Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Cuasinúcleos ajenos en digráficas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Javier Eduardo Pereyra Zamudio

TUTORA

Mat. Laura Pastrana Ramírez

Ciudad Universitaria, CDMX, 2016

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
Pereyra
Zamudio
Javier Eduardo
53 89 22 12
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
307224565

2. Datos del tutor
Mat.
Pastrana
Ramírez
Laura

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Hortensia
Galeana
Sánchez

4. Datos del sinodal 2
Dra.
María del Rocío
Sánchez
López

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Patricia
Cortés
Flores

6. Datos del sinodal 4
Mat.
Germán
Benítez
Bobadilla

7.Datos del trabajo escrito.
Cuasinúcleos ajenos en digráficas
78 p.
2016

Índice general

Introducción

T. Schjelderup-Ebbe [22] observó que entre dos gallinas de un gallinero existe una relación conocida como "peck right", la cual establece la dominación de una sobre la otra, analogías similares se pueden ver en otros grupos de animales aunque no siempre es tan claro que individuo domina a otro. La teoría matemática de tales relaciones fue investigada por H. G. Landau, en su trabajo demostró algunas propiedades importantes de los torneos, es decir, digráficas para las que entre cualquier par de vértices existe exactamente una flecha y con las cuales él representó la estructura de dichas sociedad de animales.

En su artículo *"On dominance relations and the structure of animal societies III; the condition for a score structure", 1953* [16] Landau prueba que en todo torneo, para cualquier vértice de ingrado máximo v tenemos que $\{v\}$ es un conjunto cuasiabsorbente, $E \subseteq V(D)$ es cuasiabsorbente si para cada $x \in V - E$ existe $y \in E$ tal que x le manda flecha a y o bien existen $v \in V$ y $w \in E$ tales que x le manda flecha a v y a su vez v le manda flecha a w, siendo así v un cuasinúcleo para dicho torneo, es decir, un conjunto cuasiabsorbente e independiente. $E \subseteq V(D)$ es indpendiente si entre sus vértices no hay flechas, para dicho torneo. Este resultado es generalizado por V. Chvátal y L. Lovász en *"Every directed graph has a semi-kernel", 1974* [7], demostrando que cualquier digráfica tiene al menos un cuasinúcleo.

Si una digráfica D tiene un pozo, es decir, un vértice del que no salen flechas, entonces todo cuasinúcleo en D debe contener a dicho vértice, por lo que D no tiene cuasinúcleos ajenos. Esto llevo a los investigadores G. Gutin, K.M. Koh, E.G. Tay y A. Yeo a preguntarse en su artículo *"On the number of quasikernels in digraphs", 2003* [12], lo siguiente:

¿Toda digráfica sin pozos, tiene un par de cuasinúcleos ajenos?.

Es decir, si definimos a $\boldsymbol{D}$ como la familia de digráficas tales que para toda $D \in \boldsymbol{D}$, $\delta^+(D) \geq 1$ y para cualesquiera dos cuasinúcleos distintos Q_1 y Q_2 de D tenemos que $Q_1 \cap Q_2 \neq \phi$, entonces ¿$\boldsymbol{D} = \phi$?.

Está pregunta es falsa pues son los propios autores del artículo quienes construyen un ejemplo de una digráfica que pertenece a $\boldsymbol{D}$ a partir de ciertos torneos, cuya existencia es demostrada por P. Erdös en *"On a problem in graph theory", 1963* [8]. Una vez demostrada la falsedad del argumento se han escrito varios trabajos en los que se dan condiciones para ver que digráficas no pertenecen a $\boldsymbol{D}$, un ejemplo es el artículo de Sun Zhiren y Miao Xiaoyan *"Disjoint Quasi-Kernels in Digraphs", 2005* [25], en donde la idea principal es acotar la cardinalidad de los cuasinúcleos o los resultados en *"Quasikernels in Digraphs", 2008* [13], de Scott Heard y Jing Huang que demuestran que las digráficas semicompletas multipartitas, cuasitransitivas y localmente semicompletas están en $\boldsymbol{D}^c$. Por último Germán Benítez y Laura Pastrana demuestran la existencia de cuasinúcleos ajenos en las digráficas asociadas $S(D), R(D), T(D)$, Q(D) y $L(D)$ en la tesis *"Número semidominante coloreable en digráficas", 2014* [2].

Así la finalidad de esta tesis es analizar los trabajos anteriormente citados y mostrar los resultados que hemos obtenido para algunas operaciones de digráficas; la corona, el producto cartesiano, el producto fuerte, el producto directo y la disyunción excluyente y para las digráficas asociadas: digráfica de vigas, digráfica de líneas parcial y la suma de Zykov, está última es de especial interes pues con ella construimos una nueva digráfica que pertenece a $\boldsymbol{D}$.

Para esto, el primer capítulo está centrado en dar la definiciones y conceptos básicos de gráficas y digráficas, siendo los más importantes los de cuasinúcleo y núcleo ya que con ellos trabajaremos en el resto de la tesis.

En el segundo capítulo damos una reseña histórica acerca de cuasinúcleos en digráficas y una recopilación de resultados relacionados con las propiedades de éstos.

El tercer capítulo está dedicado a mostrar condiciones, operaciones y familias de digráficas (antes mencionadas) para las cuales se asegura la existencia de cuasinúcleos ajenos.

Capítulo 1

Definiciones

En este capítulo daremos algunos de los conceptos de la teoría de gráficas, como son las definiciones de gráfica y digráfica. Así como algunas clases y operaciones de éstas, con las cuales trabajaremos en el resto de la tesis.

1.1. Gráficas.

Una **gráfica** G es una pareja ordenada $(V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío de elementos llamados vértices y $A(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices de G, llamados aristas o arcos.

Si $a = (v, u) \in A(G)$, entonces diremos que a **incide** en u y en v o bien que u es adyacente a v. De manera análoga dos aristas son **adyacentes** si inciden en el mismo vértice.

Un **camino** en G es una sucesión de vértices de la forma:

$$C = (x_0, x_1, ..., x_n)$$

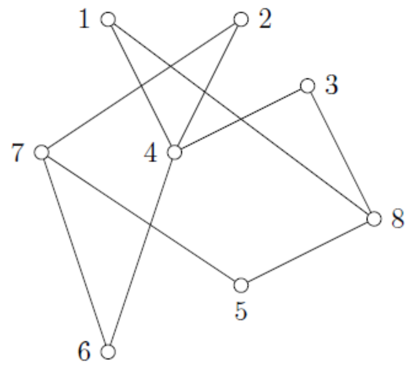
tal que $(x_i, x_{i+1}) \in A(G)$ para cada $i \in \{0, ...n - 1\}$, una **trayectoria** es un camino que no repite vértices. La gráfica se dice **conexa** si para cualquier par de vértices distintos de la gráfica existe una trayectoria entre ellos.

El **complemento** G^c de la gráfica G es la gráfica $(V(G^c), A(G^c))$ tal que $V(G^c) = V(G)$ y para $\{x, y\} \subseteq V(G^c)$, $(x, y) \in A(G^c)$ si y sólo si $(x, y) \notin A(G)$.

Cuando hablamos de una gráfica con aristas paralelas, es decir, aristas que tienen los mismos extremos, y lazos, es decir, pares que consisten del mismo vértice, hablamos de **pseudográficas**, las pseudográficas que no tienen lazos son llamadas **multigráficas**.

Ejemplo: Sea G la gráfica formada por:
$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
$A(G) = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 6), (7, 5), (7, 2), (7, 6), (8, 1), (8, 3), (8, 5)\}$.

A continuación veremos la representación geométrica de esta gráfica.



1.2. Digráficas.

FIGURA 1.1

Una **digráfica** D es una pareja ordenada $(V(D), F(D))$ tal que $V(D)$ es un conjunto finito no vacío de elementos, llamados vértices y $F(D)$ es un conjunto de pares ordenados de vértices de D llamados flechas, a las que denotamos por (u, v), siendo u su vértice inical y v su vértice final.

Si $(u, v) \in F(D)$, que en ocasiones lo denotaremos por $u \to v$ y en el resto de este trabajo diremos que v **domina** a u.
Dos vértices u y v se dice que son **adyacentes** si existe una flecha entre ellos.

Ejemplo: Sea D la digráfica formada por:
$V(D) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
$F(D) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5), (1, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (5, 7)\}$.

A continuación veremos la representación geométrica de esta digráfica.

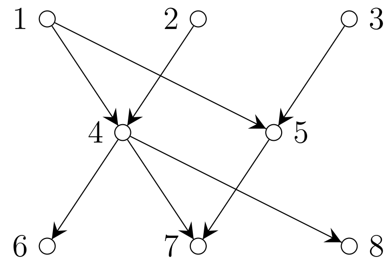


Figura 1.2

Sean X y Z dos subconjuntos de $V(D)$, denotamos por (X, Z) al conjunto de flechas (x, z) de D tales que $x \in X$ y $z \in Z$, en ocasiones también nos referiremos a este conjunto como el conjunto de las $XZ - flechas$. Decimos que Z domina a X $(X \to Z)$ si para todo $x \in X$ y para todo $z \in Z$ tenemos que $x \to z$.

Las flechas de la forma (v, v) son llamadas **lazos**. D es reflexiva si todos sus vértices tienen un lazo.

Las **multiflechas** son dos o más flechas en la misma dirección que unen al mismo par de vértices. Una digráfica D es **simple** si no tiene multiflechas ni lazos. De ahora en adelante trabajaremos con digráficas simples a menos que se indique lo contrario.

El **orden** de D es el número de vértices que tiene y lo denotamos por $|V(D)|$.

Para una gráfica G una digráfica D es una **biorientación** de G si D es obtenida por reemplazar cada arista $a = (u, v)$ de G por alguna de las flechas (u, v), (v, u) o por ambas. Una **orientación** de una gráfica G es una biorientación de G que no contiene lazos ni multiflechas. Para una gráfica G la **biorientación completa** de G denotada por $\overleftrightarrow{G}$ es una orientación D de G tal que $(x, y) \in F(D)$ implica que $(y, x) \in F(D)$.

La **gráfica subyacente** $UG(D)$ de una digráfica D es la única gráfica G tal que:

- $V(UG(D)) = V(D)$,
- $(u, v) \in A(UG(D))$ si y sólo si existe una flecha entre u y v en D, es decir, D es biorientación de G.

El conjunto de **vecinos exteriores** de un vértice u se define como:

$$N^+(u) = \{v \in V(D) : (u, v) \in F(D)\}$$

El **grado exterior** de un vértice u, también llamado **exgrado**, es la cardinalidad de $N^+(u)$ y se denota por $\delta^+(u)$. Si $N^+(u) = \phi$, entonces el vértice u se llama **pozo**.

El conjunto de **vecinos interiores** de un vértice u se define como:

$$N^-(u) = \{v \in V(D) : (v, u) \in F(D)\}$$

El **grado interior** de un vértice u, también llamado **ingrado**, es la cardinalidad de $N^-(u)$ y se denota por $\delta^-(u)$. Si $N^-(u) = \phi$, entonces el vértice u se llama **fuente**.

Si $X \subseteq V(D)$, definimos por $N^-(X) = \bigcup_{u \in X} N^-(u)$, $N^-[X] = N^-(X) \cup X$ y $N^{-2}(X) = N^-(N^-(X))$, de forma análoga $N^+(X) = \bigcup_{u \in X} N^+(u)$ y $N^+[X] = N^+(X) \cup X$.

Una digráfica E es una **subdigráfica** de D si $V(E) \subseteq V(D)$ y $F(E) \subseteq F(D)$. Sea $S \subseteq V(D)$, **subdigráfica inducida** por el conjunto de vértices S de D, denotada por $D[S]$, es la digráfica tal que:

- $V(S[D]) = S$,
- $(u, v) \in F(D[S])$ si y sólo si $(u, v) \in F(D)$.

Un **camino dirigido** es una sucesión de vértices de la forma:

$$C = (x_0, x_1, ..., x_n)$$

tal que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ para cada $i \in \{0, ...n - 1\}$. Diremos que la longitud del camino C es n y la denotamos por $l(C)$. El camino se dice **cerrado** si el vértice inicial x_0 coincide con el vértice final x_n.

Sea $C = (x_0, x_1, ..., x_n)$ un camino dirigido. Si todos los vértices de C son distintos, C es una **trayectoria dirigida**. Si los vértices $x_1, ..., x_{k-1}$ son distintos para $k \geq 3$ y $x_1 = x_k$, C es un **ciclo dirigido**. Ya que los ciclos y las trayectorias son casos particulares de caminos, entonces su longitud se define como en el párrafo anterior.

De ahora en adelante nos referiremos a los caminos dirigidos, trayectorias dirigidas y ciclos dirigidos simplemente como caminos, trayectorias y ciclos respectivamente.

Para $\{u, v\} \subseteq V(D)$ definimos la distancia entre u y v como:

$$mín\ \{l(T) : T\ es\ una\ uv - trayectoria\}$$

y la denotamos por $d(u, v)$. Si no existen $uv - trayectorias$ en D decimos que $d(u, v) = \infty$, debemos observar que bajo ésta definición la distancia no es necesariamente simétrica, es decir, puede suceder que $d(u, v)$ y $d(v, u)$ sean distintas.

Una digráfica D es **conexa** si la gráfica subyacente de D es conexa.

Una digráfica D es **fuertemente conexa** si contiene tanto un $uv - camino$ como un $vu - camino$ para cualquier par de vértices distintos u y v en D. Una **componente fuerte** de una digráfica D es una subdigráfica inducida máxima por contención con la propiedad de ser fuertemente conexa. La componente fuerte H es **terminal** si no hay flechas de H hacia otras componentes y es **inicial** si no hay flechas de otras componentes hacia H. Note que si $D_1, ..., D_2$ son componentes fuertes de D tales que $V(D_1) \cup ... \cup V(D_t) = V(D)$, entonces $V(D_i) \cap V(D_j) = \phi$ para todo $i \neq j$.

Sea $D = (V(D), F(D))$ una digráfica, definamos ahora algunos tipos de subconjuntos de D.

1. $I \subseteq V(D)$ es **independiente** si para todo $\{x, y\} \subseteq I$ se tiene que $\{(x, y), (y, x)\} \cap F(D) = \phi$.
2. $A \subseteq V(D)$ es **absorbente** si para todo x en el complemento de A existe y en A tal que $(x, y) \in F(D)$.
3. $Q \subseteq V(D)$ es **cuasiabsorbente** si para todo x en el complemento de Q se cumple alguno de los siguientes casos:
   - Existe y en Q tal que $(x, y) \in F(D)$.
   - Existen $w \in V(D) - Q$ y $v \in Q$, $w \neq x$, tales que: $\{(x, w), (w, y)\} \subseteq F(D)$.

Ejemplo: Sea D la digráfica formada por:
$V(D) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$.
$F(D) = \{(u_1, u_2), (u_1, u_3), (u_2, u_4), (u_2, u_5)\}$.

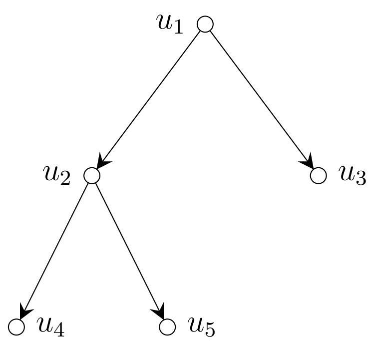


FIGURA1.3

Para el conjunto $N = \{u_3, u_4, u_5\}$, tenemos que:

- $\{(u_3, u_4), (u_4, u_3), (u_4, u_5), (u_5, u_4), (u_3, u_5), (u_5, u_3)\} \cap F(D) = \phi$,
- $N^c = \{u_1, u_2\}$ y $\{(u_1, u_3), (u_2, u_4)\} \subseteq F(D)$,

entonces N es un conjunto absorbente e independiente en la digráfica D.

Sea D una digráfica, el conjunto $N \subseteq V(D)$ es un (k, l)-núcleo de D con k y l números naturales tales que $k \geq 2$ y $l \geq 1$ si y sólo si:

- Para todo $x, u \in N$ tales que $u \neq x$, tenemos que $d_D(u, x) \geq k$.
- Para todo $y \in V(D) - N$, existe $x \in N$ tal que $d_D(y, x) \leq l$.

Un k-núcleo es un $(k, k-1)$-núcleo. Para $k = 2$ y $l = 1$ un $(2, 1)$-núcleo es un núcleo, si $k = 2$ y $l = 2$ un $(2, 2)$-núcleo es un cuasinúcleo.

Una digráfica D es **cuasitransitiva** si para todo $\{u, v\} \subseteq V(D)$ tal que existe un camino de longitud dos de u hacia v, se tiene que al menos una de las flechas (u, v) ó (v, u) están presentes en $F(D)$. Una digráfica D se dice **transitiva** si para todo $\{u, v\} \subseteq V(D)$ tal que existe un camino de longitud dos de u hacia v, se tiene que la flecha (u, v) está presente en $F(D)$. Por definición toda digráfica transitiva es cuasitransitiva.

La siguiente figura es un ejemplo de una digráfica transitiva:

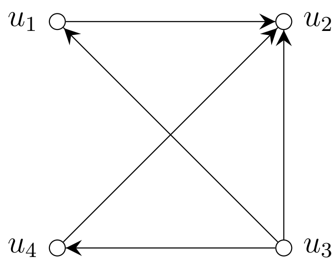


Figura 1.4

Una digráfica D se dice **semicompleta** si para cualquier par de vértices $u \neq v$ en $V(D)$ al menos una de las flechas (u, v), (v, u) están presentes en $F(D)$. Una digráfica semicompleta D es un **torneo** si para cualquier par de vértices u y v, con $u \neq v$, en $V(D)$ una y sólo una de las flechas (u, v) o (v, u) está presente en $F(D)$.

La siguiente figura es un ejemplo de un torneo de 4 vértices:

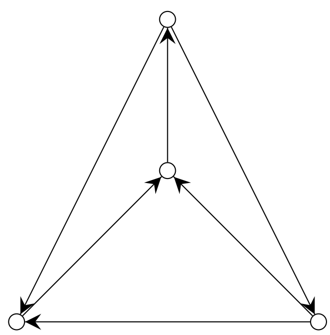


Figura 1.5

Una digráfica D es **localmente semicompleta** si para todo vértice v, tanto $N^+(v)$ como $N^-(v)$ inducen digráficas semicompletas. De forma análoga D es **localmente torneo** si para todo v en $V(D)$ tanto $N^+(v)$ como $N^-(v)$ inducen torneos.

Una digráfica D es **k-partita** si existe una partición $V_1, ..., V_k$ de $V(D)$ tal que cada V_i es un conjunto independiente.

La siguiente figura es una digráfica 3-partita, siendo V_1, V_2, V_3 la partición de $V(D)$ en conjuntos independientes:

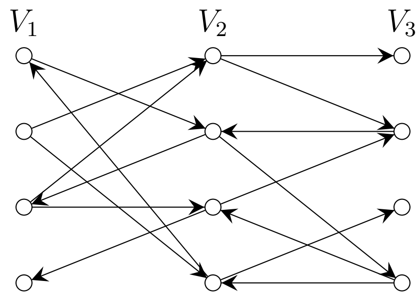


FIGURA 1.6

1.2.1. Composición de digráficas.

Definición 1: Sean D una digráfica con conjunto de vértices $\{v_1, ..., v_n\}$ y $G_1, ..., G_n$ digráficas ajenas por vértices. La **composición** $D[G_1, ..., G_2]$ es la digráfica L tal que:

- $V(L) = V(G_1) \cup ... \cup V(G_n)$,
- $F(L) = (\cup_{i=1}^{n} F(G_i)) \cup \{(g_i, g_j) : g_i \in V(G_i), g_j \in V(G_j), (v_i, v_j) \in F(D)\}$.

1.2.2. Digráfica de líneas y digráfica de líneas parcial.

Definición 2: Sea D una digráfica, la **digráfica de líneas** de D, denotada por $L(D)$, es la digráfica tal que $V(L(D)) = F(D)$ y para cualesquier $\{a, b\} \subseteq F(D)$ tenemos que $(a, b) \in F(L(D))$ si y sólo si las flechas a, b inducen un camino dirigido de longitud dos en D, es decir, el vértice final de a es el vértice inicial de b en D.

A la izquierda la digráfica D y a la derecha su digráfica de líneas $L(D)$:

FIGURA 1.7

La familia de digráficas llamada digráficas de líneas parcial fue intoducida por M.A. Fiol y A.S. Lladó en *"The partial line digraph technique in the design of large interconnection networks", 1992* [9] como una generalización de las digráficas de líneas y posteriormente trabajada por C. Balbuena y M. Guevara en *"Kernels and partial line digraphs", 2010* [2].

Definición 3: Sea D una digráfica para la que $\delta^-(x) \geq 1$ para todo $x \in V(D)$. Consideremos $A' \subseteq F(D)$, $\varphi(j) = \{(i,j) \in F(D)\}$ y una función $\phi : F(D) \to A'$ tal que:

- El conjunto de vértices finales de A' es $H(A') = V(D)$,
- $\phi|A' = id$ y para todo vértice $j \in V(D)$, $\phi(\varphi(j)) \subset \varphi(j) \cap A'$.

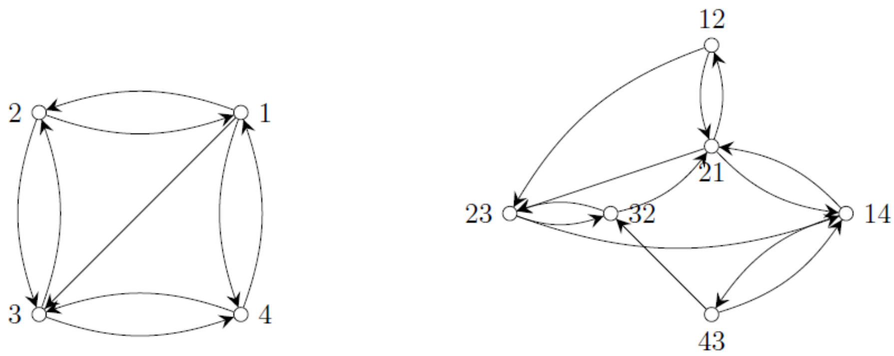
La existencia de conjuntos como A' esta garantizada gracias a que $\delta^-(x) \geq 1$ para todo $x \in V(D)$, entonces la digráfica de líneas parcial denotada por $L_{(A',\phi)}(D)$ es la digráfica tal que:

- $V(L_{(A',\phi)}(D)) = A'$,
- $F(L_{(A',\phi)}(D)) = \{((i,j), \phi(j,k)) : (j,k) \in F(D)\}$.

Observación. Si $A' = F(D)$, entonces $\phi = id$ y la digráfica de líneas parcial coincide con $L(D)$.

A continuación mostramos un ejemplo de una digráfica G con 9 flechas (izquierda) y su digráfica de líneas parcial (derecha) tomando $A' = F(G) - \{(4,1),(3,4),(1,3)\}$. Las flechas que no están en A' tienen imágenes $\phi(1,3) = (2,3)$, $\phi(3,4) = (1,4)$ y $\phi(4,1) = (2,1)$.

FIGURA 1.8



1.2.3. Digráfica subdivisión.

Definición 4: Sea D una digráfica, la **digráfica subdivisión** de D, denotada por $S(D)$, es la digráfica tal que $V(S(D)) = V(D) \cup F(D)$ y $(a, b) \in F(S(D))$ si y sólo si $a \in V(D)$, $b \in F(D)$ y $b = (a, x)$ con $x \in V(D)$ o $a \in F(D)$, $b \in V(D)$ y $a = (x, b)$ con $x \in V(D)$, es decir, se preservan los vértices originales de D, y cada flecha que hay en D se sustituye por una trayectoria de longitud dos, en la misma dirección a la flecha. El vértice intermedio de dicha trayectoria representa a la flecha original.

A la izquierda la digráfica D y a la derecha su digráfica subdivisión $S(D)$:

FIGURA 1.9

1.2.4. Digráfica raíz.

Definición 5: La digráfica raíz $R(D)$ es la digráfica tal que:

- $V(R(D)) = V(D) \cup F(D)$,
- $F(R(D)) = \Big\{(x, z) : x \in V(D) \ y \ \big[z \in N_D^+(x) \ o \ z = (x, v) \in F(D)\big]\Big\}$ $\cup \{(x, z) : x = (u, v) \in F(D) \ y \ z = v\}$.

A la izquierda la digráfica D y a la derecha la digráfica $R(D)$:

FIGURA 1.10

Observación: $R(D)$ se puede obtener de $S(D)$ al agregarle las flechas de D.

1.2.5. Digráfica media.

Definición 6: La digráfica media de D, denotada por $Q(D)$ es la digráfica tal que:

- $V(Q(D)) = V(D) \cup F(D)$,
- $F(Q(D)) = \{(x,z) : x \in V(D) \ y \ z = (x,v) \in F(D)\}$
  $\cup \{(x,z) : x = (u,v) \in F(D) \ y \ [z = v \ o \ z = (v,w) \in F(D)]\}$.

A la izquierda la digráfica D y a la derecha la digráfica $Q(D)$:

FIGURA 1.11

Observación: $Q(D)$ se puede obtener de $S(D)$ al agregarle las flechas de $L(D)$.

1.2.6. Digráfica total.

Definición 7: La digráfica total de D, denotada por $T(D)$, es la digráfica tal que:

- $V(T(D)) = V(D) \cup F(D)$,
- $F(T(D)) = F(Q(D)) \cup F(R(D))$.

La idea intuitiva de esta digráfica es integrar en una sola digráfica a las dos anteriores digráficas, como se puede ver en la siguiente figura:

A la izquierda la digráfica D y a la derecha la digráfica $T(D)$:

FIGURA 1.12

1.2.7. Digráfica de vigas.

En *"Minimal dominating sets in maximum domatic partitions", 2012* [1], S. Arumugam y K. Raj Chandrasekar definen para una gráfica G su gráfica de vigas (*trestled*) de índice k, denotada por $T_k(G)$, como la gráfica obtenida de G al agregar k copias de $K_2 = (a, b)$ con $\{a, b\} \cap V(G) = \phi$, para cada arista (x, y) de G y unir x a uno de los vértices extremos de cada copia de k_2 y unir y a los extremos restantes.

Definición 8: Para este trabajo nosotros definimos la digráfica de vigas de D de índice k, denotada por $T_k(D)$ como la digráfica obtenida de D al agregar k copias de $K_2 = (a, b)$ con $\{a, b\} \cap V(D) = \phi$ para cada flecha (x, y) de D a las que denotamos por (u^i_{xy}, v^i_{xy}) con $i = 1, ..., k$ y añadimos las flechas $x \to u^i_{xy}$ y $v^i_{xy} \to y$ para todo $i = 1, 2, 3, ..., k$, en está definición (a, b) representa una flecha a diferencia de la definición anterior en donde representa una arista.

A la izquierda la digráfica D y a la derecha la digráfica de vigas $T_k(D)$ con $k = 2$:

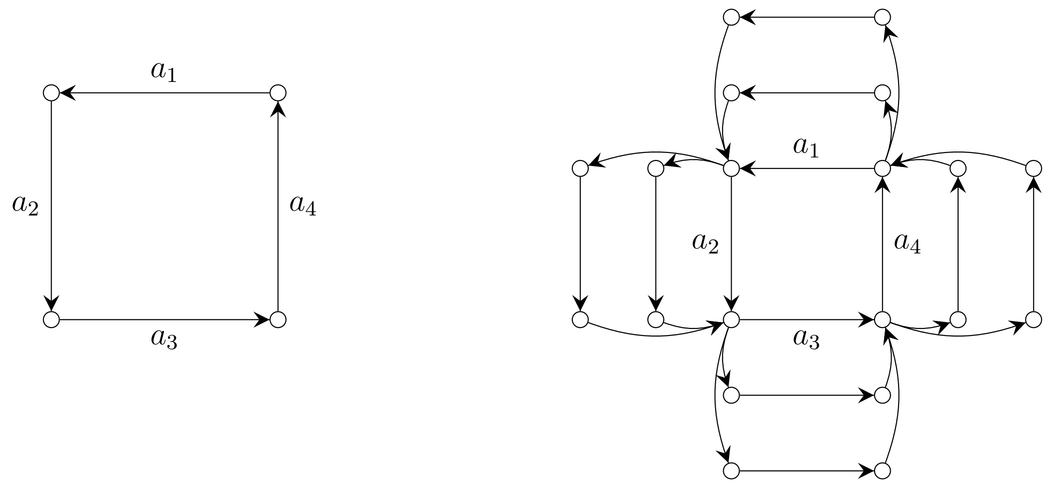


FIGURA 1.13

1.2.8. Corona.

Definición 9: En el artículo *"On kernels by monochromatic paths in the corona of digraphs", 2008* [24], Iwona Wloch define la siguiente operación de digráficas llamada corona.

Sean D una digráfica con $V(D) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ con $n \geq 2$, y $\Theta = (H_i)_{i \in I = \{1,...,n\}}$ una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \left\{y_1^i, ..., y_{p_i}^i\right\}$ donde $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. La corona de la digráfica D y la sucesión Θ es la digráfica $D \circ \Theta$ tal que:

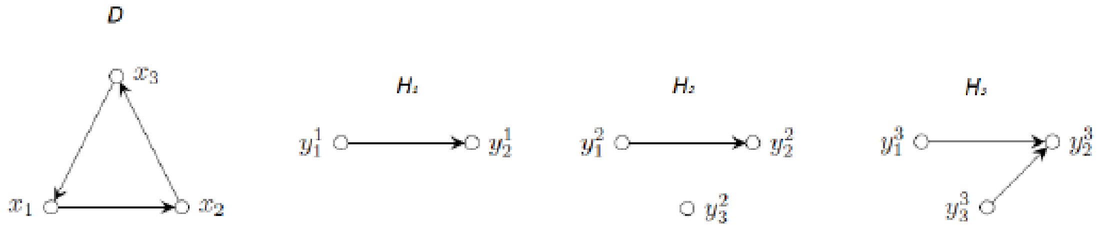
$$V(D \circ \Theta) = V(D) \cup (\cup_{i \in I} V(H_i)).$$
$$F(D \circ \Theta) = (F(D)) \cup (\cup_{i \in I} F(H_i)) \cup (\cup_{i \in I} \{(y_t^i, x_i)\} \text{ con } t = 1, ..., p_i).$$

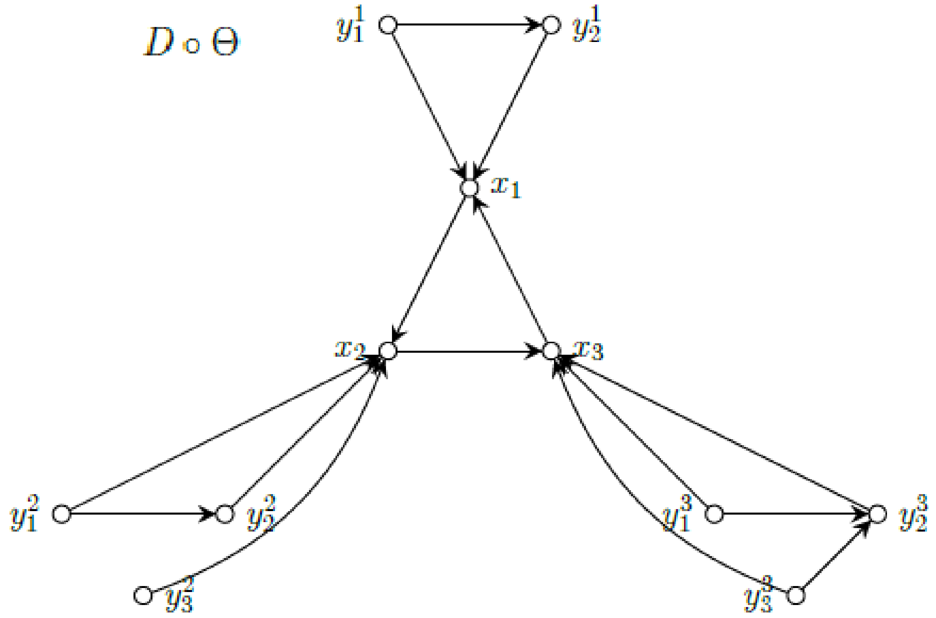
En la siguiente figura mostramos a la digráfica D con la sucesión de digráficas $\Theta = \{H_1, H_2, H_3\}$ y su corona.

FIGURA 1.14

A continuación veremos una generalización a la idea de corona en digráficas dada por J. E. Moo Vergara y Laura Pastrana en la tesis *"Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en la corona generalizada", 2014* [17]. Sea D una digráfica con $|V(D)| = n$, $|F(D)| = m$, donde $n \geq 2$ y $m \neq 0$, g un número entero cualquiera tal que $min\{n, m\} \leq g \leq max\{n, m\}$ y $\Theta = (H_i)_{i \in I = \{1,...,g\}}$ es una sucesión de digráficas ajenas en vértices dos a dos, con $V(H_i) = \left\{y_1^i, ..., y_{p_i}^i\right\}$ donde $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, ..., g\}$.

La corona generalizada de la digráfica D y la sucesión Θ es la digráfica $D \Delta \Theta$ tal que:





$$V(D\Delta\Theta) = V(D) \cup (\cup_{i\in I} V(H_i)).$$

$$F(D\Delta\Theta) = (F(D)) \cup (\cup_{i\in I} F(H_i)) \cup (\cup_{i\in I} \{(y_t^i, x_c)\} \text{ para al menos algún } x_c \in V(D) \text{ con } t = 1, ..., p_i).$$

En otras palabras la corona generalizada de una digráfica D y una sucesión de digráficas Θ es la resultante de la unión del conjuntos de vértices de D con el conjunto de vértices de la sucesión Θ, de la unión del conjunto de flechas de D con el conjunto de flechas de la sucesión Θ y de hacer a todos los vértices de H_i adyacentes hacia por lo menos un vértice de D.

Observación 1: La corona para digráficas es una corona generalizada.

Demostración. De la definición de corona para digráficas sabemos que $|V(D)| = n \geq 2$, $|F(D)| = m \neq 0$, $g = n$, $|V(H_i)| = p_i \geq 2$ con $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$ y los vértices de H_i son adyacentes a $x_i \in V(D)$ para toda $i \in I$. Por lo tanto la corona para digráficas es una corona generalizada.

$\square$

1.2.9. Suma de Zykov.

Definición 10: La siguiente operación es conocida como suma de Zykov, la cual será considerada en el último capítulo.

Sean D una digráfica con $V(D) = \{1, ..., n\}$ y $n \geq 2$, y $\alpha = \{D_i\}_{i \in V(D)}$ una sucesión de digráficas ajenas por vértices dos a dos, con $V(D_i) = \{i_1, ..., i_{p_i}\}$ y $p_i \geq 1$ para cada $i \in V(D)$. La suma de Zykov de la digráfica D y la sucesión α es la digráfica $\sigma(D, \alpha)$ tal que:

- $V(\sigma(D, \alpha)) = \bigcup_{i \in V(D)}(\{i\} \times V(D_i))$,
- $F(\sigma(D, \alpha)) = \{((s, s_t)(r, r_t)) : (s = r\ y\ (s_l, r_t) \in F(D_s))\ o\ ((s, r) \in F(D))\}$.

De ahora en adelante diremos que la digráfica D_i representa al vértice i en $\sigma(D, \alpha)$, a está operación también se le conoce como la composición de digráficas En la siguiente figura mostramos a la digráfica D con $V(D) = \{1, 2, 3\}$, la sucesión de digráficas $\alpha = \{D_1, D_2, D_3\}$ con $V(D_1) = \{1_1, 1_2\}$, $V(D_2) = \{2_1, 2_2, 2_3\}$, $V(D_3) = \{3_1\}$ y su respectiva suma de Zykov.

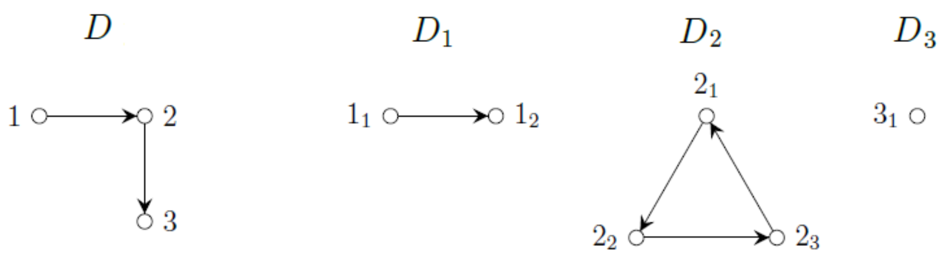


FIGURA 1.15

Dadas D_1 y D_2 dos digráficas, definiremos a continuación algunas operaciones de digráficas: el producto cartesiano, el producto fuerte, el producto directo y la disyunción excluyente de D_1 y D_2, denotadas como $D_1 + D_2$, $D_1 \cdot D_2$, $D_1 \times D_2$ y $D_1 \otimes D_2$, respectivamente, de ahora en adelante y a menos que se especifiqué lo contrario supondremos que las digráficas con las que trabajamos son ajenas por vértices.

Con el propósito de ejemplificar la definiciones consideremos las siguientes digráficas E_1, E_2 y E_3:

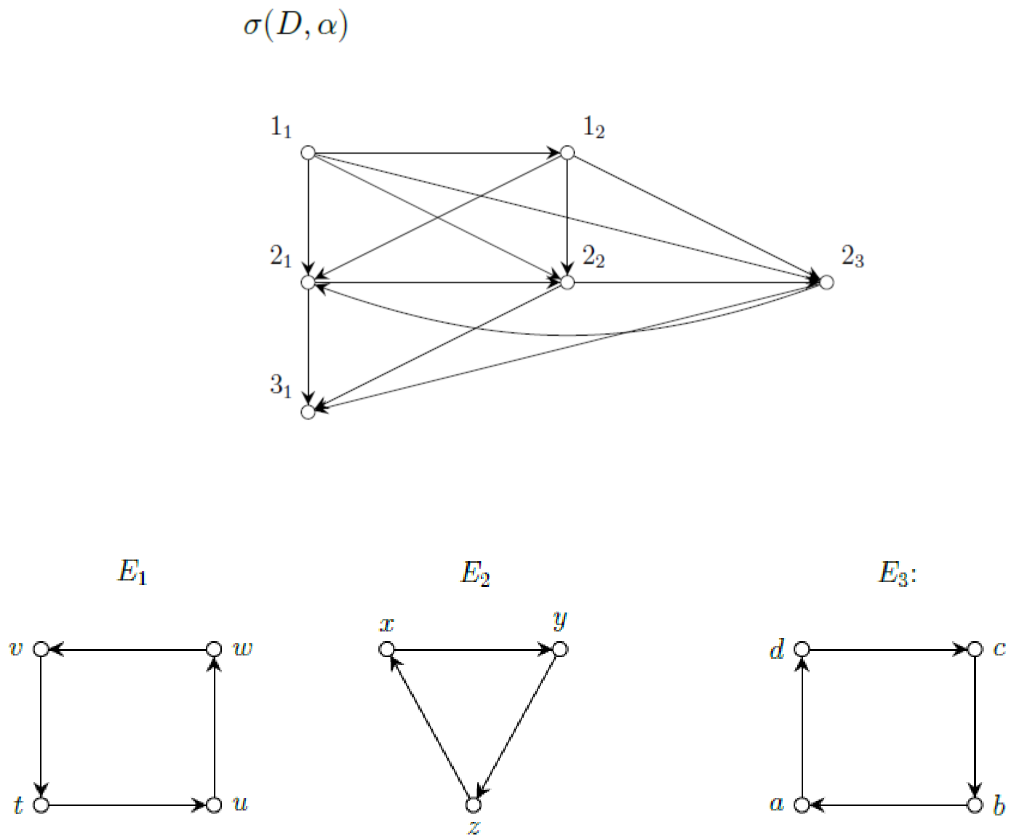


Figura 1.16

1.2.10. Producto directo.

Definición 11: Sean D_1 y D_2 dos digráficas, definimos la digráfica producto directo de D_1 y de D_2, denotada por $D_1 \times D_2$, como sigue:

- $V(D_1 \times D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$,
- $((x, y), (u, v)) \in F(D_1 \times D_2)$ si y sólo si $(x, u) \in F(D_1)$ y $(y, v) \in F(D_2)$.

En la siguiente figura mostramos la digráfica producto directo de E_1 y de E_2.

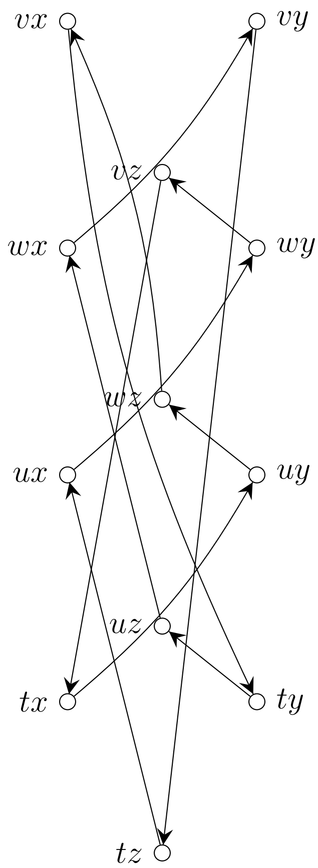


FIGURA 1.17

1.2.11. Producto cartesiano.

Definición 12: Sean D_1 y D_2 digráficas, definimos la digráfica producto cartesiano de D_1 y de D_2, denotada por $D_1 + D_2$, como sigue:

- $V(D_1 + D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$,
- $((x, y), (u, v)) \in F(D_1 + D_2)$ si y sólo si $(x, u) \in F(D_1)$ y $y = v$ o $(y, v) \in F(D_2)$ y $x = u$.

En la siguiente figura mostramos la digráfica producto cartesiano de E_1 y de E_3.

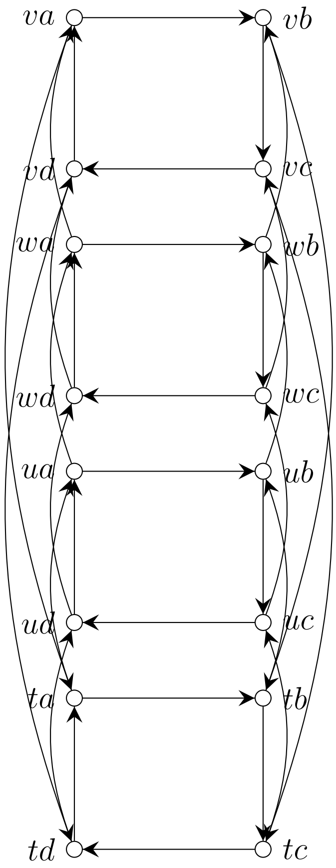


FIGURA 1.18

1.2.12. Producto fuerte.

Definición 13: Sean D_1 y D_2 dos digráficas, definimos la digráfica producto fuerte de D_1 y de D_2, denotada por $D_1 \cdot D_2$, como sigue:

- $V(D_1 \cdot D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$,
- $((x, y), (u, v)) \in F(D_1 \cdot D_2)$ si y sólo si $(x, u) \in F(D_1)$ y $y = v$ o $(y, v) \in F(D_2)$ y $x = u$ o $(x, u) \in F(D_1)$ y $(y, v) \in F(D_2)$.

En la siguiente figura mostramos la digráfica producto fuerte de E_1 y de E_2.

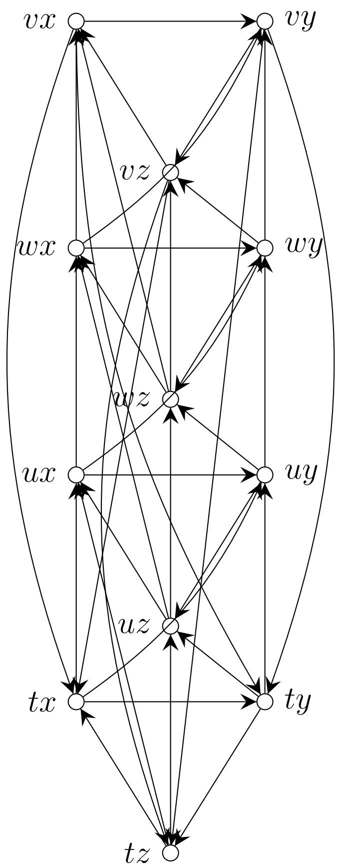


Figura 1.19

1.2.13. Disyunción excluyente.

Definición 14: Sean D_1 y D_2 dos digráficas, definimos la digráfica disyunción excluyente de D_1 y de D_2, denotada por $D_1 \otimes D_2$, como sigue:

- $V(D_1 \otimes D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$,
- $((x, y), (u, v)) \in F(D_1 \otimes D_2)$ si y sólo si $(x, u) \in F(D_1)$ y $(y, v) \notin F(D_2)$ o $(x, u) \notin F(D_1)$ y $(y, v) \in F(D_2)$.

En la siguiente figura mostramos la digráfica disyunción excluyente de E_1 y de E_2.

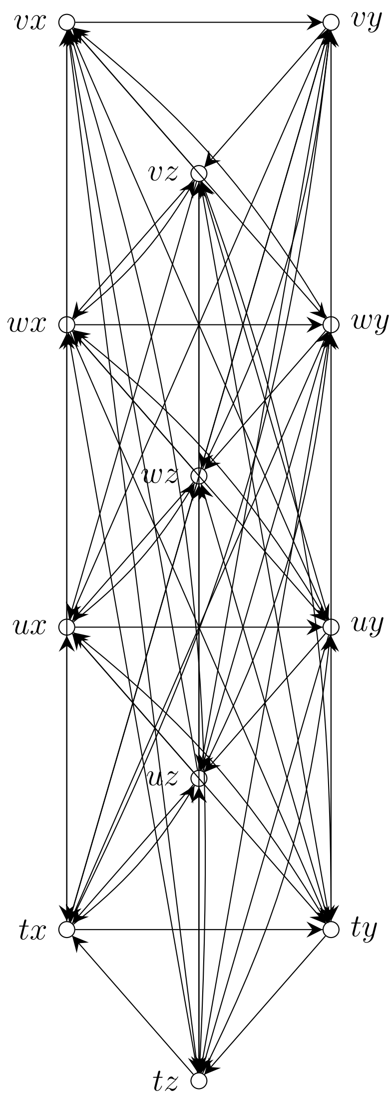


Figura 1.20

1.3. Resultados auxiliares

Los siguientes resultados nos servirán para poder demostrar algunos resultados en el último capítulo.

Proposición 1.1 [3] *Si D es una digráfica cuasitransitiva y suponemos que $P = (x_1, ..., x_k)$ es la mínima $x_1x_k -$ trayectoria, entonces la subdigráfica inducida por*

$V(P)$ es una digráfica semicompleta y $x_j \to x_i$ para todo $2 \leq i+1 < j \leq k$, a menos que $k = 4$, en cuyo caso la flecha entre x_1 y x_k puede estar ausente.

Demostración. Los casos para $k = 2, 3$ son fáciles de verificar. Consideremos el caso $k = 4$, sea $P = (x_1, ..., x_4)$ una $x_1x_4 - trayectoria$ de longitud minima, es decir, $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4$. Como $D[x_1, x_2, x_3, x_4]$ es cuasitransitiva, entonces x_1 es adyacente a x_3 y x_2 es adyacente a x_4, por la elección de P debemos tener que $x_3 \to x_1$ y $x_4 \to x_2$.

Para el caso $k = 5$. Como D es cuasitransitiva y (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) es un camino de longitud dos para $i = 1, 2, 3$, entonces tenemos que x_i y x_{i+2} son adyacentes para $i = 1, 2, 3$. Por la elección de P, $x_5 \to x_3 \to x_1$ y $x_4 \to x_2$, entonces $x_5 \to x_1$, las flechas (x_5, x_1) y (x_4, x_5) implican que $x_4 \to x_1$. Similarmente, (x_5, x_1) y (x_1, x_2) implican que $x_5 \to x_2$.

La prueba para el caso $k \geq 6$ es por inducción sobre k tomando como caso base $k = 5$.
Hipótesis de inducción: Suponemos cierto para $k-1$, es decir, si $P = (x_1, ..., x_{k-1})$ es la mínima $x_1x_{k-1} - trayectoria$, entonces $D[\{x_1, ..., x_{k-1}\}]$ es una digráfica semicompleta y $x_j \to x_i$ para todo $2 \leq i+1 < j \leq k-1$.
Por demostrar: para k. Si $i = k-2$, entonces $x_k \to x_i$ por la elección de P. Por lo tanto $D[\{x_1, ..., x_k\}]$ es una digráfica semicompleta y $x_j \to x_i$ para todo $2 \leq i+1 < j \leq k$. Si $i < k-2$, por hipótesis de inducción $x_{k-2} \to x_i$ y como $x_k \to x_{k-2}$, entonces por ser P minima tenemos que $x_k \to x_i$.

□

Corolario 1.2 [3] *Si D es una digráfica cuasitransitiva y tiene una xz-trayectoria para la cual x no domina a z, entonces $x \to z$ o existen vértices $\{u, v\} \subseteq V(D) - \{x, z\}$ para los cuales $x \to u \to v \to z$ y $z \to u \to v \to x$.*

Demostración. Consideremos P la menor $xz - trayectoria$.

- Si $l(P) = 4$, entonces existen $\{u, v\} \subseteq V(D) - \{x, z\}$ tales que $x \to u \to v \to z$, como D es cuasitransitiva y por la elección de P tenemos que $z \to u \to v \to x$.
- Si $l(P) \neq 4$, entonces $l(P) = 1$ de lo contrario por la proposición anterior tendríamos que $z \to x$ contradiciendo la hipótesis.

□

Lema 1.3 [3] *Sean A y B componentes fuertes de una digráfica cuasitransitiva D con al menos una flecha de A hacia B, entonces $A \to B$.*

Demostración. Sea (u, v) la flecha de A hacia B, si $x \in A$ y $y \in B$ como A y B son componentes fuertes, entonces existe P una $xu - trayectoria$ $(P \subseteq A)$ y Q una $vy - trayectoria$ $(Q \subseteq B)$, es decir, existe una trayectoria de x hacia y en D. Dado que A y B son componentes fuertes distintas, entonces no existen $yx - caminos$, en particular x no domina a y, por el corolario 1.2 tenemos que $x \to y$ o existen vértices $\{w, z\} \subseteq V(D) - \{x, y\}$ para los cuales $y \to w \to z \to x$, de nuevo como A y B son componentes fuertes distintas sólo se puede cumplir el primer caso. Por lo tanto $x \to y$.

$\square$

Lema 1.4 [3] *Sea D una digráfica cuasitransitiva fuerte con al menos dos vértices, entonces:*

1. *Si S y S' son dos subdigráficas de D tal que $UG(S)^c$ y $UG(S')^c$ son distintas componentes conexas de $UG(D)^c$, entonces tenemos los siguientes casos: $S \to S'$ o $S' \to S$ o ambos, de ser así $|V(S)| = |V(S')| = 1$.*
2. *$UG(D)^c$ es inconexa.*

Demostración. Dividiremos la demostración en dos partes una para cada inciso.

1. Antes de empezar la demostración del inciso (1) veamos la siguiente afirmación.

   Afirmación: Para todo $u \in S$ y para todo $v \in S'$ tenemos que $u \to v$ o $v \to u$ o ambas.

   Sean $u \in S$ y $v \in S'$, dado que $UG(S)^c$ y $UG(S')^c$ son componentes conexas distintas de $UG(D)^c$ tenemos que u no es adyacente a v en $UG(D)^c$, entonces u es adyacente a v en $UG(D)$, por lo tanto $u \to v$ o $v \to u$ o ambas.

   Supongamos que S' no domina a S y S no domina a S'.

   Si S' no domina a S, entonces existen $x \in S$ y $y \in S'$ tal que y no domina a x y si S no domina a S' existen $w \in S$ y $v \in S'$ tal que w no domina a v, pero por la afirmación anterior tenemos que $y \to x$ y $w \to v$.
   Ya que $\{w, x\} \subseteq S$ y $UG(S)^c$ es una componente conexa de $UG(D)^c$ existe un $wx-$ *camino* en $UG(S)^c$: $(w = z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n = x)$. Notemos que si $z_i \to v$ en D, entonces $z_{i+1} \to v$ en D, ya que de lo contrario por la afirmación anterior tendríamos que $v \to z_{i+1}$, es decir, $z_i \to v \to z_{i+1}$ en D, por ser D cuasitransitiva tenemos que $z_i \to z_{i+1}$ o $z_{i+1} \to z_i$, entonces z_i es adyacente a z_{i+1} en $UG(D)$ por lo que z_i no es adyacente a z_{i+1} en $UG(D)^c$, contradiciendo que $(w = z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n = x)$ es un camino en $UG(D)^c$. Así podemos afirmar que $z_k \to v$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$, ya que $w = z_1 \to v$. De forma análoga tenemos que existe un $vy-$ *camino* en $UG(S')^c$: $(v = u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_m = y)$ ya que $x \to v = u_1$ también tenemos que $x \to u_k$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$ en particular para $u_m = y$. Pero esto contradice la suposición de que y no domina a x. Por lo tanto debemos tener que $S \to S'$ o $S' \to S$ o ambas.

   Si $S \to S'$ y $S' \to S$, entonces para todo $x, y \in S$ y cualquier $z \in S'$ tenemos que $x \to z \to y$ y por ser D cuasitransitiva tenemos que $x \to y$ o $y \to x$ o ambas, entonces $D[S]$ es semicompleta. De forma similar podemos decir que S' también es semicompleta, por lo tanto $UG(S)^c$ y $UG(S')^c$ son conjuntos independientes de $UG(D)^c$, pero al ser estas componentes conexas de $UG(D)^c$, por la hipótesis del teorema debemos tener que $|V(S)| = |V(S')| = 1$.

2. La demostración del inciso (2) la haremos por inducción sobre $|V(D)|$. Ya que el argumento se cumple cuando $|V(D)| = 2$ o 3. Lo asumimos como cierto cuando $|V(D)| < n$ donde $n > 3$.
   Suponemos que existe un vértice z tal que $D - z$ no es fuerte, entonces para toda componente fuerte terminal A de $D - z$ existe $v \in A$ tal que $v \to z$ y para toda componente fuerte inicial B de $D - z$ existe $w \in B$ tal que $z \to w$. Como $D - z$ es cuasitransitiva y A es componente fuerte terminal tenemos que $w \to v$, entonces por el lema 1.3 tenemos que $B \to A$. Por lo tanto entonces toda componente fuerte inicial está dominada por toda componente fuerte terminal. Sea C cualquier componente fuerte de $D - z$, como $D - z$ es cuasitransitiva tenemos de nuevo por el lema 1.3 que C está dominada por una componente fuerte terminal o domina a una componente fuerte inicial de $D - z$, es decir, $C \to A$ con A componente fuerte terminal o $B \to C$ con B componente fuerte inicial, por lo que z es adyacente a cada vértice de $D - z$. Esto implica que z es una componente conexa de $UG(D)^c$. Por lo tanto, $UG(D)^c$ es inconexa.

   Suponemos que existe un vértice v tal que $D - v$ es fuerte. Como D es fuerte, D contiene una flecha (v, w) de v a $D - v$. Por inducción, $UG(D - v)^c$ no es conexa. Por (1) y como $D - v$ es fuerte consideremos S y R componentes conexas de $UG(D - v)^c$ tal que $w \in S$ y $S \to R$ en D, entonces v es adyacente a cada vértice de R. Por lo que $UG(R)^c$ es una componente de $UG(D)^c$ y la prueba termina.

□

Teorema 1.5 [3] *Sea D una digráfica cuasitransitiva.*

1. *Si D es fuerte, entonces existe una digráfica S semicompleta fuerte con vértices $V = \{v_1, v_2, ..., v_s\}$ y digráficas cuasitransitivas $H_1, ..., H_s$ donde v_i es un vértice o no es fuerte y $D = S[H_1, ..., H_s]$ tal que v_i es sustituido por H_i, $i = 1, 2, ..., s$.*

2. *Si D no es fuerte, entonces existe una gráfica orientada T transitiva con vértices $V(T) = \{u_1, u_2, ..., u_t\}$ y digráficas fuertes cuasitransitivas $H_1, ..., H_t$ tal que $D = T[H_1, ..., H_t]$ donde u_i es sustituido por H_i, $i = 1, 2, ..., t$.*

Demostración. Empezamos con la demostración del inciso 2, suponemos que D no es fuerte y sean $H_1, ..., H_t$ las componentes fuertes de D. Por el lema 1.3 si existe una flecha de H_i hacia H_j y existe una flecha de H_j hacia H_k para $\{i, j, k\} \subseteq \{1, ..., t\}$, entonces $H_i \to H_j \to H_k$ por lo que para cualesquiera tres vértices x, y, z en D tales que $x \in H_i$, $y \in H_j$ y $z \in H_k$ tenemos $x \to y \to z$, por la cuasitransitividad $x \to z$

o $z \to x$ este último caso queda descartado pues de lo contrario x y z estarían en la misma componente conexa con lo cual $H_i \to H_k$, entonces al contraer cada H_i a un vértice h_i tenemos una gráfica orientada y transitiva T con vértices $h_1, ..., h_t$ tal que $D = T\left[H_1, .., H_t\right]$.

Para la demostración del inciso 1, suponemos ahora que D es fuerte. Sean $Q_1, ..., Q_s$ las subdigráficas de D tal que cada $UG(Q_i)^c$ es una componente conexa de $UG(D)^c$. De acuerdo al lema 1.4.(2) cada Q_i es no fuerte o sólo es un vértice. Por el lema 1.4.(1) obtenemos una digráfica semicompleta fuerte S si cada Q_i es contraído a un vértice, entonces $D = S\left[Q_1, ..., Q_s\right]$.

$\square$

Capítulo 2

Cuasinúcleos en digráficas.

Una vez dadas las definiciones básicas de la teoría de gráficas y digráficas, en este capítulo empezaremos con el estudio de algunas propiedades de los cuasinúcleos de una digráfica.

En el capítulo anterior definimos lo que son los conjuntos independientes, absorbentes y cuasiabsorbentes a partir de estos conceptos se define el de cuasinúcleo de una digráfica, es decir, un **cuasinúcleo** de una digráfica es un conjunto independiente y cuasiabsorbente en D o dicho de otro modo Q es cuasinúcleo de D si y sólo si Q es independiente y $V(D) = Q \cup N^{-}(Q) \cup N^{-2}(Q)$.

T. Schjelderup-Ebbe [21] observó que entre cualesquiera dos gallinas en un gallinero existe una relación de dominación, casos similares pueden ser vistos en muchas otras sociedades de animales. En 1951 H. G. Laundau [15] trabaja con dichas relaciones abordando el tema desde una perspectiva matemática tomando como referencia los trabajos de dominación de Von Neumann y Morgenstern en teoría de juegos, él representa la estructura de una sociedad de animales con una relación de dominación como un conjunto de n enteros en el que sus miembros están relacionados de forma binaria y asimétrica, (lo que en teoría de digráficas llamamos torneo), el demuestra que para i el miembro con el puntaje más alto, es decir, aquel que domina a más miembros y para cualquier otro miembro $j \neq i$ tenemos que i domina a j o existe un miembro k que domina a j y a su vez es dominado por i por lo que i sería un cuasinúcleo para dicho conjunto de enteros, es decir, cualquier torneo tiene al menos un cuasinúcleo.

V. Chvátal y L. Lovász en el año de 1974 extienden las hipótesis de este resultado al demostrar que toda digráfica tiene al menos un cuasinúcleo [7], a partir de lo cual este concepto ha sido ampliamente estudiado en la Teoría de Digráficas.

En este capítulo se da una muestra de dichos estudios, además de ser resultados con los cuales trabajaremos en el resto de esta tesis.

2.1. Algunos teoremas sobre cuasinúcleos.

Para la siguiente digráfica podemos observar que el conjunto $Q = \{a_3, a_6\}$ es un cuasinúcleo de la digráfica.

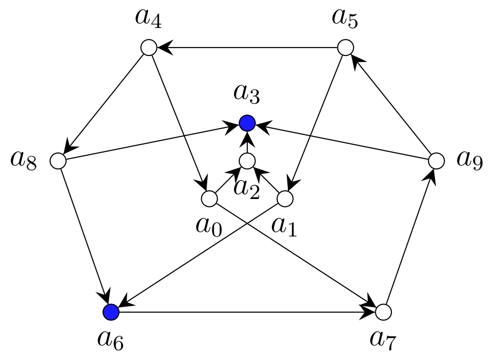


Figura 2.1

- $\{(a_3, a_6), (a_6, a_3)\} \cap F(D) = \phi$, por lo tanto Q es independiente.
- $\{(a_2, a_3), (a_8, a_3), (a_9, a_3), (a_1, a_6)\} \subset F(D)$, es decir, $\{a_1, a_2, a_8, a_9\} \subseteq N^{-}(Q)$ y $\{(a_0, a_2), (a_4, a_8), (a_5, a_1), (a_7, a_9)\} \subset F(D)$, es decir, $\{a_0, a_4, a_5, a_7\} \subseteq N^{-2}(Q)$, por lo tanto Q es cuasiabsorbente.

El siguiente teorema es la demostración de V. Chvátal y L. Lovász dada en el artículo *"Every directed graph has a semi-kernel", 1974* [7] de que toda digráfica tiene al menos un cuasinúcleo.

Teorema 2.1 *Toda digráfica contiene un cuasinúcleo.*

Demostración. Por inducción sobre el orden de D.

Si $|V(D)| = 1$, es decir, $V(D) = \{x\}$ tenemos que $\{x\}$ es un cuasinúcleo pues es absorbente e independiente y se satisface el teorema.

Hipótesis de inducción: suponemos que toda digráfica E tal que $|V(E)| \leq n$ contiene un cuasinúcleo.

Por demostar para $|V(D)| = n+1$. Sea D una digráfica de orden $n+1$ y $v \in V(D)$ arbitrario, consideremos la subdigráfica:

$$D_1 = D - (\{v\} \cup N^{-}(v)).$$

Si $D_1 = \phi$, entonces $\{v\}$ es cuasinúcleo de D, ya que $V(D) = \{v\} \cup N^{-}(v)$.

Si $D_1 \neq \phi$, entonces $|V(D_1)| < n + 1$, por hipótesis de inducción D_1 contiene un cuasinúcleo Q_1. Observemos que por definición de D_1 tenemos que no existen $Q_1 v - flechas$ en D.

Si no existen $v\, Q_1 - flechas$, entonces $Q_1 \cup \{v\}$ es un conjunto independiente de D, Q_1 es un conjunto cuasiabsorbente en D_1 y $\{v\}$ es un cuasinúcleo en $D\,[\{v\} \cup N^{-}(v)]$, entonces $Q_1 \cup \{v\}$ es un conjunto cuasiabsorbente en D y por lo tanto un cuasinúcleo de D.

Si existen $v\,Q_1{-}flechas$, entonces Q_1 cuasiabsorbe a $(\{v\} \cup N^-(v))$ y a $V(D_1) - Q_1$, al ser Q_1 independiente, entonces tenemos que Q_1 es un cuasinúcleo en D.

En cualquiera de los dos casos, D tiene un cuasinúcleo por lo tanto toda digráfica tiene cuasinúcleo.

□

Como ya vimos un cuasinúcleo de una digráfica D es un subconjunto de $V(D)$, que es a la vez independiente y cuasiabsorbente, de forma equivalente definimos un **núcleo** como un conjunto K de vértices en una digráfica D tal que K es independiente y absorbente. Decimos que D es **núcleo perfecta** si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo.

De esta definición podemos apreciar que todo núcleo en una digráfica D cumple la definición de cuasinúcleo, sin embargo no todo cuasinúcleo es un núcleo debido a que dicho conjunto no siempre es absorbente y de hecho no hay un teorema similar al anterior para núcleos en digráficas, es decir, no toda digráfica tiene núcleo como veremos en el siguiente ejemplo.

Para la siguiente digráfica veremos que cada vértice es un cuasinúcleo pero la digráfica no tiene núcleo.

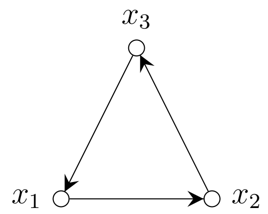


FIGURA 2.2

Sea $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces para $j \neq i$ tenemos que $x_j \to x_i$ o $x_i \to x_j$, es decir, los únicos conjuntos independientes para la digráfica anterior son $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ y $\{x_3\}$. Pero ninguno de ellos es núcleo pues $\{x_1\}$ no absorbe a x_2, $\{x_2\}$ no absorbe a x_3 y $\{x_3\}$ no absorbe a x_1.

Por otro lado $\{x_1\}$ es un cuasinúcleo para la digráfica pues $x_2 \to x_3 \to x_1$ y de igual forma $\{x_2\}$ y $\{x_3\}$ también son cuasinúcleos de la digráfica.

Una vez demostrado que toda digráfica tiene al menos un cuasinúcleo una buena pregunta es *¿cuántos cuasinúcleos puede tener una digráfica?*

En *"About quasi-kernels in a digraph", 1996* [14] Jacob y Meyniel dan una cota inferior para el número de cuasinúcleos de las digráficas sin núcleo.

Teorema 2.2 *Toda digráfica que no tiene núcleo tiene al menos tres cuasinúcleos distintos.*

Demostración. Sea D una digráfica que no tiene núcleo, por el teorema 2.1 existe Q_1 un cuasinúcleo de D. Sea R_2 un cuasinúcleo en $D\,[N^{-2}(Q_1)]$, $N^{-2}(Q_1)$ es distinto del vacío pues Q_1 no es núcleo.
Sea $X = \{v \in Q_1 : (v, R_2) = \phi\}$, afirmamos que $Q_2 = R_2 \cup X$ es un cuasinúcleo de D.

- Q_2 es independiente. Como $R_2 \subset D\,[N^{-2}(Q_1)]$ y $X \subset Q_1$, entonces $(R_2, X) = \phi$ y por la definición de X, $(X, R_2) = \phi$, además R_2 es independiente por ser un cuasinúcleo de $D\,[N^{-2}(Q_1)]$ y X es independiente por ser un subconjunto de Q_1, por lo tanto Q_2 es independiente.

- Q_2 es cuasiabsorbente. Sea $v \in V(D) - Q_2$, observemos que $V(D) = Q_1 \cup N^{-}(Q_1) \cup N^{-2}(Q_1)$.

  1. Si $v \in N^{-2}(Q_1) - Q_1$, entonces por la definición de R_2 tenemos que $d(v, Q_2) \leq 2$.
  2. Si $v \in N^{-}(Q_1)$, entonces existe $u \in Q_1$ tal que $(v, u) \in F(D)$. Si $u \in X$ entonces $d(v, Q_2) = 1$, si $u \in Q_1 - X$, entonces $d(v, Q_2) \leq 2$.
  3. Si $v \in Q_1 - X$, entonces $d(v, R_2) = 1$ con lo cual $d(v, Q_2) = 1$.

Por lo tanto Q_2 es un cuasinúcleo de D, como $Q_2 = R_2 \cup X$ y $\phi \neq R_2 \subseteq N^{-2}(Q_1) \neq Q_1$, entonces $Q_2 \neq Q_1$.

Sea $D_1 = V(D) - (Q_2 \cup N^{-}(Q_2)) = N^{-2}(Q_2) - Q_2$, $D_1 \neq \phi$, de lo contrario Q_2 sería un núcleo de D contradiciendo la hipótesis de que D no tiene núcleo. Sea R_3 un cuasinúcleo de D_1 afirmamos que $Q_3 = R_3 \cup (Q_2 - N^{-}(R_3))$ es un cuasinúcleo de D y es distinto de Q_1, Q_2.

- Q_3 es independiente. R_3 y Q_2 son conjuntos independientes en D por construcción, como $R_3 \subseteq V(D_1)$, entonces $(R_3, Q_2) = \phi$, es decir, $R_3 \cap N^{-}(Q_2) = \phi$, esto implica que $(R_3, (Q_2 - N^{-}(R_3)) = \phi$, además $(Q_2 - N^{-}(R_3), R_3) = \phi$ por tanto Q_3 es independiente en D.

- Q_3 es cuasiabsorbente. Sea $u \in V(D) - Q_3$, $V(D) = Q_2 \cup N^{-}(Q_2) \cup N^{-2}(Q_2)$.

  1. Si $u \in N^{-2}(Q_2) - Q_2$, entonces hemos terminado pues $R_3 \subseteq Q_3$ es cuasinúcleo de D_1.
  2. Si $u \in N^{-}(Q_2)$, entonces existe $v \in Q_2$ tal que $(u,\ v) \in F(D)$, si $v \in Q_2 - N^{-}(R_3)$ entonces $d(u, Q_3) = 1$, si $v \in Q_2 \cap N^{-}(R_3)$, entonces $d(u, Q_3) \leq 2$.
  3. Si $u \in Q_2$, entonces $d(u, R_3) = 1$ con lo cual $d(v, Q_3) = 1$.

  Tenemos entonces que Q_3 es un cuasinúcleo de D, $Q_3 = R_3 \cup (Q_2 - N^{-}(R_3))$, de la definición de D_1 sabemos que $R_3 \cap Q_2 = \phi$ además $R_3 \neq \phi$, entonces $Q_2 \neq Q_3$, por la construcción de Q_2 tenemos que para $v \in Q_1$, $v \in Q_2$ o $v \in N^{-}(Q_2)$

en cualquiera de los dos casos $v \notin V(D_1)$, es decir, $Q_1 \cap V(D_1) = \phi$, entonces $R_3 \cap Q_1 = \phi$, así $Q_3 \neq Q_1$. Por lo tanto toda digráfica sin núcleo tiene tres cuasinúcleos distintos.

$\square$

En lo que resta de la sección demostraremos algunas propiedades básicas que nos servirán para resultados posteriores.

Proposición 2.3 [3] *Sea D una digráfica, si $x \in V(D)$ no es un pozo, entonces existe un cuasinúcleo Q en D tal que $x \notin Q$.*

Demostración. Como x no es un pozo, existe $y \in N^+(x)$, si $N^-[y]$ es igual a $V(D)$, entonces $\{y\}$ es el cuasinúcleo buscado. De lo contrario consideremos $E = V(D) - N^-[y]$. Sea R un cuasinúcleo de E, por construcción $(R, y) = \phi$. Si $(y, R) = \phi$, entonces $R \cup \{y\}$ es independiente y para todo $v \in V(D) - (R \cup \{y\})$ tenemos que $v \in N^-(y)$ en tal caso $d(v, R \cup \{y\}) = 1$ o $v \in E - R$ en cuyo caso $d(v, R \cup \{y\}) \leq 2$. Si $(y, R) \neq \phi$, entonces existe $v \in R$ tal que $(y, v) \in F(D)$ y para todo $u \in N^-(y)$ $d(u, v) \leq 2$, es decir, $d(u, R) \leq 2$ para todo $u \in N^-(y)$. Por lo tanto R es un cuasinúcleo de D, además por construcción $x \notin R$ y $x \notin R \cup \{y\}$.

$\square$

Proposición 2.4 [3] *Si D es una digráfica y $v \in V(D)$, entonces existe un cuasinúcleo Q de D tal que $v \in N^-[Q]$.*

Demostración. Definimos $S \subseteq V(D)$ tal que para todo $x \in S$ y para todo cuasinúcleo M de D tenemos que $x \notin N^-[M]$, es decir, S es el conjunto de vértices que no cumplen el enunciado de teorema y sea Q un cuasinúcleo de $D[S]$. Consideremos R un cuasinúcleo de la digráfica $V(D) - N^-[Q]$.
Sea $X = Q - (Q \cap N^-(R))$. Afirmamos que $R \cup X$ es un cuasinúcleo de D.

- $R \cup X$ es cuasiabsorbente. Seleccionamos $v \in V(D) - (R \cup X)$ arbitrario. Si $v \notin N^-[Q]$, entonces por la definición de R, $d(v, R) \leq 2$ por lo que $d(v, R \cup X)$ ≤ 2. Si $v \in N^-[Q]$, entonces $v \in N^-[X]$ o $v \in N^-[Q - X]$. Por definición de X, $(Q - X) \to R$ así que $d(v, R \cup X) \leq 2$ en ambos casos, por lo tanto $R \cup X$ es un conjunto cuasiabsorbente en D.
- $R \cup X$ es independiente. $R \subseteq V(D) - N^-[Q]$ y $X \subseteq Q$ y $X = Q - (Q \cap N^-(R))$, entonces $(R, X) = \phi$ y $(X, R) = \phi$, además R es independiente por ser un cuasinúcleo y X es independiente por ser un subconjunto de Q, por lo tanto $R \cup X$ es independiente en D.

Para cada $v \in Q$ tenemos que $v \in X$ o $v \in Q - X$. Si $v \in X$, entonces $v \in R \cup X$. Si $v \in (Q - X) = (Q \cap N^-(R))$, entonces $v \in N^-(R \cup X)$, pero como $Q \subseteq S$ y $R \cup X$ es un cuasinúcleo de D tenemos una contradiccion a la definición de S, por lo tanto $S = \phi$.

$\square$

Capítulo 3

Cuasinúcleos ajenos en digráficas.

Si una digráfica D tiene un pozo x, entonces todo cuasinúcleo en D debe contener a x. Es decir, una digráfica con pozos no tiene cuasinúcleos ajenos lo que hace pensar que toda digráfica sin pozos tiene un par de cuasinúcleos ajenos. Por la proposición 2.3 ésto es verdad para digráficas con solo dos cuasinúcleos. En *"On the number of quasikernels in digraphs", 2003* [12], G. Gutin, K.M. Koh, E.G. Tay, A. Yeo proponen la siguiente pregunta.

¿Si D es una digráfica sin pozos, entonces D tiene un par de cuasinúcleos ajenos?.

La respuesta es afirmativa para muchas digráficas, como por ejemplo, para digráficas con sólo dos cuasinúcleos o para digráficas núcleo perfectas, desafortunadamente en general ésto no es verdad, ahora veremos un contraejemplo dado en *"On the number of quasikernels in digraphs", 2003* [12] y después mostraremos varios trabajos en los que se intenta asegurar la existencia de cuasinúcleos ajenos para algunos tipos de digráficas, por ejemplo el artículo de Sun Zhiren y Miao Xiaoyan *"Disjoint Quasi-Kernels in Digraphs", 2005* [25] en donde la idea principal es acotar la cardinalidad de los cuasinúcleos, los resultados de Germán Benítez y Laura Pastrana para las digráficas asociadas $S(D), R(D), T(D)$, $Q(D)$ y $L(D)$ y el artículo *"Quasikernels in Digraphs", 2008* [13] de Scott Heard y Jing Huang en el que demuestran la veracidad del argumento para las digráficas semicompletas multipartitas y cuasitransitivas .

Además mostraremos los resultados que hemos obtenido para algunas operaciones de digráficas; la corona, la suma de Zykov, el producto cartesiano, el producto fuerte, el producto directo y la disyunción excluyente y para las digráficas asociadas: digráfica de vigas y digráfica de líneas parcial.

3.1. Primer contraejemplo.

En *"On a problem in graph theory", 1963* [8], P. Erdös prueba la existencia de torneos T con $V(T) = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ ($n \geq 7$ impar) y la propiedad de que para todo par de vértices distintos u_i, u_j existe $u_k \in V(T)$ con $k \neq i, j$ tal que $\{(u_i, u_k), (u_j, u_k)\} \subseteq F(T)$. Ahora sean T un torneo de orden k con esta propiedad y $\Theta = (H_i)_{i \in \{1,...,k\}}$ una sucesión de digráficas, con $V(H_i) = \{y_i\}$. Por construcción la corona $T \circ \Theta$ no tiene pozos, por ser T un torneo cualquier cuasinúcleo de $T \circ \Theta$ debe tener un y sólo un vértice de T. Suponemos que existen Q_1 y Q_2 cuasinúcleos ajenos de $T \circ \Theta$. Sean $u_i \in Q_1 \cap V(T)$ y $u_j \in Q_2 \cap V(T)$, entonces $i \neq j$. Por la elección de T existe $u_k \in V(T)$ con $k \notin \{i, j\}$ tal que $\{(u_i, u_k), (u_j, u_k)\} \subseteq F(T)$, por lo que $d(u_k, Q_1) = 2$ y $d(u_k, Q_2) = 2$, además u_k es el único vértice en $T \circ \Theta$ que absorbe a y_k, entonces $y_k \in Q_1 \cap Q_2$. Por tanto $T \circ \Theta$ no tiene cuasinúcleos ajenos, es decir, $T \circ \Theta \in \boldsymbol{D}$.

En la figura 3.1 se muestra un torneo con la propiedad antes descrita al cual denotaremos de ahora en adelante como T_E y en la figura 3.2 tenemos a la digráfica $T_E \circ \Theta_x$ con $\Theta_x = (H_i)_{i \in \{1,...,7\}}$ y $V(H_i) = \{v_i\}$:

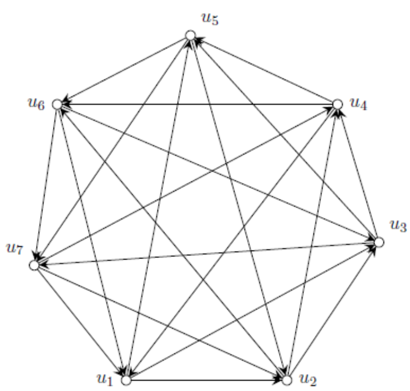


FIGURA 3.1

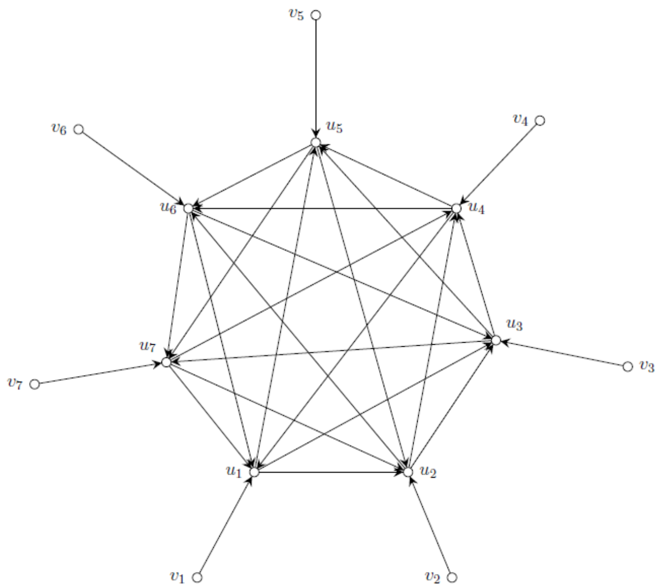


FIGURA 3.2

3.2. Cotas para la cardinalidad de los cuasinúcleos.

Los siguientes teoremas fueron publicados por S. Zhiren y Miao Xiaoyan en *“Disjoint Quasi-Kernels in Digraphs”* [25] 2005 donde dan condiciones para la existencia de cuasinúcleos ajenos en D.

Teorema 3.1 *Sea D una digráfica sin pozos. Si D tiene un cuasinúcleo de cardinalidad a lo más dos, entonces D tiene un par de cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Si D tiene un cuasinúcleo de cardinalidad uno; $Q_1 = \{x\}$, como x no es un pozo por la proposición 2.3 D tiene otro cuasinúcleo Q_2 que no contiene a x, por lo que Q_1 y Q_2 son cuasinúcleos ajenos de D.
Si D tiene un cuasinúcleo de cardinalidad dos; $Q_1 = \{x, y\}$, como y no es un pozo, entonces existe un vértice $z \in V(D)$ tal que $y \to z$. Obviamente $x \neq z$. Si $N^-[z] = V(D)$, entonces $Q_2 = \{z\}$ es un cuasinúcleo en D que no contiene a x ni a y, por lo que Q_1 y Q_2 son cuasinúcleos ajenos de D. Si $N^-[z] \neq V(D)$, entonces consideramos los siguientes dos casos:

1. $x \in N^-(z)$.

   Sea Q_2 un cuasinúcleo en $D - N^-[z]$. Si z está dominado por un vértice en Q_2, entonces Q_2 es un cuasinúcleo en D que no contiene a x ni a y. Si z no está dominado por ningún vértice en Q_2, entonces $Q_3 = Q_2 \cup \{z\}$ es un cuasinúcleo en D que no contiene a x ni a y.

2. $x \in D - N^-[z]$.

   - x está dominado por un vértice en $D - N^-[z]$.
     Claramente, x no es un pozo en $D - N^-[z]$. Por la proposición 2.3, $D - N^-[z]$ tiene un cuasinúcleo Q_2 que no contiene a x. Si z está dominado por un vértice en Q_2, entonces Q_2 es un cuasinúcleo en D que no contiene ni a x ni a y. Si z no está dominado por ningún vértice en Q_2, entonces $Q_3 = Q_2 \cup \{z\}$ es un cuasinúcleo en D que no incluye a x ni a y.

   - x no está dominado por un vértice en $D - N^-[z]$.
     Como x no es un pozo en D, x debe estar dominado por un vértice en $N^-(z) - \{y\}$. Por lo que $N^+(x) \subseteq N^-(z) - \{y\}$. Consideremos un vértice $w \in N^+(x)$. Sea Q_2 un cuasinúcleo en $D - N^-[z] - N^-(w)$. Si z no está dominado por un vértice en Q_2, $Q_3 = Q_2 \cup \{z\}$ es un cuasinúcleo en D que no contiene ni a x ni a y. Si z está dominado por un vértice en Q_2, entonces consideremos al vértice w. Si w no está dominado por un vértice en Q_2, entonces $Q_4 = Q_2 \cup \{w\}$ es un cuasinúcleo en D que no contiene ni a x ni a y. Si w está dominado por un vértice de Q_2, entonces Q_2 es un cuasinúcleo en D que no contiene ni a x ni a y.

□

Teorema 3.2 *Sea D una digráfica sin pozos y sin ciclos de longitud dos. Si D tiene un cuasinúcleo de cardinalidad tres $Q_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ con $N^-(x_i) = \phi$ $(i = 1, 2)$ y no hay ningún triángulo (w_1, w_2, w_3, w_1) con $w_i \in N^+(x_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, entonces D tiene un par de cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Como D no tiene pozos, $N^+(x_i) \neq \phi$ $(i = 1, 2, 3)$ por lo que tenemos dos casos:

- Si $N^+(x_1) \cap N^+(x_2) \neq \phi$, entonces consideremos a $w \in N^+(x_1) \cap N^+(x_2)$. Ahora solo necesitamos considerar dos subcasos:

  1. $x_3 \in N^-(w) - \{x_1, x_2\}$. Sea Q un cuasinúcleo en $D - N^-[w]$. Si w está dominado por algún vértice de Q, entonces Q es un cuasinúcleo de D ajeno a Q_1. Si w no está dominado por ningún vértice de Q, entonces $Q \cup \{w\}$ es un cuasinúcleo de D ajeno a Q_1.
  2. $x_3 \in V(D) - N^-[w]$. Como $N_D^-(x_i) = \phi$ $(i = 1, 2)$ y Q_1 es un cuasinúcleo de D tenemos que $d_D(z, x_3) \leq 2$ para todo $z \in V(D) - \{x_1, x_2\}$. Si $(w, x_3) \in F(D)$, entonces $R_1 = \{x_3\}$ es un cuasinúcleo en D. Si $(w, x_3) \notin F(D)$, entonces $R_2 = \{w, x_3\}$ es un cuasinúcleo de D, en cualquiera de los dos casos por el teorema 3.1 tenemos que existe R_3 un cuasinúcleo de D ajeno a R_i con $i \in \{1, 2\}$.

Por lo tanto D tiene dos cuasinúcleos ajenos.

- Si $N^+(x_1) \cap N^+(x_2) = \phi$, entonces consideremos $w_1 \in N^+(x_1)$ y $w_2 \in N^+(x_2)$. Claramente $w_1 \neq w_2$. Ahora dividiremos la demostración en dos subcasos.

  1. $x_3 \in N^-[w_1] \cup N^-[w_2]$. Sea Q un cuasinúcleo en $D - (N^-[w_1] \cup N^-[w_2])$. Como D no tiene ciclos de longitud dos consideremos los siguientes tres subcasos y en cada uno mostramos cuál es el cuasinúcleo Q_2 ajeno a Q_1.

     - $\{(w_1, w_2), (w_2, w_1)\} \cap F(D) = \phi$.

Si $(w_1, Q) \neq \phi$ y $(w_2, Q) \neq \phi$	$Q_2 = Q$
Si $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_2, Q) \neq \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_1\}$
Si $(w_1, Q) \neq \phi$ y $(w_2, Q) = \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_2\}$
Si $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_2, Q) = \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_1, w_2\}$

     - $w_1 \to w_2$.

Si $(w_1, Q) \neq \phi$ y $(w_2, Q) \neq \phi$	$Q_2 = Q$
Si $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_2, Q) \neq \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_1\}$
Si $(w_1, Q) \neq \phi$ y $(w_2, Q) = \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_2\}$
Si $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_2, Q) = \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_2\}$

- $w_2 \to w_1$.

Si $(w_1, Q) \neq \phi$ y $(w_2, Q) \neq \phi$	$Q_2 = Q$
Si $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_2, Q) \neq \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_1\}$
Si $(w_1, Q) \neq \phi$ y $(w_2, Q) = \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_2\}$
Si $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_2, Q) = \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_1\}$

2. $x_3 \notin N^-(w_1) \cup N^-(w_2)$. Claramente, $x_3 \in V(D_1) = V(D) - (N^-[w_1] \cup N^-[w_2])$. Si x_3 esta dominado por un vértice en D_1, entonces x_3 no es un pozo en D_1 y por la proposición 2.3, D_1 tiene un cuasinúcleo Q que no contiene a x_3. Como D no tiene ciclos de longitud dos consideremos los siguientes tres subcasos y en cada uno mostramos cuál es el cuasinúcleo Q_2 ajeno a Q_1.

- $\{(w_1, w_2), (w_2, w_1)\} \cap F(D) = \phi$.

Si $(w_1, Q) \neq \phi$ y $(w_2, Q) \neq \phi$	$Q_2 = Q$
Si $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_2, Q) \neq \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_1\}$
Si $(w_1, Q) \neq \phi$ y $(w_2, Q) = \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_2\}$
Si $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_2, Q) = \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_1, w_2\}$

- $w_1 \to w_2$.

Si $(w_1, Q) \neq \phi$ y $(w_2, Q) \neq \phi$	$Q_2 = Q$
Si $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_2, Q) \neq \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_1\}$
Si $(w_1, Q) \neq \phi$ y $(w_2, Q) = \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_2\}$
Si $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_2, Q) = \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_2\}$

- $w_2 \to w_1$.

Si $(w_1, Q) \neq \phi$ y $(w_2, Q) \neq \phi$	$Q_2 = Q$
Si $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_2, Q) \neq \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_1\}$
Si $(w_1, Q) \neq \phi$ y $(w_2, Q) = \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_2\}$
Si $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_2, Q) = \phi$	$Q_2 = Q \cup \{w_1\}$

Si x_3 no está dominado por un vértice en D_1, entonces $N^+(x_3) \subseteq N^-(w_1) \cup N^-(w_2)$. Sin pérdida de generalidad asumimos que x_3 está dominado por un vértice w_3 en $N^-(w_2)$. Sean $D_2 = D_1 - N^-(w_3)$ y Q un cuasinúcleo en D_2. Como D no tiene ciclos de longitud dos, consideremos los siguientes tres subcasos.

- $\{(w_1, w_2), (w_2, w_1)\} \cap F(D) = \phi$.
  - *a*) $(w_1, Q) \neq \phi$, $(w_2, Q) \neq \phi$. Si $(w_3, Q) = \phi$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_3\}$. De otro modo $Q_2 = Q$.
  - *b*) $(w_1, Q) \neq \phi$, $(w_2, Q) = \phi$. Tanto si $(w_3, Q) = \phi$ como si no, $Q_2 = Q \cup \{w_2\}$.
  - *c*) $(w_2, Q) \neq \phi$, $(w_1, Q) = \phi$. Si $(w_3, Q) \neq \phi$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_1\}$. Si $(w_3, Q) = \phi$ y $(w_1, w_3) = (w_3, w_1) = \phi$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_1, w_3\}$. Si $(w_3, Q) = \phi$ y $(w_1, w_3) \neq \phi$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_3\}$. Si $(w_3, Q) = \phi$ y $(w_3, w_1) \neq \phi$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_1\}$.
  - *d*) $(w_2, Q) = \phi$, $(w_1, Q) = \phi$. Tanto si $(w_3, Q) = \phi$ como si no, $Q_2 = Q \cup \{w_1, w_2\}$.
- $w_1 \to w_2$.
  - *a*) $(w_2, Q) \neq \phi$. Si $(w_3, Q) = \phi$ y $(w_1, Q) \neq \phi$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_3\}$. Si $(w_3, Q) = \phi$, $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_1, w_3) = (w_3, w_1) = \phi$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_1, w_3\}$. Si $(w_3, Q) = \phi$, $(w_1, Q) = \phi$ y existe una flecha entre w_1 y(w_3. Suponemos sin pérdida de generalidad que $w_3 \to w_1$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_1\}$. Si $(w_1, Q) = \phi$ y $(w_3, Q) \neq \phi$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_1\}$. Si $(w_3, Q) \neq \phi$ y $(w_1, Q) \neq \phi$, entonces $Q_2 = Q$.
  - *b*) $(w_2, Q) = \phi$. $Q_2 = Q \cup \{w_2\}$.
- $w_2 \to w_1$.
  Como D no tiene triángulos, para (w_1, w_2, w_3, w_1) con $w_i \in N^+(x_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, w_3 no dominada a w_1, entonces [no hay flechas entre w_1 y w_3 o $w_3 \to w_1$.
  - *a*) $(w_1, Q) \neq \phi$, $(w_2, Q) \neq \phi$. Si $(w_3, Q) = \phi$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_3\}$. De otro modo $Q_2 = Q$.

b) $(w_1, Q) \neq \phi$, $(w_2, Q) = \phi$. Si $(w_3, Q) = \phi$. Tanto si $(w_3, Q) = \phi$ como si no, $Q_2 = \{w_2\}$.
c) $(w_1, Q) = \phi$, $(w_2, Q) \neq \phi$. Si $(w_3, Q) \neq Q$, entonces $Q_2 = Q$. Si $(w_3, Q) = \phi$ y $(w_1, w_3) = (w_3, w_1) = \phi$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_1, w_3\}$. Si $(w_3, Q) = \phi$ y $(w_3, w_1) \neq \phi$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_1\}$.
d) $(w_1, Q) = \phi$, $(w_2, Q) = \phi$. Si $(w_3, Q) \neq Q$, entonces $Q_2 = Q$. Si $(w_3, Q) = \phi$ y $(w_1, w_3) = (w_3, w_1) = \phi$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_1, w_3\}$. Si $(w_3, Q) = \phi$ y $(w_3, w_1) \neq \phi$, entonces $Q_2 = Q \cup \{w_1\}$.

En los casos 1 y 2, Q_2 es un cuasinúcleo en D ajeno a Q_1.

□

3.3. Cuasinúcleos ajenos en digráficas núcleo perfectas.

De ahora en adelante analizaremos familias y operaciones de digráficas en las que se asegura la existencia de cuasinúcleos ajenos, primero veremos la demostración que dan G. Gutin, K. M. Koh, E. G. Tay y A. Yeo en el preliminar del artículo *“On the number of quasikernels in digraphs”* del año 2001 de que toda digráfica núcleo perfecta sin pozos tiene cuasinúcleos ajenos. Gracias a lo cual podemos asegurar la existencia de dichos cuasinúcleos en las digráficas transitivas, simétricas, digráficas sin ciclos impares y núcleo imperfectas críticas (esto último es un resultado original de este trabajo).

Lema 3.3 *Si D es una digráfica y existe $Y \subseteq V(D)$ tal que $D[Y]$ es núcleo perfecta, entonces existe un cuasinúcleo Q en D tal que $Q \subseteq V(D) - (N^-[Y] - Y)$.*

Demostración. Sean $Y \subseteq V(D)$ tal que $D[Y]$ es núcleo perfecta, H la subdigráfica inducida por $V(D) - N^-[Y]$, Q un cuasinúcleo de H y X el conjunto de vértices de Y los cuales no están dominados por ningún vértice de Q. Si $X = \phi$, entonces Q es el cuasinúcleo buscado, asi que supongamos que $X \neq \phi$, como $D[Y]$ es núcleo perfecta y $X \subseteq Y$, entonces $D[X]$ tiene un núcleo K. Consideremos a $(Q \cup K) \subseteq V(D) - N^-(Y)$ y afirmamos que es un cuasinúcleo de D, en efecto, no existe $QK - flecha$ en D puesto que $Q \cap N^-[Y] = \phi$ y como $K \subset X$ no existen $KQ - flecha$ en D, además Q y K son independientes por lo que $Q \cup K$ es independiente.

Por otro lado Q es un cuasinúcleo de $D - N^-[Y]$ así que sólo falta demostrar que $d(N^-(Y), Q \cup K) \leq 2$. Para todo $v \in N^-(Y)$ existe $u \in Y$ tal que $(v, u) \in F(D)$. Si $u \in X$, entonces $d(v, K) \leq 2$. Si $u \in Y - X$, entonces por la definición de X existe $w \in Q$ tal que $(u, w) \in F(D)$ por lo que $d(v, Q) \leq 2$, en ambos caso tenemos que $d(v, Q \cup K) \leq 2$. Por lo tanto $Q \cup K$ es el cuasinúcleo buscado.

□

Teorema 3.4 *Toda digráfica núcleo perfecta sin pozos tiene un par de cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sean D una digráfica núcleo perfecta sin pozos, K un núcleo de D, consideremos $Y = N^{+}(K)$, entonces $K \subseteq N^{-}(Y)$.
Como $Y \subseteq V(D)$ tenemos que $D[Y]$ es núcleo perfecta, por el lema anterior existe un cuasinúcleo Q en D tal que $Q \subseteq V(D) - N^{-}(Y)$, es decir, Q es un cuasinúcleo ajeno a $K \subseteq N^{-}(Y)$, entonces Q y K son los cuasinúcleos buscados.

□

Del teorema 3.4 se obtienen los siguientes corolarios.

Corolario 3.5 *Toda digráfica transitiva sin pozos tiene al menos un par de cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sea D una digráfica transitiva, afirmamos que D es núcleo perfecta. Sea E una subdigráfica inducida de D, como D es transitiva, entonces E también lo es, por el teorema 2.1, E tiene al menos un cuasinúcleo Q. Si $x \in N^{-2}(Q)$, entonces existen $v \in N^{-}(Q)$ y $w \in Q$ tal que $\{(x, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$. Por ser D transitiva tenemos que $(x, w) \in F(D)$, es decir, $x \in N^{-}(Q)$, por lo tanto Q es un núcleo en E, así tenemos que D es núcleo perfecta y por el teorema 2.4, D tiene un par de cuasinúcleos ajenos.

□

Corolario 3.6 *Toda digráfica simétrica tiene al menos un par de cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sea D una digráfica simétrica, afirmamos que D es núcleo perfecta. Sean E una subdigráfica inducida de D y Q un subconjunto independiente máximo por contención en E. Para todo $x \in E - Q$ como $Q \cup \{x\}$ no es independiente, entonces existe $y \in Q$ tal que $(x, y) \in F(D)$ o $(y, x) \in F(D)$, pero como D es simétrica ambas flechas están en $F(D)$, es decir, Q es un conjunto absorbente en E y por lo tanto es un núcleo de E, así queda demostrado que D es núcleo perfecta y por el teorema 3.4, D tiene dos cuasinúcleos ajenos.

□

Los siguientes dos teoremas los podemos encontrar en *"Theory of Games and Economic Behavior", 1947* [23], J. Von Neumann and O. Morgensten y *"Solution of irreflexive relations", 1953* [18], M. Richardson, respectivamente.

Teorema 3.7 [23] *Toda digráfica que no contiene ciclos es núcleo perfecta.*

Corolario 3.8 [18] *Toda digráfica que no contiene ciclos tiene un par de cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Se sigue directamente de los teoremas 3.7 y 3.4.

□

Teorema 3.9 *Toda digráfica que no contiene ciclos de longitud impar es núcleo perfecta.*

Corolario 3.10 *Toda digráfica que no contiene ciclos de longitud impar tiene un par de cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Se sigue directamente de los teoremas 3.9 y 3.4.

□

De la desmostración del teorema 3.4 podemos observar que $K \cap Y = \phi$, lo que implica que Y es un subconjunto propio de $V(D)$. Por lo tanto esto nos lleva a establecer el siguiente teorema.

Teorema 3.11 *Toda digráfica núcleo imperfecta crítica sin pozos tiene un par de cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sean D una digráfica núcleo imperfecta crítica sin pozos, K un cuasinúcleo de D. Consideremos $Y = N^+(K)$, entonces $K \subseteq N^-(Y)$.
Como $Y \subseteq V(D)$ tenemos que $D[Y]$ es núcleo perfecta como $K \cap Y = \phi$, entonces Y es un subconjunto propio de $V(D)$, por el lema 3.3 existe un cuasinúcleo Q en D tal que $Q \subseteq V(D) - N^-(Y)$, es decir, Q es un cuasinúcleo ajeno a $K \subseteq N^-(Y)$, entonces Q y K son los cuasinúcleos buscados.

□

3.4. Cuasinúcleos ajenos en digráficas semicompletas m-partitas y cuasitransitivas.

S. Heard demuestra en su trabajo de tesis de maestría, *"Quasikernels in Digraphs", 2005* dirigida por J. Huang y posteriormente publicada como artículo [13], que las digráficas semicompletas m-partitas y cuasitransitivas tienen cuasinúcleos ajenos. A continuación damos las demostraciones para estos dos tipos de digráficas.

3.4.1. Digráficas semicompletas multipartitas

Teorema 3.12: [13] *Toda digráfica semicompleta m-partita sin pozos contiene dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sea D una digráfica semicompleta m-partita y $M = (V_1, ..., V_m)$ la partición de $V(D)$ en conjuntos independientes. Por el teorema 2.1, D contiene un cuasinúcleo Q, entonces $Q \subseteq V_i$ para algún $i \in \{1, ..., m\}$ pues si $Q \cap V_i \neq \phi$ y $Q \cap V_j \neq \phi$ con $i \neq j$ al ser D semicompleta m-partita tendriamos que existen flechas entre $Q \cap V_i$ y $Q \cap V_j$ contradiciendo la independencia de Q, asumimos sin pérdida de generalidad que $Q \subseteq V_m$ y por tanto V_m es un cuasinúcleo de D ya que $Q \subseteq V_m$ es cuasiabsorbente y V_m es un conjunto independiente de D, si V_j es un cuasinúcleo de D para algún $j \in \{1, ..., m-1\}$ terminamos, por lo tanto asumimos que V_j no es un cuasinúcleo de D para $j \in \{1, ..., m-1\}$.

Sea $H = D[V(D) - V_m]$, note que H tiene núcleo este debe estar contenido en algun V_k para algún $k \in \{1, ..., m-1\}$ pues H es semicompleta $(m-1)$-partita, entonces $d(V_i, V_k) \leq 1$ para todo $i \in \{1, ..., m-1\}$, como D no tiene pozos para todo $v \in V_m$ existe $u \in V(H)$ tal que $(v, u) \in F(D)$, entonces $d(V_m, V_k) \leq 2$ por lo tanto V_k es un cuasinúcleo de D y es ajeno a V_m.

Si H no tiene núcleo. Sea $P = \{V_1, ..., V_r\}$ el conjunto de cuasinúcleos de H, por el teorema 2.2, $r \geq 3$. Ahora definimos X_i como el conjunto de vértices $z \in V_m$ tal que $d(z, V_i) > \ 2$ con $i \in \{1, ..., r\}$ como V_i no es un cuasinúcleo de D tenemos que, $X_i \neq \phi$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$.

Afirmamos que X_i es un cuasinúcleo de D para todo $i \in \{1, ..., r\}$. $X_i \subseteq V_m$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$, por lo que X_i es independiente. Si $v \in V(D) - X_i$, entonces $d(v, V_i) \leq 2$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$. Por lo que tenemos los siguientes casos:

- Si $v \in V_i$ como D es semicompleta multipartita y por la definición de X_i, para todo $u \in X_i$ tenemos que $(v,\ u) \in F(D)$, es decir, $d(v, X_i) = 1$.
- Si $d(v, V_i) = 1$, entonces existe $w \in V_i$ tal que $(v,\ w) \in F(D)$ y por definición de X_i, para todo $u \in X_i$, $(v,\ u) \in F(D)$, es decir, $d(v, X_i) = 1$.
- Si $d(v, V_i) = 2$, entonces existe $w \in N^-(V_i)$ tal que $(v,\ w) \in F(D)$, por el caso anterior $d(w, X_i) = 1$, entonces $d(v, X_i) \leq 2$.

Por lo tanto X_i es un cuasinúcleo de D.

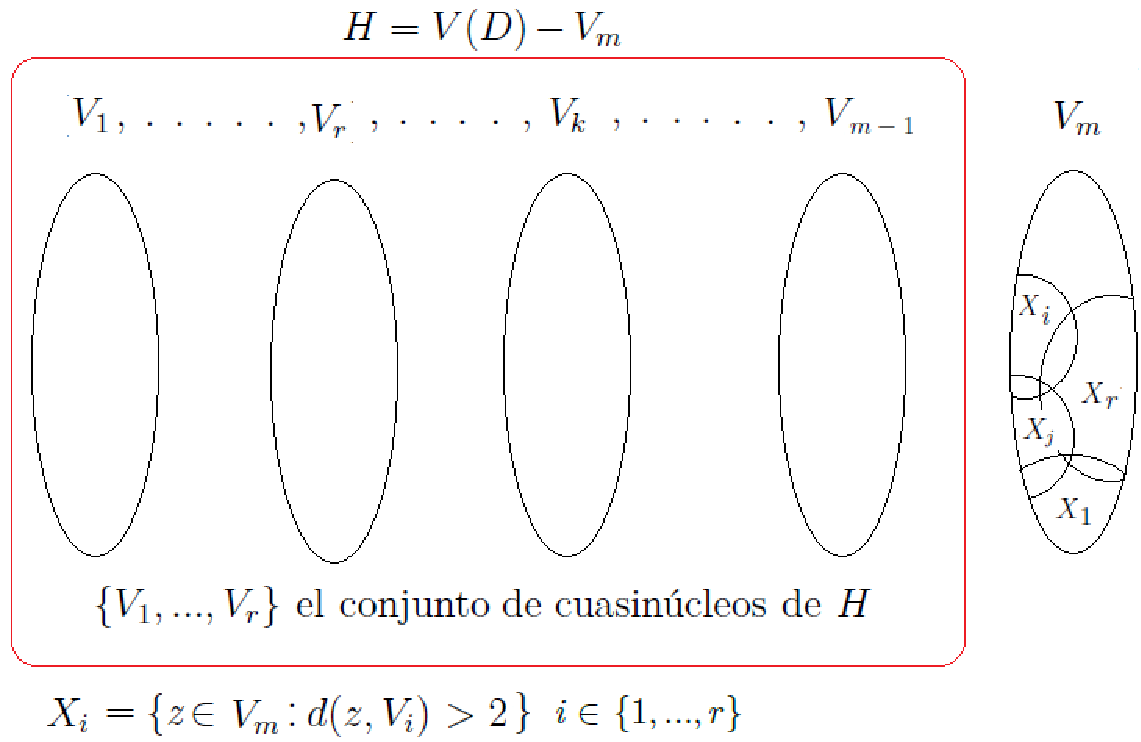


FIGURA 3.3

Afirmamos que $\bigcap_{i=1}^{r} N_H^{-2}(V_i) = \phi$, pues si existe $v \in \bigcap_{i=1}^{r} N_H^{-2}(V_i)$, entonces v contradice la proposición 2.4 ya que por definición v no es un pozo, notemos que $N^{+}(X_i) \subseteq N^{-2}(V_i)$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$ de lo contrario $d(X_i, V_i) \leq 2$, ahora $\bigcap_{i=1}^{r} X_i = \phi$ pues si existe $v \in \bigcap_{i=1}^{r} X_i$ como v no es un pozo existe w tal que $(v,\ w) \in F(D)$, entonces $w \in \bigcap_{i=1}^{r} N^{+}(X_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{r} N^{-2}(V_i)$ contradiciendo la primera afirmación de este párrafo.

Sea I cualquier subconjunto propio de $\{1, ..., r\}$, afirmamos que si $Y = \bigcap_{i \in I} X_i \neq \phi$, entonces es un cuasinúcleo de D. Si $x \in V(D) - Y$, existe $j \in I$ tal que $x \notin X_j$ y así $d(x, V_j) \leq 2$, como $j \in I$ tenemos que $Y \subset X_j$, entonces $N^{-}[V_j] \rightarrow Y$, por lo tanto $d(x, Y) \leq 2$.

Si existen $i,\ j$ tales que $X_i \cap X_j = \phi$, entonces X_i y X_j son los cuasinúcleos ajenos de D, si no seleccionamos $S \subset \{1, ..., r\}$ para el que $Y = \bigcap_{i \in S} X_i \neq \phi$, entonces como $\bigcap_{i=1}^{r} X_i = \phi$ tenemos que existe $j \in \{1, ..., r\}$ tal que $Y \cap X_j = \phi$ y por la afirmación de párrafo anterior Y, X_j son los cuasinúcleos ajenos de D.

$\square$

La siguiente figura es un ejemplo de una digráfica semicompleta multipartita en la que $(V_1 = \{1, 2, 3, \}, V_2 = \{4, 5, 6\}, V_3 = \{7, 8, 9\})$ es la partición de $V(D)$ y para la que cada V_i es un cuasinúcleo de D.

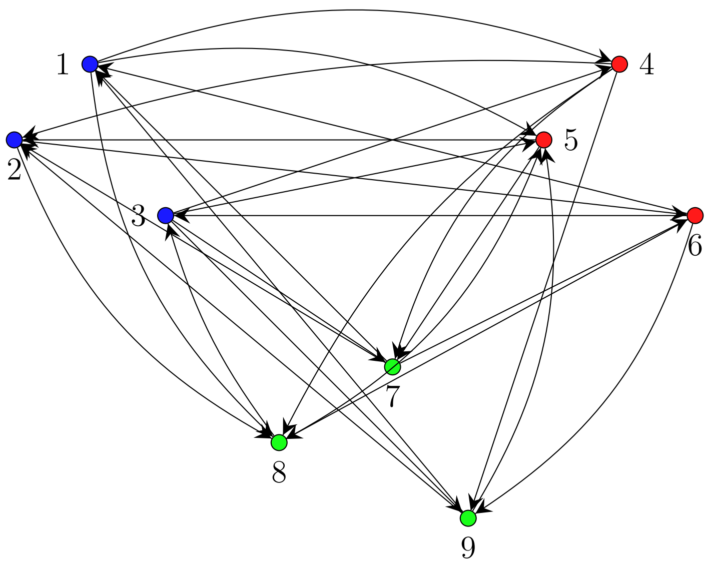


FIGURA 3.4

3.4.2. Digráficas cuasitransitivas

De las definiciones de digráfica transitiva y cuasitransitiva dadas en el capítulo 1 podemos ver que toda digráfica transitiva es cuasitransitiva pero el regreso no es necesariamente cierto, por lo que el teorema 3.14 extienden las hipótesis del corolario 3.5. Para su demostración necesitaremos del siguiente lema.

Lema 3.13 [13] *Si I es un conjunto independiente en una digráfica cuasitransitiva fuerte $D = (V(D), F(D))$ donde $|V(D)| \geq 2$, entonces existe un vértice $v \in V(D)$ tal que $I \to v$.*

Demostración. Como D es fuerte, el primer caso del teorema 1.5 implica que $D = S[H_1, ..., H_s]$ donde S es una digráfica semicompleta fuerte y cada H_i es una digráfica cuasitransitiva no fuerte o un sólo vértice. Como I es un conjunto independiente en D, entonces $I \subseteq V(H_j)$ para algún $j \in \{1, 2, ..., s\}$. Dado que S es fuerte, S no contiene pozos. Entonces $v_j \in V(S)$ está dominado por algún vértice $v_l \in V(S)$, por lo tanto $I \to v$ para todo vértice $v \in V(H_l)$ con l distinto de j.

□

Teorema 3.14 [13] *Toda digráfica cuasitransitiva sin pozos tiene dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Para demostrar este teorema dividiremos la demostración en los casos, si D es fuerte o si no lo es.

- Si D es una digráfica cuasitransitiva fuerte sin pozos y Q es un cuasinúcleo de D, entonces existe un cuasinúcleo de D ajeno a Q.

  Como D no tiene pozos, D tiene al menos dos vértices. Como Q es independiente, entonces por el lema 3.13 existe $v \in V(D)$ tal que $Q \to v$, por la proposición 2.4, existe un cuasinúcleo Q' tal que $v \in N^-[Q']$.

  1. Si $v \in N^-(Q')$ y existe $x \in Q \cap Q' \subseteq Q$, entonces $(x, v) \in F(D)$. Sea $w \in Q'$ tal que $(v, w) \in F(D)$, por ser D cuasitransitiva alguna de las flechas (x, w) o (w, x) pertenece a $F(D)$ contradiciendo la independencia de Q'.
  2. Si $v \in Q'$ y existe $x \in Q \cap Q' \subseteq Q$, entonces $(x, v) \in F(D)$ y de nuevo se contradice la independencia de Q'.

- Si D es una digráfica cuasitransitiva sin pozos tal que D no es fuerte, entonces D contiene dos cuasinúcleos ajenos.

  Por el caso 2 del teorema 1.5, podemos afirmar que existe una gráfica orientada transitiva $T = (V(D), F(D))$ con $V(T) = \{u_1, u_2, ..., u_t\}$ y digráficas fuertes cuasitransitivas $H_1, ..., H_t$ tal que $D = T[H_1, ..., H_t]$ donde u_i es sustituido por H_i, $i = 1, 2, ..., t$. Sin pérdida de generalidad sean $u_1, u_2, ..., u_k$ los pozos de T y $H_1, H_2, ..., H_k$ las correspondientes digráficas cuasitransitivas. Como D no tiene pozos, cada H_i no tiene pozos. Por el caso anterior cada H_i tiene dos cuasinúcleos ajenos $Q_{i,1}$ y $Q_{i,2}$. Afirmamos que $Q_1 = \bigcup_{i=1}^{k} Q_{i,1}$ y $Q_2 = \bigcup_{i=1}^{k} Q_{i,2}$ son cuasinúcleos ajenos de D. Demostraremos que Q_1 es un cuasinúcleo de D, la demostración de que Q_2 es cuasinúcleo es análoga.

  - Como $u_1, u_2, ..., u_k$ son los pozos de T, entonces para $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, ..., k\}$ tenemos que $(H_i, H_j) = \phi$ y así $(Q_{i,1}, Q_{j,1}) = \phi$, es decir, Q_1 es independiente.
  - Si $v \in V(D) - Q_1$ con $v \in H_j$ y $j \in \{1, 2, ..., k\}$, entonces como $Q_{j,1}$ es un cuasinúcleo de H_j tenemos que $d(v, Q_{j,1}) \leq 2$, es decir, $d(v, Q_1) \leq 2$, si $j \in \{k+1, ..., t\}$ la estructura de D, es decir, dado que T es transitiva implica que $H_j \to H_l$ para algún $l \in \{1, 2, ..., k\}$, entonces $H_j \to Q_{l,1}$ como $Q_{l,1} \subseteq Q_1$ tenemos que $d(v, Q_1) = 1$, así Q_1 es cuasiabsorbente.

  Y dado que $Q_{i,1} \cap Q_{i,2} = \phi$ para todo $i \in \{1, ..., k\}$ tenemos que $Q_1 \cap Q_2 = \phi$. Por lo tanto Q_1 y Q_2 son cuasinúcleos ajenos de D.

$\square$

La siguiente figura es un ejemplo de una digráfica cuasitransitiva para la cual $Q_1 = \{1\}$ y $Q_2 = \{8\}$ son cuasinúcleos ajenos.

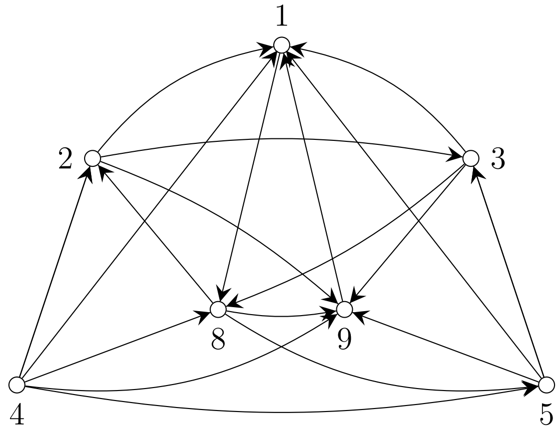


Figura 3.5

3.5. Cuasinúcleos ajenos en la suma de Zykov.

En esta sección empezamos a trabajar con operaciones en digráficas, veremos algunas condiciones con las cuales la propiedad de tener cuasinúcleos ajenos se preserva. Primero estudiaremos una operación entre una digráfica D y una sucesión de digráficas α llamada suma de Zykov (definición 10, capítulo 1). Algunos trabajos relacionados con esta operación los podemos ver en *“H-trayectorias y H-caminos en digráficas H-coloreadas”, 2013* [19] por Hortensia Galeana-Sánchez y María del Rocío Sánchez López y en *“On the existence and on the number of (k, l)-kernels in the lexicographic product of graphs”, 2008* [20] por W. Szumny, Iwona Wloch, Andrzej Wloch. Los siguientes tres teoremas son resultados originales de este trabajo.

Teorema 3.15 *Sean D una digráfica con $V(D) = \{1, ..., n\}$, $n \geq 2$ y $\alpha = \{D_i\}_{i \in V(D)}$ cualquier sucesión de digráficas ajenas por vértices con $V(D_i) = \{i_1, ..., i_{p_i}\}$, $p_i \geq 1$ para cada $i \in V(D)$. Si D tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos Q_1, Q_2, entonces $\sigma(D, \alpha)$ tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sean Q_{D_i} un cuasinúcleo de D_i para cada $i \in V(D)$ y $R_1 = \bigcup_{i \in Q_1}(\{i\} \times Q_{D_i})$, demostraremos que R_1 es un cuasinúcleo para $\sigma(D, \alpha)$.

- R_1 es cuasiabsorbente. Sea $(k, k_m) \in V(\sigma(D, \alpha)) - R_1$, es decir, $k \in V(D)$ y $1 \leq m \leq p_k$ con $k_m \in V(D_k)$, por la definición de R_1 se tiene que $(k, k_m) \notin Q_{D_i}$ para cada $i \in Q_1$. Así $k \notin Q_1$ o ($k \in Q_1$ y $k_m \notin Q_{D_k}$).

1. Si $k \notin Q_1$ y $d_D(k, Q_1) = 2$. Sean $i, j \in V(D)$ con $j \in Q_1$ tal que $k \to i \to j$ en D, entonces $(k, k_m) \to (i, i_1) \to (j, j_r)$ para cualquier $j_r \in Q_{D_j}$ y para $i_1 \in V(D_i)$, como $(j, j_r) \in R_1$ tenemos que $d_{\sigma(D,\alpha)}((k, k_m), R_1) \leq 2$.
   Si $k \notin Q_1$ y $d_D(k, Q_1) = 1$, entonces sea $j \in Q_1$ tal que $k \to j$ en D, por lo que $(k, k_m) \to (j, j_r)$ para cualquier $j_r \in Q_{D_j}$, como $(j, j_r) \in R_1$ tenemos que $d_{\sigma(D,\alpha)}((k, k_m), R_1) = 1$.
2. Si ($k \in Q_1$ y $k_m \notin Q_{D_k}$) y $d_{D_k}(k_m, Q_{D_k}) = 2$. Como $(\{k\} \times Q_{D_k}) \subseteq R_1$, entonces $d_{\sigma(D,\alpha)}((k, k_m), R_1) = 2$.
   Si ($k \in Q_1$ y $k_m \notin Q_{D_k}$) y $d_{D_k}(k_m, Q_{D_k}) = 1$, entonces $d_{\sigma(D,\alpha)}(k_m, R_1) = 1$, ya que $(\{k\} \times Q_{D_k}) \subseteq R_1$.

- R_1 es independiente. Suponemos que existe $\{(i, i_r), (j, j_s)\} \subseteq R_1$ tales que $((i, i_r), (j, j_s)) \in F(\sigma(D, \alpha))$ como $(i, i_r) \neq (j, j_s)$, entonces $i \neq j$ o ($i = j$ y $r \neq s$).

  1. Si $i \neq j$. Por la definición de suma de Zykov $((i, i_r), (j, j_s)) \in F(\sigma(D, \alpha))$ si y sólo si $(i, j) \in F(D)$, como $\{(i, i_r), (j, j_s)\} \subseteq R_1$, entonces $\{i, j\} \subseteq Q_1$ contradiciendo la independencia de Q_1.
  2. Si ($i = j$ y $r \neq s$). Por la definición de suma de Zykov $((i, i_r), (j, j_s)) \in F(\sigma(D, \alpha))$ si y sólo si $(i_r, i_s) \in F(D_i)$, como $\{(i, i_r), (i, i_s)\} \subseteq R_1$, entonces $\{i_r, i_s\} \subseteq Q_{D_i}$ contradiciendo la independencia de Q_{D_i}.

Por lo tanto R_1 es un cuasinúcleo de $\sigma(D, \alpha)$, de forma análoga $R_2 = \bigcup_{i \in Q_2} Q_{D_i}$ también es un cuasinúcleo de $\sigma(D, \alpha)$.

Sólo falta probar que R_1 y R_2 son ajenos, supongamos que existe $(k, k_n) \in R_1 \cap R_2$, entonces por las definiciones de R_1 y R_2 tenemos que $k \in Q_1 \cap Q_2$ pero ésto es una contradicción a la hipótesis de que Q_1 y Q_2 son cuasinúcleos ajenos en D. Por lo tanto R_1 y R_2 son cuasinúcleos ajenos en $\sigma(D, \alpha)$.

□

Teorema 3.16 *Sean D una digráfica con $V(D) = \{1, ..., n\}$, Q un cuasinúcleo de D y $\alpha = \{D_i\}_{i \in V(D)}$ cualquier sucesión de digráficas ajenas por vértices con $V(D_i) = \{i_1, ..., i_{p_i}\}$, $p_i \geq 1$ para todo $i \in V(D)$. Si para cada $j \in Q$ tenemos que D_j tiene al menos un par de cuasinúcleos ajenos $Q^1_{D_j}$ y $Q^2_{D_j}$, entonces $\sigma(D, \alpha)$ tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sea $R_1 = \bigcup_{j \in Q}(\{j\} \times Q^1_{D_j})$, demostraremos que R_1 es un cuasinúcleo para $\sigma(D, \alpha)$.

- R_1 es cuasiabsorbente. Sea $(k, k_m) \in V(\sigma(T, \alpha)) - R_1$, es decir, $k \in V(D)$ y $k_m \in V(D_k)$ con $1 \leq m \leq p_k$. Por la definición de R_1 tenemos que $k \notin Q$ o ($k \in Q$ y $k_m \notin Q^1_{D_k}$).

1. $k \notin Q$.
   a) Si $d_D(k,Q)=2$. Sean $\{i,j\} \subseteq V(D)$ con $j \in Q$ tal que $k \to i \to j$ en D, entonces $(k,k_m) \to (i,i_1) \to (j,j_r)$ para cualquier $j_r \in Q^1_{D_j}$ y para $i_1 \in V(D_i)$, por lo que $d_{\sigma(D,\alpha)}((k,k_m),R_1)=2$.
   b) $d_D(k,Q)=1$. Sea $j \in Q$ tal que $k \to j$ en D, entonces $(k,k_m) \to (j,j_r)$ para cualquier $j_r \in Q^1_{D_j}$, por lo que $d_{\sigma(D,\alpha)}((k,k_m),R_1)=1$.
2. ($k \in Q$ y $k_m \notin Q^1_{D_k}$).
   a) $d_{D_k}(k_m, Q^1_{D_k})=2$. Como $(\{k\} \times Q^1_{D_k}) \subseteq R_1$, entonces $d_{\sigma(D,\alpha)}((k,k_m),R_1) = 2$.
   b) $d_{D_k}(k_n, Q^1_{D_k})=1$. Como $(\{k\} \times Q^1_{D_k}) \subseteq R_1$, entonces $d_{\sigma(D,\alpha)}((k,k_m),R_1) = 1$.

- R_1 es independiente. Suponemos que existe $\{(i,i_r),(j,j_s)\} \subseteq R_1$ ($(i,i_r) \neq (j,j_s)$) tal que $((i,i_r),(j,j_s)) \in F(\sigma(D,\alpha))$ como $(i,i_r) \neq (j,j_s)$ entonces, $i \neq j$ o ($i=j$ y $r \neq s$).

   1. Si $i \neq j$. Por definición de suma de Zykov $((i,i_r),(j,j_s)) \in F(\sigma(D,\alpha))$ si y sólo si $(i,j) \in F(D)$, como $\{(i,i_r),(j,j_s)\} \subseteq R_1$, entonces $\{i,j\} \subseteq Q$ contradiciendo la independencia de Q.
   2. Si ($i=j$ y $r \neq s$). Por definición de suma de Zykov $((i,i_r),(j,j_s)) \in F(\sigma(D,\alpha))$ si y sólo si $(i_r,i_s) \in F(D_i)$, como $\{(i,i_r),(i,i_s)\} \subseteq R_1$, entonces $i_r, i_s \in Q^1_{D_i}$ contradiciendo la independencia de $Q^1_{D_i}$.

Por lo tanto R_1 es un cuasinúcleo de $\sigma(D,\alpha)$, de forma análoga $R_2 = \bigcup_{i\in Q}(\{i\} \times Q^2_{\alpha_i})$ también es un cuasinúcleo de $\sigma(D,\alpha)$.

Supongamos que R_1 y R_2 no son ajenos, entonces existe $k \in V(D)$ tal que $(k,k_m) \in R_1 \cap R_2$ con $1 \leq m \leq p_k$. Por las definiciones de R_1 y R_2 tenemos que $k_m \in Q^1_{D_k} \cap Q^2_{D_k}$, pero ésto es una contradicción a la hipótesis de que $Q^1_{D_k}$ y $Q^2_{D_k}$ son cuasinúcleos ajenos en D_k. Por lo tanto R_1 y R_2 son cuasinúcleos ajenos en $\sigma(D,\alpha)$.

$\square$

3.6. Segundo contraejemplo.

En esta sección construiremos una nueva familia de digráficas que pertenecen a $\boldsymbol{D}$ a partir de la suma de Zykov y de las digráficas $T_k \circ \Theta_k$ de las cuales hablamos al principio del Capítulo 3.

Sea T_k con $V(T_k) = \{u_1, ..., u_k\}$ y k impar uno de los torneos de Erdös, como ya demostramos $T_k \circ \Theta_k$ con $\Theta_k = (H_i)_{i\in\{1,...,k\}}$ y $V(H_i) = \{y_i\}$ es una digráfica sin cuasinúcleos ajenos tal que $V(T_k \circ \Theta_k) = \{u_1, ..., u_k, u_{k+1}, ..., u_{2k}\}$ con $u_{k+i} = y_i$.

Observemos que si D es una digráfica conexa y $T_k \circ \Theta_k$ es una subdigráfica inducida de D tal que $\{(x,y) \in F(D) : x \in V(T_k \circ \Theta_k), y \in V(D) - V(T_k \circ \Theta_k)\} = \phi$, entonces D es una digráfica sin cuasinúcleos ajenos puesto que para cualquier Q cuasinúcleo de D tenemos que $Q \cap V(T_k \circ \Theta_k)$ es un cuasinúcleo de $T_k \circ \Theta_k$.

Consideremos ahora a $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)$ con $\alpha = \left\{D_{u_j}\right\}_{u_j \in V(T_k \circ \Theta_k)}$ y $D_{u_j} = T_k \circ \Theta_k$ para toda $u_j \in V(T_k \circ \Theta_k)$, por la definición 10 tenemos que D_{u_j} con $j \in \{1,...,k\}$ representa al vértice u_j de T_k. A continuación veremos que $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)$ es una digráfica sin cuasinúcleos ajenos.

Teorema 3.17 *La digráfica $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)$ con $\alpha = \left\{D_{u_j}\right\}_{u_j \in V(T_k \circ \Theta_k)}$ y $D_{u_j} = T_k \circ \Theta_k$ para toda $u_j \in V(T_k \circ \Theta_k)$, es una digráfica sin cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sea Q un cuasinúcleo de $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)$.

Afirmación 1 *Si $x \in (\{u_j\} \times V(D_{u_j}))$ y $y \in (\{u_i\} \times V(D_{u_i}))$ con $i \neq j$, entonces $(x,y) \in F(\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha))$ si y solo si $D_{u_j} \to D_{u_i}$.*

Demostración. Se sigue de la definición de $F(\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha))$ y del hecho de que $i \neq j$ □

Afirmación 2 *$Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j})) \neq \phi$ para algún $j \in \{1,...,k\}$ y $Q \cap (\{u_i\} \times V(D_{u_i})) = \phi$ para todo $i \in \{1,...,k\} - \{j\}$.*

Demostración. Para $j \in \{1,...,k\}$ tenemos que $N^+_{T_k \circ \Theta_k}(u_j) \subset \{u_1,...,u_k\}$, entonces por definición de $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)$ tenemos que $N^+_{\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)}(x) \subset \cup_{i \in \{1,...,k\}}(\{u_i\} \times V(D_{u_i}))$ para todo $x \in (u_j \times V(D_{u_j}))$, entonces si $Q \cap (\{u_i\} \times V(D_{u_i})) = \phi$ para todo $i \in \{1,...,k\}$, Q no sería cuasiabsorbente en $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)$.

En T_k para cualesquiera $\{i,j\} \subseteq \{1,...,k\}$ tenemos que $u_i \to u_j$ o $u_j \to u_i$, entonces por la afirmación 1 tenemos que $(\{u_i\} \times V(D_{u_i})) \to (\{u_j\} \times V(D_{u_j}))$ o $(\{u_j\} \times V(D_{u_j})) \to (\{u_i\} \times V(D_{u_i}))$, por lo que si $Q \cap (\{u_i\} \times V(D_{u_i})) \neq \phi$ para algún $i \in \{1,...,k\} - \{j\}$. tendríamos que $Q \cap (\{u_i\} \times V(D_{u_i})) \to Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j}))$ o $Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j})) \to Q \cap (\{u_i\} \times V(D_{u_i}))$ contradiciendo la independencia de Q. □

Afirmación 3 *Si $Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j})) \neq \phi$ para $j \in \{1,...,k\}$, entonces $Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j}))$ es un cuasinúcleo de $(\{u_j\} \times V(D_{u_j}))$.*

Demostración. Como Q es un conjunto independiente, tenemos que $Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j})) \subseteq Q$ es independiente.

Sea $x \in (\{u_j\} \times V(D_{u_j})) - Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j}))$, como Q es un cuasinúcleo de $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)$ tenemos que $d_{\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)}(x, Q) = 2$ o $d_{\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)}(x, Q) = 1$.

1. Si $d_{\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)}(x, Q) = 2$. Entonces existe $\{z, y\} \subseteq V(\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha))$ tal que $x \to z \to y$ en $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)$ y $z \in Q$. Sea $\{n, m\} \subseteq \{1, ..., 2k\}$ tal que $y \in (\{u_n\} \times V(D_{u_n}))$ y $z \in (\{u_m\} \times V(D_{u_m}))$, como $N^+_{\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)}((\{u_j\} \times V(D_{u_j})) \subset \cup_{i \in \{1,...,k\}}(\{u_i\} \times V(D_{u_i}))$ tenemos por la afirmación 1 que $\{n, m\} \subseteq \{1, ..., k\}$.
   Si $m \neq j$, entonces $u_m \to u_j$ o $u_j \to u_m$ y por la definición de $F(\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha))$ tenemos que $(\{u_j\} \times V(D_{u_j})) \to (\{u_m\} \times V(D_{u_m}))$ o $(\{u_m\} \times V(D_{u_m})) \to (\{u_j\} \times V(D_{u_j}))$, además $z \in Q \cap (\{u_m\} \times V(D_{u_m})) \neq \phi$ y $Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j})) \neq \phi$ por lo que $Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j})) \to Q \cap (\{u_m\} \times V(D_{u_m}))$ o $Q \cap (\{u_m\} \times V(D_{u_m})) \to Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j}))$ contradiciendo la independencia de Q. Por lo que $m = j$.
   Por la afirmación 1, si $n \neq j$, entonces como $(x, y) \in F(\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha))$ tenemos que $(\{u_j\} \times V(D_{u_j})) \to (\{u_n\} \times V(D_{u_n}))$ y como $(z, y) \in F(\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha))$ tenemos que $(\{u_n\} \times V(D_{u_n})) \to (\{u_j\} \times V(D_{u_j}))$, pero ésto es una contradicción ya que como en $T_k \circ \Theta_k$ no hay flechas simétricas tampoco las hay en $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)$ por lo que $j = n$, es decir, $\{y, z\} \subseteq Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j}))$, por lo que $d_{(\{u_j\} \times V(D_{u_j}))}(x, Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j})) = 2$.

2. Si $d_{\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)}(x, Q) = 1$. Entonces existe $z \in Q$ tal que $x \to z$ en $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)$. Sea $m \in \{1, ..., 2k\}$ tal que $z \in (\{u_m\} \times V(D_{u_m}))$, como $N^+_{\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)}((\{u_j\} \times V(D_{u_j}))) \subset \cup_{i \in \{1,...,k\}}(u_i \times V(D_{u_i}))$ tenemos que $m \in \{1, ..., k\}$.
   Si $m \neq j$, por la afirmación 1 tenemos que $(\{u_j\} \times V(D_{u_j})) \to (\{u_m\} \times V(D_{u_m}))$, además $z \in Q \cap (\{u_m\} \times V(D_{u_m})) \neq \phi$ por lo que $Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j})) \to Q \cap (\{u_m\} \times V(D_{u_m}))$ contradiciendo la independencia de Q.

Por lo tanto $Q \cap (\{u_j\} \times V(D_{u_j}))$ es un cuasinúcleo de $(\{u_j\} \times V(D_{u_j}))$.

$\square$

Ahora supongamos que $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos Q_1 y Q_2, por las afirmaciones 2 y 3 tenemos que existe $\{l, m\} \subseteq \{1, ..., k\}$ tal que $Q_1 \cap V(D_{u_l})$ es un cuasinúcleo de $(\{u_l\} \times V(D_{u_l}))$ y $Q_2 \cap (\{u_m\} \times V(D_{u_m}))$ es un cuasinúcleo de $(\{u_m\} \times V(D_{u_m}))$. Si $l = m$, entonces $Q_1 \cap (\{u_l\} \times V(D_{u_l}))$ y $Q_2 \cap (\{u_m\} \times V(D_{u_m}))$ son cuasinúcleos ajenos de $(\{u_m\} \times V(D_{u_m})) \cong (T_k \circ \Theta_k)$ lo que es una contradicción puesto que $T_k \circ \Theta_k$ no tiene cuasinúcleos ajenos. Si $l \neq m$, entonces existe $n \in \{1, ..., k\} - \{l, m\}$ tal que $u_l \to u_n$ y $u_m \to u_n$ en T_k, como $\phi \neq Q_1 \cap (\{u_l\} \times V(D_{u_l}))$ y $\phi \neq Q_2 \cap (\{u_m\} \times V(D_{u_m}))$, tenemos por la afirmación 2 que $Q_1 \cap (\{u_i\} \times V(D_{u_i})) = \phi$ para todo $i \in \{1, ..., k\} - \{l\}$ en particular para $i = n$ y $Q_2 \cap (\{u_i\} \times V(D_{u_i})) = \phi$ para todo $i \in \{1, ..., k\} - \{m\}$ en particular para $i = n$.

Además por la definición de $F(\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha))$ tenemos que $N^+_{\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)}((\{u_{n+k}\} \times V(D_{u_{n+k}}))) \subseteq ((\{u_{n+k}\} \times V(D_{u_{n+k}})) \cup (\{u_n\} \times V(D_{u_n})))$ y $N^{+2}_{\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)}((\{u_{n+k}\} \times V(D_{u_{n+k}}))) = ((\{u_{n+k}\} \times V(D_{u_{n+k}})))\cup N^+ [(\{u_n\} \times V(D_{u_n}))] \subseteq ((\{u_{n+k}\} \times V(D_{u_{n+k}}))\cup (\cup(\{u_i\} \times V(D_{u_i}))$ con $i \in \{1, ..., k\} - \{l, m\}$, como Q_1 y Q_2 deben cuasiabsorber a $(\{u_{n+k}\} \times V(D_{u_{n+k}}))$ tenemos que $Q_1 \cap (\{u_{n+k}\} \times V(D_{u_{n+k}}))$ es un cuasinúcleo de $(\{u_{n+k}\} \times V(D_{u_{n+k}}))$ y $Q_2 \cap (\{u_{n+k}\} \times V(D_{u_{n+k}}))$ es un cuasinúcleo de $(\{u_{n+k}\} \times V(D_{u_{n+k}}))$ por lo que $D_{u_{n+k}} \cong T_k \circ \Theta_k$ tendría dos cuasinúcleos ajenos.

Así llegamos a una contradicción al suponer que $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos Q_1 y Q_2.
Por lo que podemos concluir que $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha) \in \boldsymbol{D}$, además por construcción de $\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha)$ tenemos que $|V(\sigma(T_k \circ \Theta_k, \alpha))| = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2$ para k impar y para las digráficas $T_k \circ \Theta_k$ tenemos que $|V(T_k \circ \Theta_k)| = 2 \cdot k$ para k impar, lo que implica $\{\sigma(T_k, \alpha)\} \cap \{T_k \circ \Theta_k\} = \phi$.

□

3.7. Cuasinúcleos ajenos en algunos productos de digráficas.

Los productos directo, cartesiano, fuerte y la disyución excluyente (capítulo 1, definiciones 11,12,13,14 respectivamente) han sido trabajados por M. Kawaśnik y Monika Perl en *"Nearly perfect sets in products of graphs", 2004* [15] y aunque sobre estas operaciones se han obtenido varios resultados en (k, l)-núcleos. Nosotros nos limitaremos a dar condiciones específicas de cuándo estas operaciones preservan la propiedad de tener cuasinúcleos ajenos. Lossiguientes teoremas son resultados originales de este trabajo.

Teorema 3.18 *Sean D_1 y D_2 dos digráficas. Si D_1 tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos y D_2 no tiene pozos, entonces $D_1 \times D_2$ tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sean Q_1 y Q_2 dos cuasinúcleos ajenos en D_1, primero demostraremos que $Q_1 \times V(D_2)$ es un cuasinúcleo de $D_1 \times D_2$, la demostración para $Q_2 \times V(D_2)$ es análoga.

- $Q_1 \times V(D_2)$ es independiente. Sea $\{(x, y), (u, v)\} \subseteq Q_1 \times V(D_2)$. Suponemos que $(x, y) \to (u, v)$, entonces por la definición de $D_1 \times D_2$ tenemos que en particular $\{x, u\} \subseteq Q_1$ y $x \to u$, es decir, Q_1 no es independiente contradiciendo la hipótesis de que Q_1 es un cuasinúcleo. Por lo tanto $Q_1 \times V(D_2)$ es independiente.
- $Q_1 \times V(D_2)$ es cuasiabsorbente. Sea $(x, y) \in V(D_1 \times D_2) - Q_1 \times V(D_2)$.
  1. Si $x \in N^-(Q_1)$, entonces existe $u \in Q_1$ tal que $(x, u) \in F(D_1)$, además como D_2 no tiene pozos, existe $v \in V(D_2)$ tal que $(y, v) \in F(D_2)$, por lo tanto $(u, v) \in Q_1 \times V(D_2)$ y $(x, y) \to (u, v)$, es decir, $(x, y) \in N^-(Q_1 \times V(D_2))$.
  2. Si $x \in N^{-2}(Q_1)$, entonces existen $u \in N^-(Q_1)$ y $z \in Q_1$ tales que $x \to u \to z$, como D_2 no tiene pozos existe $\{v, w\} \subseteq V(D_2)$ tal que $y \to v \to w$, por lo tanto $(z, w) \in Q_1 \times V(D_2)$ y $(x, y) \to (u, v) \to (z, w)$, es decir, $(x, y) \in N^{-2}(Q_1 \times V(D_2))$.

Por lo tanto $Q_1 \times V(D_2)$ es un conjunto cuasiabsorbente en $D_1 \times D_2$.

Con esto queda demostrado que $Q_1 \times V(D_2)$ y $Q_2 \times V(D_2)$ son cuasinúcleos de $D_1 \times D_2$. Ahora supongamos que existe $(x, y) \in (Q_1 \times V(D_2)) \cap (Q_2 \times V(D_2))$, por la definición de $D_1 \times D_2$ tenemos que $x \in Q_1 \cap Q_2$ contradiciendo el hecho de que Q_1 y Q_2 son ajenos en D_1, por lo tanto $Q_1 \times V(D_2)$ y $Q_2 \times V(D_2)$ son cuasinúcleos ajenos en $D_1 \times D_2$.

□

En el siguiente ejemplo podemos ver que $Q_1 = \{u, v\}$ y $Q_2 = \{w, t\}$ son dos cuasinúcleos ajenos de E_1, entonces por el teorema anterior tenemos que $Q_1 \times V(E_2)$ y $Q_2 \times V(E_2)$ son cuasinúcleos ajenos en $E_1 \times E_2$.

- $Q_1 \times V(E_2) = \{(u, x), (u, y), (u, z), (v, x), (v, y), (v, z)\}$.
- $Q_2 \times V(E_2) = \{(t, x), (t, y), (t, z), (w, x), (w, y), (w, z)\}$.

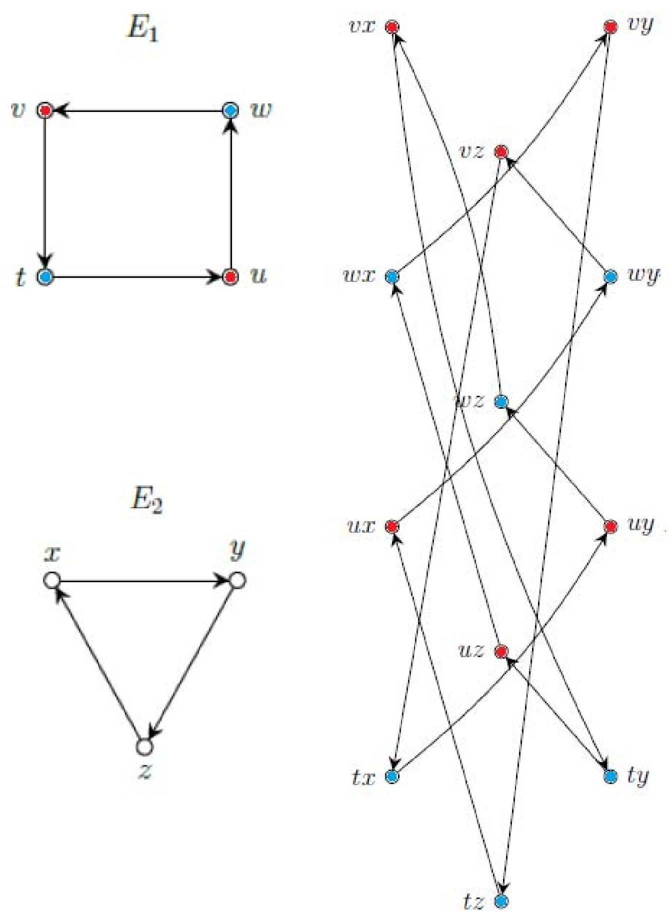


Figura 3.5

De los teoremas 3.18 y 3.14 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.19 *Si D_1 es una digráfica cuasitransitiva y D_2 es una digráfica sin pozos, entonces $D_1 \times D_2 \in \boldsymbol{D}^c$.*

A continuación estudiaremos como deben ser los cuasinúcleos de producto cartesiano de dos digráficas. Observemos a $A \times B$ un cuasinúcleo de $D_1 + D_2$, por la definición 12 tenemos que $A \times B$ es independiente en $D_1 + D_2$ si y sólo si A es independiente en D_1 y B es independiente en D_2. Ahora sea $(x, y) \in V(D_1+D_2-(A\times B))$, como $(x, y) \notin A \times B$ tenemos los siguientes casos:

1. $d_{D_1+D_2}((x, y), A \times B)) = 2$ si y sólo si existe $\{(z, w), (u, v)\} \subseteq V(D_1 + D_2)$ tal que $(x, y) \to (z, w) \to (u, v)$ con $(u, v) \in A \times B$. Por la definición 12 tenemos los siguientes subcasos:

   a) $x \to z \to u$ y $y = w = v$, es decir, $d_{D_1}(x, A) = 2$ y $y \in B$.

   b) $x \to z = u$ y $y = w \to v$, es decir, $d_{D_1}(x, A) = 1$ y $d_{D_2}(y, B) = 1$.

   c) $x = z \to u$ y $y \to w = v$, es decir, $d_{D_1}(x, A) = 1$ y $d_{D_2}(y, B) = 1$.

   d) $x = z = u$ y $y \to w \to u$, es decir, $x \in A$ y $d_{D_2}(y, B) = 2$.

2. $d_{D_1+D_2}((x, y), A \times B)) = 1$ si y sólo si existe $(u, v) \in V(D_1 + D_2)$ tal que $(x, y) \to (u, v)$ con $(x, y) \in A \times B$. Por la definición 12 tenemos los siguientes subcasos:

   a) $x \to u$ y $y = v$, es decir, $d_{D_1}(x, A) = 1$ y $y \in B$.

   b) $x = u$ y $y \to u$, es decir, $x \in A$ y $d_{D_2}(y, B) = 1$.

En cualquier caso tenemos que A es cuasiabsorbente en D_1 y B es cuasiabsorbente en D_2 por lo que A es un cuasinúcleo de D_1 y B es un cuasinúcleo de D_2.

Supongamos que A no es núcleo de D_1. Sean $x \in V(D_1)-A$ tal que $d_{D_1}(x, A) = 2$ y $y \in V(D_2)-B$, entonces por los casos anteriores tenemos que $d_{D_1+D_2}((x, y), A\times B)) > 2$ contradiciendo el hecho de que $A \times B$ es un cuasinúcleo, por lo que A debe ser un núcleo de D_1, de forma análoga tenemos que B debe ser un núcleo de D_2. Con base en ésto demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 3.20 *Sean D_1 y D_2 dos digráficas. Si D_1 y D_2 tienen al menos dos núcleos ajenos respectivamente, entonces $D_1 + D_2$ tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sean A_1, B_1 dos núcleos ajenos de D_1 y A_2, B_2 dos núcleos ajenos de D_2. Primero demostraremos que $A_1 \times A_2$ es un cuasinúcleo de $D_1 + D_2$, la demostración para $B_1 \times B_2$ es análoga.

- $A_1 \times A_2$ es independiente. Sea $\{(x,y),(u,v)\} \subseteq A_1 \times A_2$. Suponemos que $(x,y) \rightarrow (u,v)$, entonces por la definición de $D_1 + D_2$ tenemos que $x \rightarrow u$ y $y = v$ o $y \rightarrow v$ y $x = u$, como $\{x,u\} \subseteq A_1$ y $\{y,v\} \subseteq A_2$, entonces cualquiera de los casos anteriores se contradice la hipótesis de que A_1 o A_2 son núcleos. Por lo tanto $A_1 \times A_2$ es independiente.

- $A_1 \times A_2$ es cuasiabsorbente. Sea $(x,y) \in V(D_1) \times V(D_2) - A_1 \times A_2$. Si $x \in A_1$ y $y \notin A_2$, por hipótesis existe $z \in A_2$ tal que $y \rightarrow z$, entonces $(x,y) \rightarrow (x,z)$, $(x,z) \in A_1 \times A_2$. Si $x \notin A_1$ y $y \in A_2$, por hipótesis existe $w \in A_1$ tal que $x \rightarrow w$, entonces $(x,y) \rightarrow (w,y)$ con $(w,y) \in A_1 \times A_2$. Si $x \notin A_1$ y $y \notin A_2$, entonces existen $z \in A_2$ y $w \in A_1$ tal que $y \rightarrow z$ y $x \rightarrow w$ y por definición de $D_1 + D_2$ tenemos que $(x,y) \rightarrow (x,z) \rightarrow (w,z)$ con $(w,z) \in A_1 \times A_2$. Por lo tanto $d((x,y), A_1 \times A_2) = 2$, es decir, $A_1 \times A_2$ es cuasiabsorbente.

Con esto queda demostrado que $A_1 \times A_2$ y $B_2 \times B_2$ son cuasinúcleos de $D_1 + D_2$. Ahora supongamos que existe $(x,y) \in A_1 \times A_2 \cap B_1 \times B_2$, por la definición de $D_1 + D_2$ tenemos que $x \in A_1 \cap B_1$ y $y \in A_2 \cap B_2$ contradiciendo el hecho de que A_1 y B_1 son ajenos en D_1 y que A_2 y B_2 son ajenos en D_2. Por lo tanto, $A_1 \times A_2$ y $B_1 \times B_2$ son cuasinúcleos ajenos de $D_1 + D_2$.

□

En el siguiente ejemplo podemos ver que $A_1 = \{u,v\}$ y $B_1 = \{w,t\}$ son núcleos ajenos en E_1 y $A_2 = \{a,c\}$ y $B_2 = \{b,d\}$ son núcleos ajenos en E_2, entonces por el teorema anterior tenemos que $A_1 \times A_2$ y $B_1 \times B_2$ son cuasinúcleos ajenos de $E_1 + E_3$.

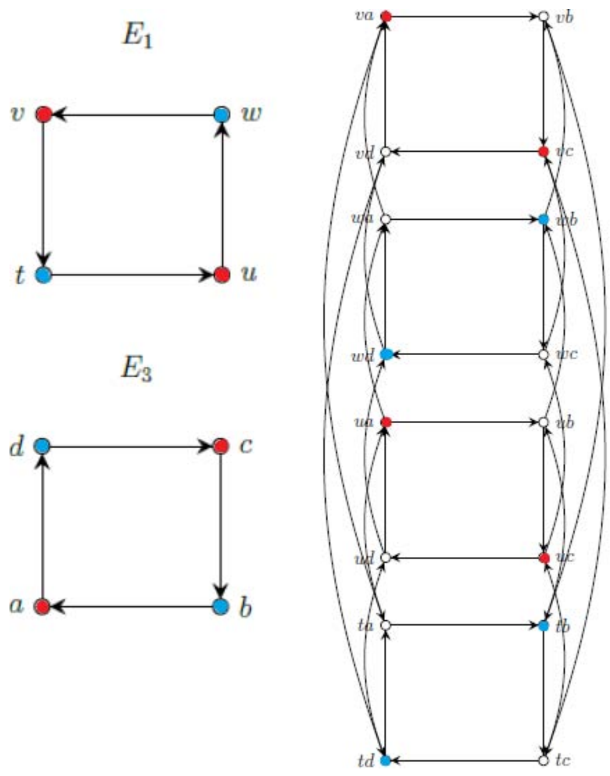
FIGURA 3.6

Teorema 3.21 *Sean D_1 y D_2 dos digráficas. Si D_1 y D_2 tienen al menos dos cuasinúcleos ajenos respectivamente, entonces $D_1 \cdot D_2$ tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sean A_1, B_1 dos cuasinúcleos ajenos en D_1 y A_2, B_2 dos cuasinúcleos ajenos en D_2, primero demostraremos que $A_1 \times A_2$ es un cuasinúcleo de $D_1 \cdot D_2$, la demostración para $B_1 \times B_2$ es análoga.

- $A_1 \times A_2$ es independiente. Sea $\{(x,y),(u,v)\} \subseteq A_1 \times A_2$. Suponemos que $(x,y) \rightarrow (u,v)$, entonces por la definición de $D_1 \cdot D_2$ tenemos que $x \rightarrow u$ o $y \rightarrow v$, como $\{x,u\} \subseteq A_1$ y $\{y,v\} \subseteq A_2$, entonces cualquiera de los casos anteriores contradice la hipótesis de que A_1 y A_2 son cuasinúcleos, por lo tanto $A_1 \times A_2$ es independiente.

Sea $(x,y) \in V(D_1 \cdot D_2) - (A_1 \times A_2)$, para demostrar que $A_1 \times A_2$ es cuasiabsorbente consideremos los siguientes casos respecto a la distancia de x a A_1:



- Si $x \in N^{-2}(A_1)$, entonces existen $z \in N^{-}(A_1)$ y $w \in A_1$ tal que $x \to z \to w$.

  1. Si $y \in N^{-2}(A_2)$, es decir, existen $u \in N^{-}(A_2)$ y $v \in A_2$ tales que $y \to u \to v$, entonces $(x, y) \to (z, u) \to (w, v)$ y $(w, v) \in A_1 \times A_2$.
  2. Si $y \in N^{-}(A_2)$, es decir, existe $v \in A_2$ tal que $y \to v$, entonces $(x, y) \to (z, v) \to (w, v)$ y $(w, v) \in A_1 \times A_2$.
  3. Si $y \in A_2$, entonces $(x, y) \to (z, y) \to (w, y)$ con $(w, y) \in A_1 \times A_2$.

- Si $x \in N^{-}(A_1)$, entonces existe $z \in A_1$ tal que $x \to z$.

  1. Si $y \in N^{-2}(A_2)$, es decir, existen $u \in N^{-}(A_2)$ y $v \in A_2$ tal que $y \to u \to v$, entonces $(x, y) \to (z, u) \to (z, v)$ y $(z, v) \in A_1 \times A_2$.
  2. Si $y \in N^{-}(A_2)$, es decir, existe $v \in A_2$ tal que $y \to v$, entonces $(x, y) \to (z, v)$ y $(z, v) \in A_1 \cdot A_2$.
  3. Si $y \in V(A_2)$, entonces $(x, y) \to (z, y)$ con$(z, y) \in A_1 \times A_2$.

- $x \in A_1$

  1. Si $y \in N^{-2}(A_2)$, es decir, existen $u \in N^{-}(A_2)$ y $v \in A_2$ tal que $y \to u \to v$, entonces $(x, y) \to (x, u) \to (x, v)$ y $(x, v) \in V(A_1 \times A_2)$.
  2. Si $y \in N^{-}(A_2)$, es decir, existe $v \in A_2$ tal que $y \to v$, entonces $(x, y) \to (x, v)$ y $(x, v) \in A_1 \times A_2$.

Por lo tanto $A_1 \times A_2$ es cuasiabsorbente en $D_1 \cdot D_2$.

Con esto queda demostrado que $A_1 \times A_2$ y $B_2 \times B_2$ son cuasinúcleos de $D_1 \cdot D_2$. Ahora supongamos que existe $(x, y) \in (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)$ por la definición de $D_1 \cdot D_2$ tenemos que $x \in A_1 \cap B_1$ y $y \in A_2 \cap B_2$ contradiciendo el hecho de que A_1 y B_1 son ajenos en D_1 y que A_2 y B_2 son ajenos en D_2, por lo tanto $A_1 \times A_2$ y $B_1 \times B_2$ son cuasinúcleos ajenos de $D_1 \cdot D_2$.

□

En el siguiente ejemplo podemos ver que $A_1 = \{u, v\}$ y $B_1 = \{w, t\}$ son cuasinúcleos ajenos en E_1 y $A_2 = \{x\}$ y $B_2 = \{y\}$ son cuasinúcleos ajenos en E_2, entonces por el teorema anterior tenemos que $A_1 \times A_2$ y $B_1 \times B_2$ con cuasinúcleos ajenos de $E_1 \cdot E_2$.

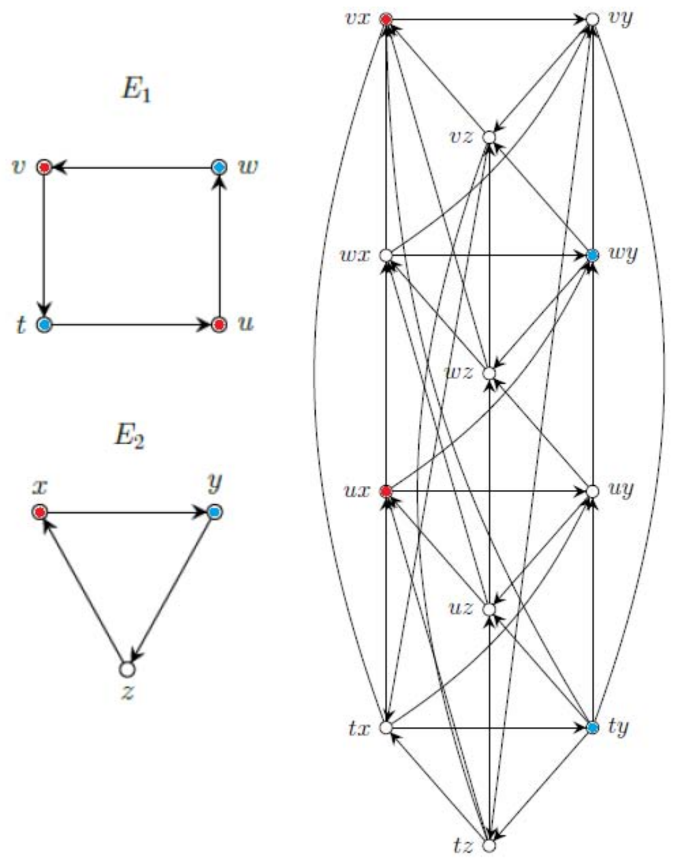


Figura 3.7

De los teoremas 3.4, 3.12 y 3.21 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.22 *Si D_1 es una digráfica semicompleta m-partita y D_2 es una digraáfica núcleo perfecta, entonces $D_1 \cdot D_2 \in \boldsymbol{D}^c$.*

Teorema 3.23 *Sean D_1 y D_2 dos digráficas. Si D_1 tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos y N es un cuasinúcleo de D_2, entonces $D_1 \otimes D_2$ tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sean Q_1 y Q_2 dos cuasinúcleos ajenos en D_1 y N un cuasinúcleo de D_2, primero demostraremos que $Q_1 \times N$ es un cuasinúcleo de $D_1 \otimes D_2$, la demostración para $Q_2 \times N$ es análoga.

- $Q_1 \times N$ es independiente. Suponemos que existe $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \subseteq Q_1 \times N$ tal que $(x_1, y_1) \to (x_2, y_2)$, entonces por definición de $F(D_1 \otimes D_2)$ tenemos que $x_1 \to x_2$ o $y_1 \to y_2$, ya que el primer caso contradice la independencia de Q_1 y el segundo contradice la independencia de N, tenemos que $Q_1 \times N$es independiente.
- $Q_1 \times N$ es cuasiabsorbente. Sea $(x, y) \in V(D_1 \otimes D_2) - Q_1 \times N$.

  1. $y \notin N$:

     - $d_{D_2}(y, N) = 1$, es decir, existe $v \in N$ tal que $y \to v$.
       a) Si $d_{D_1}(x, Q_1) = 2$, entonces $(x, u) \notin F(D_1)$ para todo $u \in Q_1$ por lo que $(x, y) \to (u, v)$ con $(u, v) \in Q_1 \times N$.
       b) Si $d_{D_1}(x, Q_1) = 1$, entonces sea $u \in Q_1$ tal que $(x, u) \in F(D_1)$, entonces $(x, y) \to (u, y) \to (u, v)$ con $(u, v) \in Q_1 \times N$.
       c) Si $d_{D_1}(x, Q_1) = 0$, entonces $(x, y) \to (x, v)$ con $(x, v) \in Q_1 \times N$.
     - $d_{D_2}(y, N) = 2$, es decir, para todo $v \in N$ tenemos que y no esta dominado por v.
       a) Si $d_{D_1}(x, Q_1) = 2$, entonces sean $z \in V(D_1)$ y $u \in Q_1$ tales que $x \to z \to u$ por lo que $(x, y) \to (z, v) \to (u, v)$ con $(u, v) \in Q_1 \times N$.
       b) Si $d_{D_1}(x, Q_1) = 1$, entonces sea $u \in V(Q_1)$ tal que $(x, u) \in F(D_1)$, entonces $(x, y) \to (u, v)$ con $(u, v) \in Q_1 \times N$.
       c) Si $d_{D_1}(x, Q_1) = 0$, entonces sean $w \in V(D_2)$ y $v \in N$ tales que $y \to w \to v$ por lo que $(x, y) \to (x, w) \to (x, v)$ con $(x, v) \in Q_1 \times N$.

  2. $y \in N$:
     a) Si $d_{D_1}(x, Q_1) = 2$, entonces sea $\{z, u\} \subseteq V(D_1)$ tal que $x \to z \to u$ y $u \in V(Q_1)$, entonces $(x, y) \to (z, y) \to (u, y)$ con $(u, y) \in Q_1 \times N$.
     b) Si $d_{D_1}(x, Q_1) = 1$, entonces sea $u \in Q_1$ tal que $(x, u) \in F(D_1)$, entonces $(x, y) \to (u, y)$ con $(u, y) \in Q_1 \times N$.

  Por lo tanto $Q_1 \times N$ es cuasiabsorbente en $D_1 \times D_2$.

Con ésto queda demostrado que $Q_1 \times N$ y $Q_2 \times N$ son cuasinúcleos de $D_1 \otimes D_2$.

Ahora supongamos que existe $(x, y) \in (Q_1 \times N) \cap (Q_2 \times N)$ por la definición de $D_1 \otimes D_2$ tenemos que $x \in Q_1 \cap Q_2$ y $y \in N$ contradiciendo el hecho de que Q_1 y Q_2 son ajenos en D_1, por lo tanto $Q_1 \times N$ y $Q_2 \times N$ son cuasinúcleos ajenos de $D_1 \otimes D_2$.
□

En el siguiente ejemplo podemos ver que $A_1 = \{x\}$ y $A_2 = \{y\}$ son dos cuasinúcleos ajenos en E_2 y $N = \{v, u\}$ un núcleo en E_1, entonces por el teorema anterior tenemos que $A_1 \times N = \{(x, v), (x, u)\}$ y $A_2 \times N = \{(y, v), (y, u)\}$ son dos cuasinúcleos ajenos de $D_1 \otimes D_2$.

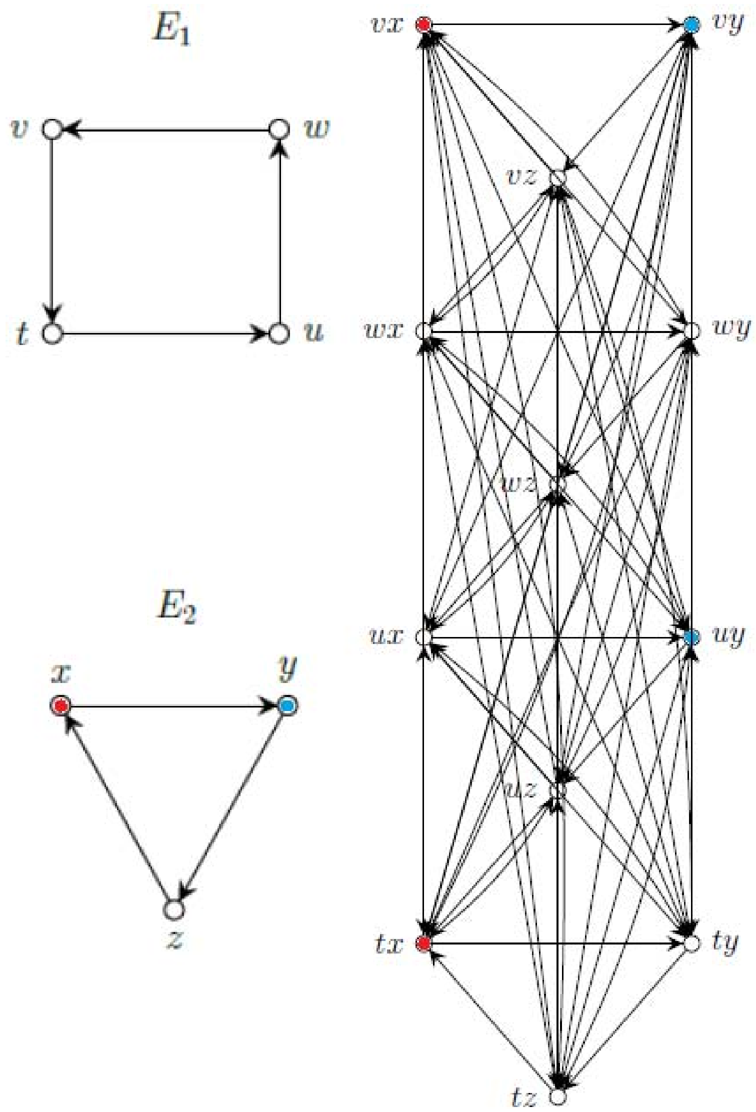


FIGURA 3.8

De los teoremas 3.1 y 3.23 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.24 *Si D_1 es una digráfica con un cuasinúcleo de cardinalidad a lo mas dos y D_2 no tiene pozos, entonces $D_1 \otimes D_2 \in \boldsymbol{D}^c$.*

3.8. Cuasinúcleos ajenos en la corona generalizada.

La operación corona de dos gráficas fue dada por Roberto Frucht y Frank Harary en *"On the corona of two graphs"*, 1970 [10], dicha operación ha sido ampliamente trabajada en la teoría de gráficas incluso dando lugar a nuevas versiones de ésta, como son la generalización dada por J. Topp en *"Kernels of digraphs formed by some unary operations from other digraphs"*, 1982 [21], para la cual toma una digráfica y una sucesión de gráficas aleatorias y la definición de la corona para digráficas dada por Iwona Wloch en *"On kernels by monochromatic paths in the corona of digraphs", 2008* [24]. A partir de las diferentes versiones, J. E. Moo Vergara y Laura Pastrana dan la definición de corona generalizada en *"Núcleo por trayectorias dirigidas monocromaticas en la corona generalizada". 2014* [17] de la cual ya hablamos en el capítulo 1 (definición 9) y con la cual trabajaremos en esta sección.

En el principio de este capítulo se mostró como la corona para digráficas (y por lo tanto corona generalizada) de T_E era un contraejemplo a la afirmación de que toda digráfica tiene cuasinúcleos ajenos. Así mismo ésto dejo en claro que no basta con pedir que una digráfica D tenga un par de cuasinúcleos ajenos para que $D\Delta\Theta$ tenga cuasinúcleos ajenos, siendo Θ cualquier sucesión de digráficas, como podemos apreciar en el caso de $T_E \circ \Theta_x$ donde cada vértice de T_E es un cuasinúcleo, es decir, T_E tiene cuasinúcleos ajenos, pero $T_E \circ \Theta_x$ no tiene cuasinúcleos ajenos.

Por lo tanto, pedir que una digráfica tenga al menos dos cuasinúcleos ajenos no es una condición suficiente para que la corona generalizada tenga un par de cuasinúcleos ajenos, pero como demostraremos a continuación ésta si es una condición necesaria.

Teorema 3.25 *Si existe $\Theta = (H_i)_{i\in I=\{1,\dots,q\}}$ tal que $D\Delta\Theta$ tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos, entonces D tiene dos cuasinúcleos ajenos.*

Antes de empezar con la demostración de este teorema probemos primero la siguiente observación.

Observación 1 *Sea $\{u, v\} \subseteq V(D\Delta\Theta)$ tal que $(u, v) \in F(D\Delta\Theta)$. Si $u \in V(D)$, entonces $v \in V(D)$.*

Demostración. Como $v \in V(D\Delta\Theta) = V(D) \cup (\cup_{i\in I} V(H_i))$, entonces $v \in V(D)$ o $v \in (\cup_{i\in I} V(H_i))$. Si $v \in \cup_{i\in I} V(H_i)$ tenemos que $(D, H_i) \neq \phi$ para alguna $i \in I$ contradiciendo la construcción de $D\Delta\Theta$, por lo que $v \in V(D)$. $\square$

Ahora pasemos a la demostración del teorema 3.25.

Demostración. Primero veremos que si Q es un cuasinúcleo en $D\Delta\Theta$, entonces $Q \cap V(D)$ es un cuasinúcleo de D.

- Como $Q \cap V(D) \subset Q$, entonces $Q \cap V(D)$ es independiente en D.

- Si $x \in V(D) \subseteq V(D\Delta\Theta)$, entonces existe $y \in Q$ tal que $d(x,y) \leq 2$. Si $d(x,y) = 1$, entonces por la observación anterior $y \in V(D)$. Si $d(x,y) = 2$, entonces existe $z \in V(D\Delta\Theta)$ tal que $x \to z \to y$, de nuevo por la observación 1 tenemos que $\{z, y\} \subseteq V(D)$. Para ambos casos $y \in Q \cap V(D)$, por lo que $Q \cap V(D)$ es un conjunto cuasiabsorbente de D.

Por lo tanto $Q \cap V(D)$ es un cuasinúcleo de D.

Sean Q_1 y Q_2 dos cuasinúcleos ajenos de $D\Delta\Theta$, por la primera parte de la demostración tenemos que tanto $Q_1 \cap V(D)$ como $Q_2 \cap V(D)$ son cuasinúcleos de D. Si existe $w \in ((Q_1 \cap V(D)) \cap (Q_2 \cap V(D)))$, entonces $w \in Q_1 \cap Q_2$ contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto $(Q_1 \cap V(D)) \cap (Q_2 \cap V(D)) = \phi$.

□

Con ésto queda probado que pedir que una digráfica D tenga dos cuasinúcleos ajenos es una condición necesaria para que $D\Delta\Theta$ tenga al menos dos cuasinúcleos ajenos para cualquier sucesión de digráficas Θ.

3.9. Cuasinúcleos ajenos en la digráfica de vigas.

En la sección anterior se buscaron condiciones con las que se podía asegurar la existencia de cuasinúcleos ajenos para la suma de Zykov, la corona generalizada y algunos productos de digráficas. En esta sección ofrecemos un análisis similar en digráficas asociadas. Se mostrarán resultados referentes a digráfica de vigas, digráfica de líneas, $S(D)$, $Q(D)$, $R(D)$, y $T(D)$. Empezaremos por la digráfica de vigas (definición 8).

A continuación demostraremos que para toda digráfica sin pozos, las digráficas de vigas [1] de ésta siempre tienen cuasinúcleos ajenos.

Teorema 3.26 *Si D es una digráfica sin pozos, entonces*

- $\bigcup_{(x,y)\in F(D)} \left\{u^i_{xy}\right\}$
- $\bigcup_{(x,y)\in F(D)} \left\{v^i_{xy}\right\}$

con $i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$ son cuasinúcleos ajenos en $T_k(D)$.

Demostración. Sea D una digráfica, por definición de digráfica de vigas $V(T_k(D)) = V(D) \cup \bigcup_{(x,y)\in F(D)} \left\{u^i_{xy}, v^i_{xy}\right\}$ con $i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$.

Veamos que $\bigcup_{(x,y)\in F(D)} \left\{u^i_{xy}\right\}$ es un cuasinúcleo en $T_k(D)$.

- $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{u_{xy}^i\right\}$ es cuasiabsorbente. Sea $z\in V(T_k(D))-\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{u_{xy}^i\right\}_{i\in\{1,2,3,...,k\}}$.

  1. Si $z\in V(D)$, entonces como z no es un pozo existe $w\in V(D)$ tal que $(z,w)\in F(D)$ por lo que $z\to u_{zw}^j$ para todo $j\in\{1,2,3,...,k\}$, es decir, $d(z,\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{u_{xy}^i\right\})=1$.
  2. Si $z=v_{xy}^j$ con $1\leq j\leq k$ para $(x,y)\in F(D)$, entonces como y no es pozo existe $w\in V(D)$ tal que $y\to w$ y $y\to u_{yw}^j$ para todo $j\in\{1,2,3,...,k\}$, es decir, $d(v_{xy}^j,\bigcup_{(r,q)\in F(D)}\left\{u_{rq}^i\right\})=2$ y por definición $v_{xy}^j\to y$ para todo $j\in\{1,...,k\}$

  Por lo tanto $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{u_{xy}^i\right\}$ es cuasiabsorbente.

- $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{u_{xy}^i\right\}$ es independiente, entonces:

  $$N^+(\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{u_{xy}^i\right\})=\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{v_{xy}^i\right\}\text{ para todo } i\in\{1,2,3,...,k\}$$

  como $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{v_{xy}^i\right\}\cap\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{u_{xy}^i\right\}=\phi$ tenemos que $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{u_{xy}^i\right\}$ es independiente.

Por lo tanto $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{u_{xy}^i\right\}$ es un cuasinúcleo en $T_k(D)$.

Ahora veamos que $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{v_{xy}^i\right\}$ es un cuasinúcleo en $T_k(D)$.

- $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{v_{xy}^i\right\}$ es cuasiabsorbente. Sea $z\in V(T_k(D))-\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{v_{xy}^i\right\}_{i\in\{1,2,3,...,k\}}$:

  1. Si $z\in V(D)$, entonces como z no es un pozo existe $w\in V(D)$ tal que $(z,w)\in F(D)$, entonces $z\to u_{zw}^j$ para todo $j\in\{1,2,3,...,k\}$ y $u_{zw}^j\to v_{zw}^j$ para todo $j\in\{1,2,3,...,k\}$, es decir, $d(z,\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{v_{xy}^i\right\})=2$.
  2. Si $z=u_{xy}^j$ con $1\leq j\leq k$ y $(x,y)\in F(D)$, entonces de la definición de digráfica de vigas $u_{xy}^j\to v_{xy}^j$, es decir, $d(u_{xy}^j,\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{v_{xy}^i\right\})=1$.

  Por lo tanto $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{v_{xy}^i\right\}$ es cuasiabsorbente.

- $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{v_{xy}^i\right\}$ es independiente. Sea $(z,w)\in F(D)$, entonces:

  $$N^+(v_{zw}^i)=\{w\}\subseteq V(D)\text{ para todo } i\in\{1,2,3,...,k\}$$

  como $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{v_{xy}^i\right\}\cap V(D)=\phi$ tenemos que $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{v_{xy}^i\right\}$ es independiente.

Por lo tanto $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{v_{xy}^i\right\}$ es un cuasinúcleo en $T_k(D)$.

Se sigue de la definición de digráfica de vigas que $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{v_{xy}^i\right\}$ y $\bigcup_{(x,y)\in F(D)}\left\{u_{xy}^i\right\}$ son ajenos.

$\square$

3.10. Cuasinúcleos ajenos en la digráfica de líneas y en la digráfica de líneas parcial.

En el artículo *"Semikernels, Quasi kernels, and grundy functions in the line digraph", 1991* [11] Hortensia Galeana, Laura Pastrana y Hugo Rincón, demostraron que el número de cuasinúcleos de una digráfica es menor o igual al número de cuasinúcleos de su digráfica de líneas, lo que nos da pauta a trabajar con la existencia de cuasinúcleos ajenos en la digráfica de líneas con la que trabajaron Germán Benítez y Laura Pastrana en *"Número semidominante coloreable en digráficas." 2014* [4]

Teorema 3.27 [4] *Si D tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos, entonces L(D) tiene dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Definimos la función φ cuyo dominio es el conjunto potencia de $V(D)$ y cuya imagen es el conjunto potencia de $F(D)$, es decir, $\varphi : P(V(D)) \to P(F(D))$ tal que si $Z \subseteq V(D)$, entonces $\varphi(Z) = \{(x,y) \in F(D) : y \in Z\}$. Sea P un cuasinúcleo de D. Demostraremos que $\varphi(P)$ es un cuasinúcleo de $L(D)$.

- $\varphi(P)$ es independiente en $L(D)$. Sea $\{(x,y),(u,v)\} \subset \varphi(P)$, por definición tenemos que $\{y,v\} \subset P$. Suponemos que $((x,y),(u,v)) \in F(L(D))$ o $((u,v),(x,y)) \in F(L(D))$, entonces tenemos que $y = u$ o $v = x$. Si $y = u$, entonces $u \in P$ y $v \in P$, es decir, P no es independiente, lo que es una contradicción. Análogamente, si $x = v$. Por lo tanto, $\varphi(P)$ es independiente en $L(D)$.
- $\varphi(P)$ es cuasiabsorbente en $L(D)$. Sea $(u,v) \in V(L(D)) - \varphi(P)$. Notemos que por definición de $\varphi(P)$, $v \notin P$, por lo que v es cuasiabsorbido por P en D, obteniendo los casos:

  1. Existe una $vP - flecha$, es decir, existe $w \in P$ tal que $(v,w) \in F(D)$, y notemos que $(v,w) \in \varphi(P)$, por lo que (v,w) absorbe a (u,v) en $L(D)$.
  2. Existe $vP-$trayectoria dirigida de longitud dos, es decir, existe $y \in V(D)$ y $w \in P$ tal que (v,y,w) es una trayectoria dirigida. Observemos que $(y,w) \in \varphi(P)$, con lo que $((u,v),(v,y),(y,w))$ es una $(u,v)\varphi(P)-$trayectoria dirigida en $L(D)$.

Por lo tanto, $\varphi(P)$ es un cuasinúcleo de $L(D)$. Sean P y Q dos cuasinúcleos ajenos en D por lo anterior tenemos que $\varphi(P)$ y $\varphi(Q)$ son cuasinúcleos de $L(D)$. Falta ver que son ajenos. Supongamos que $\varphi(P) \cap \varphi(Q) \neq \phi$, entonces existe $(u, v) \in \varphi(P) \cap \varphi(Q)$, pero por definición $v \in P$ y $v \in Q$, es decir, $v \in P \cap Q$, lo que es una contradicción, pues $P \cap Q = \phi$. Por lo tanto, $L(D)$ tiene un par de cuasinúcleos ajenos.

$\square$

Con esto queda demostrado que pedir que una digráfica D tenga al menos dos cuasinúcleos ajenos es una condición suficiente para que $L(D)$ tenga cuasinúcleos ajenos. Sin embargo está no es una condición necesaria, tomemos como ejemplo a la digráfica $T_E \circ \Theta_x$ para la cual sabemos que no tiene cuasinúcleos ajenos, primero demostraremos que $Q_1 = \{u_2, v_3, v_4, v_6\}$ y $Q_2 = \{u_5, v_2, v_6, v_7\}$ son dos cuasinúcleos de $T_E \circ \Theta_x$.

- Q_1 y Q_2 son conjuntos independientes, ya que por la construcción de $T_E \circ \Theta_x$ tenemos que $N^+(v_i) = \{u_i\}$ y $N^+(u_i) \subset V(T_E)$ para todo $i \in \{1, ..., 7\}$.
- $N^-(Q_1) = \{u_1, u_5, u_7, v_2\}$ y $N^{-2}(Q_1) = \{u_3, u_4, u_6, v_1, v_5, v_7\}$. Por otro lado $N^-(Q_2) = \{u_1, u_3, u_4, v_5\}$ y $N^{-2}(Q_2) = \{u_2, u_6, u_7, v_1, v_3, v_4\}$, entonces $Q_i \cup N^-(Q_i) \cup N^{-2}(Q_i) = V(T_E \circ \Theta_x)$ para $i \in \{1, 2\}$, es decir, Q_1 y Q_2 son conjuntos cuasiabsorbentes de $T_E \circ \Theta_x$.

Como $Q_1 \cap Q_2 = \{v_6\}$ y $N^-_{T_E \circ \Theta_x}(v_6) = \phi$, entonces $\varphi(Q_1) \cap \varphi(Q_2) = \phi$, es decir, $\varphi(Q_1)$ y $\varphi(Q_2)$ son dos cuasinúcleos ajenos de $L(T_E \circ \Theta_x)$.

La siguiente figura es la digráfica de líneas de $T_E \circ \Theta_x$.

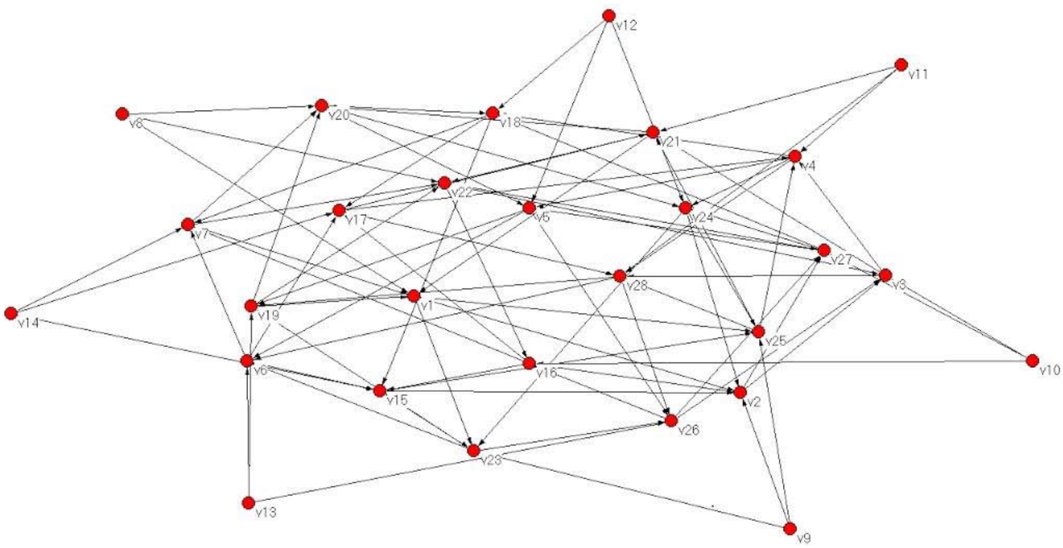


Figura 3.9

Dado que $T_3 \subseteq (T_E \circ \Theta_x)$, $T_E \circ \Theta_x$ no es una digráfica de líneas, por lo que podemos preguntarnos *¿Existe D tal que L(D) no tiene cuasinúcleos ajenos?*.

Si dicha digráfica existe, entonces por el teorema 3.27 sabemos que D no tiene cuasinúcleos ajenos. Un caso particular que resuelve esta pregunta es el siguiente teorema.

Teorema 3.28 *Sea D una digráfica sin pozos y sin cuasinúcleos ajenos y sea $K(D)$ el conjunto de cuasinúcleos de D tal que $|K(D)| = |K(L(D))|$ y para todo $\{Q_1, Q_2\} \subseteq K(D)$ tenemos que $N^-(Q_1 \cap Q_2) \neq \phi$, entonces $L(D)$ no tiene cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. De la demostración del teorema 3.27 tenemos que:

$$\{\varphi(Q) : Q \in K(D)\} \subseteq K(L(D))$$

y como $|K(D)| = |\{\varphi(Q) : Q \in K(D)\}| \leq |K(L(D))| = |K(D)|$, entonces $K(L(D)) = \{\varphi(Q) : Q \in K(D)\}$. Sean R_1, R_2 cualesquiera dos cuasinúcleos de $L(D))$ y $\{Q_1, Q_2\} \subseteq K(D)$ tal que $R_i = \varphi(Q_i)$ $i \in \{1, 2\}$, por hipótesis $N^-(Q_1 \cap Q_2) \neq \phi$ entonces $\varphi(Q_1) \cap \varphi(Q_2) \neq \phi$, es decir, $R_1 \cap R_2 \neq \phi$. Por lo tanto $L(D)$ no tiene cuasinúcleos ajenos.

□

A continuación veremos un teorema que relaciona a los (k, l)-núcleos de D con los (k, l)-núcleos de un su digráfica de líneas parcial (definición 3) y posteriormente un caso análogo al teorema 3.27.

Teorema 3.29 [2] *Sean k, l dos enteros positivos tal que $1 \leq l \leq k$ y D una digráfica con ingrado al menos 1. Si D tiene un (k, l)-núcleo, entonces la digráfica de líneas parcial $L_{(A',\phi)}(D)$ tiene un (k, l)-núcleo.*

Demostración. Sean A' y ϕ tal que satisfacen la definición de una digráfica de líneas parcial. Consideremos Q un (k, l)-núcleo de D, por demostrar $\varphi(Q) \cap A'$ es un (k, l)-núcleo de $L_{(A',\phi)}(D)$. Sean $\{(a, b), (c, d)\} \in \varphi(Q) \cap A'$ tal que $d_{L_{(A',\phi)}D}((a, b), (c, d)) = t$. Observemos que $d_D(b, d) \geq k$ ya que $b, d \in Q$.
Sea $((a, b), \phi(b, b_1), \phi(b_1, b_2), ..., \phi(b_{t-1}, b_t) = (c, d))$ una trayectoria de (a, b) a (c, d) en $L_{(A',\phi)}(D)$ de longitud menor, donde $b_i \in V(D)$ y $\{(b, b_1), (b_i, b_{i+1})\} \subseteq F(D)$ para $i = 1, 2, ..., t-1$. Ya que $\phi(b_{i-1}, b_i) \in \varphi(b_i) \cap A'$, entonces $(b, b_1, ..., b_t = d)$ es un camino de b a d de longitud t en D, esto implica que $t \geq d_D(b, d) \geq k$ y por lo tanto dos vértices de $\varphi(Q) \cap A'$ están a distancia al menos k en $L_{(A',\phi)}(D)$. Ahora veamos que $d_{L_{(A',\phi)}(D)}((u, v), \varphi(Q) \cap A') \leq l$ para todo $(u, v) \in V(L_{(A',\phi)}(D)) - (\varphi(Q) \cap A')$, como $v \notin Q$ entonces existe $z \in Q$ tal que $d_D(v, z) \leq l$. Si $d_D(v, z) = 1$, entonces $\phi(v, z) \in \phi(\varphi(z)) \subseteq \phi(\varphi(Q)) \subseteq \varphi(Q) \cap A'$ absorbe a (u, v). Por lo tanto $d_{L_{(A',\phi)}(D)}((u, v), N^-(Q) \cap A') = 1 \leq l$. Por lo que asumimos que $d_D(v, z) = d \geq 2$,

consideremos una trayectoria de v a z de longitud mínima en D: $(v, v_1, ..., v_d, z)$ lo que implica que

$$((u, v), \phi(v, v_1), \phi(v_1, v_2), ..., \phi(v_{d-1}, z))$$

es una trayectoria de (u, v) a $(\phi(v_{d-1}, z))$ en $L_{(A',\phi)}(D)$ y $(\phi(v_{d-1}, z)) \in \varphi(Q) \cap A'$ ya que $z \in Q$ y por definición de ϕ. Por lo que:
$d_{L_{(A',\phi)}(D)}((u, v), \varphi(Q) \cap A') \leq d_{L_{(A',\phi)}(D)}((u, v), \phi(v_{d-1}, z)) \leq d = d_D(v, z) \leq l.$

□

Corolario 3.30 *Si D tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos e ingrado al menos 1, entonces $L_{(A',\phi)}(D)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos, para A' y ϕ que satisfacen la definición de la digráfica de líneas parcial.*

Demostración. Sean P y Q dos cuasinúcleos ajenos en D, por el teorema 3.29 considerando el caso en que $k = 2 = l$ tenemos que $\varphi(P) \cap A'$ y $\varphi(Q) \cap A'$ son cuasinúcleos de $L_{(A',\phi)}(D)$. Falta ver que son ajenos. Supongamos que $(\varphi(P) \cap A') \cap (\varphi(Q) \cap A') \neq \phi$, entonces existe $(u, v) \in (\varphi(P) \cap A') \cap (\varphi(Q) \cap A')$, por lo que $v \in P \cap Q$, pero ésto es una contradicción, pues $P \cap Q = \phi$. Por lo tanto, $L_{(A',\phi)}(D)$ tiene al menos un par de cuasinúcleos ajenos.

□

3.11. Cuasinúcleos ajenos en las digráficas $S(D)$, $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$.

A continuación daremos la demostración dada por J. Topp en *Kernels of digraphs formed by some unary operations from other digraphs. 1982* [21] de que para toda digráfica D sin pozos, $S(D)$ (definición 4) tiene al menos dos núcleos ajenos y después veremos los resultados obtenidos por Germán Benítez y Laura Pastrana en *"Número semidominante coloreable en digráficas". 2014* [4] para asegurar la existencia de cuasinúcleos ajenos en $R(D)$, $Q(D)$ y $T(D)$ (definiciones 5, 6 y 7 respectivamente).

Teorema 3.31 [4] *Si D es una digráfica sin pozos, entonces V(D) y F(D) son dos cuasinúcleos ajenos en S(D).*

Demostración. Sea D una digráfica sin pozos. Primero demostraremos que tanto $V(D)$ como $F(D)$ son núcleos de $S(D)$ y por lo tanto cuasinúcleos de $S(D)$. Notemos que por definición $V(S(D)) = V(D) \cup F(D)$ y $V(D) \cap F(D) = \phi$.

- Sea $x \in V(D)$, como D no tiene pozos, entonces existe $y \in V(D)$ tal que $(x, y) \in F(D)$. Por definición tenemos que $(x, (x, y)) \in F(S(D))$, es decir, (x, y) absorbe a x en $S(D)$. Por lo tanto $F(D)$ es un conjunto absorbente en $S(D)$.

- Sea $(x,y) \in F(D)$, por la definición de $S(D)$ tenemos que $((x,y),y) \in F(S(D))$, entonces $V(D)$ es un conjunto absorbente en $S(D)$.

Falta demostrar que son conjuntos independientes pero por la definición podemos observar que:

- Si $x = (u,v) \in F(D)$, entonces $N^+_{S(D)}(x) = \{v\}$.
- Si $x \in V(D)$, entonces $N^+_{S(D)}(x) = \{(u,v) \in F(D) : u = x\}$.

Es decir, los vértices de D sólo alcanzan a las flechas de D en $S(D)$ y las flechas de D sólo alcanzan a los vértices de D en $S(D)$. Por lo tanto, $V(D)$ y $F(D)$ son conjuntos independientes y ambos son núcleos ajenos de $S(D)$.

$\square$

En la siguiente figura tenemos a las digráficas D (izquierda) y $S(D)$ (derecha), entonces por el teorema 3.27, $Q_1 = V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $Q_2 = F(D) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ son cuasinúcleos ajenos de $S(D)$.

Figura 3.10

Teorema 3.32 [4] *Si D es una digráfica sin pozos, entonces R(D) tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sea D una digráfica sin pozos. Por el teorema 2.1 sabemos que existe $Q \subseteq V(D)$ tal que Q es un cuasinúcleo de D. Demostraremos que $Q_1 = Q \cup A$ es un cuasinúcleo de $R(D)$, donde:

$$A = \{(u,v) \in F(D) : d_D(u,Q) = 2 \ y \ d_D(v,Q) = 1\}.$$

A continuación demostraremos que Q_1 es independiente. Observemos que: si $x \in V(D)$, entonces $N^+_{R(D)}(x) = N^+_D(x) \cup (x \times N^+_D(x))$. Si $x = (u,v) \in F(D)$, entonces $N^+_{R(D)}(x) = v$.

Es decir, los vértices de D sólo alcanzan a las flechas de D, que los tienen como vértices iniciales y a los vértices que alcanzan en D, y las flechas de D son adyacentes únicamente a sus vértices extremos. Sean $x, y \in Q \cup A$. Si $\{x, y\} \subseteq Q \subseteq V(D)$, entonces no son adyacentes en $R(D)$, pues Q es independiente en D. Si $\{x, y\} \subseteq A \subseteq F(D)$, entonces no son adyacentes en $R(D)$, pues las flechas de D son adyacentes únicamente a sus vértices extremos. Si $x = (u, v) \in A$ y $y \in Q$, entonces por definición de A tenemos que $\{u, v\} \cap Q = \phi$, por lo que $v \neq y$, lo que implica que no existe la $xy - flecha$ en $R(D)$. De la misma manera, $u \notin Q$, por lo que $u \neq y$, lo que implica que no existe la $yx - flecha$ en $R(D)$. Por lo que Q_1 es independiente.

Falta ver que Q_1 es cuasiabsorbente. Sea $x \in V(R(D)) - Q_1$, tenemos dos casos:

1. Si $x \in V(D) - Q$, entonces como Q es cuasinúcleo de D existe $y \in Q$ tal que $(x, y) \in F(D)$, lo que por definición de $R(D)$ tenemos que $(x, y) \in F(R(D))$ o existe $y \in Q$ y $w \in V(D)$ tal que $x \to w \to y$ es una trayectoria dirigida en D, pero por definición de $R(D)$, dicha trayectoria dirigida también está en $R(D)$.

2. Si $x = (w, z) \in F(D) - A$, entonces $d_D(z, Q) \neq 0$ ó $d_D(z, Q) = 2$ o $d_D(z, Q) = 1$ y $d_D(w, Q) \neq 2$, por lo que tenemos tres casos:

   a) Si $d(z, Q) = 0$, entonces $z \in Q$, por lo que $(x = (w, z), z) \in F(R(D))$, es decir, z absorbe a x en $R(D)$.

   b) Si $d(z, Q) = 2$, entonces existen $v \in Q$ y $u \in V(D)$ tal que $\{(z, u), (u, v)\} \subseteq F(D)$, por definición de A tenemos que $(z, u) \in A$, por lo que $(x = (w, z), z, (z, u))$ es una $xQ_1 - trayectoria$ dirigida de longitud dos, es decir, (z, u) cuasiabsorbe a x en $R(D)$.

   c) Si $d_D(z, Q) = 1$ y $d_D(w, Q) \neq 2$, entonces existe $v \in Q$ tal que $(z, v) \in F(D)$, por lo que $(x = (w, z), z, v)$ es una $xQ_1 - trayectoria$ dirigida de longitud dos, es decir, v cuasiabsorbe a x en $R(D)$.

Por lo tanto, Q_1 es cuasinúcleo de $R(D)$.

Ahora demostraremos que $Q_2 = F(D) - A$ es un cuasinúcleo de $R(D)$. Primero veamos que $Q_2 \subseteq F(D)$ es independiente. Por definición de $R(D)$, una flecha de D únicamente es adyacente a sus vértices extremos en D, por lo que Q_2 es independiente.

Falta ver que Q_2 es cuasiabsorbente, sea $x \in V(R(D)) - Q_2$, tenemos tres casos:

1. Si $x \notin Q$, este caso lo volveremos a dividir.

   a) Si $d(x, Q) = 1$, entonces existe $w \in Q$ tal que $(x, w) \in F(D)$, además, por definición de A, $(x, w) \in F(D) - A$, es decir. (x, w) absorbe a x en $R(D)$.

   b) Si $d(x, Q) = 2$, es decir, existen $w \in Q$ y $y \in N_D^-(w)$ tal que (x, y, w) es una $xQ - trayectoria$ dirigida de longitud dos en D, notemos que $(y, w) \in$

$F(D) - A$ y por definición de $R(D)$ tenemos que $(x, y, (y, w))$ es una xQ_2- *trayectoria* dirigida de longitud dos, es decir, (y, w) absorbe a x en $R(D)$.

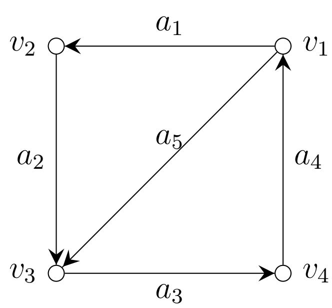
2. Si $x \in Q$, entonces como Q es cuasinúcleo y D no tiene pozos, existe $y \in V(D)-Q$ tal que $(x, y) \in F(D)$. Notemos que por definición de $R(D)$ y A, $(x, (x, y)) \in F(R(D))$ y $(x, y) \in Q_2$, es decir, Q_2 absorbe a x en $R(D)$.

3. Si $x = (u, v) \in A$, es decir, $d(v, Q) = 1$, entonces por el Caso 1.a tenemos que existe un $y \in D$ tal que $(v, y) \in (F(D) - A) = Q_2$ y absorbe a v. Además como $(x = (u, v), v) \in F(R(D))$ se tiene que $(x = (u, v), v, (v, y))$ es una xQ_2- *trayectoria* dirigida de longitud dos en $R(D)$), es decir, (v, y) cuasiabsorbe a x en $R(D)$. Por lo tanto Q_2 es un cuasinúcleo de $R(D)$.

Y ya que $A^c = Q_2$, $Q \subseteq V(D)$, $Q \subseteq Q_1$ y $V(D) \cap F(D) = \phi$ tenemos que $Q_1 \cap Q_2 = \phi$. Por lo tanto Q_1 y Q_2 son dos cuasinúcleos ajenos de $R(D)$.

□

En el siguiente figura tenemos a las digráficas D (izquierda) y $R(D)$ (derecha), considerando $Q = \{v_2, v_4\}$ tenemos que $A = \phi$, entonces por el teorema 3.29 $Q_1 = \{v_2, v_4\}$ y $Q_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ son cuasinúcleos ajenos de $R(D)$.



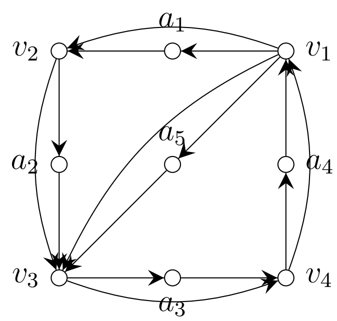


FIGURA 3.11

Teorema 3.33 [4] *Si D es una digráfica sin pozos, entonces Q(D) tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sea D una digráfica sin pozos. Por el teorema 2.1 sabemos que existe $Q \subseteq V(D)$ tal que Q es un cuasinúcleo de D. Demostraremos que $Q_1 = Q \cup B$ es un cuasinúcleo de $Q(D)$, donde:

$$B = \{(u, v) \in F(D) : d_D(u, Q) = 2 \ y \ d_D(v, Q) = 1\}.$$

Veamos que Q_1 es independiente. Por definición de $Q(D)$ tenemos que Q es independiente, pues los vértices de D sólo son adyacentes a las flechas de D que lo tienen como vértice inicial y $Q \subseteq V(D)$. Por otro lado, B es independiente pues ningún vértice puede estar a distancia uno y al mismo tiempo a distancia dos de Q. Por último,

por definición de B no existe ninguna $QB - flecha$ ni $BQ - flecha$.
Falta ver que Q_1 es cuasiabsorbente. Si $x \in V(Q(D))$, tenemos dos casos.

1. Si $x \in V(D) - Q$, entonces existen dos subcasos:

   a) Si $d(x, Q) = 1$, entonces existe $w \in Q$ tal que $(x, w) \in F(D)$, por lo que $(x, (x, w), w)$ es una $xQ - trayectoria$ dirigida de longitud dos, es decir, w cuasiabsorbe a x en $Q(D)$.

   b) Si $d(x, Q) = 2$, entonces existe $w \in Q$ y $y \in N_D^+(w)$ tal que (x, y, w) es una $xQ_1 - trayectoria$ de longitud dos. Notemos que $(x, y) \in B$, por la definición de $Q(D)$ tenemos que $(x, (x, y)) \in F(Q(D))$, es decir, (x, y) absorbe a x en $Q(D)$.

2. Si $x = (u, v) \in F(D) - B$, entonces existen seis subcasos:

   a) $d(u, Q) = 2$ y $d(v, Q) = 2$. Como $d(v, Q) = 2$, como en el caso 1.b, tenemos que existe $y \in V(D)$ tal que $(v, y) \in B$, por lo que $(x = (u, v), (v, y)) \in F(Q(D))$, es decir, (v, y) absorbe a x en $Q(D)$.

   b) $d(u, Q) = 1$ y $d(v, Q) = 2$. Como $d(v, Q) = 2$, como en el caso 1.b, tenemos que existe $y \in V(D)$ tal que $(v, y) \in B$, por lo que $(x = (u, v), (v, y)) \in F(Q(D))$, es decir, (v, y) absorbe a x en $Q(D)$.

   c) $d(u, Q) = 0$ y $d(v, Q) = 2$. Como $d(v, Q) = 2$, como en el caso 1.b, tenemos que existe $y \in V(D)$ tal que $(v, y) \in B$, por lo que $(x = (u, v), (v, y)) \in F(Q(D))$, es decir, (v, y) absorbe a x en $Q(D)$.

   d) $d(u, Q) = 1$ y $d(v, Q) = 0$. Es decir, $v \in Q \subseteq Q_1$, entonces por definición de $Q(D)$ tenemos que $(x = (u, v), v) \in F(Q(D))$ por lo que v absorbe a x en $Q(D)$.

   e) $d(u, Q) = 1$ y $d(v, Q) = 1$. Como $d(v, Q) = 1$ existe un $w \in Q \subseteq Q_1$, tal que $(v, w) \in F(D)$, entonces por el caso 2.d, w absorbe a v, por lo que $(x = (u, v), (v, w), w)$ es una $xQ_1 - trayectoria$ dirigida de longitud dos, es decir, w cuasiabsorbe a x en $Q(D)$.

   f) $d(u, Q) = 0$ y $d(v, Q) = 1$. Notemos que como $d(v, Q) = 1$ existe un $w \in Q \subseteq Q_1$, tal que $(v, w) \in F(D)$, entonces por el caso 2.d, w absorbe a v, por lo que $(x = (u, v), (v, w), w)$ es una $xQ_1 - trayectoria$ dirigida de longitud dos, es decir, w cuasiabsorbe a x en $Q(D)$.

Juntando todos los casos, tenemos que Q_1 es un cuasinúcleo de $Q(D)$.

Ahora demostraremos que $Q_2 = \varphi(Q) \cup M$ es un cuasinúcleo de $Q(D)$, donde $\varphi(Q) = \{(u, v) \in F(D) : v \in Q\}$ y $M = \{v \in V(D) : d(v, Q) = 2\}$.

Veamos que Q_2 es independiente. Notemos que como en $Q(D)$ los vértices de D sólo son adyacentes a las flechas de D que lo tienen como vértice inicial, entonces M es independiente.

Por otro lado, $\varphi_L(Q)$ es independiente por la demostración del teorema 3.23. Y por definición de M no existe la $\varphi(Q)M-flecha$ ni la $M\varphi(Q)-flecha$. Por lo tanto, Q_2 es independiente.
Falta ver que Q_2 es cuasiabsorbente. Si $x \in V(Q(D)) - Q_2$, entonces tenemos dos casos:

1. Si $x \in V(D) - M$, entonces tenemos los siguientes subcasos:

    a) Si $d(x, Q) = 1$, entonces existe $w \in Q$ tal que $(x, w) \in F(D)$. Notemos que $(x, w) \in \varphi(Q) \subseteq Q_2$ y $(x, (x, w)) \in F(Q(D))$, es decir, (x, w) absorbe a x en $Q(D)$.

    b) Si $d(x, Q) = 0$, como D no tiene pozos, entonces existe $z \in V(D) - Q$ tal que $(x, z) \in F(D)$. Volveremos a dividir este caso en dos.

        1) Si $d(z, Q) = 1$, entonces por el caso 1.a tenemos que existe $w \in Q$ tal que $(z, w) \in \varphi(Q) \subseteq Q_2$ y (z, w) absorbe a z. Por definición de $Q(D)$ tenemos que $(x, (x, z), (z, w))$ es una $xQ_2 - trayectoria$ dirigida de longitud dos, es decir, (z, w) cuasiabsorbe a x en $Q(D)$.

        2) Si $d(z, Q) = 2$, entonces tenemos que $z \in M \subseteq Q_2$, decir, z absorbe a x.

2. Si $x = (u, v) \in F(D) - \varphi(Q)$, entonces notemos que por el teorema 3.24 tenemos que $\varphi(Q) \subseteq Q_2$ cuasiabsorbe al conjunto $F(D) - \varphi(Q)$.

Por lo tanto Q_2 es un cuasinúcleo de $Q(D)$.

Observemos que $Q_1 \cap Q_2 = \phi$ se deduce de los hechos: $V(D) \cap F(D) = \phi$, $B \cap \varphi(Q) = \phi$ y $Q \cap M = \phi$.

Por lo tanto $Q(D)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos.

$\square$

En la siguiente figura tenemos a las digráficas D (izquierda) y $Q(D)$ (derecha), considerando a $Q = \{v_2, v_4\}$ tenemos que $B = \phi = M$ y de acuerdo al teorema 3.29 $Q_1 = \{v_2, v_4\}$ y $Q_2 = \{a_1, a_3\}$ son cuasinúcleos ajenos de $Q(D)$.

Figura 3.12

Teorema 3.34 [4] *Si D es una digráfica sin pozos y N es núcleo de D, entonces T(D) tiene al menos dos cuasinúcleos ajenos.*

Demostración. Sean D una digráfica sin pozos y N un núcleo de D. Consideremos $T(D)$. Notemos que la idea intuitiva de esta digráfica es agregarle a la digráfica de subdivisión las adyacencias de la digráfica raíz y de su digráfica de líneas.
Con base en lo anterior, demostraremos que N y $\varphi(N)$ son cuasinúcleos ajenos de $T(D)$.
Primero demostraremos que N es cuasinúcleo de $T(D)$.

- Notemos que como N es independiente en D también lo es en $R(D)$ y en $Q(D)$, por lo tanto en $T(D)$.
- Demostraremos que N es cuasiabsorbente. Sea $x \in V(T(D)) - N$. Consideremos los siguientes casos:

  1. $x \in V(D) - N$. Como N es núcleo de D, entonces existe $y \in N$ tal que $(x, y) \in F(D)$. Por definición de $T(D)$ tenemos que $N^+_{T(D)}(x) = N^+_D(x) \cup (\{x\} \times N^+_D(x))$, por lo tanto $(x, y) \in F(T(D))$, es decir, y absorbe a x en $T(D)$.
  2. $x = (u, v) \in F(D)$. Este caso lo dividiremos en otros dos subcasos:
     a) $v \in N$. Veamos que por definición de $T(D)$ tenemos que $(x = (u, v), v) \in F(T(D))$ por lo que v absorbe a x
     b) $v \notin N$. Observemos que por el caso 1, tenemos que existe un $y \in N$ tal que y absorbe a v, por lo que $T = (x = (u, v), v, y)$ es una trayectoria dirigida de longitud dos en $T(D)$, es decir, y cuasiabsorbe a v en $T(D)$.

Juntando todos los casos obtenemos que N es cuasinúcleo de $T(D)$.

Ahora demostraremos que $\varphi(N) \subset F(D)$ es cuasinúcleo de $T(D)$.

- Primero veamos que es un conjunto independiente. Por definición de $T(D)$ tenemos que $N^+_{T(D)}((x, y)) = \{y\} \cup (\{y\} \times N^+_D(y))$, para toda $(x, y) \in \varphi(N)$, notemos que

$$N^+_{T(D)}((x, y)) \supseteq N^+_{L(D)}((x, y)) = \{y\} \times N^+_D(y).$$

  Pero como $\varphi(N) \subset F(D)$ basta con ver que es independiente en $L(D)$, lo que es inmediato por la demostración del teorema 3.23. Por lo tanto, $\varphi(N)$ es independiente en $T(D)$.

- Demostraremos que $\varphi(N)$ es un conjunto cuasiabsorbente de $T(D)$. Sea $x \in V(T(D)) - \varphi(N)$, con lo que tenemos dos casos:

  1. $x \in V(D)$. Este caso lo dividiremos en otros dos subcasos:

a) $x \notin N$. Como N es núcleo de D, existe $w \in N$ tal que $(x, w) \in F(D)$. Notemos que $(x, w) \in \varphi(N)$, además por definición de $T(D)$ se tiene que $(x, (x, w)) \in F(T(D))$, es decir, (x, w) absorbe a x en $T(D)$.

b) $x \in N$. Como D no tiene pozos, entonces $\delta^+(x) \geq 1$, por lo que existe $w \notin N$ tal que $(x, w) \in F(D)$. Como en el subcaso anterior, tenemos que existe $v \in N$ que absorbe a w en D, entonces $(x, (x, w), (w, v))$ es una trayectoria dirigida de longitud dos, es decir, (w, v) cuasiabsorbe a x en $T(D)$.

2. $x = (u, v) \in F(D) - \varphi(N)$. Usando la demostración del teorema 3.23 sabemos que $\varphi(N)$ es un conjunto absorbente de $L(D)$, es decir, $\varphi(N) \cap N^+_{L(D)}(x) \neq \phi$, y como $N^+_{L(D)}(x) \subseteq N^+_{T(D)}(x)$ tenemos que $\varphi(N) \cap N^+_{T(D)}(x) \neq \phi$. En otras palabras existe un elemento en $\varphi(N)$ que absorbe a x.

Juntando los casos anteriores tenemos que $\varphi(N)$ es cuasinúcleo de $T(D)$. Además notemos que como $N \subset V(D)$ y $\varphi(N) \subset F(D)$, junto con el hecho de que $V(D) \cap F(D) = \phi$, tenemos que $N \cap \varphi(N) = \phi$. Por lo tanto, $T(D)$ tiene dos cuasinúcleos ajenos.

□

En la siguiente figura tenemos a las digráficas D (izquierda) y $T(D)$ (derecha), considerando a $N = \{v_2, v_4\}$, entonces por el teorema 3.31 $Q_1 = N = \{v_2, v_4\}$ y $Q_2 = \varphi(N) = \{a_1, a_3\}$ son cuasinúcleos ajenos de $T(D)$.

FIGURA 3.13

Capítulo 4

Conclusiones

Este trabajo se baso en la preguntan *¿Toda digráfica sin pozos, tiene un par de cuasinúcleos ajenos?*, planteada por G. Gutin, K.M. Koh, E.G. Tay y A. Yeo en el artículo *"On the number of quasikernels in digraphs"* [12] del año 2003. Y en los resultados expuestos por S. Heard, J. Huang, S. Zhiren, Miao Xiaoyan, G. Benítez y Laura Pastrana.

Aún quedan muchas preguntas abiertas relacionadas con la existencia de cuasinúcleos ajenos en digráficas, como buscar condiciones ya sean necesarias o suficientes para existencia de éstos, así como encontrar más digráficas con esta propiedad que sean sustancialmente distintas a la construcción de la familia de digráficas dada por G. Gutin, K.M. Koh, E.G. Tay y A. Yeo, pues las que nosotros describimos en la sección 3.5 dependen demasiado de dicha familia, además aún falta demostrar si $T_7 \circ \Theta_7$ es la menor digráfica sin cuasinúcleos ajenos. Ver si se pueden extender las ideas dadas por S. Zhiren y Miao Xiaoyan en [25] al acotar la cardinalidad de los cuasinúcleos de una digráfica. En cuanto al tema de las operaciones sería interesante analizarlas desde el punto de vista opuesto a como se manejaron en este trabajo, es decir, buscar condiciones para las cuales las operaciones de digráficas preserven la propiedad de no tener cuasinúcleos ajenos.
Por último, con base al estudio de los resultados de la sección 3.10 nos formulamos la siguiente pregunta *¿Toda digráfica de líneas tiene cuasinúcleos ajenos?* la cual creemos que es cierta.

Bibliografía

[1] S. Arumugam and K. Raja Chandrasekar, Minimal dominating sets in maximum domatic partitions, *Australian Jounal of Combinatorics* Volume 52 (2012), páginas 281-292, 2012.

[2] C. Balbuena and M. Guevara, Kernels and partial line digraphs, *Applied Mathematics Letters 23*, páginas 1218-1220, 2010.

[3] J. Bang-Jensen and G. Gutin, Digraphs theory, algorithms and applications, *Springer-Verlag*, London, 2007.

[4] G. Benítez Bobadilla, Número semidominante coloreable en digráficas, *Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM*, 2014.

[5] C. Berge, Graphs and Hypergraphs, *North-Holland mathematical library*, 1973.

[6] Warenka Chimal Garma, (k,l)-núcleos en operaciones de digráficas, *Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM*, 2006.

[7] V. Chvátal and L. Lovász, Every directed graph has a semi-kernel, Lecture Notes in Math. 411 (1974) página 175, *Springer*, Berlin.

[8] P. Erdös en, On a problem in graph theory, *The Mathematical Gazette*,Vol. 47, No. 361 (Oct., 1963), páginas. 220-223.

[9] M.A. Fiol and A.S. Lladó, The partial line digraph technique in the design of large interconnection networks, IEEE Trans. Comp. C-41 (1992), páginas 848-857.

[10] R. Frucht and F. Harary, On the corona of two graphs, *Aequations Math.* 4 (1970), páginas 322-324.

[11] Hortensia Galeana-Sánchez, Laura Pastrana y Hugo Rincón, Semikernels, Quasi kernels, and grundy functions in the line digraph. *SIAM J.Discret Math*, Vol. 4, No. 1, (1991), páginas 80-83.

[12] G. Gutin, K.M. Koh, E.G. Tay and A. Yeo, On the number of quasikernels in digraphs, *Journal of Graph Theory*, páginas 49-56 2003.

[13] S. Heard and J. Huang, Quasikernels in Digraphs, *Journal of Graph Theory*, páginas 251-260, 2008.

[14] H. Jacob and H. Meyniel, About quasi-kernels in a digraph, *Discret Math*, 154 (1996), páginas 279-280.

[15] M. Kawaśnik, Monika Perl, Nearly perfect sets in products of graphs, *Opuscula Mathematica*, Vol. 24/2, páginas 177-180 2004.

[16] H.G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies III; the condition for a score structure, *Bulletin of Mathematical Biophyscis*, Volume 15, 1953, páginas 143-148.

[17] J. E. Moo Vergara, Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en la corona generalizada, *Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM*, 2014.

[18] M. Richardson, Solution of irreflexive relations, *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 58, No. 3 (Nov., 1953), páginas. 573-590.

[19] M. del Rocío Sánchez López, H-trayectorias y H-caminos en digráficas H-coloreadas, *Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM*, 2013.

[20] W. Szumny, I. Wloch and A. Wloch, On the existence and on the number of (k, l)-kernels in the lexicographic product of graphs, *Discrete Mathematics*, 308 (2008) páginas 4616-4624.

[21] J. Topp, Kernels of digraphs formed by some unary operations from other digraphs, *J. Rostock Math. Kolloq. 21*, 1982, páginas 73-81.

[22] T. Schjelderup-Ebbe, Bietr ige zum Sozialpsychologie des Haushuhns, *Zeit. /fir Psychologic*, 1922, páginas 225-52.

[23] J. Von Neumann and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, *Princeton University Press*, Princeton 1944.

[24] I. Wloch, On kernels by monochromatic paths in the corona of digraphs, *Central European Journal of Mathematics*, 2008, páginas 537-542.

[25] S. Zhiren and Miao Xiaoyan, Disjoint Quasi-Kernels in Digraphs, *Journal of nanjing normal university, Vol. 28, No. 3*, 2005, páginas 11-14.