporal $\tau = \varepsilon t$ obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon \dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \\ \frac{dy}{d\tau} &= \dot{y} = g(x, y, \varepsilon),\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde las derivadas ahora son con respecto a la escala temporal lenta τ , así al sistema (4.1) le llamaremos **sistema rápido** y **sistema lento** al sistema (4.2). Cada sistema está asociado de forma natural con un límite distinto $\varepsilon \rightarrow 0$.

Al considerar $\varepsilon = 0$ en el sistema rápido (4.1) se define el **sistema capa**

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, 0), \\ y' &= 0,\end{aligned}\tag{4.3}$$

Al considerar $\varepsilon = 0$ en el sistema lento (4.2) se define el **sistema reducido**

$$\begin{aligned}f(x, y, 0) &= 0, \\ \dot{y} &= g(x, y, 0).\end{aligned}\tag{4.4}$$

Notemos que el sistema capa (4.3) es una familia uniparamétrica, con parámetro y , de sistemas de m dimensiones $x' = f(x, y)$, definida sobre

\mathbb{R}^{m+n} . El sistema reducido (4.4) describe la evolución de la variable y sobre el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y, 0) = 0\}$, su flujo no es trivial pero está restringido a este conjunto. Por tanto, los sistemas capa y reducido son dos aproximaciones diferentes al sistema principal (4.1) para $0 < \varepsilon \ll 1$.

Tomemos otra vez como ejemplo la ecuación de Van der Pol

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - \frac{x^3}{3} + x, \\ \dot{y} &= -x.\end{aligned}\tag{4.5}$$

El flujo de los subsistemas reducido y capa se muestran en la Figura 4.1, junto con el campo vectorial del sistema principal. En este caso, el flujo reducido $\dot{y} = -x$ está restringido al conjunto

$$M = \{(x, y) | y = \frac{x^3}{3} - x\},$$

este flujo que representamos con flechas simples sobre la curva cúbica. El flujo del sistema capa

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \frac{x^3}{3} + x, \\ \dot{y} &= 0,\end{aligned}\tag{4.6}$$

exhibe capas horizontales parametrizadas por los diferentes valores de y constante. Luego dependiendo del valor de la constante y el sistema (4.6) tiene uno, dos o tres puntos de equilibrio. El flujo de este sistema está representado en la Figura 4.1 con flechas dobles, justamente sobre horizontales.

La idea es poder utilizar los sistemas reducido y capa dependiendo de la región en el espacio fase para aproximar las soluciones del sistema original (4.5). Cerca del conjunto M , una trayectoria podría ser aproximada por soluciones del flujo reducido, y suficientemente lejos de M , esperamos que el movimiento lento de la variable y sea irrelevante y poder aproximar las trayectorias por el flujo capa.

El objetivo de la teoría geométrica de las perturbaciones singulares es usar la información dada por las dinámicas rápida y lenta, sobre el espacio fase del sistema (4.1), para entender la dinámica del sistema (4.1), o su sistema equivalente (4.2), para $0 < \varepsilon \ll 1$.

Este enfoque geométrico para el estudio de la dinámica de sistemas con múltiples escalas temporales, tiene como herramienta principal la teoría de

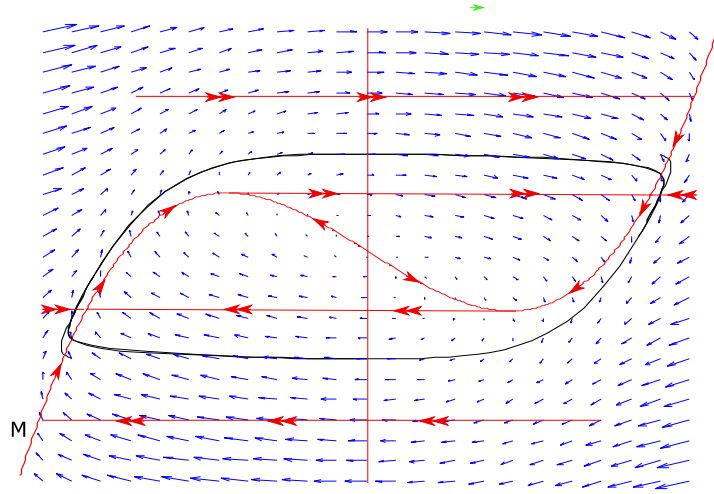


Figura 4.1: Campo vectorial y ciclo límite del sistema (4.5) para $0 < \varepsilon \ll 1$, junto con el flujo del sistema reducido, representado por flechas simples sobre la ceroclina cúbica M y flujo del sistema capa, representado por flechas dobles sobre los segmentos horizontales.

las variedades invariantes de Fenichel, aquí enunciaremos los tres teoremas principales [7], que tratan de las perturbaciones de las variedades invariantes normalmente hiperbólicas para sistemas rápido-lento.

4.2. Variedades invariantes

Veamos algunos conceptos que nos permitirán enunciar los resultados centrales de este capítulo.

Sea $\phi_t(x, y)$ el flujo definido por el sistema (4.1). Sea $E \in \mathbb{R}^2$, supongamos que f y g son suaves sobre este conjunto. Decimos que el conjunto $S \subset E$ es invariante con respecto al flujo ϕ_t , si $\phi_t(S) \subset S$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Si $\phi_t(S) \subset S$ para toda $t \geq 0$, se dice que es invariante positivo con respecto a ϕ_t y si es para toda $t \leq 0$ diremos que es invariante negativo con respecto a ϕ_t .

Si M es el conjunto de puntos de equilibrio del sistema rápido (4.3),

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y, 0) = 0\},$$

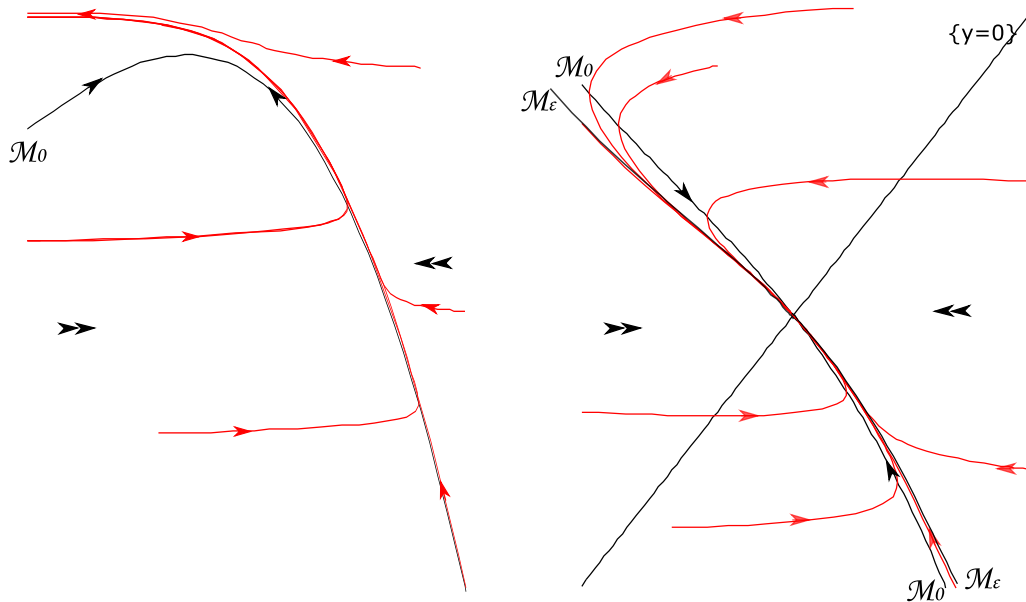


Figura 4.2: Teoría de Fenichel: Variedad crítica \mathcal{M}_0 y variedad lenta \mathcal{M}_ε en los casos de hiperbolicidad normal (derecha) y singularidad (izquierda).

a la variedad n -dimensional, posiblemente acotada $\mathcal{M}_0 \subset M$ se le denomina la variedad crítica.

Denotemos como $(D_x f)(p, 0)$ a la matriz de primeras derivadas parciales con respecto a las variable rápida x , evaluada en el punto p . Diremos que la variedad \mathcal{M}_0 es **normalmente hiperbólica**, si para todo $(x, y) \in \mathcal{M}_0$ los valores propios de $D_x f(x, y, 0)$ no tienen parte real cero; o dicho de otra forma, si para cada $(x^*, y^*) \in \mathcal{M}_0$ tenemos que x^* es un punto de equilibrio hiperbólico de la ecuación $x' = f(x, y^*, 0)$

Enunciaremos ahora los tres teoremas de Fenichel. La figura 4.2 brinda un soporte gráfico a nuestra exposición.

4.2.1. Primer teorema de Fenichel

Teorema 4 *Supongamos que la variedad $\mathcal{M}_0 \subset \{f(x, y, 0) = 0\}$ es compacta, posiblemente con frontera, normalmente hiperbólica. Sean f y g suficientemente suaves. Entonces para $0 < \varepsilon \ll 1$ suficientemente pequeño,*

existe una variedad \mathcal{M}_ε localmente invariante, bajo el flujo del sistema (4.1), y difeomorfa a \mathcal{M}_0 . Además si $f, g \in C^r$ ($r < \infty$) entonces \mathcal{M}_ε es C^r .

La variedad \mathcal{M}_ε del teorema 4 es llamada la **variedad lenta** (En la literatura se usa también las letras S y C para variedad crítica). Es importante recalcar la diferencia esencial entre la variedad crítica y la variedad lenta: La variedad crítica se define en el límite singular $\varepsilon = 0$ y la variedad lenta para $\varepsilon > 0$.

4.2.2. Segundo teorema de Fenichel

Las mismas conclusiones del teorema 4 para la variedad crítica \mathcal{M}_0 , se mantienen localmente para sus variedades estable e inestable. Por definición la variedad crítica \mathcal{M}_0 está completamente constituida de puntos críticos p . Cada uno tiene su propia variedad estable $W_{loc}^s(p)$ o variedad inestable $W_{loc}^u(p)$. Entonces las variedades estable e inestable de \mathcal{M}_0 son las uniones

$$W_{loc}^s(\mathcal{M}_0) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}_0} W_{loc}^s(p), \quad W_{loc}^u(\mathcal{M}_0) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}_0} W_{loc}^u(p), \quad (4.7)$$

El siguiente teorema de Fenichel, describe las variedades estable e inestable de la variedad lenta \mathcal{M}_ε , como perturbaciones de las variedades estable e inestable de la variedad crítica.

Teorema 5 *Supongamos que la variedad crítica \mathcal{M}_0 es compacta, posiblemente con frontera, y normalmente hiperbólica. Sea f y g son suficientemente suaves. Si $0 < \varepsilon \ll 1$ es suficientemente pequeño, existen variedades $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon)$ y $W^u(\mathcal{M}_\varepsilon)$, localmente invariante bajo el flujo del sistema 4.1, y difeomorfas a $W^s(\mathcal{M}_0)$ y $W^u(\mathcal{M}_0)$ respectivamente.*

Las variedades $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon)$ y $W^u(\mathcal{M}_\varepsilon)$ sigue siendo variedades estable e inestable, respectivamente, pero en un sentido diferente ya que \mathcal{M}_ε no es un conjunto de puntos de equilibrio. Sin embargo las soluciones en $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon)$ decaen exponencialmente a \mathcal{M}_ε cuando $t \rightarrow \infty$ y las soluciones en $W^u(\mathcal{M}_\varepsilon)$ decaen exponencialmente a \mathcal{M}_ε para $t \rightarrow -\infty$.

De los teoremas 4 y 5 de Fenichel enunciados, una variedad crítica normalmente hiperbólica atractora es perturbada a una variedad lenta invariante atractora, para el flujo $\varepsilon > 0$.

4.2.3. Tercer teorema de Fenichel

Otro detalle en el análisis de la estructura del flujo bajo perturbaciones, es lo que ocurre con las variedades estable e inestable de los puntos $p_0 \in \mathcal{M}_0$ de forma individual al ser perturbados en puntos $p_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon$, que en general no son puntos de equilibrio. Hasta este momento hemos visto con el teorema 4 la existencia de la variedad \mathcal{M}_ε difeomorfa a \mathcal{M}_0 y localmente invariante bajo el flujo de 4.1. Con el teorema 5 aseguramos que las variedades estable e inestable de \mathcal{M}_ε son localmente invariantes bajo el flujo del sistema. Ahora, las variedades estable e inestable individuales, $W_{loc}^s(p_0)$ y $W_{loc}^u(p_0)$ son perturbadas en objetos análogos $W_{loc}^s(p_\varepsilon)$ y $W_{loc}^u(p_\varepsilon)$, sin embargo las variedades no perturbadas son invariantes y sus homólogos no lo son, esto se debe justamente a que p_ε no es invariante bajo el flujo del sistema 4.1.

Sin embargo las familias

$$\{W_{loc}^u(p_\varepsilon) | p_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon\}$$

y

$$\{W_{loc}^s(p_\varepsilon) | p_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon\}$$

son invariantes en un cierto sentido, dado en el teorema que enunciamos a continuación.

La evolución hacia adelante de un conjunto $A \subset D$, restringido a D , está dado por el conjunto

$$A \cdot_D t = \{\phi_t(x) : x \in A \text{ y } \phi_s(x) \subset D \text{ para } s \in [0, t]\}.$$

Teorema 6 *Supongamos que la variedad $\mathcal{M}_0 \subset \{f(x, y, 0) = 0\}$ es compacta, posiblemente con frontera, y normalmente hiperbólico. Supongamos además que f y g son suficientemente suaves. Si $\varepsilon > 0$ y suficientemente pequeño, para cada $p_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon$, existe una variedad de dimensión m*

$$W^s(p_\varepsilon) \subset W^s(\mathcal{M}_\varepsilon),$$

y una variedad de dimensión l

$$W^u(p_\varepsilon) \subset W^u(\mathcal{M}_\varepsilon),$$

que son difeomorfas a $W^s(p_0)$ y $W^u(p_0)$ y están a $O(\varepsilon)$ de éstas, respectivamente.

Además, la familia $\{W^s(p_\varepsilon) : p_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon\}$ es invariante en el sentido

$$W^s(p_\varepsilon) \cdot_D t \subset W^s(\phi_t(p_\varepsilon)), \quad \text{si } \phi_s(p_\varepsilon) \in D \text{ para todo } s \in [0, t],$$

y la familia $\{W^u(p_\varepsilon) : p_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon\}$ es invariante en el sentido

$$W^u(p_\varepsilon) \cdot_D t \subset W^u(\phi_t(p_\varepsilon)), \quad \text{si } \phi_s(p_\varepsilon) \in D \text{ para todo } s \in [t, 0].$$

4.2.4. Teoría de Fenichel cerca de las singularidades

Los resultados que hemos enunciado han sido dados bajo la suposición de que \mathcal{M}_0 es una variedad normalmente hiperbólica, ahora ¿Qué sucede cuando f en el sistema rápido (4.1) posee una singularidad?. En la Figura 4.2 izquierda se presenta, un punto *fold* y cómo se comportan las trayectorias cerca del punto. Pues bien, la teoría de Fenichel se extiende a la presencia de puntos no hiperbólicos, a través de métodos de “blow-up-[19] [18] (Estos métodos no los desarrollamos en este trabajo). A nivel cualitativo, el hecho fundamental es que las singularidades de la variedad crítica proveen de forma natural puntos de transición entre el flujo reducido y el flujo capa.

Capítulo 5

Sistemas dinámicos con dos escalas temporales organizados por una singularidad

En este capítulo la idea es describir la estructura global del plano fase de un tipo de sistema con dos escalas temporales de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= G_{sing}(x, \lambda + y, \alpha), \\ \dot{y} &= \varepsilon(x - y),\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde G_{sing} es un despliegue universal de una singularidad dada y $0 < \varepsilon \ll 1$. Nos enfocaremos en dos singularidades: la histéresis y la *winged-cusp*. Usaremos los resultados sobre el despliegue universal de estas singularidades y la teoría geométrica de las perturbaciones singulares que hemos visto, para predecir y clasificar todos los retratos fase de esta clase de sistemas.

5.1. Una singularidad como centro organizador

5.1.1. Centros organizadores en problemas de bifurcación escalar

En el capítulo 3 estudiamos los problemas de bifurcación de la forma

$$g(x, \lambda) = 0, \quad \text{donde } x, \lambda \in \mathbb{R}\tag{5.2}$$

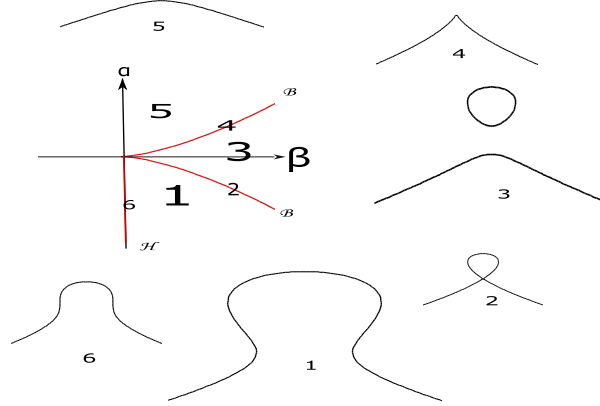


Figura 5.1: Conjunto de transición de la *winged-cusp* (rojo) para $\gamma = 0$ en el plano (β, α) . Diagramas de bifurcación persistentes 1, 3 y 5. Diagramas de bifurcación no persistentes 2, 4 y 6, en el despliegue universal de la *winged-cusp*.

y clasificamos todos los problemas de bifurcación de codimensión ≤ 3 . Encontramos que hay once formas normales (ver cuadro 3.1). Vimos que bajo pequeñas perturbaciones, con excepción de la singularidad *fold* $x^2 \pm \lambda = 0$, todas estas bifurcaciones elementales son no persistentes. Luego usamos el despliegue universal de g

$$G(x, \lambda; \alpha) = 0, \quad \text{donde } \alpha \in \mathbb{R}^k, \quad (5.3)$$

para organizar en un espacio de parámetros de dimensión k todos los posibles diagramas de bifurcación persistentes de una misma forma normal $g(x, \lambda)$. Donde k es el mínimo número de parámetros necesario y le llamamos la codimensión de $g(x, \lambda)$.

La variedad de transición $\Sigma = \mathcal{B} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{D}$, definida como la unión de los diagramas de bifurcación no persistentes de codimensión 1 contenidos en el despliegue universal, de alguna bifurcación de codimensión ≥ 1 , separa los diagramas de bifurcación persistentes en clases de equivalencia (Sección 3.5).

Por ejemplo, para la singularidad *winged-cusp*

$$g_{wc}(x, \lambda) = -x^3 - \lambda^2, \quad (5.4)$$

su despliegue universal,

$$G_{wc}(x, \lambda; \alpha, \beta, \gamma) = -x^3 - \lambda^2 + \beta x - \gamma \lambda x - \alpha, \quad (5.5)$$

tiene una singularidad histéresis, sobre la variedad \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 : \exists(x, \lambda) \in \mathbf{R}^2 \text{ tal que } G = G_x = G_{xx} = 0 \text{ en } (x, \lambda; \alpha, \beta, \gamma)\},$$

$$\begin{aligned} G &= -x^3 - \lambda^2 + \beta x - \gamma \lambda x - \alpha, \\ G_x &= -3x^2 + \beta - \gamma \lambda, \\ G_{xx} &= -6x, \end{aligned} \quad (5.6)$$

igualando a cero y despejando para α, β y γ en (5.6) resulta que

$$\beta - \gamma \lambda = 0, \quad -\lambda^2 = \alpha \text{ con } \alpha \leq 0, \quad (5.7)$$

lo que implica $\beta^2 = \gamma^2 \lambda^2$, por tanto \mathcal{H} está definida por

$$\beta^2 + \gamma^2 \alpha = 0 \text{ con } \alpha \leq 0.$$

Otra singularidad de codimensión 1 contenida en la *winged-cusp* es la transcítica sobre \mathcal{B} definida por

$$\mathcal{B} = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 : \exists(x, \lambda) \in \mathbf{R}^2 \text{ tal que } G = G_x = G_\lambda = 0 \text{ en } (x, \lambda; \alpha, \beta, \gamma)\}.$$

En la Figura 5.1, presentamos el conjunto de transición de la *winged-cusp* para $\gamma = 0$, junto a sus diagramas de bifurcación persistentes y no persistentes, organizados por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha \leq 0, \beta = 0, \gamma = 0\}, \\ \mathcal{B} &= \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha = \pm 2 \left(\frac{\beta}{3}\right)^{3/2}, \beta > 0, \gamma = 0\}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

Para la singularidad histéresis

$$g_{hy}(x, \lambda) = -x^3 - \lambda, \quad (5.9)$$

su despliegue universal

$$G_{hy}(x, \lambda; \beta) = -x^3 - \lambda + \beta x, \quad (5.10)$$

tenemos que \mathcal{H} esta dada por $\beta = 0$ y \mathcal{B} es vacio. En este caso el conjunto de transición es la misma singularidad histéresis, es decir que hay dos tipos de diagramas de bifurcación persistentes, dados por $\beta < 0$ y $\beta > 0$ en G_{hy} .

Para toda singularidad, y en particular para la *winged-cusp* y la histéresis, el diagrama de bifurcación no perturbado se encuentra en la intersección de todos los conjuntos no persistentes de codimensión 1. Esto implica que este punto, y solamente este punto, puede generar bajo perturbaciones infinitamente pequeñas todos los posibles diagramas persistentes. En este sentido, originalmente introducido por René Thom, el diagrama no perturbado es un centro organizador para los diagrama de bifurcación persistentes.

5.1.2. Ideas para encontrar centros organizadores en sistemas dinámicos

La idea del centro organizador es poderosa bajo dos aspectos complementarios:

- i. Permite clasificar y predecir todos los posibles diagramas de bifurcación de un problema de bifurcación organizado por una singularidad dada.
- ii. Permite reconocer el centro organizador de un sistema real a partir de datos experimentales, pues si observamos experimentalmente diagramas de bifurcación (necesariamente persistentes) que pertenecen al despliegue universal de una singularidad dada podemos formular muy razonablemente la hipótesis de que el sistema que estamos estudiando está organizado por dicha singularidad.

En principio, esta idea se puede aplicar directamente a diagramas de bifurcación que involucran bifurcaciones de atractores dinámicos (como ciclo límites y órbitas homoclinas). Sin embargo una teoría rigurosa para aplicar esta idea no existe. En este capítulo queremos explorar la idea de centro organizador para una clase de sistemas suficientemente sencillos, sistemas de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= G_{sing}(x, \lambda + y, \alpha), \\ \dot{y} &= \varepsilon(x - y),\end{aligned}\tag{5.11}$$

para los cuales dicha teoría se podría desarrollar. Esta clase de sistemas es en realidad bastante general, pues puede ser vista como una forma normal para sistemas bidimensionales con dos escalas temporales en los cuales la ceroclina de la variable rápida x esta organizada por una singularidad dada.

La idea que exploraremos en las siguientes dos secciones es la siguiente. Usaremos el conocimiento de la estructura global del despliegue universal de la singularidad organizadora de la ceroclina rápida para construir de forma geométrica a través de los sistemas capa y reducido los posibles planos fase singulares correspondientes a distintos diagramas de bifurcación persistentes. Por los teoremas de Fenichel, los planos fases singulares determinan los planos fases globales (en particular los atractores) del sistema a dos escalas temporales, por ε suficientemente pequeño.

5.2. Singularidad histéresis y las oscilaciones de relajación

Consideremos el modelo con dos escalas temporales

$$\dot{x} = G_{hy}(x, \lambda + y; \beta), \quad (5.12a)$$

$$= -x^3 - (\lambda + y) + \beta x,$$

$$\dot{y} = \varepsilon(x - y), \quad (5.12b)$$

donde $G_{hy}(x, \lambda; \beta) = -x^3 - \lambda + \beta x$ es el despliegue universal de la singularidad histéresis, $g_{hy}(x, \lambda) = -x^3 - \lambda$.

Vamos a construir el retrato fase singular del sistema (5.12). Observemos que la variable lenta y actúa como una modulación del parámetro de bifurcación λ en la dinámica rápida (5.12a), luego el análisis del sistema (5.12) se puede reducir a un análisis de la bifurcación en estado casi-estacionario, es decir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 - (\lambda + y) + \beta x, \\ \dot{y} &= 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

La dinámica depende entonces de la forma del diagrama de bifurcación persistente en el despliegue universal de la histéresis, para diferentes valores del parámetro de despliegue β . Consideremos el caso $\beta < 1$, de forma que la intersección de las ceroclinas de (5.12) es un sólo punto. El caso $\beta \geq 1$ se analiza de la misma forma. En la Figura 5.2 se presentan el flujo singular para todos los posibles diagramas de bifurcación.

El flujo reducido $\dot{y} = x - y$ está restringido al conjunto

$$\mathcal{M} = \{(x, y) : -x^3 - (\lambda + y) + \beta x = 0\}.$$

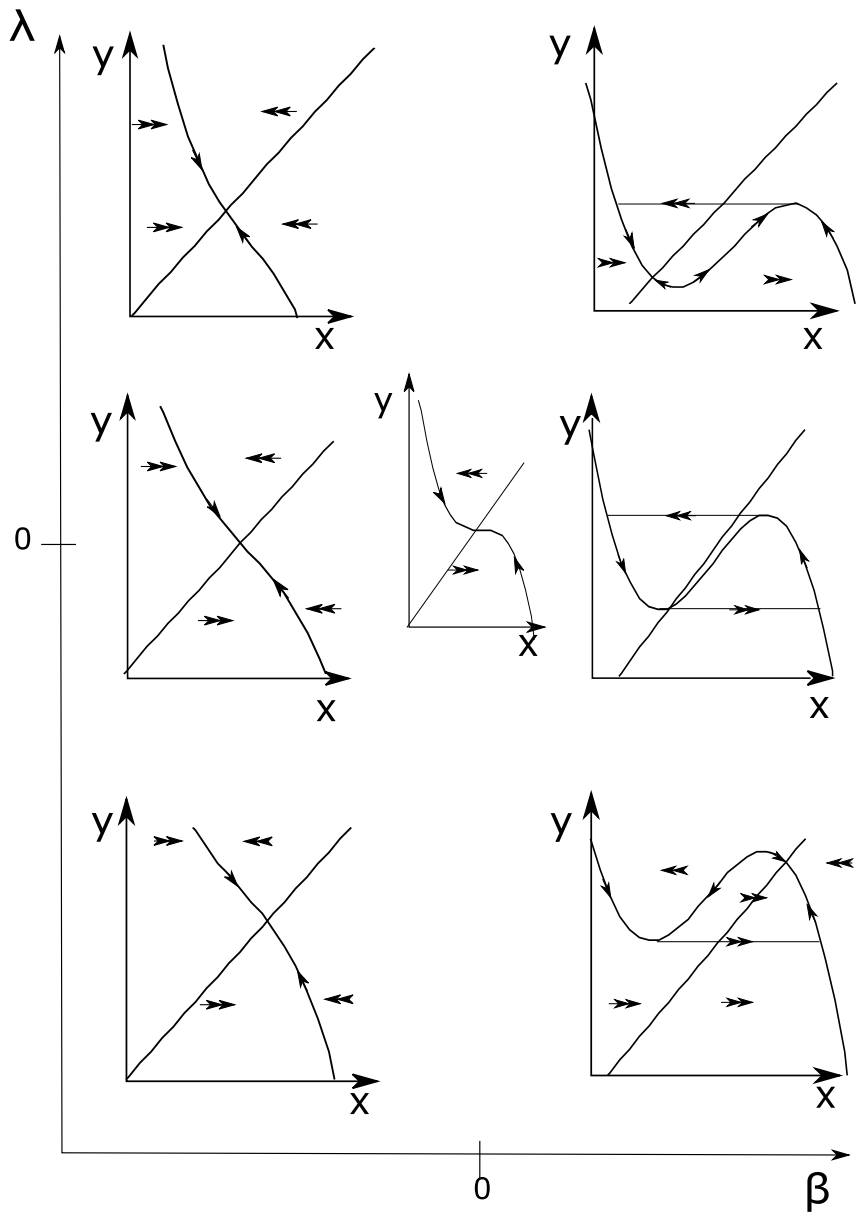


Figura 5.2: De izquierda a derecha para $\beta < 0$, $\beta = 0$ y $0 < \beta \leq 1$, todas las posibles dinámicas singulares del sistema bidimensional (5.12), $\varepsilon = 0$. La variedad crítica del sistema rápido toma la forma de uno de los dos diagramas de bifurcación persistentes en el despliegue universal de la singularidad histéresis, monótona decreciente o en S. Las flechas dobles y sencillas indican flujo rápido y lento respectivamente.

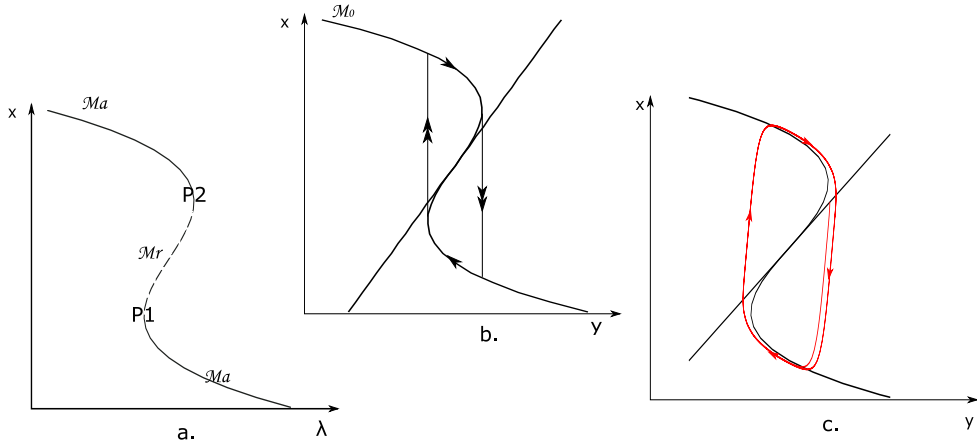


Figura 5.3: a. Diagrama de bifurcación persistente en el despliegue universal de la singularidad histéresis para $\beta > 0$. b. Trayectorias para los sistemas capa y reducido, del sistema (5.12) en el límite singular. c. Ceroclinas y ciclo límite atractor del sistema bidimensional (5.12) para $\varepsilon > 0$.

Los puntos por debajo de la recta $y = x$ sobre la variedad \mathcal{M} , son tales que $\dot{y} > 0$ así que el flujo va hacia arriba y de forma análoga, el flujo sobre la variedad para los puntos por encima de la recta $y = x$ va hacia abajo.

Para $\beta < 0$ la dinámica del sistema está formada por un solo atractor. La variedad crítica \mathcal{M} está definida por una función monótona decreciente, es decir que

$$D_x G_{wc}(x, \lambda + y, \beta) = -3x^2 + \beta < 0, \quad \text{para todo } (x, y), \quad (5.14)$$

por tanto la única opción para el flujo lento es ser atraído por el punto de intersección de las ceroclinas y para el flujo rápido es ser atraído hacia la variedad \mathcal{M} .

También podemos decir, a partir de (5.14), que la variedad \mathcal{M} es normalmente hiperbólica así que, por los teoremas de Fenichel en el capítulo 4, existe un $0 < \bar{\varepsilon} \ll 1$ tal que para todo $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ el flujo es persistente y así el punto de intersección de las ceroclinas es un atractor del sistema (5.12), Figura 5.4.

Para $\beta > 0$ la variedad crítica \mathcal{M} tiene dos puntos singularidad $P1$ y $P2$

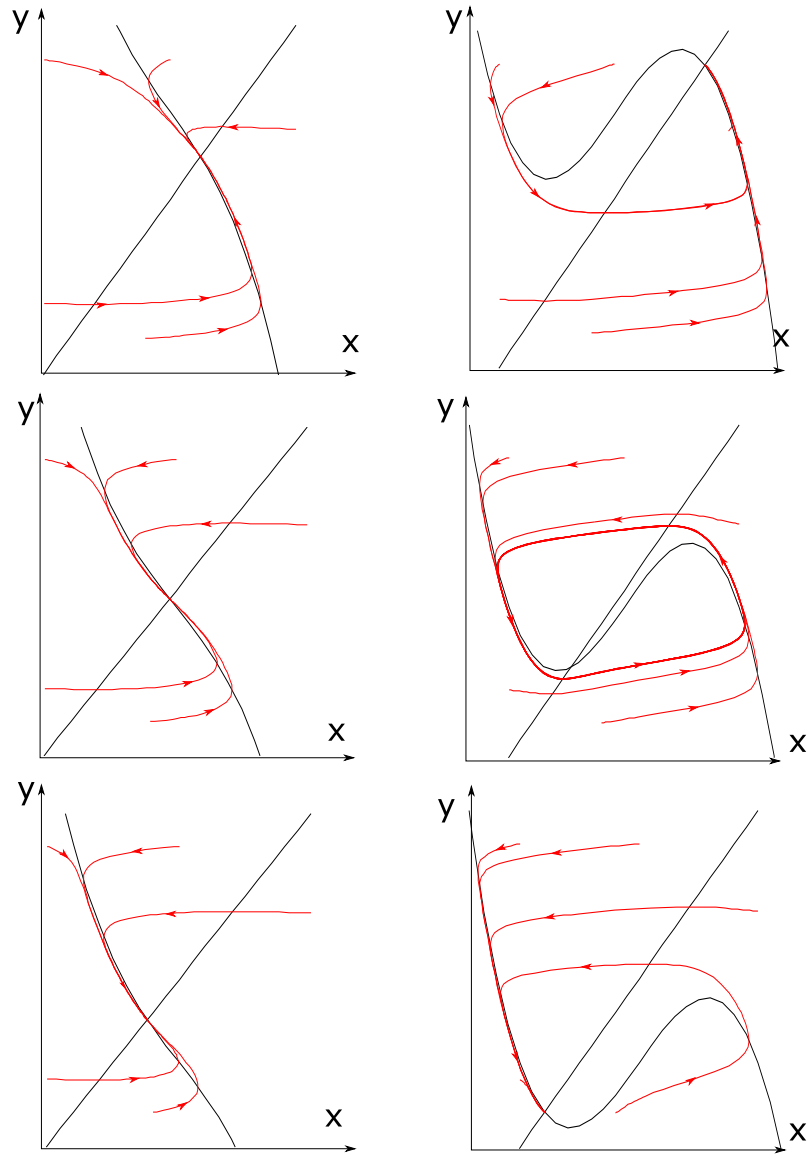


Figura 5.4: Posibles dinámicas de un sistema organizado por la histéresis. Sistema de ecuaciones (5.12) para $0 < \varepsilon \ll 1$,

(singularidad *fold*), donde

$$\begin{aligned} P1 &= \left(\left(\frac{\beta}{3} \right)^{1/2}, 2 \left(\frac{\beta}{3} \right)^{3/2} - \lambda \right), \\ P2 &= \left(- \left(\frac{\beta}{3} \right)^{1/2}, -2 \left(\frac{\beta}{3} \right)^{3/2} - \lambda \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Desde el análisis del sistema capa (5.13), deducimos que M está formada por dos ramas atractoras, llamemoslas M_a^{0+} y M_a^{0-} y una rama repulsora M_r entre $P1$ y $P2$, como en la Figura 5.3. Los teoremas de Fenichel aseguran la existencia de variedades lentas invariantes $M_a^{\varepsilon+}$ y $M_a^{\varepsilon-}$ para $0 < \varepsilon \ll 1$.

Debido a la presencia inherente de los puntos *fold* (silla nodo) no hiperbólicos en este tipo de sistemas se extendió, a través del método "blow-up" [19], la teoría de Fenichel a puntos no hiperbólicos, lo cual provee de persistencia al flujo singular en $P1$ y $P2$, y además permite un tránsito del flujo lento al flujo rápido de forma natural alrededor de estos puntos, como se muestra en la Figura 4.2.

Por tanto para el caso $\beta > 0$ el análisis de los posibles retratos fase singulares en la Figura 5.2 proporcionan tres tipos de dinámicas para el sistema (5.12), los cuales se muestran en la Figura 5.4. Si la intersección de las ceroclinas ocurre en M_a^{0+} o en M_a^{0-} hay un atractor, y si ocurre en M_r^0 encontramos, por el análisis del flujo lento, que es un punto inestable y gracias a la existencia de los puntos *fold* sabemos que para $0 < \varepsilon \ll 1$ hay un ciclo límite estable, también llamado ciclo de relajación- oscilación que corresponde a la separación en escalas temporales.

5.3. Singularidad *winged-cusp* y la existencia de biestabilidad entre un punto fijo y ciclo límite

Construyamos el retrato fase de un sistema dinámico con dos escalas temporales organizado por la singularidad *winged-cusp* de codimensión 3. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= G_{wcusp}(x, \lambda + y; \alpha, \beta, \gamma), \\ &= -x^3 + \beta x - (\lambda + y)^2 - \gamma(\lambda + y)x - \alpha, \\ \dot{y} &= \epsilon(x - y). \end{aligned} \quad (5.16)$$

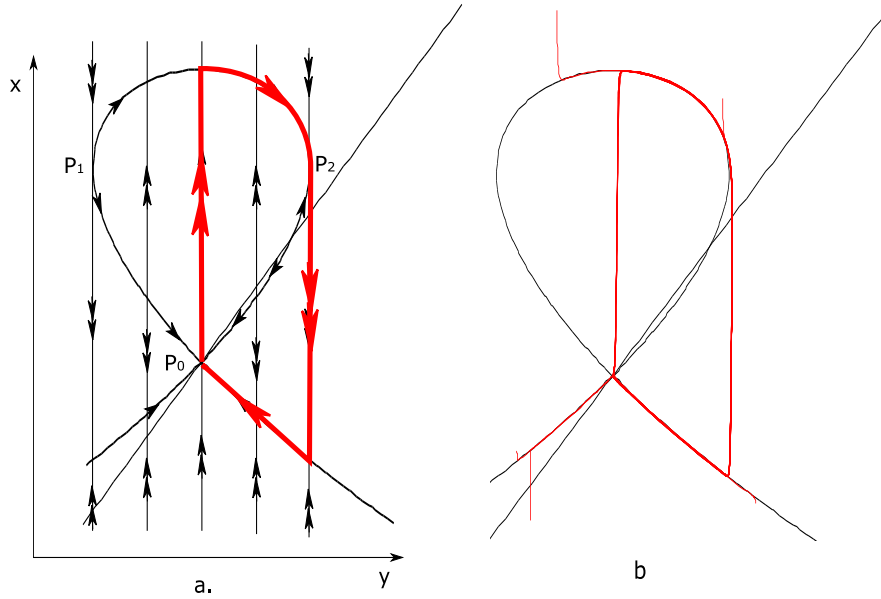


Figura 5.5: a) Flujo rápido-lento del sistema (5.16) cuando, $\alpha = -2 \left(\frac{\beta}{3}\right)^{3/2}$, $\beta \geq 0$ y $\gamma = 0$, en el límite singular $\varepsilon = 0$. b) Trayectorias del sistema (5.16) desde diferentes punto para $\varepsilon = 0,01$

Para ilustrar las ideas nos limitaremos al caso $\gamma = 0$. Vimos en la sección 5.1.1 los diagramas de bifurcación persistentes y los no persistentes en el despliegue universal de la *winged-cusp*, Figura 5.1. En Σ , conjunto de transición entre los diferentes diagramas persistentes, encontramos singularidades histéresis y transcítica dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha \leq 0, \beta = 0, \gamma = 0\}, \\ \mathcal{B} &= \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha = \pm 2 \left(\frac{\beta}{3}\right)^{3/2}, \beta > 0, \gamma = 0\}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

Los diagramas persistentes para $\alpha \leq -2 \left(\frac{\beta}{3}\right)^{3/2}$, $\beta > 0$ y $\gamma = 0$ (diagramas 1. en la Figura 5.1) son conocidos como **histéresis reflejada**, debido a su simetría.

En general sobre la variedad M dada por

$$M = \{(x, y) : -x^3 + \beta x - (\lambda + y)^2 - \alpha = 0\},$$

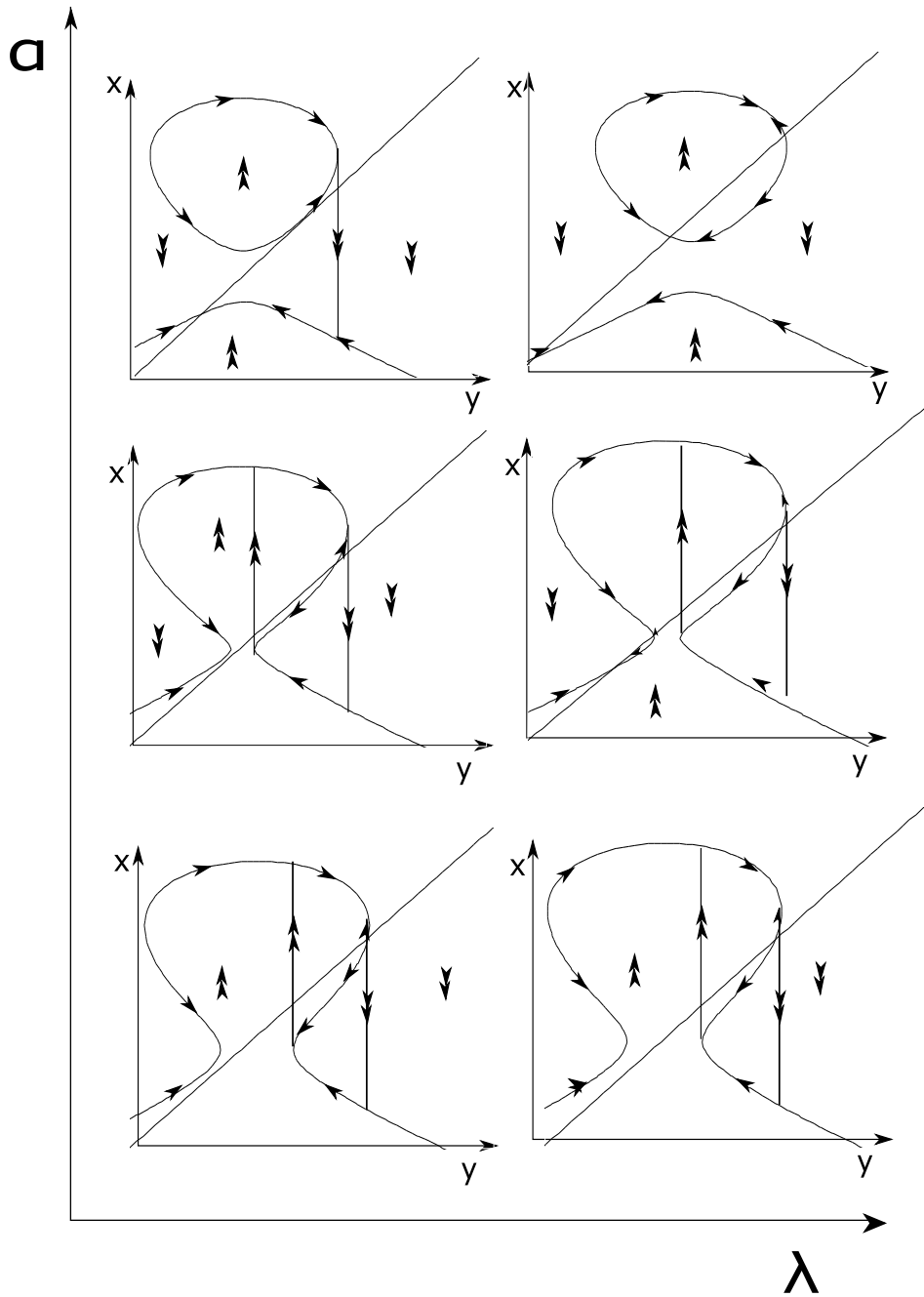


Figura 5.6: Flujo singular del sistema (5.16), para $\beta = \frac{1}{3}$ y $\gamma = 0$

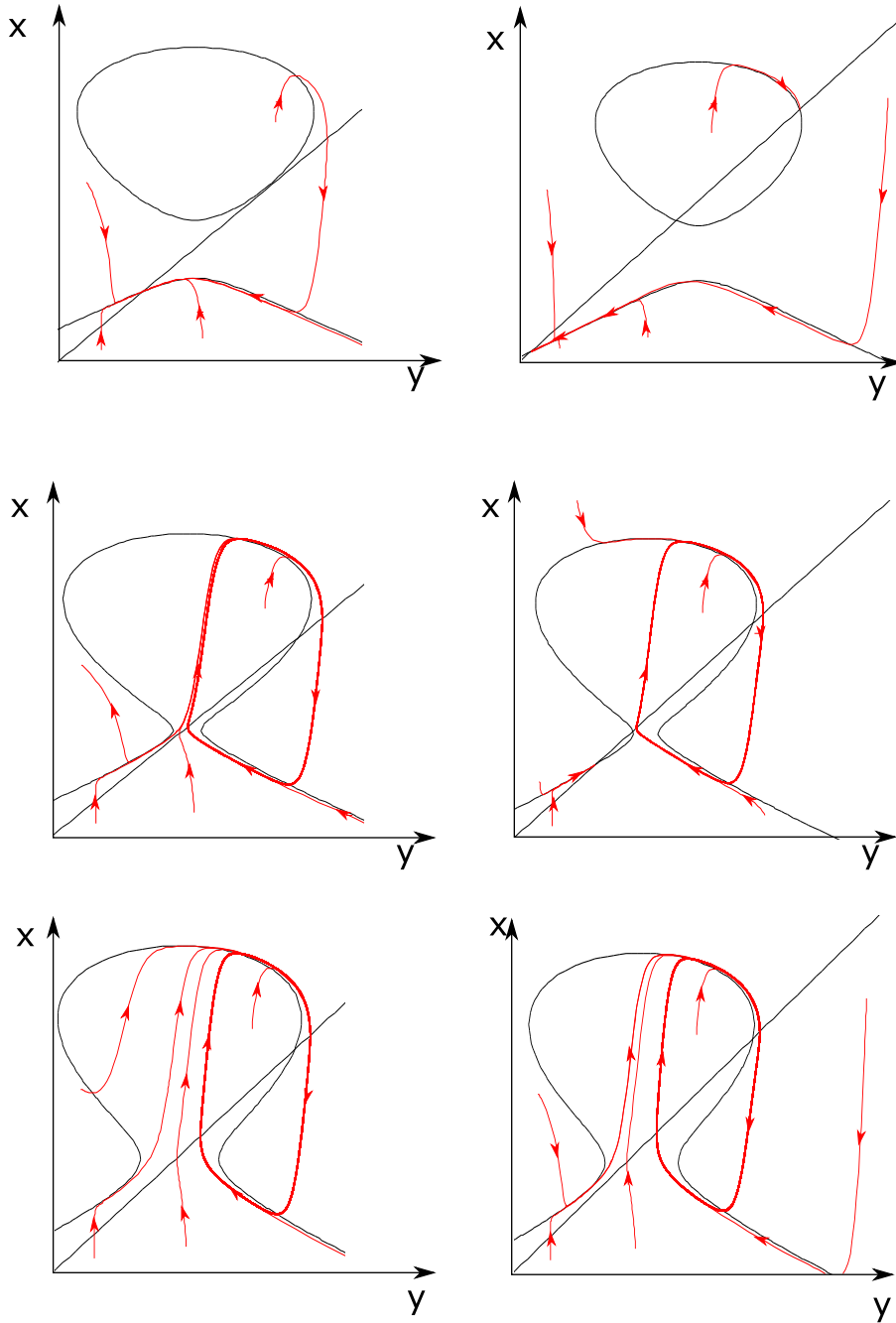


Figura 5.7: Flujo del sistema (5.16)

los puntos tales que $y > x$ hacen que $\dot{y} < 0$ luego el flujo lento va hacia la izquierda y análogamente para los puntos que están por encima de la recta $x = y$ tenemos que $\dot{y} > 0$ luego el flujo lento va a hacia la derecha.

El sistema capa del sistema (5.16) está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + \beta x - (\lambda + y)^2 - \gamma(\lambda + y)x - \alpha, \\ \dot{y} &= 0,\end{aligned}\tag{5.18}$$

entonces para cada valor de y , podemos saber (Capítulo 2) la forma en que se acercan las trayectorías a la variedad M , a lo largo de los valores de la variable rápida x .

Por ejemplo, para $\alpha = -2\left(\frac{\beta}{3}\right)^{3/2}$ con $\beta \geq 0$ hay una singularidad transcítica. Al hacer el análisis que venimos describiendo, obtenemos una gráfica de flujos lentos-rápidos, como en la Figura 5.5-(a). Hemos nombrado a los puntos P_0 , P_1 y P_2 para indicar las regiones de \mathcal{M} que son repulsoras (de P_0 a P_1 y de P_2 a P_0) o atractoras, que serían todas las demás. Luego en los puntos P_1 y P_2 hay bifurcaciones *fold*.

Entonces, gracias a la teoría geométrica de las perturbaciones singulares expuesta en el capítulo 4 y a la extensión de ésta para singularidades transcíticas en [18], podemos asegurar que existe un $0 < \bar{\varepsilon} \ll 1$ tal que para todo $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ las trayectorias del flujo principal son cualitativamente iguales a las trayectorias del flujo singular. En particular notemos que en el retrato fase singular hay una trayectoria homoclínica en el punto P_0 , que hemos comprobado persisten por $\varepsilon > 0$ por simulación con Matlab para $\varepsilon = 0.01$, Figura 5.5-(b).

Ahora, cuando tomamos el valor de α mayor o menor que $-2\left(\frac{\beta}{3}\right)^{3/2}$ hay dos tipos de diagrama de bifurcación persistentes, correspondiente al tipo 3 y tipo 1 en la Figura 5.1. Para $\alpha > -2\left(\frac{\beta}{3}\right)^{3/2}$, dependiendo de si la ceroquina de y interseca la variedad \mathcal{M} entre P_1 y P_2 o no, tenemos el flujo singular para las dos dinámicas posibles, dos puntos atractores o uno solo, Figura 5.6 anterior.

En el otro caso $\alpha < -2\left(\frac{\beta}{3}\right)^{3/2}$ el diagrama de bifurcación es una histéresis reflejada, y de la misma forma que en el caso anterior, la dinámica depende de como la ceroquina de y interseca las diferentes ramas estables e inestables que la componen.

Llamemos P_{01} y P_{02} a los nuevos puntos *fold* que aparecen en la histéresis reflejada tras la perturbación del punto P_0 transcítico, a la izquierda y a la derecha respectivamente. Cuando la recta $y = x$ sólo interseca la rama

histéresis derecha, se presentan los mismo casos que en la sección 5.2, es decir la existencia de un ciclo límite si la intersección ocurre entre P_2 y P_{02} (Figura 5.6 abajo), y de un atractor si es fuera de esta rama repulsora. Los nuevos casos entonces aparecen cuando la recta interseca también a la rama izquierda de la histéresis reflejada. En cualquier caso, la recta toca a la rama izquierda en dos puntos, uno sobre la región atractora inferior (anterior a P_{01}) y otro en la región repulsora (entre P_1 y P_{01}). Dada la construcción del flujo rápido- lento singular que hemos hecho, podemos ver que el primer punto es un atractor y el segundo un punto silla.

Además del punto atractor y el punto silla en la rama izquierda de la histéresis reflejada, la recta toca la rama derecha en un punto sobre una región atractora, o sobre la región repulsora (de P_2 a P_{02}), así que hay un punto atractor o un ciclo límite atractor para algún $0 < \varepsilon \ll 1$, es decir que tenemos dos objetos atractores separados por un punto silla. En el lema 5 de [10] se demuestra a través de la teoría de Fenichel que las cuencas de atracción están separadas por la variedad estable del punto silla.

Con esto hemos mostrado cómo en el sistema (5.5) la biestabilidad entre el punto fijo y un ciclo límite aparece al perturbar una singularidad transcítica con $\alpha < -2 \left(\frac{\beta}{3}\right)^{3/2}$ en una histéresis reflejada, diagrama de bifurcación persistente en el despliegue universal de la *winged-cusp*.

Capítulo 6

Conclusiones

Hemos desarrollado un método para el estudio del comportamiento global de una clase de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales con una fuerte separación de escalas temporales, de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= G_{sing}(x, \lambda + y, \alpha), \\ \dot{y} &= \varepsilon(x - y),\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde G_{sing} es el despliegue universal de una singularidad dada y $0 < \varepsilon \ll 1$. Esta clase de ecuaciones diferenciales está motivada por el modelado de fenómenos dinámicos con múltiples escalas temporales observados en la naturaleza y, en particular, en sistemas biológicos. Por ejemplo, el renombrado modelo de FitzHugh-Nagumo se puede escribir en la forma (6.1) si tomamos la histéresis como centro organizador.

Más aún, no nos hemos limitado a conocer la dinámica del sistema en espacio fase para parámetros λ, α fijos, pues las teorías que hemos integrado, teoría de las singularidades aplicada a las bifurcaciones y teoría geométrica de las perturbaciones singulares, han permitido que el método abarque el espacio paramétrico, teniendo así un sentido predictivo sobre todos los posibles retratos fase en un sistema de la forma (6.1). En este sentido, la *singularidad organizadora de la dinámica rápida se vuelve un centro organizador para el sistema completo*.

La presencia de múltiples escalas temporales es fundamental en nuestra construcción del plano fase global y en las predicciones de cómo cambia el plano fase, en función de los parámetros del sistema.

- Los teoremas de Fenichel nos aseguran que las trayectorias de un sistema (6.1) están cualitativamente determinadas por el plano fase singular.

- El plan de fase singular a su vez está cualitativamente determinado por la forma de la ceroclina de la variable rápida y sus intersecciones con la diagonal $x=y$, es decir, la ceroclina lenta.
- La forma de la ceroclina de la variable rápida está cualitativamente determinada por el despliegue universal de la singularidad organizadora.

Los mismos métodos se pueden aplicar cuando la ceroclina de la variable lenta tiene formas más complejas. Sin embargo, en estos casos ya no se tiene un mapeo sencillo entre el espacio de despliegue de la singularidad organizadora y los posibles retratos fase globales de (6.1).

Bibliografía

- [1] Miguel A Aon, Marc R Roussel, Sonia Cortassa, Brian O'Rourke, Douglas B Murray, Manfred Beckmann, and David Lloyd. The scale-free dynamics of eukaryotic cells. *PLoS One*, 3(11):e3624, 2008.
- [2] Tom M Apostol. Mathematical analysis. 1974.
- [3] Carolina Barriga-Montoya, Beatriz Fuentes-Pardo, Miguel Lara-Aparicio, and Pablo Padilla-Longoria. *Ultradian Rhythms Underlying the Dynamics of the Circadian Pacemaker*. INTECH Open Access Publisher, 2011.
- [4] Mark F Bear, Barry W Connors, and Michael A Paradiso. *Neuroscience*, volume 2. Lippincott Williams & Wilkins, 2007.
- [5] Hendrik Wolter Broer, Bernd Krauskopf, and Gert Vegter. *Global analysis of dynamical systems: Festschrift dedicated to Floris Takens for his 60th birthday*. CRC Press, 2001.
- [6] Olivier Decroly and Albert Goldbeter. From simple to complex oscillatory behaviour: analysis of bursting in a multiply regulated biochemical system. *Journal of theoretical biology*, 124(2):219–250, 1987.
- [7] Neil Fenichel. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*, 31(1):53–98, 1979.
- [8] Richard FitzHugh. Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane. *The bulletin of mathematical biophysics*, 17(4):257–278, 1955.
- [9] Richard FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical journal*, 1(6):445, 1961.

- [10] Alessio Franci, Guillaume Drion, and Rodolphe Sepulchre. Modeling the modulation of neuronal bursting: a singularity theory approach. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 13(2):798–829, 2014.
- [11] M Golubitsky and DG Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, volume Vol.1. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [12] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, 1985.
- [13] JL Hindmarsh and RM Rose. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, 221(1222):87–102, 1984.
- [14] Alan L Hodgkin and Andrew F Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of physiology*, 117(4):500–544, 1952.
- [15] Eugene M Izhikevich. *Dynamical systems in neuroscience: The geometry of excitability and bursting*. MIT press, 2007.
- [16] Beata Jackowska-Zduniak. Synchronization problem of the coupled modified van der pol equations in a model of the heart action.
- [17] Christopher KRT Jones. Geometric singular perturbation theory. In *Dynamical systems*, pages 44–118. Springer, 1995.
- [18] M Krupa and P Szmolyan. Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities. *Nonlinearity*, 14(6):1473, 2001.
- [19] M Krupa and Peter Szmolyan. Extending geometric singular perturbation theory to nonhyperbolic points—fold and canard points in two dimensions. *SIAM journal on mathematical analysis*, 33(2):286–314, 2001.
- [20] Yuri A Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112. Springer Science & Business Media, 2013.
- [21] Jinichi Nagumo, Suguru Arimoto, and Shuji Yoshizawa. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, 50(10):2061–2070, 1962.

- [22] Lawrence Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2013.
- [23] John Rinzel. A formal classification of bursting mechanisms in excitable systems. *Mathematical topics in population biology, morphogenesis and neurosciences*, 71:267–281, 1987.
- [24] Thomas J Slight, Bruno Romeira, Liquan Wang, José ML Figueiredo, Edward Wasige, and Charles N Ironside. A liénard oscillator resonant tunnelling diode-laser diode hybrid integrated circuit: model and experiment. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 44(12):1158–1163, 2008.
- [25] Mircea Steriade. Impact of network activities on neuronal properties in corticothalamic systems. *Journal of neurophysiology*, 86(1):1–39, 2001.
- [26] Rene Thom. *Structural stability and morphogenesis*. Addison Wesley Publishing Company, 1989.
- [27] Balth Van der Pol. The nonlinear theory of electric oscillations. *Radio Engineers, Proceedings of the Institute of*, 22(9):1051–1086, 1934.
- [28] Balthasar Van der Pol. A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations. *Radio Review*, 1(1920):701–710, 1920.
- [29] Stephen Wiggins. *Global bifurcations and chaos: analytical methods*, volume 73. Springer Science & Business Media, 2013.
- [30] Zheng Zuo-Huan. Periodic solutions of generalized liénard equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, 148(1):1–10, 1990.